



**HAL**  
open science

# Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses: étude par simulation numérique

Gaël Combe

► **To cite this version:**

Gaël Combe. Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses: étude par simulation numérique. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole des Ponts ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00005737

**HAL Id: tel-00005737**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005737>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

# THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27 Juin 2001 par

Gaël COMBE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE  
DES PONTS ET CHAUSSÉES

**Spécialité :** Structures et Matériaux

**Titre :**

Origines géométriques du comportement quasi-statique des  
assemblages granulaires denses : étude par simulations numériques

**Composition du jury :**

MM.	Jack LANIER	Président
	Minh Phong LUONG	Rapporteur
	Farhang RADJAI	Rapporteur
	Jean-Philippe BOUCHAUD	Examineur
	Karam SAB	Examineur
	Michel JEAN	Directeur de thèse
	Jean-Noël ROUX	Conseiller d'étude

Thèse préparée au sein du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris 15<sup>e</sup>.



# La dynamique de Verhulst<sup>1,2</sup>

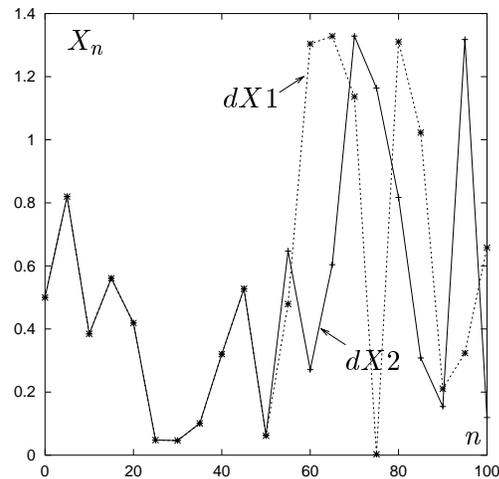
*ou comment perdre les propriétés d'associativité de la multiplication et de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition grâce au calcul numérique, ou comment «relativiser» la puissance de l'outil numérique.*

*L'équation de Verhulst est un modèle dynamique pour la croissance de populations proposé par le mathématicien belge Pierre François Verhulst en 1838.*

$$X_n = (R + 1)X_{n-1} - RX_{n-1}^2$$

*À partir d'une valeur initiale  $X_0$ , cette équation a la particularité de mettre en évidence un comportement «chaotique» dès lors que  $R > 2.57$ . Le calcul numérique de cette équation permet de bien mettre en évidence l'influence des choix effectués lors de «l'écriture informatique». La figure suivante montre les  $X_n$  calculés pour  $1 \leq n \leq 100$ , à partir d'un programme Fortran.*

```
Program Verhulst
Real*8 R,dX1,dX2
R = 3.0
dX1 = 0.5
dX2 = 0.5
Do n = 1,100
  dX1 = (r+1.d0)*dX1 - r*dX1*dX1
  dX2 = r*dX2 + (1.d0 - r*dX2)*dX2
EndDo
End
```



*Pour  $n > 50$ , aucun de ces calculs n'est juste. De plus, ils dépendent de l'ordinateur (architecture du processeur), du langage de programmation et des options d'optimisation utilisées pour la compilation du programme.*

*Pour de plus amples informations sur les problèmes de précision numérique, la page internet de J.-F. Colonna<sup>1</sup> est des plus instructive.*

1. <http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/present.01..html>  
2. <http://www.ircam.fr/equipes/repmus/jim96/actes/malt/malt.html>



# Remerciements

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Paris 15<sup>e</sup>, dans la section «Modélisation Mécanique» de Patrick DANGLA, du service «Modélisation Pour l'Ingénieur» dirigée par Olivier COUSSY. Cette thèse a fait l'objet d'un double financement associant le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

Tout d'abord, je tiens à remercier Jean-Noël ROUX qui a proposé et encadré ce travail. Sa présence, sa disponibilité, sa confiance, ses idées et conseils m'ont été très précieux tout au long de cette thèse. Mes sincères remerciements vont aussi à Michel JEAN qui a accepté d'être mon directeur de thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous les membres du jury. Tout d'abord, au professeur Jack LANIER du Laboratoire Sols-Solides-Structures de Grenoble qui m'a initié à la mécanique des milieux granulaires à l'occasion de mon DEA et qui m'a fait l'honneur et le plaisir d'accepter la présidence de ce jury. Je remercie monsieur Minh Phong LUONG du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique et monsieur Farhang RADJAI du Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil de Montpellier d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse. Leur enthousiasme à l'égard de ce travail a été pour moi une grande motivation. Karam SAB, professeur de l'École Nationale des Ponts et chaussées, m'a fait le plaisir de participer à l'évaluation de mon travail de thèse, qu'il en soit remercié. Enfin, je souhaite témoigner ma gratitude à Monsieur Jean-Philippe BOUCHAUD du CEA pour sa présence. Son aide et ses connaissances dans le domaine statistique, plus particulièrement sur les processus de *Lévy* m'ont été plus que précieuses.

Ce travail de thèse, comme le titre le suggère, est uniquement basé sur l'outil numérique. Un très grand nombre de simulations ont été réalisées, nécessitant une puissance de calcul importante. Je tiens donc à remercier toute l'équipe du service informatique du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, son responsable Jean-Luc BUISSON et ses collaborateurs Jean-Batiste LE GOUGUEC, Yves KARSENTI, Jean-Louis SALHI et Christian JOBIC pour leur disponibilité et pour avoir mis à ma disposition les outils nécessaires à la réalisation de ce travail. Je remercie aussi Cyril BOUVIER de l'Institut National de Recherche sur les Transports et leur Sécurité qui m'a autorisé à utiliser bon nombre de calculateurs afin de

mener à bien mes campagnes de calculs.

Pour finir, il est pour moi très important de remercier ma famille, mes proches, amis et collègues de travail pour leur soutien tout au long de ces trois années de thèse. Une mention particulière va à Severine (bien sûr), Frédéric, Jean-Philippe, Jean-Louis, Patrick et Jean-François qui ont accepté, sans hésitation, de passer quelques heures à lire ce mémoire afin d'en minimiser les fautes de frappe. Merci à vous tous.

# Résumé

Nombre de travaux de recherche actuels visent à élucider les origines microscopiques du comportement mécanique macroscopique des matériaux granulaires au moyen de la simulation numérique discrète. La présente thèse s'inscrit dans ce mouvement, qui associe mécaniciens des sols et physiciens de la matière condensée. Nous étudions le comportement mécanique de matériaux modèles, assemblages de disques rigides ou quasi-rigides, sous chargement biaxial. Les matériaux granulaires proches de l'équilibre sont généralement assimilés à des solides. Ils sont traditionnellement modélisés par les lois élasto-plastiques de la mécanique des sols. Ces dernières sont indépendantes du temps physique et traduisent une description quasi-statique du mouvement. Une telle description n'émerge pas facilement des approches numériques discrètes fondées sur des modèles dynamiques. C'est pourquoi nous avons mis au point deux nouvelles approches numériques, la méthode numérique quasi-statique (dédiée aux disques non frottants) et une méthode de calcul statique élasto-plastique (pour les réseaux de contacts frottants). Ces démarches, comparées à la dynamique moléculaire, permettent la détermination précise des états d'équilibre successifs d'assemblages granulaires sous chargement variable. On peut ainsi donner un sens microscopique aux descriptions quasi-statiques, évaluer l'influence des paramètres dynamiques sur le comportement simulé et identifier les mécanismes élémentaires responsables de la déformation macroscopique.



# Summary

Understanding the microscopic origins of the macroscopic mechanical behaviour of granular materials, either in static or quasi-static mode, is currently an important research topic in soil mechanics and condensed matter physics. The numerical simulation is an essential tool in the study of granular media behaviour because it can provide important information at a granular scale, on the mechanisms of strain and stress. In this thesis, we study the mechanical behaviour of model granular media, rigid or quasi-rigid discs, under biaxial loading. When granular materials are at equilibrium, they can be regarded as solids. They are traditionally modelised by soil mechanics elastoplastic laws, which are independent of physical time and correspond to a quasi-static description of the motion. Such descriptions do not easily emerge from discrete simulations, which are usually based on dynamic equations. Consequently, we propose two new numerical approaches: the geometric quasi-static method (frictionless grains) and a static elastoplastic calculation method (discs with friction). Without inertia and dissipation descriptions (other than friction), these two methods, compared with the molecular dynamics method, allow a very precise determination of sequences of equilibrium states. In that way, we provide a macroscopic sense of quasi-static descriptions, quantify the influence of dynamic models on numerical results and identify the elementary mechanisms at the origin of macroscopic deformation.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>1 Comportements quasi-statiques des milieux granulaires, expériences et simulations numériques</b>	<b>29</b>
Introduction . . . . .	29
1.1 Comportements quasi-statiques et expériences . . . . .	30
1.2 Les méthodes de simulations numériques . . . . .	35
1.2.1 Dynamique Moléculaire ( <i>DM</i> ) . . . . .	36
1.2.2 Dynamique des Contacts ( <i>DC</i> ) . . . . .	40
1.3 Comportements quasi-statiques et simulations numériques . . . . .	44
Objet de l'étude . . . . .	50
<b>2 Préparation des assemblages granulaires par compactage</b>	<b>51</b>
Introduction . . . . .	51
2.1 Propriétés du modèle d'assemblage granulaire étudié . . . . .	57
2.2 Compression isotrope des assemblages . . . . .	59
2.3 Caractérisation microscopique des assemblages sous confinement isotrope . . . . .	63
2.3.1 Étude de la compacité . . . . .	63
2.3.2 Étude statistique des forces de contact . . . . .	65
2.3.3 Répartition des contraintes dans les assemblages sous chargement isotrope . . . . .	72
2.3.4 Étude des orientations de contact . . . . .	75
2.4 Remarques sur la densification par chargement cyclique . . . . .	77
Conclusion . . . . .	80
<b>3 Origine géométrique du comportement mécanique des assemblages granulaires denses sans frottement, <i>Méthode Géométrique Quasi-Statique</i></b>	<b>83</b>
Introduction . . . . .	83
3.1 Notations et définitions . . . . .	84
3.2 Isostaticité des assemblages de disques non frottants et sans cohésion	90
3.3 Assemblages de disques non frottants à l'équilibre . . . . .	91

3.3.1	Stabilité et minimum local de l'énergie potentielle . . . . .	91
3.3.2	Calcul géométrique des forces intergranulaires . . . . .	92
3.3.3	Notion de plage de chargement extérieur supporté . . . . .	95
3.4	Chargement extérieur non supporté, rupture de l'équilibre . . . . .	99
3.4.1	Calcul des vitesses . . . . .	99
3.4.2	Quelques exemples de vitesses . . . . .	103
3.4.3	Étude statistique des vitesses à la rupture . . . . .	105
3.5	Trajectoires quasi-statiques, introduction à l'aide d'un modèle simplifié . . . . .	106
3.6	<i>MGQS</i> : Méthode Géométrique Quasi-Statique . . . . .	111
3.6.1	Présentation succincte . . . . .	111
3.6.2	<i>Mise en conformité</i> des interstices entre les particules . . . . .	112
3.6.3	Recherche de la structure isostatique par détection des contacts, particules actives et passives . . . . .	113
3.6.4	Calcul <i>implicite</i> des vitesses des particules actives . . . . .	113
3.6.5	Calcul des vitesses des particules passives . . . . .	119
3.6.6	Schéma algorithmique de la <i>MGQS</i> . . . . .	121
	Conclusion . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Trajectoires quasi-statiques des assemblages granulaires sans frottement dans le cas de la compression biaxiale à contraintes contrôlées</b>	<b>123</b>
	Introduction . . . . .	123
4.1	Schéma de principe de l'essai biaxial . . . . .	124
4.2	Exemples de simulations de compressions biaxiales obtenues par la <i>MGQS</i> . . . . .	125
4.2.1	Compression biaxiale d'un assemblage de 1024 particules . . . . .	125
4.2.2	Exemple de charge-décharge sur un assemblage constitué de 4900 disques . . . . .	128
4.2.3	Exemples de comportements macroscopiques pour 4 tailles d'échantillons . . . . .	128
4.3	Étude statistique du comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes . . . . .	130
4.3.1	Analyse statistique des incréments de déviateur $\delta q$ . . . . .	130
4.3.2	Analyse statistique des incréments de déformation $\delta\epsilon_y$ . . . . .	133
4.3.3	Théorème généralisé de la limite centrale et processus de Lévy . . . . .	138
4.3.4	Comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes et processus de Lévy . . . . .	140
4.3.5	Incréments de déformation et variation de volume . . . . .	146
4.3.6	Incréments de déformation et hypothèse des petites perturbations . . . . .	148
4.3.7	Observations micromécaniques, <i>MGQS</i> . . . . .	150
4.3.8	Quelques remarques complémentaires d'ordre macroscopique . . . . .	156

Conclusion . . . . .	159
<b>5 Trajectoires quasi-statiques de milieux granulaires frottants sous chargement biaxial</b>	<b>161</b>
Introduction . . . . .	161
5.1 Propriétés du modèle granulaire étudié et méthodes numériques mises en œuvre . . . . .	162
5.2 Exemples de comportements macroscopiques sous chargement biaxial	165
5.3 Comportement quasi-statique pour les déformations faibles . . . . .	167
5.3.1 Calculs statique et dynamique, comparaisons à l'échelle macroscopique . . . . .	167
5.3.2 Calculs statique et dynamique, comparaisons à l'échelle microscopique . . . . .	169
5.3.3 Synthèse de l'étude comparative . . . . .	172
5.4 Comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes .	174
5.4.1 Régime quasi-statique au sens strict . . . . .	174
5.4.2 Régime de réarrangements . . . . .	179
Conclusion . . . . .	182
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>183</b>
<b>Annexe A</b>	<b>187</b>
<b>Références</b>	<b>191</b>



## Notations principales

$HPP$	Hypothèse des Petites Perturbations
$DM$	Dynamique Moléculaire
$DM_{HPP}$	Dynamique Moléculaire avec l' $HPP$
$DC$	Dynamique des Contacts
$DGL$	Dynamique Granulaire Lubrifiée
$MGQS$	Méthode Géométrique Quasi-Statique
$CSEP$	Calcul Statique Élasto-Plastique
$K.-S.$	Test de vraisemblance de Kolmogorov et Smirnov [84]
$P_{K.-S.}$	Indice de vraisemblance du test de $K.-S.$
$k_n$	Raideur normale dans un contact ( $DM$ )
$k_t$	Raideur tangentielle dans un contact ( $DM$ )
$\tan \varphi$	Coefficient de frottement entre deux particules
$\mu$	Paramètre associé aux processus de <i>Lévy</i>
$p$	Contrainte de chargement isotrope
$q$	Déviateur de contrainte
$\epsilon_y$	Déformation verticale ou axiale
$\epsilon_v$	Déformation volumique
$\delta q$	Incrément de déviateur élémentaire
$\delta \epsilon_y$	Incrément de déformation vertical ou axial élémentaire
$\delta \epsilon_v$	Incrément de déformation volumique élémentaire
$\Delta q$	Incrément de déviateur imposé (constant)
$\Delta \epsilon_y$	Incrément de déformation lié à $\Delta q$



# Table des figures

1.1	L'essai triaxial de révolution, schéma de principe et comportement typique (sable dense) . . . . .	30
1.2	Essais triaxiaux drainés sur des assemblages de billes de verre. (a)- Échantillon dense, Kim [50]. (b)- Échantillon lâche, Elie [36] . . . .	32
1.3	Essai triaxial à contraintes imposées sur sable d'Hostun RF : histoire du chargement au cours du temps. Di Prisco et Imposimato [32] . .	33
1.4	Essai triaxial à contraintes imposées sur sable d'Hostun RF : courbe $q - \epsilon$ . Di Prisco et Imposimato [32] . . . . .	33
1.5	Essai triaxial à vitesse de déformation imposée et phases de fluage : évolution de $\sigma_1$ au cours du temps. Di Benedetto et Tatsuoka [31] .	34
1.6	Essai triaxial à vitesse de déformation imposée et phases de fluage : évolution de $\epsilon_1$ au cours du temps. Di Benedetto et Tatsuoka [31] .	34
1.7	Essai triaxial à vitesse de déformation imposée et phases de fluage : courbe $q - \epsilon$ . Di Benedetto et Tatsuoka [31] . . . . .	35
1.8	<i>Dynamique Moléculaire</i> : loi de contact pour les efforts normaux, modèle rhéologique de <i>Kelvin-Voigt</i> . . . . .	37
1.9	<i>Dynamique Moléculaire</i> : loi de contact pour les efforts normaux, modèle à hystérésis de Walton et Braun [108] . . . . .	38
1.10	<i>Dynamique Moléculaire</i> : modèle de loi de contact tangentielle incrémentale, Cundall et Strack [27] . . . . .	39
1.11	<i>Dynamique des Contacts</i> : lois de contact normales et tangentielles .	42
1.12	<i>Dynamique des Contacts</i> : diagramme de synthèse . . . . .	43
1.13	<i>Dynamique Moléculaire</i> : influence des rigidités normales sur des simulations d'essais biaxiaux . . . . .	46
1.14	<i>Dynamique Moléculaire</i> : influence des rigidités normales sur les déviateurs et variations de volume pour $0 \leq \epsilon_y \leq 0.02$ . . . . .	47
1.15	<i>Loi de contact</i> : graphe de <i>Signorini</i> . . . . .	49
2.1	Empilement de 722 rouleaux de <i>Schneebeli</i> déposés sous gravité et confinés par une pression isotrope : histogramme des orientations de contact. Combe [22] . . . . .	52

2.2	<i>Dynamique des Contacts</i> : empilement de 3000 grains polygonaux déposés sous gravité : histogramme des orientations de contact. Moreau [67] . . . . .	53
2.3	<i>Dynamique Moléculaire</i> : histogramme des orientations de contact d'empilements de 9801 disques polydisperses fabriqués par sédimentation . . . . .	54
2.4	Densification de matériaux granulaires : (a)- Essai avec rotation des axes principaux (rouleaux de Schneebeli). Joer [47] (b)- Essai d'extension-compression avec permutation des axes principaux de contraintes. (sable). Flavigny et Lanier [39] . . . . .	55
2.5	Configuration des parois . . . . .	58
2.6	<i>Dynamique des Contacts</i> : (a) génération et (b) préparation d'un assemblage de $N = 1024$ particules avant compression isotrope . . .	60
2.7	<i>Dynamique des Contacts</i> : configurations géométriques à différentes étapes de la compression isotrope. Étape (b) . . . . .	60
2.8	<i>Dynamique des Contacts</i> : configurations géométriques à différentes étapes de la compression isotrope. Étapes (c), (d), (e) et (f) . . . .	61
2.9	<i>Dynamique Granulaire Lubrifiée</i> : carte des forces de contact dans un assemblage de 3025 disques sous confinement isotrope . . . . .	62
2.10	Schéma d'illustration de l'influence locale des parois sur la compacité . . . . .	63
2.11	Schéma d'illustration de l'effet de peau lors de l'évaluation de la compacité . . . . .	64
2.12	Évolution de la compacité en fonction de la taille $N$ des systèmes .	65
2.13	Influence de la taille $N$ des assemblages sur les moyennes des forces normales de contact . . . . .	67
2.14	Schéma de principe du test de <i>Kolmogorov et Smirnov</i> . . . . .	68
2.15	Densités de probabilité des forces de contact situées loin des parois .	70
2.16	Densité de probabilité des forces de contact proches des parois . . .	71
2.17	Schéma du découpage des assemblages par couronnes . . . . .	72
2.18	Densité de contacts pour chaque couche de grains . . . . .	73
2.19	$\sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy}$ moyens par couche pour les 4 tailles d'assemblages . . . .	74
2.20	Voir légende fig. 2.21. . . . .	75
2.21	Histogramme des orientations de contact pour 4 tailles d'assemblages . . . . .	76
2.22	Histogramme des orientations de contact : distinction entre les contacts portant des grandes forces et des petites forces . . . . .	77
2.23	Effets des cycles de chargement sur l'homogénéité des assemblages : répartition des contraintes . . . . .	78
2.24	Effets des cycles de chargement sur l'homogénéité des assemblages : histogramme des orientations de contact . . . . .	79
2.25	Schéma de la dernière étape du chargement cyclique . . . . .	80

3.1	Assemblage de 3 disques soumis à des forces extérieures . . . . .	86
3.2	Particule soumise à deux forces extérieures . . . . .	95
3.3	Petit assemblage soumis à un déviateur de contrainte . . . . .	96
3.4	Exemples de particules trivalentes portant des forces nulles suite à un incrément de déviateur . . . . .	99
3.5	Carte locale du vecteur vitesse dans le cas d'un amas de particules trivalentes . . . . .	100
3.6	Carte des vitesses des particules à la rupture de l'équilibre d'un assemblage de 1024 grains . . . . .	103
3.7	Carte des vitesses des particules à la rupture de l'équilibre d'un assemblage de 4900 grains . . . . .	104
3.8	Agrandissement de la figure 3.7 . . . . .	104
3.9	Densité de probabilité de $v^2$ pour 4 tailles d'assemblages . . . . .	106
3.10	Petit assemblage de particules rigides, sans frottement et sans cohésion . . . . .	107
3.11	(a)- Trajectoire du centre de la particule. (b)- Trajectoire du centre de la particule et lignes équipotentielles. . . . .	108
3.12	Chemin de sollicitation en charge et décharge entre les deux états d'équilibre A et B . . . . .	109
3.13	Particule rigide soumise à un chargement extérieur . . . . .	110
3.14	Histoire du chargement appliqué à la particule au cours de son déplacement du site $A$ au site $C$ puis pour revenir au point initial $A$ . . . . .	110
3.15	Trajectoires d'une particule en fonction de la méthode de calcul utilisée pour déterminer les vitesses . . . . .	114
3.16	Différents types d'amas passifs . . . . .	120
3.17	Schéma algorithmique de la $MGQS$ . . . . .	121
4.1	Schéma de principe de l'essai biaxial. . . . .	124
4.2	$MGQS$ : courbe $q - \epsilon_y$ d'un assemblage de 1024 particules sous chargement biaxial . . . . .	125
4.3	Cartes des contacts perdus et gagnés entre deux états d'équilibre . . . . .	126
4.4	Cartes des déplacements $\vec{u}_i$ entre deux états d'équilibre . . . . .	127
4.5	Cartes des déplacements $\vec{u}_i$ entre deux états d'équilibre . . . . .	127
4.6	$MGQS$ : décharges au cours d'un essai biaxial . . . . .	128
4.7	Exemples de courbes macroscopiques pour 4 tailles d'assemblages . . . . .	129
4.8	Corrélations entre $\delta q$ et $q$ . . . . .	130
4.9	Densité de probabilité des incréments de chargement $\delta q$ pour 4 tailles d'assemblages . . . . .	131
4.10	Moyenne $\delta q_m(N)$ et écart type $\sigma_{\delta q}(N)$ des $\delta q$ en fonction de la taille des assemblages . . . . .	132
4.11	Corrélations entre $q$ et $\delta \epsilon_y$ . . . . .	134
4.12	Corrélations entre $\delta q$ et $\delta \epsilon_y$ . . . . .	135

4.13	Corrélations entre $\epsilon_y$ et $\delta\epsilon_y$ . . . . .	136
4.14	Densité de probabilité des incréments $\delta\epsilon_y$ . . . . .	137
4.15	Simulation de processus de Lévy pour différentes valeurs de $\mu$ . . . . .	140
4.16	Sommation des incréments de déformation $\delta\epsilon_y$ . . . . .	141
4.17	Densité de probabilité des incréments de déformation sommés, <i>MGQS</i> et <i>DM</i> . . . . .	143
4.18	$\alpha = \beta \cdot \mu$ . . . . .	145
4.19	Courbes de variation de volume typique obtenues par compression triaxial drainé sur sable saturé . . . . .	146
4.20	Corrélations entre $\delta\epsilon_y$ et $\delta\epsilon_v$ . . . . .	147
4.21	Exemple d'un petit empilement de grains sur réseau . . . . .	148
4.22	Densités de probabilité des incréments de déformation calculés en faisant l'hypothèse des petites perturbations . . . . .	149
4.23	Moyenne $\langle \delta\epsilon_y^{HPP}(N) \rangle$ en fonction de la taille $N$ des assemblages . . . . .	150
4.24	Évolution du nombre moyen de contacts au cours des essais biaxiaux . . . . .	151
4.25	Analyses statistiques des contacts perdus et gagnés entre deux états d'équilibre successifs . . . . .	152
4.26	Histogramme des orientations des contacts perdus et gagnés . . . . .	153
4.27	Histogramme des orientations du <i>premier</i> contact ouvert à la rup- ture de l'équilibre suite à l'augmentation du déviateur de $\delta q$ . . . . .	154
4.28	Évolution des orientations de contact entre l'état isotrope et $q =$ $q_{max}$ . . . . .	155
4.29	Nombre $n_f$ de contacts perdus ou gagnés portant des forces de contacts supérieures à la moyenne locale des forces de contact en fonction de $\delta\epsilon_y$ . . . . .	156
4.30	Densité de probabilité des incréments $\delta\epsilon_y^{3D}$ . . . . .	158
4.31	Courbes $(q - \epsilon_y)$ d'essais biaxiaux à chargements imposés $\Delta q =$ $1 \cdot 10^{-3}$ , <i>Dynamique Moléculaire</i> . . . . .	159
5.1	<i>CSEP</i> : projection locale sur le cône de Coulomb suivant une règle d'écoulement non associée ou associée . . . . .	165
5.2	Exemples de comportement pour deux échantillons comprenant 1024 et 3025 particules. Essai biaxial à déviateur imposé . . . . .	166
5.3	<i>CSEP - DM</i> : compression biaxiale à chargement imposé d'un as- semblage de 1024 disques frottants . . . . .	168
5.4	<i>CSEP - DM</i> : compression biaxiale à vitesse de déformation imposée d'un assemblage de 4900 disques frottants . . . . .	168
5.5	Échantillon de 49 particules, compacté sans frottement : carte des forces normales de contact . . . . .	170
5.6	(a)- Carte des différences des intensités des forces $f_n^{DMHPP}$ entre $q = 0$ et $q = 0.81$ . (b)- Carte des $\Delta f_n =  f_n^{DMHPP} - f_n^{CSEP} $ . . . . .	170
5.7	Carte des $\odot\odot$ calculés par la <i>DMHPP</i> à $q = 0.81$ . (b)-Carte des différences absolues $\Delta\odot\odot =  \odot\odot^{DMHPP} - \odot\odot^{CSEP} $ à $q = 0.81$ . . . . .	171

5.8	Mise en évidence de l'influence de $k_n$ sur les déformations macroscopiques . . . . .	173
5.9	Évolution de $\langle q_1 \rangle$ en fonction de la taille $N$ des assemblages . . . . .	175
5.10	Plages moyennes de déviateur conduisant à des déformations réversibles dans les contacts, en fonction de la taille $N$ des assemblages . . . . .	176
5.11	Mise en évidence de l'influence du rapport $k_t/k_n$ sur le calcul des déformations macroscopiques . . . . .	177
5.12	Courbes moyennes pour 3 tailles d'assemblages . . . . .	178
5.13	(a)- Courbes $q - \epsilon_y$ et $\epsilon_v - \epsilon_y$ d'un assemblage à 3025 grains sous chargement biaxial à vitesse de déformation imposée. (b)- évolution du degré d'hyperstaticité $h$ en fonction de $\epsilon_y$ et proportion de contacts glissant . . . . .	179
5.14	Histogrammes des orientations de contact . . . . .	180
5.15	Courbes moyennes pour 3 tailles d'assemblages . . . . .	181



# Liste des tableaux

1.1	Quelques valeurs de $\kappa$ relevées dans la littérature. . . . .	45
2.1	Nombre de forces de contact dans les ensembles $\mathcal{F}_N^{\setminus p}$ et $\mathcal{F}_N^p$ pour chaque taille $N$ d'assemblage. . . . .	67
4.1	Nombre d'incréments de déformation par taille et par méthode de calcul. . . . .	143
5.1	$\langle q_1 \rangle$ calculés sur 26 assemblages à 1024 particules, 10 à 3025 particules et 6 assemblages à 4900 particules. . . . .	174
5.2	$\langle q_1 \rangle$ en fonction de $\tan \varphi$ et $k_t/k_n$ , calculé à partir de 26 configurations à 1024 particules chacune. . . . .	177



# Introduction

La compréhension des origines microscopiques, à l'échelle du grain, des comportements mécaniques macroscopiques des matériaux granulaires, en régime statique ou quasi-statique, fait actuellement l'objet d'un important effort de recherche, aussi bien dans les communautés des mécaniciens du solide et des mécaniciens des sols [73, 81] que dans celle des physiciens de la matière condensée [11, 42]. À l'échelle macroscopique, on utilise pour décrire la rhéologie de ces matériaux la mécanique des milieux continus. Les lois de comportement qui en résultent sont phénoménologiques et nécessitent l'introduction de variables internes dont le sens physique est souvent difficile à préciser. À l'échelle des grains, les variables locales sont au contraire *évidentes* (structure décrite par la forme des grains, nombre et orientation des contacts, déplacement et rotation des grains, forces de contact, ...). D'un point de vue expérimental, l'étude des milieux granulaires à l'échelle microscopique s'est largement répandue via la modélisation bidimensionnelle des sols par des empilements de cylindres appelés matériaux de *Schneebeli* [98]. En 1957, Dantu [28, 29] fut l'un des premiers à mettre en évidence la grande hétérogénéité des chaînes de forces au sein d'un empilement de rouleaux photoélastiques. Pendant de nombreuses années, l'étude des origines microscopiques du comportement macroscopique des milieux granulaires a principalement été réduite aux mécanismes de déformation. Bien que les matériaux dits de *Schneebeli* aient été et restent encore très largement utilisés [2, 14, 29, 30, 37, 48, 47, 51], les progrès de l'informatique de ces 30 dernières années ont largement contribué à l'avancée des connaissances sur les milieux granulaires. Cundall [26] proposa en 1971 une approche numérique fondée sur l'intégration numérique de la relation fondamentale de la dynamique dans le but d'étudier les trajectoires de chute de blocs rocheux. Quelques années plus tard, Cundall et Strack [27] proposeront la description d'une méthode<sup>3</sup> dédiée aux milieux granulaires, intégrant des lois de contacts intergranulaires élastiques avec frottement de *Coulomb* afin de simuler des expériences réalisées sur des assemblages de rouleaux. De par la richesse des informations qu'elle fournit, à l'échelle granulaire, sur les mécanismes de déformation et sur la répartition des efforts, la simulation numérique est un outil essentiel dans l'étude du comportement des milieux granulaires. À ce jour, plusieurs types d'approches ont été proposés. Parmi toutes les méthodes numériques dédiées aux éléments distincts, on peut au moins

---

3. Programmes BALL et TRUBAL.

citer les deux méthodes les plus pratiquées : la *Dynamique Moléculaire (DM)* et la *Dynamique des Contacts (DC)* [45, 46]. Malgré ses succès, l’approche numérique se trouve confrontée à au moins deux sérieuses difficultés. La première est d’ordre technique. Il s’avère souvent délicat d’obtenir des états d’équilibre avec une précision suffisante pour que la topologie du réseau des contacts soit totalement déterminée. Un second problème, plus fondamental, est lié à la mauvaise connaissance des lois qui régissent la dynamique des grains. Les dynamiques mises en œuvre dans les différentes méthodes de simulation contiennent toutes des ingrédients arbitraires, dont le choix résulte de compromis entre le *réalisme* du modèle et la commodité des calculs. Forts de ce constat, nous proposons une nouvelle approche numérique fondée sur les propriétés d’isostaticité [41, 68, 78, 94, 106] des assemblages de disques rigides polydispersés, sans frottement et sans cohésion. Cette approche, la *Méthode Géométrique Quasi-Statique*, exempte d’inertie, de mécanismes de dissipation et purement géométrique, va nous permettre de répondre aux interrogations suivantes : Existe-t-il ou est-il possible de mettre en évidence des évolutions quasi-statiques *au sens strict du terme* (suite continue d’états d’équilibre traduisant un comportement mécanique indépendant du temps physique) dans les milieux granulaires denses ? Dans la limite des grands systèmes, existe-t-il une loi de comportement limite pour un modèle d’assemblage donné ? Au cours d’essais mécaniques sur ces assemblages de particules, quelles sont les origines microscopiques des déformations macroscopiques ? Quelle est l’importance relative de la déformation des grains et des réarrangements dans les déformations macroscopiques mesurées ? Concernant les méthodes numériques *classiques (DM, DC)*, quelles sont les influences des modèles de dynamique sur les résultats de simulations ?

Afin de donner des éléments de réponse à ces questions, le comportement d’assemblages granulaires denses sera étudié dans le cadre de la compression biaxiale à chargement imposé. Dans un premier temps, les essais mécaniques seront réalisés sur un modèle d’assemblage constitué de disques rigides indéformables et sans frottement solide. Par la suite, le modèle sera rendu plus réaliste par la prise en compte du frottement intergranulaire.

Au cours de la première partie de ce mémoire de thèse, on présentera des travaux expérimentaux qui mettent en évidence la difficulté à respecter les conditions de transformations quasi-statiques. Nous aborderons ensuite les aspects numériques par la présentation des caractéristiques principales de différentes méthodes de simulation dédiées aux milieux granulaires ainsi que les difficultés liées à ces approches.

La préparation des assemblages granulaires par compactage est une étape indispensable dont la complexité est manifeste et malheureusement trop rarement évoquée dans la littérature. Après avoir répertorié différents processus opératoires aussi bien expérimentaux que numériques, qui ont pour but de densifier les milieux gra-

nulaires, dans le second chapitre, nous donnerons les principales caractéristiques des assemblages granulaires étudiés. On présentera alors les choix et compromis qu'il est nécessaire de faire afin de satisfaire au mieux les conditions d'homogénéité et d'équilibre des configurations compactées par des pressions de confinement isotropes.

La troisième partie de ce rapport sera consacrée à la présentation de la propriété d'isostaticité des assemblages de disques en l'absence de frottement solide. Un modèle granulaire minimaliste, traité géométriquement, introduira les principes et concepts mis en œuvre dans la *Méthode Géométrique Quasi-Statique* qui sera présentée dans la foulée.

Le quatrième chapitre concernera l'étude mécanique du modèle granulaire présenté au chapitre 2 par le biais de simulations de compressions biaxiales à chargement imposé. Les tests biaxiaux seront réalisés à l'aide de la *Méthode Géométrique Quasi-Statique* et de la méthode *Dynamique Moléculaire*. Des études statistiques systématiques des résultats de simulations de différentes tailles d'assemblages nous permettront d'extrapoler nos résultats à la limite des grands systèmes et de répondre ainsi aux différentes interrogations évoquées dans cette introduction.

Pour finir, la prise en compte du frottement intergranulaire permettra, par la comparaison entre une méthode de simulation dynamique (*Dynamique Moléculaire*) et une méthode de calcul statique élasto-plastique proposée par Bourada [12], de mettre en évidence l'existence d'un régime de déformation strictement quasi-statique et d'un second régime, qui alterne états d'équilibre et phases de réarrangement, semblable à celui observé en l'absence de frottement.

Enfin, nous concluerons sur les résultats obtenus et les possibles extensions de ces travaux.



# Chapitre 1

## Comportements quasi-statiques des milieux granulaires, expériences et simulations numériques

### Introduction

Parmi les nombreux essais mécaniques dédiés à l'étude de la rhéologie des sols, l'essai triaxial de révolution est peut-être celui qui est le plus souvent mis en œuvre en laboratoire. Cet essai consiste à soumettre une éprouvette de sol, saturée en eau<sup>1</sup>, à un état de contrainte homogène  $\sigma_3$  (ou contrainte de confinement) et à une contrainte axiale (ou verticale)  $\sigma_1$  appliquée par l'intermédiaire d'un piston (fig. 1.1(a), page 30). Dans sa version la plus classique, l'expérimentateur fait croître  $\sigma_1$  en imposant une vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_1$  constante jusqu'à la rupture de l'éprouvette,  $\sigma_3$  restant constante. L'essai triaxial est dit *drainé* lorsque les mouvements d'eau<sup>2</sup> entre l'échantillon de sol et l'extérieur de l'enceinte triaxiale sont possibles. Dans les milieux saturés, ces échanges d'eau permettent de mesurer la variation de volume  $\epsilon_v$  de l'échantillon au cours de l'essai (fig. 1.1(b), page 30).

Le comportement mécanique macroscopique mesuré est censé être indépendant de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_1$  ainsi qu'être identique à  $\dot{\epsilon}_1$  imposée ou à déviateur  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  croissant par paliers<sup>3</sup>. D'un point de vue pratique, il est de coutume d'exercer des vitesses de sollicitation faibles afin de pouvoir considérer l'évolution des échantillons comme étant constituée d'une suite d'états d'équilibre infiniment voisins (une évolution *quasi-statique*).

Dans le cadre de l'étude des matériaux granulaires, les chercheurs se sont orientés depuis de nombreuses années vers la compréhension des comportements macroscopiques par l'étude des phénomènes physiques à l'échelle microscopique (échelle

---

1. ou parfaitement sèche.

2. ou d'air pour matériaux sec.

3. Essai triaxial à chargement imposé.

des grains). Dans la communauté des mécaniciens des milieux granulaires, certains se sont employés à développer des théories dites d'*homogénéisation* (Cambou [16] et coll. [17, 18], Caillerie [13], Sab [95]). Ces techniques mettent en pratique des lois de passage *micro-macro*, passage du comportement à l'échelle du grain au comportement à l'échelle de l'assemblage des grains. Ces théories font systématiquement référence aux suites *continues* d'états d'équilibre et par conséquent, au caractère strictement quasi-statique du comportement des sols.

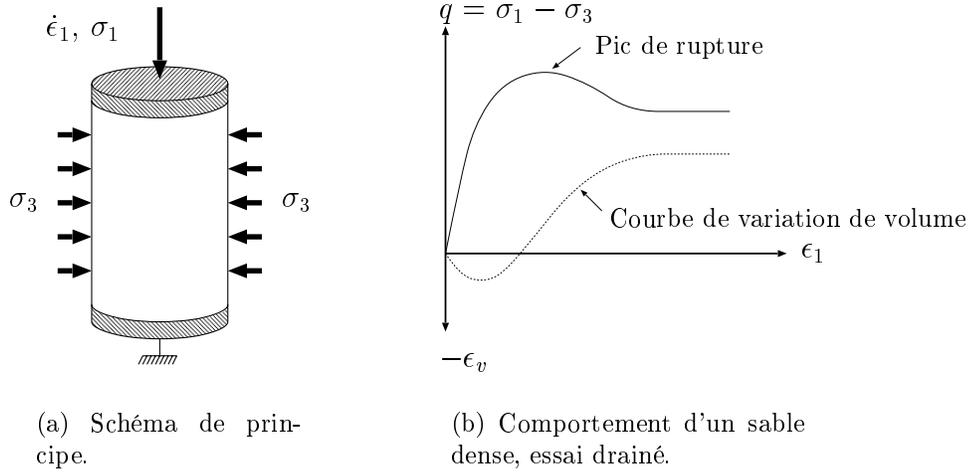


FIG. 1.1 – L'essai triaxial de révolution.

De par leur capacité à fournir des informations aussi bien à l'échelle des grains qu'à l'échelle des échantillons, les méthodes numériques dédiées aux milieux granulaires sont sans équivalent pour l'étude et la compréhension du comportement de ces milieux hétérogènes. Néanmoins, ces méthodes numériques, fondées sur la discrétisation des équations de la dynamique, rencontrent certaines difficultés à mettre en évidence les comportements quasi-statiques généralement observés sur les sables. Mais comme nous allons maintenant le voir, l'étude expérimentale des milieux granulaires modèles (matériaux de *Schneebeli*, billes de verres, ...) ou naturels (sables, graves, ...) ne met pas toujours en évidence des comportements strictement quasi-statiques.

## 1.1 Comportements quasi-statiques et expériences

Initialement proposée en 1956 par *G. Schneebeli* [98], la modélisation bidimensionnelle des sols par des empilements de cylindres<sup>4</sup> a permis d'explorer le comportement des milieux granulaires à l'échelle microscopique. Encore largement

<sup>4</sup> Cylindres à section circulaire ou ovale, généralement en duralumin ou en PVC, de 2 à 30mm de diamètre et 40 à 60mm de long.

appliquée en géomécanique<sup>5</sup>, l'idée d'une modélisation bidimensionnelle des sols est souvent reprise dans le cadre de la simulation numérique des milieux granulaires. Malheureusement, les courbes de comportements mécaniques obtenues par simulations numériques<sup>6</sup> sur des assemblages 2D - qui ne prennent en compte qu'exceptionnellement plus de 10000 grains - sont généralement très bruitées. Mais de ce strict point de vue, comme nous allons maintenant le voir, il semble que ce constat ait également été fait par certains expérimentateurs.

Évesque et coll. [37] ont observé des variations brutales du déviateur de contrainte  $q$  lors d'essais de compression biaxiale à  $\epsilon_1$  imposée sur des assemblages de 1000 à 3000 rouleaux en duralumin. En multipliant les essais, Évesque et ses collaborateurs ont constaté que ces phénomènes de «sauts» de contrainte n'étaient pas reproductibles et qu'ils pouvaient, par conséquent, être qualifiés d'aléatoires. Ces résultats expérimentaux ont conduit leurs auteurs à imputer au caractère bidimensionnel du matériau étudié ces fluctuations de  $q$ , allant jusqu'à craindre une amplification de ces dernières dans la limite des grands systèmes. Bien que personne ne puisse nier l'existence de telles fluctuations pour de petits empilements, les conclusions alarmistes d'Évesque et de ses collaborateurs sont indirectement en opposition avec les expériences de Joer [47] et coll. [48] sur des assemblages de plus de 50000 rouleaux. Bien que les courbes  $q - \epsilon_1$  ne soient pas exemptes de fluctuations, les variations brutales tant redoutées par Évesque et ses collaborateurs ne sont pas observées par Joer. Par ailleurs, les travaux de Kim [50] et de Elie [36] ont montré que des échantillons *tridimensionnels* de billes de verre sous chargement triaxial pouvaient eux aussi montrer des comportements fortement bruités (fig. 1.2(a) et 1.2(b), page 32).

Les différents résultats évoqués précédemment montrent que le comportement de certains milieux granulaires modèles est loin d'être assimilables à des suites continues d'états d'équilibre. Conclure que ces assemblages denses modélisent bien mal les sables non cohésifs serait malgré tout une erreur. Les expériences de Kim [50] comme celles de Joer [47] semblent indiquer que dans la partie initiale du comportement (début des courbes  $q - \epsilon_1$ ), correspondant à la phase contractante des échantillons, les comportements sont relativement analogues à ceux observés pour les sables<sup>7</sup>. Néanmoins, même si les comportements observés<sup>7</sup> sur les sables secs ou saturés semblent dénués de sauts de contrainte, on ne peut exclure le fait que les temps de réaction des systèmes d'asservissement et les rigidités des dispositifs expérimentaux puissent jouer un rôle *régularisant* sur les mesures de contrainte et de déformation.

---

5. Étude de problèmes plans comme par exemple les mécanismes de rupture de massif.

6. Tests biaxiaux, cisaillements simples, etc ...

7. Essais triaxiaux drainés, à  $\epsilon_1$  imposée.

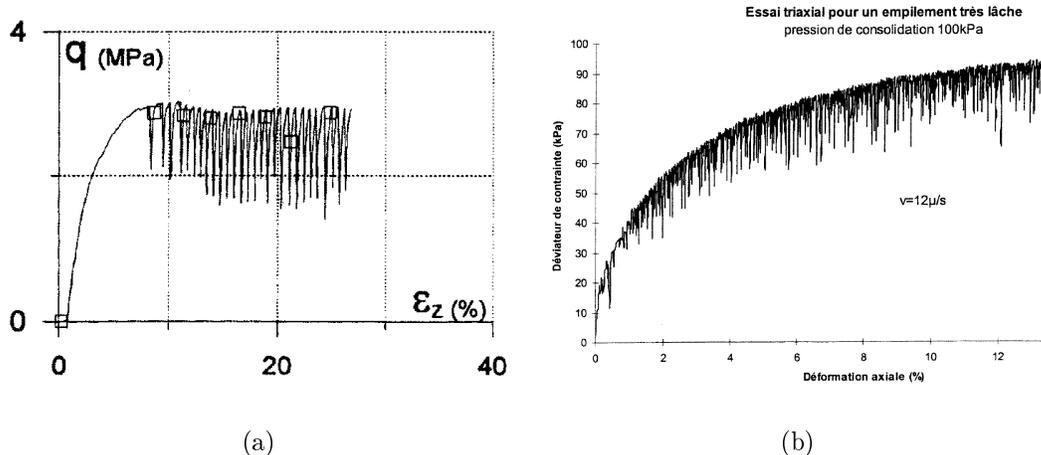


FIG. 1.2 – (a)- Essai triaxial drainé sur un échantillon de billes de verre de  $400\mu\text{m}$  de diamètre, soumis à une pression de confinement de  $1\text{MPa}$ . Résultats extraits des travaux de thèse de Kim [50]. (b)- Essai triaxial drainé sur un échantillon lâche de billes de verre polydisperses. Elie [36].

L'absence de fluctuations du déviateur de contrainte  $q$  dans le cas de l'essai biaxial ou triaxial est une condition nécessaire mais non suffisante pour statuer sur le caractère quasi-statique ou non d'un comportement mécanique. Il est généralement admis que le comportement des milieux dits pulvérulents est relativement insensible à la vitesse de sollicitation  $\dot{\epsilon}_1$  lors d'un essai triaxial (Matsushita et coll. [66]). Mais est-il influencé par le mode de sollicitation?

Di Prisco et Imposimato [32] ont étudié le comportement d'échantillons lâches de sable d'Hostun RF<sup>8</sup> sous sollicitations triaxiales. Plutôt que d'exercer des sollicitations en vitesse ( $\dot{\epsilon}_1$ ) sur leurs éprouvettes, Di Prisco et Imposimato ont choisi d'imposer des incréments de chargement  $\Delta q$  constants. On parle alors d'essai à chargement imposé. Après chaque incrément de chargement, les contraintes  $\sigma_3$  et  $\sigma_1 = \sigma_3 + q$  sont maintenues constantes pendant une durée arbitrairement prédéfinie. La figure 1.3 (page 33) donne l'histoire du chargement imposé  $q = \sum_t \Delta q$  au cours du temps  $t$  pendant toute la durée de l'essai triaxial. La courbe contrainte-déformation résultante est présentée sur la figure 1.4, page 33.

Cet exemple montre que pour chaque  $\Delta q$  fixé, on obtient des réponses en déformation  $\Delta\epsilon_1$  d'intensités variables. Par ailleurs, Di Prisco et Imposimato ont observé que les intensités de  $\Delta\epsilon_1$  présentaient un caractère non prédictible, ce qui les a parfois conduit à interrompre les phases de fluage prématurément. Cette étude met en évidence des comportements macroscopiques non quasi-statiques, dépendant du temps physique et constitués d'états d'équilibre et phases de réarrangement.

8. Sable d'Hostun RF: sable provenant d'Hostun (Drôme), sur le flanc Ouest du Vercors, souvent utilisé en laboratoire (Flavigny et coll. [38]).

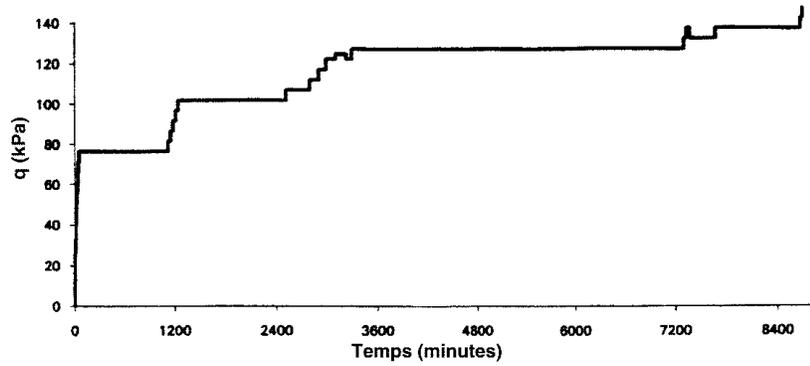


FIG. 1.3 – Histoire du chargement  $q$  imposé au cours du temps, Di Prisco et Imposimato [32].

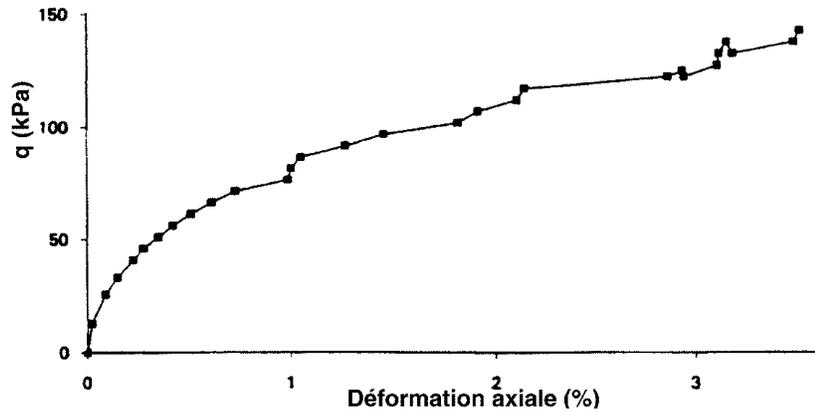


FIG. 1.4 – Courbe contrainte-déformation obtenue par test triaxial à chargement imposé (fig. 1.3) sur un échantillon de sable d'Hostun RF lâche, Di Prisco et Imposimato [32].

Les travaux de Cazacliu et Di Benedetto [20] ou de Di Benedetto et Tatsuoka [31] sont différents. Ces auteurs se sont principalement intéressés à la réponse à de faibles incréments de sollicitations, en régime quasi-élastique, à l'aide d'essais triaxiaux drainés sur des sables secs. Les compressions triaxiales sont ici effectuées à vitesse de déformation imposée. Au cours des essais, à plusieurs reprises, les déformations ne sont plus imposées et les contraintes sont maintenues constantes (essais de fluage) jusqu'à l'obtention d'états d'équilibre ( $\dot{\epsilon}_1 = 0$ ). On montre sur les figures 1.5 et 1.6 (page 34) l'histoire du chargement et des déformations. La courbe contrainte-déformation mesurée au cours du test triaxial est présentée sur la figure 1.7, page 35.

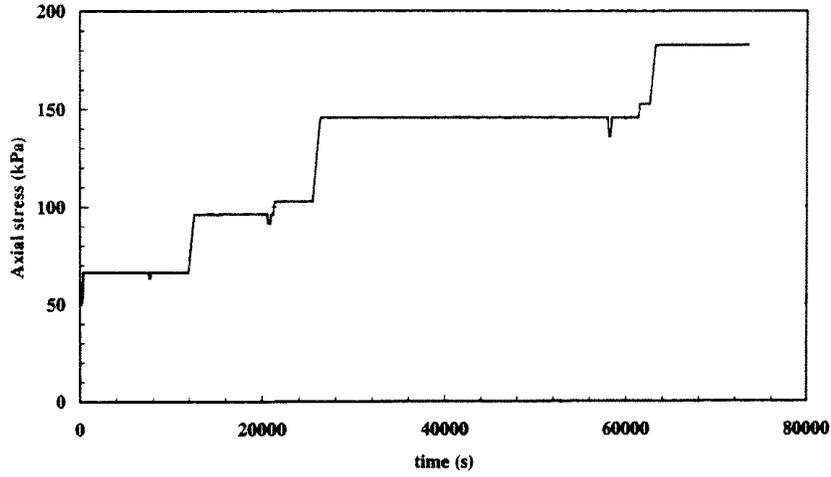


FIG. 1.5 – Évolution de  $\sigma_1$  au cours du temps,  $\sigma_3 = 50kPa$ .

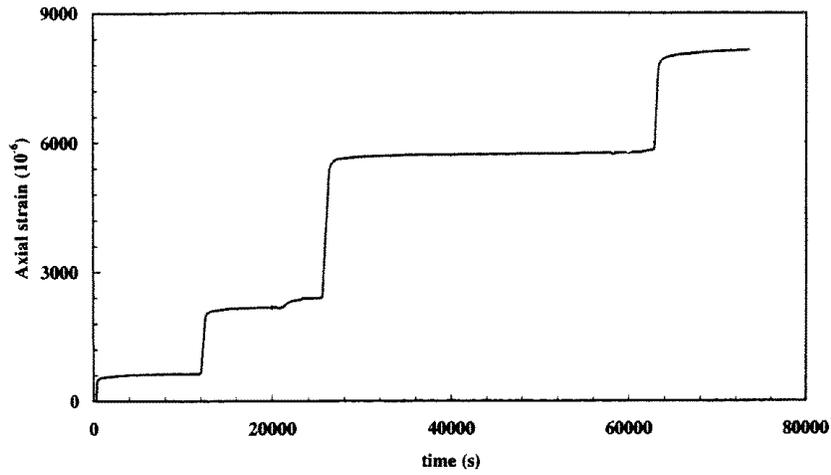


FIG. 1.6 – Évolution de  $\epsilon_1$  au cours du temps.

On peut remarquer sur les figures 1.5 et 1.6 que les phases de fluage s'étendent sur des échelles de temps particulièrement grandes, allant jusqu'à 11 heures pour la plus importante. Ces observations ont conduit Di Benedetto et Tatsuoka [31] à faire l'hypothèse de la présence d'une composante visqueuse dans le comportement des sables. Il est ici légitime de se poser la question de la validité d'une telle interprétation. En effet, comme il a déjà été précisé, les courbes  $q - \epsilon_1$  montrent une certaine insensibilité à la vitesse de sollicitation  $\dot{\epsilon}_1$  lorsque cette dernière reste constante tout au long de l'expérience. Des comportements représentés sur les figures 1.7 ou même 1.4, il nous semblerait plus raisonnable de faire l'hypothèse d'une sensibilité aux *variations* des vitesses de sollicitation, comme observé par Matsushita et coll. [66].

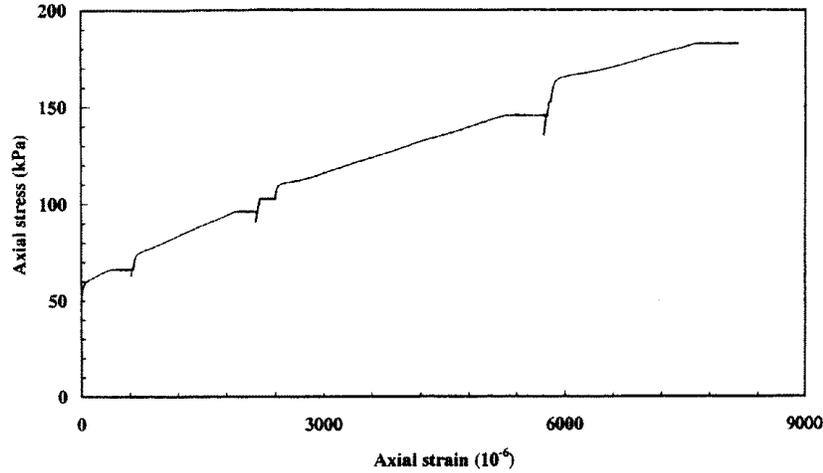


FIG. 1.7 – Courbe contrainte-déformation, à déformation (fig. 1.5) et chargement imposés (fig. 1.6), sur un échantillon de sable sec. Expérience réalisée par Cazacliu (1995), évoqués par Di Benedetto et Tatsuoka [31].

Ces essais triaxiaux drainés sur des sables, en grandes comme en petites déformations, mettent donc en évidence des comportements mécaniques fortement non quasi-statiques au sens strict du terme<sup>9</sup>. Les méthodes numériques dédiées aux milieux granulaires vont donc permettre de constater s’il est possible de reproduire les comportements observés précédemment. Si tel est le cas, nous pourrions alors explorer l’origine microscopique des comportements rapportés par Di Prisco et Imposimato [32], Cazacliu et Di Benedetto [20] ou par Di Benedetto et Tatsuoka [31].

## 1.2 Les méthodes de simulations numériques

Parmi les nombreuses méthodes numériques dédiées aux milieux granulaires, les deux approches les plus fréquemment utilisées sont la *Dynamique Moléculaire (DM)* et la *Dynamique des Contacts (DC)*. Nous ne détaillerons pas précisément, dans ce mémoire de thèse, ces deux approches. Nous invitons le lecteur à se référer à la littérature abondante et de qualité aussi bien pour la *DM* (Cundall [26], Schäfer et coll. [96], Dippel [33], Luding [58], Oger et coll. [76]) et sa genèse chez les physiciens des liquides (Allen et Tildesley [1], Rapaport [90]), que pour la *DC* (Radjai [85], Azanza [3], Jean [45]). Il est néanmoins nécessaire de présenter les principaux aspects de ces deux méthodes afin de mieux situer le travail présenté dans ce rapport.

---

9. Quasi-statique au sens strict = suite continue d’états d’équilibre traduisant un comportement mécanique *indépendant* du temps physique.

### 1.2.1 Dynamique Moléculaire (*DM*)

La dynamique moléculaire et la dynamique des contacts ont comme point commun qu'elles mettent en œuvre la discrétisation dans le temps des équations de la dynamique. À la différence de la *DC*, qui considère les particules comme parfaitement rigides, la *DM* se caractérise par la prise en compte d'une élasticité dans les contacts. Les trajectoires des particules sont alors régulières au sens où l'on calcule des variations continues des quantités cinématiques relatives aux objets. Dans sa forme la plus classique, l'interaction entre deux corps frottants est régie par deux lois de contact qui statuent sur les efforts normaux et tangentiels entre les grains.

#### Les équations de la dynamique

La dynamique moléculaire nécessite la discrétisation dans le temps des équations de la dynamique :

$$M \vec{x}_i = \sum_j \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{r} \quad (1.1)$$

$$\underline{\underline{I}} \vec{\theta}_i = \sum_j \vec{\Gamma}_{j \rightarrow i} + \vec{m}_r \quad (1.2)$$

où

- $M$  est la masse de la particule  $i$  et  $\underline{\underline{I}}$  sa matrice d'inertie,
- $\vec{x}_i$  est l'accélération de translation du grain  $i$  et  $\vec{\theta}_i$  son accélération angulaire,
- $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  est la force exercée par  $j$  sur  $i$ ,
- $\vec{\Gamma}_{j \rightarrow i}$  est le moment exercé par  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  au centre de gravité de  $i$ ,
- $\vec{r}$  est une force *extérieure* (par exemple la gravité),
- $\vec{m}_r$  est le moment exercé par  $\vec{r}$  au centre de gravité  $i$ .

De nombreux schémas de discrétisation des équations (1.1) et (1.2) sont possibles. Dans le cadre des calculs que l'on sera amené à présenter dans ce mémoire, nous avons opté pour un schéma de discrétisation *Prédicteur-Correcteur* à l'ordre 3 (Allen et Tildesley [1]). Ce type de discrétisation a l'avantage de fournir au même instant  $t + \delta t$  les positions ainsi que les vitesses des particules, toutes deux nécessaires au calcul des forces de contacts. D'autres schémas comme *saute-mouton* (*Leap-frog*), *Verlet* ou *Verlet velocity form* ne permettent pas de calculer au même instant les positions et les vitesses des grains.

#### Modélisation des forces normales de contact

La loi de contact normale est souvent basée sur le modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt* (Luding [58], Oger et coll. [76], Schäfer et coll. [96]), fig. 1.8. Elle modélise

la force normale par une fonction continue de l'interpénétration et de la vitesse relative normale entre deux particules, éq. (1.3).

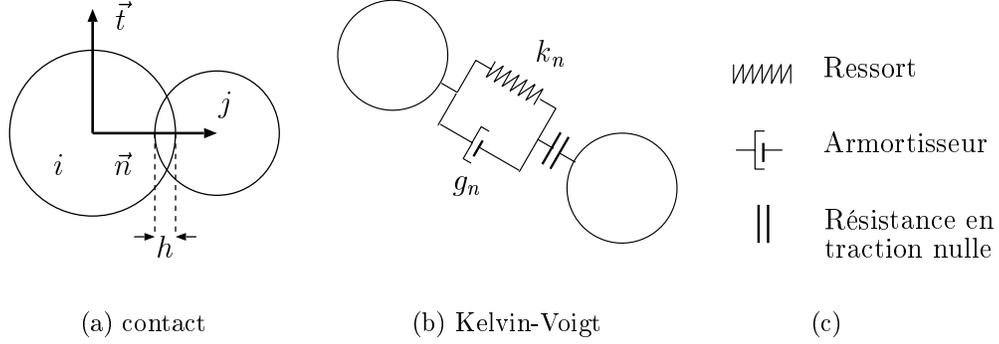


FIG. 1.8 – Loi de contact pour les efforts normaux, modèle rhéologique de Kelvin-Voigt.

$$f_n = -h k_n + v_n g_n \quad (1.3)$$

où

- $f_n$  est la force normale dans le contact portée par  $\vec{n}$ ,
- $h$  est la distance de recouvrement entre deux particules.  $f_n > 0$  si  $h < 0$  et  $f_n = 0$  sinon,
- $k_n$  est la raideur imposée dans le contact,
- $v_n$  est la vitesse relative normale entre les deux particules,  $v_n = (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \vec{n}$ ,
- $g_n$  est un coefficient d'amortissement visqueux imposée dans le contact.

Schäfer et ses collaborateurs [96] ont recensé les lois de contact les plus couramment utilisées. Parmi celles-ci, on peut citer la loi qui fait intervenir la théorie de contact élastique de Hertz associée au mécanisme de dissipation de l'équation (1.3). On peut aussi mentionner le modèle original de Walton et Braun [108] (aussi mis en œuvre par Luding et coll. [59], Oger et coll. [76], Schäfer et coll. [96]), qui tient compte de l'histoire du chargement dans chaque contact.

$$f_n = \begin{cases} k_n^1 h & \leftarrow \text{chargement} \\ k_n^2 (h - h_0) & \leftarrow \text{déchargement} \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $h_0$  est la valeur de l'interpénétration au moment où le déchargement s'annule.

Lorsque deux particules en contact se rapprochent (chargement), la pente de la courbe force-interpénétration est  $k_n^1$ . Si la distance entre les centres des particules augmente (déchargement), la pente est alors  $k_n^2 > k_n^1$ . Dans le cas où les deux grains se rapprochent à nouveau, sans que la force de contact n'ait été préalablement

annulée (perte du contact), la courbe force-interpénétration a, dans un premier temps, une pente  $k_n^2$ . Puis, lorsque la force de contact est égale au maximum atteint au cours du précédent chargement, la pente de la courbe redevient alors  $k_n^1$ .

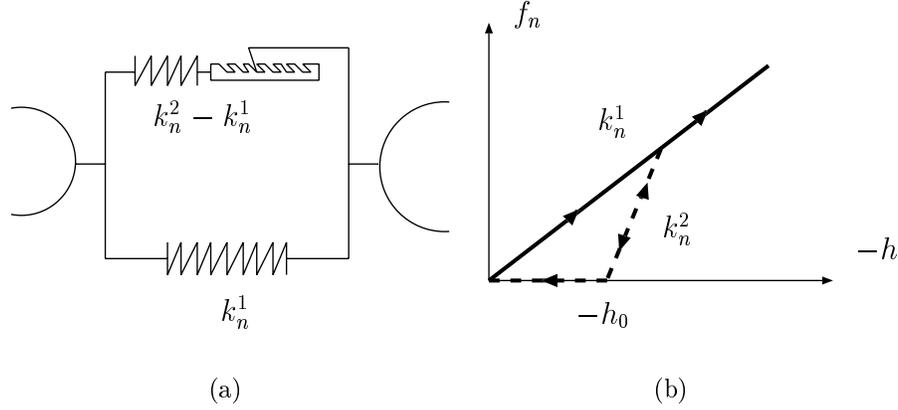


FIG. 1.9 – Modèle à hystérésis de Walton et Braun [108].

### Modélisation des forces tangentielles de contact

Pour les lois de contact régissant les efforts tangentiels, plusieurs approches sont possibles. La première met en œuvre un modèle de force de frottement visqueux borné par le critère de *Coulomb*.

$$\begin{cases} f_t = -\min(|g_t v_t|, \mu f_n) \cdot \frac{v_t}{|v_t|} & \text{si } v_t \neq 0 \\ f_t = 0 & \text{si } v_t = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où

- $f_t$  est la force tangentielle dans le contact, elle s'oppose au glissement,
- $g_t$  est un paramètre numérique,
- $v_t$  est la vitesse relative tangentielle dans le contact,  

$$v_t = (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \vec{t} - R_i \dot{\theta}_i - R_j \dot{\theta}_j,$$
<sup>10</sup>
- $\mu$  est le coefficient de frottement.

Ce modèle, principalement utilisé pour des simulations à forte énergie cinétique (par exemple des écoulements, Dury et coll. [34], Ristow [91]), semble mal adapté au calcul d'état statique puisqu'il conduit à la quasi-absence<sup>11</sup> de frottement à l'équilibre.

<sup>10</sup>  $R_i$  et  $R_j$  sont les rayons respectifs des particules  $i$  et  $j$ .

<sup>11</sup> Les forces tangentielles ne seront jamais réellement nulles à l'équilibre à cause de l'agitation résiduelle des particules, associée au *bruit* numérique, généralement lié à la précision du schéma de discrétisation des équations de la dynamique.

Un second modèle, proposé par Cundall et Strack [27], introduit une raideur tangentielle  $k_t$  dans le contact. Soit un contact entre deux disques au temps  $\tau_1$ , qui perdure au moins jusqu'au temps  $\tau_2 = \tau_1 + \delta\tau$ . Soit  $f_t^{\tau_1}$  la force tangentielle présente dans ce contact au temps  $\tau_1$ . La force tangentielle  $f_t^{\tau_2}$  présente dans le contact au temps  $\tau_2$  est définie par :

$$f_t^{\tau_2} = f_t^{\tau_1} + \delta f_t \quad \text{avec} \quad \delta f_t = -k_t v_t \delta\tau$$

$$\rightarrow \text{Si } |f_t^{\tau_2}| > \mu f_n^{\tau_2} \text{ alors } f_t^{\tau_2} = -\mu f_n^{\tau_2} \cdot \frac{v_t}{|v_t|} \quad (v_t \neq 0) \quad (1.6)$$

où  $\delta f_t$  est un incrément de force tangentielle<sup>12</sup> fonction de la raideur tangentielle  $k_t$  et du déplacement relatif tangential incrémental  $v_t \delta\tau$ .  $\mu$  est le coefficient de frottement solide et  $f_n^{\tau_2}$  la force normale de contact au temps  $\tau_2$ .

On peut assimiler l'équation (1.6) à un modèle rhéologique élasto-plastique parfait qui associe en série un ressort et un patin à seuil, fig.1.10.

