



**HAL**  
open science

# Etude théorique et simulation numérique d'une décharge électrostatique dans le vide

François Séverin

► **To cite this version:**

François Séverin. Etude théorique et simulation numérique d'une décharge électrostatique dans le vide. Mathématiques [math]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998. Français. NNT : . tel-00005621

**HAL Id: tel-00005621**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005621>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées

## ETUDE THEORIQUE ET SIMULATION NUMERIQUE D'UNE DECHARGE ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

par François SEVERIN

Soutenue le 27 octobre 1998 devant le jury composé de :

Mme	Anne NOURI	Directrice
Mme	Brigitte LUCQUIN	Rapporteurs
Mr	Mickaël BALABANE	
Mr	Jean-Pierre MARQUE	
Mr	Armel de la BOURDONNAYE	Membres invités
Mr	Denis POGARIELOFF	
Mr	Guy LAVAL	



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
	<b>Chapitre 1. Présentation générale</b>	<b>7</b>
	<b>Chapitre 2. Le modèle</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Rappel sur le système d'Euler . . . . .	15
2.2.1	Hyperbolicité . . . . .	16
2.2.2	Le système d'Euler <i>isotherme</i> . . . . .	17
2.3	Présentation des équations . . . . .	17
2.3.1	Particules chargées . . . . .	18
2.3.2	Particules neutres . . . . .	19
2.4	Conditions aux limites . . . . .	20
2.4.1	Pour les particules chargées . . . . .	20
2.4.2	Pour les molécules neutres . . . . .	20
2.5	Le potentiel électrostatique . . . . .	20
2.6	Un premier modèle . . . . .	21
2.7	Un deuxième modèle . . . . .	22
2.8	Conclusion . . . . .	23
<b>II</b>	<b>Partie Théorique</b>	<b>25</b>
	<b>Chapitre 1. Introduction</b>	<b>27</b>
1.1	Introduction . . . . .	28
	<b>Chapitre 2. Charged particles</b>	<b>33</b>
2.1	Electrons . . . . .	34
2.2	Ions . . . . .	37
2.3	Poisson's equation, Sobolev inequality . . . . .	38
2.4	Drift-Diffusion-Poisson . . . . .	38

2.4.1	Introduction . . . . .	38
2.4.2	Existence and uniqueness . . . . .	39
2.4.3	Remark . . . . .	47
<b>Chapitre 3. The Euler system</b>		<b>51</b>
3.1	The Euler system . . . . .	52
3.1.1	Position of the problem . . . . .	52
3.1.2	The method . . . . .	53
3.2	The Cauchy problem . . . . .	54
3.2.1	A linear system . . . . .	54
3.2.2	The Quasilinear system . . . . .	56
3.2.3	Theorem . . . . .	58
3.2.4	Maximum domain of determination . . . . .	60
3.2.5	Definitions . . . . .	62
3.3	The boundary problem for the Euler system . . . . .	64
3.3.1	A new system . . . . .	66
3.3.2	A few definitions about the boundary problem . . . . .	71
3.3.3	Existence and uniqueness of the solution . . . . .	72
3.3.4	Order of magnitude of the time of existence and uniqueness of a solution. . . . .	74
3.4	The initial boundary value problem . . . . .	74
<b>Chapitre 4. The whole problem</b>		<b>79</b>
4.1	Introduction . . . . .	80
4.2	Continuity of the map $\mathcal{T}_1$ . . . . .	83
4.2.1	Regularity . . . . .	84
4.2.2	Continuity . . . . .	107
4.3	Continuity of the map $T_2$ . . . . .	122
4.3.1	The Cauchy problem . . . . .	123
4.3.2	The boundary value problem . . . . .	123
4.4	Uniqueness . . . . .	129
4.4.1	Estimations . . . . .	130
4.4.2	Conclusion . . . . .	141
<b>III Partie numérique</b>		<b>143</b>
<b>Chapitre 1. Approximation Numérique</b>		<b>145</b>
1.1	Introduction . . . . .	146
1.2	Equations de Dérive-Diffusion . . . . .	147

1.2.1	Discrétisation du courant . . . . .	148
1.2.2	Discrétisation des équations de Dérive-Diffusion . . . . .	149
1.2.3	Conditions aux limites . . . . .	149
1.2.4	Stabilité . . . . .	151
1.2.5	Une condition CFL . . . . .	155
1.3	Le système d'Euler . . . . .	156
1.3.1	Calcul des flux . . . . .	157
1.3.2	Conditions aux limites . . . . .	160
1.3.3	Désorption . . . . .	161
1.3.4	Intégration en temps . . . . .	162
1.4	Eléments finis . . . . .	162
1.4.1	Cas homogène . . . . .	162
1.4.2	Cas non-homogène . . . . .	167
1.4.3	Algorithme . . . . .	167
<b>Chapitre 2. Résultats Numériques</b>		<b>169</b>
2.1	Introduction . . . . .	170
2.1.1	Le plasma initial . . . . .	170
2.1.2	La géométrie . . . . .	171
2.1.3	Présentation des simulations . . . . .	172
2.2	Simulation témoin . . . . .	174
2.3	Influence du processus d'ionisation . . . . .	180
2.4	Influence du potentiel $V_0$ . . . . .	183
2.5	Influence de la charge . . . . .	187
2.5.1	Cas d'une charge faible . . . . .	187
2.5.2	Cas d'une charge discontinue . . . . .	188
2.6	Conclusion . . . . .	191
<b>IV Conclusion générale</b>		<b>193</b>
<b>Conclusion</b>		<b>197</b>
<b>V Annexes</b>		<b>203</b>
<b>Annexe A. Le nombre minimal caractéristique</b>		<b>205</b>
<b>Annexe B. La fonction d'ionisation</b>		<b>207</b>

<b>Annexe C. Les espaces <math>H^{r,s}</math></b>	<b>209</b>
C.1 Definitions and properties . . . . .	209
C.2 A few theorems about the heat equation . . . . .	211
<b>Annexe D. Quelques théorèmes</b>	<b>213</b>

# Première partie

## Introduction





---

# Chapitre 1

## Présentation générale

L'homme envoie des satellites et des sondes dans l'espace depuis une quarantaine d'années. Ces vingt dernières années, plusieurs anomalies ont été repérées. On peut citer le cas de *Viking Lander 1* en 1975 où le chromatographe a perdu en précision, perte due à la présence de charges. Plus récemment on peut aussi citer le cas d' *Intelsat 511* lancé en 1985 et qui présentait en 1993 des anomalies de contrôle imputables là aussi à la présence de charges. Pour avoir une liste plus complète on peut se référer à l'enquête menée par la NASA ([1] et [2]).

De manière générale les effets de la charge peuvent nuire gravement aux systèmes électroniques embarqués. S'assurer que ces systèmes sont protégés est une condition nécessaire pour la réussite des missions et nécessite la compréhension de ces phénomènes de décharges.

C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse. Nous nous intéressons aux décharges électriques qui peuvent se produire sur un satellite en orbite géostationnaire. A 36.000 km de la Terre, le satellite n'est environné que d'une atmosphère ténue liée à la contamination et au dégazage. Le développement de décharges résultera essentiellement des processus d'interaction de surface entre les matériaux et les particules chargées incidentes (implantation et émission secondaire, désorption stimulée).

La seule contrainte que le satellite subit est celle du Soleil. Elle se manifeste sous la forme d'un vent solaire et du rayonnement solaire. Ce vent est constitué entre autres d'électrons très énergétiques. Pour veiller à l'isolement thermique, un revêtement de diélectrique est déposé sur sa surface.

Le satellite apparaît comme une structure avec des matériaux aux propriétés électriques différentes. Sous l'effet du bombardement du fluide de particules énergétiques, ils vont présenter des potentiels différents. Le modèle que nous avons étudié a été proposé par J.P. Marque [32, 33]. Il décrit le développement d'une décharge de surface se propageant à la surface d'un diélectrique chargé par un flux d'électrons énergétiques. La décharge est initiée à une jonction métal-diélectrique lorsque le champ électrique atteint une valeur seuil puis se propage en émettant vers le vide un flux d'électrons. Cette émission électronique (phénomène de blowoff) est caractéristique de ce type de décharge diélectrique et constitue une source de champ électromagnétique perturbateur. Nous nous intéressons au mécanisme de propagation qui est schématisé sur la figure 1.1. La décharge, supposée ici se propager de façon stationnaire, est un canal de plasma qui se détend dans le vide émettant des électrons et des ions. Alors que les premiers sont repoussés par le potentiel répulsif du matériau, les ions, au contraire, bombardent le diélectrique créant, par désorption stimulée, un flux de neutres. L'ionisation de ce gaz si elle est susceptible de conduire à un plasma de même caractéristique que le plasma initial permet l'avancée du canal de décharge. Ce sont les conditions de reproduction de ce canal selon ce mécanisme que nous voulons analyser.

Pour modéliser les décharges, deux approches sont généralement utilisées:

- la méthode cinétique

Le système est décrit par la fonction de distribution qui satisfait l'équation de Vlasov (voir par exemple C. Cercignani [6]). Théoriquement, cette équation soulève de nombreux problèmes et a été beaucoup étudiée. Numériquement, la méthode la plus employée est la méthode PIC. Cette approche fournit une description très précise des phénomènes mis en jeu (voir Birdsall [4]). Elle est souvent utilisée pour l'étude des plasmas sans collisions, des plasmas faiblement ionisés. Elle est cependant très coûteuse.

- la méthode fluide

On préférera la méthode fluide à la méthode précédente lorsque les collisions (en particulier les échanges de chaleur) sont importantes (voir J.P. Boeuf [3]). Le fluide est alors décrit par sa densité, sa quantité de mouvement et son énergie, chaque quantité étant régie par une équation. Pour fermer ce système d'équations, il est nécessaire de se donner une loi d'état du fluide.

De nombreux systèmes d'équations fluides peuvent être obtenus à partir de l'équation de Boltzmann, voir par exemple C. Cercignani [6], P. Degond et B.Lucquin [10] ou B.Lucquin [11]. On peut introduire le nombre de Knudsen  $Kn$  qui est le rapport entre le libre parcours moyen  $\lambda$  et la longueur typique de

l'observation  $L: Kn := \frac{\lambda}{L}$ . On adimensionne alors l'équation de Boltzmann. En supposant que la fonction de distribution  $f$  est une maxwellienne, on obtient une relation qui relie la pression à la densité et à la température. En faisant tendre  $Kn$  vers zero et en se donnant une loi d'état, on obtient le système d'Euler (voir F. Golse [8]). Ainsi lorsque les collisions sont importantes, c'est à dire en dehors de la couche de Knudsen, un traitement fluide est légitime. Dans cette couche, il faudrait faire une étude cinétique, mais sous une condition de désorption intense, on peut la négliger, et c'est ce que nous faisons ici.

On peut aussi traiter une partie du domaine par une méthode cinétique et une autre par une méthode fluide (cf Zaharaoui [5]), mais l'étude mathématique de l'interface n'est pas toujours évidente à réaliser (cf F.Golse [7]).

Les paramètres et phénomènes importants sont:

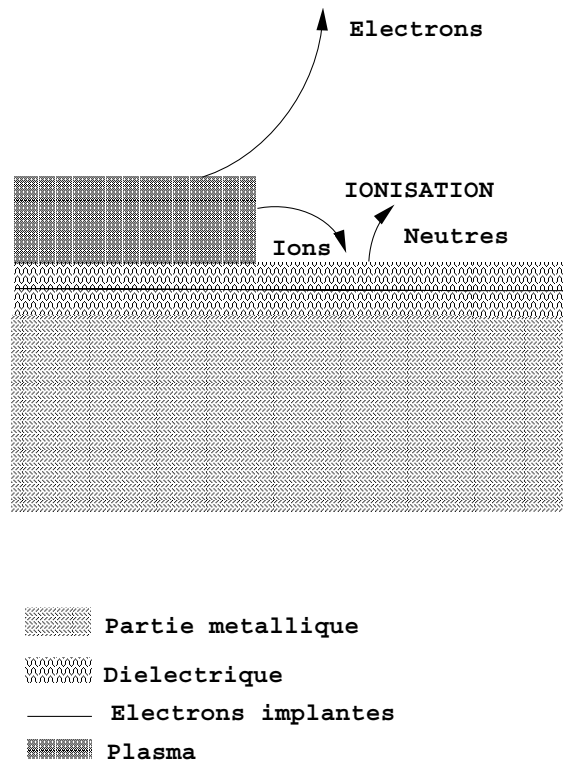
- la densité de charge électronique implantée,
- le potentiel de l'armature métallique,
- la désorption,
- et l'ionisation.

Les grandeurs caractéristiques du plasma et de la décharge sont:

- la densité des particules chargées et neutres,
- le potentiel électrique,
- la vitesse de la décharge,
- et les courants électroniques de blowoff et de flashover.

Ces courants correspondent respectivement aux électrons éjectés loin du panneau solaire et à ceux qui remontent le canal de décharge. Ces courants sont importants de deux points de vue. Tout d'abord, ce sont eux qui sont responsables de la détérioration du satellite. En effet, la trajectoire des électrons du blowoff peut être recourbée par un champ magnétique et des électrons énergétiques peuvent heurter le satellite. Les électrons du flashover sont responsables de la dégradation des parties électroniques. Ensuite, l'ONERA dispose de moyens pour faire des expériences sous vide et mesurer ces courants.

Nous n'étudierons ni la formation du plasma initial, ni l'avenir des électrons éjectés. L'objet de cette thèse est l'étude de la propagation de l'ionisation. On veut savoir sous quelles conditions elle se produit, combien de temps elle dure, quelle est sa vitesse, quels sont les courants qu'elle engendre?

FIG. 1.1 – *Principe de la décharge*

Le plan de la thèse est le suivant:

- Dans la première partie, nous présentons les équations qui nous serviront à modéliser la décharge.

Nous aurons un modèle fluide sur tout le domaine.

Pour chaque type de particules, les molécules neutres, les électrons et les ions nous verrons quel type d'approximation nous pouvons faire. Deux modèles seront alors proposés.

Dans le premier modèle nous nous placerons dans l'hypothèse isotherme pour les trois types de particules. Les molécules neutres seront alors régies par le système d'Euler isotherme, système qui gouverne la densité volumique et le moment. Les particules chargées seront régies par les équation de Dérive-Diffusion. Ce modèle servira à une étude théorique.

Dans le second modèle, nous utiliserons le système d'Euler complet pour les molécules neutres (c'est-à-dire que nous nous intéresserons à l'évolution de la densité volumique, du moment et de l'énergie). Nous garderons les équations de Dérive-Diffusion pour les particules chargées. Ce modèle servira à la simulation numérique.

Dans chaque cas, le champ électrique dérivera du potentiel électrostatique engendré par la différence de charge.

- Dans la deuxième partie, en utilisant une méthode de point fixe, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème 'théorique'. Nous remarquerons que le système d'Euler isotherme est un système hyperbolique. De nombreux auteurs ont étudié de tels systèmes pour le problème de Cauchy dans tout l'espace (voir Majda [12]). Lorsqu'on considère un domaine borné, il faut non seulement se donner une donnée de Cauchy, mais aussi des conditions aux limites qui peuvent dépendre de la solution du problème. Jusqu'à présent, il n'a été démontré que l'existence et l'unicité de solutions régulières,  $C^1$  et locales en temps (voir Li Ta-tsien et Yu Wen-ci [24] et M. Gisclon [9] pour l'étude des conditions aux limites des systèmes hyperboliques). Nous avons choisi de reprendre les idées de Li Ta-tsien et Yu Wen-ci.

Le système qui gouverne l'évolution des molécules neutres est un système strictement hyperbolique avec une condition initiale et une condition aux limites. Le couplage avec les particules chargées se fait à ce niveau. Ce couplage, qui modélise le phénomène de désorption demande une certaine régularité sur la solution du problème de Dérive-Diffusion couplé avec l'équation de Poisson.

Tout d'abord nous considérons le problème de Cauchy. Par une méthode des caractéristiques, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution dans le cône de dépendance. Puis en reprenant les idées de Li Ta-tsien et Yu Wen-ci, nous étendons la solution au cône de dépendance maximal, pour des temps

petits. En dehors de ce domaine, nous avons à considérer un problème aux limites. Toujours par une méthode des caractéristiques, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution. Nous obtenons ainsi une solution dans tout le domaine.

Pour les équations de Dérive-Diffusion et de Poisson, le cadre fonctionnel est, *a priori*, les espaces de type  $L^2(0,T;H^r(\Omega))$ . Mais il s'avère que ces espaces ne donnent pas assez de régularité sur la solution dans le cadre d'un problème aux limites. C'est pourquoi, nous utilisons les espaces non-homogènes de Lions-Magenes du type  $H^{r,s}(0,T;\Omega)$  (voir [28]). Nous montrons tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution dans certains espaces  $L^2(0,T;H^r(\Omega))$ , puis par une méthode de bootstrap nous gagnons la régularité nécessaire.

Pour finir, par une méthode de point fixe, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution pour le problème global.

- Enfin, nous présentons la méthode de résolution numérique ainsi que les résultats numériques. Nous utilisons une méthode de différences finies pour les ions et les électrons, une méthode de volumes finis pour les neutres et une méthode d'éléments finis pour le potentiel électrostatique. Nous mettons en évidence l'influence des divers mécanismes et paramètres.

# Chapitre 2

## Le modèle

### 2.1 Introduction

La modélisation de l'avancée de la décharge se fait à l'aide de trois espèces de particules:

- les molécules neutres,
- les électrons,
- les ions chargés positivement.

Pour les particules chargées, nous partons de la théorie cinétique (voir [14]). Chaque population  $\alpha = i, e$  est décrite par sa fonction de distribution  $f_\alpha = f_\alpha(t, x, p)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$  dans l'espace des phases position-impulsion  $(x, p)$ . Chaque fonction  $f_\alpha$  est solution de l'équation de Vlasov 'collisionnelle' de la forme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \cdot \nabla_x f_\alpha + \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_p f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{coll}, \quad (2.1)$$

où  $v_\alpha$  est la vitesse de la particule  $\alpha = e, i$  et  $\mathbf{F}_\alpha$  est le champ de force agissant sur la population. Enfin  $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{coll}$  est le terme de collisions. La force que nous considérons est la force électrostatique

$$F_\alpha = q_\alpha E,$$

où  $E = E(t, x)$  est le champ électrique. Il vérifie l'équation de Poisson:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

où  $\rho$  est la charge et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. Le modèle fluide que nous utiliserons est issu de (2.1) par le calcul des différents moments de la fonction de distribution



$f_\alpha$ :

1. la densité

$$n_\alpha := n_\alpha(t, x) = \int f_\alpha dv,$$

2. la quantité de mouvement

$$m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = m \int v f_\alpha dv,$$

3. l'énergie totale

$$W_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 f_\alpha dv.$$

On peut aussi introduire le tenseur de pression  $P$

$$P_\alpha = m_\alpha \int (v - \mathbf{u}_\alpha) \otimes (v - \mathbf{u}_\alpha) f dv,$$

et le flux de chaleur

$$Q_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int |v - \mathbf{u}_\alpha|^2 (v - \mathbf{u}_\alpha) f dv.$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{aligned} \partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) &= \int \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll} dv, \\ m_\alpha [\partial_t (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \otimes \mathbf{u}_\alpha)] + \nabla \cdot P_\alpha &= q_\alpha n_\alpha E + m_\alpha \int v \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll} dv, \\ \partial_t W_\alpha + \nabla \cdot ((W_\alpha + P_\alpha) \mathbf{u}_\alpha + Q_\alpha) &= q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot E + \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll} dv, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $\nabla \cdot$  représente l'opérateur divergence par rapport à la variable  $x$ . C'est ce système (2.2) que nous allons considérer pour chaque type de particules chargées. Il s'agit donc du système d'Euler avec un second membre.

Les particules neutres seront aussi régies par le système d'Euler suivant

$$\begin{aligned} \partial_t n + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) &= S_1, \\ m [\partial_t (n \mathbf{u}) + \nabla \cdot (n \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] + \nabla \cdot P &= S_2, \\ \partial_t W + \nabla \cdot ((W + P) \mathbf{u} + Q) &= S_3, \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour les molécules neutres, il n'y a pas de force électrostatique. D'autre part, nous négligeons les forces de pesanteur. Nous expliciterons dans la suite les divers termes sources  $S_1, S_2, S_3$ .

Dans un premier temps, nous allons rappeler certaines caractéristiques du système d'Euler. Dans un deuxième temps, nous verrons quelles approximations nous pourrions faire afin de simplifier les systèmes. Ensuite, nous présenterons les conditions aux limites que l'on impose. Nous mettrons en évidence plusieurs phénomènes de couplage. Nous finirons ce chapitre en écrivant deux systèmes:

- le premier nous servira pour la simulation numérique. En supposant que les panneaux solaires sont infinis dans une direction, nous ferons les simulations en deux dimensions d'espace, c'est-à-dire que nous ferons une coupe du panneau.
- le deuxième servira à une étude théorique.

## 2.2 Rappel sur le système d'Euler

Pour la simulation numérique et pour l'étude théorique, la dimension de la variable d'espace est strictement plus petite que trois; c'est pourquoi, nous considérerons, dans un premier temps, le cas où la variable d'espace est bidimensionnelle. Si  $u$  désigne la vitesse, on pose

$$u = (u_1, u_2).$$

Le système des équations d'Euler s'écrit [13]:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla_x \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) = S \\ \text{avec Conditions initiales et conditions aux limites,} \end{cases} \quad (2.4)$$

où

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ E \end{pmatrix},$$

$\rho$  étant la masse volumique,  $\rho u$  la quantité de mouvement,  $E$  l'énergie et  $S$  le terme source. On peut relier la masse volumique et la densité  $n$  par la relation  $n = \frac{\rho}{m}$  où  $m$  est la masse d'une particule. Le flux  $\mathbf{F}$  est  $\mathbf{F} = (F, G)$  avec

$$F := \begin{pmatrix} \rho u_1 \\ \rho u_1^2 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ u_1(E + p) \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} \rho u_2 \\ \rho u_1 u_2 \\ \rho u_2^2 + p \\ u_2(E + p) \end{pmatrix},$$

où  $p$  est la pression. Pour fermer ce système, il faut se donner une loi d'état. On relie la pression à la densité volumique  $n$  par :

$$p = nKT,$$

où  $T$  est la température et  $K$  la constante de Boltzmann. Nous allons à présent relier l'énergie  $W$  à  $n$  et  $u$ . De manière générale, on a

$$W = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$$

avec

$\gamma = 1.4$  pour un gaz parfait,

$\gamma = \frac{d+2}{2}$  pour les particules chargées ( $d$ =dimension de l'espace).

Pour ces lois d'état, on peut consulter Raviart [14]. Nous avons donc la relation

$$p := (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)).$$

### 2.2.1 Hyperbolicité

Le système des équations d'Euler est hyperbolique. En effet, soit  $\eta = (\eta_x, \eta_y)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{F}$  une combinaison linéaire des flux :

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}, \eta) := \eta_x F(\mathbf{W}) + \eta_y G(\mathbf{W}).$$

La matrice jacobienne

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}, \eta) = \eta_x A(\mathbf{W}) + \eta_y B(\mathbf{W}),$$

où

$$A := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{W}}(\mathbf{W}), \quad B := \frac{\partial G}{\partial \mathbf{W}}(\mathbf{W}),$$

est diagonalisable et toutes les valeurs propres  $\lambda$  sont réelles. Elles sont données par

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \eta_x u_1 + \eta_y u_2 \\ \lambda_3 = \lambda_1 - c\|\eta\| \\ \lambda_4 = \lambda_1 + c\|\eta\| \end{cases}$$

où  $\alpha$  est la vitesse du son dans le gaz:  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ .

### 2.2.2 Le système d'Euler *isotherme*

Nous présentons ici un modèle simplifié du système d'Euler: le système d'Euler *isotherme*, sans terme source ni collisions. La température est constante et l'équation de l'énergie est identiquement vérifiée. Le système s'écrit:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (nKT + \rho u \otimes u) &= 0.\end{aligned}$$

Nous préférons écrire ce système avec les variables  $(\rho, m := \rho u)$ :

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot m &= 0, \\ \partial_t m + \nabla \cdot \left( \frac{m^2}{\rho} + \alpha^2 \rho \right) &= 0,\end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \sqrt{\frac{KT}{m}}.$$

## 2.3 Présentation des équations

Du point de vue numérique le système (2.2) est difficile à résoudre car il contient un terme raide, terme dû au champ électrique. En effet, toujours dans [14], il est montré, par une méthode d'adimensionnement que la deuxième équation de (2.2) devient

$$\partial_t (nu) + \nabla \cdot (nu^2 + n) = \frac{L^2}{\lambda_{De}} n \nabla \cdot \Phi,$$

avec

$$\frac{L^2}{\lambda_{De}} \gg 1,$$

où  $\lambda_{De}$  est la longueur de Debye et  $L$  la longueur caractéristique du système. Nous allons à présent récrire ou modifier le système (2.2) afin de lui donner une forme plus simple. Donnons tout d'abord une expression simplifiée du terme de collision. On pose

$$U_{coll}^\alpha := -m_\alpha \int v \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll} dv.$$

L'approximation fluide utilisée dans cette thèse est [15]:

$$U_{coll}^\alpha = \sum_{\beta} m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta} (v_\alpha - v_\beta),$$

où  $\nu_{\alpha\beta}$  est la fréquence de collisions pour les échanges de moment. En utilisant l'hypothèse de *faible ionisation* nous montrons à présent que l'on peut transformer le système d'Euler (2.2) pour les particules chargées et obtenir les équations de Dérive-Diffusion.

### 2.3.1 Particules chargées

Les deux premières équations de (2.2) s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned}\partial_t(n_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha v_\alpha) &= \frac{S_\alpha}{m_\alpha}, \\ \partial_t(v_\alpha) + (\nabla \cdot v_\alpha)v_\alpha &= -\frac{1}{n_\alpha m_\alpha} \nabla(n_\alpha k T_\alpha) - \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} S_\alpha u_\alpha + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} U_{coll}^\alpha.\end{aligned}$$

Nous considérons ici un plasma faiblement ionisé, donc nous ne prenons en compte que les collisions de type neutres/particules chargées. Les termes de collisions s'écrivent donc

$$\begin{aligned}U_{coll}^e &= m_e n_e \nu_{en} (v_e - v_n), \\ U_{coll}^i &= m_i n_i \nu_{in} (v_i - v_n).\end{aligned}$$

Les échanges de moment entre particules chargées et particules neutres sont proportionnelles aux vitesses relatives. Nous nous plaçons à présent à l'échelle de la fréquence de collisions (supposée grande):

$$\nu \sim \frac{1}{\epsilon}.$$

Nous effectuons les changements de variables:

$$\begin{cases} v_\alpha := \epsilon u_\alpha, \\ S_\alpha := \epsilon s_\alpha, \\ t' := \frac{t}{\epsilon}. \end{cases}$$

Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}\epsilon \partial_t(n_\alpha) + \epsilon \nabla \cdot (n_\alpha u_\alpha) &= \epsilon \frac{s_\alpha}{m_\alpha}, \\ \epsilon^2 \partial_t(u_\alpha) + \epsilon^2 (\nabla \cdot u_\alpha) u_\alpha &= -\frac{1}{n_\alpha m_\alpha} \nabla(n_\alpha k T_\alpha) - \frac{\epsilon^2}{n_\alpha m_\alpha} s_\alpha u_\alpha + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{n_\alpha m_\alpha} U_{coll}^\alpha.\end{aligned}$$

On néglige les termes d'ordre supérieur à 2. Il vient alors:

$$\begin{aligned}u_e &= \frac{1}{m_e n_e \nu_{en}} (-\nabla p_e + n_e F_e + \nu_{en} m_e n_e u_n), \\ u_i &= \frac{1}{m_i n_i \nu_{in}} (-\nabla p_i + n_i F_i + \nu_{in} m_n n_i u_n).\end{aligned}$$

Ce qui donne les équations de Dérive-Diffusion (pour  $\alpha = e, i$ ):

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot \left( \frac{1}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} (-\nabla p_\alpha + n_\alpha F_\alpha + n_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha n} u_n) \right) = \frac{s_\alpha}{m_\alpha}.$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse *isotherme* pour les électrons et les ions, d'où la dernière équation (énergie) disparaît. On a alors:

$$\nabla p_\alpha = kT_\alpha \nabla n_\alpha.$$

D'autre part, la force agissant sur ces particules est une force électrostatique  $F_\alpha = q_\alpha E$ . Il vient

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot \left( \frac{1}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} (-kT_\alpha \nabla n_\alpha + n_\alpha q_\alpha E + n_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha n} u_n) \right) = \frac{s_\alpha}{m_\alpha}.$$

Si on pose :

$$D_\alpha := \frac{kT_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}, \quad \mu_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}},$$

qui sont respectivement le coefficient de diffusion et la mobilité, il vient:

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (-D_\alpha \nabla n_\alpha + \mu_\alpha n_\alpha E + n_\alpha u_n) = \frac{s_\alpha}{m_\alpha}.$$

En désignant par  $J_\alpha := n_\alpha u_\alpha$  le flux de particules:

$$J_\alpha := -D_\alpha \nabla n_\alpha + \mu_\alpha n_\alpha E,$$

nous obtenons

$$\boxed{\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot J_\alpha = \frac{s_\alpha}{m_\alpha} - \nabla \cdot (n_\alpha u_n).} \quad (2.5)$$

Remarque: Si  $u_n \equiv 0$ , nous retrouvons les équations de Dérive-Diffusion classiques.

### 2.3.2 Particules neutres

Pour les particules neutres, nous négligeons les flux de chaleur ainsi que les collisions. D'autre part il n'y pas de forces extérieures. Nous obtenons ainsi:

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_n) + \nabla \cdot (\rho_n u_n) &= S_n, \\ \partial_t (\rho_n u_n) + \nabla \cdot (p_n + \rho_n u_n \otimes u_n) &= -m_e n_n \nu_{ne} (u_n - u_e) - m_n n_n \nu_{ni} (u_n - u_i), \\ \partial_t (\rho_n E_n) + \nabla \cdot (p_n u_n + \rho_n E_n u_n) &= 0. \end{aligned}$$

## 2.4 Conditions aux limites

Nous donnons ici, les conditions aux limites à la surface du diélectrique. Les conditions à l'infini seront précisées ultérieurement.

### 2.4.1 Pour les particules chargées

Pour les électrons, nous prendrons une condition de flux nul au bord, à savoir:

$$J_e \cdot \nu = 0,$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à la frontière. Cette condition revient à une condition de conservation du nombre d'électrons. Pour les ions, nous prendrons une condition de densité nulle:

$$n_i = 0,$$

ce qui correspond à une condition d'absorption.

### 2.4.2 Pour les molécules neutres

Pour les molécules neutres, la condition aux limites est

$$(\rho_n u_n)|_\Gamma = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{si } J_i \cdot \nu \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $J_i$  est le flux d'ions incidents sur la surface du satellite et  $\beta$  une constante positive. Il s'agit du phénomène de désorption. C'est le premier phénomène de couplage de notre problème. Il lie les particules chargées (principalement les ions ici) et les molécules neutres.

## 2.5 Le potentiel électrostatique

En ce qui concerne le champ électromagnétique, nous ne considérons que la partie électrostatique. La force électrostatique est donnée par [16]

$$F_\alpha = q_\alpha E,$$

où  $E$  est le champ électrique qui dérive du potentiel  $\Phi$ . Ce dernier obéit à l'équation de Poisson:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ \Phi &= g \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

où  $e$  est la charge de l'électron (en valeur absolue) et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. Le potentiel électrique introduit un nouveau couplage entre les particules.

## 2.6 Un premier modèle

Nous proposons ici un premier modèle. Il est basé sur le système d'Euler, l'équation de Poisson et sur les équations de Dérive-Diffusion. Pour les particules chargées,

$$\begin{aligned}
\partial_t n_e - \nabla \cdot (D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \nabla \Phi) &= \frac{s_e}{m_e} - \nabla \cdot (n_e u_n) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
J_e \cdot \nu &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\partial_t n_i - \nabla \cdot (D_i \nabla n_i + \mu_i n_i \nabla \Phi) &= \frac{s_i}{m_i} - \nabla \cdot (n_i u_n) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
n_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\Delta \Phi &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
\Phi &= g \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

et pour les molécules neutres,

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_n + \nabla \cdot (\rho_n u_n) &= S_n, \\
\partial_t (\rho_n u_n) + \nabla \cdot (p_n + \rho_n u_n \otimes u_n) &= -m_e n_n \nu_{ne} (u_n - u_e) - m_n n_n \nu_{ni} (u_n - u_i), \\
\partial_t (\rho_n E_n) + \nabla \cdot (p_n u_n + \rho_n E_n u_n) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

avec les conditions aux limites:

$$(\rho_n u_n)|_{\Gamma} = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{si } J_i \cdot \nu \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est ce modèle qui nous servira pour la simulation numérique. Nous discuterons des conditions aux limites au Chapitre 1, Section 1.1. Comme fonction source, nous prenons:

$$\frac{s_e}{m_e} = \frac{s_i}{m_i} = -\frac{S_n}{m_n} = A \exp\left(B \frac{\rho_n}{|\nabla \Phi|}\right) n_g n_e - r n_e n_i,$$

où  $A$ ,  $B$  et  $r$  sont des constantes positives. Le terme

$$\nu_i := A \exp\left(B \frac{\rho_n}{|\nabla \Phi|}\right) n_g$$

représente la fréquence d'ionisation et

$$\nu_i n_e$$

est l'ionisation. Le terme

$$-r n_e n_i$$

représente la recombinaison, c'est-à-dire la formation de molécules neutres à partir de collisions entre les ions et les électrons.



## 2.7 Un deuxième modèle

Nous sommes à présent intéressés par un modèle de décharges qui servira à une étude théorique. Pour cela, nous appliquons l'hypothèse d'isothermie aux molécules neutres. Le modèle obtenu est donc basé sur le couplage entre les équations de Dérive-Diffusion et le système d'Euler isotherme. Pour les particules chargées,

$$\begin{aligned}
\partial_t n_e - \nabla \cdot (D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \nabla \Phi) &= \frac{S_e}{m_e} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
J_e \cdot \nu &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\partial_t n_i - \nabla \cdot (D_i \nabla n_i + \mu_i n_i \nabla \Phi) &= \frac{S_i}{m_i} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
n_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\Delta \Phi &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
\Phi &= g \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Les résultats d'existence et d'unicité sont obtenus dans les cas de trois dimensions en espace. Pour les molécules neutres, la situation est différente car les résultats d'existence et d'unicité sont obtenus dans le cas d'une dimension d'espace. C'est pourquoi, après avoir montré l'existence et l'unicité de la solution pour le système 2.9, en se fixant  $\rho$  dans la fonction d'ionisation, nous écrirons ce système sous la forme,

$$\begin{aligned}
\partial_t n_e - (D_e n_{ex} - \mu_e n_e \Phi_x)_x &= \frac{S_e}{m_e} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
\partial_x J_e &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\partial_t n_i - (D_i n_{ix} + \mu_i n_i \Phi_x)_x &= \frac{S_i}{m_i} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
n_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\
\Phi_{xx} &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
\Phi &= g \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

où  $\Omega = ]0, a[$ . Les molécules neutres satisfont le système

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + m_x &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t m + \left( \frac{m^2}{\rho} + \alpha^2 \rho \right)_x &= 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

avec la condition aux limites 'sur le diélectrique' (i.e. en  $x = 0$ )

$$m(t, 0)|_{\Gamma} = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{si } J_i \cdot \nu \geq 0, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \tag{2.12}$$

et les conditions 'à l'infini' (i.e. en  $x = a$ )

$$\rho(t, a) = \tilde{\rho}_a(t)$$

où  $\tilde{\rho}_a$  est une fonction donnée. Nous avons déjà explicité une fonction d'ionisation dans la Section 2.6. Cependant cette fonction n'est pas assez régularisante pour l'étude théorique que nous menons. Ainsi, nous considérons pour ce modèle:

$$\frac{s_e}{m_e} = \frac{s_i}{m_i} = F(\rho, \Phi_x) n_e - r n_e n_i,$$

où  $F$  est une fonction très régulière. Sa régularité sera discutée dans les chapitres suivants.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré les équations qui régissent l'avancée de la décharge électrique. Nous avons aussi proposé deux systèmes d'équations: Le système (2.7 – 2.8) servira pour la simulation numérique et le système (2.9 – 2.11) servira pour l'étude théorique.

Nous avons aussi mis en évidence trois phénomènes de couplages:

- Le phénomène de désorption qui relie les flux des ions à celui des molécules neutres,
- Le phénomène d'ionisation qui relie les trois types de particules,
- L'équation de Poisson qui couple les ions et les électrons.



Deuxième partie  
Partie Théorique



# Chapitre 1

## Introduction

## 1.1 Introduction

We are studying the existence and uniqueness of the solution to the drift-diffusion-Poisson system coupled with the Euler system. Let  $\Omega = ]0, a[$  and  $\Gamma = \{0\} \cup \{a\}$ .

We will denote by  $n_e, n_i$  the electron and ion densities, and by  $\Phi$  the electrostatic potential. In the Euler system,  $\rho$  will be the neutral density and  $m$  its first moment. Hence we have to study the drift-diffusion equations

$$\begin{cases} \partial_t n_e - (D_e \partial_x n_e - \mu_e n_e \Phi_x)_x = \nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t n_i - (D_i \partial_x n_i + \mu_i n_i \Phi_x)_x = \nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ D_e \partial_x n_e \cdot \nu = \mu_e n_e \Phi_x & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_i = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_e(0) = u_0, n_i(0) = v_0 & \text{at } t = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

coupled with Poisson's equation

$$\begin{cases} \Phi_{xx} = e(n_e - n_i) & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \Phi = g & \text{on } (0, T) \times \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

and isothermal Euler system

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 & \text{in } \Omega, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + \alpha^2 \rho\right)_x = 0 & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), m(0, x) = m_0(x) & \text{in } \Omega, \text{ (initial conditions),} \\ m(t, 0) = \tilde{m}_0(t), \rho(t, a) = \rho_a(t), t \in (0, T) & \text{(boundary conditions).} \end{cases} \quad (1.3)$$

The boundary conditions in the system (1.3) are linked, at  $x = 0$ , to the ion flux  $J_i$  by

$$\tilde{m}_0(t) = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{if } J_i \leq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.4)$$

where  $m_i$  the mass of the ions. At  $x = a$ ,  $\tilde{\rho}_a$  is a given function.

The scheme of the proof of the existence and uniqueness is the following.

1. Assume the density  $\rho$  is given. The case of  $n = 3$  is first considered. Let  $\Omega$  be a bounded subset of  $\mathbb{R}^3$  and  $\Gamma$  its boundary assumed to be  $\mathcal{C}^1$ . By a fixed point method, we establish the existence and uniqueness of the solution

$(n_e, n_i, \Phi) \in H^{2,1}(0, T, \Omega) \times H^{2,1}(0, T, \Omega) \times H^{4,1}(0, T, \Omega)$  to the drift-diffusion-Poisson system (1.5-1.6).

$$\begin{cases} \partial_t n_e - \nabla \cdot (D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \nabla \Phi) = \nu_i(t, x, \rho, \nabla \Phi) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t n_i - \nabla \cdot (D_i \nabla n_i + \mu_i n_i \nabla \Phi) = \nu_i(t, x, \rho, \nabla \Phi) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ D_e \nabla n_e \cdot \nu = \mu_e n_e \nabla \Phi \cdot \nu & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_i = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_e(0) = u_0, n_i(0) = v_0 & \text{at } t = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

together with

$$\begin{cases} \Delta \Phi = e(n_e - n_i) & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \Phi = g & \text{on } (0, T) \times \Gamma. \end{cases} \quad (1.6)$$

The result of existence and uniqueness is only locally in time. Then, we will notice that those results of existence and uniqueness are also valid when  $\Omega$  is a bounded subset of  $\mathbb{R}$ .

2. Then we are interested by the Euler problem and consider the isothermal Euler system

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 & \text{in } \Omega, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + \alpha^2 \rho\right)_x = 0 & \text{in } \Omega, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), m(0, x) = m_0(x) & \text{(initial conditions),} \\ m(t, 0) = \tilde{m}_0(t), \rho(t, a) = \tilde{\rho}_a(t) & \text{(boundary conditions).} \end{cases} \quad (1.7)$$

where  $\Omega$  is an interval of  $\mathbb{R}$  and  $\tilde{m}_0$  and  $\tilde{m}_a$  are  $\mathcal{C}^1$  given functions. Following the ideas of Li Ta-t sien [24] and Yu Wen-Ci, we prove the existence and uniqueness  $(\rho, m)$  which belongs to  $\mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^1$ .

3. The results for the Euler system being in a one dimensional space, we study in the next stage the regularity of  $(n_e, n_i, \Phi)$  solution to the system

$$\begin{cases} \partial_t n_e - (D_e \partial_x n_e - \mu_e n_e \Phi_x)_x = \nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t n_i - (D_i \partial_x n_i + \mu_i n_i \Phi_x)_x = \nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) n_e - r n_e n_i & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ D_e \partial_x n_e \cdot \nu = \mu_e n_e \Phi_x & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_i = 0 & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ n_e(0) = u_0, n_i(0) = v_0 & \text{at } t = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

where  $\rho$  is a given function, together with

$$\begin{cases} \Phi_{xx} = e(n_e - n_i) & \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \Phi = g & \text{on } (0, T) \times \Gamma. \end{cases} \quad (1.9)$$



4. Next, for some convex compact subset  $\Sigma(P(\delta))$  of  $\mathcal{C}^0$ , define the map  $\mathcal{T}$  by

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \Sigma(P(\delta)) &\longrightarrow \Sigma(P(\delta)) \\ \sigma &\longmapsto \rho := \mathcal{T}(\sigma), \end{aligned}$$

where  $\rho$  is the first component of the solution  $(\rho, m)$  to

$$\begin{cases} -\lambda_2(\rho_t + \lambda_1\rho_x) + m_t + \lambda_1m_x = 0, & \text{in } (0, \delta) \times \Omega, \\ -\lambda_1(\rho_t + \lambda_2\rho_x) + m_t + \lambda_2m_x = 0, & \text{in } (0, \delta) \times \Omega, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \quad m(0, x) = m_0(x), & x \in \Omega, \\ m(t, 0) = \tilde{m}_0(t) = (D_iv_x)(t, 0), \\ \tilde{\rho}(t, a) = \tilde{\rho}_a(t), \end{cases} \quad (1.10)$$

where  $n_i, \Phi$  are the solution to

$$\begin{cases} \partial_t n_e - (D_en_{ex} - \mu_en_e\Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \sigma, \Phi_x) - rn_i)n_e & \text{in } (0, \delta) \times \Omega, \\ \partial_t n_i - (D_in_{ix} + \mu_in_i\Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \sigma, \Phi_x) - rn_i)n_e & \text{in } (0, \delta) \times \Omega, \\ \Phi_{xx} = e(n_e - n_i) & \text{in } (0, \delta) \times \Omega, \\ D_en_{ex} = \mu_en_e\Phi_x & \text{in } \Sigma, \\ n_i = 0 & \text{in } \Sigma, \\ \Phi = g & \text{in } \Sigma, \\ n_e(0, \cdot) = n_{e0}, \\ n_i(0, \cdot) = n_{i0}. \end{cases} \quad (1.11)$$

It is shown that  $\mathcal{T}$  is continuous from  $\Sigma(P(\delta))$  into itself, which shows the existence of the solution  $(n_e, n_i, \Phi, \rho, m)$  to (1.8-1.9-1.3) (see Theorem D.1).

5. Finally we prove the uniqueness of the solution.

#### Remarks

- The potentiel  $\Phi$  satisfies a Dirichlet problem.
- We follow the proof of Seidman [20] to study (1.8).
- We can not establish a maximum principle for the electrons, even with [21] because the boundary conditions are not in an adequate form.
- For the Euler system, only  $m$  is given on the boundary.
- One could thought to use the semi-groups theory [22, 26]. Indeed, the system 1.8 can be written as

$$\partial_t n_e - \Delta n_e = f(n_e, n_i, \Phi, \rho)$$

Nevertheless, to get regularity on  $n_e$ , one need *a priori*  $f$  to  $\mathcal{C}^1$  in time, which is not the case in our problem.

Let us give the following definition and notation.

Definition

$$P(t) := ]0, t[ \times \Omega, \quad P(T) := ]0, T[ \times \Omega, \quad (1.12)$$

Notation

Later, we will have to consider spaces such as  $L^p(0, T; L^q(\Omega))$  where we denote by

$$\|f\|_{L^p(L^q)} := \|f\|_{L^p(0, T; L^q(\Omega))}.$$

Similarly

$$\int_{P(T)} f := \int_{P(T)} f(s, x) ds dx,$$

and

$$\int_0^t \|f\|_{L^p} := \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} ds.$$



## Chapitre 2

### Charged particles

## 2.1 Electrons

**Lemma 2.1.1** *Let*

- $\Omega$  a bounded subset of  $\mathbb{R}^3$ .
- $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ ,  $0 \leq v$  a.e.,
- $\Phi$  be such that  $|\nabla\Phi| \in L^\infty(P_T)$  and  $\Delta\Phi_t \in L^2(L^2)$ ,
- $r \geq 0$ ,  $\mu_e \geq 0$ ,  $D_e > 0$  be constants,
- $\nu_i := \nu_i(t,x)$  a bounded function.
- $w_0 \in H^2(\Omega)$  such that

$$w_0 \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{\partial w_0}{\partial\nu} \quad (2.1)$$

Then the system

$$\begin{cases} w_t - \nabla \cdot (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \Phi) = (\nu_i - rv)w, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \Phi) \cdot \nu = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ w(0,x) = w_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

has a unique solution  $w$  in  $H^{2,1}(0,T,\Omega)$  (see Annex C).

Proof. The proof is done by a fixed point method of Schauder type in the closed convex subset  $H^{2,1}(0,T,\Omega)$  of  $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ . Let  $F$  be the following map

$$\begin{aligned} F : H^{2,1}(0,T,\Omega) &\longrightarrow H^{2,1}(0,T,\Omega) \\ w &\longmapsto W \end{aligned}$$

where  $W$  is the solution to

$$\begin{aligned} W_t - \nabla \cdot (D_e \nabla W) &= f_e, \text{ in } P(T), \\ D_e \frac{\partial W}{\partial \nu} &= g_e, \text{ on } \Sigma(T), \\ W(0,x) &= u_0(x), \text{ in } \Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where

$$f_e := -\mu_e \nabla w \cdot \nabla \Phi - \mu_e w \Delta \Phi + (\nu_i - rv)w,$$

and

$$g_e = \mu_e w \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}.$$

In order to prove that the system (2.3) has a solution, we have to check the assumptions of Theorem C.2.1. First, one can see that

$$\begin{aligned}
\int_{P(T)} \nu_i^2 u^2 &\leq C \|\nu_i\|_{L^\infty}^2 \int_{P(T)} u^2 \\
\int_{P(T)} w^2 v^2 &\leq C \|v\|_{L^\infty(L^4)}^2 \|w\|_{L^2(H^1)}^2, \\
\int_{P(T)} |\nabla u|^2 |\nabla \Phi|^2 &\leq C \|\Phi\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2(H^1)}^2, \\
\int_{P(T)} w^2 |\Delta \Phi|^2 &\leq C \int_0^T \|w\|_{L^4}^2 \|\Delta \Phi\|_{L^4}^2 \\
&\leq C \|\Delta \Phi\|_{L^\infty(L^4)}^2 \|u\|_{L^2(H^1)}^2
\end{aligned}$$

hence

$$\|f_e\|_{L^2(P(T))}^2 \leq C \|u\|_{L^2(H^1)}^2.$$

Then we have to show that  $w\Phi_x|_{\Sigma(T)} \in H^{\frac{1}{4}}([0, T] \times \Gamma)$ . By Property 4, it is sufficient to prove that  $w\Phi_x \in H^{1, \frac{1}{2}}([0, T] \times \Omega)$ . It is easy to see that  $w\Phi_x \in L^2(H^1)$ . For the time part,

$$\|w\Phi_x\|_{H^1(L^2)}^2 = \|w\Phi_x\|_{L^2(L^2)}^2 + \|w_t\Phi_x + w\Phi_{tx}\|_{L^2(L^2)}^2.$$

The integral  $\int_{P(T)} w_t^2 \Phi_x^2$  is bounded because  $\Phi_x$  is bounded and  $w_t \in L^2(H^1)$ . Then,

$$\begin{aligned}
\int_{P(T)} w^2 \Phi_{tx}^2 &\leq \int_0^T \|w\|_{H^1}^2 \|\Phi_t\|_{H^2}^2 \\
&\leq \|w\|_{H^{2,1}}^2 \|\Phi_t\|_{L^2(0, T, \Omega)}^2
\end{aligned}$$

Thus  $w\Phi_x \in H^{1,1}$  so  $w\Phi_x \in H^{1, \frac{1}{2}}$  and

$$\|w\Phi_x\|_{H^{\frac{1}{4}}(0, T)} \leq C \|w\|_{L^2(H^1)}.$$

By (2.1), the compatibility condition is satisfied. Hence, by Theorem C.2.1, there exists a unique solution  $W$  to (2.3) which belongs to  $H^{2,1}(P(T))$ . Thus,  $W$  belongs to

$$\mathcal{W} := \{u; u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}.$$

Thanks to Aubin's lemma, the injection of  $\mathcal{W}$  into  $L^2(H^1)$  is compact. Thus the map  $F$  is compact for the topology of  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . For showing the continuity of  $F$  for the topology of  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , let

$$w_n \longrightarrow w \text{ in } L^2(H^1)$$

Denote by  $W_n$  and  $W$  the associated solution to (2.3). Their difference  $\bar{W}$  satisfies

$$\begin{aligned} \bar{W}_t - \nabla \cdot (D_e \nabla \bar{W}) &= \bar{f}_e, \\ D_e \frac{\partial \bar{W}}{\partial \nu} &= \bar{g}_e, \\ \bar{W}(0, x) &= 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

where

$$\bar{f}_e := -\mu_e \nabla \bar{w} \cdot \nabla \Phi - \mu_e \bar{w} \Delta \Phi + (\nu_i - rv) \bar{w},$$

and

$$\bar{g}_e = \mu_e \bar{w} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}.$$

By Theorem C.2.1

$$\begin{aligned} \|\bar{W}\|_{H^{2,1}} &\leq C(\|\bar{f}_e\|_{L^2} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}}) \\ &\leq C\|\bar{w}\|_{L^2(H^1)}, \end{aligned}$$

which shows the continuity of the map  $F$ . By Theorem of Schauder, there exist a fixed point  $w$  to  $F$  which is the solution to (2.2). For showing the uniqueness, assume  $w_1$  and  $w_2$  to be two solutions to (2.2) and their difference  $\bar{w}$  satisfies

$$\begin{cases} \bar{w}_t - \nabla \cdot (D_e \nabla \bar{w} - \mu_e \bar{w} \nabla \Phi) = (\nu_i - rv) \bar{w}, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ (D_e \nabla \bar{w} - \mu_e \bar{w} \nabla \Phi) \cdot \nu = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \Gamma, \\ \bar{w}(0, x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

Multiply the first equation of (2.5) by  $\bar{w}$  and integrate gives

$$\int_{\Omega} \bar{w}^2(t, \cdot) + \int_{P(T)} (D_e \nabla \bar{w} - \mu_e \bar{w} \nabla \Phi) \cdot \nabla \bar{w} = \int_{P(T)} (\nu_i - rv) \bar{w}^2$$

Knowing that  $r, v$  are positive

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{w}^2(t, \cdot) + D_e \int_{P(T)} |\nabla \bar{w}|^2 &\leq \int_{P(T)} |\nu_i| \bar{w}^2 + \mu_e \int_{P(T)} \bar{w} \nabla \Phi \cdot \nabla \bar{w} \\ &\leq \int_{P(T)} |\nu_i| \bar{w}^2 \mu_e + \frac{1}{2\epsilon} \int_{P(T)} \bar{w}^2 \nabla \Phi^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{P(T)} |\nabla \bar{w}|^2 \end{aligned}$$

Choose  $\mu_e \epsilon = D_e$ . Thus

$$\int_{\Omega} \bar{w}^2(t, \cdot) + \frac{D_e}{2} \int_{P(T)} |\nabla \bar{w}|^2 \leq \int_{P(T)} |\nu_i| \bar{w}^2 \mu_e + \frac{1}{2\epsilon} \int_{P(T)} \bar{w}^2 \nabla \Phi^2.$$

In particular

$$\int_{\Omega} \bar{w}^2(t, \cdot) \leq C \int_{P(T)} \bar{w}^2$$

and by Gronwall's lemma,  $\bar{w} = 0$ , which shows the uniqueness.