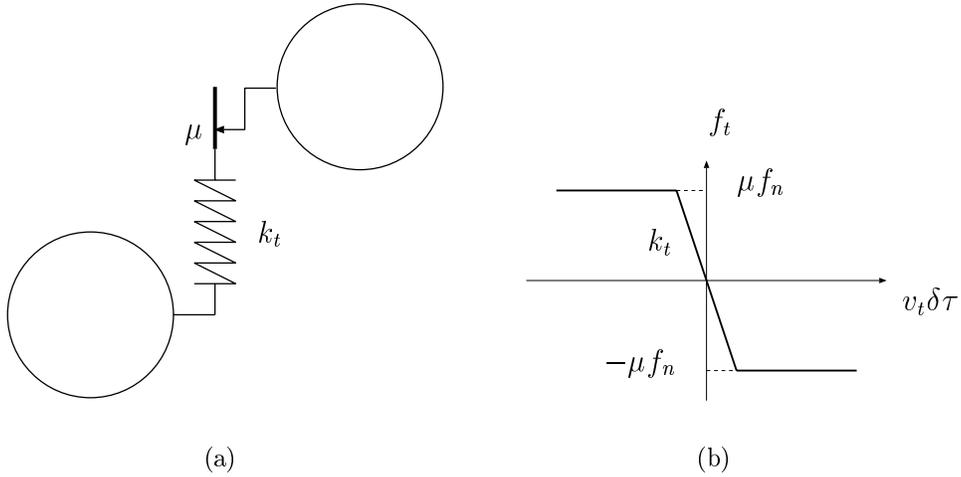


FIG. 1.10 – *Modèle de loi de contact tangentielle incrémentale, Cundall et Strack [27].*

Sur la base de ce modèle, certains auteurs (Lee [56], Oger et coll. [76], Iwashita et Oda [44]) ajoutent une composante visqueuse (amortisseur à viscosité constante  $g_t$ ) à l'équation (1.6).

$$\delta f_t = -k_t v_t \delta\tau - g_t v_t \quad (1.7)$$

12.  $\delta f_t$  s'oppose à l'incrément de déplacement relatif tangential correspondant.

Enfin, on peut citer l'approche originale de Iwashita et Oda [43]. En plus des modélisations (1.3) et (1.6)+(1.7), ces derniers proposent de prendre en compte une troisième équation modélisant la résistance au roulement de cylindres en contact, observée expérimentalement par Bardet et Huang [4] et par Oda et Kazama [75]. Cette nouvelle modélisation du contact entre disques a été utilisée avec succès pour l'étude numérique des mécanismes de déformation dans les bandes de cisaillement (Oda et Iwashita [74], Iwashita et Oda [44]).

Cette liste de lois de contact pour les efforts normaux et tangentiels n'est pas exhaustive. Il existe d'autres modèles rhéologiques et en particulier ceux qui prennent en compte la cohésion entre les particules (Preechawuttipong et coll. [83], Nase et coll. [71]).

Le choix d'une loi de contact par rapport à une autre est complexe. Schäfer et ses collaborateurs [96], par des confrontations de résultats numériques et expérimentaux, sont arrivés à la conclusion qu'il n'existait pas de modélisation meilleure qu'une autre. Le choix d'un modèle rhéologique se doit d'être guidé par le type de simulation que l'on réalise (écoulement, statique, etc ...).

## 1.2.2 Dynamique des Contacts (*DC*)

Proposée par Jean et Moreau [46], la *Dynamique des Contacts* est une autre approche née du constat suivant : les mécanismes de déformation des grains, ainsi que la durée des chocs entre les particules sont mal connus. À la différence de la *DM*, la *DC* ne décrit donc pas précisément ces aspects et considère les grains comme parfaitement rigides. Les collisions, ou chocs instantanés, sont traités sur des pas de temps  $\delta t$  constants. Dans les systèmes granulaires denses et peu agités, on a alors affaire à des collisions multiples, dans un laps de temps  $\tau_{choc}$  petit devant le temps de discrétisation  $\delta t$ . Ce type d'approche est à opposer aux méthodes dites "*event-driven*" pour lesquelles  $\delta t$  est constamment ajusté afin de décrire un à un les chocs entre les particules.

### Les équations de la dynamique

D'un point de vue mathématique, la *DC* traite des évolutions discontinues. On ne résout donc pas directement les équations (1.1) et (1.2) par discrétisation. Il s'agit plutôt ici de faire le bilan des *percussions* de contact dans un intervalle de temps fini :

$$\begin{aligned} M [\vec{v}_i(t + \delta t) - \vec{v}_i(t)] &= \sum_j \vec{R}_{j \rightarrow i} + \vec{r} \cdot \delta t \\ \underline{\underline{I}} [\vec{\omega}_i(t + \delta t) - \vec{\omega}_i(t)] &= \sum_j \vec{\Gamma}_{j \rightarrow i} + \vec{m}_r \cdot \delta t \end{aligned} \quad (1.8)$$

où

- $M$  est la masse de la particule  $i$  et  $\underline{I}$  sa matrice d'inertie,
- $\vec{v}_i$  est la vitesse du grain  $i$  et  $\vec{\omega}_i$  sa vitesse angulaire,
- $\vec{R}_{j \rightarrow i}$  est la percussion (force  $\times$  temps) reçue par le grain  $i$  de son voisin  $j$  avec lequel il est en contact pendant  $\delta t$ ,
- $\vec{\Gamma}_{j \rightarrow i}$  est le moment exercé par  $\vec{R}_{j \rightarrow i}$ ,
- $\vec{r}$  est une force régulière (par exemple la gravité),
- $\vec{m}_r$  est le moment exercé par  $\vec{r}$  sur  $i$ .

La discrétisation des équations du mouvement proposée par Jean et Moreau [46] repose sur le schéma *saute-mouton*<sup>13</sup>. Les positions et rotations des particules sont déterminées en décalage d'un demi pas de temps avec les vitesses après les chocs et les impulsions de contact pendant les chocs.

### Les lois de contact

Faisant le constat que la loi de choc à coefficient de restitution de *Newton* semble bien adaptée aux collisions binaires, la *DC* prend en compte ce modèle en s'assurant de sa validité pour les contacts maintenus. Pour ce faire, les conditions de *Signorini* et de *Coulomb*, classiquement écrites pour les déplacements relatifs, le sont pour la *DC* avec des vitesses relatives formelles  $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } for}$  qui tiennent compte de la loi de choc de *Newton*<sup>14</sup> à coefficient de restitution (noté  $r$ ):

$$\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } for} = \frac{1}{1 + r_{N,T}} \mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } +} + \frac{r_{N,T}}{1 + r_{N,T}} \mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } -} \quad (1.9)$$

où dans le contact  $\alpha$ :

- $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } for}$  est la vitesse relative formelle Normale ou Tangentielle,
- $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } +}$  est la vitesse relative Normale ou Tangentielle après le choc,
- $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } -}$  est la vitesse relative Normale ou Tangentielle avant le choc,
- $r_{N,T}$  est le coefficient de restitution Normal ou Tangentiel.

Les lois de contact normales et tangentielles sont représentées page 42, sur la figure 1.11(a) pour le graphe de *Signorini* et sur la figure 1.11(b) pour le graphe de *Coulomb*, tous deux respectivement exprimés en fonction de  $\mathcal{U}_N^{\alpha \text{ } for}$  et de  $\mathcal{U}_T^{\alpha \text{ } for}$ .

Dans la *DC*, deux applications linéaires reliant les quantités relatives aux grains  $(\vec{v}_i, \vec{R}_{j \rightarrow i}, \dots)$  aux quantités relatives aux contacts  $(\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha \text{ } +}, \mathcal{R}_{N,T}^{\alpha}, \dots)$  sont définies.  $\mathbf{G}$  est l'application linéaire qui associe aux vitesses de translation et de rotation

---

13. *Leap-frog* en anglais.

14.  $\mathcal{U}^{\alpha \text{ } +} = -r \mathcal{U}^{\alpha \text{ } -}$ .

des grains  $i$  et  $j$  en contact, les vitesses relatives normales et tangentielles dans le contact  $\alpha$  :

$$\{\vec{v}_i, \vec{\omega}_i, \vec{v}_j, \vec{\omega}_j\} \xrightarrow{\mathbf{G}} \{\mathcal{U}_N^\alpha, \mathcal{U}_T^\alpha\} \quad (1.10)$$

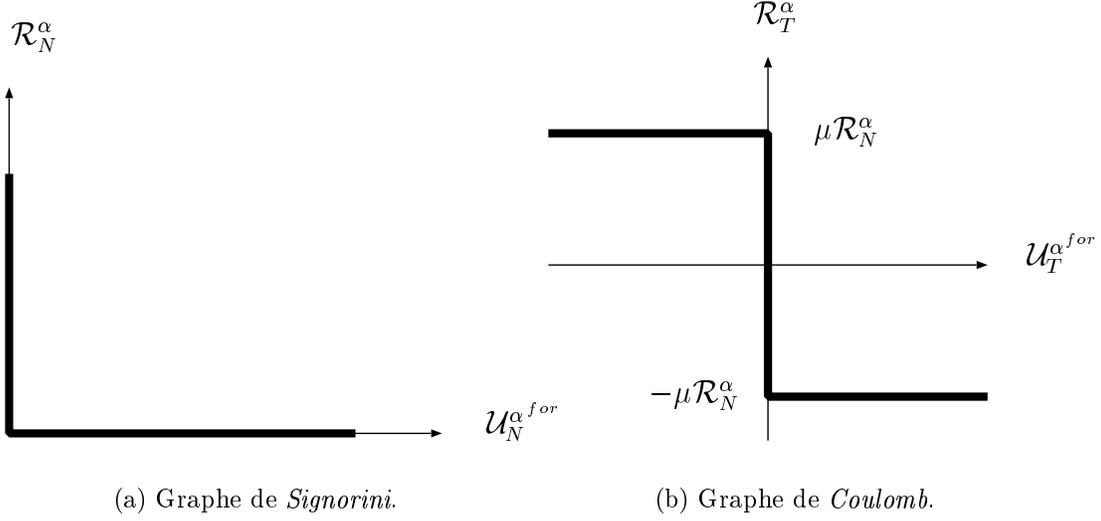


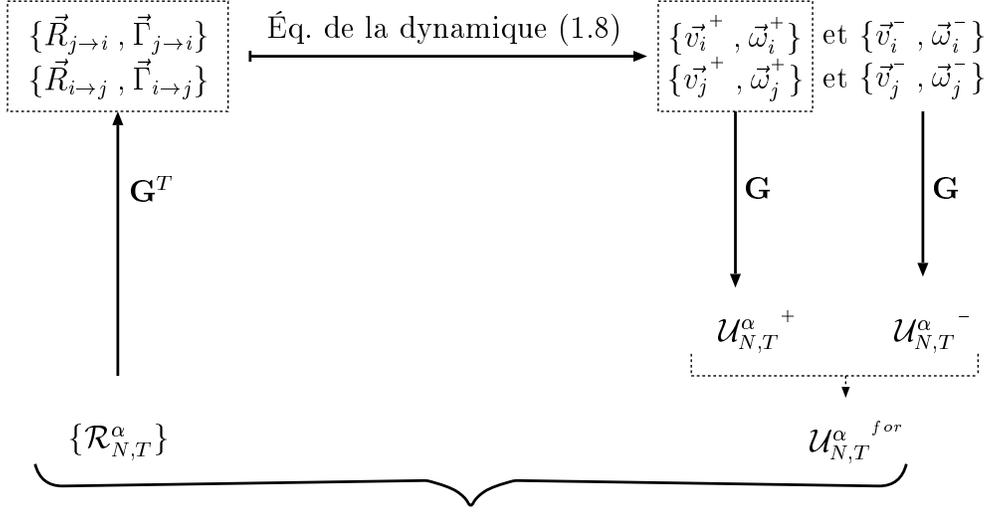
FIG. 1.11 – *Lois de contact normales et tangentielles*.  $\mathcal{R}_N^\alpha$  est l'impulsion normale de contact,  $\mathcal{R}_T^\alpha$  est l'impulsion tangentielle de contact et  $\mu$  le coefficient de frottement.

L'application  $\mathbf{H}$  associe aux réactions de contact les impulsions s'exerçant sur les particules  $i$  et  $j$  :

$$\{\mathcal{R}_N^\alpha, \mathcal{R}_T^\alpha\} \xrightarrow{\mathbf{H}} \{\vec{R}_{j \rightarrow i}, \vec{\Gamma}_{j \rightarrow i}, \vec{R}_{i \rightarrow j}, \vec{\Gamma}_{i \rightarrow j}\} \quad (1.11)$$

On montre aisément que  $\mathbf{H}$  est la transposée de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{G}^T$ .

À l'aide des équations (1.8), (1.9), des lois de contact normales (fig. 1.11(a)) et tangentielles (fig. 1.11(b)) ainsi que des applications linéaires  $\mathbf{G}$  (1.10) et  $\mathbf{G}^T$  (1.11), il est possible de schématiser le principe de la méthode *Dynamique des Contacts* pour un contact par le diagramme de la figure 1.12, page 43.



Lois de contact, fig. 1.11(a) et 1.11(b)

FIG. 1.12 – *Diagramme de synthèse de la Dynamique des Contacts pour un contact  $\alpha$  constitué des particules  $i$  et  $j$ .*

Il est ici important d'insister sur le fait qu'à la différence de la *DM*, les deux lois de contact (graphes *Signorini* et *Coulomb*) n'expriment pas de dépendance fonctionnelle entre les impulsions de contact et les vitesses relatives formelles. La méthode, qui consiste à déterminer  $\mathcal{R}_{N,T}^\alpha$  et  $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha, for}$  satisfaisant les lois de contact, est alors nécessairement itérative. Le processus itératif, qui a pour but de résoudre un système d'inéquations, est celui de *Gauss-Seidel*. Il consiste à modifier  $\mathcal{R}_{N,T}^\alpha$  et  $\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha, for}$  par corrections successives ( $\Delta\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha, for}$ ,  $\Delta\mathcal{R}_{N,T}^\alpha$ ) pour que les lois de contact soient satisfaites dans chaque contact  $\alpha$ .

$$\Delta\mathcal{U}_{N,T}^{\alpha, for} = \frac{1}{1 + r_{N,T}} G_{(N,T),k}^\alpha A_{kk}^{-1} G_{k,(N,T)}^\alpha \Delta\mathcal{R}_{N,T}^\alpha \quad (1.12)$$

avec sommation sur les indices répétés,  $k$  repérant les degrés de liberté des grains  $i$  et  $j$ .  $A^{-1}$  désigne ici l'inverse de la matrice de masse  $A$  (matrice diagonale) composée des masses et des moments d'inertie des disques en contact.

Les successions de corrections conduisent à chercher l'intersection d'une droite de pente positive, éq. (1.12), avec le graphe de *Signorini* (fig. 1.11(a)) ou *Coulomb* (fig. 1.11(b)). La solution de l'étape d'itération est alors unique. En passant, à chaque pas de temps  $\delta t$ , tous les contacts en revue autant de fois que nécessaire, on arrive alors à ce que les lois de contact soient simultanément satisfaites<sup>15</sup> ainsi que les équations de la dynamique.

<sup>15.</sup> à un niveau de précision fixé.

Les seuls paramètres que l'on peut être amené à ajuster dans la *DC* sont le pas de temps et le niveau d'erreur toléré sur les lois de contact, ainsi que les coefficients de restitution aux chocs normaux et tangentiels, que l'on prend généralement égaux à 0 dans le cas de simulation de milieux granulaires denses. La *DC* fait donc intervenir peu de paramètres susceptibles de modifier la physique que l'on souhaite représenter. C'est de notre point de vue un atout certain par rapport à la *DM* dont les multiples paramètres ajustables rendent l'utilisation parfois complexe.

Néanmoins, de par les mauvaises connaissances que l'on a des lois qui régissent la dynamique des grains, ces méthodes de simulation, toutes deux basées sur des considérations dynamiques, mettent en œuvre certains ingrédients arbitraires dont le choix résulte d'un compromis entre le réalisme du modèle et la commodité de calcul. Des paramètres comme  $k_n$  et  $k_t$  peuvent être choisis selon la physique du contact, tout comme  $r_{N,T}$  pour les milieux dilués. Néanmoins, pour les milieux denses,  $g_n$  et  $r_{N,T}$ , considérés comme «réalistes» lorsque l'on traite des collisions binaires, sont dans une grande mesure choisis sur des considérations pratiques d'*efficacité* de calculs. En sus de ces problèmes de modélisation, viennent se greffer des considérations purement numériques, comme des conditions de stabilité des schémas de discrétisation des équations de la dynamique (*DM*<sup>16</sup>) ainsi que des phénomènes oscillatoires (*DM*<sup>17</sup> et *DC*), qui rendent l'obtention d'états d'équilibre assez problématique.

La compréhension de la mécanique des milieux granulaires à l'échelle du grain comme à l'échelle de l'échantillon reste complexe et on ose espérer que les différentes dynamiques mises en œuvre n'apportent pas un peu plus de confusion dans cette quête.

### 1.3 Comportements quasi-statiques et simulations numériques

Les mécaniciens des sols, forts de leurs expériences de laboratoire sur des matériaux granulaires, ont essayé de reproduire leurs essais par simulations numériques à l'aide de ces méthodes dites des *éléments distincts*. La cinématique est généralement reproduite avec succès aussi bien au niveau des déplacements des particules qu'au niveau des localisations des déformations (Bardet et Proubet [6],

---

16. La dynamique moléculaire est une méthode dite *explicite* au sens où il est nécessaire de satisfaire un critère de *stabilité* au niveau du pas de discrétisation pour assurer la stabilité numérique du schéma. De son côté, les auteurs de la *DC* mettent en œuvre un schéma de discrétisation *implicite* qui rend ce dernier inconditionnellement stable.

17. Sur les bases de la *DM*, Bardet et coll. [5, 6] proposent un algorithme, *Adaptive Dynamic Relaxation*, dans lequel un traitement particulier des phénomènes oscillatoires est réalisé. Ils ont obtenu, grâce à des facteurs d'amortissement variables, des régimes suramortis très performants en termes d'éradication des oscillations.

Daudon et coll. [30], Lanier et Jean [55]). Les comparaisons à l'échelle macroscopique montrent que les méthodes du type *Dynamique Moléculaire* donnent des résultats plus satisfaisants au niveau macroscopique (Thornton et Lanier [103], Thornton et Antony [102] avec des rigidités très faibles) que les approches du type *Dynamique des Contacts* (Lanier et Jean [55]). Néanmoins, les courbes de comportement macroscopique obtenues par le calcul numérique sont généralement très bruitées (Mahboubi-Ardakani [63], Masson et Martinez [65]) sans pour autant que l'on sache vraiment en identifier la cause.

Cet état de fait conduit parfois certains auteurs à *lisser* artificiellement leurs résultats macroscopiques afin de mieux les faire correspondre aux courbes de comportement classiquement obtenues sur les sables. Cette opération peut être dangereuse. On ne sait pas si le niveau de bruit présent dans les courbes  $q - \epsilon_1$  obtenues numériquement est lié à la méthode de calcul ou à la nature discrète du matériau étudié ou tout simplement au faible nombre de particules comprises dans les échantillons. Une autre façon de lisser les courbes  $q - \epsilon_1$  obtenues par test biaxial avec la *DM* est de mettre en œuvre des particules peu rigides.

Lorsque les simulations numériques sont effectuées à l'aide de la *DM* en association avec des lois de contact du type (1.3), il est nécessaire de définir une raideur normale  $k_n$  dans chaque contact. Plus  $k_n$  sera faible, pour une pression de confinement  $p$  donnée, plus le nombre de contacts sera élevé. À ce titre, il peut être intéressant de rappeler les rigidités mises en œuvre par différents auteurs. Pour ce faire, on définit la variable  $\kappa$ , qui représente le *niveau de rigidité* d'un assemblage sous une pression de confinement  $p$  donnée :

$$\kappa = \frac{k_n}{pL} \quad (1.13)$$

où  $L$  est la *profondeur* ou longueur de chaque cylindre (ou particule) dans le cas bidimensionnel. La pression  $p$  est ici définie au sens tridimensionnel, c'est une force divisée par une aire. On utilisera surtout par la suite la pression  $p$  au sens bidimensionnel, c'est-à-dire une force divisée par une longueur.

On liste dans le tableau 1.1 quelques niveaux de rigidité utilisés par certains auteurs pour des simulations de compressions biaxiales avec des lois de contact normales élastiques linéaires.

	$\kappa$
Calvetti et Emeriault [15]	500
Iwashita et Oda [44]	757
Sitharam [99]	4166
Williams et Rege [110]	14000
Masson et Martinez [65]	40000

TAB. 1.1 – *Quelques valeurs de  $\kappa$  relevées dans la littérature.*

Afin de rendre ces valeurs numériques plus explicites, il est possible de les associer à différents matériaux. La valeur de  $\kappa$  utilisée par Masson et Martinez [65] a été choisie sur la base des propriétés physiques de cylindres en PVC. Les matériaux de *Schneebeli* utilisés par Joer [47] et coll. [48], sous une pression de confinement de  $50 \text{ kPa}$ , conduisent à  $\kappa = 60000$ .  $\kappa = 500$  peut être approximativement associé à l'empilement granulaire constitué de cylindres en bois de 6 cm de long sous une pression de confinement de  $50 \text{ kPa}$  étudié par Lanier et Combe [54], Calvetti et coll. [14] et Combe [22].

Il est aussi possible d'évaluer un  $\kappa$  (bidimensionnel) *équivalent* à partir d'assemblages tridimensionnels de sphères sous confinement isotrope. Avec une loi de contact intergranulaire de type *Hertz*, on évalue une raideur  $k_n$ <sup>18</sup> en calculant la dérivée de l'expression de la force normale de contact par rapport à l'interpénétration,  $\frac{dF}{dh}$  et en prenant comme valeur numérique de  $F$  la valeur moyenne des forces de contact (voir annexe A, page 187). Les échantillons de sphères étudiés par Thornton et Sun [104] montre un niveau de rigidité de l'ordre de  $\kappa \sim 5600$  avec une pression de confinement de  $100 \text{ kPa}$  sur un échantillon numérique de sphères dont les propriétés mécaniques sont celles du verre ( $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Si la pression de confinement est  $1 \text{ MPa}$ , on obtient alors  $\kappa \sim 1200$ , Kim [50], fig. 1.2(a), page 32.

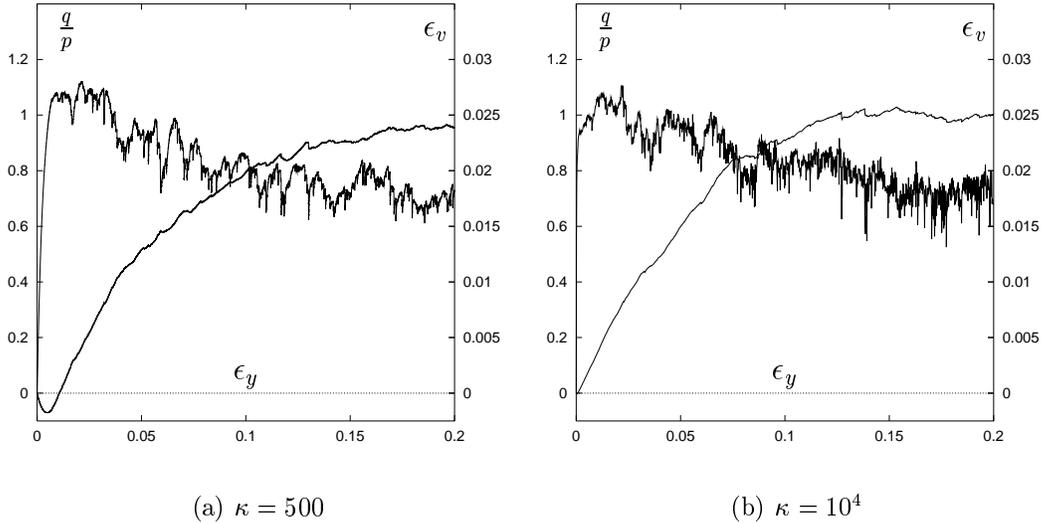


FIG. 1.13 – Influence de  $\kappa$  sur des simulations d'essais biaxiaux à  $\dot{\epsilon}_y$  imposée.  $\epsilon_v = -\epsilon_x - \epsilon_y$ . (a)- Indice des vides initial/final: 0.1862/0.2145, Nombre initial/final de contacts: 10038/8561. (b)- Indice des vides initial/final: 0.1940/0.2240, Nombre initial/final de contacts: 9348/7649.

Le niveau de rigidité  $\kappa$  a une forte influence sur le comportement macroscopique

18. Pour une loi de contact élastique linéaire.

des assemblages au cours des simulations d'essais biaxiaux. À titre d'exemple, on montre sur les figures 1.13(a) et 1.13(b) (page 46) les comportements macroscopiques calculés dans le cas d'essais biaxiaux à vitesse de déformation imposée sur des assemblages constitués de 4900 disques, pour deux valeurs de  $\kappa$ . Un échantillon est initialement compacté sous une pression de confinement isotrope  $p$  avec  $\kappa = 10000$  et un frottement intergranulaire nul. À partir de cet assemblage, une seconde configuration est engendrée par compression isotrope avec  $\kappa = 500$  (toujours sans frottement). Par cette opération, on obtient deux assemblages aux propriétés différentes mais dont les listes de contacts comportent de nombreuses similitudes. Les essais biaxiaux sont effectués avec un frottement intergranulaire  $\tan \varphi = 0.25$  et des vitesses de déformation identiques pour les deux calculs.

Sur les figures 1.14(a) et 1.14(b), les courbes sont redessinées dans une gamme de déformation plus réduite,  $\epsilon_y \leq 0.02$ .

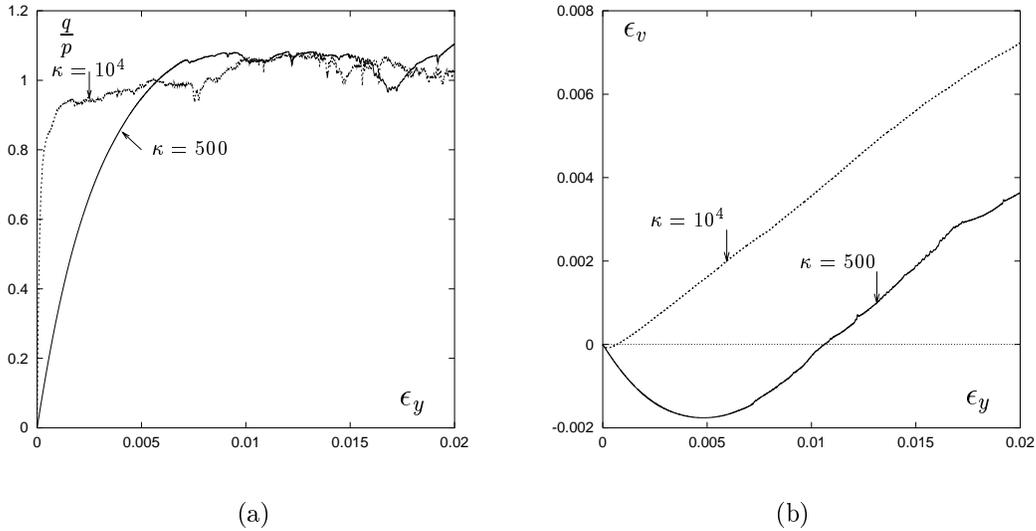


FIG. 1.14 – Influence de  $\kappa$  sur les déviateurs et les variations de volume pour  $0 \leq \epsilon_y \leq 0.02$ .

Sur la figure 1.13, on constate que  $\kappa$  ne semble pas beaucoup influencer le comportement macroscopique après la rupture macroscopique des échantillons. Par contre, sur la figure 1.14, la différence entre les deux simulations est très nette. Pour  $\kappa = 10000$ , la montée en charge est bien plus *raide* et la courbe, plus bruitée qu'avec  $\kappa = 500$ . De plus, les variations de volume<sup>19</sup> observées fig. 1.14(b) semblent indiquer que la phase contractante est ici principalement liée à l'élasticité plus ou

19. Afin de garder le même vocabulaire que les mécaniciens des sols,  $\epsilon_v = -\epsilon_1 - \epsilon_2$  sera appelée déformation *volumique* alors qu'il va de soi que dans le cas de particules 2D,  $\epsilon_v$  est une déformation *surfactive*.

moins forte des grains. Au vu des courbes présentées ici, le comportement macroscopique obtenu avec  $\kappa = 500$  semble qualitativement plus proche de ceux observés sur les sables denses. Malheureusement, on ne peut se satisfaire d'un tel résultat. Il paraît en effet peu probable que l'élasticité des grains de sable joue un rôle si important sur les déformations macroscopiques observées aux cours des expériences d'essais triaxiaux réalisées en laboratoire. Il nous semble donc plus adéquat de viser la limite des grands  $\kappa$  afin de mieux appréhender les origines microscopiques (déformations des grains, réarrangements) des déformations macroscopiques.

De par les dynamiques mises en œuvre dans les méthodes de simulations présentées précédemment, des évolutions quasi-statiques au sens strict du terme<sup>20</sup> semblent particulièrement difficiles à mettre en évidence. Certains auteurs ont pris le parti de contrôler leurs essais numériques de façon à mettre en évidence des suites discontinues d'états d'équilibre. Plutôt que d'imposer classiquement des vitesses de déformation, Bardet et Proubet [5, 6] proposent d'imposer des incréments de déplacement aux frontières des échantillons. À chaque incrément, le calcul numérique<sup>21</sup> est répété jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Les comportements mécaniques se traduisent alors par des suites d'états d'équilibre séparés de réarrangements internes. D'autres auteurs ont choisi de développer un troisième type d'approche numérique différent de la *DM* et de la *DC*. Bashir et Goddard [8] font abstraction de la relation fondamentale de la dynamique et de sa discrétisation. Les vitesses des particules sont déterminées par la résolution d'un système d'équations faisant intervenir une matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}}$ , composée des rigidités locales de chaque contact<sup>22</sup>. Pour chaque état d'équilibre calculé, un champ moyen de déformation est imposé. Un vecteur, noté  $\underline{b}$ , est composé des résultantes des forces et moments de chacune des particules. Les déplacements  $\underline{x}$  des grains sont ensuite calculés par la résolution du système linéaire  $\underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{b}$ . Malheureusement, les résultats numériques rapportés dans [111] ne montrent pas d'études exhaustives à l'échelle des particules et en particulier sur les mécanismes microscopiques de passage d'un état d'équilibre à un autre.

Parallèlement, une autre approche ne prenant pas en compte les forces d'inertie retient notre attention. Initialement développée pour l'étude des assemblages granulaires en présence d'un liant visqueux entre les grains (Pitois et coll. [82]), la *Dynamique Granulaire Lubrifiée (DGL)*, proposée par Ouaguenouni [77] et Roux [79, 80, 78], s'est avérée particulièrement efficace pour le calcul d'états d'équilibre de grains rigides sans frottement. La *DGL* met en œuvre un modèle constitué de particules circulaires parfaitement rigides qui interagissent à distance via l'équation de Reynolds :

---

20. cf. note de bas de page 9, page 35.

21. *ADR*: Méthode de calcul du type *DM*. cf. note de bas de page numéro 17, page 44.

22. Rigidités normales et tangentielles.

$$f_\alpha = \xi(h_\alpha)\delta v_\alpha \quad (1.14)$$

où  $\delta v_\alpha$  est la vitesse relative normale dans les liens constitués des particules voisines avec du fluide dans les interstices ( $\delta v_\alpha > 0$  lorsque les particules se rapprochent).  $\xi(h_\alpha) = B/h_\alpha^\beta$  où  $\beta$  est égal à 1 pour des sphères et 3/2 pour des cylindres parallèles.  $B$  est un paramètre fonction du rayon des particules voisines et de  $\beta$ .  $h_\alpha$  est la distance ( $> 0$ ) entre deux grains voisins. La loi d'interaction (1.14) est exclusivement normale, sans prise en compte d'éventuels effets de cohésion (pas de résistance en traction). Lors du calcul d'états d'équilibre sous chargement extérieur, les vitesses relatives normales entre les grains tendent vers 0. Deux listes de liens  $L^*$  et  $L$  bien distincts sont alors obtenues, telles que :

$$\begin{aligned} (\forall \alpha \in L^*) \quad h_\alpha &\rightarrow 0 & \text{et} \quad f_\alpha &\rightarrow f_l > 0 \\ (\forall \alpha \in L) \quad h_\alpha &\rightarrow h_l > 0 & \text{et} \quad f_\alpha &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$L^*$  correspond à la liste des forces portées par les liens  $\alpha$  qui équilibrent le chargement extérieur imposé.  $L$  est la liste des voisinages qui portent des forces tendant vers 0. À l'équilibre, la *DGL* a donc la particularité de mettre en évidence une liste  $L^*$  dans laquelle chaque interstice  $h_\alpha$  tend vers 0 et transmet une force finie. La loi d'interaction entre les disques rigides «converge» donc vers la condition de *Signorini*, fig. 1.15.

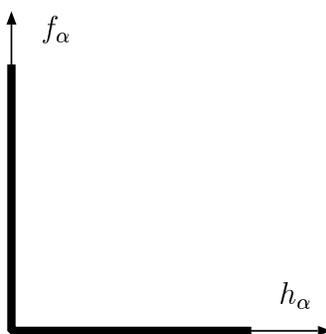


FIG. 1.15 – *Graphe de Signorini correspondant aux conditions :  $f_\alpha > 0$  si  $h_\alpha = 0$ ,  $f_\alpha = 0$  si  $h_\alpha > 0$ .  $h_\alpha$  désigne la distance entre deux particules.*

Cette dernière approche est particulièrement intéressante car sur la base d'un modèle extrêmement simple (absence de frottement et de cohésion, pas de modèle de dynamique et particules polydisperses parfaitement rigides), elle permet de respecter l'impénétrabilité des grains avec une grande précision. Elle conduit alors à mettre en évidence une propriété très forte qui est l'isostaticité de la structure formée par la liste de contacts qui supporte le chargement extérieur (Roux [94],

Moukarzel [68], Tkachenko et Witten [105]). Uniquement à partir des positions des particules et d'un chargement extérieur, cette propriété permet de calculer les forces de contact par la simple résolution d'un système d'équations linéaires. La simplification du modèle granulaire permet donc de s'affranchir des paramètres non géométriques présents dans les méthodes de simulation *DM* et *DC*. C'est en exploitant la propriété d'isostaticité des assemblages de disques rigides sans frottement que nous proposons une nouvelle méthode numérique. Elle va nous permettre de décrire le plus précisément possible, dans la limite des grands systèmes, les mécanismes de passage d'un état d'équilibre à un autre, en évitant au maximum tout artifice numérique. La compréhension des mécanismes de déformation des milieux granulaires sans frottement nous permettra alors de mieux appréhender l'étude du comportement des assemblages pour lesquels le frottement intergranulaire est pris en compte.

## Objet de l'étude

Les différents résultats expérimentaux évoqués ont montré des évolutions de milieux granulaires denses, non cohésifs, ne pouvant être considérées comme quasi-statiques *au sens strict du terme*, c'est-à-dire constituées d'une suite *continue* d'états d'équilibre. Par les informations complémentaires qu'elle peut apporter à l'échelle microscopique, la simulation numérique a de nombreux atouts. Néanmoins, les méthodes numériques *classiques*, *DM* et *DC*, qui mettent en œuvre les équations de la dynamique et lois de contact nécessitant l'introduction de paramètres multiples, ne nous semblent pas suffisamment *neutres* pour statuer sur les origines microscopiques des comportements mécaniques macroscopiques en régime quasi-statique. En conséquence, dans le cadre du travail de recherche présenté dans ce mémoire, nous avons volontairement choisi d'étudier des assemblages modèles simplifiés : disques avec et sans frottement, dans la limite des grandes rigidités. Ces choix vont nous permettre d'étudier le comportement des milieux granulaires soumis à des compressions biaxiales en faisant abstraction des inerties et mécanismes de dissipation (autres que le frottement lorsque ce dernier est pris en compte). Les origines microscopiques des déformations macroscopiques des milieux granulaires seront alors explorées à l'aide de différents outils numériques précis, pour certains nouveaux, et adaptés aux assemblages modèles envisagés.

# Chapitre 2

## Préparation des assemblages granulaires par compactage

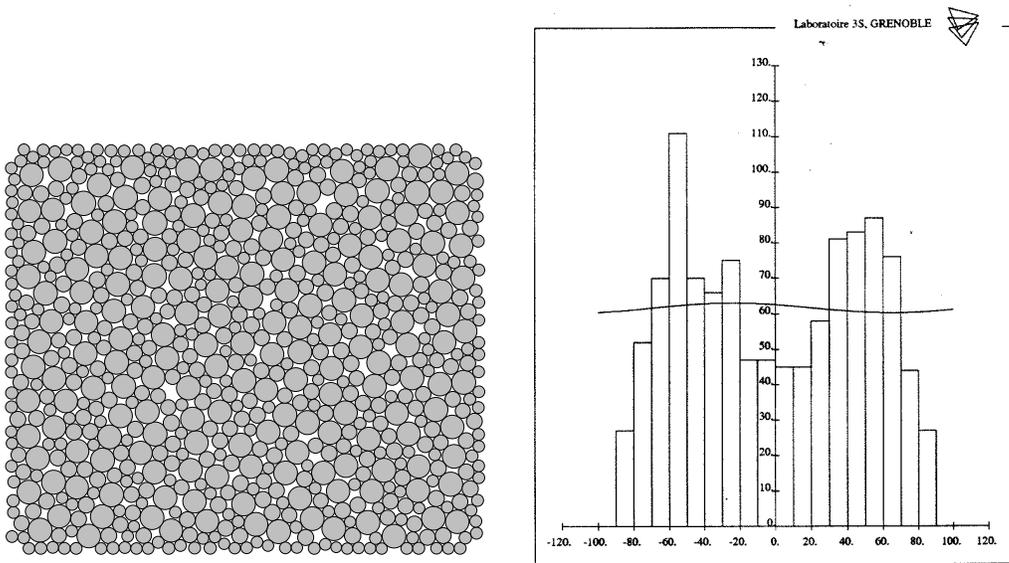
### Introduction

«Le compactage est l'ensemble des opérations mécaniques qui conduisent à accroître la densité en place d'un sol. Cette action augmente la compacité du sol, donc resserre la texture du matériau, réduit les possibilités de déformation du terrain et améliore sa capacité portante.». Telle est la définition du compactage que l'on peut trouver dans les manuels de mécanique des sols [25]. En génie civil, le compactage est l'étape préalable de préparation des sols avant toute construction, étape dont la complexité de mise en œuvre est intimement liée à la nature du sol in-situ. Beaucoup de procédés différents sont pratiqués sur les chantiers. Les engins utilisés dépendent de la nature du terrain et de l'importance du travail à effectuer. Pour les terrains de faible épaisseur, on peut citer les *dames à explosions*, les *rouleaux à pneus*, les *pilons de 2 à 3 tonnes montés sur grue roulante* et autres *engins vibrants*. Ces machines à compacter sont principalement utilisées pour les sols non-cohérents comme les matériaux de chaussées. On peut aussi citer les procédés dits *spéciaux*, spécifiques aux sols de grandes épaisseurs, *le compactage par explosions*, *la vibroflottation* ou *la consolidation dynamique*. En laboratoire, les échantillons de sols sont compactés afin d'atteindre un niveau de densité désiré. Parmi les méthodes les plus simples, on peut citer le compactage par *dame* ou bien par *pluviation* pour les sols granulaires non-cohérents.

L'étude du comportement des milieux granulaires *naturels* ou *modèles* en régime quasi-statique est couramment réalisée par le biais d'essais de laboratoire *classiques* comme l'essai triaxial (ou biaxial) ou encore l'essai de cisaillement rectiligne (boîte de *Casagrande* [25]). Les échantillons font alors l'objet d'analyses aussi bien à l'échelle globale (échelle macroscopique) qu'à l'échelle des grains (échelle microscopique). Pour ces recherches, les approches expérimentales comme numériques peuvent être mises en œuvre. Quelle que soit l'approche utilisée, la préparation par

compactage reste une étape importante qu'il convient de contrôler au mieux afin de quantifier son influence sur le comportement du milieu granulaire au cours de l'essai mécanique proprement dit. Classiquement, les assemblages granulaires sont initialement compactés sous une pression de confinement isotrope, censée représenter l'état de contrainte in-situ du matériau. Par cette étape de préparation des échantillons, on cherche à obtenir des assemblages homogènes, à densité contrôlée.

Pour l'étude expérimentale bidimensionnelle des matériaux granulaires (matériaux de *Schneebeli*), l'homogénéité des orientations de contact est très difficile à respecter. Combe [22], Calvetti et coll. [14] ont montré que le *dépôt*<sup>1</sup> de rouleaux sous gravité induisait une forte anisotropie des orientations de contact dans deux directions privilégiées, -60 et +60 degrés, fig. 2.1.



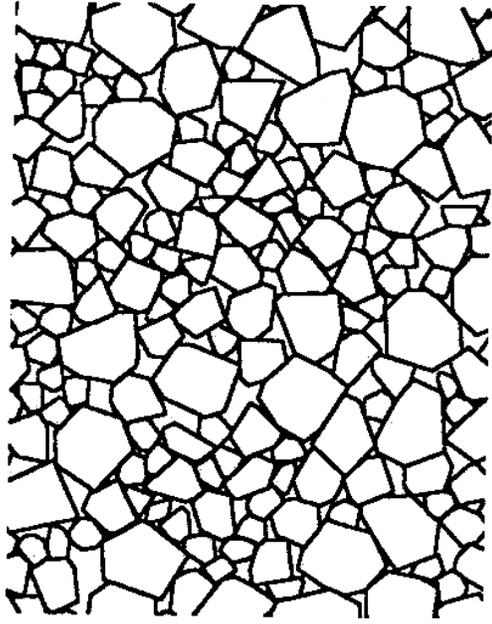
(a) Empilement de 722 rouleaux de *Schneebeli* déposés sous gravité et confinés par une pression isotrope.

(b) Histogramme des orientations de contact de (a) par classe de  $10^\circ$ . Angle en abscisse et nombre de contacts par classe en ordonnée.

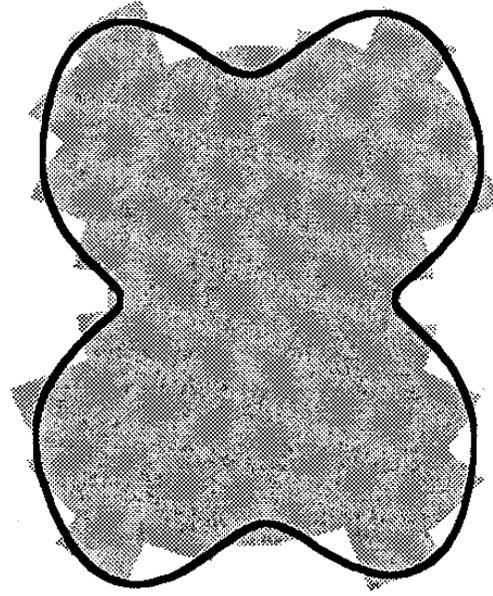
FIG. 2.1 – *Histogramme des orientations de contact d'un empilement de rouleaux en bois fabriqué par dépôt. Résultat expérimental extrait de Combe [22].*

Cette anisotropie des orientations de contact due au mode de préparation des assemblages a également été observée par Moreau [67] par une simulation numérique de *dépôt* sous gravité de grains polygonaux 2D (fig. 2.2).

1. L'expérimentateur construit l'empilement en déposant les rouleaux un à un.



(a) Extrait d'un empilement de 3000 grains déposés sous gravité.



(b) Histogramme des orientations de contact dans l'empilement (par classe de  $12^\circ$ ).

FIG. 2.2 – *Histogramme des orientations de contact d'un empilement de grains polygonaux fabriqué par dépôt sous gravité. Résultats de simulations numériques extraits de Moreau [67].*

Il est ici important de noter que l'anisotropie des orientations de contact observée dans les empilements fabriqués par *dépôt* (voir note de bas de page numéro 1, page 52) semble disparaître dans le cas d'une simulation que l'on appelle *sédimentation*<sup>2</sup> sous gravité. Nous avons effectué ce type de calcul sur un ensemble de 9801 disques, avec et sans frottement intergranulaire (*Dynamique Moléculaire*). Dans un premier temps, les particules sont mélangées en l'absence de gravité et de frottement. À ce stade, la compacité de l'échantillon est estimée à 0.458. La gravité est ensuite *activée* pour le processus de sédimentation. Les histogrammes d'orientations de contact de la figure 2.3 mettent en évidence une légère anisotropie, sans commune mesure avec celles constatées par Combe [22], Calvetti et coll. [14] et Moreau [67]. Ces derniers résultats montrent l'importance et l'influence du mode de préparation sur les caractéristiques micromécaniques des échantillons de particules dans le cas d'empilements fabriqués sous gravité.

2. On fait ici la différence entre un *dépôt* de particules dans le but de contruire un massif en déposant les grains un à un et une *sédimentation* où les particules sont initialement diluées sans gravité dans une boîte puis tombent *collectivement* sur le fond de la boîte sous l'effet de la gravité.

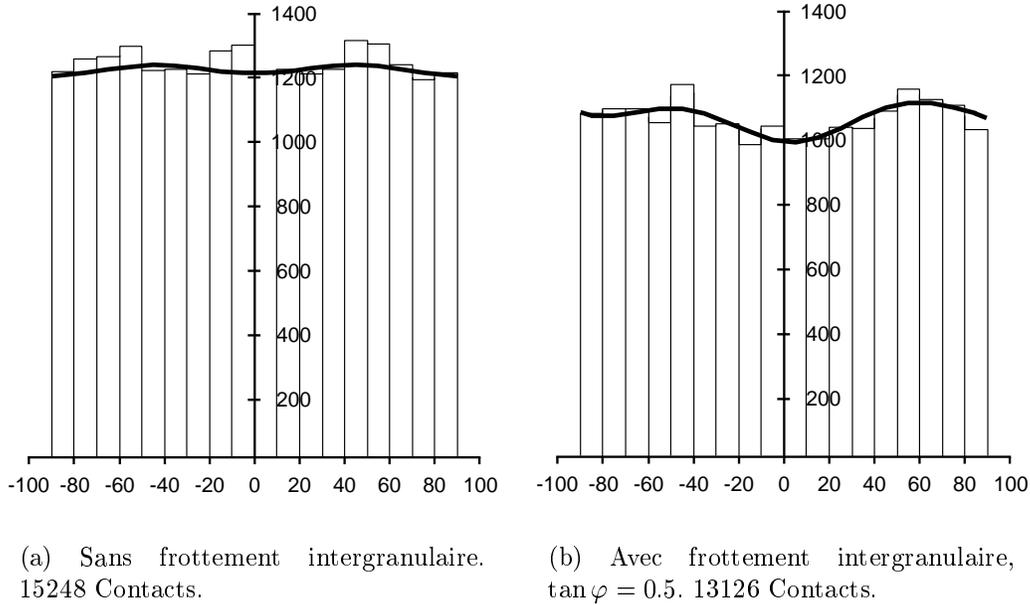


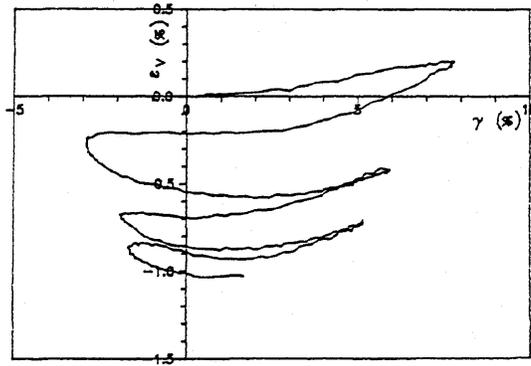
FIG. 2.3 – *Histogramme des orientations de contact d’empilements de 9801 disques polydisperses fabriqués par sédimentation (calculs numériques réalisés avec la DM, interpénétration maximale =  $4 \cdot 10^{-4}a$ ,  $a$  = diamètre de la plus grande particule. Les contacts portés par les particules voisines des bords ne sont pas pris en compte. On donne ici le nombre de contacts dans chaque classe de  $10^\circ$  entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ . La ligne continue est une approximation des histogrammes par une série de Fourier à l’ordre 4.*

La maîtrise de la densité d’un échantillon granulaire de laboratoire est liée au procédé de fabrication. Quelle que soit cette densité, il existe différents chemins de sollicitation mécanique permettant de diminuer le volume de l’échantillon. Pour des échantillons constitués de rouleaux de PVC<sup>3</sup>, Joer [47] et coll. [48] ont montré qu’il était possible de densifier les empilements par des essais avec rotation des axes principaux de contrainte, fig. 2.4(a), page 55.

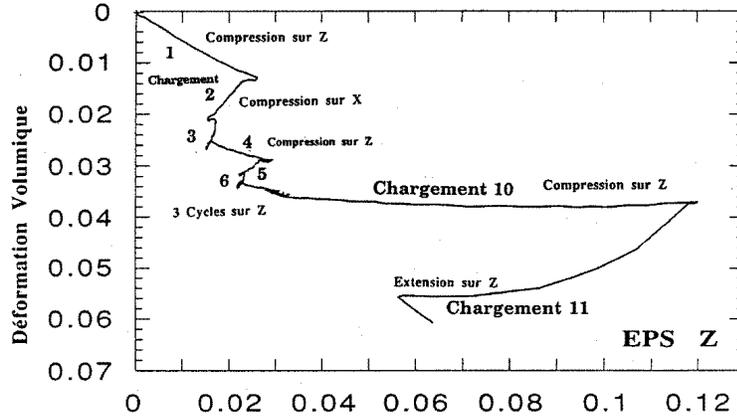
Flavigny et Lanier [39] ont recensé quelques essais de laboratoire susceptibles de densifier les échantillons de sable et de rouleaux de *Schneebeli*. Leur étude a permis de montrer que les variations de volume obtenues lors d’essais sur des matériaux sableux sont étroitement dépendantes des chemins de sollicitations appliqués aux échantillons. En effet, des échantillons de même densité initiale peuvent être contractants ou dilatants selon l’essai mécanique pratiqué. Parmi toutes les sollicitations possibles, ils ont remarqué que les essais à chargements cycliques permettent d’obtenir les variations volumiques les plus importantes. Le compactage maximal est atteint avec les essais de permutation des axes principaux de

3. Matériau de *Schneebeli* constitué de rouleaux en PVC.

contraintes, alternance de compressions et d'extensions, avec des directions de contraintes principales constantes, fig. 2.4(b). Bien qu'une analyse d'homogénéité microscopique ne puisse être envisagée sur des échantillons de sable, on peut craindre que ce type de sollicitation mécanique induise de fortes anisotropies au niveau des forces de contact aussi bien en terme d'orientations que d'intensités, dans les directions principales de compression et d'extension.



(a) Essai avec rotation des axes principaux de contraintes. Cissaillement en abscisse et déformation volumique en ordonnée.



(b) Essai d'extension-compression avec permutation des axes principaux de contraintes. Déformation suivant l'axe  $Z$  en abscisse.

FIG. 2.4 – Courbe de déformation volumique pour des essais à chargements cycliques. (a)-Échantillon constitué de rouleaux de Schneebeli, résultat extrait de Joer [47]. (b)-Échantillon de sable dans un appareil triaxial «vrai», résultat extrait de Flavigny et Lanier [39].

Dans le cadre de l'étude *numérique* des matériaux granulaires, le compactage est plus aisément contrôlable sans être pour autant exempt de difficultés. En effet, alors qu'il est possible de s'affranchir de la gravité et même du frottement entre les grains, reste le problème des conditions aux limites qui sont susceptibles d'induire une certaine anisotropie au niveau des répartitions des forces intergranulaires et des orientations de contact. L'influence des conditions aux limites est supposée plus forte dans les simulations que dans le cas expérimental, principalement à cause du nombre réduit de grains simulés par rapport à l'expérience<sup>4</sup>. On peut répertorier 3 types de conditions aux limites mis en œuvre dans le cadre des simulations numériques de milieux granulaires :

- Conditions aux limites de type membranes,
- Conditions aux limites périodiques,
- Conditions aux limites de type parois rigides.

Les méthodes de calcul avec des conditions aux limites de type membranes sont peu utilisées (Bardet et Proubet [6], Oger et coll. [76]). Ces dernières sont généralement motivées par le désir de reproduire le plus fidèlement possible le principe de l'essai triaxial de révolution de laboratoire (échantillon cylindrique de sable, placé dans une membrane de caoutchouc, fig. 1.1, page 30.).

Avec les conditions aux limites périodiques, l'absence de singularité permet d'éviter les concentrations de grandes forces de contact proches des parois, sources d'hétérogénéités majeures. Concrètement, ces limites périodiques permettent de simuler un échantillon de sol in-situ. La densité initiale des échantillons est généralement contrôlée par le biais du frottement intergranulaire (Mahboubi [63], Thornton [101, 102]). Les assemblages *denses* sont obtenus à l'aide de compression isotrope sans frottement intergranulaire et pour les échantillons plus ou moins *lâches*, un frottement granulaire non nul est utilisé à différents stades de la compression.

Les conditions de type parois rigides peuvent engendrer des effets de bords aussi bien au niveau des forces de contact qu'au niveau des variations de densité. Les compressions, souvent réalisées par l'application de forces sur les parois, ne peuvent pas être conduites avec la prise en compte du frottement intergranulaire au risque de mettre en évidence des effets de voûtes qui empêchent la propagation des forces appliquées sur les parois au centre de l'assemblage de grains. Néanmoins, ces conditions aux limites sont souvent utilisées car elles correspondent à des dispositifs expérimentaux de cisaillement existants.

Quelles que soient les méthodes numériques et les conditions aux limites utilisées, la compression des assemblages de particules est une étape de préparation obligatoire. Elle doit répondre à des critères d'homogénéité aussi bien à l'échelle de l'échantillon qu'à l'échelle des grains. Elle doit aussi satisfaire à des critères

---

4. Un trop grand nombre de particules (> 10000 en 2D) conduirait à des temps de calcul bien trop élevés avec les moyens de calcul actuels.

d'équilibre stricts. Le calcul d'un état d'équilibre, dans lequel la liste des contacts qui supportent le chargement extérieur est bien déterminée, n'est pas toujours aisé avec les méthodes numériques classiques.

En vue d'une étude statistique d'un modèle d'assemblage donné, il convient que tous les échantillons soient compactés d'une manière identique et ce, quelle que soit leur taille. Nous avons opté pour un modèle d'assemblage constitué de disques rigides, polydispersés et sans frottement. Les conditions aux limites sont de type parois rigides. Nous allons voir qu'il est alors possible d'obtenir des configurations strictement à l'équilibre, en respectant assez bien les critères d'homogénéité.

Les compressions isotropes sont réalisées en plusieurs étapes avec l'utilisation, dans un premier temps, de la méthode *Dynamique des Contacts (DC)* puis de la *Dynamique Granulaire Lubrifiée (DGL)*. La *DC* étant une méthode particulièrement efficace<sup>5</sup> lorsque les particules sont animées de grandes vitesses, elle a été préférée à la *DM* dans la première phase de compression. Par contre, comme la *DM*, elle ne permet de respecter qu'approximativement le caractère strictement rigide des particules<sup>6</sup>. Elle montre certaines difficultés à obtenir des états d'équilibre avec des listes de contact bien déterminées. La dernière phase de la compression à l'aide de la *DGL* permet *d'affiner* le calcul du point de vue d'équilibre et surtout de respecter le caractère rigide des particules du modèle. Cet aspect est strictement nécessaire pour l'étude que l'on présentera dans les chapitres suivants.

## 2.1 Propriétés du modèle d'assemblage granulaire étudié

Le modèle d'assemblage de particules que nous allons étudier a les propriétés suivantes :

- particules bidimensionnelles (disques) parfaitement rigides,
- pas de frottement entre les particules,
- les diamètres des particules, compris entre  $[a/2; a]$ , sont tirés aléatoirement suivant une loi uniforme,
- les particules sont confinées par 4 parois rigides, associées deux à deux (fig. 2.5, page 58).

L'unité de longueur est le diamètre  $a$  de la plus grande particule. Les contraintes appliquées sur les parois sont adimensionnelles. La pression de confinement isotrope, noté  $p$ , vaut 1.

---

5. Efficacité en termes de temps de calcul.

6. Les interpénétrations entre les grains sont peu contrôlables et inévitables.

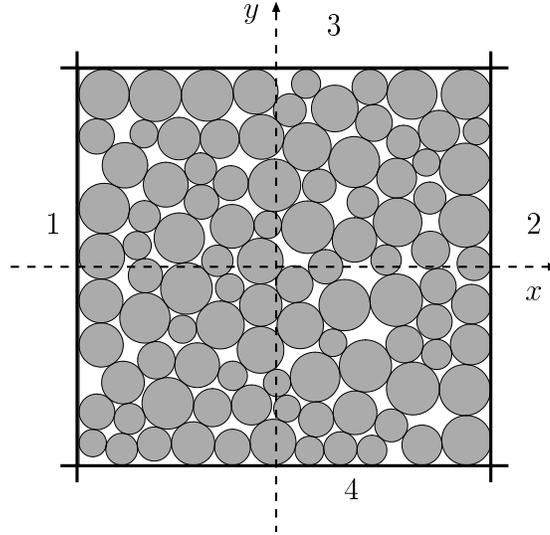


FIG. 2.5 – *Configuration des parois : les parois 1 et 2 forment une seule paroi ( $x_1 = -x_2$ ,  $v_1 = -v_2$ ), les parois 3 et 4 forment une seule paroi ( $y_3 = -y_4$ ,  $v_3 = -v_4$ ). Les conditions aux limites ont ainsi 2 degrés de liberté.*

En laboratoire, des essais expérimentaux sous fortes et faibles pressions de confinement sont parfois pratiqués (Kim [50]). Ces différents niveaux de contrainte n'ont pas les mêmes répercussions sur le comportement macroscopique des milieux granulaires dans le cadre expérimental et dans le cadre de certaines méthodes de simulations numériques. Avec les méthodes qui considèrent les particules comme parfaitement rigides (*Dynamique des Contacts* et *Dynamique Granulaire Lubrifiée*), la multiplication par un scalaire de la pression de confinement se traduit exclusivement par la multiplication par ce même scalaire des forces de contact. Pour les méthodes qui mettent en œuvre des lois de contact élastiques (*Dynamique Moléculaire*), une augmentation de la contrainte de confinement induit des inter-pénétrations plus fortes entre les grains et par conséquent, un plus grand nombre de contacts dans l'échantillon et une compacité plus importante. L'influence de la pression de confinement sur le comportement mécanique macroscopique donne alors des résultats numériques qualitativement similaires à ceux obtenus expérimentalement (Sitharam [99]). Dans le cadre de cette thèse, nous avons systématiquement adopté des grandeurs adimensionnelles et ce, quelles que soient les méthodes numériques utilisées. Avec les méthodes qui considèrent les particules comme parfaitement rigides, ce choix se justifie pleinement. Avec la *DM*, l'utilisation de variables adimensionnelles permet de transformer une augmentation de la pression de confinement en une réduction des raideurs normales dans les contacts.

Quatre familles (ou tailles) d'échantillon sont envisagées. Pour chaque taille, plusieurs échantillons sont compactés :

- 51 assemblages à  $N = 1024$  particules,
- 23 assemblages à  $N = 1936$  particules,
- 10 assemblages à  $N = 3025$  particules,
- 17 assemblages à  $N = 4900$  particules.

## 2.2 Compression isotrope des assemblages

Les compressions isotropes sont calculées à l'aide de différentes méthodes de calcul, en plusieurs étapes, dont voici la liste :

- (i) Disposition des grains suivant un réseau carré, de telle sorte que deux disques voisins, de diamètre  $a$ , seraient en contact.
- (ii) Les particules sont mélangées à l'aide de la *DC*. Le coefficient de restitution des chocs entre les particules est fixé à 1 (choc parfaitement élastique). Au début du brassage, on affecte une vitesse aléatoire à chaque particule. La distance moyenne parcourue par une particule au cours du brassage est  $4a$ .
- (iii) Une première compression isotrope est réalisée à l'aide de la *DC* par le biais de forces extérieures appliquées sur les parois de l'échantillon. Le nombre de pas de calcul est adapté à chaque échantillon pour qu'en fin de simulation, l'énergie cinétique de chaque particule soit inférieure à un niveau (réduit) donné. Les configurations ainsi obtenues sont alors proches de l'équilibre.
- (iv) La compression isotrope est poursuivie avec la méthode *DGL*. Cette dernière permet d'obtenir une configuration d'équilibre avec une grande précision numérique et une structure isostatique de contacts actifs<sup>7</sup>.

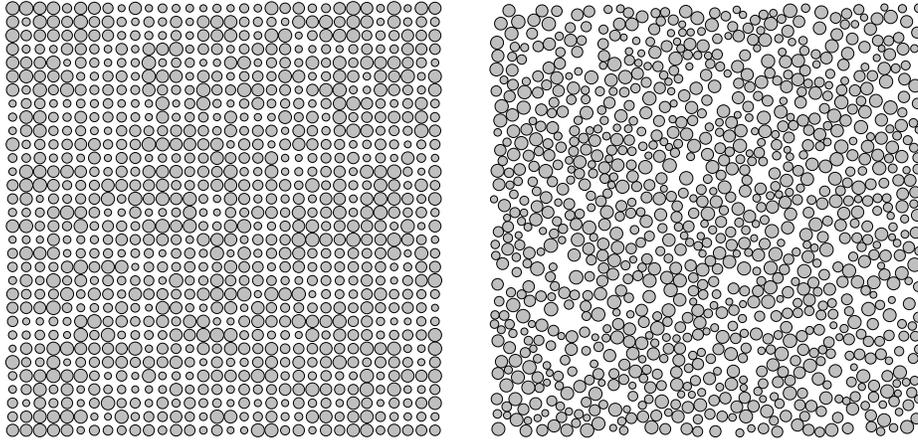
On rappelle qu'à chaque étape et quelle que soit la méthode numérique utilisée, le frottement intergranulaire est systématiquement nul.

### Réseau régulier et brassage (*DC*)

La figure 2.6(a) (page 60) donne un exemple de disposition initiale des particules pour un empilement de 1024 grains. La figure 2.6(b) correspond à la configuration obtenue par brassage. À ce stade de la préparation, l'anisotropie des orientations des voisinages des grains, initialement due à la disposition sur réseau, a disparu. Cette observation sera confirmée par la suite lors de l'étude des orientations de contact à l'état isotrope.

---

7. Contacts portant des forces strictement positives.



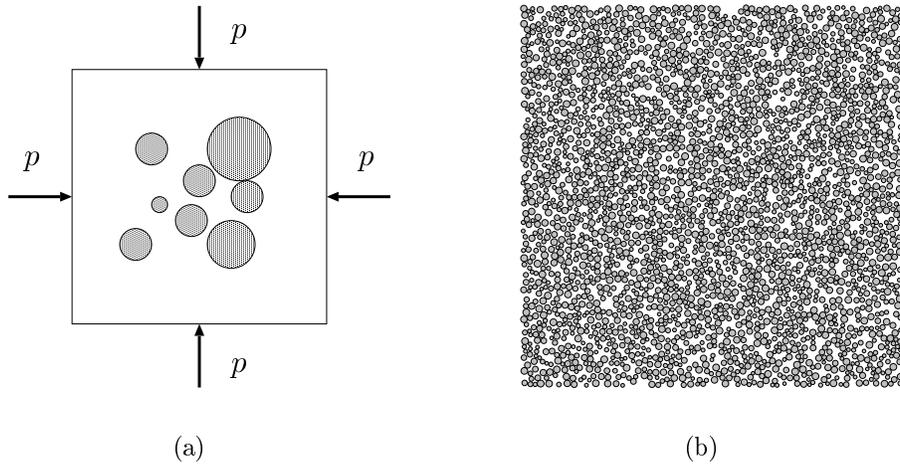
(a) Disposition initiale des particules suivant un réseau régulier.

(b) Disposition des particules après brassage (DC).

FIG. 2.6 – (a) Génération et (b) préparation d'un assemblage de  $N = 1024$  particules avant compression isotrope.

### Compression isotrope : DC

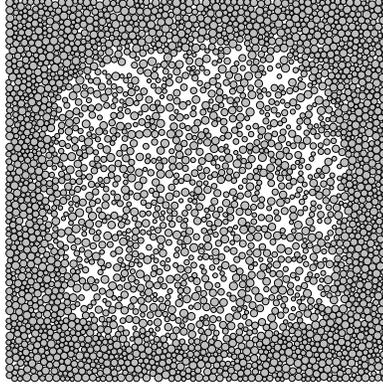
La compression isotrope est réalisée avec un coefficient de restitution nul,  $r_N = 0$ . Les forces appliquées sur les parois sont régulées afin que les contraintes correspondantes soient constantes et égales à  $p = 1$ . On présente sur les figures 2.7 et 2.8 des clichés à différentes étapes de la compression.



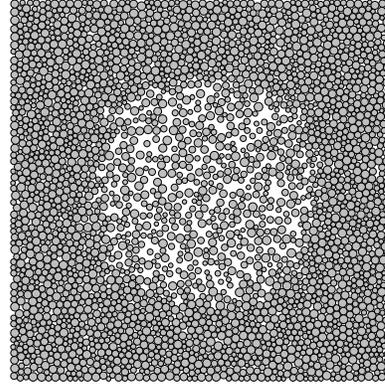
(a)

(b)

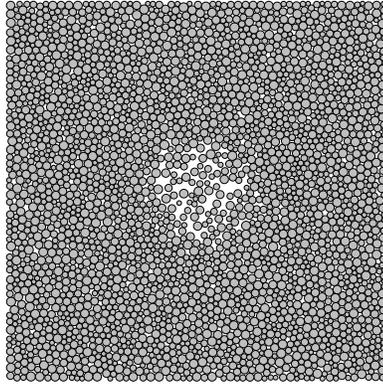
FIG. 2.7 – Configurations géométriques à différentes étapes de la première compression isotrope avec la DC. Étape (b). Suite sur la figure 2.8, page 61.



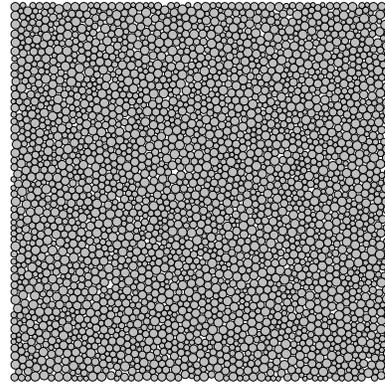
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 2.8 – Configurations géométriques à différentes étapes de la première compression isotrope avec la DC. Étapes (c), (d), (e) et (f).

Les échantillons ainsi obtenus sont denses mais non parfaitement équilibrés.

### Suite et fin de la compression isotrope avec la *DGL*

À partir d'un empilement dense, proche de l'équilibre, la *DGL* permet de calculer un état d'équilibre pour lequel la liste des contacts qui portent les forces ( $f_{ij} > 0$ ) est connue sans ambiguïté. L'écart absolu et l'écart relatif à l'équilibre, respectivement définis sur les grains  $i$  par

$$Ec_{abs}(i) = \left\| \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right\| \quad ; \quad Ec_{rel}(i) = \frac{Ec_{abs}}{\max_{j \neq i} \| \vec{f}_{ij} \|} \quad (2.1)$$

sont alors, dans le pire des cas, de l'ordre de  $10^{-8}$ .

La liste des contacts *actifs* forme alors une structure isostatique<sup>8</sup> [94]. La figure 2.9 donne un exemple d'une carte des forces de contact au sein d'un empilement de 3025 particules calculée par la *DGL*.

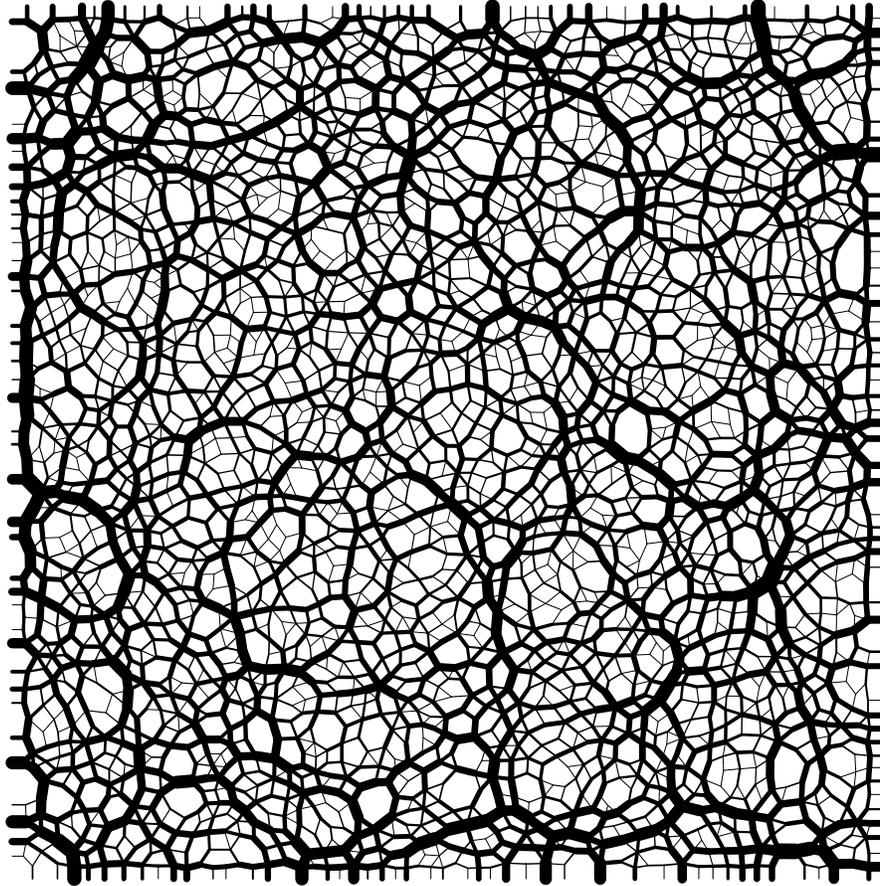


FIG. 2.9 – Carte des forces de contact non nulles, constituant une structure isostatique, dans un échantillon de 3025 particules soumis à un chargement isotrope  $p$ . Nombre de disques portant des forces non nulles : 2849, soit un total de  $5698 + 2$  degrés de libertés (deux degrés de liberté supplémentaires pour les parois). 176 disques ne portent pas de forces de contact. Nombre total de forces non nulles : 5700. Calcul effectué avec la *DGL*.

---

8. La propriété d'isostaticité implique des degrés d'hyperstaticité et d'hyposstaticité nuls. On approfondira cette propriété des assemblages de disques rigides polydisperses et sans frottement dans le chapitre suivant.

## 2.3 Caractérisation microscopique des assemblages sous confinement isotrope

Tous nos assemblages sans frottement ayant été compactés suivant la procédure décrite précédemment, nous allons maintenant vérifier le degré d'homogénéité des échantillons.

### 2.3.1 Étude de la compacité

La compacité est calculée pour chaque assemblage. Les conditions aux limites (parois rigides) jouent un rôle d'autant plus important sur la compacité des échantillons que les assemblages comportent un faible nombre de particules. En effet, proche des parois, la compacité est localement plus faible par rapport à celle calculée sur le reste des échantillons. La figure 2.10 est un schéma montrant l'influence locale d'une paroi sur la surface  $S$  de solide (parties grisées) comprise dans une fenêtre de surface  $A$  donnée. Sur la figure du haut, (a), la rangée de particule est en contact avec une paroi et sur la figure (b), la paroi est remplacée par un ensemble de disques.

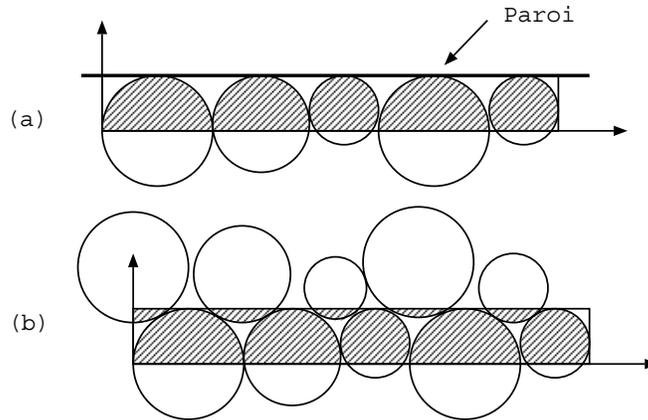


FIG. 2.10 – Influence locale des parois sur la compacité. La somme des parties grisées correspond à la surface  $S$  de solide comprise dans une fenêtre d'analyse identique dans les deux schémas. Compacité =  $S/A$  où  $A$  est la surface de la fenêtre.

Sur la globalité d'un échantillon, on peut alors s'attendre à avoir une zone moins compacte proche des parois. On parle ici d'un effet de *peau* dont l'épaisseur est de l'ordre du diamètre de la plus grosse particule. Cet effet de *peau* est indépendant du nombre de particules compris dans l'échantillon. On note  $H$  l'épaisseur de cette *peau*. Si l'échantillon est approximativement carré et si  $N$  désigne le nombre total de particules dans l'échantillon, alors le périmètre  $P$  de l'échantillon est proportionnel

à  $N^{1/2}$ . Soit  $A_1 = P H$  l'aire de cette peau. On note  $\Phi_1$  la compacité calculée sur  $A_1$ .  $A$  correspond à l'aire totale de l'assemblage. On pose  $A_0 = A - A_1$  et l'on note  $\Phi_0$  la compacité calculée sur  $A_0$ . La figure 2.11 donne l'emplacement de  $A_0$  et  $A_1$ .

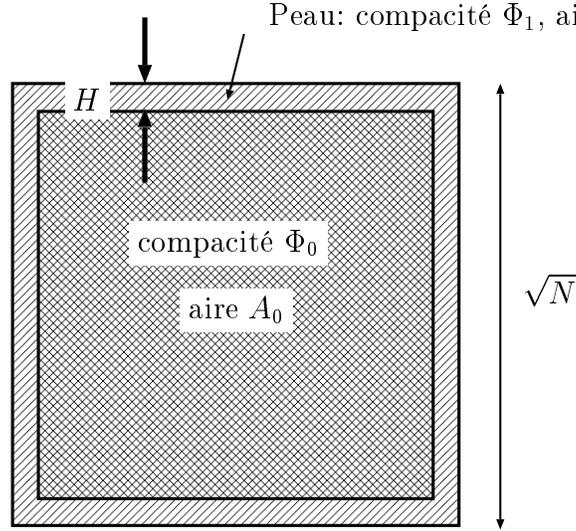


FIG. 2.11 – *Effet de peau lors de l'évaluation de la compacité d'un assemblage carré de  $N$  disques.*

La compacité  $\Phi$  calculée sur l'ensemble de l'échantillon peut s'écrire :

$$\Phi = \frac{\Phi_0 A_0 + \Phi_1 A_1}{A_0 + A_1} = \Phi_0 + \frac{A_1}{A} (\Phi_1 - \Phi_0) \quad (2.2)$$

Or, sachant que l'aire totale  $A$  de l'échantillon est proportionnelle à  $N$  et que le périmètre  $P$  de l'échantillon est proportionnel à  $N^{1/2}$ , on a alors  $A_1/A \approx PH/A \approx \alpha N^{1/2} H/N = \alpha H/N^{1/2}$ , où  $\alpha$  est une constante strictement positive. Cette démarche conduit à exprimer la compacité en fonction du nombre  $N$  de particules comme suit :

$$\Phi(N) = \Phi_0 + \frac{\alpha H (\Phi_1 - \Phi_0)}{N^{1/2}} \quad (2.3)$$

Comme la compacité tend à être plus faible dans la zone proche de la paroi que dans le reste de l'échantillon, alors  $\Phi_1 - \Phi_0$  est négatif. On doit donc s'attendre à ce que la compacité soit une fonction croissante de  $N$  et varie linéairement avec  $N^{-1/2}$ . On représente sur la figure 2.12 l'évolution de la compacité moyenne en fonction des 4 tailles  $N$  des systèmes étudiés.

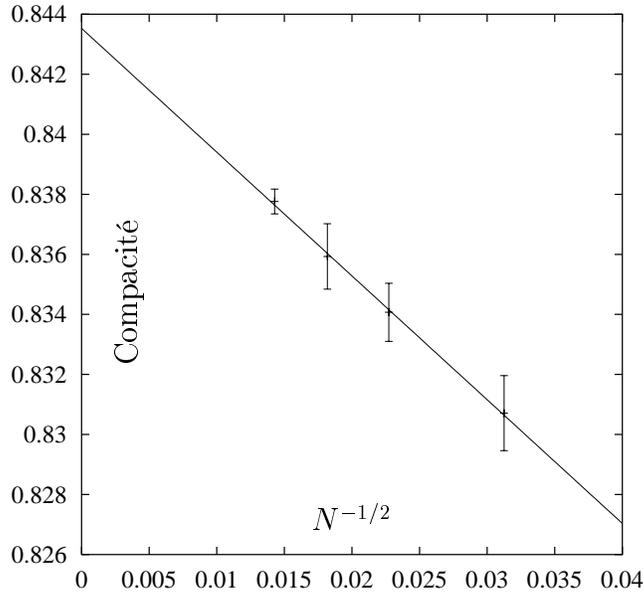


FIG. 2.12 – Évolution de la compacité en fonction de la taille  $N$  des systèmes. Les barres d'erreurs ont pour demi-hauteur l'écart type autour des moyennes calculées.

L'indice de vraisemblance de l'ajustement linéaire proposé est estimé à 0.94. Dans la limite des grands systèmes,  $N^{-1/2} \rightarrow 0$ , la compacité tend vers  $0.8434 \pm 3 \cdot 10^{-4}$  et l'indice des vides, défini par  $e(N) = 1/\Phi(N) - 1$ , possède une limite évaluée à  $0.1855 \pm 5 \cdot 10^{-4}$ . Comme Ouaguenouni et coll. [80] ou comme Roux [92], on montre donc que la compacité augmente avec la taille du système lorsque les conditions aux limites sont des parois. La valeur de l'indice des vides dans la limite des grands systèmes peut surprendre les mécaniciens des sols habitués aux caractéristiques des sables. Il est ici important de rappeler que l'on traite le cas d'assemblages *bidimensionnels*, sans frottement et sans cohésion.

### 2.3.2 Étude statistique des forces de contact

Des études expérimentales (Makse et coll. [64], Mueth et coll. [70]) comme numériques (Luding [58], Radjai et coll. [89]) ont permis de montrer qu'il existait, dans les milieux granulaires sous chargement, une très large gamme d'intensités de forces allant jusqu'à s'étaler sur plusieurs décades (Radjai [85], Ouaguenouni [77]). Les études réalisées par Radjai et coll. [87, 89] sur des assemblages de disques polydisperses<sup>9</sup> ont conduit à mettre en évidence deux ensembles de forces normales intergranulaires  $f$  bien distincts : les forces normales inférieures à la moyenne  $\langle f \rangle$  de toutes les forces et les forces supérieures à  $\langle f \rangle$ . Ils ont observé que les distributions statistiques des intensités des forces normales étaient indépendantes de la

9. Avec prise en compte du frottement solide entre les disques.

taille des systèmes étudiés<sup>10</sup> et régies par des densités de probabilité qui peuvent être approximées par une loi de puissance dans le cas où  $f < \langle f \rangle$  et par une loi exponentielle décroissante pour  $f > \langle f \rangle$ . La relation (2.4) donne les densités de probabilité  $P_f$  des forces normales de contact proposées par Radjai [85] et coll. [87, 89].

$$P_f \propto \begin{cases} \left[ \frac{f}{\langle f \rangle} \right]^{-\alpha} & \text{pour } f < \langle f \rangle \\ \exp \left[ \beta \cdot \left( 1 - \frac{f}{\langle f \rangle} \right) \right] & \text{pour } f > \langle f \rangle \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\alpha \simeq 0$  et  $\beta = 1.4$ . Parallèlement, ils ont observé que les forces tangentielles suivaient la même statistique, aux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  près.

Ouaguenouni [77] et coll. [80] ont mené une étude statistique similaire sur les forces normales de contact obtenues par simulations de compactage d'assemblages faiblement polydisperses (*DGL*). Les plus grandes forces ( $f > \langle f \rangle$ ,  $\langle f \rangle \simeq 1.44$ ) sont distribuées suivant une loi exponentielle. Parallèlement, ils ont constaté que les parois pouvaient avoir une certaine importance sur les distributions (distribution *gaussienne* possible pour les forces les plus grandes).

À partir des assemblages que nous avons compactés de façon isotrope sous une pression de confinement  $p = 1$ , nous proposons à notre tour d'étudier la densité de probabilité des forces normales de contact.

Quatres ensembles de forces sont étudiés :

- $\mathcal{F}_{4900}$  : 148146 valeurs associées à 17 échantillons de 4900 particules,
- $\mathcal{F}_{3025}$  : 56935 valeurs associées à 10 échantillons de 3025 particules,
- $\mathcal{F}_{1936}$  : 84136 valeurs associées à 23 échantillons de 1936 particules,
- $\mathcal{F}_{1024}$  : 92730 valeurs associées à 51 échantillons de 1024 particules.

Dans un premier temps, on peut remarquer à l'aide de la figure 2.13 que les forces moyennes calculées pour chacun de ces ensembles de forces ne sont pas indépendantes de la taille du système. En effet, comme pour la mesure de la compacité<sup>11</sup>, les forces moyennes  $\langle f \rangle$  sont influencées par des effets de bords dus aux parois. Néanmoins,  $\langle f \rangle$  possède une limite évaluée à  $0.740 \pm 0.008$  dans la limite des grands systèmes. Quatre nouveaux ensembles de forces sont alors créés. Notés  $\mathcal{F}_N^{\setminus p}$ , ( $N=1024, 1936, 3025, 4900$ ), ces ensembles de forces sont définis par  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_N^{\setminus p} \cup \mathcal{F}_N^p$  et  $\mathcal{F}_N^{\setminus p} \cap \mathcal{F}_N^p = \{\emptyset\}$ .  $\mathcal{F}_N^p$ , ( $N=1024, 1936, 3025, 4900$ ) correspond aux forces de contact portées par les particules proches des parois (tous les contacts à une distance inférieure ou

10. Indépendantes du nombre de particules constituant les échantillons.

11. fig. 2.12, page 65.

égale à  $3a$  des parois) pour chaque taille  $N$  de système. Ces nouveaux ensembles de forces comportent chacun les nombres de valeurs suivant :

$N$	1024	1936	3025	4900
$\mathcal{F}_N^{\setminus p}$	41291	48330	36961	106568
$\mathcal{F}_N^p$	51439	35806	19975	41578

TAB. 2.1 – Nombre de forces de contact dans les ensembles  $\mathcal{F}_N^{\setminus p}$  et  $\mathcal{F}_N^p$  pour chaque taille  $N$  d'assemblage.

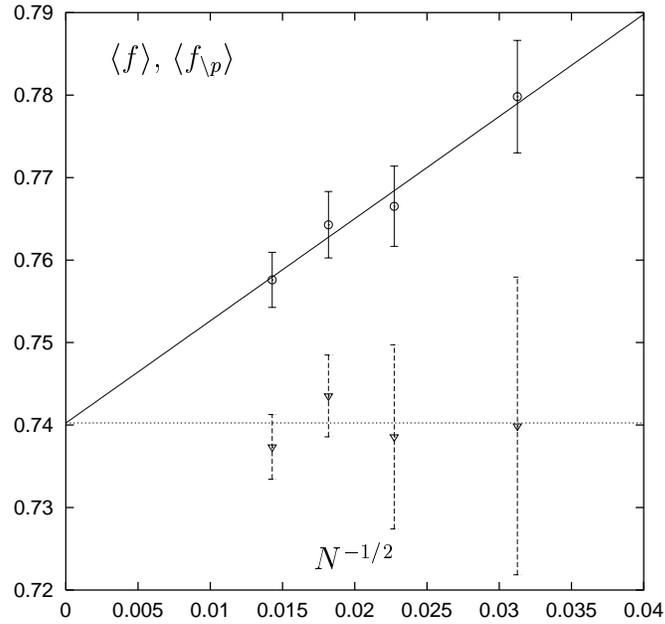


FIG. 2.13 – Valeurs moyennes  $\langle f \rangle$  des  $f \in \mathcal{F}_N$  (cercles) et valeurs moyennes  $\langle f_{\setminus p} \rangle$  des  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}_N^{\setminus p}$  (triangles) en fonction de la taille  $N$  du système. Les barres d'erreur ont pour demi-hauteur l'écart type des moyennes des forces de chaque échantillon par rapport à la moyenne ( $\langle f \rangle, \langle f_{\setminus p} \rangle$ ) des forces, toutes configurations confondues. La droite oblique est une approximation linéaire du type  $a \times N^{-1/2} + b$  avec  $a = 1.24 \pm 0.41$  et  $b = 0.740 \pm 0.008$ . La ligne horizontale (en pointillés) est la droite d'équation  $y = 0.740$ .

En conséquence, à la différence des auteurs cités précédemment, la description statistique des forces normales de contact est donc réalisée sur les ensembles  $\mathcal{F}_N^{\setminus p}$  et  $\mathcal{F}_N^p$  et non pas sur  $\mathcal{F}_N$ .

Dans les développements à suivre, nous serons amenés à tester différentes hypothèses : deux ensembles de forces sont-ils issus d'une même loi de probabilité ou

des valeurs de forces peuvent-elles être issues d'une densité de probabilité théorique donnée? Pour ce faire, on utilise le test de vraisemblance de *Kolmogorov et Smirnov* que l'on propose de décrire brièvement.

### Test de vraisemblance de *Kolmogorov et Smirnov* [84]

Le test de *Kolmogorov et Smirnov* permet d'apprécier l'acceptabilité de l'hypothèse suivante: « cet ensemble de valeurs résulte d'un tirage aléatoire suivant la densité de probabilité théorique  $\rho$  ». Ce test porte sur l'écart entre l'histogramme cumulé  $S_n(x)$  d'un ensemble de valeurs  $x$  et la densité de probabilité cumulée  $P(x)$  d'une loi théorique  $\rho(x)$  donnée, fig. 2.14. Il s'agit alors de calculer la distance  $D_{cal} = \max_{-\infty < x < \infty} |S_n(x) - P(x)|$  et d'évaluer la *probabilité* pour qu'il n'existe pas de distance  $D$  plus grande que  $D_{cal}$ .

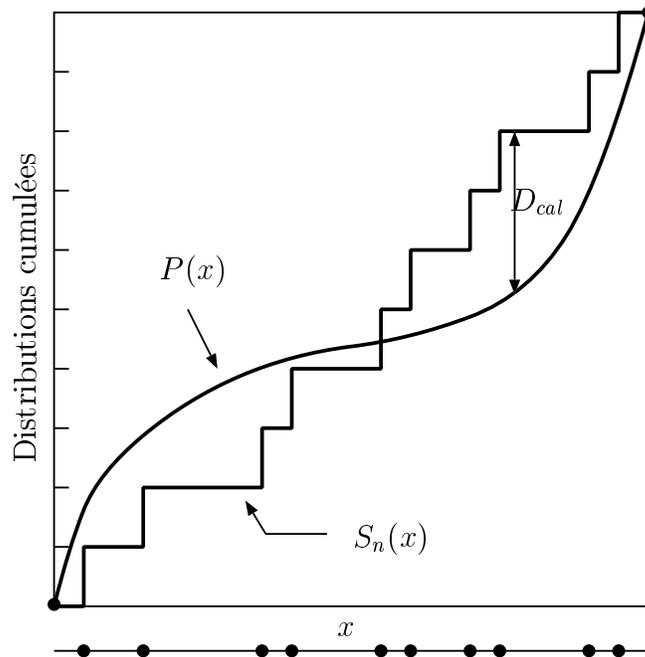


FIG. 2.14 – Une distribution de valeurs (représentées par les points en abscisse) est comparée à une densité de probabilité cumulée  $P(x)$ . Une distribution cumulée  $S_n(x)$  est construite à partir des valeurs mesurées de  $x$ .  $D_{cal}$  est la plus grande distance entre  $S_n(x)$  et  $P(x)$ .

Le test de *Kolmogorov et Smirnov* permet de calculer la *probabilité* pour qu'une distribution statistique et une densité de probabilité soient différentes. En conséquence, on peut alors évaluer l'indice de *vraisemblance* de la proposition « cet ensemble de valeurs résulte d'un tirage aléatoire suivant la densité de probabilité théorique  $\rho$  ». Sous une forme légèrement différente du test, il est aussi possible

de calculer la *probabilité* pour que deux ensembles de valeurs ne soient pas issus d'un tirage au sort suivant une même densité de probabilité.

En pratique, nous serons amenés à utiliser le test de *Kolmogorov et Smirnov* - que l'on note *K.-S.* - soit pour tester une densité de probabilité théorique sur un ensemble de valeurs, soit pour constater si deux ensembles de valeurs répondent à un même loi statistique. Dans ces cas, on calculera l'*indice de vraisemblance*  $P_{K.-S.}$  dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Si  $P_{K.-S.} < 0.05$  alors l'hypothèse d'égalité entre deux distributions ou une distribution et une densité de probabilité théorique est catégoriquement rejetée. Si  $P_{K.-S.} > 0.05$ , alors l'hypothèse d'égalité est *vraisemblable*.

Dans le cadre de l'étude statistique des valeurs des forces de contact, nous avons pu observer à l'aide du test de *K.-S.* qu'il était statistiquement raisonnable de considérer les forces normales  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}_N^{\setminus p}, (N=1024, 1936, 3025, 4900)$  comme étant toutes issues d'une seule et même densité de probabilité. Le test de *K.-S.* est mis en œuvre pour les couples d'ensembles de forces suivant :  $(\mathcal{F}_{4900}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{3025}^{\setminus p})$ ,  $(\mathcal{F}_{4900}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{1936}^{\setminus p})$ ,  $(\mathcal{F}_{4900}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{1024}^{\setminus p})$ ,  $(\mathcal{F}_{3025}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{1936}^{\setminus p})$ ,  $(\mathcal{F}_{3025}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{1024}^{\setminus p})$  et  $(\mathcal{F}_{1936}^{\setminus p}, \mathcal{F}_{1024}^{\setminus p})$ . Dans le pire des cas, nous obtenons  $P_{K.-S.} = 0.09$  et  $P_{K.-S.} = 0.97$  pour le cas le plus favorable. Le résultat de ce test autorise donc à adopter l'hypothèse d'une distribution statistique des  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}_N^{\setminus p}$  indépendante de la taille  $N$  du système.

L'étude de la distribution statistique des forces de contact est réalisée sur l'ensemble  $\mathcal{F}^{\setminus p} = \mathcal{F}_{4900}^{\setminus p} \cup \mathcal{F}_{3025}^{\setminus p} \cup \mathcal{F}_{1936}^{\setminus p} \cup \mathcal{F}_{1024}^{\setminus p}$ . Sur la figure 2.15(a) on donne la densité de probabilité  $\rho [ f_{\setminus p} ]$  des forces normales de contact  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}^{\setminus p}$ . Cette densité étant représentée suivant une échelle semi-logarithmique, seules les forces les plus grandes sont aisément identifiables. Sur la figure 2.15(b), on dessine la densité de probabilité du logarithme des forces :  $\rho [ \log f_{\setminus p} ] = f_{\setminus p} \rho [ f_{\setminus p} ]$ .

Nous proposons maintenant de déterminer une formule analytique approximant au mieux la statistique des forces normales de contact. Toujours grâce au test de *K.-S.*, il est possible de constater si un ensemble de valeurs peut être issu d'une densité de probabilité théorique donnée. Nous observons donc qu'avec un indice de vraisemblance  $0.05 < P_{K.-S.} \leq 0.32$ , il est possible de décrire la statistique de toutes les forces normales de contact à l'aide d'une fonction de la forme :

$$P_{f_{\setminus p}} \propto f_{\setminus p}^b \exp(-c f_{\setminus p}^d) \quad \text{avec} \quad 0 < b, c < 1 \quad \text{et} \quad d > 1.5 \quad (2.5)$$

L'indice de vraisemblance de *K.-S.* le plus élevé,  $P_{K.-S.} = 0.32$ , a été obtenu à l'aide du jeu de valeurs  $b = 0.172$ ,  $c = 0.72$  et  $d = 2.016$ . Cette fonction d'interpolation est représentée par la ligne continue sur la figure 2.15(a). On remarque qu'avec  $d \simeq 2$ , comme Makse<sup>12</sup> et coll. [64], on décrit la statistique des forces les plus grandes par une *Gaussienne*.

12. Étude statistique réalisée sur des sphères molles.

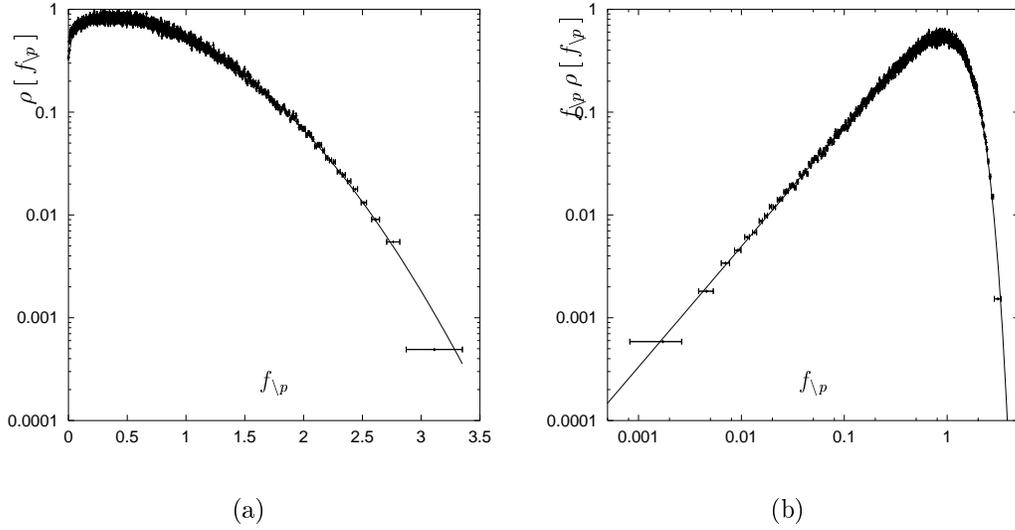


FIG. 2.15 – *Statistique des valeurs des forces de contact  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}^{\setminus p}$ . Les barres horizontales ont pour demi-longueur l'écart type. La courbe continue est une fonction d'approximation du type  $a f_{\setminus p}^b \exp(-c f_{\setminus p}^d)$  avec  $a = 1.088$ ,  $b = 0.172$ ,  $c = 0.72$  et  $d = 2.016$ .*

Sur la figure 2.15(b), c'est la fonction  $f_{\setminus p} \cdot P_{f_{\setminus p}}$  qui est tracée. La densité de probabilité théorique (2.5) permet de bien approximer la statistique de toutes les forces  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}_N^{\setminus p}$  avec un indice de vraisemblance raisonnable. Il est néanmoins possible d'obtenir des approximations de plus grande *qualité* au sens du test de *Kolmogorov et Smirnov* en opérant une distinction entre les forces les plus petites et les forces les plus grandes.

Dans le cas d'une étude des forces les plus petites,  $0 < f_{\setminus p} \leq 0.1$ , soit 14650 valeurs de forces, la densité de probabilité analytique se réduit à  $P_{f_{\setminus p}} \propto f_{\setminus p}^{\alpha^{\setminus p}}$  avec  $\alpha^{\setminus p} = 0.15 \pm 0.02$ . L'indice de vraisemblance maximal,  $P_{K.-S.} = 0.79$ , est obtenu pour  $\alpha^{\setminus p} \simeq 0.14$ . On remarquera ici que l'on obtient une loi de puissance *croissante* alors que Radjai [85] et Ouaguenouni [77] proposent une loi de distribution plate pour décrire la statistique des forces les plus petites.

Pour les forces les plus grandes, toujours sous le contrôle du test de *K.-S.*, il est possible d'ajuster de nombreuses densités de probabilité analytiques en faisant varier les constantes  $b$ ,  $c$  et  $d$ . S'il l'on ne considère que la densité de probabilité des forces supérieures à la moyenne,  $\langle f_{\setminus p} \rangle = 0.74$ , l'ajustement des constantes de l'équation (2.5),  $b = 0.95$ ,  $c = 1.46$  et  $d = 1.52$ , conduit à un indice de vraisemblance  $P_{K.-S.} = 0.98$ . Si l'on se restreint aux forces  $f_{\setminus p} \geq 2$ , on a alors  $b = 6.4$ ,  $c = 6$  et  $d = 1$  pour  $P_{K.-S.} = 0.998$ . Comme on peut le voir, même en mettant en œuvre un test statistique très strict, il est particulièrement complexe, voire impossible, de déterminer «la» densité de probabilité théorique la plus adaptée. Par contre,

il est plus aisé de lister les densités de probabilité théoriques inappropriées. La description des forces les plus grandes,  $f_p \geq 2$ , par une simple loi exponentielle analogue à celle proposée par Radjai et coll. [87, 89] fait partie des lois catégoriquement rejetées par le test de *Kolmogorov et Smirnov*<sup>13</sup> dans le cas de notre modèle d'assemblage.

Traitons maintenant le cas des forces situées dans la proximité des parois,  $f_p \in \mathcal{F}^p$ . Comme précédemment, on examine pour les ensembles de forces  $\mathcal{F}_{4900}^p$ ,  $\mathcal{F}_{3025}^p$ ,  $\mathcal{F}_{1936}^p$  et  $\mathcal{F}_{1024}^p$  l'hypothèse d'une densité de probabilité indépendante de  $N$  à l'aide du test de *K.-S.* Dans le pire des cas, nous obtenons  $P_{K.-S.} = 0.06$  et  $P_{K.-S.} = 0.50$  pour le cas le plus favorable. L'hypothèse d'une seule et même densité de probabilité décrivant la statistique des forces proches des parois est donc envisageable. Soit  $\mathcal{F}^p = \mathcal{F}_{4900}^p \cup \mathcal{F}_{3025}^p \cup \mathcal{F}_{1936}^p \cup \mathcal{F}_{1024}^p$  l'ensemble de toutes les forces des contacts à une distance inférieure ou égale à  $3a$  des parois. Sur les figures 2.16(a) et 2.16(b), on montre respectivement les densités de probabilité des forces les plus grandes et des forces les plus faibles.

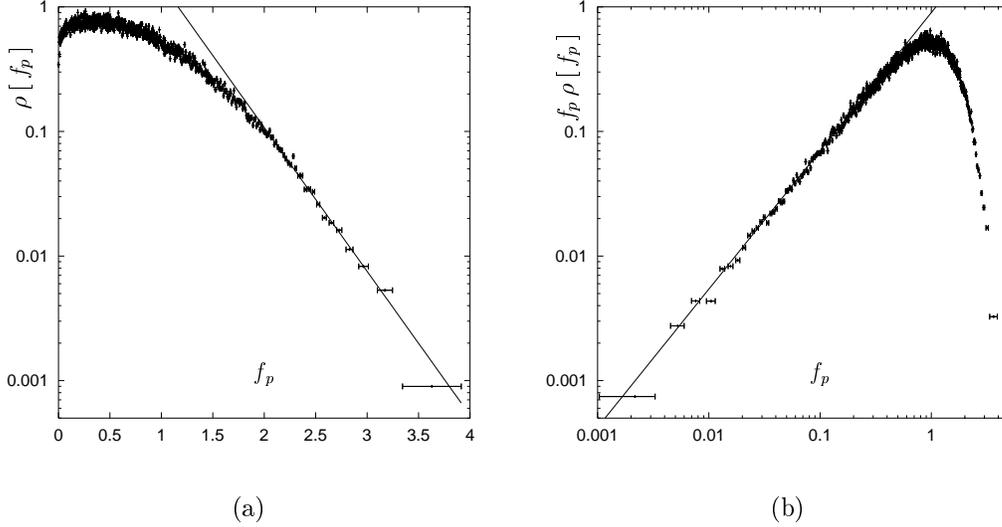


FIG. 2.16 – *Statistique des valeurs des forces de contact  $f_p \in \mathcal{F}^p$ . Les barres horizontales ont pour demi-longueur l'écart type. Les droites sont associées aux fonctions d'approximations suivantes: (a)  $22 \cdot \exp(-2.66 \cdot f_p)$  et (b)  $0.9 \cdot f_p^{1+\alpha^p}$ , avec  $\alpha^p = 0.13 \pm 0.02$  et  $\langle f_p \rangle = 0.8$*

À la différence des  $f_p \in \mathcal{F}^{\setminus p}$ , il n'a pas été possible pour  $f_p \in \mathcal{F}^p$  de déterminer une densité de probabilité théorique unique décrivant la statistique des forces les plus petites au plus grandes.

---

13.  $P_{K.-S.} \ll 0.05$ .

Pour les forces les plus petites,  $0 < f_p \leq 0.1$ , soit 9133 valeurs de forces, la densité de probabilité est assimilable à une loi puissance (fig. 2.16(b)),  $P_{f_p} \propto f_p^{\alpha^p}$ , avec  $\alpha^p = 0.13 \pm 0.02$ . L'indice de vraisemblance maximal,  $P_{K.-S.} = 0.82$ , est obtenu pour  $\alpha^p \simeq 0.12$ . On remarque ici que  $\alpha^p \simeq \alpha^{\setminus p}$ . Un test de *K.-S.* valide l'hypothèse d'une densité de probabilité unique  $P_f \propto f^\alpha$  avec  $\alpha = 0.14 \pm 0.01$  pour toutes les forces  $0 < f \leq 0.1$ ,  $f \in \{\mathcal{F}^{\setminus p} \cup \mathcal{F}^p\}$ . L'indice de vraisemblance maximal  $P_{K.-S.} = 0.73$  est alors obtenu pour  $\alpha \simeq 0.14$ .

Pour les forces  $f_p \in \mathcal{F}^p$  les plus grandes, et en particulier si  $f_p \geq 2$ , il est possible de considérer que  $\rho[f_p]$  suit la loi  $P_{f_p} \propto \exp(-cf_p)$  avec  $c = 2.65 \pm 0.06$ , l'indice de vraisemblance maximal étant obtenu pour  $c \simeq 2.66$ ,  $P_{K.-S.} = 0.87$ .

Cette étude des intensités des forces normales de contact nous montre que les descriptions statistiques proposées par Radjai [85] et coll. [87, 89] ne semblent pas adaptées à notre modèle d'assemblage granulaire, en particulier pour les forces les plus grandes. La loi exponentielle décroissante associée à la densité de probabilité des *grandes* forces est ici une hypothèse intimement liée à la proximité des forces de contact et des parois. Par contre, les conditions aux limites de type parois ne semblent pas influencer la statistique des forces normales de contact les plus petites.

### 2.3.3 Répartition des contraintes dans les assemblages sous chargement isotrope

Afin de quantifier l'hétérogénéité des valeurs des forces de contact, on étudie la répartition des contraintes moyennes par couches. Le découpage en couronnes des assemblages est schématisé sur la figure 2.17, page 72. L'épaisseur de chaque couche est égale au diamètre  $a$  de la plus grosse particule.

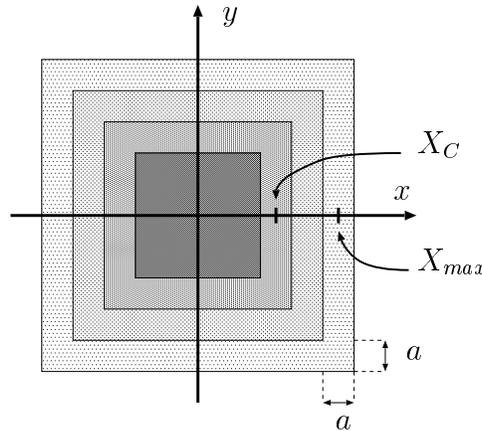


FIG. 2.17 – Schéma du découpage des assemblages par couronnes de largeur constante  $a$ .

On représente sur la figure 2.18 (page 73) le nombre de contacts moyen par unité de surface en fonction de la position  $X_c$  de la couche étudiée pondérée par la coordonnée  $X_{max}$  de la couche la plus extérieure. À l'exception des effets de bords, on observe que la densité de contacts est assez homogène.

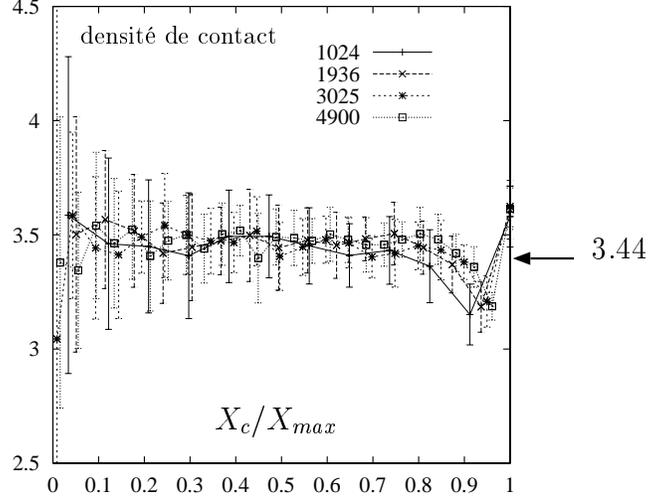


FIG. 2.18 – Densité de contacts pour chaque couche de grains positionnée en  $X_c$ . Les 4 tailles d'assemblages sont considérées. Les barres d'erreurs ont pour demi-hauteur l'écart type. La flèche sur la figure 2.18 indique la densité de contact moyenne pour tous les échantillons.

Pour chaque couche, on calcule la densité de contacts ainsi que les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ <sup>14</sup> à l'aide de l'expression d'homogénéisation de Love<sup>15</sup> écrite dans le cas bidimensionnel :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{S} \sum_{\alpha=1}^{N_c} f_{\alpha}^i l_{\alpha}^j \quad (2.6)$$

où

- $S$  est la surface d'assemblage granulaire concernée par l'étude,
- $N_c$  est le nombre de contacts dans la surface  $S$ ,
- $f_{\alpha}^i$  est la coordonnée  $i$  ( $i = x, y$ ) de la force dans le contact  $\alpha$ ,
- $l_{\alpha}^j$  est la coordonnée  $j$  du vecteur de contact qui lie les centres des particules en contact.

14.  $\sigma_{xx}$  est la contrainte suivant la direction horizontale et  $\sigma_{yy}$  est la contrainte suivant la direction verticale.

15. Love [57] référencée dans Christoffersen et coll. [21].

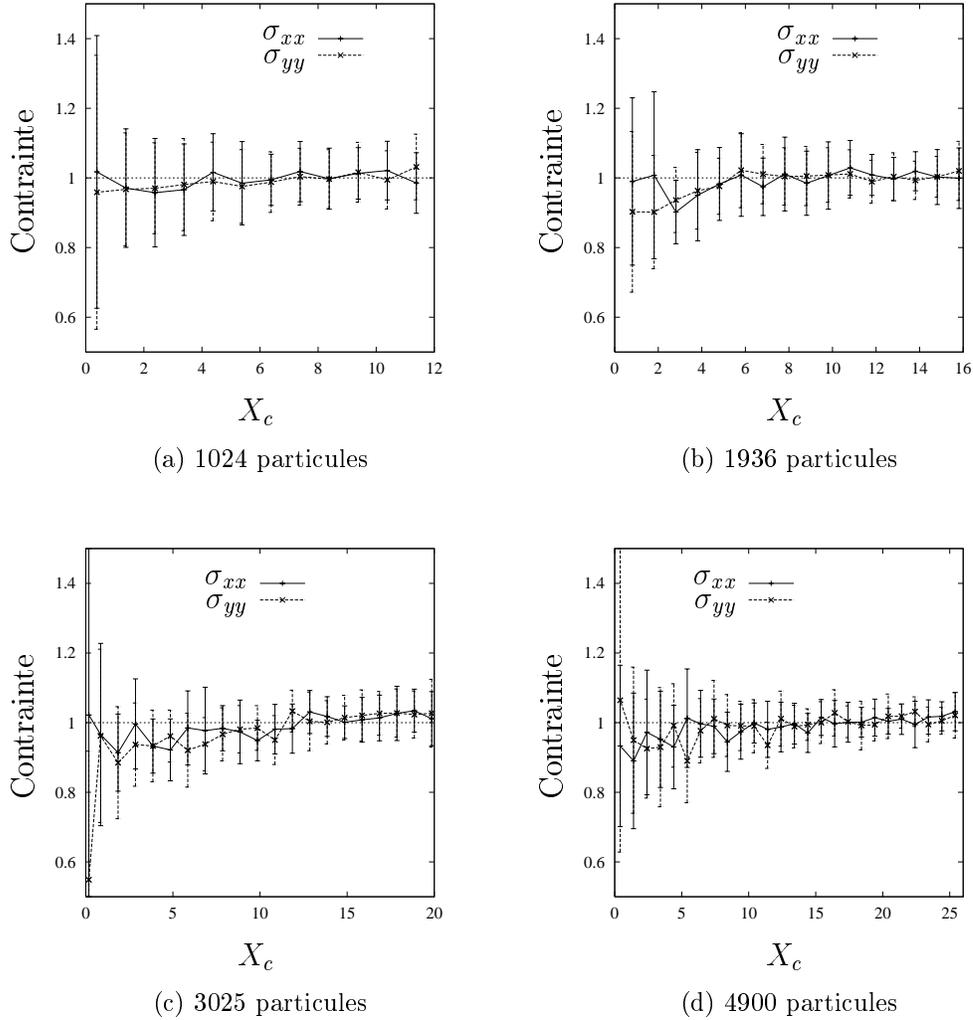


FIG. 2.19 –  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  moyens par couche pour les 4 tailles d'assemblages. La ligne horizontale rappelle que les contraintes imposées suivant les directions  $x$  et  $y$  sont égales à l'unité.

Sur la figure 2.19 (page 74), on représente, pour 4 tailles d'échantillons, les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  moyennées dans chaque couche considérée. En abscisse, on trouvera cette fois  $X_c$  plutôt que  $X_c/X_{max}$ . On rappelle qu'une pression de confinement égale à l'unité est appliquée sur tous les assemblages. On peut remarquer que lorsqu'on se dirige vers le centre des échantillons, les contraintes diminuent. Cette décroissance reste néanmoins faible puisqu'elle n'est jamais inférieure à 90% de la contrainte imposée. Par contre, on montre bien que les contraintes moyennes, près des parois, sont légèrement supérieures à la contrainte isotrope imposée sur les parois.

Cette analyse par couche d'épaisseur constante met en évidence une homogénéité assez satisfaisante des contraintes. Bien que ces dernières soient sensiblement plus faibles au centre que dans le reste de l'assemblage, le processus de compactage qui consiste à partir d'un assemblage *dilué* puis à appliquer des forces sur les parois semble adéquat. Un tel procédé ne peut certainement pas être utilisé dans le cas où le frottement entre les particules est pris en compte. Le risque serait alors d'avoir des disparités bien plus fortes entre le centre et le bord des échantillons dues à des phénomènes de voûtes formées par les particules.

### 2.3.4 Étude des orientations de contact

Il est important de vérifier l'existence d'une éventuelle anisotropie des orientations de contact due au mode de préparation des échantillons. En effet, on peut craindre que les angles  $0$  et  $\pm 90$  degrés soient des orientations privilégiées directement issues des deux directions de compression. Sur les figures 2.20 et 2.21, on représente les orientations de contact des  $f \in \mathcal{F}^{16}$  (moitié gauche) et des  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}^{\setminus p}$  (moitié droite).

Ces histogrammes mettent en évidence une proportion non négligeable de contacts *particules-parois* dans les directions  $0^\circ$  et  $\pm 90^\circ$ . Pour  $\mathcal{F}^{\setminus p}$ , on constate que la forme des échantillons et le mode d'application des contraintes n'induisent pas d'anisotropie significative.

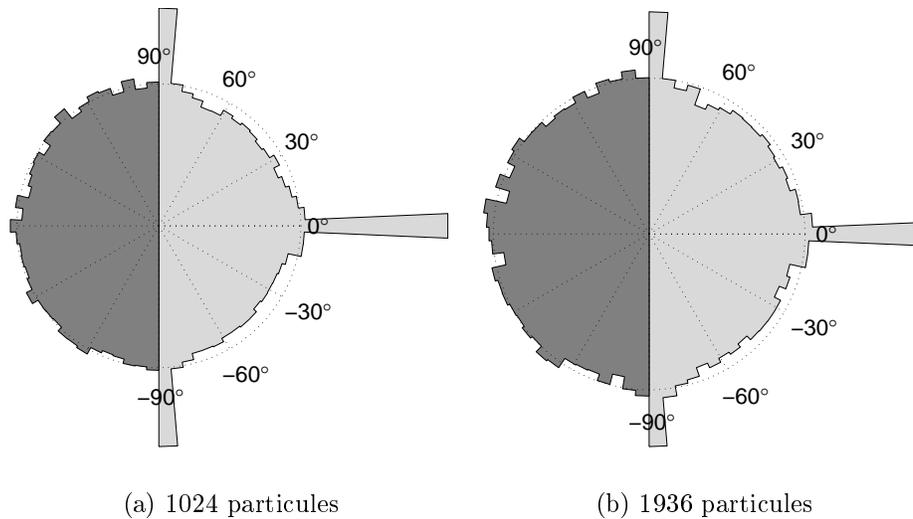


FIG. 2.20 – Voir légende fig. 2.21.

16.  $\mathcal{F}$  = ensemble constitué de toutes les forces normales de contact.

17.  $\mathcal{F}^{\setminus p}$  = ensemble des forces de contact distantes d'au moins  $3a$  des parois.

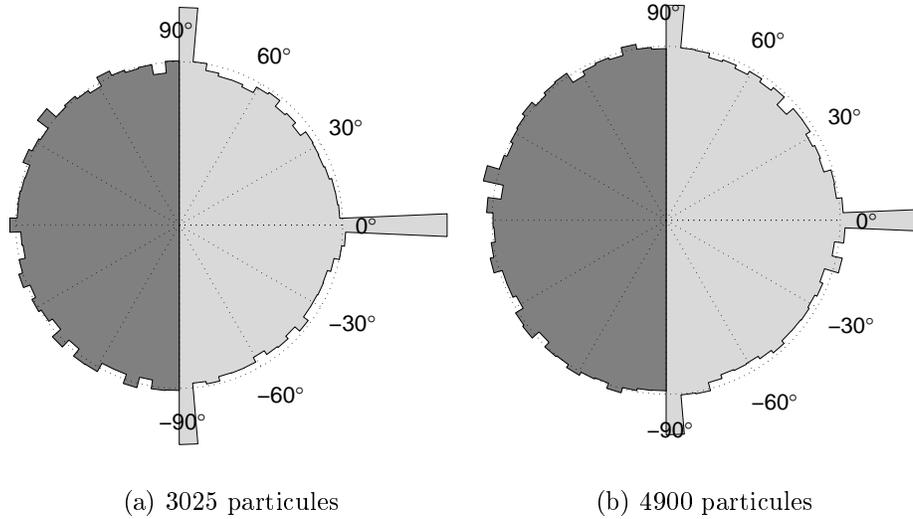


FIG. 2.21 – *Proportion de contacts par classes de  $5^\circ$  pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^p$ . Le gris clair (moitié droite des histogrammes) est associé à  $\mathcal{F}$  et le gris foncé (moitié gauche des histogrammes) correspond à  $\mathcal{F}^p$ . Les orientations de contact sont calculées entre  $-90$  et  $+90$  degrés.*

Radjai et ses collaborateurs [88] ont montré qu'il existait des directions privilégiées des forces de contact en fonction de leur intensité. Cette anisotropie des orientations de contact en fonction des intensités des forces intergranulaires est principalement présente lors d'essais avec application d'un déviateur de contrainte. Bien que la sollicitation mécanique soit ici isotrope, nous allons vérifier que le mode opératoire du compactage ne conduit pas à des orientations de contact privilégiées dans les directions du mouvement. À partir des forces  $f_{\setminus p} \in \mathcal{F}_N^{\setminus p}$ , on distingue les forces supérieures et inférieures à la moyenne de toutes les forces de  $\mathcal{F}_N^{\setminus p}$ . Cette distinction est réalisée pour les 4 tailles d'assemblages,  $N = 1024, 1936, 3025, 4900$ . On note ces nouveaux ensembles de forces de la manière suivante<sup>18</sup> :

$$\mathcal{F}_{\triangleleft}^{\setminus p} = \{f_{\triangleleft}^{\setminus p} \in \mathcal{F}^{\setminus p}, f_{\triangleleft}^{\setminus p} < \langle f^{\setminus p} \rangle\} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F}_{\triangleright}^{\setminus p} = \{f_{\triangleright}^{\setminus p} \in \mathcal{F}^{\setminus p}, f_{\triangleright}^{\setminus p} > \langle f^{\setminus p} \rangle\} \quad (2.8)$$

Les histogrammes d'orientations de contact (fig. 2.22) permettent de constater que les contacts qui portent les forces  $f_{\triangleleft}^{\setminus p}$  et  $f_{\triangleright}^{\setminus p}$  sont répartis de façon homogène dans toutes les directions du cercle trigonométrique. Ceci est vérifié quelle que soit la taille des assemblages.

<sup>18</sup>. L'indice  $N$  est volontairement omis afin d'alléger la notation.

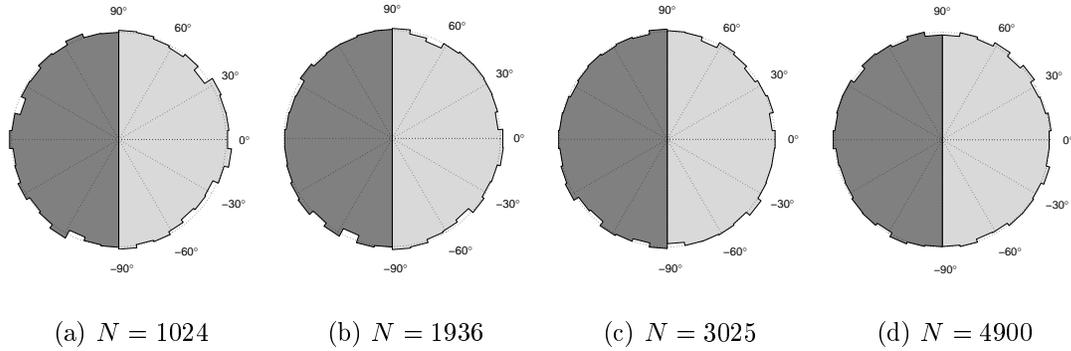


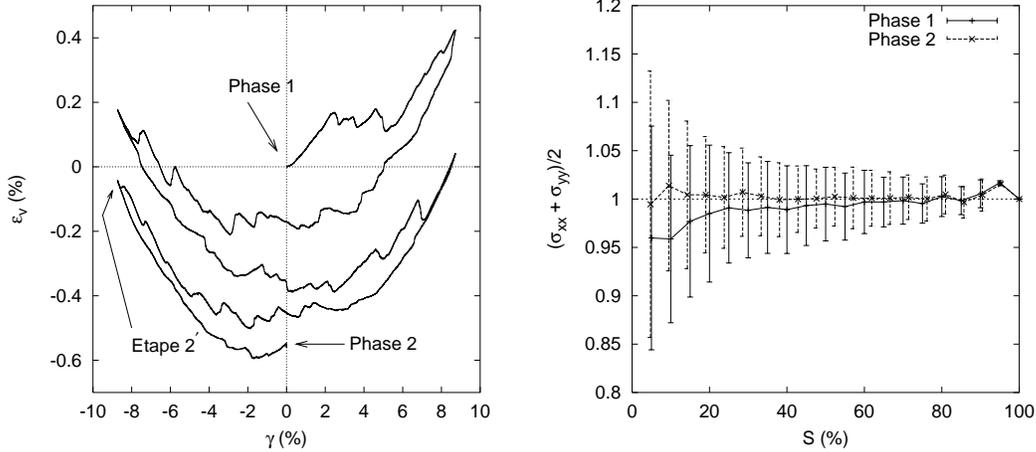
FIG. 2.22 – *Proportion de contacts par classes de  $10^\circ$ . Les angles sont calculés entre  $-90$  et  $+90$  degrés. Les histogrammes en gris clair (moitié droite) correspondent aux orientations des contacts de  $\mathcal{F}_\Delta^{\lambda p}$ . Les histogrammes en gris foncé (moitié gauche) correspondent aux orientations des contacts de  $\mathcal{F}_\nabla^{\lambda p}$ .*

## 2.4 Remarques sur la densification par chargement cyclique

Flavigny et Lanier [39] proposent plusieurs essais mécaniques cycliques pour densifier les assemblages de particules. La question qui se pose alors est de savoir dans quelle mesure ces sollicitations cycliques influent sur l’homogénéité des échantillons. Nous l’avons déjà mentionné en introduction de ce chapitre, les chemins de chargement de compression et d’extension sans rotation des axes principaux sont très efficaces pour densifier les échantillons. On peut cependant craindre que cela engendre de fortes anisotropies des orientations de contact dans les directions de sollicitations. Dans le cas de l’essai avec rotation continue des axes principaux de contraintes, la densification de l’échantillon est réelle (Flavigny et Lanier [39], Joer et coll. [48]). L’influence de ce mode de densification sur l’homogénéité des assemblages n’a pas été étudiée, mais on peut craindre que cette dernière soit difficilement atteinte. En effet, Joer et coll. [48] ont montré qu’il existait un décalage entre les directions principales de contraintes et les directions principales de déformation. Or, Calvetti et coll. [14] ont montré que les directions principales de déformation étaient identiques aux directions principales d’anisotropie des orientations de contact. Ce type d’essai risque donc de générer des échantillons avec une certaine anisotropie des orientations de contact après déchargement (retour à un état isotrope en contrainte).

Dans la section précédente, nous avons pu constater que notre mode de préparation des échantillons par compression isotrope via des forces extérieures appliquées sur les parois, permettait d’obtenir une homogénéité satisfaisante en termes d’orientation des contacts. Mais comme nous avons pu le voir sur la figure 2.19

(page 74), les contraintes sont systématiquement légèrement plus faibles au centre des assemblages. Cet effet, lié au mode de préparation associé aux conditions aux limites choisies, peut être partiellement estompé en intégrant une étape supplémentaire dans le mode opératoire. Nous avons réalisé quelques essais de cisaillement cyclique<sup>19</sup> sur des systèmes à 1024 particules qui ont permis d'améliorer sensiblement l'homogénéité dans la répartition des contraintes. La figure 2.23(a) montre la déformation volumique d'un échantillon à 1024 particules en fonction de l'angle de cisaillement imposé.



(a) Déformation volumique  $\epsilon_v$  fonction du cisaillement  $\gamma$ .

(b) Répartition des contraintes moyennes  $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$  fonction de la proportion de surface  $S$  d'échantillon étudiée.

FIG. 2.23 – Essai cyclique de cisaillement simple à chargement verticale constant. La phase 1 correspond à l'état isotrope calculé avant les cycles de cisaillement et la phase 2 à l'état isotrope après les cycles de cisaillement.

Une étude statistique sur 20 échantillons à 1024 particules permet de montrer que l'on passe d'un indice des vides de  $0.2045 \pm 0.1714 \cdot 10^{-4}$  (phase 1) à  $0.1972 \pm 0.1244 \cdot 10^{-4}$  (phase 2) en deux cycles complets de cisaillement. Sur la figure 2.23(b), on montre la répartition des contraintes en fonction de la surface d'échantillon traité avant (phase 1) et après (phase 2) les deux cycles de cisaillement. On peut donc constater que ce chargement cyclique permet d'obtenir une meilleure répartition des contraintes au sein des assemblages. Néanmoins, sur la figure 2.24, on observe que les cycles de cisaillement conduisent à une légère anisotropie des orientations de contact (fig. 2.24(a)) et plus particulièrement pour les

19. Cisaillement à déformation contrôlée avec contraintes verticales constantes. Calculs réalisés avec la *DM*,  $k_n/p = 100000$ . Les états d'équilibre de la phase 2 sont calculés à l'aide la *DGL* en appliquant un chargement isotrope  $p$ .

contacts qui portent les forces les plus grandes (fig. 2.24(c)).

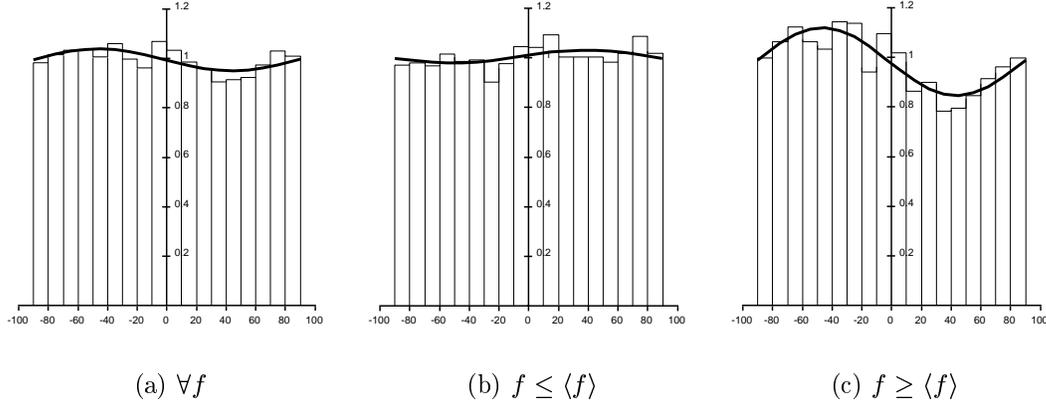


FIG. 2.24 – Histogramme des  $N_c(\theta) = N_c^2(\theta)/N_c^1(\theta)$ . Les traits gras sont des approximations de Fourier:  $N(\theta) = N_0 \cdot (1 + d \cos 2(\theta - \theta_0))$  (a)-Évolution des orientations de tous les contacts (à l'exception des contacts dans le voisinage des parois).  $N_0 = 0.99$ ,  $d = 0.05$  et  $\theta_0 = -46^\circ$ . (b)- Évolution des orientations des contacts portant des forces normales inférieures à la moyenne de toutes les forces.  $N_0 = 1.01$ ,  $d = 0.03$  et  $\theta_0 = 38^\circ$ . (c)- Évolution des orientations des contacts portant des forces normales supérieures à la moyenne de toutes les forces.  $N_0 = 0.98$ ,  $d = 0.14$  et  $\theta_0 = -47^\circ$ .

On représente sur ces 3 figures la variable  $N_c(\theta) = N_c^2(\theta)/N_c^1(\theta)$ , où  $\theta$  est l'orientation des contacts. Les contacts<sup>20</sup> sont rassemblés sur 18 classes de  $10^\circ$  en fonction de leurs orientations avec  $\theta \in [-90^\circ ; +90^\circ]$ .  $N_c^1(\theta)$  et  $N_c^2(\theta)$  sont respectivement les histogrammes des orientations de contact des phases 1 et 2, avant et après les cycles de cisaillement. Figure 2.24(a),  $N_c(\theta)$  met en évidence un léger gain de contacts dans la direction  $\theta_0 = -46^\circ$ . Sur les figures suivantes, une distinction est opérée sur les contacts en fonction de l'intensité de la force qui leur est associée : fig. 2.24(b) et 2.24(c) représentent respectivement les évolutions des orientations des contacts portant des forces normales inférieures et supérieures à la moyenne de toutes les forces de contact. Alors que les orientations des contacts portant des forces inférieures à la moyenne ne sont que légèrement modifiées au cours des cycles, on remarque assez nettement une direction privilégiée des contacts qui portent les forces les plus grandes, avec un gain notable de contacts dans la direction  $\theta_0 = -47^\circ$ . Cette anisotropie des orientations des contacts portant des forces  $f \geq \langle f \rangle$  est directement due à la dernière étape du chargement cyclique (schématisée fig. 2.25), passage de l'étape 2' à la phase 2.

20. Les contacts dans le voisinage direct des parois (distance aux parois  $< 3a$ ) ne sont pas pris en compte dans cette analyse.

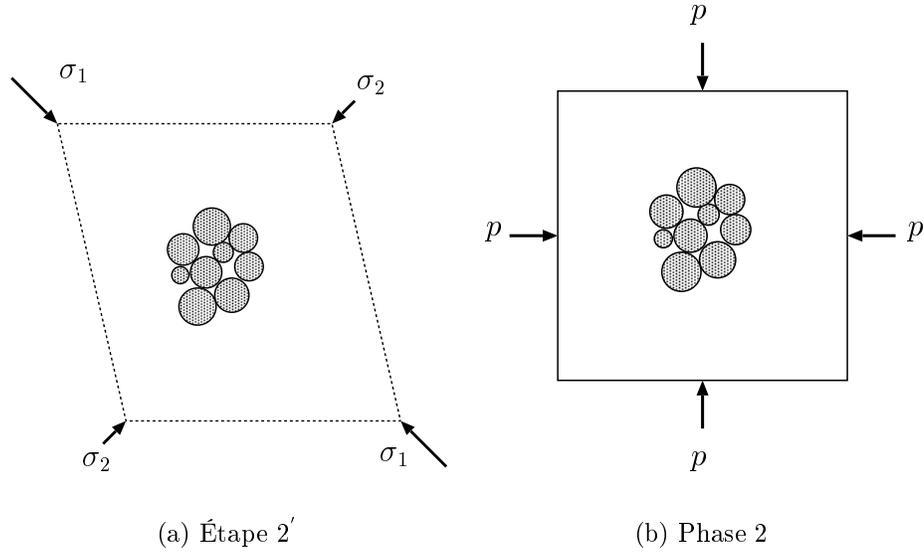


FIG. 2.25 – Schéma de la dernière étape du chargement cyclique : passage de l'étape 2' (a) à la phase 2 (b).  $\sigma_1 =$  contrainte principale majeure,  $\sigma_2 =$  contrainte principale mineure et  $p =$  chargement isotrope.

Les contacts portant des forces inférieures à  $\langle f \rangle$  sont donc respectivement gagnés et perdus dans la direction associée à la contrainte principale mineure et majeure. Pour les contacts portant des forces supérieures à  $\langle f \rangle$  c'est le contraire, gain dans la direction de la contrainte principale majeure et perte dans la direction principale mineure. Bien que ces évolutions d'orientation de contacts aient été calculées entre deux états sous chargement isotrope  $p$ , on met ici en évidence l'importance de l'histoire du chargement.

Cette différence d'évolution des orientations des contacts en fonction de l'intensité des forces n'est pas nouvelle et a déjà été observée par Radjai [86] à l'occasion d'un essai de cisaillement simple et sans déchargement.

Ces essais de chargement cycliques permettent donc d'améliorer la répartition des contraintes au sein des assemblages, au détriment de l'homogénéité des orientations de contact.

## Conclusion

Le mode de préparation des échantillons par compactage, par le biais des deux méthodes *DC* et *DGL* peut paraître *lourd*. Il est néanmoins le seul moyen de respecter au mieux le *cahier des charges* que l'on s'est fixé en terme d'équilibre et d'homogénéité (orientations des contacts et répartition des contraintes quasi-homogènes). La *DGL* n'étant pas dédiée aux grands déplacements, l'utilisation

préalable de la *DC* est indispensable. Malgré les effets de bord, les conditions aux limites de type parois rigides ont été préférées aux conditions aux limites périodiques pour leur simplicité de mise en œuvre algorithmique.

Le mode de préparation des assemblages de particules sans frottement par simple application de forces sur les parois permet d'obtenir des systèmes denses et quasi-homogènes. De plus, l'utilisation de la *Dynamique Granulaire Lubrifiée* permet le respect du caractère rigide des particules et des conditions d'équilibre avec un fort niveau de précision numérique, de sorte que l'on obtient des structures isostatiques de contacts actifs dans les systèmes sans frottement et sans cohésion. Une conséquence directe de ceci est la possibilité de calculer, à partir d'une simple liste de contacts et d'un chargement extérieur, les forces de contact en faisant abstraction de toute loi de contact autre que les conditions de *Signorini*. Dans le chapitre qui suit, nous allons voir qu'en exploitant cette propriété d'isostaticité, il est possible de définir une nouvelle approche numérique dédiée aux milieux granulaires en n'introduisant aucun autre paramètre que les données géométriques pour déterminer les trajectoires des particules. Ceci va permettre de mieux évaluer l'influence des modèles de dynamique mis en œuvre dans les méthodes de simulation *classiques* sur le comportement global des milieux granulaires et par conséquent, de mieux comprendre le comportement mécanique de ces milieux discrets.



# Chapitre 3

## Origine géométrique du comportement mécanique des assemblages granulaires denses sans frottement, *Méthode Géométrique Quasi-Statique*

### Introduction

Dans ce mémoire, on propose d'étudier le comportement mécanique d'assemblages modèles<sup>1</sup> constitués de disques rigides polydisperses sans frottement sous chargement biaxial à contraintes contrôlées. Afin de s'affranchir des diverses difficultés liées aux méthodes numériques *DM* ou *DC*, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle approche exempte des équations de la dynamique, fondée sur des considérations purement *géométriques* : les particules n'ont pas de masse, il n'y a pas de forces d'inertie et les mécanismes de dissipation n'interviennent pas de façon explicite. Cette nouvelle approche, la *Méthode Géométrique Quasi-Statique (MGQS)*, exploite une propriété forte des assemblages constitués de particules sans frottement et sans cohésion : soumis à un chargement extérieur, un assemblage de disques rigides polydisperses, à l'équilibre, constitue génériquement des structures (listes des contacts qui portent des forces non nulles) isostatiques [41, 78, 68, 94].

Dans un premier temps, on donnera quelques notations et définitions. On présentera ensuite la propriété d'isostaticité des assemblages de particules rigides sans frottement et sans cohésion.

Une conséquence directe de cette propriété est la possibilité de calculer l'ensemble des forces de contact dans un assemblage par des considérations purement

---

1. Assemblages modèles présentés chapitre 2.

géométriques (liste de contacts, position des particules, loi de contact : conditions de *Signorini*). On montrera alors, dans le cas d'un chargement biaxial, qu'il existe des plages variables de déviateurs pour lesquels les échantillons se comportent comme des solides rigides.

À la limite du chargement extérieur supporté, une force de contact s'annule. Il y a donc instabilité et l'équilibre est rompu. Tout en respectant la condition d'imperméabilité, un mouvement conduisant à une diminution de l'énergie potentielle des forces extérieures est possible. La propriété d'isostaticité permettra de déterminer les uniques<sup>2</sup> vitesses des grains à la rupture de l'équilibre.