**Proposition 2.1.1** *If  $w_0$  is positive, then, the density  $w$  is nonnegative.*

Proof. Let  $w_- := w1_{w \leq 0}$ . The initial condition leads to  $w_-(0) = 0$ . So if we multiply the first equation of (2.2) by  $w_-$ , we get

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_-(t,x)^2 dx - \int_{P_t} \nabla \cdot (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \Phi) w_- = \int_{P_t} (\nu_i - rv) w_-^2.$$

By the boundary condition (second equation of (2.2)), it comes

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_-(t,x)^2 dx + \int_{P_t} D_e |\nabla w_-|^2 - \int_{P_t} \mu_e w_- \nabla w_- \cdot \nabla \Phi = \int_{P_t} (\nu_i - rv) w_-^2.$$

Hence

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w_-(t,x)^2 dx + \int_{P_t} \frac{D_e}{2} |\nabla w_-|^2 \leq \int_t (\frac{\mu_e^2}{2D_e} |\nabla \Phi|^2 + |\nu_i|) \int_{\Omega} w_-^2,$$

and, by Gronwall's lemma,  $w_- = 0$  i.e.  $0 \leq w$ .

Remark. We do not have an upper bound easily for the solution  $w$ . In fact, if we denote by  $W := K - w$ ,  $W_- := W1_{W \leq 0}$ , this leads to a component  $\int_{P_t} K \nabla \Phi \cdot \nabla w_-$  that is difficult to deal with.

## 2.2 Ions

**Lemma 2.2.1** *Let*

- $u \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ ,  $0 \leq u$ ,
- $\Phi$  be such that  $|\nabla \Phi| \in L^\infty(P_T)$  and  $\Delta \Phi_t \in L^2(L^2)$ ,
- $r, \mu_i \geq 0, D_i > 0$  be constants,
- $\nu_i := \nu_i(t,x)$  a bounded function.
- $w_0(x) \in H^2(\Omega)$ .

*Then the system*

$$\begin{cases} w_t - \nabla \cdot (D_i \nabla w + \mu_i w \nabla \Phi) = (\nu_i - rw)u, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ w = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ w(0,x) = w_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

*has a unique solution  $w \in L^2(H_0^1) \cap H^1(L^2)$ .*



Proof. We refer to the electron case.

**Proposition 2.2.1** *The density  $w$  is nonnegative.*

Proof. For the proof of this proposition, we refer to the proof of Proposition 2.1.1 (the different boundary conditions in the ions and the electrons cases do not change anything).

## 2.3 Poisson's equation, Sobolev inequality

The first subject of this section is to study the solution to Poisson's equation. Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , and  $\Gamma$  its boundary. Let  $f \in L^p(\Omega)$  and  $u_d \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ . Many others have treated Poisson's equation (see for example [25]). One of the main results is the following. The solution  $u$  to

$$\begin{aligned} \Delta u &= ef \text{ in } \Omega, \\ u &= u_d \text{ on } \Gamma, \end{aligned}$$

satisfies

$$u \in W^{2,p}(\Omega)$$

and there exists a constant  $C_{2,p}$  such that

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_{2,p} (\|f\|_{L^p} + \|u_d\|_{W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)}).$$

Here, the constant  $e$  denote the charge of the particles as it appears in Equation (1.6), and the constant  $C_{2,p}$  takes it into account. This section finishes by the Sobolev inequality. There exists a constant  $C_{inj}$  such that (see [26])

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{inj} \|u\|_{W^{2,4}(\Omega)}$$

## 2.4 Drift-Diffusion-Poisson

### 2.4.1 Introduction

Let  $\Omega$ , and  $\Gamma$  defined as in Section 2.3. Let  $r$  be a positive constant and  $g \in L^\infty(0,T; W^{\frac{7}{4},4}(\Gamma)) \cap L^2(W^{\frac{3}{2},2}(\Gamma))$  for any  $T > 0$ . Denote by  $C_g := \|g\|_{L^\infty(0,T; W^{\frac{7}{4},4}(\Omega))}$ . Let  $\rho$  be a  $\mathcal{C}^1$ . Assume the function  $\nu_i$  writes  $\nu_i := \nu_i(t,x,\rho(t,x),E(t,x))$  and satisfies

1. There exist a constant  $A_1$  which depends only on  $\Omega$  and a constant  $A_2$  which depends on  $\Omega$  and from  $\rho$  such that

$$|\nu_i(t,x,\rho(t,x),E(t,x))| \leq A_1 |E(t,x)| + A_2 t^2$$

2.

$$|\nu_i(t,x,\rho(t,x),E_1(t,x)) - \nu_i(t,x,\rho(t,x),E_2(t,x))| \leq C|E_1 - E_2|,$$

where  $C$  is a constant.

Remark. The constant  $A_2$  is important because it depends on  $\rho$ .

In this section we are interested by the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nabla \cdot (D_e \nabla u - \mu_e u \nabla \Phi) = (\nu_i(t,x,\rho(t,x), \nabla \Phi(t,x)) - rv)u, (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \partial_t v - \nabla \cdot (D_i \nabla v + \mu_i v \nabla \Phi) = (\nu_i(t,x,\rho(t,x), \nabla \Phi(t,x)) - rv)v, (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \Delta \Phi = e(u - v), (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ D_e \frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu_e u \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ v = 0, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ \Phi = g, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \Omega, \\ v(0,x) = v_0(x), x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Assume that the initial conditions  $u_0$  and  $v_0$  are nonnegative and there exists a constant  $C_K$  such that for any  $p$  in  $[2,6]$ ,

$$\left( \int_{\Omega} u_0^p \right)^{\frac{1}{p}} < C_K \text{ and } \left( \int_{\Omega} v_0^p \right)^{\frac{1}{p}} < C_K.$$

### 2.4.2 Existence and uniqueness

**Theorem 2.4.1** *There exists a time  $T$  such that the system (2.6) has a unique solution  $(u,v,\Phi) \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \times L^2(0,T; H^1(\Omega)) \times L^2(0,T; W^{2,4}(\Omega))$ , with  $u$  and  $v$  nonnegative.*

Proof. We use a fixed point method. Let  $T > 0$  be a time such that

$$e (A_2 T^2 + A_1 C_{2,4} C_{inj} (C_K + C_g)) \frac{T}{4} + \frac{3\mu_e^2}{4D_e} C_K^2 T + \frac{T}{4} C_g^2 \|u_0\|_{L^4(\Omega)} \leq C_K \quad (2.7)$$

Let

$$\tilde{K} := \{(u,v) \in H^{2,1}(0,T,\Omega) \times H^{2,1}(0,T,\Omega) ; 0 \leq u, 0 \leq v\},$$

and

$$K := \left\{ (u,v) \in \tilde{K} ; \|u\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} \leq C_K, \|v\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} \leq C_K \right\}.$$

We notice that  $K$  is a closed and convex subset of  $L^2(0,T;L^4(\Omega)) \times L^2(0,T;L^4(\Omega))$ . To show the existence and uniqueness of the solution, we will use a fixed point method.

Let  $F$  be the map

$$\begin{aligned} F : K &\longrightarrow K \\ (u,v) &\longmapsto (U,V) \end{aligned}$$

where  $U$  and  $V$  are solutions of

$$\begin{aligned} \partial_t U - \nabla \cdot (D_e \nabla U - \mu_e U \nabla \Phi) &= (\nu_i - rv)U, (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \partial_t V - \nabla \cdot (D_i \nabla V + \mu_i V \nabla \Phi) &= (\nu_i - rV)u, (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ D_e \frac{\partial U}{\partial \nu} &= \mu_e U \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \\ V &= 0, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \end{aligned} \tag{2.8}$$

where  $\Phi$  is the solution to

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= e(u - v), (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \Phi &= g, (t,x) \in (0,T) \times \Gamma, \end{aligned}$$

and  $\nu_i := \nu_i(t,x,\rho(t,x),\nabla \Phi(t,x))$ . We are going to show that  $F$  is a continuous and compact map from  $K$  to  $K$  for the topology of  $L^2(0,T,L^4(\Omega)) \times L^2(0,T,L^4(\Omega))$ .

Let  $(u,v) \in K$ . The results of Section 2.3 lead to

$$\|\Phi(t,\cdot)\|_{W^{2,4}(\Omega)} \leq C_{2,4}(\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^4(\Omega)} + \|g(t,\cdot)\|_{W^{\frac{7}{4},4}(\Gamma)}), t < T.$$

$$\|\nabla \Phi(t,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{inj} C_{2,4}(\|u(t,\cdot) - v(t,\cdot)\|_{L^4(\Omega)} + \|g(t,\cdot)\|_{W^{\frac{7}{4},4}(\Gamma)}), t < T. \tag{2.9}$$

If  $(u,v) \in K$ , then  $\|\nabla \Phi\|_{L^\infty(P(t))} < \infty$ . In a same way,

$$\|\Phi_t(t,\cdot)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C_{2,2}(\|u_t(t,\cdot) - v_t(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|g_t(t,\cdot)\|_{W^{\frac{3}{2},2}(\Gamma)}), t < T.$$

Hence Lemmas 2.1.1 and 2.2.1 imply the existence of a solution  $(U,V)$  to (2.8) in  $\tilde{K}$ . To prove that  $(U,V)$  belongs to  $K$ , let us prove the following lemma.

**Lemma 2.4.1** *There are positive constants  $C_p(T)$ ,  $2 \leq p \leq 6$ , such that*

$$\int_{\Omega} U^p(t,x) dx \leq C_p(T), t \leq T, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} D_e U^{p-2} |\nabla U|^2 &\leq \frac{2}{p-1} C_p(T) \|\nu_i\|_{L^\infty} T \\ &+ \frac{\mu_e^2 C_p(T)}{D_e} (C_K^2 + \int_0^T \|g(s,\cdot)\|_{W^{\frac{7}{4},4}(\Omega)}^2 ds) \\ &+ \frac{2}{p-1} C_p(0), \end{aligned} \tag{2.11}$$

where

$$C_p(0) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} U^p(0,x) dx.$$

Proof. We multiply the first equation of (2.8) by  $U^{p-1}$  and integrate it on  $P(t)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{\Omega} U^p(t,x) dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} U^p(0,x) dx \\ & + (p-1) \int_{P(t)} D_e U^{p-2} |\nabla U|^2 + (p-1) \int_{P(t)} \mu_e U^{p-1} \nabla \Phi \cdot \nabla U \\ & = \int_{P_t} (\nu_i - rv) U^p. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Then

$$\int_{P(t)} \mu_e U^{p-1} \nabla \Phi \cdot \nabla U \leq \frac{\epsilon \mu_e}{2} \int_{P(t)} U^{p-2} |\nabla U|^2 + \frac{\mu_e}{2\epsilon} \int_{P(t)} U^p |\nabla \Phi|^2, \epsilon > 0,$$

and

$$- \int_{P(t)} rv U^p \leq 0,$$

since  $v$  is nonnegative. Choosing  $\epsilon = \frac{D_e}{\mu_e}$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega} U^p(t,x) dx + \frac{(p-1)}{2} \int_{P(t)} D_e U^{p-2} |\nabla U|^2 & \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} U_0^p(x) dx + \int_{P(t)} |\nu_i| U^p \\ & + \frac{\mu_e (p-1)}{2\epsilon} \int_0^t (\|\nabla \Phi(s, \cdot)\|_{L^\infty}^2 \int_{\Omega} U^p(s,x) dx) ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

It follows from Gronwall's lemma and (2.9), that

$$\int_{\Omega} U^p(t,x) dx \leq \int_{\Omega} U_0^p(x) dx e^{\int_0^t |\nu_i| + \frac{\mu_e^2 (p-1)}{2D_e} C_{inj}^2 C_{2,4}^2 \left[ \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^4} + \|g(s, \cdot)\|_{W^{\frac{7}{4},4}(T)} \right]^2 ds}.$$

Denoting by

$$C_p(T) := e^{(A_2 T^2 + A_1 C_{2,4} C_{inj} (C_K + C_g)) T + \frac{\mu_e^2 (p-1)}{D_e} C_{inj}^2 C_{2,4}^2 (2C_K + C_g)^2 T} \int_{\Omega} U^p(0,x) dx,$$

this completes the proof of Lemma 2.4.1.

We are now able to show that  $F$  maps  $K$  into  $K$ . For  $p = 4$ , we get

$$\int_{\Omega} U^4(t,x) dx \leq C_4(T),$$

so that

$$\|U\|_{L^\infty(L^4)} \leq C_4^{\frac{1}{4}}(T).$$

Time  $T$  was chosen such that  $C_4^{\frac{1}{4}}(T) \leq C_K$ , We have the same results for  $V$ . Thus  $(U, V) \in K$ .

The solution  $(U, V)$  belongs to  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  where

$$\mathcal{W} := \{f \in L^2(0, T, H^2), \partial_t f \in L^2(0, T, L^2)\}$$

By Aubin's Lemma, the imbedding of  $\mathcal{W}$  into  $L^2(L^4)$  is compact. So, if the sequence  $(u_n, v_n)$  is bounded in  $K$ , a subsequence of  $(U_n, V_n) = F(u_n, v_n) \in K$  converges for the  $L^2(L^4)$  topology to some  $U$  belonging to  $K$ . This implies the compactness of the map  $F$ .

We are going to establish the continuity of  $F$  for the  $L^2(L^4)$  topology. Let

$$(u_n, v_n) \xrightarrow{L^2(L^4)} (u, v),$$

and  $(U_n, V_n) = F(u_n, v_n)$ ,  $(U, V) = F(u, v)$  be the solutions of (2.8). Let  $\bar{\Phi}_n = \Phi(u_n, v_n)$ . The differences  $w := U_n - U$ ,  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_n - \Phi$  satisfy

$$\begin{cases} w_t - \nabla \cdot (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \bar{\Phi}_n + \mu_e U \nabla (\bar{\Phi} - \bar{\Phi}_n)) = (\nu_i^n - r v_n) U_n - (\nu_i - r v) U, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ D_e \nabla w \cdot \nu = \mu_e U_n \nabla \bar{\Phi}_n \cdot \nu - \mu_e U \nabla \bar{\Phi} \cdot \nu, & (t, x) \in (0, T) \times \Gamma, \\ w(0, x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

and the Poisson equation

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Phi} &= e(u_n - u - (v_n - v)), & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ \bar{\Phi} &= 0, & (t, x) \in (0, T) \times \Gamma. \end{aligned}$$

We multiply equation (2.14) by  $w$  and integrate, so that for any  $t \leq T$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2 + \int_{P(t)} D_e |\nabla w|^2 = \int_{P(t)} \mu_e w \nabla \bar{\Phi}_n \cdot \nabla w + \int_{P(t)} \mu_e U \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla w + \int_{P(t)} ((\nu_i^n - r v_n) U_n - (\nu_i - r v) U) w.$$

For the following, we denote by  $\bar{\cdot}$  all the difference quantities. For example,

$$\bar{u} := u_n - u, \bar{v} := v_n - v.$$

We denote by  $C, C_k, k = 1, 2, \dots$  positive constants independent of  $U, u, \dots$ . We have the following inequalities,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} |w \nabla \Phi_n \cdot \nabla w| &\leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{P(t)} w^2 |\nabla \Phi_n|^2 + \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |\nabla w|^2, \\ \int_{P(t)} |U \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla w| &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |\nabla w|^2 + \frac{C_1}{2\epsilon} \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \int_{\Omega} U^2, \\ \left| \int_{P(t)} ((\nu_i^n - r v_n) U_n - (\nu_i - r v) U) w \right| &\leq \int_{P(t)} ((\bar{\nu}_i - r \bar{v}) U_n + (\nu_i - r v) w) \\ &\leq \int_{P(t)} C_2 (|\nabla \bar{\Phi} + r \bar{v}|) U_n w + \int_{P(t)} |\nu_i| w^2. \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} C_2 |\nabla(\bar{\Phi})| U_n w &\leq C_3 \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4(\Omega)} \|U_n\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\ &\leq \frac{C_3}{2} \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4(\Omega)}^2 + \frac{C_3}{2} \int_0^t \underbrace{\|U_n\|_{L^2}^2}_{\text{bounded}} \|w\|_{L^2}^2, \\ \int_{P(t)} \bar{v} U_n w &\leq C_4 \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^p} \|U_n\|_{L^q} \|w\|_{L^r} \text{ with } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \\ &\leq \frac{C_4}{2\epsilon} \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^p}^2 \|U_n\|_{L^q}^2 + \frac{C_4 \epsilon}{2} \int_0^t \|w\|_{L^r}^2 \\ &\leq \frac{C_4}{2\epsilon} \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^4}^2 \|U_n\|_{L^q}^2 + \frac{C_4 \epsilon}{2} \int_0^t \|w\|_{L^6}^2 \text{ with } p = 4, r = 6, q = \frac{12}{7} \\ &\leq \frac{C_4}{2\epsilon} \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^4}^2 \|U_n\|_{L^q}^2 + \frac{C_5 \epsilon}{2} \int_0^t \|w\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Choosing  $\epsilon$  such that  $\frac{D_e}{2} = \epsilon \mu_e + r \frac{C_5 C_2 \epsilon}{2}$ , we have

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2 + \frac{1}{2} \int_{P(t)} D_e |\nabla w|^2 \leq C \left( \int_0^t f(s) \int_{\Omega} w^2 + \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 (C_3 + \int_{\Omega} U^2) + \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^4}^2 \|U_n\|_{L^q}^2 \right),$$

where

$$f(s) = C_6 \frac{\mu_e + C_7}{D_e} |\nabla \Phi_n|^2 + \|U_n\|_{L^2}^2 + \frac{C_7}{2} \frac{D_e}{\mu_e + C_7} + |\nu_i|.$$

Thanks to Lemma 2.4.1 and Properties of Poisson's equation (2.9), one can see that  $f$  is uniformly bounded with regard to  $n$ .

We have a similar inequality for the ions. The difference  $z = V_n - V$  satisfies

$$\begin{aligned} z_t - \nabla \cdot (D_i \nabla z + \mu_i z \nabla \Phi_n + V \nabla (\Phi - \Phi_n)) &= (\nu_i^n - rV_n)u_n - (\nu_i - rV)u, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ z &= 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Gamma, \\ z(0, x) &= 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Multiplying (2.15) by  $z$ , we have to estimate

$$\int_{P(t)} \bar{\nu}_i u_n z - \underbrace{\int_{P(t)} r u_n z^2}_{\geq 0} + \int_{P(t)} (\nu_i - rV) \bar{u} z,$$

which is performed similarly to the electrons case. Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} u_n \bar{\nu}_i z &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|z\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|u_n\|_{L^2}^2 \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2, \\ \int_{P(t)} \nu_i \bar{u} z &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|z\|_{L^2}^2 + \frac{C}{2} \int_0^t \|\bar{u}\|_{L^4}^2, \\ \int_{P(t)} V \bar{u} z &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{\|V\|_{L^4}^2}_{\text{bounded}} \|\bar{u}\|_{L^4}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|z\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

This implies that

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} z^2 + \frac{1}{2} \int_{P(t)} D_i |\nabla z|^2 \leq C \left( \int_0^t f(s) \int_{\Omega} z^2(s, x) dx ds + \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \int_{\Omega} V^2 \right).$$

Hence,

$$\int_{\Omega} (w^2 + z^2) \leq C \left( \int_0^t f(s) \int_{\Omega} (w^2 + z^2) + \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \int_{\Omega} (U^2 + V^2) \right),$$

so that, by Gronwall's lemma,

$$\int_{\Omega} (w^2 + z^2) \leq C \left( \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \right) \underbrace{e^{\int_0^t f(s) ds}}_{\text{bounded}},$$

and

$$\int_{P(T)} (|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2) \leq C \left( \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \right).$$

Hence

$$\int_0^t \|w\|_{L^4}^2 + \|z\|_{L^4}^2 \leq C \int_0^t \|w\|_{H^1}^2 + \|z\|_{H^1}^2 \leq C \left( \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^4}^2 \right)$$

which shows the continuity of the map  $F$ . The Schauder fixed point theorem D.2 implies the existence of a solution  $(u, v, \Phi)$  of the system (2.6).

Let us now study the uniqueness of the solution. As previously,  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  will denote constants. Let  $(u_1, v_1, \Phi_1)$  and  $(u_2, v_2, \Phi_2)$  be two solutions of the system (2.6). The differences  $w = u_1 - u_2$ ,  $z = v_1 - v_2$  and  $\bar{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2$  verify

$$\begin{aligned} \partial_t w - \nabla \cdot (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \Phi_1 + \mu_e u_2 \nabla \bar{\Phi}) &= \bar{v}_i u_1 + \nu_i^2 w - r w v_1 - r u_2 z \text{ in } P(t), \\ (D_e \nabla w - \mu_e w \nabla \Phi_1 + \mu_e u_2 \nabla \bar{\Phi}) \cdot \nu &= 0 \text{ on } \partial P(t), \\ w(0, x) &= 0, x \in \Omega. \end{aligned}$$

Multiply by  $w$  and integrate on  $P_t$ , so that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} w(t, x)^2 dx + \int_{P(t)} D_e |\nabla w|^2 + \int_{P(t)} \mu_e (w \nabla \Phi_1 \cdot \nabla w + u_2 \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla w) = \\ \int_{P(t)} (\bar{v}_i u_1 w + \nu_i^2 w^2 - r v_1 w^2 - r u_2 w z) \end{aligned}$$

Then,

$$\int_{P(t)} \mu_e w \nabla \Phi_1 \cdot \nabla w \leq \frac{\mu_e \epsilon}{2} \int_{P(t)} |\nabla w|^2 + \frac{\mu_e}{2\epsilon} \int_{P(t)} w^2 |\nabla \Phi_1|^2,$$

where  $\|\nabla \Phi_1(t, \cdot)\|_{L^\infty}$  is bounded by  $\|u_1(t, \cdot) - v_1(t, \cdot)\|_{L^4}$ , which is also bounded by  $2C_K$ . Moreover,

$$\int_{P(t)} \mu_e u_2 \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla w \leq \frac{\mu_e}{2} \int_0^t \underbrace{\|u_2\|_{L^4}}_{\text{bounded by } C_K} (\epsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\nabla \bar{\Phi}\|_{L^4}^2),$$

where  $\|u_2(t, \cdot)\|_{L^4}$  is bounded by  $C_K$ . Then

$$\|\nabla \bar{\Phi}\|_{L^4} \leq C_1 \|\bar{\Phi}\|_{W^{2,2}} \leq \|w - z\|_{L^2},$$



$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} \bar{\nu}_i w u_1 &\leq C_2 \int_0^t |\nabla \bar{\Phi}| u_1 w \leq \int_0^t \|u_1\|_{L^4} \|\nabla \bar{\Phi}\|_{L^4} \|w\|_{L^2}, \\
\int_{P(t)} z u_2 w &\leq r \int_0^t \|z\|_{L^2} \|w\|_{L^4} \|u_2\|_{L^4} \\
&\leq \frac{r}{2} \int_0^t \|u_2\|_{L^4} (\epsilon' \|w\|_{L^4}^2 + \epsilon'^{-1} \|z\|_{L^2}^2) \\
&\leq \frac{r}{2} \int_0^t \|u_2\|_{L^4} (\epsilon' C_3 (\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2) + \epsilon'^{-1} \|z\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

because

$$\|w\|_{L^4}^2 \leq C_3 \|w\|_{H^1}^2 = C_3 (\|w\|_{L^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2}^2).$$

Let us choose  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  such that

$$\epsilon \frac{\mu_e}{2} (C_K + 1) + \epsilon' \frac{r}{2} C_3 = \frac{D_e}{2}.$$

Then

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w(t,x)^2 dx + \int_{P(t)} D_e |\nabla w|^2 \leq C \int_{P(t)} (w^2 + z^2).$$

We get similar results for the ions. Let

$$f(t) := \int_{\Omega} w(t,x)^2 dx, \quad g(t) := \int_{\Omega} z(t,x)^2 dx.$$

Thus

$$f(t) + g(t) \leq \int_0^t (f(s) + g(s)) ds,$$

so that Gronwall's lemma implies that  $f = g = 0$ . This proves the uniqueness of the solution  $(u, v, \Phi) \in L^2(H^1) \times L^2(H^1) \times L^2(W^{2,4})$  of the system (2.6).

### Remarks.

- Lemma 2.4.1 provides the following result. For any  $p \in [2,6]$ , the solution  $U, V$  is bounded in  $L^\infty(L^p)$ , i.e. there exists a constant  $C_p$  such that

$$\|U\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq C_p \quad (2.16)$$

- There exists a maximum principle for the ions. Let  $N$  be a constant so that  $v_0 \leq N$  and  $N(r - \mu_i) - \nu_i \geq 0$ . Then  $v \leq N$ .

Proof. Set  $w := N - v$  and  $w_- := w 1_{w \leq 0}$ . Since  $\Delta \Phi = e(u - v)$ , we get

$$w_t - \nabla \cdot (D_i \nabla w) - \mu_i \nabla w \nabla \Phi = -\mu_i e (N - w) (u - (N - w)) - (\nu_i - r(N - w)) w. \quad (2.17)$$

Multiplying (2.17) by  $w_-$  implies

$$\begin{aligned} & \int_0^t w_-^2 + D_i \int_{P(t)} |\nabla w_-|^2 - \mu_i \int_{P(t)} \nabla w_- \cdot \nabla \Phi w_- = \\ & \int_{P(t)} (-\mu_i e(N - w)(u - (N - w)) - (\nu_i - r(N - w))u) w_-. \end{aligned}$$

The cubic term  $w_-^3$  has a definite non positive sign, as well as the linear term in  $w_-$ . Since  $N(r - \mu_i) - \nu_i \geq 0$ ,

$$\int_0^t w_-^2 + D_i \int_{P(t)} |\nabla w_-|^2 \leq C \int_{P(t)} w_-^2.$$

It follows from Gronwall's lemma that  $w \geq 0$ .

- There is no maximum principle for the electrons. On account of the electrons boundary condition, we are not able to expand

$$\nabla \cdot (D_e \nabla u - \mu_e u \nabla \Phi),$$

which was useful to get the maximum principle for the ions. We can neither use the method of Seidman [21].

### 2.4.3 Remark

In the next chapter we will deal with the Euler system and we will show the results in one dimension in space. In Chapter 4, we will study the Drift - Diffusion - Poisson - Euler system in one dimension in space.

In the previous section the space

$$K := \left\{ (u, v) \in \tilde{K}; \|u\|_{L^\infty(L^4)}, \|v\|_{L^\infty(L^4)} \leq C_K \right\}.$$

was used. The space  $L^4(\Omega)$  was practical in the setting of

$$|\nabla \Phi(t, \cdot)|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|\Phi\|_{W^{2,4}(\Omega)}, t < T, \quad (2.18)$$

for some positive constant  $C$  (see 2.9). If the dimension of space is one rather than three, a bound of  $\Phi$  in  $W^{2,2}(\Omega)$  is sufficient to obtain a bound of  $\Phi_x$  in  $L^\infty$  since, by a Sobolev imbedding,

$$|\nabla \Phi(t, \cdot)|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\Phi\|_{W^{2,2}(\Omega)}, t < T. \quad (2.19)$$

Thus, the space:

$$K := \left\{ (u, v) \in \tilde{K}; \|u\|_{L^\infty(L^2)}, \|v\|_{L^\infty(L^2)} \leq C_K \right\}$$

will be considered.

This remark shows that all the results previously obtained in a three dimensional space, are also valid in a one dimensional space.

Before finishing this Chapter, it would be usefull to estimate the boundedness of the solution with regard to time  $T$ . Hence, let  $(u, v, \Phi)$  be the solution to (2.6). Multiplying the first equation by  $u$  and integrating over  $(0, t) \times \Omega$ , for any  $t < T$ , leads to

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_{L^2}^2 - \|u_0\|_{L^2}^2) + D_e \int_0^t \int_\Omega |u_x|^2 - \mu_e \int_0^t \int_\Omega u \Phi_x u_x = \int_0^t \int_\Omega \nu_i (u^2 - r u^2 v)$$

With similar computations as previously,

$$\frac{1}{2}(\|u(t)\|_{L^2}^2 - \|u_0\|_{L^2}^2) + \frac{D_e}{2} \int_0^t \int_\Omega |u_x|^2 \leq \frac{\mu_e^2}{2D_e} \int_0^t \int_\Omega u^2 \Phi_x^2 + \int_0^t \int_\Omega (A_1 \Phi_x + A_2 t^2) u^2$$

Thanks to Poisson's equation

$$\begin{aligned} |\Phi_x(t, \cdot)|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_{inj} C_{2,2} (\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi_g(t, \cdot)\|_{W^{2,2}(\Omega)}), \\ &\leq C_{inj} C_{2,2} (2C_K + C_g). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Thus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{D_e}{2} \int_0^t \int_\Omega |u_x|^2 &\leq \frac{\mu_e^2}{2D_e} \int_0^t C_{inj}^2 C_{2,2}^2 (2C_K + C_g)^2 \|u\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \int_0^t (A_2 t^2 + A_1 C_{inj} C_{2,2} (2C_K + C_g)) \|u\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

and by Gronwall's lemma,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp \left( \frac{\mu_e^2}{D_e} (C_{inj}^2 C_{2,2}^2 (2C_K + C_g)^2) t + 2(A_2 t^2 + C_{inj} C_{2,2} A_1 (2C_K + C_g)) t \right)$$

As it was said in Section 2.4.1, the constant  $A_2$  plays a particular part. Denote by

$$\begin{aligned} V_{1ddp} &:= C_{inj} C_{2,2} (2C_K + C_g), \\ V_{ddp} &:= \frac{\mu_e^2}{D_e} (C_{inj}^2 C_{2,2}^2 (2C_K + C_g)^2) + 2A_1 C_{inj} C_{2,2} (2C_K + C_g), \end{aligned}$$

it follows

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \exp(V_{ddp}t + 2A_2t^3) \quad (2.21)$$

Time  $T$  is chosen such that

$$\|u_0\|_{L^2}^2 \exp(V_{ddp}T + 2A_2T^3) \leq C_K^2. \quad (2.22)$$

Thus

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_K^2, \quad (2.23)$$

and

$$\|u\|_{L^2((0,t)\times\Omega)}^2 \leq tC_K^2. \quad (2.24)$$

For  $\|u\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{D_e}{2} \|u_x\|_{L^2(0,t;\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{V_{ddp}}{2} + A_2t^2\right)t \|u_0\|_{L^2}^2 \exp(V_{ddp}t + 2A_2t^3) + \|u_0\|_{L^2}^2 \\ &\leq \log\left(\frac{C_K}{\|u_0\|_{L^2}}\right) C_K^2 + \|u_0\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

hence

$$\|u\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 \leq C_K^2 \left(t + \frac{2}{D_e} \log\left(\frac{C_K}{\|u_0\|_{L^2}}\right)\right) + \frac{2}{D_e} \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (2.26)$$

or

$$\|u\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))} \leq C_K \sqrt{t} + C_{K,1} \quad (2.27)$$

with

$$C_{K,1} := C_K \left( \sqrt{\frac{2}{D_e} \log\left(\frac{C_K}{\|u_0\|_{L^2}}\right)} + \sqrt{\frac{2}{D_e} \|u_0\|_{L^2}^2} \right) \quad (2.28)$$



## Chapitre 3

### The Euler system

## 3.1 The Euler system

### 3.1.1 Position of the problem

Let  $I = [0, b]$ , and  $\delta > 0$  be a constant. In the following sections, the isothermal Euler system will be studied in the domain  $[0, \delta] \times I$  (see Figure 3.1). Let  $u := (u_1, u_2)$ ,

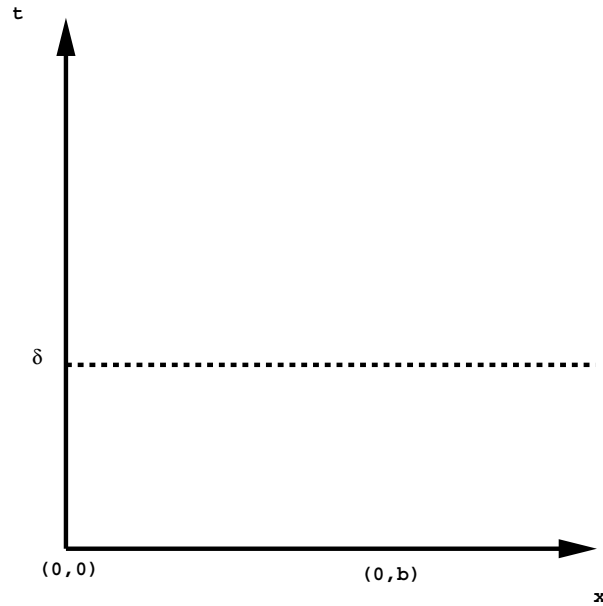


FIG. 3.1 – *Space-time*

with  $u_1 := \rho$  and  $u_2 := m$ . In the isothermal Euler system context, the equation of energy is reduced to

$$T = T_0,$$

which means that the temperature  $T$  is constant. Moreover, the state equation

$$p = \rho RT / \mathcal{M}$$

becomes

$$p = \rho RT_0 / \mathcal{M}.$$

Denote by

$$\alpha^2 := RT_0 / \mathcal{M}.$$

Thus the isothermal Euler system is

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + \alpha^2 \rho\right)_x = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

with the initial conditions

$$u_1(0,x) = \rho_0(x), u_2(0,x) = m_0(x).$$

For the sake of convenience, denote by

$$u_j(0,x) = \phi_j(x)$$

and the boundary condition

$$m(t,0) = \tilde{m}(t), \rho(t,b) = \tilde{\rho}(t).$$

where  $\tilde{m}$  and  $\tilde{\rho}$  are given functions. We see that the boundary conditions  $\rho(t,0), m(t,b)$  are not given.

### 3.1.2 The method

We will follow the Li Ta-tsien's method (see [24]). The system (3.1) can then be written in the characteristic form as

$$\begin{cases} -\lambda_2(\rho_t + \lambda_1 \rho_x) + m_t + \lambda_1 m_x = 0, \\ -\lambda_1(\rho_t + \lambda_2 \rho_x) + m_t + \lambda_2 m_x = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

where the eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  are

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \alpha.$$

The method of Li Ta-tsien uses a fixed point method, and compact subsets of  $\mathcal{C}^0$  in order to have bounds on the solution and the eigenvalues. In our case, owing to the eigenvalues, it is not sufficient to bound the solution from above only. The main difference with Li Ta-tsien is that  $\rho$  need to be bounded from below, otherwise the eigenvalues would not be bounded.

#### Notations

– If  $f$  is a function defined on  $I$ , then

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

– If  $f$  is a function defined on  $[0, \delta] \times I$ , then

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup_{(t,x) \in [0,\delta] \times I} |f(x)|.$$

We will first study the Cauchy problem and then the boundary problem.



## 3.2 The Cauchy problem

### 3.2.1 A linear system

We are interested by the problem in characteristic form

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x)(\partial_t u_j + \lambda_l(t,x)\partial_x u_j) = 0, & l = 1,2, \\ u_j(0,x) = \phi_j(x), & j = 1,2, \end{cases} \quad (3.3)$$

where  $\phi_1$  and  $\phi_2$  are given  $\mathcal{C}^1$  functions on  $I$ ,  $\det|\zeta_{lj}| \neq 0$ . Assume that  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are given  $\mathcal{C}^1$  functions such that

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

Denote by  $(\zeta)^{kl}$  the inverse matrix of  $(\zeta)_{lj}$ . Let  $\tilde{Q}(\delta)$  be the domain of determination of I (see figure 3.2), i.e.

$$\tilde{Q}(\delta) = \{(t,x); 0 \leq t \leq \delta; x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\},$$

where  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = b$  and

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \geq \lambda_2(t, x_1(t)), & t \in (0, \delta), \\ \dot{x}_2(t) \leq \lambda_1(t, x_2(t)), & t \in (0, \delta). \end{cases}$$

**Theorem 3.2.1** *Suppose that  $\zeta_{lj}, \partial_t \zeta_{lj}, \partial_x \zeta_{lj}, \lambda_l, \partial_x \lambda_l$  are continuous on the domain  $\tilde{Q}(\delta)$  and  $\phi_j$  ( $j = 1,2$ ) belong to  $C^1(I)$ . Then the initial value problem (3.3) admits a unique solution  $u(t,x)$  in  $\mathcal{C}^1(\tilde{Q}(\delta))$ .*

Proof. The idea of the proof is to use the characteristics  $f_l$  defined by

$$\begin{aligned} \frac{df_l(\tau; t, x)}{d\tau} &= \lambda_l(\tau, f_l(\tau; t, x)) \\ f_l(t; t, x) &= x \end{aligned}$$

Let

$$\xi_l(t, x) := f_l(0; t, x)$$

Thus, the system (3.3) rewrites as

$$u_k = u_k^0(t, x) + \sum_{l=1}^2 \zeta^{kl}(t, x) \int_0^t \sum_{j=1}^2 \frac{d\zeta_{lj}}{d_l \tau} u_j d\tau \quad (3.4)$$

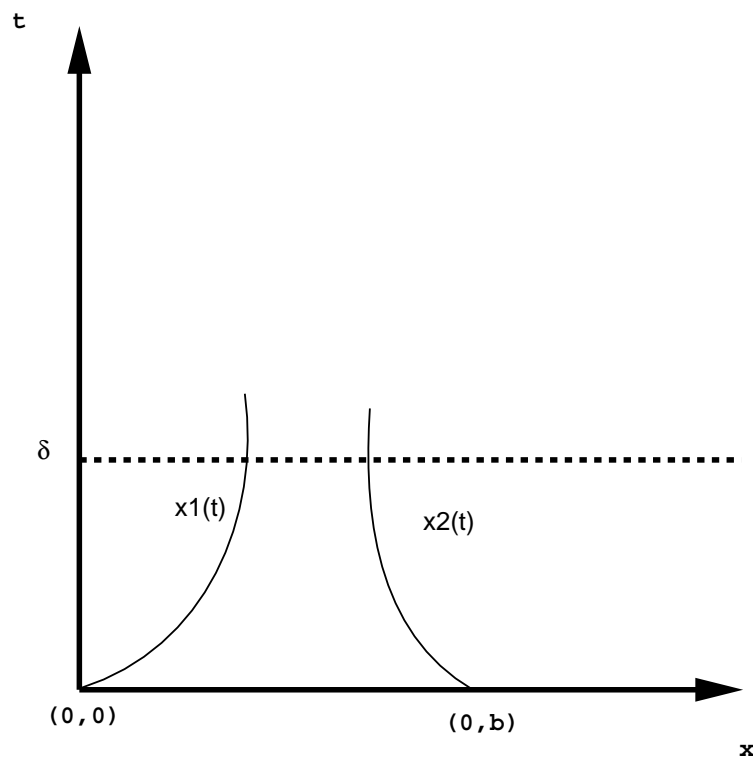


FIG. 3.2 - Domain of determination of  $I=[0, a]$ .

where

$$\frac{d}{d_l \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda_l \frac{\partial}{\partial \xi},$$

and

$$u_k^0(t, x) = \sum_{l, j} \zeta^{kl}(t, x) \zeta_{lj}(0, \xi_l(t, x)) \phi_j(\xi_l(t, x))$$

Hence the solution  $u$  is seen as a fixed point of the map  $T$

$$u = Tu,$$

where  $T$  is defined by (3.4). Then we show that the map  $T : C^0(\tilde{Q}(\delta)) \rightarrow C^0(\tilde{Q}(\delta))$  is a contraction. The  $C^1$  regularity is done by hand.

#

## 3.2.2 The Quasilinear system

### 3.2.2.1 Frame of the problem

It is well known that for the Euler system, the couples  $(t, x)$  such that  $u_1(t, x) = \rho(t, x) = 0$  (i.e. time and space where vacuum occurs) are a real problem. To avoid this case, we shall assume that at time  $t = 0$ ,  $\rho(0, x)$  is bounded from below by a nonnegative constant  $\beta$ .

Let  $\Omega^c$  be a positive constant. We consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u) (\partial_t u_j + \lambda_l(t, x, u) \partial_x u_j) = 0, & l = 1, 2, \\ u_j(0, x) = \phi_j(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

where

–  $\phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) are  $C^1$  given functions defined on  $I$  such that

$$\beta \leq \phi_1(x) \leq \Omega^c, \quad \|\phi_2\| \leq \Omega^c.$$

– the eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  are

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - \alpha, \quad \lambda_2 = \frac{m}{\rho} + \alpha.$$

– the matrix  $Z := (\zeta_{lj})_{l, j=1, 2}$

$$Z = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfies  $\det|Z| \neq 0$ .

We index by 0 what is considered at  $t = x = 0$ . Hence  $u^0 = u(0,0) = \phi(0)$ ...

**Definitions**

- The domain  $Q_{0,b}(\delta_0)$  defined by

$$Q_{0,b}(\delta_0) = \{(t,x); 0 \leq t \leq \delta_0; X_1(t) \leq x \leq X_2(t)\}.$$

is a strong determinate domain of  $I$  if

1.  $X_1$  and  $X_2$  are  $\mathcal{C}^1$  functions for  $0 \leq t \leq \delta$ ,
2.  $X_1(0) = 0$  and  $X_2(0) = b$ ,
3. for any function  $v$  in  $\mathcal{C}^1(Q_{0,b}(\delta_0))$  such that

$$\frac{\beta}{2} \leq v_1(t,x) \leq \Omega^c, \quad \|v_2\| \leq \Omega^c,$$

it holds that

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1(s)}{ds} \geq \lambda_2(s, X_1(s), v(s, X_1(s))), \\ \frac{dX_2(s)}{ds} \leq \lambda_1(s, X_2(s), v(s, X_2(s))). \end{array} \right.$$

- We recall the definition of the modulus of continuity,

$$\omega(\eta, f) := \sup_{\substack{|t-t'| \leq \eta \\ |x-x'| \leq \eta \\ (t,x), (t',x') \in Q_{0,b}(\delta)}} |f(t,x) - f(t',x')|, \quad \eta > 0, \quad f \in \mathcal{C}^0(Q_{0,b}(\delta)).$$

If  $G$  is a subset of  $\mathcal{C}^0(Q_{0,b}(\delta))$ , then

$$\omega(\eta, G) := \sup_{f \in G} \omega(\eta, f).$$

- Let

$$q = \partial_t v, \quad z = \partial_x v.$$

- Let

$$E(\delta_0) := \left\{ (t,x,u) \mid (t,x) \in Q_{0,b}(\delta_0), \frac{\beta}{2} \leq u_1 \leq \Omega^c, |u_2| \leq \Omega^c \right\}. \quad (3.6)$$

– Denote by

$$\tilde{H}_0 := \sup_{\substack{k=1,2 \\ (t,x,u) \in E(\delta_0)}} \sum_{j,l=1}^2 |\zeta^{kl} \zeta_{lj}(t,x,u)|,$$

and

$$\tilde{H}_1 := \sup_{\substack{k=1,2 \\ (t,x,u) \in E(\delta_0)}} \sum_{j,l=1}^2 |\zeta^{kl} \zeta_{lj} \lambda_l(t,x,u)|,$$

where  $(\zeta^{kl})$  is the inverse matrix of  $(\zeta_{lj})$ .

### 3.2.3 Theorem

**Theorem 3.2.2** *Let  $E(\delta_0)$  be defined by (3.6). Assume that the functions  $\phi_i$  are  $C^1$  on  $\mathbb{R}$ . Then there exists a positive time  $\delta_* \leq \delta_0$  such that the problem (3.5) has a unique solution in  $C^1(Q_{0,b}(\delta_*))$ .*

Proof. First, one can see that the functions  $\zeta_{lj}$  are  $C^1$  on  $E(\delta_0)$ .

Then, let  $\Omega_1^c$  be a positive constant such that

$$\Omega_1^c > \|\phi\| + (\tilde{H}_0 + \tilde{H}_1)\|\dot{\phi}\|, \quad \Omega_1^c > \Omega^c.$$

Let

$$\Sigma^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c) = \{v(t,x); v \in C^1(Q_{0,b}(\delta)), \|v\| \leq \Omega^c, \|v\|_1 \leq \Omega_1^c\},$$

and

$$\Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c) = \left\{ v(t,x); v \in C^1(Q_{0,b}(\delta)), \frac{\beta}{2} \leq v_1 \leq \Omega^c, |v_2| \leq \Omega^c, \|v\|_1 \leq \Omega_1^c \right\},$$

where

$$\|v\|_1 := \|v\| + \|\partial_t v\| + \|\partial_x v\|.$$

For any  $v \in \Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c)$  the linear problem

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x,v(t,x))(\partial_t u_j + \lambda_l(t,x,v(t,x))\partial_x u_j) = 0 & l = 1,2, \\ u_j(0,x) = \phi_j(x) \text{ with } \|\phi_j\| \leq \Omega^c, \end{cases} \quad (3.7)$$

has a unique solution  $u \in C^1(Q_{0,b}(\delta))$ , according to Theorem 3.2.1. Hence, we can define the operator  $T$  by

$$u = T(v).$$

After some computation, we can show that there exists a time  $\delta_1$  such that for all times  $\delta \leq \delta_1$ , the solution  $u \in \Sigma^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c)$ . We now choose  $\tilde{\delta}_1 \leq \delta_1$ , and  $\beta$  such that

$$\frac{\beta}{2\Omega_1^c} > \tilde{\delta}_1.$$

Thus

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= u_1(0, x) + \int_0^t \partial_t u_1(s, x) ds \\ &\geq \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

for any  $t \leq \tilde{\delta}_1$ . Hence  $u_1$  stays bounded from below. Moreover, after some calculus, it can be shown that

$$\|u\| \leq \Omega^c \text{ and } \|u\|_1 \leq \Omega_1^c,$$

hence,  $u \in \Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c)$ . Nevertheless,  $\Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c)$  is not closed in  $\mathcal{C}^0$ .

Then, define the family  $\Gamma^*$  defined by

$$\Gamma^* := \{\zeta_{lj}(t, x, v), \partial_t \zeta_{lj}(t, x, v), \partial_x \zeta_{lj}(t, x, v), \partial_v \zeta_{lj}(t, x, v), \lambda(t, x, v), \partial_x \lambda(t, x, v)\}.$$

and,

$$\begin{aligned} \omega(\eta, \Gamma^*) &:= \sup_{f \in \Gamma^*} \omega(\eta, f) \\ &:= \sup_{f \in \Gamma^*} \sup_{\substack{|t - t'| \leq \eta \\ |x - x'| \leq \eta \\ \|v - v'\| \leq \eta \\ (t, x, v) \in E(\delta_0), (t', x', v') \in E(\delta_0)}} |f(t, x, v) - f(t', x', v')|. \end{aligned}$$

Since  $\zeta_{lj}$ ,  $\lambda_l$  and their derivatives are continuous, it is clear that  $\omega(\eta, \Gamma^*)$  goes to zero when  $\eta$  goes to zero. Via estimations obtained in the linear context, it can be shown that there exists a positive number  $\delta_2 \leq \tilde{\delta}_1$ , and a function  $\Omega_2^c(\eta)$  depending on  $\omega(\eta, \Gamma^*)$ , such that

$$- \Omega_2^c(\eta) \rightarrow 0 \text{ when } \eta \rightarrow 0.$$

- For any  $\delta \leq \delta_2$ , if  $v \in \Sigma_0^c(\delta, \Omega^c, \Omega_1^c)$  and if

$$\omega(\eta, q) + \omega(\eta, z) \leq \Omega_2^c(\eta),$$

where

$$q = v_t, z = v_x,$$

then, for  $u = Tv$ ,

$$\omega(\eta, p) + \omega(\eta, w) \leq \Omega_2^c(\eta),$$

where

$$p = u_t, w = u_x.$$

With the previous definitions, the following Proposition holds.

**Proposition 3.2.3** *The spaces*

$$\Sigma^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c, \Omega_2^c(\cdot)) := \{v \in \Sigma^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c), \omega(\eta, q) + \omega(\eta, z) \leq \Omega_2^c(\eta), \eta < \eta_0\}$$

and

$$\Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c, \Omega_2^c(\cdot)) := \{v \in \Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c), \omega(\eta, q) + \omega(\eta, z) \leq \Omega_2^c(\eta), \eta < \eta_0\} \quad (3.8)$$

for some fixed  $\eta_0 > 0$  are convex compact subsets of  $C^0(Q_{0,b}(\delta))$ .

Proof. We refer to Proposition 3.3.1.

#

Moreover the map

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0^c & \longrightarrow & \Sigma_0^c \\ v & \longmapsto & u \end{array}$$

is a contraction map has a unique fixed point, which ends the proof of Theorem 3.2.2.