La recherche d'un nouvel état d'équilibre<sup>3</sup> par le déplacement des particules suivant leurs vitesses respectives sera alors présenté sur un assemblage granulaire simplifié. Ce modèle minimaliste introduira les concepts mis en œuvre dans la *Méthode Géométrique Quasi-Statique* qui sera détaillée dans la foulée.

### 3.1 Notations et définitions

Soient  $n$  disques rigides sans frottement et sans cohésion, numérotés  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On désigne par  $N_{dl} = 2n$  le nombre total de degrés de liberté cinématiques, notés  $\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq N_{dl}$ .

Chaque particule possède deux degrés de liberté<sup>4</sup> notés  $\gamma$ .  $(V_{(\gamma,i)})_{1 \leq \gamma \leq 2}$  désigne les vitesses de la particule  $i$ . On note  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel (de dimension  $N_{dl}$ ) des vitesses des particules.  $(V_{(\gamma,i)})_{\substack{1 \leq \gamma \leq 2 \\ 1 \leq i \leq n}}$  est un élément de  $\mathcal{V}$ . On utilisera plutôt la notation suivante, où l'on fait correspondre à  $(\gamma,i)$  l'indice  $\mu$ . On note  $\underline{v} = (v_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  le vecteur des vitesses des particules.

Soit  $\underline{F}^{ext} = (F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  le vecteur des forces extérieures appliquées sur les degrés de liberté  $\mu$ . On note  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel (de dimension  $N_{dl}$ ) des forces extérieures.

À l'équilibre, les forces extérieures exercées sur chaque grain sont équilibrées par les forces intérieures  $(F_\mu^{int})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$ .

$$F_\mu^{ext} + F_\mu^{int} = 0 \quad (1 \leq \mu \leq N_{dl}) \quad (3.1)$$

#### Opérateur **H** et degré d'hyperstaticité

Soit  $l$  un contact entre deux particules  $i$  et  $j$ . On désigne par  $f_l$  la force normale de contact entre les deux grains, portée par le vecteur directeur unitaire  $\vec{n}_l$ , allant de  $i$  vers  $j$ , perpendiculaire au plan tangent au contact. Étant données  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$ , les positions respectives des centres des particules  $i$  et  $j$ , on a :

- 
- 2. Les vitesses sont uniques à un facteur positif commun près.
  - 3. Nouvelle liste de contacts capables de supporter le chargement biaxial imposé.
  - 4. Pas de frottement, les rotations des particules sont ignorées.

$$\vec{n}_l = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \quad (3.2)$$

On note  $\mathfrak{f}$  l'espace vectoriel (de dimension  $N_c$ ) des forces de contact. On note  $\underline{f} = (f_l)_{1 \leq l \leq N_c}$  le vecteur des forces de contact.  $N_c$  est le nombre total de contacts intergranulaires.

On note  $h_l = \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\| - R_i - R_j$  la distance entre deux particules.  $R_i$  et  $R_j$  désignent respectivement les rayons des particules  $i$  et  $j$ . Deux particules sont en contact lorsque  $h_l = 0$ . La force dans le contact  $f_l$  est positive lorsque les deux particules  $i$  et  $j$  se repoussent. La loi de contact est la condition d'impénétrabilité de *Signorini* :

$$\begin{cases} f_l = 0 & \text{si } h_l > 0 \\ f_l > 0 & \text{si } h_l = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La somme des forces intérieures au système, sur la particule  $i$ , s'écrit :

$$\vec{F}_i^{int} = - \sum_{\substack{l=(i,j) \\ j \neq i}} f_l \vec{n}_l \quad (3.4)$$

Associées au chargement extérieur  $(F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$ , les équations (3.1) et (3.4) permettent d'écrire :

$$\sum_l H_{(\mu,l)} f_l = F_\mu^{ext} \quad (1 \leq \mu \leq N_{dl}) \quad (3.5)$$

On définit ainsi une application linéaire,  $\mathbf{H} : \mathfrak{f} \longrightarrow \mathcal{F}$ , où  $\mathfrak{f}$  est l'espace vectoriel (de dimension  $N_c$ ) des forces de contact statiquement admissibles<sup>5</sup> et  $\mathcal{F}$  est l'espace (de dimension  $N_{dl}$ ) des forces extérieures. Dans l'exemple 3.1 on donne une représentation matricielle  $\underline{\underline{H}}$  de l'opérateur linéaire  $\mathbf{H}$ .

---

**Exemple 3.1** Soient 3 particules  $i$ ,  $j$  et  $k$  en contact, soumises aux forces extérieures  $\vec{F}_i^{ext}$ ,  $\vec{F}_j^{ext}$  et  $\vec{F}_k^{ext}$ . On cherche à exprimer les forces dans chaque contact, en fonction du chargement extérieur, par les équations (3.5) et (3.4).

---

5. Forces de contact  $\underline{f}$  en équilibre avec le chargement extérieur,  $\underline{\underline{H}} \underline{f} = \underline{F}^{ext}$ .

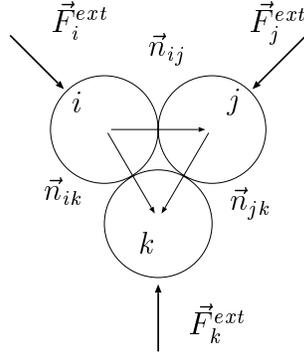


FIG. 3.1 – Assemblage de 3 disques soumis à des forces extérieures

$$\begin{aligned}\vec{F}_i^{int} &= -f_{ij}\vec{n}_{ij} - f_{ik}\vec{n}_{ik} \\ \vec{F}_j^{int} &= -f_{ji}\vec{n}_{ji} - f_{jk}\vec{n}_{jk} \\ \vec{F}_k^{int} &= -f_{ki}\vec{n}_{ki} - f_{kj}\vec{n}_{kj}\end{aligned}$$

or  $\vec{n}_{ji} = -\vec{n}_{ij}$ ,  $\vec{n}_{ki} = -\vec{n}_{ik}$  et  $\vec{n}_{kj} = \vec{n}_{jk}$ . Chaque particule a deux degrés de liberté notés  $X$  et  $Y$ . En écrivant (3.1) on obtient :

$$\begin{bmatrix} -F_i^{intX} \\ -F_i^{intY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ij}^X & n_{ik}^X \\ n_{ij}^Y & n_{ik}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ij} \\ f_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{extX} \\ F_i^{extY} \end{bmatrix}$$

où  $H_{(\mu=(i,X),ij)} = n_{ij}^X$ , etc...

De même,

$$\begin{bmatrix} -F_j^{intX} \\ -F_j^{intY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{ij}^X & n_{jk}^X \\ -n_{ij}^Y & n_{jk}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ij} \\ f_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j^{extX} \\ F_j^{extY} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -F_k^{intX} \\ -F_k^{intY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{ik}^X & -n_{jk}^X \\ -n_{ik}^Y & -n_{jk}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ik} \\ f_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k^{extX} \\ F_k^{extY} \end{bmatrix}$$

On assemble les différentes matrices carrées pour obtenir la relation matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_i^{extX} \\ F_i^{extY} \\ F_j^{extX} \\ F_j^{extY} \\ F_k^{extX} \\ F_k^{extY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_{ij}^X & n_{ik}^X & 0 \\ n_{ij}^Y & n_{ik}^Y & 0 \\ -n_{ij}^X & 0 & n_{jk}^X \\ -n_{ij}^Y & 0 & n_{jk}^Y \\ 0 & -n_{ik}^X & -n_{jk}^X \\ 0 & -n_{ik}^Y & -n_{jk}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ij} \\ f_{ik} \\ f_{jk} \end{bmatrix} \\
\underline{F}^{ext} &= \underline{\underline{H}} \underline{f}
\end{aligned}$$


---

Les forces de contacts associées à un chargement extérieur nul sont les éléments du sous-espace vectoriel  $\mathbf{S}_0$  de  $\mathfrak{f}$ , noyau de  $\mathbf{H}$ .

$$\mathbf{S}_0 = Ker \mathbf{H} = \{f_l \in \mathfrak{f}; \mathbf{H}(f_l) = 0\} \quad (3.6)$$

La dimension de  $\mathbf{S}_0$ , notée  $h$ , est le nombre de systèmes indépendants de forces de contacts auto-équilibrées.

$\Rightarrow h$  est appelé degré d'*hyperstaticité*.

### Opérateur $\mathbf{G}$ et degré d'hypostaticité

Soit  $\delta\mathcal{V}$  l'espace vectoriel (de dimension  $N_c$ ) des vitesses relatives normales dans les contacts  $l$ . On définit les vitesses relatives normales entre deux particules  $i$  et  $j$  par le produit scalaire

$$\delta V_l = (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \cdot \vec{n}_l \quad (3.7)$$

(3.7) satisfait la convention  $\delta V_l > 0$  lorsque les deux particules se rapprochent. On note  $\underline{\delta v} = (\delta v_l)_{1 \leq l \leq N_c}$  le vecteur des vitesses relatives normales pour l'ensemble des  $N_c$  contacts  $l$ .

(3.7) définit l'application linéaire  $\mathbf{G} : \mathcal{V} \longrightarrow \delta\mathcal{V}$ . Dans l'exemple 3.2 on donne une représentation matricielle  $\underline{\underline{G}}$  de l'opérateur linéaire  $\mathbf{G}$ .

---

**Exemple 3.2** Dans le cadre du petit assemblage de grains présenté dans l'exemple 3.1, on propose de faire une description de la matrice  $\underline{\underline{G}}$ . On utilise les mêmes notations que dans l'exemple précédent.

$$\begin{aligned}
\delta V_{ij} &= (\vec{V}_i - \vec{V}_j) \cdot \vec{n}_{ij} = v_i^X n_{ij}^X + v_i^Y n_{ij}^Y - v_j^X n_{ij}^X - v_j^Y n_{ij}^Y \\
\delta V_{ik} &= (\vec{V}_i - \vec{V}_k) \cdot \vec{n}_{ik} = v_i^X n_{ik}^X + v_i^Y n_{ik}^Y - v_k^X n_{ik}^X - v_k^Y n_{ik}^Y \\
\delta V_{jk} &= (\vec{V}_j - \vec{V}_k) \cdot \vec{n}_{jk} = v_j^X n_{jk}^X + v_j^Y n_{jk}^Y - v_k^X n_{jk}^X - v_k^Y n_{jk}^Y
\end{aligned}$$

L'écriture sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} \delta V_{ij} \\ \delta V_{ik} \\ \delta V_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ij}^X & n_{ij}^Y & -n_{ij}^X & -n_{ij}^Y & 0 & 0 \\ n_{ik}^X & n_{ik}^Y & 0 & 0 & -n_{ik}^X & -n_{ik}^Y \\ 0 & 0 & n_{jk}^X & n_{jk}^Y & -n_{jk}^X & -n_{jk}^Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^X \\ v_i^Y \\ v_j^X \\ v_j^Y \\ v_k^X \\ v_k^Y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta v} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \underline{v}$$


---

On note  $\mathcal{C}$  l'image de  $\mathbf{G}$  ( $Im \mathbf{G} = \mathcal{C}$ ).  $\mathcal{C}$  est le sous-espace vectoriel des vitesses relatives normales dites compatibles. Le noyau de  $\mathbf{G}$  est l'espace vectoriel  $\mathcal{M}$  des mécanismes, c'est-à-dire les vitesses qui donnent lieu à des vitesses relatives normales nulles dans les contacts.

$$\mathcal{M} = Ker \mathbf{G} = \{(v_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}} \in \mathcal{V} ; \mathbf{G}(v_\mu) = 0\} \quad (3.8)$$

$\mathcal{M}$  est l'espace vectoriel des champs de vitesse qui ont pour image 0 dans  $\delta\mathcal{V}$  par  $\mathbf{G}$ . La dimension de cet espace vectoriel est notée  $k$ .

$$Dim(Ker \mathbf{G}) = Dim \mathcal{M} = k \quad (3.9)$$

$\Rightarrow k$  est appelé degré d'hypostaticité, nombre de mécanismes indépendants (mouvements d'ensemble qui maintiennent les contacts).

Par définition, un système est dit *rigide* s'il n'y a pas de mécanisme autre que les mouvements globaux de corps rigides.

### Théorème des puissances virtuelles

Soit  $(\delta v_l)_{1 \leq l \leq N_c} \in \mathcal{V}$ , image de  $(v_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  par  $\mathbf{G}$ . Soient  $(f_l)_{1 \leq l \leq N_c}$  des forces de contacts statiquement admissibles avec le chargement  $(F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$ . Le théorème des puissances virtuelles énonce que la puissance des forces intérieures est égale à la puissance des forces extérieures. À l'aide des équations d'équilibre on établit alors :

$$\sum_{l=1}^{N_c} f_l \delta v_l = \sum_{\mu=1}^{N_{dl}} F_\mu^{ext} v_\mu \quad (3.10)$$

Cette relation est une égalité avec, à gauche, des termes associés aux *contacts* et à droite, des termes qui concernent les *degrés de liberté*. Une conséquence directe de ce théorème est  $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{G}}^T$  (on peut vérifier cette propriété à partir des expressions de  $\underline{\underline{H}}$  et  $\underline{\underline{G}}$  des exemples 3.1 et 3.2).

On a en effet les égalités suivantes, la dernière résultant de la définition même de la transposition :

$$(\underline{f} \mid \underline{\delta v}) = (\underline{f} \mid \underline{\underline{G}} \underline{v}) = (\underline{F}^{ext} \mid \underline{v}) = (\underline{\underline{H}} \underline{f} \mid \underline{v}) = (\underline{\underline{G}}^T \underline{f} \mid \underline{v}) \quad (3.11)$$

où la notation  $(\cdot \mid \cdot)$  correspond à un produit scalaire.

On établit alors que l'espace des vitesses relatives normales cinématiquement admissibles est l'orthogonal des forces de contact auto-équilibrées :

$$S_0 = Ker \mathbf{H} = Ker \mathbf{G}^T = (Im \mathbf{G})^\perp = \mathcal{C}^\perp \quad (3.12)$$

d'où

$$(\delta v_l)_{1 \leq l \leq N_c} \perp S_0 \quad (3.13)$$

En conséquence, la définition de l'opérateur linéaire  $\mathbf{H}$  autorise la relation :

$$\begin{aligned} N_c &= Dim(Ker \mathbf{H}) + Dim(Im \mathbf{H}) \\ \text{d'où } N_c &= h + Dim(Im(\mathbf{G}^T)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

De même, la définition de l'opérateur linéaire  $\mathbf{G}$  donne :

$$\begin{aligned} N_{dl} &= Dim(Ker \mathbf{G}) + Dim(Im \mathbf{G}) \\ \text{d'où } N_{dl} &= k + Dim(Im \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Comme  $Dim(Im(\mathbf{G}^T)) = Dim(Im \mathbf{G}) = Dim(\mathcal{C})$ , on établit finalement via (3.14) et (3.15) que :

$$N_c + k = N_{dl} + h \quad (3.16)$$

où

- $N_c$  est le nombre total de forces de contact non nulles de la liste des contacts qui supportent le chargement extérieur,
- $N_{dl}$  est le nombre total de degrés de liberté de la structure formée par les forces de contact non nulles de la liste des contacts qui supportent le chargement extérieur,

- $h$  est le degré d'hyperstaticité (nombre de systèmes indépendants de forces de contacts auto-équilibrées) de la structure qui supporte le chargement extérieur,
- $k$  est le degré d'hypostaticité (nombre de mécanismes indépendants ou nombre de mouvements indépendants qui maintiennent les contacts) de la structure qui supporte le chargement extérieur.  $k$  comprend le nombre de mouvements de corps rigide.

### 3.2 Isostaticité des assemblages de disques non frottants et sans cohésion

Guyon et coll. [41] ont été parmi les premiers à s'intéresser à la rigidité des systèmes de barres articulées dans le contexte de modèles d'assemblages granulaires. Leur étude, principalement basée sur des assemblages ordonnés, a permis de constater que des structures de barres articulées pouvaient présenter des mécanismes de déformation complexes. Par la suite, Ouaguenouni et coll. [80] établissent que l'on a un *problème isotatique*<sup>6</sup> quand on met en équilibre un assemblage de grains rigides non frottants. Ils observent que l'on a une *structure isostatique*<sup>7</sup> dans le cas particulier où les grains sont des disques rigides [77, 79]. Parallèlement, Moukarzel [68, 69] est arrivé à des conclusions semblables, tout comme Tkachenko et Witten [105, 106]. Ces derniers ont été plus loin puisqu'ils ont aussi énoncé le fait que des disques ou des sphères rigides, sans frottement, en contact sous un chargement extérieur donné, constituaient des structures dépourvues de mécanismes. Leurs conclusions semblent néanmoins incomplètes puisqu'ils ont omis de mettre en évidence que l'absence d'hypostaticité était liée au caractère unilatéral de la loi de contact (conditions de *Signorini*, absence de cohésion), comme l'a fait remarquer Roux [94]. Il a montré que les assemblages de disques (ou sphères) polydisperses sans frottement et sans cohésion constituaient génériquement des structures isostatiques (absence d'hyperstaticité et degré hypostaticité nul en dehors des mouvements de corps rigides).

De façon synthétique [94] montre : Soit un assemblage de particules rigides polydisperses, en contact et à l'équilibre sous un chargement extérieur donné. Quels que soient la forme des grains et le signe des forces de contact (compression ou traction<sup>8</sup>), en l'absence de frottement intergranulaire, le degré d'hyperstaticité de la structure qui porte des forces de contact est nul. Le degré d'hypostaticité (nombre de mécanismes indépendants) n'est alors pas forcément nul mais non pénalisant pour l'équilibre de la structure à partir du moment où le chargement extérieur ne

---

6. Un problème est isotatique si le degré d'hyperstaticité est nul ( $h = 0$ ) et si le chargement ne met pas en mouvement les mécanismes éventuellement présents ( $\underline{F}^{ext} \perp \mathcal{M}$ ).

7. Une structure isostatique est telle que le problème soit isostatique  $\forall \underline{F}^{ext}$ ,  $k = 0$  (on admet  $0 < k \leq 3$  s'il s'agit de mouvements de corps rigide).

8. Cohésion.

met pas en mouvement ces mécanismes. Dans le cas particulier de disques ou de sphères sans cohésion entre les grains, le nombre de mécanismes est strictement réduit au nombre de mouvements d'ensemble de corps rigides ( $\leq 3$  en 2D). Tout mécanisme supplémentaire entraîne alors une instabilité. De tels assemblages de grains constituent alors génériquement des structures isostatiques. Pour les assemblages sans frottement, l'absence d'hyperstaticité est une propriété générique (ou topologique). Elle n'est pas affectée par une transformation qui change la forme des grains à partir du moment où cette dernière respecte la topologie du réseau de contacts. En revanche, l'absence de mécanisme (hypostaticité nulle) dans un état d'équilibre est une propriété géométrique qui dépend de la forme des grains. Cette propriété n'est prouvée que pour les disques ou les sphères non cohésives.

Pour les assemblages modèles présentés chapitre précédent<sup>9</sup>, sous un chargement extérieur donné, on a donc absence d'hyperstaticité et d'hypostaticité, d'où  $N_{dl} = N_c$  si l'on ne considère que les disques participant à la structure *active*, c'est-à-dire les particules qui portent des forces strictement positives. Si  $n$  disques portent des forces intergranulaires non nulles, en tenant compte des conditions aux limites (2 parois rigides possédant chacune une seule liberté de translation), on obtient :  $N_c = 2 \times n + 2$ .

### 3.3 Assemblages de disques non frottants à l'équilibre

#### 3.3.1 Stabilité et minimum local de l'énergie potentielle

Soit  $N_{dl}$  le nombre total de degrés de liberté d'une structure isostatique constituée de disques<sup>10</sup> en contact, portant des forces strictement positives, sous un chargement extérieur donné. Soit  $(f_l)_{1 \leq l \leq N_c}$  un jeu de forces de contact, où  $N_c$  désigne le nombre total de contacts  $l$ . On désigne par  $(F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  le vecteur des forces extérieures appliquées sur les  $N_{dl}$  degrés de liberté. On note  $(x_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  les coordonnées de chacun des degrés de liberté de la structure. L'énergie potentielle de la structure soumise à un chargement extérieur est définie à une constante près par

$$E_p = - \sum_{\mu=1}^{N_{dl}} F_\mu^{ext} x_\mu \quad (3.17)$$

La variation de l'énergie potentielle en fonction du temps est :

---

9. Assemblée de disques rigides polydisperses, sans frottement et sans cohésion.

10. Disques rigides, polydisperses, sans frottement et sans cohésion.

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ - \sum_{\mu=1}^{N_{di}} F_{\mu}^{ext} x_{\mu} \right] = - \sum_{\mu=1}^{N_{di}} F_{\mu}^{ext} v_{\mu} \quad (3.18)$$

Or, d'après (3.10), on déduit que la dérivée par rapport au temps de l'énergie potentielle est égale à la puissance des forces intérieures :

$$\frac{dE_p}{dt} = - \sum_{l=1}^{N_c} f_l \delta v_l \quad (3.19)$$

À l'équilibre, les forces de contacts sont positives et les vitesses relatives normales sont nulles. La dérivée de l'énergie potentielle est alors nulle. Supposons que l'on affecte à chaque particule une vitesse aléatoire, tout en satisfaisant les conditions d'impenétrabilité de *Signorini*. Pour tous les contacts portant une force  $f_l > 0$ , la condition d'impenétrabilité (3.3) implique  $\delta v_l \leq 0$ . D'après (3.19), on en déduit alors que tout mouvement des grains respectant (3.3) conduit, au premier ordre en  $t$ , à une augmentation de l'énergie potentielle,  $\frac{dE_p}{dt} \geq 0$ . En l'absence de mécanisme dans la structure des contacts,  $\frac{dE_p}{dt} > 0$ , l'énergie potentielle est donc minimisée à l'équilibre. À chaque état d'équilibre d'une structure rigide ( $k = 0$ ), correspond un minimum local de l'énergie potentielle. Un état d'équilibre est *stable* lorsque la variation de l'énergie potentielle au premier ordre en  $t$  est nulle et positive aux ordres supérieurs. Lorsque la variation de l'énergie potentielle est nulle au premier ordre en  $t$  mais négative ou nulle aux ordres supérieurs, l'équilibre est alors *instable*. D'une façon générale, s'il existe au moins un mécanisme (autre que le mouvement de corps rigides) dans une structure de contact à l'équilibre, il y a instabilité.

À partir d'une structure isostatique de contacts actifs, il est possible, étant donné un chargement extérieur, de calculer les forces de contacts à l'aide des seules coordonnées des grains. Dans le cas où le chargement extérieur est perpendiculaire au mouvement de corps rigides, la solution est alors unique. Dans ce cas du modèle granulaire étudié dans ce mémoire, en raison de la configuration des conditions aux limites, il n'existe aucun mouvement de corps rigide possible.

On propose maintenant de détailler une méthode matricielle pour calculer ces forces de contact.

### 3.3.2 Calcul géométrique des forces intergranulaires

Soit une liste de disques<sup>11</sup> en contact, à l'équilibre sous le chargement extérieur  $\underline{F}^{ext} = (F_{\mu}^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{di}}$ . On utilise les différentes notations introduites précédemment, à la différence près que les vitesses  $(v_{\mu})_{1 \leq \mu \leq N_{di}}$  disparaissent au profit

11. Disques polydispersés rigides, sans frottement et sans cohésion.

des déplacements  $\underline{u} = (u_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  des degrés de liberté du système. On note  $\mathcal{U}$  l'espace vectoriel des déplacements des  $\mu$  degrés de liberté. On redéfinit ici l'opérateur  $\mathbf{G}$  en termes de déplacements. Soit  $\delta\mathcal{U}$ , l'espace vectoriel des déplacements relatifs normaux des particules en contact. On note  $l$  les contacts entre les couples de particule  $i$  et  $j$ . Le déplacement relatif normal dans le contact  $l$  est défini par :

$$\delta U_l = (\vec{U}_i - \vec{U}_j) \cdot \vec{n}_l \quad (3.20)$$

Comme pour les vitesses relatives normales, cette définition satisfait la convention  $\delta U_l > 0$  lorsque les deux particules se rapprochent. On notera  $\underline{\delta u} = (\delta u_l)_{1 \leq l \leq N_c}$  le vecteur des déplacements relatifs normaux de l'ensemble des contacts  $l$ . (3.20) définit l'application linéaire  $\mathbf{G} : \mathcal{U} \rightarrow \delta\mathcal{U}$ . On note  $\underline{\underline{G}}$  la représentation matricielle de  $\mathbf{G}$ . On a alors la relation :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\delta u} & = & \underline{\underline{G}} \quad \underline{u} \\ N_c & & N_c \times N_{dl} \quad N_{dl} \end{array} \quad (3.21)$$

**Remarque :** Ces déplacements sont implicitement supposés infinitésimaux, de sorte qu'ils n'affectent pas la géométrie : hypothèse des petites perturbations (*HPP*).

La structure des contacts actifs étant isostatique, on a  $N_{dl} = N_c$ .  $\mathbf{G}$  est un opérateur injectif car  $k = 0$  et surjectif puisque  $h = 0$ .  $\mathbf{G}$  est donc un opérateur bijectif et sa représentation matricielle  $\underline{\underline{G}}$  est une matrice carrée inversible, tout comme  $\underline{\underline{G}}^T$ .

Or, d'après (3.11), on en déduit :

$$\underline{f} \cdot \underline{\delta u} = (\underline{\underline{G}}^T \underline{f}) \cdot \underline{u} = \underline{F}^{ext} \cdot \underline{u} \quad (3.22)$$

d'où

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{f} = \underline{F}^{ext} \quad (3.23)$$

$$\underline{f} = (\underline{\underline{G}}^T)^{-1} \underline{F}^{ext} \quad (3.24)$$

(3.24) permet donc de calculer l'ensemble des forces de contact  $f_l$  de façon unique.

Afin de calculer les forces de contact  $f_l$ , nous avons volontairement choisi de ne pas résoudre directement le système linéaire (3.24). En effet, nous avons opté pour une factorisation de *Cholesky* [40] qui implique de travailler avec une matrice

symétrique. Pour ce faire, chaque contact est assimilé à une barre élastique, de raideur arbitraire  $k_l$ . Chaque force de contact  $f_l$  est alors définie par :

$$\vec{f}_l = k_l \delta U_l \vec{n}_l \quad (3.25)$$

Écrite pour chaque contact de la structure isostatique, l'équation (3.25) permet d'obtenir :

$$\underline{f} = \underline{\mathcal{K}} \underline{\delta u} \quad (3.26)$$

où  $\underline{\mathcal{K}}$  est une matrice diagonale ( $N_c \times N_c$ ) constituée des raideurs  $k_l$  de chaque contact  $l$ .

Avec (3.21),(3.23) et (3.26), on obtient:

$$\underline{F}^{ext} = \underline{K} \underline{u} \quad (3.27)$$

où  $\underline{K} = \underline{G}^T \underline{\mathcal{K}} \underline{G}$  est la matrice de rigidité du système linéaire.

Étant donné un chargement extérieur  $\underline{F}^{ext}$  et une matrice de rigidité  $\underline{K}$ , il convient donc de calculer le champ de déplacement  $\underline{u}$  par la résolution du système linéaire

$$\underline{u} = \underline{K}^{-1} \underline{F}^{ext}$$

Une fois  $\underline{u}$  calculé, les équations (3.21) et (3.26) nous permettent alors de déterminer les forces de contact  $\underline{f}$ .

Les raideurs  $k_l$  affectées à chaque contact  $l$  influent sur les déplacements calculés mais pas sur les forces de contact. En effet, comme

$$\underline{K}^{-1} = (\underline{G}^T \underline{\mathcal{K}} \underline{G})^{-1} = \underline{G}^{-1} \underline{\mathcal{K}}^{-1} (\underline{G}^T)^{-1}$$

passer par  $\underline{K}$  et un calcul de  $\underline{u}$  revient à calculer  $\underline{f}$  comme :

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \underline{\mathcal{K}} \underline{G} \underline{u} \\ &= \underline{\mathcal{K}} \underline{G} \underline{K}^{-1} \underline{F}^{ext} \\ &= \underline{\mathcal{K}} \underline{G} \left[ \underline{G}^{-1} \underline{\mathcal{K}}^{-1} (\underline{G}^T)^{-1} \right] \underline{F}^{ext} \\ &= \left[ \underline{\mathcal{K}} \underline{G} \underline{G}^{-1} \underline{\mathcal{K}}^{-1} \right] (\underline{G}^T)^{-1} \underline{F}^{ext} \\ &= (\underline{G}^T)^{-1} \underline{F}^{ext} \end{aligned}$$

Les déplacements n'ont donc pas de réalité physique. Ce sont avant tout des intermédiaires de calcul. Ils acquièrent un sens physique que si les contacts possèdent réellement un comportement élastique avec une raideur normale  $k_l$ .

À partir d'une liste de contacts actifs, des positions des particules dans le plan et d'un chargement extérieur, on peut donc calculer des forces intergranulaires sans faire intervenir d'autres paramètres que ceux liés à la géométrie. De plus, les forces de contact dépendant linéairement du chargement extérieur, éq. (3.24), il devient aisé de déterminer précisément les chargements extérieurs supportables par une liste de contacts, c'est-à-dire l'ensemble des chargements tels que des assemblages de disques en contact soient en équilibre stable.

### 3.3.3 Notion de plage de chargement extérieur supporté

Une assemblée de grains rigides sans frottement, soumise à un chargement, est à l'équilibre lorsque la structure isostatique formée par ses contacts actifs est capable de supporter le chargement extérieur (toutes les forces de contact de la structure sont positives<sup>12</sup>). À cet état d'équilibre correspond un minimum local de l'énergie potentielle. Considérons une liste de contacts obtenue au terme d'une compression isotrope sur un échantillon confiné par des parois rigides sur lesquelles on applique une pression unitaire  $p$ . Supposons que l'on souhaite rompre cet équilibre par l'application d'un déviateur  $q$ . La question posée est alors de savoir quelle va être la valeur de  $q$  juste nécessaire pour annuler une force de contact et ainsi rompre l'équilibre.

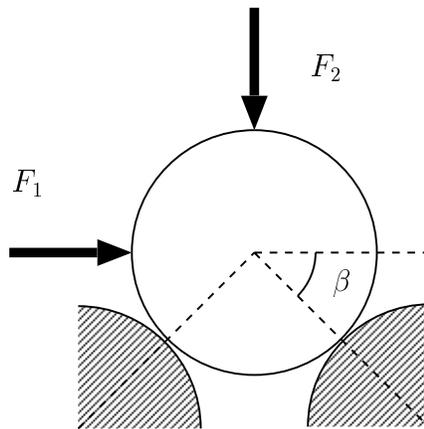


FIG. 3.2 – Particule soumise à deux forces extérieures  $F_1$ ,  $F_2$ . Elle repose sur deux autres particules fixes, partiellement dessinées. Les deux contacts de la particule avec les grains font un angle  $\beta = 45^\circ$  avec l'horizontale.

On représente sur la figure 3.2 (page 95) une particule rigide soumise à un

---

12. Compressions.

chargement extérieur constitué des forces  $F_1$  et  $F_2$ . Cette particule repose sur deux autres grains, fixes. Le frottement est nul. La loi de contact est celle de *Signorini*.

Les contacts sont orientés à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale. Si  $F_2$  reste fixe, l'intervalle de  $F_1$  pour que la particule soit en équilibre stable est  $F_1 = ]-F_2; F_2[$ . Étant donnée la force  $F_2$ , on dit que la plage de chargement supporté par cet empilement est  $F_1 = ]-F_2; F_2[$ . Pour  $F_1 = F_2$  ou  $F_1 = -F_2$ , il existe un mécanisme, l'équilibre est instable. Si on incrémente  $F_1$  de  $\delta F \ll F_2$  pour atteindre  $F_1 = F_2 + \delta F$ , l'équilibre est rompu et l'énergie potentielle de la particule doit être diminuée pour atteindre un nouvel état d'équilibre.

Pour les assemblages modèles présentés chapitre 2, la détermination de la plage de chargement supporté est un peu plus complexe. On montre figure 3.3(a) un petit échantillon, à l'équilibre, sous le chargement isotrope  $p$ .

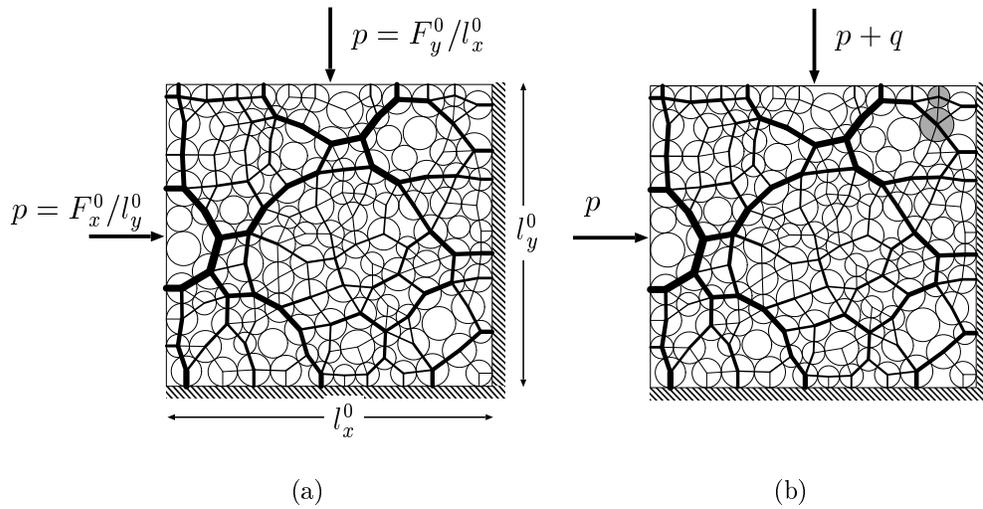


FIG. 3.3 – (a)- *Chargement isotrope*. Chaque contact est représenté par un trait dont l'épaisseur est proportionnelle à l'intensité de la force. (b)- *Application d'un déviateur*. Le contact entre les deux particules grisées porte une force nulle.

Cet assemblage est soumis à un chargement extérieur par l'intermédiaire de forces appliquées sur 2 parois. Le nombre de degrés de liberté du problème est ici de 2 fois le nombre  $N_a$  de particules qui portent des forces positives plus 2 pour les parois. Le chargement extérieur  $\underline{F}^{ext} = (F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{al}, N_{al} = 2N_a + 2}$  comporte  $2N_a$  composantes nulles (forces extérieures sur les particules) plus 2 composantes non nulles pour les forces extérieures appliquées sur les parois, éq. (3.28).

$$\underline{F}^{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ F_x^0 \\ F_y^0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{particule 1, degré de liberté 1} \\ \leftarrow \text{particule 1, degré de liberté 2} \\ \\ \leftarrow \text{particule } N_a, \text{ degré de liberté 1} \\ \leftarrow \text{particule } N_a, \text{ degré de liberté 2} \\ \leftarrow \text{paroi 1} \\ \leftarrow \text{paroi 2} \end{array} \quad (3.28)$$

On incrémente le chargement extérieur  $(F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  de  $(\delta F_\mu^{ext})_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$ . Les forces de contact dépendant linéairement du chargement extérieur, éq. (3.24), les répercussions de l'incrément de chargement sur chaque force de contact sont alors connues :

$$\underline{\delta F}^{ext} = \underline{G}^T \underline{\delta f} \quad (3.29)$$

d'où

$$\underline{\delta f} = (\underline{G}^T)^{-1} \underline{\delta F}^{ext} \quad (3.30)$$

Sous le chargement isotrope  $p$ , (3.24) autorise à écrire :

$$f_l = \beta_l p \quad (3.31)$$

où l'indice  $l$  ( $1 \leq l \leq N_c$ ), repère les  $N_c$  contacts de la liste  $L$ .  $\beta_l$  est un coefficient propre à chaque contact  $l$ , lié à la géométrie de l'assemblage. L'assemblage étant à l'équilibre sous le chargement isotrope  $p$ , toutes les forces de contact  $f_l$  sont strictement positives. On en déduit donc que  $\forall l \in L, \beta_l > 0$ . Le déviateur  $q$  maximal supportable par la liste des contacts est identifié dès qu'apparaît une force de contact  $f_{l_0}$  qui s'annule. D'après (3.30), lorsqu'on rajoute un déviateur au chargement isotrope  $p$ , on a :

$$f_l = \beta_l p + \gamma_l q \quad (3.32)$$

Or, tous les  $\beta_l$  étant positifs, la valeur du déviateur  $q$  tel qu'il existe une force de contact  $f_{l_0} = 0$  implique l'existence d'au moins un  $\gamma_l < 0$ <sup>13</sup>. Soit  $L^-$  la liste des

---

13. Si tel n'était pas le cas, on pourrait appliquer un déviateur arbitrairement élevé sans créer de réarrangement, ce qui n'est jamais observé.

contacts  $l$  tel que  $\gamma_l < 0$ <sup>14</sup>. La valeur du déviateur  $q$  tel qu'il existe un contact  $l_0$  est alors déterminé par :

$$q = \min_{l \in L^-} \left[ \frac{\beta_l}{-\gamma_l} p \right] \quad (3.33)$$

À l'état isotrope, le chargement  $p$  est supporté. Gardant la même liste de contacts, on détermine alors la plage de chargement supérieur supporté:  $[p; p + q]$ . Si l'on désire évaluer la plage totale des chargements supportés par une structure isostatique, on peut aussi calculer un *décrément* de déviateur. Il convient alors, parmi les liens  $l$  tels que  $\gamma_l > 0$ ,  $l \in L^+$ , de déterminer la valeur du déviateur négatif  $q^-$  tel que:

$$q^- = - \min_{l \in L^+} \left[ \frac{\beta_l}{\gamma_l} p \right] \quad (3.34)$$

La plage totale de chargement supporté est alors:  $]p + q^- ; p + q[$ ,  $q^- < 0$  et  $q > 0$ . A l'intérieur de cette plage, l'assemblage reste à l'équilibre avec la même structure de contacts actifs, cette dernière ne comportant aucun mécanisme (structure *rigide*).

Dans le cas général, la borne supérieure ou inférieure du chargement est liée à l'annulation d'une seule force de contact  $f_{l_0}$ . Il existe certains cas où plusieurs forces de contact s'annulent pour un même déviateur  $q$ . Ces cas correspondent à des configurations géométriques particulières. Si l'on annule une force de contact appartenant à une particule trivalente ou un amas de particules exclusivement trivalentes, toutes les forces de contact vont alors s'annuler simultanément afin de satisfaire les équations d'équilibre. En conséquence, ceci indique que tous les éléments de matrice  $H_{(\mu,l)}^{-1} = G_{(l,\mu)}^{-1}$  sont proportionnels les uns aux autres pour tous les contact  $l$  appartenant à l'amas de particules trivalentes. Sur les figures 3.4(a) et 3.4(b) on donne des exemples de telles configurations (page 99).

Nous avons donc vu que pour une liste de contacts donnée, il est possible de calculer exactement la plage de chargement supportable. Lorsque le chargement est incrémenté, une ou plusieurs forces de contact s'annulent. L'équilibre est rompu. Il s'agit donc maintenant de déplacer les particules afin d'obtenir une nouvelle liste de contacts capable de supporter le nouveau chargement extérieur. Cette étape nécessite alors de déterminer les vitesses des particules à la rupture de l'équilibre.

---

14. La liste  $L^-$  est facilement identifiable. En effet, en imposant  $p = 0$  et en affectant à  $q$  une valeur quelconque strictement positive, on détermine les  $l \in L^-$  tel que  $f_l = \gamma_l q < 0$ .

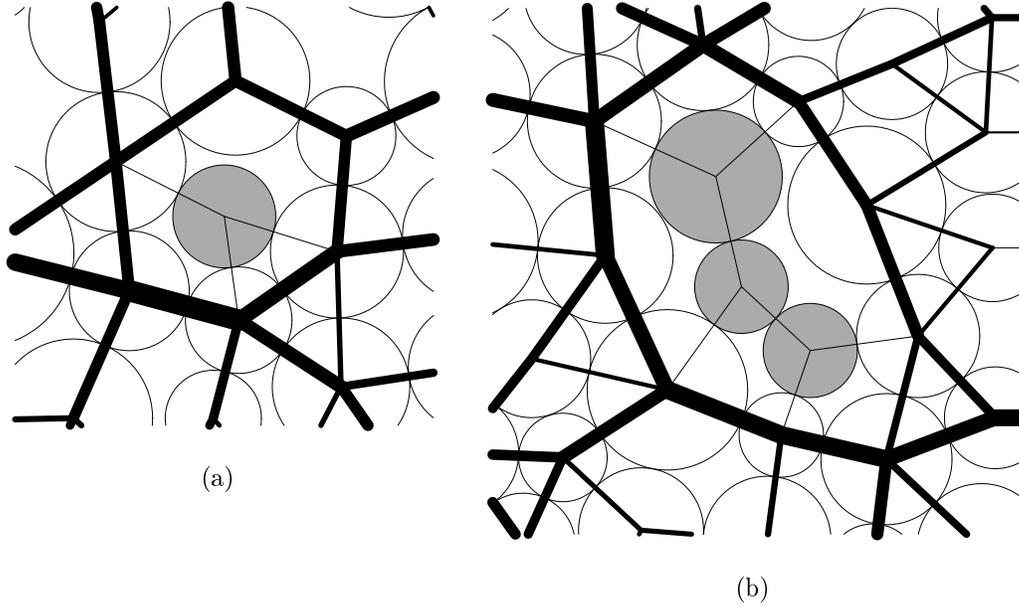


FIG. 3.4 – Exemples de particules trivalentes portant des forces nulles suite à un incrément de chargement. Les particules grisées portent des forces de contact nulles. Les traits gras correspondent à des forces de contact strictement positives. Ces deux exemples sont extraits d’assemblages contenant 1024 particules et un total de 1946 contacts pour (a) et 1960 contacts pour (b).

### 3.4 Chargement extérieur non supporté, rupture de l’équilibre

#### 3.4.1 Calcul des vitesses

Soit une structure isostatique sous le chargement isotrope  $p$  telle que  $\forall l, f_l > 0$ . Lorsque l’on incrémente le chargement par l’application d’un déviateur  $q$ , il existe alors un contact  $l_0$  tel que

$$\begin{cases} f_l > 0 & \text{pour } l \neq l_0 \\ f_l = 0 & \text{pour } l = l_0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Si l’on considère la structure formée par tous les contact  $l \neq l_0$ , cette dernière supporte le chargement mais possède un mécanisme autre que les mouvements d’ensemble rigides. Ce mécanisme entraîne une instabilité.

Le travail des forces extérieures étant positif, il est alors possible de trouver une trajectoire dans l’espace des configurations le long de laquelle l’énergie potentielle va strictement décroître,  $\frac{dE_p}{dt} = -\sum_{l=1}^{N_c} f_l \delta v_l < 0$ .

Sachant d'une part que pour  $l \neq l_0$ ,  $f_l > 0$  et pour  $l = l_0$ ,  $f_{l_0} = 0$ , et d'autre part que les particules en contact ne peuvent s'interpénétrer (conditions de *Signorini*), le seul mouvement possible impliquant une diminution de l'énergie potentielle est tel que les contacts  $l$  sont maintenus et  $l_0$  est ouvert (la valeur  $-1$  est ici conventionnelle) :

$$\begin{cases} \delta v_l = 0 & \text{pour } l \neq l_0 \\ \delta v_{l_0} = -1 & \text{pour } l = l_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Le vecteur vitesse  $\underline{v} = (v_\mu)_{1 \leq \mu \leq N_{dl}}$  solution du système linéaire (3.36) est uniquement déterminé car  $\mathbf{G}$  est opérateur linéaire bijectif (isostaticité).

Dans les cas particuliers où il existe plusieurs forces nulles dans un amas trivalent (figure 3.4), il existe plus d'un contact  $l_0$  tel que  $f_{l_0} = 0$ . Parmi ces derniers, quel que soit le contact que l'on choisit d'ouvrir ( $\delta v_{l_0} = -1$ ), le vecteur  $\underline{v}$  des vitesses des particules qui portent des forces strictement positives reste inchangé et l'unicité de ce vecteur est toujours vérifiée.

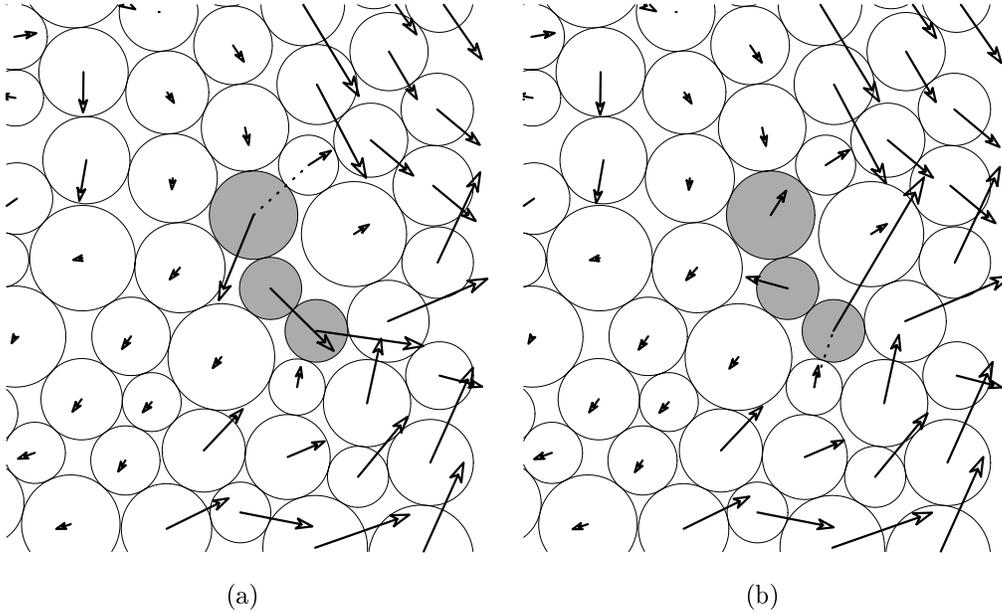


FIG. 3.5 – Carte locale du vecteur vitesse obtenu par la résolution du système d'équations (3.36) pour deux contact  $l_0$  différents. Le contact  $l_0$  ouvert,  $\delta v_{l_0} = -1$ , est représenté par le trait en pointillés qui relie une particule de l'amas trivalent (disque grisé) et une autre particule de la structure qui porte des forces de contact strictement positives.

À titre d'exemple, et en relation avec la figure 3.4(b), on montre sur la figure 3.5 une carte locale des vitesses calculées par la résolution de (3.36), pour deux contact

$l_0$  différents. On constate alors qu'en dehors des vitesses des particules appartenant à l'amas trivalent (disques grisés), le vecteur  $\underline{v}$  est identique<sup>15</sup>, quel que soit le contact  $l_0$  choisi. Ceci est une conséquence directe du fait que pour les contacts  $l$  de l'amas trivalent, tous les éléments de matrice  $G_{(l,\mu)}^{-1}$  sont proportionnels les uns aux autres<sup>16</sup>.

Les vitesses des particules sont déterminées en résolvant le système d'équations (3.36) sur le même principe que la méthode de calcul des forces de contact<sup>17</sup>. En effet, plutôt que de résoudre directement  $\underline{v} = \underline{G}^{-1} \delta v$ , on choisit d'introduire une matrice de *viscosité*  $\underline{\Theta}$  afin de mettre en œuvre une factorisation de *Cholesky* qui nécessite de travailler avec une matrice symétrique. Alors que l'on avait pris la convention d'assimiler les forces de contacts à des forces élastiques (3.25), on les apparente ici à des forces *visqueuses*. Les forces de contact répondent alors à la relation suivante :

$$f_l = \theta_l \delta v_l \quad (3.37)$$

Une écriture de (3.37) sous forme matricielle pour l'ensemble des contacts est :

$$\underline{f} = \underline{\Theta} \delta v \quad (3.38)$$

$$\underline{f} = \underline{\Theta} \underline{G} \underline{v} \quad (3.39)$$

où  $\underline{\Theta}$  la matrice diagonale constituée des  $\theta_l$ . Sachant que  $\underline{F}^{ext} = \underline{G}^T \underline{f}$ , (3.39) permet d'établir :

$$\underline{F}^{ext} = \underline{G}^T \underline{\Theta} \underline{G} \underline{v} \quad (3.40)$$

La résolution du système linéaire (3.40) détermine les vitesses des particules. Or, l'étape intermédiaire,

$$\underline{F}^{ext} = \underline{G}^T \underline{\Theta} \delta v \quad (3.41)$$

se doit de retenir toute notre attention. Au regard de l'équation (3.41), on constate qu'imposer des vitesses relatives dans les contacts est équivalent à imposer un chargement extérieur. Pour les contacts  $l \neq l_0$ , on impose  $\delta v_l = 0$ , ce qui se traduit par  $F^{ext} = 0$  pour les degrés de liberté des particules concernées par les contacts  $l \neq l_0$ . Pour  $l = l_0$ , on impose  $\delta v_{l_0} = -1$ . Soit  $i$  et  $j$  les deux particules

---

15. À un facteur multiplicateur  $\lambda > 0$  commun près.

16. cf. page 98.

17. cf. section 3.3.2, page 92.

formant le contact  $l_0$ . On note  $X$  et  $Y$  les deux degrés de liberté des deux particules. La matrice  $\underline{\underline{G}}^T$ , écrite pour le contact  $l_0$ , est :

$$\underline{\underline{G}}_{l_0}^T = \begin{bmatrix} G_{l_0,(i,X)} \\ G_{l_0,(i,Y)} \\ G_{l_0,(j,X)} \\ G_{l_0,(j,Y)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{l_0,(i,X)} \\ G_{l_0,(i,Y)} \\ -G_{l_0,(i,X)} \\ -G_{l_0,(i,Y)} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

En posant  $\underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{I}}$ , on obtient pour le contact  $l_0$  le chargement extérieur équivalent :

$$\underline{\underline{F}}^{ext} = \begin{bmatrix} -G_{l_0,(i,X)} \\ -G_{l_0,(i,Y)} \\ G_{l_0,(i,X)} \\ G_{l_0,(i,Y)} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Le vecteur de chargement extérieur équivalent au système (3.36), pour tous les degrés de liberté du problème est alors :

$$\underline{\underline{F}}^{ext} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -G_{l_0,(i,X)} \\ -G_{l_0,(i,Y)} \\ G_{l_0,(i,X)} \\ G_{l_0,(i,Y)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{particule 1, degré de liberté X} \\ \leftarrow \text{particule 1, degré de liberté Y} \\ \\ \\ \\ \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{particule } i, \text{ degré de liberté X} \\ \leftarrow \text{particule } i, \text{ degré de liberté Y} \\ \leftarrow \text{particule } j, \text{ degré de liberté X} \\ \leftarrow \text{particule } j, \text{ degré de liberté Y} \end{array} \right\} \text{Contact } l_0 \\ \\ \\ \leftarrow \text{particule } n, \text{ degré de liberté X} \\ \leftarrow \text{particule } n, \text{ degré de liberté Y} \\ \leftarrow \text{Paroi 1 suivant X} \\ \leftarrow \text{Paroi 2 suivant Y} \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

Au contact  $l_0$ , on exerce donc un doublet de forces dirigées suivant  $\vec{n}_{l_0}$  qui écartent les particules  $i$  et  $j$  avec une intensité 1. On a donc  $G_{l_0,(i,X)} = n_{l_0}^X$  et  $G_{l_0,(i,Y)} = n_{l_0}^Y$ .

### 3.4.2 Quelques exemples de vitesses

Figure 3.6, on montre une carte des vitesses à la rupture de l'équilibre d'un assemblage de 1024 particules.

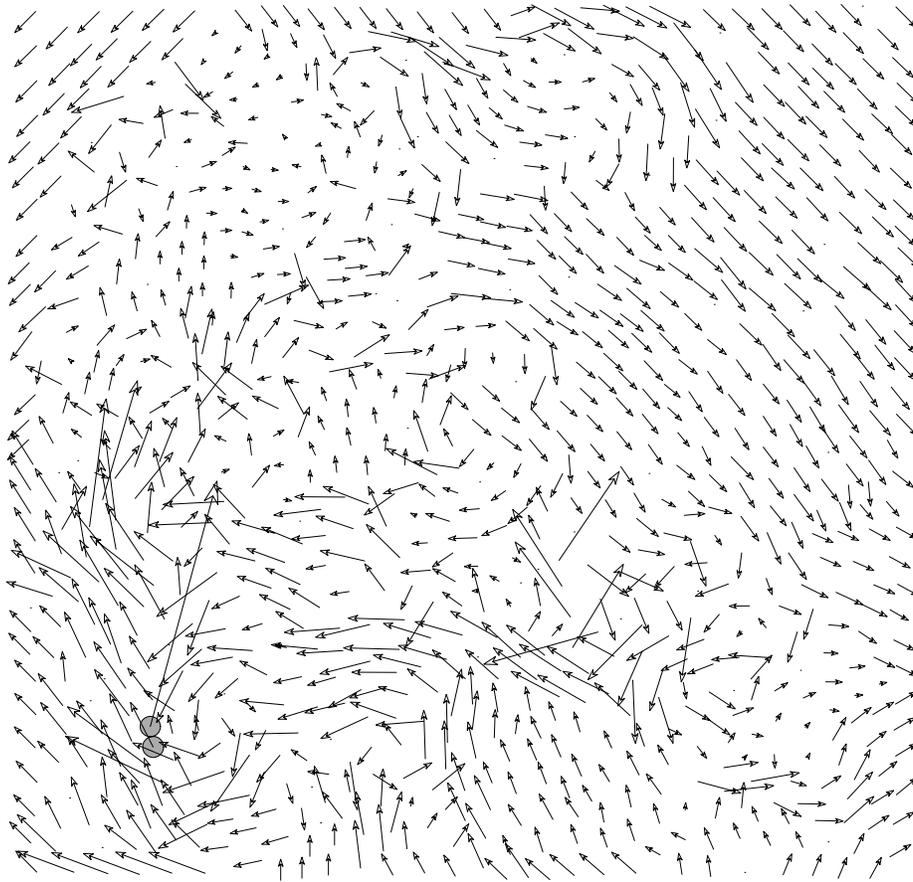


FIG. 3.6 – *Vitesses des particules à la rupture de l'équilibre d'un assemblage de 1024 grains. Les deux particules représentées en gris sont celles que l'on écarte,  $\delta v_{l_0} = -1$ . Les vitesses des parois ne sont pas représentées sur ce dessin.*

On remarque ici la grande hétérogénéité des directions des vitesses des particules. Cette grande *dispersion* des directions des vitesses est encore plus marquée figure 3.7 où l'on représente une carte des vitesses à la rupture d'un état d'équilibre dans un assemblage de 4900 particules. La figure 3.8 est un agrandissement centré sur le contact  $l_0$ .

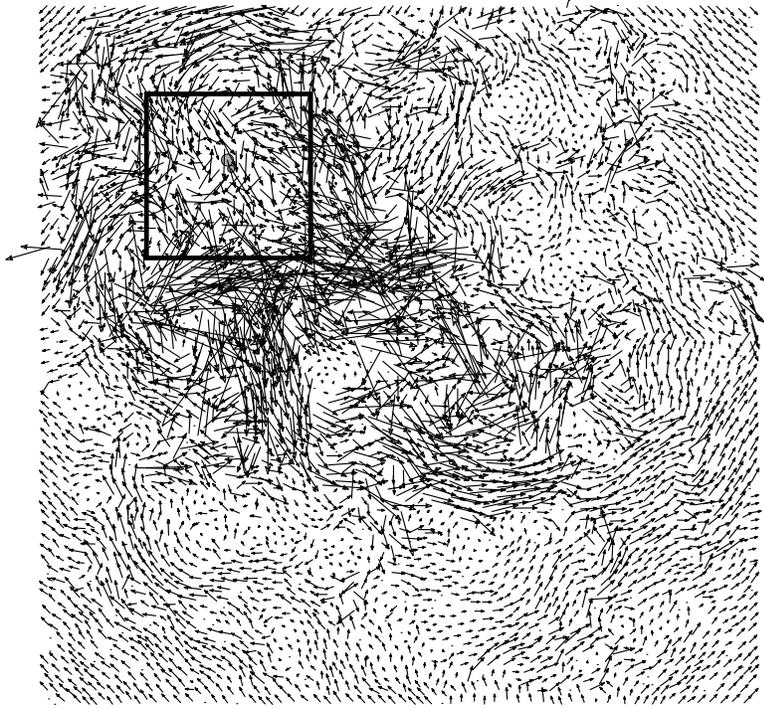


FIG. 3.7 – *Carte des vitesses à la rupture de l'équilibre d'un empilement de 4900 grains. Le cadre noir délimite la partie agrandie visible sur la figure 3.8.*

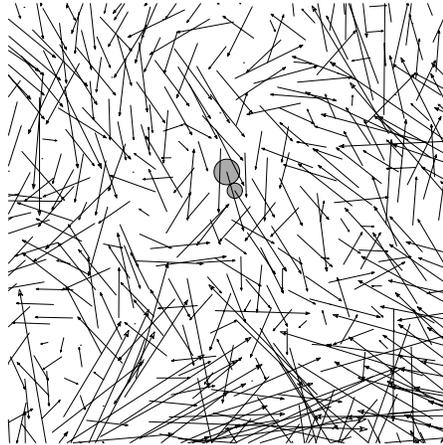


FIG. 3.8 – *Agrandissement de la figure 3.7 centré sur le couple de particule que l'on écarte.*

Des structures assimilables à des *vortex* sont visibles sur la figure 3.7. Des observations similaires ont été faites par Williams et coll. [109] et par Kuhn [52] sur les milieux granulaires modèles sensiblement différents (particules déformables avec frottement solide).

### 3.4.3 Étude statistique des vitesses à la rupture

Moukarzel [68, 69] a étudié la propagation d'une perturbation dans un contact au sein d'un empilement de disques rigides polydispersés sans frottement. Il observe que lorsque l'on écarte un contact d'une longueur  $\delta l$ , toutes les particules se déplacent d'une distance  $\delta x/\delta l$  d'autant plus grande que la mesure est réalisée loin de la perturbation. Il est ainsi arrivé à la conclusion que cette perturbation initiait des déplacements grandissant de façon exponentielle avec la distance au site d'origine de l'écartement. Il assimile ce phénomène aux propriétés cinématiques du *pantographe*<sup>18</sup> et précise que c'est ici une conséquence directe de l'isostaticité des assemblages constitués de disques parfaitement rigides.

Afin de constater si de tels phénomènes existent dans nos assemblages, on réalise des statistiques sur la moyenne quadratique  $\tilde{v}^2$  des fluctuations de vitesses à l'ouverture du contact  $l_0$  et ce, pour différentes tailles d'assemblage. Si ces effets d'échelle existent, nous devrions alors constater que plus l'assemblage est grand et plus  $\tilde{v}^2$  est important, sachant que l'intensité de la perturbation ( $\delta v_{l_0} = -1$ ) reste constante pour toutes les tailles  $N$  de système.

À partir de plusieurs configurations à l'équilibre, on détermine l'incrément de chargement  $\delta q$  nécessaire pour rompre l'équilibre. On identifie le contact qui doit s'ouvrir et on calcule les vitesses des particules pour chacune des configurations. On effectue cette opération sur 4 tailles d'assemblages:  $N = 1024, 1936, 3025$  et  $4900$  particules, avec pour chaque taille, respectivement 4692, 3392, 1885 et 1687 états d'équilibre.

$\tilde{v}^2$  est définie par :

$$\tilde{v}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\vec{v}_i - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \cdot \vec{r}_i\|^2 \quad (3.45)$$

où  $n$  est le nombre de disques portant des forces de contacts.  $\vec{r}_i$  est la position<sup>19</sup> de la particule  $i$ .  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  est le tenseur des vitesses de déformation correspondant au mouvement des parois.

On montre figure 3.9 les densités de probabilité de  $\tilde{v}^2$  pour les 4 tailles d'assemblages. On constate alors que quelle que soit la taille des assemblages, les densités de probabilité semblent similaires et sont donc dénuées d'effets d'échelle. Un test de vraisemblance de *K.-S.* permet de confirmer cette observation : l'indice de vraisemblance pour que chacune des 4 séries de valeurs soit issue d'une seule et même densité de probabilité est, dans le pire des cas,  $P_{K.-S.} = 0.06$  et  $P_{K.-S.} = 0.56$  dans le meilleur des cas.

---

18. *Pantographe*: instrument composé de tiges articulées qui sert à reproduire, réduire ou *agrandir* mécaniquement un dessin ou une figure. Instrument inventé par *Benton* en 1880. Pantographe de *W. & J. Jones*, <http://www.thierry-laurent.com/pantographe.htm>. Pantographe de *Scheiner*, <http://www.museo.unimo.it/labmat/omotfra.htm>.

19. L'origine du repère orthonormé est au centre des échantillons.

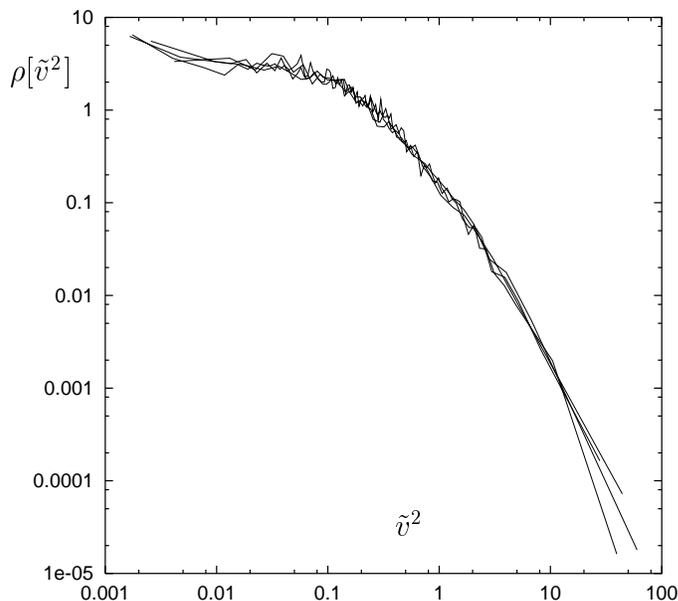


FIG. 3.9 – Densité de probabilité de  $\tilde{v}^2$ , éq. (3.45), pour 4 tailles d’assemblages.

On constate que les vitesses n’augmentent pas avec la taille du système. Les contradictions entre nos mesures et les résultats de Moukarzel [68, 69] sont probablement dues aux modèles d’assemblages étudiés. Alors que nos particules sont polydisperses et confinées par des parois rigides, Moukarzel a réalisé ces observations sur des empilements réguliers de particules, disposées dans une boîte sans couvercle (surface libre), sous gravité. De plus, ces assemblages modèles ont des propriétés très marginales : il est possible de calculer les forces de contact de la structure isostatique de proche en proche, *de haut en bas*, ce qui ne semble pas être possible pour tous les types de modèles granulaires sans frottement ([94]).

Les observations de Moukarzel ne semblent donc pas adaptées à notre modèle de particules. Si tel avait été le cas, cela aurait alors introduit des effets d’échelle considérables, difficilement compatibles avec l’étude du comportement mécanique des milieux granulaires dans la limite des grands systèmes.

### 3.5 Trajectoires quasi-statiques, introduction à l’aide d’un modèle simplifié

Dans les sections précédentes, nous avons présenté de nombreuses propriétés et méthodes de calcul qui vont nous permettre par la suite d’effectuer des tests biaxiaux sur des assemblages de disques polydisperses, sans frottement et sans cohésion, à partir de considérations purement géométriques. Mais avant de s’attaquer à l’étude du comportement d’assemblages constitués de plusieurs milliers de

particules, on propose de synthétiser tous les concepts évoqués jusqu'à présent sur un *modèle réduit* constitué de quelques particules.

### Premier exemple

On montre figure 3.10 un assemblage constitué de 4 disques rigides, sans frottement, numérotés de 1 à 4. Seule la particule 1 est mobile. Initialement en contact avec les grains 2 et 3, le disque 1 est soumis à une force  $\vec{F} = (F_X, F_Y)$ . La loi de contact est la condition d'impénétrabilité de *Signorini* (3.3).

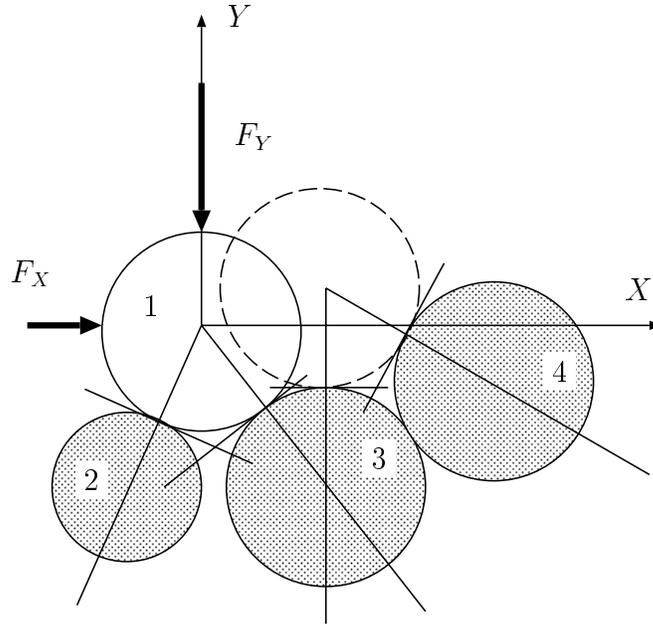


FIG. 3.10 – Assemblage de particules rigides, sans frottement et sans cohésion. Les particules grisées sont fixes. La particule blanche, mobile, est soumise à une force  $\vec{F} = (F_X, -F_Y)$ .

La particule 1 est en équilibre stable sous le chargement  $\vec{F} = (F_X = 0; -F_Y)$ ,  $F_Y > 0$ . Elle a deux degrés de liberté et possède deux points de contact.  $N_{dl} = N_c$ , la structure des contacts est isostatique. On note respectivement  $f_{12}$  et  $f_{13}$ , les forces de contact entre les disques 1 et 2 et entre 1 et 3.

On se place dans le cas où  $F_Y$  est constante et seule la composante  $F_X$  de  $\vec{F}$  est incrémentée. Tant que la résultante des forces exercées sur la particule 1 est comprise dans l'angle fermé formé par les segments joignant les centres des particules [1,2] et [1,3], la particule est en équilibre stable. C'est un minimum local de l'énergie potentielle puisque les directions selon lesquelles on peut réduire l'énergie potentielle ( $\frac{dEp}{dt} < 0$ , éq. (3.19)) sont interdites par l'impénétrabilité.

$F_X$  est incrémentée jusqu'à ce que  $f_{12} = f_{l_0} = 0$ . Le disque 1 est alors en équilibre instable. Il existe alors une direction selon laquelle  $Ep$  reste stationnaire,

$\frac{dE_p}{dt} = -\sum_l f_l \delta v_l = 0$ , mais où  $\delta v_{l_0} < 0$  est possible (ouverture du contact  $l_0$ ). C'est une direction selon laquelle la variation de l'énergie potentielle au second ordre en  $t$  est négative. L'équipotentielle  $\frac{dE_p}{dt} = 0$  est représentée sur la figure 3.11(b) au point A.

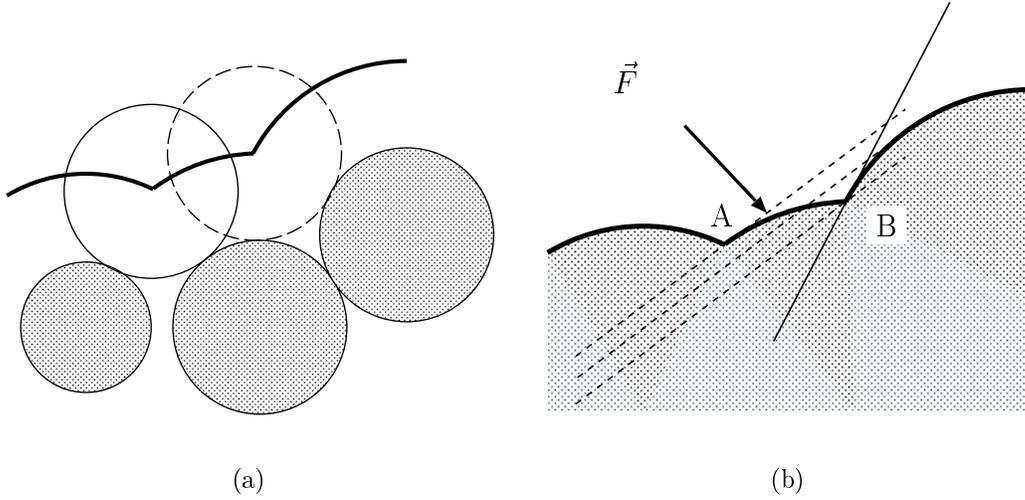


FIG. 3.11 – (a)- Trajectoire du centre de la particule. (b)- Trajectoire du centre de la particule et lignes équipotentielles.

La vitesse de la particule 1 à la rupture de l'équilibre est calculée par la résolution de (3.36). La particule est déplacée en plusieurs étapes : à partir de la vitesse calculée à la rupture de l'équilibre, la particule est déplacée de  $\lambda \vec{v}_1$ , où  $\lambda \ll 1$  est un réel positif. À partir de cette nouvelle position intermédiaire, où  $f_{12} = f_{l_0} < 0$  et  $f_{13} > 0$ , une nouvelle vitesse est calculée telle que  $\delta v_{l_0} < 0$  et  $\delta v_l = \delta v_{l_3} = 0$ . On déplace à nouveau la particule 1 suivant ce nouveau vecteur vitesse. Ce processus est renouvelé jusqu'à ce qu'un nouvel état d'équilibre stable soit atteint, c'est-à-dire un nouveau minimum local de l'énergie potentielle à la position B (fig. 3.11(b)). Au fur et à mesure que la particule se déplace, l'énergie potentielle diminue :  $\frac{dE_p}{dt} = -\sum_l f_l \delta v_l < 0$  car  $f_{l_0} < 0$ ,  $\delta v_{l_0} < 0$ , tandis que  $f_l > 0$  et  $\delta v_l = 0$  pour  $l \neq l_0$ .

On représente figure 3.12 l'histoire de la sollicitation appliquée sur la particule mobile entre les points d'équilibre A et B, en fonction de sa position horizontale.

À partir de sa position d'équilibre B, il est possible de ramener la particule 1 sur sa position initiale A en diminuant  $F_x$ . Le chemin de sollicitation sur le cycle  $A \rightarrow B \rightarrow A$  est montré sur la figure 3.12(b).

Lorsque la particule 1 arrive sur une nouvelle position d'équilibre stable, on suppose que la dissipation (dont on ne définit pas le mécanisme exact) est suffisamment efficace pour que le mouvement s'arrête. Lors du parcours de la particule,

$A \rightarrow B \rightarrow A$ , la dissipation d'énergie est quantifiable. Elle correspond à l'aire du cycle, surface grisée de la figure 3.12(b).

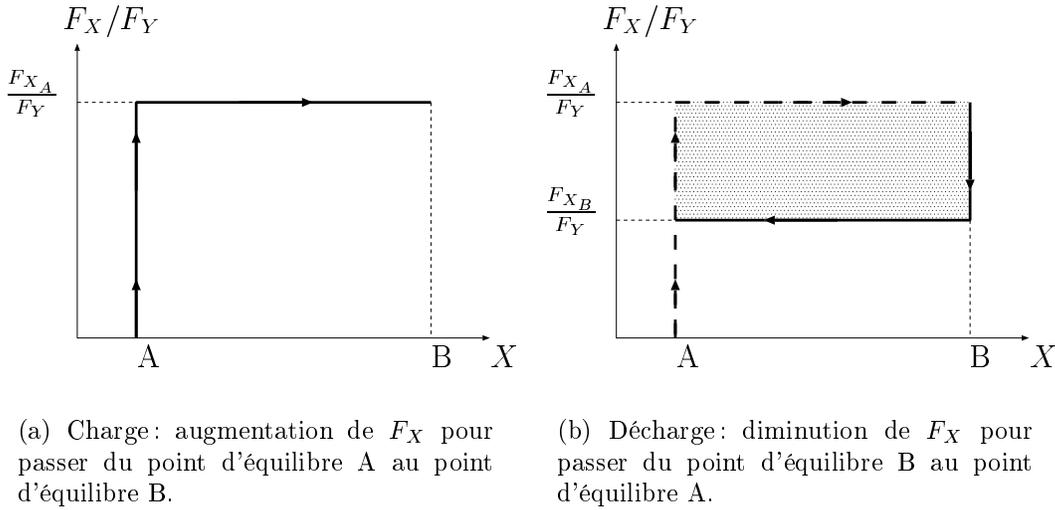


FIG. 3.12 – *Chemin de sollicitation en charge et décharge entre les deux états d'équilibre A et B*

## Second exemple

Figure 3.13, on montre une particule rigide sur laquelle on applique une force extérieure variable. Ce nouvel exemple est plus complexe que le précédent mais il préfigure ce que l'on va observer lors des compressions biaxiales sur les assemblages de disques présentés chapitre 2.

La particule mobile est soumise à une force  $\vec{F}$  dont les composantes sont  $F_X$  et  $F_Y$ . Comme dans l'exemple précédent, on effectue un cycle de charge-décharge  $A \rightarrow C \rightarrow A$  en modifiant uniquement  $F_X$ . Cet exemple diffère du précédent car ici, le chargement qu'il est nécessaire d'appliquer sur la particule pour rompre l'équilibre au point A ne permet pas d'atteindre un minimum local de l'énergie potentielle en B. La particule passe directement du point d'équilibre A au point d'équilibre C. On constate en effet que l'équipotentielle représentée au point A et translatée au point B indique qu'il existe encore une direction selon laquelle il est possible de diminuer l'énergie potentielle tout en respectant les conditions d'impénétrabilité. Par contre, le point C est bien un nouveau minimum local de l'énergie potentielle, c'est un point d'équilibre stable.

Afin de compléter le cycle, une fois la particule en équilibre au point C, on diminue le chargement  $F_X$  afin de rompre l'équilibre dans le but de revenir au point A. La direction selon laquelle la particule peut se déplacer est représentée par une ligne en pointillés *longs* au point C. À la différence de la phase de chargement, au cours de la décharge, on voit qu'en translatant la ligne équipotentielle du point

$C$  au point  $B$ , la particule atteint un minimum local de l'énergie potentielle en ce point, la particule est en équilibre stable. Afin de ramener définitivement la particule mobile sur son site d'origine, une nouvelle diminution du chargement est nécessaire. L'histoire du chargement appliqué sur la particule est représenté sur la figure 3.14.

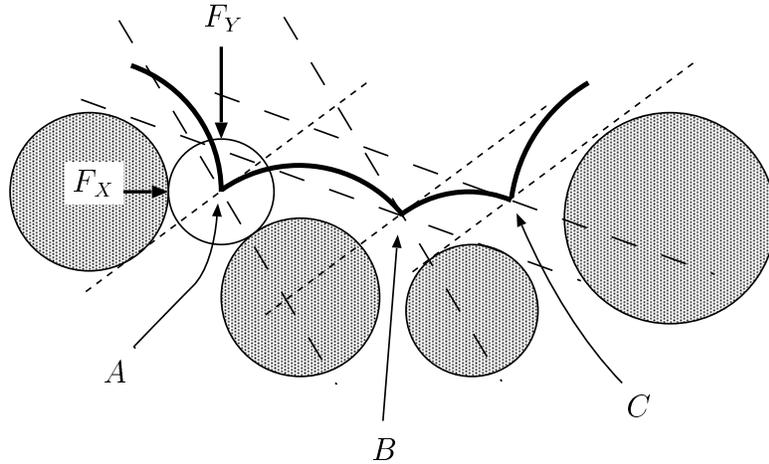


FIG. 3.13 – Particule rigide soumise à un chargement extérieur.  $A$  est la position d'équilibre initiale. Charge: la particule passe du point d'équilibre  $A$  au point d'équilibre  $C$ , lignes équipotentiels en pointillés courts. Décharge: la particule se déplace du point  $C$  au point  $A$  en passant par un état d'équilibre intermédiaire au point  $B$ , lignes équipotentiels en pointillés longs.

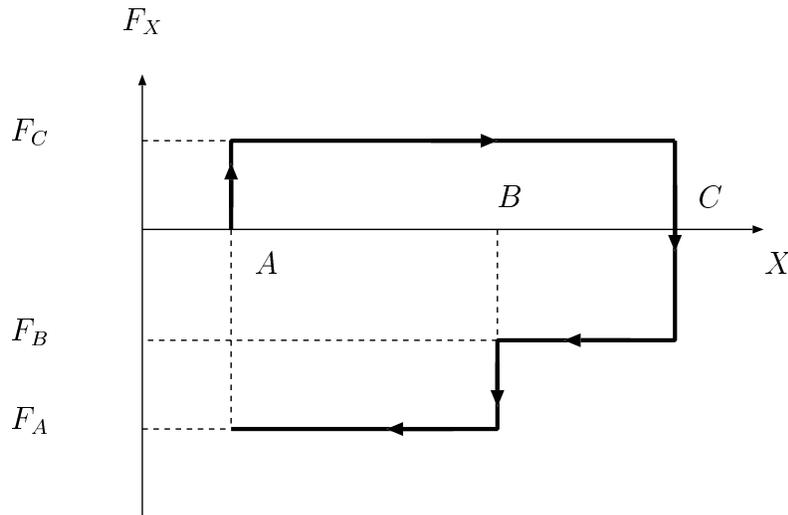


FIG. 3.14 – Histoire du chargement appliqué à la particule au cours de son déplacement du site  $A$  au site  $C$  puis pour revenir au point initial  $A$ .

Ce second exemple montre qu'il est parfois nécessaire de modifier à plusieurs reprises une liste de contacts pour passer d'un état d'équilibre stable à un autre état d'équilibre stable. De plus, cet exemple met aussi en avant de fortes irréversibilités dans le comportement.

Ces deux exemples montrent la philosophie de l'approche que nous allons adopter pour le calcul de l'évolution quasi-statique d'un assemblage de grains rigides sans frottement. Le passage d'un état d'équilibre à l'autre, par le biais d'une sollicitation en force n'est pas forcément trivial. Chaque état d'équilibre étant un minimum local de l'énergie potentielle, il est parfois nécessaire de modifier à plusieurs reprises une liste de contacts pour passer d'un minimum local à un autre. Ces trajectoires quasi-statiques, en l'absence de dynamique, sont uniquement déterminées par la géométrie du problème.

C'est donc ce type d'approche que nous allons mettre en œuvre pour la simulation de compressions biaxiales sur les assemblages présentés chapitre 2. Afin d'automatiser les différentes étapes de recherche de nouveaux états d'équilibre, nous avons développé une nouvelle méthode de calcul, la *Méthode Géométrique Quasi-Statique*, que nous allons maintenant présenter.

## 3.6 *MGQS* : Méthode Géométrique Quasi-Statique

La *Méthode Géométrique Quasi-Statique* est une approche purement géométrique qui exploite les propriétés d'isostaticité des assemblages de disques rigides, polydisperses et sans frottement. Mise en œuvre pour la compression biaxiale à chargement contrôlé, cette méthode permet de décomposer l'évolution des assemblages granulaires en une succession d'états d'équilibre.

### 3.6.1 Présentation succincte

Dans le cas du test biaxial, la *MGQS* peut être décomposée suivant plusieurs étapes. On considère un assemblage de particules<sup>20</sup> à l'équilibre sous chargement extérieur  $(p,q)$  donné. La loi de contact est la condition de *Signorini*. La contrainte  $p$  est maintenue constante et l'on cherche à augmenter le déviateur  $q$ . Dans un premier temps, l'incrément de chargement supporté  $\delta q$  est calculé et le contact  $l_0$  qui doit s'ouvrir à la rupture de l'équilibre est identifié. Les directions des vitesses des particules maintenant les contact  $l \neq l_0$  et ouvrant le contact  $l_0$  sont déterminées. Les particules sont déplacées ( $\underline{x} \leftarrow \underline{x} + \underline{v} \cdot \delta t$ )<sup>21</sup>. Le calcul des vitesses et le déplacement des particules est renouvelé jusqu'à l'obtention d'une nouvelle liste de

20. Particules rigides, polydisperses et sans frottement.

21.  $\underline{x}$  est le vecteur des positions des particules.  $\delta t$  n'a ici aucun sens physique car il représente uniquement un facteur multiplicateur du vecteur vitesse.

contacts isostatique, i.e.,  $l_0$  est perdu,  $l_1$  est créé. Un calcul des forces intergranulaires permet alors de vérifier si l'assemblage est à l'équilibre. Deux cas sont alors possibles :

1. le chargement extérieur ( $p, q + \delta q$ ) est supporté, on a un nouvel état d'équilibre. L'incrément de déviateur supportable suivant est alors calculé et on recommence le processus d'identification du contact  $l_0$  puis le calcul des vitesses et le déplacement des grains.
2. le chargement n'est pas supporté, il existe des tractions (forces négatives) dans la liste des contacts. Le contact portant la plus grande traction est désigné comme étant  $l_0$  et le calcul des vitesses est effectué. On reprend ensuite le processus de déplacement des grains jusqu'à la création d'une nouvelle liste de contacts.

Parmi toutes les étapes de la méthode, certaines comme le calcul des forces de contact et la détermination de  $\delta q$  sont *imposées* par la propriété d'isostaticité. Nous allons maintenant voir trois aspects propres à la *MGQS* et encore non évoqués. Tout d'abord, nous allons présenter la *mise en conformité* des interstices entre les disques. Nous évoquerons ensuite l'étape de détection des contacts et la détermination de la structure isostatique. Pour finir, nous reviendrons sur le calcul des vitesses des particules à l'ouverture du contact  $l_0$ .

### 3.6.2 *Mise en conformité des interstices entre les particules*

Les essais biaxiaux calculés avec *MGQS* vont être réalisés sur les assemblages présentés au chapitre 2. Comme il a été dit dans ce chapitre, les échantillons sont initialement densifiés par compactage isotrope à l'aide de deux méthodes de calcul : *DC* puis *DGL*. Les configurations obtenues à l'aide de la *DGL* donnent des structures de liens, isostatiques, qui supportent les chargements extérieurs imposés. Les particules présentes dans ces listes sont très proches les unes des autres mais ne sont pas *géométriquement* en contact. Les interstices entre les disques sont d'épaisseurs variables. Or, une des étapes de la *MGQS* est la détection géométrique des contacts. Il est donc nécessaire d'ajouter une dernière opération de préparation sur nos assemblages afin de les rendre *digestes* pour la *MGQS*. Cette étape consiste à déplacer les particules portant des forces strictement positives afin de les amener réellement en contact. Cette opération est possible tout en préservant l'intégrité des structures isostatiques ([94]). Pour ce faire, on déplace les particules suivant des vitesses calculées pour qu'elles s'interpénètrent toutes d'une distance choisie à  $10^{-8}$ . Ce calcul particulier des vitesses sera présenté dans la section 3.6.4.

### 3.6.3 Recherche de la structure isostatique par détection des contacts, particules actives et passives

Au fur et à mesure que le déviateur est incrémenté, les listes de contacts sont, entre chaque état d'équilibre, en partie renouvelées. Sur la totalité des particules présentes dans un assemblage, toutes ne portent pas de force. Les disques participant à la structure isostatique sont appelées «particules *actives*». Les grains restants sont dénommés «particules *passives*». Lorsque les particules actives se déplacent, elles peuvent entrer en contact avec des particules passives. Il est donc nécessaire de faire en sorte que l'étape de détection géométrique des contacts soit capable de distinguer les particules actives des particules passives.

Étant donné une liste de contacts *géométriques* dans laquelle se trouve *noyée* une liste isostatique de contacts, on extrait la structure *active*<sup>22</sup> par élimination successive des contacts portés par les particules monovalentes et divalentes. Les particules passives constituent des amas *passifs*. Ces derniers peuvent être isolés de la structure active ou peuvent être en contact avec des particules actives. Tous ces amas sont identifiés ainsi que leurs connexions éventuelles avec la structure isostatique.

### 3.6.4 Calcul *implicite* des vitesses des particules actives

Dans notre modèle, les particules sont parfaitement rigides. Afin de faire la différence entre les particules en contact et celles qui ne le sont pas, une légère interpénétration entre les particules est numériquement nécessaire. Cette distance de recouvrement est contrôlée au fur et à mesure que les particules sont déplacées.

Si les vitesses sont obtenues par la résolution du système linéaire (3.36), les particules ne peuvent que s'écartier les unes des autres à chaque incrément de déplacement. Ce calcul des vitesses, que l'on qualifie d'*explicite*, n'est donc pas adapté. Il convient donc de calculer ces vitesses d'une manière *implicite* au sens où l'on doit tenir compte des positions des particules après l'incrément de déplacement. On schématise sur la figure 3.15 les trajectoires suivies par une particule en fonction de la méthode utilisée pour le calcul des vitesses.

Dans le cas dit *explicite*, les vitesses des particules à la rupture de l'équilibre sont obtenues par résolution du système d'équations<sup>23</sup> suivant :

$$l = l_0 \quad (\vec{V}_j - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_l = 1 \quad (3.46)$$

$$l \neq l_0 \quad (\vec{V}_j - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_l = 0 \quad (3.47)$$

où  $l_0$  désigne le contact à ouvrir et  $l$  tous les autres contacts de la structure active.  $i$  et  $j$  sont les indices des particules en contact.  $\vec{n}_l$  est le vecteur directeur

22. Structure qui porte des forces strictement positives.

23. À la différence du système d'équations (3.36), on exprime ici la vitesse relative de la particule  $i$  par rapport à la particule  $j$ .

du contact  $ij$ , orienté de  $i$  vers  $j$ .  $\vec{V}_i$  et  $\vec{V}_j$  sont respectivement les vitesses des particules  $i$  et  $j$ .

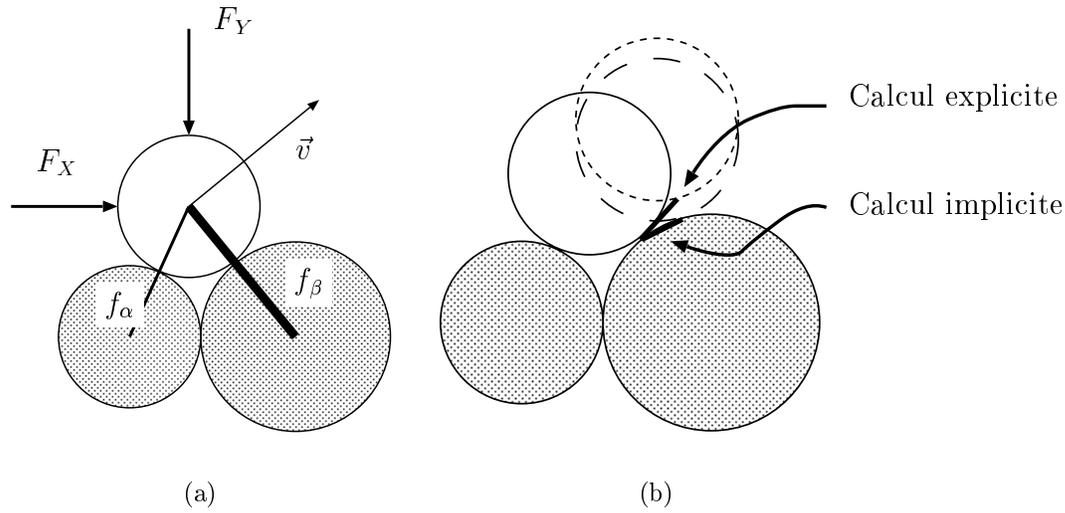


FIG. 3.15 – (a)- Vitesse  $\vec{v}$  d'une particule à la rupture de l'équilibre.  $f_\alpha = 0$ ,  $f_\beta > 0$ . (b)- Trajectoires d'une particule en fonction de la méthode de calcul utilisée pour déterminer les vitesses.

Il s'agit donc de modifier ce système d'équations en prenant en compte les positions des particules avant et après déplacement. Afin d'alléger les écritures, on adopte les notations suivantes :  $ij$  désigne un contact. 0 désigne les variables à l'instant  $t_0$  et 1, les variables à l'instant  $t_1 = t_0 + \delta t$ . Les vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{V}$ , respectivement positions et vitesses, seront notés  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{V}$ .

Les contacts maintenus  $l$ , comme le contact à ouvrir  $l_0$ , peuvent concerner soit deux particules, soit une particule et une paroi. Ces 4 cas sont numérotés comme suit :

- Les contact maintenus,  $l \neq l_0$ ,
  - (i) entre deux particules,
  - (ii) entre une particule et une paroi.
- Le contact à ouvrir,  $l = l_0$ ,
  - (iii) entre deux particules,
  - (iv) entre une particule et une paroi.

**(i) Contact particule-particule,  $l \neq l_0$ .**

• À  $t = t_0$  :

On note  $\mathbf{r}_i^0, \mathbf{r}_j^0$  les positions des centres des particules  $i$  et  $j$ .

On note  $(\mathbf{r}_{ij}^0)^2 = (\mathbf{r}_j^0 - \mathbf{r}_i^0)^2$  la distance au carré entre les centres des particules  $i$  et  $j$ .

- À  $t = t_1$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^1 &= \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{V}_i \delta t \\ \mathbf{r}_j^1 &= \mathbf{r}_j^0 + \mathbf{V}_j \delta t\end{aligned}$$

La distance au carré entre les grains à  $t_1$  est :

$$(\mathbf{r}_{ij}^1)^2 = (\mathbf{r}_j^1 - \mathbf{r}_i^1)^2 = [\mathbf{r}_j^0 + \delta t \mathbf{V}_j - (\mathbf{r}_i^0 + \delta t \mathbf{V}_i)]^2$$

En posant  $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i$  et  $r_{ij}^0 = r_j^0 - r_i^0$ , on obtient alors :

$$\Delta_{ij} = \mathbf{r}_{ij}^0 \cdot \mathbf{V}_{ij} + \frac{1}{2} \delta t (\mathbf{V}_{ij})^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta t}{\delta t} (\mathbf{r}_{ij}^0 - \mathbf{r}_{ij}^1) = 0 \quad (3.48)$$

Pour les contacts maintenus entre particules, on cherche donc les vitesses  $\mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_j$  tels que  $\Delta_{ij} = 0$ . On impose la même distance entre les grains avant et après l'incrément de déplacement,  $\|\mathbf{r}_{ij}^0\| = \|\mathbf{r}_{ij}^1\|$ . L'équation (3.48) devient :

$$\Delta_{ij} = \mathbf{r}_{ij}^0 \cdot \mathbf{V}_{ij} + \frac{1}{2} \delta t (\mathbf{V}_{ij})^2 = 0 \quad (3.49)$$

**(ii) Contact particule-paroi,  $l \neq l_0$ .**

- À  $t = t_0$  :

On note  $\mathbf{r}_i^0$  la position de la particule  $i$ .

On note  $P$  la paroi. La position de la paroi à  $t_0$  est notée  $\mathbf{X}_P^0$ .

La distance au carré entre la paroi et la particule est :

$$(d_{iP}^0)^2 = [\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{r}_i^0 - \mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{X}_P^0]^2$$

où  $\mathbf{n}_{iP}$  est le vecteur directeur du contact entre la particule et la paroi, orienté de  $i$  vers  $P$ .

- À  $t = t_1$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i^1 &= \mathbf{r}_i^0 + \mathbf{V}_i \delta t \\ \mathbf{X}_P^1 &= \mathbf{X}_P^0 + \mathbf{V}_P \delta t\end{aligned}$$

La distance au carré entre le grain  $i$  et la paroi  $P$  est :

$$(d_{iP}^1)^2 = [\mathbf{n}_{iP} \cdot (\mathbf{r}_i^0 + \delta t \mathbf{V}_i) - \mathbf{n}_{iP} \cdot (\mathbf{X}_P^0 + \delta t \mathbf{V}_P)]^2$$

Sachant que la vitesse  $\mathbf{V}_P$  d'une paroi est comptée positivement lorsque le vecteur vitesse est orienté vers l'intérieur de l'assemblage et sachant que le vecteur  $\mathbf{n}_{iP}$  est orienté vers l'extérieur de l'assemblage, on obtient finalement :

$$\Delta_{iP} = -d_{iP}^0(\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{V}_i + v_P) + \frac{1}{2}\delta t (\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{V}_i + v_P)^2 = 0 \quad (3.50)$$

où  $v_P$  est un scalaire qui désigne la vitesse de la paroi.

Pour les contacts maintenus entre les particules et les parois, on cherche donc les vitesses  $\mathbf{V}_i$  et  $v_P$  tels que  $\Delta_{iP} = 0$ .

**(iii) Contact particule-particule,  $l = l_0$ .**

• À  $t = t_0$  :

$$\mathbf{r}_i^0, \mathbf{r}_j^0 \Rightarrow (\mathbf{r}_{ij}^0)^2$$

• À  $t = t_1$  :

$$\mathbf{r}_i^1, \mathbf{r}_j^1 \Rightarrow (\mathbf{r}_{ij}^1)^2$$

Pour ouvrir le contact  $l_0$ , on choisit d'imposer :

$$(\mathbf{r}_{ij}^1)^2 = (\mathbf{r}_{ij}^0)^2 (1 + \lambda \delta t)^2 \quad (3.51)$$

où  $\lambda$  est un scalaire strictement positif. L'équation (3.51) permet d'obtenir :

$$\Delta_{ij}^{ouverte} = \mathbf{r}_{ij}^0 \cdot \mathbf{V}_{ij} - \lambda (\mathbf{r}_{ij}^0)^2 + \frac{1}{2}\delta t [(\mathbf{V}_{ij})^2 - \lambda^2 (\mathbf{r}_{ij}^0)^2] = 0 \quad (3.52)$$

**(iv) Contact particule-paroi,  $l = l_0$ .**

• À  $t = t_0$  :

La distance au carré entre la paroi et la particule est :

$$(d_{iP}^0)^2 = [\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{r}_i^0 - \mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{X}_P^0]^2$$

• À  $t = t_1$  :

On impose :

$$(d_{iP}^1)^2 = (d_{iP}^0)^2 (1 + \lambda \delta t)^2 \quad (3.53)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{iP}^{ouvre} = & -d_{iP}^0(\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{V}_i + v_P) - \lambda (d_{iP}^0)^2 + \\ & + \frac{1}{2}\delta t [-\lambda^2 (d_{iP}^0)^2 + (\mathbf{n}_{iP} \cdot \mathbf{V}_i + v_P)^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les vitesses des particules actives (et parois) à la rupture sont donc déterminées par la résolution du système d'équations *non-linéaires*

$$\begin{cases} \Delta(\mathbf{V}_l) = 0 & \text{pour } l \neq l_0 \\ \Delta^{ouvre}(\mathbf{V}_l) = 0 & \text{pour } l = l_0 \end{cases} \quad (3.55)$$

où  $l$  et  $l_0$  désignent indifféremment les contacts  $ij$  ou  $iP$ .

**Remarque :** Pour  $\delta t = 0$ , le système d'équations (3.55) est identique au système linéaire formé par les équations (3.46) et (3.47).

Pour  $\delta t > 0$ , les équations (3.55) ne sont pas linéaires. Afin de résoudre (3.55), nous choisissons la méthode de *Newton* (ou méthode de la tangente).

### Calcul des vitesses par la méthode de Newton

La méthode de Newton est mise en œuvre pour linéariser et résoudre (3.55). Cette méthode itérative consiste à chercher une succession de corrections  $\delta \mathbf{V}_j^k$ , qui, ajoutées à une valeur initiale  $\mathbf{V}_j^0$ , satisfait  $\Delta(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = 0$ , en faisant l'hypothèse que  $\Delta$  est égal à son développement à l'ordre 1, au voisinage de  $\mathbf{V}_j^0$ . Supposons  $\mathbf{V}_i$  connue. On cherche à satisfaire  $\Delta(\mathbf{V}_{ij}) = \Delta(\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = 0$  avec  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j^0 + \sum_{k=0}^n \delta \mathbf{V}_j^k$ . Un développement de  $\Delta$  à l'ordre 1, au voisinage de  $\mathbf{V}_j^0$  est :

$$\Delta(\mathbf{V}_j^0 + \delta \mathbf{V}_j^0 - \mathbf{V}_i) = \Delta(\mathbf{V}_j^0 - \mathbf{V}_i) + \delta \mathbf{V}_j^0 \cdot \left[ \frac{\partial \Delta(\mathbf{V}_{ij})}{\partial \mathbf{V}_j} \right]_{\mathbf{v}_{ij}=\mathbf{v}_j^0-\mathbf{v}_i} \quad (3.56)$$

En posant  $\Delta(\mathbf{V}_j^0 + \delta \mathbf{V}_j^0 - \mathbf{V}_i) = 0$ , on obtient :

$$\left[ \frac{\partial \Delta(\mathbf{V}_{ij})}{\partial \mathbf{V}_j} \right]_{\mathbf{v}_{ij}=\mathbf{v}_j^0-\mathbf{v}_i} \cdot \delta \mathbf{V}_j^0 = -\Delta(\mathbf{V}_{ij})_{\mathbf{v}_{ij}=\mathbf{v}_j^0-\mathbf{v}_i} \quad (3.57)$$

Pour prendre en compte tous les contacts de structure active, on propose une forme matricielle de (3.57) :

$$\underline{\underline{R}} \delta V = \underline{S} \quad (3.58)$$

où

–  $\underline{\underline{R}}$  est une matrice constituée des éléments  $R_{\alpha,(j,\beta)}$  tels que:

$$R_{(i,j),(j,\beta)} = \left[ \frac{\partial \Delta(\mathbf{V}_{ij})}{\partial V_j^\beta} \right]_{\mathbf{v}_{ij}^\beta = \mathbf{v}_j^{0\beta} - \mathbf{v}_i}$$

où

- $(i,j)$  désigne un contact entre une particule  $i$  et une particule  $j$  ou entre une particule  $i$  et une paroi  $P$ .
  - $(j,\beta)$  désigne la coordonnée  $\beta$  de la vitesse de la particule  $j$ ,  $\beta = 1$  ou  $2$ .
- $\underline{\delta V}$  est le vecteur des incréments de vitesse de tous les degrés de liberté des grains de la structure active.
- $\underline{S}$  est le vecteur constitué des éléments  $S_{(i,j)}$ , propres à chaque couple de particules  $i$  et  $j$  (ou couple particule-paroi), tels que:

$$S_{(i,j)} = -\Delta(\mathbf{V}_{ij}^\beta)_{\mathbf{v}_j^{0\beta} - \mathbf{v}_i}$$

De façon analogue au calcul matriciel des forces intergranulaires, on choisit de résoudre (3.58) à l'aide d'une factorisation de *Cholesky*, ce qui implique de travailler avec une matrice carrée, symétrique. Pour ce faire, on multiplie les deux membres de (3.58) par la matrice transposée  $\underline{\underline{R}}^T$  :

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} \delta V = \underline{\underline{R}}^T \underline{S}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\underline{\underline{A}} \delta V = \underline{B} \quad (3.59)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est une matrice carrée, symétrique, définie positive.  $\underline{\delta V}$  est le vecteur des *incrément*s de vitesses à déterminer à chaque étape du processus itératif de la méthode de Newton.  $\underline{B}$  est le second membre du système linéaire. On n'explicitera pas ici les composantes de la matrice  $\underline{\underline{A}}$  et du vecteur  $\underline{B}$ . Néanmoins, on peut tout de même préciser que  $\underline{\underline{R}}$ , qui apparaît ici comme un intermédiaire de calcul, est une matrice qui peut être associé à un problème d'élasticité traité hors de l'hypothèse des petites perturbations.

À partir de vitesses initiales choisies arbitrairement, on résoud (3.59). À chaque itération, les nouvelles vitesses obtenues  $\underline{V} \leftarrow \underline{V} + \delta\underline{V}$ , permettent de réajuster  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ . Les vitesses des particules et parois à la rupture de l'équilibre, satisfaisant (3.55), sont obtenues lorsque  $\delta\underline{V} \rightarrow 0$ .

En pratique, chaque modification de  $\underline{A}$  nécessite une factorisation de *Cholesky* pour résoudre (3.59). Cette opération peut alors s'avérer très coûteuse en temps de calcul, particulièrement lorsque les assemblages sont grands. En conséquence, après une première factorisation indispensable, nous avons opté pour un autre type de résolution : la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement [40].

Les équations (3.49) et (3.50) sont telles que les distances intergranulaires restent constantes au cours des déplacements. Or, on ne cherche à préserver ces distances que si les interpénétrations initiales correspondent à la distance de recouvrement imposée. Lorsqu'un nouveau contact  $l_1$  est créé, on ne peut contrôler précisément sa distance d'interpénétration. Il convient donc de la réajuster. Dans le cas d'un nouveau contact entre deux particules, plutôt que d'utiliser l'équation (3.49), on préférera l'équation (3.48) où l'on substitue  $(\mathbf{r}_{ij}^1)^2$  par  $(R_i + R_j - h)^2$ .  $h$  est la valeur d'interpénétration que l'on impose à  $10^{-8}$ .  $R_i$  et  $R_j$  sont les rayons respectifs des particules  $i$  et  $j$ . Une opération similaire est réalisée sur l'équation (3.50), où l'on pose  $(d_{iP}^1)^2 = (R_i - h)^2$ . Ces dernières modifications dans les expressions de  $\Delta_{ij}$  et  $\Delta_{iP}$  se répercutent uniquement au niveau du second membre de l'équation (3.59), c'est-à-dire sur le vecteur  $\underline{B}$ .

Par cette méthode dite *implicite* du calcul des vitesses, certes bien plus complexe que l'approche *explicite*, on a une grande maîtrise des interstices dans les contacts au cours de l'évolution quasi-statique des assemblages. Il y a deux conséquences majeures à cela. Tout d'abord, on ne «*triche*» pas sur le caractère *parfaitement rigide* des particules. Ensuite, les incertitudes sur les mesures macroscopiques des déformations deviennent très faibles car indépendantes des variations d'interpénétrations. On peut ainsi mesurer avec une très grande précision les conséquences macroscopiques d'événements microscopiques dans les assemblages.

### 3.6.5 Calcul des vitesses des particules passives

Les assemblages étant constitués de particules *actives* et *passives*, il s'agit aussi de définir des règles pour déplacer les disques *passifs* en même temps que les disques de la structure qui supporte le chargement extérieur.

On représente figure 3.16 trois exemples de particules qui constituent des amas passifs en contact avec une structure active.

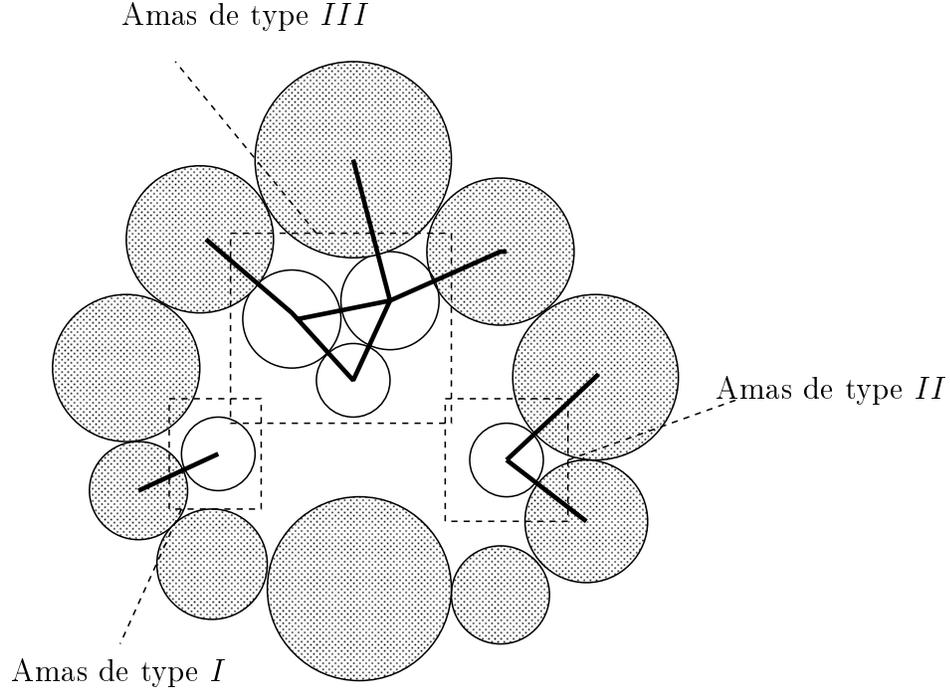


FIG. 3.16 – On représente ici 3 types d’amas passifs. Les particules grisées sont des particules actives. Les particules blanches sont les particules passives. Les traits gras représentent les contacts entre les grains passifs ou entre les grains passifs et des grains de la structure active.

On distingue 3 types d’amas passifs : le premier, de type *I*, est constitué d’une particule monovalente. L’amas de type *II* est constitué d’une seule particule mais cette dernière a deux contacts avec la structure active. Enfin, l’amas de type *III* comprend au moins deux grains, avec au moins une connexion avec la liste des disques actifs. On cherche les vitesses des particules appartenant à ces amas telles qu’après déplacement de la structure active, la condition d’impénétrabilité reste respectée pour tous les disques de l’assemblage. Si  $l$  désigne les contacts entre particules passives et  $L$  les contacts entre amas et structure active, on cherche les vitesses des grains passifs telles que :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_l \cdot \mathbf{n}_l \geq 0 \\ \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{n}_L \geq 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Si  $k_1$  et  $k_2$  sont deux particules passives,  $\mathbf{V}_l = \mathbf{V}_{k_2} - \mathbf{V}_{k_1}$ . Si  $i$  et  $k$  sont respectivement des particules actives et passives,  $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_k - \mathbf{V}_i$ .  $\mathbf{V}_i$  est connue.  $\mathbf{V}_k$ ,  $\mathbf{V}_{k_1}$  et  $\mathbf{V}_{k_2}$  sont les vitesses à déterminer. Pour les amas de types *I* et *II*, il est possible de transformer toutes les inégalités de (3.60) en égalités. Une solution analytique est alors possible. Pour les amas de type *III*, une solution satisfaisant les diffé-

rentes contraintes d'inégalité est obtenue par projections<sup>24</sup> successives sur chacun des sous-espaces définis par (3.60). La résolution de (3.60) est alors itérative.

### 3.6.6 Schéma algorithmique de la *MGQS*

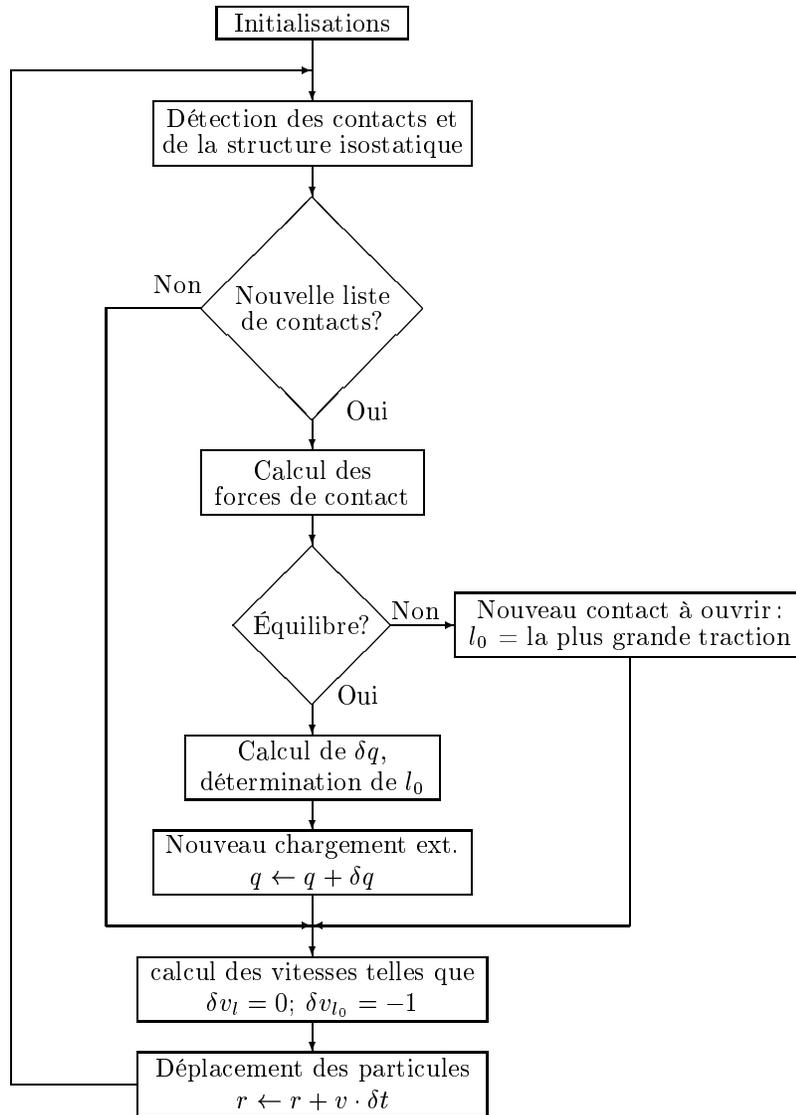


FIG. 3.17 – Schéma algorithmique de la *MGQS*.

24. Projections orthogonales au sens de  $\|\mathbf{V}_i\|^2 = \sum_{\mu} v_{\mu}^i{}^2$ .

## Conclusion

Les propriétés d'isostaticité des assemblages de disques rigides, polydisperses, sans frottement et sans cohésion, ont autorisé la mise en œuvre d'une nouvelle méthode de simulation, dénuée des considérations dynamiques généralement prises en compte dans les approches classiques (masses, mécanismes de dissipation et autres dans la DM, la DC et leurs dérivés). Ce nouveau procédé de simulation, baptisé *Méthode Géométrique Quasi-Statique*, va permettre, grâce à une grande précision numérique, de mettre en évidence les mécanismes *élémentaires* de passage d'un état d'équilibre à un autre dans des assemblages soumis à des chargements graduellement variés. La confrontation de cette nouvelle approche avec la méthode *Dynamique Moléculaire* permettra alors de montrer l'origine géométrique du comportement quasi-statique de nos assemblages modèles.

# Chapitre 4

## Trajectoires quasi-statiques des assemblages granulaires sans frottement dans le cas de la compression biaxiale à contraintes contrôlées

### Introduction

Dans ce chapitre, on propose mettre en application la *MGQS* pour étudier le comportement mécanique d'assemblages modèles<sup>1</sup> sous chargement biaxial. À l'aide de cette nouvelle approche numérique, nous réaliserons des compressions biaxiales sur des assemblages de taille variable, dans des gammes de déviateurs proches de l'état isotrope. On verra qu'il est possible de réaliser des observations très précises sur les mécanismes de déformation à l'échelle microscopique lors du passage d'un état d'équilibre à un autre. On montrera que l'évolution de ces assemblages non frottants, soumis à des déviateurs croissants, n'est pas constituée de trajectoires quasi-statiques au sens strict du terme (suite *continue* d'états d'équilibre). Le comportement macroscopique se résumera exclusivement à des successions d'états d'équilibre et phases de réarrangements internes plus ou moins importants. Des statistiques systématiques portant sur les incréments de chargement et leurs réponses en déformation nous conduiront à proposer une relation liant ces derniers, traduisant alors un comportement mécanique non déterministe apparenté à un processus de *Lévy*. On conclura alors sur l'inexistence d'une courbe de comportement  $\sigma - \epsilon$  continue dans la limite des grands systèmes. Ces résultats, obtenus par la *MGQS*, seront confirmés par des simulations réalisées avec la *Dynamique Moléculaire* sur des assemblées de particules à rigidité finie. La confrontation des

---

1. Assemblages modèles présentés chapitre 2.

deux approches numériques nous amènera à conclure sur les origines principalement géométriques du comportement mécanique des assemblages denses de disques polydisperses et sans frottement.

## 4.1 Schéma de principe de l'essai biaxial

On rappelle brièvement les principales caractéristiques des assemblages étudiés : les échantillons sont constitués de disques parfaitement rigides, avec un frottement intergranulaire nul. La cohésion est inexistante. Les rayons des particules sont tirés au sort suivant une densité de probabilité uniforme. Ces derniers ont des valeurs strictement comprises entre  $a/2$  et  $a$ . Ces assemblages sont initialement rendus denses par compression isotrope<sup>2</sup>.

La compression biaxiale à contraintes contrôlées consiste à appliquer un déviateur  $q$ , résultant d'une série d'incrément  $\delta q$ , tout en gardant une pression de confinement constante. On présente figure 4.1 le schéma de principe de l'essai biaxial.

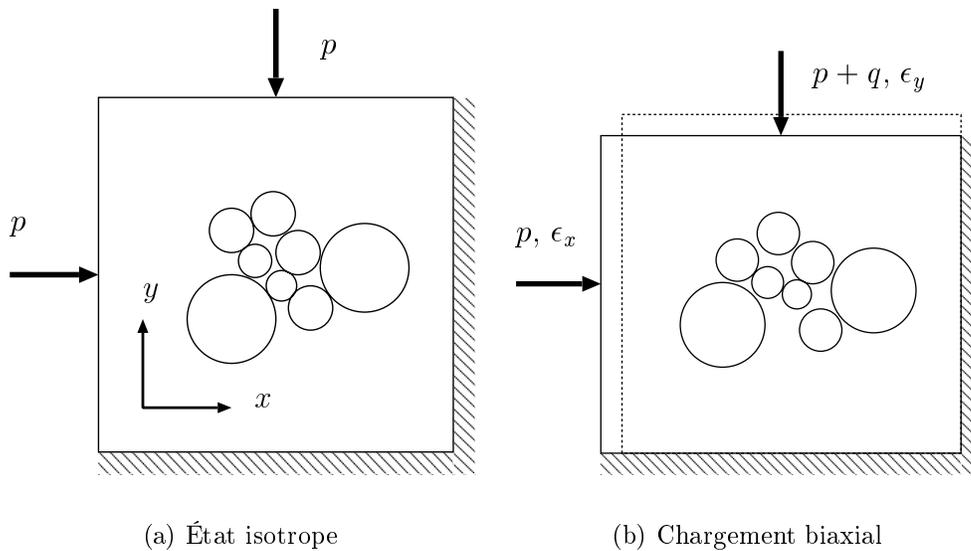


FIG. 4.1 – Schéma de principe de l'essai biaxial.

2. La pression, isotrope, vaut  $p = 1$ .

## 4.2 Exemples de simulations de compressions biaxiales obtenues par la *MGQS*

### 4.2.1 Compression biaxiale d'un assemblage de 1024 particules

Figure 4.2, on montre une courbe macroscopique, reliant le déviateur  $q$  à la déformation axiale  $\delta\epsilon_y$ , obtenue par compression biaxiale à chargement imposé sur un assemblage de 1024 disques non frottants.

Les propriétés d'isostaticité de nos assemblages nous donnent la possibilité de déterminer exactement la plage de déviateur supporté pour une liste de contacts donnée. La courbe de comportement d'un assemblage de 1024 particules (fig. 4.2) est une suite de segments verticaux (plage de chargement supporté) et de segments horizontaux (réponse en déformation).

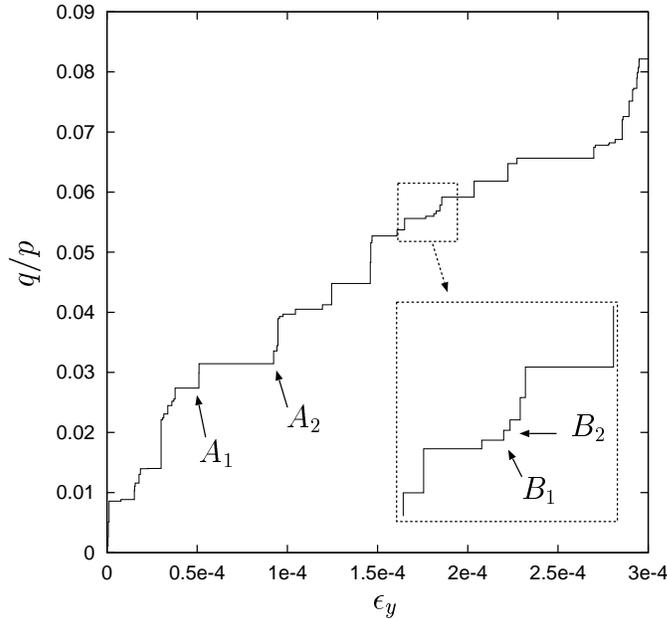


FIG. 4.2 – Courbe  $q - \epsilon_y$  d'un assemblage de 1024 particules sous chargement biaxial. La déformation verticale  $\epsilon_y$  est positive en compression.  $q$  représente le déviateur de contrainte. Les points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont des états d'équilibre.

La courbe de comportement est une courbe en escaliers. On parlera de *marches* pour désigner les phases de réarrangement (segments horizontaux) et de *contre-marches* pour les plages de déviateur (segments verticaux). Chaque contre-marche est constituée d'une famille *continue* d'états d'équilibre correspondant aux valeurs de  $q$  de la plage supportée. Comme on peut le voir sur cette courbe, les incréments de chargement  $\delta q$  induisent des incréments de déformation  $\delta\epsilon_y$  d'intensités

variables. L'étude statistique des  $\delta q$  et  $\delta \epsilon_y$  sera entreprise ultérieurement.

La *Méthode Géométrique Quasi-Statique* permet de suivre *exactement* les modifications dans les listes de contacts entre deux états d'équilibre. La figure 4.3(a) montre les changements dans une liste de contacts pour un incrément de déformation de faible intensité,  $\delta \epsilon_y^{B_1 \rightarrow B_2} = 1.99 \cdot 10^{-6}$  (passage de l'état d'équilibre  $B_1$  au suivant  $B_2$ , fig. 4.2). Sur la figure 4.3(b), on représente les réarrangements internes pour une réponse en déformation plus importante,  $\delta \epsilon_y^{A_1 \rightarrow A_2} = 4.04 \cdot 10^{-5}$  (passage de l'état d'équilibre  $A_1$  à l'état d'équilibre  $A_2$ , fig. 4.2). On remarquera ici que l'on se situe dans des gammes de déformations incrémentales extrêmement faibles.

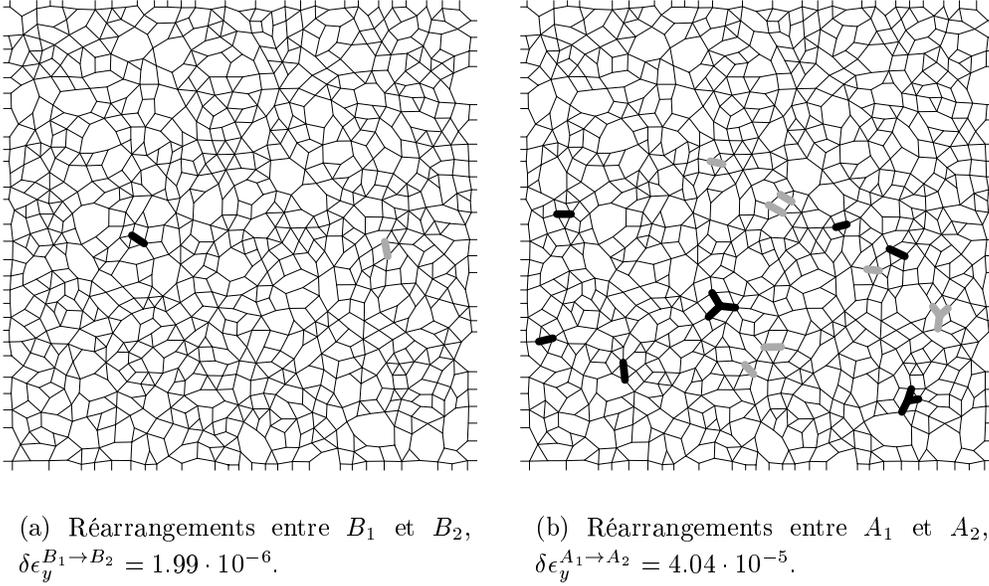


FIG. 4.3 – (a)- Carte des contacts au point  $B_2$ . (b)- Carte des contacts au point  $A_2$ . Les petits segments noirs représentent les contacts maintenus entre deux états d'équilibre. Les traits épais noirs sont les contacts gagnés et les gris, les contacts perdus. (a)- 1 contact gagné et 1 perdu. (b)- 11 contacts gagnés et 9 perdus.

Figure 4.4, on donne les cartes des déplacements  $\vec{u}_i = [u_i^x ; u_i^y]$  des disques entre  $B_1$  et  $B_2$  ainsi qu'entre  $A_1$  et  $A_2$ . Afin de mettre en évidence la grande hétérogénéité des déplacements des grains, on montre sur la figure 4.5 une carte des quantités  $\vec{\hat{u}}_i$  définie par :

$$\vec{\hat{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{u}_i^x \\ \hat{u}_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i^x + \delta \epsilon_x \cdot x_i \\ u_i^y + \delta \epsilon_y \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où  $u_i^x$  et  $u_i^y$  sont les composantes du vecteur déplacement de la particule  $i$ .  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées de la particule  $i$  dans le repère cartésien orthonormé

dont l'origine est située dans le coin droit, en bas de l'échantillon. Le signe des déformations incrémentales est conforme aux conventions de la mécanique des sols<sup>3</sup>.

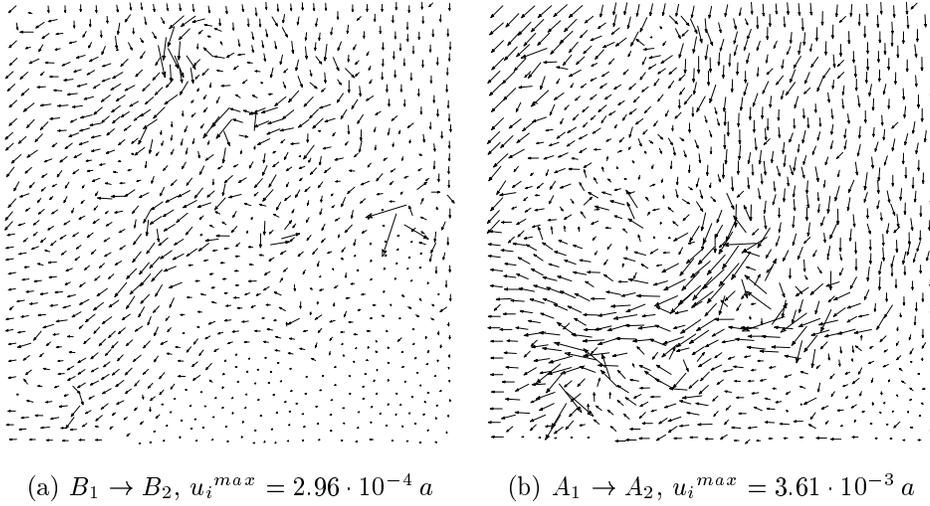


FIG. 4.4 – Cartes des déplacements  $\vec{u}_i$ ,  $u_i = \|\vec{u}_i\|$ . Le déplacement maximal calculé est  $u_i^{max}$ .

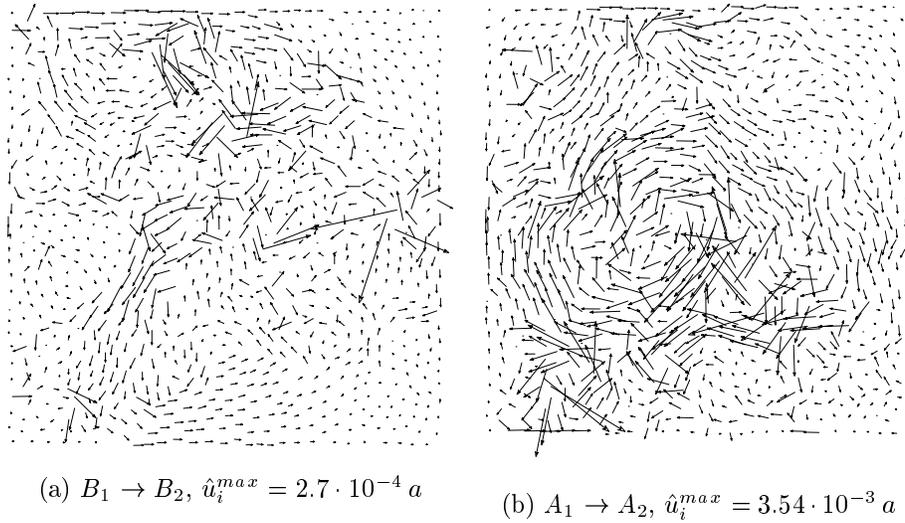


FIG. 4.5 – Cartes des  $\vec{\hat{u}}_i$ .  $\hat{u}_i^{max}$  est la plus grande valeur de toutes les  $\|\vec{\hat{u}}_i\|$  calculées.

---

3. Positif en compression, négatif en extension.

## 4.2.2 Exemple de charge-décharge sur un assemblage constitué de 4900 disques

Il est communément admis que le comportement des sables est élastique non linéaire, donc réversible, pour les faibles déformations  $\epsilon_y < 10^{-5}$  (Biarez et coll. [10]). Figure 4.6, on montre une courbe  $q - \epsilon_y$  obtenue sur un assemblage de 4900 particules. À différents niveaux de chargement, le déviateur est décrémenté jusqu'à  $q = 0$ .

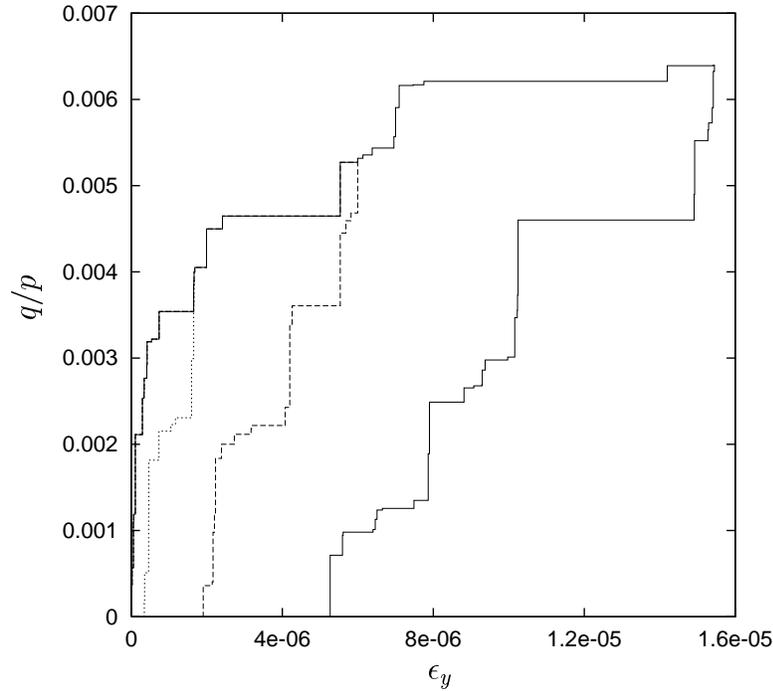


FIG. 4.6 – Compression biaxiale sur un assemblage de 4900 particules. À 3 niveaux de  $q$  différents, des décharges sont réalisées.

On montre alors le caractère particulièrement irréversible du comportement et ce, dans une gamme de déformation très faible. D'une façon plus générale, on constate qu'à partir du moment où le premier changement dans les listes de contacts intervient, le comportement n'est plus réversible.

## 4.2.3 Exemples de comportements macroscopiques pour 4 tailles d'échantillons

On montre sur la figure 4.7 des courbes  $q - \epsilon_y$  pour 4 tailles d'assemblages :  $N = 1024, 1936, 3025$  et 4900 particules.

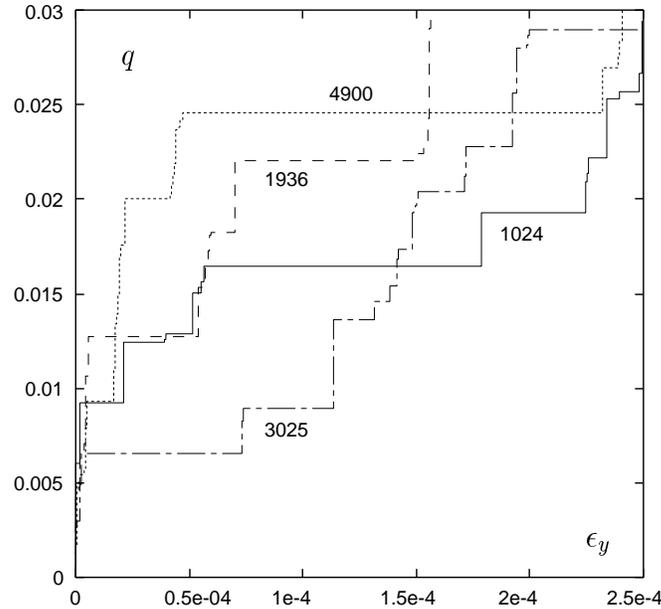


FIG. 4.7 – Exemples de courbes macroscopiques pour 4 tailles d’assemblages :  $N = 1024, 1936, 3025$  et  $4900$  disques.

Dans la gamme de chargement représentée figure 4.7, ( $0 \leq q \leq 0.03$ ), chaque échantillon passe par plusieurs états d’équilibre successifs, dont le nombre est fonction de  $N$  :

- $N = 1024$ , 18 états d’équilibre,
- $N = 1936$ , 26 états d’équilibre,
- $N = 3025$ , 64 états d’équilibre,
- $N = 4900$ , 85 états d’équilibre.

Cet exemple montre que plus le système est grand, plus le nombre d’états d’équilibre successifs nécessaires pour atteindre un niveau de déviateur  $q$  donné est grand, et, par conséquent, plus les  $\delta q$  sont petits.

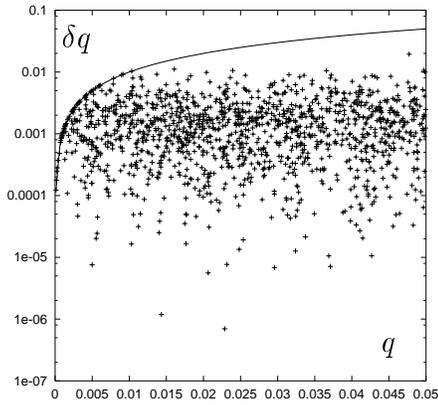
L’exemple de la figure 4.7 introduit parfaitement les développements à suivre. Nous allons présenter des analyses statistiques de résultats de simulations sur les assemblages de 1024, 1936, 3025 et 4900 particules dans le but d’étudier le comportement mécanique macroscopique dans la limite des grands systèmes. La courbe  $q - \epsilon_y$  étant composée d’incrément  $\delta q$  et  $\delta \epsilon_y$ , c’est sur ces quantités que nous allons réaliser nos observations, dans une gamme de déviateur proche de l’état isotrope,  $0 < q \leq 0.05$ .

## 4.3 Étude statistique du comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes

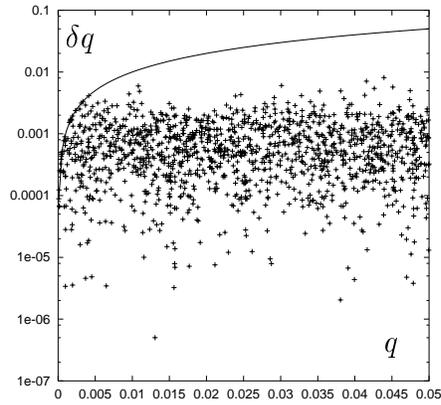
### 4.3.1 Analyse statistique des incréments de déviateur $\delta q$

#### Corrélations entre $q$ et $\delta q$

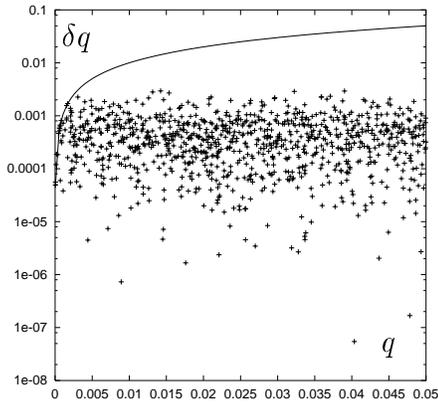
Figure 4.8, on représente pêle-mêle pour tous les échantillons d'une taille donnée, les  $\delta q$  calculés par la *MGQS* en fonction du niveau de déviateur total  $q$  atteint.



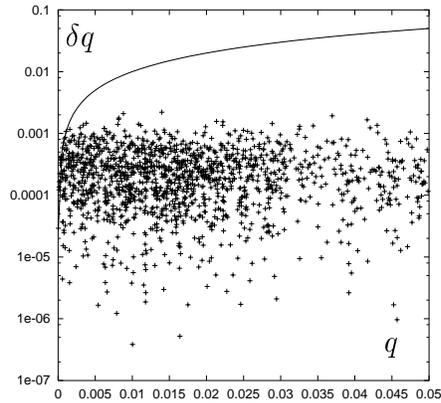
(a)  $N = 1024$



(b)  $N = 1936$



(c)  $N = 3025$



(d)  $N = 4900$

FIG. 4.8 – *Corrélations entre  $\delta q$  et  $q$ ,  $0 < q \leq 0.05$ . Les  $\delta q$  sont ici représentés suivant une échelle logarithmique. Les courbes continues représentent l'égalité  $\delta q = q$  sur laquelle figurent nécessairement les points correspondant au premier incrément calculé.*

Comme on se place dans une gamme de déviateur  $q$  très faible, proche du chargement isotrope, on n'observe pas de dépendance entre  $q$  et les  $\delta q$  calculés.

### Densités de probabilités

Les statistiques des incréments de chargement sont réalisées sur les ensembles  $\delta Q_N$  suivant:

- $\delta Q_{1024}$ , 1371 valeurs de  $\delta q$  pour  $N = 1024$ ,
- $\delta Q_{1936}$ , 1406 valeurs de  $\delta q$  pour  $N = 1936$ ,
- $\delta Q_{3025}$ , 982 valeurs de  $\delta q$  pour  $N = 3025$ ,
- $\delta Q_{4900}$ , 1451 valeurs de  $\delta q$  pour  $N = 4900$ .