#

### 3.2.4 Maximum domain of determination

We can go further about the concept of determination. We have seen that the solution is defined on a strong determinate domain  $Q_{0,b}(\delta)$ . We can show that there exists a solution  $u$  to (3.5) in the domain

$$\{0 \leq t \leq \delta, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\},$$

where

$$\begin{cases} \frac{dx_1(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1, u(s, x_1)), \\ x_1(0) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

and

$$\begin{cases} \frac{dx_2(s)}{ds} = \lambda_1(s, x_2, u(s, x_2)), \\ x_2(0) = b. \end{cases} \quad (3.10)$$

First, for any function  $v$  in  $\mathcal{C}^1(Q_{0,b}(\delta))$  such that

$$\frac{\beta}{2} \leq v_1(t,x) \leq \Omega^c, \quad \|v_2\| \leq \Omega^c, \quad (3.11)$$

$$v(0,x) = \phi(x), \quad x \in I, \quad (3.12)$$

denote by  $x_1^v$  and  $x_2^v$  the curves defined by

$$\begin{cases} \frac{dx_1^v(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1^v(s), v(s, x_1^v(s))), \\ x_1^v(0) = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

and

$$\begin{cases} \frac{dx_2^v(s)}{ds} = \lambda_1(s, x_2^v(s), v(s, x_2^v(s))), \\ x_2^v(0) = b. \end{cases} \quad (3.14)$$

Let

$$\bar{a} := -(1 + 2\frac{\Omega^c}{\beta})\delta,$$

and

$$\bar{b} := b + (2\frac{\Omega^c}{\beta} + 1)\delta.$$

They are chosen so that the strong determinate domain defined by  $Q_{\bar{a},\bar{b}}(\delta)$  contains all domains with boundary  $x_1^v$ ,  $x_2^v$  respectively starting at 0 and  $b$ , for any  $v$  satisfying (3.11) and (3.12). Indeed, extend the initial data  $\phi$  to  $\bar{I} := [\bar{a}, \bar{b}]$ . For any  $v$  satisfying (3.11) and (3.12), and  $y_1^v$ ,  $y_2^v$  defined by

$$\begin{cases} \frac{dy_1^v(s)}{ds} = \lambda_2(s, y_1, v(s, y_1)), \\ y_1(0) = \bar{a}, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_2^v(s)}{ds} = \lambda_1(s, y_2, v(s, y_2)), \\ y_2(0) = \bar{b}, \end{cases} \quad (3.16)$$

it holds that

$$y_1^v(t) \leq \bar{a} + (\alpha + 2\frac{\Omega^c}{\beta})t \leq (\alpha - 1)t$$

and

$$y_2^v(t) \geq b + (-\alpha + 2\frac{\Omega^c}{\beta})t$$



Thanks to Theorem 3.2.2, there exists a solution  $\bar{u}$  in  $\mathcal{C}^1(Q_{\bar{a}\bar{b}}(\delta_*))$  for some  $\delta_* \leq \delta_0$ . In particular,  $\bar{u}$  is equal to  $u$  on  $Q_{0b}(\delta_*)$ . Then, let the curves  $x_1$  and  $x_2$  be defined by

$$\begin{cases} \frac{dx_1(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1, \bar{u}(s, x_1)), \\ x_1(0) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

and

$$\begin{cases} \frac{dx_2(s)}{ds} = \lambda_1(s, x_2, \bar{u}(s, x_2)), \\ x_2(0) = b, \end{cases} \quad (3.18)$$

The solution  $\bar{u}$  to the system (3.5) in  $\mathcal{C}^1(Q_{\bar{a}\bar{b}}(\delta_*))$  is now well defined in the domain

$$Q(\delta_*) := \{(t, x); 0 \leq t \leq \delta_*; x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\},$$

which is called the maximum determinate domain.

Denoting by

$$\Delta(t) := \left(\alpha - \frac{\Omega^c}{\beta}\right)t,$$

and

$$\bar{\Delta}(t) := \bar{a} + \left(\alpha + \frac{\Omega^c}{\beta}\right)t,$$

the maximum determinate domain  $Q(\delta_*)$  is drawn on Figure 3.3.

Remark The maximum determinate domain depends only on the initial data defined on  $I$ .

### 3.2.5 Definitions

The maximum determinate domain enables to construct the following compact subset of  $\mathcal{C}^0(Q(\delta))$ . Indeed, the definition of the set  $E(\delta_0)$  which is given by 3.6 can take it into account, so that  $E(\delta_0)$  becomes

$$E(\delta_0) := \left\{ (t, x, u) \mid (t, x) \in Q(\delta_0), \frac{\beta}{2} \leq u_1 \leq \Omega^c, |u_2| \leq \Omega^c \right\}. \quad (3.19)$$

In the same way, the modulus of continuity is now given by

$$\omega(\eta, f) := \sup_{\substack{|t - t'| \leq \eta \\ |x - x'| \leq \eta \\ (t, x), (t', x') \in Q(\delta)}} |f(t, x) - f(t', x')|.$$

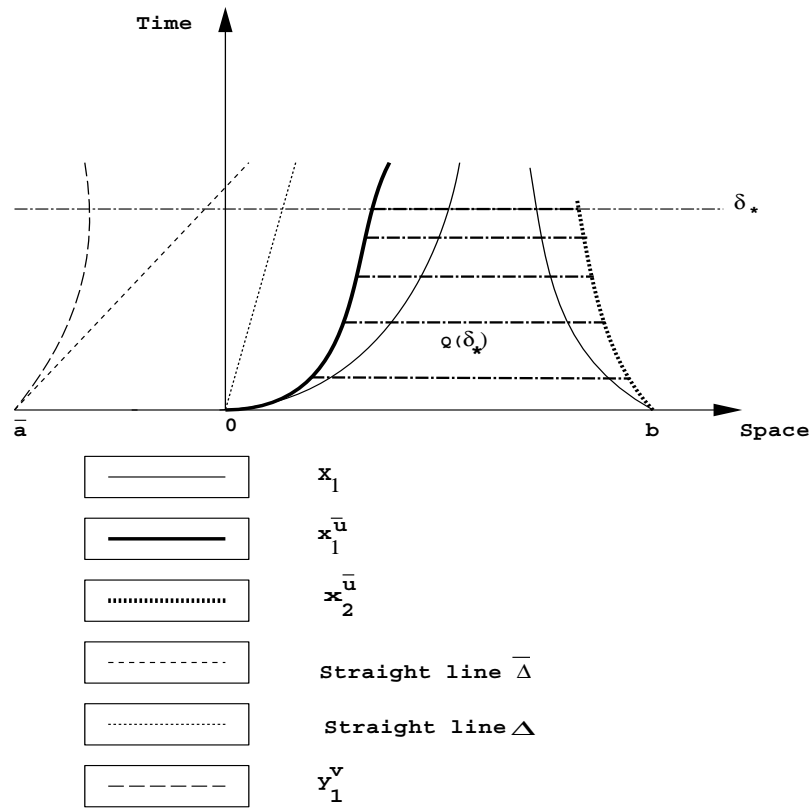


FIG. 3.3 – Maximum Domain of Determination  $Q(\delta_*)$

and the function  $\Omega_2^c(\eta)$  is also defined on  $Q(\delta)$ . Then, the set

$$\Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c, \Omega_2^c(\cdot)) := \{v \in \Sigma_0^c(\delta|\Omega^c, \Omega_1^c), \forall \eta \omega(\eta, q) + \omega(\eta, z) \leq \Omega_2^c(\eta)\} \quad (3.20)$$

where

$$\Sigma_0^c(\delta, \Omega^c, \Omega_1^c) = \left\{ v(t, x); v \in C^1(Q(\delta)), \frac{\beta}{2} \leq v_1 \leq \Omega^c, |v_2| \leq \Omega^c, \|v\|_1 \leq \Omega_1^c \right\},$$

is a compact subset of  $Q(\delta)$ .

### 3.3 The boundary problem for the Euler system

Let  $x_1$  be the curve defined by (3.9), i.e.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1, u^c(s, x_1)), \\ x_1(0) = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

where  $u^c$  is the solution of the initial value problem (3.5). Let

$$R(\delta) = \{(t, x); 0 \leq t \leq \delta, 0 \leq x \leq x_1(t)\}, \quad (3.22)$$

and  $\eta > 0$  be given. Let the matrix  $\tilde{Z}(\tilde{\rho}, \tilde{m})$  be defined by

$$\tilde{Z}(\tilde{\rho}, \tilde{m}) = (\tilde{\zeta}_{lj}) = \begin{pmatrix} -(\frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}} + \alpha) & 1 \\ \tilde{\rho} & \\ -(\frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}} - \alpha) & 1 \end{pmatrix},$$

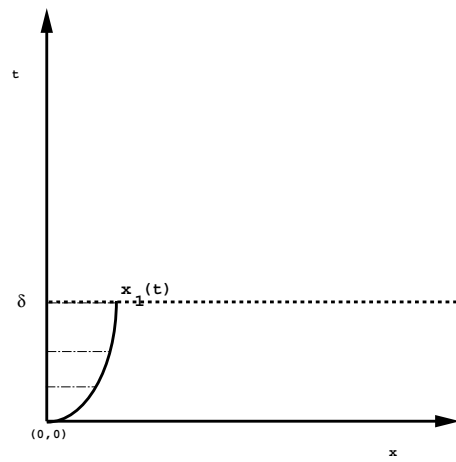
and

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}} - \alpha, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{\tilde{m}}{\tilde{\rho}} + \alpha.$$

Let  $\tilde{u} = (\tilde{\rho}, \tilde{m})$ . We consider the following problem on  $R(\delta)$ ,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \tilde{\zeta}_{lj}(t, x, \tilde{u})(\partial_t \tilde{u}_j + \tilde{\lambda}_l(t, x, \tilde{u}) \partial_x \tilde{u}_j) = 0, \quad l = 1, 2, \\ \tilde{u}_j(t, x) = u_j^c(t, x), \quad j = 1, 2, t \in (0, \delta), x = x_1(t), \\ \tilde{u}_2(t, 0) = \tilde{m}(t), t \in (0, \delta). \end{cases} \quad (3.23)$$

Like for the Cauchy problem, we index by 0 what is considered at  $t = x = 0$ . Hence  $\tilde{u}^0 = \tilde{u}(0, 0) \dots$

FIG. 3.4 – *Domain*  $R(\delta)$ .

Remarks

- The compatibility conditions

$$\tilde{\rho}^0 = \tilde{\rho}(0,0) = \rho^c(0,0), \tilde{m}^0 = \tilde{m}(0,0) = \tilde{m}(0) = m^c(0,0)$$

are necessary, since solution in  $C^0(R(\delta))$  are considered.

- In order to prescribe only one boundary condition, it is sufficient that

$$\tilde{\lambda}_1^0 < 0 < \tilde{\lambda}_2^0,$$

i.e. that a characteristic goes out of the domain and the other enters it. In particular

$$\frac{\tilde{m}^0}{\tilde{\rho}^0} - \alpha < 0.$$

This condition will remain true on a small enough interval of time.

- We are looking for solution  $u$  to (3.23) which belong to  $\mathcal{C}^1(R(\delta))$  such that  $u_1$  is also bounded from below.
- The scheme of the Li Ta-tsien proof of existence and uniqueness of the solution of the system (3.23) is the same as for the Cauchy problem. Indeed, the linear case, and then the quasilinear problem are studied. In this section we shall not detail this scheme. We will rewrite the system (3.23) in Section 3.3.1, and give some definitions in section 3.3.2, in order to use the Li Ta-tsien theorem, which provides a sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution.

### 3.3.1 A new system

The setting of Li Ta-tsien results, used in the following, consists in functions vanishing at  $(t,x) = (0,0)$  and the problem is considered in an angular domain of the type

$$0 \leq \bar{x} \leq \bar{t} \leq \delta.$$

Hence, denote by

$$u := \tilde{u} - \tilde{u}^0, \text{ ie } \rho := \tilde{\rho} - \tilde{\rho}^0, m := \tilde{m} - \tilde{m}^0.$$

Let

$$\zeta_{lj}(t,x,u) := \tilde{\zeta}_{lj}(t,x,\tilde{u}),$$

and

$$\lambda_l(t,x,u) := \tilde{\lambda}_l(t,x,\tilde{u}).$$

The system (3.23) is equivalent to

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x,u)(\partial_t u_j + \lambda_l(t,x,u)\partial_x u_j) = 0, & l = 1,2, (t,x) \in R(\delta), \\ u_j(t,x) = u_j^c(t,x) - \tilde{u}_{0,j}, & j = 1,2, t \in (0,\delta), x = x_1(t), \\ u_2(t,0) = \tilde{m}(t) - \tilde{m}_0, & t \in (0,\delta). \end{cases} \quad (3.24)$$

We see that  $u^0 = 0$ , and

$$\lambda_l(0,0,0) = \sigma(0,0,\tilde{u}^0),$$

so that

$$\lambda_1^0 < 0 < \lambda_2^0.$$

The boundary conditions can be written in the following way. Let

$$G_1(t) := -\lambda_2^0(\rho^c - \tilde{\rho}^0) + (m^c - \tilde{m}^0),$$

and

$$G_2(t,u) := -\lambda_1^0(\rho - \tilde{\rho}^0) + (\tilde{m} - \tilde{m}^0).$$

The boundary conditions

$$\begin{aligned} u_j(t,x) &= u_j^c(t,x) - \tilde{u}_j^0, & t \in (0,\delta), \text{ on } x = t, \\ u_2(t,0) &= \tilde{m}(t) - \tilde{m}^0, & \text{ on } x = 0, \end{aligned}$$

are equivalent to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j &= G_1(t), & t \in (0,\delta), x = x_1(t), \\ \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j &= G_2(t,u), & t \in (0,\delta), x = 0. \end{aligned}$$

Proof.

The first set of boundary conditions is easily included in the second one. Conversely, if on  $x = x_1(t)$ ,

$$-\lambda_2^0 \rho + m = -\lambda_2^0(\rho_c - \rho^0) + (m_c - m^0), \quad (3.25)$$

let us prove that

$$\rho = \rho_c - \tilde{\rho}^0, \quad m = m_c - \tilde{m}^0.$$

Let us derive (3.25) with respect to the time, so that

$$-\lambda_2^0(\partial_t \rho(t,x_1) + \lambda_2 \partial_x \rho(t,x_1)) + (\partial_t m(t,x_1) + \lambda_2 \partial_x m(t,x_1)) = -\lambda_2^0 d_t \rho_c + d_t m_c,$$

or

$$-\lambda_2^0 d_t \rho(t, x_1) + d_t m(t, x_1) = -\lambda_2^0 d_t \rho_c + d_t m_c.$$

Moreover, the second equation of system (3.24), considered on  $x = x_1(t)$ , gives

$$-\lambda_1(\partial_t \rho(t, x_1) + \lambda_2 \partial_x \rho(t, x_1)) + (\partial_t m(t, x_1) + \lambda_2 \partial_x m(t, x_1)) = 0,$$

i.e.

$$-\lambda_1 d_t \rho(t, x) + d_t m(t, x) = 0$$

And so, we get the two systems

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2^0) d_t \rho = -\lambda_2^0 d_t \rho_c + d_t m_c, \\ \rho(t=0) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

and

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2^0) d_t m = \lambda_1(-\lambda_2^0 d_t \rho_c + d_t m_c), \\ m(t=0) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

One can see that

$$\rho(t, x) - \rho(0, 0) = \int_0^t (\partial_t \rho(\tau, x_1(\tau)) + \lambda \partial_x \rho(\tau, x_1(\tau))) d\tau$$

It follows from the previous remark that  $\partial_t \rho$ ,  $\lambda$  and  $\partial_x \rho$  are bounded. Hence there exist a constant  $C$  and a time  $\delta$  such that

$$\rho(t, x) \geq \tilde{\rho}^0 - \delta C,$$

and

$$m(t, x) \leq \tilde{m}^0 + \delta C.$$

Hence there exists  $\delta$  such that

$$\frac{m}{\rho} - \alpha < 0.$$

Since  $\lambda_1$  is lipschitz,  $\lambda_1 - \lambda_2^0 < 0$  for sufficiently small times (because  $\lambda_1^0 - \lambda_2^0 = -2\alpha < 0$ ), so that there exists a unique solution  $(\rho, m)$  to 3.26 and 3.27. Then, on  $(t, x_1(t))$  with  $0 \leq t \leq \delta$ ,  $(\rho_c - \rho_c(0, 0), m_c - m_c(0, 0))$  is a solution of the same system. And so  $\rho = \rho_c - \rho_c(0, 0)$  and  $m = m_c - m_c(0, 0)$  on  $(t, x_1(t))$ . Thanks to the compatibility relation,  $\rho_0(0) = \rho_c(0, 0)$  and  $m^c(0, 0) = m_0(0)$ , hence  $\rho = \rho_c - \rho_0(0)$  and  $m = m_c - m_0(0)$  on  $(t, x_1(t))$ .

#

Thus, the system (3.24) becomes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x,u)(\partial_t u_j + \lambda_l(t,x,u)\partial_x u_j) = 0, \quad l = 1,2, (t,x) \in R(\delta), \\ \text{on } t = x_1 : \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t), \quad t \in (0,\delta), \\ \text{on } x = 0 : \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t,u), \quad t \in (0,\delta). \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Then, let us introduce the following change of variables  $(t,x)$  into  $(\bar{t},\bar{x})$ , where

$$\begin{aligned} \bar{t} &:= t, \\ \bar{x} &:= \frac{x}{T(t)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

with

$$T(t) := \frac{x_1(t)}{t}.$$

It holds that  $x_1(t) \neq 0$  for all  $t \in (0,\delta_0)$ , since  $x_1(0) = 0$  and  $\lambda_2 > 0$ . Let  $\bar{u}, \bar{\zeta} \dots$  be defined by

$$\bar{u}(\bar{t},\bar{x}) := u(t,x), \quad \bar{\zeta}_{lj}(\bar{t},\bar{x},\bar{u}) := \zeta_{lj}(t,x,u) \dots$$

Let

$$\bar{R}(\delta) := \{(\bar{t},\bar{x}); 0 \leq \bar{t} \leq \delta, 0 \leq \bar{x} \leq \bar{t}\}. \quad (3.30)$$

Hence, the system (3.28) is reduced to the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \bar{\zeta}_{lj}(\bar{t},\bar{x},\bar{u})(\partial_{\bar{t}} \bar{u}_j + \bar{\gamma}_l(\bar{t},\bar{x},\bar{u})\partial_{\bar{x}} \bar{u}_j) = 0, \quad l = 1,2, (\bar{t},\bar{x}) \in \bar{R}(\delta), \\ \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 \bar{u}_j(\bar{t},\bar{x}) = \bar{G}_1(\bar{t}), \quad \bar{t} \in (0,\delta), \quad \bar{x} = \bar{t}, \\ \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 \bar{u}_j(\bar{t},0) = \bar{G}_2(\bar{t},\bar{u}), \quad \bar{t} \in (0,\delta), \end{array} \right. \quad (3.31)$$

where

$$\bar{\gamma}_l(\bar{t},\bar{x},\bar{u}) := \frac{1}{T(\bar{t})}(\bar{\lambda}_l(\bar{t},\bar{x},\bar{u}) - \frac{\partial x}{\partial \bar{t}}).$$

In order to have a well-posed problem, it is sufficient to have

$$\bar{\gamma}_1(0,0,0) < 0 < \bar{\gamma}_2(0,0,0). \quad (3.32)$$



But

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{t}} = \frac{\dot{x}_1(\bar{t})\bar{t} - x_1(\bar{t})}{\bar{t}^2}\bar{x},$$

and expansions of the first order for  $\dot{x}_1$  and of second order for  $x_1$  provide

$$\bar{\gamma}_l = \frac{\bar{t}}{x_1(0) + \bar{t}\dot{x}_1(0) + o(\bar{t})} \left( \bar{\lambda}_l - \frac{\bar{x}}{\bar{t}^2} \left( (\dot{x}_1(0) + \bar{t}\ddot{x}_1(0) + o(\bar{t}))\bar{t} - (x_1(0) + \bar{t}\dot{x}_1(0) + \frac{1}{2}\bar{t}^2\ddot{x}_1(0) + o(\bar{t}^2)) \right) \right).$$

It follows from  $x_1(0) = 0$  that

$$\bar{\gamma}_l = \frac{1}{\dot{x}_1(0) + O(\bar{t})} \left( \bar{\lambda}_l - \bar{x} \left( \frac{1}{2}\ddot{x}_1(0) + o(1) \right) \right).$$

The inequalities (3.32) hold for a small enough time in the domain  $0 \leq \bar{x} \leq \bar{t}$ .

For the sake of convenience, let us write  $u$  instead of  $\bar{u}$  and so on, but keep  $\bar{R}(\delta)$ , so that the system (3.31) writes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x,u)(\partial_t u_j + \gamma_l(t,x,u)\partial_x u_j) = 0, \quad l = 1,2, (t,x) \in \bar{R}(\delta), \\ \text{on } t = x : \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t), \quad t \in (0,\delta), \\ \text{on } x = 0 : \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t,u), \quad t \in (0,\delta). \end{array} \right. \quad (3.33)$$

where  $\bar{R}(\delta)$  is given by 3.30.

Let

$$\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta) = \{v(t,x); v \in C^1(\bar{R}(\delta)), v(0,0) = 0\},$$

and

$$q_i := \partial_t v_i, \quad q_{2+i} = \partial_t v_i + \partial_x v_i, \quad i = 1,2.$$

We then define

$$\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1) = \{v(t,x); v \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta), \|q\| \leq \Omega_1\}. \quad (3.34)$$

**Remark.** We are looking for a solution  $u$  which belongs to  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$ , hence the derivative of  $u$  are bounded from above by  $\Omega_1$ . It follows that if  $\rho(0,0) > \beta$ , then for a sufficiently small  $\delta$ ,  $\rho(t,x) > \frac{\beta}{2}$ ,  $t \in (0,\delta_0)$ .

### 3.3.2 A few definitions about the boundary problem

Remarks.

- If  $v \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$  where  $\bar{\Sigma}^{pbl}$  is defined by 3.34, then  $\|v\| \leq \Omega_1\delta$ .
- The space  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$  is a precompact subset of  $C^0$  but is not closed for the  $\|\cdot\|_\infty$  norm. Indeed, let

$$u_n(t,x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

It is clear that  $u_n(t,x) \in \Sigma^{pbl}(\delta|\Omega_1)$ . Moreover,

$$u_n \longrightarrow u \text{ in } C^0,$$

where  $u(t,x) := |x|$  which is not differentiable.

Let  $\Omega_2(\eta)$  be a function such that  $\Omega_2(\eta) \rightarrow 0$  as  $\eta \rightarrow 0$ .

Let  $\Omega(\eta,f)$  be the modified modulus of continuity

$$\Omega(\eta,f) = \sup_{\substack{|t-t'| \leq \eta \\ |x-x'| \leq \eta \\ (t,x),(t',x') \in \bar{R}(\delta)}} |f(t,x) - f(t',x')|.$$

**Proposition 3.3.1** *The set*

$$\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot)) := \{v \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1); \Omega(\eta,q) \leq \Omega_2(\eta), \text{ for any } \eta > 0\}$$

*is a compact subset of  $C^0(\bar{R}(\delta))$ .*

Proof. Let  $(v_n)$  be a bounded sequence of  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\eta))$ . Then

- On one hand, the sequence  $(v_n)$  is bounded in  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$ . Moreover, this sequence is uniformly equicontinuous, so it belongs to a precompact subset of  $C^0$  by Ascoli's theorem (see Annexe D). Hence, there exists a subsequence  $(v_{n_k})$  of  $(v_n)$ , such that

$$v_{n_k} \xrightarrow{C^0} v.$$

- On the other hand,  $(q_{n_k})$  is also bounded and uniformly equicontinuous. Indeed, let  $\epsilon > 0$ . If  $|t-t'| < \eta$  and  $|x-x'| \leq \eta$ , then

$$|q_{n_k}(t,x) - q_{n_k}(t',x')| \leq \Omega_2(\eta) < \epsilon,$$

for  $\eta$  small enough. Hence the sequence  $(q_{n_k})$  belongs to a compact subset of  $C^0$ . There exists then a subsequence  $(q_{n'_k})$ , such that

$$q_{n'_k} \xrightarrow{C^0} q.$$

Thus,

$$q_i = \partial_t v_i,$$

and

$$q_{2+i} = \partial_t v_i + \partial_x v_i,$$

in the distributional sense.

- In fact  $q$  and  $u$  are continuous. And so, the previous equalities hold in  $C^0$ .
- The limit  $v$  satisfies the same equalities as  $(v_n)$ .

Hence  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\eta))$  is a compact subset of  $C^0(\bar{R}(\delta))$ . This completes the proof of Proposition 3.3.1.

### 3.3.3 Existence and uniqueness of the solution

**Lemma 3.3.1** *If  $m_0 > 0$ , then there exists a positive time  $\delta_{**}$ , such that there exists a unique solution  $u \in C^1(\bar{R}(\delta_{**}))$  to the problem (3.33).*

Proof. Let

$$\begin{aligned} H &:= \left( \frac{\partial G_l}{\partial u_j} \right) (0,0,0)(\zeta^{jk_0}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_1^0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^0 - \lambda_2^0} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1^0 & -\lambda_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^0 - \lambda_2^0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_1^0 & \lambda_1^0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Let us recall a Li Ta-tsien result.

**Theorem (Li Ta tsien)** *Suppose that  $\zeta_{lj}$ ,  $G_l$  are  $C^1$ , and  $\lambda_l$ ,  $\partial_x \lambda_l$ ,  $\partial_u \lambda_l$  are continuous on their respective domain. If the minimal characterizing number  $\theta$  of  $H$ , defined by*

$$\theta := \inf_{\gamma_i \neq 0} \max_{l=1,2} \sum_{k=1}^2 \left| \sum_{j=1}^2 \frac{\gamma_l}{\gamma_k} H_{lk} \right|$$

*is smaller than one, then there exists  $\delta_{**} > 0$  small enough such that the Euler problem with boundary conditions (3.33) has a unique solution  $u$  in  $C^1(\bar{R}(\delta_{**}))$ .*

In our case

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \frac{|\lambda_1^0|}{|\lambda_1^0 - \lambda_2^0|} + \frac{1}{2} \frac{|\lambda_1^0|}{|\lambda_1^0 - \lambda_2^0|} \\ &= \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{m_0}{\alpha \rho_0} \right|. \end{aligned}$$

It follows from

$$m_0 > 0, \lambda_1^0 < 0,$$

that  $0 < \theta < 1$ , so that there exists a unique solution  $u$  of 3.33 in  $C^1(\bar{R}(\delta))$ .

#

Remarks

- The proof of the Li Ta-tsien theorem consists in a fixed point technique on the Banach space  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot))$  where  $\Omega_1$  is a positive constant such that

$$\Omega_1 > \frac{1}{1-\theta} \sup_{\substack{0 \leq t \leq \delta_0 \\ \frac{\beta}{2} \leq v \leq 1, |v_2| \leq 1 \\ l = 1, 2}} \left| \frac{\partial G_l}{\partial t}(t, v) \right| \quad (3.35)$$

- Then, denote by  $T$  the map

$$\begin{array}{ccc} T : \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot)) & \longrightarrow & \Sigma^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot)) \\ v & \longmapsto & u \end{array}$$

where  $u$  is the solution to

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, v)(\partial_t u_j + \gamma_l(t, x, v)\partial_x u_j) = 0, \quad l = 1, 2, (t, x) \in \bar{R}(\delta), \\ \text{on } t = x : \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t), \quad t \in (0, \delta), \\ \text{on } x = 0 : \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t, u), \quad t \in (0, \delta). \end{array} \right. \quad (3.36)$$

The space  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot))$  is a subspace of  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$ , and the condition

$$0 < \theta < 1$$

implies that  $T$  maps  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1)$  into itself. Then, it can be shown that there exists an integer  $N$  such that, for any  $\delta$  small enough,  $T^N$  is a contraction mapping from  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot))$  (which is a closed subset of  $\mathcal{C}^0(\bar{R}(\delta))$ ) into itself. Hence,  $T^N$  has a unique fixed point.

- The function  $\Omega_2(\eta)$  used in Proposition 3.3.1 can be defined in the following way. Let the space  $\Gamma^*$  be given by

$$\begin{aligned} \Gamma^* &:= \{\zeta_{lj}(t,x,v), \partial_t \zeta_{lj}(t,x,v), \partial_x \zeta_{lj}(t,x,v)\} \\ &\cup \{\partial_v \zeta_{lj}(t,x,v), \lambda(t,x,v), \partial_x \lambda(t,x,v)\} \\ &\cup \{G_l(t,v), \partial_t G(t,v), \partial_v G(t,v)\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Set

$$\omega^*(\eta) := \omega(\eta|\Gamma^*). \quad (3.38)$$

We see that  $\omega^*(\eta)$  is independent of  $v$  (which is a dump variable in the estimation of  $\omega^*(\eta)$ ). We define  $\Omega_2(\eta)$  by multiplying  $\omega^*$  by a constant  $E$  (which depends on  $\theta$ ),

$$\Omega_2(\eta) = E\omega^*(\eta).$$

- With this definition of  $\Omega_2(\eta)$ , we can show that the solution  $u$  to 3.33 belongs to

$$\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot)) := \{v \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta|\Omega_1), \Omega(\eta, q) \leq \Omega_2(\eta), \text{ for any } \eta > 0\}.$$

### 3.3.4 Order of magnitude of the time of existence and uniqueness of a solution.

An order of magnitude of the time  $\delta$  of existence and uniqueness of the solution  $u$  depends on

- the  $C^0$ -norm  $\|\Gamma^*\|$ , where  $\Gamma^*$  is given by (3.37),
- the moduli of continuity of  $\lambda_l(t,x,v)$ ,

and

- the moduli of continuity of  $\frac{\partial G_l}{\partial u_k}$ .

## 3.4 The initial boundary value problem

We study now the initial boundary value problem

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t,x,u)(\partial_t u_j + \lambda_l(t,x,u)\partial_x u_j) = 0, & l = 1,2, \\ u_2(t,0) = \tilde{m}(t) - m_0, \\ u_1(t,b) = f(t), \\ u(0,x) = \phi(t). \end{cases} \quad (3.39)$$

on the domain  $P(\delta) := (0, \delta) \times [0, b]$ . First, the domain  $P(\delta)$  is splitted as

$$P(\delta) := Q(\delta) \cup R(\delta) \cup S(\delta),$$

see Figure (3.5).

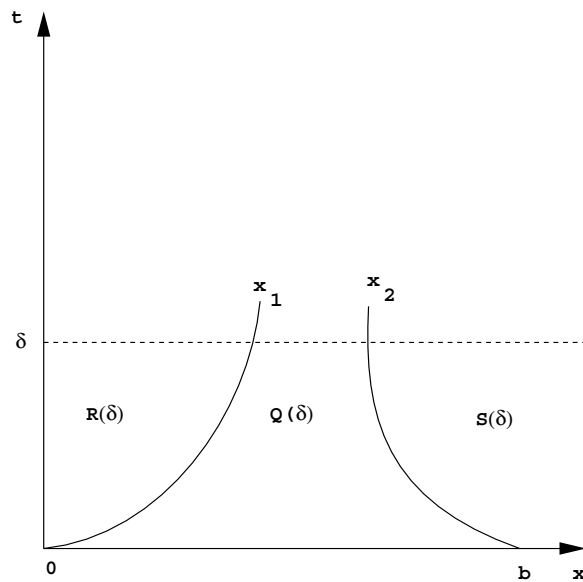


FIG. 3.5 – Domain  $P(\delta)$ .

To solve the system (3.39), we consider the following three problems.

- An initial value problem on the domain  $Q_0(\delta)$ . Indeed, we have seen in Section 3.2.4 that the Cauchy problem has a  $C^1$  solution  $u$  on the maximum domain of determination  $Q(\delta)$

$$Q(\delta) := \{0 \leq t \leq \delta, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\},$$

where

$$\begin{cases} \frac{dx_1(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1, u(s, x_1)), \\ x_1(0) = 0, \\ \frac{dx_2(s)}{ds} = \lambda_1(s, x_2, u(s, x_2)), \\ x_2(0) = b. \end{cases}$$

- A boundary value problem on the domain  $R(\delta)$ . Thanks to Lemma 3.3.1 there exists a unique  $C^1$  solution  $u$  on the domain

$$R(\delta) := \{0 \leq t \leq \delta, 0 \leq x \leq x_1(t)\}.$$

- Another boundary value problem on the following domain

$$S(\delta) = \{0 \leq t \leq \delta, x_2(t) \leq x \leq b\}. \quad (3.40)$$

As previously, we write the boundary conditions in the following form. At  $x = b$ ,

$$G_1(t) := -\lambda_2^0(f - \rho^0) + (m - m^0),$$

and on  $x = x_2(t)$

$$G_2(t, u) := -\lambda_1^0(\rho^c - \rho^0) + (m^c - m^0).$$

As seen in Subsection 3.3.1, let us now introduce the following transformation of independent variables,

$$\begin{aligned} \bar{t} &:= t, \\ \bar{x} &:= \frac{x - b}{x_2(t) - b}t. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Hence we have to study, omitting  $\bar{\cdot}$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u)(\partial_t u_j + \gamma_l(t, x, u)\partial_x u_j) = 0, \quad l = 1, 2, (t, x) \in \bar{R}(\delta), \\ \text{on } t = x : \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t), \quad t \in (0, T), \\ \text{on } x = 0 : \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t, u), \quad t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.42)$$

where  $\bar{R}(\delta)$  is given by (3.30). Then, define by

$$\begin{aligned} H &:= \left( \frac{\partial G_1}{\partial u_j} \right) (0,0,0)(\zeta^{jk_0}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^0 - \lambda_2^0} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda_1^0 & -\lambda_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^0 - \lambda_2^0} \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & -\lambda_2^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and

$$\theta = H_{min} = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{m_0}{\alpha \rho_0} \right|.$$

We can apply the theorem of Li Ta-tsien, since  $m_0 > 0$  and  $0 < \theta < 1$ . Hence, we have shown the existence and uniqueness of a  $C^0$  solution of the problem (3.39).





## Chapitre 4

### The whole problem

## 4.1 Introduction

From now on,  $\Omega$  will denote the interval

$$\Omega := ]0, a[,$$

with the boundary  $\Gamma := \{0\} \cup \{a\}$ . For any time  $T > 0$ , let  $P(T) := ]0, T[ \times \Omega$  and  $\Sigma(T) := ]0, T[ \times \Gamma$ .

We want to show the existence and uniqueness of the solution of the system

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - (D_e u_x - \mu_e u \Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) - rv)u \text{ in } P(T), \\ \partial_t v - (D_i v_x + \mu_i v \Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \rho, \Phi_x) - rv)u \text{ in } P(T), \\ \Phi_{xx} = e(u - v) \text{ in } P(T) \\ D_e u_x = \mu_e u \Phi_x \text{ on } \Sigma(T), \\ v = 0 \text{ on } \Sigma(T), \\ \Phi = g \text{ on } \Sigma(T), \\ u(0, \cdot) = u_0, \\ v(0, \cdot) = v_0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

coupled with

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_2(\rho, m)(\rho_t + \lambda_1(\rho, m)\rho_x) + m_t + \lambda_1(\rho, m)m_x = 0, \\ -\lambda_1(\rho, m)(\rho_t + \lambda_2(\rho, m)\rho_x) + m_t + \lambda_2(\rho, m)m_x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_i(x) \quad m(0, x) = m_i(x), \\ m(t, 0) = \tilde{m}_0(t) := D_i v_x(t, 0), \\ \rho(t, a) = \tilde{\rho}_a(t), \end{array} \right. \quad (4.2)$$

where

$$\lambda_1(\rho, m) = \frac{m}{\rho} - \alpha, \quad \lambda_2(\rho, m) = \frac{m}{\rho} + \alpha,$$

$\alpha$  being a positive constant.

Remark. The fourth equation of (4.2) express the boundary conditions (2.6) for  $(\rho, m)$

$$m(t, 0) = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{if } J_i \leq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.3)$$

where  $m_i$  is the mass of the ions and  $J_i$  their flux. Indeed, the flux for the ions, i.e for  $v$ , writes

$$J_i(t, x) = (-D_i v_x + \mu_i v \Phi_x)(t, x).$$

On the boundary,  $v = 0$  and  $J_i$  reduces to  $J = -D_i v_x$ . Besides, Proposition (2.2.1) shows that  $v_x(t, \cdot)$  is negative in  $x = a$  and positive in  $x = 0$ , hence  $-D_i v_x(t, \cdot)$  is

positive in  $x = a$  and negative in  $x = 0$ . Thus, the boundary conditions always writes

$$m(t,0) = -\beta m_i J_i(t,0) \quad (4.4)$$

and  $\beta$  is taken equal to one.

**Theorem 4.1.1** *Assume*

$$u_0, v_0 \in W^{2,p}(\Omega) \text{ for any } p \in [2,6], \quad 0 \leq u_0, 0 \leq v_0 \text{ in } \Omega,$$

and

$$g \in L^\infty(0, T_0; H^{\frac{11}{2}}(\Gamma)) \cap H^3(0, T_0; H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)) \cap W^{3,\infty}(0, T_0; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)).$$

Then there exists a time  $\delta \leq T_0$  such that there exists a unique solution  $(u, v, \Phi, \rho, m)$  to the coupled system (4.1-4.2) which belongs to  $L^2(0, \delta; H^1(\Omega)) \times L^2(0, \delta; H^1(\Omega)) \times L^2(0, \delta; H^1(\Omega)) \times C^1(P(\delta)) \times C^1(P(\delta))$ .

Proof A fixed point theorem of Schauder type will be used to prove this theorem.

Recall that

$$P(\delta) := Q(\delta) \cup R(\delta) \cup S(\delta),$$

**Definition.** Let

$$\Sigma(P(\delta)) := \left\{ v; v|_{Q(\delta)} \in \Sigma_0^c(\delta | \Omega^c, \Omega_1^c, \Omega_2^c(\cdot)), \quad v|_{R(\delta)} \in \Sigma^{pbl}(R(\delta)), \quad v|_{S(\delta)} \in \Sigma^{pbl}(S(\delta)) \right\}, \quad (4.5)$$

where

$$\Sigma^{pbl}(R(\delta)) := \left\{ v(t, x); \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta | \Omega_1, \Omega_2(\cdot)), \text{ where } \begin{pmatrix} \bar{t} := t, \\ \bar{x} := \frac{x}{x_1(t)} t, \end{pmatrix} \text{ and } \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}) = v(t, x) \right\},$$

and

$$\Sigma^{pbl}(S(\delta)) := \left\{ v(t, x); \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Sigma}^{pbl}(\delta | \Omega_1, \Omega_2(\cdot)), \text{ where } \begin{pmatrix} \bar{t} := t, \\ \bar{x} := \frac{x - a}{x_2(t) - a} t, \end{pmatrix} \text{ and } \bar{v}(\bar{t}, \bar{x}) = v(t, x) \right\}.$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are respectively defined by the characteristic curves (3.9) and (3.10). The subsets  $\Sigma_0^c(\delta | \Omega^c, \Omega_1^c, \Omega_2^c(\cdot))$  and  $\bar{\Sigma}^{pbl}(\delta | \Omega_1, \Omega_2(\cdot))$  are respectively defined by Proposition 3.2.3 and Proposition 3.3.1.

**Proposition 4.1.2** *The space  $\Sigma(P(\delta))$  is a convex and compact subset of  $C^0(P(\delta))$ .*

Proof It is easily seen that  $\Sigma(P(\delta))$  is a convex subspace of  $C^0(P(\delta))$ . Let  $(v_n)$  a bounded sequence of  $\Sigma(P(\delta))$ . Then

- the sequence  $(v_n)$  is bounded and is uniformly equicontinuous, so it belongs to a precompact subspace of  $C^0(P(\delta))$ . And so there is a subsequence of  $(v_n)$  and a function  $v$  of  $C^0$ , such that  $(v_n)$  converges to  $v$  in  $C^0$ .

- The sequence  $(q_n)$  is also bounded. Moreover, it is uniformly equicontinuous. Indeed, for  $(t,x),(t',x') \in Q(\delta)$  or  $(t,x),(t',x') \in R(\delta)$  we are in the cases of Proposition 3.2.3 and Proposition 3.3.1.

If  $(t,x) \in Q(\delta)$  and  $(t',x') \in R(\delta)$ , then denote by  $(t_0,x_0)$  the intersection point between the straight line joining  $(t,x)$  and  $(t',x')$ , and  $x_1$ . Hence any  $(t,x) \in Q(\delta)$ ,  $(t',x') \in R(\delta)$  satisfy  $|t-t_0| \leq \frac{\eta}{2}$ ,  $|t'-t_0| \leq \frac{\eta}{2}$ ,  $|x-x_0| \leq \frac{\eta}{2}$ ,  $|x'-x_0| \leq \frac{\eta}{2}$ . It comes

$$|q_n(t,x) - q_n(t',x')| \leq |q_n(t,x) - q_n(t_0,x_0)| + |q_n(t_0,x_0) - q_n(t',x')|.$$

It follows from the definition of  $\Sigma^{pbl}(R(\delta))$ , that

$$|q_n(t_0,x_0) - q_n(t',x')| = |\bar{q}_n(\bar{t}_0,\bar{x}_0) - \bar{q}_n(\bar{t}',\bar{x}')|$$

The new variables satisfy

$$\begin{aligned} |\bar{t}' - \bar{t}_0| &\leq \frac{\eta}{2} \\ |\bar{x}' - \bar{x}_0| &= \left| \frac{x_0}{x_1(t_0)}t_0 - \frac{x'}{x_1(t')}t' \right| \\ &= \left| (t_0 - t') + t'(1 - \frac{x'}{x_1(t')}) \right| \end{aligned}$$

One can see that, as  $\lambda_2$  is bounded from below by  $\alpha - \frac{2\Omega_1}{\beta}$ ,  $\frac{1}{x_1(t')}$  remains bounded from above, hence

$$\begin{aligned} |t'(1 - \frac{x'}{x_1(t')})| &= \left| \frac{t'}{x_1(t')} (|x_1(t') - x_0| + |x_0 - x'|) \right| \\ &\leq \frac{\delta}{\alpha - \frac{2\Omega_1}{\beta}} (|x_0 - x'| + |t' - t_0|\lambda_2 + |x_0 - x'|) \\ &\leq C\eta \end{aligned}$$

Thus

$$|q_n(t,x) - q_n(t',x')| \leq C\Omega(\eta) + C\Omega^c(\eta),$$

and the sequence  $(q_n)$  is uniformly equicontinuous.

- The end of this proof is the same as for proving the Proposition 3.3.1.

#

Let  $\mathcal{T}$  be the map

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \Sigma(P(\delta)) &\longrightarrow \Sigma(P(\delta)) \\ \sigma &\longmapsto \rho := \mathcal{T}(\sigma), \end{aligned}$$

where  $\rho$  is the first component of the solution  $(\rho, m)$  to

$$\begin{cases} -\lambda_2(\rho_t + \lambda_1\rho_x) + m_t + \lambda_1m_x = 0, \\ -\lambda_1(\rho_t + \lambda_2\rho_x) + m_t + \lambda_2m_x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_i(x) \quad m(0, x) = m_i(x), \quad x \in \Omega, \\ m(t, 0) = \tilde{m}_0(t) = (D_i v_x)(t, 0), \\ \rho(t, a) = \tilde{\rho}_a(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

where  $\tilde{m}_a$  is a given function and  $v, \Phi$  are the solutions to

$$\begin{cases} \partial_t u - (D_e u_x - \mu_e u \Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \sigma, \Phi_x) - rv)u \text{ in } P, \\ \partial_t v - (D_i v_x + \mu_i v \Phi_x)_x = (\nu_i(t, x, \sigma, \Phi_x) - rv)v \text{ in } P, \\ \Phi_{xx} = e(u - v) \text{ in } P, \\ D_e u_x = \mu_e u \Phi_x \text{ in } \Sigma, \\ v = 0 \text{ in } \Sigma, \\ \Phi = g \text{ in } \Sigma, \\ u(0, \cdot) = u_0, \\ v(0, \cdot) = v_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Recall that  $\Sigma(P(\delta))$  is defined by Proposition 4.1.2 and considered for the topology of the  $C^0$  norm.

We will see at Section 4.3.2 that  $\mathcal{T}$  maps  $\Sigma(P(\delta))$  into itself.

Since  $\Sigma(P(\delta))$  is a compact and convex subset of  $C^0$ , it is sufficient for  $\mathcal{T}$  to be continuous for having a fixed point. The map  $\mathcal{T}$  splits into two maps,

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma(P(\delta)) & \xrightarrow{\mathcal{T}_1} & \mathcal{C}^1([0, \delta]) & \xrightarrow{\mathcal{T}_2} & \Sigma(P(\delta)) \\ \sigma & \longmapsto & \mathcal{F} & \longmapsto & \rho := \mathcal{T}(\sigma). \end{array}$$

where

$$\mathcal{F}(t, 0) := D_i v_x(t, 0), \quad t \in (0, \delta),$$

## 4.2 Continuity of the map $\mathcal{T}_1$

For an easier reading,  $D_e, \mu_e, D_i, \mu_i$  and  $e$  are assumed to be equal to 1. Thanks to Theorem 2.4.1, there exist a time  $T$ , given by (2.7), such that for any  $\delta \leq T$ , there exists a unique solution  $(u, v, \Phi)$  which satisfies

$$\begin{aligned} u, v &\in L^2(0, \delta; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, \delta; L^p(\Omega)), \text{ for any } p \in [2, 6], \\ 0 &\leq u, 0 \leq v, \\ \Phi &\in L^2(0, \delta; H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, \delta; W^{2,p}(\Omega)), \text{ for any } p \in [2, 6]. \end{aligned}$$

Time  $T$  depends from constants coming from injection theorem and from  $\|\sigma\|$  or  $\Omega_1$ .

Let us precise the regularity of  $u, v$ , and then, show the continuity of  $\mathcal{T}_1$ . The domain  $(0, t) \times \Omega$  is denoted by  $P(t)$  as well as  $P_t$ .

### 4.2.1 Regularity

The aim of this section is to study the *regularity* of the solution  $(u, v, \Phi)$  of the Drift-Diffusion-Poisson equations written in the form, for any  $t \leq T$ ,

$$\begin{aligned}
\partial_t u - u_{xx} &= \nu_i(\sigma, \Phi_x)u - ruv - (u\Phi_x)_x \text{ in } P(t), \\
\partial_t v - v_{xx} &= \nu_i(\sigma, \Phi_x)u - ruv + (v\Phi_x)_x \text{ in } P(t), \\
u_x &= u\Phi_x \text{ on } \Sigma(t), \\
v &= 0 \text{ on } \Sigma(t), \\
\Phi_{xx} &= u - v \text{ in } P(t), \\
\Phi &= g \text{ on } \Sigma(t), \\
u(0, \cdot) &= u_0, \\
v(0, \cdot) &= v_0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Here,  $E := \Phi_x$ , and  $\nu_i = \nu_i(t, x, \rho, \Phi_x)$  is a function which satisfies, for any  $\sigma, E$ ,  
H<sub>reg</sub> 1.

$$|\nu_{\sigma, E}(t, x)| \leq C|E(t, x)| + C\|\sigma\|_{C^0} t^2.$$

H<sub>reg</sub> 2.

$$\begin{aligned}
|\partial_x \nu_{\sigma, E}(t, x)| &\leq C|E_x(t, x)| + C\|\sigma\|_{C^0} t^2, & (a) \\
|\partial_{xx} \nu_{\sigma, E}(t, x)| &\leq C|E_{xx}(t, x)| + C\|\sigma\|_{C^0} t^2. & (b)
\end{aligned}$$

H<sub>reg</sub> 3.

$$\begin{aligned}
|\partial_t \nu_{\sigma, E}(t, x)| &\leq C|E_t(t, x)| + C\|\sigma\|_{C^0} t, & (a) \\
|\partial_{tt} \nu_{\sigma, E}(t, x)| &\leq C|E_{tt}(t, x)| + C\|\sigma\|_{C^0}. & (b)
\end{aligned}$$

H<sub>reg</sub> 4.

$$\begin{aligned}
|\nu_{\sigma, E}(t, x) - \nu_{\sigma, E}(t, y)| &\leq C|E(t, x) - E(t, y)| + C|x - y|\|\sigma\|_{C^0} T^2, & (a) \\
|\partial_x \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_x \nu_{\sigma, E}(t, y)| &\leq C|E_x(t, x) - E_x(t, y)| + C|x - y|\|\sigma\|_{C^0} T^2, & (b) \\
|\partial_{xx} \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_{xx} \nu_{\sigma, E}(t, y)| &\leq C|E_{xx}(t, x) - E_{xx}(t, y)| + C|x - y|\|\sigma\|_{C^0} T^2. & (c)
\end{aligned}$$

We refer to Annex 1 for an example of a function  $\nu$  satisfying those inequalities.

First of all, we state some propositions about the time regularity of the solution.