Figure 4.9(a), on montre les densités de probabilité des  $\delta q$  pour chaque taille  $N$  d'échantillon. Ces densités de probabilité suivent des lois exponentielles décroissantes. Elles sont dépendantes du nombre de particules  $N$  au sein des assemblages.

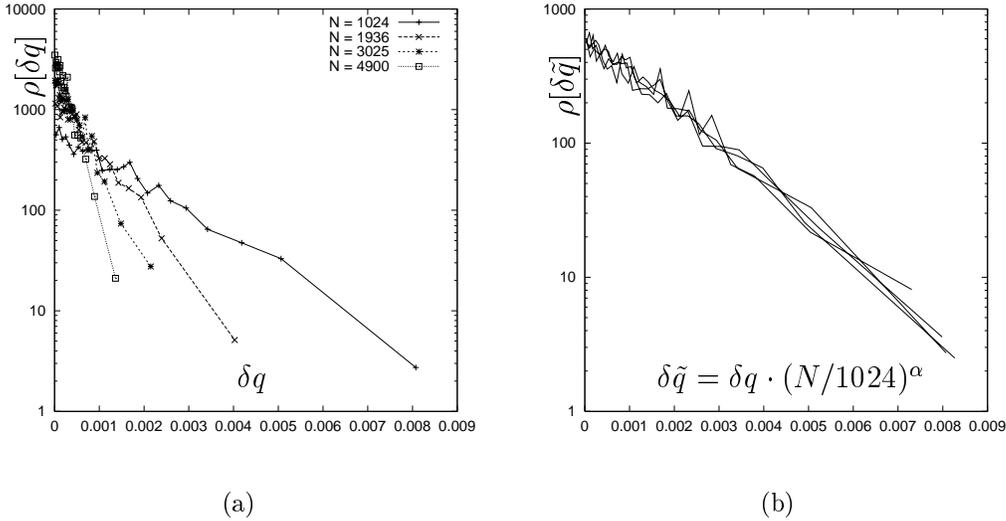


FIG. 4.9 – (a)- Densité de probabilité des incréments de chargement  $\delta q$  pour 4 tailles  $N$  d'assemblages. (b)- Densité de probabilité des  $\delta q$  pondérés par  $(N/1024)^\alpha$  où  $N$  correspond au nombre de particules des 4 assemblages étudiés.  $\alpha = 1.13 \pm 0.06$ .

En multipliant les  $\delta q$  relatifs à chaque taille d'échantillon par  $(N/1024)^\alpha$ , il est possible de superposer les densités de probabilité associées aux 3 plus grandes tailles d'assemblages<sup>4</sup> sur celle correspondant aux échantillons à  $N = 1024$  particules. L'exposant  $\alpha = 1.13 \pm 0.06$  est déterminé par le test de vraisemblance de  $K.-S.$ <sup>5</sup> sur les 6 couples d'ensembles d'évènements suivants:  $(\delta Q_{1024}, \delta Q_{1936})$ ,

4.  $N = 1936, 3025, 4900$ .

5. Test de vraisemblance de *Kolmogorav et Smirnov* [84], voir page 68.

$(\delta \mathcal{Q}_{1024}, \delta \mathcal{Q}_{3025}), (\delta \mathcal{Q}_{1024}, \delta \mathcal{Q}_{4900}), (\delta \mathcal{Q}_{1936}, \delta \mathcal{Q}_{3025}), (\delta \mathcal{Q}_{1936}, \delta \mathcal{Q}_{4900})$  et  $(\delta \mathcal{Q}_{3025}, \delta \mathcal{Q}_{4900})$ . Avec  $\alpha = 1.13$ , on obtient dans le pire des cas  $P_{K,-S} = 0.14$  et  $P_{K,-S} = 0.63$  pour le cas le plus favorable.

### Moyennes dans la limite des grands systèmes

Pour chaque taille d'assemblage, les moyennes  $\delta q_m(N)$  des  $\delta q \in \delta \mathcal{Q}_N$  permettent d'extrapoler la valeur de l'incrément de chargement moyen dans la limite des grands systèmes (fig. 4.10).

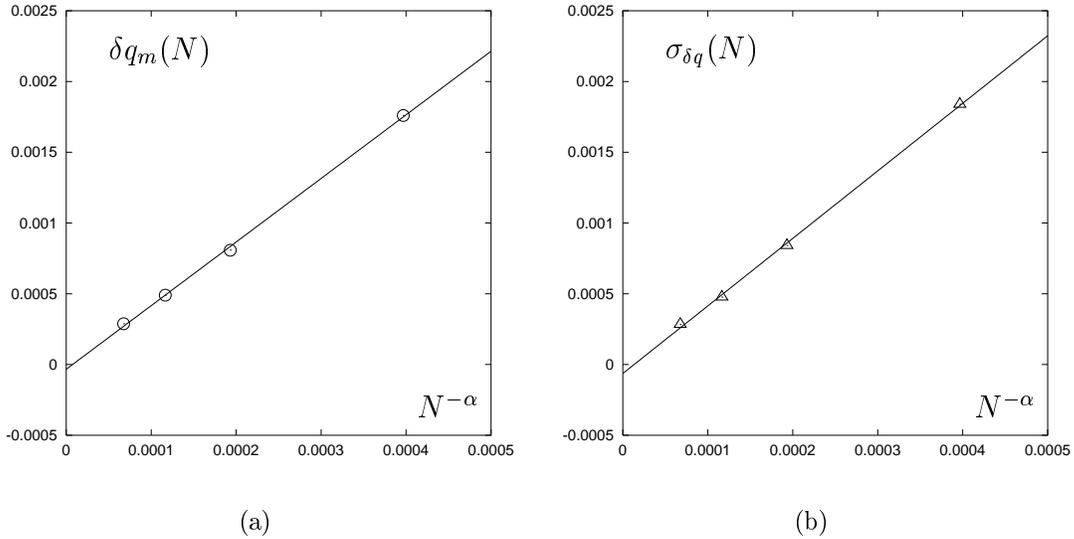


FIG. 4.10 – (a) Moyenne  $\delta q_m(N)$  et (b) écart type  $\sigma_{\delta q}(N)$  des  $\delta q$  en fonction de la taille des assemblages. Les droites sont des approximations linéaires  $f(x) = a_0 x + a_1$ . (a)-  $a_0 = 4.50 \pm 0.09$ ,  $a_1 = (-3.37 \pm 2.18) \cdot 10^{-5}$ . (b)-  $a_0 = 4.77 \pm 0.09$ ,  $a_1 = (-6.34 \pm 2.30) \cdot 10^{-5}$ .

En tenant compte des incertitudes calculées sur  $\alpha$  ainsi que des incertitudes sur l'approximation linéaire (fig. 4.10), il semble raisonnable de modéliser  $\delta q_m$  par :

$$\delta q_m(N) = \delta q_0 \cdot N^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \delta q_0 = 4.37 \pm 0.06 \quad (4.2)$$

On montre donc que l'incrément de déviateur moyen supporté tend vers 0 lorsque la taille du système tend vers l'infini.

### Nombre d'états d'équilibre dans la limite des grands systèmes

La moyenne des incréments de chargement est directement liée à la taille  $N$  de l'assemblage. On peut donc s'attendre à ce que le nombre d'états d'équilibre

successifs (ou nombre de *marches*) pour atteindre un niveau de déviateur  $q_f$  fixé soit lui aussi une fonction de  $N$ . Voici par exemple la liste du nombre d'états d'équilibre nécessaires pour atteindre un déviateur  $q_f = 0.02$  en fonction de  $N$  :

- $N = 1024 \rightarrow 11.5 \pm 4.5$  états d'équilibre,
- $N = 1936 \rightarrow 26.1 \pm 7.0$  états d'équilibre,
- $N = 3025 \rightarrow 43.6 \pm 6.8$  états d'équilibre,
- $N = 4900 \rightarrow 66.6 \pm 8.0$  états d'équilibre.

Si  $M(N)$  désigne le nombre d'états d'équilibre nécessaires pour atteindre un niveau de déviateur  $q_f$  donné, d'après (4.2), l'application du théorème de la limite centrale permet d'écrire :  $M(N) \cdot \delta q_m(N) = q_f$ .

On en déduit alors :

$$M(N) = \frac{q_f}{q_0} \cdot N^\alpha \quad (4.3)$$

## Conclusions

Cette analyse statistique des incréments de déviateur montre que, pour  $0 < q \leq 0.05$ , et pour chaque taille d'assemblage, les  $\delta q$  successifs sont indépendants et équidistribués.  $\delta q$  est une variable dont la densité de probabilité est une loi exponentielle décroissante.  $\delta q$  tend vers 0 lorsque la taille du système tend vers l'infini. Dans la limite des grands systèmes,  $N \rightarrow \infty$ , le nombre d'états d'équilibre permettant de passer d'un état de contrainte isotrope à un niveau de déviateur  $q_f$  donné, tend vers l'infini comme  $N^\alpha$ .

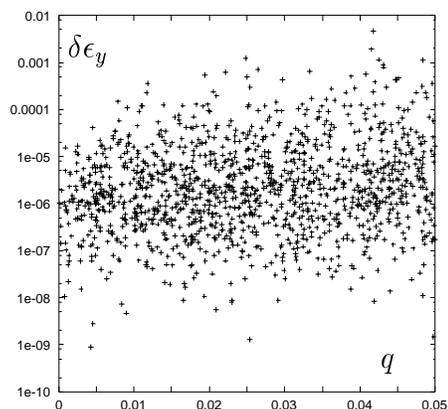
### 4.3.2 Analyse statistique des incréments de déformation $\delta \epsilon_y$

Parallèlement aux résultats obtenus pour les incréments de chargement, l'étude statistique des  $\delta \epsilon_y$  va nous permettre de constater qu'il existe une relation étroite entre les déviateurs de contrainte et les déformations. Comme nous avons choisi de nous restreindre aux chargements proches de l'état isotrope, c'est uniquement sur le *début* de la courbe  $q - \epsilon_y$  que l'on va chercher à identifier les propriétés mécaniques de nos assemblages. Au préalable, à l'instar des études menées sur les  $\delta q$ , des tests simples comme des corrélations  $\delta \epsilon_y - q$ ,  $\delta \epsilon_y - \delta q$  et  $\delta \epsilon_y - \epsilon_y$  vont nous permettre de caractériser les incréments de déformation calculés.

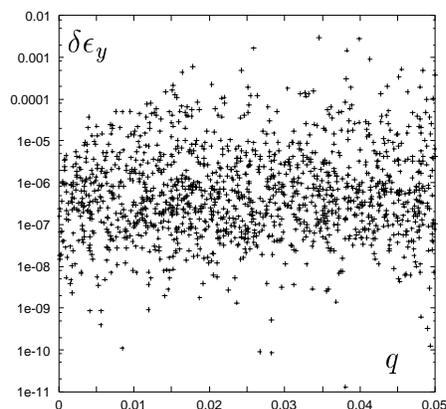
## Corrélations

Pour les tailles d'assemblages étudiés,  $N = 1024$ ,  $N = 1936$ ,  $N = 3025$  et  $N = 4900$ , 3 types de corrélations sont envisagées.

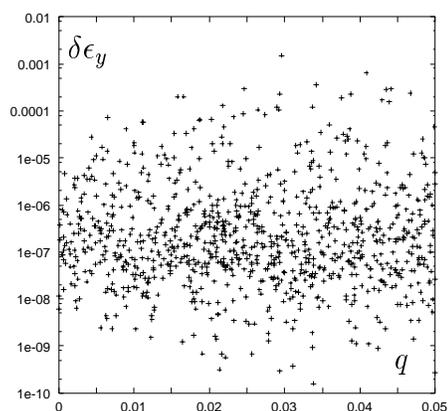
Dans un premier temps, on montre sur la figure 4.11 les corrélations entre  $\delta\epsilon_y$  et  $q$ . On constate qu'il n'existe pas de tendance générale à l'augmentation des intensités des déformations incrémentales au fur et à mesure que le déviateur augmente.



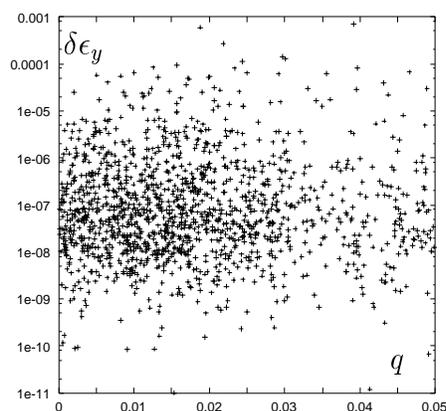
(a)  $N = 1024$



(b)  $N = 1936$



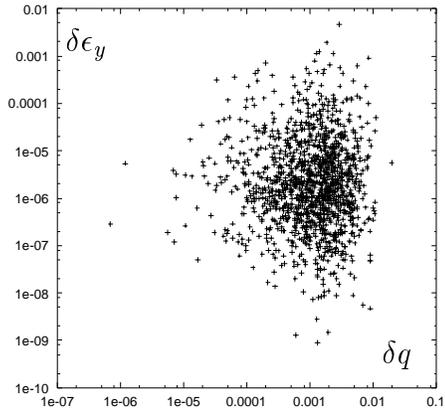
(c)  $N = 3025$



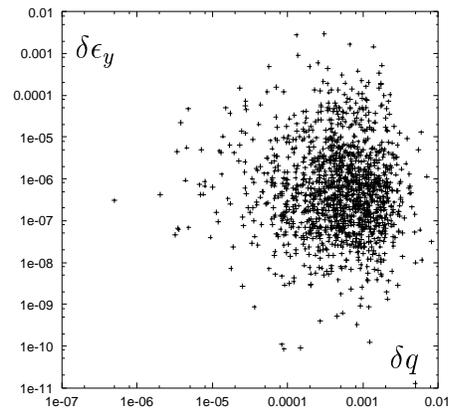
(d)  $N = 4900$

FIG. 4.11 – *Corrélations entre  $q$  et  $\delta\epsilon_y$  avec  $0 < q \leq 0.05$ . Les  $\delta\epsilon_y$  sont ici représentés suivant une échelle logarithmique.*

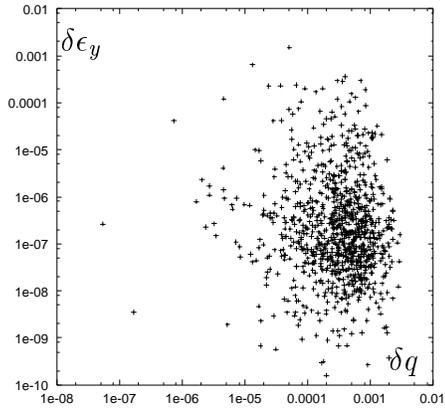
Sur la figure 4.12, on observe qu'il n'existe pas de dépendance entre  $\delta\epsilon_y$  et  $\delta q$ .



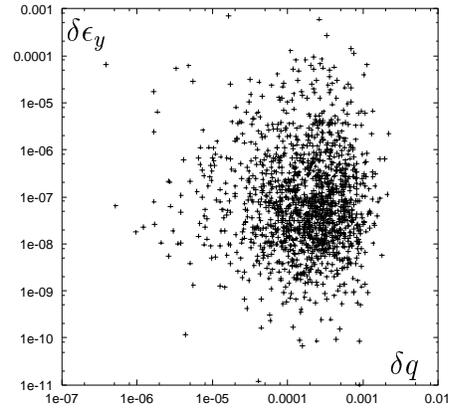
(a)  $N = 1024$



(b)  $N = 1936$



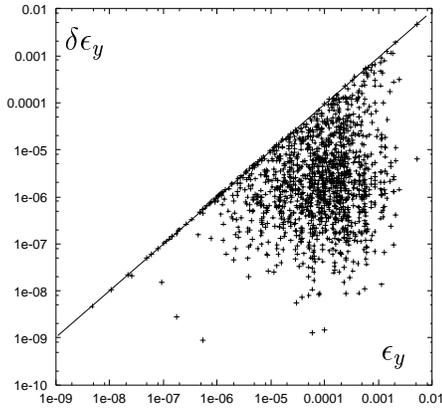
(c)  $N = 3025$



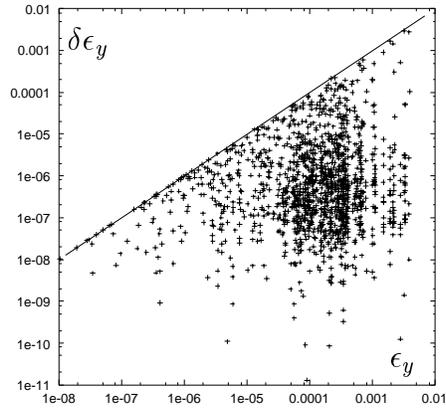
(d)  $N = 4900$

FIG. 4.12 – Corrélations entre  $\delta q$  et  $\delta\epsilon_y$  avec  $q = (\sum \delta q) \leq 0.05$ . Les  $\delta q$  et  $\delta\epsilon_y$  sont ici représentés suivant une échelle logarithmique.

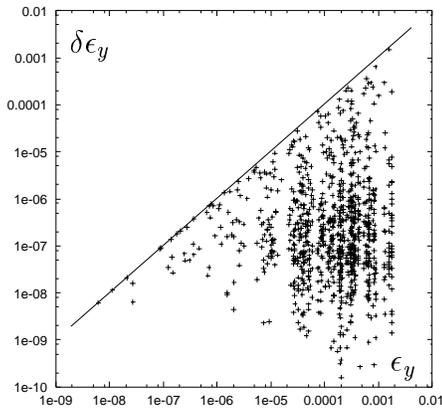
Pour finir, on constate sur la figure 4.13 que l'histoire des déformations  $\epsilon_y$  ne semble pas influencer sur les amplitudes de  $\delta\epsilon_y$ .



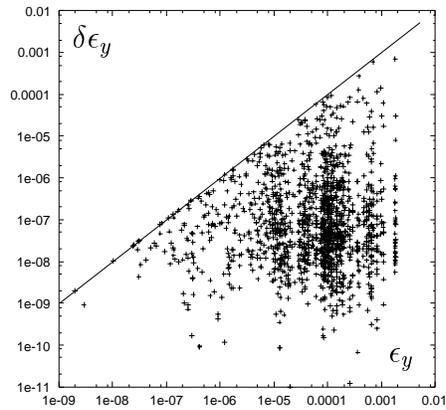
(a)  $N = 1024$



(b)  $N = 1936$



(c)  $N = 3025$



(d)  $N = 4900$

FIG. 4.13 – *Corrélations entre  $\epsilon_y$  et  $\delta\epsilon_y$ . Les  $\epsilon_y$  et  $\delta\epsilon_y$  sont ici représentés suivant une échelle logarithmique. Les droites représentent l'égalité  $\delta\epsilon_y = \epsilon_y$  sur laquelle figurent les points correspondant au premier incrément de déformation calculé.*

Toutes ces observations montrent que les  $\delta\epsilon_y$  successifs sont indépendants et équidistribués.

### Densités de probabilités

Les statistiques sont réalisées sur les ensembles suivants:

- $\delta\mathcal{E}_{1024}$ , 1371 valeurs de  $\delta\epsilon_y$  pour  $N = 1024$ ,

- $\delta\mathcal{E}_{1936}$ , 1406 valeurs de  $\delta\epsilon_y$  pour  $N = 1936$ ,
- $\delta\mathcal{E}_{3025}$ , 982 valeurs de  $\delta\epsilon_y$  pour  $N = 3025$ ,
- $\delta\mathcal{E}_{4900}$ , 1451 valeurs de  $\delta\epsilon_y$  pour  $N = 4900$ .

On montre figure 4.14(a) les densités de probabilité de  $\delta\epsilon_y$  pour chaque taille  $N$  d'échantillon.

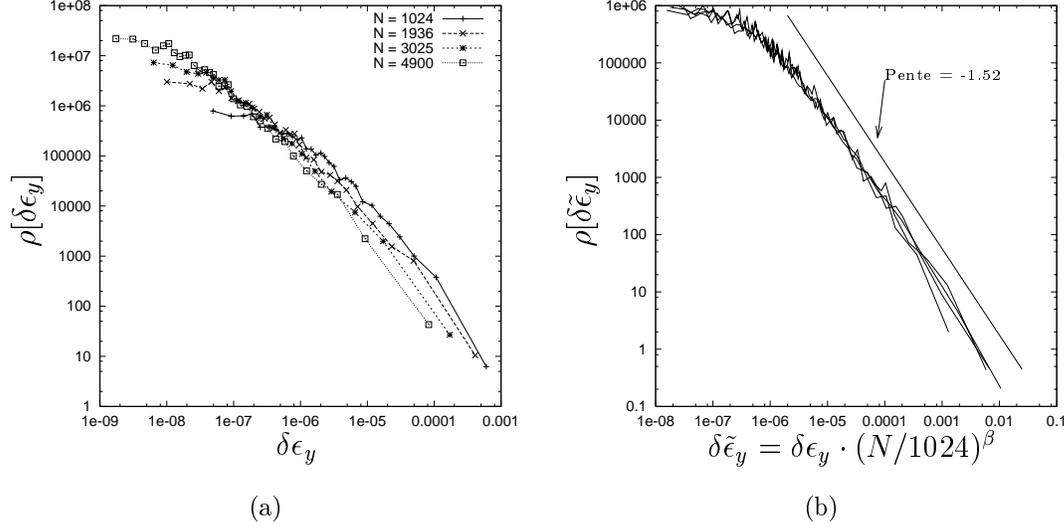


FIG. 4.14 – (a)- Densité de probabilité des incréments  $\delta\epsilon_y$  pour les 4 tailles d'assemblages. Histogramme calculé avec 40 valeurs par classe. (b)- Densité de probabilité des  $\delta\epsilon_y$  pondérés par  $(N/1024)^\beta$  où  $N$  correspond au nombre de particules des 4 tailles d'assemblages étudiés et où  $\beta = 2.11 \pm 0.02$ . Histogramme calculé avec 20 valeurs par classe. Les abscisses et les ordonnées sont en échelle logarithmique.

En multipliant les  $\delta\epsilon_y$  relatifs à chaque taille  $N$  d'échantillon par  $(N/1024)^\beta$ , il est possible de superposer les densités de probabilité des 3 plus grandes tailles<sup>6</sup> sur celle associée aux échantillons à 1024 particules, fig. 4.14(b). À cette occasion, on définit une nouvelle variable  $\delta\tilde{\epsilon}_y = \delta\epsilon_y \cdot (N/1024)^\beta$  où  $\beta = 2.11 \pm 0.02$  est déterminé par le test de vraisemblance  $K$ - $S$ .

Les densités de probabilité de la figure 4.14(b) montrent, pour des valeurs de  $\delta\tilde{\epsilon}_y > 5 \cdot 10^{-6}$ , soit un peu plus de 32% des valeurs calculées, un comportement en loi de puissance. Un test  $K$ - $S$  permet de vérifier que l'hypothèse d'une décroissance de la densité de probabilité comme  $\delta\tilde{\epsilon}_y^{-(1+\mu)}$  est vraisemblable avec  $\mu = 0.52 \pm 0.05$ .

La valeur obtenue pour  $\mu$  est problématique : l'espérance mathématique de  $\delta\tilde{\epsilon}_y$ , définie par  $\int_0^{+\infty} \delta\tilde{\epsilon}_y \rho[\delta\tilde{\epsilon}_y] d(\delta\tilde{\epsilon}_y)$ , est une intégrale divergente.

6.  $N = 1936, 3025, 4900$ .

Bien que l'espérance mathématique de  $\delta\epsilon_y$  (ou de  $\delta\tilde{\epsilon}_y$ ) n'existe pas, il reste tout de même possible de calculer l'échelle typique<sup>7</sup> des incréments de déformation :

$$\delta\epsilon_y^{typ}(N) = \delta\epsilon_y^0 \cdot N^{-\beta} \quad (4.4)$$

Dans la gamme d'incrément de déformation étudiée,  $\delta\epsilon_y \cdot (N/1024)^{-\beta} > 5 \cdot 10^{-6}$ , on en déduit que la densité de probabilité de  $\delta\epsilon_y$  est de la forme :

$$\rho[\delta\epsilon_y] = [\delta\epsilon_y^{typ}(N)]^\mu \cdot \delta\epsilon_y^{-(1+\mu)} \quad (4.5)$$

Comme l'espérance mathématique de  $\delta\epsilon_y$  n'existe pas, le théorème de la limite centrale ne peut être appliqué pour cette variable aléatoire. Néanmoins, pour les lois de type *loi de puissance*, il est possible d'utiliser une forme généralisée du théorème de la limite centrale, proposée par *Lévy et Gnedenko*. On propose, dans le point qui suit, de décrire brièvement ce théorème en reprenant une partie de l'ouvrage de Bardou et coll. [7].

### 4.3.3 Théorème généralisé de la limite centrale et processus de Lévy

Soit  $\tau$  une variable aléatoire positive dont la densité de probabilité pour les  $\tau$  grands est de la forme :

$$\rho(\tau) \sim \mu\tau_b^\mu \cdot \tau^{-(1+\mu)} \quad (4.6)$$

où  $\tau_b$  est une constante correspondant à l'échelle du phénomène mesuré et  $\mu$  un exposant qui décrit la *vitesse* de décroissance de  $\tau$ .

Soit  $T_M$  la somme de  $M$  variables aléatoires indépendantes  $\tau$ , distribuées suivant la densité de probabilité (4.6) :

$$T_M = \sum_{i=1}^M \tau_i \quad (4.7)$$

La forme usuelle du théorème de la limite centrale s'applique lorsque la moyenne  $\langle\tau\rangle$  et la variance  $\sigma^2 = \langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2$  existent. Dans le cas d'une densité de probabilité sous forme d'une loi de puissance décroissante, ces deux moments existent pour  $\mu > 2$ . Le théorème de la limite centrale permet alors de décrire  $T_M$  comme suit :

---

7. Remarque: comme l'espérance de  $\delta\epsilon_y$  est une intégrale divergente, l'échelle typique des incréments ne va pas progressivement s'approcher d'une limite au fur et à mesure que le nombre de valeurs augmente.

$$T_M = \langle \tau \rangle M + \sigma \sqrt{M} \xi \quad (4.8)$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire, sans dimension, distribuée suivant une *gaussienne* de moyenne 0 et de variance 1.

Pour les cas où  $\mu < 2$ , la variance  $\sigma^2$  et/ou la moyenne  $\langle \tau \rangle$  n'existe pas. Le théorème de la limite centrale ne peut donc pas être utilisé et seule une forme généralisée de ce théorème est appropriée. Son écriture dépend alors de la valeur de  $\mu$ . Pour  $1 \leq \mu < 2$ , la moyenne existe mais pas la variance. On obtient alors :

$$T_M = \langle \tau \rangle M + \tau_b M^{\frac{1}{\mu}} \xi \quad (4.9)$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire d'ordre 1, distribuée, pour  $M$  grand, selon la densité de probabilité  $L_\mu(\xi)$ . La fonction  $L_\mu(\xi)$  a pour transformée de *Laplace*<sup>8</sup> :

$$\mathcal{L}[L_\mu(u)] = \int_0^\infty d\xi L_\mu(\xi) e^{-u\xi} = \exp(-b_\mu u^\mu) \quad \text{avec} \quad b_\mu = \frac{\Gamma(\mu)}{\mu} \quad (4.10)$$

où  $\Gamma$  désigne ici la fonction *Gamma* définie par  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ .

$L_\mu(\xi)$ , qui ne dépend que de  $\mu$ , est appelée *distribution de Lévy d'ordre  $\mu$* .

Pour  $\mu < 1$ , tous les moments d'ordre supérieur à  $\mu$  divergent. La somme de  $M$   $\tau_i$  s'exprime par :

$$T_M = \tau_b M^{\frac{1}{\mu}} \xi \quad (4.11)$$

où  $\xi$  est une variable aléatoire d'ordre 1, distribuée, pour  $M$  grand, suivant la densité de probabilité  $L_\mu(\xi)$ , éq. (4.10) avec  $b_\mu = \Gamma(1 - \mu)$ .

$\mu = 0.5$  est un cas particulier pour lequel  $L_\mu(\xi)$  peut s'écrire sous une forme explicite :

$$L_{\frac{1}{2}}(\xi) = \Theta(\xi) \frac{1}{2\xi^{3/2}} \exp\left[-\frac{\pi}{4\xi}\right] \quad (4.12)$$

où  $\Theta(\xi)$  est la fonction de *Heaviside*.

Sur la figure 4.15, on montre des exemples de processus de *Lévy* pour 4 valeurs de  $\mu$ , où l'on représente en abscisse la valeur  $M$  et en ordonnées  $T_M$ .

---

8. On note  $\mathcal{L}[f]$  la transformée de *Laplace* de la fonction  $f$ .

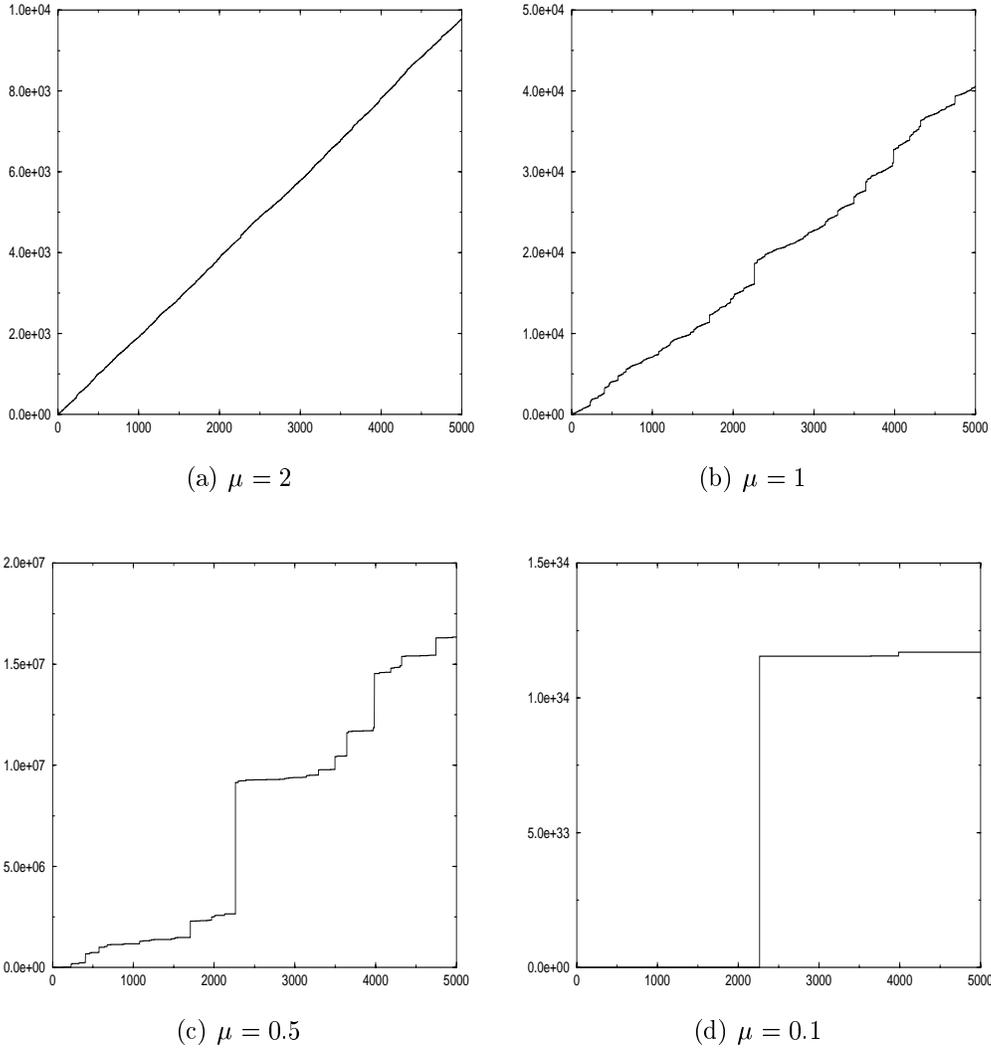


FIG. 4.15 – Simulation de processus de Lévy pour différentes valeurs de  $\mu$ . On représente en abscisse  $M$  et en ordonnées  $T_M$ . Courbes extraites de [7].

À l'aide de ces bases théoriques, il est maintenant possible de faire une description statistique des incréments de déformations  $\delta\epsilon_y$  calculés par la *MGQS*.

### 4.3.4 Comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes et processus de Lévy

#### Sommation des incréments de déformations

Comme nous avons pu le voir, la densité de probabilité des incréments  $\delta\epsilon_y$  nous interdit l'utilisation du théorème de la limite centrale sous sa forme classique et

nous oblige ainsi à appliquer une forme généralisée proposée par *Lévy et Gnedenko*. Pour ce faire, on construit une nouvelle variable aléatoire notée  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}$ , somme de  $M(N)$  incréments de déformation successifs,.  $M(N)$  est choisi tel que  $\Delta q = \sum^{M(N)} \delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ . Cette opération de sommation est schématisée sur la figure 4.16.

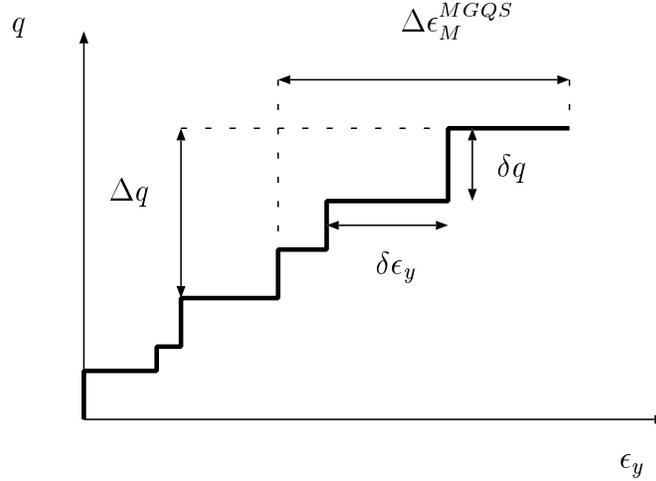


FIG. 4.16 – Sommation des incréments de déformation  $\delta\epsilon_y$  pour construire la variable  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}$  correspondant à  $\Delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Cette somme d'incréments de déformation *élémentaires*  $\delta\epsilon_y$  est réalisée pour tous les échantillons, quelle que soit leur taille. Jusqu'à présent, notre étude statistique a été réalisée dans la gamme de déviateur  $0 < q \leq 0.05$ . Nous élargissons ici notre étude à des déviateurs deux fois plus grands,  $0 < q \leq 0.1$ . Cette agrandissement de la plage de déviateur est nécessaire afin d'avoir des ensembles de  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}$  comprenant un nombre significatif d'événements.

Conformément à l'équation (4.3), on construit pour chaque taille  $N$  d'échantillon, 4 variables aléatoires  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}(N)_{(N=1024,1936,3025,4900)} = \sum^{M(N)} \delta\epsilon_y$ , telles que  $\Delta q = \sum^{M(N)} \delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ .

### Densité de probabilité des incréments de déformation : *MGQS* et *DM*

Parallèlement aux tests biaxiaux réalisés avec la *MGQS*, nous avons effectué des compressions biaxiales à déviateur imposé avec la méthode *Dynamique moléculaire*. Pour ces nouvelles simulations, le modèle d'assemblage diffère puisque les particules sont élastiques et par conséquent déformables. La loi de contact choisie, exclusivement normale, est le modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt*<sup>9</sup>.

---

9. voir chapitre 1, éq. (1.3).

Trois tailles d'assemblages sont mises en œuvre avec la *DM* :

- 26 échantillons à  $N = 1024$  particules,
- 10 échantillons à  $N = 3025$  particules,
- 7 échantillons à  $N = 4900$  particules.

Les forces de contact étant proportionnelles<sup>9</sup> aux interpénétrations entre les grains, les configurations isotropes initiales dédiées à la *MGQS* ne sont pas directement exploitables par la *DM*<sup>10</sup>. À partir des échantillons compactés pour la *MGQS*, de nouvelles compressions isotropes sont donc réalisées avec la *DM*. Les nouveaux échantillons ainsi obtenus diffèrent nécessairement de ceux compactés pour la *MGQS*. Néanmoins, afin d'approcher le plus possible le modèle granulaire utilisé par la *MGQS*, nous avons mis en œuvre de grandes raideurs normales  $k_n$  telles que  $\kappa = k_n/p = 10^5$ . Ce niveau de rigidité élevé permet d'obtenir, à l'état isotrope, une interpénétration moyenne de  $(7.69 \pm 0.12) \cdot 10^{-6}$  et maximale de  $(3.66 \pm 0.47) \cdot 10^{-5}$ .

La propriété d'isostaticité des assemblages de disques rigides sans frottement induit une égalité parfaite entre le nombre total de contacts et le nombre de degrés de liberté des grains (et parois) qui portent des forces strictement positives. Avec la *DM*, les états d'équilibre issus des compressions isotropes donnent des structures de contact légèrement hyperstatiques. Avec  $\kappa = 10^5$ , le rapport moyen du nombre de degrés de liberté et du nombre total de contacts est de  $0.9978 \pm 0.0009$ , soit approximativement 0.2% de contacts supplémentaires par rapport à un modèle constitué de particules parfaitement rigides. Les différences relatives de compacités entre les configurations sous chargement isotrope dédiées à la *MGQS* et celles obtenues par la *DM* sont faibles :  $\Delta C_{1024} = (2.80 \pm 0.85) \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta C_{3025} = (2.78 \pm 0.82) \cdot 10^{-5}$  et  $\Delta C_{4900} = (2.75 \pm 0.33) \cdot 10^{-5}$ .

De par l'hyperstaticité des configurations compactées par la *DM*, il n'est pas possible d'appliquer les concepts mis en œuvre dans la *MGQS* pour déterminer les incréments de chargement *élémentaires* juste nécessaires pour rompre les états d'équilibre. Les incréments de déviateur imposés sont donc constants tout au long des compressions biaxiales,  $\delta q^{DM} = 10^{-3}$ . Les réponses incrémentales en déformation  $\delta \epsilon^{DM}$  obtenues sont sommées deux à deux afin de construire 3 nouvelles variables aléatoires  $\Delta \epsilon_M^{DM}(N)$ , correspondant à des pas de chargement  $\Delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ .

On récapitule dans le tableau 4.1 le nombre d'événements pour chaque variable aléatoire  $\Delta \epsilon_M$ , aussi bien pour la *MGQS* que pour la *DM*.

---

10. En effet, on rappelle que dans les configurations dédiées à la *MGQS*, les interstices entre grains en contact sont strictement égaux à  $-10^{-8}$ .

	$\delta\epsilon$	$\Delta\epsilon_M$
$MGQS, N = 1024$	2716	1733
$MGQS, N = 1936$	2692	1043
$MGQS, N = 3025$	1521	351
$MGQS, N = 4900$	1539	202
$DM, N = 1024$	2600	1300
$DM, N = 3025$	500	1000
$DM, N = 4900$	350	700

TAB. 4.1 – Nombre d'incrément de déformation par taille et par méthode de calcul.

Les densités de probabilité de  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}$  et  $\Delta\epsilon_M^{DM}$  sont représentées figure 4.17.

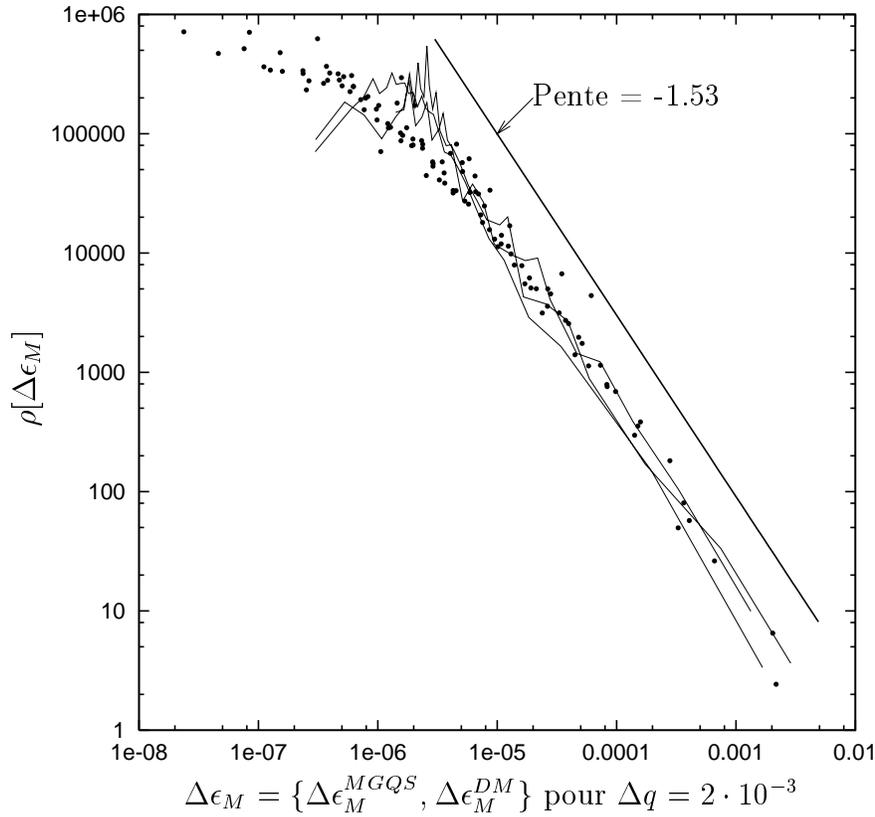


FIG. 4.17 – Densité de probabilité de  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}(N)_{(N=1024,1936,3025,4900)}$  et  $\Delta\epsilon_M^{DM}(N)_{(N=1024,3025,4900)}$  correspondant à  $\Delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ . Les densités de probabilité associées à la MGQS sont représentées par les points. Les densités de probabilité associées à la DM sont représentées par les traits. Les abscisses et les ordonnées sont en échelles logarithmiques.

Le test de *K.-S.* nous informe que pour les grands  $\Delta\epsilon_M$ ,  $\Delta\epsilon_M > 5 \cdot 10^{-6}$ , les sept variables aléatoires<sup>11</sup> peuvent être considérées comme étant issues d'une seule et même densité de probabilité<sup>12</sup>. Le test de vraisemblance de *Kolmogorov et Smirnov* est aussi utilisé afin de tester l'hypothèse d'un modèle de loi de puissance sur les densités de probabilité de la figure 4.17. Pour  $\Delta\epsilon_M > 5 \cdot 10^{-6}$ , on constate qu'il est possible de décrire les densités de probabilité  $\rho[\Delta\epsilon_M]$  par une loi de puissance décroissante, d'exposant  $-(1 + \mu)$ ,  $\mu = 0.53 \pm 0.05$ . L'indice de vraisemblance maximal atteint est  $P_{K.-S.} = 0.3$  pour  $\mu = 0.534$ .

On observe que les calculs d'essais biaxiaux réalisés à partir d'une approche purement géométrique (*MGQS*) conduisent à une statistique des incréments de déformation similaire à celle obtenue par une méthode de simulation basée sur les équations de la dynamique. De plus, on constate que lorsque les incréments de chargement sont constants d'un état d'équilibre à l'autre, les effets d'échelle observés fig. 4.14(a) sont complètement absents des densités de probabilité calculées pour  $\Delta\epsilon_M$ . On montre donc qu'à  $\Delta q$  constant, la statistique des incréments de déformation ne dépend ni de la méthode de calcul utilisée, ni de la taille du système.

### Comportement dans la limite des grands systèmes

Toutes tailles d'échantillons confondues, la densité de probabilité de  $\Delta\epsilon_M$ , somme de  $M(N)$  incréments de déformation  $\delta\epsilon_y(N)$ , est de la forme<sup>13</sup> :

$$\rho[\Delta\epsilon_M] = (\Delta\epsilon_0)^\mu \cdot [\Delta\epsilon_M]^{-(1+\mu)} \quad (4.13)$$

avec, conformément à (4.4),  $\Delta\epsilon_0 = \delta\epsilon_y^{typ}(N) = \delta\epsilon_y^0 \cdot N^{-\beta}$ .

Or, à l'aide du théorème généralisé de la limite centrale proposée par *Lévy et Gnedenko*, pour  $\mu < 1$ , on peut décrire les grands  $\Delta\epsilon_M$  par :

$$\Delta\epsilon_M = \Delta\epsilon_0 [M(N)]^{\frac{1}{\mu}} \xi = \delta\epsilon_y^0 N^{-\beta} \cdot [M(N)]^{\frac{1}{\mu}} \xi \quad (4.14)$$

En substituant l'expression de  $M(N)$ , éq. (4.3), dans (4.14), on obtient :

$$\Delta\epsilon_M = \delta\epsilon_y^0 N^{-\beta} \cdot \left[ \frac{\Delta q}{\delta q_0} N^\alpha \right]^{\frac{1}{\mu}} \xi = [\delta\epsilon_y^0 \delta q_0^{-\frac{1}{\mu}}] \cdot N^{\frac{\alpha}{\mu} - \beta} \cdot \Delta q^{\frac{1}{\mu}} \cdot \xi \quad (4.15)$$

avec  $\alpha = 1.13 \pm 0.06$ ,  $\beta = 2.11 \pm 0.02$  et  $\mu = 0.53 \pm 0.05$ .

11.  $\Delta\epsilon_M^{MGQS}(N)_{(N=1024, 1936, 3025, 4900)}$  et  $\Delta\epsilon_M^{DM}(N)_{(N=1024, 3025, 4900)}$

12. Le test *K.-S.* est effectué sur les 21 couples possibles d'ensemble de valeurs. Dans le pire des cas, on obtient  $P_{K.-S.} = 0.07$  et  $P_{K.-S.} = 0.98$  pour le cas le plus favorable.

13. Pour les grands incréments de déformation,  $\Delta\epsilon_M > 5 \cdot 10^{-6}$ .

Dans (4.15), le nombre  $N$  de particules intervient avec un exposant  $\alpha/\mu - \beta$ . Si l'on satisfait à la relation  $\alpha = \beta \cdot \mu$ , alors la variable  $N^{\alpha/\mu - \beta}$  disparaît. On montre sur la figure 4.18 l'ensemble des valeurs possibles pour  $\alpha$  et le produit  $\beta \cdot \mu$  à partir des valeurs estimées et des incertitudes qui leurs sont associées.

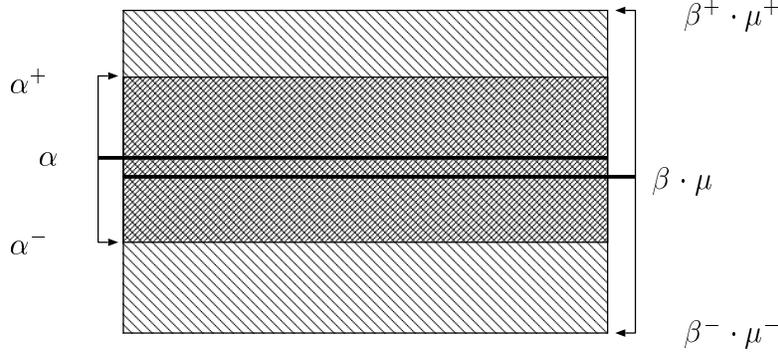


FIG. 4.18 –  $\alpha = \beta \cdot \mu$ . Les deux lignes noires correspondent aux valeurs estimées de  $\alpha$  et  $(\beta \cdot \mu)$ . Les zones grisées montrent les valeurs possibles pour  $\alpha$  et  $(\beta \cdot \mu)$  avec la prise en compte des incertitudes :  $\alpha^- = 1.13 - 0.06$ ,  $\alpha^+ = 1.13 + 0.06$ ,  $\beta^- \cdot \mu^- = (2.11 - 0.02) \cdot (0.53 - 0.05)$  et  $\beta^+ \cdot \mu^+ = (2.11 + 0.02) \cdot (0.53 + 0.05)$ .

L'hypothèse qui consiste en  $\alpha = \beta \cdot \mu$  étant compatible avec les valeurs estimées de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mu$ , (4.15) devient alors :

$$\Delta\epsilon_M = (\delta\epsilon_y^0 \delta q_0^{-\frac{1}{\mu}}) \cdot [\Delta q]^{\frac{1}{\mu}} \cdot \xi \quad (4.16)$$

avec  $\mu = 0.53 \pm 0.05$ .  $\delta\epsilon_y^0$  et  $\delta q_0^\mu$  sont des constantes et  $\xi$  une variable aléatoire distribuée suivant la fonction de Lévy  $L_\mu(\xi)$ . La disparition du paramètre  $N$  dans cette relation confirme donc que  $\Delta\epsilon_M$  ne dépend pas de la taille du système, comme observé sur la figure 4.17.

(4.16) est la relation qui lie les incréments de chargement  $\Delta q$  imposés (constants) aux incréments de déformation  $\Delta\epsilon_M$ . Cette relation incrémentale, qui ne dépend pas du nombre de particules au sein de l'échantillon, n'est pas déterministe puisqu'elle fait intervenir la variable aléatoire  $\xi$ . Le comportement d'un assemblage de disques rigides (ou quasi-rigide) sans frottement, sous chargement biaxial<sup>14</sup>, est donc un processus de Lévy de paramètre  $\mu$ .

De ce résultat découle que dans la limite de grands systèmes, la courbe  $q - \epsilon_y$  ne tend pas vers une courbe continue. Quelle que soit la taille  $N$  de l'échantillon, la courbe de comportement sera toujours en escalier, avec un nombre de *marches* et de *contre-marches* qui tend vers l'infini avec la taille du système, mais pour laquelle une part importante de la déformation est imputable à quelques événements de

14. Compression biaxiale à déviateur imposé.

grande amplitude. Aussi grand que soit l'échantillon, la courbe  $q - \epsilon_y$  ressemblera toujours à la figure 4.15(c).

Une autre conséquence de l'équation (4.16) est l'inexistence d'un module tangent initial (module d'*Young*). En effet, s'il l'on désire calculer ce dernier, il convient d'évaluer le rapport  $E = \Delta q / \Delta \epsilon_M$ , pour  $\Delta q$  petit. Or, comme l'intensité de l'incrément de déformation n'est pas prévisible ( $\Delta \epsilon_M$  dépend de la variable aléatoire  $\xi$ ), il en est de même pour le module d'*Young*  $E$ .

### 4.3.5 Incréments de déformation et variation de volume

Au cours des compressions triaxiales ou biaxiales effectuées en laboratoire sur les sols, plusieurs mesures d'ordre macroscopiques sont généralement réalisées. Deux ont déjà été abordées : le déviateur de contrainte et la déformation axiale. Une troisième quantité permet de caractériser les sols : la variation de volume  $\epsilon_v$ .

Pour les essais triaxiaux ou biaxiaux drainés, la courbe de variation de volume présente deux étapes [25]. Au début de l'essai mécanique, on constate généralement une diminution du volume de l'échantillon, la *contractance* ( $\epsilon_v < 0$ ,  $\dot{\epsilon}_v < 0$ ). Ensuite, en fonction de la compacité initiale de l'échantillon,  $\epsilon_v$  peut changer de signe. Pour les échantillons initialement denses (fig. 4.19, courbe (a)), on observe une *dilatance*,  $\epsilon_v > 0$ ,  $\dot{\epsilon}_v > 0$ . Le point de changement de signe de  $\dot{\epsilon}_v$  est appelé *état caractéristique* (Luong [60]). Pour les échantillons initialement lâches (fig. 4.19, courbe (b)), les éprouvettes sont continuellement contractantes. En fin d'essai, quelle que soit la densité initiale des échantillons,  $\dot{\epsilon}_v$  tend vers 0 (*état critique*).

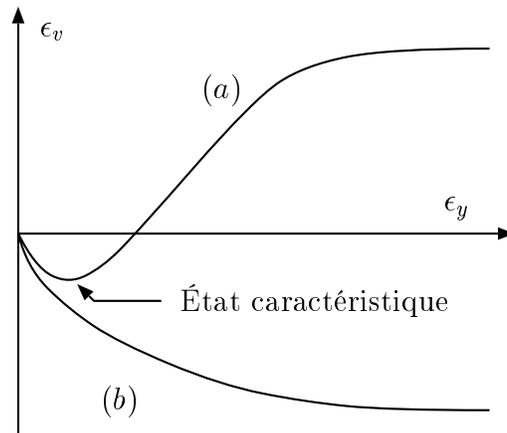


FIG. 4.19 – Courbes de variation de volume typique obtenues par compression triaxial drainé sur sable saturé. (a)- Sable dense. (b)- Sable lâche.

La simulation numérique d'essai biaxiaux ou triaxiaux sur des assemblages de disques frottants (Oda et Iwashita [74], Calvetti et Emeriault [15]) ou de sphères frottantes (Thornton [101], Thornton et Antony [102]) reproduisent assez bien les

variations de volume observées en laboratoire. En l'absence de frottement intergranulaire, les mesures de  $\epsilon_v$  sont différentes. Les résultats de simulation numérique que nous avons obtenus par la *MGQS* ne montrent pas de tendance générale à la dilatance ni à la contractance. Il semble que le signe et l'intensité des  $\delta\epsilon_v$  soient fortement liés à l'amplitude des  $\delta\epsilon_y$ . On montre figure 4.20(a) les corrélations entre les incréments de déformation  $\delta\epsilon_y$  et les variations de volume incrémentales  $\delta\epsilon_v = -\delta\epsilon_x - \delta\epsilon_y$  pour des assemblages à 1024 particules.

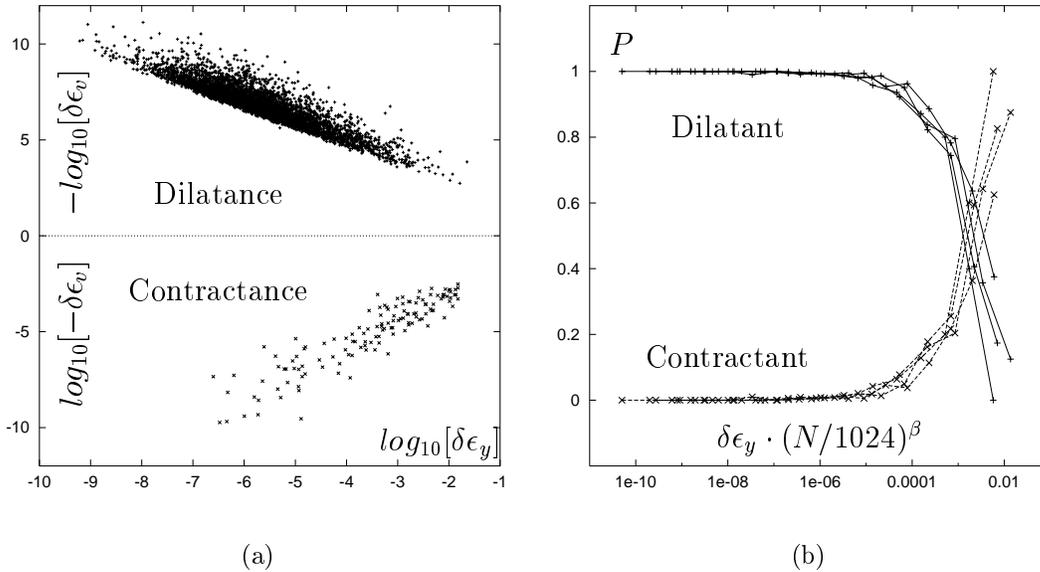


FIG. 4.20 – (a)- Corrélations entre  $\delta\epsilon_y$  et  $\delta\epsilon_v$ . Sur la base de 5233 incréments de déformation, on a 5101  $\delta\epsilon_v$  positifs et 132  $\delta\epsilon_v$  négatifs. Résultats obtenus à partir de 51 essais biaxiaux sur des assemblages de 1024 particules. (b)- Probabilité  $P$  d'avoir une variation de volume incrémentale positive (dilatance) ou négative (contractance) en fonction de la valeur de l'incrément de déformation. Probabilité calculée pour les 4 tailles d'assemblage (1024, 1936, 3025 et 4900 grains).

Les mesures présentées figure 4.20(a) montrent que les phénomènes de contractance ( $\delta\epsilon_v < 0$ ) sont majoritairement associés à des incréments de déformation grands donc à des réarrangements importants.

Sur la figure 4.20(b), on montre la probabilité conditionnelle d'avoir une variation de volume incrémentale positive ou négative (dilatance ou contractance) pour une valeur d'incrément de déformation  $\delta\epsilon_y$  donnée. On constate que plus l'incrément de déformation est grand, plus on a de chance d'être dans une phase contractante.

### 4.3.6 Incréments de déformation et hypothèse des petites perturbations

Tous les résultats de simulations présentés jusqu'à présent, ont été obtenus hors de l'hypothèse des petites perturbations<sup>15</sup> : au fur et à mesure que les particules se déplacent, les coordonnées des vecteurs directeurs des contacts sont modifiées.

Dans le cadre de l'*HPP*, des simulations numériques d'essais biaxiaux à forces imposées ont été effectuées par Roux [92] sur un modèle constitué de disques sans frottement, faiblement polydisperses, disposés sur un réseau régulier (fig. 4.21).

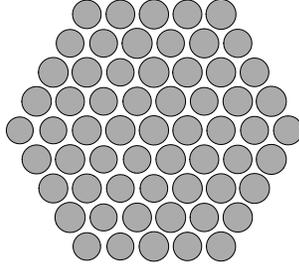


FIG. 4.21 – Exemple d'un petit empilement de grains sur réseau. La polydispersité a été exagérée ( $\times 5$ ).

Ces calculs ont montré que le déplacement des disques suivant les vecteurs vitesses calculés<sup>16</sup> à la rupture de chaque état d'équilibre conduisait systématiquement à l'obtention de nouvelles listes de contacts capables de supporter les nouveaux chargements extérieurs imposés. Les incréments de déformations alors obtenus sont régis par une densité de probabilité du type loi exponentielle décroissante. En conséquence, à la différence des incréments de déformation calculés par la *MGQS*<sup>17</sup> sur les assemblages désordonnés, les  $\delta\epsilon$  calculés sur le système sur réseau (fig. 4.21) possèdent une moyenne, qui, à l'instar de la moyenne des incréments de chargement, tend vers zéro dans la limite des grands systèmes. La courbe contrainte-déformation tend vers une courbe continue dans la limite des grands systèmes. Ces observations ont permis à Roux [92] de mettre en évidence une correspondance directe entre les contraintes et les déformations.

Sur des modèles ordonnés comme celui représenté fig. 4.21, l'*HPP* se justifie pleinement. Par contre, pour les milieux désordonnés, il n'est pas envisageable de faire cette hypothèse tout au long des calculs d'essais biaxiaux. Cette impossibilité est flagrante sur le petit modèle présenté section 3.5, page 106. Néanmoins, il est numériquement possible de faire l'hypothèse des petites perturbations dans l'unique but de mettre en évidence son influence sur le passage d'un état d'équilibre

15. On note *HPP* l'hypothèse des petites perturbations.

16. Unicité des vecteurs vitesses aux mécanismes près.

17. Hors *HPP*.

au suivant. À partir de tous les états d'équilibre calculés par la *MGQS*, nous avons recalculé les changements dans les listes de contacts en tenant compte de l'*HPP*. Ces calculs ont pu être effectués sur les multiples états d'équilibre obtenus sur les échantillons à 1024, 1936 et 3025 particules. Les assemblages à 4900 particules ont été écartés de cette étude à cause du manque de précision numérique lié à une maladresse dans le stockage des fichiers informatiques correspondant à chaque état d'équilibre<sup>18</sup>.

Contrairement aux réarrangements multiples constatés jusqu'à présent, nous constatons que l'ouverture d'un contact est alors immédiatement suivi par la création d'une nouvelle liste de contacts qui supporte, de façon *systématique*, le nouveau chargement extérieur imposé, ceci sans avoir recourt à de nouvelles ouvertures et créations de contacts comme c'était le cas hors *HPP*.

Les densités de probabilité des incréments de déformation  $\delta\epsilon_y^{HPP}$  obtenus pour les 3 tailles d'assemblages considérées sont montrées figure 4.22(a).

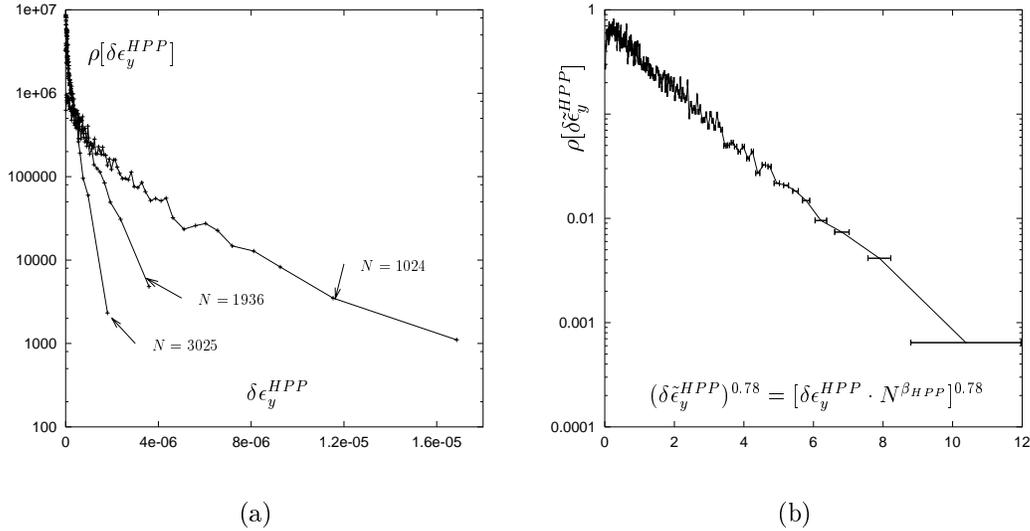


FIG. 4.22 – Densités de probabilité des incréments de déformation calculés en faisant l'hypothèse des petites perturbations. Les axes des ordonnées suivent une échelle logarithmique. (a)-Densités de probabilité pour  $N = 1024$ ,  $N = 1936$  et  $N = 3025$ . (b)-Densité de probabilité de  $\delta\tilde{\epsilon}_y^{HPP}$ .

À l'aide du test vraisemblance de *K.-S.*, on constate qu'il est possible de superposer les 3 densités en multipliant les  $\delta\epsilon_y^{HPP}$  par  $N^{\beta_{HPP}}$ , avec  $\beta_{HPP} = 1.99 \pm 0.16$  et où  $N$  représente la taille du système. Ainsi mis à l'échelle, tous les incréments de

18. Pour les échantillons à 1024, 1936 et 3025 particules, ce sont les déplacements des particules par rapport à l'état initial qui ont été sauvegardés. Malheureusement, pour les assemblages à 4900 particules, ce sont les positions qui ont été stockées, d'où un manque de précision numérique.

déformation sont rassemblés pour ne former qu'un unique jeu de données, constitué des événements  $\delta\tilde{\epsilon}_y^{HPP} = \delta\epsilon_y^{HPP} \cdot N^{\beta_{HPP}}$ . La densité de probabilité de ces valeurs est représentée figure 4.22(b). Cette densité ne suit pas une loi exponentielle décroissante simple mais une exponentielle *étirée* d'exposant 0.78. Le test de *K.-S.* nous indique que la densité de probabilité  $\delta\tilde{\epsilon}_y^{HPP}$  est assimilable, pour les grands incréments de déformation, à une exponentielle étirée décroissante avec un indice  $P_{K.-S.} = 0.95$ .

À la différence des  $\delta\epsilon_y$  calculés hors *HPP*, les  $\delta\epsilon_y^{HPP}$  possèdent une moyenne. On montre figure 4.23, les moyennes et écarts types des  $\delta\epsilon_y^{HPP}$  en fonction de la taille des systèmes. On observe alors que  $\delta\epsilon_y^{HPP}(N)$  tend vers 0 dans la limite des grands systèmes.

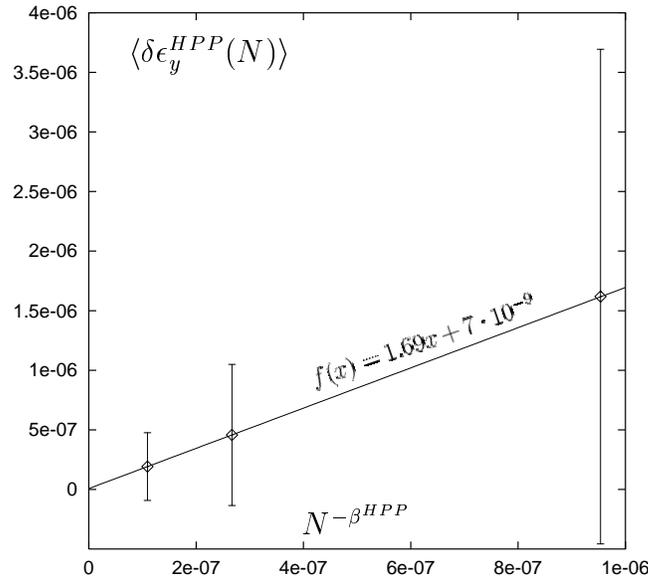


FIG. 4.23 – Moyenne  $\langle \delta\epsilon_y^{HPP}(N) \rangle$  en fonction de la taille  $N$  des assemblages,  $\beta^{HPP} = 1.99$ . Les barres verticales ont pour demi-hauteur l'écart type à la moyenne.

### 4.3.7 Observations micromécaniques, *MGQS*

#### Évolution du nombre total de contacts

Au cours des réarrangements entre deux états d'équilibre successifs, plusieurs contacts peuvent être perdus ou gagnés. Pour  $0 \leq q \leq q_{max}$  avec  $q_{max} = 0.1$ , le nombre total de contacts varie peu, quelle que soit la taille des échantillons. Figure 4.24, on montre l'évolution du nombre total de contacts au cours des essais biaxiaux pour 4 tailles d'assemblages.

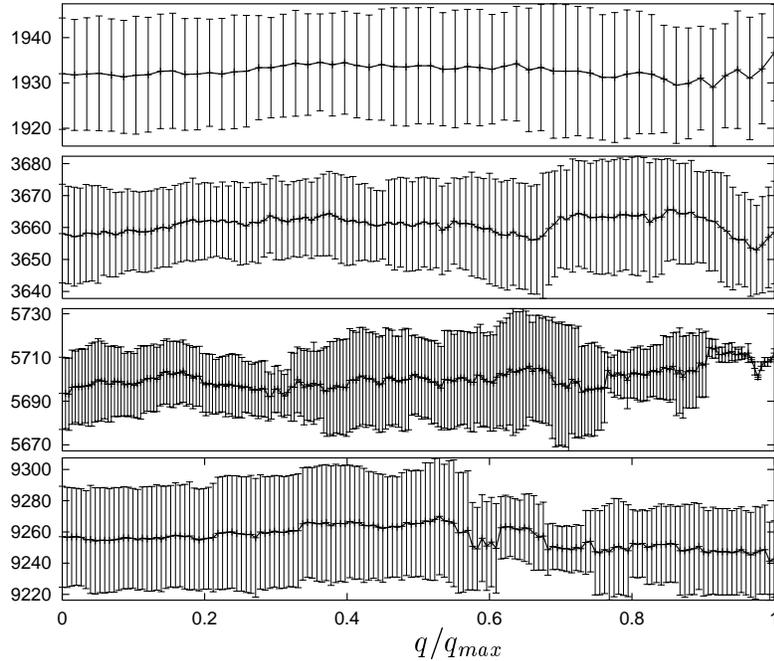


FIG. 4.24 – Évolution du nombre moyen de contacts au cours des essais biaxiaux. De haut en bas:  $N = 1024$ ,  $N = 1936$ ,  $N = 3025$ ,  $N = 4900$ . On représente la moyenne du nombre de contacts à  $q/q_{max}$  donné pour chaque échantillon ainsi que l'écart type correspondant.