#### 4.2.1.1 Estimation on $u_t$

Taking the time derivative in the first and third equations of (4.8) implies that

$$\begin{aligned}
u_{tt} - (u_{tx} - u_t \Phi_x - u \Phi_{tx})_x &= \partial_t (\nu_i(\sigma, E)) u + \nu_i u_t - r(v_t u + v u_t) \text{ in } P(T), \\
u_{tx} &= u_t \Phi_x + u \Phi_{tx} \text{ on } (0, T) \times \Gamma,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_{txx} &= (u_t - v_t) \text{ in } P(T), \\ \Phi_t &= g_t \text{ on } \Sigma(T).\end{aligned}\tag{4.10}$$

The initial condition for  $u_t$  is

$$u_t(0, x) = \nu_i(0, x, \sigma(0, x), E(0, x)) - ru_0(x)v_0(x) + \partial_x(\partial_x u_0(x) - u_0(x)\partial_x \Phi(0, x))$$

The function  $\nu_i(0, x, \sigma(0, x), E(0, x))$  does not depend on  $\sigma$  and

$$\nu_i(0, x, \sigma(0, x), E(0, x)) \leq C|E(0, x)|$$

(see H<sub>reg</sub> 4.1).  $\Phi(0, x) \in W^{2,2}(\Omega)$ , thanks to H<sub>reg</sub>1. Moreover,  $u_0 \in W^{2,2}(\Omega)$ , hence  $u_t(0, x) \in L^2(\Omega)$ . Denote by  $A_0$

$$A_0 := \sqrt{\int_{\Omega} (C|E(0, x)| - ru_0(x)v_0(x) + \partial_x(\partial_x u_0(x) - u_0(x)\partial_x \Phi(0, x)))^2 dx}, \tag{4.11}$$

so

$$\|u_t(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq A_0$$

**Lemma 4.2.1** *If*

$$g_t \in L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

*then*

$$u_t, v_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Proof. Multiply (4.9) by  $u_t$  and integrate on  $P(t)$ ,  $t \leq T$ , so that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(t, x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(0, x) dx &+ \int_{P(t)} |\partial_x u_t|^2 \\ &- \int_{P(t)} (u_t \Phi_x + u \partial_x \Phi_t) u_{tx} \\ &= \int_{P(t)} \partial_t (\nu_i(\sigma, E)) u + \nu_i u_t - r(v_t u + v u_t) u_t.\end{aligned}$$

By (4.10),

$$\|\Phi_t(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|u_t(t, \cdot) - v_t(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|g_t(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}) \tag{4.12}$$



Moreover,

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} \underbrace{u}_{L^2} \underbrace{\Phi_{tx}}_{L^\infty} \underbrace{u_{tx}}_{L^2} &\leq C_1 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{L^2} \|u_{xt}(s, \cdot)\|_{L^2} \|\Phi_{xt}(s, \cdot)\|_{H^1} ds \\
&\leq C_2 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{L^2} \|u_{xt}(s, \cdot)\|_{L^2} (\|u_t(s, \cdot) - v_t(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|g_t(s, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}) ds \\
&\leq C_3 \int_0^t \left( \epsilon \|u_{xt}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|u(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \right. \\
&\quad \left. (\|u_t(s, \cdot) - v_t(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_t(s, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}^2) \right) ds \\
\int_{P(t)} u_t \Phi_x u_{tx} &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |u_{xt}|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t |\Phi_x(s, \cdot)|_{L^\infty}^2 \left( \int_\Omega |u_t|^2(s, x) dx \right) ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |u_{xt}|^2 + \frac{C_4}{2\epsilon} \int_0^t (\|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|g(s, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2) \left( \int_\Omega |u_t(s, \cdot)|^2 dx \right) ds
\end{aligned}$$

Recalling the Hypothesis Hreg.3(a),

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} |uu_t \nu_i(\sigma, \Phi_x)_t| &\leq C \int_{P(t)} |uu_t| (T \|\sigma\|_{C^0} + |\Phi_{tx}|) \\
&\leq \frac{C}{2} T^2 \|\sigma\|_{L^\infty(P)}^2 \int_{P(t)} u^2 + \frac{1}{2} \int_{P(t)} u_t^2 \\
&\quad + C \int_0^t (\|u_t(s, \cdot) - v_t(s, \cdot)\|_{L^2} + \|g_t(s, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}}) \|u(s, \cdot)\|_{L^2} \|u_t(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\
&\leq CT^2 \Omega_1^2 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t (1 + \|u\|_{L^2}) (\|u_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|v_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2) \\
&\quad + \int_0^t \|g_t(s, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2 \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

The last terms are

$$\begin{aligned}
-\int_{P(t)} r |u_t|^2 v &\leq 0, \\
-\int_{P(t)} r u u_t v_t &\leq r \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{H^1} \|u_t(s, \cdot)\|_{L^2} \|v_t\|_{L^2} ds \\
&\leq C_6 \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{H^1}^2 \|u_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|v_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds, \\
\int_{P(t)} \nu_i u_t^2 &\leq C \int_{P(t)} (\|\sigma\|_{C^0} T^2 + |\Phi_x|) u_t^2 \\
&\leq C \int_0^t T^2 \Omega_1 \|u_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + C \int_0^t \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^2} \|u_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds
\end{aligned}$$

with  $\|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{L^2} \in L^\infty(0, T)$ . For the ions, we have similar inequalities, so

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (u_t^2(t, \cdot) + v_t^2(t, \cdot)) + \int_{P(t)} |u_{tx}|^2 + |v_{tx}|^2 &\leq CT^2\Omega_1 \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 + CT^2\Omega_1 \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 \\
&+ C \int_0^t (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2) (\|u_t\|_{L^2}^2 + \|v_t\|_{L^2}^2) \\
&+ T^2\Omega_1^2 \|u\|_{L^2(P(T))}^2 + T^2\Omega_1^2 \|v\|_{L^2(P(T))}^2 \\
&+ \int_{\Omega} u_t^2(0, x) dx + \int_{\Omega} v_t^2(0, x) dx,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

with

$$\int_0^t (\|u(s, \cdot)\|_{H^1}^2 + \|v(s, \cdot)\|_{H^1}^2) ds < \infty.$$

In particular,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_t^2(t, x) dx + \int_{\Omega} v_t^2(t, x) dx &\leq CT^2\Omega_1 \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 + CT^2\Omega_1 \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 \\
&+ C \int_0^t (\|u(s, \cdot)\|_{H^1}^2 + \|v(s, \cdot)\|_{H^1}^2) (\|u_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|v_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2) ds \\
&+ T^2\Omega_1^2 \|u\|_{L^2(P(T))}^2 + T^2\Omega_1^2 \|v\|_{L^2(P(T))}^2 \\
&+ 2A_0.
\end{aligned}$$

It follows from the Gronwall lemma that

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_t^2(t, x) dx + \int_{\Omega} v_t^2(t, x) dx \\
&\leq e^{C(T^2\Omega_1 + \|u\|_{L^2(H^1)}^2 + \|v\|_{L^2(H^1)}^2)} \left( 2A_0 + T^2\Omega_1^2 \|u\|_{L^2(P(T))}^2 + T^2\Omega_1^2 \|v\|_{L^2(P(T))}^2 \right)
\end{aligned}$$

Recalling Equations (2.24) and (2.27),

$$\int_{\Omega} u_t^2(t, x) dx + \int_{\Omega} v_t^2(t, x) dx \leq e^{C(T^2\Omega_1 + C_K^2 T + C_{K,1}^2)} (2A_0 + 2T^3\Omega_1^2 C_K) \tag{4.14}$$

where  $C_{K,1}$  is given by (2.28). Thus,  $u_t, v_t \in L^\infty([0, t], L^2(\Omega))$ .

Hence reporting in (4.13) we find that

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} |u_{tx}|^2 + |v_{tx}|^2 &\leq C(C_K + C_K^2 T + C_{K,1}^2) \int_0^t e^{C(T^2\Omega_1 + C_K^2 T + C_{K,1}^2)} (2A_0 + 2T^3\Omega_1^2 C_K) \\
&+ CT^2\Omega_1 \int_0^t e^{C(T^2\Omega_1 + C_K^2 T + C_{K,1}^2)} (2A_0 + 2T^3\Omega_1^2 C_K) \\
&+ 2A_0 + 2T^3\Omega_1^2 C_K.
\end{aligned}$$

Hence, there exists some constants  $A_1$  and  $A_2$  which depend only on  $C_K, C_{K,1}$  and  $C$  such that

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 &\leq e^{CT^2\Omega_1}(A_1(T+T^4)+A_2(T^3+T^6)) \\ &+ 2A_0+2T^3\Omega_1^2C_K \end{aligned} \quad (4.15)$$

This completes the proof of Lemma 4.2.1.

#

#### 4.2.1.2 Estimation on $u_{tt}$

**Lemma 4.2.2** *If*

$$g_{tt} \in L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)),$$

*then*

$$u_{tt}, v_{tt} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Proof: Let us take the second derivative in time of (4.8).

$$\begin{aligned} \partial_t^3 u - (\partial_x u_{tt} - u_{tt} \partial_x \Phi - 2u_t \partial_x \Phi_t - u \partial_x \Phi_{tt})_x &= \nu_{tt} u + 2\nu_t u_t + \nu u_{tt} \\ &- r(v_{tt} u + 2v_t u_t + v u_{tt}), \text{ in } P(t) \end{aligned}$$

The initial condition is

$$\begin{aligned} u_{tt}(0,x) &= (u_{tx} - u_t \Phi_x - u \Phi_{tx})_x(0,x) \\ &+ \partial_t \nu_i(0,x, \sigma(0,x), E(0,x)) u(0,x) + \nu_i(0,x) u_t(0,x) - r(v_t u + v u_t)(0,x) \end{aligned}$$

By the choice of  $\nu_i$ , (see Hreg 4.3, Hreg 4.1),  $\partial_t \nu_i(0,x, \sigma(0,x), E(0,x))$  and  $\nu_i(0,x, \sigma(0,x), E(0,x))$  do not depend on  $\sigma$ . thus

$$|u_{tt}(0,x)| \leq |E_t(0,x)u(0,x) + E(0,x)u_t(0,x) + (u_{tx} - u_t \Phi_x - u \Phi_{tx})_x(0,x) - r(v_t u + v u_t)(0,x)|$$

which does not depend on  $\sigma$ . Denote by  $B_0$  its norme in  $L^2$ ,

$$B_0^2 := \int |E_t(0,x)u(0,x) + E(0,x)u_t(0,x) + (u_{tx}(0,x) - u_t \Phi_x - u \Phi_{tx})_x(0,x) - r(v_t u + v u_t)(0,x)|^2 dx \quad (4.16)$$

Multiplying by  $u_{tt}$  and integrating on  $P(t)$  gives:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(t,x) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{tt}^2(0,x) + \int_{P(t)} |\partial_x u_{tt}|^2 &= \int_{P_t} (u_{tt} \Phi_x + u \Phi_{ttx} + 2u_t \Phi_{tx}) u_{ttx} \\ &+ \int_{P(t)} (\nu_{tt} u + 2\nu_t u_t + \nu u_{tt}) u_{tt} \\ &- \int_{P(t)} r(u_{tt} v + 2u_t v_t + v u_{tt}) u_{tt} \end{aligned} \quad (4.17)$$

We have the following bounds from above,

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} u_{tt} u_{ttx} \Phi_x &\leq \int_0^t \|\Phi_x(s, \cdot)\|_{L^\infty} \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \|u_{ttx}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t \|\Phi_x(s, \cdot)\|_{L^\infty} \left( \frac{1}{\epsilon} \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \|u_{ttx}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \\
\int_{P(t)} u_t \Phi_{tx} u_{ttx} &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \|u_{ttx}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \underbrace{\|u_t\|_{L^2}^2}_{\text{bounded for a.a. } t} (\|u_t - v_t\|_{L^2}^2 + \|g_t\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2), \\
\int_{P(t)} u \Phi_{ttx} u_{ttx} &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \|u_{ttx}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|u\|_{L^2}^2 \|\Phi_{ttx}\|_{H^1}^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \|u_{ttx}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|u\|_{L^2}^2 (\|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \|v_{tt}\|_{L^2}^2 + \|g_{tt}\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2), \\
\int_{P(t)} |u_t v_t u_{tt}| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|u_t\|_{L^2}^2 \|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|v_t\|_{H^1}^2, \\
\int_{P(t)} |u v_{tt} u_{tt}| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|u\|_{H^1}^2 \|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|v_{tt}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

By Hypothesis  $H_{\text{reg.3(b)}}$  on the ionisation function,

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} \nu_{tt} u u_{tt} &\leq C \int_{P(t)} (|\Phi_{ttx}| + \|\sigma\|_{C^0}) |u u_{tt}| \\
&\leq C \int_0^t (\|u_{tt} - v_{tt}\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma\|_{C^0}) \|u(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|u_{tt}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&+ C \frac{1}{2} \int_0^t \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \Omega_1^2 \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} |\partial_t \nu_i u_t u_{tt}| &\leq C \int_0^t (T\Omega_1 + \|u_t - v_t\|_{L^2(\Omega)} + \|g_t\|) \|u_t\|_{L^2(\Omega)} \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(T\Omega_1 + \|u_t - v_t\|_{L^\infty(L^2)} + \|g_t\|)^2 \int_0^t \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \\
\int_{P(t)} \nu u_{tt} u_{tt} &\leq C \int_{P(t)} (|\Phi_x| + T^2 \|\sigma\|_{C^0}) |u_{tt} u_{tt}| \\
&\leq C \int_0^t \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\| + T^2 \Omega_1).
\end{aligned}$$

We have similar estimations for the ions. And so, adding the inequalities,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_{tt}^2(t, \cdot) + v_{tt}^2(t, \cdot) + \int_{P(T)} |u_{ttx}|^2 + |v_{ttx}|^2 \\
&\leq C \int_0^t (\|u\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2 + \|v_t\|_{H^1}^2) (\|u_{tt}\|_{L^2}^2 + \|v_{tt}\|_{L^2}^2) \\
&\quad + (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\| + T^2 \Omega_1) \int_0^t \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Omega_1^2 \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} u_{tt}^2(0, x) dx + v_{tt}^2(0, x) dx.
\end{aligned}$$

Gronwall's lemma leads to

$$\int_{\Omega} u_{tt}^2(t, x) + \int_{\Omega} v_{tt}^2(t, x) \leq C(B_0 + \Omega_1^2 \|u\|_{L^2(P(T))}^2) e^{C \int_0^T (\|u\|_{H^1}^2 + \|u_t\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2 + \|v_t\|_{H^1}^2 + T\|g\| + T^3 \Omega_1)}$$

Hence  $u_{tt}, v_{tt} \in L^\infty(L^2)$  and  $u_{tt}, v_{tt} \in L^2(H^1)$ . This ends the proof of Lemma 4.2.2.

#

The proof for the regularity will be done with the use of the unisotropic  $H^{r,s}$  Sobolev spaces and the use of some theorem about the heat equation (see the recalled Properties and Theorems in Annex C).

Notation. For any function  $G$  defined on  $\Gamma$ , denote by

$$G|_{\Gamma} := (G(0), G(a)).$$

For any function  $G$  defined on  $\Sigma(T)$  we denote by

$$G|_{\Sigma} := (G(t, 0), G(t, a)), \quad t \in (0, T).$$

Let us define indexes  $m$  and boundary operators  $B$  for the electrons and ions respectively. For the electrons,

$$m_e = 1, B_e u = u_x|_{\Sigma},$$

whereas for the ions,

$$m_i = 0, B_i u = u|_{\Sigma}.$$

### 4.2.1.3 Regularity of the solution

Denote by  $E := \Phi_x$ . We rewrite the the system (4.1), taking into account the Poisson equation in the drift-diffusion equations, as well as the definition of the boundary operators  $B_e$  and  $B_i$ .

For the electrons,

$$\begin{aligned} \partial_t u - u_{xx} &= f_e := \nu_i u - ruv - u_x \Phi_x - u(u - v), \text{ in } P(T), \\ B_e u &= g_e := u \Phi_x, \text{ on } \Sigma(T) \\ u(0, x) &= u_0(x), \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.18}$$

For the ions,

$$\begin{aligned} \partial_t v - v_{xx} &= f_i := \nu_i u - ruv + v_x \Phi_x + v(u - v), \text{ in } P(T), \\ B_i v &= g_i := 0, \text{ on } \Sigma(T), \\ v(0, x) &= v_0(x), \text{ in } \Omega. \end{aligned} \tag{4.19}$$

The equation for the potential remains the same, namely,

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= u - v, \text{ in } P(T), \\ \Phi &= g, \text{ on } \Sigma(T). \end{aligned} \tag{4.20}$$

**Theorem 4.2.1** *Let*

$$u_0 \in H^4(\Omega), v_0 \in H^4(\Omega),$$

*with*

$$\begin{aligned} u_0^{(p)}(0) &= u_0^{(p)}(a) = 0, \quad p \in \{0, 2, 3\}, \\ v_0^{(p)}(0) &= v_0^{(p)}(a) = 0 \quad p \in \{0, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

*Assume that the Dirichlet condition  $g$  for the potential  $\Phi$  satisfies*

$$g \in \mathcal{C}^0(0, T; H^{\frac{11}{2}}(\Gamma)) \cap H^3(0, T; H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)) \cap W^{3, \infty}(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)).$$

*Then the solution  $(u, v)$  of (4.18 – 4.19) satisfies*

$$\begin{aligned} \partial_x u(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), \partial_x u(t, a) \in \mathcal{C}^1([0, T]), \\ \partial_x v(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), \partial_x v(t, a) \in \mathcal{C}^1([0, T]). \end{aligned}$$

Sketch of the proof of Theorem 4.2.1. The proof consists in five steps.

1. At the first step, we prove that the the first two components  $u$  and  $v$  belong to  $H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(T))$ .
2. At the  $l^{\text{th}}$ -step ( $l=2,4$ ), we use Theorem C.2.4 to obtain the belongness of  $u$  and  $v$  to  $H^{l+\frac{3}{4}, \frac{l}{2}+\frac{3}{8}}(P(T))$ . In order to apply this theorem,
  - We first establish that  $f_e, f_i \in H^{l-\frac{5}{4}, \frac{l}{2}-\frac{5}{8}}(P(T))$ .
  - Then we show the regularity of the boundary condition, i.e.  $g_e \in H^{\frac{l}{2}-\frac{3}{8}}(\Sigma(T))$ . The regularity condition are automatically satisfied for the ions, since  $g_i \equiv 0$ .
  - We study under which conditions there exists  $w \in H^{l+\frac{3}{4}, \frac{l}{2}+\frac{3}{8}}(P(T))$  such that

$$\begin{aligned} Bw|_{\Sigma} &= g_0|_{\Sigma}, \\ w(0, \cdot) &= u_0, \\ \partial_t^p (f - (\Delta w + w_t))(0, x) &= 0 \quad \text{if } p < \frac{l}{2} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

These conditions will be called the Compatibility Relations.

- Since

$$2\left(\frac{l}{2} - \frac{5}{8}\right) \neq \text{integer} + \frac{1}{2},$$

and

$$\left(\frac{l}{2} - \frac{5}{8}\right) \neq \text{integer} + \frac{1}{2},$$

we can apply Theorem C.2.4 and obtain the belongness of  $u$  and  $v$  to  $H^{l+\frac{3}{4}, \frac{l}{2}+\frac{3}{8}}(P)$ .

3. The  $4^{\text{th}}$  step establishes that  $u$  and  $v$  belong to  $H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}$ .
4. At the  $5^{\text{th}}$  and last step we use an imbedding theorem to prove that

$$\partial_x u(t, 0) \in \mathcal{C}^1([0, T]), \partial_x u(t, a) \in \mathcal{C}^1([0, T]),$$

and

$$\partial_x v(t, 0) \in \mathcal{C}^1([0, T]), \partial_x v(t, a) \in \mathcal{C}^1([0, T]).$$

**Remark** At the  $l^{\text{th}}$ -step ( $l=2,4$ ) the Compatibility Relations (which are denoted by  $\mathcal{CR}_e$  for the electrons and  $\mathcal{CR}_i$  for the ions) are the relations needed for the existence of a function  $w \in H^{l+\frac{3}{4}, \frac{l}{2}+\frac{3}{8}}(P)$  which satisfies,

- for the electrons,

$$w(0, x) = u_0(x), \quad B_e w|_{\Sigma} = g_e|_{\Sigma},$$

and

$$\partial_t^p (-w_{xx} + w_t)(0, x) = \partial_t^p f_e(0, x) \quad \text{if } 0 \leq p < \frac{l}{2} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}, \quad (4.21)$$

– for the ions

$$w(0,x) = v_0(x), \quad B_i w|_\Sigma = g_i|_\Sigma$$

and

$$\partial_t^p (-w_{xx} + w_t)(0,x) = \partial_t^p f_i(0,x) \text{ if } 0 \leq p < \frac{l}{2} - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Through the following steps, in order to study the Compatibility Relations  $(\mathcal{CR}_e, \mathcal{CR}_i)$ , we will use Theorem C.2.2 for the electrons and Theorem C.2.3 for the ions. For the sake of clarity, let us explain now what are the functions  $h_0, h_1, f_k, k = 0, 1, 2, \dots$  mentioned in those theorems.

– In each step we have, for the electrons,

$$h_1 := g_e, \quad (4.23)$$

whereas for the ions,

$$h_0 := g_i. \quad (4.24)$$

– For  $l = 2$ , there is no integer  $p$  such that  $0 \leq p < \frac{l}{2} - \frac{9}{8}$ , so we ignore the equations (4.21, 4.22). We set for the electrons

$$f_0(x) := u_0(x), \text{ in } \Omega, \quad (4.25)$$

and for the ions

$$f_0(x) := v_0(x), \text{ in } \Omega. \quad (4.26)$$

– For  $l = 3$  and  $l = 4$ , the only integer  $p$  such that  $0 \leq p < \frac{l}{2} - \frac{9}{8}$  is  $p = 0$ . From the equation (4.21) (i.e. for the electrons), we get

$$w_t(0,x) = f_e(0,x) + u_0''(x).$$

Recalling the expression of  $f_e$  in (4.18), we denote by

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= u_0(x) \text{ in } \Omega, \\ f_1(x) &:= \nu_i(0,x)u_0 - ru_0v_0 + u_0'(x)\Phi_0'(x) - u_0^2(x) \\ &\quad + u_0''(x) \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.27)$$

For the ions, in the same way, recalling the expression of  $f_e$  in (4.19), we denote by

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= v_0(x) \text{ in } \Omega, \\ f_1(x) &:= \nu_i(0,x)u_0 - ru_0v_0 - v_0'(x)\Phi_0'(x) - v_0^2(x) \\ &\quad + v_0''(x) \text{ in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.28)$$

#



Proof of Theorem 4.2.1

Step 1. We know that  $u, v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  so  $f_e, f_i \in L^2(P(T))$ . Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} v_i^2 u^2 &\leq C \int_{P(T)} (T^2 \Omega_1 + |\Phi_x|)^2 u^2 \\ &\leq CT^4 \Omega_1^2 \int_0^T \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^\infty(L^2)}^2 (\|u - v\|_{L^2(P(T))} + \|g\|_{L^\infty(H^{\frac{1}{2}})}^2), \\ \int_{P(T)} u^2 v^2 &\leq C \|v\|_{L^\infty(L^2)}^2 \|u\|_{L^2(H^1)}^2, \\ \int_{P(T)} u_x^2 \Phi_x^2 &\leq C (\|u - v\|_{L^\infty(L^2)}^2 + \|g\|_{L^\infty(H^{\frac{1}{2}})}^2) \|u\|_{L^2(H^1)}^2, \end{aligned}$$

and

$$\|f_e\|_{L^2(P(T))} \leq T^2 \Omega_1 C_K \sqrt{T} + C_K (C_K \sqrt{T} + \|g\|_{L^\infty(H^{\frac{1}{2}})}) + C_K (C_K^2 T + C_{K,1}^2).$$

There is a similar bound for  $f_i$ . Moreover, thanks to Theorem 4.2.1,  $u_t, v_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . The potential  $\Phi$  satisfies

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= u - v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Phi|_{\Sigma(T)} &= g \in L^2(0, T; H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \Phi_{txx} &= u_t - v_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \Phi_t|_{\Sigma(T)} &= g_t \in L^2(0, T; H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)). \end{aligned}$$

Thus

$$\Phi \in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)),$$

and

$$\Phi_t \in L^2(]0, T[, H^3(\Omega)) \cap L^\infty([0, T], H^2(\Omega)). \quad (4.29)$$

Now, we have to check that

$$g_0 \in H^{\frac{3}{4} - \frac{m_0}{2}}(\Sigma(T)).$$

For the electrons we have to show that  $u\Phi_x|_{\Sigma(T)} \in H^{\frac{1}{4}}(]0, T[ \times \Gamma)$ . By Property 4, it is sufficient to prove that  $u\Phi_x \in H^{1, \frac{1}{2}}([0, T] \times \Omega)$ . It is easy to see that  $u\Phi_x \in L^2(H^1)$ . For the time part,

$$\|u\Phi_x\|_{H^1(L^2)}^2 = \|u\Phi_x\|_{L^2(L^2)}^2 + \|u_t\Phi_x + u\Phi_{tx}\|_{L^2(L^2)}^2.$$

The integral  $\int_{P(T)} u_t^2 \Phi_x^2$  is bounded because  $\Phi_x$  is bounded and  $u_t \in L^2(H^1)$ .

Then,

$$\int_{P(T)} u^2 \Phi_{tx}^2 \leq \int_0^T \|u\|_{H^1}^2 \underbrace{\|\Phi_t\|_{H^2}^2}_{\text{bounded}}.$$

Thus  $u\Phi_x \in H^{1,1}$  so  $u\Phi_x \in H^{1,\frac{1}{2}}$  and

$$\|u\Phi_x\|_{H^{\frac{1}{4}}(0,T)} \leq \|u\|_{L^2(H^1)} + \|v\|_{L^2(H^1)} + \|u_t\|_{L^2(H^1)} + \|v_t\|_{L^2(H^1)}.$$

The compatibility conditions  $(\mathcal{CR}_e)$  for the electrons

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) = u_0(x) \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial \nu}(x), \quad x \in \Gamma,$$

are satisfied, thanks to the assumptions  $u'_0 = u_0 = 0$  on  $\Gamma$ . The compatibility conditions  $(\mathcal{CR}_i)$  for the ions

$$v_0(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

are also satisfied. Hence, it follows from Theorem C.2.1 that

$$u, v \in H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(T)).$$

and

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}} &\leq C \|f_e\|_{L^2(P(t))} + \|g_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(0,t)} \\ \|v\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}} &\leq C \|f_i\|_{L^2(P(t))} \end{aligned}$$

Step 2. Let us prove that  $f_e, f_i \in H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}$ . Let us first study the space part, i.e. the belongingness of  $f_e$  to  $L^2(H^{\frac{3}{4}})$ .

– For  $\|\nu_i u\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}$ , we have

$$\|\nu_i(t, \cdot) u(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2 = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(\nu u)(t, x) - (\nu u)(t, y)|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy$$

where  $s := \frac{3}{4}$ . Since  $u(t, \cdot)$  is bounded in  $\in H^{\frac{7}{4}}(\Omega)$  uniformly with respect to  $t$ ,

$$\begin{aligned} \|\nu_i(t, \cdot) u(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2 &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(\nu(t, x) - \nu(t, y))u(t, x) + \nu(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\ &\leq C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(y, x)(\nu(t, x) - \nu(t, y))|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\ &+ C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(t, x) - u(t, y)|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy. \end{aligned}$$

Recalling the hypothesis  $H_{\text{reg.4(a)}}$ ,

$$|\nu_{\sigma,E}(t,x) - \nu_{\sigma,E}(t,y)| \leq |E(t,x) - E(t,y)| + |x - y| \|\sigma\|_{C^0} T^2,$$

we get

$$\begin{aligned} \|\nu_i(t,\cdot)u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2 &\leq C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(|E(t,x) - E(t,y)| + |x - y| \|\sigma\|_{C^0} T^2)^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\ &\quad + \|u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2 \\ &\leq C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|E(t,x) - E(t,y)|^2 + |x - y|^2 \|\sigma\|_{C^0}^2 T^4}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\ &\quad + \|u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2. \end{aligned}$$

Then,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|x - y|^2 \|\sigma\|_{C^0}^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \leq C \|\sigma\|_{C^0}^2 T^4 \int \int \frac{1}{|x - y|^{2s-2}} dx dy < \infty.$$

Moreover,  $\Phi(t,\cdot) \in H^{\frac{7}{4}+2}$  and  $E(t,\cdot) \in H^{\frac{7}{4}+1} = H^{\frac{11}{4}} \subset H^2$ . And so, by Property 5,

$$|E(x) - E(y)| \leq \|E(t,\cdot)\|_{H^2} |x - y|,$$

so that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|E(t,x) - E(t,y)|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\ \leq C \|E\|_{L^2(H^2)}^2 \int \int \frac{1}{\rho^{2s-2}} d\rho d\theta \\ \leq C \|E\|_{L^2(0,t;(H^2))}^2. \end{aligned}$$

Thus

$$\|\nu_i(t,\cdot)u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}} \leq C \|E\|_{L^2(0,t;(H^2))} + C \|\sigma\| T^2 + \|u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2,$$

hence  $\|\nu_i(t,\cdot)u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}} \in L^2(0,T)$ .

– The second term to control in  $\|f\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}$  is

$$\|uv\|_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{4}}(\Omega))}.$$

Since  $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ , the Sobolev space  $H^{\frac{3}{4}}(\Omega)$  is a Banach algebra, so that

$$\|u(t,\cdot)v(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \leq \|u(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \|v(t,\cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)}.$$

Then,  $u \in H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}} \subset \mathcal{C}^0([H^{\frac{7}{4}}, L^2]_{\frac{1}{\frac{7}{4}}}) = \mathcal{C}^0(H^{\frac{3}{4}})$ , and

$$\|u(t, \cdot)v(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \in L^2(0, T).$$

– The third term to control in  $\|f\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}$  is

$$\|u_x \Phi_x\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}.$$

Here also,

$$\begin{aligned} \|u_x(t, \cdot)\Phi_x(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} &\leq \|u_x(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \|\Phi_x(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \\ &\leq C \|u(t, \cdot)\|_{H^{\frac{7}{4}}(\Omega)} \|\Phi(t, \cdot)\|_{H^{\frac{7}{4}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Then,  $\Phi \in H^{\frac{15}{4}, 1} \subset \mathcal{C}^0(H^{\frac{15}{8}}) \subset \mathcal{C}^0(H^{\frac{7}{4}})$ , and

$$\|u_x(t, \cdot)\Phi_x(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \in L^2(0, T).$$

We have hence shown that  $f_e \in L^2(H^{\frac{3}{4}})$ .

Let us study the time part, i.e. the belongness of  $f_e$  to  $H^{\frac{3}{8}}(L^2)$ .

– Let us bound from above

$$\|\nu u\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 := \int_0^T \int_0^T \frac{\|(\nu u)(t, \cdot) - (\nu u)(t', \cdot)\|_{L^2}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt',$$

with  $s = \frac{3}{8}$ .

$$\begin{aligned} \|\nu u\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 &\leq C \int_0^T \int_0^T \frac{\|(\nu(t, \cdot) - \nu(t', \cdot))u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\quad + C \int_0^T \int_0^T \frac{\|\nu(t', \cdot)(u(t, \cdot) - u(t', \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\leq C \int_0^T \int_0^T \frac{\|(|E(t, \cdot) - E(t', \cdot)| + |t - t'| \|\sigma\|_{C^0 T})u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\quad + \int_0^T \int_0^T \frac{\|(E(t, \cdot) + \|\sigma\|_{C^0 T^2})(u(t, \cdot) - u(t', \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \end{aligned}$$

It follows from

$$|E(t, x)| \leq \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u - v\|_{L^\infty(P)},$$

and

$$\|E(t,x) - E(t',x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u(t,\cdot) - u(t',\cdot) - v(t,\cdot) - (v(t',\cdot))\|_{L^2(\Omega)},$$

that

$$\begin{aligned} \|\nu u\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 &\leq C(\|u - v\|_{\frac{3}{8}(L^2)}^2 + T^2 + \Omega_1^2)\|u\|_{C^0}^2 + (\|u\|_{C^0} + T^2\Omega_1^2)^2\|u\|_{\frac{3}{8}(L^2)}^2 \\ &\leq C(\|u\|_{H^{\frac{7}{4},\frac{7}{8}}}^4 + \|v\|_{H^{\frac{7}{4},\frac{7}{8}}}^4) + C\|u\|_{H^{\frac{7}{4},\frac{7}{8}}}^2(T^2\Omega_1^2 + T^4\Omega_1^2) \end{aligned}$$

– Let us bound from above

$$\|u_x \Phi_x\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 := \int_0^T \int_0^T \frac{\|(u_x \Phi_x)(t,\cdot) - (u_x \Phi_x)(t',\cdot)\|_{L^2}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt'$$

with  $s = \frac{3}{8}$ .

$$\begin{aligned} \|u_x \Phi_x\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 &\leq C \int_0^T \int_0^T \|(u_x \Phi_x)\|_{H^1(L^2)}^2 \frac{|t - t'|^{2\theta}}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\quad + C \|u_x \Phi_x\|_{H^1(L^2)}^2 \end{aligned}$$

because  $\theta = \frac{1}{2}$ . Then,

$$\|u_x \Phi_x\|_{H^1(L^2)}^2 = \|u_x \Phi_x\|_{L^2(P)}^2 + \|u_{tx} \Phi_x + u_x \Phi_{tx}\|_{L^2(P)}^2.$$

Since  $\Phi_x$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P)$ ,

$$\begin{aligned} \|u_{tx} \Phi_x\|_{L^2(P)}^2 &= \int_{P(T)} u_{tx}^2 \Phi_x^2 \\ &\leq \|\Phi\|_{L^\infty(P)}^2 \|u_t\|_{L^2(H^1)}^2. \end{aligned}$$

Recalling that  $u_t$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P)$ ,

$$\begin{aligned} \|u_x \Phi_{tx}\|_{L^2(P)}^2 &\leq \int_{P(T)} u_x^2 \Phi_{tx}^2 \\ &\leq \int_0^t (\|u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_t(s,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2) \|u_x(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq (\|u_t - v_t\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}^2 + \|g_t\|_{L^\infty(H^{\frac{1}{2}})}^2) \|u\|_{L^2(H^1)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

– Similarly, let us bound from above

$$\begin{aligned} \|uv\|_{H^{\frac{3}{8}}(L^2)}^2 &:= \int_0^T \int_0^T \frac{\|(uv)(t,\cdot) - (uv)(t',\cdot)\|_{L^2}^2}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \text{ with } s = \frac{3}{8}, \\ &\leq C \int_0^T \int_0^T \|uv\|_{H^1(L^2)}^2 \frac{|t - t'|^{2\theta}}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\leq C \|uv\|_{H^1(L^2)}^2, \end{aligned}$$

because  $\theta = \frac{1}{2}$ . Then,

$$\|uv\|_{H^1(L^2)}^2 = \|uv\|_{L^2(P)}^2 + \|u_t v + uv_t\|_{L^2(P)}^2.$$

Since  $v$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P)$ ,

$$\begin{aligned} \|u_t v\|_{L^2(P)}^2 &\leq \int_{P(T)} u_t^2 v^2 \\ &\leq \|v\|_{L^\infty(P)}^2 \|u_t\|_{L^2(P)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Thus  $f_e \in H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}$ .

Let us study the regularity of the boundary condition for the electrons, i.e. the belongness of  $g_0$  to  $H^{\frac{5}{8}}(\Sigma(T))$ . For  $s = \frac{5}{8}$ ,

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{H^s(0,T)}^2 &= \int_0^T \int_0^T \frac{|(u\Phi_x)(t,0) - (u\Phi_x)(t',0)|^2}{|t-t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &+ \int_0^T \int_0^T \frac{|(u\Phi_x)(t,a) - (u\Phi_x)(t',a)|^2}{|t-t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &\leq \int_0^T \int_0^T \frac{|(u(t,0) - u(t',0))\Phi_x(t,0)|^2 + |u(t',0)(\Phi_x(t,0) - \Phi_x(t',0))|^2}{|t-t'|^{2s+1}} dt dt' \\ &+ \int_0^T \int_0^T \frac{|(u(t,a) - u(t',a))\Phi_x(t,a)|^2 + |u(t',a)(\Phi_x(t,a) - \Phi_x(t',a))|^2}{|t-t'|^{2s+1}} dt dt'. \end{aligned}$$

It follows from the uniform boundedness of  $\Phi_x$  in  $L^\infty(P) \cap H^{\frac{3}{4}}(0,T)$  and Property 4, that  $u \in \mathcal{C}^0(0,T; H^{\frac{3}{4}}) \subset \mathcal{C}^0(0,T; \bar{\Omega})$ . And so,

$$\begin{aligned} \|g_0\|_{H^s(0,T)}^2 &\leq C \|u\|_{H^{\frac{5}{8}}(0,T)}^2 + C \|\Phi_x\|_{H^{\frac{5}{8}}(0,T)}^2 \\ &\leq C \|u\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(0,T;\Omega)}^2 + C \|\Phi_x\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(0,T;\Omega)}^2. \end{aligned}$$

It is easy to see that  $\Phi_x \in L^2(0,T; H^{\frac{7}{4}}(\Omega))$ . Then,  $\Phi_x \in H^{\frac{7}{8}}(0,T; L^2(\Omega))$  thanks to 4.29. Thus  $g_0 \in H^{\frac{5}{8}}(0,T)$ .

Let us study the Compatibility relations  $(\mathcal{CR}_e, \mathcal{CR}_i)$ .

– For the electrons, they are

$$h_1(0,x) = \partial_\nu f_0(0,x), \quad x \in \Gamma,$$

with  $f_0$  given by (4.25) and  $h_1$  by (4.23). And so, they write

$$u(0)\Phi_x(0)|_\Gamma = u_x(0)|_\Gamma,$$

which is true because

$$u_0|_\Gamma = u'_0|_\Gamma \equiv 0.$$

– For the ions, they are

$$h_0(0,x) = \partial_\nu f_0(0,x),$$

with  $f_0$  given by (4.26) and  $h_0$  by (4.24). And so, they write

$$h_0(0,.)|_{\Sigma(T)} = f_0|_{\Sigma(T)},$$

or

$$v_0|_{\Sigma(T)} = 0,$$

which is the case.

Since the assumptions of Theorem C.2.4 are satisfied, namely

$$f_e, f_i \in H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(T)), g_e \in H^{\frac{5}{8}}(\Sigma(T)),$$

the Compatibility conditions ( $\mathcal{CR}_e, \mathcal{CR}_i$ ) hold, so that

$$u, v \in H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(T)).$$

Step 3. Let us prove that  $f_e, f_i \in H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}$ .

First, let us study the space part i.e. the belongness of  $f$  to  $L^2(H^{\frac{7}{4}})$ .

– For  $\|\nu u\|_{L^2(H^{\frac{7}{4}})}$ , proving that  $\nu(t,.)u(t,.) \in H^{\frac{7}{4}}$  is equivalent since  $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ , to proving that

$$\begin{aligned} \nu(t,.)u(t,.) &\in L^2(\Omega), & (a) \\ (\nu u)_x(t,.) &\in L^2(\Omega), & (b) \\ \text{and} & & \\ (\nu u)_x(t,.) &\in H^{\frac{3}{4}}(\Omega). & (c) \end{aligned} \tag{4.30}$$

It is easy to handle (4.30.a,4.30.b). Let us check (4.30.c).

$$\begin{aligned}
\|(\nu u)_x(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(\nu_x u + \nu u_x)(t, x) - (\nu_x u + \nu u_x)(t, y)|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\
&\leq C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(\nu_x u)(t, x) - (\nu_x u)(t, y)|^2 + |(\nu u_x)(t, x) - (\nu u_x)(t, y)|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\
&\leq C \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\nu_x(t, x) - \nu_x(t, y)| |u(t, x)|^2 + |\nu_x(t, y)| (u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy \\
&+ \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\nu(t, x) - \nu(t, y)| |u_x(t, x)|^2 + |\nu(t, y)| (u_x(t, x) - u_x(t, y))|^2}{|x - y|^{2s+1}} dx dy
\end{aligned}$$

with  $s = \frac{3}{4}$ . By Hypothesis  $H_{\text{reg.1}}$ ,  $H_{\text{reg.4(a)}}$ ,  $H_{\text{reg.4(b)}}$ , and the boundedness of  $E$  and  $\sigma$ , the bounds from above are obtained similarly to previously.

– The other terms can also be handled analogously.

Hence,  $f \in L^2(H^{\frac{7}{4}})$ .

Let us study the time part, i.e. the belongness of  $f$  to  $H^{\frac{7}{8}}(L^2)$ .

– For

$$\|\nu u\|_{H^{\frac{7}{8}}(L^2)}^2 := \int_0^T \int_0^T \frac{\|(\nu u)(t, \cdot)\|_{L^2} - \|(\nu u)(t', \cdot)\|_{L^2}}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt',$$

with  $s = \frac{7}{8}$ . Let us use Property 5, so that

$$\begin{aligned}
\|\nu u\|_{H^{\frac{7}{8}}(L^2)}^2 &\leq C \int_0^T \int_0^T \|\nu u\|_{H^2(L^2)}^2 \frac{|t - t'|^{2\theta}}{|t - t'|^{2s+1}} dt dt' \\
&\leq C \|\nu u\|_{H^1(L^2)}^2,
\end{aligned}$$

because  $\theta = 1$  and  $2s + 1 - 2 = \frac{3}{4} < 1$ . Then,

$$\|\nu u\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\nu u\|_{L^2(P)}^2 + \|\nu_{tt}u + 2\nu_t u_t + \nu u_{tt}\|_{L^2(P)}^2.$$

Moreover,  $u$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P)$ ,  $u_t$  belongs to  $L^2(P)$  and  $u_{tt} \in L^2(P)$  thanks to Lemmas 4.2.1 and 4.2.2. Hence,

$$\begin{aligned}
\|\nu_{tt}u\|_{L^2(P)}^2 &\leq \int_{P(T)} (E_{tt}^2 + \|\sigma\|_{C^0}^2) u^2 \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(P)} \left( \int_0^T (\|u_{tt}(s, \cdot) - v_{tt}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_{tt}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}})^2 ds + \|\sigma\|_{C^0 T}^2 \right) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$



and

$$\begin{aligned} \|\nu u_{tt}\|_{L^2(P)}^2 &\leq \int_{P(T)} (E^2(s,x) + T^2 \|\sigma\|_{C^0}^2) u_{tt}^2 \\ &\leq \int_0^t \|u_{tt}(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2) ds + \|\sigma\|_{C^0}^2 T^2 \|u_{tt}\|_{L^2(P)}^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

– The other terms can be treated analogously.

Hence  $f_e, f_i \in H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}$ .

For the electrons, we have to show that  $g_e \in H^{\frac{9}{8}}(\Sigma(T))$ . The space  $H^{\frac{9}{8}}(\Sigma(T))$  being a Banach algebra, it is enough to show that  $u$  and  $\Phi_x$  belong to  $H^{\frac{9}{8}}(\Sigma(T))$ , or that  $u$  and  $\Phi_x$  belong to  $H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(T))$ . For  $u$ , we know from the previous step that  $u \in H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(T))$ . It is easy to show that  $\Phi_x$  belongs to  $L^2(H^{\frac{11}{4}})$ . Then, by Lemma 4.2.2 and properties of the Poisson equation, it is clear that  $\Phi_{tx} \in L^2(P(T))$ , so that  $\Phi_x \in H^{\frac{11}{8}}(L^2)$ .

To apply Theorem C.2.4, we have to satisfy the compatibility conditions  $(\mathcal{CR}_e, \mathcal{CR}_i)$ .

– For the electrons, we have to check that

$$\partial_t^k h_1(0,x) = \partial_\nu f_k(0,x), \quad \text{if } \frac{1}{\rho} + \frac{k}{\sigma} < 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} \right),$$

with  $\rho = \frac{15}{4}, \sigma = \frac{15}{8}$ , which leads to  $0 \leq k < \frac{5}{8}$ , i.e. for  $k = 0$ . Recalling that  $f_0$  is given by (4.27), it writes

$$h_1(0,\cdot)|_\Gamma = \partial_\nu f_0|_\Gamma,$$

or

$$u(0)\partial_\nu \Phi(0)|_\Gamma = \partial_\nu u(0)|_\Gamma,$$

which is true because

$$u_0|_\Gamma = \partial_\nu u_0|_\Gamma \equiv 0.$$

– For the ions, we have to check that

$$\partial_t^k h_0(0,x) = \partial_\nu f_k(0,x), \quad \text{if } \frac{k}{\sigma} < 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma} \right),$$

with  $\rho = \frac{15}{4}, \sigma = \frac{15}{8}$ , i.e. for  $0 \leq k < \frac{9}{8}$  or  $k = 0, 1$ . It writes

$$h_0(0,\cdot)|_\Gamma = f_0|_\Gamma,$$

and

$$\partial_t h_0(0, \cdot)|_\Gamma = f_1|_\Gamma,$$

or, by Equation 4.28 ,

$$\begin{aligned} v_0|_\Gamma &= 0, \\ f_i(0) + v_0'' &= 0 \text{ on } \Gamma. \end{aligned}$$

This follows from the assumptions of the theorem.

Thus the assumptions of Theorem C.2.4 are satisfied, so that

$$u, v \in H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(T)).$$

Step 4. It is easily shown that  $f_e, f_i \in L^2(H^{\frac{11}{4}})$ . Moreover,  $g_e \in H^{\frac{13}{4}}(\Sigma(T))$  by Lemma 4.2.2. For the time part, instead of studying the norm in  $H^{\frac{11}{8}}(L^2)$  we study the norm in  $H^2(L^2)$  which is similar to the computations of the previous section.

Let us just check the compatibility relations  $(\mathcal{CR}_e, \mathcal{CR}_i)$ .

– For the electrons, they are

$$\partial_t^k h_1(0, x) = \partial_\nu f_k(0, x), \quad \text{if } \frac{1}{\rho} + \frac{k}{\sigma} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma}\right).$$

Since  $\rho = \frac{19}{4}, \sigma = \frac{19}{8}$ , it leads to  $0 \leq k < \frac{9}{8}$  ie  $k = 0, 1$ . And so they write

$$\begin{aligned} h_1(0, \cdot)|_\Gamma &= \partial_\nu f_0|_\Gamma, \\ \partial_t h_1(0, \cdot)|_\Gamma &= \partial_\nu f_1|_\Gamma, \end{aligned}$$

where  $f_0, f_1$  are given by (4.27).

These conditions are satisfied for  $k = 0$ , since

$$u(0)\partial_\nu \Phi(0) = \partial_\nu u(0).$$

For  $k = 1$ ,

$$\partial_t h_1(t, x)|_{\Sigma(T)} = u_t(t, x)|_{\Sigma(T)} \Phi_x(t, x)|_{\Sigma(T)} + u(t, x)|_{\Sigma(T)} \Phi_{tx}(t, x)|_{\Sigma(T)}.$$

We have seen at the previous step that

$$u \in H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}.$$

Hence

$$u_t \in H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}} \subset \mathcal{C}^0(H^{\frac{3}{4}}),$$

and

$$u_t(0, x) = f_e(0, x) + u_0''(x) \text{ in } \Omega.$$

The electrical potential  $\Phi$  satisfies

$$\Phi_t \in L^2(0, T; H^{\frac{15}{4}}(\Omega)) \cap H^{\frac{7}{8}}(0, T; H^2(\Omega)),$$

and

$$\Phi_{tx} \in L^2(0, T; H^{\frac{11}{4}}(\Omega)) \cap H^{\frac{7}{8}}(0, T; H^1(\Omega)) \subset H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P).$$

Consequently, the compatibility relation  $(\mathcal{CR}_e)$  is

$$(f_e(0, \cdot) + u_0'')\Phi_0' + u_0\Phi_{tx}(0, \cdot) = (f_e(0, \cdot) + u_0'')_x \text{ on } \Gamma.$$

Thanks to the assumption

$$u_0^{(p)}(0) = u_0^{(p)}(a) = 0, p \in \{1, 2, 3\},$$

the following equalities

$$(f_e(0) + \Delta u_0)|_\Gamma = \partial_\nu(f_e(0) + \Delta u_0)|_\Gamma = u_0|_\Gamma \equiv 0$$

hold. Hence the conditions  $(\mathcal{CR}_e)$  are satisfied.

– For the ions, the compatibility relations  $(\mathcal{CR}_i)$  are

$$\partial_t^k h_0(0, x) = \partial_\nu f_k(0, x), \quad \text{if } \frac{k}{\sigma} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\sigma}\right).$$

Here  $\rho = \frac{19}{4}, \sigma = \frac{19}{8}$ , and so  $k = 0$ , or  $k = 1$ . Hence the relations  $(\mathcal{CR}_i)$  are

$$\begin{aligned} h_0(0, \cdot)|_\Gamma &= f_0|_\Gamma, \\ \partial_t h_0(0, \cdot)|_\Gamma &= f_1|_\Gamma, \end{aligned}$$

with  $f_0, f_1$  given by (4.28), i.e.,

$$\begin{aligned} v_0|_\Gamma &= 0, \\ f_i(0) + \Delta v_0 &= 0 \text{ on } \Gamma. \end{aligned}$$

This is the case, thanks to the assumptions of the theorem.

We can then apply Theorem C.2.4 and obtain that

$$u, v \in H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P(T)).$$

Step 5. By Property 4 and

$$u \in H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}},$$

it follows that

$$u(t, 0) \in H^{\beta_0}(0, T), \quad u(t, a) \in H^{\beta_0}(0, T),$$

with

$$\beta_0 = \frac{17}{8},$$

and that

$$\partial_x u(t, 0) \in H^{\beta_1}(0, T), \quad \partial_x u(t, a) \in H^{\beta_1}(0, T),$$

with

$$\beta_1 = \frac{13}{8}.$$

By the Sobolev imbedding [26]

$$H^s(0, T) \subset C^k([0, T]) \text{ for } k := [s - \frac{1}{2}], \quad s > \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} u(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), & u(t, a) &\in \mathcal{C}^1([0, T]) \\ \partial_x u(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), & \partial_x u(t, a) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), \end{aligned}$$

(4.31)

and

$$\begin{aligned} v(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), & v(t, a) &\in \mathcal{C}^1([0, T]) \\ \partial_x v(t, 0) &\in \mathcal{C}^1([0, T]), & \partial_x v(t, a) &\in \mathcal{C}^1([0, T]). \end{aligned}$$

(4.32)

This ends the proof of Theorem 4.2.1 .

#

#### 4.2.1.4 Regularity of the flux

**Corollary 4.2.2** *Under the hypothesis of Theorem 4.2.1, the fluxes of the ions at the boundary*

$$\mathcal{F}(t, 0) := \partial_x v(t, 0),$$

and

$$\mathcal{F}(t, a) := -\partial_x v(t, a),$$

belong to  $\mathcal{C}^1([0, T])$ .

Proof. We conclude then thanks to the result of Theorem 4.2.1.

#

**Corollary 4.2.3** *There exists a fonction  $\Theta(x)$  which goes to 0 as  $x$  goes to  $\infty$  such that for any  $\delta \leq T$ ,*

$$\|\mathcal{F}(t,0)\|_{C^1(0,\delta)} \leq \Theta(\Omega_1) \quad (4.33)$$

and

$$\|\mathcal{F}(t,a)\|_{C^1(0,\delta)} \leq \Theta(\Omega_1) \quad (4.34)$$

Proof. The idea of the proof is the following. Thanks to Step 5 of Theorem 4.2.1,

$$\|\mathcal{F}(t,0)\|_{C^1} \leq C(T,\Omega_1)(\|u\|_{\frac{19}{4},\frac{19}{8}} + \|v\|_{\frac{19}{4},\frac{19}{8}}).$$

Then one can get bounds of  $f_e, f_i$  in  $H^{\frac{11}{4},\frac{11}{8}}$

$$\|f_e\|_{H^{\frac{11}{4},\frac{11}{8}}} \leq C(T,\Omega_1)\|u\|_{H^{\frac{15}{4},\frac{15}{8}}} + C(T,\Omega_1)\|v\|_{H^{\frac{15}{4},\frac{15}{8}}}.$$

One can continue the bootstrap. At each steps, it will appear some constants which depend on  $T$  and  $\Omega_1$ .

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t,0)\|_{C^1} &\leq C(T,\Omega_1)\|u\|_{\frac{19}{4},\frac{19}{8}} + \|v\|_{\frac{19}{4},\frac{19}{8}} \\ &\leq C(T,\Omega_1)\|f_e\|_{H^{\frac{11}{4},\frac{11}{8}}} + \|f_i\|_{H^{\frac{11}{4},\frac{11}{8}}} \\ &\dots \\ &\leq C(T,\Omega_1)(\|u\|_{L^2(H^1)} + \|v\|_{L^2(H^1)} + \|u_t\|_{L^2(H^1)} + C\|v_t\|_{L^2(H^1)}) \end{aligned}$$

For having the real proof, we refer to the next Section, page 113. Recalling Equation (2.27) and Lemma 4.2.1, it follows there exists a constant  $C$  such that,

$$\|\mathcal{F}(t,0)\|_{C^1} \leq C(T,\Omega_1) \quad (4.35)$$

More precisely, these constants will typically be products  $T^\mu \Omega_1^\nu$  for some  $\mu_0 \leq \mu, \nu_0 \leq \nu \leq N_0$ . Time  $T$  is chosen small enough such that

$$T \leq \frac{1}{\Omega_1^{\frac{N_0}{\mu_0}+1}}$$

Hence, all the products  $T^\mu \Omega_1^\nu$  ( $\mu \geq \mu_0, \nu \leq N_0$ ) will remain bounded and will go to 0 as  $\Omega_1$  goes to infinity. Indeed, for any  $\mu$  and  $\nu$ ,

$$\begin{aligned} T^\mu \Omega_1^\nu &\leq \left(\frac{1}{\Omega_1^{\frac{N_0}{\mu_0}+1}}\right)^\mu \Omega_1^\nu \\ &= \frac{1}{\Omega_1^{\mu \frac{N_0}{\mu_0} + \mu}} \Omega_1^\nu \\ &= \frac{1}{\Omega_1^\mu} \Omega_1^{\nu - \mu \frac{N_0}{\mu_0}}, \end{aligned}$$

with  $\nu - \mu \frac{\nu_0}{\mu_0} \leq 0$ . Thus

$$T^\mu \Omega_1^\nu \leq \frac{1}{\Omega_1^\mu} \longrightarrow 0$$

as  $\Omega_1 \longrightarrow \infty$ .

Hence, the function  $\Theta(\cdot)$  is chosen such that  $\Theta(x) := \frac{C}{x^{\mu_0}}$  and goes to 0 as  $x$  goes to  $\infty$ . Thus

$$\|\mathcal{F}(t,0)\|_{C^1} \leq \Theta(\Omega_1) \quad (4.36)$$

The proof for (4.34) is similar.

#

**Remark** By those computations, one can get uniform bounds on  $\|u\|_{L^\infty}$ . Indeed, the computations have shown that

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}} + \|v\|_{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}} &\leq C(T, \Omega_1) \|f_e\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}} + \|f_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}} \\ &\dots \\ &\leq C(T, \Omega_1) (\|u\|_{L^2(H^1)} + \|v\|_{L^2(H^1)} + \|u_t\|_{L^2(H^1)} + C\|v_t\|_{L^2(H^1)}) \\ &\leq C(T, \Omega_1) \end{aligned}$$

and by Property (C.1),

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(T, \Omega_1). \quad (4.37)$$

### 4.2.2 Continuity

In this section, we study the continuity of the map  $T_1$  for any  $\delta \leq T$ ,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(P(\delta)) \text{ (with the } \mathcal{C}^0 \text{ - norm)} & \longmapsto & C^1([0, \delta]) \\ \sigma & \longmapsto & \mathcal{F} \end{array}$$

We make the following hypothesis on the ionisation function  $\nu$ .

$H_{\text{cont}} 1$ . which is the same as  $H_{\text{reg}} 1$  in subsection 4.2.1,

$$|\nu_{\sigma, E}(t, x)| \leq |E(t, x)| + \|\sigma\|_{\mathcal{C}^0} T^2.$$

$H_{\text{cont}} 2$ . For any  $\sigma, \tau \in \Sigma(P(\delta))$ ,

$$|\nu_{\sigma, E}(t, x) - \nu_{\tau, F}(t, x)| \leq C|(E - F)(t, x)| + C\|\sigma - \tau\|_{\mathcal{C}^0} T^2, \quad (a)$$

$$|\partial_x \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_x \nu_{\tau, F}(t, x)| \leq C|E_x(t, x) - F_x(t, x)| + C\|\sigma - \tau\|_{\mathcal{C}^0} T^2, \quad (b)$$

$$|\partial_{xx} \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_{xx} \nu_{\tau, F}(t, x)| \leq C|E_{xx}(t, x) - F_{xx}(t, x)| + C\|\sigma - \tau\|_{\mathcal{C}^0} T^2. \quad (c)$$

$H_{\text{cont}} 3$ .

$$|\partial_t \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_t \nu_{\tau, F}(t, x)| \leq C|E_t(t, x) - F_t(t, x)| + C\|\sigma - \tau\|_{\mathcal{C}^0} T^2, \quad (a)$$

$$|\partial_{tt} \nu_{\sigma, E}(t, x) - \partial_{tt} \nu_{\tau, F}(t, x)| \leq C|E_{tt}(t, x) - F_{tt}(t, x)| + C\|\sigma - \tau\|_{\mathcal{C}^0} T^2. \quad (b)$$

H<sub>cont</sub> 4. Denote by  $\bar{\nu} := \nu_{\sigma,E} - \nu_{\tau,F}$ . We assume that

$$|\bar{\nu}(t,x) - \bar{\nu}(t,y)| \leq C|(E - F)(t,x) - (E - F)(t,y)| + C|x - y|\|\sigma - \tau\|_{C^0}T^2, \quad (a)$$

$$|\partial_x \bar{\nu}(t,x) - \partial_x \bar{\nu}(t,y)| \leq C|(E - F)_x(t,x) - (E - F)_x(t,y)| + C|x - y|\|\sigma - \tau\|_{C^0}T^2, \quad (b)$$

$$|\partial_{xx} \bar{\nu}(t,x) - \partial_{xx} \bar{\nu}(t,y)| \leq C|(E - F)_{xx}(t,x) - (E - F)_{xx}(t,y)| + C|x - y|\|\sigma - \tau\|_{C^0}T^2. \quad (c)$$

**Remark.** A typical example of a function  $\nu$  satisfying those Hypothesis is given in Annex 1.

**Theorem 4.2.4** For any  $\delta \leq T$ , the map

$$T_1 : \sigma \longmapsto \mathcal{F}$$

is continuous from  $\mathcal{C}^0(P_\delta)$  into  $C^1([0,\delta])$ .

**Proof** Let  $(\sigma^k)$  be a sequence in  $\Sigma(P(\delta))$  tending to some  $\sigma$  in the  $\mathcal{C}^0$  norm, and  $(E^k)$  and  $E$  be the electric fields respectively associated to  $(\sigma^k)$  and  $\sigma$  in 4.7. Denote by  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{E}$  respectively,

$$\bar{\sigma}(t,x) := \sigma(t,x) - \sigma^k(t,x), \quad \bar{E}(t,x) := E(t,x) - E^k(t,x).$$

Let  $u, u_k, v, v_k$  be the solutions of the drift-diffusion-Poisson equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - u_{xx} = \nu_i(\sigma, E)u - ruv - (u\Phi_x)_x \text{ in } P, \\ u_x = u\Phi_x \text{ on } \Sigma, \\ \partial_t u_k - u_{kxx} = \nu_i(\sigma_k, E_k)u_k - ru_k v_k - (u_k \Phi_{kx})_x \text{ in } P, \\ u_{kx} = u_k \Phi_{kx} \text{ on } \Sigma, \\ \partial_t v - \Delta v = \nu_i(\sigma, E)u - ruv + (v\Phi_x)_x \text{ in } P, \\ v = 0 \text{ on } \Sigma, \\ \partial_t v_k - \Delta v_k = \nu_i(\sigma_k, E_k)u_k - ru_k v_k + (v_k \Phi_{kx})_x \text{ in } P, \\ v_k = 0 \text{ on } \Sigma, \\ u(0,x) = u_k(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_k(0,x) = v_0(x), \\ \Delta \Phi = u - v \text{ in } P, \\ \Phi = g \text{ on } \Sigma, \\ \Delta \Phi_k = u_k - v_k \text{ in } P, \\ \Phi_k = g \text{ on } \Sigma. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Taking the difference of the two first equations of the system (4.38) implies that

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} - (\bar{u}_x - \bar{u}\Phi_x - u^k \bar{\Phi}_x)_x &= \bar{\nu}u + \nu_k \bar{u} - r(\bar{u}v + u_k \bar{v}) \text{ in } P, \\ \bar{u}_x|_\Sigma &= (\bar{u}\Phi_x + u_k \bar{\Phi}_x)|_\Sigma, \\ \bar{u}(0,x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

This can be written as

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} - \bar{u}_{xx} &= \bar{\nu}u + \nu_k \bar{u} - r(\bar{u}v + u_k \bar{v}) - \bar{u}_x \bar{\Phi}_x - \bar{u}(u - v) - u_{kx} \bar{\Phi}_x - u_k(\bar{u} - \bar{v}) \text{ in } P, \\ \partial_\nu \bar{u}|_\Sigma &= (u \partial_\nu \bar{\Phi} - u_k \partial_\nu \bar{\Phi}_k)|_\Sigma, \\ \bar{u}(0, x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

In the following subsections we shall compute some estimations about  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_t$  and  $\bar{u}_{tt}$ .

#### 4.2.2.1 Estimation on $\bar{u}$

**Lemma 4.2.3** *We have the following estimations, for any  $t \leq \delta$ , (with  $\delta \leq T$ ),*

$$\|\bar{u}\|_{L^2([0,t], H^1(\Omega))} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0},$$

and

$$\|\bar{v}\|_{L^2([0,t], H^1(\Omega))} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0}.$$

Proof. By multiplying Equation (4.39) by  $\bar{u}$  and integrating over  $P(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega \bar{u}^2(t, x) dx + \int_{P(t)} \bar{u}_x^2(s, x) ds dx &\leq \int_{P(t)} |\bar{\nu}u \bar{u}| + \|\nu\|_{L^\infty(P_t)} \int_{P(t)} \bar{u}^2 + r \int_{P(t)} |u_k \bar{u} \bar{v}| \\ &+ \frac{\|\bar{\Phi}\|_{L^\infty(P_t)}}{2} \left( \frac{\bar{u}^2}{\epsilon} + \epsilon |\bar{u}_x|^2 \right) \\ &+ \int_{P(t)} \bar{u}^2 |u + v| + \int_{P(t)} u_{kx} \bar{u} \bar{\Phi}_x + \int_{P(t)} u_{kx} |\bar{u}| |\bar{u} + \bar{v}|. \end{aligned}$$

By Equation (4.37),  $u_k$  are uniformly bounded in  $L^\infty(P(T))$ . Let us estimate the term including the ionisation function. By  $H_{\text{cont}}.2(a)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} |\bar{\nu}u_k \bar{u}| &\leq C \int_{P(t)} (T^2 \|\bar{\sigma}\|_{C^0} + |\bar{\Phi}_x|) |u_k \bar{u}| \\ &\leq C \int_0^t T^2 \|\bar{\sigma}\|_{C^0} \|u_k\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} + C \int_0^t \|\bar{\Phi}_x\|_{H^1} \|u_k\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 T^4 + C \int_0^t (\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|u_k\|_{L^2} (\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2}^2)). \end{aligned}$$



The other terms are treated similarly.

$$\begin{aligned}
\int_{P(t)} |u_k \bar{v} \bar{u}| &\leq C \int_0^t \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{v}\|_{L^2} \|u_k\|_{L^2} \\
&\leq C \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|u_k\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \|\bar{v}\|_{L^2}^2 \\
\int_{P(t)} \bar{u}_x \bar{u} \bar{\Phi}_x &\leq C \int_0^t \|\Phi\|_{H^2} \|\bar{u}_x\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} \\
&\leq C \frac{\epsilon}{2} \int_0^t \|\bar{u}_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \|\Phi_x\|_{H^1}^2 \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \\
\int_{P(t)} u \bar{u}^2 &\leq \frac{1}{2} \int_{P(t)} \bar{u}^2 + \frac{1}{2} \int_{P(t)} \bar{u}^2 u^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \|u\|_{H^1}^2 \\
\int_{P(t)} \bar{u} u_{kx} \bar{\Phi}_x &\leq \int_0^t \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} \|u_k\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Recalling that  $u$  and  $u_k$  belong to  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , by Gronwall's lemma

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(L^2)} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0},$$

and

$$\|\bar{u}\|_{L^2(H^1)} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0}.$$

#### 4.2.2.2 Estimation on $\bar{u}_t$

Taking the time derivative of (4.39),

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{tt} - (\bar{u}_{tx} - \bar{u}_t \bar{\Phi}_x - \bar{u} \bar{\Phi}_{tx} - u_{kt} \bar{\Phi}_x - u_k \bar{\Phi}_{tx})_x &= \partial_t (\bar{\nu}(\sigma, E)) u + \bar{\nu} u_t + \nu_{kt} \bar{u} + \nu_k \bar{u}_t \\
&\quad - r(\bar{u}_t v + \bar{u} v_t + u_{kt} \bar{v} + u_k \bar{v}_t) \text{ in } P, \\
\bar{u}_{tx} &= \bar{u}_t \bar{\Phi}_x + \bar{u} \bar{\Phi}_{tx} + u_{kt} \bar{\Phi}_x + u_k \bar{\Phi}_{tx} \text{ on } (0, T) \times \Gamma, \\
\bar{u}_{tt}(0, x) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

and

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{txx} &= (\bar{u}_t - \bar{v}_t) \text{ in } P, \\
\bar{\Phi}_t &= 0 \text{ on } \Sigma.
\end{aligned}$$

**Lemma 4.2.4** *We have the following estimations,*

$$\|\bar{u}_t\|_{L^2([0, t], H^1(\Omega))} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0},$$

and

$$\|\bar{v}_t\|_{L^2([0,t],H^1(\Omega))} \leq C(T,\Omega_1)\|\bar{\sigma}\|_{C^0}.$$

Proof. We multiply (4.41) by  $\bar{u}_t$  and integrate so that,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u}_t^2(t,x) dx &+ \int_{P(t)} \bar{u}_{tx}^2 \\ &- \int_{P(t)} (\bar{u}_t \Phi_x + \bar{u} \Phi_{tx} + u_{kt} \bar{\Phi} x + u_k \bar{\Phi} tx) \bar{u}_{tx} \\ &= \int_{P(t)} \partial_t (\bar{v}(\sigma, E)) u \bar{u}_t + \bar{v} u_t \bar{u}_t + \nu_{kt} \bar{u} \bar{u}_t + \nu_k \bar{u}_t^2 - r(\bar{u}_t v + \bar{u} v_t + u_{kt} \bar{v} + u_k \bar{v}_t) u_t. \end{aligned}$$

By Theorem 4.2.1, remember that  $u_k$  are uniformly bounded in  $L^\infty(P(T))$ . Analogously as previously,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} \bar{u} \Phi_{tx} \bar{u}_{tx} &\leq C_1 \int_0^t \|\bar{u}(s,\cdot)\|_{L^2} \|\bar{u}_{xt}(s,\cdot)\|_{L^2} \|\Phi_{xt}(s,\cdot)\|_{H^1} ds \\ &\leq C_2 \int_0^t \|\bar{u}(s,\cdot)\|_{L^2} \|\bar{u}_{xt}(s,\cdot)\|_{L^2} (\|u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|g_t(s,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) ds \\ &\leq C_3 \int_0^t \left( \epsilon \|\bar{u}_{xt}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\bar{u}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad (\|u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_t(s,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2) ds, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} \bar{u}_t \Phi_x \bar{u}_{tx} &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |\bar{u}_{tx}(s,\cdot)|^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t |\Phi_x(s,\cdot)|_{L^\infty}^2 \left( \int_{\Omega} |\bar{u}_t|^2(s,x) dx \right) ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{P(t)} |\bar{u}_{tx}|^2 + \frac{C}{\epsilon} \int_0^t (\|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|g(s,\cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2) \left( \int_{\Omega} |\bar{u}_t(s,\cdot)|^2 dx \right) ds. \end{aligned}$$

By Hypothesis H<sub>reg.3</sub>(a),

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} |u \bar{u}_t \bar{v}_t| &\leq C \int_{P(t)} u \bar{u}_t (T \|\bar{\sigma}\|_{C^0} + \bar{\Phi}_{tx}) \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{L^\infty(P)}^2 T^2 \frac{1}{2} \int_{P(T)} u^2 + C \int_{P(T)} u_t^2 \\ &\quad + C \int_0^t (\|\bar{u}_t(s,\cdot) - \bar{v}_t(s,\cdot)\|_{L^2}) \|\bar{u}_t(s,\cdot)\|_{L^2} ds. \end{aligned}$$

The last terms are bounded from above by

$$- \int_{P(t)} r |\bar{u}_t|^2 v \leq 0$$

and

$$- \int_{P(t)} r u_k \bar{u}_t \bar{v}_t \leq C \int_0^t \|\bar{u}_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}_t(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds,$$

because  $u_k$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P(T))$ . For the ions, we have the same inequalities, and so

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\bar{u}_t^2(t, \cdot) + \bar{v}_t^2(t, \cdot)) + \int_{P(t)} |\bar{u}_{tx}|^2 + |\bar{v}_{tx}|^2 \\ & \leq \int_0^t (\|\bar{u}\|_{H^1}^2 + \|\bar{v}\|_{H^1}^2) (\|\bar{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2}^2) + \|\bar{\sigma}\|_{C^0}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

with

$$\int_0^t (\|\bar{u}(s, \cdot)\|_{H^1}^2 + \|\bar{v}(s, \cdot)\|_{H^1}^2) ds < \infty.$$

So, by the Gronwall lemma ,

$$\int_{\Omega} \bar{u}_t^2(t, x) dx + \int_{\Omega} \bar{v}_t^2(t, x) dx \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|_{C^0}.$$

This completes the proof of Lemma (4.2.4).

#

**Lemma 4.2.5** *The following estimations hold*

$$\|\bar{u}_{tt}\|_{L^2([0, t], H^1(\Omega))} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|,$$

and

$$\|\bar{v}_{tt}\|_{L^2([0, t], H^1(\Omega))} \leq C(T, \Omega_1) \|\bar{\sigma}\|.$$

Proof. The proof of Lemma 4.2.5 requires computations similar as previous one, and skipped here.

Let us prove the continuity of the map  $T_1$ . Recalling that  $(\sigma^k)$  be a sequence in  $\Sigma(P(\delta))$  tending to some  $\sigma$  in the  $C^0$  norm, and  $(E^k)$  and  $E$  be the electric fields respectively associated to  $(\sigma^k)$  and  $\sigma$  in 4.7, let  $\bar{\sigma}$  and  $\bar{E}$  be respectively,

$$\bar{\sigma}(t, x) := \sigma(t, x) - \sigma^k(t, x), \quad \bar{E}(t, x) := E(t, x) - E^k(t, x).$$

Denote by

$$\bar{f} := \bar{\nu}u + \nu_k \bar{u} - r(\bar{u}v + u_k \bar{v}) - \bar{u}_x E - \bar{u}(u - v) - u_{kx} \bar{E} - u_k(\bar{u} - \bar{v}). \quad (4.43)$$

The differences of the flux of the ions is

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}(t, \cdot) = \bar{v}_x(t, \cdot) \text{ on } \Gamma.} \quad (4.44)$$

Then

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{C^1[0,t]} &\leq C \|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &= C \|\partial_x \bar{v}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &\leq C \|\bar{v}\|_{H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P_t)} \\ &\leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}. \end{aligned}$$

In order to get estimations on  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}$ , the scheme of the proof is the following.

1. We first compute  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}$ , and obtain

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)}^2.$$

2. Then, thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)}$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}.$$

3. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2,$$

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(P_t)}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2.$$

4. Once again, thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(\Sigma_t)},$$

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}.$$

5. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2,$$

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(P_t)}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2.$$

6. Again, thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_e\|_{L^2(P_t)} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)},$$

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_i\|_{L^2(P_t)}.$$

7. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{L^2(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{L^2(P_t)}^2 \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2,$$

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(P_t)}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}(P_t)}^2.$$

8. And we end by establishing the inequality

$$\|u\|_{H^{1, \frac{1}{2}}} \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}.$$

Step 1 Estimation of  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}$ . We use the fact that

$$u, v, u_k, v_k \in H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P_t), \bar{u}, \bar{v} \in H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t).$$

For the space part, let us bound from above  $\|\bar{f}_i\|_{L^2(0,t;H^{\frac{11}{4}}(\Omega))}$ .

–  $\|\bar{v}u\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}$ : We remark that

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

We have

$$\|\bar{v}u\|_{L^2(H^2)}^2 = \|\bar{v}u\|_{L^2(P)}^2 + \|\bar{v}_{xx}u + 2\bar{v}_x u_x + \bar{v}u_{xx}\|_{L^2(P)}^2.$$

By the hypothesis  $H_{\text{cont}}.2(c)$ ,

$$|\bar{v}_{xx}(t,x)| \leq |\bar{E}_{xx}|(t,x) + \|\bar{\sigma}\|_{C^0}. \quad (4.45)$$

Moreover,  $u$  is bounded in  $C^0(P_t)$ , and so

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_{xx}u\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_{P(t)} \bar{v}_{xx}^2(s,x) dx ds \\ &\leq C \int_{P(t)} [|\bar{E}_{xx}|(s,x) + \|\bar{\sigma}\|_{C^0}]^2 ds dx \\ &\leq C(T, |I|) \left( \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \int_0^t \|\bar{\Phi}_x(s, \cdot)\|_{H^4(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\leq C(T, |I|) \left( \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \int_0^t \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{H^3(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\leq C(T, |I|) \left( \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 + \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(0,t;H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

Analogously, by the belongness of  $u$  to  $H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}$ ,  $u_x$  and  $u_{xx}$  belong to  $\mathcal{C}^0(P_t)$ , so that

$$\|\bar{\nu}_x u_x\|_{L^2(P_t)}^2 \leq C(T, |I|) \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(0, t; H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2,$$

$$\|\bar{\nu} u_{xx}\|_{L^2(P_t)}^2 \leq C(T, |I|) \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(0, t; H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2,$$

and

$$\|\bar{\nu} u\|_{L^2(H^2)}^2 \leq C(T, |I|) \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2(0, t; H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0, t; H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2.$$

Let us now consider

$$I(t) := \|\bar{\nu}_{xx}(t, \cdot) u(t, \cdot)\|_{H^\alpha}^2,$$

with  $\alpha := \frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{\nu}_{xx}(t, x) u(t, x) - \bar{\nu}_{xx}(t, y) u(t, y)|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dy dx. \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\nu}_{xx}(t, x) - \bar{\nu}_{xx}(t, y)) u(t, x)|^2 + |\bar{\nu}_{xx}(t, y) (u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dy dx. \end{aligned}$$

Thanks to the hypothesis  $H_{\text{cont}}.4(c)$ ,

$$\begin{aligned} I(t) &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{E}_{xx}(t, x) - \bar{E}_{xx}(t, y)| + |x - y| \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} |u(t, x)|^2 dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{\nu}_{xx}(t, y) (u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy. \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} |\bar{E}_{xx}(\tau, x) - \bar{E}_{xx}(\tau, y)| &\leq C \|\bar{E}_{xx}(\tau, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} |x - y| \\ &\leq C \|\bar{E}(\tau, \cdot)\|_{H^4(\Omega)} |x - y| \\ &\leq C \|\bar{\Phi}(\tau, \cdot)\|_{H^5(\Omega)} |x - y| \\ &\leq C \|(\bar{u} - \bar{v})(\tau, \cdot)\|_{H^3(\Omega)} |x - y| \\ &\leq C \|(\bar{u} - \bar{v})(\tau, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)} |x - y|. \end{aligned}$$

Hence, by the belongness of  $u$  to  $\mathcal{C}^0(P_t)$ ,

$$\begin{aligned} I(t) &\leq C(T, |I|) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|x-y|^2 \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|(\bar{u} - \bar{v})(t, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)}^2}{|x-y|^{2\alpha+1}} |x-y|^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x-y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\leq C(T, |I|) \int_{\Omega} \int_{\Omega} |x-y|^2 \frac{\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)}^2}{|x-y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x-y|^{2\alpha+1}} dx dy. \end{aligned}$$

Hence, by  $\mathbf{H}_{\text{cont}}.2(c)$ ,

$$I(t) \leq C(T, |I|) \left( \int \int \frac{d\rho d\theta}{\rho^{2\alpha-2}} + \|u(t, \cdot)\|_{H^{\frac{3}{4}}}^2 \right) \left( \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)}^2 \right).$$

It follows that

$$\|\bar{v}_{xx}u\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}^2 \leq C(T, I) \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})}^2.$$

The other terms can be treated the same way, so that

$$\|\bar{v}u\|_{L^2(0, t; H^{\frac{11}{4}}(\Omega))} \leq C(T, I) \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^2(0, t; H^{\frac{15}{4}}(\Omega))}^2.$$

– Consider then  $\|\bar{u}v\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}$ .

Since  $\frac{11}{4} > \frac{1}{2}$ ,  $H^{\frac{11}{4}}(\Omega)$  is a Banach algebra.

Moreover,  $v \in H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}} \subset \mathcal{C}^0(H^{\frac{15}{4}})$ . Hence,

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(s, \cdot)v(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} &\leq C \|\bar{u}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} \|v(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}}, \\ &\leq C \|\bar{u}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}} \|v\|_{L^\infty(H^{\frac{11}{4}})}, \end{aligned}$$

and so

$$\|\bar{u}v\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})} \|v\|_{L^\infty(H^{\frac{11}{4}})}.$$

– Consider then  $\|\bar{v}_x \Phi_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}$ .

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_x(s, \cdot)\Phi_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} &\leq C \|\bar{v}_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} \|\Phi_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}}, \\ &\leq C \|\bar{v}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}} \|\Phi(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}}, \\ &\leq C \|\bar{v}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}} \|u(s, \cdot) - v(s, \cdot)\|_{H^{\frac{7}{4}}}, \end{aligned}$$

and so

$$\|\bar{v}_x \Phi_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C \|\bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})} \|u - v\|_{L^\infty(H^{\frac{7}{4}})}.$$

– Consider finally  $\|v_x \bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}$ .

$$\begin{aligned} \|v_x(s, \cdot) \bar{\Phi}_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} &\leq C \|v_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}} \|\bar{\Phi}_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{11}{4}}}, \\ &\leq C \|v(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}} \|\bar{\Phi}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}}, \\ &\leq C \|v(s, \cdot)\|_{H^{\frac{15}{4}}} \|\bar{u}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{7}{4}}}, \end{aligned}$$

and so

$$\|v_x \bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{7}{4}})} \|v\|_{L^\infty(H^{\frac{15}{4}})}.$$

For the time part,  $\|\bar{f}\|_{H^2(0,t;L^2(\Omega))}$  will be bounded from above, which will bound  $\|\bar{f}\|_{H^{\frac{11}{8}}(0,t;L^2(\Omega))}$  as a consequence.

– Consider first  $\|\bar{\nu}u\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|\bar{\nu}u\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\bar{\nu}u\|_{L^2(P_t)}^2 + \|\bar{\nu}_{tt}u + 2\bar{\nu}_t u_t + \bar{\nu}u_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2.$$

Recalling Lemma 4.2.5,

$$\begin{aligned} \|\bar{\nu}_{tt}u\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\bar{\Phi}_{ttx} + \|\bar{\sigma}\|_{C^0})^2 u^2 \\ &\leq C \int_0^t (\|\bar{u}_{tt} - \bar{v}_{tt}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{\sigma}\|_{C^0})^2 \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$

because  $u$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P_t)$ .

$$\begin{aligned} \|\bar{\nu}u_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\bar{\Phi}_x + T^2 \|\bar{\sigma}\|_{C^0})^2 u_{tt}^2 \\ &\leq C \int_0^t \|u_{tt}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + T^4 \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2) \\ &\leq C(T, I) \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$

thanks to Lemma 4.2.3 and  $u_{tt} \in L^\infty(L^2)$ .

– Let us bound from above  $\|\nu\bar{u}\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|\nu\bar{u}\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\nu\bar{u}\|_{L^2(P_t)}^2 + \|\nu_{tt}\bar{u} + 2\nu_t \bar{u}_t + \nu\bar{u}_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2.$$

Then,

$$\begin{aligned} \|\nu_{tt}\bar{u}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\Phi_{ttx} + \|\sigma\|_{C^0})^2 \bar{u}^2 \\ &\leq C \int_0^t \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u_{tt} - v_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma\|_{C^0}^2) \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$



thanks to 4.2.2 and 4.2.3. Then,

$$\begin{aligned} \|\nu \bar{u}_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\Phi_x + T^2 \|\bar{\sigma}\|_{C^0})^2 \bar{u}_{tt}^2 \\ &\leq C(T, I) \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$

as previously seen.

– Let us bound from above  $\|\bar{u}v\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|\bar{u}v\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\bar{u}v\|_{L^2(P_t)}^2 + \|\bar{u}_{tt}v + 2\bar{u}_t v_t + \bar{u}v_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2.$$

Since  $v$  is uniformly bounded,

$$\|\bar{u}_{tt}v\|_{L^2(P_t)}^2 \leq \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2.$$

Then,

$$\begin{aligned} \|\bar{u}v_{tt}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq \int_0^t \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$

thanks to 4.2.2 and 4.2.3.

– Let us consider  $\|\bar{v}_x \Phi_x\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|\bar{v}_x \Phi_x\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\bar{v}_x \Phi_x\|_{L^2(P_t)}^2 + \|\bar{v}_{ttx} \Phi_x + 2\bar{v}_{tx} \Phi_{tx} + \bar{v} \Phi_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2.$$

We have

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_{ttx} \Phi_x\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_0^t (\|u - v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)})^2 \|\bar{v}_{tt}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \int_0^t \|\bar{v}_{tt}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}. \end{aligned}$$

– Let us consider  $\|v_x \bar{\Phi}_x\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|v_x \bar{\Phi}_x\|_{H^2(L^2)}^2 = \|v_x \bar{\Phi}_x\|_{L^2(P_t)}^2 + \|v_{ttx} \bar{\Phi}_x + 2v_{tx} \bar{\Phi}_{tx} + v_x \bar{\Phi}_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2.$$

Since  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$  belong to  $H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}$ ,  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$  belong to  $C^0(L^2(\Omega))$ , so that

$$\begin{aligned} \|v_{ttx} \bar{\Phi}_x\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_0^t (\|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^2(\Omega)})^2 \|v_{tt}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left( \sup_{s \in (0, t)} \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|v_{tt}\|_{L^2(H^1)}^2 \\ &\leq \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0, t[ \times \Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0, t[ \times \Omega)}^2 + \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2. \end{aligned}$$

Then, since  $v \in \mathcal{C}^0(H^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \|v_x \bar{\Phi}_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq C \int_0^t (\|\bar{u}_{tt} - \bar{v}_{tt}\|_{L^2(\Omega)})^2 \|v\|_{H^1}^2 \\ &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2. \end{aligned}$$

It follows from this first step that

$$\boxed{\begin{aligned} \|\bar{f}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(]0, t[ \times \Omega)}^2 &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 \\ &+ C \left( \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0, t[ \times \Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0, t[ \times \Omega)}^2 \right). \end{aligned}}$$

Step 2 Thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)},$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P_t)} \leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}.$$

Step 3 Estimation of  $\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}$ . By a similar calculus to Step 1, we can prove the following inequalities

For the space part,

$$\|\bar{f}_e\|_{L^2(H^{\frac{7}{4}})} \leq \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0} + \|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} + \|\bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})},$$

for the time part,

$$\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{8}}(L^2)} \leq \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0} + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{8}}(L^2)} + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{8}}(L^2)}.$$

Hence,

$$\boxed{\begin{aligned} \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}^2 \\ &+ C (\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2). \end{aligned}}$$

Estimation of  $\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)}$ .

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}} \leq C \|\bar{u} \bar{\Phi}_x + u \bar{\Phi}_x\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}.$$

Space part. By the belongingness of  $u, u_x, u_{xx}$  to  $\mathcal{C}^0(L^2)$ , it follows that

$$\begin{aligned} \int \int \bar{u}_{xx}^2 \bar{\Phi}_x^2 &\leq C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\bar{u}_{xx}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^2)}^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int \int \bar{u}^2 \Phi_{xxx}^2 &\leq C \int_0^t \|u_x\|_{L^2}^2 \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\bar{u}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned} \int \int u_{xx}^2 \bar{\Phi}_x^2 &\leq C \|\bar{u}\|_{L^2}^2, \\ \int \int u^2 \bar{\Phi}_{xxx}^2 &\leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^2)}^2. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}^2 \leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}^2 + C \|\bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}^2.$$

Time part. We consider the norm of  $\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x$  in  $H^2(L^2)$ .

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x\|_{H^2(L^2)}^2 &= \|\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x\|_{L^2(P_t)}^2 \\ &\quad + \|\bar{u}_{tt}\Phi_x + 2\bar{u}_t\Phi_{tx} + \bar{u}\Phi_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2 \\ &\quad + \|u_{tt}\bar{\Phi}_x + 2u_t\bar{\Phi}_{tx} + u\bar{\Phi}_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2. \end{aligned}$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_{tt}\Phi_x\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \\ \|\bar{u}\Phi_{ttx}\|_{L^2(P_t)}^2 &\leq \int_0^t (\|u_{tt} - v_{tt}\|_{L^2(\Omega)} + \|g_{tt}\|_{H^1})^2 \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2, \end{aligned}$$

and the other terms are treated similarly. Hence,

$$\boxed{\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)}^2 \leq C (\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2).}$$

Step 4 Thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}^2 + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(\Sigma_t)}^2,$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}^2.$$

Step 5 Estimation of  $\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}$ .

By a similar calculus to Step 1,

$$\boxed{\begin{aligned} \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P_t)}^2 &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 \\ &\quad + C \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(]0, t[\times\Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(]0, t[\times\Omega)}^2. \end{aligned}}$$

Step 6 Thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{f}_e\|_{L^2(P_t)}^2 + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}^2,$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P_t)}^2 \leq C \|\bar{f}_i\|_{L^2(P_t)}^2.$$

Step 7 Estimation of  $\|\bar{f}_e\|_{L^2(P_t)}$ .

It is easy to see that

$$\begin{aligned} \|\bar{f}_e\|_{L^2(P_t)} &\leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}^2 \\ &+ C \|\bar{u}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(H^1)}^2. \end{aligned}$$

Estimation of  $\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}$ .

It follows from

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)} \leq \|\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x\|_{H^{1, \frac{1}{2}}},$$

that

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}^2 \leq C \|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}}^2.$$

Step 8 Now,

$$\|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}}^2 \tag{4.46}$$

$$\leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{u}_t\|_{L^2(L^2)}^2 \tag{4.47}$$

$$\leq C \|\bar{u}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{u}_t\|_{L^2(H^1)}^2, \tag{4.48}$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}}^2 \leq C \|\bar{v}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(H^1)}^2. \tag{4.49}$$

Step 9 It follows from Lemmas 4.2.3 and 4.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{L^2((H^1))} \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}$$

and

$$\|\bar{u}_t\|_{L^2((H^1))} \leq C \|\bar{\sigma}\|_{C^0}$$

so

$$\boxed{\|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}(P_t)} \leq \|\bar{\sigma}\|_{C^0}.}$$

Step 10 Finally, we have proven that:

$$\begin{aligned}
\|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{C^1([0,t])} &\leq C\|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\
&= C\|\bar{v}_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\
&\leq C\|\bar{v}\|_{H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P_t)} \\
&\leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P_t)} \\
&\leq C\|\bar{\sigma}\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

This proves the continuity of the map  $T_1$ , for any  $\delta \leq T$ ,

$$\begin{array}{ccc}
T_1 : \Sigma(P(\delta)) \text{ (with the } \mathcal{C}^0 \text{ - norm)} & \longmapsto & C^1([0,T]) \\
\sigma & & \longmapsto \mathcal{F},
\end{array}$$

and, by the Schauder fixed point theorem, ends the proof of Theorem 4.2.4.

#

### 4.3 Continuity of the map $T_2$

First of all, recall that

$$\mathcal{F}(t,0) := D_i \partial_x v(t,0),$$

By Corollary 4.2.2,  $\mathcal{F}(t,0) \in C^1([0,T])$ . Let  $T_2$  be the following map ,

$$\begin{array}{ccc}
C^1([0,T]) & \longrightarrow & \Sigma(P(\delta)) \\
\mathcal{F} & \longmapsto & \rho,
\end{array}$$

where  $\rho$  is the first component of the solution  $(\rho, m)$  to

$$\begin{cases}
-\lambda_2(\rho_t + \lambda_1 \rho_x) + m_t + \lambda_1 m_x = 0 \text{ in } P, \\
-\lambda_1(\rho_t + \lambda_2 \rho_x) + m_t + \lambda_2 m_x = 0 \text{ in } P, \\
\rho(0,x) = \rho_0(x), \quad m(0,x) = m_0(x) \text{ in } \Omega,
\end{cases} \quad (4.50)$$

together with the boundary conditions

$$\begin{aligned}
m(t,0) &= \mathcal{F}(t,0), \\
\rho(t,a) &= \tilde{\rho}_a(t).
\end{aligned} \quad (4.51)$$

Let us study the continuity of  $T_2$  when  $\Sigma(P(\delta))$  is considered with the topology of the  $\mathcal{C}^0$  norm.

As seen in Section 4.1,  $P(\delta)$  is splitted as

$$P(\delta) := Q(\delta) \cup R(\delta) \cup S(\delta),$$

### 4.3.1 The Cauchy problem

Notation. We denote by  $u^c = (u_1^c, u_2^c) = (\rho^c, m^c)$  the solution of the Cauchy problem (4.50). Recalling Section 3.2.4, the Cauchy problem is studied in the maximum determinate domain

$$Q(\delta) := \{0 \leq t \leq \delta, x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\},$$

where

$$\begin{cases} \frac{dx_1(s)}{ds} = \lambda_2(s, x_1, u^c(s, x_1)), \\ x_1(0) = 0, \end{cases} \quad (4.52)$$

and

$$\begin{cases} \frac{dx_2(s)}{ds} = \lambda_1(s, x_2, u^c(s, x_2)), \\ x_2(0) = b, \end{cases} \quad (4.53)$$

and the solution in this domain does not depend on the boundary conditions.

Remark. The characteristic curves defined by  $x_1$  and  $x_2$  do not depend on the boundary conditions (4.51).

### 4.3.2 The boundary value problem

We consider the domain  $R(\delta) = \{(t, x); 0 \leq t \leq \delta, 0 \leq x \leq x_1(t)\}$  where  $x_1$  is the characteristics defined by (4.52). Let us study the following problem

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u) (\partial_t u_j + \lambda_l(t, x, u) \partial_x u_j) = 0, \quad l = 1, 2, \\ \text{On } x = x_1 \quad u_j(t, x) = u_j^c(t, x) - u_{0j}, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \text{On } x = 0 \quad u_2(t, 0) = \mathcal{F}(t) - m_0. \end{cases} \quad (4.54)$$

As previously, we write the boundary conditions in the following way. Let

$$G_1(t) := -\lambda_2^0(\rho^c - \rho_0) + (m^c - m_0),$$

and

$$G_2(t, u) := -\lambda_1^0(\rho - \rho_0) + (\mathcal{F} - m_0).$$

Then

$$\text{on } x = x_1, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t),$$

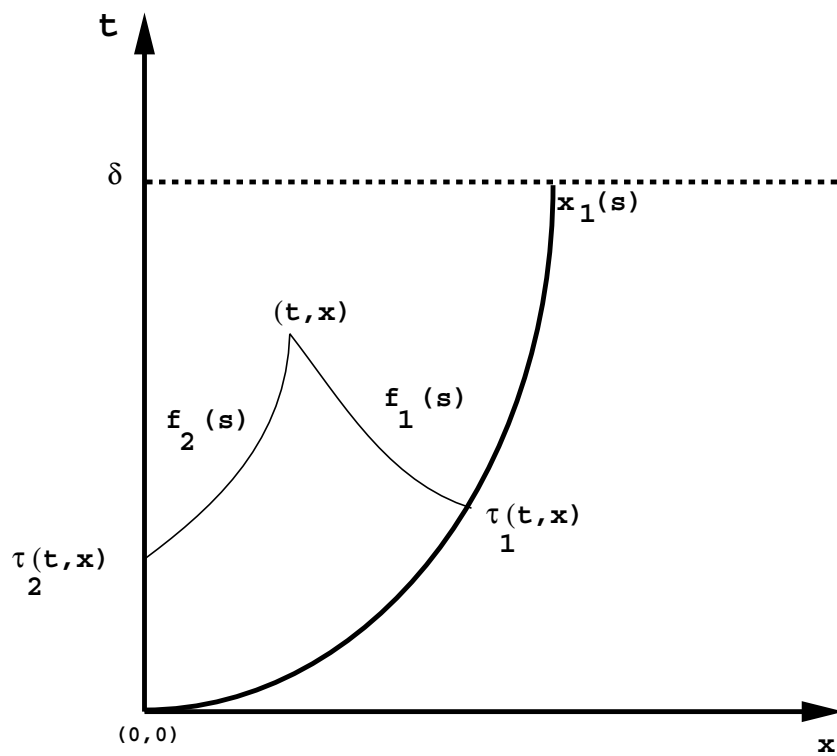


FIG. 4.1 –  $f_i$  characteristics in the domain  $R(\delta)$

and

$$\text{on } x = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t, u).$$

Remarks.

$$\begin{aligned} \partial_u G_1 &\equiv 0, \\ \partial_t G_1 &= -\lambda_2^0 \partial_t \rho^c + \partial_t m^c \quad \text{is continuous because } u^c \text{ belongs to } C^1, \\ \partial_{u_1} G_2 &= -\lambda_1^0 \quad \text{is continuous,} \\ \partial_{u_2} G_2 &\equiv 0, \\ \partial_t G_2 &= \partial_t \mathcal{F}(t) \end{aligned}$$

- By Theorem 4.2.2, the function  $\mathcal{F}$  belongs to  $C^1([0, T])$ . Moreover, the bound of  $\|\mathcal{F}\|_{C^1}$  are uniform and given by (4.33). Hence, the constant  $\Omega_1$  defined by (3.35) does not depend on  $\|\mathcal{F}\|_{C^1}$ . Indeed, any  $\Omega_1$  such that

$$\Omega_1 > \frac{1}{1-\theta} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \frac{\beta}{2} \leq v_1 \leq 1, |v_2| \leq 1}} |-\lambda_2^0 \partial_t \rho^c + \partial_t m^c|$$

and

$$\Omega_1 > \frac{1}{1-\theta} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \frac{\beta}{2} \leq v_1 \leq 1, |v_2| \leq 1}} |\Theta(\Omega_1)|$$

satisfies

$$\Omega_1 \leq \frac{1}{1-\theta} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ \frac{\beta}{2} \leq v_1 \leq 1, |v_2| \leq 1 \\ l=1,2}} \left| \frac{\partial G_l}{\partial t}(t, v) \right|$$

which is required by Li Ta-t sien [24]. Now, the function  $\omega^*$ , defined by (3.38), *a priori* depends on  $\|\mathcal{F}\|_{C^1}$ . But thanks to Theorem 4.2.1,

$$|\mathcal{F}_t(t) - \mathcal{F}_t(t')| \leq C \|\mathcal{F}_t\|_{H^{\frac{7}{8}}} |t - t'|^{\frac{3}{8}} \leq C \|\mathcal{F}\|_{C^1} |t - t'|^{\frac{3}{8}}.$$

Thanks to Equation (4.33), the modulus of continuity of  $\mathcal{F}$  is bounded independently of  $\mathcal{F}$ , and the function  $\omega^*$  does not depend on  $\|\mathcal{F}\|_{C^1}$ .



- One can then applied Lemma 3.3.1 to get the existence and uniqueness of  $u$  which belongs to  $\mathcal{C}^1(\delta_{**})$  with  $\delta_{**} \leq T$ .
- For any  $\delta \leq \delta_{**}$ ,  $T_2$  maps  $\Sigma(P(\delta))$  into itself, since

$$u \in \Sigma^{pbl}(\delta|\Omega_1, \Omega_2(\cdot)) := \{v \in \Sigma^{pbl}(\delta|\Omega_1), \forall \eta, \Omega(\eta, q) \leq \Omega_2(\eta)\}.$$

Let us show the continuity of the map

$$w := \mathcal{F} \longrightarrow u := (\rho, m),$$

where  $(\rho, m)$  is the solution to 4.54. Let  $(\mathcal{F}^p)$  be a sequence converging in  $\mathcal{C}^1([0, T])$  to  $\mathcal{F}$ . Let  $u$  and  $u^p$  be the solution to (4.55) and (4.56) respectively,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u)(\partial_t u_j + \lambda_l(t, x, u)\partial_x u_j) = 0, \quad l = 1, 2, \\ \text{On } x = x_1, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j = G_1(t), \\ \text{On } x = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j = G_2(t, u), \end{array} \right. \quad (4.55)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u^p)(\partial_t u_j^p + \lambda_l(t, x, u^p)\partial_x u_j^p) = 0, \quad l = 1, 2, \\ \text{On } x = x_1, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{1j}^0 u_j^p = G_1(t), \\ \text{On } x = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \zeta_{2j}^0 u_j^p = G_2(t, u^p). \end{array} \right. \quad (4.56)$$

The difference  $\bar{u}_j := u_j - u_j^p$  satisfies

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u)(\partial_t \bar{u}_j + \lambda_l(t, x, u)\partial_x \bar{u}_j) &= \sum_{j=1}^2 \partial_t u_j^p (\zeta_{lj}(t, x, u^p) - \zeta_{lj}(t, x, u)) + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \partial_x u_j^p (\zeta_{lj}(t, x, u^p)\lambda_l(t, x, u^p) - \zeta_{lj}(t, x, u)\lambda_l(t, x, u)) \\ &=: h_l(u, u^p), \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

The  $l$ -characteristics, starting at  $(t, x)$  for the problem 4.55 are defined by

$$\begin{cases} \frac{df_l(\tau; t, x)}{d\tau} = \lambda_l(\tau, f_l, u(\tau, f_l)), \\ f_l(t; t, x) = x, \quad l \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Let  $\tau_1$  and  $\tau_2$  be the longer times such that

$$f_2(\tau_2(t, x); t, x) = 0 \quad \text{and} \quad f_1(\tau_1(t, x); t, x) = x_1(\tau_1).$$

By integrating (4.57) on the  $l$ -characteristics between  $\tau_l$  and  $t$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, u) \bar{u}_j(t, x) &= \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(\tau_l, f_l(\tau_l), u(\tau_l, f_l(\tau_l))) \bar{u}_j(\tau_l, f_l(\tau_l)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_l}^t \frac{d\zeta_{lj}(u)}{d_l\tau} \bar{u}_j(\tau, f_l(\tau)) d\tau + \int_{\tau_l}^t h_l(u, u_p)(\tau, f_l(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (4.58)$$

where for any function  $K(t, x)$ ,

$$\frac{dK(\tau, f_l(\tau))}{d_l\tau} := \partial_t K(\tau, f_l(\tau)) + \lambda_l \partial_x K(\tau, f_l(\tau)), \quad l \in \{1, 2\}.$$

Multiplying (4.58) by the inverse matrix  $(\zeta^{kl})$  of  $(\zeta_{lj})$  implies that

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(t, x) &= \sum_{l,j=1}^2 \zeta^{kl}(t, x, u) \zeta_{lj}(\tau_l, f_l(\tau_l), u(\tau_l, f_l(\tau_l))) \bar{u}_j(\tau_l, f_l(\tau_l)) \\ &\quad + \sum_l \zeta^{kl}(t, x, u) \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_l}^t \frac{d\zeta_{lj}(u)}{d_l\tau} \bar{u}_j d\tau \\ &\quad + \sum_l \zeta^{kl}(t, x, u) \int_{\tau_l}^t h_l(u, u_p) d\tau. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Denote by

$$F_l(\bar{u}) := \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(\tau_l, f_l(\tau_l), u(\tau_l, f_l(\tau_l))) \bar{u}_j(\tau_l, f_l(\tau_l)).$$

Then  $F_1(\bar{u}) = 0$ , since  $\bar{u} = 0$  at the points  $(t, x_1(t))$ , and

$$F_2(\bar{u}) = -\lambda_1(\tau_2, 0, u(\tau_2, 0)) \bar{u}_1(\tau_2, 0) + \bar{u}_2(\tau_2, 0).$$

It follows that

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(t,x) &= \zeta^{k2}(t,x,u)(-\lambda_1(\tau_2,0,u(\tau_2,0))\bar{u}_1(\tau_2,0) + \bar{u}_2(\tau_2,0)) \\ &\quad + \sum_l \zeta^{kl}(t,x,u) \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_1}^t \frac{d\zeta_{lj}(u)}{d_1\tau} \bar{u}_j d\tau + \sum_l \zeta^{kl}(t,x,u) \int_{\tau_1}^t h_l(u,u_p) d\tau. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Only  $\bar{u}_2(\tau_2,0)$  is given by the boundary condition. In order to know  $\bar{u}_1(\tau_2,0)$ , let us integrate (4.57) on the 1- characteristics between  $\tau_1(\tau_2(t,x))$  and  $\tau_2(t,x)$ . Hence,

$$\begin{aligned} \zeta_{11}(\tau_2,0,u(\tau_2,0))\bar{u}_1(\tau_2,0) &= -\zeta_{12}(\tau_2,0,u(\tau_2,0))\bar{u}_2(\tau_2,0) \\ &\quad + (\zeta_{11}(u)\bar{u}_1 + \zeta_{12}(u)\bar{u}_2)(\tau_1(\tau_2),x_1(\tau_1)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\zeta_{1j}(u)}{d_1\tau} \bar{u}_j d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_1(u,u^p) d\tau, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \zeta_{11}(\tau_2,0,u(\tau_2,0))\bar{u}_1(\tau_2,0) &= -\bar{u}_2(\tau_2,0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\zeta_{1j}(u)}{d_1\tau} \bar{u}_j d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_1(u,u^p) d\tau, \end{aligned}$$

since  $\bar{u} = 0$  on  $(t,x_1(t))$  and  $\zeta_{12} = 1$ . Since the solution  $u$  to the boundary value problem belongs to  $\mathcal{C}^1$ , and  $u$  is bounded,  $\zeta_{11}(\tau_2,0,u(\tau_2,0))$  is bounded. Hence

$$F_2(\bar{u}) \leq \left| \frac{\bar{u}_2(\tau_2,0)}{\zeta_{11}(\tau_2,0,u)(\tau_2,0)} \right| + \left| \frac{1}{\zeta_{11}(\tau_2,0,u)(\tau_2,0)} \right| \left| \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\zeta_{1j}(u)}{d_1\tau} \bar{u}_j d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_1(u,u^p) d\tau \right| + |\bar{u}_2(\tau_2,0)|,$$

and, since  $\lambda_1$  is bounded and  $\zeta_{11}$  is bounded from below and from above, it follows

$$\begin{aligned} |\bar{u}_k(t,x)| &\leq C|\bar{u}_2(\tau_2,0)| + C \sum_l \sum_{j=1}^2 \int_{\tau_1}^t |\bar{u}_j| d\tau + \sum_l \int_{\tau_1}^t |h_l(u,u_p)| d\tau \\ &\leq C|\bar{u}_2(\tau_2,0)| + C \sum_{j=1}^2 \int_0^t |\bar{u}_j(\tau, f_l(\tau))| d\tau. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Let

$$\mathcal{V}(t) := \sup_j \sup_{s,x \in R(t)} |\bar{u}_j(s,x)|$$

where  $R(t)$  is defined by

$$R(t) = \{(\tau,x); 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq x \leq x_1(\tau)\}, \quad t \in [0,\delta] \quad (4.62)$$

On the characteristics,

$$\bar{u}_j(\tau, f_l(\tau)) \leq \mathcal{V}(\tau).$$

Hence

$$\mathcal{V}(t) \leq C |\bar{u}_2(\tau_2, 0)| + C \int_0^t \mathcal{V}(\tau) d\tau.$$

It follows from Gronwall's lemma that

$$\mathcal{V}(t) \leq C \|\bar{u}_2\|_{C^0} = \|\bar{\mathcal{F}}\|_{C^0}.$$

Hence  $\mathcal{V} \rightarrow 0$  in  $C^0$  when  $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ .

## 4.4 Uniqueness

We are going to show the uniqueness of the solution  $(n_e, n_i, \Phi)$  to the whole system,

$$\begin{cases} \partial_t n_e - (\partial_x n_e - n_e \Phi_x)_x = (\nu_i(\nabla \Phi, \rho) - r n_i) n_e, \\ \partial_t n_i - (\partial_x n_i + n_i \Phi_x)_x = (\nu_i(\nabla \Phi, \rho) - r n_i) n_i, \\ \Phi_{xx} = (n_e - n_i), \\ \partial_x n_e = n_e \Phi_x, (t, x) \in \Sigma \\ n_i(t, x) = 0, (t, x) \in \Sigma \\ \Phi = \Phi|_{\Gamma}, \\ n_e(0) = n_i(0) = n_{e0}, \end{cases} \quad (4.63)$$

with  $n_{e0}$  nonnegative, where  $\rho$  is the first component of the solution  $(\rho, m)$  to

$$\begin{cases} -\lambda_2(\rho_t + \lambda_1 \rho_x) + m_t + \lambda_1 m_x = 0, \\ -\lambda_1(\rho_t + \lambda_2 \rho_x) + m_t + \lambda_2 m_x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_i(x) \quad m(0, x) = m_i(x), \\ m(t, 0) = \partial_x n_i(t, 0) \text{ in } t \in (0, \delta), \\ \rho(t, a) = \tilde{\rho}(t, a) \text{ in } t \in (0, \delta). \end{cases} \quad (4.64)$$

Let  $(n_e^1, n_i^1, \Phi^1, \rho^1, m^1)$  and  $(n_e^2, n_i^2, \Phi^2, \rho^2, m^2)$  be two solutions of the system (4.63 – 4.64). For the sake of convenience, let

$$u := n_e, v_1 := n_i,$$

and

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) := (\rho, m).$$

We denote by  $\bar{\cdot}$  all the quantities expressing differences. For example  $\bar{\omega} := (\omega_1^1 - \omega_1^2, \omega_2^1 - \omega_2^2)$ ,  $\bar{u} := u^1 - u^2 \dots$ . As previously, we rewrite the Euler system in the following form

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, \omega^k) (\partial_t \omega_j^k + \lambda_l(t, x, \omega^k) \partial_x \omega_j^k) = 0, & l = 1, 2, \\ \text{On } x = X_2, & \omega_j^k(t, x) = u_j^c(t, x) - \omega_{0j}, \\ \text{On } x = 0, & \omega_2^k(t, 0) = \tilde{m}(n_i^k)(t) - m_0, \end{cases} \quad (4.65)$$

for  $k = 1, 2$ . Taking the difference of those equations implies

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} - \partial_{xx} \bar{u} &= \bar{\nu} u - \nu^2 \bar{u} - r(\bar{u} v^1 + u^2 \bar{v}) + \bar{u}_x \Phi_x^1 + \bar{u}(u^1 - v^1) + u_x^2 \bar{\Phi}_x + u^2(\bar{u} - \bar{v}), \\ \partial_\nu \bar{u} &= \bar{g}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \zeta_{lj}(t, x, \omega^1) (\partial_t \bar{\omega}_j + \lambda_l(t, x, \omega^1) \partial_x \bar{\omega}_j) &= \sum_{j=1}^2 \partial_t \omega_j^2 (\zeta_{lj}(t, x, \omega^1) - \zeta_{lj}(t, x, \omega^2)) + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \partial_x \omega_j^2 (\zeta_{lj}(t, x, \omega^2) \lambda_l(t, x, \omega^2) - \zeta_{lj}(t, x, \omega^1) \lambda_l(t, x, \omega^1)) \\ &:= h_l(\omega^1, \omega^2) (l = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Let

$$\mathcal{V}(t) := \sup_j \sup_{s, x \in R(t)} |\bar{\omega}_j(s, x)|. \quad (4.68)$$

With similar computations to Section 4.3.2, i.e. using a method based on the characteristic curves, we will prove that

$$\mathcal{V}(t) \leq C \|\bar{u}_2\|_{C^0} \leq \|\partial_x \bar{n}_i\|_{C^0}. \quad (4.69)$$

Then, with similar computations to Section 4.2.2, we are going to show that

$$\|\partial_x \bar{n}_i\|_{C^0} \leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot). \quad (4.70)$$

#### 4.4.1 Estimations

As previously, we denote by  $\nu_{\rho, E}$

$$\nu_{\rho, E}(t, x) := \nu(t, x, \rho(t, x), E(t, x)).$$

Assume that the following assumptions hold.

(H<sub>uni</sub> 1). which is the same as H<sub>reg</sub>1 in subsection 4.2.1

$$|\nu_{\sigma,E}(t,x)| \leq |E(t,x)| + \|\rho\|_{C^0}.$$

(H<sub>uni</sub> 2).

$$|\nu_{\rho^1,E^1}(t,x) - \nu_{\rho^2,E^2}(t,x)| \leq C \int_0^t \sup_x |(\rho^1 - \rho^2)(s,x)| ds + C|(E^1 - E^2)(t,x)|, \quad (a)$$

$$|\partial_x \nu_{\rho^1,E^1}(t,x) - \partial_x \nu_{\rho^2,E^2}(t,x)| \leq C \int_0^t \sup_x |(\rho^1 - \rho^2)(s,x)| ds + C|(E_x^1 - E_x^2)(t,x)|, \quad (b)$$

$$|\partial_{xx} \nu_{\rho^1,E^1}(t,x) - \partial_{xx} \nu_{\rho^2,E^2}(t,x)| \leq C \int_0^t \sup_x |(\rho^1 - \rho^2)(s,x)| ds + C|(E_{xx}^1 - E_{xx}^2)(t,x)|. \quad (c)$$

(H<sub>uni</sub> 3).

$$|\partial_t \nu_{\rho^1,E^1}(t,x) - \partial_t \nu_{\rho^2,E^2}(t,x)| \leq C \int_0^t \sup_x |(\rho^1 - \rho^2)(s,x)| ds + C|(E_t^1 - E_t^2)(t,x)|, \quad (a)$$

$$|\partial_{tt} \nu_{\rho^1,E^1}(t,x) - \partial_{tt} \nu_{\rho^2,E^2}(t,x)| \leq C \sup_x |(\rho^1 - \rho^2)(t,x)| + C|(E_{tt}^1 - E_{tt}^2)(t,x)|. \quad (b)$$

(H<sub>uni</sub> 4). If  $\bar{\nu}$  denotes  $\bar{\nu} := \nu_{\rho^1,E^1} - \nu_{\rho^2,E^2}$ , then

$$|\bar{\nu}(t,x) - \bar{\nu}(t,y)| \leq C|x - y| \int_0^t \sup_z |(\rho^1 - \rho^2)(s,z)| ds + |(E^1(t,x) - E^2(t,y))|, \quad (a)$$

$$|\partial_x \bar{\nu}(t,x) - \partial_x \bar{\nu}(t,y)| \leq C|x - y| \int_0^t \sup_z |(\rho^1 - \rho^2)(s,z)| ds + |(E_x^1(t,x) - E_x^2(t,y))|, \quad (b)$$

$$|\partial_{xx} \bar{\nu}(t,x) - \partial_{xx} \bar{\nu}(t,y)| \leq C|x - y| \int_0^t \sup_z |(\rho^1 - \rho^2)(s,z)| ds + |(E_{xx}^1(t,x) - E_{xx}^2(t,y))|. \quad (c)$$

#### 4.4.1.1 Estimation on $\bar{u}$

**Lemma 4.4.1** *We have the following estimations,*

$$\|\bar{u}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds,$$

and

$$\|\bar{v}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2 \leq \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds.$$

Proof. The proof is similar to the proof of Lemma 4.2.3. Let us estimate the term including the ionisation function. Thanks to Hypothesis  $H_{\text{uni}.2(a)}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} |\bar{\nu} u_k \bar{u}| &\leq C \int_{P(t)} (\sup_x |\bar{\sigma}| + |\bar{\Phi}_x|) |u_k \bar{u}| \\ &\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\sigma}| \|u_k\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} + \int_0^t \|\bar{\Phi}_x\|_{H^1} \|u_k\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} \\ &\leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\sigma}|^2 + \int_0^t \|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|u_k\|_{L^2} (\|\bar{u}\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2}^2) \right). \end{aligned}$$

The other terms can be treated similarly. By a Gronwall's lemma, we get

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty(L^2)} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

and

$$\|\bar{u}\|_{L^2(H^1)} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

#### 4.4.1.2 Estimation on $\bar{u}_t$

Taking the time derivative of (4.39),

$$\begin{aligned} \bar{u}_{tt} - (\bar{u}_{tx} - \bar{u}_t \bar{\Phi}_x - \bar{u} \bar{\Phi}_{tx} - u_{kt} \bar{\Phi}_x - u_k \bar{\Phi}_{tx})_x &= \partial_t (\bar{\nu}(\rho, E)) u + \bar{\nu} u_t + \nu_{kt} \bar{u} + \nu_k \bar{u}_t \\ &\quad - r(\bar{u}_t v + \bar{u} v_t + u_{kt} \bar{v} + u_k \bar{v}_t) \text{ in } P, \\ \bar{u}_{tx} &= \bar{u}_t \bar{\Phi}_x + \bar{u} \bar{\Phi}_{tx} + u_{kt} \bar{\Phi}_x + u_k \bar{\Phi}_{tx} \text{ on } (0, t \times \Gamma, \\ \bar{u}_{tt}(0, x) &= 0, \end{aligned} \tag{4.71}$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{txx} &= (\bar{u}_t - \bar{v}_t) \text{ in } P, \\ \bar{\Phi}_t &= 0 \text{ on } \Sigma. \end{aligned}$$

We multiply (4.71) by  $\bar{u}_t$  and integrate so that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{u}_t^2(t, x) dx &+ \int_{P_t} \bar{u}_{tx}^2 \\ &- \int_{P_t} (\bar{u}_t \bar{\Phi}_x + \bar{u} \bar{\Phi}_{tx} + u_{kt} \bar{\Phi}_x + u_k \bar{\Phi}_{tx}) \bar{u}_{tx} \\ &= \int_{P_t} \partial_t (\bar{\nu}(\rho, E)) u \bar{u}_t + \bar{\nu} u_t \bar{u}_t + \nu_{kt} \bar{u} \bar{u}_t + \nu_k \bar{u}_t^2 - r(\bar{u}_t v + \bar{u} v_t + u_{kt} \bar{v} + u_k \bar{v}_t) u_t. \end{aligned}$$

**Lemma 4.4.2** *The following estimations hold,*

$$\|\bar{u}_t\|_{L^2([0,t,H^1(\Omega)])} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

and

$$\|\bar{v}_t\|_{L^2([0,t,H^1(\Omega)])} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. The proof is similar to the proof of 4.2.5. Let us estimate the terms including the the ionisation function. Recalling Hypothesis  $H_{\text{uni}.3(a)}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{P(t)} |u\bar{u}_t\bar{v}_t| &\leq C \int_{P(t)} |u\bar{u}_t| (\sup_x |\bar{\rho}(s,x)| + |\bar{\Phi}_{tx}|) \\ &\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)| \|\bar{u}_t\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\bar{u}_t - \bar{v}_t\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 + \int_0^t \|\bar{u}_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

For the ions, we have similar inequalities, and so

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\bar{u}_t^2(t,\cdot) + \bar{v}_t^2(t,\cdot)) + \int_{P(T)} |\bar{u}_{tx}|^2 + |\bar{v}_{tx}|^2 \\ \leq \int_0^t (\|\bar{u}\|_{H^1}^2 + \|\bar{v}\|_{H^1}^2) (\|\bar{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2}^2) \\ + \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2, \end{aligned} \tag{4.72}$$

with

$$\int_0^t (\|\bar{u}(s,\cdot)\|_{H^1}^2 + \|\bar{v}(s,\cdot)\|_{H^1}^2) ds < \infty.$$

So by Gronwall's lemma,

$$\int_{\Omega} \bar{u}_t^2(t,x) dx + \int_{\Omega} \bar{v}_t^2(t,x) dx \leq \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds.$$

This completes the proof of Lemma 4.4.2.

#

With similar computations, the following lemma holds.

**Lemma 4.4.3** *We have the following estimations,*

$$\|\bar{u}_{tt}\|_{L^2([0,t,H^1(\Omega)])} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$



and

$$\|\bar{v}_{tt}\|_{L^2([0,t,H^1(\Omega)])} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

#

Let us now prove the uniqueness of the solution. We denote by

$$\bar{f}_i := \bar{\nu}u - \nu^2\bar{u} - r(\bar{u}v^1 + u^2\bar{v}) + \bar{u}_x\bar{\Phi}_x^1 + \bar{u}(u^1 - v^1) + u_x^2\bar{\Phi}_x + u^2(\bar{u} - \bar{v}). \quad (4.73)$$

The difference of the fluxes of ions is

$$\bar{\mathcal{F}}(t, \cdot) = \bar{v}_x(t, \cdot) \text{ on } \Gamma.$$

Then,

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{F}}\|_{C^1[0,t]} &\leq C\|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &= C\|\partial_x\bar{v}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &\leq C\|\bar{v}\|_{H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P(t))} \\ &\leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}. \end{aligned}$$

The aim of the proof is to bound from above  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}$  with respect to  $\int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds$ .

The proof is very similar to the proof of Section 4.2.2.

1. We first compute  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}$ , and obtain that

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))}^2.$$

2. Then, thanks to Theorem C.2.4,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))} \leq C\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)},$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))} \leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}.$$

3. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2,$$

and

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(P(t))}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2.$$

4. Again, thanks to Theorem C.2.4 ,

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))} \leq C \|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(\Sigma_t)},$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))} \leq C \|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}.$$

5. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s, x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s, x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2,$$

and

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(P(t))}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2.$$

6. Again, thanks to Theorem C.2.4

$$\|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))} \leq C \|\bar{f}_e\|_{L^2(P(t))} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)},$$

and

$$\|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))} \leq C \|\bar{f}_i\|_{L^2(P(t))}.$$

7. We then show that

$$\|\bar{f}_e\|_{L^2(P(t))}^2 \leq \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s, x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega))}^2,$$

$$\|\bar{f}_i\|_{L^2(P(t))}^2 \leq \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s, x)|^2 ds + \|\bar{u}\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0, t; H^1(\Omega))}^2,$$

and

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(P(t))}^2 \leq \|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}(P(t))}^2.$$

8. And we end by establishing the estimation

$$\|\bar{u}\|_{H^{1, \frac{1}{2}}} \leq C \left( \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Step 1 Estimation of  $\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}$ . We recall that

$$u, v, u_k, v_k \in H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P(t)), \bar{u}, \bar{v} \in H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t)).$$

For the space part. We consider  $\|\bar{f}\|_{L^2(0,t; H^{\frac{11}{4}}(\Omega))}$ .

–  $\|\bar{v}u\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})}$ . Notice that

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

Then,

$$\|\bar{v}u\|_{L^2(H^2)}^2 = \|\bar{v}u\|_{L^2(P)}^2 + \|\bar{v}_{xx}u + 2\bar{v}_x u_x + \bar{v}u_{xx}\|_{L^2(P)}^2.$$

Recalling Hypothesis (H<sub>uni</sub> 2).c,

$$|\bar{v}_{xx}| \leq (|\bar{E}_{xx}|(t,x) + \int_0^t \|\bar{\rho}(\tau, \cdot)\|_{C^0} d\tau). \quad (4.74)$$

Moreover,  $u$  is bounded in  $\mathcal{C}^0(P(t))$ , and so

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_{xx}u\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C \int_{P(t)} \bar{v}_{xx}^2(s,x) dx ds \\ &\leq C \int_{P(t)} \left[ |\bar{E}_{xx}|(s,x) + \int_0^s \|\bar{\rho}(\tau, \cdot)\|_{C^0} d\tau \right]^2 dx ds \\ &\leq C(T, |I|) \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2(\tau, x) d\tau + \int_0^t \|\bar{\Phi}_x(s, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \\ &\leq C(T, |I|) \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2(\tau, x) d\tau + \int_0^t \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Analogously, by the belongness of  $u$  to  $H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}$ ,  $u_x$  and  $u_{xx}$  belong to  $\mathcal{C}^0(P(t))$ , so that

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_x u_x\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C(T, |I|) \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2(\tau, x) d\tau + \int_0^t \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \\ \|\bar{v} u_{xx}\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C(T, |I|) \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2(\tau, x) d\tau + \int_0^t \|\bar{u}(s, \cdot) - \bar{v}(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

and

$$\|\bar{v}u\|_{L^2(H^2)}^2 \leq C(T, |I|) \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}|^2(\tau, x) d\tau + \|\bar{u}\|_{L^2(0,t; L^2(\Omega))}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(0,t; L^2(\Omega))}^2.$$

Consider

$$I(t) := \|\bar{v}_{xx}(t, \cdot)u(t, \cdot)\|_{H^\alpha}^2,$$

with  $\alpha := \frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, x)u(t, x) - \bar{v}_{xx}(t, y)u(t, y)|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, x) - \bar{v}_{xx}(t, y)|^2 |u(t, x)|^2 + |\bar{v}_{xx}(t, y)|^2 |u(t, x) - u(t, y)|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dy dx. \end{aligned}$$

Thanks to Hypothesis  $H_{\text{uni}}.4(c)$ ,

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|x - y| \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau, x)| d\tau + |\bar{E}_{xx}(t, x) - \bar{E}_{xx}(t, y)|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} |u(t, x)|^2 dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy. \end{aligned}$$

Hence, by the boundedness of  $u$  in  $\mathcal{C}^0(P(t))$ ,

$$\begin{aligned} I &\leq C(T, |I|) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|x - y| \left( \int_0^t |x - y|^2 \sup_x |\bar{\rho}(\tau, x)|^2 d\tau \right) + \|\bar{E}(t, \cdot)\|_{H^4}^2 |x - y|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\leq C(T, |I|) \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|x - y|^2 \int_0^t \sup_s |\bar{\rho}|^2(\tau, s) d\tau + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)}^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\bar{v}_{xx}(t, y)(u(t, x) - u(t, y))|^2}{|x - y|^{2\alpha+1}} dx dy \\ &\leq C \left( \int_0^t \sup_s |\bar{\rho}|^2(\tau, s) d\tau + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}}(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

The other terms can be treated in the same way, so that

$$\|\bar{v}_{xx}u\|_{L^2(H^{\frac{3}{4}})}^2 \leq \int_0^t \sup_s |\bar{\rho}|^2(\tau, s) d\tau + \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})}^2.$$

– With similar computations to Section 4.2.2, it follows that

$$\|\bar{u}v\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C\|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})}\|v\|_{L^\infty(H^{\frac{11}{4}})},$$

$$\|\bar{v}_x\bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C\|\bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})}\|u-v\|_{L^\infty(H^{\frac{7}{4}})},$$

$$\|\bar{v}_x\bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C\|\bar{v}\|_{L^2(H^{\frac{15}{4}})}\|u-v\|_{L^\infty(H^{\frac{7}{4}})},$$

and

$$\|v_x\bar{\Phi}_x\|_{L^2(H^{\frac{11}{4}})} \leq C\|\bar{u}\|_{L^2(H^{\frac{7}{4}})}\|v\|_{L^\infty(H^{\frac{15}{4}})}.$$

For the time part, as in Section 4.2.2,  $\|\bar{f}\|_{H^2(0,t;L^2(\Omega))}$  will be bounded from above, which will bound  $\|\bar{f}\|_{H^{\frac{11}{8}}(0,t;L^2(\Omega))}$ .

– Recall that

$$\|\bar{\nu}u\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\bar{\nu}u\|_{L^2(P(t))}^2 + \|\bar{\nu}_{tt}u + 2\bar{\nu}_t u_t + \bar{\nu}u_{tt}\|_{L^2(P(t))}^2.$$

Thanks to Lemma 4.4.3 and Hypothesis  $H_{\text{uni.3(b)}}$ ,

$$\begin{aligned} \|\bar{\nu}_{tt}u\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\bar{\Phi}_{ttx}(s,x) + \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|)^2 u^2(s,x) ds dx \\ &\leq C \int_0^t \|\bar{u}_{tt}(s,\cdot) - \bar{v}_{tt}(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds \\ &\leq \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(s,x)|^2 ds, \end{aligned}$$

because  $u$  is uniformly bounded in  $L^\infty(P(t))$ .

$$\begin{aligned} \|\bar{\nu}u_{tt}\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C \int_{P(t)} (\bar{\Phi}_x + \int_0^s \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)| d\tau)^2 u_{tt}^2 \\ &\leq C \int_0^t \|u_{tt}(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} (\|\bar{u}(s,\cdot) - \bar{v}(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau) ds \\ &\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau, \end{aligned}$$

thanks to Lemma 4.4.1 and  $u_{tt} \in L^\infty(L^2)$ .

– Let us bound from above  $\|\nu\bar{u}\|_{H^2(L^2)}$ .

$$\|\nu\bar{u}\|_{H^2(L^2)}^2 = \|\nu\bar{u}\|_{L^2(P(t))}^2 + \|\nu_{tt}\bar{u} + 2\nu_t\bar{u}_t + \nu\bar{u}_{tt}\|_{L^2(P(t))}^2.$$

Then

$$\begin{aligned}
\|\nu_{tt}\bar{u}\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C \int_{P(t)} (|\Phi_{ttx}(s,x)| + \sup_x |\rho(s,x)|)^2 \bar{u}^2(s,x) ds dx \\
&\leq C \int_0^t \|\bar{u}(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u_{tt} - v_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{C^0}^2) \\
&\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

thanks to Lemmas 4.2.2 and 4.4.1. It is easy to show that

$$\begin{aligned}
\|\nu\bar{u}_{tt}\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq C \int_{P(t)} (|\Phi_x| + \|\rho\|_{C^0})^2 \bar{u}_{tt}^2 \\
&\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

as previously seen.

– Thanks to Lemmas 4.4.3 and 4.4.1 and similarly to Section 4.2.2,

$$\|\bar{u}_{tt}v\|_{L^2(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,$$

and

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}v_{tt}\|_{L^2(P(t))}^2 &\leq \int_0^t \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\|\bar{v}_{ttx}\Phi_x\|_{L^2(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,$$

$$\|v_{ttx}\bar{\Phi}_x\|_{L^2(P(t))}^2 \leq C \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0,t[ \times \Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0,t[ \times \Omega)}^2 + C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau,$$

$$\|v_x\bar{\Phi}_{ttx}\|_{L^2(P(t))}^2 \leq C \int_0^t \sup_x |\bar{\rho}(\tau,x)|^2 d\tau.$$

We can summarize the first step by the following inequality,

$$\boxed{
\begin{aligned}
\|\bar{f}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(]0,t[ \times \Omega)}^2 &\leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s,\cdot) \\
&+ C \|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0,t[ \times \Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(]0,t[ \times \Omega)}^2.
\end{aligned}
}$$

Step 2 By Theorem C.2.4,

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))} &\leq C\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))} + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)}, \\ \|\bar{v}\|_{H^{\frac{15}{4}, \frac{15}{8}}(P(t))} &\leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}.\end{aligned}$$

Step 3 Similarly to Section 4.2.2, (Step 1), it follows that

$$\begin{aligned}\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 &\leq \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot) \\ &+ C\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2,\end{aligned}$$

and

$$\|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{9}{8}}(\Sigma_t)}^2 \leq C\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2.$$

Step 4 Thanks to Theorem C.2.4,

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 &\leq C\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}^2 + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{5}{8}}(\Sigma_t)}^2, \\ \|\bar{v}\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))}^2 &\leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}^2.\end{aligned}$$

Step 5 Estimation of  $\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}$ .

Similarly to Section 4.2.2 (Step 1), we obtain

$$\begin{aligned}\|\bar{f}_e\|_{H^{\frac{3}{4}, \frac{3}{8}}(P(t))}^2 &\leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot) \\ &+ C\|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}([0, t] \times \Omega)}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}([0, t] \times \Omega)}^2.\end{aligned}$$

Step 6 Thanks to Theorem C.2.4,

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 &\leq C\|\bar{f}_e\|_{L^2(P(t))}^2 + \|\bar{g}_e\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}^2, \\ \|\bar{v}\|_{H^{\frac{7}{4}, \frac{7}{8}}(P(t))}^2 &\leq C\|\bar{f}_i\|_{L^2(P(t))}^2.\end{aligned}$$

Step 7 Estimation of  $\|\bar{f}_e\|_{L^2(P(t))}$ .

It is easily seen that

$$\|\bar{f}_e\|_{L^2(P(t))} \leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot) + C\|\bar{u}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{v}\|_{L^2(H^1)}^2.$$

Estimation of  $\|\bar{g}_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}$ .

$$\|\bar{g}_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)} \leq \|\bar{u}\Phi_x + u\bar{\Phi}_x\|_{H^{1,\frac{1}{2}}},$$

and

$$\|\bar{g}_\epsilon\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Sigma_t)}^2 \leq C\|\bar{u}\|_{H^{1,\frac{1}{2}}}^2 + \|\bar{v}\|_{H^{1,\frac{1}{2}}}^2.$$

Step 8 Now,

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{H^{1,\frac{1}{2}}}^2 &\leq C\|\bar{u}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{u}_t\|_{L^2(H^1)}^2, \\ \|\bar{v}\|_{H^{1,\frac{1}{2}}}^2 &\leq C\|\bar{v}\|_{L^2(H^1)}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(H^1)}^2. \end{aligned}$$

Step 9 By Lemmas 4.4.1 and 4.4.2,

$$\|\bar{u}\|_{L^2(H^1)} \leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot) ds$$

and

$$\|\dot{\bar{u}}\|_{L^2(H^1)} \leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot) ds.$$

Step 10 Finally we have proven that:

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{C^1([0,t])} &\leq C\|\bar{\mathcal{F}}(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &= C\|\bar{v}_x(s, \cdot)\|_{H^{\frac{13}{8}}(0,t)} \\ &\leq C\|\bar{v}\|_{H^{\frac{19}{4}, \frac{19}{8}}(P(t))} \\ &\leq C\|\bar{f}_i\|_{H^{\frac{11}{4}, \frac{11}{8}}(P(t))} \\ &\leq C \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot). \end{aligned}$$

### 4.4.2 Conclusion

Since  $\rho$  is the first component of the solution of Euler system 4.64, it follows from Definitions 4.68 and 4.69 that

$$\mathcal{V}(t)^2 \leq \int_0^t \sup_x \bar{\rho}^2(s, \cdot)^2 ds,$$

and so

$$\mathcal{V}(t)^2 \leq \int_0^t \mathcal{V}(s)^2 ds.$$

Gronwall's lemma implies that  $\mathcal{V} = 0$  so that  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ . Hence the uniqueness of the solution is proved.





Troisième partie  
Partie numérique



# Chapitre 1

## Approximation Numérique

Ce Chapitre a été réalisé en collaboration avec Serge Piperno<sup>1</sup>.

---

1. CERMICS-INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France.

## 1.1 Introduction

Nous nous intéressons à présent à la résolution numérique du problème continu. Elle sera faite par:

- une méthode de différences finies pour les équations de Dérive-Diffusion,
- une méthode de volumes finis pour le système d'Euler,
- une méthode d'éléments finis pour l'équation de Poisson.

Nous supposons que le panneau est infini dans une direction, de manière à faire les simulations en deux dimensions d'espace. Le domaine de calcul est représenté sur la figure (1.1).

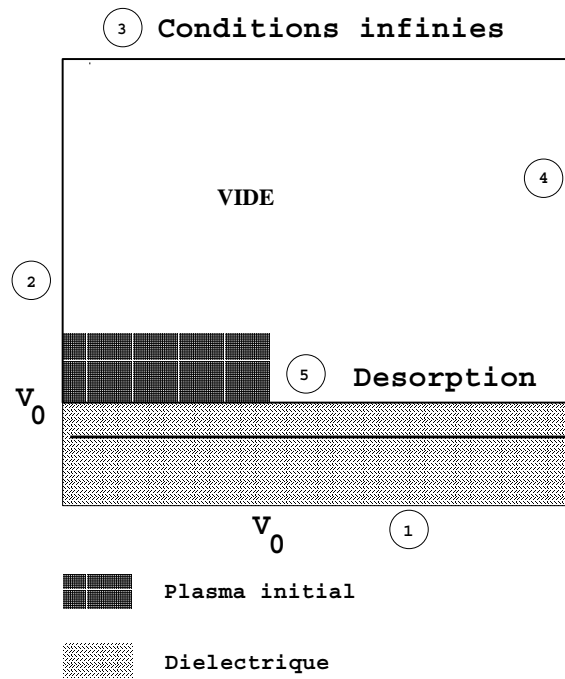


FIG. 1.1 – *Domaine de calcul*

Les longueurs caractéristiques du dispositif sont:

- la longueur dans la direction X:  $L_x$ ,
- la longueur dans la direction Y:  $L_y$ ,
- la longueur du plasma dans la direction X:  $L_{xp}$ ,
- la longueur du plasma dans la direction Y:  $L_{yp}$ .

Nous discrétiserons avec  $N_x$  points en  $X$  et  $N_y$  points en  $Y$ . Chaque point sera donc repéré par deux indices  $i$  et  $j$  avec  $i = 1, N_x$  et  $j = 1, N_y$ . On notera que dans le diélectrique, *seule* l'équation de Poisson est calculée (en effet, pour calculer le potentiel, il faut tenir compte de la charge électronique implantée). Dans le 'VIDE', par contre, on résoudra les équations de Dérive-Diffusion, l'équation de Poisson et le système d'Euler.

Notation: On reperera par  $j_\Omega$  l'interface entre le vide et le diélectrique. Pour  $j = 1, j_\Omega - 1$ , les points considérés seront dans le diélectrique et pour  $j = j_\Omega, N_y$ , les points seront dans le vide.

Nous avons les conditions aux limites suivantes:

- En 1, le potentiel est égal au potentiel imposé (condition de Dirichlet).
- En 2,
  - pour les particules chargées, le flux est nul dans la direction  $X$ . Ce qui revient à considérer le plasma comme infini dans la direction  $X$ .
  - pour les neutres, nous prendrons des conditions à l'infini.
- En 3,
  - pour les particules chargées, le flux est nul dans les directions  $X$  et  $Y$ . Ce qui revient à imposer une condition de Dirichlet sur les densités.
  - pour les neutres, nous prendrons des conditions à l'infini.
- En 4, on impose les mêmes conditions qu'en 2.
- En 5,
  - pour les particules chargées, on impose un flux nul dans la direction  $Y$ .
  - pour les neutres, on prend une condition de glissement.

Le phénomène de désorption sera considéré comme un terme source dans le système d'Euler et sera décrit dans la section 1.3.

## 1.2 Discrétisation des équations de Dérive-Diffusion

Nous nous intéressons à présent à la discrétisation des équations de Dérive-Diffusion. Nous rappelons que ces équations sont de la forme:

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (-D_\alpha \nabla n_\alpha + \mu_\alpha n_\alpha E + n_\alpha u_n) = \frac{s_\alpha}{m_\alpha}$$

avec  $\alpha = e, i$ . Une première méthode pour discrétiser la partie spatiale serait d'approximer l'opérateur  $\nabla \cdot$  par des différences centrées ou décentrées, mais le schéma alors obtenu serait instable. La difficulté est de discrétiser convenablement le courant  $J_\alpha$ :

$$J_\alpha(t, x) := -D_\alpha \nabla n_\alpha(t, x) + \mu_\alpha n_\alpha(t, x) \nabla \Phi(t, x).$$

Pour ce-faire, nous utilisons la méthode de Scharfetter et Gummel [39]. Dans la suite, pour des raisons de facilité de présentation, nous ferons les calculs en une dimension d'espace.

## 1.2.1 Discrétisation du courant

### 1.2.1.1 Cas d'une dimension d'espace

Pour des raisons de clarté d'écriture, nous n'écrivons plus l'indice  $\alpha$ . En une dimension d'espace, le courant est donné par:

$$J(t,x) := -Dn_x(t,x) + \mu n(t,x)\Phi_x(t,x).$$

La densité est connue aux points  $x_i$ . L'idée de la méthode est de garder  $J$  et  $\Phi$  constants entre les points  $x_{i-1}$  et  $x_i$ . On pose

$$J_{i-\frac{1}{2}} = J(t, x_{i-\frac{1}{2}}), \quad E_{i-1} = E(t, x_{i-1}).$$

Il s'agit alors de résoudre

$$J_{i-\frac{1}{2}} = -Dn_x(t,x) + \mu n(t,x)E_{i-1},$$

donc

$$n(t,x) = Ae^{\frac{\mu E_{i-1}}{D}x} + \frac{J_{i-\frac{1}{2}}}{\mu E_{i-1}} \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

La constante  $A$  est donnée par

$$n(t, x_{i-1}) := n_{i-1}.$$

Finalement nous obtenons

$$n(t,x) = n_{i-1}e^{\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x - x_{i-1})} + \frac{J_{i-\frac{1}{2}}}{\mu E_{i-1}} \left(1 - e^{\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x - x_{i-1})}\right) \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

et

$$J_{i-\frac{1}{2}} = \mu E_{i-1} \left( \frac{n_i}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x_i - x_{i-1})}} + \frac{n_{i-1}}{1 - e^{\frac{\mu E_{i-1}}{D}(x_i - x_{i-1})}} \right).$$

### 1.2.1.2 Cas deux dimensions d'espace

En deux dimensions d'espace,  $E^x$  et  $E^y$  désigneront les composantes du champs et  $J^x, J^y$  celles du flux. Celles-ci s'expriment par

$$\begin{aligned} J_{i-\frac{1}{2},j}^x &= \mu E_{i-1,j}^x \left( \frac{n_{i,j}}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i-1,j}^x}{D}(x_{i,j} - x_{i-1,j})}} + \frac{n_{i-1,j}}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i-1,j}^x}{D}(x_{i,j} - x_{i-1,j})}} \right), \\ J_{i,j-\frac{1}{2}}^y &= \mu E_{i,j-1}^y \left( \frac{n_{i,j}}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i,j-1}^y}{D}(x_{i,j} - x_{i,j-1})}} + \frac{n_{i,j-1}}{1 - e^{-\frac{\mu E_{i,j-1}^y}{D}(x_{i,j} - x_{i,j-1})}} \right). \end{aligned}$$

## 1.2.2 Discrétisation des équations de Dérive-Diffusion

On suppose que le maillage est régulier. On pose

$$\Delta x := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y := y_i - y_{i-1}, \quad \Delta t := t_l - t_{l-1}$$

et

$$n_{i,j}^l = n(l\Delta t, i\Delta x, j\Delta y).$$

Nous utilisons le schéma d'ordre 1 en temps suivant

$$n_{i,j}^{l+1} = n_{i,j}^l - \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{i+\frac{1}{2},j}^{x,l} - J_{i-\frac{1}{2},j}^{x,l}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (J_{i,j+\frac{1}{2}}^{y,l} - J_{i,j-\frac{1}{2}}^{y,l}) \quad (1.1)$$

avec  $i = 1, N_x, j = 1, N_y$ .

### 1.2.3 Conditions aux limites

Nous allons à présent traiter les conditions aux limites discrètes. Nous considérons séparément les ions et les électrons.

#### 1.2.3.1 Les ions

Pour les ions les conditions sont

– en  $j = j_\Omega$ ,

$$n_{i,j_\Omega} = 0, \quad i = 1, N_x, \text{ condition d'absorption.}$$



Ainsi, d'après (1.1), on prendra

$$\begin{aligned} J_{i+\frac{1}{2},j\Omega}^{x,l} - J_{i-\frac{1}{2},j\Omega}^{x,l} &= 0, \\ J_{i,j\Omega+\frac{1}{2}}^{y,l} - J_{i,j\Omega-\frac{1}{2}}^{y,l} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

pour  $i = 1, N_x$ .

– en  $j = N_y$ ,

$$n_{i,N_y} = 0, \quad i = 1, N_x, \text{ condition à l'infini,}$$

et on prendra

$$\begin{aligned} J_{i+\frac{1}{2},N_y}^{x,l} - J_{i-\frac{1}{2},N_y}^{x,l} &= 0, \\ J_{i,N_y+\frac{1}{2}}^{y,l} - J_{i,N_y-\frac{1}{2}}^{y,l} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

pour  $i = 1, N_x$ .

A présent nous allons écrire les conditions en  $i = 1$  et  $i = N_x$ .

– en  $i = 1$ , la variation de la densité n'est dûe qu'à la variation du flux dans la direction  $Y$ . Ainsi,

$$J_{1+\frac{1}{2},j}^{x,l} - J_{1-\frac{1}{2},j}^{x,l} = 0, \quad (1.4)$$

pour  $j = j_\Omega, N_y$ . Il n'y a aucune condition à imposer sur  $J^y$ .

– en  $i = N_x$ , la condition à l'infinie sera nulle:

$$n_{N_x,j} = 0, \quad j = j_\Omega, N_y,$$

donc

$$\begin{aligned} J_{N_x+\frac{1}{2},j}^{x,l} - J_{N_x-\frac{1}{2},j}^{x,l} &= 0, \\ J_{N_x,j+\frac{1}{2}}^{y,l} - J_{N_x,j-\frac{1}{2}}^{y,l} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

pour  $j = j_\Omega, N_y$ .

### 1.2.3.2 Les électrons

Dans un premier temps, nous allons chercher à traduire la condition aux limites

$$\frac{\partial n}{\partial \nu} = \mu n E \cdot \nu.$$

C'est en fait une condition de conservation de la masse (ou du nombre total) des électrons (quand on considère l'équation homogène, i.e. sans second membre). Du point de vue discret nous voulons obtenir la conservation du nombre total discret  $N_{Tot}$ .

Nous présentons les calculs en une dimension d'espace, dans la direction  $Y$  (nous n'écrivons pas l'indice  $i$  qui sera supposé fixé).

$$N_{Tot}^l := \sum_{j=j_\Omega}^{N_y} n_j^l \Delta y.$$

Aussi,

$$N_{Tot}^{l+1} := \sum_j n_j^{l+1} \Delta y.$$

Or

$$n_j^{l+1} = n_j^l - \frac{\Delta t}{\Delta j} (J_{j+\frac{1}{2}}^{y,l} - J_{j-\frac{1}{2}}^{y,l}),$$

donc

$$\begin{aligned} N_{Tot}^{l+1} &= N_{Tot}^l + \sum_j (J_{j+\frac{1}{2}}^l - J_{j-\frac{1}{2}}^{y,l}) \\ &= N_{Tot}^l - J_{j_\Omega-\frac{1}{2}}^l + J_{N_y+\frac{1}{2}}^{y,l}. \end{aligned}$$

Nous prenons alors comme conditions aux limites pour les électrons

$$J_{1-\frac{1}{2}}^{y,l} = J_{N_y+\frac{1}{2}}^{y,l} = 0$$

En fait cette condition de flux nul n'intervient qu'à la surface du diélectrique. Ainsi, en  $j = j_\Omega$  la condition aux limites devient

$$J_{i,j_\Omega-\frac{1}{2}}^{y,l} = 0, j = 1, N_x.$$

Pour les cas  $j = N_y$ ,  $i = 1$ ,  $i = N_x$ , nous prendrons les mêmes conditions que pour les ions à savoir les équations (1.3-1.4-1.5).

### 1.2.4 Stabilité

L'étude du schéma numérique 1.1 est difficile à faire et reste un problème ouvert. Pour le cas stationnaire, c'est-à-dire quand le schéma ne dépend pas du temps, on peut se référer à [34, 35].

Nous nous intéressons à la stabilité  $L^2$  du schéma 1.1. Nous rappelons la définition suivante [42].

Définition On dit que le schéma qui s'écrit

$$v_j^{l+1} = \sum_{l=-k}^k C_l v_{j+l}^n, n \geq 0, j \in \mathbb{N},$$

où les  $C_l$  ne dépendent pas de la solution, est  $L^2$ -stable s'il existe une constante  $C$ , indépendante du temps, telle que

$$\|v^l\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v^0\|_{L^2(\Omega)}, \forall l \geq 0.$$

Remarques:

- on appelle aussi la norme  $\|n^l\|_{L^2(\Omega)}$  de  $n$ , l'énergie de  $n$ .
- le schéma 1.1 n'est pas linéaire et une analyse de la stabilité par une méthode de Fourier s'avère impossible.

Nous considérons le cas où le champ  $E$  est fixé et ne dépend pas du temps. Remarquons alors, que le schéma 1.1 peut se mettre sous la forme

$$n_i^{l+1} = n_i^l + (G_i n_{i+1}^l - F_i n_i^l) - (G_{i-1} n_i^l - F_{i-1} n_{i-1}^l), \quad (1.6)$$

avec

$$G_i := \mu \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{E_i}{1 - e^{-\frac{\mu E_i}{D} \Delta x}}, \quad F_i = G_i e^{-\frac{\mu E_i}{D} \Delta x},$$

où  $G_i$  et  $F_i$  sont positifs pour tout indice  $i$ .

Il faut à présent se donner une énergie [40]. L'énergie qui provient du cas continu est la 'norme  $L^2$ '. En effet, nous avons vu, dans le cas continu que:

$$\int_{\Omega} u^2(t,x) dx \leq C \int_{\Omega} u_0^2(x) dx.$$

Cependant la norme  $l^2$  discrète se prête mal à notre schéma numérique. Nous allons donc nous donner une autre norme, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive. Nous prendrons la norme qui dérive du produit scalaire suivant:

$$(U^l, V^l) = \sum_{i=1}^N U_i V_i \gamma_i,$$

où  $(\gamma_i)_i$  est un poids à déterminer. Il faut notamment que  $\gamma_i \geq \gamma > 0$ ,  $\forall i$ .

**Lemma 1.2.1** *Sous l'hypothèse:*

$$\forall i = 1, N, \quad 1 - F_i - G_{i-1} \geq 0, \quad (1.7)$$

le schéma (1.6) est stable.

Preuve: En élevant (1.6) au carré, il vient:

$$\begin{aligned}
|n_i^{l+1}|^2 &= |n_i^l|^2 + G_i^2 n_{i+1}^2 + F_i^2 n_i^2 + G_{i-1}^2 n_i^2 + F_{i-1}^2 n_{i-1}^2 \\
&\quad + 2G_i n_i n_{i+1} - 2F_i n_i^2 - 2G_{i-1} n_i^2 + 2F_{i-1} n_i n_{i-1} \\
&\quad - 2G_i F_i n_i n_{i+1} - 2G_i G_{i-1} n_i n_{i+1} + 2G_i F_{i-1} n_{i+1} n_{i-1} \\
&\quad + 2F_i G_{i-1} n_i^2 - 2F_i F_{i-1} n_i n_{i-1} \\
&\quad - 2G_{i-1} F_{i-1} n_i n_{i-1}.
\end{aligned}$$

Nous allons à présent définir le poids  $\gamma_i$ . Nous prenons

$$\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{G_i}{F_i}.$$

On multiplie par  $\gamma_i$  et on somme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^{l+1}|^2 &= \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^l|^2 (1 + F_i^2 + G_{i-1}^2 - 2F_i - 2G_{i-1} + 2F_i G_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i F_{i-1}^2 n_{i-1}^2 + \sum_{i=1}^N \gamma_i G_i^2 n_{i+1}^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i n_i n_{i-1} (2F_{i-1} - 2F_i F_{i-1} - 2G_{i-1} F_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i n_i n_{i+1} (2G_i - 2G_i F_i - 2G_i G_{i-1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i 2n_{i-1} n_{i+1} G_i F_{i-1}.
\end{aligned}$$

Il faut à présent transformer les quadruples produits en somme de carrés. Nous allons utiliser la majoration bien connue:

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2). \quad (1.8)$$

Il faut pour cela choisir convenablement les  $a$  et  $b$ . Premièrement, on remarque qu'il n'y a égalité que pour  $a = b$  et que l'inégalité est stricte autrement. Ensuite, pour les solutions stationnaires de la forme

$$G_i n_{i+1} = F_i n_i,$$

le schéma (1.6) conduit à

$$n_i^{l+1} = n_i^l,$$

et donc, entre autres, à ce que l'énergie de la solution soit la même que celle de la donnée initiale. Il faut donc que nous ayons égalité dans la majoration (1.8). Nous allons donc majorer les quadruples produits par des termes de la forme:

$$G_i^2 n_{i+1}^2 \text{ et } F_i^2 n_i^2.$$

Nous sommes conduits au développement suivant:

$$F_i n_i n_{i+1} \leq \frac{1}{2G_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2),$$

$$G_i n_i n_{i+1} \leq \frac{1}{2F_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2),$$

et

$$n_{i-1} n_{i+1} G_i F_{i-1} \leq \frac{G_{i-1}}{2F_i} (G_i^2 n_{i+1}^2 + \frac{F_{i-1}^2 F_i^2}{G_{i-1}^2} n_{i-1}^2).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^{l+1}|^2 &\leq \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^l|^2 (1 + F_i^2 + G_{i-1}^2 - 2F_i - 2G_{i-1} + 2F_i G_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_{i+1} F_i^2 n_i^2 + \sum_{i=2}^{N+1} \gamma_{i-1} G_{i-1}^2 n_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_{i+1} (1 - F_{i+1} - G_i) \frac{1}{G_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i (1 - F_i - G_{i-1}) \frac{1}{F_i} (F_i^2 n_i^2 + G_i^2 n_{i+1}^2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{G_{i-1}}{F_i} (G_i^2 n_{i+1}^2 + \frac{F_{i-1}^2 F_i^2}{G_{i-1}^2} n_{i-1}^2). \end{aligned}$$

Avec des changements d'indice adéquats, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^{l+1}|^2 &\leq \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^l|^2 (1 - F_i - G_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_{i+1} \frac{F_i^2}{G_i} n_i^2 + \sum_{i=2}^{N+1} \gamma_{i-1} \frac{G_{i-1}^2}{F_{i-1}} n_i^2, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^{l+1}|^2 &\leq \sum_{i=2}^{N-1} \gamma_i |n_i^l|^2 \left(1 - F_i - G_{i-1} + \frac{\gamma_{i+1} F_i^2}{\gamma_i G_i} + \frac{\gamma_{i-1} G_{i-1}^2}{\gamma_i F_{i-1}}\right) \\ &\quad + \gamma_1 n_1^2 (1 - F_1 - G_0) + \gamma_N n_N^2 (1 - F_N - G_{N-1}) \\ &\quad + \gamma_1 \frac{F_0^2}{G_0} n_0^2 + \gamma_2 \frac{F_1^2}{G_1} n_1^2 \\ &\quad + \gamma_{N-1} \frac{G_{N-1}^2}{F_{N-1}} n_N^2 + \gamma_N \frac{G_N^2}{F_1} n_{N+1}^2. \end{aligned}$$

Nous remarquons que si les bornes d'intégration étaient infinies, les termes de bord disparaîtraient et il resterait:

$$\sum \gamma_i |n_i^l|^2 \left(1 - F_i - G_{i-1} + \frac{\gamma_{i+1} F_i^2}{\gamma_i G_i} + \frac{\gamma_{i-1} G_{i-1}^2}{\gamma_i F_{i-1}}\right) = \sum \gamma_i |n_i^l|^2$$

d'après le choix des  $\gamma_i$ .

Nous distinguons le cas des ions et celui des électrons. Pour les ions la condition aux limites donne:

$$n_0 = n_1 = n_N = n_{N+1} = 1,$$

et on retrouve le cas précédent.

Pour les électrons, on remarque que

$$F_0 \gamma_0 n_0^2 = \gamma_1 n_1^2 G_0,$$

et que

$$\gamma_2 \frac{F_1^2}{G_1} n_1^2 = \gamma_1 F_1 n_1^2,$$

avec le même genre de relation en  $i = N$  et  $i = N + 1$ . Donc en sommant, on retrouve encore

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^{l+1}|^2 \leq \sum_{i=1}^N \gamma_i |n_i^l|^2,$$

ce qui achève la preuve du Lemme 1.2.1.

### 1.2.5 Une condition CFL

La preuve du Lemme 1.2.1 nous impose une condition de type CFL. A priori elle dépend de la solution et même de la solution en chacun des points du maillage.

Pratiquement, nous pouvons nous donner une condition CFL qui est facile à calculer. Nous rappelons que le schéma s'écrit

$$n_i^{l+1} = n_i^l - \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{i+\frac{1}{2}}^l - J_{i-\frac{1}{2}}^l).$$

On remarquera alors que le champ  $E$ , dans la condition de stabilité (1.7), est évalué à l'instant  $l$ .

Pour évaluer la condition CFL, nous considérons successivement le cas où le champ  $E$  est faible et le cas où il est fort.

- Dans le cas d'un champ faible i.e. pour tout  $i$

$$\frac{\mu E_i \Delta x}{D} < 1,$$

la condition de stabilité (1.7) devient

$$1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0.$$

- Dans le cas d'un champ fort i.e.

$$\forall i, \frac{\mu E_i \Delta x}{D} > 1 \text{ ou } \forall i, \frac{\mu E_i \Delta x}{D} < -1,$$

la condition de stabilité (1.7) devient

$$\forall i, 1 - \frac{\mu \Delta t}{\Delta x} E_i \geq 0 \text{ ou } \forall i, 1 - \frac{\mu \Delta t}{\Delta x} E_{i-1} \geq 0,$$

respectivement.

La condition  $CFL$  s'écrit donc (en se rappelant que le champ est calculé à l'étape  $l$ )

$$\Delta t^{l+1} = \alpha_{CFL} \min\left(\frac{\Delta x^2}{2D}, \min_i \frac{\Delta x}{\mu E_i^l}\right)$$

où  $\alpha_{CFL}$  est un nombre strictement inférieur à 1.

### 1.3 Discrétisation du système d'Euler

En ce qui concerne la résolution du système d'Euler nous utilisons la méthode des volumes finis pour la partie spatiale et un schéma de type 'Runge- Kutta' pour la partie temporelle. La résolution numérique est faite en deux dimensions d'espace.

La vitesse  $U$  est décomposée en une composante horizontale  $u$  et une composante verticale  $v$ , soit:

$$U = (u, v)$$

Le système d'Euler est donc:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{W} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) = S \\ \text{avec Conditions initiales et conditions aux limites} \end{cases} \quad (1.9)$$

où

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} \rho_n \\ \rho_n u \\ \rho_n v \\ E_n \end{pmatrix}.$$

Le flux  $\mathbf{F}$  est  $\mathbf{F} = (F, G)$  avec

$$F := \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}.$$

Nous maillons le plan à l'aide de cellules  $C_i$ . Son bord sera noté  $\partial C_i$ . L'interface entre deux cellules  $C_i$  et  $C_j$  sera notée  $\partial C_{ij}$ . Les cellules  $C_i$  sont construites sur les barycentres  $G$  des triangles (voir la figure 1.2).