Il n'y a pas de variation notable du nombre total de contacts au cours des essais biaxiaux dans la gamme de déviateur étudiée, bien qu'il existe des mécanismes de perte et de gain de contacts que nous allons maintenant mettre en évidence.

### Corrélations entre $\delta\epsilon_y$ et les contacts perdus et gagnés

Nous proposons d'effectuer une analyse du nombre de contact perdus et gagnés entre deux états d'équilibre successifs, en fonction de la taille des incréments de déformation *élémentaires*<sup>19</sup> et du nombre de particules contenues dans nos assemblages. Sur la figure 4.25(a), on représente en échelle logarithmique, le nombre de contacts perdus et gagnés en fonction de la valeur des incréments de déformation calculés par la *MGS*, pour les 4 tailles d'assemblages<sup>20</sup>. Les incréments de déformation sont pondérés par  $(N/1024)^\beta$  avec  $\beta = 2.11$ .  $N$  est le nombre de particules de chaque échantillon.

19.  $\delta\epsilon_y^{MGS}$ .

20.  $N = 1024, 1936, 3025, 4900$ .

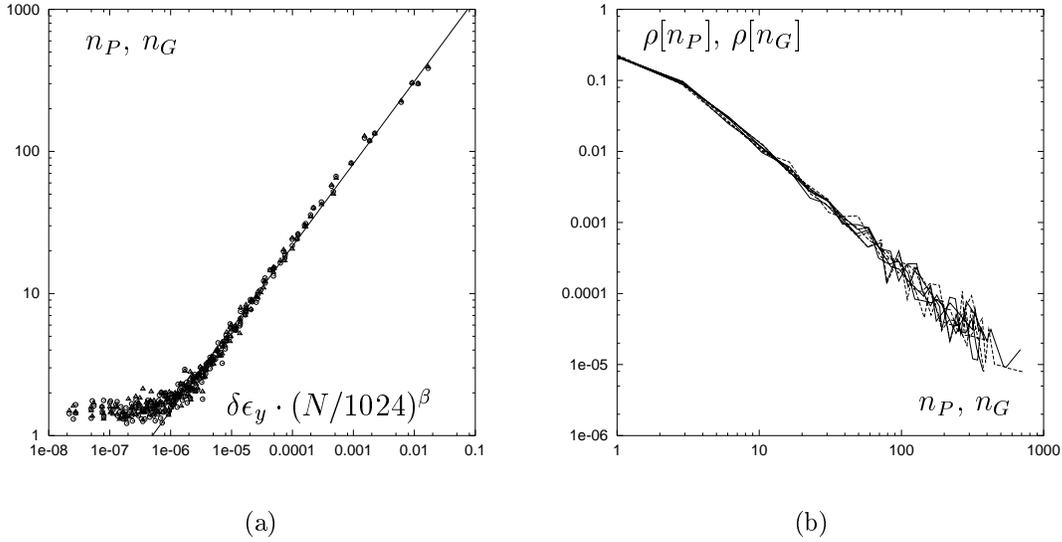


FIG. 4.25 – *Contacts perdus et gagnés entre deux états d'équilibre successifs. (a)- Corrélations entre les incréments de déformation  $\delta\epsilon_y \cdot (N/1024)^{2.11}$  et le nombre de contacts perdus ( $n_P$ ) et gagnés ( $n_G$ ). Les cercles sont associés aux contacts perdus et les triangles aux contacts gagnés. La ligne oblique est une approximation par une fonction loi de puissance. (b)- Densités de probabilité du nombre de contacts perdus ( $n_P$ ) et gagnés ( $n_G$ ). (a),(b): Les 4 tailles d'assemblage sont représentées.*

Figure 4.25(b), on remarque que les différentes densités de probabilités des contacts perdus et gagnés sont indépendantes de la taille du système. Quel que soit le nombre de particules dans l'échantillon, le nombre de contacts perdus ou gagnés associé à un incrément de déformation donné est systématiquement issu d'une seule et même loi statistique.

Pour  $\delta\epsilon_y \cdot (N/1024)^{2.11} > 5 \cdot 10^{-6}$ , le nombre de contact perdus ou gagnés peut être évalué par la relation :

$$[n_P, n_G] = \eta_0 \cdot (\delta\epsilon_y)^\eta \quad (4.17)$$

avec  $\eta_0 \sim 4500$  et  $\eta \sim 0.58$ .

**Remarque:** Nous avons pu constater que les contacts perdus comme gagnés étaient répartis de façon homogène dans les échantillons. Le réarrangement n'est jamais un événement local.

### Orientation des contacts perdus et gagnés

Il peut être intéressant de constater si les contacts perdus et gagnés ont des orientations privilégiées. Sur la figure 4.26, on montre les histogrammes des orien-

tations de ces contacts. Quatre ensembles de contacts sont pris en compte :  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{G}$  désignent respectivement l'ensemble de tous les contacts perdus et l'ensemble de tous les contacts gagnés.  $\mathcal{P}^{\setminus p}$  et  $\mathcal{G}^{\setminus p}$  désignent respectivement l'ensemble des contacts perdus et l'ensemble des contacts gagnés, à une distance supérieure à  $3a$  des parois.

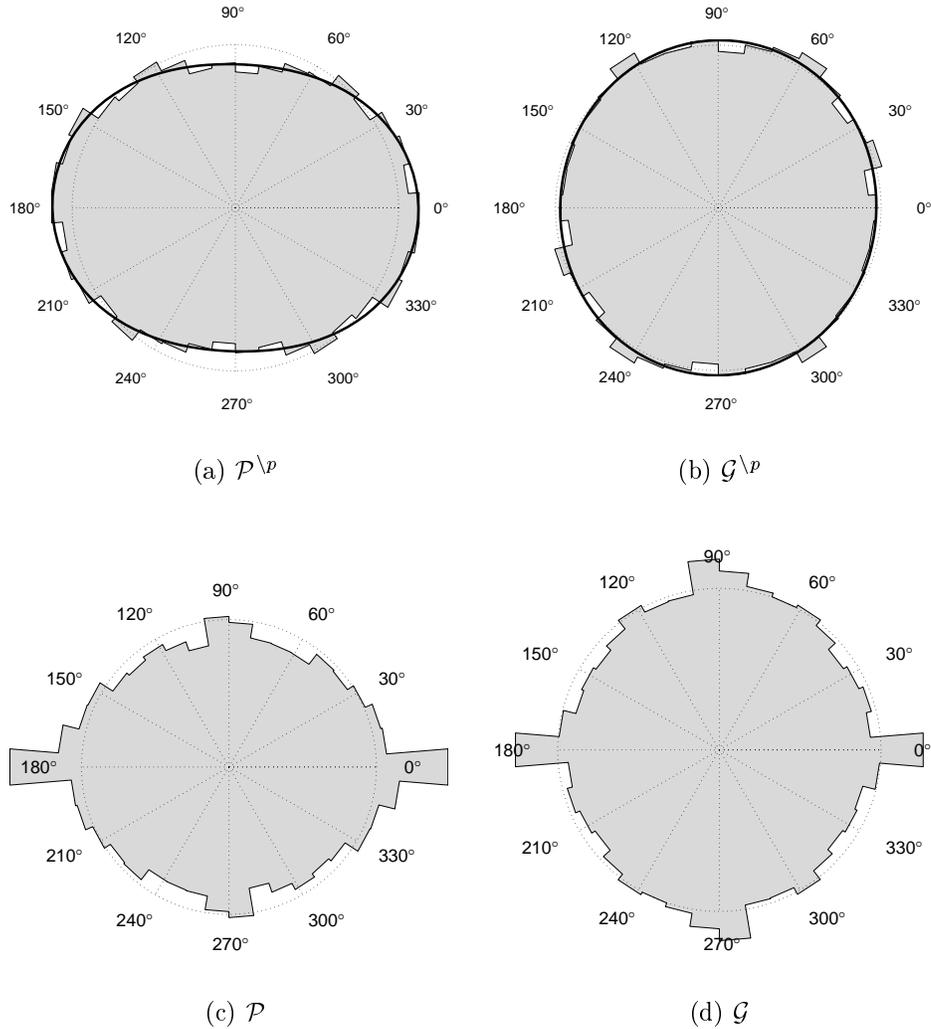


FIG. 4.26 - *Histogramme des orientations des contacts perdus et gagnés. Statistique réalisée sur la base de 2416 états d'équilibre pour des assemblages à 1024 particules. Les traits gras sont des approximations de Fourier:  $N(\theta) = N_0 \cdot (1 + d \cos 2(\theta - \theta_0))$ . (a)- 14629 contacts perdus dans  $\mathcal{P}^{\setminus p}$ .  $N_0 = 770$ ,  $d = 0.12$  et  $\theta_0 = -2^\circ$ . (b)- 14674 contacts gagnés dans  $\mathcal{G}^{\setminus p}$ .  $N_0 = 772$ ,  $d = 0.03$  et  $\theta_0 = 85^\circ$  (c)- 16893 contacts perdus dans  $\mathcal{P}$ . (d)- 16899 contacts gagnés dans  $\mathcal{G}$ .*

Figure 4.26(a), on remarque que les contacts sont principalement perdus dans la direction d'extension, direction principale mineure des contraintes. C'est majoritairement dans cette direction que les forces de contact s'annulent lorsque l'on augmente le déviateur  $\delta q$ , fig. 4.27.

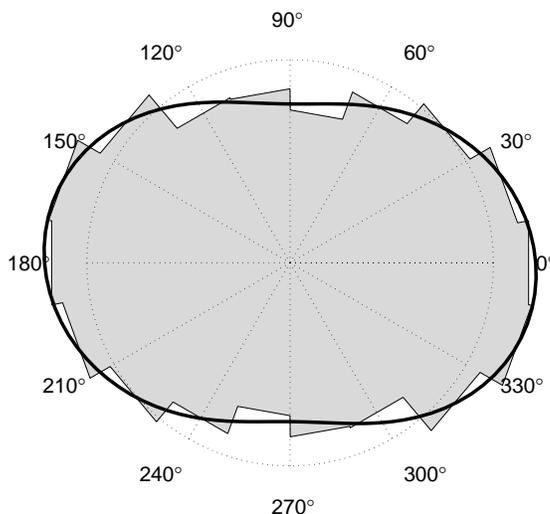


FIG. 4.27 – *Histogramme des orientations du premier contact ouvert à la rupture de l'équilibre suite à l'augmentation du déviateur de  $\delta q$ , 2416 états d'équilibre = 2416 premiers contacts ouverts. Le trait gras est une approximation de Fourier  $N(\theta) = N_0 \cdot (1 + d \cos 2(\theta - \theta_0))$ , avec  $N_0 = 526$ ,  $d = 0.21$  et  $\theta_0 = -3^\circ$ .*

Quant aux contacts gagnés, il n'existe qu'une très légère anisotropie dans la direction de compression. Cette anisotropie reste faible en comparaison à celle mesurée pour les contacts perdus. Elle se justifie par la grande hétérogénéité des directions de déplacements des particules entre deux états d'équilibre successifs<sup>21</sup>. Des résultats similaires ont été observés sur les 3 autres tailles d'assemblages,  $N = 1936$ , 3025 et 4900 particules.

### Évolution des orientations de contact

Afin d'être le plus exhaustif possible, on montre sur la figure 4.28 (page 155) un histogramme de l'évolution des orientations de tous les contacts entre l'état isotrope et le niveau de déviateur  $q_{max} = 0.1$  pour les assemblages à 1024 particules.

On observe que ces orientations changent peu dans la gamme de déviateur étudiée.

21. Voir carte de déplacements fig. 4.5, page 127.

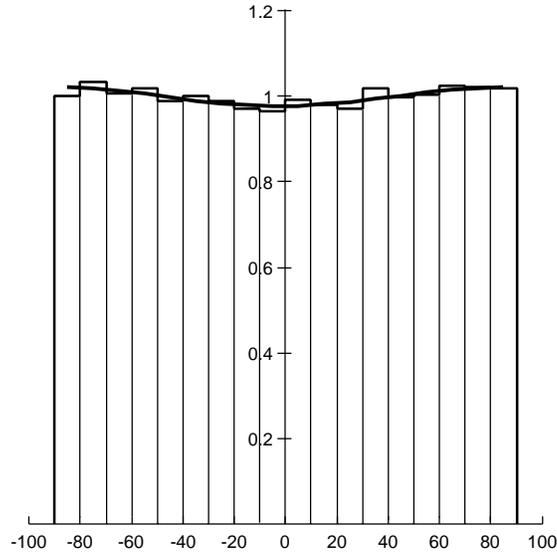


FIG. 4.28 – Évolution des orientations de contact entre l'état isotrope et  $q = q_{max}$ . État isotrope: 98526 contacts correspondant à 51 configurations à 1024 particules. État associé à  $q = q_{max}$ : 98512 contacts. Pour chaque classe de 9.47 degrés, on calcule le rapport du nombre de contact à  $q = q_{max}$  sur le nombre de contacts à l'état isotrope. La ligne continue est une approximation de Fourier  $N(\theta) = N_0 \cdot (1 + d \cos 2(\theta - \theta_0))$  avec  $N_0 = 1.$ ,  $d = 0.02$  et  $\theta_0 = 88^\circ$ .

### Intensité des forces portées par les contacts perdus et gagnés

Pour chaque état d'équilibre, on connaît la liste exacte des contacts perdus et gagnés ainsi que les valeurs des forces associées à ces contacts. La valeur moyenne des intensités des forces de tous les contacts est connue et varie en fonction du niveau de déviateur appliqué. On classe les forces de contact dans deux catégories : les forces inférieures à la moyenne *locale*<sup>22</sup> de toutes les forces de contact et les forces supérieures à cette moyenne. Dans la gamme de déviateur  $0 \leq q \leq q_{max}$  et sur la base de 2614 configurations d'équilibre, comprenant chacune 1024 particules, 16893 contacts sont perdus et 16899 sont gagnés. On observe que 97% des contacts perdus portent des forces inférieures à la moyenne *locale* de toutes les forces de contact. les 3% restant sont des forces supérieures à la moyenne. Concernant les contacts gagnés, seulement 4% portent des forces supérieures à la moyenne.

On montre figure 4.29, le nombre de forces supérieures à la moyenne locale, portées par les contacts perdus et gagnés, en fonction des incréments de déformation.

<sup>22</sup>. La moyenne *locale* est la moyenne de toutes les forces intergranulaire d'une liste de contacts sous un chargement extérieur  $p, q$  donné.

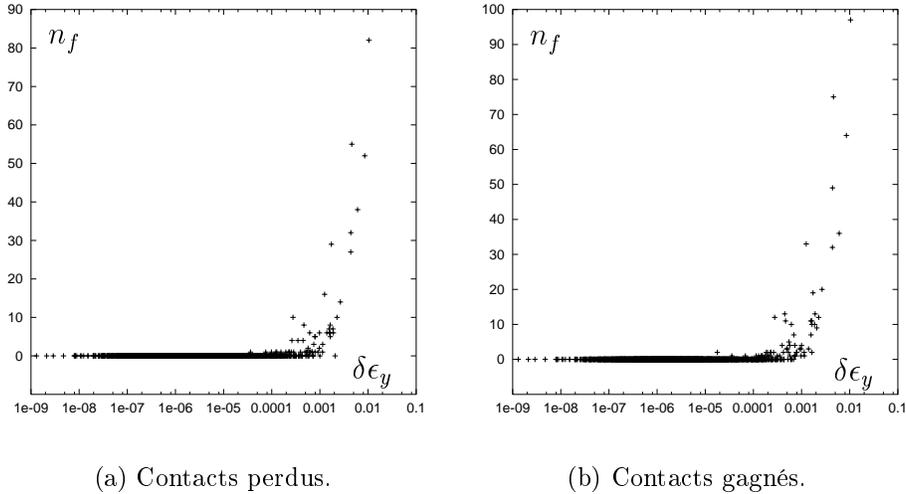


FIG. 4.29 – Nombre  $n_f$  de contacts perdus ou gagnés portant des forces de contacts supérieures à la moyenne locale des forces de contact en fonction de  $\delta\epsilon_y$ . Résultats obtenus à partir d’essais biaxiaux sur 51 échantillons à 1024 particules.

Sans surprise, on constate que les contacts portant de *grandes* forces (forces supérieures à la moyenne) sont essentiellement perdus ou gagnés lors de grands réarrangements.

### 4.3.8 Quelques remarques complémentaires d’ordre macroscopique

- L’étude du comportement de nos assemblages modèles nous a conduit à proposer (4.16) pour relier les incréments de chargement aux incréments de déformation. Le caractère aléatoire<sup>23</sup> du comportement mécanique ainsi obtenu est uniquement dû à l’inexistence de l’espérance mathématique des incréments de déformation. Quelle aurait été l’expression mathématique reliant  $\Delta q$  à  $\Delta\epsilon_M$  si la moyenne des  $\delta\epsilon_y$  avait existé?

Supposons que la moyenne des incréments de déformation existe. Conformément à (4.4), la moyenne des incréments de déformation, dépendante de  $N$ , a pour expression :

$$\langle \delta\epsilon_y \rangle \propto N^{-\beta} \quad , \beta = 2.11 \pm 0.02$$

En omettant les moments de  $\delta\epsilon_y$  strictement supérieurs à 1, d’après (4.8), la somme de  $M(N)$  incréments de déformation est :

---

23. Processus de *Lévy*.

$$\Delta\epsilon_M \propto \langle \delta\epsilon_y \rangle \cdot M(N) \sim N^{-\beta} \cdot M(N)$$

d'où

$$\Delta\epsilon_M \propto N^{-\beta} \cdot M(N)$$

Or, sachant que  $M(N) \sim \Delta q N^\alpha$ , avec  $\alpha = 1.13 \pm 0.06$ , on a :

$$\Delta\epsilon_M \sim \Delta q N^\gamma \quad , \gamma = \alpha - \beta$$

On obtient alors une expression reliant les incréments de chargement aux incréments de déformation qui, contrairement à ce qui a été observé figure 4.17, dépend de la taille du système.  $\gamma$  étant un exposant négatif, lorsque la taille du système tend vers l'infini, pour un  $\Delta q$  donné, la réponse en déformation  $\Delta\epsilon_M$  tend vers 0.

On en déduit donc que si la moyenne des incréments de déformation  $\delta\epsilon_y$  avait existé, dans la limite des grands systèmes, nos assemblages se seraient comportés comme des solides rigides.

- Comme nous avons pu le voir fig. 4.17, page 143, les densités de probabilité des  $\delta\epsilon_y$  calculés avec la *MGQS* et la *DM* sont, concernant les grands incréments de déformations, similaires. Ce sont principalement ces grandes valeurs d'incrémentes qui confèrent un caractère aléatoire au comportement mécanique. Néanmoins, pour les incréments les plus faibles ( $\Delta\epsilon_M < 5 \cdot 10^{-6}$ ), les densités de probabilité diffèrent d'une méthode de calcul à une autre. Bien que les petites valeurs de  $\Delta\epsilon_M$  n'influent en aucune façon sur la loi de comportement macroscopique proposée, cette différence est manifeste. Il est possible d'expliquer ces divergences par la présence d'élasticité dans les contacts pour les calculs effectués avec la *DM*. Alors que l'élasticité des grains ne joue qu'un rôle mineur lors d'un passage d'un état d'équilibre à un autre suite à des réarrangements de grande ampleurs, il est concevable qu'elle ait un rôle important dans le cas d'incrémentes de déformation relativement modestes.

- L'étude statistique réalisée jusqu'ici s'est cantonnée à caractériser le comportement d'assemblages bidimensionnels. Il est légitime de se poser la question de la reproductibilité de ce comportement macroscopique marginal dans le cas d'échantillon à 3 dimensions (assemblages de sphères). Nous avons effectués des simulations<sup>24</sup> de compressions biaxiales à incréments de chargement imposé sur des assemblages de 1372 sphères monodisperses et des conditions aux limites périodiques. Les raideurs normales dans les contacts ont été divisées par 10 par rapport aux précédents calculs,  $k_n/(2pR) = 10^4$  (voir annexe A). Les incréments de chargement sont fixés à  $\Delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ . On montre sur la figure 4.30 la densité de probabilité des incréments de déformation calculés.

---

24. *Dynamique moléculaire.*

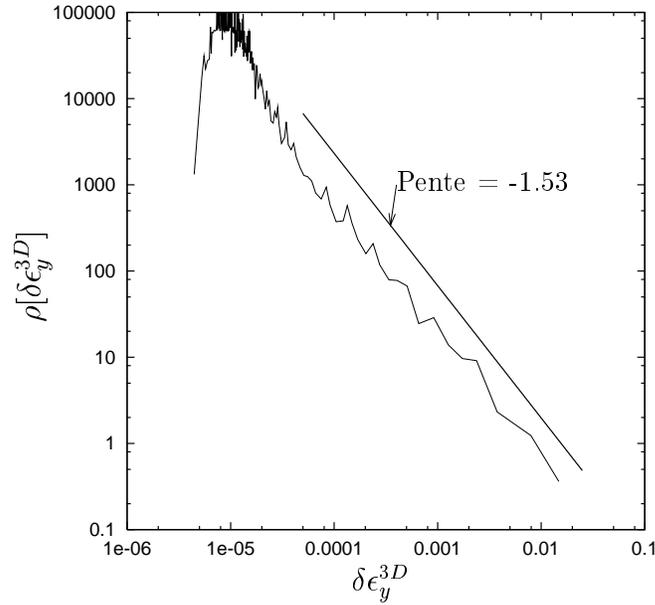


FIG. 4.30 – Densité de probabilité des incréments  $\delta\epsilon_y^{3D}$ , réponse en déformation des incréments de chargement constant  $\Delta q = 2 \cdot 10^{-3}$ . Résultats extraits d’essais triaxiaux sur 10 assemblages de 1372 sphères élastiques monodisperses, sans frottement (DM,  $k_n/(2pR) = 10^4$ ).

On retrouve ici une densité de probabilité avec une décroissance en loi de puissance avec un exposant  $\mu = 0.53$  déterminé par un test de *K.-S.* Cette analyse statistique sur des assemblages de sphères tend à montrer que le comportement macroscopique non déterministe observé dans le cas bidimensionnel reste d’actualité pour les modèles de particules à 3 dimensions.

- Au cours de l’analyse des incréments de chargement et de déformation, nous nous sommes systématiquement restreint à des déviateurs relativement faibles,  $0 \leq q \leq 0.1$ , garantissant ainsi une certaine distance à la résistance maximal (pic de rupture) de nos assemblages. On illustre cette affirmation par les figures 4.31(a) et 4.31(b), résultats de simulations d’essais biaxiaux sur des assemblages de 1024 particules effectués à l’aide de la *DM*. Sur la figure 4.31(a) on représente 26 courbes de comportement macroscopique pour  $0 \leq q \leq 0.2$ . Ces courbes sont à nouveau représentées fig. 4.31(b) mais pour des déviateurs plus faibles,  $0 \leq q \leq 0.1$ .

Sur la figure 4.31(a), les déformations sont comprises entre 0 et 0.03. Sur la figure suivante, fig. 4.31(b), l’intervalle de déviateur étant divisé par 2, les déformations sont représentées jusqu’à  $\delta\epsilon_y^{DM} = 0.03/(2^{1/\mu}) \simeq 0.008$ , conformément à (4.16).

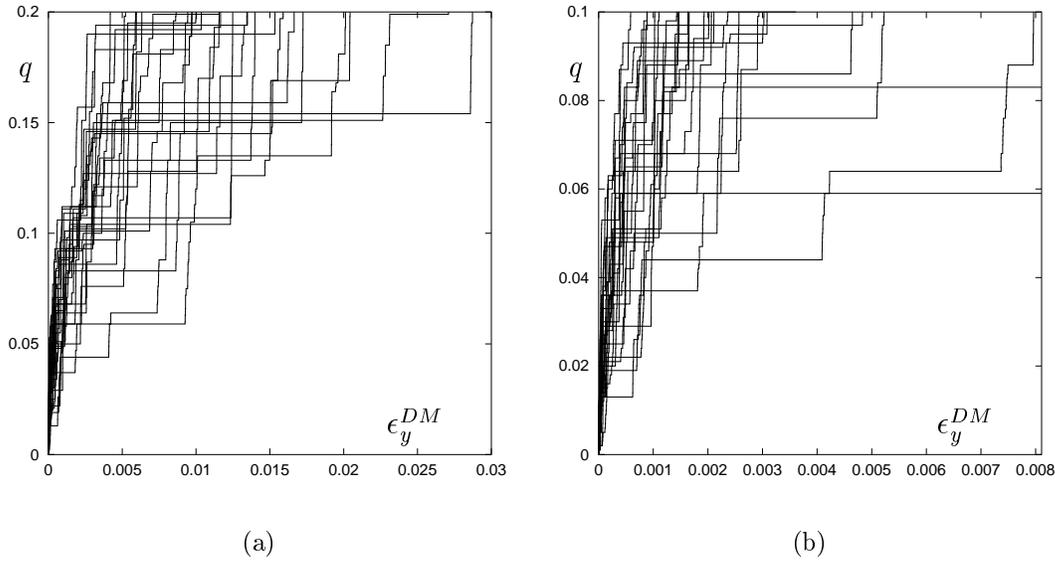


FIG. 4.31 – Courbes de comportement ( $q - \epsilon_y$ ) d'essais biaxiaux à chargements imposés  $\Delta q = 1 \cdot 10^{-3}$ , Dynamique Moléculaire, 26 échantillons à 1024 Particules. (a)- Échelle de déviateur entre 0 et 0.2. (b)- Échelle de déviateur entre 0 et  $5 \cdot 10^{-2}$ .

Tous les essais biaxiaux ont été volontairement conduits jusqu'à un déviateur maximal de  $q = 0.2$ . Nous ne sommes donc pas en mesure de donner ici le niveau de déviateur maximal supportable par nos assemblages.

## Conclusion

La *Méthode Géométrique Quasi-Statique* a permis d'étudier les mécanismes *élémentaires* de passage d'un état d'équilibre à un autre dans des assemblages soumis à des chargements graduellement variés. Les études statistiques, effectuées sur un grand nombre d'échantillons de taille variable, montrent, par des confrontations entre la *MGQS* et la *Dynamique Moléculaire*, que la déformation des milieux granulaires denses sans frottement, sous chargement biaxial, est d'origine géométrique.

Nous avons mis en évidence que l'évolution des assemblages de particules non frottantes, n'est pas quasi-statique au sens strict du terme puisque constitué d'alternances d'états d'équilibre et de phases de réarrangements internes. Les expériences numériques à incréments de contrainte imposés donnent plutôt des trajectoires *quasi-statiques au sens large* (statistiques indépendantes de la dynamique, *MGQS - DM*). Les différentes analyses statistiques permettent d'extrapoler, dans la limite des grands systèmes, le comportement mécanique observé sur des assemblages de taille modeste. On montre alors que le comportement macroscopique est

indépendant de la taille des systèmes étudiés, bien que non déterministe puisque apparenté à un processus de *Lévy* de paramètre  $\mu \simeq 0.5$ . L'influence de la raideur des particules sur  $\mu$  ou sur la pérennité des processus de *Lévy* reste à entreprendre.

D'un point de vu microscopique, les réarrangements entre états d'équilibre sont des événements *non locaux* qui semblent impliquer l'ensemble des échantillons. Ce n'est pas là la cause du caractère imprévisible de la déformation macroscopique puisque dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (*HPP*), la loi de comportement est déterministe bien que la non-localité des réarrangements soit manifeste (Roux [93]). La plage des incréments de déviateur supporté tend vers 0 lorsque les systèmes deviennent grands. On en déduit alors que les particules sont perpétuellement en mouvement. Ce phénomène de réarrangement permanent des assemblages granulaires est qualifié par certains de *fragilité* (Cates et coll. [19], Roux [94]).

Les caractéristiques mécaniques classiquement mesurées en laboratoire, comme le coefficient de frottement interne ou le module d'Young, n'ont pas pu l'être sur nos assemblages modèles. L'absence apparente de déviateur maximal supportable, dans la gamme de chargement étudié, ne permet pas d'évaluer le coefficient de frottement *macroscopique*, bien que son origine géométrique soit maintenant définitivement admise. De plus, la fonction mathématique indéterministe reliant les incréments de déviateur aux incréments de déformation, conduit à montrer l'inexistence d'un module d'Young dans les assemblages denses, constitués de disques ou de sphères rigides (ou quasi-rigides) sans frottement intergranulaire.

## Chapitre 5

# Trajectoires quasi-statiques de milieux granulaires frottants sous chargement biaxial

L'étude du comportement mécanique des assemblages de disques non frottants, sous chargement biaxial, a permis de mettre en évidence des trajectoires quasi-statiques *au sens large* du terme, alternances d'états d'équilibre et de phases de réarrangement, statistiquement indépendantes des règles dynamiques mises en œuvre pour déplacer les grains. Nous sommes arrivés à la conclusion que la courbe  $q - \epsilon_y$  était irrémédiablement constituée de *marches d'escalier*, ne tendant donc pas vers une courbe *continue* dans la limite des grands systèmes. Une question se pose alors : ces propriétés sont-elles uniquement liées aux assemblages sans frottement ?

Dans ce dernier chapitre, on propose d'étudier le comportement d'assemblages granulaires denses sous chargement biaxial, dans la limite des grands systèmes, en prenant en compte le frottement intergranulaire.

Dans un premier temps, on rappellera les propriétés du modèle granulaire étudié, identique à celui présenté au chapitre 2. Deux méthodes numériques dédiées à la simulation de compressions biaxiales à chargement imposé seront brièvement évoquées. La première est la *Dynamique Moléculaire*. La seconde, une méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique*, est une nouvelle approche analogue, dans le cas discret, à un calcul par *éléments finis* en élasto-plasticité (mécanique des milieux continus). Les résultats de simulations réalisées avec ces deux approches nous amènerons à distinguer deux régimes dans le comportement des assemblages granulaires denses.

Proche de l'état isotrope, la première partie du comportement est quasi-statique au sens strict du terme, c'est-à-dire composé d'une suite *continue* d'états d'équilibre. Le comportement est indépendant du temps. Des confrontations de comportements calculés sur des assemblages identiques, à l'aide de la *Dynamique Moléculaire* et de la méthode de calcul statique, montreront que les règles dynamiques propres à la *DM* importent peu. Dans ce premier régime, on verra que les défor-

mations macroscopiques résultent de la déformation des contacts entre particules.

La limite de ce premier régime de déformation est atteinte dès que la liste des contacts initialement présents devient insuffisante pour supporter le déviateur imposé. Commence alors la seconde phase du comportement dans laquelle les réarrangements entre les grains sont les causes principales des déformations macroscopiques observées. La courbe de comportement est alors constituée d'une succession d'états d'équilibre et de phases de réarrangement qui, dans la limite des grands systèmes tend vers une courbe lisse.

## 5.1 Propriétés du modèle granulaire étudié et méthodes numériques mises en œuvre

Les assemblages granulaires étudiés sont ceux présentés chapitre 2. On en rappelle les différentes caractéristiques :

- les particules sont circulaires,
- les diamètres des particules, compris dans l'intervalle  $[a/2; a]$ , sont distribués suivant une loi uniforme,
- les particules sont confinées par quatre parois rigides<sup>1</sup>.

À partir des configurations compactées pour la *MGQS*, de nouvelles compressions isotropes sont réalisées à l'aide de la *Dynamique Moléculaire*, sans prise en compte du frottement intergranulaire<sup>2</sup>. La loi de contact utilisée est celle de *Kelvin-Voigt*, éq. (1.3). La pression de confinement, notée  $p$ , vaut 1.

Comme on s'intéresse principalement au comportement d'assemblages constitués de particules peu déformables et proches de matériaux existants<sup>3</sup>, les raideurs  $k_n$  imposées dans les contacts sont grandes devant la pression de confinement,  $k_n = 10^5 p$ .

Dans le cadre des simulations de compressions biaxiales à chargement imposé, deux méthodes numériques sont mises en œuvre : la *Dynamique Moléculaire* et une méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique*<sup>4</sup> proposée par Bourada [12].

### Dynamique moléculaire

Dans le cadre des calculs réalisés avec la *DM*, les lois de contact utilisées sont celles présentées chapitre 1. Les forces normales de contact respectent le modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt*, éq. (1.3), page 37. Lorsque le frottement est pris

---

1. Voir fig. 2.5, page 58.

2. Ces configurations sont celles qui ont été compactées puis utilisées pour confronter la *MGQS* et la *DM*, cf. page 141.

3. Billes de verre, sables, ...

4. On note *CSEP* la méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique*.

en compte<sup>5</sup>, les forces tangentielles de contact sont calculées à l'aide du modèle élasto-plastique parfait proposé par Cundall et Strack [27], éq. (1.6), page 39. Ces deux lois de contact nécessitent d'imposer une raideur normale ainsi qu'une raideur tangentielle dans chaque contact. La raideur normale  $k_n$  utilisée au cours des simulations de compressions biaxiales est identique à celle utilisée lors du compactage isotrope,  $k_n = 10^5 p$ . La raideur tangentielle est fixée à  $k_t = k_n/2$ , sauf dans le cas particulier où l'étude de l'influence de ce paramètre sur le comportement macroscopique est envisagée.

Dans les développements à suivre, on sera amené à présenter des calculs réalisés avec la *Dynamique Moléculaire* en faisant l'*Hypothèse des Petites Perturbations*. En conséquence, on distinguera les simulations hors *HPP* des autres, par les notations *DM* et *DM<sub>HPP</sub>*.

## Calcul Statique Élasto-Plastique

Nous avons mis en œuvre [24, 23] une méthode de calcul statique élasto-plastique (*CSEP*) dédiée à l'étude du comportement d'assemblages granulaires denses, frottants, sous chargement biaxial. Cette approche est dérivée des travaux de Bourada [12] et Chateau, eux-mêmes inspirés d'un algorithme proposé par Nguyen [72].

Sur la base de configurations à l'équilibre sous un chargement extérieur donné, cette méthode permet, par augmentation graduelle du déviateur, de déterminer les forces de contact et les déplacements des particules tant que les échantillons sont à l'équilibre.

À partir d'une liste de contacts et d'un chargement extérieur, le *CSEP* consiste, par une méthode itérative, à chercher une solution dans l'intersection non vide entre l'ensemble des forces de contact *statiquement admissibles*<sup>6</sup> et l'ensemble des forces de contact *plastiquement admissibles*<sup>7</sup>, par double projection.

On ne détaillera pas ici cette approche, mais on peut néanmoins en préciser les points clefs. Les forces normales et tangentielles sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_{ij}^n &= k_n \delta u_{ij}^n \\ f_{ij}^t &= k_t \delta u_{ij}^t \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $f_{ij}^n$  et  $f_{ij}^t$  sont les composantes normales et tangentielles de la force de contact entre les grains  $i$  et  $j$ .  $k_n$  et  $k_t$  sont les raideurs normales et tangentielles dans le contact  $ij$ .  $\delta u_{ij}^n$  et  $\delta u_{ij}^t$  sont respectivement les déplacements relatifs normaux et

5. Seul le frottement entre les grains est pris en compte, le frottement entre les parois et les particules est nul.

6. Forces de contact  $\underline{f}$  en équilibre avec le chargement extérieur.

7. Composantes normales et tangentielles de toutes les forces de contact respectant le critère de *Coulomb*.

tangentiels au point de contact (dans le repère local du contact), définis par la différence entre le déplacement du point de contact considéré comme appartenant à  $i$  et le déplacement du point de contact considéré comme appartenant à  $j$  :

$$\begin{cases} \delta u_{ij}^n &= (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \vec{n}_{ij} \\ \delta u_{ij}^t &= (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \vec{t}_{ij} + R_i \Delta \theta_i + R_j \Delta \theta_j \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  sont les vecteurs déplacement des particules  $i$  et  $j$ .  $\Delta \theta_i$  et  $\Delta \theta_j$  sont leurs rotations respectives.  $\vec{n}_{ij}$  est un vecteur unitaire, orienté de la particule  $i$  vers la particule  $j$ .  $\vec{t}_{ij}$  est le vecteur unitaire tangentiel au contact tel que  $(\vec{n}_{ij}, \vec{t}_{ij})$  soit une base directe. L'équation (5.2) définit la matrice  $\underline{\underline{G}}$  ( $2N_c \times 3n$ )<sup>8</sup> de l'ensemble des contacts  $ij$  présents dans une configuration à l'équilibre,  $\underline{\delta u} = \underline{\underline{G}} \underline{u}$ .

Les déplacements relatifs tangentiels de glissement  $\delta u_{ij}^t$  (ou plastiques  $\delta u_{ij}^P$ ) sont du signe de  $f_{ij}^t$ . Si  $\mu$  désigne le coefficient de frottement entre deux disques, il y a glissement lorsque  $f_{ij}^t$  atteint la valeur  $\pm \mu f_{ij}^n$ . Le critère de *Coulomb* impose par ailleurs  $|f_{ij}^t| \leq \mu f_{ij}^n$ .

Les forces de contact  $\underline{f}$  qui équilibrent le chargement extérieur ( $\underline{\underline{G}}^T \underline{f} = \underline{F}^{ext}$ ) sont donc définies par  $\underline{f} = \underline{\underline{K}} \underline{\delta u}$ , où  $\underline{\underline{K}}$  est la matrice diagonale ( $2N_c \times 2N_c$ ) des rigidités  $k_n$  et  $k_t$  de chaque contact.

La méthode de résolution par double projection consiste à projeter successivement les forces  $\underline{f}$  sur l'espace des forces équilibrant le chargement  $\underline{F}^{ext}$  (*opération globale*) et sur le cône de *Coulomb* pour chaque contact (*opération locale*). Les projections sont orthogonales au sens du produit scalaire  $(\underline{f}_1 | \underline{f}_2) = \underline{f}_1 \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{f}_2$ . Dans le cas où les projections *locales* sur le cône de *Coulomb* sont effectuées au sens du produit scalaire défini précédemment, la règle d'écoulement et la limite élastique coïncident, le matériau est dit *standard*<sup>9</sup> et sa règle d'écoulement est dite *associée*, fig. 5.1(b). Lorsqu'un contact devient glissant, il y a localement une dilatance dont l'angle est identique à l'angle de frottement intergranulaire. Dans le cas où la règle d'écoulement et la limite élastique ne coïncident pas, le matériau est dit *non standard*<sup>9</sup> et sa règle d'écoulement est dite *non associée*, fig. 5.1(a). Il n'y a alors pas de dilatance locale dans les contacts glissants.

La méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique* est mise en œuvre dans le cadre de l'*Hypothèse des Petites Perturbations*, avec une règle d'écoulement *non associée* (fig. 5.1(a)). Au fur et à mesure que les particules sont déplacées, les vecteurs directeurs des contacts restent inchangés. De par l'*HPP*, l'utilisation de cette approche ne se justifie que pour des rigidités de contact  $k_n$  élevées. En conséquence, seule la liste initiale des contacts est considérée, les éventuels nouveaux contacts suite

8.  $N_c$  est le nombre total de contacts et  $n$  le nombre de disques qui portent des forces non nulles.

9. Terme utilisée en mécanique des sols lorsque le matériau est considéré comme un milieu continu.

aux déplacements des grains ne sont pas pris en compte. Néanmoins, le *CSEP* tient compte de l'unilatéralité, les contacts peuvent s'ouvrir puis se refermer si nécessaire.

Cette méthode sera utilisée afin de déterminer la plage de déviateur supporté par les listes initiales des contacts obtenues par compression isotrope<sup>10</sup> d'assemblées de disques.

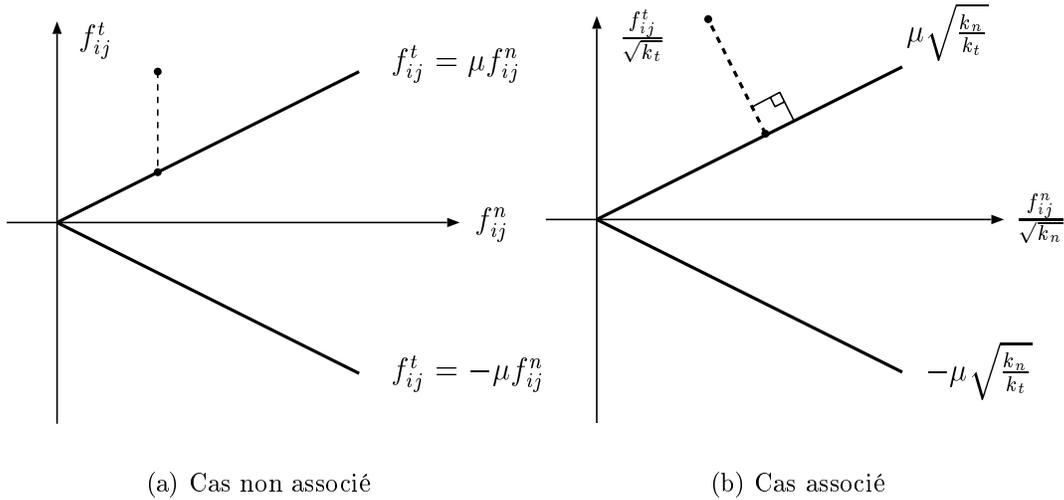


FIG. 5.1 – *Projection locale sur le cône de Coulomb suivant une règle d'écoulement (a) non associée, (b) associée.*

## 5.2 Exemples de comportements macroscopiques sous chargement biaxial

À partir de configurations compactées sous confinement isotrope, des simulations de compressions biaxiales à contraintes contrôlées sont réalisées à l'aide de la *DM*. Les incréments de déviateur sont imposés à  $\Delta q = 10^{-3}p$ , la contrainte de confinement  $p = 1$  restant constante. Après chaque incrément de chargement, on cherche un nouvel état d'équilibre, estimé comme tel lorsque les critères suivants sont satisfaits :

- il n'existe plus de particules monovalentes,
- l'écart relatif à l'équilibre de chaque grain portant des forces est strictement inférieur à  $10^{-3}$ .

Deux écarts relatifs sont calculés : l'écart relatif des forces et l'écart relatif des moments. L'écart relatif des forces est calculé pour chaque particule  $i$  suivant

<sup>10</sup>. Compressions isotropes sans frottement intergranulaire.

l'équation (2.1), page 61. Si l'on note  $\vec{\Gamma}_{ij}$  les moments exercés par les  $n$  particules  $j$  au centre de la particule  $i$ , l'écart relatif des moments est calculé sur  $i$  par :

$$Ec_{\Gamma}^{rel}(i) = \frac{\| \sum_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \vec{\Gamma}_{ij} \|}{\max_{\substack{j=1,n \\ j \neq i}} \|\Gamma_{ij}\|} \quad (5.3)$$

On montre sur la figure 5.2(a) les courbes  $q - \epsilon_y$  de deux assemblages comprenant respectivement 1024 et 3025 particules. Les calculs sont volontairement interrompus à  $\epsilon_y = 0.02$ . La figure 5.2(b) montre le comportement macroscopique dans une gamme de déformation plus faible,  $\epsilon_y \leq 2 \cdot 10^{-4}$ .

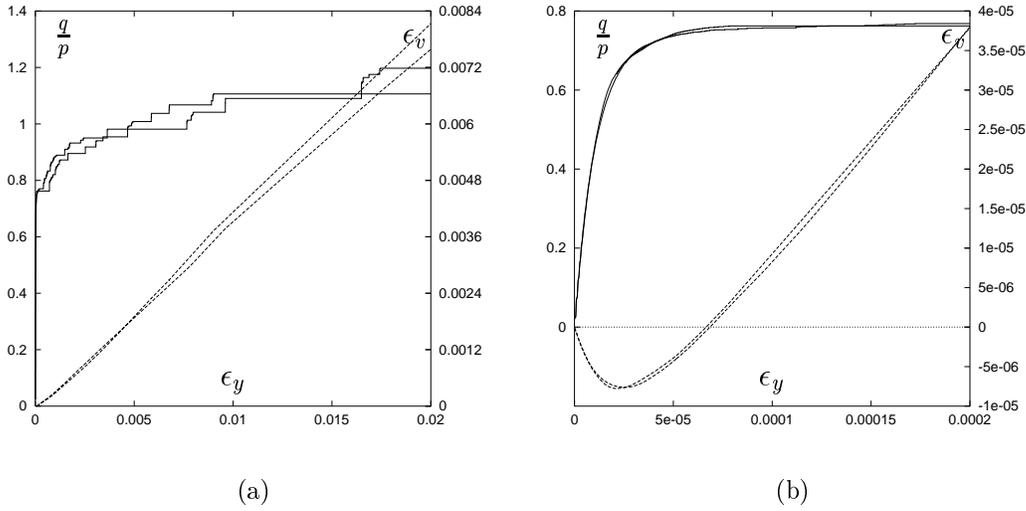


FIG. 5.2 – Exemples de comportement pour deux échantillons comprenant 1024 et 3025 particules. Essai biaxial à déviateur imposé,  $\Delta q = 10^{-3}p$ . Frottement intergranulaire :  $\tan \varphi = 0.25$ .  $k_n = 10^5 p$ ,  $k_n = 2k_t$ .

La préparation par compactage isotrope étant effectuée sans frottement intergranulaire, les échantillons sont initialement très denses<sup>11</sup>. Ceci explique le comportement fortement dilatant (fig. 5.2(b)).

Par ces deux exemples, on met en évidence l'existence de deux régimes de déformation sensiblement différents. Proche de l'état isotrope (fig. 5.2(b)), la courbe de comportement macroscopique est constituée de toutes petites marches d'escalier, pratiquement indiscernables sur la figure. À chaque incrément de chargement

11. Échantillons *surconsolidés*.

$\Delta q$  correspond une réponse en déformation de très faible amplitude. Passé ce premier régime, les réponses en déformation deviennent sensiblement plus grandes. Les courbes  $q - \epsilon_y$  semblent alors composées d’alternances d’états d’équilibre et de phases de réarrangement, analogues à celles observées en l’absence de frottement.

Des simulations complètes à l’aide de calculs statiques (*CSEP*) vont nous permettre d’identifier le point de transition entre ces deux régimes.

## 5.3 Comportement quasi-statique pour les déformations faibles

Dans la plage des déformations macroscopiques faibles ( $\epsilon_y < 5 \cdot 10^{-5}$ ), deux méthodes numériques sont utilisées pour simuler l’essai biaxial à chargement imposé : la *Dynamique Moléculaire* et la méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique*. Afin de rendre ces deux approches comparables, un programme de *Dynamique Moléculaire*, utilisant les lois de contact (1.3) et (1.6) et tenant compte de l’*hypothèse des petites perturbations*<sup>12</sup>, est mis en œuvre. On désigne cette méthode de calcul par le sigle *DM<sub>HPP</sub>*. Ce programme est rendu *équivalent* à la méthode de *CSEP* en ce sens qu’il ne tient pas compte de la création éventuelle de contacts (seule la liste initiale des contacts est considérée).

### 5.3.1 Calculs statique et dynamique, comparaisons à l’échelle macroscopique

Sur la figure 5.3, on montre un exemple de comportement macroscopique d’un assemblage de 1024 particules soumis à un chargement biaxial par incréments de chargement. L’assemblage est initialement compacté sous une pression de confinement  $p = 1$ , sans frottement intergranulaire. Les raideurs normales dans les contacts sont fixées à  $k_n = 10^5 p$ . Pour l’essai biaxial proprement dit, on fixe le frottement intergranulaire à  $\tan \varphi = 0.25$  et la raideur tangentielle à  $k_t = k_n/2$ . Avec la *DM<sub>HPP</sub>* (trait continu sur la figure), l’incrément de déviateur imposé est constant,  $\Delta q = 10^{-4}$ . Avec le *CSEP* (points), l’incrément de déviateur est initialement imposé à  $\Delta q = 5 \cdot 10^{-2}$ . Ce dernier est, sur la fin du calcul, ajusté au mieux afin d’obtenir une valeur du déviateur la plus proche possible de la valeur maximale supportée par la liste initiale des contacts. Les courbes reliant les déformations macroscopiques au déviateur imposé sont présentées fig. 5.3(a). Sur la figure 5.3(b), on montre l’évolution de la variation de volume  $\epsilon_v$  en fonction de  $\epsilon_y$ .

---

12. Les vecteurs directeurs des contacts sont constants.

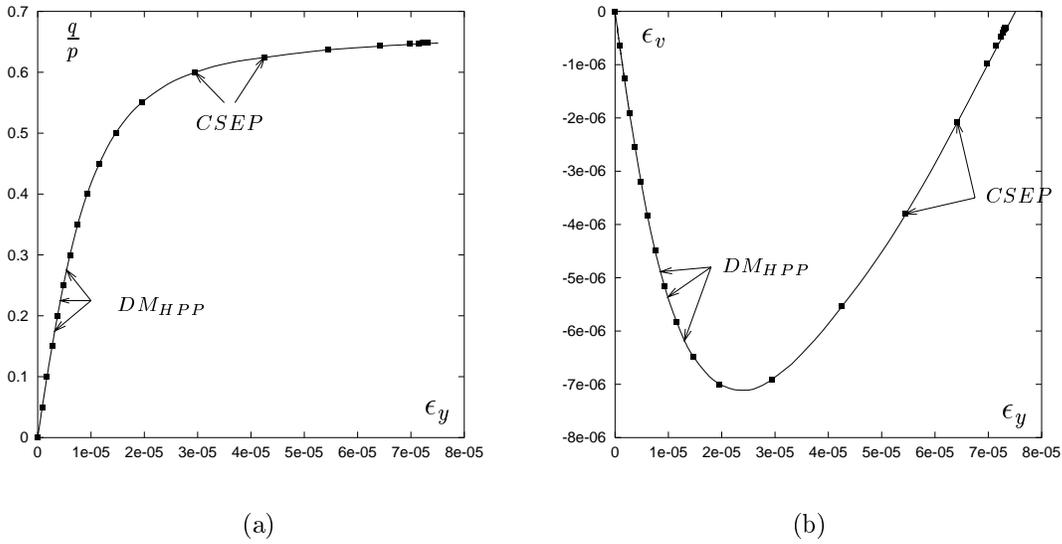


FIG. 5.3 – Compression biaxiale à chargement imposé d'un assemblage de 1024 disques frottants,  $\tan \varphi = 0.25$ .  $k_n = 10^5 p = 2k_t$ . Trait continu:  $DM_{HPP}$ , points:  $CSEP$ . Incréments de déviateur imposés:  $\Delta q^{DM_{HPP}} = 10^{-4}$ ,  $\Delta q^{CSEP} \leq 0.05$ .

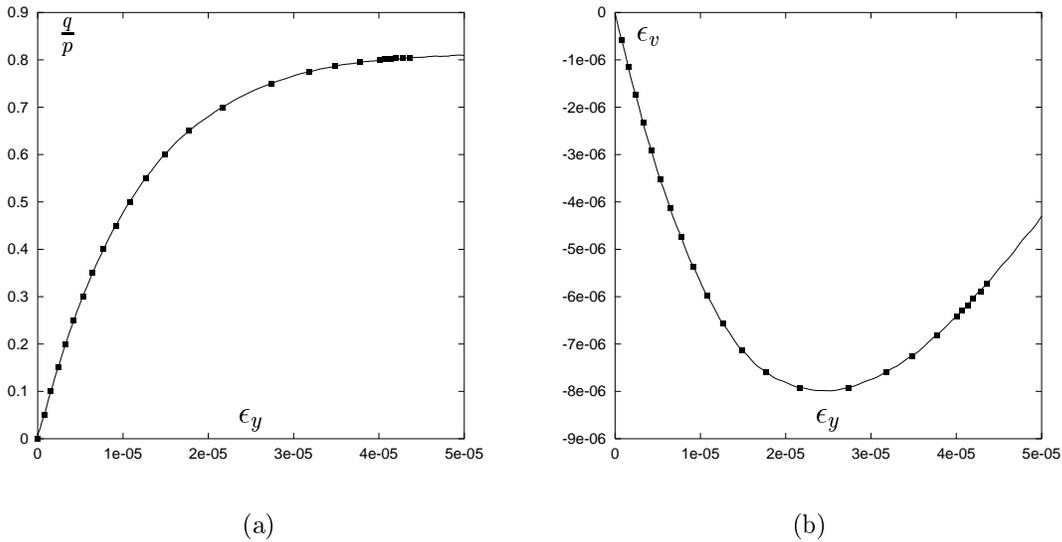


FIG. 5.4 – Compression biaxiale d'un assemblage de 4900 disques frottants,  $\tan \varphi = 0.25$ .  $k_n = 10^5 p = 2k_t$ . Points:  $CSEP$ , test biaxial à  $q/p$  imposé. Trait:  $DM$ , test biaxial à  $\epsilon_y$  imposée.

D'un point de vue macroscopique, on constate qu'il n'existe pas de différences notables entre les résultats obtenus par la méthode dynamique ( $DM_{HPP}$ ) et la

méthode statique (*CSEP*). Par ailleurs, on remarque sur la figure 5.4 qu’une simulation d’essai biaxial à  $\dot{\epsilon}_y$  imposée, hors *HPP*, donne des résultats macroscopiques quasi-identiques à ceux obtenus avec le *CSEP* qui tient compte de l’*HPP* et qui ne gère pas la création de nouveaux contacts. On montre ainsi que l’hypothèse des petites déformations est réaliste lorsque les particules sont quasi-rigides et de plus, on met ici en évidence que le mode de sollicitation n’influence pas le comportement mécanique tant que le *CSEP* est praticable.

### 5.3.2 Calculs statique et dynamique, comparaisons à l’échelle microscopique

À l’échelle des grains, les comparaisons entre le *CSEP* et la  $DM_{HPP}$  sont moins triviales. La principale difficulté réside dans l’obtention de configurations strictement identiques<sup>13</sup> pour un chargement extérieur donné. En travaillant sur des assemblages de taille modeste, la confrontation des deux méthodes de calcul est plus aisée.

À partir d’un échantillon constitué de 49 particules polydisperses, fig. 5.5(a), on simule à l’aide de la  $DM_{HPP}$  et d’un *CSEP*, des compressions biaxiales à chargement imposé,  $\Delta q = 10^{-3}p$ . L’assemblage est initialement compacté sous une pression de confinement isotrope  $p$  avec  $k_n = 10^5p$  et  $\tan \varphi = 0$ . Pour le test biaxial, on impose  $\tan \varphi = 0.25$ . Une attention particulière est portée sur la *qualité*<sup>14</sup> des états d’équilibre calculés après chaque incrément de chargement. Un premier calcul statique nous indique que le déviateur maximal supporté par la liste initiale des contacts est  $q \simeq 0.815$ .

#### Comparaison des forces normales de contact

Sur la figure 5.5(b), on montre une carte des forces normales de contact  $f_n^{DM_{HPP}}$  à  $q = 0.81$ . Les déformations axiales calculées par les deux méthodes à  $q = 0.81$  sont :  $\epsilon_y^{DM_{HPP}} = 6.694 \cdot 10^{-5}$  et  $\epsilon_y^{CSEP} = 6.683 \cdot 10^{-5}$ , soit une erreur relative par rapport à  $\epsilon_y^{DM_{HPP}}$  de  $1.6 \cdot 10^{-3}$ .

Sur la figure 5.5(b), les intensités des forces normales de contact sont représentées par des traits d’épaisseur variable, suivant une échelle de représentation donnée. Sur la base de cette échelle de représentation, on montre figure 5.6(a) une carte des différences des forces normales de contact  $f_n^{DM_{HPP}}$  entre l’état isotrope ( $q = 0$ ) et  $q = 0.81$ . À partir de cette même échelle, la carte des différences des forces normales de contact calculées par la  $DM_{HPP}$  et le calcul statique est montrée

13. Même liste de contacts et mêmes positions des particules.

14. Les résultantes des forces de contact et des moments qui s’exercent sur chaque particule sont, à l’équilibre, strictement inférieurs à  $10^{-8}$ .

sur la figure 5.6(b). L'écart relatif des forces normales de contact, défini par

$$Ec^{rel} = \frac{|f_n^{DMHPP} - f_n^{CSEP}|}{f_n^{DMHPP}}$$

et moyenné sur tous les contacts, est évalué à  $(7.5 \pm 8.1) \cdot 10^{-3}$ .

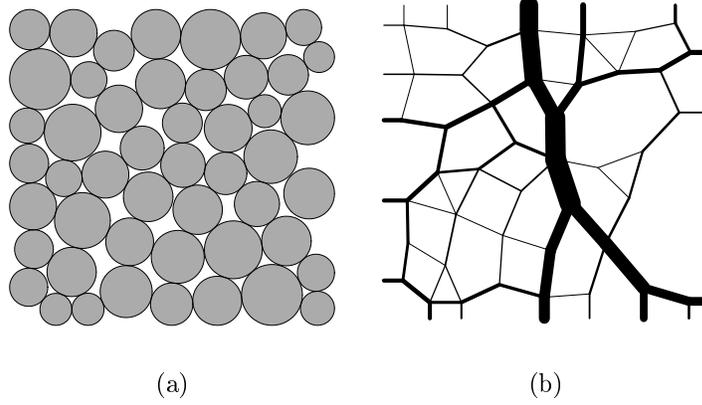


FIG. 5.5 – (a)- Échantillon de 49 particules, compacté sans frottement, sous une pression isotrope  $p$ . (b)- Carte des forces normales de contact calculées par la  $DM_{HPP}$  à  $q = 0.81$ .  $\max(f_n^{DMHPP}) = 6.91$ ,  $\min(f_n^{DMHPP}) = 6 \cdot 10^{-2}$ .

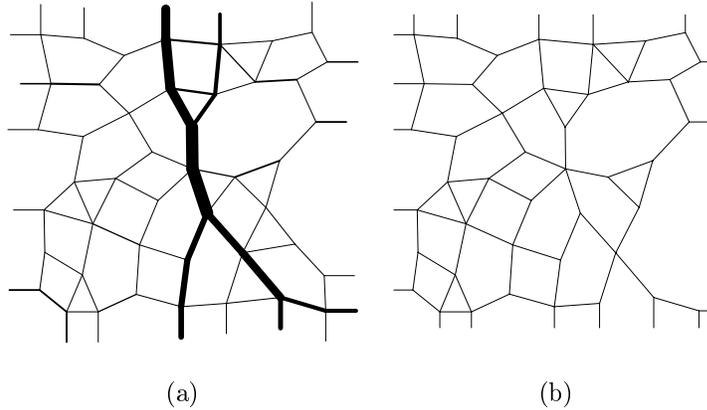


FIG. 5.6 – (a)- Carte des différences des intensités des forces  $f_n^{DMHPP}$  entre  $q = 0$  et  $q = 0.81$ . (b)- Carte des  $\Delta f_n = |f_n^{DMHPP} - f_n^{CSEP}|$  à  $q = 0.81$ .  $[\Delta f_n]_{max} = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $[\Delta f_n]_{min} = 1.5 \cdot 10^{-8}$ . L'épaisseur de chaque trait est proportionnel au scalaire qu'il représente. L'échelle de représentation des intensités de force est identique à celle utilisée fig. 5.5(b).

## Les forces de contact tangentielles

Plutôt que de confronter directement les forces tangentielles de contact calculées par les deux approches numériques, on propose d'effectuer l'étude comparative sur le scalaire  $\mathfrak{O}$ , éq. (5.4), représentant la mobilisation du frottement de chaque contact.

$$\mathfrak{O} = \frac{|f_t|}{f_n \tan \varphi} \quad (5.4)$$

où  $f_n$  et  $f_t$  désignent respectivement la force normale et la force tangentielle de contact.

- $\mathfrak{O} = 1$  → contact glissant.
- $\mathfrak{O} < 1$  → roulement sans glissement.

La figure 5.7(a) est une carte des  $\mathfrak{O} > 10^{-6}$  obtenue par la  $DM_{HPP}$  à  $q = 0.81$ . Comme l'a fait remarquer Jean [45], à l'équilibre, les méthodes du type *Dynamique Moléculaire* ne sont pas capables d'exhiber des contacts strictement glissants ( $\mathfrak{O} = 1$ ). La valeur maximale de  $\mathfrak{O}$  calculée par la  $DM_{HPP}$  est  $[\mathfrak{O}^{DM_{HPP}}]_{\max} = 0.99$ . En revanche, la méthode de calcul statique met en évidence des contacts glissants ( $\mathfrak{O} = 1$ ). Le minimum de  $\mathfrak{O} > 10^{-6}$  est  $[\mathfrak{O}^{DM_{HPP}}]_{\min} = 2.2 \cdot 10^{-2}$ . Sur la figure 5.7(b), on donne la carte des écarts absolus de  $\mathfrak{O}$  entre la  $DM_{HPP}$  et le  $CSEP$ ,  $\Delta\mathfrak{O} = |\mathfrak{O}^{DM_{HPP}} - \mathfrak{O}^{CSEP}|$ . La valeur maximale de  $\Delta\mathfrak{O}$  est  $8.4 \cdot 10^{-3}$ . L'écart minimum s'élève à  $1.9 \cdot 10^{-5}$ . L'écart relatif de  $\mathfrak{O}$ , défini par  $\frac{|\mathfrak{O}^{DM_{HPP}} - \mathfrak{O}^{CSEP}|}{\mathfrak{O}^{DM_{HPP}}}$ , a pour valeur maximale  $5.2 \cdot 10^{-2}$ .

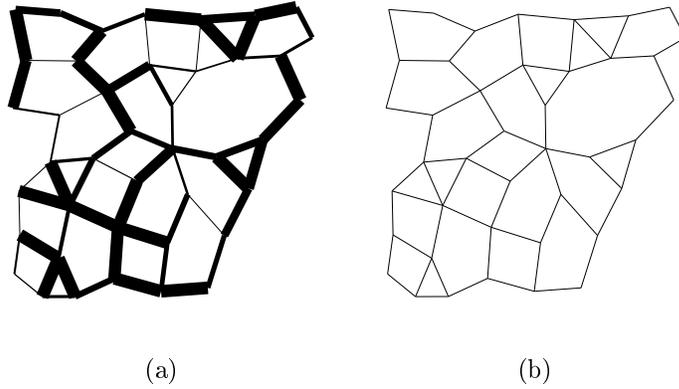


FIG. 5.7 - (a)-Carte des  $\mathfrak{O}$  calculés par la  $DM_{HPP}$  à  $q = 0.81$ . (b)-Carte des différences absolues  $\Delta\mathfrak{O} = |\mathfrak{O}^{DM_{HPP}} - \mathfrak{O}^{CSEP}|$  à  $q = 0.81$ . L'épaisseur des traits est, pour les deux cartes, proportionnelle à l'intensité de  $\mathfrak{O}$ . L'échelle de représentation est identique pour les deux cartes.

L'étude comparative des deux approches numériques à l'échelle des forces de contact nous permet de constater qu'il n'existe pas de différences notables entre les deux calculs.

À l'équilibre, sous le chargement isotrope  $p$  et en l'absence de frottement, la liste des contacts portant des forces non nulles constitue une structure isostatique. Une fois le frottement intergranulaire pris en compte, la structure formée par les contacts devient fortement hyperstatique. Lanier et Jean [55] proposent de calculer le degré d'hyperstaticité comme suit : soit  $\chi_s$  le nombre de contacts glissants,  $\chi_n$  le nombre de contacts non glissants et  $N$  le nombre de particules qui portent des forces de contact non nulles. Chaque particule a 3 degrés de liberté. Les équations d'équilibre, au nombre de  $3N + d_P$ , font intervenir  $\chi_s + 2\chi_n$  inconnues ( $d_P$  désigne le nombre de degrés de liberté des parois). Le degré d'hyperstaticité  $h$  de la structure est obtenu par l'équation :

$$h = \chi_s + 2\chi_n - d_p - 3N \quad (5.5)$$

Ce calcul du degré d'hyperstaticité n'est pas tout à fait exact car il ne tient pas compte des mécanismes<sup>15</sup>. (5.5) sous-estime le degré d'hyperstaticité. Néanmoins, par cette relation, il est possible d'obtenir l'ordre de grandeur du degré d'hyperstaticité, qui vaut 0 lorsque le frottement est nul (état isotrope). Une fois le frottement intergranulaire *activé* (pas de frottement entre les particules et les parois), à l'état isotrope,  $h$  devient positif. Sachant que 45 grains<sup>16</sup> portent un total de 92 forces dont 20 concernent des particules en contact avec les parois, on a alors  $h = 20 + 2 \times 72 - 2 - 3 \times 45 = 27$ .

Bien qu'il y ait plus d'inconnues que d'équations et par conséquent, plusieurs solutions possibles au problème posé, les deux méthodes de calculs donnent des résultats quasi-identiques à l'échelle des grains comme à l'échelle macroscopique. Des observations semblables ont été effectuées, avec un niveau de précision moindre, sur des assemblages comprenant un plus grand nombre de disques. Ce résultat montre qu'il existe certaines propriétés d'unicité dont les causes semblent *mystérieuses*.

### 5.3.3 Synthèse de l'étude comparative

Dans la gamme de déviateur supporté par la liste initiale des contacts,  $0 \leq q \leq q_1$ , quels que soient le mode de sollicitation ( $\Delta q$  imposé ou  $\dot{\epsilon}_y$  imposée), la méthode de calcul dynamique utilisée ( $DM$  ou  $DM_{HPP}$ ) et la taille des assemblages<sup>17</sup>, les courbes macroscopiques  $q - \epsilon_y$  et  $\epsilon_v - \epsilon_y$  sont identiques à celles calculées par le *CSEP* lorsque les raideurs normales dans les contacts sont importantes,  $k_n \geq 10^4 p$ . Tant que  $q \leq q_1$ , on montre qu'en tout point de la courbe  $q - \epsilon_y$ ,

15. cf. équation 3.16, page 89.

16. 4 particules ne portent pas de forces de contact ou portent des forces nulles.

17.  $N = 1024, 3025$  et  $4900$ .

les forces de contact équilibrent le chargement extérieur  $(p, q)$ . C'est une *famille continue* d'états d'équilibre. L'échantillon évolue alors suivant un régime quasi-statique *au sens strict* du terme et aucun réarrangement (création de nouveaux contacts) dans la liste des contacts n'est nécessaire afin d'équilibrer le chargement extérieur imposé. Des calculs complémentaires à l'aide de la *DM* montrent que si  $q > q_1$ , des créations de nouveaux contacts sont nécessaires afin de maintenir les échantillons à l'équilibre. Cela semble définir la limite entre le régime strictement quasi-statique et le second régime de déformation constitué des phases de fluage d'amplitudes variables observés sur la figure 5.2(a), page 166.

La confrontation des deux méthodes de calcul *DM* et *CSEP*, montre, dans le régime quasi-statique strict, que le comportement macroscopique est indépendant des règles dynamiques. Par ailleurs, on observe que les déformations macroscopiques résultent de la déformabilité des particules (fig. 5.8), ce qui corrobore les observations de Schlosser [97] sur des assemblages réguliers de sphères.