### 1.3.1 Calcul des flux

L'idée est de multiplier le système (1.9) par les fonctions caractéristiques de chaque cellule et d'intégrer sur le domaine. Ce qui donne

$$\partial_t \int_{C_i} \mathbf{W} + \int_{\partial C_i} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \nu_i d\sigma = \int_{C_i} S,$$

soit

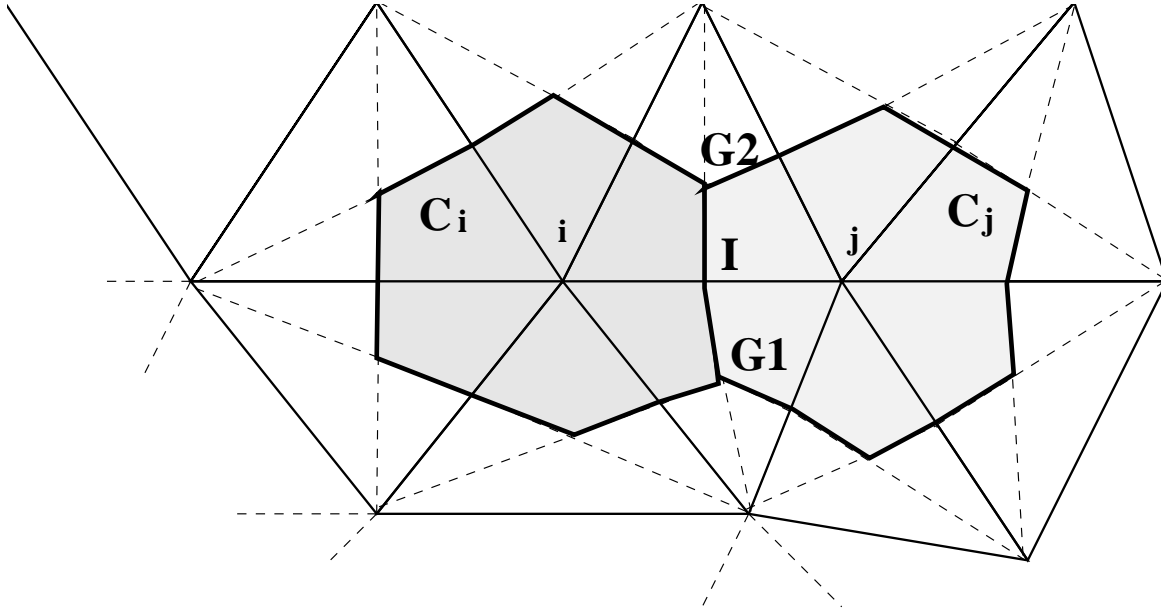
$$\partial_t \int_{C_i} \mathbf{W} + \sum_j \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \nu_i d\sigma = \int_{C_i} S,$$

où  $\partial C_{ij}$  désigne l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_j$ . L'approximation du terme

$\sum_j \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \nu_i d\sigma$  se fait à l'aide de la fonction de flux numérique

$$\Phi_{ij} := \Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta),$$



FIG. 1.2 – Cellules  $C_i$  et  $C_j$ 

où  $\eta$  est la normale intégrée:

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = \int_{\partial C_{ij}} \nu_{ij} d\sigma.$$

Pour évaluer ce flux, on peut considérer une méthode de Godunov, mais il s'avère qu'en deux dimensions d'espace, cette méthode est très coûteuse. C'est pourquoi on utilise un solveur de Riemann approché. Nous utilisons le schéma proposé par Roe. Le flux de Roe se construit comme un solveur de Riemann local dans la direction de la normale  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{W} + \partial_\eta F(\mathbf{W}, \eta) &= S, \\ \mathbf{W}(t, x) &= \begin{cases} W_i & \text{si } x \in C_i, \\ W_j & \text{si } x \in C_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'écrit

$$\Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta) := \mathcal{F}(\mathbf{W}_i, \eta) + \frac{1}{2} [\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta) - \gamma_c |\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta)|] (\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_i),$$

où  $\gamma_c$  est un paramètre de décentrage, et  $\mathcal{F}$  est une combinaison linéaire des flux:

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}, \eta) := \eta_x F(\mathbf{W}) + \eta_y G(\mathbf{W}),$$

et  $\mathcal{R}$  est une matrice satisfaisant les propriétés:

- $\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta)(\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_i) = \mathcal{F}(\mathbf{W}_j, \eta) - \mathcal{F}(\mathbf{W}_i, \eta)$ , qui est en fait une linéarisation des relations de saut,
- $\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta) \longrightarrow \mathcal{F}'(\mathbf{W}_i, \eta)$  lorsque  $\mathbf{W}_j \longrightarrow \mathbf{W}_i$ , assurant la consistance du schéma numérique.
- Enfin  $\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta)$  est diagonalisable à valeurs propres réelles.

Roe a proposé de prendre

$$\mathcal{R}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j, \eta) = \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{W}}, \eta),$$

où

- $\mathcal{A}$  est la matrice jacobienne du flux:

$$\mathcal{A}(\mathbf{W}, \eta) = \eta_x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{W}}(\mathbf{W}) + \eta_y \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{W}}(\mathbf{W})$$

- L'état  $\tilde{\mathbf{W}}$  est la 'moyenne de Roe' des états  $\mathbf{W}_i$  et  $\mathbf{W}_j$ , c'est-à-dire: Si

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \\ \rho_i v_i \\ E_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho_j \\ \rho_j u_j \\ \rho_j v_j \\ E_j \end{pmatrix}$$

alors

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho} \tilde{u}_i \\ \tilde{\rho} \tilde{v}_i \\ \tilde{E} \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &:= \frac{\sqrt{\rho_i} \rho_i + \sqrt{\rho_j} \rho_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{u}_i &:= \frac{\sqrt{\rho_i} u_i + \sqrt{\rho_j} u_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{v}_i &:= \frac{\sqrt{\rho_i} v_i + \sqrt{\rho_j} v_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \\ \tilde{H} &:= \frac{\sqrt{\rho_i} H_i + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \end{aligned}$$

où  $H := \frac{E + p}{\rho}$  est l'enthalpie par unité de masse.

Le schéma est alors précis à l'ordre 1 en espace.

### 1.3.2 Conditions aux limites

Le bord du domaine se décompose en deux parties:  $\Gamma := \partial\Omega := \Gamma_b \cup \Gamma_\infty$ . Sur  $\Gamma_b$  nous mettrons des conditions de glissements et sur  $\Gamma_\infty$  des conditions à l'infini. Nous avons:

$$(\text{Aire}C_i)(\mathbf{W}_t)_i = - \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \nu_{ij} d\sigma \quad (1.10)$$

$$- \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot n d\sigma \quad (1.11)$$

$$- \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot n d\sigma \quad (1.12)$$

$$+ \int_{C_i} S. \quad (1.13)$$

#### 1.3.2.1 Traitement de la paroi

Nous prenons une condition de glissement pour la paroi:

$$\rho U \cdot n = 0,$$

où  $n$  est la normale unitaire qui sort du domaine. Cette dernière égalité se met sous la forme:

$$n_x m_1 + n_y m_2 = 0.$$

L'expression du flux sur le bord devient:

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}_i, n) = n_x F + n_y G = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x p \\ n_y p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'intégrale du flux devient:

$$\Phi_{ib}(\mathbf{W}_i, \eta) = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathcal{F}(\mathbf{W}_i, n) d\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x p \\ \eta_y p \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\eta := \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} n d\sigma$$

est la 'normale intégrée'.

### 1.3.2.2 Conditions à l'infini

Soit  $\mathbf{W}_\infty$  le champ représentatif de l'écoulement à l'extérieur du domaine. Le problème de Riemann défini par les valeurs  $\mathbf{W}_i$  à l'intérieur du domaine  $\Omega_h$  et  $\mathbf{W}_\infty$  est résolu en utilisant un solveur de Riemann approché,

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathcal{F}(\mathbf{W}, n) d\sigma = \Phi(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_\infty, \eta_{i\infty}) = \Phi_{i\infty},$$

avec

$$\eta_{i\infty} := \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} n d\sigma.$$

On utilise une décomposition de flux de type Steger-Warming: les échanges avec le milieu extérieur sont calculés à partir de l'expression suivante,

$$\Phi^{SW}(\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_\infty, \eta_{i\infty}) = \mathcal{A}^+(\mathbf{W}_i, \eta_{i\infty}) \mathbf{W}_i + \mathcal{A}^-(\mathbf{W}_i, \eta_{i\infty}) \mathbf{W}_\infty,$$

où  $\mathcal{A}^+(\mathbf{W}_i, \eta_{i\infty})$  et  $\mathcal{A}^-(\mathbf{W}_i, \eta_{i\infty})$  sont respectivement la partie positive et la partie négative de la matrice du flux  $\mathcal{A}(\mathbf{W}_i, \eta_{i\infty})$ .

### 1.3.3 Désorption

Nous avons vu que la désorption s'écrit

$$(\rho u)|_{\Gamma.n} = \begin{cases} -\beta m_n J_i . n & \text{si } J_i . n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $J_i$  est le flux de la densité d'ions incidents et  $n$  la normale à la paroi. La quantité  $(\rho u)|_{\Gamma.n}$  représente le flux de matière éjectée. On pose ainsi:

$$f_{eje} := (\rho u)|_{\Gamma.n}$$

D'autre part, l'éjection des neutres est aussi caractérisée par:

la densité d'éjection	$\rho_{eje}$ ,
la vitesse d'éjection	$(u_{eje}, v_{eje})$ ,
la pression d'éjection	$p_{eje}$ ,
et la température d'éjection	$T_{eje}$ .

Le terme source dû à la désorption est un terme de 'paroi'. Il est donné par

$$S_{eje} = \begin{pmatrix} f_{eje} \\ u_{eje} f_{eje} + p_{eje} n_x \\ v_{eje} f_{eje} + p_{eje} n_y \\ \frac{f_{eje}}{\rho_{eje}} (E_{eje} + p_{eje}) \end{pmatrix},$$

et l'intégrale de ce terme source devient:

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} S_{eje} d\sigma = \begin{pmatrix} f_{eje} l_{ib} \\ u_{eje} f_{eje} l_{ib} + p_{eje} \eta_x \\ v_{eje} f_{eje} l_{ib} + p_{eje} \eta_y \\ \frac{f_{eje}}{\rho_{eje}} (E_{eje} + p_{eje}) l_{ib} \end{pmatrix},$$

où

$$l_{ib} = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} d\sigma,$$

et

$$\eta := \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} n d\sigma.$$

### 1.3.4 Intégration en temps

Nous utilisons une méthode Runge-Kutta explicite d'ordre  $N$  (pour  $1 \leq N \leq 4$ ). L'algorithme est donné de Runge-Kutta d'ordre  $N$  est donné par:

$$\begin{cases} W^{(0)} = W^n, \\ W^{(l)} = W^{(0)} - \frac{\Delta t}{N+1-l} \Phi(W^{(l-1)}), l = 1, \dots, N, \\ W^{(n+1)} = W^{(N)}, \end{cases}$$

où  $W^{(l)}$  est la solution à l'instant  $l\Delta t$  et où  $\Phi$  représente le flux spatial total.

Nous avons essayé une méthode d'ordre 1, mais la fonction d'ionisation (qui est un terme raide) est alors mal intégrée et la pression  $p$  devient négative. C'est pourquoi nous prenons un schéma d'ordre deux.

## 1.4 Eléments finis

Dans cette section, nous résolvons numériquement l'équation de Poisson avec une condition de Dirichlet. Nous allons étudier dans un premier temps le cas homogène puis le cas non homogène.

### 1.4.1 Cas homogène

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . On cherche  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$-\Delta \phi = f \text{ dans } \Omega, \quad (1.15)$$

$$\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.16)$$

### 1.4.1.1 Formulation faible

Nous considérons donc une formulation faible du problème (1.15 – 1.16):

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \phi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \\ &\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi = \int_{\Omega} f \psi. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Il s'agit à présent de discrétiser la formulation faible (1.17).

### 1.4.1.2 Formulation faible discrétisée

Nous nous donnons un maillage  $\Omega^h$  de  $\Omega$  formé de triangles  $T$  et nous notons  $x_J, (J = 1, ns)$  les  $ns$  sommets.

Définition On note  $K_I$  l'ensemble des triangles qui ont  $I$  pour sommet.

Nous prenons comme fonctions de base les fonctions  $P1$ . Au sommet  $I$ , on associe la fonction de base  $p_I$ , de support  $Supp(p_I)$ :

$$p_I(x) := \sum_{T \in K_I} p_I^T(x), \quad (1.18)$$

avec

$$p_I^T(x) = \frac{\vec{I_1 x} \cdot \vec{n_I^T}}{\vec{I_1 I} \cdot \vec{n_I^T}} 1_{x \in T}, \quad (1.19)$$

où  $\vec{n_I^T}$  est la normale au côté opposé à  $I$ , au bord du triangle  $T$ .

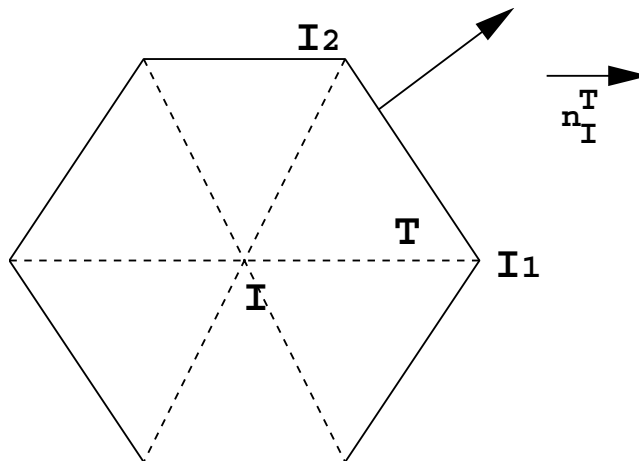


FIG. 1.3 – Fonction de base

On a

$$p_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } I, \\ 0 & \text{si } x \in \partial \text{Supp}(p_I). \end{cases}$$

On décompose l'inconnue  $\phi$  dans la base des  $p_I$ ,

$$\phi^h = \sum_{J=1}^{ns} \phi_J^h p_J.$$

La formulation faible discrétisée est:

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \phi^h \in H_0^1(\Omega^h) \text{ telle que } \forall \psi^h \in H_0^1(\Omega^h), \\ & \int_{\Omega^h} \nabla \phi^h \cdot \nabla \psi^h = \int_{\Omega^h} f \psi^h. \end{aligned} \quad (1.20)$$

On prend pour fonctions  $\psi^h$  les fonctions de base  $p_J$ . Finalement, il faut résoudre le système linéaire à  $ns_i$  équations,  $ns_i$  inconnues:

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\phi_J^h)_{J=1, ns_i} \text{ tels que :} \\ & \sum_{J=1}^{ns} \int_{\Omega^h} \phi_J^h \nabla p_J(x) \cdot \nabla p_I(x) = \int_{\Omega^h} f p_I(x), \quad I = 1, ns_i. \end{aligned} \quad (1.21)$$

où  $ns_i$  est le nombre de sommets intérieurs à  $\Omega^h$ .

### 1.4.1.3 Ecriture du système

Avec les fonctions  $p_I^T$ , nous avons

$$\nabla p_I^T = \frac{\vec{n}_I^T}{I_1 I \cdot \vec{n}_I^T}.$$

Donc (1.21) s'écrit

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\phi_J^h)_{J=1, ns} \text{ tels que :} \\ & \sum_{J=1}^{ns} \phi_J^h \int_{T \in K_I \cap K_J} \frac{n_J^T}{J_1 J \cdot n_J^T} \cdot \frac{n_I^T}{I_1 I \cdot n_I^T} = \int_{T \in K_I} f \frac{I_1 x \cdot n_I^T}{I_1 I \cdot n_I^T}, \quad I = 1, ns. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si on pose

$$\begin{aligned} A_{IJ} & := \int_{T \in K_I \cap K_J} \frac{n_J^T}{J_1 J \cdot n_J^T} \cdot \frac{n_I^T}{I_1 I \cdot n_I^T}, \\ b_I & := \int_{T \in K_I} f \frac{I_1 x \cdot n_I^T}{I_1 I \cdot n_I^T}, \end{aligned}$$

on a à résoudre le système

$$A \phi^h = b. \quad (1.23)$$

1.4.1.4 Cas où  $f$  n'est pas régulière

Nous nous intéressons ici au calcul du second membre  $b$  dans le cas où  $f$  n'est pas régulière. Typiquement,  $f$  représente l'accumulation des électrons à une profondeur  $y = a$ :

$$f(t, x, y) = A\delta(y - a),$$

où  $A$  est la charge accumulée. Il faut donc intégrer:

$$I_{a,J} := A \int_{K_J} \delta(y - a) p_J(x, y) dx dy.$$

Soit  $e$  telle que

$$e \in \mathcal{C}^\infty, \int_{-1}^1 e(x) dx = 1.$$

On pose

$$e_n(y) := ne(n(y - a)).$$

On a, pour toute fonction  $\rho$  régulière,

$$\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} \rho(x, y) e_n(y) dy \longrightarrow \rho(x, a)$$

quand  $n \longrightarrow +\infty$ . Ainsi

$$I_{a,J}^n := A \int_{K_J} e_n(y) p_J(x, y) dx dy \longrightarrow I_{a,J}.$$

On a

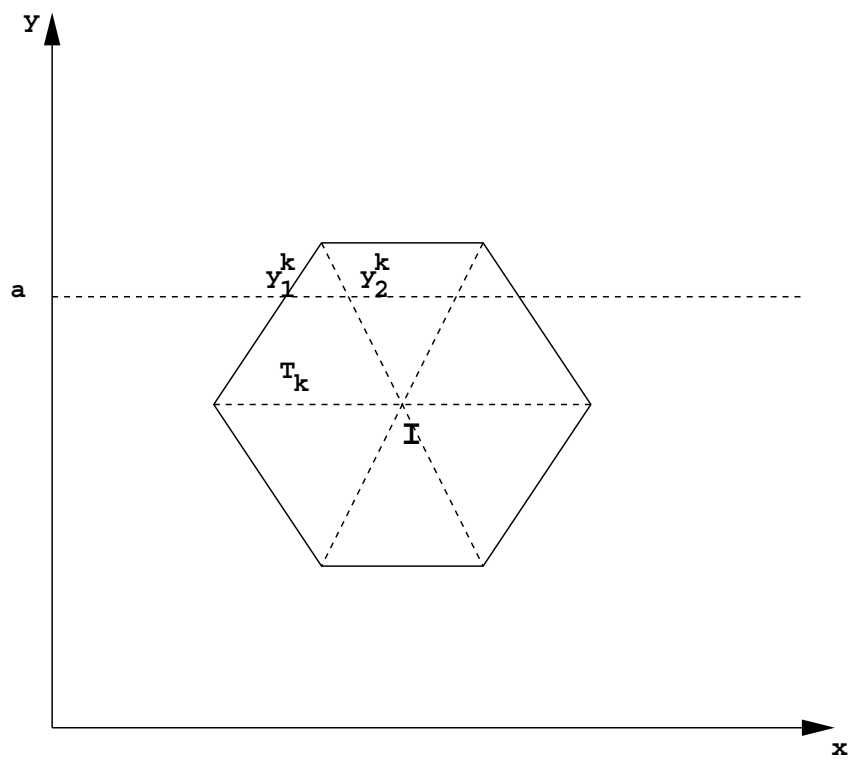
$$I_{a,J} = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y = a) \cap K_J = \emptyset, \\ A \sum_{T \in K_J} \int_T \delta(y - a) p_J^t(x, y) dx dy, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère donc le deuxième cas et un calcul simple montre que

$$I_{a,J} = A \sum_{T_k \in K_J} \int_{y_1^k}^{y_2^k} p_J^k(x, a) dx,$$

où les  $y_1^k, y_2^k$  sont les points d'intersection entre la droite  $y = a$  et le triangle  $T_k$  (cf Figure 1.4).



FIG. 1.4 – *Intersection*

### 1.4.2 Cas non-homogène

Il s'agit du cas

$$-\Delta\phi = f \text{ dans } \Omega, \quad (1.24)$$

$$\phi = g \text{ sur } \partial\Omega, \quad (1.25)$$

avec  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . L'existence et l'unicité de la solution de (1.24 – 1.25) se fait par une méthode de relèvement que nous ne détaillerons pas ici. Nous nous intéressons à la méthode numérique. Nous utilisons la méthode du terme diagonal dominant. La matrice  $A$  et le vecteur second membre  $b$  sont *pratiquement* les mêmes que dans le cas homogène. Seules les lignes et les colonnes qui concernent les termes de bord seront changées [41].

Supposons que nous voulions imposer la condition aux limites  $\phi_k = g_k$ . On remplace alors le terme diagonal  $A_{kk}$  par  $A_{kk} + 10^\alpha$  et  $b_k$  par  $g_k * 10^\alpha$ , où  $\alpha$  est assez grand pour que

$$10^\alpha \gg \sum_j |A_{kj}|.$$

A la  $k$ -ième ligne on aura alors:

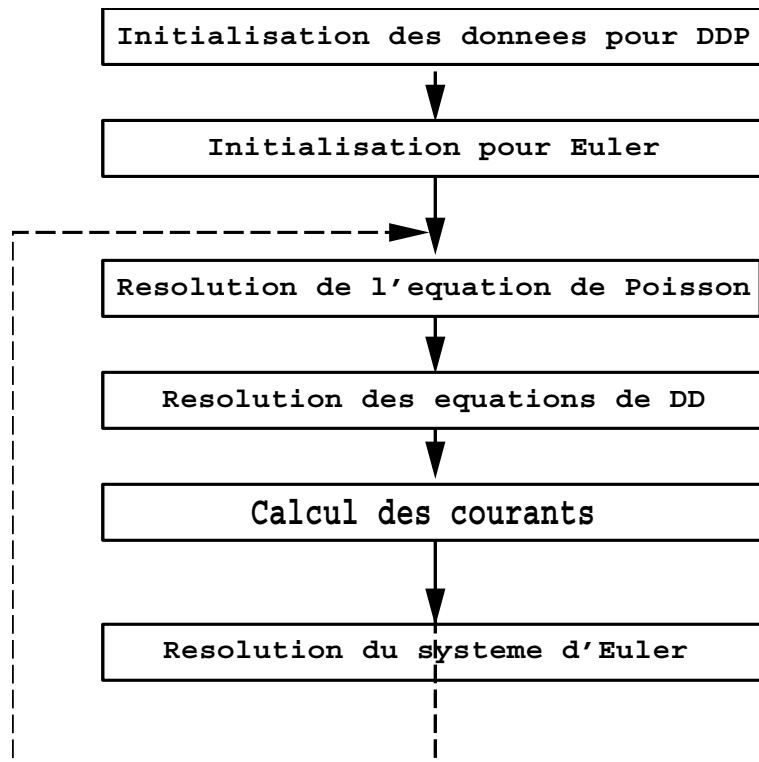
$$\sum_j A_{kj} \phi_j + 10^\alpha \phi_k = 10^\alpha g_k,$$

soit

$$\phi_k \simeq g_k.$$

### 1.4.3 Algorithme

L'algorithme de résolution du système couplé Dérive-Diffusion-Poisson-Euler est représenté sur la Figure 1.5.

FIG. 1.5 – *Algorithme de résolution*

## Chapitre 2

# Résultats Numériques

Ce Chapitre a été réalisé en collaboration avec Jean-Pierre Marque<sup>1</sup>.

---

1. ONERA, Département DMPH, Chemin de la Huniere, 91761 Palaiseau, France.

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 Le plasma initial

Un plasma est caractérisé par trois paramètres: la longueur de Debye  $\lambda_D$ , le 'nombre de Debye'  $N_D$  et la fréquence plasma  $\omega_{pe}$ . Ils sont donnés par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}\lambda_D &:= \sqrt{\frac{\epsilon_0 K T_e}{n e^2}}, \\ N_D &:= \pi n^{\frac{4}{3}} \lambda_D^3, \\ \omega_{pe} &:= \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e}}.\end{aligned}$$

où  $K$  est la constante de Boltzmann,  $T_e$  la température électronique,  $n$  la densité électronique et  $m$  la masse de l'électron. Pour avoir un plasma, il faut

- (H 1) que  $\lambda_D$  soit petit devant la longueur du dispositif,
- (H 2) que  $N_D$  soit grand devant l'unité,
- (H 3) et que la fréquence plasma soit plus grande que la fréquence de collision entre les électrons et les autres particules chargées.

On peut aussi donner la fréquence plasma ionique  $\omega_{pi}$

$$\omega_{pi} := \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_i}}.$$

Donnons quelques précisions sur les flux électronique  $J_e$  et ionique  $J_i$ . Nous avons vu que:

$$J_\alpha(t, x) = -D_\alpha(t, x) \nabla n_\alpha(t, x) + \mu_\alpha(t, x) n_\alpha(t, x) E(t, x),$$

où

$$D_\alpha = \frac{K T_\alpha}{m \nu_\alpha}$$

et

$$\mu_\alpha = \frac{q_\alpha}{m \nu_\alpha}$$

avec  $\alpha = i, e$ ,  $\nu_\alpha$  est la fréquence de collisions avec les particules neutres et  $q_\alpha$  est la charge. Les coefficients  $D_e$ ,  $D_i$ ,  $\mu_e$  et  $\mu_i$  vérifient les relations d'Einstein:

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{K T}{e} \quad \text{et} \quad \frac{D_i}{\mu_i} = \frac{K T}{e}.$$

Nous prenons  $\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{K T_e}{e} = \frac{D_i}{\mu_i} = \frac{K T_i}{e} = 2$  pour fixer les idées.

Remarques:

- Nous considérons un plasma *faiblement* ionisé. De ce fait nous ne prenons pas en compte les collisions coulombiennes entre particules chargées.
- Les ions du plasma sont des ions  $H^+$ .
- Les fréquences de collisions  $\nu_\alpha$  dépendent de la densité des molécules neutres [45]. Or dans le vide, il n'y a très peu de molécules neutres. Les fréquences de collisions deviennent petites et les pas de temps aussi. C'est pourquoi nous garderons ces fréquences constantes. Cette approximation peut sembler grossière, mais dans le vide, où il y a peu de particules, une description fluide n'est de toute manière pas appropriée. Il faudra plutôt coupler avec une méthode cinétique, chose que nous n'avons pas traité dans cette thèse.

Les densités initiales sont

- pour les molécules neutres:  $n_{g0} = 10^{23}m^{-3}$  dans le plasma et  $n_{g0} = 0$  loin du plasma avec une décroissance douce,
- même densité initiale pour les particules chargées:  $n_0 = n_{g0}/100$  (le plasma est faiblement ionisé).

De telles données sur les coefficients et sur les densités fournissent les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}\lambda_D &= 3.3 \times 10^{-7}m, \\ N_D &= 36\text{particules}, \\ \omega_{pe} &= 180 \times 10^{10} \text{ collisions par seconde}, \\ \omega_{pi} &= 4 \times 10^{10} \text{ collisions par seconde}.\end{aligned}$$

et vérifient bien les hypothèses H 1, H 2 et H 3. De ce fait, nous considérons bien un plasma.

### 2.1.2 La géométrie

En ce qui concerne la géométrie du dispositif, nous prenons: longueur en  $X$  (sens de la décharge)  $Lx = 1000\mu m$  et longueur en  $Y$   $Ly = 500\mu m$ . On observera donc la décharge sur des longueurs de l'ordre de  $3000\lambda_D$  en  $X$  et  $1500\lambda_D$  en  $Y$ . Dans tous les cas, nous partirons de la configuration initiale suivante:

- la longueur du plasma initial, dans la direction  $X$ , est de  $250\mu m$ ,
- et la hauteur, dans la direction  $Y$ , est de  $50\mu m$ ,
- l'épaisseur du diélectrique est de  $100\mu m$ ,
- la charge est implantée à une distance de  $20\mu m$  de la surface et a une valeur de  $2 \times 10^{-4}C/m^2$ .

Nous discrétisons avec 100 points en  $X$  et 59 points en  $Y$ . Les pas d'espace sont ainsi de  $1 \times 10^{-5}m$  en  $X$  et de  $1.017 \times 10^{-5}m$  en  $Y$ . Ainsi le rapport entre le pas

d'espace et la longueur de Debye est de l'ordre de  $\frac{\Delta x}{\lambda_D} = 30$  et nous ne décrivons pas les phénomènes qui s'étendent sur des longueurs de l'ordre de  $\lambda_D$ .

Le pas de temps est variable, mais globalement il est situé entre 5 et  $6 \times 10^{-14} \text{ sec}$ . On peut le comparer à l'inverse de la fréquence  $\omega_{pe}$ :

$$\frac{1}{\omega_{pe}} = 5 \times 10^{-13} \text{ sec}$$

Ainsi, nous décrivons les phénomènes survenant entre deux collisions. On remarque que l'échelle de temps des électrons  $\frac{1}{\omega_{pe}}$  est plus petite que celle des ions  $\frac{1}{\omega_{pi}}$ .

Nous ferons, dans chaque simulation, 10000 iterations. Les temps de calcul, sur une DEC alpha 21164/500, sont de l'ordre de la vingtaine de minutes.

### 2.1.3 Présentation des simulations

Beaucoup de coefficients et de paramètres sont susceptibles d'influencer la décharge. Nous rappelons que les différents phénomènes de la décharge sont:

- la désorption,
- l'ionisation, introduite dans le modèle par la fonction d'ionisation  $\nu(t,x)$ ,
- la recombinaison, introduite par le terme  $rec(t,x)$ .

En ce qui concerne la désorption, on peut effectivement jouer sur au moins deux paramètres: la quantité de gaz neutre éjecté par rapport au nombre d'ions incidents  $\beta$  et la vitesse d'éjection  $v_{ej}$ . Rappelons ici la loi de la désorption,

$$(\rho_n u_n)|_{\Gamma} = \begin{cases} -\beta m_i J_i & \text{si } J_i \cdot \nu \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.1)$$

Physiquement, il semble que  $\beta$  varie entre 1 et 10.

Nous rappelons que les fonctions d'ionisation et de recombinaison sont de la forme:

$$\begin{aligned} f_{ionisation} &= A n_g(t,x) e^{-B \frac{n_g(t,x)}{E(t,x)}} n_e(t,x) \text{ pour l'ionisation,} \\ f_{rec}(t,x) &= r n_e(t,x) n_i(t,x) \text{ pour la recombinaison,} \end{aligned}$$

où  $n_g$ ,  $n_e$ ,  $n_i$  sont respectivement les densités des molécules neutres, des électrons et des ions et  $E$  désigne le champ électrique.

Nous ne connaissons pas l'état véritable du plasma. Nous savons qu'il doit être au même potentiel que  $V_0$ . Or, avec cette configuration initiale, rien ne nous dit que ce soit le cas. C'est pourquoi, avant la simulation de la décharge proprement dite,

nous laissons évoluer le système de manière à ce que le potentiel du plasma soit proche de  $V_0$ . Nous ne commençons la simulation qu'à partir de ce moment-là.

Nous cherchons sous quelles conditions la décharge avance. Pour qu'il y ait avancée, il faut que les densités des particules chargées valent celle de la densité initiale  $n_0$ , et que le potentiel électrique soit proche de  $V_0$ .

Lors des simulations de décharges, deux phénomènes sont notamment étudiés. Il s'agit du 'blowoff' et du 'flashover' (cf Figure 2.1). Le phénomène de blowoff consiste en l'éjection des électrons de la décharge loin du panneau, tandis que le phénomène de flashover consiste en un courant d'électrons le long du canal de décharge vers l'armature métallique.

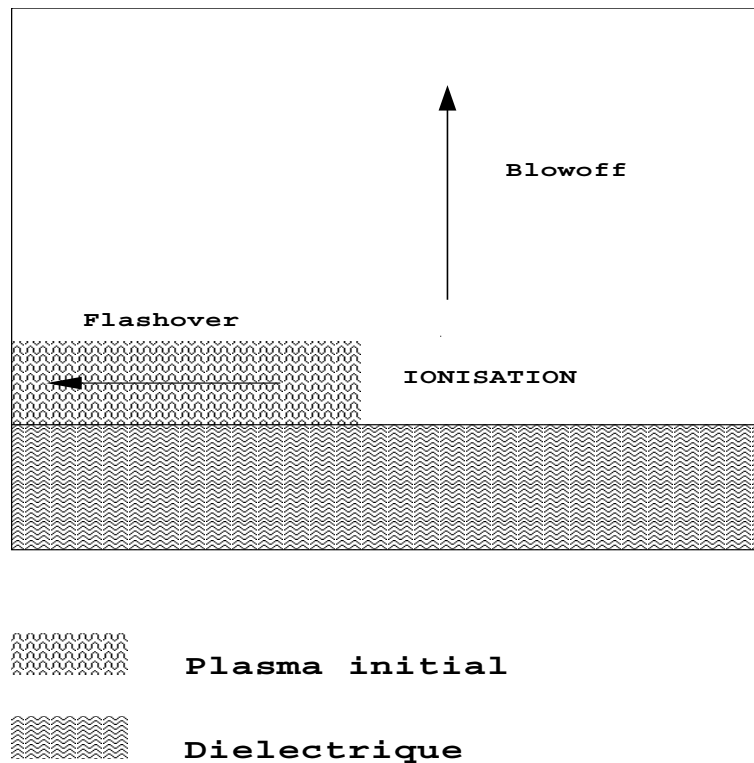


FIG. 2.1 – *Blowoff et flashover.*

Dans les simulations, nous nous intéresserons aux grandeurs typiques de la décharge:

- les densités électronique, ionique et la densité des molécules neutres,
- le potentiel électrique,
- les courants électroniques de blowoff et de flashover (par unité de longueur).



Dans la suite nous appellerons 'simulation témoin' une simulation dans laquelle nous ne tenons pas compte des processus d'ionisation et de recombinaison. Il ne s'agit pas d'une pure détente d'un plasma dans le vide en raison de la charge  $\sigma_e$  implantée. Pour l'étude de la détente d'un plasma dans le vide, on peut se référer à, entre autre, [43, 44].

## 2.2 Simulation témoin

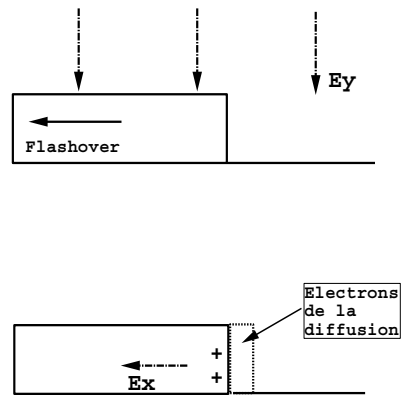
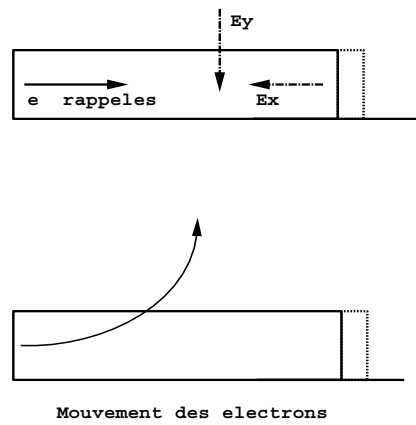
Cette simulation est notre première simulation 'témoin'. Il n'y a ni désorption, ni ionisation, ni recombinaison. Nous prendrons  $V_0 = -5kV$ .

Avant de présenter les résultats, nous allons décrire le processus de la détente. Le plasma est dans un milieu où règne un fort champ électrique. D'une part, en aval du plasma, le champ électrique créé par  $\sigma_e$ , dans la direction X, est très intense. D'autre part, du fait de  $V_0$  il règne un fort champ dans la direction Y. Du fait de son intensité, malgré l'écrantage de Debye, son intensité reste importante dans le plasma. Nous appelons respectivement  $E_x$  et  $E_y$  les deux composantes de ce champ.

Dans un premier temps, le plasma se met au potentiel  $V_0$ . Ce potentiel est moins négatif que celui créé par les électrons implantés. Il y a donc un champ électrique dirigé vers 'la droite'. De ce fait, une partie électrons du plasma remontent le canal. C'est le phénomène de 'flashover'. Ces électrons créent le courant de flashover ou 'courant de surface' (cf le premier schéma de la Figure 2.2). Une autre partie d'électrons, beaucoup moins importante, est éjectée dans le vide (partie qui n'est pas représentée sur la Figure 2.2). C'est le début du phénomène de blowoff. Pendant ce temps, les ions, plus lourds, que les électrons n'ont pas eu le temps de bouger, et il y a un surplus de particules chargées positivement dans le plasma. Le potentiel du plasma est alors de  $V_0$ .

Les électrons commencent à diffuser. Le plasma a un déficit de charges négatives et son potentiel en aval est légèrement moins négatif que  $V_0$ . Il se crée donc un champ électrique dirigé vers 'la gauche' (cf le deuxième schéma de la Figure 2.2. Pour ne pas surcharger la figure le champ  $E_y$  n'est pas représenté). Ce champ pousse les électrons vers la droite. La condition aux limites se comporte alors comme un terme source et fournit des électrons au plasma. Mais du fait du champ  $E_y$  ceux-ci sont éjectés dans le vide et contribuent fortement au processus de blowoff. On assiste à un phénomène de pompage électronique (cf Figure 2.3).

Tous ces mécanismes dépendent de l'environnement du plasma. On les retrouve pour différentes configurations de champs ( $E_x, E_y$ ) et de charges  $\sigma_e$  implantées. Ce sont plus les valeurs des courants qui varient beaucoup, que le principe de ces mécanismes.

FIG. 2.2 – *Champ de rappel*FIG. 2.3 – *Pompage*

Nous allons retrouver les phénomènes de flashover et de blowoff dans les résultats présentés.

Pour les densités, nous avons tracé les rapports densité à l'instant final sur densité initiale:  $\frac{n(t,x)}{n_0(x)}$ .

Les figures 2.4 et 2.5 concernent toutes les deux les densités électroniques. Dans la figure 2.4, nous avons tracé les isovaleurs entre 0 et 1 avec 20 paliers et mis en évidence la diffusion électronique qui est isotrope. Dans la figure 2.5, nous avons tracé les isovaleurs entre 0 et 0.01 avec 20 paliers aussi. On remarque la détente des électrons due à la différence de potentiel entre  $V_0$  (à l'armature métallique) et 0 (loin du plasma).

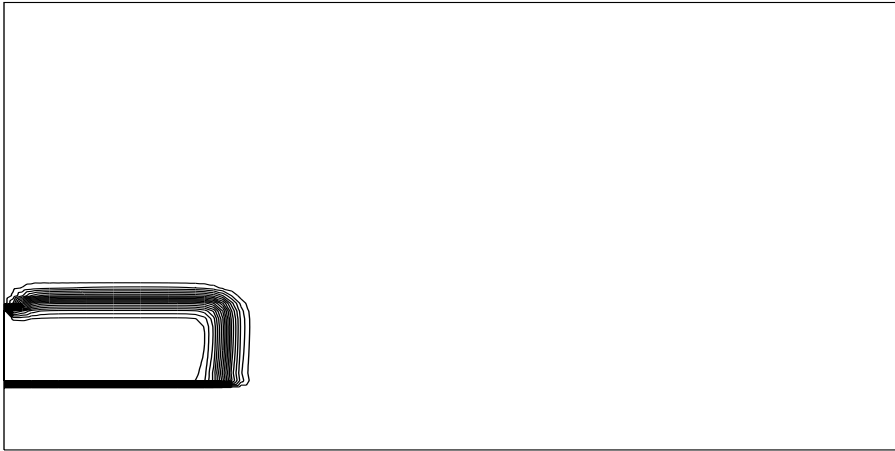


FIG. 2.4 – Densité électronique,  $Max:1$ .

Nous ne traçons pas les isovaleurs entre 0 et 1 pour les ions car elles sont très semblables à celles des électrons. Sur la figure 2.6, on remarque l'influence du champ électrique créé par la charge  $\sigma_e$  sur les ions du plasma.

On remarque sur la figure 2.7 que les molécules neutres n'ont pas beaucoup bougé. Elles ne subissent pas d'actions extérieures. On assiste juste à une montée de la densité dans le plasma du fait de la réflexion spéculaire sur la paroi du diélectrique.

Le potentiel, en aval du plasma, varie sous l'effet des ions, mais il ne varie pas de façon sensible (par rapport aux conditions initiales). Le potentiel, dans cette zone, reste éloigné de celui de l'armature métallique (voir la figure 2.8) . Le champ électrique dû aux électrons implantés n'est pas écranté.

Sur la figure 2.9 nous avons représenté les courants électroniques de blowoff et de

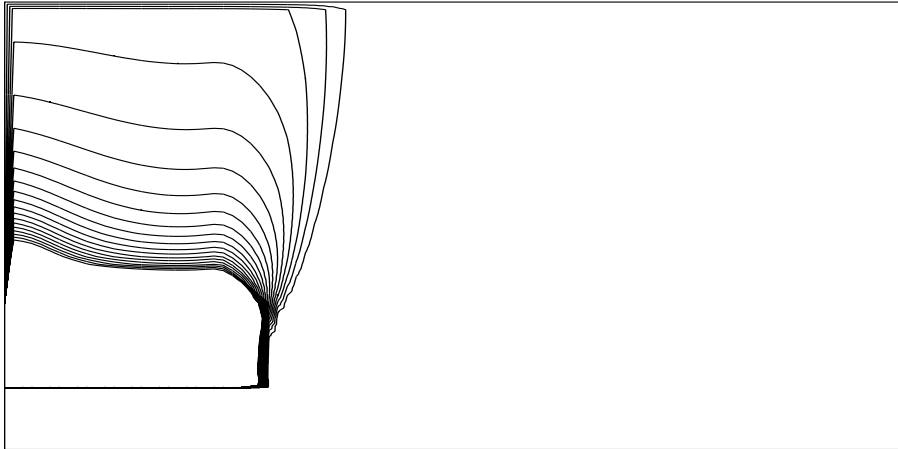


FIG. 2.5 – *Densité électronique, Max:0.01.*

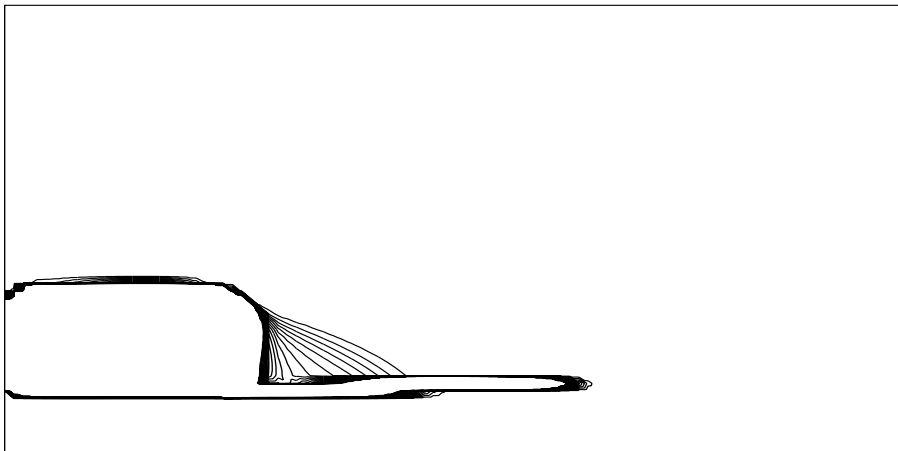


FIG. 2.6 – *Densité ionique, Max:0.01.*

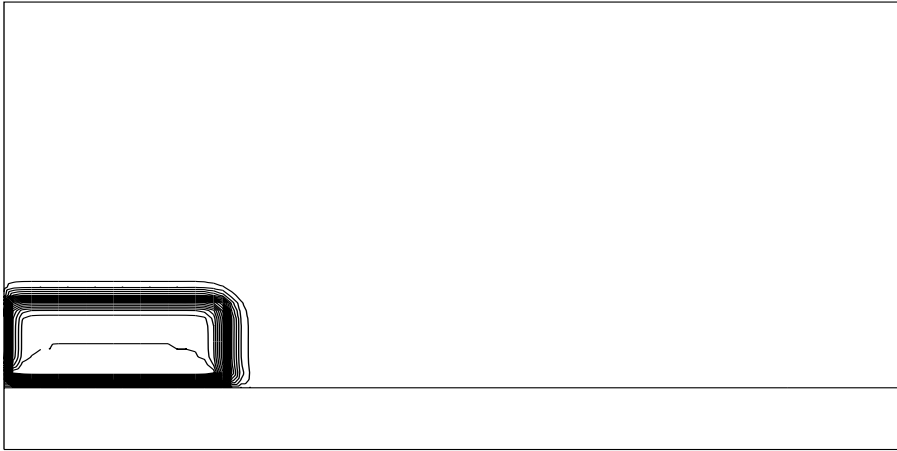


FIG. 2.7 – *Densité des neutres, Max:1.1.*

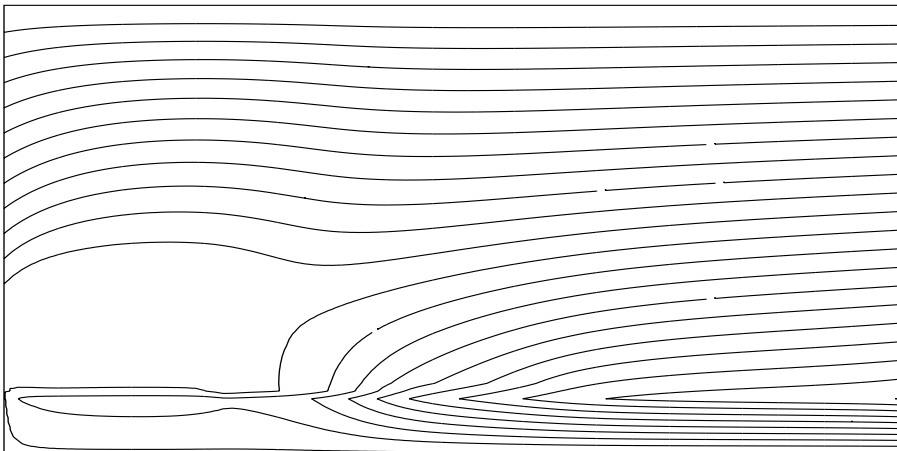


FIG. 2.8 – *Potentiel, Min=-8800V, Max=0V.*

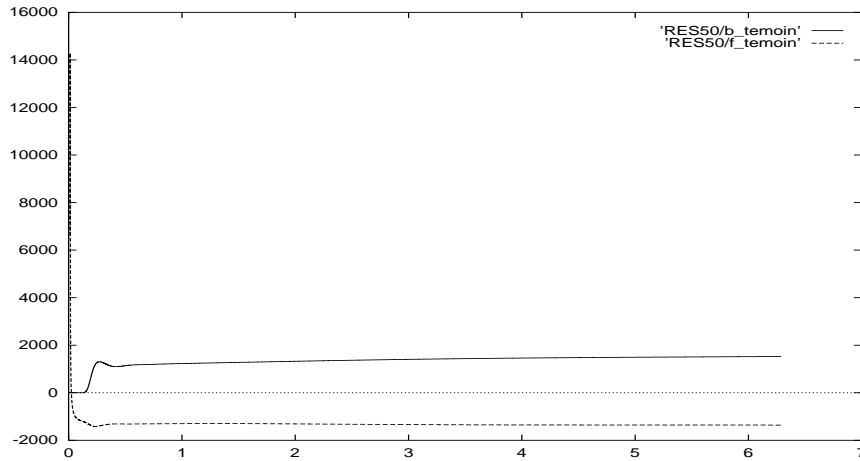


FIG. 2.9 – Courants de flashover et de blowoff (simulation témoin).

flashover par largeur en fonction du temps (le temps du calcul est de  $10.5 \times 10^{-10} \text{ sec}$  environ). Ces courants sont seulement dus à la détente du plasma.

Dans le courant de blowoff, on peut remarquer trois parties. Une première partie qui est une phase de croissance. Elle correspond à l'arrivée des électrons du plasma éjectés sous l'effet du champ dans les limites de la zone de calcul. Vient ensuite une phase de décroissance du courant. En effet, les électrons sont rappelés par le champ vers le plasma. Il y a donc moins d'électrons qui contribuent au courant. Finalement, on voit une longue phase de faible croissance (jusqu' à  $6 \times 10^{-10} \text{ sec}$  environ). Cette phase est dûe au pompage électronique et à la diffusion.

Le signe positif ou négatif des courants est significatif de ces phases. En effet, d'une part, le courant de blowoff est positif ce qui signifie que le dispositif fournit des électrons au milieu ambiant. D'autre part, le courant de flashover est dans un premier temps positif. Ceci correspond à la remontée des électrons dans le canal. Ensuite, ce courant est négatif et des électrons sont pompés par le plasma.

Le système se comporte de la manière prévue. Premièrement, les électrons sont éjectés loin du diélectrique, tandis que les ions sont divisés en deux groupes. D'une part, un premier groupe d'ions est attiré par les électrons implantés dans le diélectrique, d'autre part un deuxième groupe d'ions a tendance à suivre les électrons du blowoff (voir la figure 2.6).

## 2.3 Influence du processus d'ionisation

Par 'processus d'ionisation' nous entendons les phénomènes de désorption, d'ionisation lui-même et de recombinaison. Pour les résultats qui suivent, nous avons pris:

- la vitesse d'éjection:  $0 \text{ ms}^{-1}$ ,
- le coefficient d'ionisation  $A$ : 30,
- le coefficient de recombinaison:  $10^{-10}$ ,
- le coefficient de désorption  $\beta$ :  $10^7$
- le temps final de calcul est de l'ordre de  $7.5 \times 10^{-10} \text{ sec}$ .

Les figures suivantes représentent le rapport densité à l'instant final sur densité initiale:  $\frac{n(t,x)}{n_0(x)}$ .

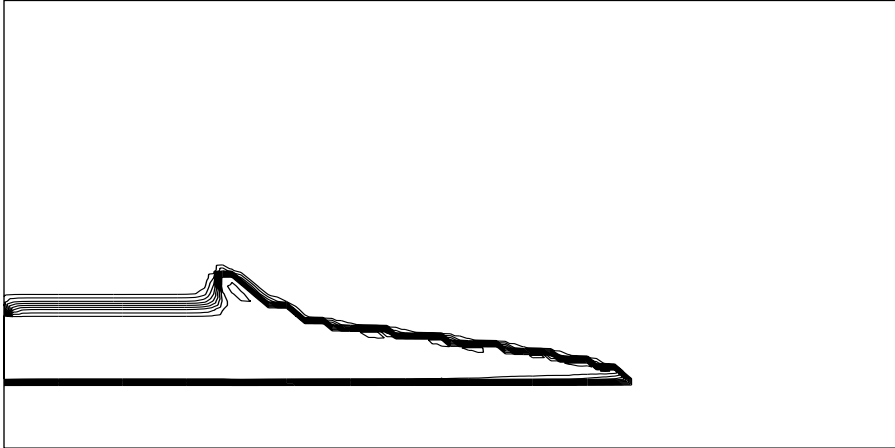
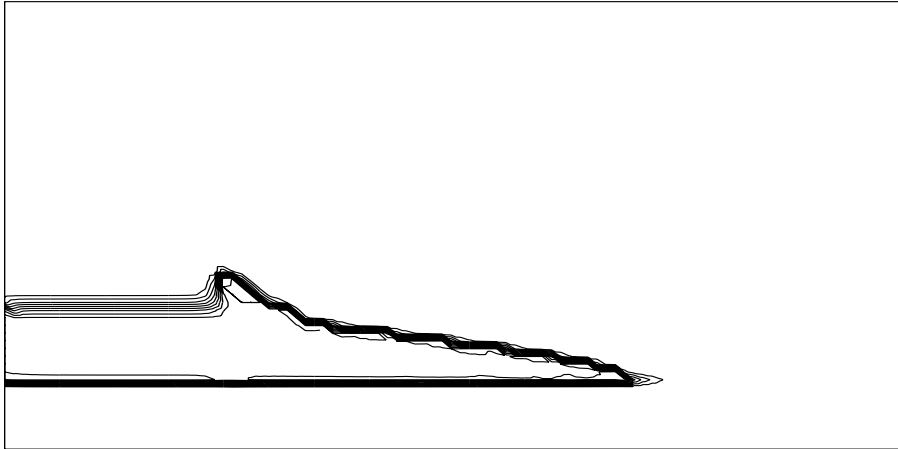
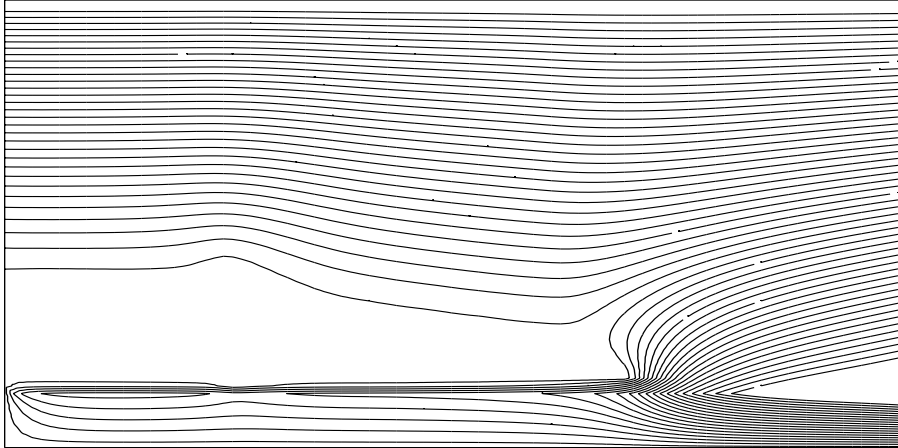


FIG. 2.10 – Densité électronique,  $Max:1$ .

Pour les particules chargées, le rapport maximal vaut 1 tandis que pour les particules neutres, il vaut 2.3. Ce maximum est atteint juste à la surface du diélectrique. Ce phénomène est davantage dû à la désorption qu'à la recombinaison. Si on considère un rendement de désorption  $\beta$  deux fois plus faible, on retrouvera un rapport maximal de 1. Les valeurs du potentiel varient de  $-8000\text{V}$  (électrons implantés) à  $0\text{V}$  (conditions à l'infini). Dans le plasma, le potentiel ne varie pas beaucoup et a une valeur de l'ordre de  $-4980\text{V}$ , valeur très proche de  $V_0$ . Les conditions du plasma sont bien recréées dans le canal de décharge. Un plasma se crée dans la direction de propagation de la décharge. Les courants ont la même allure que dans la simulation témoin (voir figure 2.14) . On retrouve les phases, mais avec des intensités

FIG. 2.11 – *Densité ionique, Max:1.*FIG. 2.12 – *Potentiel.*



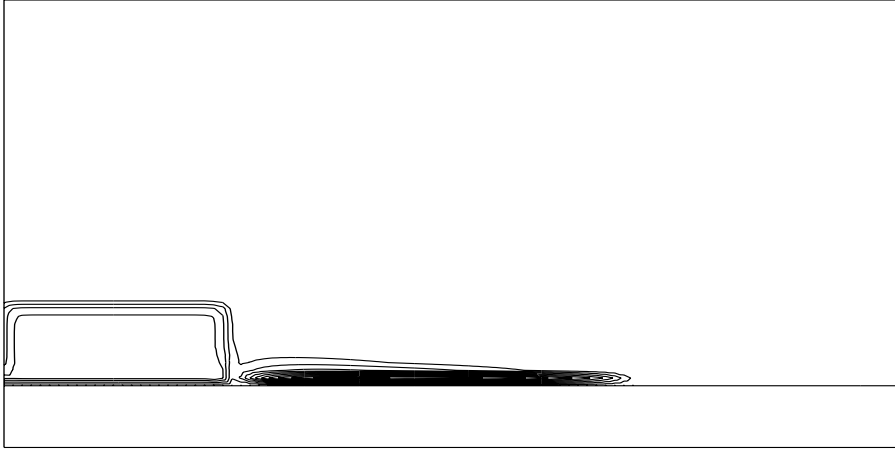


FIG. 2.13 – *Densité des molécules neutres, Max:2.3.*

différentes. Pour mieux voir l'influence de l'ionisation, nous traçons sur la même

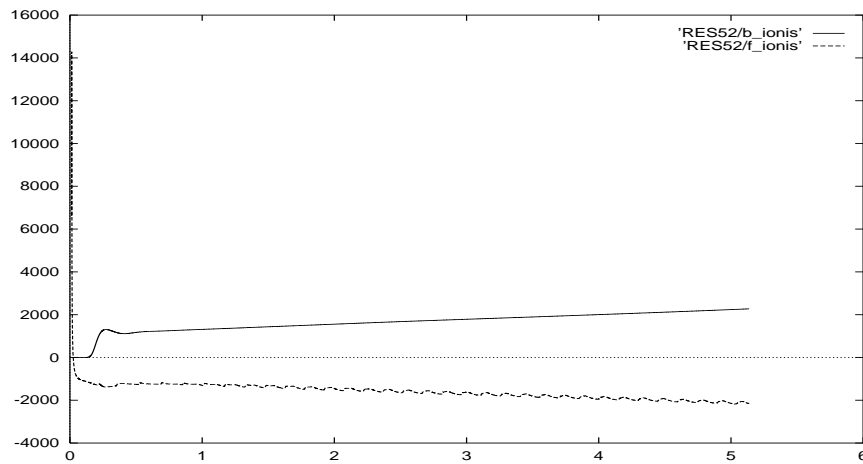


FIG. 2.14 – *Courant de flashover et de blowoff (ionisation).*

figure (2.15) les courants de blowoff. Comme on peut s'y attendre, le courant engendré par le phénomène d'ionisation est plus important que celui qui est seulement dû à la détente.

#### Remarques:

- Le processus d'ionisation considéré met en jeu des collisions électrons/particules

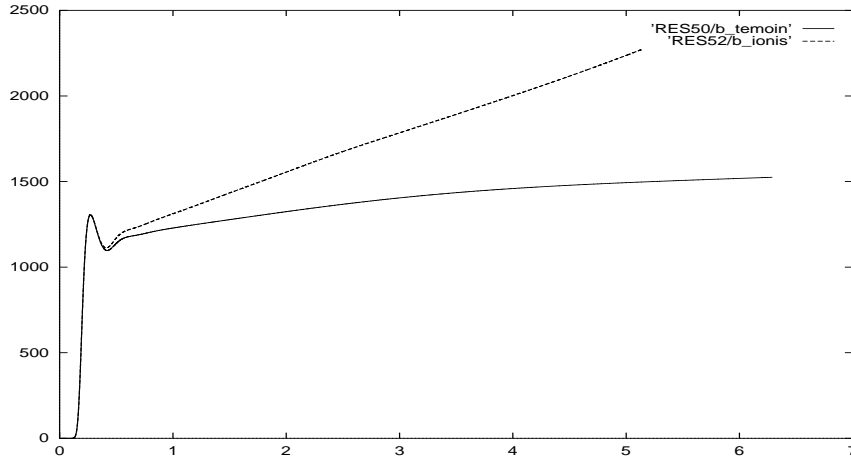


FIG. 2.15 – *Comparaison des courants de blowoff (avec et sans ionisation).*

neutres. Pour que l'ionisation se fasse, il faut donc des électrons. Dans la simulation considérée, deux processus fournissent des électrons. Le premier est la diffusion. Le second est dû aux ions. En effet, les ions qui quittent le plasma, entraînent avec eux des électrons. Mais, si la charge  $\sigma_e$  est trop forte, il y a plus d'électrons éjectés, donc moins d'électrons disponibles pour le processus d'ionisation. La décharge est alors moins importante et peut même ne pas avoir lieu. Pour amorcer la décharge, il faudrait prendre en compte des collisions ions/particules neutres ou une désorption ionisante.

- Une vitesse d'éjection verticale  $v_{ej}$  non nulle donne des résultats très similaires. Les allures des densités changent légèrement; les particules s'étendant plus loin dans le vide.

## 2.4 Influence du potentiel $V_0$

Nous prenons  $V_0 = -3kV$ . Une simulation 'témoin' donnerait le même comportement que dans le cas où  $V_0 = -5kV$ . Les électrons subissent une détente et les ions sont attirés par les électrons du diélectrique. Les courants de la simulation 'témoin' sont donnés par la figure (2.16). On remarque les trois parties des courbes. On a le même comportement que dans la simulation 'témoin' du cas  $V_0 = -5kV$ , mais avec moins d'intensité.

Pour cette simulation, nous avons pris:

- coefficient de désorption  $\beta$ : 10,

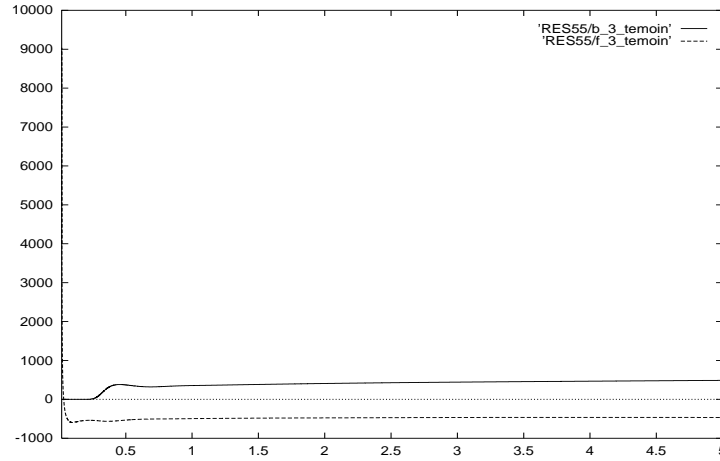


FIG. 2.16 – Courants pour un potentiel de  $-3kV$ , sans ionisation.

- la vitesse d'éjection:  $0 \text{ ms}^{-1}$ ,
- le coefficient d'ionisation  $A$ : 30,
- le coefficient de recombinaison:  $10^{-10}$ .

Au temps final de calcul  $T = 5 \times 10^{-10}$ , nous avons les configurations (2.17) pour les électrons, (2.18) pour les ions, (2.19) pour les neutres et (2.20) pour le potentiel. Les courants de blowoff et de flashover sont donnés par la courbe (2.21). A part au début de la décharge, ils sont pratiquement égaux.

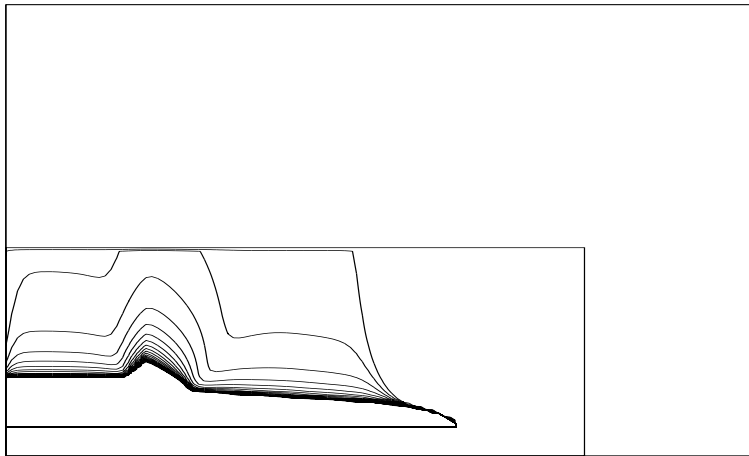


FIG. 2.17 – Densité électronique,  $Max:0.01$ . ( $V_0 = -3kV$ )

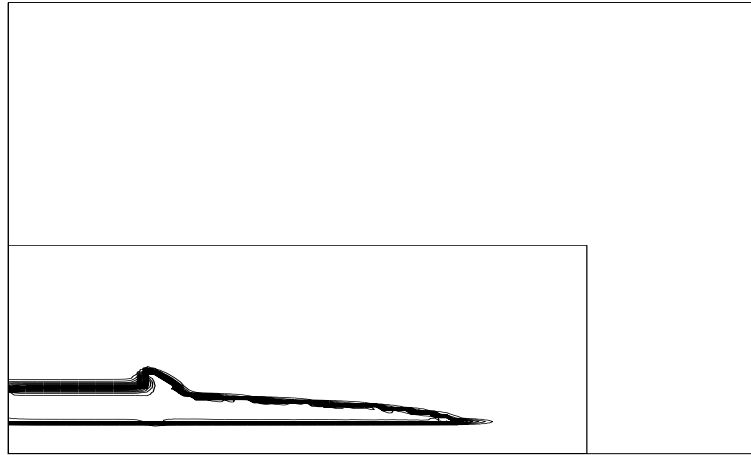


FIG. 2.18 - *Densité ionique, Max:1.08. ( $V_0 = -3kV$ )*



FIG. 2.19 - *Densité des neutres, Max:1.13. ( $V_0 = -3kV$ )*

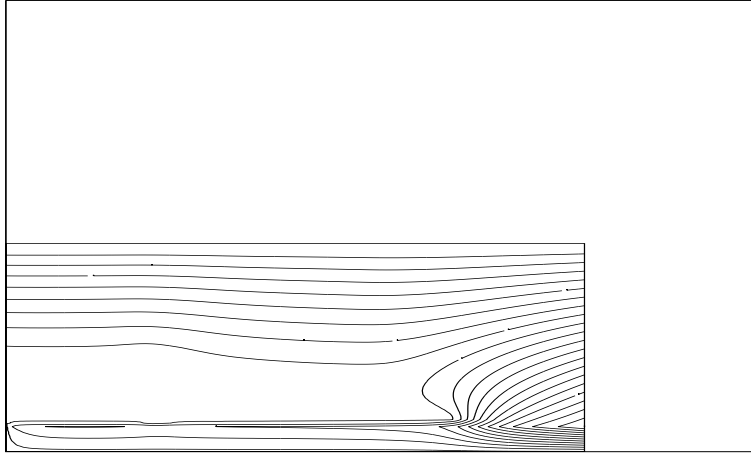


FIG. 2.20 – *Potentiel, Min:-7080V. ( $V_0 = -3kV$ )*

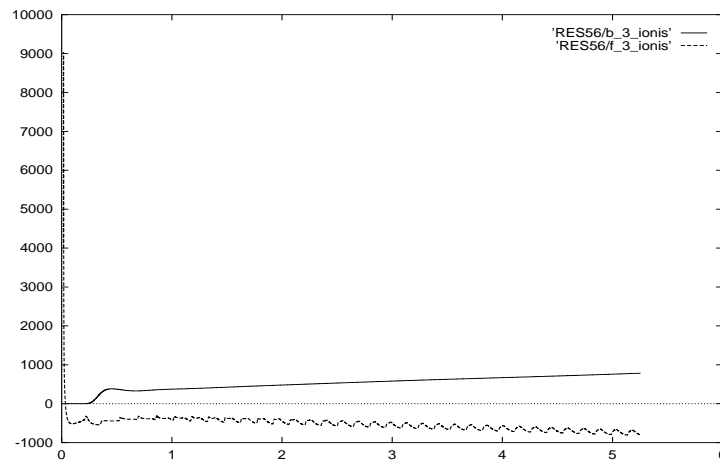


FIG. 2.21 – *Courants de blowoff et de flashover. ( $V_0 = -3kV$ )*

La figure (2.22) représente le courant de blowoff de la simulation témoin (courbe 'blowoff') et le courant de blowoff de cette simulation-ci . On remarquera les trois parties de la courbe, mais avec des valeurs plus faibles que dans le cas où  $V_0 = -5kV$ . Pour mieux apprécier l'influence de  $V_0$ , nous traçons sur la même figure (2.23) les

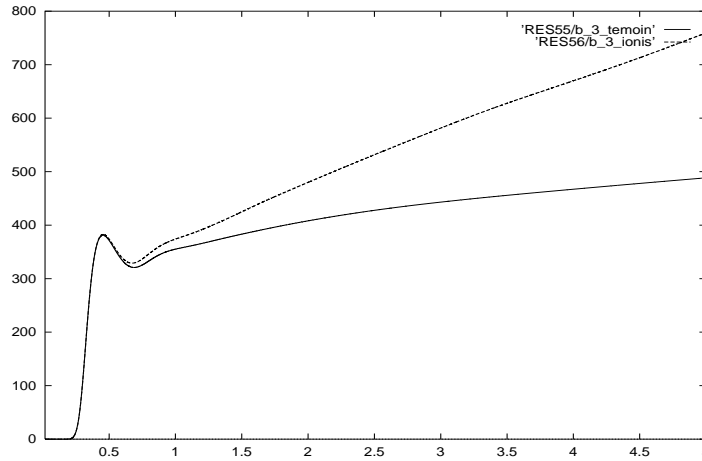


FIG. 2.22 – Comparaison des courants de blowoff dans les cas 'témoin' et ionisation.

courants de blowoff dus à  $V_0 = -5kV$  (courbe RES52/b-ionis) et  $V_0 = -3kV$  (courbe RES56/b-3-ionis.) Les intensités sont nettement différentes. Pour un potentiel  $V_0$  qui est moins de deux fois plus petit, on obtient des courants qui sont plus de deux fois plus petits.

## 2.5 Influence de la charge

Nous allons à présent étudier l'influence de la charge électronique implantée  $\sigma_e$ . Nous allons envisager deux configurations. Dans la première, la charge  $\sigma_e$  est dix mille fois plus faible que celles des simulations précédentes, et dans la seconde, la charge est discontinue. Les courants électroniques rendent bien compte de ce qui se passe; c'est pourquoi nous ne traçons que ceux-ci.

### 2.5.1 Cas d'une charge faible

Le courant de flashover, figure 2.24, courbe fl-sigma-faible est environ trois fois plus faible que celui engendré par une charge  $\sigma_e$  normale, courbe fl-sigma . Ceci s'explique par le fait que le champ électrique est alors plus faible et donc évacue moins d'électrons.

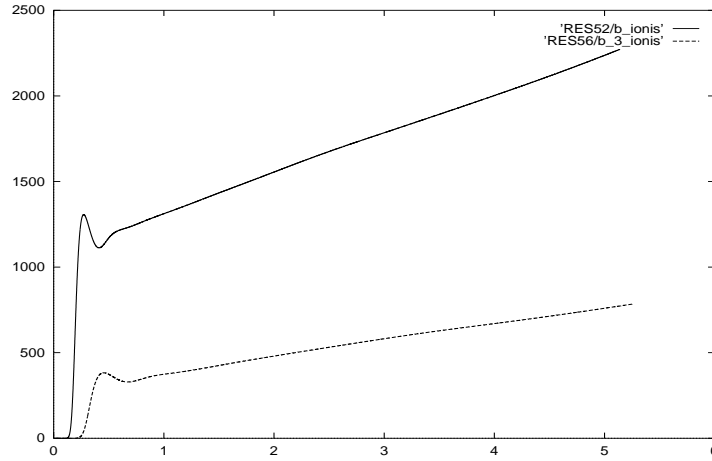


FIG. 2.23 – Comparaison des courants de blowoff pour différents potentiels  $V_0$ .

Le courant de blowoff engendré est représenté sur la figure 2.25, courbe bl-sigma-faible. Dans un premier temps, ce courant est plus important que celui obtenu avec une charge  $\sigma_e$  normale, courbe bl-sigma. Cette différence s'explique par le fait qu'il y a plus d'électrons disponibles dans le plasma susceptibles de diffuser. Seulement avec une charge implantée si petite, le processus d'ionisation ne peut pas avoir lieu et le courant augmente plus lentement que dans le second cas, où l'ionisation se produit. Une charge  $\sigma_e$  suffisamment importante est nécessaire pour que la décharge se produise.

### 2.5.2 Cas d'une charge discontinue

Nous considérons le cas d'une charge discontinue: celle-ci vaut  $\sigma_e$  entre 0 et  $42\Delta_x$ , 0 entre  $42\Delta_x$  et  $52\Delta_x$  et  $\sigma_e$  entre  $52\Delta_x$  et  $100\Delta_x$ . La désorption est moins intense que dans le cas où  $\sigma_e$  est continue; moins de gaz neutre est éjecté et l'ionisation est moins importante. La figure 2.26 représente les courants de flashover dans le cas d'une charge continue (courbe RES52-f-ionis) et discontinue (courbe RES70-f-sigma-dis-ionis). Ces courants sont sensiblement similaires sauf au début de la simulation. La figure 2.27 représente les courants de blowoff dans le cas d'une charge continue (courbe RES52-b-ionis) et discontinue (courbe RES70-b-sigma-dis-ionis). Le champ créé par la discontinuité est assez important et éjecte les électrons dans le vide. Seulement, l'absence de charges électroniques empêche l'apparition d'un fort champ vertical qui attire les ions. De ce fait, la désorption et l'ionisation sont moins importantes. C'est pourquoi le courant produit dans le cas d'une charge continue croît plus vite.

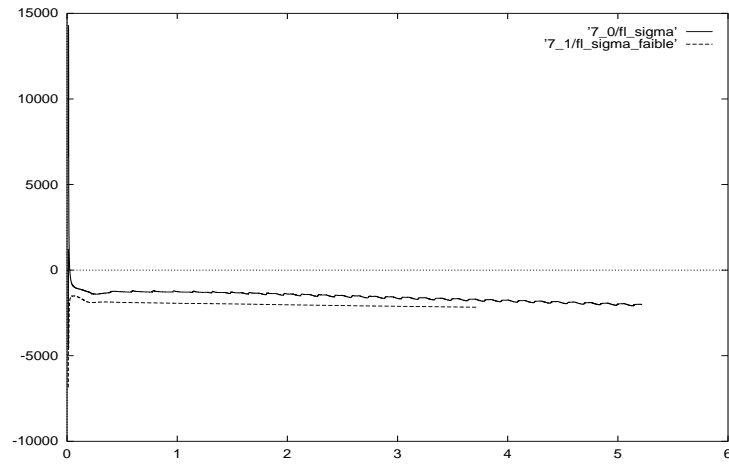


FIG. 2.24 – Comparaison des courants de flashover dans les cas  $\sigma_e$  'faible' et 'normale'.

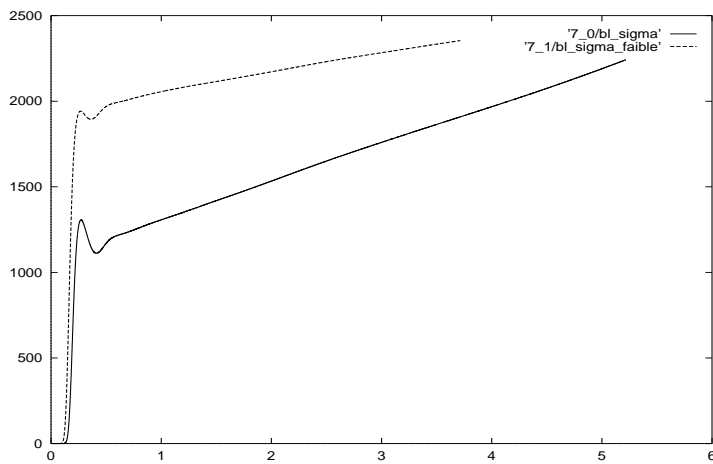


FIG. 2.25 – Courants des courants de blowoff dans les cas  $\sigma_e$  'faible' et 'normale'.



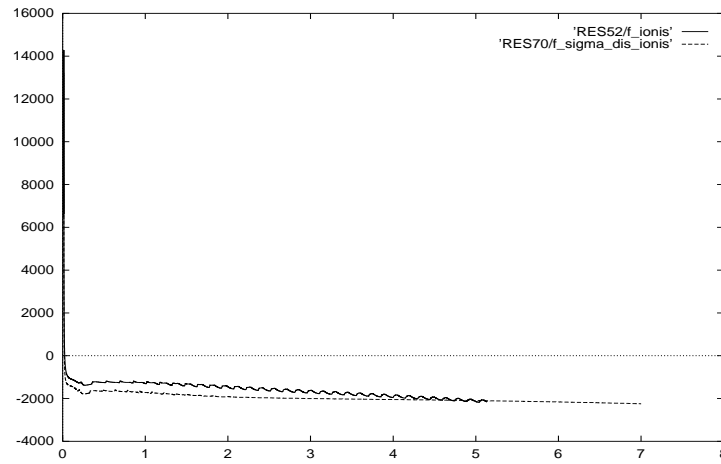


FIG. 2.26 – Comparaison des courants de flashover dans les cas  $\sigma_e$  'discontinue' et 'continue'.

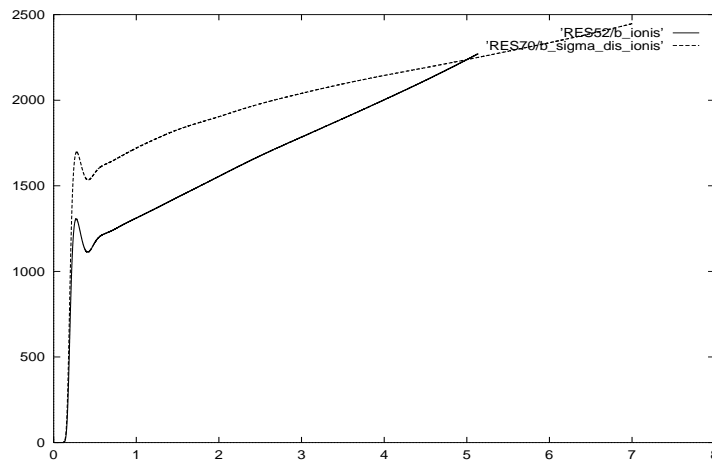


FIG. 2.27 – Comparaison des courants de blowoff dans les cas  $\sigma_e$  'discontinue' et 'continue'.

Les temps de calculs sont ici insuffisants pour savoir si la propagation de la décharge a lieu.

## 2.6 Conclusion

A travers ces simulations, nous avons étudié sous quelles conditions la décharge électrique peut se produire.

Pour avoir une décharge il faut recréer un plasma en aval du plasma initial. C'est-à-dire retrouver les conditions de densités initiales et avoir un potentiel très proche de  $V_0$ .

Nous avons mis en évidence le rôle de la diffusion électronique en tête du plasma. C'est diffusion qui amorce le phénomène d'ionisation.

Dans tous les cas, nous avons remarquer l'apparition d'un courant de flashover négatif. Ce qui signifie que des électrons sont pompés et introduits dans le plasma. Sous l'effet du champ électrique vertical, ceux-ci sont évacués dans le vide et forme le courant de blowff. Ainsi, en l'absence d'ionisation, il y a quand même un courant de blowoff. Celui-ci augmente en cas d'ionisation.

Pour les simulations futures, il sera peut-être nécessaire de considérer d'autres fonctions d'ionisation, par exemple, une ionisation ions/particules neutres. Il faudra aussi étudier plus plus en détails la désorption.



Quatrième partie  
Conclusion générale



# Conclusion

L'environnement du satellite est un environnement chargé et des décharges électriques peuvent s'y produire. Nous avons cherché au cours de cette thèse à simuler la propagation de ces décharges. Le modèle de la décharge nous a été proposé par Jean-Pierre Marque. Nous avons tenté de répondre aux questions suivantes: un plasma initial étant donné, sous quelles conditions la propagation a-t-elle lieu, quelle est sa vitesse, quels sont les courants électroniques qu'elle engendre ?

De nombreuses méthodes existent pour simuler le transport de particules chargées. Elles sont divisées en deux grandes familles: les méthodes cinétiques et les méthodes fluides. Le modèle présenté dans cette thèse est essentiellement un modèle fluide. Les particules chargées sont régies par le système Dérive-Diffusion-Poisson, et les molécules neutres par le système d'Euler. Le couplage entre ces particules se fait au niveau de l'ionisation, de l'équation de Poisson et de la condition de désorption.

A partir de ce modèle, nous obtenons un modèle plus simple qui sert à l'étude théorique. Les particules chargées sont régies par les équations de Dérive-Diffusion-Poisson et les molécules neutres par le système d'Euler isotherme.

Cette thèse est ainsi divisée en deux parties: une première partie théorique et une deuxième partie numérique.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique du couplage entre les équations de Dérive-Diffusion, l'équation de Poisson et le système d'Euler isotherme.

Nous avons tout d'abord montré l'existence et l'unicité de la solution pour le système Dérive-Diffusion. Nous avons remarqué que, d'une part, la condition aux limites de 'flux nul' pour les électrons ne nous permet pas de trouver un principe de maximum évident. D'autre part, la condition de densité nulle pour les ions permet un principe du maximum. Lors du couplage avec l'équation de Poisson, il a fallu se placer dans les espaces de Sobolev adéquats afin de pallier ce manque de principe. A l'aide d'une méthode de point fixe, nous avons montré l'existence et l'unicité de la

solution du système Dérive-Diffusion-Poisson dans un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et pour des petits temps. Ces résultats restent valides quand on se restreint à un ouvert borné de  $\mathbb{R}$ .

Ensuite, nous avons étudié le système hyperbolique d'Euler isotherme, avec des conditions aux limites et une condition initiale. Une des conditions d'existence de la solution est que les conditions aux limites soient *régulières*, plus précisément qu'elles soient  $\mathcal{C}^1$  en temps. Les résultats d'existence et l'unicité de la solution ont été obtenus pour un ouvert borné de  $\mathbb{R}$  et pour des temps petits.

Finalement, par une méthode de point fixe, nous avons étudié le système total. La condition aux limites exprimait que le flux de particules neutres émis était proportionnel à celui des ions incidents. Pour utiliser les résultats précédents, il a donc fallu obtenir de la régularité pour les flux d'ions. Nous nous sommes servi des espaces non-homogènes du type  $H^{r,s}(0,T;\Omega)$ . Par une méthode itérative, nous avons obtenu la régularité souhaitée. Il est alors apparu que la fonction d'ionisation jouait un rôle important et qu'elle devait être régulière.

Dans la deuxième partie, nous avons simulé numériquement la décharge électrique. Le domaine de calcul est un domaine rectangulaire.

De la même manière que pour les semi-conducteurs, les équations de Dérive-Diffusion ont été discrétisées par un schéma de Scharfetter et Gummel. Ce schéma approxime bien l'opérateur de diffusion lorsque le champ est faible et l'opérateur de transport lorsque la diffusion est négligeable. Nous avons aussi montré une condition de stabilité dans le cas où le champ ne dépend pas des densités. L'équation de Poisson est résolue par une méthode d'élément finis. Le système d'Euler est résolu par un code en volumes finis. Ce code existait déjà au sein de l'équipe CAIMAN. Néanmoins, il a fallu réécrire les conditions aux limites pour tenir compte de la désorption.

Pour le schéma en temps, un schéma d'ordre un en temps suffit pour les particules chargées, par contre il s'avère insuffisant pour les molécules neutres. En effet, la pression peut devenir négative. Nous avons donc utilisé un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2.

Les résultats numériques ont montré que le modèle de Marque permet de simuler l'avancée de la décharge électrique. A partir d'une configuration initiale de densités et de potentiel, nous avons réussi à retrouver cette configuration en aval du front de décharge. Les processus prépondérants sont la désorption et l'ionisation.

On ne peut pas directement comparer ces résultats numériques avec les résultats d'expériences réelles. En effet, ces décharges réelles se produisent sur des longueurs de quelques centimètres et sur des temps dix fois plus longs. D'autre part la désorption est un phénomène qui reste encore à étudier. Les inconnues de ce phénomène sont le

coefficient de désorption  $\alpha$ , la vitesse, la température et la pression d'éjection. Nous avons déjà pu constater l'importance d' $\alpha$ . Cependant, en dépit de ces inconnues, les valeurs des courants semblent dans une bonne fourchette.

Pour les études théoriques, une étude du système Dérive-Diffusion-Poisson avec une condition aux limites pour l'équation de Poisson qui dépende des densités serait intéressante. En effet, dans l'étude que nous avons menée, nous n'avons pas tenu compte de la charge ionique qui s'implante dans le diélectrique au cours du temps.

Dans les simulations présentées, la permittivité  $\epsilon_0$  était la même dans le vide et dans le diélectrique. Dans les situations futures, il serait bon de considérer une permittivité discontinue et de mesurer son importance.

Utiliser les équations d'Euler pour chaque type de particules peut s'avérer utile. On pourra de ce fait étudier des collisions coulombiennes, des décharges qui ne sont plus forcément isothermes, des fréquence de collisions qui ne sont plus constantes. Il faudra, en particulier, étudier en détail le terme raide introduit par la force de Lorentz.





# Bibliographie

- [1] R.D. Leach,\* Author and M.B. Alexander, Editor, *Failures and Anomalies Attributed to Spacecraft Charging*, NASA RP-1375 , Electromagnetics and Environments Branch, Systems Analysis and Integration Laboratory, Science and Engineering Directorate, NASA Marshall Space Flight Center, AL 358 12 and \*Computer Sciences Corporation, Huntsville, AL., August 1995, pp. 30.
- [2] W. W. Vaughan\*, K. O. Niehuss and M. B. Alexander, *Spacecraft Environments Interactions: Solar Activity and Effects on Spacecraft*, NASA RP-1396 , Electromagnetics and Aerospace Environments Branch, Systems Analysis and Integration Laboratory, Science and Engineering Directorate. NASA Marshall Space Flight Center, AL 35812 and \*University of Alabama in Huntsville, Huntsville, Alabama, November 1996, pp. 32.
- [3] Boeuf J.-P. and Merad A., *Fluid and Hybrid Models of Non-Equilibrium Discharges*, Plasma Processing of Semiconductors, NATO ASI Series E: Applied Sciences - Vol. 336, Ed. P.F. Williams, (Kluwer Academic Publisher 1997) pp. 291-320.
- [4] C.K., Birdsall, *Plasma Processing of semiconductors* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- [5] Zahraoui A., *Self-consistent determination of the electric field in a stationary low-pressure glow discharge using microscopic treatment for the motion of electrons*, CPAT, Toulouse, France, Juillet 1997.
- [6] Cercignani C., The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, 1988.
- [7] Golse F., *Interfaces milieu cinétique/milieu fluide*, Quatrième école d'été du GdR SPARCH, Oléron, France, 1997.
- [8] Golse F., *The Boltzmann equation and its hydrodynamic limits*, Ecole thématique: Les modèles cinétiques non linéaires et leurs limites fluides, Besançon, Avril 1997.
- [9] Gisclon M., Etude des conditions aux limites pour les systèmes strictement hyperboliques, via l'approximation parabolique, Thèse de l'Université Claude Bernard, France, 1994.

- [10] Degond P., Lucquin B., *Transport coefficient of plasmas and disparate mass binary gases*, Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6, No. R95014, 1995.
- [11] Lucquin B., *Dérivation de modèles fluides pour les plasmas*, Workshop 'Décharges et propulsion ionique', Nice, France, 1997.
- [12] A. Majda, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, Springer-Verlag, 1984.
- [13] Larrouturou B., Modélisation Mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur, Cours de Majeure de l'Ecole Polytechnique, Ecole Polytechnique 1995.
- [14] Raviart P.A., Introduction à la résolution des modèles fluides en physique des plasmas, Ecole d'été du GdR SPARCH 'Méthodes numériques en transport de particules chargées', Oléron, France 1993.
- [15] Krall N., Trivelpiece A., Principles of plasma physics, San Francisco press, 1986.
- [16] Jackson J. D., Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons 1974.
- [17] Bayle P., Vacquie J., Bayle M., Cathode region of a transitory discharge in  $CO_2$ . Theory of the cathode region, Laboratoire de Génie électrique, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France, The American Physical Society 1986.
- [18] Chen F., Plasma Physics and controlled fusion, Second Edition 1984.
- [19] Raizer Y., Gas discharge physics, Springer-Verlag 1991.
- [20] Seidman T., Troianiello G, *Time-dependent solutions of a nonlinear system arising in semiconductor theory*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 9, No 11, pp1137-1157, 1985.
- [21] Seidman T., Troianiello G, *Time-dependent solutions of a nonlinear system arising in semiconductor theory-II. Boundedness and periodicity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 10, No 5, pp491-502, 1986.
- [22] Yosida K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [23] Lions J.L., Quelques méthodes de résolution des Problèmes aux limites non linéaires, Dunod Paris 1969.
- [24] Li Ta-tsien and Yu Wen-ci, Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems, Fudan University Shangai. People Republic of China.
- [25] Gilbarg D., Trudinger N.S., Elliptic partial differential equations of second order,

- Springer-Verlag 1983.
- [26] Brezis H., Analyse fonctionnelle, Masson 1987.
  - [27] Dautray R., Lions JL., Analyse mathématique et calcul numérique, Tome 8 pages 570, Masson 1988.
  - [28] Lions JL., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes 2 Tomes, Dunod 1968.
  - [29] Grisvard P., Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Msch. Anal., 25,1, 1967.
  - [30] Moulay M., Régularité de la solution d'un problème quasi-elliptique, Thèse de l'Université de Nice 1976.
  - [31] Adams R., Sobolev Spaces, Academic Press 1975.
  - [32] Marque J.P., *Phenomenology of e-irradiated polymer breakdown*, Vacuum, 39 n°5, P443-452 (1989).
  - [33] Marque J.P., *Décharges sous vide et environnement spatial*, Workshop SPARCH-PPSO, Avril 97, Nice.
  - [34] Gartland E., *On the uniform convergence of the Scharfetter-Gummel discretization in one dimension*, SIAM J., Numer. Anal., Vol 30, No. 3, pp 749-758, June 1993.
  - [35] Jerome J., Kerkhoven T., *A finite element approximation theory for the drift diffusion semiconductor model*, SIAM J., Numer. Anal., Vol 28, No. 2, pp 403-422, April 1991.
  - [36] Roe P.L., *Approximate Riemann solvers, parameters vectors, ans differences schemes*, Journal of Computational Physics, Vol 4, pp 357-371, (1981).
  - [37] Depeyre S., Etude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
  - [38] Glinsky N., Simulation numérique d'écoulements hypersoniques réactifs hors-équilibre chimique, Thèse de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, 1990.
  - [39] Sharfetter D.I., Gummel K.G., *Large-signal analysis of a silicon Read diode oscillator*, IEEE Trans. El. Devices, vol ED-16, 1969, 64-77.
  - [40] Dautray R., Lions JL., Analyse mathématique et calcul numérique Tome 9, Masson 1988.
  - [41] Dhatt G., Touzot G., Presentation de la methode des elements finis (Une), Paris, Maloine S.A. ed, 1984
  - [42] Godlewski E., Raviart P-A., Hyperbolic systems of conservation laws, Ellipses, 1990.

- [43] Denavit J., *Collisionless plasma expansion into a vacuum*, Phys. Fluids **22**(7), pp 1384-1392, July 1979.
- [44] Mora P., Pellat R., *Self-similar expansion of a plasma into a vacuum*, Phys. Fluids **22**(12), pp 2300-2304, December 1979.
- [45] Spitzer L., *Diffuse Matter in Space*, p 92, Wiley, New-York, 1968.
- [46] Murat, F., *Introduction aux équations aux dérivées partielles non linéaires*, Cours de DEA, Université de Pierre et Marie Curie

# Cinquième partie

## Annexes



## Annexe A

# Le nombre minimal caractéristique

Nous donnons ici la valeur du nombre minimal caractéristique  $\theta$  dans le cas d'une matrice  $2 \times 2$  (voir [24]). Si

$$H := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors

$$\theta = |H|_{min} = \frac{|a| + |b|}{2} + \sqrt{\left(\frac{|a| - |b|}{2}\right)^2 + |bc|}.$$





## Annexe B

### La fonction d'ionisation

Here is a ionization function which satisfies all the hypothesis made along Chapter 4. Let

$$\nu(t,x,\sigma,E) = E(t,x) + \int_0^t \int_0^s \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \sigma(\tau,\xi) d\tau d\xi dx_2 dx_1 dt_1. \quad (\text{B.1})$$

Denote by

$$\bar{\nu} := \nu(t,x,\sigma^1,E^1) - \nu(t,x,\sigma^2,E^2),$$

and

$$\bar{\sigma} := \sigma^1 - \sigma^2, \quad \bar{E} := E^1 - E^2.$$

Then,

- For any  $\sigma^1, E^1, \sigma^2, E^2$  bounded,  $\bar{\nu}$  remains bounded.
- It is clear that

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}(t,x)| &\leq |\bar{E}(t,x)| + C\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \\ |\bar{\nu}_x(t,x)| &\leq |\bar{E}_x(t,x)| + C\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \\ |\bar{\nu}_{xx}(t,x)| &\leq |\bar{E}_{xx}(t,x)| + C\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \end{aligned}$$

- Moreover,

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_t(t,x)| &\leq |\bar{E}_t(t,x)| + C\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \\ |\bar{\nu}_{tt}(t,x)| &\leq |\bar{E}_{tt}(t,x)| + C\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \end{aligned}$$

- Since for any function  $f \in \mathcal{C}^0(a,b)$ ,

$$\left| \int_0^x f(s)ds - \int_0^y f(s)ds \right| = \left| \int_x^y f(s)ds \right| \leq \sup_s |f(s)| |x - y|,$$

it holds that

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}(t,x) - \bar{\nu}(t,y)| &\leq |\bar{E}(t,x) - \bar{E}(t,y)| + |x - y|\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \\ |\partial_x \bar{\nu}(t,x) - \partial_x \bar{\nu}(t,y)| &\leq |\bar{E}_x(t,x) - \bar{E}_x(t,y)| + |x - y|\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}, \\ |\partial_{xx} \bar{\nu}(t,x) - \partial_{xx} \bar{\nu}(t,y)| &\leq |\bar{E}_{xx}(t,x) - \bar{E}_{xx}(t,y)| + |x - y|\|\bar{\sigma}\|_{\mathcal{C}^0}. \end{aligned}$$

In a similar way, we can show that the function  $\nu$  satisfies the inequalities of Section 4.4.

- 1  $\nu_{\rho,E}$  is bounded on  $Q_T$ .
- 2 The following inequalities hold,

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}(t,x)| &\leq \int_0^t C \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}(t,x)|, \\ |\bar{\nu}_x(t,x)| &\leq \int_0^t C \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}_x(s,x)|, \\ |\bar{\nu}_{xx}(t,x)| &\leq \int_0^t C \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}_{xx}(t,x)|. \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_t(t,x)| &\leq \int_0^t C \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}_t(t,x)|, \\ |\bar{\nu}_{tt}(t,x)| &\leq C \sup_x |\bar{\sigma}(t,x)| + |\bar{E}_{tt}(t,x)|. \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}(t,x) - \bar{\nu}(t,y)| &\leq C|x-y| \int_0^t \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}(t,x) - \bar{E}(t,y)|, \\ |\partial_x \bar{\nu}(t,x) - \partial_x \bar{\nu}(t,y)| &\leq C|x-y| \int_0^t \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}_x(t,x) - \bar{E}_x(t,y)|, \\ |\partial_{xx} \bar{\nu}(t,x) - \partial_{xx} \bar{\nu}(t,y)| &\leq C|x-y| \int_0^t \sup_x |\bar{\sigma}(s,x)| ds + |\bar{E}_{xx}(t,x) - \bar{E}_{xx}(t,y)|. \end{aligned}$$

# Annexe C

## Les espaces $H^{r,s}$

### C.1 Definitions and properties

We recall some definitions and properties (see [28]).

#### Definitions

- Interpolation of  $H^{s_1}(\Omega)$  and  $H^{s_2}(\Omega)$ . For all  $0 \leq \theta \leq 1$ , let

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega).$$

- For the nonnegative real numbers  $r, s$ , let the non-homogenous space  $H^{r,s}([0, T[ \times \Omega)$  be defined by

$$H^{r,s}(0, T; \Omega) := L^2(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega)).$$

- Let  $\mathcal{C}^0(0, T, E)$  be the space of continuous functions defined on  $[0, T]$  with values in  $E$ , where  $E$  is an Hilbert space.

Denote by  $u^{(j)}$  the  $j$ -th time derivative of  $u$ , i.e.

$$u^{(j)} := \frac{\partial^j u}{\partial t^j}.$$

#### Properties

Property 1. For  $j \in [1, s - 1]$ , the map

$$\begin{aligned} H^{r,s}(0, T; \Omega) &\longrightarrow L^2(0, T, [H^r, L^2]_{\frac{j}{s}}) \\ u &\longmapsto u^{(j)}, \end{aligned}$$

is linear and continuous.

Property 2. For  $j \in [1, s - 1]$ , the map

$$\begin{aligned} H^{r,s}(0, T; \Omega) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([0, T]; [H^r, L^2]_{\frac{j+\frac{1}{2}}{s}}) \\ u &\longmapsto u^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

is linear and continuous.

Property 3. If  $u \in H^{r,s}(0, T; \Omega)$  then  $\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} u \in H^{\mu, \nu}$  with

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\nu}{s} = 1 - \left( \frac{j}{r} + \frac{k}{s} \right)$$

Property 4. (Trace theorem) For  $u \in H^{r,s}(0, T; \Omega)$ , with  $r > \frac{1}{2}$ ,  $s \geq 0$ , one can define

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} := (\partial_x^j u(t, 0), \partial_x^j u(t, a)) \in H^{\beta_j}([0, T]) \times H^{\beta_j}([0, T]), \quad j < r - \frac{1}{2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (\text{C.2})$$

where  $\beta_j$  is defined by

$$\frac{\beta_j}{s} = \frac{r - j - \frac{1}{2}}{r}, \quad \beta_j = 0 \text{ if } s = 0.$$

Property 5. Let  $m$  be an integer such that  $m > \frac{1}{2}$ ,  $k := [m - \frac{1}{2}]$ , where  $[x]$  denotes the integer part of  $x$ , and  $\theta := m - \frac{1}{2} - k$ . Then, for any  $u \in H^m(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq C \|u\|_{H^m(\Omega)} |x - y| \text{ if } k > 0, \\ |u(x) - u(y)| &\leq C \|u\|_{H^m(\Omega)} |x - y|^\theta \text{ if } k = 0. \end{aligned}$$

Property 6. Let two functions  $w, z$  be such that, for some  $s > \frac{1}{2}$

$$w, z \in H^s(\Omega).$$

Then

$$(wz) \in H^s(\Omega),$$

i.e.  $H^s$  is a Banach algebra.

Proof: For a proof of this Property 6, we refer to [31].

Notation. For any function  $G$  defined on  $\Gamma$ , denote by

$$G|_\Gamma := (G(0), G(a)).$$

For any function  $G$  defined on  $\Sigma(T)$  we denote by

$$G|_{\Sigma} := (G(t,0),G(t,a)), t \in (0,T).$$

Let us define indexes  $m$  and boundary operators  $B$  for the electrons and ions respectively. For the electrons,

$$m_e = 1, B_e u = u_x|_{\Sigma},$$

whereas for the ions,

$$m_i = 0, B_i u = u|_{\Sigma}.$$

## C.2 A few theorems about the heat equation

**Theorem C.2.1** *Let  $f \in L^2(0,T;\Omega), g_0 \in H^{\frac{3}{4}-\frac{m_0}{2}}(\Sigma(T)), u_0 \in H^1(\Omega)$ . Then, under the Compatibility relations ( $\mathcal{CR}_0$ )*

$$g_0(0,x) = B u_0(x), x \in \Gamma,$$

there is a unique solution  $u \in H^{2,1}(0,T;\Omega)$  to

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, \text{ in } (0,T) \times \Omega, \\ Bu &= g_0, \text{ on } \Sigma(T), \\ u(0,x) &= u_0(x), \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

For a proof of Theorem C.2.1, we refer to [28]. Let  $r,s$  be two real numbers such that  $r > \frac{1}{2}, s \geq 0$ .

**Definition.** Let  $p_k$  be the real number defined by  $p_k = \frac{r}{s}(s - k - \frac{1}{2})$ .

Let us recall the two following extension theorem (see [29, 30]).

**Theorem C.2.2** *Let  $r,s$  be such that*

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) > 0,$$

and  $f_0(x), \dots, f_K(x), h_1(t,x)|_{\Sigma(T)}$  be given, with  $f_k \in H^{p_k}(\Omega), h_1 \in H^{\beta_1}(\text{Sigma}(T))$ , and

$$\partial_t^k h_1(0,x)|_{\Gamma} = \partial_{\nu} f_k(0,x)|_{\Gamma}$$

for all  $k \in [0,K]$  such that

$$\frac{1}{r} + \frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right).$$

Then there is  $w \in H^{r,s}(0,T;\Omega)$ , such that

$$\partial_t^k w(0,x) = f_k(x) \text{ in } \Omega, \partial_x w(t,x)|_{\Gamma} = h_1(x) \text{ in } \Gamma.$$

**Theorem C.2.3** *Let  $r, s$  be such that*

$$1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) > 0,$$

*and  $f_0(x), \dots, f_K(x), h_0(t, x)|_{\Sigma(T)}$  be given, with  $f_k \in H^{p_k}(\Omega), h_0 \in H^{\beta_0}(\Sigma(T))$ , and*

$$\partial_t^k h_0(0, x)|_{\Gamma} = f_k(0, x)|_{\Gamma}$$

*for all  $k \in [0, K]$  such that*

$$\frac{k}{s} < 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right).$$

*Then there is  $w \in H^{r,s}(0, T; \Omega)$  such that*

$$\partial_t^k w(0, x) = f_k(x) \text{ in } \Omega, \quad w(t, x)|_{\Gamma} = h_0(x) \text{ in } \Gamma.$$

Let us recall the following theorem (see [28]), expressing the regularity of the solution to the heat equation with respect to the regularities of the source term and the boundary conditions.

**Theorem C.2.4** *Let  $r \in \mathbb{R}$  be such that*

$$2r \neq \text{integer} + \frac{1}{2} \text{ and } r \neq \text{integer} + \frac{1}{2}.$$

*Let  $(m_0, B)$  be either  $(m_e, B_e)$  or  $(m_i, B_i)$ . Let  $f, g_0, u_0$  be given such that*

$$f \in H^{2r,r}(0, T; \Omega), \quad g_0 \in H^{\frac{2r-m_0+\frac{3}{2}}{2}}(\Sigma(T)), \quad u_0 \in H^{2r+1}(\Omega).$$

*Assume that there exists  $w \in H^{2r+2, r+1}(P)$ , such that*

$$\begin{aligned} Bw|_{\Sigma} &= g_0|_{\Sigma(T)}, \\ w(0, \cdot) &= u_0, \\ \partial_t^p (f - (w_{xx} + w_t))(0, x) &= 0 \quad \text{if } p < r - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*Then, there exists a unique solution  $u \in H^{2r+2, r+1}(P(T))$  to*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f, \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ Bu &= g_0, \quad \text{on } \Sigma(T), \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

*Moreover, the map*

$$\{f, g_0, u_0\} \longrightarrow u$$

*is continuous from*

$$H^{2r,r}(P(T)) \times H^{\frac{2r-m_0+\frac{3}{2}}{2}}(\Sigma(T)) \times H^{2r+1}(\Omega)$$

*into*

$$H^{2r+2, r+1}(P(T)).$$

## Annexe D

### Quelques théorèmes

Nous rappelons ici quelques théorèmes:

**Théorème de Schauder [46] D.1** *Soit  $B$  un espace de Banach et  $C$  une partie convexe compacte non vide et  $T : C \rightarrow C$  continue. Alors  $T$  admet un point fixe dans  $C$ .*

**Variante du théorème de Schauder [46] D.2** *Soit  $B$  un espace de Banach et  $C$  une partie convexe fermée non vide de  $B$  et  $T : C \rightarrow C$  continue, telle que  $T(C)$  soit relativement compacte. Alors  $T$  admet un point fixe dans  $C$ .*

**Théorème d'Ascoli [26] D.3** *Soit  $K$  un espace métrique compact et soit  $\mathcal{H}$  un sous ensemble borné de  $C(K)$ . On suppose que  $\mathcal{H}$  est uniformément équicontinu. Alors  $\mathcal{H}$  est relativement compact dans  $C(K)$ .*

**Lemme d'Aubin [23] D.4** *Soit  $X_0, X, X_1$ , avec  $X_0$  et  $X_1$  espaces réflexifs, tels que l'injection de  $X_0$  dans  $X$  soit compact, et l'injection de  $X$  dans  $X_1$  soit continue. Soit  $1 < p_0 < \infty, 1 < p_1 < \infty$ . Alors l'injection de*

$$\mathcal{W} := \{f \in L^{p_0}(0, T, X_0), \partial_t f \in L^{p_1}(0, T, X_1)\}$$

dans

$$L^{p_0}(0, T, X)$$

est compacte.