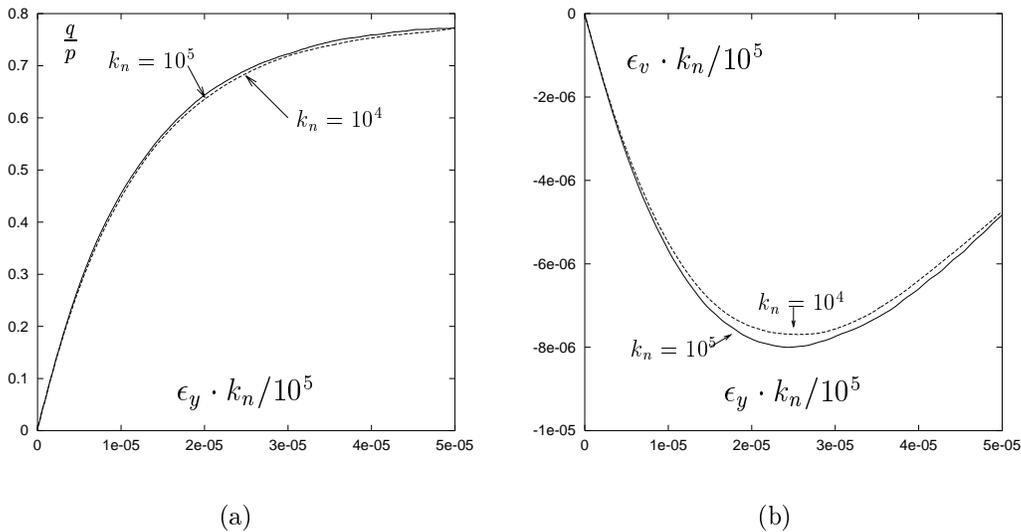


FIG. 5.8 – Mise en évidence de l'influence de  $k_n$  sur les déformations macroscopiques. Compressions biaxiales à  $\dot{\epsilon}_y$  imposée sur deux assemblages à 3025 particules. Dynamique Moléculaire.  $\tan \varphi = 0.25$ ,  $k_t/k_n = 0.5$ .

La modélisation des forces de contact mise en œuvre dans la méthode de calcul statique, éq. (5.1), autorise l'idée d'une extrapolation des comportements macroscopiques simulés à  $k_n$  fixé à la limite des particules parfaitement rigides. Pour  $k_n \rightarrow \infty$ , on observerait alors un module tangent infini et une disparition complète de la phase initiale de contractance comme constaté par Lanier et Jean [55] sur des simulations numériques de compressions biaxiales réalisées avec la *Dynamique des Contacts*<sup>18</sup>.

18. On rappelle que la *DC* considère les particules comme parfaitement rigides.

## 5.4 Comportement macroscopique dans la limite des grands systèmes

### 5.4.1 Régime quasi-statique au sens strict

L'étude statistique du comportement macroscopique pour les faibles déformations est réalisée à l'aide de la méthode de calcul statique (*CSEP*), sur 3 tailles d'assemblages :

- 26 échantillons à 1024 particules,
- 10 échantillons à 3025 particules,
- 6 échantillons à 4900 particules.

Tous ces assemblages sont initialement compactés sous une pression de confinement isotrope  $p = 1$  en l'absence de frottement, avec  $k_n = 10^5 p$ . Pour chaque calcul, le déviateur est graduellement augmenté par incréments de  $\Delta q = 10^{-3}$  puis ajusté au mieux afin d'approcher le plus précisément possible le déviateur maximal supportable par la liste initiale des contacts.

#### Plage de chargement supporté dans la limite des grands systèmes

On note  $q_1$  le déviateur maximal supportable par une liste de contacts obtenue par compression isotrope. On donne dans le tableau 5.1 les déviateurs moyens  $\langle q_1 \rangle$  calculés pour chaque taille d'assemblage, avec les paramètres suivants :  $\tan \varphi = 0.25$  et  $k_t/k_n = 0.5$ .

<i>CSEP</i>	<b>N=1024</b>	<b>N=3025</b>	<b>N=4900</b>
$\langle q_1 \rangle$	$0.750 \pm 0.050$	$0.774 \pm 0.033$	$0.786 \pm 0.024$

TAB. 5.1 –  $\langle q_1 \rangle$  calculés sur 26 assemblages à 1024 particules, 10 à 3025 particules et 6 assemblages à 4900 particules.

Sur la figure 5.9, on donne une représentation graphique des valeurs  $\langle q_1 \rangle$  en fonction de la taille  $N$  des assemblages. Une fonction linéaire passant au plus près de 3 points de mesure est proposée,  $f(N^{-1/2}) = a_0 N^{-1/2} + a_1$  avec  $a_0 = -2.122 \pm 3.281$  et  $a_1 = 0.815 \pm 0.061$ . Bien que l'incertitude sur  $a_0$  soit importante, il ne semble pas incohérent d'admettre que  $\langle q_1 \rangle$  possède une limite dans les grands systèmes et soit une fonction croissante de la taille du système. Il nous semble en effet raisonnable de considérer que  $\langle q_1 \rangle$  puisse dépendre de la compacité initiale des échantillons. Or, comme nous avons pu le voir sur la figure 2.12 (page 65), la compacité est fonction de la taille des systèmes, conséquence directe des conditions aux limites de type parois rigides (effets de bords).

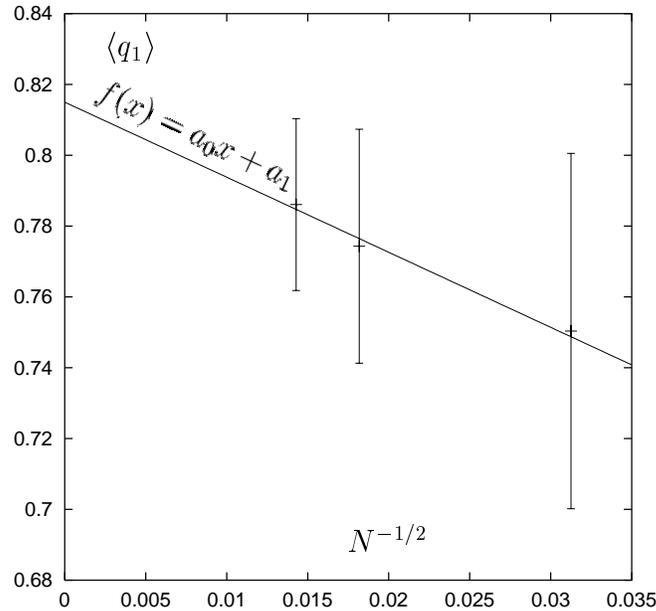


FIG. 5.9 – Évolution de  $\langle q_1 \rangle$  en fonction de la taille  $N$  des assemblages. Les barres ont pour demi-hauteur les écarts types. La droite est une approximation linéaire avec  $a_0 = -2.122 \pm 3.281$ ,  $a_1 = 0.815 \pm 0.061$ . L'indice de vraisemblance de l'approximation linéaire est estimé à 0.93.  $\tan \varphi = 0.25$  et  $k_n = 2k_t = 10^5$ .

### Déformations réversibles dans la limite des grands systèmes

Lorsque  $q \rightarrow q_1$ , de nombreux contacts sont perdus. Dans certains contacts, les glissements entraînent des déformations plastiques (irréversibles) et ce, dès qu'une contrainte déviatorique est appliquée, même petite devant  $q_1$ . À l'aide de la méthode de *CSEP*, il est possible de constater s'il existe une plage finie de déviateur  $q^{\text{él}}$  conduisant à des déformations réversibles dans la limite des grands systèmes. Pour ce faire, on propose de réaliser une étude statistique à partir des assemblages suivants, initialement compactés sous une pression de confinement isotrope  $p = 1$ .

- 218 échantillons à 361 particules,
- 78 échantillons à 1024 particules,
- 26 échantillons à 3025 particules,
- 9 échantillons à 9025 particules.

On représente sur la figure 5.10 les valeurs moyennes  $\langle q^{\text{él}} \rangle$  calculées en fonction de la taille  $N$  des assemblages.

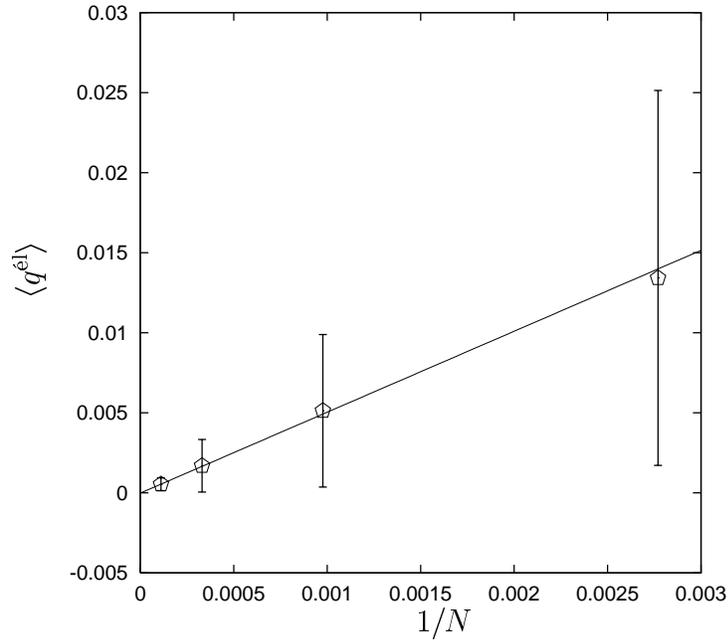


FIG. 5.10 – Plages moyennes de déviateur conduisant à des déformations réversibles dans les contacts, en fonction de la taille  $N$  des assemblages.  $\tan \varphi = 0.25$ ,  $k_n = 2k_t = 10^3$ . Les barres verticales ont pour demi-hauteur l'écart type. Une approximation linéaire du type  $f(x) = ax + b$  est représentée avec  $a = 5.05 \pm 3.16$  et  $b = (-1.75 \pm 5.69) \cdot 10^{-4}$ . L'indice de vraisemblance de l'approximation linéaire est estimé à 0.997.

Cette analyse statistique montre que la plage de déviateur pour laquelle le comportement est élastique tend vers 0 lorsque le système devient grand. Ce résultat confirme que le comportement des matériaux granulaires est toujours irréversible, ce qui semble contredire l'idée d'un comportement élastique non linéaire des sables pour  $\epsilon_y < 10^{-5}$  (Biarez et coll. [10]). Bien que cette étude ait été conduite avec des paramètres spécifiques ( $\tan \varphi = 0.25$ ,  $k_n = 2k_t = 10^3$ p), on ne peut raisonnablement pas imaginer de conclusion différente avec d'autres propriétés de frottement ou de rigidités.

### Influences de $k_t/k_n$ et du coefficient de frottement sur les plages de chargement supporté

Afin de rendre compte de l'influence du coefficient de frottement et du rapport  $k_t/k_n$  sur le déviateur supporté  $q_1$ , on propose de faire varier ces paramètres sur un ensemble de 26 assemblages à 1024 particules (tableau 5.2).

<b>1024 particules</b>	$k_t/k_n = 0.1$	$k_t/k_n = 0.5$	$k_t/k_n = 1$
$\tan \varphi = 0.1$	$0.404 \pm 0.029$	$0.402 \pm 0.030$	$0.391 \pm 0.036$
$\tan \varphi = 0.25$	$0.751 \pm 0.051$	$0.750 \pm 0.050$	$0.746 \pm 0.049$
$\tan \varphi = 0.5$	$1.085 \pm 0.091$	$1.147 \pm 0.080$	$1.054 \pm 0.107$

TAB. 5.2 –  $\langle q_1 \rangle$  en fonction de  $\tan \varphi$  et  $k_t/k_n$ , calculé à partir de 26 configurations à 1024 particules chacune.

On constate que le rapport  $k_t/k_n$  n'influence pas sensiblement  $\langle q_1 \rangle$  à  $\tan \varphi$  constant. Des calculs complémentaires sur des assemblages à 3025 particules confirment ces observations. À l'inverse, on constate que  $k_t/k_n$  modifie de façon significative les déformations macroscopiques. Plus  $k_t/k_n$  est faible et plus  $\epsilon_y$  est grand pour un déviateur  $q_1$  donné, fig. 5.11. Néanmoins, comme le montrent les figures 5.11(a) et 5.11(b), il semble que lorsque  $k_t/k_n \geq 0.5$ , les mesures des déformations macroscopiques soient sensiblement identiques.

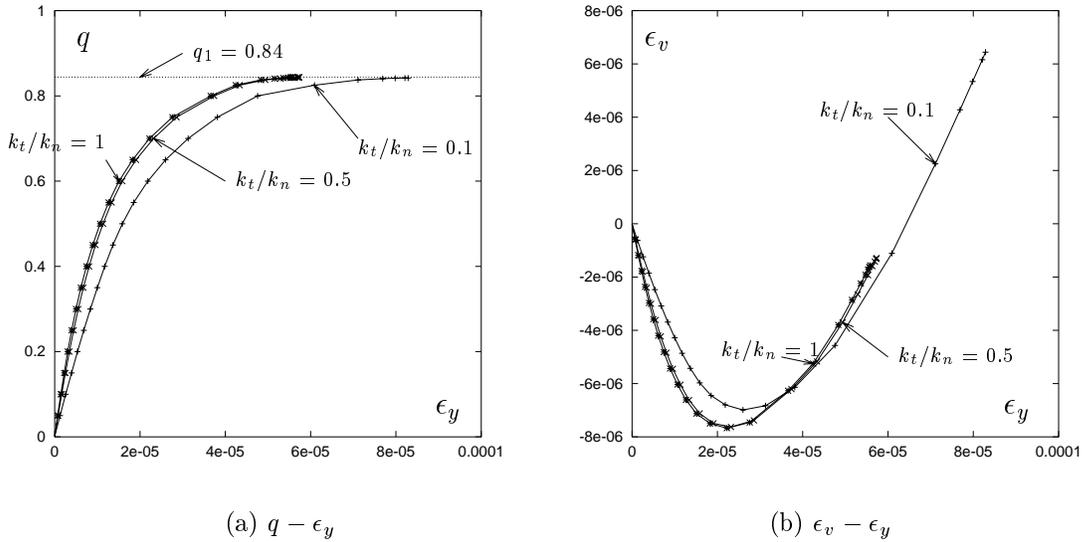


FIG. 5.11 – Mise en évidence de l'influence du rapport  $k_t/k_n$  sur le calcul des déformations macroscopiques. Simulation d'essais biaxiaux sur un échantillon à 1024 particules avec  $k_n = 10^5 p$ ,  $\tan \varphi = 0.25$  et  $\Delta q \leq 0.05$  (CSEP).

### Comportement macroscopique moyen

Sur la figure 5.12, on montre les courbes moyennes de comportement calculées à partir de compressions biaxiales à chargement imposé ( $DM$ ) effectuées sur 26 configurations à 1024 particules, 10 configurations à 3025 particules et 6 configurations à 4900 particules, avec les paramètres suivants :  $\tan \varphi = 0.25$  et  $k_n = 2k_t = 10^5 p$ .

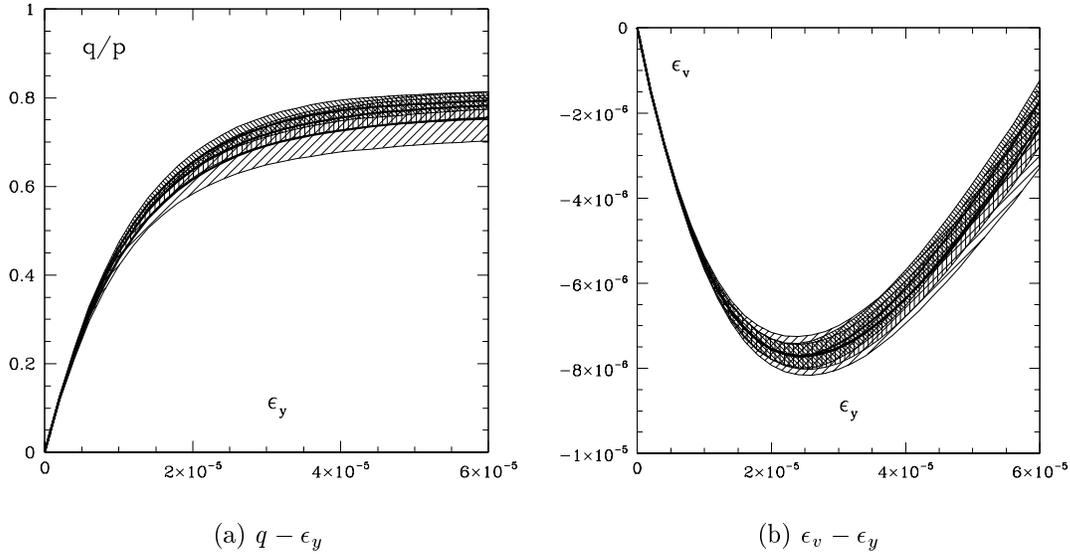


FIG. 5.12 – Courbes moyennes pour 3 tailles d’assemblages :  $N = 1024, 3025, 4900$ . Les traits gras représentent les moyennes et les zones hachurées, les écarts types autour de la moyenne. Hachures obliques très écartées :  $N = 1024$ . Hachures verticales :  $N = 3025$ . Hachures obliques très resserrées :  $N = 4900$ .

Logiquement, la courbe  $q - \epsilon_y$  moyenne associée aux assemblages à 4900 particules se situe au-dessus de celle calculée pour  $N = 3025$ , elle-même au-dessus de celle calculée pour  $N = 1024$ . Au vue de la réduction des écarts types lorsque la taille du système augmente, on confirme l’existence d’un comportement limite pour  $N \rightarrow \infty$  à  $\tan \varphi > 0$  et  $k_n$  et  $k_t$  fixés.

La fin du régime quasi-statique est identifiée par l’existence d’un déviateur limite nécessitant la création de nouveaux contacts. Dans la phase initiale du comportement, Lanier et Jean [55] ont remarqué que le degré d’hyperstaticité  $h$ , calculé suivant (5.5), diminuait continûment jusqu’à devenir négatif dès l’apparition de réarrangements internes dans la structure des contacts. Sur la figure 5.13, on observe une forte décroissance du degré d’hyperstaticité dans le régime quasi-statique strict du comportement. Par contre,  $h$  reste ici positif même lorsque le calcul statique n’est plus praticable, c’est-à-dire dès que les déformations macroscopiques impliquent des réarrangements internes.

Défini par Luong [60], l’état caractéristique est le point de changement de signe de la déformation volumique. Il est interprété comme le moment où s’amorce le désenchevêtrement des grains (Luong [61]), qui, dans nos simulations, conduit à la nécessité de nouveaux contacts au terme du régime quasi-statique strict. Luong observe que l’application de sollicitations cycliques sur des sables conduit à l’accommodation ou au rochet selon la position de l’état de contrainte moyen par rapport à

l'état caractéristique. Un procédé de thermographie infrarouge permet de constater que l'énergie dissipée est alors particulièrement élevée dès que l'état caractéristique est dépassé (Luong [62]). De telles observations expérimentales justifient alors que le domaine subcaractéristique soit intérieur au régime *quasi-statique strict* et que la proportion de contacts glissants atteigne systématiquement un palier dès lors que le niveau de déviateur associé à l'état caractéristique est dépassé (figure 5.13(b)).

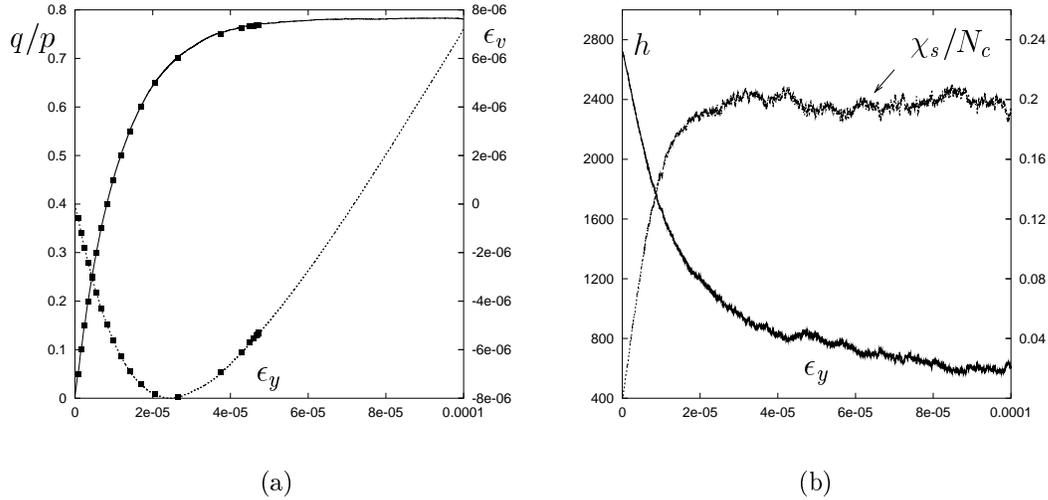


FIG. 5.13 – (a) - Courbes  $q - \epsilon_y$  (trait plein) et  $\epsilon_v - \epsilon_y$  (pointillés) d'un assemblage à 3025 grains sous chargement biaxial à vitesse de déformation imposée, DM. Les symboles carrés sont obtenus par compression biaxiale à chargement imposé, CSEP. (b) - Trait plein: évolution du degré d'hyperstaticité  $h$  en fonction de  $\epsilon_y$ . Pointillés: proportion de contacts glissant  $\chi_s/N_c$  calculée par rapport au nombre total de contacts (les contacts sans frottement entre particules et parois ne sont pas pris en compte).

## 5.4.2 Régime de réarrangements

À la limite supérieure du déviateur supporté par la liste initiale des contacts,  $q > q_1$ , de nouveaux contacts sont nécessaires pour atteindre un nouvel état d'équilibre. Comme nous avons pu le voir sur la figure 5.2 (page 166), passé le premier régime de déformation strictement quasi-statique, la courbe contrainte-déformation met en évidence une succession d'états d'équilibre et de phases de réarrangement d'intensités variables. Bien que ce second régime présente certaines analogies avec les comportements observés en l'absence de frottement intergranulaire (fig. 4.2, page 125), les raisonnements mis en œuvre pour l'étude statistique des  $\delta\epsilon_y$  (cf. pages 133-146) ne sont pas envisageables. En effet, l'évolution constante de la dilataance et des variables internes comme les orientations de contacts (fig. 5.14)

ou de la densité avec l'augmentation de déviateur, interdit de raisonner sur des incréments de déformation successifs équidistribués.

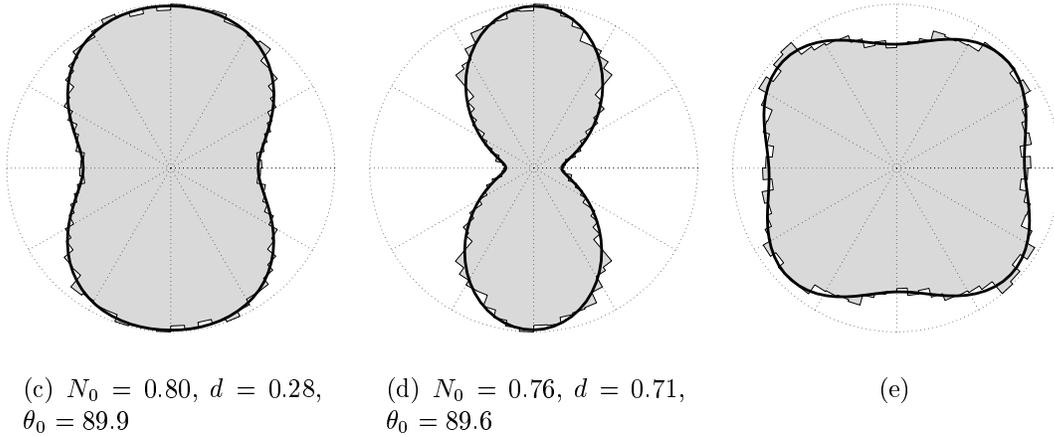
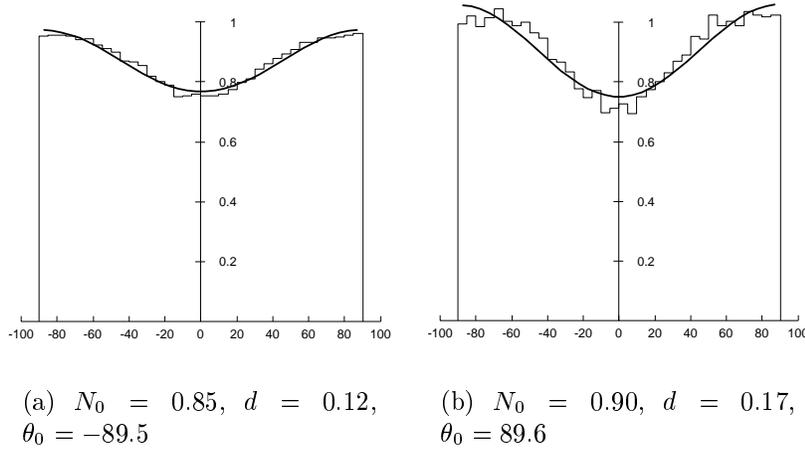


FIG. 5.14 – Évolution des orientations de contact  $N(\theta) = N^{final}(\theta)/N^{initial}(\theta)$  entre  $\epsilon_y = 0$  et  $\epsilon_y(q_1)$  pour (a),  $\epsilon_y(q_1)$  et  $\epsilon_y = 0.02$  pour (b),  $\epsilon_y = 0$  et  $\epsilon_y = 0.02$  pour (c), (d) et (e). Histogrammes calculés à partir de 10 assemblages à 3025 particules. Pour (a), (b), (c) et (d), les traits gras sont des approximations de Fourier du second ordre  $N(\theta) = N_0 \cdot (1 + d \cos 2(\theta - \theta_0))$ , Pour (e), l'approximation de Fourier est à l'ordre 4. (a), (b) et (c) sont des histogrammes sur tous les contacts. (d) est un histogramme calculé sur les contacts portant des forces supérieures à la moyenne «locale» (voir note de bas de page numéro 22, page 155) de toutes les forces. (e) est un histogramme calculé sur les contacts portant des forces inférieures à la moyenne «locale» de toutes les forces. Sur les figures (c), (d) et (e), les cercles en pointillés ont pour rayon 1.

Afin de se donner une idée du comportement macroscopique des assemblages frottants dans la limite de grands systèmes, on propose de calculer une courbe  $q - \epsilon_y$

moyenne sur la base des multiples simulations effectuées. On présente sur la figure 5.15 les courbes moyennes  $q - \epsilon_y$  et  $\epsilon_v - \epsilon_y$ , calculées à partir des résultats de simulation d'essais biaxiaux à chargement imposé<sup>19</sup>, obtenus sur 26 assemblages à 1024 particules, 10 assemblages à 3025 particules et 6 assemblages à 4900 particules.

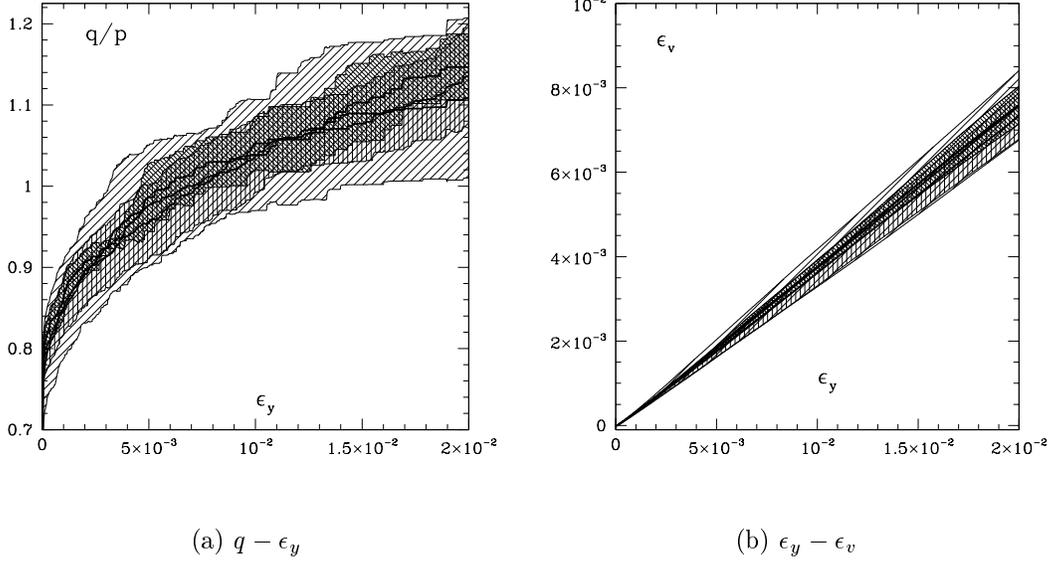


FIG. 5.15 – Courbes moyennes pour 3 tailles d'assemblages :  $N = 1024$ , 3025 et 4900.  $\tan \varphi = 0.25$  et  $k_n = 2k_t = 10^5 p$ , Dynamique Moléculaire. Les traits gras représentent les moyennes et les zones hachurées, les écarts types. Hachures obliques très écartées :  $N = 1024$ . Hachures verticales :  $N = 3025$ . Hachures obliques très resserrées :  $N = 4900$ .

Si l'on remarque d'une part que les courbes moyennes calculées sur les 3 tailles d'échantillons semblent dénuées d'effet d'échelle, on observe d'autre part que les écarts types (zones hachurées sur les figures), ici plus important que dans le régime strictement quasi-statique, diminuent lorsque la taille du système augmente. Des calculs complémentaires montrent que les écarts types  $\sigma_N(\epsilon_y)$  autour des courbes moyennes sont de la forme  $\sigma_N(\epsilon_y) \propto k(\epsilon_y) \cdot N^{-1/2}$ , où  $k(\epsilon_y)$  est une fonction de  $\epsilon_y$ , continûment croissante, indépendante de la taille  $N$  des assemblages. Ce résultat laisse à penser que l'idée d'un comportement limite déterministe lorsque la taille du système devient grande n'est pas incompatible avec la notion de trajectoires constituées d'alternances d'états d'équilibre et de phases de réarrangement.

À partir de plusieurs configurations d'équilibre internes au régime de réarrangements, il est possible d'évaluer des plages intermédiaires de déviateur supporté  $\delta q$

<sup>19</sup>. Dynamique Moléculaire.

à l'aide d'un calcul statique élasto-plastique. Les premiers résultats, obtenus sur des configurations à 1024 et 3025 particules, semblent indiquer que l'amplitude moyenne  $\langle \delta q \rangle$  diminue lorsque la taille du système augmente (pour un déviateur  $q$  donné). Au vue de ces nouvelles observations, dont l'étude statistique complète reste à entreprendre, nous serions tenté de d'énoncer que dans la limite des grands systèmes, la courbe  $q - \epsilon_y$  tend vers un courbe lisse, tant que la rupture macroscopique (ruine) du milieu granulaire n'est pas atteinte.

## Conclusion

Le comportement macroscopique des assemblages granulaires denses avec frottement solide, sous chargement biaxial et avant la ruine (comportement pré-pic), présente deux phases qui se distinguent par l'origine microscopique des déformations. Dans une certaine gamme de déviateur, un premier régime *strictement quasi-statique* est observé. Le comportement est indépendant du mode de sollicitation ( $\Delta q$  ou  $\dot{\epsilon}_y$  imposé), comme de la méthode de calcul mise en œuvre (*DM - CSEP*). Dénué de considérations d'ordre dynamique, le comportement est uniquement dicté par les lois de contact et la géométrie initiale des assemblages (liste des contacts sous confinement isotrope). Les déformations macroscopiques mesurées résultent exclusivement de la déformabilité des contacts intergranulaires. On trouve des lois constitutives incrémentales élasto-plastiques avec écrouissage (le domaine purement élastique étant inexistant,  $\langle q^{\text{él}} \rangle \rightarrow 0$  pour  $N \rightarrow \infty$ ), incréments de contrainte et de déformation se déterminant mutuellement pour un état de chargement donné (*CSEP*). Ce premier régime, caractérisé par une suite *continue* d'états d'équilibre, prend fin dès que la liste initiale des contacts ne suffit plus à supporter le déviateur imposé. On entre alors dans la seconde phase du comportement où les déformations ont pour origine les réarrangements intergranulaires. Les comportements macroscopiques alors observés mettent en évidence des alternances d'états d'équilibre et de phases de réarrangement. Même si les comportements simulés avec frottement sur des assemblages de taille finie montrent certaines analogies avec ceux observés en l'absence de frottement, le comportement semble déterministe et indépendant de la taille du système. Dans la limite des grands systèmes, la courbe de comportement semble tendre vers une courbe lisse constituée d'une infinité d'état d'équilibre et de réarrangements internes dont les amplitudes, dépendantes de paramètres microscopiques (anisotropie des orientations de contacts, distances entre grains voisins), augmentent au fur et à mesure que l'on approche le pic de rupture (ruine de l'assemblage).

# Conclusions et perspectives

Le travail de recherche exposé dans ce mémoire avait deux objectifs. Le premier était l'étude du comportement mécanique d'assemblages granulaires denses par l'exploration des origines microscopiques des déformations macroscopiques, en régime quasi-statique. Cette étude étant effectuée à l'aide de «l'outil» numérique, le second objectif était de quantifier l'influence des méthodes numériques classiques, fondées sur les équations de la dynamique, sur les comportements mécaniques observés, en les confrontant à de nouvelles approches «dédiées», mettant en œuvre un minimum de paramètres.

Nous avons évoqué différents résultats expérimentaux, qui posent question sur la validité de l'hypothèse de comportements quasi-statiques pour milieux granulaires modèles ou réels. Lors de la présentation des méthodes numériques «*Dynamique Moléculaire*» et «*Dynamique des Contacts*», nous avons émis quelques réserves quant à leurs capacités à appréhender les sources microscopiques des comportements macroscopiques en régime quasi-statique.

Dans un premier temps, nous avons présenté le modèle granulaire étudié, constitué de disques rigides (ou quasi-rigides), polydisperses. Le processus opératoire pour le compactage sous confinement isotrope, en l'absence de frottement intergranulaire, a été détaillé. Nous avons montré qu'il permettait d'obtenir des configurations répondant à des critères d'homogénéité stricts. La mise en œuvre de la *Dynamique des Contacts* puis de la *Dynamique Granulaire Lubrifiée* a alors permis d'identifier, avec une grande précision numérique, les listes de contacts équilibrant le chargement extérieur.

À l'équilibre, les assemblages granulaires sans frottement et sans cohésion, présentent des listes de contacts actifs, qui constituent des structures isostatiques. Étant donné une liste de contact et un chargement extérieur, cette propriété permet de déterminer les forces de contact et les vitesses des grains lorsque le chargement extérieur n'est plus supporté. L'exploitation de ces deux aspects a permis l'élaboration d'une nouvelle approche numérique uniquement fondée sur des aspects géométriques : la *Méthode Géométrique Quasi-Statique*.

Appliquée au cas de la compression biaxiale, la *MGQS* nous a permis de mettre en évidence les mécanismes *élémentaires* de passage d'un état d'équilibre à un autre

dans des assemblages soumis à des déviateurs graduellement variés. Une étude statistique, réalisée sur un grand nombre d'échantillons de différentes tailles, a permis de montrer que la courbe contrainte-déformation, dans la limite des grands systèmes, ne tend pas vers une loi déterministe (courbe lisse unique). Quel que soit le nombre de grains pris en compte, l'évolution de la déformation avec le déviateur présente toujours des *sauts* de toutes tailles, comme la trajectoire d'un processus de *Lévy* à accroissements positifs de paramètre  $\mu$ , voisin de  $1/2$ . En conséquence, bien que  $\epsilon_y$  soit typiquement d'ordre  $q^{1/\mu}$ , la déformation reste essentiellement imprévisible. Le comportement macroscopique n'est pas *quasi-statique*, au sens strict d'une suite *continue* d'états d'équilibre. La confrontation d'expériences numériques, effectuées à l'aide de deux méthodes mettant en œuvre chacune des dynamiques différentes (*MGQS-DM*), a permis de montrer que la statistique était indépendante des règles du mouvement. De fait, le comportement a été qualifié de *quasi-statique au sens large*. Les déformations macroscopiques ont pour origines essentielles les réarrangements entre les grains, même lorsque les particules ont des rigidités finies. Dans la limite des grands systèmes, toute variation de contrainte implique des réarrangements internes. Cette propriété est connue sous le nom de *fragilité*. La pérennité des différents aspects propres au comportement macroscopique des assemblages de grains rigides sans frottement et sans cohésion reste à vérifier dans le cas des particules déformables (grains élastiques aux rigidités faibles).

Bien que présentant certaines analogies avec les assemblages sans frottement, le comportement macroscopique des milieux granulaires frottants est différent. Des simulations numériques, effectuées à l'aide d'une méthode de *Calcul Statique Élasto-Plastique* et de la méthode *Dynamique Moléculaire* sur des assemblages initialement denses sous confinement isotrope, ont permis d'identifier deux régimes de comportement mécanique qui se distinguent par l'origine microscopique de la déformation. Un premier régime *strictement quasi-statique* est observé. Le comportement obtenu, inhérent aux modèles de lois de contact, est indépendant de la taille des systèmes et du mode de sollicitation (déviateur imposé ou vitesse de déformation imposée). La déformation est alors directement issue de la déformabilité des contacts intergranulaires. La limite de ce premier régime est identifiée dès que la liste initiale des contacts ne suffit plus pour équilibrer le déviateur imposé. Commence alors le second régime dans lequel la déformation macroscopique est d'origine géométrique (réarrangements entre les grains).

Les comportements mesurés sur des échantillons de taille finie présentent, dans le second régime de déformation, certaines analogies avec le cas sans frottement. Néanmoins, dans la limite des grands systèmes, on montre qu'il existe une loi  $q - \epsilon_y$  déterministe et sans effet d'échelle. À ce stade de l'étude, ce second régime ne peut pas encore être qualifié de *quasi-statique au sens large*.

La confrontation entre une méthode mettant en œuvre les équations de la dy-

namique (par exemple la *DM*) et une seconde approche qui marierait les principes de la *MGQS* et du *CSEP*, pourrait nous révéler si, comme nous le pensons, le comportement est indépendant de la dynamique utilisée pour déplacer les grains. Si tel était le cas, les comportements fortement «bruités» observés lors de simulations de test biaxiaux à vitesse imposée pourraient alors être *lissés* par la simple augmentation du nombre de degrés de liberté du problème traité. En effet, le niveau de «bruit» d'une courbe est directement lié à l'échelle des réarrangements par rapport à la taille des systèmes simulés.

Une approche géométrique, gérant le frottement intergranulaire et des conditions aux limites périodiques, nous permettrait alors, sur la base de configurations compactées avec frottement, d'envisager l'étude du comportement d'assemblages granulaires moyennement denses, sous chargement biaxial à déviateur contrôlé. De façon plus hypothétique, on observerait alors un premier régime pour lequel la déformation macroscopique serait liée à la déformabilité des grains et à l'enchevêtrement des particules voisines. Ce premier régime, dont l'appartenance au domaine *subcaractéristique* ne fait aucun doute, prendrait fin aux environs de l'état caractéristique. Le second régime présenterait alors les mêmes caractéristiques que celui observé sur nos assemblages denses (échantillons surconsolidés). Nous serions alors certainement en mesure de donner des éléments d'interprétations microscopiques aux comportements dépendant du temps physique observés par certains expérimentateurs.

Par ailleurs, l'étude des effets des cycles de chargement en fonction de la position de la contrainte moyenne par rapport à l'état caractéristique pourrait aussi être envisagé. L'origine microscopique de la dissipation reste à entreprendre à l'aide des méthodes dédiées aux milieux granulaires.



# Annexe A : Évaluation du «niveau de rigidité $2D$ » d'un assemblage de sphères $3D$

On se propose de définir, en analogie avec le cas bidimensionnel (chapitre 1, section 1.3, page 44), un niveau de rigidité  $\kappa$  (nombre sans dimension) pour un assemblage de sphères en  $3D$ .

Section 1.3,  $\kappa$  est évalué dans le cas d'assemblages de disques ( $2D$ ) dont les interactions sont modélisées par une loi élastique, linéairement dépendante de l'interpénétration  $h$  entre les grains (modèle rhéologique de *Kelvin-Voigt*, éq. 1.3, 37). Dans le cas d'assemblages de sphères, le problème est tridimensionnel et les interactions entre les grains sont modélisés par la loi (non linéaire) de *Hertz* (Johnson [49]).

Soit un ensemble de sphères monodisperses de diamètre  $2R$ , constituées d'un même matériau de module d'*Young* noté  $E$  et d'un coefficient de *Poisson* noté  $\nu$ . Soit  $h$  la déflexion normale au contact de deux sphères (rapprochement des centres, en deça de  $2R$ ). Suivant la loi de contact de *Hertz*, la force intergranulaire  $f$  a pour expression :

$$f = \frac{E\sqrt{2R}}{3(1-\nu^2)^2}h^{3/2} \quad (\text{A.1})$$

La rigidité normale  $k_n$ <sup>20</sup> équivalente est obtenue par :

$$k_n = \frac{df}{dh} = \frac{E\sqrt{2R}}{2(1-\nu^2)^2}h^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Avec l'équation (A.1), on déduit l'expression de  $h$ . De l'équation (A.2), il vient alors :

---

20. cf. équation (1.3), page 37.

$$k_n = \left[ \frac{3RE^2}{4(1-\nu^2)^2} \right]^{1/3} f^{1/3} \quad (\text{A.3})$$

La moyenne  $\langle f \rangle$  de toutes les forces de contact est obtenue à partir de l'expression proposée par Love [57]:

$$\langle f \rangle = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^{N_c} f_{\alpha}^i l_{\alpha}^j \quad (\text{A.4})$$

où

- $V$  est le volume de l'échantillon,
- $N_c$  est le nombre total de contacts,
- $f_{\alpha}^i$  est la coordonnée  $i$  ( $i = x_1, x_2, x_3$ ) de la force dans le contact  $\alpha$ ,
- $l_{\alpha}^j$  est la coordonnée  $j$  du vecteur de contact qui lie les centres des particules en contact.

De (A.4), on déduit l'expression de la pression isostrophe  $P_{3D}$ :

$$P_{3D} = \frac{n}{3} \times 2R \langle f \rangle \quad (\text{A.5})$$

où  $n$  est la densité de contact.

On note  $\phi_0$  la compacité d'un échantillon de sphères monodisperses.

$$\phi_0 = n_0 \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{A.6})$$

où  $n_0$  désigne la densité (numérique) de grains. Si  $z$  désigne le nombre de coordination et sachant que la densité de contact est  $n = n_0 z / 2$ , on en déduit alors:

$$n = \frac{3z}{8} \frac{\phi_0}{\pi R^3} \quad (\text{A.7})$$

En remplaçant l'expression de  $n$  dans (A.5), on obtient:

$$P_{3D} = \frac{z}{4} \frac{\phi_0}{\pi R^2} \langle f \rangle \quad (\text{A.8})$$

d'où

$$\langle f \rangle = \frac{4}{z} \frac{\pi R^2}{\phi_0} P_{3D} \quad (\text{A.9})$$

On se place dans le cas où chaque force de contact est égale à la moyenne de toutes les forces de contact,  $\langle f \rangle = f$ . À partir des relations (A.3) et (A.9), on a :

$$k_n = R \left[ \frac{3\pi}{z\phi_0(1-\nu^2)^2} \right]^{1/3} (E^2 P_{3D})^{1/3} \quad (\text{A.10})$$

Il s'agit maintenant de définir une équivalence entre une pression «vraie»  $P_{3D}$  et une pression bidimensionnelle  $P_{2D}$  qui s'exercerait sur une couche de grains d'épaisseur  $2R$ . On propose de définir la pression  $2D$  par la relation suivante :

$$P_{2D} = 2RP_{3D} \quad (\text{A.11})$$

Le *niveau de rigidité* bidimensionnel *équivalent*, pour un assemblage de sphères monodisperses, est alors :

$$\kappa = \frac{k_n}{P_{2D}} = \frac{k_n}{2RP_{3D}} = \left[ \frac{3}{8} \frac{\pi}{(1-\nu^2)^2 \phi_0 z} \right]^{1/3} \left( \frac{E}{P_{3D}} \right)^{2/3} \quad (\text{A.12})$$

Dans le cas d'un assemblage de sphères monodisperses dense, la compacité maximale est  $\phi_0 \simeq 0.64$ , et le nombre de coordination est  $z = 6$ . Pour  $\mu = 0.3$ , on obtient :

$$\kappa \simeq 0.72 \cdot \left( \frac{E}{P_{3D}} \right)^{2/3} \quad (\text{A.13})$$



# Références

- [1] M.P. Allen and D.J. Tildesley. *Computer simulation of liquids*. Oxford Science Publications, 1994.  
... pages : 35, 36
- [2] H. G. B. Allersma. Photoelastic stress analysis and strain in simple shear. In Vermeer and Luger [107], pages 345–353.  
... page : 25
- [3] E. Azanza. *Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, 1998.  
... page : 35
- [4] J.-P. Bardet and Q. Huang. Rotational stiffness of cylindrical particule contacts. In Thornton [100], pages 39–43.  
... page : 40
- [5] J.-P. Bardet and J. Proubet. Adaptative dynamic relaxation for statics of granular materials. *Computers & Structures*, 39(3/4):221–229, 1991.  
... pages : 44, 48
- [6] J.-P. Bardet and J. Proubet. A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media. *Géotechnique*, 41(4):599–613, 1991.  
... pages : 44, 48, 56
- [7] F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji. *Subrecoil laser cooling and Lévy statistics*. Cambridge University Press, 2001. (À paraître).  
... pages : 138, 140
- [8] Y.M. Bashir and J.D. Goddard. A novel simulation method for the quasi-static mechanics of granular assemblages. *Journal of Rheology*, 35:849–885, 1991.  
... page : 48
- [9] R. P. Behringer and J.T. Jenkins, editors. *Powders and Grains 97*, Rotterdam, 1997. A.A. Balkema.
- [10] J. Biarez et F. Ziani. Introduction aux lois de comportement des sables très peu denses. *Revue française de géotechnique*, 54:65–73, 1991.  
... pages : 128, 176

- [11] D. Bideau and A. Hansen, editors. *Disorder and Granular Media*. Elsevier, 1993.  
... page : 25
- [12] N. Bourada-Benyamina. *Étude du comportement des milieux granulaires par homogénéisation périodique*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée, 1999.  
... pages : 27, 162, 163
- [13] D. Caillerie. Évolution quasi-statique d'un milieu granulaire, loi incrémentale par homogénéisation. Dans *Des géomatériaux aux ouvrages, GEO'94, Aussois*, C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, et J.M. Reynouard, éditeurs, pages 53–80. Hermes, 1994.  
... page : 30
- [14] F. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 2:121–163, 1997.  
... pages : 25, 46, 52, 53, 77
- [15] F. Calvetti and Emeriault F. Interparticle forces distribution in granular materials: link with the macroscopic behaviour. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 4:247–279, 1999.  
... pages : 45, 146
- [16] B. Cambou. From global to local variables in granular materials. In Thornton [100], pages 73–86.  
... page : 30
- [17] B. Cambou, P. Dubujet, F. Emeriault, and F. Sidoroff. Homogenization for granular materials. *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 14(2):255–276, 1995.  
... page : 30
- [18] B. Cambou et M. Jean (sous la direction de). *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Science Publications, 2001. Liste des auteurs : D. Caillerie, B. Cambou, M. Jean, J. Lanier, et F. Radjaï. ISBN 2-7462-0229-8.  
... page : 30
- [19] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming, force chains, and fragile matter. *Physical review letters*, 81:1841–1844, 1998.  
... page : 160
- [20] B. Cazacliu et H. Di Benedetto. Nouvel essai sur cylindre creux de sable. *Revue française de génie civil*, 2(7):827–855, 1998.  
... pages : 33, 35
- [21] J. Christoffersen, M.M. Mehrabadi, and S. Nemat-Nasser. A micromechanical description of granular material behavior. *Journal of Applied Mechanics*, 48(2):339–344, 1981.  
... page : 73

- [22] G. Combe. *Étude micromécanique d'un assemblage de rouleaux*. Mémoire de DEA, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.  
... pages : 17, 46, 52, 53
- [23] G. Combe and J.-N. Roux. Microscopic origins of quasi-static deformation in dense granular assemblies. À paraître dans *Powders and Grains 2001*.  
... page : 163
- [24] G. Combe et J.-N. Roux. Trajectoires quasi-statiques d'assemblages granulaires denses. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires* [53], pages 157–162. Tome 1.  
... page : 163
- [25] J. Costet et G. Sanglerat. *Cours pratique de mécanique des sols - plasticité et calcul des tassements, Tome 1*. Dunod technique, Bordas, 1975.  
... pages : 51, 146
- [26] P. A. Cundall. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. In *Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics*, Vol. 1 Paper No II-8, Nancy, France, 1971.  
... pages : 25, 35
- [27] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65, 1979.  
... pages : 17, 25, 39, 163
- [28] P. Dantu. Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents. In *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tome I*, pages 144–148, London, 1957. Butterworth.  
... page : 25
- [29] P. Dantu. Étude expérimentale d'un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles. *Annales des Ponts et Chaussées*, IV:193–202, 1967.  
... page : 25
- [30] D. Daudon, J. Lanier, and M. Jean. A micro mechanical comparison between experimental results and numerical simulations of a biaxial test on 2D granular material. In Behringer and Jenkins [9], pages 219–222.  
... pages : 25, 45
- [31] H Di Benedetto and F. Tatsuoka. Small strain behaviour of geomaterials: modelling of strain rate effects. *Soils and Foundations*, 37(2):127–138, 1997.  
... pages : 17, 33-35
- [32] C. Di Prisco and S. Imposimato. Experimental analysis and theoretical interpretation of triaxial load controlled loose sand specimen collapses. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 2:93–120, 1997.  
... pages : 17, 32, 33, 35

- [33] S. Dippel. *Mikroskopische Dynamik granularer Medien - Microscopic dynamics of granular materials*. Thèse de Doctorat, Forschungszentrum Jülich, 1997.  
... page : 35
- [34] C. M. Dury, G. H. Ristow, J. L. Moss, and M. Nakagawa. Boundary effect on the angle of repose in rotating cylinders. *Physical Review E*, 57:4491–4497, 1998.  
... page : 38
- [35] École Nationale des Ponts et Chaussées. *Proceedings of the Saint-Venant Symposium on Multiple Scale Analysis and Coupled Physical Systems*, Paris, 1997. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [36] M. Elie. *Étude de la compression de billes de verre en grande déformation*. Mémoire de DEA, École doctorale de Paris, 1998.  
... pages : 17, 31, 32
- [37] P. Evesque, W. Meftah, et J. Biarez. Mise en évidence de variations brutales et d'évolutions quasi-discontinues dans les courbes contrainte-déformation d'un milieu granulaire bidimensionnel de rouleaux. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) (série II)*, 316:321–327, 1993.  
... pages : 25, 31
- [38] E. Flavigny, J. Desrues, et B. Palayer. Note technique: le sable d'Hostun RF. *Revue Française de Géotechnique*, 53:67–70, 1990.  
... page : 32
- [39] E. Flavigny et J. Lanier. Densification des sables: quelques remarques issues des essais de laboratoire. *Actes des Journées L. Ménard, CFMS, Paris*, pages 73–81, 1995.  
... pages : 18, 54, 55, 77
- [40] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989. 2nd edition.  
... pages : 93, 119
- [41] E. Guyon, S. Roux, A. Hansen, D. Bideau, J.-P. Trodec, and H. Crapo. Non-local and nonlinear problems in the mechanics of disordered systems: application to granular media and rigidity problems. *Reports on Progress in Physics*, 53:373–419, 1990.  
... pages : 26, 83, 90
- [42] H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, editors. *Physics of Dry Granular Media*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.  
... page : 25
- [43] K. Iwashita and M. Oda. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by dem. *ASCE: Journal of engineering mechanics*, 124(3):285–292, 1998.  
... page : 40

- [44] K. Iwashita and M. Oda. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Power Technology*, 109:192–205, 2000.  
... pages : 39, 40, 45
- [45] M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3–4):235–257, 1999.  
... pages : 26, 35, 171
- [46] M. Jean and J.-J. Moreau. Unilaterality and granular friction in the dynamics of rigid body collections. In A. Curnier, editor, *Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium*, Lausanne, 1992. Presses Polytechniques Universitaires Romandes.  
... pages : 26, 40, 41
- [47] H. A. Joer.  $1\gamma 2\epsilon$ , une nouvelle machine de cisaillement pour l'étude du comportement des milieux granulaires. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1991.  
... pages : 18, 25, 31, 46, 54, 55
- [48] H. A. Joer, J. Lanier, and M. Fahey. Deformation of granular materials due to rotation of principal axes. *Géotechnique*, 48(5):605–619, 1996.  
... pages : 25, 31, 46, 54, 77
- [49] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.  
... page : 187
- [50] M.-S. Kim. *Étude expérimentale du comportement mécanique des matériaux granulaires sous fortes contraintes*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris, 1995.  
... pages : 17, 31, 32, 46, 58
- [51] J. Konicki, M. Oda, and S. Nemat-Naser. Inherent anisotropy and shear strength of assembly of oval cross sectional rods. In Vermeer and Luger [107], pages 403–412.  
... page : 25
- [52] M. R. Kuhn. Structured deformation in granular materials. *Mechanics of materials*, 31:407–429, 1999.  
... page : 104
- [53] Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 2000.
- [54] J. Lanier and G. Combe. An experimental study of deformation in 2D granular media. In E. Dembicki, J.-L. Auriault, and Z. Sikora, editors, *International Workshop on Homogenization, Theory of Migration and Granular Bodies*, pages 143–149, 1995.  
... page : 46
- [55] J. Lanier and M. Jean. Experiments and numerical simulations with 2D-disks assembly. *Powder technology (special issue on «Numerical simulations*

- of discrete particle systems»), 109(1–3):206–221, 2000.  
... pages : 45, 172, 173, 178
- [56] J. Lee. Heap formation in granular media. *Journal of Physics A*, 27:257–262, 1994.  
... page : 39
- [57] Augustus E.H. Love. *A treatise of the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, 4th ed., 1944.  
... pages : 73, 188
- [58] S. Luding. Stress distribution in static two dimensional granular model media in the absence of friction. *Physical Review E*, 55:4720–4729, 1997.  
... pages : 35, 36, 65
- [59] S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, and J. Duran. Interaction laws and the detachment effect in granular media. *Materials research society, Symposium Proceeding, Pittsburgh, Pennsylvania*, 367:495, 1995.  
... page : 37
- [60] M.P. Luong. État caractéristique du sol. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences*, 287B:305–307, 1978.  
... pages : 146, 178
- [61] M.P. Luong. Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents. *Revue Française de Géotechnique*, 10:39–53, 1980.  
... page : 178
- [62] M.P. Luong. Dissipation intrinsèque d’un matériau sableux. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires* [53], pages 127–132. Tome 1.  
... page : 179
- [63] A.-R. Mahboubi-Ardakani. *Contribution à l’étude micromécanique du comportement des matériaux granulaires par homogénéisation et approche numérique*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, Ecully, 1995.  
... pages : 45, 56
- [64] H.A. Makse, D.L. Johnson, and L.M. Schwartz. Packing of compressible granular materials. *Physical Review Letters*, 84(18):4160–4163, 2000.  
... pages : 65, 69
- [65] M. Masson et J. Martinez. Analyse microstructurelle du cisaillement d’un matériau granulaire bidimensionnel. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires* [53], pages 193–198. Tome 1.  
... pages : 45, 46
- [66] M. Matsushita, F. Tatsuoka, J. Koseki, B. Cazacliu, H. Di Benedetto, and S. J. M. Yasin. Time effects on the pre-peak deformation properties of sands. In Lo Presti Jamiolkowski, Lancellotta, editor, *Pre-failure deformation characteristics of geomaterials, Torino*, pages 681–689, Rotterdam, 1999. A.A. Balkema.  
... pages : 32, 34

- [67] J.-J. Moreau. Réponse d'une couche granulaire à une action locale. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires* [53], pages 199–204. Tome 1.  
... pages : 18, 52, 53
- [68] C. F. Moukarzel. Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials. *Physical review letters*, 81(8):1634–1637, 1998.  
... pages : 26, 50, 83, 90, 105, 106
- [69] C. F. Moukarzel. Granular matter instability: A structural rigidity point of view. In M. F. Thorpe and P. M. Duxbury, editors, *Rigidity Theory and Applications*, Fundamental Material Science, 1999. Kluwer Academic/Plenum Publishers, ISBN: 0-306-46115-3.  
... pages : 90, 105, 106
- [70] D.M. Mueth, H.M. Jaeger, and S.R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Physical Review E*, 57(3):3164–3169, 1998.  
... page : 65
- [71] S. T. Nase, W. L. Vargas, A. A. Abatan, and J. J. McCarty. Discrete characterization tools for cohesive granular material. *Powder Technology*, 116:214–223, 2001.  
... page : 40
- [72] Q. S. Nguyen. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(5):817–832, 1977.  
... page : 163
- [73] M. Oda and K. Iwashita, editors. *Mechanics of granular materials, an introduction*. A.A. Balkema, 1999. ISBN 90-5410-461-9.  
... page : 25
- [74] M. Oda and K. Iwashita. Study on couple stress and shear band development in granular media based on numerical simulation analyses. *International journal of engineering science*, 38:1713–1740, 2000.  
... pages : 40, 146
- [75] M. Oda and H. Kazama. Microstructure of shear bands and its relation to the mechanisms of dilatancy and failure of dense granular soils. *Géotechnique*, 48(4):465–481, 1998.  
... page : 40
- [76] L. Oger, S.B. Savage, D. Corriveau, and M. Sayed. Yield and deformation of an assembly of disks subjected to a deviatoric stress loading. *Mechanics of Materials*, 27:189–210, 1998.  
... pages : 35-37, 39, 56
- [77] S. Ouaguenouni. *Comportement mécanique d'un modèle de matériau granulaire sans frottement*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1997.  
... pages : 48, 65, 66, 70, 90

- [78] S. Ouaguenouni and J.-N. Roux. Compaction of well-coordinated lubricated granular pilings. *Europhysics Letters*, 32:449–453, 1995.  
... pages : 26, 48, 83
- [79] S. Ouaguenouni and J.-N. Roux. Arching without friction : a simple model. In D.E. Wolf and P. Grassberger, editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 188–191, Singapore, 1997. World Scientific.  
... pages : 48, 90
- [80] S. Ouaguenouni and J.-N. Roux. Force distribution in frictionless granular packings at rigidity threshold. *Europhysics Letters*, 39:117–122, 1997.  
... pages : 48, 65, 66, 90
- [81] C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, et J.M. Reynouard, éditeurs. *Des géomatériaux aux ouvrages, expérimentation et modélisation, GEO'95, Aussois*. Hermes, 1995.  
... page : 25
- [82] O. Pitois, P. Moucheron, C. Weill, and J.-N. Roux. Compaction of a granular packing with a lubricant. In Behringer and Jenkins [9], pages 37–40.  
... page : 48
- [83] I. Preechawuttipong, R. Peyroux, et F. Radjai. Étude numérique de l'influence de la cohésion sur la texture des milieux granulaires. Dans *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires* [53], pages 273–278. Tome 2.  
... page : 40
- [84] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. Second Edition*, chapter 14.3 : Are two Distributions Different? (Kolmogorov-Smirnov Test), pages 614–622. Cambridge University Press, 1992. Ouvrage en ligne, <http://www.nr.com>.  
... pages : 15, 68, 131
- [85] F. Radjai. *Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systèmes granulaires*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Orsay, 1995.  
... pages : 35, 65, 66, 70, 72
- [86] F. Radjai. Multicontact dynamics of granular systems. *Computer Physics Communications*, 121–122:294–298, 1999.  
... page : 80
- [87] F. Radjai, M. Jean, J.-J Moreau, and S. Roux. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Physical review letters*, 27(2):274–277, 1996.  
... pages : 65, 66, 71, 72
- [88] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Physical review letters*, 80:61–64, 1998.  
... page : 76

- [89] F. Radjai, D.E. Wolf, S. Roux, M. Jean, and J.-J. Moreau. Force networks in dense granular media. In Behringer and Jenkins [9], pages 211–214.  
... pages : 65, 66, 71, 72
- [90] D.C. Rapaport. *The Art of Molecular Dynamics simulation*. Cambridge university press, 1998. ISBN 0-521-44561-2.  
... page : 35
- [91] G. H. Ristow. Critical exponents for granular phase transitions. *Europhysics Letters*, 40(6):625–630, 1997.  
... page : 38
- [92] J.-N. Roux. Contact disorder and force distribution in granular materials. In *Proceedings of the Saint-Venant Symposium on Multiple Scale Analysis and Coupled Physical Systems* [35], pages 577–584.  
... pages : 65, 148
- [93] J.-N. Roux. Contact disorder and non-linear elasticity of granular packings: a simple model. In Behringer and Jenkins [9], pages 215–218.  
... page : 160
- [94] J.-N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Physical Review E*, 61(6):6802–6836, 2000.  
... pages : 26, 49, 62, 83, 90, 106, 112, 160
- [95] K. Sab. Une nouvelle approche de l’homogénéisation des milieux granulaires. In *Proceedings of the Saint-Venant Symposium on Multiple Scale Analysis and Coupled Physical Systems* [35], pages 597–603.  
... page : 30
- [96] S. Schäfer, S. Dippel, and D. E. Wolf. Forces schemes in simulations of granular materials. *Journal de physique I*, 6(1):5–20, 1996.  
... pages : 35-37, 40
- [97] F. Schlosser. Influence des déformations des grains dans les milieux granulaires. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 69:97–103, 1974.  
... page : 173
- [98] G. Schneebeli. Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 243(1):125–126, 1956. Archives de l’académie des sciences, Paris.  
... pages : 25, 30
- [99] T. G. Sitharam. Micromechanical modeling of granular materials: effect of confining pressure on mechanical behavior. *Mechanics of materials*, 31:653–665, 1999.  
... pages : 45, 58
- [100] C. Thornton, editor. *Powders and Grains 93*, Rotterdam, 1993. A.A. Balkema.

- [101] C. Thornton. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. *Géotechnique*, 50(1):43–53, 2000.  
... pages : 56, 146
- [102] C. Thornton and S. J. Antony. Quasi-static shear deformation of a soft particles system. *Powder technology*, 109:179–191, 2000.  
... pages : 45, 56, 146
- [103] C. Thornton and J. Lanier. Uniaxial compression of granular media: Numerical simulations and physical experiment. In Behringer and Jenkins [9], pages 223–226.  
... page : 45
- [104] C. Thornton and G. Sun. Axisymmetric compression of 3d polydisperse systems of spheres. In Thornton [100], pages 129–134.  
... page : 46
- [105] A.V. Tkachenko and T.A. Witten. Stress propagation through frictionless granular material. *Physical Review E*, 60(1):687–696, 1999.  
... pages : 50, 90
- [106] A.V. Tkachenko and T.A. Witten. Stress in frictionless granular material: adaptive network simulations. *Physical Review E*, 62(2):2510–2516, 2000.  
... pages : 26, 90
- [107] P.A. Vermeer and H.J. Luger, editors. *Proc. IUTAM conf. on Deformation and failure of granular materials*, Delft, 1982. A.A. Balkema.
- [108] O. R. Walton and Braun R. L. Viscosity, granular temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks. *Journal of Rheology*, 30(5):949–980, 1986.  
... pages : 17, 37, 38
- [109] J. R. Williams and N. Rege. Coherent vortex structures in deforming granular materials. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 2(3):223–236, 1997.  
... pages : 45, 104
- [110] J. R. Williams and N. Rege. The development of circulation cell structures in granular materials undergoing compression. *Powder Technology*, 90:187–194, 1997.  
... page : 45
- [111] X. Zhuang, A. K. Didwania, and J. D. Goddard. Simulation of the quasi-static mechanics and scalar transport properties of ideal granular assemblages. *Journal of Computational Physics*, 121:331–346, 1995.  
... page : 48

# Thèse de doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

*Titre de l'ouvrage :*

**Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses : étude par simulations numériques**

*Nom de l'auteur :* Gaël COMBE

## RÉSUMÉ

Nombre de travaux de recherche actuels visent à élucider les origines microscopiques du comportement mécanique macroscopique des matériaux granulaires au moyen de la simulation numérique discrète. La présente thèse s'inscrit dans ce mouvement, qui associe mécaniciens des sols et physiciens de la matière condensée. Nous étudions le comportement mécanique de matériaux modèles, assemblages de disques rigides ou quasi-rigides, sous chargement biaxial. Les matériaux granulaires proches de l'équilibre sont généralement assimilés à des solides. Ils sont traditionnellement modélisés par les lois élasto-plastiques de la mécanique des sols. Ces dernières sont indépendantes du temps physique et traduisent une description quasi-statique du mouvement. Une telle description n'émerge pas facilement des approches numériques discrètes fondées sur des modèles dynamiques. C'est pourquoi nous avons mis au point deux nouvelles approches numériques, la méthode numérique quasi-statique (dédiée aux disques non frottants) et une méthode de calcul statique élasto-plastique (pour les réseaux de contacts frottants). Ces démarches, comparées à la dynamique moléculaire, permettent la détermination précise des états d'équilibre successifs d'assemblages granulaires sous chargement variable. On peut ainsi donner un sens microscopique aux descriptions quasi-statiques, évaluer l'influence des paramètres dynamiques sur le comportement simulé et identifier les mécanismes élémentaires responsables de la déformation macroscopique.

## MOTS CLÉS

Quasi-statique, élasto-plastique, isostaticité, biaxial, comportement macroscopique, réarrangement, processus de Lévy, milieux granulaires, simulation numérique

*Title :*

**A numerical study of the geometric origins of the quasi-static behaviour of granular materials**

*Author :* Gaël COMBE

## SUMMARY

Understanding the microscopic origins of the macroscopic mechanical behaviour of granular materials, either in static or quasi-static mode, is currently an important research topic in soil mechanics and condensed matter physics. The numerical simulation is an essential tool in the study of granular media behaviour because it can provide important information at a granular scale, on the mechanisms of strain and stress. In this thesis, we study the mechanical behaviour of model granular media, rigid or quasi-rigid discs, under biaxial loading. When granular materials are at equilibrium, they can be regarded as solids. They are traditionally modelised by soil mechanics elastoplastic laws, which are independent of physical time and correspond to a quasi-static description of the motion. Such descriptions do not easily emerge from discrete simulations, which are usually based on dynamic equations. Consequently, we propose two new numerical approaches: the geometric quasi-static method (frictionless grains) and a static elastoplastic calculation method (discs with friction). Without inertia and dissipation descriptions (other than friction), these two methods, compared with the molecular dynamics method, allow a very precise determination of sequences of equilibrium states. In that way, we provide a macroscopic sense of quasi-static descriptions, quantify the influence of dynamic models on numerical results and identify the elementary mechanisms at the origin of macroscopic deformation.

## KEYWORDS

Quasi-static, elastoplastic, isostatic, biaxial, macroscopic behaviour, rearrangement, Lévy process, granular materials, numerical simulation

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58 boulevard Lefèbvre, 75732 Paris Cedex 15  
École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes -  
Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée