Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques

Cécile Ouvrier-Buffet

Université Joseph Fourier – Grenoble 1

THESE pour obtenir le grade de docteur de l'université Joseph Fourier
Spécialité didactique des mathématiques

Cécile Ouvrier-Buffet

Construction de définitions / construction de concept :
vers une situation fondamentale
pour la construction de définitions en mathématiques

Etude épistémologique et didactique de la définition.
Etude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université.

Soutenue publiquement le 18 décembre 2003

Jury

Nicolas BALACHEFF - DR CNRS - Grenoble (président)

Pierre DUCHET - DR CNRS - Paris 6 (rapporteur)

Denise GRENIER - MCF- UJF - Grenoble (co-directrice)

Sylvette MAURY - Professeur en Sciences de l'éducation - Paris 5 Sorbonne (examinateur)

Alain MERCIER - Professeur en Sciences de l'éducation - INRP (rapporteur)

Charles PAYAN - DR CNRS - Grenoble (co-directeur)

Thèse préparée au sein de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz (IMAG) CNRS/ UJF/ INPG

A la mémoire de mes grands-parents maternels,
Jane et Marius Collet

Remerciements

Ce travail, réalisé depuis maintenant plus de trois ans, a été pour moi une source d'enrichissements, tant sur le plan intellectuel que sur le plan personnel et humain.

A ce titre, mes remerciements iront à :

- Madame Denise Grenier et Monsieur Charles Payan, mes directeurs de thèse, envers lesquels il serait tout aussi inadéquat d'employer les termes de « reconnaissance » et de « gratitude » : je préfère n'en employer aucun … Je leur dois beaucoup : c'est sous leur direction, à la fois souple et stimulante, que j'ai appris le métier de chercheur. Le soutien amical qu'ils m'ont témoigné m'a permis de mener à bien les travaux présentés dans cette thèse. J'espère sincèrement que cette collaboration pourra se poursuivre dans les années futures.

- Membres de mon jury, à qui j'adresse la citation de TS Elliot marquant l'introduction : cette thèse n'est que le commencement …

   Merci à Madame Sylvette Maury d'avoir accepté de participer à ce jury,
   Merci à Messieurs Pierre Duchet et Alain Mercier d'avoir rapporté sur ce travail,
   Merci à Monsieur Nicolas Balacheff d'avoir présidé le jury de la soutenance de cette thèse.

Vos questions et remarques me sont aujourd'hui profitables dans la poursuite de la difficile quête de LA définition … !

Mes remerciements s'adressent également aux membres de l'équipe CNAM, au sein de laquelle j'ai effectué cette recherche. Je remercie en particulier Mireille Dupraz, pour s'être prêtée aux relectures et pour sa gentillesse, ainsi que Sylvain Gravier, qui, en tant que responsable d'équipe, m'a permis de faire connaître mes travaux dans les écoles d'été françaises et colloques internationaux.

Je tiens à remercier très sincèrement les membres du laboratoire Leibniz.
Merci aussi aux étudiants de Deug ayant participé aux expérimentations.

Je remercie également parents et amis, dont le soutien constant m'a été précieux : ils savent combien cette recherche me tient à cœur et se reconnaîtront dans ces quelques mots, j'en suis certaine.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE I – PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE, CADRE THEORIQUE, METHODOLOGIE **7**

I- Problématique de recherche 7
II- Cadre théorique et méthodologie 8

CHAPITRE II – ETUDE EPISTEMOLOGIQUE DE LA DEFINITION **15**

I- Acceptions courante et mathématique des termes définir et définition 17
I-1. Acception courante *17*
I-2. Acception mathématique *19*
II- Classifications de définitions et définitions pour classifier 24
II-1. Différents types de définition *24*
II-2. Classifier relève-t-il d'un processus de définition ? *41*
III- Processus de construction de définitions dans la littérature 45
III-1. Enseignements extraits de l'étude des différents types de définitions *45*
III-2. Existe-t-il des conceptions significatives permettant d'étudier des processus de construction de définitions ? *47*
III-3. Choix d'un outil théorique pour modéliser ces conceptions *48*
IV- Présentation de trois conceptions sur la définition 49
IV-1. Objectifs de ces modélisations via cK¢ *49*
IV-2. Conception aristotélicienne *50*
IV-3. Conception poppérienne *52*
IV-4. Conception lakatosienne *57*
V- Typologie de problèmes 67
VI- Synthèse : construction de définitions et conceptions 67

CHAPITRE III – TRAVAUX DIDACTIQUES EXISTANTS SUR LA DEFINITION **71**

I- Ball & Bass : les définitions à l'école élémentaire 72
II- T.J.Fletcher : une ouverture possible sur des SCD 74
III- R. Borasi : des "situations de construction de définition powerfull" 78
IV- M. De Villiers : engager les élèves dans un processus de définition 79
V- Une situation de Math.en.Jeans : les carrés bossus 81

CHAPITRE IV – ETUDE ECOLOGIQUE DE LA DEFINITION **83**

I –Analyse de programmes et de manuels de l'enseignement secondaire 83
I-1. Etude de deux collections de manuels de Collège *83*
I-2. Manuels de lycée *105*
I-3. Une brochure destinée aux unités de méthodologie en DEUG *113*
II- Conceptions d'élèves et d'enseignants sur les définitions en mathématiques . . . 114
II-1. Conceptions d'élèves *114*
II-2. Conceptions d'enseignants – une étude étrangère *115*
II-3. Conceptions d'enseignants – en France *117*

CHAPITRE V – INTRODUCTION AUX SITUATIONS EXPERIMENTALES **149**

CHAPITRE VI - ARBRE **153**

I- Arbre" : le concept mathématique et l'objet d'enseignement 153
I-1. Le concept mathématique *153*
I-2 Eléments d'étude écologique et rapports d'enseignants à l'objet mathématique *156*
I-3. Situations de Construction de Définitions du concept d'arbre *162*
II- La situation expérimentale 164
II-1. Présentation générale de la SCD *164*
II-2. Description des trois phases de la situation *164*
II-3. Analyse a priori de la situation *166*
III- Analyse de l'expérimentation 173
III-1. Le public et les questions pour notre analyse *173*
III-2. Premiers résultats globaux *174*
III-3. Analyse des productions *174*
III-4. Synthèse sur les processus de construction de définition *189*
III-5. Conceptions des étudiants sur la « définition » *191*
III-6. Synthèse des résultats *193*

CHAPITRE VII – DROITE DISCRETE **197**

I – Le concept mathématique “droite discrète”. 197

I-1. La géométrie discrète : contexte général, historique succinct *197*
I-2. L'objet géométrique “droite discrète” *199*
I-3. Sur les définitions de droite discrète *202*
I-4. Types de SCD avec l'objet « droite discrète » *218*

II- Deux situations expérimentales : problèmes posés 219

II-1. Choix des situations *219*
II-2. Situation sans demande explicite de définition : les triangles discrets – problématique “axiomatique” : problème posé *220*
II-3. Situation avec demande explicite de définition – problématique “régularité” : problème posé *222*
II-4. Types de tâches en jeu dans ces deux situations *223*

III- Analyses mathématiques et analyses a priori des tâches t_i 223

III-1. Tâche t_1 : construction de triangles discrets *223*
III-2. Présentation des choix effectués pour les exemples et contre-exemples (non étiquetés comme tels) *225*
III-3. Analyse mathématique de la tâche : reconnaissance de droites discrètes *226*
III-4. Demande explicite ou non de définition : analyse a priori des tâches t_2 et t_3 *230*

IV- Analyse des expérimentations 239

IV-1. Analyse des productions, résultats - Triangles discrets *239*
IV-2. Analyse des productions, résultats - Reconnaissance sans demande explicite de définition *248*
IV-3. Analyse des productions, résultats – Reconnaissance avec demande explicite de définition *253*

V- Synthèse – résultats sur les deux situations expérimentales 264

CHAPITRE VIII – DEPLACEMENTS SUR UNE GRILLE **267**

I- Etude mathématique 267

I-1. Problème général : étude des déplacements sur une grille discrète ($\mathbb{Z}^2$) *267*
I-2. Etude mathématique *267*

II- Mise en relation avec les concepts d'algèbre linéaire 274

II-1. Les concepts de “dépendance” et “générateur” en mathématiques *274*
II-2. Résultats de travaux didactiques sur l'Algèbre Linéaire *275*
II-3. Synthèse des travaux et notre proposition *278*

III – La situation “déplacements sur une grille” 279

III-1. Une expérimentation de Math.en.Jeans *279*
III-2. Les problèmes mathématiques de notre situation expérimentale *281*
III-3. Analyse mathématique *282*
III-4. Analyse a priori de la situation *285*

IV- Analyse et résultats de l'expérimentation 289

IV-1. Méthodologie pour l'analyse *289*
IV-2. Dévolution de la situation et référence à l'algèbre linéaire *290*
IV-3. Synthèse du travail de chacun des groupes *292*
IV-4. Une zéro-définition de la notion de “chemins différents” *294*
IV-5. Une définition-en-acte du concept de “générateur” *296*
IV-6. Résultats *298*

CONCLUSION – RESULTATS ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE **301**
BIBLIOGRAPHIE **309**

Introduction

"What we call the beginning is often the end. And to make an end is to make a beginning. The end is where we start from." (TS Eliot, *Burnt Norton*)

En soi, le terme "définition" ne semble pas poser de difficulté de compréhension. Tout un chacun utilise un dictionnaire, où les définitions lexicales décrivent la signification de termes déjà en usage et permettre de répondre à la question : qu'est-ce que ce mot signifie ?
Pourtant, le thème "définition" a été l'objet de nombreuses discussions philosophiques et scientifiques depuis plus de deux mille ans. Ce n'est certainement pas un hasard qu'il soit si délicat de répondre sans détour à la question : qu'est-ce qu'une définition en mathématiques ? même si « *ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, Et les mots pour le dire arrivent aisément ... »* (N. Boileau).

Puisque nous n'avons de réponse "toute prête" à cette question, prenons quelques exemples. En général, les définitions, telles qu'elles sont données au commencement d'un exposé de type déductiviste, peuvent paraître transparentes. Et pourtant …
Nous allons tout d'abord relater un débat sur la définition du trapèze paru dans trois numéros du bulletin de l'APMEP (n°419, 422, 426) entre 1998 et 2000. Nous donnerons ensuite l'avis de J.P. Kahane, chercheur en mathématiques, sur la place des définitions – à savoir une définition comme commencement et une définition comme aboutissement. Nous rapporterons enfin les suggestions de H. Freudenthal pour la construction de définitions en géométrie.

Considérons donc le cas de la géométrie euclidienne. Les définitions utilisées en géométrie sont mêmes parfois présentées comme *absolues, immuables et inflexibles* (Liard-1973-p.91).
Pourtant, les définitions de « trapèze » par exemple sont variables d'un manuel à un autre en France [1]. Des contradictions relevées dans différents manuels de collège ont amené M-J. Perrin-Glorian (1998) à poser le problème suivant : comment définir "trapèze isocèle" ?
Rappelons tout d'abord quelques particularités des définitions de "trapèze" en usage dans la plupart des manuels des années 80 : quelques définitions excluent d'entrée de jeu le cas du trapèze croisé, car il est d'usage de ne considérer que des quadrilatères convexes. En général, un trapèze est défini comme un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles. Cette définition doit sembler problématique aux auteurs de manuels car ceux-ci s'attardent sur le

[1] Le mot trapèze n'a pas la même acception aux Etats-Unis et en Europe.

point suivant : s'agit-il d'une paire de côtés exactement ? Ainsi, certains[2] précisent que deux côtés sont parallèles, les deux autres ne l'étant pas. M-J Perrin-Glorian, assurant que « *les professeurs des écoles ont besoin de définitions sûres et cohérentes* », considère comme raisonnable qu'un parallélogramme soit un trapèze particulier et ajoute que « *si l'on voulait exclure les parallélogrammes, pour démontrer qu'un quadrilatère est un trapèze, il faudrait non seulement montrer qu'il a deux côtés opposés parallèles, mais aussi qu'il a deux côtés opposés non parallèles. <u>Ceci allongerait inutilement les démonstrations</u>[3] ».* Elle remarque par ailleurs une contradiction relevée dans certains manuels[4] au sujet de la définition du trapèze isocèle : un trapèze isocèle y est défini comme "trapèze qui a deux côtés opposés de même longueur". Malgré cette définition, l'existence d'un axe de symétrie est donnée dans les propriétés des trapèzes isocèles. Or, d'après cette définition, un losange est un trapèze isocèle. Il s'ensuit une discussion sur la ou les propriétés permettant de définir un trapèze isocèle : le choix de M-J. Perrin-Glorian s'effectue relativement à des propositions de définition dites *pas intéressantes,* ou *faciles à utiliser dans une démonstration*[5] , ceci dans un contexte classificatoire : dans quels quadrilatères sont inclus les trapèzes isocèles ? La définition finalement retenue est la suivante : « *un trapèze isocèle est un trapèze dont les côtés parallèles ont même médiatrice* ».
Cette discussion a été reprise quelques mois plus tard par N. Gérald (bulletin APMEP n°422), celle-ci s'appuyant sur la classification des quadrilatères de l'Atlas des mathématiques (F.Reinhardt – H.Soeder). Gérald propose une autre définition de la même classe d'objets (deux côtés parallèles et les diagonales égales), qu'elle présente comme ayant « bien des qualités ! ».
Ces échanges ont déclenché une réaction de S. Turnau (bulletin APMEP n°426) qui nous intéresse particulièrement. Il déclare que « *il est beaucoup plus important pour les élèves, comme compétence mathématique, de bien comprendre le rôle d'une définition que de connaître une définition particulière (…) le cas du trapèze isocèle est une bonne opportunité d'étudier ce qu'est une définition mathématique* ». Cette réflexion suggère peut-être une activité de re-construction de définitions d'objets géométriques dont « on sait bien ce que c'est », tout en regrettant que *« une telle approche est contraire à la notion intuitive d'enseignement mathématique, c'est-à-dire à l'attitude de la plupart des professeurs ».*

Le discours de ces trois auteurs est sous-tendu par leurs conceptions sur les définitions en mathématiques. Reprenons les arguments de M-J. Perrin et de N. Gérald pour tenter d'approcher ces conceptions : les définitions doivent être *sûres* et *cohérentes* quand elles sont destinées à un usage didactique. Dans le domaine de la géométrie, les auteurs étudient une définition particulière (trapèze et trapèze isocèle) dans le secteur de la classification des

[2] Collection M.Monge – 6ème – 1981.
[3] C'est nous qui soulignons.
[4] Bareil-Zehren, Hachette – 6ème – 1980.
[5] En fait, la question ne porte pas sur l'intérêt ou la facilité : ces définitions définissent des classes d'objets différentes.

quadrilatères : de leur analyse, il ressort une volonté de conserver des propriétés dites “intéressantes” (axe de symétrie, médiatrice) et d’être en conformité avec une hiérarchie “acceptable” dans laquelle la dérivation soit possible (c’est-à-dire : l’enchaînement des caractères essentiels est tel que, l’un d’eux étant posé, tous les autres en dérivent). De plus, il s’agit de choisir des définitions permettant d’abréger les démonstrations. Ainsi, la définition est ici un jalon théorique permettant l’exposé d’un savoir dans une présentation déductiviste, où la définition tient un double rôle (présentation de nouveaux concepts et opérationnalité dans une démonstration), mais aussi un objet de la transposition didactique.
S. Turnau a, lui, une autre conception de la place et de l’usage d’une définition : la compréhension du rôle d’une définition est une *compétence mathématique* et elle est abordable par des élèves.

Ainsi, ce qu’est une définition en mathématiques ne semble pas clair, pas plus que “définir” en mathématiques.
Ces constats nous ont amenés à questionner ce qu’est une définition en mathématiques, dans le savoir savant, mais aussi ce qu’il en advient lors de la transposition didactique.
A en croire R. Robinson, auteur en 1954, d’un ouvrage philosophico-mathématique intitulé “*Definition*”, pour comprendre “la définition”, il faut tout d’abord comprendre ce qu’est “définir”.

Definition is indefinable.
This may be defended on the ground that “you cannot define anything until you already understand defining” (Robinson - 1954)

J.P. Kahane (1999) nous met en garde contre les choix faits dans la transposition didactique usuelle, pour les définitions :
« Le premier piège est de croire facile à acquérir ce qui est simple à énoncer (…). Un second piège est de trop se fier aux définitions. Les définitions résultent d’un choix » (Kahane – 1999 - p.12s).
Il souligne de plus que les définitions mathématiques sont un véritable *élixir de pensée*, qu’elles sont **l’aboutissement** de toute une construction de concepts, parfois difficile et historiquement longue. Dans cette construction historique des concepts mathématiques, les définitions provisoires sont légion : citons comme exemple la notion d’infiniment petit chez Leibniz, qui ne relevait pas à son époque d’une définition formelle mais plutôt d’images intuitives et de propriétés non encore finalisées. J.P. Kahane évoque l’essence de la notion de série qu’il définit comme « *somme infinie à laquelle on s’efforce de donner une valeur* » (ibid.p.13) pour montrer que, selon le point de vue adopté sur cette *définition*, il y a « *matière à plusieurs définitions mathématiques* » (ibid.).

Il y a donc une distance entre les définitions formelles, telles qu'elles sont présentées dans un exposé de savoirs acquis et la compréhension des concepts mathématiques qu'elles permettent. En effet, la présentation des définitions au début de tout exposé déductiviste nous prive de la problématique qui leur a donné naissance, mais aussi, de manière plus générale, de leur processus de construction. Même si définir procède de choix, l'activité du chercheur en mathématiques souligne, dans la construction de concepts, l'importance de la construction de définition. Ces définitions provisoires marquent des jalons dans l'élaboration d'une nouvelle connaissance.

Une question se pose alors : est-il possible de mettre en place un apprentissage de la construction de définition, au même titre que l'apprentissage de la preuve (Grenier-Payan-1998) ?

H. Freudenthal (1973 - pp.125-149s-416s) nous apporte quelques éléments de réponse. Il souligne que les mathématiques expérimentales, qu'il définit comme des mathématiques de libre découverte, sont plus importantes que ce qui est contenu dans des axiomes et des définitions formelles imposés par un enseignant ou un auteur de manuels. Selon lui, la donnée d'une définition par un professeur dégrade l'image des mathématiques qu'a l'élève, car elles apparaissent alors comme gouvernées par des règles arbitraires. Freudenthal critique quelque peu le style déductiviste où l'on commence par des définitions : en mathématiques, une définition ne permet pas seulement d'expliquer le sens d'un mot, elle s'inscrit dans une chaîne déductive ; mais alors, comment comprendre cela si on ne connaît pas la chaîne déductive dans laquelle la définition s'inscrit ? Freudenthal avance ainsi qu'il est peu probable qu'un élève comprenne le sens et le but d'une définition formelle, et qu'il ne faut donc pas le priver de l'opportunité d'inventer cette définition : il suggère une réinvention de la géométrie par les élèves en montrant des objets géométriques. La description de Freudenthal de « ce qui se passerait alors » s'appuie sur le fait qu'il peut y avoir une découverte visuelle des propriétés des objets géométriques. Ainsi, la découverte par l'élève de différentes propriétés communes aux parallélogrammes par exemple, alimentera une étude des équivalences entre ces propriétés. Il fait l'hypothèse que différents élèves choisiront des propriétés fondamentales différentes pour un même objet, mais que de toute façon, par le fait de ces choix, l'élève saura appréhender le sens d'une « définition formelle », sa relativité ainsi que le concept de « définitions équivalentes ». L'apprentissage de la construction de définitions est ainsi encouragé par Freudenthal.

Les exemples donnés par J.P. Kahane et H. Freudenthal expriment l'intérêt de « faire construire des définitions », tant pour la construction et la compréhension d'un concept mathématique que pour l'apprentissage d'une démarche expérimentale de mathématicien.

Nous allons nous pencher plus précisément sur la construction de définitions en mathématiques, dont l'analyse nécessite une culture à la fois philosophique et scientifique, mais aussi une certaine connaissance de l'activité mathématique. En effet, la reconstruction axiomatique d'usage dans les manuels et autres livres de mathématiques masque le sens même des concepts mathématiques et du concept de définition.

Etudier le concept de définition est un vaste programme : nous allons nous concentrer sur l'étude de situations de construction de définition en mathématiques et la dévolution de l'activité de définition auprès d'étudiants.
Ce programme de recherche est précisé dans le chapitre qui suit.

Chapitre I

Problématique de recherche, cadre théorique, méthodologie

I- Problématique de recherche

Notre problématique de recherche s'inscrit dans le cadre de travaux didactique menés dans l'équipe CNAM[6] sur la **démarche scientifique** et les **situations de recherche**. Ces travaux portent en particulier sur l'implication (Deloustal - 2001 & thèse en cours), la modélisation (Rolland – 1999 ; Grenier & Payan – 1998), les situations de recherche en classe (Grenier & Payan – 2003 ; Audin, Duchet – 1992 ; Duchet & Mainguené – 2003 ; Godot, Rannou, thèses en cours).

D'après ce qui précède, ce qu'est une définition, en quoi consiste l'activité "définir" en mathématiques ne sont des choses ni évidentes, ni transparentes.

Cependant, nous n'avons relevé que peu d'études théoriques et expérimentales concernant les conceptions d'élèves et d'enseignants sur les définitions mathématiques. Pas plus que de travaux relatant l'activité de définition propre au chercheur. Notre volonté est d'étudier la dialectique entre la construction de concept et la construction de définition.

Nous soutenons la thèse suivante : il est possible de faire la dévolution de l'activité de construction de définitions auprès d'élèves ; ces **S**ituations de **C**onstruction de **D**éfinitions (notées SCD) participent à la construction de concepts et sont des voies pour entrer dans une démarche scientifique.

Questions de recherches

Le constat précédent et notre objet de recherche nous amènent à étudier les questions suivantes, épistémologiques et didactiques :

Q1 : quelles sont les caractéristiques d'une situation de construction de définitions en mathématiques ? Ceci implique l'étude de la question : qu'est-ce qu'une définition ?

[6] **C**ombinatoire **N**aïve et **A**pprentissages **M**athématiques – Laboratoire Leibniz – IMAG.
Ces travaux ont abouti à la création d'une ERTé "Maths à Modeler" sous la direction de S. Gravier.

Q2 : est-il possible de faire la dévolution de construction de définitions dans un cadre didactique ?
Q3 : quels sont les apprentissages en jeu dans des situations de construction de définitions tant du point de vue des concepts mathématiques concernés que du point de vue de la démarche scientifique ?

Nous avons été conduit à formuler des **hypothèses** de travail.
La première hypothèse est qu'une étude épistémologique approfondie du concept de définition est nécessaire pour établir des conceptions significatives sur les définitions et la construction de définitions en mathématiques. La seconde hypothèse est que l'activité de construction de définitions fonctionne en dialectique avec la construction du concept mathématique en jeu.

Nous présenterons dans la première partie de cette thèse une analyse épistémologique de la définition (chapitre II). Dans cette partie théorique, nous modéliserons certaines conceptions à partir desquelles trois types de situations de construction de définition seront établis. Nous présenterons également une étude des travaux existants sur le concept de définition et l'activité de construction de définitions au chapitre III. Une étude sur le lieu et le rôle des définitions dans des manuels scolaires du secondaire et des rapports institutionnels d'enseignants à la définition (chapitre IV) viendra compléter ceci.
Dans la seconde partie de ce travail, nous étudierons les conditions de la dévolution de situation de construction de définition auprès d'étudiants de première année d'université et analyserons les processus de construction de définition, ainsi que les conceptions mis en œuvre par ces étudiants. Les choix mathématiques et didactiques que nous avons effectués pour la partie expérimentale seront présentés au chapitre V. Les résultats de trois expérimentations seront présentés (chapitres VI,VII,VIII).

II. Cadre théorique et méthodologie

Nos hypothèses et objectifs de recherche, décrits ci-dessus, nous ont conduits à faire les choix méthodologiques et théoriques suivants.

Dans un premier temps, il s'agissait de faire le point sur le concept de définition en mathématique dans les écrits existants, que nous avons complété par une analyse du statut de la définition dans les discours d'enseignants de mathématiques. Une modélisation en termes de conceptions nous permet d'expliciter ces points de vue de manière structurée et de soulever des premières questions épistémologiques et didactiques. Nous précisons cela au § II.1.

Ce premier travail a été complété par une brève étude écologique de la définition dans les institutions mathématiques du secondaire, à partir d'une analyse de manuels et de programmes. Les outils théoriques sont décrits en II.2.

Enfin, les deux études précédentes, ont conduit à faire des hypothèses sur ce que peut être une situation de construction de définitions pour des étudiants. Il s'agit là de décrire les caractéristiques possibles d'une telle situation et les conditions de sa dévolution. La théorie des situations didactiques offre une modélisation appropriée, en terme de variables épistémologiques et didactiques, rétroactions et validations du milieu, pour l'élaboration et l'analyse de telles situations. Cette étude doit prendre en compte non seulement les conditions pour une co-construction d'un concept mathématique et de ses définitions, mais aussi les caractéristiques des concepts mathématiques appropriés.

II.1. Modèles de connaissances et de représentations

Il existe peu de travaux didactiques concernant la construction de définition dans l'enseignement. De plus, les discours des mathématiciens, logiciens et philosophes sur le concept de définition sont multiples. Enfin, l'absence de pratiques communes en matière de construction de définition, tant chez les élèves que chez les enseignants, nous porte à étudier le concept de définition.
Nous devions donc dans un premier temps déterminer des conceptions significatives [7], voire récurrentes, sur le concept de définition, à l'aide d'outils théoriques permettant, en particulier, la modélisation de connaissances.
Nous avons choisi le modèle cK¢ (Balacheff – 1995 & 2003) pour modéliser les dites conceptions significatives sur le concept de définition. La modélisation résultante sera également utilisée dans ce que Balacheff appelle le "calcul des situations", pour l'analyse des situations expérimentées.

De plus, les notions de *concept image* et *concept definition* [8] développées par Vinner (1980 & 1991) doivent apporter un éclairage quant à l'analyse de certains discours ou comportements de chercheurs, d'élèves ou d'enseignants.

Vergnaud : une définition du concept

Lorsqu'un sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires dans une situation, il se produit un amorçage successif de plusieurs schèmes. Un schème est défini par Vergnaud

[7] Le choix de ces conceptions dites "significatives" est explicité dans le chapitre II.
[8] Nous conservons les expressions anglaises.

(1991) comme une **organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée**.

La difficulté dans la détermination de ces schèmes réside dans le fait qu'il y a beaucoup d'implicites et qu'un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite. Vergnaud distingue trois types logiques d'invariants opératoires, éléments cognitifs permettant à l'action du sujet d'être opératoire :

- le type « propositions » (Vrai ou faux / théorème-en-acte) ;
- le type « fonction propositionnelle » (pas susceptible d'être vrai ou faux / concept-en-acte ; catégorie-en-acte) ;
- le type « argument » (objets matériels, nombres, relations, propositions).

Dans notre étude, la considération de *définition-en-acte* peut être un outil théorique d'analyse.

Vergnaud définit alors "concept" par un triplet composé de :

- l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;
- l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (signifié) ;
- l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et procédures de traitement (signifiant),

et il ajoute que :

> *étudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois* (Vergnaud – 1991 - p.146)

Dans cette présentation, les contrôles exercés par le sujet sur ses propres actions ne sont pas pris en charge. C'est pourquoi nous allons utiliser le modèle cK¢ pour inclure la prise en compte de ces contrôles.

Le modèle cK¢ (Balacheff – 1995 & 2003) : la prise en compte des contrôles

Nous soulignons que ce modèle est encore à l'étude. La caractérisation des problèmes dans ce modèle est du même ordre de complexité que ce que sont les conceptions elles-mêmes. Nous projetons d'utiliser ce modèle de la manière la plus "naturelle" qui soit, sans forcément entrer dans des débats théoriques liés à l'essence même de cK¢.

L'objectif du modèle cK¢ est de caractériser chaque connaissance par les situations qui lui sont spécifiques. **Une conception se décrit par un quadruplet (P, R, L, Σ)** (Balacheff – 1995 & 2003) où :

- P est un ensemble de problèmes sur lequel agit une conception. P décrit le domaine de validité de la conception, sa sphère de pratique.
- R : un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.

- L : le(s) système(s) de représentation. A l'image du modèle proposé par Vergnaud, ceux-ci sont langagiers ou non. Un système de représentation permet l'expression des éléments de P et de R.
- Σ : des structures de contrôles qui ont pour but d'assurer la non-contradiction de la conception. Ce sont des outils de décision sur la légitimité d'un opérateur (de l'usage d'un opérateur) et sur l'état du problème (résolu ou non).

Notre lecture et utilisation du modèle cK¢

L'objectif principal dans l'utilisation de ce modèle est de pouvoir répondre à la question : avec quelles conceptions tel problème se résout-il ? Dans notre propos, cela revient à : quelles conceptions sont à l'œuvre dans chacun des types de SCD ?
Ce modèle est utilisé dans cette thèse pour modéliser des connaissances et des représentations sur le concept de définition présentes dans des textes philosophico-mathématiques.
En particulier, nous avons étudié les connaissances de Aristote, Popper et Lakatos car elles représentent trois points de vue complémentaires soulignant des fonctionnalités différentes de la définition.

Concept image et *concept definition* (Vinner – 1980 & 1991)

S.Vinner insiste sur l'importance et sur le mécanisme, via les définitions, de la construction de concept. Il propose comme outil d'analyse les notions de *concept image* et de *concept definition* que nous allons définir ci-après.
Vinner précise que puisque la connaissance d'une définition formelle (par cœur) n'assure pas la compréhension d'un concept, les définitions posent le problème didactique suivant : il existe un conflit entre la structure des mathématiques écrites et enseignées, où la définition est un commencement, et le processus cognitif d'**acquisition de concept**. Dans la structure cognitive, Vinner affirme l'existence de deux pôles en interactions mutuelles : le *concept definition* (définition formelle d'un concept) et le *concept image* (non verbal, de type image mentale). Il faut tenir compte de l'existence du *concept image* et de ses conséquences, dans la mesure où celui-ci entraîne un « oubli » du *concept definition*. Ce type de fonctionnement relèverait des habitudes de pensée de la vie quotidienne d'après Vinner. Selon lui, il est nécessaire d'élaborer une stratégie d'enseignement dont le but est de **montrer le statut d'énoncé mathématique des définitions au même titre qu'un théorème** comme étant un élément de la théorie mathématique (notamment l'usage des définitions pour caractériser des objets).
Ainsi, même si Vinner prône d'une certaine façon une recherche des définitions aussi simples et naturelles que possibles [9] car de telles définitions permettraient au processus de formation

[9] Un peu comme Aristote pour qui les mathématiques reposent sur des principes « naturels » et « simples », ce qui, bien sûr, est subjectif.

de concept de s'enclencher [10], son expérimentation montre qu'il est indispensable que les étudiants se trouvent dans des situations où leur *concept image* ne fonctionne pas correctement : cette rupture est nécessaire pour qu'il y ait un retour sur la définition voire une re-construction de la définition « formelle ».

Dans son modèle, Vinner questionne le point suivant : comment mettre en rupture le *concept image* pour engager l'élève vers le *concept definition*, et ainsi, éventuellement reconstruire le *concept definition* ?

Vinner nous rappelle par ailleurs *« (...) qu'il est des contextes dans lesquels se rapporter à la définition formelle est crucial pour une exécution correcte des tâches demandées (notamment : identification d'exemples et de contre-exemples ; résolution de problème et preuves mathématiques).»*[11] A ce propos, A.et J. Selden [12] ont montré les grandes difficultés rencontrées par les étudiants lors de la génération d'exemples et contre-exemples à partir d'une définition formelle. Ils rappellent qu'afin d'être didactiquement appropriée, une définition qui doit être constituée de concepts connus de l'étudiant, devrait être basée, autant que possible, sur l'intuition et à la portée de l'étudiant.
Vinner et Hershkowitz (1980) ont mené une étude sur les *concept images* de concepts mathématiques associés à des définitions pré-existantes pour l'étudiant (tangente, limite par exemple). Nous retiendrons que :

> *the cognitive reason for asking somebody to give definitions should be the assumption that definitions help to form concept images* (Vinner & Hershkowitz - 1980)

De notre point de vue, les outils - *concept definition* et *concept image* - nous semblent pertinents, en particulier dans des situations de re-construction de concepts déjà appris, mais insuffisants pour l'analyse conjointe de construction de définitions et de construction de concept car ils modélisent seulement des états de représentation sans décrire précisément le processus de construction de définition et de construction de concept.
D. Tall a contribué à la définition et à l'utilisation de ces concepts. Il reconnaît que les définitions qui en sont données sont un peu *vagues* : c'est pour cela que l'utilisation des *concept image* et *concept definition* est accessible car ce sont des concepts non figés. Tall a plus particulièrement utilisé ces outils d'analyse pour des situations mettant en jeu des ordinateurs.

---

[10] Par exemple, pour Vinner, une définition minimale bien qu'élégante ne permet pas à l'élève de se créer une représentation mentale.
[11] Traduit par nos soins.
[12] Site www.maa.org - Annie et John Selden sont les éditeurs de la rubrique "research sampler" de la MAA (Mathematical Association of America). Ce sont des mathématiciens de longue date, qui travaillent depuis maintenant une dizaine d'années en *Mathematics Education*.

II.2. Des éléments de la théorie anthropologique du didactique pour étudier la définition dans les institutions didactiques

Nous donnerons des éléments de l'écologie de la définition dans les institutions didactiques du secondaire, en particulier nous étudierons le rôle et le lieu des définitions dans les programmes et des manuels de collège et de lycée. Cette étude sera complétée par une analyse de rapports institutionnels d'enseignants à la définition : nous rappellerons les éléments théoriques de Chevallard à cette occasion (chapitre IV).

II.3. La théorie des Situations Didactiques pour l'élaboration et l'analyse des SCD

Pour l'élaboration et l'analyse des SCD expérimentées, nous nous sommes tournés vers la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau, en particulier vers la notion de « milieu » et celle de « situation fondamentale ».

Le milieu est soumis à trois contraintes pour pouvoir jouer son rôle :

- le milieu doit être facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève
- le milieu doit permettre le fonctionnement autonome de l'élève
- l'apprentissage doit conduire à la maîtrise de savoirs mathématiques identifiés comme tels, et pas seulement de connaissances

Nous recherchons davantage à concevoir un milieu adidactique associé, et à un savoir mathématique, et à la construction de définition ; Brousseau parle de situation fondamentale. L'existence d'une situation fondamentale pour la construction de définitions est un postulat. La démarche de recherche d'une telle situation fondamentale renvoie à une étude mathématique, épistémologique de la construction de définitions, mais aussi à une analyse des pratiques de référence en terme de construction de définitions. Nous étudierons en particulier la dévolution de telles situations, et les rétroactions du milieu.

Rappelons que le concept de situation fondamentale repose sur la troisième hypothèse épistémologique de la théorie des situations : il existe pour tout savoir mathématique une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct. Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situations adidactiques qui en préserve le sens. Cette famille de situations sera ainsi appelée *situation fondamentale*. Savoir construire une définition est une compétence, et une compétence est une connaissance : notre recherche va donc tendre à l'élaboration d'une situation fondamentale pour la construction de définitions.

Chapitre II

Etude épistémologique de la définition

La question traitée dans les chapitres II et III est la suivante : qu'est-ce qu'une définition ? Qu'est-ce définir ?

Nous avons relevé trois types d'études sur le concept de définition :
Le premier pose des questionnements généraux sur le concept de définition : il s'agit d'écrits essayant de répondre à une question proche de « qu'est-ce qu'une définition ? » et présentant différents types de définition. Il ne s'agit pas forcément que d'un questionnement intra-mathématiques. ([R.Robinson ; L.Liard] pour les ouvrages entièrement consacrés à ce sujet – [Aristote ; I.Kant ; Leibniz ; Frege ; Popper …] pour les chapitres comportant des considérations sur les définitions en général, mais aussi une ouverture sur les processus de construction de définition)
Le deuxième type de travaux ayant trait à « la définition » est un ensemble d'études ou d'articles portant sur le processus de définition, sur le plan de la recherche mathématique [I.Lakatos ; et plus général, J-P.Kahane], mais aussi sur le plan didactique avec une étude de production de définitions [R.Borasi – T.J.Fletcher]. Ces travaux nous apportent en particulier quelques éléments sur les conceptions d'élèves sur les définitions en mathématiques et sur les mathématiques en général.
Enfin, nous avons relevé quelques articles consacrés spécifiquement à l'étude des conceptions sur les définitions en mathématiques chez des élèves et des enseignants [K.Shir].

Nous reprendrons ces travaux dans les chapitres II (épistémologie) et III (didactique).

Une première entrée "naturelle" à ces questions est de consulter les dictionnaires, qu'ils soient mathématiques ou non. Ce que nous avons fait, et nous allons relater dans le premier paragraphe les éléments découverts dans les dictionnaires. Nous pouvons déjà annoncer que bon nombre de classifications de définitions ont été trouvées, et il en ressort que des considérations philosophiques sur l'essentialisme et le nominalisme ne sont pas neutres dans les conceptions de divers auteurs sur la définition. En particulier, les mathématiciens des quatre siècles derniers étaient également philosophes, et donc sous le joug de ces considérations. Ainsi, il nous faudra faire un détour du côté de l'essentialisme et du nominalisme, et nous montrerons combien les conceptions essentialistes et nominalistes marquent les conceptions actuellement présentes dans des manuels et chez des enseignants. Le premier à être sorti de ce débat essentialisme/nominalisme est certainement Lakatos, nous présenterons sa conception des constructions de définitions.

Pour parcourir les éléments majeurs de ce débat essentialiste/nominaliste, il nous a fallu étudier des auteurs représentatifs de ces deux courants, mais aussi traitant le plus largement possible du concept de définition. Nous avons retenu pour les essentialistes : Aristote (fondateur d'une première classification de définition), Leibniz (car auteur d'une véritable théorie de la définition) ; nous avons également introduit Kant, car sa vision des mathématiques permet de régler un problème essentialiste (essence et existence). De plus, les travaux de Durkheim et Liard seront rapportés car même si ce ne sont pas des mathématiciens à l'origine, ils se sont penchés de concert sur l'enseignement et ont en particulier écrit sur les définitions mathématiques.
Et pour les nominalistes, les « nominés » sont : Pascal et Port Royal (pour décrire les éléments caractéristiques des nominalistes, mais aussi des logiciens), et Popper (nominalisme plus récent). Pour compléter la vision des logiciens, nous utiliserons quelques extraits des travaux de Couturat (début XXème) car très explicites quant à une certaine conception sur les définitions en mathématiques.
En dehors de ce contexte essentialiste/nominaliste, nous analyserons les travaux de Lakatos, ce qui sera éclairé par l'étude de Popper et de Kant (Lakatos cite beaucoup Popper qui cite aussi souvent Kant).

L'étude épistémologique et la mise en forme de conceptions majeures sur les définitions en mathématiques nous facilitera la présentation des travaux existants en didactique sur le sujet qui nous intéresse. La présentation de ceux-ci soulignera des conceptions répandues chez des élèves et des enseignants sur les définitions en mathématiques et nous permettra de montrer combien la considération de construction de définitions n'est pas si naturelle …

« Qu'est-ce qu'une définition ? qu'est-ce définir ?»

Il s'agit ici de présenter le cheminement de nos interrogations concernant le concept de définition et le processus de définition en mathématiques.
Cette étude comporte (au moins) deux niveaux :

- sur le sens de "définir" (double acception [13] : courante et mathématique) : nous verrons les questions que l'explicitation de ces acceptions soulève ;
- sur le processus de définition : quels moyens avons-nous pour expliciter ce processus propre à l'activité du chercheur ? Et comment mettre en relation construction de définition et construction de concept ?

En particulier, le mot "définir" peut être l'objet d'une double interprétation :

- celle de son acception courante

[13] Acception : sens dans lequel un mot est employé.

- celle de son acception mathématique ; soulignons que présenter l'acception mathématique des termes "définition" et "définir" en mathématiques revêt plusieurs aspects dont : les conceptions communes (ou ordinaires) majoritairement partagées et repérables dans différentes institutions (de la recherche jusqu'aux enseignants en passant par les manuels et livres de mathématiques) ainsi que tout ce qui relève de l'activité mathématique de définition propre au chercheur (ceci est moins aisé d'accès).

Le premier pas est une analyse des définitions lexicales, courante et mathématique, des termes "définition" et "définir". Cette analyse nous conduira à la recherche d'éléments épistémologiques et philosophiques pour une meilleure compréhension des acceptions de "définition" et des processus connus de définition (philosophiquement et scientifiquement). L'exposé des différents textes sur "la définition" nous conduira ainsi à la mise en évidence d'invariants ; à partir de ceux-ci, nous choisirons et détaillerons trois conceptions (appelées aristotélicienne, poppérienne, lakatosienne). Nous utiliserons le modèle cK¢ [14] pour exposer ces trois conceptions. Ceci nous permettra de présenter une synthèse mettant en évidence tous les aspects précédemment analysés, ré-investissables pour les analyses didactiques de SCD.

Qu'est-ce qu'une définition ? … en quoi consiste l'activité de définition ?
Le mot définition n'est pas strictement réservé aux mathématiques. Tout le monde en a certainement une idée plus ou moins précise, et il semble difficile de trouver un consensus clair sur ce mot, tant en sciences qu'en philosophie. C'est ce que nous allons montrer.
Nous laisserons pour l'instant à l'expression « construction de définition » son sens le plus naturel.

I- Acceptions courante et mathématique des termes *définir* et *définition*

I-1. Acception courante

Etymologiquement, définir signifie : **délimiter ce qui est de ce qui n'est pas**. Cet aspect est généralement présent dans les définitions données dans les dictionnaires et encyclopédies.

Référons-nous tout d'abord aux dictionnaires [15].

[14] Présenté dans le chapitre II.
[15] Logos Bordas et Encyclopedia Universalis.

Le terme “définir” a deux acceptions dans Logos Bordas ; l’une est conforme au sens étymologique, c’est-à-dire “*déterminer, délimiter avec exactitude*”. L’autre consiste à “*donner une définition ; formuler avec précision et concision le sens d’un mot – caractériser une personne, une chose*”.
Dans l’Encyclopedia Universalis, l’article “définition” commence ainsi : “*Traditionnellement, définir, c’est expliciter, lorsqu’il s’agit d’un mot, et, lorsqu’il s’agit d’un être, c’est lui assigner un statut ; on définit* ***par genre prochain et différences spécifiques***”. Sans que le mot “définition” ne soit à proprement parlé défini, deux types de définitions apparaissent : les définitions *intuitives* et les définitions *génératives* ; pour ces dernières, définir consiste à *donner un procédé d’engendrement par une consigne verbale brève, où le definiens règle la génération du definiendum*. Les termes “définir et définition” semblent simples d’abord, pourtant les définitions lexicales données dans l’Encyclopedia Universalis mobilisent des termes plus sophistiqués, sans exemple illustratif. Nous allons retrouver les mêmes composantes, exception faite des exemples, dans Logos Bordas, où “définition” est défini par : “*explication du sens d’un mot ou de la nature d’une chose ; elle* (la définition) *consiste à analyser la compréhension d’une idée, par exemple en énonçant* ***son*** **genre prochain** ***et sa*** **différence spécifique**”. Là encore, différentes définitions sont décrites et illustrées :

> *“on distingue la définition* ***nominale****, qui doit rendre l’idée* claire **(l’âme est le principe de la pensée)** *, et la définition* ***réelle*** *ou* ***causale****, qui doit la rendre distincte (l’âme est une substance spirituelle). On distingue encore la définition* ***descriptive*** *(le papier est un corps mince, léger), la définition* ***analytique*** *(l’eau est composée d’oxygène et d’hydrogène), la définition* ***génétique*** *(le cercle est l’ensemble des points situés à une distance donnée d’un point fixé)”*

Nous retrouvons différents types de définition dont les *essentielles* et les *nominales*.

Comme le montrent les extraits ci-dessus, la plupart des dictionnaires et encyclopédies distinguent généralement **différents types de définition** (parmi lesquels la distinction entre définition *nominale* et définition *essentielle* sur laquelle nous reviendrons) sans pour autant préciser s’il s’agit alors d’une nécessité usuelle ou scientifique, pratiquée ou non.
Ces types de définition ne sont pas définis au sens strict du terme, nous n’avons trouvé qu’une illustration par un exemple (peut-être est-ce une définition, dans une acception plus faible de ce terme). Soulignons également que **la pratique des dictionnaires est habituellement d’illustrer les définitions par des exemples, et rarement, voire jamais, par des contre-exemples**. De plus, une expression apparaît récurrente lorsqu’il est question de définition : la définition ***par genre et différences spécifiques***.

Nous notons dans cette pratique lexicale non mathématique des définitions, trois points qui nous semblent pertinents pour notre approche des définitions et des activités de construction de définition.

Tout d'abord, différents types de définition sont donnés, sans explicitation de raisons motivant ceux-ci, ni spécification de la discipline à laquelle ils sont rattachés [16] : il est question de définition *nominale*, *essentielle*, mais aussi *générative*, *intuitive*, *analytique*, *génétique*, et nous restons sur notre fin lorsque l'Encyclopedia Universalis conclut son article par *les définitions modernes sont implicites et opératoires*, sans explications plus avancées.
De plus, la méthode aristotélicienne [17] de définition, par *genre et différences spécifiques*, est inéluctablement citée, il nous faut l'étudier.
Enfin, notons que la fonction de communication des définitions prévaut, proche d'une pensée courante chez les mathématiciens selon laquelle les définitions permettent à deux interlocuteurs de parler de la même chose (Borel - 1948), et qu'elle est intimement liée à la fonction d'explication.

I-2. Acception mathématique

Nous allons cette fois nous référer aux ouvrages mathématiques de type dictionnaire mathématique mais aussi aux ouvrages de Bourbaki, où les définitions ont une place bien déterminée. Soulignons que le terme "définition" a généralement une entrée dans les dictionnaires mathématiques, ce qui n'est pas le cas de "définir" ; ce fait peut être interprété comme une réduction d'une définition à un énoncé et masque ainsi l'activité de définition.

I-2.1. Distance entre définitions mathématiques et définitions courantes

Fin XVIIIème début XIXème, il est question dans les dictionnaires scientifiques (auxquels nous avons eu accès) de deux types de définition, qui vont être définis à leur tour : nous retrouvons la dichotomie *nominale* et *réelle* ou *essentielle* évoquée dans les dictionnaires communs. Par exemple, la définition de "définition" dans "Mathematical and Philosophical Dictionary" (Hutton - 1795) se présente ainsi :

> *An enumeration, or specification of the chief simple ideas of which a compound idea consists, in order to ascertain or explain its nature and character. Definitions are of two kinds; the one <u>nominal</u>, or of the name; the other <u>real</u>, or of the thing*[18].

Une définition *nominale* est définie comme une énumération de caractères connus suffisants pour distinguer une chose parmi d'autres. L'exemple illustratif est celui du carré : un carré est une figure quadrilatérale, équilatérale, rectangulaire. Quant à une définition *réelle*, elle

[16] Nous pourrions en effet supposer que la pratique des définitions varie entre les mathématiques, la philosophie, l'économie, le droit etc.
[17] Nous étudierons spécifiquement au chapitre II la classification dite aristotélicienne
[18] Trad : Une énumération ou spécification des idées principales constituant une idée composée, dans le but de rendre compte ou d'expliquer sa nature et sa marque distinctive. Les définitions sont de deux types : les *nominales*, ou définitions *de nom*, et les *réelles* ou définitions *de chose*.

explique la genèse d'une chose, c'est-à-dire comment la chose est faite ; par exemple, un cercle est une figure décrite par le mouvement d'une ligne autour d'un point fixé.
Cette même distinction est également présente dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, à laquelle s'ajoutent des règles logiques pour les "bonnes" définitions[19]. D'Alembert souligne l'importance des définitions, car elles abrègent le discours[20], et le fait que *l'inexactitude de la définition empêche de bien saisir la vraie signification des mots*. Cette discussion sur "bonnes" définitions et définitions "exactes" va nous conduire à la distinction *nominale*/ *réelle* précédente, D'Alembert mettant en avant l'usage de définitions *nominales* en mathématiques par l'argumentation suivante :

> *Les Mathématiciens sont plus réservés que bien des philosophes, qui croyent donner des* ***définitions de chose****, entendant par ce mot l'explication de la nature de la chose, comme si la nature des choses nous était connue, comme si même les mots de nature et d'essence présentaient des idées bien nettes.* (L'Encyclopédie – article "définition")

Cependant, lorsqu'une définition explique la génération d'une chose, c'est bien de définition *de chose* dont il est question, et ce type de définition a effectivement un statut particulier[21]. Pourtant, D'Alembert accentue la singularité des définitions mathématiques, qui en définitive ne seraient, à son sens, que **des définitions de nom** car *on ne prétend pas expliquer par la définition la nature de la chose*. Et ces définitions ne peuvent être contestées, l'attribution d'un nom à une idée ne pouvant être discutée ; de plus, *on peut les prendre pour des principes*, car certaines définitions ont un caractère abstrait et ce n'est pas parce que l'on donne un nom à une idée *qu'elle signifie quelque chose de réel*[22]. Nous pouvons annoncer ici que D'Alembert se place dans une perspective *nominaliste* (cf. paragraphe II-1.1.2).

Cette classification - définition *nominale* et définition *réelle* ou *essentielle* - qui remonte à Aristote a des résurgences de nos jours ; les extraits encyclopédiques ci-dessus ont une vocation introductive et illustrative. Nous pourrions également évoquer ici les protagonistes des définitions *nominales* (par exemple Pascal, et les logiciens de Port Royal, partisans des définitions abréviatives) et ceux des définitions *de choses* dites *essentielles* ou *réelles* (tels que Leibniz, Frege par exemple). Mais ce n'est pas notre propos : notre questionnement sur les définitions s'intéresse aux différents types de définition évoqués dans les ouvrages scientifiques pour en extraire, si possible, des processus de définition bien identifiés. Cette distinction philosophique *nominale* / *essentielle* nous interpelle dans la mesure où nous nous demandons quelles en sont les conséquences avérées aujourd'hui. C'est pourquoi nous conserverons dans ce chapitre la distinction *nominale* / *essentielle*, et que nous expliciterons

[19] Une bonne définition se doit d'être *claire, universelle ou adéquate et particulière à la chose définie* (in l'Encyclopédie – article "définition").
[20] *Il faut substituer mentalement la définition à la place du défini* (ibid.).
[21] L'exemple de la définition du cercle est donné comme exemple de définition *de chose* (ou *réelle*) : *telle est la définition du cercle quand on dit que c'est une ligne formée par le mouvement d'une ligne droite autour d'une de ses extrémités* (ibid.).
[22] Ces propos sont communs à l'Encyclopédie et Pascal (entre autres !).

plus précisément dans les paragraphes suivants les processus de définition inhérents à ces deux types. **Par la dichotomie faite entre *nominale* et *essentielle*, nous voyons pointer des arguments concernant la logique, la dénomination et l'abréviation, l'essence, et implicitement l'existence de la chose définie.** Tous ces points ont un lien avec les mathématiques : ils seront traités au cours de ce chapitre.

Plus récemment, voici ce que propose le Dictionnaire des Mathématiques (Bouvier et Al-1979) :

> *Définition : Terme non mathématique. On appelle définition d'un terme mathématique toute proposition dont il est une abréviation.*

Nous verrons (§II-1.1.2) que cette définition se révèle être proche d'une conception nominaliste de la définition, comportant en particulier **l'aspect abréviatif** que nous retrouvons également chez les logiciens.
Nous retrouvons cette idée également chez Pólya (1965) lorsqu'il propose un petit dictionnaire d'heuristique. L'article *définition* mentionne que *définir un terme, c'est donner sa signification en termes différents supposés courants* : il s'agit en fait de ne définir qu'à partir de termes déjà connus, et, Pólya distingue les termes *premiers* des termes *dérivés*. Il s'intéresse à la pratique lexicale des définitions, dans les dictionnaires et en mathématiques : en effet, il précise que

> *les définitions données dans les dictionnaires ne diffèrent pas sensiblement des définitions mathématiques par leur forme extérieure, mais elles sont rédigées dans un esprit différent* (Pólya – 1965 - p.66)

Ainsi, qu'une définition soit mathématique ou non, sa forme extérieure, et donc sa forme langagière, comporte des invariants. Cependant, en mathématiques, la fonction des définitions n'est pas identique à celle des définitions courantes, selon Pólya, car *la définition mathématique <u>crée</u>*[23] *le sens mathématique* (Pólya – 1965 - p.67), mais aussi pour une autre raison : en effet, Pólya énonce qu'*éliminer un terme technique est possible quand on connaît sa définition*[24], et ainsi, l'utilisation de définitions connues permet de mettre sur pied un raisonnement et de le vérifier.
Toujours dans la distinction entre définitions courantes et définitions mathématiques, ajoutons une citation de T.J. Fletcher :

> *Le langage courant préfère les définitions exclusives : un carré n'est pas un rectangle et un parallélogramme n'est pas un trapèze. En mathématiques, au contraire, on adopte toujours des définitions inclusives, et ainsi on considère un parallélogramme comme un cas particulier*

[23] C'est nous qui soulignons.
[24] Ceci est conforme à la vision de Pascal. Dans *l'Art de Persuader*, Pascal déclare qu'il faut définir tous les noms qu'on impose et prouver tout, en substituant mentalement les définitions à la place des définis (Pascal-1659-1660).

> *de trapèze ; un rectangle est un parallélogramme particulier, et par suite un trapèze particulier* (T.J Fletcher – 1966 – p.160).

Cette distinction nous semble au premier abord un peu superfétatoire. En effet, il existe dans le langage courant des définitions inclusives (dès lors qu'une classification est en jeu), et l'architecture des définitions en mathématiques repose essentiellement sur le principe suivant (d'après les logiciens, et ce depuis Aristote) : il ne faut définir qu'à partir de choses antérieurement connues ; le choix d'éléments primitifs est alors déterminant sur la théorie qui en découlera.

Quoiqu'il en soit, l'aspect abréviatif et la décomposition d'une définition en termes premiers et/ou déjà définis, n'est pas étranger à tout exposé mathématique théorique ; prenons l'exemple des ouvrages de Bourbaki. Bourbaki est certainement le meilleur exemple d'exposé déductiviste en mathématiques. Ainsi, la place des définitions en début de chapitre, en vue d'abréger le discours est éloquente et témoigne d'une certaine conception abréviative. Bourbaki justifie même d'une utilisation en mathématiques de l'acception courante de certains mots lorsque ceux-ci ne sont pas définis :

> *Le lecteur trouvera dans le présent fascicule toutes les définitions et tous les résultats de la théorie des ensembles (...) En ce qui concerne les notions et les termes introduits ci-dessous sans qu'il en soit donné de définition, il pourra se borner à leur attribuer leur sens usuel.* (Bourbaki – Théorie des ensembles - 1939)

En définitive, ces ouvrages ou dictionnaires mathématiques correspondent à un point de vue que nous qualifierions de réducteur sur les définitions, car restreint autour de trois pôles :

- le caractère **abréviatif** d'une définition,
- la construction axiomatique et **la place des définitions dans un exposé théorique** (les enjeux relatifs aux éléments premiers et aux axiomes ne sont alors pas négligeables),
- et l'aspect plus ancien de **classification des définitions**, aspect que nous allons développer ci-après.

I-2.2. Ce qui relève de la recherche et de l'activité mathématiques

Nous allons tenter de répondre aux deux questions : comment interviennent les définitions dans l'activité du chercheur ? Quels sont les processus de définition dans l'activité de recherche mathématique ? Où et quand apparaissent-ils ?

Les textes de chercheurs mathématiciens sur ces aspects sont plutôt rares.
Nous retiendrons ici les travaux de J-P. Kahane et I. Lakatos. Les articles de Kahane nous permettrons de souligner l'importance du processus de construction de définitions dans la recherche mathématique, et donc des définitions. Les ouvrages de Lakatos proposeront une illustration d'un processus de construction de définition - où il sera encore question du débat

essentialiste / nominaliste dont nous ne pouvons pas faire l'économie d'une explicitation. Nous présenterons une conception "lakatosienne" ci-après (§IV-4) : celle-ci rend compte d'une pratique scientifique des définitions.

Kahane nous rappelle que

> *La transposition didactique prend pour point de départ un aboutissement historique et réécrit l'histoire à l'envers* (Kahane, 1999, p.11).

Cette réécriture occulte l'activité mathématique où la définition est effectivement un aboutissement :

> *les définitions pertinentes en mathématiques sont l'aboutissement d'une longue histoire et de beaux travaux (...) et leur puissance vient justement de ce qu'elles sont un élixir de pensée* (ibid. p.13).

De plus, il ne faut pas négliger le rôle axiomatique des définitions lors de l'élaboration d'une théorie mathématique : en effet,

> *Les définitions servent d'assise au raisonnement et à tout l'édifice de la théorie. (...) D'Euclide à Bourbaki, tel est le statut des définitions : on commence par elles, à chaque niveau, et on bâtit dessus* (ibid. p.13).

Même si les définitions apparaissent comme primordiales pour Kahane et porteuses de **la** connaissance, nous n'apprenons rien sur le processus de définition, si ce n'est qu'une définition est l'aboutissement d'un processus de recherche, alors que **la** transposition didactique usuelle est telle que les définitions sont situées au début d'un cours ou d'un exposé.

Lakatos dans sa thèse (1961) et dans "Preuves et Réfutations" (1976) propose deux types de définition : ***zéro-définition*** et ***proof-generated definition***[25]. Nous présenterons au paragraphe IV-4 ce que nous appellerons la "conception lakatosienne" et mettrons en évidence des processus de construction de définition, ainsi que différents types de définition et leur rôle. Il apparaît plus spécifiquement chez Lakatos une dialectique entre construction de définition et construction de concept : l'enjeu de construction de définition est ainsi éclairé.

Ainsi, l'importance des définitions, et des processus qui les génèrent, est avérée. Nous allons maintenant nous intéresser aux classifications de définitions et au rôle classificateur des définitions.

[25] Nous avons partiellement francisé *zero-definition* par *zéro-définition* et nous conservons l'expression originelle de *proof-generated definition* de Lakatos.

II- Classifications de définitions et définitions pour classifier

II-1. Différents types de définition

II-1.1. De l'essentialisme au nominalisme : quels enseignements ?

Traditionnellement, et ce depuis l'Antiquité, et d'abord en philosophie, il semble y avoir une forte propension à classifier les définitions.
Une première "grande" classification fut certainement la séparation entre *définition de nom* (ou de *mots*) et *définition de choses*. Bien que présente déjà chez Aristote, cette scission entre définition *de nom* et définition *de choses* fut surtout assénée par les logiciens de Port-Royal (les textes de Pascal à ce propos sont certainement les plus explicites[26]) ; pour Port Royal, les définitions *de noms* sont incontestables : elles sont le lieu où l'esprit rapproche des idées séparées jusqu'alors et en fixe le résultat par un mot, et ainsi, la définition se résume à une abréviation. Ce qui n'est pas le cas des définitions *de choses* où l'on laisse au terme qu'on définit son idée générale ordinaire ; ces définitions sont alors soit évidentes, soit à démontrer et elles peuvent être fausses et mises en discussion.
Durkheim[27] s'interroge à juste titre : cette distinction est-elle fondamentale ? Il nous démontre alors, contrairement à la vision nominaliste, qu'il n'y a que des définitions *de choses* :

> *Il ne nous semble pas qu'il y ait deux sortes de définitions : quand on définit quelque chose, comme quand on définit un mot, c'est seulement l'idée d'une chose qu'on exprime par un terme (...) Port Royal distingue le sens ordinaire du mot, et voit une définition de choses là où le mot défini a ce sens ordinaire. Mais c'est là une distinction bien vague. De plus, ajoute-t-il, les définitions de mots peuvent être prises pour points de départs d'une déduction, ce que ne peut faire la définition de choses. Mais s'il y a des définitions qui se prouvent et d'autres qui peuvent servir de fondement, c'est seulement que ces derniers sont évidents, et que les autres ne le sont pas. Il n'y a donc qu'une seule espèce de définition, qui est les définitions de choses.*
> (Durkheim – 1884a – Lecture 44)

Ceci étant, Durkheim s'attache à proposer une autre typologie des définitions : nous y reviendrons en détail au paragraphe II-1.5.

Ainsi, l'une des plus célèbres classifications en matière de définition est la classification dite aristotélicienne, distinguant notamment définitions *nominales* et définitions *essentielles*; elle fut reprise par Leibniz sur certains points (§ II-1.3). Une autre classification que nous allons étudier est celle de Kant (§ II-1.4) car différente de la typologie aristotélicienne.

[26] Voir par exemple "De l'esprit géométrique".
[27] Durkheim (1858-1917) sociologue français, enseignant.

Dans le cadre de notre recherche, il est difficile de reprendre ces classifications telles que pour deux raisons : ce type de classification s'intéresse en premier lieu aux définitions en tant qu'énoncé, et, par ailleurs, ces classifications ne soulignent pas de manière évidente les fonctions et usages d'une définition, ni les buts de l'activité de définition.
Nous projetons d'expliciter des processus de construction de définition : c'est pourquoi nous proposons de présenter des classifications de définition (Aristote, Leibniz, Kant, Durkheim) en tentant d'en dégager des éléments pertinents pour la description de processus de définition.

Nous allons tout d'abord dresser un panorama des courants essentialistes et nominalistes ; à la présentation des classifications de définition d'Aristote, Leibniz, Kant, Durkheim suivra un tableau récapitulatif de celles-ci.

II-1.1.1. Essentialisme versus nominalisme : le contexte du débat

Il n'y a pas de lecture unique de l'essentialisme. Cependant, la séparation (et même la rivalité) entre essentialistes et nominalistes est bien réelle : nous nous proposons d'exposer ici les grandes tendances de ces deux courants, ceux-ci étant encore présents, comme nous l'avons remarqué plus haut, dans les dictionnaires qu'ils soient lexicaux ou scientifiques. Nous montrerons aussi la présence de ces courants chez des enseignants et dans certains manuels scolaires (chapitre IV).

Ces deux courants sur la définition, essentialiste et nominaliste, induisent probablement des conceptions différentes sur des processus de construction de définition qui sont l'objet d'étude de notre thèse. C'est pour cette raison qu'il nous faut les étudier plus spécifiquement.

Le débat essentialiste-nominaliste prend sa source au Moyen-Age ; il portait sur la distinction entre la réalité et le concept. Par exemple, une caractéristique de l'homme est de posséder cinq sens, mais certains n'en ont que quatre par accident. Des réflexions sur l'œuvre de Dieu ne sont pas étrangères à ce que les essentialistes aient pris parti de travailler sur l'essence et l'existence d'un concept, et à ce que les nominalistes se soient principalement attachés au fait qu'un mot n'est qu'une abréviation, donnant la pré-existence au concept, qui lui-même procède de l'observation. Soulignons que les nominalistes ne sont pas dans une perspective métaphysique (qui est le propre des essentialistes) mais dans une logique psychologique et méthodologique.
Depuis seulement une cinquantaine d'années environ, ce débat semble abandonné.

II-1.1.2. Le courant nominaliste : aspect abréviatif des définitions

Le terme "nominalisme" a deux acceptions : l'une s'attachant à considérer les définitions sous un angle abréviatif et dénominatif, l'autre dite "méthodologique" s'intéressant à la recherche de la vérité et à la traduction du progrès scientifique (i.e. comment rendre compte du progrès scientifique).

1) Abréviation et dénomination

La première acception du terme “nominalisme”, la plus ancienne, est celle décrite brièvement ci-dessus : le nominalisme est une théorie selon laquelle les idées n'ont pas d'existence réelle mais sont seulement des mots issus de la perception, des étiquettes qui nous servent à désigner de la même façon plusieurs individus. Cette présentation du nominalisme place les définitions sur une fonction de dénomination, ainsi qu’une fonction abréviative. Ainsi, une partie du processus de définition réside dans la dénomination et donc dans le choix d’un nom, ce qui n’est a priori pas sans conséquence, comme le souligne J. Kuntzmann :

> *La dénomination c’est-à-dire le choix d’un nom pour une notion est un acte important. Il marque qu’on porte à cette notion un intérêt durable*[28]*. Il est nécessaire de ne l’accomplir qu’à bon escient. En principe les dénominations ne devraient pas créer de difficultés en mathématique où tout terme a un sens bien précis*[29] (J. Kuntzmann – 1976 - p.78).

En mathématiques, les héritiers des nominalistes sont les formalistes : le langage est primordial, les mathématiques apparaissent comme **un langage**, un discours bien formé[30], avec des termes primitifs, des axiomes, des règles de déduction. C’est un peu la position actuelle des logiciens.

Ceux-ci classent les énoncés mathématiques en deux catégories :

- les énoncés démontrés (théorèmes)
- les énoncés primitifs posés sans démonstration (axiomes).

D’une manière analogue, il est possible de classer les notions qui interviennent dans ces énoncés en :

- notions **définies**
- notions **premières** posées sans définition.

En effet, pour définir une notion, d’autres notions sont utilisées, celles-ci ayant été elles-mêmes précédemment définies. Une telle régression infinie n’est pas envisageable ; ainsi, des notions premières doivent être posées comme point de départ : elles ne renvoient à aucune autre notion ; on les appelle aussi **indéfinissables** ou **termes primitifs**.

De plus, il est préférable que le nombre de ces notions premières soit minimal, ainsi qu’il en est des axiomes.

Ainsi**, pour les logiciens**, **une définition doit être une équivalence entre la notion à définir (*definiendum*) et une expression ne contenant que des notions dont le sens est évident ou déjà expliqué (*definiens*)**.

[28] C’est nous qui soulignons.
[29] C’est nous qui soulignons.
[30] la définition est considérée comme “*un remède à la confusion qui naît dans nos pensées et dans nos discours de la confusion des mots*” Logique de Port-Royal (1ère Partie-Chapitre XII).

Cette position des logiciens a été vivement critiquée par H. Poincaré. Celui-ci note en effet que toute définition implique un axiome où l'on affirme l'existence de l'objet défini. Ici, le mot existence signifie **exempt de contradiction** c'est-à-dire que la définition ne doit pas impliquer de contradiction (cf. Leibniz). Cette idée de non-contradiction n'embarrasse pas les nominalistes, car pour eux, les définitions *nominales* sont libres et ne peuvent être fausses même si le *definiens* est contradictoire ou implique une erreur : il s'ensuivra seulement que le *definiendum* n'existe pas.
De plus, Poincaré rappelle que lorsqu'une définition est donnée, c'est pour s'en servir, et qu'il est possible que deux définitions désignent le même objet : il faut alors soit montrer l'équivalence entre ces deux définitions, soit admettre celle-ci comme axiome indépendant. Ceci est la seconde critique de H. Poincaré à l'encontre des logiciens. Plus généralement, H. Poincaré a ouvertement critiqué les nominalistes :

> *Quelques personnes ont été frappées de ce caractère de libre convention qu'on reconnaît dans certains principes fondamentaux des sciences ; elles ont voulu généraliser outre mesure, et en même temps, elles ont oublié que la liberté n'est pas l'arbitraire. Elles ont abouti ainsi à ce qu'on appelle nominalisme, et elles se sont demandé si le savant n'est pas dupe de ses définitions*. (Poincaré – 1932 - p.3)

Poincaré rejoint par ailleurs la conception de J-F Bonnel[31] (1871) pour qui les deux "*qualités*" nécessaires et suffisantes d'une définition sont la garantie de **l'existence et** de **l'unicité** de l'objet défini.

A propos de **l'existence**, des *propositions fondamentales* servent de base aux définitions (toute définition suppose pour sa justification une proposition *antérieure*) ; *" pour démontrer qu'une construction est possible, il suffit d'indiquer un moyen de l'exécuter* [32] *"*, ceci correspond à ce que certaines classifications de définition appellent définition *par génération* (cf. Durkheim § II-1.5) ou définition *constructive.*
Et Bonnel blâme l'usage très répandu de placer toutes les définitions au commencement d'un chapitre en dehors de toute justification.

Au sujet de **l'unicité**, il s'agit de la démontrer, indépendamment du mode de construction utilisé.

Comme Poincaré, Bonnel se préoccupe de l'enseignement, soulignant l'importance des définitions *dont la mauvaise confection ou l'absence nuit à l'enseignement*. Bonnel ajoute qu'

> ***une bonne définition est pour l'élève une sorte de principe auquel il peut recourir à chaque instant.***

[31] Bonnel a écrit un ouvrage sur les définitions géométriques.
[32] C'est nous qui soulignons.

2) Le nominalisme méthodologique : vérité et progrès scientifique (Popper)

La seconde acception du nominalisme est celle du *nominalisme méthodologique* (plus récente que la précédente, proposée par Popper – 1945). Celle-ci n'est pas incompatible avec la précédente. Le *nominalisme méthodologique* est une théorie selon laquelle la science ne décrit pas le monde tel qu'il est mais seulement tel que la raison peut le connaître.

La question traitée par Popper (1945) est double : comment traduire le progrès scientifique ? La vérité est-elle contenue dans les définitions ?

Nous reviendrons ci-après (§ IV-3) sur l'argumentation de Popper et sa réponse à ces questions.

Mais soulignons d'ores et déjà que le *nominalisme méthodologique* poppérien affirme que la vérité scientifique n'est pas contenue dans les définitions et que l'essentialisme n'est scientifiquement qu'un artifice et surtout qu'il ne pose pas les "bonnes" questions.

Pour montrer cela, Popper critique la présentation aristotélicienne de la définition et distingue mathématiques et logique d'une part, sciences expérimentales d'autre part.

Il est donc nécessaire d'expliciter en quoi consiste le courant essentialiste, ainsi que la théorie aristotélicienne de la définition.

II-1.1.3. Le courant essentialiste

Les héritiers des **essentialistes** pensent que les mathématiques ont une certaine réalité, que ce n'est pas qu'un jeu de symbole, et il serait là préférable de parler du sens plutôt que de l'essence !

Une question reste ouverte : l'existence précède-t-elle l'essence comme l'affirme Sartre ?

Nous avons vu quelques critiques d'inspiration essentialiste (Poincaré, Bonnel). Rappelons, de plus, qu' Aristote, Leibniz, Frege s'inscrivent dans ce courant dont les caractéristiques principales sont : caractériser, rechercher l'existence, montrer la fécondité d'une définition, élaborer une théorie non-contradictoire. Nous allons développer tous ces points ci-après par la présentation de la méthode aristotélicienne de la définition, de la théorie leibnizienne de la définition entre autres. Mais signalons que quelques propos de Leibniz et Frege soulignent la dimension constructive de l'essentialisme : pour Leibniz, c'est l'analyse qui permet de créer des définitions (il s'agit de *l'invention*). Quant à Frege, il réhabilite la dimension constructive de la logique et des mathématiques, et c'est si joliment dit : (partant des définitions,) *on ne peut pas savoir d'avance ce qu'on pourra en déduire* ; ce qu'elles impliquent n'est pas contenu *comme une poutre l'est dans une maison* mais plutôt *comme une plante l'est dans la graine* (Frege – 1969 – p.145 et 212).

En terme de typologies de définition, nous allons reprendre : la classification aristotélicienne, en analysant les points critiqués par le nominaliste Popper ; la classification leibnizienne et son apport en terme de construction de concept ; ainsi que celles proposées par Kant et

Durkheim. Ceci nous permettra de marquer des points importants sur le concept de définition, mais aussi de processus de construction de concept et de définition.

II-1.2. La présentation aristotélicienne de la définition, critiquée par Popper

Aristote aborde la définition en tant que discours d'une certaine espèce, qui exprime l'essence de la chose : elle consiste à donner le **genre** et la **différence spécifique** ("Les Topiques"). Pour connaître l'essence, il faut trouver le **genre** auquel appartient la chose puis un trait particulier qui **différencie** cette chose des autres éléments du genre ; par exemple, « animal » est le genre de l'homme et « raisonnable » est sa différence spécifique.
Et en tant que discours, une définition peut être *incorrecte* (la conception qu'il existe des "bonnes" et des "mauvaises" définitions est effectivement très ancienne…) si :

- elle ne s'applique pas à la chose qui reçoit le nom
- elle n'indique pas le genre
- elle manque de précision
- elle n'exprime pas l'essence
- le langage utilisé est obscur (Aristote condamne notamment l'usage des homonymes, des termes inusités et de la métaphore)
- il y a redondance
- il y a cercle vicieux.

Le point de vue actuel des logiciens se dessine déjà chez Aristote : la définition doit être constituée de termes antérieurs et plus connus, et constitue une **équivalence** entre le défini et le définissant.
Aristote dénonce en particulier le **cercle vicieux** et remarque qu'il est alors indispensable d'expliciter *l'antérieur* et le *postérieur* pour l'éviter ; pourtant, il en est lui-même victime lorsqu'il considère qu'une définition est l'essence d'une chose et que l'essence est … ce qui est énoncé dans la définition ! Définir l'essence est, reconnaissons-le, un exercice délicat et Aristote nous le confirme :

> *Cette question qui jadis, aujourd'hui et toujours a fait l'objet d'une recherche, toujours restée dans l'impasse (...) : qu'est-ce que l'essence ?* (Aristote - Métaphysique Z 1 1028 b2-4)

Les préoccupations d'Aristote ne se limitent pas au discours définissant et se tournent vers la nature de la définition et son **rapport à la démonstration** ("Les Seconds Analytiques"). Comment serait-il possible de déterminer si une définition donnée est vraie ou fausse ? La voie « normale » permettant de s'assurer de la validité d'une proposition est, selon Aristote, de la soumettre au processus de « démonstration » : peut-on appliquer cette méthode aux définitions ? Une définition ne doit-elle pas être donnée comme principe au commencement d'un exposé, et précéder ainsi toute démonstration ? Aristote conclut à toutes ses interrogations de la façon suivante :

> ***jamais (ou rarement) on n'aboutit, dans les discussions, à une définition par le raisonnement ; mais on prend toujours la définition pour point de départ*** (Aristote - Topiques VII,3 p.298).

Cependant, dans le cadre des raisonnements dialectiques, des connaissances premières sont nécessaires. En ce qui concerne les définitions, ces « prénotions » portent sur : l'**existence** de la chose et la **signification** du mot.
Aristote nous démontre que les définitions n'affirment rien sur l'existence ou la non-existence de la chose définie :

> *La définition ne prouve pas que la chose définie existe, puisque, même s'il y a quelque chose qui soit équidistant d'un centre, cependant pourquoi la chose définie existerait-elle ? (...) Les définitions ne vont pas jusqu'à démontrer que la chose définie puisse exister, ni qu'elle est ce qu'on prétend définir : il est toujours possible de demander le pourquoi* (Aristote - Seconds Analytiques II,7 p.185),

et qu'elles *requièrent seulement d'être comprises* (Aristote - Seconds Analytiques I,10 p.58). Mais il ne se résout pas au fait que la définition ne fasse que développer la signification du nom, et qu'il n'y ait que des définitions *nominales* : celles-ci s'avèrent trop arbitraires, engendrent l'insécurité intellectuelle. En effet, Aristote souligne qu'on pourrait définir ce qui n'existe pas du tout ; de plus, aucune démonstration ne peut prouver que tel nom signifie telle chose. Ceci l'amène à distinguer plusieurs sortes de définition :

- **la définition nominale** : elle donne la signification d'un mot mais n'établit pas l'existence. C'est un discours indémontrable de l'essence.

- **la définition par la cause** : c'est un discours qui montre pourquoi la chose <u>est</u> (existe). C'est une sorte de démonstration de ce qu'est la chose et elle ne diffère de la démonstration que par l'ordre des termes.

(exemple du tonnerre : on peut définir ce qu'est le tonnerre par "bruit du feu s'éteignant dans les nuages" : le genre est le "bruit" et la différence, "l'extinction dans les nuages". Dans cette définition, la différence vient après le genre. En revanche, si l'on veut démontrer pourquoi il tonne, le discours sera semblable à celui de la définition excepté le fait que "l'extinction dans les nuages" (la différence) viendra avant "bruit" (le genre)).
On démontre que tel attribut appartient, ou non, à tel sujet et on définit en faisant connaître ce qu'est la chose.

- **la définition des choses qui n'ont pas de cause** : c'est la conclusion de la démonstration de l'essence.

La critique de Popper à l'encontre de la classification aristotélicienne des définitions a pour objectif de montrer que les définitions ne permettent pas d'accéder à la vérité, même sous couvert d'une démonstration de l'existence de la chose définie, ni de traduire le progrès

scientifique (Popper - 1945). Popper présente la théorie aristotélicienne comme s'intéressant à la connaissance, et plus précisément à la connaissance démonstrative (la connaissance des causes) et à la connaissance intuitive (consistant à attraper "*the indivisible form*", l'essence d'une chose). Il décrit précisément que la présentation aristotélicienne, pour éviter le cercle vicieux, présente des éléments premiers, des prémisses : mais comment les obtient-on, interroge Popper ? Et dans ce cas, pour les définitions, comment être certain de ne pas avoir attraper la "mauvaise" essence ?
Popper critique ouvertement ce qu'il appelle "*l'intellectual intuition*", ainsi que l'aspect encyclopédique[33] découlant de la théorie aristotélicienne de la définition et donc l'essentialisme qui ne conviendrait pas aux sciences dites modernes. Il affirme que ce n'est pas une accumulation de type encyclopédique qui permet de traduire le progrès scientifique, mais l'émergence de nouvelles théories apparaissant parfois comme étranges[34], dépassant les anciennes. Ainsi, Popper réprouve l'essentialisme en même temps que la méthode aristotélicienne des définitions, mais aussi le langage nominaliste, les définitions énumératives, qui ne sont selon lui pas appropriés pour les sciences. Il prône alors la nécessité de conjectures et réfutations (Popper – 1961, p.262) et parle de *nominalisme méthodologique* (Popper – 1945).
Le *nominalisme méthodologique* de Popper est une réaction contre la théorie platonicienne des idées dont le problème fondamental réside dans la découverte d'un moyen scientifique d'aborder le monde sensible. Il *"entreprend de décrire comment la chose se comporte selon les circonstances, et plus particulièrement, de déterminer si ce comportement obéit à des règles constantes"* (Popper – 1962 - p.34).

Nous reviendrons en détail sur Popper au paragraphe IV-3.

II-1.3. Leibniz, une théorie de la définition

Leibniz a repris la classification aristotélicienne des définitions, en particulier les définitions *nominales* et les définitions *essentielles*, et, comme tout auteur de son époque, s'inscrit dans la lignée des discussions sur analyse / synthèse[35].
Il développe une véritable théorie de la définition, car, les seuls principes premiers pour Leibniz sont les définitions : une démonstration lui apparaît comme un enchaînement de définitions et il distingue, dans l'art de démontrer, deux arts à savoir *l'art de définir* (analyse) et *l'art de combiner les définitions* (synthèse).

[33] Popper qualifie l'essentialisme d'Aristote de : *"compilation of an encyclopaedia containing the intuitive definitions of all essences, that is to say, their names together with their defining formula"* (Popper–1945–p12).
[34] Par exemple "la terre n'est pas plate".
[35] Leibniz ne pousse pas jusqu'à la conception kantienne où l'analyse devient quasi stérile et où seule la synthèse se révèlerait féconde : il considère que les deux ont leur importance, qu'il ne faut en négliger aucune. *(Leibniz) tente simplement de donner une idée de la manière dont prolifère la complémentarité entre l'analyse et la synthèse à différents niveaux du savoir ou de la méthode.* (B. Timmermans – 1995 - p.161).

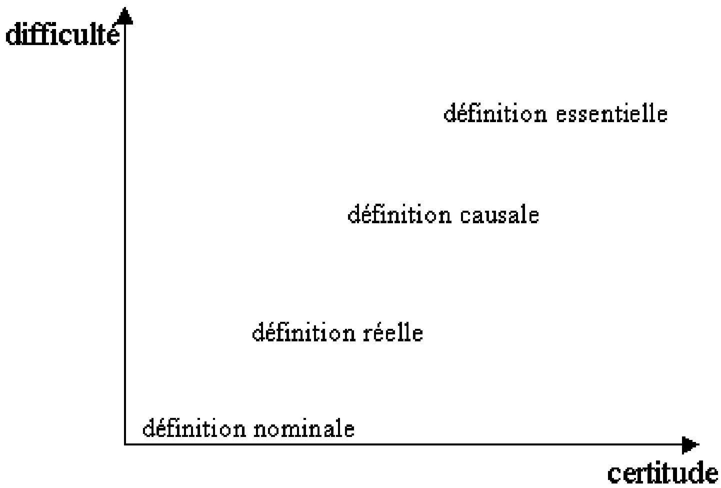
Ainsi, ce qui nous intéresse, c'est que nous trouvons dans les travaux de Leibniz une hiérarchisation de différents types de définition suivant le degré de difficulté et le degré de certitude, mais aussi l'intitulé ***"trouver des définitions"***. Dans les classifications leibniziennes du savoir, nous retrouvons l'activité *"trouver des définitions"* dans le cadre analytique de *"l'art d'inventer"*. Cette activité débouche soit sur une analyse achevée (dites propositions), soit sur une analyse inachevée (dites choses) ce qui requiert alors une synthèse.
La principale préoccupation de Leibniz est qu'une "bonne" définition, au-delà du discours[36] , doit révéler l'**existence** de l'être qu'elle définit[37]. Logiquement, Leibniz reprend pour point de départ à sa classification, les définitions *nominales* : d'une manière générale, il conteste le nominalisme et le fait que certaines définitions soient purement arbitraires ; dans le cas des définitions nominales, celles-ci risquent d'être provisoires, parfois contradictoires, voire illusoires. Par exemple, comment attribuer une essence au décaèdre régulier, qui n'existe pas ? Les définitions *nominales* représentent donc, pour lui, réellement un **danger de contradiction** et ne permettent pas à elles seules de caractériser avec précision le terme en question. De plus, il est impossible de montrer l'équivalence entre deux définitions d'un même concept, lorsqu'elles ne sont que *nominales*, ce qui représente un sérieux inconvénient, des **définitions équivalentes** permettant de multiplier les possibilités de démonstration. Tous ces arguments inciteraient à proscrire les définitions *nominales* : mais Leibniz reconnaît être amené à en utiliser sous réserve que la possibilité du défini soit établie empiriquement ou théoriquement. Il considère alors qu'une définition *nominale* permet de distinguer un objet des autres : celle-ci indique pour cela certains caractères distinctifs de la chose définie, ce qui revient en fait à **connaître en extension**[38] cette chose, au sens scolastique.
A "l'opposé", Leibniz nous présente les **définitions *réelles***, que nous pourrions qualifier de "rassurantes" au regard du discours sur les définitions *nominales* : en effet, elles expriment ou impliquent la possibilité des êtres qu'elles introduisent et préservent ainsi du risque de contradiction[39]. Ainsi, les enchaînements démonstratifs sont "garantis" par l'utilisation de ce type de définitions, alors que les conclusions obtenues par des définitions nominales ne sont qu'hypothétiques. On peut également noter une hiérarchie dans les définitions *réelles* à savoir :

- **les définitions *réelles causales***, lorsque la preuve de la possibilité se fait *a priori* (c'est-à-dire : la démonstration se fait à l'aide de moyens purement logiques, et n'a pas recours à l'expérience) ou lorsqu'une définition *constructive* règle la génération de la chose ;
- et les **définitions *parfaites* ou *essentielles***, quand elles poussent l'analyse jusqu'aux notions primitives, sans rien supposer, qui ait besoin de preuve a priori de sa possibilité.

[36] Leibniz interdit, par exemple, *l'obreption* c'est-à-dire l'application d'une définition personnelle à un mot que d'autres comprennent différemment.
[37] La définition d'un concept impossible, le chimérisme, est proscrit.
[38] Une définition par extension permet de discerner ce qui est de ce qui n'est pas. Elle peut consister en une liste énumérative.
[39] Existence et non-contradiction demeurent en fait des notions solidaires (des idées compatibles entre elles).

En fait, pour Leibniz, les définitions *réelles* sont beaucoup plus que de simples explications, il les considère comme des axiomes ou des postulats. N'oublions pas que Leibniz cherche à démontrer aussi les axiomes, dans la mesure du possible, et que pour lui, ce ne sont pas les axiomes, mais les définitions, qui constituent les bases théoriques (les axiomes ne font qu'énoncer les propriétés des êtres, et sont, en quelque sorte, des *"corollaires des définitions"* pour reprendre l'expression de Knecht - 1981).

Ceci nous amène au diagramme utilisé par B. Timmermans pour préciser la hiérarchie des définitions donnée par la classification de Leibniz en les classant suivant la difficulté pour leur obtention et la certitude qu'elles procurent :

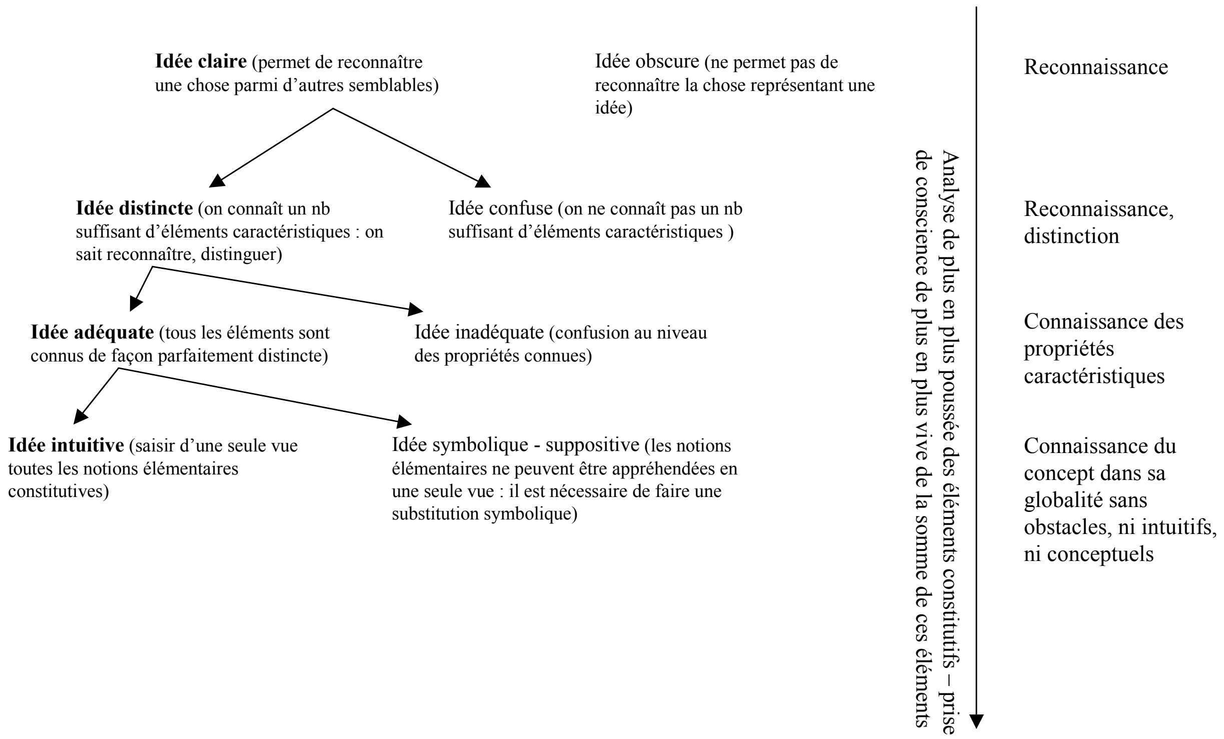


Au-delà de ces types de définitions, ce qui nous semble important dans le discours de Leibniz sur les définitions et sur le cheminement des idées, c'est l'esquisse d'un processus de construction de concept : selon Leibniz, les définitions découlent des idées, d'où différents degrés de précisions et de valeurs :

> *Mais, au fond, une idée n'est parfaitement définie que par l'énumération de tous les termes simples qui la constituent* (Leibniz – Discours de métaphysique).

Il n'est pas question d'écarter l'aspect pris en compte par les logiciens, présenté ci-dessus, Leibniz s'inscrivant également, tout comme Frege, dans une perspective de construction de théorie. Ceci étant, il existe différents types d'idées qui pourraient être les stigmates d'un processus de construction de concept : pour Leibniz, ceux-ci ont été inspirés par sa théorie de la définition. Nous résumons ses propos sous forme de diagramme[40]. Nous avons choisi d'écrire en caractères gras un cheminement d'idées servant notre propos en matière de construction de concept et de définition. Nous avons, en conséquence mis en évidence les étapes balisant ce cheminement (à droite), celui-ci correspondant, pour Leibniz, à une prise de conscience, de plus en plus grande d'un concept.

[40] Cette classification est, entre autres, motivée par des considérations sur l'existence de Dieu.



Dans ce diagramme, ce sont les *idées distinctes* qui relèvent de définitions *nominales* et les *idées adéquates* qui sont appropriées aux définitions *réelles*.

II-1.4. Kant : définitions *analytiques*, *synthétiques* et *intuition*

Kant a souvent fait l'objet de vives critiques sur son analyse des mathématiques, notamment de la part de Couturat [41] (qui se revendique nominaliste), ce qui nous a incités à aller voir plus loin, même s'il ne s'agit pas ici de réhabiliter Kant ! Nous faisons l'hypothèse que l'influence des travaux kantiens sur la pensée de Lakatos et de Popper sont non négligeables[42].
Kant s'intéresse particulièrement au concept et à la construction de concept, ce qui nous a encouragé à reprendre ses travaux afin d'analyser ce qu'ils pouvaient nous apporter. Nous allons présenter la classification des définitions de Kant, tout en tentant de rester fidèle à l'esprit de l'auteur.

Il est important de noter que, Kant s'inscrivant dans un discours métaphysique, parlant d'analyse transcendantale, s'éloigne d'une pensée nominaliste, et donc de la vision abréviative des définitions. Nous avons donc tout à penser qu'il est intéressant de suivre son raisonnement.
Donner un aperçu de l'analyse transcendantale nous permet de situer le sens de *l'intuition* selon Kant, puisqu'elle semble si importante dans le processus de construction de concept. Pour Kant, les concepts ne sont pas empiriques, ils appartiennent à l'entendement et à la

[41] Logicien début XXème siècle.
[42] Lakatos a lu (et cite) Popper et Kant (Critique de la Raison Pure).

pensée. La logique transcendantale s'oppose à la logique générale dans le sens où elle s'intéresse au contenu du prédicat. Ainsi, l'analytique des concepts consiste en *« la décomposition, encore peu tentée, du pouvoir même de l'entendement, pour explorer la possibilité des concepts a priori »* (Kant – 1980 - p.823). C'est le jugement qui constitue la connaissance médiate[43] d'un objet et donc la représentation de celui-ci :

> *Un concept n'est jamais rapporté immédiatement à un objet, mais à quelque autre représentation de celui-ci (qu'elle soit une intuition ou déjà même un concept)* (Kant – 1980 - p.825).

Ce qui nous amène à préciser davantage ce que Kant entend par synthèse *« j'entends donc par synthèse au sens le plus général l'acte d'ajouter les unes aux autres des représentations différentes et de saisir leur diversité en une connaissance »* (ibid. p.832).
Il nous faut souligner de plus la différence qu'effectue Kant entre penser un objet et connaître un objet :

> *A la connaissance appartiennent deux éléments : le concept, par lequel, en général, un objet est pensé (la catégorie) (…) et l'intuition par lequel il est donné.*
> *Par la détermination de l'intuition pure nous pouvons acquérir des connaissances a priori d'objets (dans la mathématique), mais seulement d'après leur forme, comme phénomènes. Par suite, l'ensemble des concepts mathématiques ne sont pas des connaissances par eux-mêmes* (ibid. p.863s).

Pour résumer :

> *Le concept empirique d'une assiette a de l'homogénéité avec le concept géométrique pur d'un cercle, puisque la forme ronde qui est pensée dans le premier se laisse intuitionner dans la seconde* (ibid. p.884).

Kant oppose la méthode philosophique (analytique selon lui) à la méthode mathématique (synthétique). Pour lui, les arguments mathématiques sont synthétiques car constructifs et l'acquisition de connaissances passe par un acte de recherche et de résolutions. C'est ce point précis qui l'amène à la distinction entre définitions *analytiques* et définitions *synthétiques* plaçant les définitions philosophiques à la fin d'un processus et les définitions mathématiques au commencement. Une *définition analytique* consiste à décomposer un concept préalablement existant (c'est en fait une explication) ; ce type de définition est traditionnel en philosophie, où aucune construction n'est effectuée. Une *définition synthétique* est celle d'un concept fabriqué. Elle compose le concept et le forme de toute pièce. Ce type de définition apparaîtrait majoritairement, selon Kant, en mathématiques car il est fondé sur la création **décisoire** de constructions nouvelles, et introduit de nouveaux "*individus*", alors que les autres ne sont que des "expositions".

Soulignons que le principal paradigme mathématique que connaissait Kant était les "Eléments" d'Euclide - et probablement la géométrie de Descartes. C'est pourquoi Kant voit

[43] Médiate (adj.) : dont le rapport à autre chose n'est établi que grâce à un intermédiaire (Dic. Logos Bordas).

la méthode mathématique comme une méthode de constructions, les "Eléments" utilisant le recours aux constructions pour démontrer des théorèmes. Remarquons que les "Eléments" d'Euclide ne contiennent pas la théorie de la définition d'Aristote telle que nous l'avons développé plus haut. En effet, les connaissances de base des "Eléments" sont le vocabulaire et la syntaxe, à savoir des règles "logiques" (*axiomes*) et des règles mathématiques (*demandes*). En particulier, la question de l'existence n'est pas abordée, la principale fonction des définitions étant la délimitation de l'emploi d'un terme[44]. De plus, les définitions des "Éléments" sont de deux sortes :
- Pour le point (*ce dont la partie est nulle*), la ligne (*longueur sans largeur*) … il s'agit d'une **référence**, d'une **description** : le lecteur est censé connaître ce dont il s'agit.

> *Les définitions d'Euclide ne sont pas de vraies définitions, mais plutôt des descriptions d'intuition : elles utilisent des concepts considérés comme premiers alors qu'ils demandent eux-mêmes à être définis* (François Russo - article "Géométrie" de l'Universalis).

- Pour le cercle, par exemple, (*figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles*) un autre type de définition apparaît : un nom est donné à un objet déterminé par une construction ou une **propriété caractéristique**.

Et c'est cela semble-t-il qui a le plus marqué Kant : il aurait cru qu'une des principales singularités de la méthode mathématique serait de considérer des représentations particulières de concepts généraux (Hintikka – 1980 - p.111). Selon lui, "*la connaissance mathématique est la connaissance que nous acquérons par la construction des concepts*". Et construire un concept, *c'est présenter a priori l'intuition qui y correspond* (Kant - 1980).
La notion d'intuition chez Kant est particulièrement complexe : il ne faut pas mettre derrière le mot « intuition » seulement ce que nous connaissons communément. Ce n'est pas une entité linguistique mais plutôt "n'importe quoi" dans l'esprit humain qui "représente" une chose : c'est à la fois une instanciation (chaque idée particulière en tant que distincte des concepts généraux est une intuition), une image mentale (intuition a priori), mais aussi quelque chose de relié à la sensibilité, même si Kant pense que des êtres pourraient avoir des intuitions qui leur seraient procurées par autre chose que les sens :

> *toute expérience contient, outre l'intuition des sens, par laquelle quelque chose est donné, un concept d'un objet, qui est donné dans l'intuition ou qui apparaît* (Kant – 1980 - p.848).

Dans la première édition de la "Critique de la Raison Pure", Kant utilise le terme de *définition réelle* en expliquant :

[44] *Les définitions ne sont faites que pour désigner les choses que l'on nomme, et non pas pour en montrer la nature* (Pascal-1655-p.159).

> *J'entends ici par* Realdefinition[45] *celle qui ne se borne pas à substituer au nom d'une chose d'autres termes plus faciles à comprendre, mais celle qui énonce un caractère si clair, que l'objet puisse être reconnu sûrement dans tous les cas, et qui rend ainsi le concept expliqué utilisable dans ses applications. L'explication réelle (die Realerklärung) serait donc celle qui ne se borne pas à rendre clair un concept, mais aussi la réalité objective de celui-ci.*

Ainsi, **la fonction de reconnaissance** d'une définition et tout **caractère opératoire** de celle-ci se révèlent importants.
C'est dans la deuxième édition de la "Critique de la Raison Pure" que Kant utilise clairement le sens leibnizien de définition *réelle*, et il s'affranchit du problème aristotélicien de l'existence ainsi :

> *Dans les problèmes mathématiques, il n'est nullement question de cela, ni en général de l'existence ; il n'y est question que des propriétés des objets en soi, en tant seulement que ces propriétés sont unies au concept de ces objets* (Kant – 1980 - p.1302).

Le problème de l'existence est écarté : si on pense un concept, il existe forcément, là n'est pas la question. De plus, une définition n'est pas réduite à une dénomination car *« le mot (...) ne doit constituer qu'une désignation* [46] *et non un concept »* (ibid. p.1309).

Ainsi, pour Kant, **l'intuition** (toutes les intuitions sont extensives), **l'anticipation de la perception** (dans tous les phénomènes), **les analogies de l'expérience contribuent à l'accès à la connaissance d'un concept**. Il est nécessaire d'anticiper pour que quelque chose puisse exister, et après il faudra chercher ladite chose, d'où l'intérêt spéculatif de la philosophie transcendantale et donc du **contenu spéculatif de la mathématique pure**.

II-1.5. Durkheim : trois modes de définition = trois processus de définition ?

Au-delà des classifications exposées ci-dessus, présentons les différentes sortes de définition proposées par Durkheim afin d'étudier la question : définir c'est caractériser, oui, mais comment ?
Durkheim donc propose trois manières pour définir les choses :

- **la définition *par génération*** consiste à expliquer comment les choses se sont formées (exemple : le cylindre est le volume obtenu par un rectangle qui tourne autour d'un de ses côtés). C'est, d'après Durkheim, le mode de définition le plus parfait.
- **la définition *par compréhension*** est assimilée par Durkheim à la *définition par genre et différences spécifiques* d'Aristote ; il s'agit d'énumérer tous les caractères, mais il n'est pas nécessaire de tous les donner, car certains peuvent être inclus dans les précédents. (exemple de définition par compréhension : l'homme est un mammifère bimane) ;

[45] Définition réelle.
[46] C'est nous qui soulignons.

- **la définition *par extension*** consiste à énumérer toutes les formes de l'idée que l'on veut définir. Elle désigne donc les objets définis. C'est le mode le plus défectueux selon lui car comment être alors sûr d'être complet ? De plus, la longueur de la définition nuit à sa netteté.

Ainsi, une méthode de définition serait d'expliquer la génération d'un objet ou d'un concept mathématique, conformément à des critères essentialistes, une autre consisterait en rechercher le genre et les différences spécifiques ; quant à la dernière, dite défectueuse, elle s'inscrit également dans une perspective de construction de définition, i.e. définir *par extension* peut être un processus de définition.
Sur les définitions elles-mêmes, Durkheim affirme qu'elles doivent être *courtes*, *claires*, *adéquates* à l'objet défini : ceci est très aristotélicien. Et cela n'a rien d'étonnant, Durkheim critiquant par ailleurs le *pur nominalisme*, car

> *Quand nous pensons une idée générale, nous pensons autre chose qu'un mot. Sans doute il y a là une association très forte et qui fait illusion. Mais un mot n'est qu'un signe, et un signe n'est intelligible pour nous que si nous connaissons déjà la chose signifiée* (Durkheim – 1884 – lecture 29).

Nous rejoignons cette critique du nominalisme dans notre étude.
De plus, il déclare que *« la définition ne fait que développer ce qui y est contenu »* (Durkheim – 1884 – lecture 49). La raison en est que Durkheim expose brièvement la méthode utilisée dans *les sciences mathématiques*, en la séparant en deux parties : *l'invention* et la *démonstration*. En mathématiques, il faut d'abord inventer et faire appel à l'imagination, puis démontrer les *vérités* inventées. Ainsi, Durkheim place les définitions dans la partie "*démonstration*" où elles apparaissent alors comme élément de celle-ci, avec les axiomes et la déduction. Ce qui signifie que ce qui est contenu dans une définition a été inventé dans un premier temps, et donc pré-existe à la définition. Il nous reste à comprendre quels types d'activité prennent part à *l'invention*. Il est intéressant de noter que Durkheim présente, à l'image de son exposé des définitions, une *Lecture sur les opérations complexes de l'esprit* : le *jugement* (défini comme *opération par laquelle l'esprit affirme qu'une idée convient à une autre idée – exemple : l'homme est mortel*) va être l'objet d'une classification *extension* / *compréhension*. S'inspirant alors de la classification kantienne analytique/synthétique, Durkheim développe sur un exemple (l'idée du moi) les relations entre concept et existence de celui-ci :

> *On le conçoit comme en dehors de toute relation avec l'existence. On le pense seulement comme un ensemble de propriétés ; ensuite on établit une relation entre cette notion et celle d'existence. On voit qu'elles se conviennent. On forme alors le jugement : je suis* (Durkheim – 1884 – lecture 29).

En définitive, la typologie des définitions de Durkheim nous conduit à trois processus de définition en mathématiques (par *génération*, par *compréhension*, par *extension*). Cependant, nous n'avons pas accès à des types de situations engageant ces processus de définition. De plus, nous ne pouvons affirmer que ce sont là les seuls processus de définition existants, pas plus que nous ne pouvons décrire l'activité de construction de définition d'un chercheur professionnel. Nous présenterons ultérieurement en détail le travail effectué à ce propos par Lakatos (seul texte écrit s'il en est sur le sujet !).

II-1.6. Tableau récapitulatif : classifications et types de définition

Nous synthétisons dans un tableau récapitulatif les différentes classifications de définition présentées ci-dessus pour mettre en évidence leurs caractéristiques principales, à savoir : les types de définition et leur caractérisation, mais aussi les aspects que revêtent chaque classification (du point de vue du concept de définition), la caractérisation de "définir" donnée par chaque auteur, ainsi que les fonctions de la définition. Ces trois derniers points nous sont particulièrement utiles dans une perspective d'étude de processus de construction de définitions.

	Types de définition	Caractéristiques de ces types	Aspects	Caractérisation de définir	Fonction de la définition
Aristote	- Nominale - Par la cause - Définition des choses qui n'ont pas de cause	Signification d'un mot, sans l'existence Discours montrant pourquoi la chose est [47]. Conclusion de la démonstration de l'essence	Dénomination Existence Langage, logique	Etablir genre et différences spécifiques Etablir l'essence	Communication

[47] Il faut comprendre ici : « est » = « existe ».

	Types de définition	Caractéristiques de ces types	Aspects	Caractérisation de définir	Fonction de la définition
Leibniz	- Nominale - Réelle : Réelle causale Réelle essentielle (parfaite)	Absence d'existence Caractérisation + existence Existence du fait de l'expérience (physique) Existence établie, compatibilité, ascendance jusqu'aux éléments premiers (mathématiques)	Dénomination Existence Axiomatique Caractérisation et connaissance du concept (globale et locale)	Art d'inventer	Reconnaissance Connaissance globale et locale du concept
Kant	- Analytique (= tautologie selon Wittgenstein) - Synthétique (typiquement mathématique)	= la définition d'un concept pré-existant donné : c'est une explication, une exposition, mais pas de construction = la définition d'un concept fabriqué ; elle le compose et le forme de toute pièce (construction).	Définition=exposition ; pas de problème pour l'existence. Aspect spéculatif Définition au commencement (pas de preuve). Les définitions synthétiques ne peuvent jamais être fausses.	Présenter originairement un concept (pas besoin de preuve)	Donner le concept Reconnaissance
Durkheim	- Par génération - Par compréhension - Par extension	La construction de l'objet est donnée dans la définition CNS Enumération	Définition : claire, courte, adéquate Enumération Construction de l'objet	Genre et ≠ spécifiques Définition énumérative	Construction de l'objet Caractérisation (voire liste) Outil dans une démonstration

Ce tableau constitue un panorama “d’anciennes” discussions concernant le concept de définition en sciences[48]. Il synthétise surtout les commentaires d’auteurs essentialistes et nous apporte des éléments complémentaires sur le concept de définition, mais souligne aussi une dialectique possible entre construction d’objets ou de concepts d'une part et définitions d'autre part.

Dans notre perspective de recherche et d’étude de processus de construction de définition, nous pouvons commenter ce tableau ainsi :

Certains points relèvent d’une définition en tant qu’**énoncé** : une définition se doit d’être courte, claire, adéquate (Durkheim), non ambiguë ; elle doit exposer clairement le défini et le définissant (Aristote) et ne pas se réduire à une dénomination (Aristote, Leibniz).

Si nous nous concentrons maintenant sur ce qui relève d’une **activité de définition**, en dialectique avec la construction d’un objet ou d’un concept scientifique, nous récupérons les points suivants : le problème de l’existence d’un objet à définir est un faux problème (Kant) dans le sens où il est possible de travailler à la construction d’un objet mathématique sans nécessairement pré-supposer son existence ; n’oublions cependant pas que la question de l’existence et de la preuve de celle-ci est très importante chez les essentialistes (Aristote, Leibniz). Par ailleurs, définir un concept a pour fonction de caractériser ce concept en vue de le connaître, de le reconnaître (Leibniz), de l’utiliser dans une démonstration (Durkheim) et pas seulement d’exposer ce qu’il est (Kant), mais aussi de structurer un exposé théorique et de veiller à la cohérence axiomatique (non-contradiction : Leibniz, Frege). **Etudier la fonction d’une définition dans un processus de construction de définition** est donc important.

De plus, parmi les processus de définition, nous retenons : la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* (Aristote, Durkheim), la définition *par génération* et la définition *par compréhension* (Durkheim) ; ce qui nous amène à souligner l’importance d’une étude plus approfondie en matière de processus de construction de définition à partir de ceux-ci.

II-2. Classifier relève-t-il d'un processus de définition ?

Notre questionnement sur le concept de définition pourrait se limiter aux mathématiques : c’est-à-dire qu’est-ce que le processus de définition, comment les définitions (en tant qu’énoncés) sont-elles considérées en mathématiques ? Ce genre de questionnement nous a conduit tant en épistémologie qu’en philosophie à Lakatos et à la quête des universaux (à savoir le débat essentialiste versus nominaliste).

Nous allons montrer que rechercher les (ou des) motivations profondes de la construction de définition en sciences permet de répondre à des questions centrales du type : existe-t-il une

[48] Nous utilisons ici le terme “sciences” plutôt que “mathématiques” car les auteurs cités ici n’ont pas toujours limité leurs propos au domaine des mathématiques.

(ou des) « méthode(s) » pour définir ? En quoi sont–elle(s) spécifiques à la discipline considérée ? A chaque type de problème[49] correspond-il une méthode de définition ?

II-2.1. Rejet de l'essentialisme : la taxinomie[50]

Il est difficile de trouver des textes expliquant formellement des processus de définition, tant en mathématiques que dans d'autres disciplines scientifiques. Dans un contexte déjà ancien essentialiste/nominaliste, nous avons pu débusquer des éléments de processus de définition à l'occasion de rupture c'est-à-dire de manifestation d'anti-essentialiste ou d'anti-nominaliste. Nous avons en effet présenté la classification aristotélicienne des définitions (essentialiste) et la critique poppérienne de celle-ci (nominaliste "méthodologique"). De plus, des auteurs essentialistes tels que Leibniz, Frege proposent une légère critique du nominalisme.
En ce qui concerne plus précisément les anti-essentialistes, exception faite de Popper, il nous faut préciser que ceux-ci se manifestent aussi dans le cadre des sciences expérimentales.
Ainsi, nous allons relever quelques critères, en taxinomie, révélateurs du rejet de l'essentialisme aristotélicien.
La taxinomie est un lieu où l'activité de classification prédomine. Les biologistes utilisent explicitement la méthode aristotélicienne (de définition par genre et différences spécifiques) pour leur tâche de classification. C'est donc un lieu propice à l'observation d'un processus de définition, dit essentialiste, appelé classification typologique en taxinomie.
La taxinomie est aussi une discipline qui a vu nettement surgir des anti-essentialistes revenant sur le processus de définition aristotélicien.
Popper, par exemple, critique l'approche aristotélicienne essentialiste en sciences expérimentales. La remise en cause de Hull et Sober[51] de cette méthode essentialiste est motivée par la discipline de taxinomie et sa fonction de classification elle-même : il faut faire acte de la théorie de l'évolution et utiliser un processus de définition permettant de tenir compte de celle-ci du fait de l'incompatibilité présumée du mode de définition de l'essentialisme avec le transformisme continu des espèces.
Ces auteurs mentionnent en particulier que ce problème ne se pose pas, par exemple en géométrie. Leur solution prend en compte le fait que, sur le plan taxinomique, il n'est pas envisageable de déterminer des genres (au sens aristotélicien, tels que familles, ordres, etc.) car on trouve rarement une propriété importante à la fois exclusive à un groupe (genre) et possédée par tous les membres du groupe.
D'où un nouveau mode de définition tel que :

- parmi les propriétés énumérées dans la définition, aucune d'elles et aucun sous-ensemble ne sont nécessaires :
- et que n'importe quel sous-ensemble est suffisant.

[49] A supposer qu'une telle classification de problèmes puisse être établie.
[50] Taxinomie : classification d'éléments (exemple : taxinomie botanique).
[51] Biologistes.

Hull souligne que, contrairement aux définitions traditionnelles, ces définitions ainsi construites, peuvent être modifiées : une telle définition est ainsi *"de longueur indéfinie"*, et les propriétés présentes dans une telle définition doivent obligatoirement apparaître dans l'explication du sens d'un mot.

II-2.2. Classification et hiérarchie en géométrie et en sciences naturelles – L.Liard

Nous avons évoqué ci-dessus le problème rencontré par les biologistes à l'égard des définitions du fait de la théorie de l'évolution.

Nous nous interrogeons sur l'activité de classification et sur le processus de définition qui en découle. Le mot 'classification' appelle celui de 'hiérarchie'. Nous verrons plus loin (chapitres III et IV) que l'aspect hiérarchique des définitions en mathématiques apparaît fréquemment lors d'analyse de conceptions d'enseignants et d'élèves.

Ce point est repris par Louis Liard[52]. Sa thèse porte sur les définitions en géométrie et en sciences naturelles (dites définitions empiriques) et nous amène sur le terrain de la classification. Ce travail de la fin du XIXème s'inscrit dans des considérations aristotéliciennes (définition *par genre et différences spécifiques*, dite *théorie logique de la définition*) et pose des questions dignes de Leibniz et/ou de Kant : *d'où nous viennent les éléments de nos idées ? Comment se combinent-ils pour former ces systèmes que nous décomposons ensuite ?* etc. Liard affirme alors que :

> *Toutes ces questions n'ont pas reçu de réponse, la définition est un pur jeu de l'esprit. On en connaît peut-être le mécanisme, mais on en ignore à coup sûr la nature, la valeur et le rôle* (Liard – 1873 - p.18).

Il apparaît alors, pour Liard, **un mode de définition commun à la géométrie et aux sciences naturelles : le processus aristotélicien de définition *par genre et différences spécifiques***. Cependant, Liard effectue une distinction dans la mesure où, selon lui, les définitions géométriques n'ont pas une origine empirique contrairement aux définitions en sciences naturelles. Liard insiste sur la création de l'esprit en géométrie (à l'image de Kant semble-t-il) ; nous percevons chez Liard le fait que les définitions géométriques ne peuvent être fausses :

> ***Les définitions géométriques sont absolues, immuables et inflexibles***. Alors que ***la notion empirique n'est jamais définitivement close. Les définitions empiriques sont donc provisoires et progressives*** (ibid. p.91).

Comment alors envisager un processus de construction de définition en mathématiques ?

[52] Directeur de l'enseignement supérieur en 1870, agrégé de philosophie.

Du point de vue de l'aspect classificatoire, Liard distingue encore géométrie et sciences naturelles car il y a *dérivation*[53] en géométrie, pas en sciences naturelles :

> *L'essence, dans les notions géométriques, ne ressemble pas à l'essence dans les notions empiriques. Les caractères d'un être vivant (...) sont unis par un lien de subordination ; mais, les plus généraux étant posés, on ne peut pas en déduire les moins généraux (...) Au contraire, dans les notions géométriques, l'enchaînement des caractères essentiels est tel que, l'un d'eux étant posé, tous les autres en dérivent* (ibid. p.81).

Remarquons que, chez Liard, le nom est effectivement une abréviation, permettant de raccourcir le langage (étiquette) et est postérieur à la génération de la chose. Et Liard adhère à cette assertion de J.S.Mill[54] : "*les termes techniques qui correspondent aux définitions d'Euclide pourraient être mis de côté sans que la certitude des vérités géométriques fût en rien altérée*".

Nous avons dressé un tableau récapitulatif mentionnant les différences entre les définitions en géométrie et les définitions en sciences naturelles, selon Liard (les termes de définitions *analytique* et *synthétique* ont été définis au paragraphe II-1.4 sur Kant).

Caractéristiques	**Définitions en géométrie**	**Définitions empiriques en sciences naturelles**
Définir =	Préciser la limite d'une notion	Enoncer un contenu
Mode de définition Existence	Définition par génération, formelle (a priori) = oeuvre de l'esprit, ce qui implique que l'existence vient de l'acte intellectuel qui la crée.	Définition par composition, matérielle (a posteriori) = expérience Il y a pré-existence
Type de déf.	Définition synthétique	Définition analytique
Statut de la définition	Définitive et immuable	Progressive et toujours provisoire
Rôle, fonction	- Une définition est un principe de la connaissance - Double rôle dans la démonstration : interprétation des données, intermédiaire dans le raisonnement (importance des relations entre notions) *« les définitions fournissent les données des questions à résoudre et les intermédiaires qui les unissent dans la démonstration »* (Liard-1873-p.121)	Une définition est un résumé. Elle établit une classification.
Place des définitions	Au début d'un exposé Les définitions précèdent le développement. Il est possible de tirer des conséquence des définitions (dérivation)	A la fin d'une recherche Faire la science avant les définitions ***« la classification et la définition sont à la fin, et non pas à l'origine de la science »***(p.199)

[53] Liard ne définit pas ce terme. Une définition du terme *dérivation* est donnée par Carnap : une *dérivation* est une déduction non démonstrative. Popper effectue un parallèle entre les problèmes de dérivation et les problèmes de définitions.
[54] Logicien.

II-2.3.Conclusion sur l’activité de classification

Il apparaît que la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* semble être habituellement utilisée dans l’activité de classification, ce qui semble naturel. Ce mode de définition répandu s’appliquerait de manière plus pertinente à des objets dits idéaux (tels ceux rencontrés en mathématiques) ou tout au moins non susceptibles d’être sujets à une évolution (telles les espèces). Ceci étant, la présentation ci-dessus n’explique en rien le mécanisme propre à ce mode de définition aristotélicien, ni les contraintes qu’il génère sur une définition. De plus, cela ne répond pas à la question : existe-t-il d’autres situations (autres que des situations nécessitant une classification) pour lesquelles le processus de définition *par genre et différences spécifiques* est opératoire ?
Nous allons donc, dans le paragraphe suivant, faire un état détaillé de processus de définition découverts dans la littérature, rechercher s’il existe des conceptions fortes en la matière et préciser notre propre conception.

III- Processus de construction de définitions dans la littérature

III-1. Enseignements extraits de l’étude des différents types de définitions

Les discussions des mathématiciens, logiciens et philosophes précédentes nous ont éclairé sur le terme “définition” et ses acceptions, mais aussi sur des processus de construction de définition. Nous rappelons que nous avons étudié différentes typologies des définitions : Aristote, Leibniz, Kant, Durkheim, Liard.
Nous nous proposons de structurer les enseignements de cette étude en trois points :

- premier enseignement : les mathématiques, ou plutôt la pratique mathématique, requièrent une pensée, un état d’esprit “expérimental”, ainsi qu’une dose d’intuition (Kant, Durkheim) ;
- deuxième enseignement : l’étude de différents types de définition nous apporte quelques caractérisations dynamiques du concept de définition et donc une première ouverture sur des processus de construction de définition (Aristote, Leibniz, Durkheim) ;
- troisième enseignement : analyser différents types de définition ne suffit pas pour décrire des processus de construction de définition.

Nous annonçons ici quelques questions résurgentes chez les auteurs que nous allons exposer, pour ne pas les perdre de vue :

- l’objet à définir pré-existe-t-il ? ;
- la définition ne serait-elle qu’une dénomination ? ;

- quelle(s) fonction(s) attribuer à une définition (communication, exposition, reconnaissance, connaissance d'un concept) ?

III-1.1. Mathématiques versus sciences expérimentales

Ce titre a pour but d'interpeller. Les méthodes de recherche utilisées en mathématiques et en sciences expérimentales sont-elles si différentes ? Si nous en croyons les propos de Liard et de Popper, oui, car ces auteurs considèrent les sciences mathématiques comme *immuables*. Mais si nous nous référons à Kant, les mathématiques possèdent un aspect spéculatif. De plus, Leibniz traite de l'*art d'inventer ("trouver des définitions")* et Durkheim place l'invention dans la méthode des sciences mathématiques. De plus, nous allons étudier comment Lakatos récupère la découverte heuristique développée par Popper et l'applique aux mathématiques (paragraphe IV-4).

Ainsi, pour étudier des processus de construction de définition, il nous faut donc sortir de l'aspect "figé" des exposés théoriques d'usage en mathématiques et nous concentrer sur une conception des mathématiques selon laquelle une pratique "expérimentale" est nécessaire à toute activité de construction de concepts et de leur définition. Cet aspect "expérimental" voit la définition comme un **aboutissement**,

> *(...) le phénomène m'apparaît absolument général : les définition pertinentes en mathématiques sont l'aboutissement d'une longue histoire et de beaux travaux (...) et leur puissance vient justement de ce qu'elles sont un élixir de pensée.* (Kahane – 1999 – p.11)

et accepte qu'une définition soit provisoire. Celle-ci peut être au commencement, sans qu'aucune preuve d'existence n'ait été établie (Kant) : cette définition sera alors **provisoire** et donc amenée à évoluer.

III-1.2. Premiers éléments pour une étude de processus de construction de définition - Insuffisance d'une étude de typologies de définition

Nous avons décrit différents types de définition et spécifier pour chacun des caractéristiques, à savoir les aspects prédominants de ces types, les fonctions d'une définition, ainsi que les caractérisations de "définir" disponibles chez chacun de ces auteurs. Ces typologies induisent des processus de définition : la méthode de définition *par genre et différences spécifiques*, la définition *par génération*, la définition *par compréhension* (cf §II-1.5) Nous avons vu, par exemple, que la forme même de certaines définitions apportait un mode de génération de l'objet défini (Durkheim) et donc, implicitement un processus de définition (i.e. rechercher à construire, générer l'objet mathématique).

Cependant, ces mêmes typologies ne nous permettent pas d'appréhender pleinement les processus de construction de définition : par exemple, la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* (Aristote) nous indique comment procéder de manière générale pour définir. Nous avons remarqué en particulier que définir suivant cette méthode nous permet d'établir des classifications (sciences naturelles, géométrie). Ceci ne répond pas aux questions suivantes : le processus aristotélicien produit-il autre chose que des définitions classificatrices ? Si oui, est-il possible de décrire plus avant ce processus et ainsi mettre en évidence un processus de construction de définition à plus large portée qu'une simple classification ?

III-2. Existe-t-il des conceptions significatives permettant d'étudier des processus de construction de définitions ?

Nous avons relevé des éléments significatifs qui nous semblent maintenant incontournables dans toute étude sur la définition. Parmi ceux-ci, rappelons l'importance du débat essentialisme / nominalisme (Aristote, Leibniz / Popper), la notion d'invention en mathématiques (Leibniz, Kant), l'étude de l'axiomatique et l'inscription des définitions dans une théorie (Leibniz, Frege, Popper) et l'aspect classificatoire que peuvent avoir certaines définitions (Aristote, Liard).

Nous avons vu en particulier qu'il était nécessaire de considérer l'aspect expérimental, heuristique de l'activité mathématique pour la description et l'analyse de processus de construction de définition.

Nous retrouvons ceci chez Lakatos : rappelons que sa thèse surtout et son ouvrage "Preuves et réfutations" semblent être actuellement les seuls écrits concernant spécifiquement le concept de définition et l'activité de construction de définition. Il est important de noter que Lakatos n'est pas étranger à la pensée de Popper : en effet, dans les textes de Lakatos se trouvent de nombreuses références à Popper, notamment "The Open Society and its ennemis" (1945), dans lequel un chapitre[55] est consacré à une critique de la présentation aristotélicienne des définitions, mais contient aussi des renvois à la pensée kantienne.

Ainsi, puisque nous projetons d'expliciter ce que nous appellerons dorénavant les conceptions aristotélicienne et lakatosienne, nous présenterons également la pensée de Popper et sa conception de la définition, et ce, pour deux raisons :

- les écrits de Popper nous permettra de situer plus précisément la conception lakatosienne dont la notion de "réfutations", et nous apportent une critique de la conception aristotélicienne ;

[55] Ce chapitre (chapitre II), consacré aux définitions, n'apparaît pas dans la traduction française de "The open society and its ennemies" (Popper-1962).

- la conception poppérienne de la définition en elle-même se place davantage dans un usage axiomatique des définitions, ce qui complète l'approche rhétorique de la conception aristotélicienne et l'approche heuristique lakatosienne.

L'étude de ces trois conceptions apporte donc une complémentarité sur le concept de définition : la conception aristotélicienne développe des composantes logiques et langagières (étude du discours), celle de Popper propose une théorie de la théorie (étude théorique), et la conception lakatosienne s'intéresse à la construction de définitions parallèlement à la construction de concepts (étude heuristique).

III-3. Choix d'un outil théorique pour modéliser ces conceptions

Un outil théorique pour modéliser ce que nous appelons les conceptions aristotélicienne, lakatosienne, poppérienne est maintenant indispensable. Nous n'avons pas la prétention de décrire les conceptions de ces trois auteurs ; leurs écrits ne nous le permettent pas de toute façon. Nous voulons étudier dans quelle mesure chacune de ces conceptions sur le concept de définition peut être plongée dans une problématique de construction de définition : l'objectif est de mettre en évidence de véritables processus de construction de définition, ceux-ci contenant de nombreux implicites au regard des textes d'Aristote, Popper et Lakatos dont nous disposons.

La problématique d'Aristote n'était pas la construction de définition, mais l'étude du discours (rhétorique) et de la logique. Ce qui ne veut pas dire que sa conception n'apporte rien sur le plan du processus de construction de définitions.

Lakatos s'inscrit dans une perspective heuristique mais ses écrits ne relèvent pas d'une institutionnalisation du concept de définition, ni de processus de construction de définition. Notre objectif est donc de faire une lecture de Lakatos permettant de systématiser le processus de construction de définition présenté sur l'exemple des polyèdres. C'est une lourde tâche car ce processus est mis en œuvre sur un exemple historique. Il va donc s'agir de rechercher des invariants de celui-ci. Parallèlement, il est nécessaire d'appréhender une partie de la culture de Lakatos par l'étude de certains auteurs auxquels il fait référence tel Popper.

Popper se place davantage dans une approche axiomatique, étudiant la construction de théorie (c'est aussi le cas chez Leibniz et Frege). Il s'intéresse à deux problèmes distincts : la recherche de (la) vérité et une réponse à la question "comment traduire le progrès scientifique ?" d'une part, et l'élaboration d'une théorie (point de vue axiomatique) d'autre part. Le traitement poppérien au premier problème l'amène à la critique de la présentation aristotélicienne des définitions et de l'aspect encyclopédique qu'elle induit. Le second amène Popper à préciser le rôle (la fonction) des définitions dans une axiomatique. Dans l'étude qui nous intéresse, nous avons analysé la critique poppérienne et appellerons conception poppérienne le traitement du problème des théories scientifiques selon Popper.

Il nous faut donc déterminer des invariants dans chacune de ces conceptions permettant de décrire des processus de construction de définition. Il nous faut également tenir compte des problèmes en jeu. Nous utiliserons donc pour cela le modèle cK¢ qui nous semble le plus approprié pour l'explicitation de ces conceptions au regard de ce que nous voulons obtenir (i.e. une modélisation de processus de construction de définition). Soulignons le fait que la modélisation de conceptions sous cet angle théorique annonce nécessairement une relecture d'auteurs (Aristote, Lakatos et Popper).

L'étude de ces conceptions va nous permettre de souligner, en particulier, les influences de Popper et Aristote sur Lakatos. C'est pourquoi nous présenterons les conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne dans cet ordre. De plus, l'utilisation du modèle cK¢ va nous permettre d'établir une typologie de problèmes de construction de définitions.

IV- Présentation de trois conceptions sur la définition

IV-1. Objectifs de ces modélisations via cK¢

Les objectifs de la modélisation de conceptions par le modèle cK¢ sont de différentes natures. Il s'agit dans un premier temps d'utiliser ce modèle pour structurer l'exposé des conceptions. De plus, dans la mesure où il semble y avoir de fortes conceptions depuis longtemps sur le concept de définition, il nous faut en relever quelques unes "significatives", et ainsi essayer de rallier sous un nombre minimal de conceptions toutes les préoccupations (niveaux de préoccupation) sur la définition en mathématiques, de l'existence à la dénomination en passant par l'axiomatique et la construction de concepts. Et dans notre étude, "significatif" signifie : attraper le plus d'éléments sur la définition et les processus possibles de construction de définitions en vue de les utiliser pour l'étude de conceptions d'élèves et d'enseignants, le calcul de situations et l'analyse des expérimentations. Rappelons que les éléments de conceptions décrits dans les paragraphes précédents ne peuvent pas être directement rattachés à une classe de problèmes de construction de définition, tout simplement parce que construire des définitions en mathématiques n'était pas nécessairement l'objet d'étude des auteurs retenus. L'explicitation d'opérateurs et de contrôles de ces conceptions nous permettra de mettre en valeur les composantes importantes dans tout processus de construction de définitions. Ce qui nous conduit à notre troisième objectif : nous projetons d'établir une typologie de problèmes caractéristiques pour la construction de définition. Ceci sera facilité par l'étude des opérateurs et contrôles disponibles dans les conceptions modélisées.

Il faut rappeler que l'une des difficultés reconnues du modèle cK¢ est la définition de l'ensemble des problèmes caractérisant une conception[56]. En effet, il faut des problèmes pour définir une conception et réciproquement une conception doit renseigner sur l'ensemble de problèmes sur lequel elle est opératoire (domaine de validité). Nous allons tout d'abord modéliser ces conceptions en tentant de resituer les problèmes des auteurs car sinon, il est difficile d'interpréter les opérateurs et contrôles quand, dans un premier temps, abstraction est faite des problèmes considérés.

IV-2. Conception aristotélicienne

Nous avons décrit quelques éléments clés de la conception aristotélicienne (§ II-1.2) : Aristote s'intéresse au concept de définition du point de vue du **discours** et de la **logique**. Dans ce cadre, il propose différents types de définitions ainsi qu'une méthode de définition (dite *par genre et différences spécifiques*).

Pour Aristote, l'acte de définir est dénommé et se fait *par genre et différences spécifiques* ; il n'y a qu'une définition d'une 'chose' et celle-ci doit expliquer l'essence de cette 'chose'. Les textes aristotéliciens à ce propos s'inscrivent dans une tradition du discours. De ce point de vue, le *système de représentation* (L) fait référence essentiellement aux règles du discours et du langage, mais aussi à des aspects d'ordre logique.

Les *opérateurs* (R) et *structures de contrôle* (Σ) concernent le processus de définition d'une part et l'énoncé de la définition d'autre part.

En matière de processus, tout repose sur l'acte de définition *par genre et différences spécifiques*. Ainsi, procéder par *genre et différences spécifiques* est un premier opérateur. Notons que la recherche du genre et des différences spécifiques peut être interprétée en terme de recherche des invariants (d'un point de vue mathématique) à partir d'une représentation donnée de l'objet (ou du concept mathématique) d'où l'importance du système de représentation ainsi non limité strictement au discours et à la forme langagière de la phrase définissante. Cet aspect ne fait pas partie de l'exposé aristotélicien mais en découle.

Le discours, au centre des préoccupations aristotéliciennes, accompagne la définition *par genre et différences spécifiques* : le discours de la définition et sur la définition doit être précis, doit donner le genre, doit concerner la chose définie qui reçoit le nom (importance de la dénomination) et doit donner l'essence de la chose définie. Les homonymes, redondances et métaphores sont proscrites (une métaphore est inadéquate pour la compréhension de la nature de la chose). Les *opérateurs* aristotéliciens langagiers peuvent également être mobilisés comme *contrôles* (Σ). De plus, des opérateurs logiques interviennent : en particulier, le cercle

[56] Il est tout aussi difficile d'accéder à une situation fondamentale. En ce qui concerne les concepts, ce que développe Vergnaud est également sujet à ce genre de difficulté.

vicieux est proscrit. Aristote, dans le but de l'éviter lors du processus de définition (une définition ne doit pas définir la chose par elle-même) dit n'avoir d'autre choix que d'expliciter l'antérieur et le postérieur, c'est-à-dire : ce qui est connu / pas connu. Cet aspect dual (comment faire des connections entre une nouvelle information et des connaissances antérieures) est incontestablement significatif dans tout processus d'apprentissage d'un nouveau concept.

Le cercle vicieux – à éviter selon Aristote et les logiciens – rejoint l'idée de régression à l'infini. Plus précisément, cela nous permet ici d'insister sur l'importance, dans toute construction axiomatique, des éléments premiers. Certaines définitions, les définitions récursives, peuvent donner l'illusion d'un cercle vicieux dans la mesure où d'une certaine façon, on définit un objet par lui-même (c'est typiquement le cas avec la définition de factorielle par exemple). Nous illustrerons cet aspect lors des expérimentations.

Les *structures de contrôles* (Σ) de la conception aristotélicienne reprennent trois sujets : le langage, l'existence et l'essence, le cercle vicieux.
En ce qui concerne les relations entre essence et existence, les textes d'Aristote prêtent à confusion … mais nous pensons que la question de l'existence est importante d'un point de vue essentialiste lorsqu'une définition "correcte" est attendue. Dans notre lecture de la conception aristotélicienne, les choses définies préexistent à leur définition. De plus, une littérature considérable (Frege, Leibniz pour ne citer qu'eux) n'a de cesse de poser la question de l'existence des choses définies. En particulier, Frege considère une définition comme une proposition à découvrir et prouver (preuve de l'existence) et une définition "correcte" ne doit conduire à aucune contradiction, ce qui confirmera et justifiera logiquement celle-ci. Cela constitue un aspect axiomatique. Dans le processus de recherche, l'activité consistant à s'assurer de l'existence de l'objet défini est en aval de la construction de définition, et peut-être pris comme un contrôle logique lors de l'élaboration d'une théorie mathématique. Considérer le problème de l'existence indépendamment de la question de la définition a conduit les logiciens comme J.S. Mill à ne prôner que l'usage de définitions *de mots* (*nominales*) car les définitions *de chose* contiennent un postulat d'existence, qui est en lui-même tout autre chose qu'une définition, et donc, il n'y a en réalité que des définitions *de mots* (cf. J.S. Mill – 1889 - I-VII-§5).

Résumé de la conception d'Aristote : des opérateurs et structures de contrôles langagiers, logiques et essentialistes. Une méthode de définition dite *par genre et différences spécifiques*. Fonction de la définition : communication.
Problèmes concernés : classification (exemple de la géométrie), et plus largement, des problèmes où une action de délimitation est possible (au sein d'un même genre par exemple) c'est-à-dire où la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* est opératoire.

IV-3. Conception poppérienne

Quelques termes permettent de situer rapidement la pensée de Popper : nominalisme, hypothético-déductivisme, anti-inductivisme (inspiré par Kant *« notre intellect ne tire pas ses lois de la nature, mais impose ses lois à la nature »*). Popper s'intéresse à la croissance de la connaissance : *nous ne savons pas, nous ne pouvons que conjecturer* (Popper – 1978 – p.284). Nous allons utiliser certains écrits de Popper (Popper 1945 & 1962, Popper 1985, Popper 1990) pour décrire sa méthodologie scientifique, comprenant conjectures et réfutations, ce que nous appellerons dorénavant "conception poppérienne".

La conception poppérienne que nous allons modéliser avec le modèle cK¢ se définit par un rejet radical de l'essentialisme aristotélicien. C'est dans la critique de l'essentialisme que nous trouverons les premiers éléments concernant les définitions. Mais, Popper s'inscrivant dans un courant nominaliste redéfini (nominalisme méthodologique), les définitions ne sont pas retenues comme éléments pertinents dans l'exposé d'une méthodologie scientifique (Popper - 1985). De plus, Popper s'attache à expliciter ce qui relèverait d'une méthodologie scientifique en sciences qu'à présenter une méthode en mathématiques : soulignons que Popper prend régulièrement le soin d'écarter les mathématiques (dites science pure) de presque toutes ses propositions (Popper - 1945 surtout). Présenter la conception poppérienne est nécessaire dans notre étude ; en effet, elle apporte un éclairage sur la conception lakatosienne (voir paragraphe IV-4) et sa présentation par le modèle cK¢ nous permet de souligner un aspect plus théorique sur les définitions, ce qui la rend complémentaire des deux autres conceptions (aristotélicienne et lakatosienne).

IV-3.1. Nominalisme méthodologique

Popper critique l'essentialisme au travers d'Aristote tout d'abord (cf. paragraphe II-1.2) mais dans son acception générale aussi car l'essentialisme touche à la nature des théories scientifiques. Il affirme que la science n'a pas pour objectif une *explication ultime* mais recherche à traduire le progrès scientifique. Nous ne rentrerons pas ici dans l'explication poppérienne concernant la *vérité* et la recherche de celle-ci, cela nous emmènerait beaucoup trop loin. Retenons simplement pour notre propos que Popper ne croit pas en la description *vraie* du monde et s'insurge contre *l'essence* : en effet, il estime que *croire aux essences (vraies ou fausses) risque de créer des obstacles pour la pensée et d'interdire la formulation de problèmes nouveaux et féconds* (Popper – 1985 - p.165), même s'il reconnaît que l'essentialiste Leibniz n'est pas tombé dans ce travers. Cette critique ouverte de l'essentialisme conduit Popper à s'intéresser au nominalisme, ce dont nous trouverons trace dans ses commentaires sur les définitions (voir paragraphe IV-3.2). Il développe le nominalisme méthodologique qui sera le premier élément de sa réflexion sur une méthodologie en sciences (Popper - 1945). D'après lui, le nominalisme prévaut en sciences alors que l'essentialisme, et donc l'importance du sens d'un terme, a longtemps été exagéré en sciences. Le nominalisme méthodologique *entreprend de décrire comment la chose se comporte selon les circonstances, et plus particulièrement, de déterminer si ce comportement obéit à des règles constantes* (Popper – 1962 - p.34). Popper insiste également sur l'étude des **propriétés relationnelles** dans une théorie, affirmant que les préoccupations essentialistes se limitent à l'étude de l'essence d'une chose, indépendamment de l'existence d'autres choses : *cette conception animiste n'explique rien* (Popper – 1990 - p.155).

IV-3.2. Popper et les définitions

Les aspects les plus importants rappelés par Popper au sujet des définitions concernent le nominalisme :

> *Dans la science moderne seules apparaissent des définitions nominalistes, pour ainsi dire des symboles sténographiques ou des étiquettes qui sont introduites pour abréger une longue histoire* (Popper – 1945 - p.14).

Popper affirme que le nominalisme répond aux préoccupations d'"éviter toute ambiguïté", d'"échapper à la régression à l'infini" car, en science, l'usage des définitions n'est pas de déterminer le sens d'un terme, mais consiste seulement en l'introduction de **raccourcis de langage** (Popper – 1945 - p.18) et il ne faut de plus **rien dériver d'une définition**[57] :

> *in science, we take care that the statements we make should never depend upon the meaning of our terms. Even where the terms are defined, we never try to derive any information from the definition, or to base any argument upon it* [58] (Popper – 1945 – p.19).

Popper (1945) ajoute que l'énoncé d'une définition est structuré ainsi : le mot[59] à gauche et la séquence définissante[60], l'essence, à droite. Les essentialistes en font selon lui une lecture gauche-droite (remplacement), alors que les nominalistes en font une lecture droite-gauche (abréviation). Popper place ainsi l'aspect **abréviation** en avant. Mais il, n'a, selon Lakatos, pas prêté attention aux "*définitions translatées*" (Lakatos – 1984 - p.155s). Lakatos souligne que, si "définir les termes un tant soit peu obscurs" du programme euclidien *se réduit à remplacer un terme vague par un terme précis arbitrairement choisi, on abandonne en fait le domaine de recherche d'origine pour un autre* (Lakatos – 1984 - p.157n). Il propose alors

[57] Popper utilise le mot *dérivation* au sens de Carnap (in *Logical Syntax*) i.e. déduction non démonstrative. Il propose un parallèle entre *dérivation* et définition : une *dérivation* débute avec des prémisses et conduit à une conclusion. Une définition (si elle est lue de droite à gauche) commence avec des termes définissant et termine avec un terme défini. Ainsi, une dérivation nous informe sur la vérité d'une conclusion, et une définition sur le sens du terme défini. Dans les deux cas, nous sommes renvoyés à la vérité des prémisses et aux sens des termes définissants (Popper-1945-note17b).

[58] En science, nous veillons à ce que les énoncés que nous produisons ne dépendent pas du sens des termes. Même lorsque les termes sont définis, nous ne devons jamais tenter de dériver des informations à partir d'une définition, ni fonder des arguments sur une définition.

[59] *definiendum*.

[60] *definiens*.

pour les définitions un *essentialisme modifié* selon lequel, lorsqu'il est question de définir quelque chose dont on avait une vague idée avant, il ne faut pas perdre le sens premier, aussi vague fut-il : *elle* (la définition) *doit préserver certains aspects pertinents de l'ancienne signification, elle doit translater les éléments pertinents de la signification de la gauche vers la droite* (Lakatos – 1984 - p.157).
Popper critique par ailleurs la position selon laquelle le sens des mots et la **précision** en sciences sont importants, et ainsi la doctrine dite “populaire” selon laquelle on doit définir les termes si on veut être précis. Il dit que c'est un pseudo-problème car les termes “exact” et “précis” sont

> *extrêmement trompeurs, non seulement parce qu'ils donnent fortement à penser que quelque chose existe qui en fait n'existe pas, à savoir l'exactitude absolue ou la précision absolue, mais aussi parce qu'ils possèdent une forte charge émotionnelle : sous couvert de scientificité et d'objectivité scientifique, ils donnent à penser que la précision et l'exactitude sont des valeurs supérieures, voire ultimes, et qu'il est mauvais, non scientifique, ou brouillon d'utiliser des termes inexacts. Or un terme exact n'existe pas – comme il n'existe pas de terme devenu “précis” grâce à une “définition précise”* (Popper – 1990 - p.277).

Ainsi, Popper n'accorde que peu d'importance aux définitions, celles-ci n'étant que des abréviations, la précision des termes n'existant par ailleurs pas. Cela lui permet d'aborder simplement la question des **définitions équivalentes**, et d'exhiber une fonction répandue des définitions : la fonction[61] de donner la *signification*, *l'idée* d'une chose. Popper prend, pour sa démonstration, différentes définitions du nombre 23 et montre que n'importe laquelle peut être prise pour définition de ce nombre :

(a) x = 23 si et seulement si : x = 20 + 3
(b) x = (2×10) + 3
(c) x = $2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
(d) x = $3^3 - 2^2$
(e) x = 2018 - (15×133)

Il affirme que les ni (d), ni (e) ne constituent, pour la majorité des gens, des *définitions “raisonnables” de 23, même si ce sont évidemment des équivalences valides, car d'aucune façon elles n'analysent, élucident ou “expliquent” le sens de 23. La plupart des gens diraient que les identités (a) et (b) définissent 23, et que c'est peut-être le cas également de (c). Nul qui comprend ce que 23 veut dire ne songerait à en expliquer ou analyser le sens au moyen de (d) ou de (e)* (Popper – 1990 - p.277s).
Ce qui l'amène à dire que, du point de vue actuel des mathématiciens et logiciens, (d) et (e) sont des définitions légitimes (équivalence logique) et qu'ainsi, il ne faut pas se limiter à l'opinion répandue et erronée concevant qu'une définition donne nécessairement, analyse et explique la *signification*, l'*idée* d'une chose.

[61] essentialiste.

Et il conclut que l'utilisation même de symboles tels que “dy/dx” n'a actuellement pour seul rôle que la désignation :

> *Nous avons renoncé (point de vue moderne) à l'idée de définition entendue comme explication du sens. Cet abandon est dissimulé par le fait que nous retenons l'ancien terme de “définition” pour désigner certaines équivalences que nous utilisons non pour « expliquer » l'idée ou l'essence de la dérivée, mais pour l'éliminer. Et cet abandon est masqué aussi par la conservation des termes “quotients différentiels” et “dérivée” ainsi que celle du symbole traditionnel “dy/dx”, qui désignaient tous une notion que nous avons maintenant rejetée. Car ces termes et ce symbole n'ont maintenant d'autre rôle que de désigner le definiens, à savoir la limite de la suite.* (Popper – 1990 - p.285)

IV-3.3. Modélisation de la connaissance poppérienne

Problèmes

Les problèmes que nous décrivons sont ceux étudiés explicitement par Popper. Il s'agit de problèmes liés à la notion de progrès scientifique et à celle du choix entre théories concurrentes.

Toute recherche commence par un problème et

> *Il convient de se représenter la science comme une démarche qui progresse à travers la formulation de différents théorèmes pour en venir à des problèmes toujours plus fondamentaux* (Popper – 1985 - p.329).

Opérateurs

Dans l'esprit de Popper, *la meilleure théorie est celle qui possède le plus grand pouvoir explicatif : c'est celle qui explique davantage, qui le fait avec une précision plus grande et permet de formuler de meilleures prédictions* (Popper – 1985 - p.287). Il affirme que plus une théorie se prête à être testée, plus elle est intéressante. Il va s'agir de produire une réfutation[62], d'opposer un contre-exemple à la théorie qui est l'objet de tests[63]. Ainsi, l'opérateur principal est la **génération de réfutations** via des contre-exemples.

En ce qui concerne les définitions, dans la mesure où celles-ci ne sont pas au centre de “l'approche progressive de la vérité” selon Popper, nous avons retenu l'opérateur (négatif) suivant : **ne rien dériver d'une définition** (au sens de Carnap – cf. note57).

Rappelons que pour Popper, une définition est une abréviation, qu'il n'existe pas de “définition précise”, mais qu'il existe un intérêt dans l'étude des définitions : lorsque celles-ci ont un pouvoir explicatif plus grand de la théorie. Il concède que “*naturellement lorsqu'une définition aide à résoudre un véritable problème, la situation est différente, et il est vrai que*

[62] Popper s'inspire à de nombreuses reprises de Kant.
[63] “*science does not ask how he has got his ideas, it is only interested in arguments that can be tested by everybody*” (Popper-1945).

certains problèmes ne peuvent être résolus qu'au prix d'un effort de précision" (Popper – 1990 - p.277).

Contrôles

L'aboutissement pour Popper n'est pas la construction d'un système déductif axiomatisé, mais la production d'une théorie *unificatrice, simple, inédite et puissante* apportant des solutions à un ensemble de problèmes. Il recherche ainsi un degré élevé de contenu informatif dont il note que : plus le contenu informatif est grand, plus la probabilité d'avoir ces propriétés est faible et alors, la probabilité de réfutation est d'autant plus grande. Popper apporte une liste de cas permettant d'affirmer qu'une théorie t_1 dépasse une autre théorie t_2[64].

Les contrôles chez Popper sont donc principalement constitués d'une résistance à des tests cruciaux sévères (c'est-à-dire une **résistance aux réfutations** qui seront d'autant plus nombreuses que le contenu informatif sera grand) ainsi que ce que Popper appelle le "***savoir métascientifique***" : celui-ci est visiblement de nature intuitive[65], et prétend que *nous savons ce que doit être une bonne théorie scientifique, avant même qu'on ait procédé à des tests* (Popper – 1985 - p.322).Un mathématicien professionnel dispose certainement d'un "*savoir métascientifique*" issu d'une longue pratique …

Il existe un contrôle relatif aux définitions, lié à la fonction de renforçage d'une théorie de celles-ci : ce contrôle consiste à évaluer la **réduction du nombre de postulats** et voir si la théorie explique davantage de choses au regard de telle ou telle définition.

> *Je me suis toujours élevé contre l'idée selon laquelle des définitions seraient nécessaires. Elles ne le sont jamais vraiment et ne sont que rarement d'une quelconque utilité, sauf dans certaines situations : celles où l'on peut montrer non seulement que le recours à une définition permet de réduire le nombre de postulats qu'exige une théorie satisfaisante, mais que, grâce à cette définition, la théorie explique plus de choses. En d'autres termes, une nouvelle définition présente de l'intérêt seulement si elle renforce une théorie. Je pensais pouvoir arriver à cela pour ma théorie des fins de la science, selon laquelle celle-ci vise et la vérité et la résolution de problèmes d'explication, c'est à dire qu'elle cherche à formuler des théories d'un pouvoir explicatif toujours plus grand, d'un contenu plus¨important et d'une testabilité plus élevée* (Popper – 1990 - p.18).

[64] *1) t_2 formule des assertions plus précises que ne le fait t_1, et celles-ci résistent à des tests plus précis.*
2) t_2 prend en compte et explique davantage de faits que t_1
3) t_2 décrit ou explique les faits de manière plus détaillée que t_1
4) t_2 a subi avec succès des tests où t_1 avait échoué.
5) t_2 a permis de nouveaux tests expérimentaux qui n'avaient pas été envisagés avant que cette théorie n'ait été conçue, et a subi ces tests avec succès
6) t_2 a permis d'unifier ou de relier divers problèmes qui étaient jusque-là sans rapport (Popper-1985-p.344)

[65] Peut-être inspirée par l'intuition kantienne.

IV-3.4. Questions et conclusion sur la conception poppérienne

Nous constatons que la vision nominaliste de Popper induit un certain désintérêt à l'égard des définitions. De plus, la description de la conception poppérienne de la méthodologie scientifique montre peu d'opérateurs, mais des contrôles plus nombreux. La perspective théorique dans laquelle s'inscrit Popper, son objectif déclaré de rendre les théories plus explicatives, plus puissantes, explique l'importance des contrôles.

Nous nous interrogeons sur le fait qu'il n'y ait que peu d'opérateurs dans la conception poppérienne. Serait-ce dû à la négligence des définitions et à la restriction de la fonction de celles-ci à une fonction **abréviative** voire à une fonction de **renforçage d'une théorie**[66]? Une réponse à cette question se trouve dans l'exposé de la conception lakatosienne (paragraphe suivant) : Lakatos reprend en effet l'idée des réfutations de Popper tout en conservant l'importance des définitions dans le processus de recherche. Les fonctions que Lakatos attribuent aux définitions sont également déterminantes.

IV-4. Conception lakatosienne

La classe de problèmes à laquelle s'intéresse Lakatos est principalement constituée de problèmes historiques (les polyèdres, la continuité chez Cauchy par exemple) et semble a priori difficilement récupérable de notre point de vue, pour la réalisation et l'analyse de situations de construction de définition. Ses problèmes sont effectivement conséquents : ils n'ont pas été résolus en un jour et la présentation de ceux-ci par Lakatos adopte une certaine méthodologie au sens de "heuristique"[67], de "logique de la découverte" ou "logique situationnelle" (Popper – 1945 - p.90). En particulier, Lakatos s'inspire de Pólya pour son attachement à souligner les ressemblances entre heuristiques scientifiques et mathématiques.
Les problèmes auxquels s'intéresse Lakatos sont essentiellement intra-mathématiques. Ainsi, la reprise historique de ces problèmes s'intéresse à la phase heuristique mais aussi à l'axiomatique (i.e. comment en est-on arriver à telle ou telle théorie ?). Ceci étant, la description du processus de construction de concept que Lakatos développe (surtout dans sa thèse) nous interpelle, car il fait état de différentes définitions et c'est pourquoi nous proposons une relecture de celles-ci via le modèle cK¢. Celui-ci nous permettra de modéliser une construction de définition à partir des exemples donnés par Lakatos et d'entrer dans une phase de généralisation de l'activité de construction de définitions.

[66] C'est-à-dire de réduction du nombre de postulats et faire que la théorie explique plus de choses.
[67] Pólya (1965) définit "heuristique" comme *l'ars inveniendi* et l'heuristique "moderne" comme "*s'efforçant de comprendre la méthode qui conduit à la solution des problèmes, en particulier les opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles à l'application de cette méthode*" (Pólya-1965-p.93). Il ajoute que "*l'heuristique vise à la généralité, à l'étude des méthodes, indépendamment de la question traitée, et s'applique à des problèmes de toutes sortes*" (ibid. p.97).

Dans les dialogues de sa thèse (1961) et de “Preuves et Réfutations” (1984), Lakatos avance différents arguments issus du débat essentialisme / nominalisme, mais aussi logiques (cercle vicieux par exemple). Nous remarquons que ce qui relève d’une conception lakatosienne inclut d’autres conceptions dont celles d’Aristote, Popper, Pólya et même davantage (Kant …) qui constituent la culture de Lakatos. Nous allons donc étudier la spécificité de la conception lakatosienne dans le but de la rendre complémentaire aux conceptions aristotélicienne et poppérienne décrites précédemment.

IV-4.1. “Preuves et Réfutations” : une méthode

L’objet premier du discours de Lakatos est “Preuves et Réfutations”, et non pas construction de définitions. Lakatos s’est visiblement inspiré des réfutations de Popper et s’affranchit du débat essentialisme/nominalisme en en montrant les limites via certains débats entre élèves[68]. Il décline trois méthodes : la méthode de relégation des exceptions (*“apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues”* Lakatos – 1984 - p.177 citant Cauchy), la méthode de relégation des monstres pour défendre un théorème[69] et la méthode des preuves et réfutations dont il énonce trois règles heuristiques. Ces règles soulignent la nécessité de ne pas se limiter à l’usage des méthodes de relégation des exceptions et des monstres. Ainsi, *en présence d’une conjecture, mettre en chantier sa preuve comme sa réfutation* (Règle1), rechercher *des contre-exemples à la fois à la conjecture (aspect global) et aux lemmes suspects (aspect local)* (Règle1). La découverte d’un contre-exemple engendre un réexamen de la preuve et une recherche d’un lemme “coupable” (Règle2) : il ne faut pas reléguer un contre-exemple, c’est-à-dire se contenter d’une relégation des exceptions. Il ne faut pas non plus écarter une réfutation comme un “monstre” (Règle2). Le contre-exemple peut donc être local (contre-exemple pour un lemme) ou global (contre-exemple pour la conjecture) : il faut donc vérifier si un contre-exemple local est global (Règle3), et dans ce cas se référer à la Règle2 (Lakatos – 1984 – p.63).

C’est donc la recherche d’une preuve, l’étude d’une conjecture qui conduisent à la formation d’un ou plusieurs concepts, et ceci se traduit notamment par l’évolution des définitions de ceux-ci (NB : Lakatos parle de définitions dans le paragraphe intitulé “la formation des concepts”). Ainsi, des définitions, balisent en quelque sorte la formation du concept, traduisent son évolution. Lakatos introduit alors la terminologie suivante : *zéro-définition*, *proof-generated definition*[70]. D’après Lakatos, une procédure définitionnelle correspond à la formation du concept qui lui-même provient de la preuve.

[68] *Il est curieux que les nominalistes comme les essentialistes puissent à ce point être aveugles au fond rationnel de l’argumentation des autres* (Lakatos-1984-note29 p.157).
[69] “*La situation, pas exceptionnelle en recherche mathématique, est la suivante : un théorème a déjà été formulé mais on doit préciser le sens de ses termes afin de le rendre strictement correct*” (Pólya-1954-p.55).
[70] Nous préférons conserver l’expression originelle de Lakatos. Elle réfère aux “*définitions éprouvettes*” de la traduction française de “Proof and Refutations”. Nous avons traduit naturellement *zero-definition* par *zéro-définition*.

IV-4.2. Heuristique, langage et axiomatique chez Lakatos

Il est important de souligner que les propos de Lakatos sur les définitions comprennent trois "niveaux" distincts : il est bien sur question du niveau **heuristique**, dans la description de la dialectique entre preuve et formation de concepts, où apparaissent les notions de *concept naïf*, *zéro-concept*, *proof-generated concept*.
De plus, Lakatos traite du **langage** et de la **linguistique**, d'où des résurgences de conception aristotélicienne, conformes à certaines demandes des logiciens (aspect nominaliste). Le dialogue qu'il utilise entre Maître-Elèves lui permet d'adopter différentes positions sur les définitions, dont certaines sont nominalistes ou ont trait à la linguistique ou la logique. En ce qui concerne plus spécifiquement le langage et la précision généralement attendue en mathématiques, un élève avance qu'une idée aussi claire soit-elle n'implique pas nécessairement un énoncé "précis"[71]. Ainsi, l'activité mathématique est une expérience mentale et

> *lorsque vous accroissez le contenu, vous développez des idées, vous faites des mathématiques, après cela vous clarifiez les concepts, vous faites de la linguistique* (Lakatos – 1984 - p.125).

Enfin, le niveau **axiomatique** rentre également en ligne de compte par certaines questions épisodiques des élèves qui relèvent de préoccupations sur la régression à l'infini, l'exposé théorique par exemple, mais ce n'est pas l'objet de la recherche de Lakatos :

> *La "certitude" n'est jamais achevée ; les "fondations" ne sont jamais trouvées ; mais, dans le domaine des mathématiques, l'"art de la raison" transforme chaque progrès de la* rigueur *en un accroissement du* contenu*. Cette question sort malheureusement de la présente recherche.* (Lakatos – 1984 - p.71)

Les questions de niveau axiomatique ont eu quelques réponses dans la présentation de la conception poppérienne (paragraphe IV-3).

Nous allons nous intéresser au niveau **heuristique** ; celui-ci comprend trois notions : *définition naïve*, *zéro-définition*, *proof-generated definition*, en corrélation avec les notions de *concept naïf*, *zéro-concept*, *proof-generated concept*. Il ne nous serait pas satisfaisant de livrer des définitions de ces concepts, Lakatos ne les définissant pas lui-même. Nous allons donc exposer sa réflexion, et c'est lors de la reprise par le modèle cK¢ que nous mettrons en évidence certains invariants dans la construction de définitions.
Un concept naissant de la preuve, il est ainsi nommé *proof-generated concept* (d'où une *proof-generated definition*). Une *proof-generated definition* aurait en quelque sorte vocation de préserver des théorèmes. Nous remarquons qu'il y a, à l'occasion d'un processus de recherche, une progression depuis des *zéro-définitions* vers des *proof-generated definitions*. Ainsi, les *proof-generated definitions* naissent de la recherche d'une preuve et il existe en amont des *zéro-définitions*. La question est alors de savoir comment se forment des *zéro-*

[71] *"Le langage est imprécis mais la pensée peut atteindre à la rigueur absolue"* (Lakatos-1984-p.66).

concepts et donc des *zéro-définitions*. Il est possible d'avancer l'idée de concept *naïf* : ce n'est pas un *proof-generated concept*. Lakatos affirme qu'il n'est pas intéressant de discuter de l'exactitude d'un concept *naïf*, celui-ci est en général gommé et remplacé par un *proof-generated concept* : il ne laisse donc pas de "trace".

> *Les conjectures et les concepts naïfs sont remplacés par des conjectures améliorées (théorèmes) et des concepts (nés de preuves ou théoriques) développés dans la méthode des preuves et réfutations*. (Lakatos – 1984 - p.116)

Lakatos ajoute qu'un *proof-generated concept* n'est pas une généralisation d'un concept *naïf*. La question que nous nous posons est alors la suivante : un concept *naïf* peut-il donner lieu à une *zéro-définition* ? Il semblerait d'après les écrits de Lakatos auxquels nous nous référons (1961, 1973), qu'on ne puisse rien faire d'un concept *naïf* : on n'étend pas un concept *naïf*, à moins d'être en mesure de l'inscrire dans une théorie (mais alors, ce concept ne sera plus naïf), mais on élargit le champ théorique en considérant le problème différemment.
Ainsi, nous en avons conclu qu'une *zéro-définition* peut être *naïve*, mais alors on n'en fera rien, ce qui est en conformité avec les caractères donnés par Lakatos sur les *zéro-définitions* (voir ci-dessous). En revanche, un concept *naïf* ne donne pas nécessairement lieu à une *zéro-définition*.
Dans cette perspective, notre intérêt est donc de nous limiter à l'étude des *zéro-définitions* et *proof-generated definitions*, en gardant à l'esprit qu'une *zéro-définition* "trop *naïve*" n'évoluera pas et donc disparaîtra.

IV-4.3. Les *zéro-définitions*

Lakatos assigne une **fonction de communication** à une définition, et rend ainsi nécessaire l'obligation de préciser le sens d'un mot "nouveau" : le processus de dénomination apparaît alors important. En effet, les *zéro-définitions* constituent un raccourci de langage, sans que le concept mathématique ainsi désigné ne soit encore défini. Celles-ci peuvent être des définitions "à l'essai" **au début de l'investigation**. Ce concept de *zéro-définition* fonctionne de pair avec l'idée de *zéro-concept*. Cependant, certaines situations peuvent ne pas mobiliser des *zéro-définitions*, mais lorsqu'un concept mathématique se révèle "utile", une *zéro-définition* peut apparaître dans le processus de recherche car Lakatos défend le fait que les concepts croissent en compétition :

> *expand zero-concepts if expansion will be followed by a deeper proof-idea* (Lakatos - 1961 - rule 4.2.2)[72]

Ainsi, une *zéro-définition* est **à l'origine du processus de recherche**. Elle peut être amenée à **disparaître** ou à **évoluer** vers une *proof-generated definition*. Une *zéro-définition* possède

[72] Trad. Développer des *zéro-concepts* si une plus large idée de la preuve en découle.

une **fonction de dénomination**. Cette notion de *zéro-définition* fait certainement écho à la remarque de Popper sur la précision et le sens des mots :

> *we are always conscious that our terms are a little vague ... and we reach precision not by reducing their penumbra of vagueness, but rather by keeping well within it, by carefully phrasing our sentences in such a way that the possible shades of meaning of our terms do not matter. That is how to avoid quarrelling about words* - Popper (1945) cité par Lakatos (1961 - p.73). [73]

Remarquons au passage que la préoccupation de la recherche de la précision d'un mot est vivement critiquée par Popper car considérée comme stérile :

> *En particulier, le problème qui consiste à remplacer un terme « inexact » par un terme « exact » - par exemple donner une définition en termes exacts ou précis – est un pseudo-problème, qui dépend de manière essentielle des termes inexacts et imprécis que sont « exact » et « précis ». Or ces termes sont extrêmement trompeurs, non seulement parce qu'ils donnent fortement à penser que quelque chose existe qui en fait n'existe pas, à savoir l'exactitude absolue ou la précision absolue, mais aussi parce qu'ils possèdent une forte charge émotionnelle : sous couvert de scientificité et d'objectivité scientifique, ils donnent à penser que la précision et l'exactitude sont des valeurs supérieures, voire ultimes, et qu'il est mauvais, non scientifique, ou brouillon d'utiliser des termes inexacts. Or un terme exact n'existe pas – comme il n'existe pas de terme devenu « précis » grâce à une « définition précise »* (Popper – 1990 - p.277).

Rappelons les règles auxquelles les *zéro-définitions* sont soumises : ces règles insistent en particulier sur l'importance de l'évolution d'une *zéro-définition* vers une *proof-generated definition*, mais elles ne sont guère explicites quant au processus traduisant cette évolution. Ainsi, un *zéro-concept* pourrait être étendu (expansion) au regard de l'idée de la preuve, celle-ci devant s'accroître et ainsi faire évoluer le *zéro-concept* vers un *proof-generated concept*.

> *Rule 4.1. Zero-definitions do not matter as long as they are wider than the proof-generated definitions –therefore do not quarrel about zero-definitions which fulfil this condition, but concentrate on the vital proof-generated definitions.*
>
> *Rule 4.1.1. Do not indulge in overdefinitions.*
>
> *Rule 4.2.1. Obviously true lemmas, the lack of counter-examples, and the vindication of the "general" validity of the original conjecture, may mean not so much certainty, but that a narrow zero-concept is a straightjacket for the more sweeping proof-idea. We have to expend it in order to let the proof-generated definition fill the place it deserves.*
>
> *Rule 4.2.2. Expand zero-concepts if expansion will be followed by a deeper proof-idea.* [74] (Lakatos – 1961 - p.73)

[73] Trad. Nous sommes toujours conscients que nos termes sont un peu vagues … et nous rejoignons la précision non pas en réduisant la pénombre de l'imprécision, mais plutôt en exprimant prudemment nos phrases de telle façon à ce que l'obscurité du sens de nos termes ne nuise en rien. C'est ce qui permet d'éviter des disputes sur les mots.

[74] Trad. Règle 4.1: les *zéro-définitions* n'ont pas d'importance tant qu'elles sont plus larges que *les proof-generated definitions*. C'est pourquoi il ne faut pas entrer dans des querelles sur les *zéro-définitions* mais se

Nous garderons donc à l'esprit que les *zéro-définitions* possèdent les qualités suivantes :

> *il s'agit d'une définition qui peut être adoptée, à titre d'essai, à l'origine du processus de recherche.(…) Lakatos souligne que la fonction première de la preuve est de déterminer le domaine de validité de la conjecture, et donc de révéler le véritable concept et sa définition. Tout au plus la zéro-définition peut être trop large et d'aucune utilité, ou trop étroite et constituer un obstacle occultant certaines parties du domaine de validité* [Note des traducteurs – Lakatos – 1984 - p.175]

De plus, le problème de départ, à l'origine du processus de recherche et induisant des *zéro-définitions* peut être une formule, ce qui sera suffisant pour débuter la recherche :

> *there are other ways of communicating meaning than definitions. I, for one, shall initiate my pupils into the problem-situation which I am dealing with not by definitions, but by* <u>*showing*</u> *them a cube, an octahedron and showing that for these V-E+F=2. Then I shall ask for the domain of validity of this formula. Believe me, this will be enough for a start.* (Lakatos – 1961 - p.69)[75]

IV-4.4. Les *proof-generated definitions*

Du point de vue de Lakatos, l'aspect le plus important dans l'activité de définition est le *proof-generated concept* et sa définition.
Dire de nouveau qu'une *proof-generated definition* naît de la preuve ne nous apporte que peu d'éléments. Nous allons donc revenir sur un exemple donné par Lakatos. Par rapport à la formation de concept, il s'agit en fait de **trouver un contexte problématique**. L'intérêt du style heuristique réside dans la mise en évidence de la "*logique" qui a donné naissance au concept* (Lakatos – 1984 - p186).
Lakatos utilise l'exemple de la preuve de Dirichlet de la conjecture de Fourier pour opposer le style déductiviste et le style heuristique. Dans ce cas, le style déductiviste[76] place la définition et l'étude de fonction à variation bornée dans un chapitre sur l'intégrale de Riemann-Stieltjes, sans faire le lien entre ces deux concepts. Lakatos propose à la place, dans un style heuristique, comment l'intégrabilité au sens de Riemann-Stieltjes et la variation bornée sont deux *proof-generated concepts* issus de la recherche de la preuve de Dirichlet de la conjecture de Fourier.

concentrer sur les *proof-generated definitions* - Règle 4.1.1 : ne pas être trop indulgent avec les définitions excédentaires - Règle 4.2.1 : manifestement, la présence de lemmes vrais, le manque de contre-exemples et la justification de la validité "générale" de la conjecture originelle peuvent signifier non pas une certitude mais la présence d'un *zéro-concept* proche permettant d'accéder à une plus vaste idée de la preuve. Nous avons à élargir celui-ci pour laisser la *proof-generated definition* prendre la place qu'elle mérite - Règle 4.2.2 : développer des *zéro-concepts* si une plus large idée de la preuve en découle.

[75] Trad. Il existe d'autres voies pour communiquer que les définitions. Je peux initier mes élèves à des situations-problèmes non pas par des définitions mais en leur montrant un cube, un octaèdre et en leur montrant que pour ceux-ci V-E+F=2. Alors, je leur demande le domaine de validité de cette formule. Croyez-moi, cela est suffisant pour un début.

[76] in Rudin (1953) Analyse fonctionnelle.

IV-4.5. Opérateurs, contrôles, système de représentation

L'exposé précédent traite de deux types de définitions, mais ne présente pas les invariants opératoires concernant ces définitions. Ainsi, si nous ne considérons que les *zéro-définitions* et *proof-generated definitions*, nous perdons une partie du sens, de la construction du concept qui s'est faite dans la méthode des “preuves et réfutations”, et donc une partie du processus de construction de définition lui-même.

Le ***système de représentation*** (L) inclut la représentation de l'objet mathématique considéré. En réalité, il n'y a de système de représentation dans la conception lakatosienne que le **système interne aux mathématiques** ou plutôt à l'activité mathématique. En particulier, les aspects langagiers tels que nous les avons décrits dans la conception aristotélicienne ne sont pas présents. Il nous faut donc insister sur la dialectique entre la construction du concept et la construction de sa définition dans une situation du type lakatosien. En effet, Lakatos présente la preuve elle-même, ou plus précisément l'idée de la preuve comme tenant un rôle central dans cette activité :

> *It's impossible to arrive at these concepts by blind guessing, without the proof-idea*. (Lakatos – 1961 - p.51)[77]

Ajoutons que le choix du concept mathématique dans une telle situation induit des systèmes de représentation propre à ce concept. Ceux-ci pourront donc être variables d'un concept à un autre. Nous insisterons donc, lors de l'utilisation de la conception aristotélicienne, sur les systèmes de représentation propres aux concepts mathématiques étudiés, via leurs différentes définitions.

Les ***opérateurs*** (R) sont en rapport étroit avec l'activité heuristique des mathématiques. La génération d'exemples et de contre-exemples, ainsi que leur utilisation est un opérateur et les différentes fonction des définitions engendrent certains opérateurs et contrôles. Lors de l'explicitation de ceux-ci, nous inclurons les notions de *zéro-définition* et *proof-generated definition*.

R1 : La génération d'exemples et de contre-exemples et leur utilisation

Les exemples et contre-exemples peuvent être mobilisés “spontanément” à l'occasion des échanges et discussions entre les personnes à l'œuvre dans le processus de définition, ou dans ce que nous pourrions appeler le “surgissement” d'exemples et/ou contre-exemples.

L'usage et la génération d'exemples et de contre-exemples, donnés par la situation ou construits lors de la résolution, est ici central. Dans des activités de détermination du domaine de validité d'une conjecture ou d'une formule, nous devons nous interroger sur : quels types de rétroactions peuvent apporter les contre-exemples? Lakatos présente dans sa thèse la “*method of monster-barring definitions*”[78], la “*capitulation*”[79] et la “*method of exception-*

[77] Trad. Il est impossible d'arriver à ces concepts par des devinettes en aveugle, sans l'idée de la preuve.
[78] Méthode faisant barrage aux monstres.

barring definitions”[80] ainsi que des conséquences sur la définition produite (re-formulation, exclusion ou inclusion du contre-exemple). L’exposé de la “*method of monster-barring definitions*” traite en fait des cas dits pathologiques : selon Lakatos, ces cas pathologiques ne doivent pas être considérés comme des contre-exemples, les monstres ne sont que des monstres, pas des contre-exemples. Dans cette discussion, il sous-entend que le sens des mots utilisés dans les définitions peut être important, tout ne tombant pas toujours sous le sens. Quant à la “*method of exception-barring definitions*”, de manière un peu analogue à la méthode précédente, elle considère qu’il n’y a que des exceptions, et pas de contre-exemples ; le problème est de savoir quel objet on définit (par exemple, définit-on les polyèdres eulériens ou les polyèdres en général ?). Ainsi, Lakatos suggère d’utiliser la méthode faisant barrage aux exceptions pour trouver le domaine de validité de la formule d’Euler dans son cas précis, mais de la proscrire si elle ne constitue qu’une ruse linguistique “arrangeante” et sauvant de “jolis” théorèmes (SIC). Le problème réside alors dans la séparation entre les exceptions et le domaine des exemples. Le mécanisme d’utilisation et de production d’exemples et de contre-exemples apparaît - peut-être de manière plus systématique – dans le processus dialectique entre la construction du concept et l’élaboration de la preuve.

Revenons sur le questionnement suivant : quels types de rétroactions pouvons-nous observer dans de telles situations de définition ? Le rôle tenu par les exemples et contre-exemples nous semble bien évidemment incontournable ici, mais est-ce le seul ? Nous pouvons affirmer que non : la fonction de la définition joue un rôle indispensable ; il en découle des opérateurs et des contrôles que nous allons maintenant décrire. Il ne faut pas croire que les opérateurs et contrôles lakatosiens sont nécessairement explicites dans les textes de Lakatos : certains sont implicites, nous allons les décrire au plus près. Ils apportent des éléments de réponse aux questions suivantes : comment pouvons-nous expliquer et expliciter la dialectique entre la formation d’un concept et la preuve d’une part, et la dialectique entre la formation d’un concept et la construction de sa définition d’autre part ?

R2 : les fonctions d’une définition engendrent des opérateurs

Trois fonctions apparaissent de manière assez évidente chez Lakatos. La fonction de preuve, ou peut-être davantage la fonction de préservation de théorème(s), est en relation avec les *proof-generated definitions*. Les fonctions de communication et de dénomination sont, elles, en rapport avec les *zéro-définitions*. Ainsi, la fonction de communication pourra induire des opérateurs et des contrôles de type langagiers, logiques par exemple (cf. conception aristotélicienne) et la fonction de dénomination peut être retraduite par l’opérateur suivant : écrire une *zéro-définition*. Cette dernière fonction s’inscrit dans une perspective nominaliste prenant une définition comme un raccourci de langage, une abréviation. Elle peut être remarquable car elle témoigne de l’intérêt d’un concept, ce que nous avons développé lors de la présentation des *zéro-définitions*.

---

[79] Capitulation.
[80] Méthode faisant barrage aux exceptions.

Quant à la fonction de preuve, l'opérateur qui en découle consiste en la vérification de la validité d'une démonstration et/ou d'un énoncé (théorème par exemple) par les concepts définis en jeu.
Par ailleurs, les théories philosophiques sous-jacentes au débat décrit par Lakatos dans "Preuves et Réfutations" sont l'essentialisme et le nominalisme. L'exposé de ces deux courants (paragraphe II-1.1) nous apporte d'autres exemples de fonctions attribuables à une définition et donc d'autres opérateurs et contrôles mobilisables à l'image de Lakatos dans le discours maître-étudiants : lorsqu'une définition se doit d'établir l'existence d'un objet mathématique (conformément à la conception essentialiste de Leibniz par exemple), l'opérateur est de construire cet objet. Ce point de vue essentialiste est visible dans "Preuves et réfutations".

Les *structures de contrôles*

Nous pensons que les *structures de contrôle* (Σ) se placent à deux niveaux différents : celui de la preuve et celui se plaçant à un niveau plus théorique (voire philosophique et/ou axiomatique).
Tout d'abord, la situation elle-même contribue à la catalyse de *proof-generated definitions*, celles-ci étant elles-mêmes justifiées et légitimées par la preuve et nécessaires à celle-ci. D'après Lakatos:

> *The discovery of global counterexamples catalyses proof-analysis (...) Proof-analysis may catalyse the discovery of global counterexamples (...) This second catalysis is very important indeed as it shows the role of proofs in formation of concepts and growth of theories*[81] (Lakatos – 1961 - p.44/45).

Ainsi, un contrôle provient de la validité de la preuve étudiée, à la suite d'un processus de preuves et réfutations, tel décrit ci-dessus. Il est nécessaire d'apporter une nuance : la méthode de preuves et réfutations s'arrête-t-elle ? Lakatos dénonce l'infinité vicieuse, celle-ci pouvant conduire alors à l'appauvrissement des concepts et théorèmes construits. Mais alors *« qui décide où s'arrêter ? (...) pouvons-nous nous arrêter ? »*(Lakatos – 1984 - p124s). Lakatos, ou plutôt l'élève Thêta, y répond ainsi : *« (...) nous devons certainement arrêter l'extension de concepts là où elle cesse d'être un engrais pour devenir un herbicide total »* (Lakatos – 1984 - p.131). Le dialogue glisse vers la "vérité logique" dont nous pouvons dire que Lakatos n'est pas preneur ; le Maître conclut :

> ***Mais une recherche scientifique "commence et finit par des problèmes"***(ibid. p.133)

Une seconde structure de contrôle provient des aspects nominalistes et essentialistes. Ceci n'est pas explicite dans les textes de Lakatos (1961, 1984). C'est pourquoi nous allons utiliser

[81] La découverte d'un contre-exemple global catalyse l'analyse de la preuve (…) l'analyse de la preuve peut catalyser la découverte de contre-exemples globaux (…) Cette seconde catalyse est très importante car elle montre en effet le rôle des preuves dans la formation de concepts et l'expansion de théories.

la présentation des courants nominalistes et essentialistes et les arguments de leurs protagonistes. Pour un essentialiste lambda, un contrôle peut consister en l'examen de la réponse à la question "qu'est-ce que … ?" ou "cela existe-t-il ?" ; et pour un nominaliste lambda, un contrôle peut résider en la vérification logique des abréviations introduites. Mais nous sortons ici du cadre lakatosien. A un niveau plus "logique", méthodologique au sens de Popper[82] voire axiomatique, le contrôle peut s'intéresser à l'élaboration d'une théorie et donc à l'inscription d'une définition dans celle-ci. Là encore, nous débordons du cadre d'étude de Lakatos.

IV-4.6. Type de problèmes

Le problème des polyèdres, exposé dans Lakatos 1961 & 1984, concerne la recherche du domaine de validité d'une conjecture, en particulier de la formule d'Euler. Ce problème est présenté ainsi :

> *Existe-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdre, en particulier d'un* polyèdre régulier*, du même type que celle, évidente, qu'il y a entre le nombre de sommets et d'arêtes d'un* polygone*, à savoir : S=A ? Cette dernière relation nous permet de classer des* polygones *selon leur nombre d'arêtes (ou de sommets) : triangles, quadrilatères, pentagones, etc. Une relation du même genre nous aiderait à classer les polyèdres*. (Lakatos – 1984 - p.7)

Il est intéressant de noter que la préoccupation initiale concerne la classification, ce qui n'apparaît pas dans la présentation de ce même problème dans la thèse de Lakatos (1961). Il est fondamental de rappeler que la présentation heuristique de la construction de définitions de "polyèdres" n'est pas motivée par la classification mais par la recherche d'une preuve de la conjecture suivante : pour un polyèdre quelconque, S-A+F=2. La preuve de Cauchy est donnée et critiquée. Ainsi, il n'est a priori pas question de définir *par genre et différences spécifiques*, la classification n'étant pas un opérateur, mais seulement une conséquence possible de la résolution du problème posé par Lakatos.

Ainsi, nous pourrions caractériser une classe de problèmes lakatosiens, sur laquelle la conception décrite ci-dessus est opératoire, ainsi : problèmes intra-mathématiques de recherche du domaine de validité d'une conjecture.

[82] cf. Popper, paragraphe IV-3.

V- Typologie de problèmes

Au regard de la modélisation par cK¢ des trois conceptions, nous avons établi une typologie de problèmes de construction de définition, que nous allons utiliser pour l'élaboration de situations de construction de définition en classe.

La conception aristotélicienne, la méthode de définition *par genre et différences spécifiques*, est opératoire sur des problèmes de classification (comme nous l'avons vu en géométrie et sciences naturelles par exemple). Nous allons donc nommer "**problèmes de CLASSIFICATION**" des problèmes sur lesquels la conception aristotélicienne, entre autres, sera opératoire.

La classe de problèmes poppérienne a été décrite dans l'exposé de la conception de Popper : il s'agit de problèmes liés à la notion de progrès scientifique et à celle du choix entre théories concurrentes. Nous n'allons pas retenir cette classe de problèmes car trop ambitieuse pour de premières expérimentations sur la construction de définition. Nous retenons cependant que des préoccupations théoriques concernent un travail sur les définitions.

Nous avons de plus caractérisé la classe de problèmes de Lakatos comme étant des problèmes intra-mathématiques de recherche du domaine de validité d'une conjecture. En fait, la résolution de tels problèmes passe par la construction d'un objet (ou concept) et de sa définition.

Nous allons définir deux autres classes de problèmes pour la construction de définition.
Nous allons parler de "problèmes de **MATHEMATISATION/MODELISATION"** sur lesquels les trois conceptions peuvent être opératoires, et peut-être plus spécifiquement celle de Popper où il pourra être question, par exemple, de se rattacher à un modèle existant, traduire une situation dans un modèle connu ou de construire un modèle. Dans les deux cas, une construction de définition (plus ou moins complexe) est à l'œuvre.
Le troisième type concerne la "**RESOLUTION DE PROBLEMES**" : la conception lakatosienne est certainement la plus appropriée sur ce type de problèmes.
Cette typologie de problèmes n'est bien sûr pas une partition exacte des problèmes concernés par la construction de définition.

VI- Synthèse : construction de définitions et conceptions

La description des conceptions via le modèle cK¢ nous permet de décrire les processus de définition (Aristote et Lakatos) et de faire des hypothèses quant aux opérateurs mobilisables (par les étudiants) lors d'une SCD, et plus précisément, dans quelles conditions ces opérateurs peuvent raisonnablement être activés. Ceci nous amènera à réaliser une description la plus fine du milieu (regardé comme système antagoniste du sujet) à savoir : comment envisager un milieu permettant une mobilisation de certains opérateurs ? et d'autres questions telles que : existe-t-il un nombre « minimal » d'opérateurs à faire mobiliser pour qu'une SCD se déroule dans de « bonnes » conditions ?

Opérateurs et contrôles

Tous les opérateurs et contrôles étudiés ci-dessus prennent en compte simultanément deux aspects : une définition peut être vue comme un énoncé, ce qui mobilise des opérateurs et contrôles de type langagier et logique par exemple. Mais une définition peut également être perçue comme l'aboutissement d'un processus, dans lequel prennent part des opérateurs et contrôles tels ceux décrits par Lakatos. De plus, il est possible de décrire d'autres opérateurs et contrôles lorsqu'une définition est considérée comme inscrite dans une théorie (Popper), mais dans ce cas, le processus de construction de définition est arrivé à son terme, il ne sera alors plus question que d'écrire une "harmonieuse" théorie (axiomatique – Popper). Ceci nous amène à la liste d'opérateurs et de contrôles suivante :

Opérateurs

Nous avons décrit différents types d'opérateurs dans les conceptions précédentes. Les opérateurs **langagiers** concernent la forme d'une définition, l'usage de mots dans une définition (pas d'homonyme, métaphore, non redondance etc.) [Aristote]. L'importance de la forme d'une définition ressort en de nombreux endroits. Il est possible d'évoquer ici l'utilisation proscrite du "si et seulement si" dans une définition : cette expression semble en effet réservée aux théorèmes où il n'y a pas d'antérieur et de postérieur par rapport à la connaissance d'un concept, ce qui peut expliquer l'importance de la forme d'une définition, celle-ci devant mettre en évidence ce qui est nouveau par rapport à des choses antérieures [Aristote].

Des opérateurs **logiques** concernent l'équivalence entre le défini et le définissant, proscrivent le cercle vicieux ; pour définir, il faut rechercher une condition nécessaire et suffisante [Aristote].

Nous avons également décrit l'opérateur **génération d'exemples et de contre-exemples** [Lakatos].

La fonction de la définition engendre des opérateurs et contrôles : cela peut être une fonction de communication [Aristote] ou de preuve [Lakatos]. Celles-ci peuvent engendrer des opérateurs et contrôles de type langagier. Ceci souligne l'importance de l'aspect opératoire d'une définition.

Des opérateurs de type **axiomatique** [Popper] viennent compléter cette liste.

Structures de contrôle

Les structures de contrôle se situent à différents "niveaux" : nous avons rapporté des critères philosophiques de types essentialistes, nominalistes [tous les auteurs], mais aussi théoriques et axiomatiques [Leibniz, Popper]. De plus, des contrôles liés à la structure hiérarchique d'exposés mathématiques dans lesquels la dérivation [Carnap] a une fonctionnalité peuvent être en jeu lors de construction de définitions. Nous soulignerons enfin que, dans le cas de la conception lakatosienne, deux autres structures contrôles sont présentes : il s'agit de contrôles inhérents au contexte historique de définition de polyèdres, mais aussi et surtout des contrôles issus de la dialectique entre la construction de définitions et une preuve.

En particulier, nous avons replacé différentes composantes de la conception lakatosienne de la construction de définition dans le schéma ci-dessous, dans lequel des opérateurs peuvent jouer le rôle de contrôles.

Problème (par exemple conjecture, recherche du domaine de validité d'une formule)

Zéro-définition (peut-être de l'ordre de la description)

OPERATEURS

Exemples et contre-exemples (voire monstres, exceptions)

Capitulation; Redéfinir et inclure les contre-exemples dans la définition ; Ecarter les monstres, les exceptions

Nouvelle définition

Catalyse de la preuve

Proof-generated definition

(peut devenir une sorte de nouvelle *zéro-définition* et le processus ci-dessus reprend soit à partir de *zéro-définition*, soit à partir de 'nouvelle définition' ou on continue ci-dessous)

CONTROLES

Définition

Validation théorique, logique, essentialiste et nominaliste, mais surtout par la preuve

Chapitre III

Travaux didactiques existants sur la définition

Introduction

Nous avons relevé des études mettant en évidence les processus mobilisés lors de l'utilisation de définitions [S.Vinner], mais aussi des propositions didactiques de situations de définitions [R.Borasi – T.J.Fletcher – Math.en.Jeans – M.DeVillers – Ball et Bass]. Celles-ci nous apportent quelques éléments sur les conceptions d'élèves sur les définitions en mathématiques et sur les mathématiques en général [R.Borasi – De Villiers], ainsi qu'une ouverture sur de possibles situations de constructions de définition [T.J.Fletcher – Math.en.Jeans]. Nous relaterons également des articles consacrés spécifiquement à l'étude des conceptions sur les définitions en mathématiques chez des élèves et des enseignants [K.Shir].
A la lumière de l'étude épistémologique du chapitre II, nous tenterons de situer, dans ces travaux, les conceptions recensées d'élèves et d'enseignants sur les définitions en mathématiques, ainsi que les résultats relatifs à des situations de construction de définitions. Pour compléter cette analyse, nous proposerons une étude écologique de manuels (collège et lycée) et de programmes récents. Nous interrogerons en particulier les points suivants, tant pour les études de conceptions que pour l'étude écologique : existe-t-il différents types de définition provenant du débat essentialiste/nominaliste ? Est-il possible de trouver des conceptions, des consignes de programme, des activités dans les manuels proches de la perspective lakatosienne de construction de définition ?

Nous allons proposer ici quelques exemples de situations, extraites d'ouvrages présentés comme novateurs sur le plan didactique, propices à être ou à devenir des situations de construction de définitions. Chaque auteur de ces articles dispose d'une conception sur les définitions en mathématiques implicite dans les ouvrages et articles que nous avons consultés, mais qui induit des remarques sur les définitions. Nous tenterons de les expliciter : pour cela, nous nous référerons à l'étude épistémologique et théorique précédente.

I- Ball & Bass : les définitions à l'école élémentaire

La problématique de Ball et Bass[83] (2000) concerne l'étude de la construction collective d'une *public knowledge* en mathématiques à l'école élémentaire. Ils s'intéressent en particulier à la formulation de conjectures et considèrent que le *langage mathématique* est le fondement du *mathematical reasoning*, complémentaire avec la base d'une connaissance publique partagée. Ils spécifient que, dans leur étude, le langage inclut **la nature et le rôle des définitions** en mathématiques et que :

> *Definitions and terms play a crucial role: not simply delivered names to be memorized, they originate in and emerge from new ideas and concepts, and develop through active investigation and reflection. They facilitate reasoning about those new ideas by naming and specification. Decisions about what to name, when to name it, and how to specify that which is being named is an important component of mathematical sensibility and discrimination central to the construction of mathematical knowledge*[84] (Ball&Bass - 2000).

Ainsi, Ball et Bass, se situant sur le langage, traitent de la dénomination, qu'ils considèrent comme un acte important. Nous ne pouvons dire qu'ils sont nominalistes au regard de leur exposé sur la production de définitions de nombres pairs et impairs à l'école élémentaire.
Il s'agit d'une classe d'enfants âgés de huit ans (grade 3) : ces élèves ne disposent pas de définitions de nombre pair/nombre impair mais ils connaissent les mots "pair", "impair", ils savent que un est un nombre impair. Un enfant proposa que six puisse être un nombre pair et un nombre impair car 3 par 2 donne 6 et 2 par 3 donne 6, ce qui a déclenché un véritable processus sur les définitions de pair/impair où :

> *In the process, they are solidifying their understanding of the definitions. And they are* constructing *mathematical knowledge* (ibid.)[85]

Notons qu'alors, construire des définitions et comprendre la construction de celles-ci participent à la construction de connaissance mathématique.
Bien sûr, le processus de définition des élèves (ils travaillent au sein du groupe classe) nous concerne directement : nous n'avons pas accès aux protocoles, il nous faut donc en référer à l'article dont nous disposons. Ball et Bass relatent en fait deux expériences où il est question de construire des définitions : la première est une interrogation des élèves sur la parité du nombre zéro, la seconde est celle évoquée ci-dessus sur la parité / imparité du nombre six.

---

[83] D. Loewenberg Ball est enseignante à l'école primaire et chercheur en *mathematics education* (université du Michigan). H. Bass est professeur en mathématiques (algèbre commutative-université du Michigan).

[84] Trad. Les définitions et les termes jouent un rôle crucial : ils ne se limitent pas seulement à la donnée de noms à mémoriser, ils prennent naissance et émergent de nouvelles idées et de nouveaux concepts, et se développent par une recherche active et une réflexion. Ils facilitent le raisonnement sur de nouvelles idées par la donnée d'un nom et de caractéristiques. Les décisions concernant les points suivants : que doit-on nommer, quand donner un nom, et comment préciser ce qui vient d'être nommé, représentent une composante importante de la sensibilité et du discernement mathématiques, centrale à la construction de connaissances mathématiques.

[85] Trad. Dans ce processus, ils consolident leur compréhension des définitions. Et ils sont en train de construire une connaissance mathématique.

Dans les deux cas, les questions proviennent des élèves. Pour l'étude de la parité du nombre zéro, les élèves formulent une *working definition* (mot de Ball et Bass) qui est la suivante : *if you have a number that you can split up evenly without having to split one in half, then it's an even number*. Pourtant, ils ne parviennent pas à trancher sur la parité de zéro (ils ne pensent pas à considérer zéro comme la somme de zéro et zéro). Cependant, ils observent que 1 est impair, comme –1, et que zéro doit être pair. Ainsi, les élèves n'en tireront aucune conclusion sur la parité de zéro, personne n'étant convaincu par personne. Ball et Bass regrettent alors qu'aucune activité de définition de nombre impair/nombre pair n'ait réellement émergée :

> *This is an aspect of the collective work with mathematical langage that we refer to analytically as "expanding definitions", but in any case, it has not yet happened in the class*[86] (ibid.).

Dans la même classe, la question de la parité du nombre six va relancer la nécessité de définir (enfin) nombre pair/nombre impair, les élèves pensant implicitement que les propriétés pair/impair sont exclusives. L'argumentation proposée par l'élève implique une **nécessité de clarifier les termes**, et de définir ce qu'est un nombre pair. L'activité de construction de cette définition est passée par la représentation de 6 cercles, en trois tas de deux cercles, qui a été enrichie de deux cercle supplémentaires (huit au total). Les élèves en déduisent alors que la définition ne dépend pas du nombre de tas de deux cercles. Mais, d'après Ball et Bass, les arguments produits ne convainquent pas la classe car ils ne sont pas basés sur une connaissance publique partagée, ni sur des définitions communes des termes en jeu. Le fait que les élèves n'acceptent pas qu'un nombre soit à la fois pair et impair les conduit à travailler la définition de nombre impair par rapport à la définition de nombre pair donnée ci-dessus. Un élève, Sean, va alors introduire certains nombres, qui seront appelés dorénavant *Sean numbers* et qui ont la propriété suivante : divisés par quatre, il reste un multiple de deux. Ball et Bass analysent que **l'acte de dénomination** (*Sean numbers*) s'est révélé important car les élèves ont repris cette propriété et poursuivi le travail de définition.
En définitive, les élèves ont produit trois définitions de nombre pair :

> *As alternating whole numbers*
> *As those numbers that can be divided into two equal groups of whole number size with no remainder* (de la forme 2k, où k est entier)
> *As those numbers that can be divided into groups of two with none left* (k×2)

L'enseignant de cette classe (Ball) voit là une opportunité de questionner **l'équivalence** de ces propositions, et d'étudier si celles-ci définissent le même ensemble de nombres. Mais aussi sur la commutativité de la multiplication (2×k=k×2). Nous n'avons guère plus d'éléments sur le processus de construction de ces définitions.
Ainsi, ce qui ressort de ces travaux concerne **l'importance de l'activité de dénomination** car elle donne un statut à certaines choses et permet donc un travail sur celles-ci. Ceci n'est pas

[86] Trad. C'est un aspect du travail collectif sur le langage mathématique que nous qualifions de "définitions en expansion", mais de toute façon, cela ne s'est pas encore produit dans la classe.

véritablement nouveau : il en est question dans *Pensée et Langage* de Vygotsky (1997 - p.413 & 499) par exemple. Mais l'article ne nous permet pas de situer les productions des élèves en terme de *zéro-définition*, de réfutations par exemple, et ceci nous prive en quelque sorte de conceptions de ces élèves sur les définitions.

II- T.J.Fletcher : une ouverture possible sur des SCD

Fletcher[87], dans "l'Apprentissage de la mathématique aujourd'hui" (1970), propose aux enseignants des leçons de différents styles, un "essai d'une didactique nouvelle" (c'est le sous-titre). Avant de présenter une situation de définition extraite de cet ouvrage, rappelons le point de vue et les objectifs de Fletcher :

> *La mathématique ne doit pas avoir pour point de départ un ensemble de théorèmes, mais au contraire un ensemble de situations. Une période de découverte, de création, d'erreurs, de tâtonnements et de compromis est nécessaire avant d'obtenir les premiers résultats. Cette phase est particulièrement difficile à analyser ou même à décrire de façon convaincante (...) De nos jours, un mathématicien ne peut ignorer l'axiomatique et nous pensons que notre façon de voir est aussi bonne que d'autres pour atteindre ce but ; les axiomes seront la conséquence de cette étude et non le point de départ (...) Nous voulons créer dans les classes une ambiance qui développe les aptitudes créatrices des élèves au moyen d'idées qu'ils trouveront stimulantes et où ils retrouveront des aspects de la vie courante. (...) Les modèles mathématiques qu'utilise Piaget pour décrire les structures fondamentales montrent que s'il a raison, alors un certain nombre de sujets non-traditionnels que nous étudions ici sont plus à même de révéler le mécanisme de l'esprit que d'autres*. (Fletcher – 1970 - p.13s)

Cette citation est certes un peu longue, mais a le mérite de reproduire la pensée de l'auteur, qui, dans les premières lignes pourrait nous sembler par trop générale. Mais qu'en est-il de cette ambiance stimulante, de ces aptitudes créatrices ? Comment les motiver ? Nous avons retenu de cet ouvrage deux situations en rapport avec notre objet d'étude :

- La leçon n°8 « Motifs et Connexions »
- La leçon n°9 « Convexité »

Rappelons que ces leçons sont conçues pour des enseignants. Un maximum d'éléments est donc donné pour la réalisation et l'adaptation de ces situations en classe. Nous allons donc nous attacher à décrire les éléments en rapport avec définition et construction de définition, et ainsi déterminer comment Fletcher négocie le concept de définition et la construction de définitions.

[87] Mathématicien anglais. Fletcher a écrit cet ouvrage en collaboration avec des enseignants.

II-1. Leçon 8, architecture proposée : “Motifs et Connexions”

L’objectif de cette leçon est l’étude du nombre de chemins nécessaires pour reproduire un motif donné ; étant donné un motif ou un réseau ayant *n* chemins, le reproduire avec un nombre inférieur de chemins.

Déroulement proposé par Fletcher	Notre interprétation/lecture
Définition donnée au commencement de la leçon : « on appellera *chemin* toute partie d’un motif tracée d’un seul coup de crayon ». ***Problème 0 : tracer des motifs***	Pour entrer dans le problème : motif est un mot non défini et non questionné (langage courant – c’est le genre). Chemin est en revanche défini (cf. objectif) : le but ici n’est pas de définir chemin, mais d’autres notions (ordre etc.). Pourtant, Fletcher ne l’explicite pas.
Donnée et demande de génération de motif avec un ou plusieurs chemins. Demande de ce qui est différent et de ce qui est invariant.	Demande explicite de production d’exemples et contre-exemples (utilisation de la définition de chemin donnée). Questionnement sur genre et différences spécifiques.
Classer les motifs suivant le nombre de chemins	Fletcher donne la différence spécifique qui sera à l’étude par la suite.
Problème 1 : recherche du plus petit nombre de chemins nécessaires pour reproduire un motif donné	Définition de l’ordre du motif
Diriger l’attention sur les intersections (ou sommets) d’un motif	Préliminaire à la définition de degré.
Une étude expérimentale permettra de définir l’ordre d’un réseau (SIC)	Suggestion de l’auteur.
Problème 2 : on ajoute p chemins à un motif, que devient l’ordre ? ***Sous-problème : chercher une règle d’addition des chemins*** Fletcher donne une définition de connexe : étant donnés deux points distincts du motif, il existe un chemin les reliant	A partir d’exemples, Fletcher questionne les points suivant sur des motifs : sont-ils ouverts ? fermés ? connexes ? Il n’y a pas de construction de définition.
Faire un tableau pour résumer (avec nb de chemins suggérés, nb de sommets, nb de branches) pur dégager des propriétés (th d’Euler) Flectcher donne la définition de degré d’un sommet (nb de branches qui passent par ce sommet)	Là encore, il n’y a pas de construction de définition. La problématique est pourtant intéressante, de nombreux exemples sont travaillés …
Problème 3 : étude des propriétés combinatoires des réseaux – discussion sur les intersections « cette discussion est loin d’être facile, mais	Les mots à inventer en question sont « auplusun » et le reste dans le même esprit. L’aspect des définitions que nous retiendrons ici est le suivant : un mot comme raccourci de

certains élèves auront des idées originales. Il sera souvent utile d'inventer des mots pour préciser certaines notions. » (p.251)	langage, comme abréviation d'une propriété.
Travail de test sur la définition de *auplusun* (au plus un point d'intersection quand on prolonge les lignes). Introduction de la matrice d'incidence	Pas de temps laissé semble-t-il au travail consacré sur ladite définition.

Par rapport à l'utilisation des définitions et au travail proposé relativement à la construction de concept et à la construction de définition, nous relevons que dans ce que propose Fletcher :
- tous les mots ne sont pas définis (motif n'est pas défini par exemple) ;
- certaines définitions sont données d'entrée de jeu (chemin) ; l'habituelle présentation n'est ainsi pas perturbée (**définition au commencement** d'une leçon) ;
- un travail sur les exemples et contre-exemples est effectué. Quand un motif est questionné, c'est par rapport à certaines de ses propriétés qui sont explicitées et sur lesquelles un nom est posé (ordre, degré etc.). Encore une fois, des définitions sont données (connexe, degré, ordre).
En fait, Fletcher propose ici une situation où des problèmes sur les motifs s'enchaînent, avec des amorces possibles de construction de définition (une telle situation nous semble suffisamment riche pour demander explicitement certaines définitions), sans pour autant les exploiter réellement de ce point de vue. En fait, elles sont court-circuitées par la donnée de définitions. Peut-être est-ce dû à l'importance de la conservation du “vrai” nom des objets mathématiques et de leur “bonne” définition ou simplement à la nécessité de poursuivre l'activité dans de bonnes conditions, c'est-à-dire avec des objets sur lesquels tout le monde a la même référence, la même définition. Ceci permet d'éviter ainsi une activité de construction de définition qui prendrait un temps peut-être trop long. Nous allons expliciter plus précisément la conception de Fletcher sur les définitions en mathématiques avec la présentation de la leçon 9.

II-2. Leçon 9 : « Convexité »

L'intérêt de cette leçon, de notre point de vue, réside dans le fait qu'il est question de demander explicitement une définition aux élèves. De plus, Fletcher propose un début d'analyse mathématique de cette situation.
La structure de cette leçon est la suivante : l'enseignant désigne des formes (convexes ou non) en disant qu'il les préfère (ou non). Avant l'introduction de la terminologie “convexe”, “non-convexe” par l'enseignant, les élèves ont à effectuer la distinction entre des formes effectivement convexes ou non, *“sans la formuler verbalement”* (Fletcher – 1970 - p.266) : c'est un **travail sur des exemples et contre-exemples** mais sans définition à la clef. Une fois la terminologie introduite, les élèves ont à produire des figures convexes et non-convexes (**phase de génération d'exemples et de contre-exemples**). Après d'éventuelles introductions

de termes *"sans difficulté"* tels que 'frontière d'un ensemble de points', 'intérieur', *"le moment est maintenant venu de chercher des **définitions formelles**"* (ibid. p.267). Il est conseillé d'orienter la suite de la leçon vers une discussion sur les définitions possibles de 'convexe', le but de celles-ci étant de *"développer un langage précis pour exprimer correctement les données initiales"*.
Il y a donc ici, d'après nous, une insertion de construction de définition dans laquelle : des exemples et contre-exemples sont tout d'abord donnés, un travail de génération d'exemples et de contre-exemples est proposé sans verbalisation, et enfin, un travail sur les possibles définitions formelles de convexe est présenté[88]. Cet exemple témoigne d'une certaine conception de Fletcher à l'égard des définitions : **il différencie la phase de recherche de définitions** (à partir des exemples et contre-exemples donnés et générés) **et la phase d'élaboration de définition**. Plus précisément, Fletcher distingue une phase portant sur des définitions *intuitives* et une phase sur les définitions dites *formelles*. Il nous resterait à comprendre pourquoi les élèves ne doivent pas verbaliser leur activité de génération d'exemples et de contre-exemples, mais l'auteur ne s'explique pas à ce sujet. Ceci est probablement lié à la conception de Fletcher sur les définitions en mathématiques : nous pouvons dire que celle-ci comprend visiblement deux éléments majeurs. Le premier concerne l'aspect formel d'une définition en mathématiques : le fait de donner de nombreuses définitions dans la leçon 8, sans les faire construire, en témoigne. Le second s'intéresse au langage mathématique, qui doit être "précis", doit "exprimer correctement les données" : ce point de vue ne permet pas de considérer des définitions en construction, dans un statut provisoire. De plus, Fletcher propose d'étudier l'équivalence de différentes définitions de "convexe". Ceci renforce une vision **logicienne** sur les définitions. Ce sont certainement les raisons pour lesquelles aucune définition n'est demandée dans la phase de génération d'exemples et de contre-exemples, dans la leçon 9.

En complément de cette activité, Fletcher propose quatre définitions possibles[89] pour "convexe". Notons déjà que la forme langagière utilisée pour ces définitions est du type : *« une figure est convexe si et seulement si … »* c'est-à-dire constitue une équivalence entre le *definiendum* (convexe) et le *definiens*. Précisons que les définitions données n'ont pas un aspect provisoire, il ne peut s'agir de *zéro-définitions*, ni de *définitions intuitives* ou *naïves*, ce qui confirme que Fletcher n'est pas en train de considérer l'activité de construction de définition, telle que Lakatos la propose.

---

[88] C'est nous qui soulignons.
[89] *Définition possible 1 : une figure est convexe si et seulement si, étant donnés deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure.*
Définition possible 2 : une figure est convexe si et seulement si toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points.
Définition possible 3 : une figure est convexe si et seulement par chaque point de sa frontière il passe au moins une ligne de support.
Définition possible 4 : une figure est convexe si et seulement à chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P. (Fletcher-1970-p.267s)

II-3. Conclusions sur Fletcher

Nous avons vu que certaines conceptions fortes sur les définitions en mathématiques, à l'image de celle de Fletcher, peuvent paraître s'opposer à une activité de constructions de définitions : en effet, la recherche des définitions strictement formelles, précises en est un exemple - ce qui va de pair avec une vision logique des mathématiques alors que, comme le souligne Wittgenstein (1961), pourtant logicien, la logique seule ne peut être créatrice de sens comme le sont les mathématiques.
Cependant, la leçon 9 de Fletcher offre une possibilité de situation de construction de définition qui s'organiserait ainsi : quelques exemples et contre-exemples étant donnés, demander d'en générer d'autres et demander une définition de “figure convexe”.

III- R. Borasi : expérimentation de situations de construction de définition “powerfull”

Borasi[90] propose un livre intitulé “*Learning mathematics through inquiry*” (1992), où elle relate son expérience avec deux élèves de 14 ans, hors classe ordinaire. Elle s'intéresse principalement à la reconstruction et/ou à l'extension de concepts mathématiques connus des élèves vers des domaines plus larges. Elle propose de considérer trois types de situations, où des définitions et construction ou reconstruction de définitions sont à l'œuvre : le premier type consiste à donner une liste de définitions incorrectes d'un concept ; le deuxième type concerne l'utilisation de définitions dans des problèmes mathématiques particuliers et des preuves ; et le troisième type s'intéresse à explorer ce qu'il advient de la définition d'un concept familier lorsque l'on **change de contexte**.
Le contexte de cette étude est le suivant : c'est une “*mini-course*” (en anglais) de dix leçons où deux élèves de 16 ans et Borasi se retrouvent. L'idée initiale est la suivante :

> *The course was designed to engage the students in a personal inquiry into the nature of mathematical definitions. A series of thought-provoking mathematical activities was organized to help the students appreciate some of the special characteristics of mathematical definitions*[91] (Borasi – 1992 - p.3s).

Borasi propose en particulier une situation “à la Lakatos” (en français dans le texte) : il s'agit en fait de raffiner la définition de polygone. Le point de départ est la proposition suivante : la somme des angles intérieurs d'un polygone est de 180°. La construction de polygones et la preuve de cette proposition constituent la problématique, où une définition de polygone va s'avérer nécessaire. Ce qui est intéressant dans la narration de Borasi, c'est de retrouver des

[90] Chercheur en *mathematics education* (université de Rochester).
[91] Trad. Le "cours" a été conçu pour engager les élèves dans une recherche personnelle sur la nature des définitions mathématiques. Une série d'activités mathématiques invitant à la réflexion a été organisée pour aider les élèves à se rendre compte de quelques spécificités des définitions mathématiques.

éléments développés dans Lakatos (1961 & 1984), en particulier le travail des élèves sur la génération d'exemples et de contre-exemples. Mais Borasi ne propose pas une analyse “à la Lakatos” : elle nous livre quelques conclusions sur cette expérience par rapport aux définitions. En particulier, elle remarque combien il a été important pour les élèves de considérer les définitions produites comme des **tentatives de définition**, ce qui revient à accepter le statut provisoire qu'a une définition dans la construction de définitions. Plus précisément, à la question de Borasi “*quelle est la valeur des ces tentatives de définition*?”, une élève répond : “*c'est comme une théorie qui n'a pas encore complètement été testée, et qui est donc ouverte à des modifications*” (Borasi – 1992 - p.55). Et l'autre élève ajoute : “*il faut commencer avec quelque chose*” (ibid.). Nous sommes bien en présence ici de *zéro-définition*, au sens de Lakatos. Dans le cas de la situation de Borasi, cette *zéro-définition* est la suivante : “*a closed geometric figure of straight lines*”. Malheureusement, les quelques extraits de protocoles sont insuffisants pour permettre de poursuivre l'analyse en terme de *zéro-définition*, et les indications données par Borasi ne sont pas analysées du point de vue de Lakatos. Ce que nous retenons, du côté des élèves, ce sont les générations d'exemples et de contre-exemples (pour réfuter et ainsi modifier la définition), et l'acceptation du statut provisoire d'une définition.
Toutes les situations proposées par Borasi sont des situations où la nécessité de définir se fait de par le changement de contexte : elle propose par ailleurs une situation sur une grille régulière (à l'image des rues de grandes villes américaines) où sont redéfinis des concepts mathématiques déjà connus comme cercle, droite, droites parallèles etc. Ainsi, les situations de Borasi sont des situations issues de la géométrie où les élèves ont à redéfinir des concepts familiers et des situations issues de l'algèbre (par exemple la multiplication est vue et définie comme une itération d'additions), où les élèves ont a généraliser des concepts connus (généralisation de résultats sur les puissances). Borasi souligne que les contradictions soulevées par les élèves augmentent leur curiosité.
En ce qui concerne plus spécifiquement les conceptions des élèves sur les définitions en mathématiques, nous ne mentionnerons ici que **l'acceptation de l'aspect provisoire d'une définition**, ce qui est très important du point de vue de la construction de définitions. Celle-ci a pu se faire grâce aussi à la négociation des situations de définition par Borasi, ce qui n'est bien sûr pas neutre. Nous exposerons d'autres conceptions de ces élèves sur la définition dans le chapitre IV.

IV- M. De Villiers : engager les élèves dans un processus de définition

L’idée directrice du travail de De Villiers est la suivante : une approche génétique ou reconstructive nécessite de ne pas considérer les énoncés comme des produits finis, préfabriqués et soulève la nécessité d'analyser comment engager les élèves dans des processus mathématiques. Selon l'auteur, il ne s'agit pas uniquement d'étudier des situations de "découverte", il peut s'agir d'une explication de l'enseignant sur la constitution d'un concept. De Villiers s'intéresse plus précisément à l'activité de définition en géométrie (quadrilatères), interrogeant des élèves (de manière très dirigée - *grade* 10) sur les propriétés de quadrilatères (dessinés) et sur les trapèzes réguliers. Une analyse suivant les niveaux de Van Hiele est esquissée, nous retiendrons ici pour notre propos les points suivants (n'ayant pas pu nous procurer certains articles, nous citons De Villiers citant d'autres auteurs !)

IV-1. De l'intérêt de faire définir

"The construction of definitions (defining) is a mathematical activity of no less importance than other processes such as solving problems, making conjectures, generalizing, specializing, proving, etc., and it is therefore strange that it has been neglected in most mathematics teaching" [92] (De Villiers - 1998).
Cette citation parle d'elle-même !

IV-2. Deux types de procédé de définition de concepts en géométrie, inspirés par Freudenthal

De Villiers propose une réflexion reprenant deux types de procédé de définition développés par Freudenthal (1973 - p.457) dans le cadre de la géométrie et de la présentation de l'axiomatique et du déductivisme traditionnel. A cette occasion, Freudenthal parle de définition *implicite* par les axiomes, et revient ainsi sur les énoncés qu'Euclide considèrent comme définitions et qui ne sont en réalité qu'axiomes.
Les deux procédés de définition proposés concernent en fait la systématisation de connaissances existantes d'une part, et la production de nouvelles connaissances d'autre part.
Le premier procédé est intitulé "*descriptive (a posteriori) defining*" : le concept et ses propriétés sont déjà connus depuis un certain temps, ce concept n'est cependant défini qu'après. Ce procédé consisterait en une sélection d'un sous-ensemble de propriétés à partir duquel les autres propriétés peuvent être déduites. Ce sous-ensemble sert de définition et les autres propriétés en sont **logiquement** dérivées et constituent des théorèmes. La fonction essentielle de ce procédé est la **systématisation de connaissances existantes**.
Le second s'appelle "*constructive (a priori) defining*" : il intervient lorsque la définition d'un concept est modifiée par **exclusion**, **généralisation**, **spécialisation**, **remplacement** ou **addition** de propriétés à la définition. Un nouveau concept est ainsi créé. La fonction de ce procédé est la **production de nouvelles connaissances**. Nous retrouvons dans cette

[92] Trad. La construction de définitions est une activité mathématique aussi importante que d'autres processus tels que résoudre des problèmes, faire des conjectures, généraliser, spécifier, prouver etc. et il est étonnant que cela ait été négligé dans la plupart des enseignements mathématiques.

description quelques mots utilisés par Lakatos, tel l'exclusion. Mais Freudenthal n'explicite pas davantage ce procédé de définition.

Dans les deux cas, des connaissances (définitions ou concepts ou propriétés) préexistent aux deux procédés de définition décrits par De Villiers. Ce que nous retiendrons, c'est l'approche du concept de définition via la fonction de celle-ci. Le "*constructive defining*" reprend modestement le processus de définition proposé par Lakatos dans sa thèse.

IV-3. Les résultats obtenus par De Villiers

L'analyse que De Villiers fait à partir des niveaux de Van Hiele ne nous intéresse pas en tant que telle. Elle fait cependant ressortir certaines conceptions des élèves sur les définitions telles que : les définitions sont **hiérarchisées** (par rapport aux connaissances antérieures sur les carrés) ou **cloisonnées** (les élèves préfèrent définir un parallélogramme comme un quadrilatère avec deux paires de côtés opposés parallèles qu'avec des conditions sur les angles ou les longueurs des côtés). Une discussion en classe a eu pour objectif de rechercher les avantages de chacun de ces deux types de définition. Les élèves ont été conduits ainsi à remarquer que les définitions hiérarchiques avaient un sérieux avantage surtout par rapport à la **classification** : elles sont notamment **plus courtes** ; les théorèmes s'appliquant sur un concept s'appliquent alors automatiquement sur ses cas plus particuliers (du fait de l'emboîtement). L'intérêt **dynamique** lors de l'usage de logiciels de géométrie (Sketchpad, Cabri-Géomètre) des définitions de type hiérarchiques a également été noté par les élèves.
Les groupes observés sont semble-t-il plus performants sur une activité de définition de concept non connu que sur une activité de (re)définition de concept connu. Une hypothèse de De Villiers pour expliquer ce phénomène est de souligner le fait que les élèves sont plus vigilants et critiques notamment sur les **relations logiques** dans des activités de construction de définition (et non de reconstruction), ce qui nous semble très vraisemblable.

Notons également que les concepts mathématiques impliqués dans cette recherche sont des concepts géométriques donc ayant une ou des représentation(s) graphique(s), ce qui nous amène à nous questionner sur l'importance d'un niveau descriptif, de l'entrée par la perception et les représentations, lors de la résolution de SCD. Nous retenons également l'intérêt de questionner une définition et le processus de définition relativement à la fonction même de la définition.

V- Une situation de Math.en.Jeans : les carrés bossus

Cette situation est amenée par la problématique suivante : Paris et New-York sont-ils les sommets d'un carré ? Ceci amène à redéfinir "carré" sur une sphère et donc de se placer dans la géométrie sphérique. Cette expérience a été menée avec des élèves de collège (3ème) et de lycée (1ère S) (Math.en.Jeans – 1995 & 1997)

Les définitions produites concernent les segments sur une sphère, définis par : *un segment sur la sphère sera un arc de cercle issu d'un grand cercle (dont le centre est le centre de la sphère)*. Et un carré "bossu" (par référence à l'aspect perceptif d'un carré sur une sphère) doit remplir les conditions suivantes :

- les segments *bossus* sont égaux
- les diagonales *bossues* sont égales

Nous avons ici un changement de contexte, comme le propose Borasi, permettant de réinvestir des concepts mathématiques connus et donc de les redéfinir au regard du nouveau contexte. Dans le cas de la géométrie, tant pour Math.en.Jeans que pour Borasi, il s'agit de plus de poser des questions liées à l'axiomatique de la géométrie telles que celles concernant par exemple l'existence de l'intersection de deux droites ou encore l'existence d'un triangle équilatéral avec trois angles droits (sur la sphère), ce qui va même contre la perception acquise en géométrie euclidienne. Ces conflits engendrent une activité de redéfinition des objets géométriques connus dans un nouveau contexte.

Chapitre IV

Etude écologique de la définition

I – Analyse de programmes et de manuels de l'enseignement secondaire

La demande explicite de construction d'une définition peut mobiliser des conceptions chez les étudiants sur ce qu'est (ou doit être) une définition en mathématiques. Ces conceptions sont certainement fortement liées à la culture mathématique des étudiants (le mot 'culture' est employé ici dans le même sens que A. Bishop : *"an organised system of values which are transmitted to its members both formally and informally"* (Bishop – 1999)). Notons qu'il ne semble pas exister de cours spécifique sur les définitions tant dans l'enseignement secondaire qu'universitaire. Plusieurs facteurs contribuent à enrichir cette culture mathématique, et toute la question pour nous est déjà d'accéder à des éléments de celle-ci. L'étude des programmes et des manuels, ainsi que l'analyse de réponses d'enseignants à un questionnaire centré sur les définitions en mathématiques nous apporteront des éléments.

I-1. Etude de deux collections de manuels de Collège

Pour cette étude écologique, nous avons choisi tout d'abord des manuels de collège. Les définitions, bien que présentes à l'école primaire (par exemple, lors d'activités de classifications de différents objets géométriques) ne font pas l'objet d'un énoncé spécifique étiqueté « définition ». Ainsi, le collège marque une évolution vers une première structuration du cours de mathématiques (c'est une hypothèse). De plus, l'apprentissage des démonstrations débute en quatrième, en géométrie, et nous attendons donc une place spécifique des définitions à cette occasion dans les manuels. Nous avons choisi des manuels des années 80[93] et des manuels des années 90[94] : les premiers fournissent des explications sur les énoncés mathématiques, dont font partie les définitions, ce qui nous révèle une certaine conception[95] sur celles-ci. De plus, il est nécessaire d'étudier les seconds car ceux-ci témoignent d'une absence notable de définitions mais proposent des activités préparatoires ; nous allons rechercher dans ces activités préparatoires de possibles situations de construction de

[93] Collection Cedic "Faire des mathématiques".
[94] Collection "Cinq sur Cinq".
[95] Une ou des conception(s) des auteurs de manuels, assujetties aux programmes.

définitions. En particulier, l'étude épistémologique menée au chapitre II nous conduit à l'analyse selon différents points dont : le nominalisme et la logique (abréviation, dénomination, équivalence), l'essentialisme (existence), l'axiomatique (termes premiers indéfinissables), les fonctions des définitions. Nous avons sciemment séparé l'étude des deux collections de collège, car leur approche est significativement différente.

I-1.1. Les programmes relatifs à ces manuels : des définitions "simples et correctes"

Tout d'abord attachons-nous aux programmes concernant les manuels **du début des années 80**, l'après "maths modernes" en quelque sorte. Nous remarquons une idée récurrente dans les textes officiels : le langage mathématique est, et doit être, "précis". Il faut "*habituer l'élève à s'exprimer clairement, avec un vocabulaire simple mais dans un langage précis (décrire un objet mathématique, formuler une hypothèse, énoncer une définition ou une propriété, exposer une démonstration…*"

Certaines notions ne pourront être présentées et définies de manière satisfaisante : il est question dans les programmes que :

> *"… certaines notions, dont il est difficile de donner une définition qui soit à la fois simple et mathématiquement "correcte", appartiennent incontestablement au bagage instrumental et technique dont il convient de doter l'élève au cours de sa scolarité de collège. Il est évident que dans ce cas, une appréhension "concrète" de la notion suffit à l'élève (…) L'exemple de notion d'angle et du calcul trigonométrique est, à cet égard, digne d'être noté."*

Ainsi, il est nécessaire qu'une définition soit **simple** (dans le but d'être compréhensible des élèves ?), et **mathématiquement correcte** : les textes officiels ne nous informent malheureusement pas davantage quant à la signification exacte du "mathématiquement correcte".

Dans les années 90, il est difficile de trouver des commentaires faisant état des définitions au collège, les remarques précédentes ayant par ailleurs disparues. Les programmes de la fin des années 90 s'attachent davantage au "langage", et encore une fois, "faire des mathématiques" est synonyme "d'être précis" :

> *"Il convient d'être attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot. Le vocabulaire et les notations ne doivent pas être fixés d'emblée, mais introduits au cours du traitement d'une question, en fonction de leur utilité. (…) Un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un langage précis, en évitant que cette exigence soit ressentie comme arbitraire par les élèves, est le passage du « faire » au «faire faire » (*en leur faisant, par exemple, rédiger des messages*) (…) l'obligation de précision doit lui apparaître comme une évidente nécessité."*

Dans le cadre plus spécifique de l'apprentissage de la démonstration (géométrie), le langage est encore central : *"Expression et maîtrise de la langue en mathématiques ; introduction progressive d'un vocabulaire spécifique (utilité, sens dans situations)"*.

Nous avons relevé quelques remarques inhérentes à l'usage des définitions en géométrie : lors de travaux de constructions de figures, il faut, d'une part, préciser le vocabulaire (la rédaction de messages est un bon exercice) et, d'autre part, s'appuyer sur la définition d'une figure ou sur certaines de ses propriétés ($6^{\text{ème}}$). De plus, il faut connaître et utiliser une définition et des propriétés de : parallélogramme, carré, rectangle, losange, triangle rectangle (énoncés séparés) ($5^{\text{ème}}$ - $4^{\text{ème}}$).

Encore une fois, aucune note explicite ayant trait à l'importance des définitions et à leur nécessité. Il faut, pour constater ceci, remonter aux instructions générales du 1^{er} octobre 1946 :

> *insister sur l'importance des définitions, et lutter contre le vague et l'imprécision dans l'énoncé des règles ou des théorèmes ; que le professeur prenne soin, à cet égard, de donner l'exemple, même au prix d'une apparente perte de temps ; les énoncés fâcheusement écourtés, les définitions approximativement données doivent être immédiatement rétablis dans leur forme correcte et complète.*

Citons également quelques phrases des instructions complémentaires de janvier 1957 parlant encore de ***définitions complètes*** :

> *"lors des premières étapes de l'initiation et de l'apprentissage, c'est par l'observation et l'expérimentation que cette liaison* (mathématiques - monde sensible) *peut être réalisée et rendue évidente. Leur rôle apparaît clairement dans la création*[96] *des êtres mathématiques, munis de leur définition complète. Il n'est pas moindre lorsqu'il s'agit de découvrir certaines de leurs propriétés et, à cette occasion, d'accéder aux voies du raisonnement".*

Le calcul numérique est également évoqué car :

> *(il) comporte de multiples enseignements, permet le contrôle de la parfaite possession des définitions et des propriétés de base.*

I-1.2. Collection CEDIC : une présentation explicite sur les définitions – conception nominaliste logicienne des auteurs, avec une pointe d'essentialisme

I-1.2.1. Le langage mathématique

Le fait de proposer une entrée par le langage pourrait supposer une conception nominaliste, dans son sens le plus réducteur, mais tout dépend de la façon dont cela est traité : en effet, Aristote traite du langage, mais aussi de la logique et de l'essentialisme.
Dans les manuels de $6^{\text{ème}}$ et de $5^{\text{ème}}$, quelques chapitres sont spécialement consacrés à "*apprendre à s'exprimer correctement en mathématiques*". Nous apprenons dans cette présentation qu'il existe un langage propre aux mathématiques, dont il faut connaître les éléments de base et les règles de construction. Nous sommes avisés, par exemple, que :

[96] C'est nous qui soulignons.

> *"Les phrases énoncées en mathématiques sont des affirmations relatives à des objets connus, ou bien des définitions de nouveaux objets".*

Ceci place le rôle des définitions sur **l'introduction de nouveaux objets** et concepts mathématiques.
De plus, une phrase mathématique peut affirmer :

- une propriété d'un objet mathématique,
- l'existence d'une relation entre deux objets.

Il est également spécifié que lorsqu'une phrase est fausse, il faut le signaler.

I-1.2.2. Un nombre de définitions variables d'un chapitre à un autre

Nous avons choisi d'illustrer ce phénomène par le manuel de 6ème. Le programme de 6ème comprend : les nombres décimaux, les nombres décimaux relatifs, les observations d'objets géométriques et physiques. Le manuel est organisé en 4 groupes : CALCULER (6 chap.), DESSINER (4 chap.), APPLIQUER (4 chap.), S'EXPRIMER (4 chap.).
D'une manière générale, un grand nombre de définitions se trouvent dans les groupes DESSINER et S'EXPRIMER (environ 40), alors qu'il n'y en a que cinq dans les groupes APPLIQUER et CALCULER. Ceci peut sembler a priori "attendu". En particulier, les chapitres consacrés à la géométrie semblent être le lieu de nombreuses définitions. Nous avons relevé quelques spécificités à ce propos :

<u>Régions du plan :</u> les auteurs nomment secteur rentrant, secteur saillant (ostensions) mais ne les définissent pas ; cependant, on peut observer un **dessin**. **Peut-on considérer que le fait de nommer ces secteurs à partir d'un dessin est un acte de définition ?** D'après la suite de ce cours, il semblerait que ce soit le cas. Pourtant, une nouvelle difficulté se présente pour la définition de *secteurs adjacents* : dans celle-ci, il est question de secteur (angulaire) mais il n'a pas été précisé qu'il s'agissait du *secteur saillant* : encore une fois, la présence d'un dessin en marge « force » cette interprétation.

<u>Polygones :</u> un grand nombre de définitions permet de préciser le **vocabulaire** autour des polygones. Nous nous retrouvons de nouveau face à un implicite : un polygone est, par définition, une *ligne brisée fermée ;* ligne brisée a été précédemment définie, et le fait qu'elle puisse être ouverte ou fermée a été mentionné : la présence d'un dessin en marge permet d'éluder ces deux définitions. Pourtant, il est question de la notation d'un polygone par ses sommets : il serait alors possible de préciser (définir) ligne brisée ouverte, fermée. De plus la définition d'un *polygone convexe* n'est pas donnée, le mot convexe n'apparaît pas dans le cours, et un dessin de polygone convexe (avec sous-titre) est donné, faisant suite à un polygone non croisé (et non convexe de surcroît !). Ce qui nous amène à nous interroger sur **le statut des dessins dans un cours de géométrie. Peuvent-ils être suffisants pour**

caractériser un objet, et ce sans ambiguïté, et permettre ainsi d'éluder certaines définitions?

Les chapitres Ensembles et éléments et relations comportent beaucoup de définitions (vocabulaire), et pas de propriétés : pourquoi ces deux chapitres font-ils partie du groupe "s'exprimer" ? Parce qu'il n'y a que des définitions ?
Remarquons une définition « pour la forme » :

« une relation d'un ensemble E vers E est appelé relation dans E ».

Ce type de définition peut être considéré comme telle sur le plan langagier, par la présence de « *est appelé* ». En fait, on définit uniquement le « dans ».
Ce qui nous amène à rechercher dans les manuels suivants (dès la 5ème) plus précisément la conception sur les définitions qui s'en dégage : ceci va être facilité car les auteurs exposent (en partie) explicitement leurs points de vue sur les définitions par l'intermédiaire du cours.

I-1.2.3. Définition : un énoncé mathématique spécifique (manuels de 5ème et 4ème)

La présentation des manuels sur la définition met en avant différentes particularités de ce type d'**énoncé** mathématique et traite ainsi de la forme langagière des définitions, du rôle de dénomination de celles-ci, des définitions équivalentes, mais aussi du rôle des propriétés caractéristiques dans les démonstrations.

Il existe, d'après ces manuels, deux types d'énoncés en mathématiques, ce qui nous conduit, nous, à avoir une vision nominaliste sur ce que les auteurs proposent. Nous allons le montrer.

1) Manuel de 5ème : la définition vue comme traduction

Deux types d'énoncés en mathématiques sont donc proposés (5ème) dans le premier chapitre : les énoncés des définitions et les énoncés des propriétés. Ces derniers sont présentés sous la forme **si**…**alors**.
Quant aux définitions, une présentation particulière est faite, mettant en évidence **l'équivalence entre deux phrases ayant le même sens**, la définition permettant ainsi le **remplacement** d'une phrase vraie par une autre phrase vraie (traduction[97]). Nous sommes ici sur une vision logicienne nominaliste de la définition. En 5ème, la présentation des définitions passe ainsi par :

" dans ce livre, pour définir un mot nouveau, nous avons essayé de bien faire voir les phrases qui ont le même sens en écrivant comme ceci :

la phrase… $\Leftarrow$ a le même sens que $\Rightarrow$ la phrase…"

Pourtant, pour une vingtaine de définitions présentes dans ce livre (5ème), il n'y en a que quatre répondant à ce critère de présentation (suites proportionnelles, multiple, naturel

[97] Les auteurs ne nous disent pas si une définition a un sens gauche-droite ou droite-gauche comme le discutait Popper !

premier) . Dans le chapitre “Relations”, les définitions de : *application, bijection, relation d’équivalence* n’apparaissent pas sous la forme annoncée dans le premier chapitre alors que cela est pourtant possible, mais sont reléguées au paragraphe SAVOIR : il est important de **savoir reconnaître par la propriété caractéristique**.

Il nous semble que cette présentation particulière a pour but de mettre en évidence une **propriété caractéristique** d’un objet pouvant être utile dans une **démonstration.** C’est ce que nous confirme le paragraphe concernant les règles du jeu mathématique où l’objectif essentiel est de découvrir des *phrases vraies*. Pour cela, il faut raisonner logiquement : *“en mathématiques, ce sont les définitions et les propriétés énoncées dans le cours qui servent à justifier les raisonnements”*. Le rôle des définitions est ainsi de **justifier les enchaînements déductifs des démonstrations** [98] - les définitions et les propriétés justifient une **déduction** (du type **si**…**alors**…**d’après**…).

Notons que l’apprentissage de la démonstration (manuels de 4ème & 3ème) se fait dans le cadre de la géométrie plane, où les définitions sont surtout présentes pour donner des noms aux objets manipulés (la valeur lexicale selon Vinner) ; en ce qui concerne la propriété caractéristique d’un objet (qui fait que cet objet mérite une attention particulière, une définition), celle-ci apparaît ici comme une propriété à part entière, dans le but d’être utilisée dans une démonstration. Le statut accordé à la définition est assez formaliste, et certaines phrases précédées du mot *définition* ne sont des définitions que par leur intitulé et leur forme particulière très suggestive (…*est appelé*…).

Il est donc toujours intéressant de considérer les chapitre traitant de la géométrie : en effet, ils sont un lieu pour l’observation de conceptions “courantes” sur les définitions (à savoir la vision axiomatisée et déductive). Pour le manuel de 5ème, contrairement au manuel de 6ème, il y a peu de définitions en géométrie, malgré l’introduction de la géométrie dans l’espace. Dans ce cas, les objets nouvellement introduits[99] sont présentés par l’intermédiaire de leurs dessins ; en particulier, en ce qui concerne la *tangence* de deux solides dans l’espace, il faut se contenter d’une approche visuelle, de remarques : il n’y a pas de définition *formelle*. Mais alors, il nous est légitime, dans ce contexte que nous avons déclaré nominaliste, de poser la question : comment nommer un objet géométrique de l’espace ? La réponse se trouve dans la partie “SAVOIR” du cours ; il faut :

> *- Observer l’objet (les éléments qu’il contient et leur position)*
> *- Comparer avec les dessins et les définitions données dans ce livre (ou dans d’autres)* (mais quelles définitions de ce livre dirons-nous).

Ici, nous sommes loin de la présentation annoncée dans le premier chapitre.

[98] *Faire une démonstration, c’est écrire une succession de phrases, en indiquant les énoncés qui assurent la vérité d’une phrase écrite à partir de définitions et de propriétés déjà connues pour « vraies ».*
[99] Cône, génératrice du cône, cylindre, pyramide, prisme.

2) Manuels de 4ème : propriété *intéressante* et définition ; dénomination et forme langagière

Les éditions de 1979 et de 1983 marquent un changement de point de vue en ce qui concerne la définition en mathématiques : nous allons donc exposer les deux éditions.

L'édition de 1979 explicite en quoi il peut être intéressant de définir par l'argumentation suivante, qui va conduire aux définitions équivalentes :

Une **propriété intéressante** vérifiée par certains objets mathématiques est un facteur déclencheur à l'acte de définition :

> *"Si on trouve la propriété intéressante, on peut décider de* ***donner un nom*** *particulier* ***:***
> *→ soit* ***à l'ensemble des objets*** *qui possèdent cette propriété (exemple de la médiatrice)*
> *→ soit* ***à chacun des objets*** *qui possèdent cette propriété (exemple du carré)"*

Le paragraphe suivant concerne les **définitions équivalentes** :

> *"Parfois, il arrive que plusieurs propriétés soient équivalentes. C'est-à-dire qu'elles sont vérifiées par un même ensemble d'objets.*
>
> *Plutôt que de choisir une définition parmi ces propriétés on préfère souvent* ***donner un nom*** *à tout objet vérifiant l'une de ces propriétés (et il les vérifie alors toutes !). C'est ce que nous avons fait pour le parallélogramme, le rectangle et le losange.*
>
> *L'intérêt d'avoir plusieurs définitions équivalentes d'un même objet, c'est que cela donne plusieurs moyens de le* ***reconnaître****."*

Dans ce cours (de l'édition de 1979), la définition apparaît véritablement comme nécessaire dans une démonstration. L'aspect **existence et unicité** de l'objet défini n'est pas évoqué ici explicitement comme il le sera dans l'édition de 1983 ; cependant, l'exercice de *Nicolas Définimal* permet d'aborder cet aspect (1979) : ne pas vérifier l'existence et l'unicité est donc synonyme de "mal défini" :

> *"Les aventures de Nicolas Définimal : il s'intéressait aux positions relatives de trois points sur une droite. Il décida de poser une définition : j'appelle centroïde de 3 points alignés le point situé à égale distance de ces trois points (…) Un autre jour, il décida d'appeler tiers du segment [AB] le point T tel que 2 TA = TB (…)".*

L'édition de 1983, dans un chapitre consacré à la démonstration traite de "Enoncer des définitions", et le présente ainsi (ceci sera repris plus succinctement dans le manuel de 3ème) :

3. Énoncer des définitions

Pour donner des noms à certains objets mathématiques, on énonce des *définitions*. Ce sont des phrases particulières se présentant sous l'une des deux formes suivantes :

• **Dans telle situation, tel objet est appelé comme ça.**
Exemple : « a et b sont des réels non nuls :
le nombre x tel que $a \times x = b$ ***est appelé*** quotient de a par b ».
On dit aussi : « a et b sont des réels non nuls :
le quotient de a par b ***est*** le nombre x tel que $ax = b$ ».

Remarque : Lorsqu'on pose ce genre de définition, il faut pouvoir garantir :
— que l'objet en question existe,
— que l'objet en question est unique.

Schématiquement, nous écrirons souvent ainsi :

| la phrase x est le quotient de a par b | à la même signification que | la phrase $ax = b$ |

ou bien plus simplement :

| x est le quotient de a par b | signifie | $ax = b$ |

MATHÉMATIQUES 4e

• **Dans telle situation, un objet qui vérifie telle propriété est appelé comme ça.**
Exemple : « un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles ***est appelé*** un parallélogramme ».
On dit aussi : « Un parallélogramme *est* un quadrilatère dont les côtés sont parallèles.

Une définition du type :

$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$ signifie $\boxed{(AB) /\!/ (CD) \text{ et } (AD) /\!/ (BC)}$

Propriété caractéristique

La propriété d'un quadrilatère « avoir ses côtés opposés parallèles » est dite *caractéristique* du parallélogramme.
Plus généralement une *propriété caractéristique* d'un objet est une propriété possédée par cet objet et cet objet seulement.
On peut alors écrire l'une des deux phrases du type $\boxed{\text{si}}$ ... $\boxed{\text{alors}}$ ... que nous avons écrites en marge pour le parallélogramme.

permet d'énoncer, selon les constances, deux propri vraies :

$\boxed{Si}$ $\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme}}$

$\boxed{alors}$ $\boxed{(AB) /\!/ (CD) \text{ et } (AD) /\!/ (BC)}$

En fait, définir, c'est **donner des noms à certains objets mathématiques**. Nous sommes bien dans la lignée nominaliste du manuel de 5ème. Ainsi, les auteurs évoquent clairement la **dénomination** i.e la désignation par un mot d'une pensée (abstraite) : c'est du signifiant dont il s'agit. Mais l'acte de définition peut-il se restreindre à une dénomination ? Les auteurs de ces manuels nous proposent un début de réponse : "*une définition est une phrase qui a une certaine forme*" et deux formes sont proposées pour une définition ; elles ont en commun la structure "grammaticale" « ***est appelé*** ».

Ainsi, **une définition est une phrase qui a une certaine forme** : cela signifie-t-il en particulier qu'il est possible de décider qu'un énoncé est une définition en étudiant sa forme grammaticale ? Les auteurs ne nous parlent pas de cet aspect, mais ils présentent deux formes langagières pour les définitions.
- La première s'énonce ainsi : ***"dans telle situation, tel objet est appelé comme ça"*** : dans ce cas, il est mentionné qu'il faut s'assurer de **l'existence et de l'unicité** d'un tel objet. Remarquons que la définition va dépendre ici semble-t-il de la situation, ce qui laisse à penser que la situation elle-même pourrait apporter la nécessité de définir ; mais, l'aspect nominaliste des auteurs réduit en particulier la définition à une dénomination. De plus, la question essentialiste de l'existence (et celle de l'unicité) est posée, ce qui vient compléter la conception nominaliste logicienne des auteurs. Il semblerait que ce type de définition soit en réalité proche d'une **désignation**, d'une **définition par extension**.
- La seconde formulation langagière d'une définition s'exprime par : ***"dans telle situation, un objet qui vérifie telle propriété est appelé comme ça"*** : ici, il n'est pas question d'existence et d'unicité ; le fait de connaître une propriété permet peut-être de s'assurer qu'effectivement un objet possède cette propriété. Contrairement à la formulation précédente, une définition de ce

type ne se résume pas à une simple dénomination et désignation ; vient s'ajouter un signifié, une propriété détenue par un objet.
Cette seconde formulation permet aux auteurs de faire une transition vers les **propriétés caractéristiques** : nous apprenons qu'une définition du type *« ...signifie… »* (là, nous sommes en présence, en fait, de la seconde forme de définition), permet d'énoncer une *propriété vraie,* et le parallélogramme sert d'exemple pour une formulation en terme de *si…alors….* Cela permet aux auteurs de rejoindre alors leur préoccupation principale : la démonstration et son apprentissage. Pour eux, une démonstration est une suite de *phrases vraies* et les énoncés du cours (propriétés et définitions) permettent un enchaînement de *phrases vraies*. L'aspect opératoire des définitions est ainsi développé, notamment par la formulation d'une définition du second type en deux énoncés *si…alors….*

A ce propos, qu'en est-il de la présentation inhérente aux **propriétés caractéristiques** dans ce manuel ? D'après ce qui précède, toute définition du type *« ... signifie… »* peut être doublée d'une ou de deux propriétés vraies (exemple du parallélogramme). De plus, la nécessité d'introduire des définitions, qui a été évoquée dans l'édition de 1979, n'est ici pas présente : le paragraphe consacré aux définitions équivalentes a été remplacé par une partie traitant de la propriété caractéristique et le fait que l'on puisse *choisir* une définition est totalement absent.
Il est à noter que certaines définitions ne semblent parfois pas importantes, à l'image de cette remarque originale dans le cours *vecteurs et repérage :*

> *pour utiliser les vecteurs,* ***tu n'as même pas besoin de te souvenir de quoi il s'agit*** *! Il te suffit (mais c'est nécessaire) de te souvenir des propriétés qu'ils vérifient.* (4ème - 1983)[100]

I-1.2.4. Exercices sur les définitions

Nous avons recherché dans les exercices des conceptions sur les définitions, en corrélation et en complément de ce qui a été développé ci-dessus, ainsi que des exercices permettant la construction de définitions.

1) Dénomination et importance du langage, vocabulaire
Il y a de nombreux exercices concernant la dénomination, soulignant l'importance du langage et du vocabulaire en mathématiques. Ceux-ci prennent des formes diverses.

Il peut s'agir d'un travail nominal à partir d'une propriété pouvant être considérée comme caractéristique (5ème) :

> *un quadrilatère possédant la propriété « les diagonales sont perpendiculaires » porte-t-il un nom particulier ?* (5ème)

[100] C'est nous qui soulignons (en gras).

En France, les élèves connaissent le losange dans le cas où le quadrilatère est un parallélogramme ; il existe également le *cerf-volant*, mais ce n'est pas un objet d'enseignement en France au collège[101].

La présentation de propriétés dites *intéressantes* dans le cours de 4ème (1979) peut être déjà l'occasion d'un travail sur ces propriétés et d'une dénomination en 5ème :

> *La transformation « prendre l'opposé de » a une propriété intéressante : la faire deux fois de suite ce n'est rien faire. Cherche des transformations qui possèdent cette même propriété.*
>
> Note : *une transformation ayant cette propriété est dite « involutive » (comme la volte-face).* (5ème)

Ici, une propriété (involutive) est présentée comme intéressante : elle peut concerner des objets mathématiques de nature différente (algébrique, géométrique). Un nom est donné à cette propriété et non pas aux objets particuliers auxquels elle s'applique.

Le traitement de l'importance du langage peut être présenté de manière "brutale" comme le montre cet exercice (5ème) :

> *Attention : il ne faut pas confondre :*
> - *« être égaux » et « avoir même mesure »*
> - *« être égaux » et « être superposables » (…)*
>
> *ce n'est pas correct de dire [AB] et [AC] sont égaux…*
>
> *En 5ème, il n'est pas possible de t'expliquer pourquoi les mathématiciens se sont mis d'accord sur cette manière de parler ; en attendant il vaut mieux t'habituer à faire des phrases correctes* (5ème).

Nous nous demandons pourquoi tant d'arbitraire dans cette déclaration ? Ne serait-il pas préférable de parler de la nature des objets dont il question pour justifier ce choix de langage ?

Et il semble clair, qu'en mathématiques, il "faut faire" attention à l'usage des termes (interprétation de 'équidistant' par 'égale distance', versus 'même distance').

> *Alain prétend que : tous les points de la médiatrice d'un segment ne sont pas situés à la même distance des deux extrémités du segment. Qu'en penses-tu ?* (5ème).

Ainsi, pour les auteurs, il semble que "parler mathématique" et parler dans la vie de tous les jours sont deux choses différentes, ceci est attesté par l'exercice suivant consistant à écrire des définitions :

> *a) Dis en français ce qu'est une tangente à un cercle.*
>
> *b) Complète la définition :*
>
> *La phrase : C est un cercle de centre O, d est tangente en P à C*
>
> $\Leftarrow$ *a le même sens que* $\Rightarrow$ *La phrase…* (5ème).

[101] Il en est question dans les programmes actuels (2000) de l'école primaire.

La définition est ici considérée suivant deux registres : celui de la langue naturelle et celui concernant la présentation effectuée dans le cours de l'année précédente (phrase avec $\Leftrightarrow$ correspondant à une propriété).

Ce type d'exercice est peut-être motivé par une remarque du livre du maître :

> *"lorsqu'une définition est écrite exclusivement en français peu de problèmes se posent, mais il n'en est pas de même quand on désire lui donner un aspect plus symbolique"*(5ème).

Ainsi, définir en mathématiques comporte des exigences plus grandes que dans la vie quotidienne. Il est ici question de la nécessité d'utiliser un langage plus *symbolique*, peut-être tout simplement du fait de la vision abréviative des définitions, d'une part, et de leur rôle dans l'enchaînement d'une démonstration, d'autre part.

2) Utilisation des définitions comme pas déductif dans une démonstration (en géométrie)
Manuel de 3ème (1984)

Quelques exercices suggèrent l'utilisation de certaines définitions du cours pour la résolution. Par exemple :

> *" deux cercles de même rayon et de centres respectifs A et B se coupent en deux points E et F. Démontre que (AB)$\perp$(EF).*
> *- Définition du cercle*
> *- Définition et propriété caractéristique du losange"* (3ème).

Nous trouvons des "préliminaires" à la relation définitions et démonstrations en 6ème, où un travail est fait dans des exercices entre définition et propriété caractéristique :

> *Gilou dit : puisque je sais que d(O,B)=d(O,C) je suis sûr que O est le milieu du segment [BC]. Qu'en penses-tu ?* (6ème).

3) Définition *correcte* – existence et unicité. Définition *redondante* (Manuel de 3ème (1984))

Un exercice de 5ème permet d'aborder la notion de définition redondante :

> *Est-il possible de dessiner un quadrilatère ayant 3 angles droits et n'étant pas un rectangle*[102] *?* (5ème) .

Il est possible certes d'aborder cet exercice en terme de construction de "bonne définition" à savoir une définition donnant l'une des caractéristiques permettant de l'identifier "à tous les coups" et de le construire facilement. Des définitions équivalentes peuvent être considérées. De plus, la notion de **définition redondante** est également présente et peut faire l'objet d'une réflexion.

En 3ème (1984), trois exercices centrés sur les définitions permettent de traiter l'existence, l'unicité et la redondance ; remarquez que les noms donnés aux objets sont déjà suspects …:

[102] Rectangle a été défini comme parallélogramme ayant un angle droit.

1- *Quelqu'un dessine avec un compas une ligne courbe fermée sur une boîte cylindrique. Cette ligne est-elle un cercle ? Quels sont les mots de la définition du cercle qui ne s'appliquent pas à cette ligne ?*
2- *Comment définirais-tu la distance entre un ensemble de points B et un ensemble de points M du plan ?*
3- *Jean propose les définitions suivantes. Lesquelles te paraissent correctes ? Pourquoi ?*
   a- *Le « tiers du bipoint (A,B) » est le point M tel que : AM=AB/3.*
   b- *Le « centron d'un quadrilatère » est le point d'intersection des diagonales.*
   c- *Le « centrum d'un pentagone » est le point d'intersection des diagonales.*
   d- *On appelle « médiarète d'un cube » toute droite joignant les milieux de deux arêtes opposées du cube.*
   e- *On appelle « gogolin » le plus grand des nombres entiers.*
   f- *On appelle « artificiel » tout naturel qui est plus petit qu'un décimal au moins.*

(3$^{\text{ème}}$).

Et il y a également des exercices portant sur les propriétés caractéristiques, pouvant être mis en relation avec des définitions redondantes :

"Trouve ce qu'il y a en trop ! ″ Un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur est un rectangle″ ; ″ Un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu, la même longueur et sont médiatrices l'une de l'autre est un carré" " (3$^{\text{ème}}$).

4) Dénomination et classification

Il en fait question de classification en géométrie et de nombreux exercices demandent de classer, nommer des quadrilatères selon leur(s) propriété(s) caractéristique(s). Mais le problème même de la classification n'est pas problématisé, donc, là encore, pas de situation de construction de définition en vue. En voici un exemple :

Dessine 10 quadrilatères. Nomme-les.

a) *Dans ces quadrilatères, y en a-t-il qui possèdent la propriété avoir deux angles droits et rien que deux ? Peux-tu dessiner un quadrilatère ayant cette propriété ?*
b) *De même avec la propriété avoir au moins deux côtés de même longueur.*
c) *De même avec la propriété avoir 3 angles obtus* (6$^{\text{ème}}$).

I-1.2.5. Conclusion

En définitive, ces manuels nous présentent les définitions de la façon suivante :

Une définition est une phrase qui a une certaine **forme langagière** et qui peut revêtir deux formes particulières :

- *dans telle situation, tel objet* ***est appelé*** *comme ça* (possible définition en extension)
- *dans telle situation, un objet qui vérifie telle propriété* ***est appelé*** *comme ça.*

Il est nécessaire de définir des êtres mathématiques qui **existent**, et d'en vérifier l'**unicité**.

Les fonctions d'une définition sont : la fonction de communication, la fonction de **dénomination** et d'introduction d'un mot nouveau, le rôle opératoire d'une définition dans la **justification** de pas de déduction dans une démonstration (usage de définitions comme règles d'inférence).
Les auteurs prennent soin de séparer "définition" et "propriété caractéristique", même s'il est dit dans l'édition de 1979 ($4^{ème}$) qu'il est possible de choisir une définition parmi des propriétés caractéristiques.

La présentation du *jeu mathématique* et des règles de ce jeu ne sont pas une exclusivité propre à cette collection. Citons, par exemple, Bareil-Zehren (Hachette – 1982) :
Un chapitre *« entendons-nous bien ! »* en introduction présente les axiomes, en mathématiques, comme propriétés de base que l'on décide de considérer comme vraies. Les auteurs présentent les axiomes et expliquent que certaines définitions ne seront pas données ainsi : les axiomes sont vus comme les règles du jeu mathématique ; ils sont non contradictoires et en nombre suffisant. Les mathématiciens, pour savoir *à quoi ils jouent* ont précisé les définitions des *êtres* mathématiques. Les définitions de certains objets étant trop compliquées, et ces objets étant connus des élèves par ailleurs, lesdites définitions ne seront pas proposées aux élèves (par exemple : droite, nombre naturel) : ce seront en quelque sorte des axiomes.
Ce qu'il est intéressant de noter, c'est le paragraphe consacré aux **propriétés caractéristiques** :

> *"on dit qu'une propriété est une propriété caractéristique d'une figure quand :*
> - *cette figure la possède*
> - *cette figure est la seule à la posséder"*,

Et que t*oute propriété caractéristique d'une figure peut servir de "définition" pour cette figure*. Cependant, il n'est pas question des définitions équivalentes, de manière explicite.

I-1.3. Collection Cinq sur Cinq : absence de définitions et rôle des activités préparatoires

Il est ici nécessaire, en préambule, de rappeler l'usage fréquent, et pour ainsi dire systématique, d'activités "d'introduction" ou "préparatoires" dans les manuels des années 90.
La tendance actuelle (jusqu'en 1998 en tout cas) semble être, au collège, à la présentation de nouveaux objets mathématiques par l'exemple. Un dessin peut ainsi faire office de définition, au sens commun pourrait-on dire, c'est-à-dire que la reconnaissance de l'objet en question est possible (exemple : les angles).
Mais est-ce là le seul rôle d'une définition en mathématique dans les manuels? Comment, en effet, un élève peut-il asseoir ses connaissances sur un ou plusieurs exemples ?
N'est-ce pas inciter les élèves à se forger des propriétés caractéristiques inhérentes à des objets qu'ils croient connaître ?

L'analyse des manuels de la collection « Cinq sur Cinq » sera présentée suivant deux groupes, la présentation du cours étant très différente entre ces deux groupes :

- 1^{er} groupe : manuels de $6^{ème}$ et $5^{ème}$
- 2^{nd} groupe : manuels de $4^{ème}$ et $3^{ème}$.

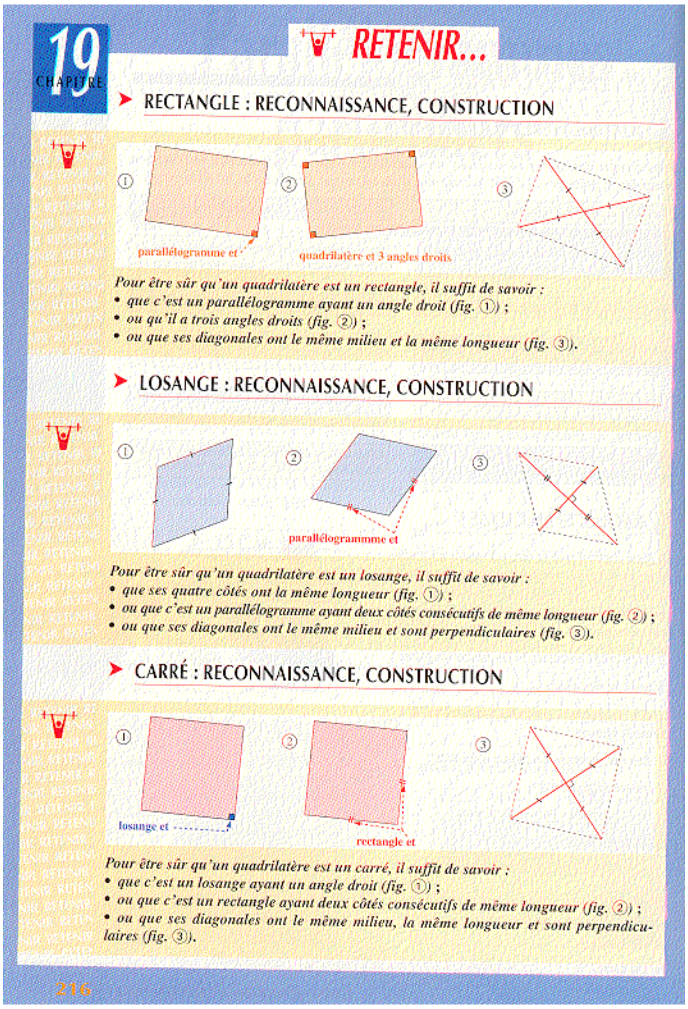
I.1.3.1. L'implicite du statut des énoncés ($6^{ème}$ et $5^{ème}$)

La grande différence entre cette collection et la collection CEDIC précédente est la structure – et le contenu - du cours : nous avons vu, dans les manuels précédents, un certain "besoin" de s'expliquer sur les énoncés mis en œuvre dans l'édifice mathématique, ainsi qu'un cours "traditionnel", chaque chapitre débutant par une (ou plusieurs) définition(s). Ce n'est pas du tout le cas dans les manuels « Cinq sur Cinq » : en effet, le cours se résume à un paragraphe intitulé "retenir", où **le statut des énoncés n'est pas spécifié** (définition, théorème, propriété, exemple…). Toutefois, certains énoncés sont écrits en rouge, ce qui peut inciter à croire qu'ils sont véritablement « primordiaux », qu'ils constituent quelques références auxquelles l'élève peut se rattacher : par exemple : *« le milieu d'un segment est le point de ce segment à égale distance des extrémités de ce segment »* : à notre avis, ceci pourrait être une définition ; en revanche quel statut accorder à *« un cercle est une ligne »* ?

1) Géométrie

Considérons encore une fois les chapitres sur la géométrie : les élèves disposent de certaines connaissances issues directement du primaire (ils savent, par exemple, tracer et reconnaître un carré, un cercle, un triangle …). Lorsque les définitions de ces objets géométriques connus seront introduites, quelle en sera la motivation ? et quel(s) rôle(s) joueront-elles ? En fait les définitions de géométrie, dont il sera question dans les manuels « Cinq sur Cinq », sont présentées avec les instruments (équerre, règle et compas) d'une part, et avec des **dessins marqués** d'autre part.

Les programmes de collège mettant l'accent en géométrie sur les quadrilatères particuliers (à partir du parallélogramme), les parties concernant les parallélogrammes sont intitulées *« Définition et propriétés »*. En revanche, pour les parallélogrammes particuliers, il ne s'agit plus que de "*reconnaissance et construction*". Ce qui importe, ce n'est pas la définition, (celle-ci est disponible dans le lexique situé à la fin du manuel) mais toutes les façons de caractériser un quadrilatère particulier, les dessins marqués pouvant se substituer à une définition. Exemple du manuel de $5^{ème}$:



19 CHAPITRE

RETENIR...

RECTANGLE : RECONNAISSANCE, CONSTRUCTION

parallélogramme et

quadrilatère et 3 angles droits

Pour être sûr qu'un quadrilatère est un rectangle, il suffit de savoir :
- *que c'est un parallélogramme ayant un angle droit (fig. ①) ;*
- *ou qu'il a trois angles droits (fig. ②) ;*
- *ou que ses diagonales ont le même milieu et la même longueur (fig. ③).*

LOSANGE : RECONNAISSANCE, CONSTRUCTION

parallélogramme et

Pour être sûr qu'un quadrilatère est un losange, il suffit de savoir :
- *que ses quatre côtés ont la même longueur (fig. ①) ;*
- *ou que c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur (fig. ②) ;*
- *ou que ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires (fig. ③).*

CARRÉ : RECONNAISSANCE, CONSTRUCTION

losange et

rectangle et

Pour être sûr qu'un quadrilatère est un carré, il suffit de savoir :
- *que c'est un losange ayant un angle droit (fig. ①) ;*
- *ou que c'est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur (fig. ②) ;*
- *ou que ses diagonales ont le même milieu, la même longueur et sont perpendiculaires (fig. ③).*

216

Ces trois quadrilatères sont présentés avec deux systèmes de signifiants : dans l'ordre symbolisme puis langue naturelle. Dans cette collection, nous pouvons même distinguer trois types de symbolisme :

- un symbolisme « traditionnel » (avec des marques pour les angles droits et les côtés de même longueur),
- un symbolisme faisant intervenir les instruments (équerre pour les angles droits et compas pour les égalités de longueurs),
- un symbolisme mélangeant texte et marques (comme ci-dessus).

Dans le cas ci-dessus, une **condition suffisante** est énoncée : il est difficile de traduire exactement le texte proposé avec des marques d'angle droit et d'égalité de longueurs, d'où ce nouveau symbolisme. Cependant, dans le lexique présent à la fin du manuel, le rectangle, par exemple, est présenté comme *quadrilatère qui a quatre angles droits* (**définition redondante**). Le carré, dans le manuel de 6ème, et toujours dans le lexique, est représenté par un dessin marqué : quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Encore une définition redondante, à supposer qu'un dessin puisse faire office de définition, accompagnée du texte *quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange*.

Dans de pareils cas, nous pouvons nous demander quelle caractérisation géométrique les élèves retiennent-ils d'une telle présentation ? Dans le cadre de la géométrie, on passe en fait d'une géométrie d'**observation** (activités préparatoires sur des dessins et leur observation) à une géométrie de **déduction** (démarche inductiviste préconisée par les programmes) reposant sur des figures : ce passage difficile se fait notamment par le biais de ces exercices.

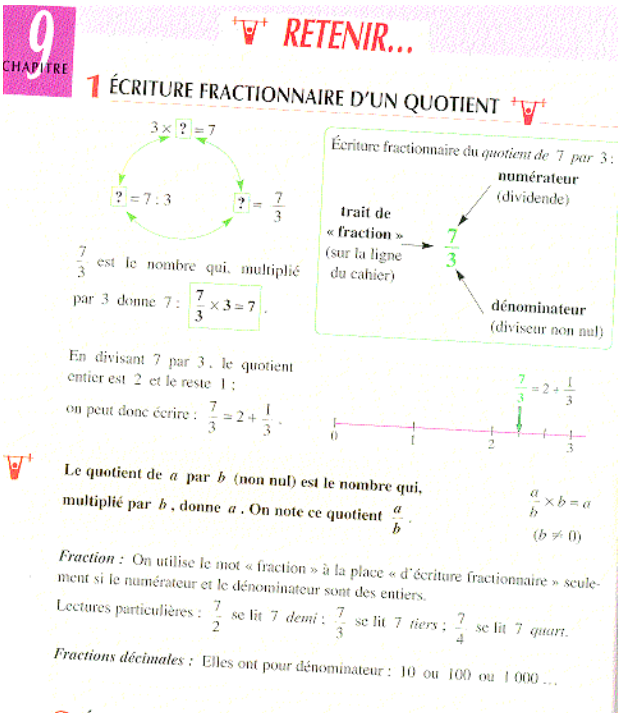
Côté exercices, une partie intitulée "lire et comprendre les énoncés" nous propose quelques **exercices** sur les définitions ; ils sont tous de deux types et requièrent de savoir :

- **lire un dessin marqué**
- **remplir un texte à trous** : deux formes d'exercices dans cette catégorie :
  → soit un texte à trous est proposé ainsi que des mots.
  → soit une situation (avec encore un dessin marqué) est proposée et le texte à trous est une lecture de cette situation : on aborde ici essentiellement la pratique des propriétés et propriétés réciproques, formulées en si…alors…

Dans les deux cas, il s'agit de mettre en œuvre des propriétés caractéristiques, utilisables dans des démonstrations.

Continuons notre recherche de définitions en géométrie… Quelques énoncés, dans la partie "retenir" cette fois, pouvant être considérés comme définitions, sont présentés, avec un symbolisme proche de $\Leftrightarrow$, comme des équivalences (peut-être dans la perspective de l'apprentissage de la démonstration).
Dans la partie exercices, nous avons des encadrés avec des définitions (des « vraies définitions »), par exemple pour les droites particulières d'un triangle, sans que le statut effectif de définition soit présent.
Le rôle du dessin toujours marqué, soit de manière « traditionnelle », soit avec des instruments (compas et équerre), apparaît de manière systématique, le texte ne faisant presque plus figure que d'ornement.

2) Travaux numériques
Pour la partie "travaux numériques", il n'y a toujours pas d'avertisseur *définition* ; quelques énoncés, auxquels nous pourrions assigner le statut de définitions consistent, pour la plupart, en la **désignation par des exemples** : mais, pouvons-nous parler de définition dans ces cas-là ? Le signifié est en fait absent. Peut-être pour éviter tout excès de formalisme…
En voici un exemple : dans l'extrait proposé ($6^{\text{ème}}$), le numérateur et le dénominateur d'une fraction font l'objet d'une **désignation** (à partir d'un exemple). Nous posons la question suivante (qui sera reprise lors de la réalisation du questionnaire) : désigner, est-ce définir ? Est-il possible de substituer un exemple à une définition ?



9 CHAPITRE

RETENIR...

1 ÉCRITURE FRACTIONNAIRE D'UN QUOTIENT

$3 \times \boxed{?} = 7$

$\boxed{?} = 7 : 3$

$\boxed{?} = \frac{7}{3}$

$\frac{7}{3}$ est le nombre qui, multiplié par 3 donne 7 : $\boxed{\frac{7}{3} \times 3 = 7}$.

Écriture fractionnaire du *quotient de* 7 *par* 3 :

numérateur (dividende)

trait de « fraction » (sur la ligne du cahier)

$\frac{7}{3}$

dénominateur (diviseur non nul)

En divisant 7 par 3, le quotient entier est 2 et le reste 1 ;

on peut donc écrire : $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

0 1 2 3

Le quotient de a par b (non nul) est le nombre qui, multiplié par b, donne a. On note ce quotient $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b} \times b = a$

$(b \neq 0)$

Fraction : On utilise le mot « fraction » à la place « d'écriture fractionnaire » seulement si le numérateur et le dénominateur sont des entiers.

Lectures particulières : $\frac{7}{2}$ se lit 7 *demi* ; $\frac{7}{3}$ se lit 7 *tiers* ; $\frac{7}{4}$ se lit 7 *quart*.

Fractions décimales : Elles ont pour dénominateur : 10 ou 100 ou 1 000 ...

Ainsi, il semble que le seul aspect des énoncés retenu par les auteurs, soit l'utilisation potentielle dans une démonstration (tout étant ramené quand cela est possible à des phrases en si…alors…).
De plus, la **désignation** peut suffire à définir certains objets mathématiques, de même que les dessins marqués dont le rôle est central, et sous-tendu par l'utilisation des instruments.

I-1.3.2. Définitions et activités préparatoires (4ème et 3ème)

Une différence est à noter dans la présentation : les activités préparatoires sont toujours présentes, mais la partie "cours" est davantage structurée par rapport aux années précédentes. En effet, nous découvrons des énoncés encadrés dont le statut est précisé (définition, théorème, propriété) le plus souvent (il y a encore des cas où cela n'est pas fait).

Reconsidérons le cas de la géométrie que nous avons évoqué précédemment : nous ne pouvons faire état que d'un faible nombre de définitions dans le cours. Pourquoi ?
Quelques pistes pour répondre à notre questionnement :

- la présence d'un lexique à la fin permet d'alléger le cours en terme de définitions ;
- certaines définitions sont données dans des encadrés particuliers dans les exercices traitant de certaines notions, ce qui peut contribuer à une « réduction » du nombre de définitions dans le cours ;
- **les activités préparatoires, toujours présentes, seraient peut-être des activités de construction de définitions**.

1) Il nous faut donc nous interroger sur **la finalité** de ces **activités préparatoires**.
Pour cela, faisons un petit retour sur les programmes qui présentent la géométrie ainsi :
les travaux géométriques sont basés sur l'expérience et l'observation, où une progressivité est préconisée (en tout : dans les contenus et dans les démarches, y compris dans les démonstrations). Dans le cadre de l'apprentissage du raisonnement déductif, *"les travaux géométriques permettront ainsi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme"*. Il est également préciser que le **statut des résultats du cours doit être clair** (ce qui est démontrable ou non) et que ceci dépend de l'enseignant et de sa classe.
La mise en œuvre *"des définitions ou des propriétés caractéristiques de figures géométriques"* doit également être effective dans les problèmes de construction, qui, d'autre part, contribuent, par leur analyse, à la ***"compréhension du statut d'un énoncé dans une démonstration"***. Ainsi, les définitions des figures géométriques ne sont pas « exclues » des programmes au profit exclusif des propriétés caractéristiques. Les manuels ont, semble-t-il, choisi de mettre l'accent davantage sur propriété et propriété réciproque dans le cadre de l'apprentissage des démonstrations.

2) Comment « lire » les activités préparatoires ?
En fait, elles appréhendent les définitions d'une certaine façon, même si l'institutionnalisation n'est pas toujours celle à laquelle nous pouvons nous attendre.
Ces activités insistent sur un certain aspect dynamique :
- **construction** de figures avec certains instruments (ce que nous pouvons réinterpréter ainsi : « pour telle propriété, j'utilise tel instrument ») ;
- **reconnaissance** d'objets géométriques : ceci nécessite la mise en œuvre de processus mobilisant les caractérisations connues des objets en question. Déjà, dans ces activités, nous trouvons des *Rappels* intitulés "*comment reconnaître… ?*", et un certain nombre d'activités consistent en un travail sur des textes à trous, du type si…alors… , nécessitant, encore une fois, la connaissance des propriété caractéristiques.

Donnons un exemple : la translation est présentée comme une transformation sur un exemple dans les activités préparatoires (déplacement de points particuliers sur du papier quadrillé). Dans le cours, "translation" n'est pas définie mais la manière dont elle agit sur un point est décrite (cette exposition n'a d'ailleurs pas de statut, ni de définition, ni de propriété…).

Quittons la géométrie et prenons l'exemple de la racine carrée.
Les élèves rencontrent cette notion, pour la première fois, dans le cadre du théorème de Pythagore, en 4$^{\text{ème}}$, avec la touche de la calculatrice ; en effet, la racine carrée n'est pas un objet d'enseignement en 4$^{\text{ème}}$ selon les programmes : seule l'appréhension par la calculatrice est demandée. Dans le manuel de 4ème, une méthode est proposée dans un exercice résolu :

Méthode : pour trouver un nombre dont le carré est x on utilise la touche √de la calculatrice.

Si x est un nombre positif, √x se lit « racine carrée de x ».

√x est le nombre positif dont le carré est égal à x[103].

Cela nous semble bien être une définition.

Mais ce n'est pas cela qui semble importer le plus, au vu de la présentation choisie par les auteurs : ce qui importe, c'est l'utilisation future, ou, plus précisément, **l'aspect opératoire** (pour résoudre un problème, trouver une voie pour démontrer, régler une inférence par exemple).

3) Existe-t-il des constructions de définitions dans ces activités préparatoires ?

En fait "construction" n'est pas le mot approprié. Cependant, nous avons détecté une tentative de construction, qui s'avère être davantage une "**justification**" de ladite définition qu'une construction : le cas de la définition du cosinus en 4ème. Nous allons pour cela regarder d'autres manuels pour l'étude de l'activité préparatoire pour le cosinus.

Dans le manuel de 4ème de la collection « Cinq sur Cinq » nous trouvons la définition suivante :

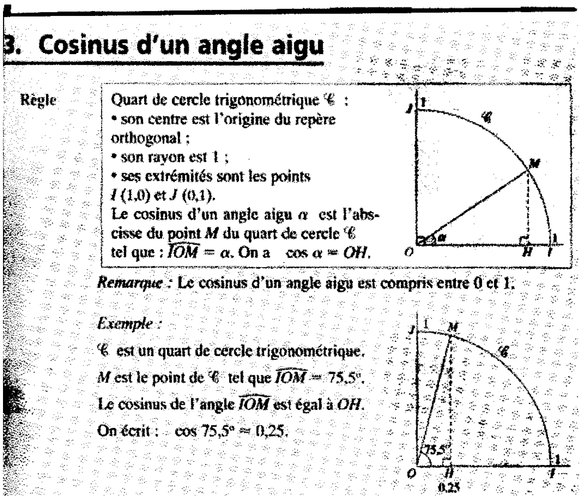
Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle et la longueur de l'hypoténuse.

Elle fait suite à quelques activités préparatoires dont le but est de mettre en évidence, sur quelques exemples, l'invariance de ce rapport pour un angle (aigu) donné, et quelques lectures sur le cercle trigonométrique sont faites.

Dans d'autres manuels parus chez le même éditeur (Hachette – « Tout simplement »), l'un des objectifs d'un chapitre analogue à celui de la collection « Cinq sur Cinq » est explicitement **définir le cosinus d'un angle aigu** (les activités préparatoires sont semblables à ce que nous avons décrit ci-dessus).

En revanche, dans une autre collection (Bordas – « Math » 4ème), les énoncés sont différents : *Il n'y a pas de définition, mais une règle* (voir extrait ci-dessous). Remarquons que les auteurs de ces manuels ont choisi *lorsque c'était possible, de préciser la fonction des divers encadrés. Des exemples illustrent chaque paragraphe*.

[103] C'est nous qui soulignons.



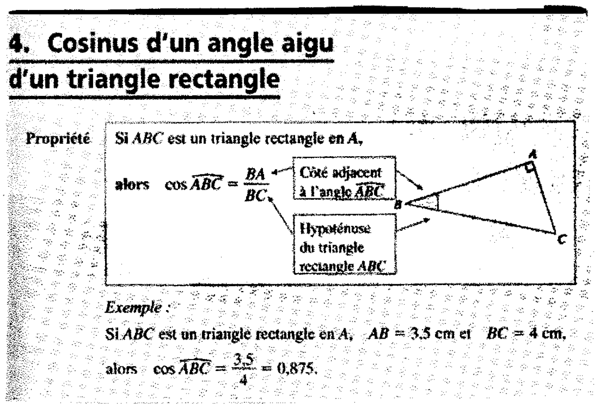
3. Cosinus d'un angle aigu

Règle

Quart de cercle trigonométrique $\mathscr{C}$:
• son centre est l'origine du repère orthogonal ;
• son rayon est 1 ;
• ses extrémités sont les points I (1,0) et J (0,1).
Le cosinus d'un angle aigu α est l'abscisse du point M du quart de cercle $\mathscr{C}$ tel que : $\widehat{IOM} = \alpha$. On a $\cos \alpha = OH$.

Remarque : Le cosinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1.

Exemple :
$\mathscr{C}$ est un quart de cercle trigonométrique.
M est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IOM} = 75,5°$.
Le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$ est égal à OH.
On écrit : $\cos 75,5° \approx 0,25$.



4. Cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle

Propriété

Si ABC est un triangle rectangle en A,
alors $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$

Exemple :
Si ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 3,5$ cm et $BC = 4$ cm,
alors $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{3,5}{4} = 0,875$.

Dans cette même collection « Math », une activité préparatoire a attiré notre attention : elle a pour intitulé *« Rotation : définition »* et est suivie d'une autre activité *« Rotation : propriétés »*. Est-ce une activité de construction de définition ? En réalité, non : il ne s'agit que de **l'observation**_du mouvement apparent des étoiles comme rotation autour de l'étoile polaire. Rien, dans cette activité, ne permet de mettre en évidence les éléments nécessaires (et suffisants) à la caractérisation d'une rotation.

Ainsi, les activités préparatoires relèvent davantage de l'observation, que de la construction de définition. La définition n'est pas à la charge de l'élève : c'est une introduction au concept. Puisque certaines définitions sont données et étiquetées comme telles, nous allons étudier les choix faits par les auteurs de manuels.

4) Quelles définitions les auteurs ont-ils choisi de désigner comme telles ?

Nous proposons une mise en relation des définitions répertoriées dans les manuels des collections « Cinq sur Cinq » et « Math » avec le tableau synoptique pour le collège.
Les définitions communes aux deux collections sont en italique.

	Classe de Quatrième	**« Cinq sur Cinq »**	**« Math »**
Configurations, constructions et transformations	Triangle : théorèmes relatifs aux milieux de 2 côtés. Triangle déterminé par 2 droites parallèles coupant 2 sécantes : proportionnalité de longueurs. Droites remarquables d'un triangle, leur concours. Triangle rectangle et son cercle circonscrit. Transformation de figures par translation. Pyramides, cône de révolution.	***médiatrice*** parallélogramme	***médiatrice***, hauteur, bissectrice, médiane translation
Repérage, distances et angles.	Relation de proportionnalité : représentation graphique. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Cosinus d'un angle aigu.	***Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle.*** Cosinus	***Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle.***
Grandeurs et mesures.	Grandeurs quotients courantes. Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.		
Nombres et calcul numérique.	Opérations (+,-,×, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaires (non nécessairement simplifiée). Puissances d'exposant entier relatif. Notation scientifique des nombres. Touches √ et Cos d'une calculatrice ; inverses.		Comparaison de 2 nombres relatifs. Inverse. Puissances de 10 et puissances d'exposant entier relatif.
Calcul littéral.	Développement d'expressions. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Equations du 1er degré à une inconnue.		Développer.
Fonctions numériques.	Vitesse moyenne. Calculs faisant intervenir des pourcentages. Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes. Applications de la proportionnalité.		Vitesse moyenne.
Représentation et organisation de données	Effectifs cumulés. Fréquences cumulées. Moyennes. Initiation aux tableurs-grapheurs.		Effectifs cumulés. Moyenne.

En 3ème, la collection « Cinq sur Cinq » ne comporte que quelques définitions (*fonction linéaire,* cosinus, *sinus, tangente*, *translation et vecteur, rotation, sphère – boule*), alors que la collection « Math » en révèle une grande quantité :

fonction linéaire, développer – factoriser, racine carrée, entiers premiers entre eux - fraction irréductible - nombre rationnel, fonction affine - coefficient directeur, médiane – étendue (série statistique), agrandissement – réduction, *sinus, tangente,* angle au centre – angle inscrit, *vecteur et translation,* somme de deux vecteurs, coordonnées d'un vecteur – repère orthonormé, *rotation* - polygone régulier, *sphère et boule.*

Les définitions de cette collection suivent les titres des contenus des programmes (un tableau semblable au tableau précédent permet de le mettre en évidence), et des titres de leurs chapitres (par exemple, le chapitre intitulé *« théorème de Pythagore »* ne comporte aucune définition, et celui titré *« Rotation - Polygones réguliers »* contient les définitions de « rotation » et de « polygone régulier »).

Mais comment pouvons-nous interpréter le choix des auteurs des manuels « Cinq sur Cinq » ?

Ces quelques lignes du programme officiel nous permettent de faire quelques hypothèses :

> *Pour toutes les classes, les connaissances acquises antérieurement sont mobilisées et utilisées le plus souvent possible (…)*
>
> *Une approbation mathématique, pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes.*

Peut-être est-ce pour cette raison (l'élève doit savoir mobiliser ses connaissances pour résoudre des problèmes) que de nombreuses notions ne sont pas définies dans le cours mais apparaissent (toujours cependant sans intitulé « définition ») dans les activités préparatoires et dans les exercices.

Nous pouvons avancer une autre hypothèse : les auteurs ne définissent, dans le cours, que des notions qui seront réutilisées dans la classe suivante ; mais étant donnés les programmes cela ne semble pas envisageable sous cet angle. Nous supposons également que la présence d'un lexique à la fin de chaque ouvrage constitue un élément de référence, ce qui, de surcroît renforce une approche lexicale des définitions.

Dernière hypothèse : un trop grand nombre de définitions nuit à la compréhension. Les auteurs ont alors fait des choix. Pourtant, le vocabulaire véritablement « nouveau » dans les classes de 4ème et de 3ème n'est pas très abondant… et n'est pas toujours présent en tant que définition (par exemple, les effectifs et fréquences cumulés en 4ème ; en fait, il se peut que ce qui importe réellement aux auteurs c'est la capacité de l'élève à résoudre un problème, même si les résultats des activités préparatoires ne sont pas institutionnalisés dans le cours.

La comparaison des définitions entre les deux collections précédentes (« Cinq sur Cinq » et « Math ») nous permettent de formuler une dernière interprétation : les auteurs de la collection « Cinq sur Cinq » ne définissent que des notions « de base », alors que ceux de la collection « Math » définissent dans chaque chapitre (ou presque) des notions dont les intitulés se trouvent dans les programmes.

I-2. Manuels de lycée

I-2.1. Les programmes récents (1998 & 2002)

Nous nous intéressons ici aux commentaires explicites des programmes portant sur les définitions (en général et en particulier) ainsi que sur les recommandations en matière de démarche scientifique (où nous espérons trouver de la matière pour les SCD).
Notre objectif est donc le suivant : repérer des éléments relatifs aux définitions (ce qu'elles sont, doivent être, comment les utiliser etc.) et à l'activité « définir ». Il est possible ça et là de trouver des remarques sur les définitions de certains concepts mathématiques. Il nous sera cependant difficile de généraliser ces remarques et parler ainsi de conceptions sur le concept de définition dans les programmes, tout discours global sur le sujet étant absent. Nous allons donc nous employer à rechercher les usages attribués à une définition, ainsi que l'approche par une définition particulière de certains concepts mathématiques préconisée par les programmes.
Notons une différence singulière dans les propos tant généraux que particuliers (pour certaines notions mathématiques dites délicates) entre les programmes de 1998 et les programmes de 2002.

Nous avons étudié les programmes de lycée de 1998 et de 2002, et ce pour plusieurs raisons :

- l'impression globale que nous avons eue à la lecture de ces programmes est qu'il semble y avoir un changement de regard (ou tout au moins une explicitation) sur les définitions ;
- les programmes (de 1998 et de 2002) prônent un entraînement des élèves à l'activité scientifique et un développement des capacités de communication ;
- les programmes 1998 sont le lieu de **réintroduction** de l'arithmétique ;
- les programmes 2002 sont le lieu de **l'introduction** de la théorie des graphes ;
- les définitions de suite convergente en première S et de limites en Terminale S (notamment) étaient proscrites dans les programmes précédents, ce qui n'est plus le cas dans les programmes actuellement en vigueur.

Tout ceci nous amène à nous interroger sur deux aspects : lors de l'introduction (ou de la réintroduction après une longue absence) de nouveaux thèmes mathématiques, un effort supplémentaire (relatif à l'axiomatique par exemple ou à la difficulté de certains concepts mathématiques) est-il fait pour aider les enseignants dans leur pratique ? L'accent étant mis sur une certaine pratique de la démarche scientifique, y a-t-il des propositions de SCD ? Les programmes 2002 marquent-ils un retour à un certain formalisme ?

I-2.1.1. Programmes de 1998

Nous aimerions souligner une certaine pauvreté des commentaires relatifs aux définitions, qui n'est plus dans les programmes suivants. Dans une perspective dite « scientifique » prônée par les programmes, nous aimerions citer une assertion du paragraphe *« Formation scientifique »* :

> *« (...) la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de* ***progression ; on se gardera de toute exigence prématurée de formulation****, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le* ***vocabulaire*** *et les* ***notations*** *ne sont pas imposées a priori ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité ».*

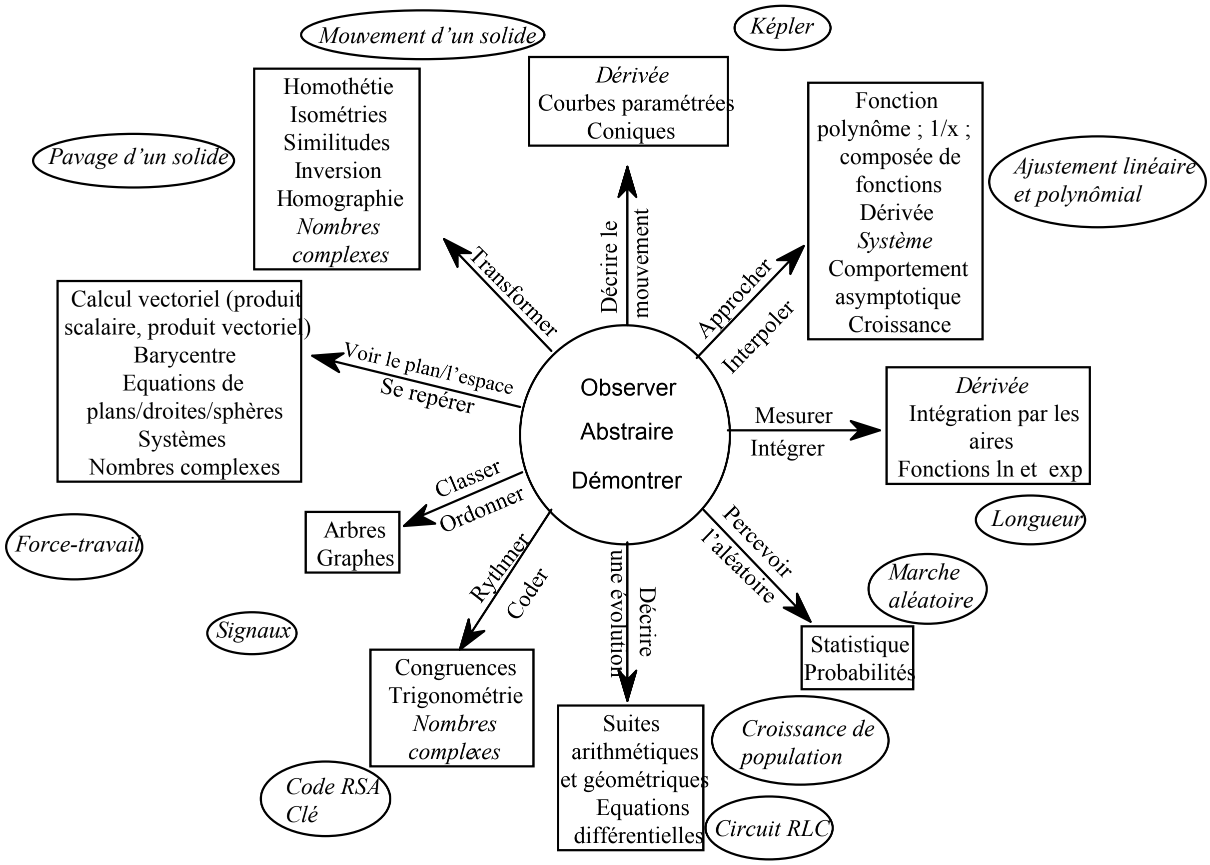
Évoquons ici que derrière les mots « vocabulaire, notation » se cache le mot « définition ». En effet, pour la Terminale ES, mention est faite sur le vocabulaire et la liaison avec d'autres disciplines : par exemple, certains termes issus de l'économie font écho à des termes mathématiques (croissance en un point, croissance régulière par exemple). Pour ces termes qui *«(...) employés dans d'autres disciplines n'ont pas toujours le même sens qu'en mathématiques, ni même nécessairement une définition mathématique précise »* le programme demande de ne pas faire d'exposé théorique mais *« de les éclairer lorsqu'on les rencontre dans le programme »*. En ce qui concerne leur définition, *« les termes (...) qui ne font pas partie du vocabulaire mathématique usuel, n'ont pas à faire l'objet d'une définition formelle »*. Nous reviendrons sur cet aspect ci-après (dans les programmes et dans les manuels).

D'une manière générale, pour plusieurs concepts mathématiques du programme (2nde, 1ère, Terminale), *« tout exposé général »* est exclu (fonctions), *« tout point de vue axiomatique est exclu »* (géométrie plane et dans l'espace), *« on évitera tout développement théorique »* (probabilités) ceci court-circuite un certain type de cours magistral plaçant les définitions au début de la leçon. Cependant, aucune activité de SCD n'est suggérée par les programmes. Notre sentiment (nous allons le confirmer dans le paragraphe suivant) est que les programmes n'accordent que très peu d'importance aux définitions exception faite de certaines dites « formelles et complexes ». Les intentions majeures du programme de Terminale S insistent sur l'aspect vocabulaire : *« écarter les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles et techniques au bénéfice d'une* ***meilleure solidité sur les points essentiels****. Dans cette perspective, le programme s'en tient à* ***un cadre et un vocabulaire théorique modestes*** *(...) »* Cela rejoint peut-être ce que certains auteurs de manuels appellent le « jargon des matheux » : le vocabulaire et les définitions mathématiques constitueraient-ils une difficulté si importante dans l'enseignement des mathématiques ?

I-2.1.2. Programmes de 2002

Quelques consignes des programmes (BO n°4 – 08/2001) …

En ce qui concerne la généralité d'une formation scientifique en 1ère et Term S (cf. GTD mai 2000) apparaît une volonté d'intégrer une *« formation mathématique »,* une *« démarche mathématique »*, précisée par un dessin récapitulatif,



plaçant l'observation (défini comme *« processus dynamique suscité par une problématique »)*, l'abstraction (*« au cœur de l'activité mathématique »*) et la démonstration (*« constitutive de l'activité mathématique »*) au centre de cette démarche. Remarquons que l'activité de définition n'apparaît ni dans le schéma ci-dessus (où les flèches modélisent des actions), ni dans les remarques concernant observation-abstraction-démonstration. Nous retenons également ce passage : *« On gardera néanmoins l'état d'esprit déjà évoqué dans les programmes de collège et de seconde : repérer clairement le statut des divers énoncés en jeu (définition, axiome, théorème démontré, théorème admis,…). »* ; ainsi, il faut prendre garde à bien différencier les énoncés mathématiques.

Est-il possible de le faire par rapport à leur usage ? Une réponse possible (présente dans ces mêmes programmes) est peut-être celle-ci : dans le paragraphe sur les suites en 1ère S (où toute définition formelle en ε est proscrite), les programmes précisent qu' *« on indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile* *d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour ça) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples ».*

En définitive, une définition est **posée** (et non construite), son usage serait de **générer des contre-exemples** dans ce cas précis (pour les suites). Le document d'accompagnement de la classe de 1ère S nous apporte quelque éclairage supplémentaire :

> *« Le programme indique qu'une définition de la convergence d'une suite doit être donnée. L'objectif de l'introduction de cette définition est de :*
>
> - *montrer qu'à l'intérieur du champ des mathématiques, il existe une définition précise et relativement complexe à partir de laquelle on établit des propriétés et des théorèmes (théorèmes des gendarmes par exemple) qui permettent d'éviter de recourir à cette définition complexe ;*
> - *proposer un travail de nature épistémologique sur la façon dont s'élaborent les mathématiques : on pourra signaler, en s'appuyant sur des éléments historiques, que les mathématiques ont beaucoup avancé sans définition précise de la notion de limite de suite ou de fonction mais qu'à un moment, quand la notion intuitive s'avère buter sur des difficultés, il devient nécessaire de l'expliciter et de l'introduire comme nouvelle notion mathématique ;*
> - *travailler un ou deux exemples de suites divergentes très simples (c'est l'occasion de faire un travail de logique sur la définition) ;*
> - *montrer par exemple qu'on ne peut pas conclure pour la limite à partir de ce que l'on observe sur un écran d'ordinateur.*
>
> *L'objectif n'est en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité ou d'essayer subrepticement de « couper des ε en quatre » ».*

Cet extrait nous permet de faire le lien avec le programme de Terminale S et ses commentaires sur la définition de limite. Retenons ici que les programmes s'efforcent d'éviter toute définition « complexe », trop « formelle », réservant explicitement ceci à l'enseignement post-baccalauréat. Le concept mathématique est ici certes complexe et les situations permettant de soulever tous les problèmes historiques inhérents à cette notion ne sont pas envisageables en classe. Une SCD est même difficilement envisageable, si nous en croyons l'expérience d'Aline Robert (dans le supérieur)[104] où l'introduction magistrale d'une définition a été nécessaire car :

> *(...) une première tentative (...) a été de chercher des problèmes (situation-problème) dont la résolution passe nécessairement par l'usage de la définition. (...) malheureusement, les problèmes à notre disposition pour ce faire sont peu nombreux et beaucoup trop techniques pour être proposés d'emblée aux étudiants[105] (...)* (A. Robert – 1983 - p.437)

Pour compléter la réflexion sur l'enseignement de la convergence des suites relativement aux préoccupations actuelles des programmes, nous aimerions rappeler quelques propos d'Aline

[104] A. Robert a diagnostiqué des représentations *statiques* et *dynamiques* sur la convergence des suites chez les étudiants. Ainsi que des modèles trop partiels, et donc source de nombreux obstacles dans l'apprentissage de cette notion.

[105] A. Robert évoque ici le lemme de l'escalier, le lemme de Césaro.

Robert: son travail s'est intéressé à cette notion dans le supérieur. Cependant, les obstacles rencontrés dans ses ingénieries sont riches d'enseignement. Notamment *« (...) plus la représentation exprimée de la convergence des suites ressemble avec des mots à la définition mathématique, meilleures sont les procédures »* (Robert – 1982 - p.430) D'où l'intérêt de travailler relativement à une définition mathématique. Rappelons également l'une de ses conclusions (celle-ci s'inscrit à propos dans les programmes de 1998 et de 2002) : *« on peut aussi suggérer un enseignement de la convergence des suites où on n'essaierait même pas d'introduire (de quelque manière que ce soit) la définition en (ε,N) – ne visant qu'à faire fonctionner les théorèmes utiles dans les exercices classiques (suites monotones bornées, suites explicites, suites récurrentes). Ceci présente l'inconvénient majeur à mes yeux d'estomper une des grandes sources de difficultés de la notion (*n variable, n tendant vers l'infini*), et donc de renforcer les erreurs déjà tenaces du type « oubli du caractère variable de* n *» »* (Robert – 1983 - p.447)

Ceci étant, une tentative de justification sur l'aspect formel des définitions en mathématiques semble être faite pour ce cas précis. Nous reprendrons ce point dans la conclusion de ce paragraphe.

Dans les programmes de Terminale S (2002), certaines définitions sont proscrites (limites de suite et de fonctions, aire (paragraphe intégration)), les consignes des programmes leur préfèrent une *approche intuitive*, l'objectif étant de *donner un aperçu* (SIC). D'autres doivent être illustrées (définition de similitude).
Petite remarque sur la définition de limite : il est à la fois demandé de pratiquer une approche intuitive de cette notion ainsi que d'introduire une définition formelle (tout dépend de la partie du programme que l'on lit …). Nous lisons ainsi dans les fascicules d'accompagnement de programmes : *« il ne s'agit en aucun cas de tout compliquer par une définition dont on ne comprend pas la nécessité (…) Accéder à une définition formelle permet néanmoins de mieux comprendre le fonctionnement interne du monde mathématique : (…) elle* (la définition) *permet de préciser la notion en jeu et de démontrer les règles opératoires »*.

Dans le paragraphe concernant la résolution de problème nous espérions trouver une activité intitulée "définir". Sachant que les programmes conseillent d'aborder certains concepts par l'observation, par l'intuition, nous remarquons que les intentions des activités « Résolution de problème » incluent le *« passage de l'imprécision relative du langage usuel à la nécessité de définitions univoques »*. Ainsi, en mathématiques, les définitions ne doivent pas prêter à ambiguïté, et revêtent un **langage spécifique** différent du langage courant, source d'imprécision.

En ce qui concerne l'architecture de l'édifice mathématique (où l'on peut espérer avoir des informations sur **l'aspect théorique des définitions**), nous trouvons :

> *Certaines notions admettent des définitions équivalentes pouvant naturellement s'enraciner dans des problématiques distinctes (...) La pluralité des approches possibles donne rituellement lieu à discussions et controverses pédagogiques ; tous les choix sont mathématiquement corrects et il convient de faire remarquer aux élèves qu'une définition dans une approche devient propriété caractéristique dans une autre.*

Pour former un tout cohérent, il convient d'établir une **hiérarchie** et cela suppose la connaissance et l'usage corrects des mots de base de tout texte mathématique. Sur les définitions éviter tout usage abusif de ce mot : seules les définitions **utiles** et effectivement utilisées seront introduites (SIC).

En conclusion, nous pouvons remarquer dans ce programme différents éléments constitutifs de conceptions :

- une définition doit être posée ; l'aspect hiérarchique de l'exposé mathématique est présent ;
- il est préférable de faire utiliser des théorèmes dans les démonstrations (et pas des définitions) ;
- une définition permet de démontrer certains résultats du cours ;
- une définition peut permettre de générer des contre-exemples (suites, continuité) ;
- une définition doit être précise, univoque (éviter le langage usuel) ;
- en mathématiques, il est nécessaire d'avoir des définitions précises (à faire comprendre aux élèves via la notion de limite) ;
- une seule définition doit être donnée, ainsi que des propriétés caractéristiques ;
- il y a des définitions utiles et d'autres qui ne le sont pas (relativement au contenu du programme) ;
- il ne faut pas mettre trop de définitions ;
- il faut insister plus sur l'usage des mots que sur leur définition formelle (Terminale ES) ;
- l'aspect expérimental des mathématiques est évoqué lors de la définition de la démarche scientifique qui comprend les verbes expérimenter, démontrer, communiquer (Terminale ES) : il n'y est pas question de définir, même pas dans la partie communiquer.

(NB : sur l'aspect communication, nous avons relevé dans les derniers programmes, en classe de Seconde, en Français, dans le paragraphe intitulé « La pratique raisonnée de la langue » :
« on donne accès au vocabulaire abstrait en faisant réfléchir notamment sur la nominalisation et les pratiques de définition.
On rend usuelle la pratique des différents dictionnaires »)

I-2.2. Les manuels de lycée

Nous nous étions intéressés ci-dessus aux manuels de collège et avions souligné l'absence de définitions, c'est-à-dire l'absence d'énoncés étiquetés définition. Nous aimerions ici faire état de quelques manuels de lycée.

Ces remarques (ou petite analyse …) porteront sur les points suivants :
- présence / absence d'étiquette « définition »
- nature des objets mathématiques ainsi définis
- présence / absence de commentaires sur les définitions
- présence / absence aspects existence et unicité
- présence / absence de remarques légitimant les définitions.
- Y a-t-il changement entre les définitions des programmes de 1998 et celles des programmes 2002 ? (remarques quantitatives et qualitatives).

Les manuels analysés relèvent principalement de la classe de terminale : nous avions étudié des manuels de collège (mémoire DEA) et souligné l'absence de définition à ce niveau ; nous faisons l'hypothèse que la classe de Terminale, particulièrement au regard des programmes revendiquant une démarche scientifique, est un lieu propice pour l'observation des définitions en tant qu'énoncé mais aussi pour l'analyse de SCD (si nous en trouvons dans les manuels !).

Les principaux manuels retenus sont ceux de la collection Transmath, de la Collection Hyperbole et de la Collection Math'x.

I-2.2.1. Sur la forme des énoncés « définition »

Majoritairement les définitions sont de la forme « dire que … signifie … », « on appelle … ». « si et seulement si » (Math'x) ou bien il est parfois question de définition de notations (par exemple de goh, ou du logarithme décimal). Il y a également quelques exemples de **définitions de notations** : ln(expn)=n, et pour a^b les auteurs parlent *de « cohérence des notations »* (entre les nouvelles et les précédemment connues) *« cette définition est en accord avec celle déjà connue de a^n où n entier »* (Transmath).

D'une manière générale, il semble que les auteurs étiquettent « définition » : les **notions connues** antérieurement à la classe de Terminale, **les nouvelles notions** fondamentales ou peut-être difficiles (selon les auteurs), dans une certaine conformité avec les programmes, les **notations**.

I-2.2.2. Sur l'aspect existence & unicité

Il est parfois question de théorème-définition (Transmath) ou de propriété-définition (Math'x) D'une manière générale, le théorème est en réalité la partie théorème d'existence et d'unicité, la propriété est la propriété d'existence (Math'x) et la définition se trouve réduite à la dénomination. Ainsi, dans la collection Math'x, il est question de théorème-définition pour des concepts dont on fera par la suite la preuve de l'existence et de l'unicité et de propriété-définition pour des concepts dont on fera la preuve de l'existence (PDCG par exemple).

En ce qui concerne l'introduction de la théorie des graphes : il n'y a pas de cours « formel », mais la présentation d'un thème sur les graphes (conformément aux programmes) axé autour de la résolution de problèmes. Selon les manuels, le choix a été fait de présenter cependant quelques définitions *« nous introduirons également quelques définitions très simples sur les graphes, ainsi qu'une propriété »* (Transmath p.310) ou quelques éléments de vocabulaire (non étiquetés définition). Malgré l'aspect « résolution de problèmes », nous n'avons pas vu de SCD.

EN CONCLUSION

Des étiquettes "définition" apparaissent dans le cours (et pas ailleurs). Il ressort de plus une distinction (motivée par quoi ?) entre définitions et vocabulaire ; nous pourrions faire l'hypothèse que, dans une perspective formaliste, les auteurs de manuels placent l'étiquette « définition » sur des énoncés non strictement réduits à une dénomination et réservent le mot « vocabulaire » aux définitions dites « simples ». Mais ceci n'est qu'une hypothèse que nous ne pouvons ni démontrer, ni réfuter, les manuels étudiés ne nous permettant pas de conclure. Différents types de définition apparaissent (par exemple dans Transmath, il est question de définition de notation, ou de concepts). Enfin, il n'y a pas d'étiquette « définition » dans le chapitre « graphes » (nous y reviendrons dans le chapitre VI).

I-2.2.3. Une SCD ?

Une « avant-première » du manuel Terracher a particulièrement retenu notre attention. Elle porte sur l'introduction des nombres complexes (p.174 & 175). C'est une séquence comportant 2 parties intitulées : *« la racine carrée de –1 ? »* et *« Vers une « définition » »*[106] .
Le second titre nous interpelle pour deux raisons : le mot définition est entre guillemets, pourquoi ? L'expression utilisée peut nous faire penser à une SCD. Qu'en est-il ?
En réalité, cet exposé (car c'est bien d'un exposé dont il s'agit, et non pas d'une activité préparatoire offrant une possibilité de SCD) narre l'histoire des nombres complexes, de

[106] Le mot définition est entre guillemets dans le manuel.

Cardan-Tartaglia et Bombelli jusqu'à Gauss en pensant par Euler (et sa notation $i=\sqrt{-1}$). Quant à la définition annoncée, il s'agit de « définir » l'addition et la multiplication de nombres complexes géométriquement (cordonnées cartésiennes pour l'addition, coordonnées polaires pour la multiplication).

Conclusion : ce n'est pas une situation de construction de définition mais seulement une introduction sur les nombres complexes sans construction de concept, la nécessité mise en avant étant la résolution des équations de degré 3.
D'une manière plus générale, de nombreux manuels proposent des activités préparatoires ou des paragraphes intitulés « découvrir xxx » : ce type de présentation ne propose pas de situation de construction de définition, il ne s'agit en fait que d'introduire les concepts définis dans la leçon qui suivra, en en montrant des exemples. Nous avions déjà remarqué ceci dans les activités préparatoires des manuels de collège (paragraphe I-1.3.2).

I-3. Une brochure destinée aux unités de méthodologie en DEUG

Cette petite brochure (IREM Montpellier-2000) reprend différents thèmes tels que : la logique, la définition, la modélisation, conjecturer-prouver etc.
Pour chacun, un *constat* est effectué, des *objectifs* sont donnés ainsi que la *forme* (comprendre le type de problèmes pouvant être proposé par exemple)
En ce qui concerne *la définition*, les auteurs citent Bourbaki, Dieudonné et Lakatos.
Cependant, Lakatos n'est pas cité sur le sujet « construction de définition » ; les citations de ces auteurs demeurent, nous semble-t-il, par trop générales.
Résumons les aspects évoqués dans ce texte relativement à ce que nous avons développé précédemment[107] qui traduisent la conception des auteurs sur les définitions en mathématiques : l'aspect **théorique**, l'aspect **existence** (l'exemple du barycentre est donné), **définition par genre et différences spécifiques** (cette expression n'est pas employée dans le texte d'origine, cela relève de notre interprétation), la **nécessité** d'une définition, une définition est **évolutive**. Il est intéressant de noter que le fait qu'une définition soit évolutive est souligné dans cette brochure, car cela laisse la porte ouverte à des activités de construction de définition.
Constat est fait que *« le flou ambiant dans le secondaire ne permet guère de construction solide d'éléments d'une théorie quelle qu'elle soit »* (p.20) Partant de ce constat, les auteurs avancent que les étudiants *ne voient pas la nécessité d'une définition claire et rigoureuse des objets qu'ils vont devoir manipuler*.
Leur proposition consiste à *instituer ce qu'est une activité mathématique*, *initier les étudiants aux règles du jeu* (aucune précision n'est apportée), *convaincre de l'intérêt d'une définition*.

[107] Rien n'est détaillé dans cette brochure, le paragraphe consacré à la définition étant réduit à une page et demie.

Malheureusement pour nous, aucune proposition de travail sur l'activité de construction de définition n'est faite ici, aucune suggestion d'activité mathématique impliquant des définitions *évolutives* n'est évoquée. Nous sommes en fait en présence d'auteurs reprenant divers éléments déjà cités précédemment dont la méthode aristotélicienne de définition, le problème essentialiste de l'existence de l'objet défini, et des aspects plus langagiers sur la précision d'une définition. Ils sont visiblement sur les définitions dans une théorie, ce qui limite le travail sur les définitions, et court-circuite en quelque sorte des activités telles celle proposée par Lakatos, où le problème théorique est évacué le plus loin possible.

II- Conceptions d'élèves et d'enseignants sur les définitions en mathématiques

Il s'agit ici de présenter une synthèse des travaux proposant des conceptions d'élèves ou d'étudiants et d'enseignants sur les définitions en mathématiques. Les questionnaires réalisés dans le but de mettre en évidence des conceptions sur les définitions en mathématiques trahissent inévitablement les propres conceptions des auteurs sur le sujet (les titres des articles nous donnent des indications).

II-1. Conceptions d'élèves

K. Shir (2002) propose une étude de conceptions d'élèves sur les définitions « acceptables » en géométrie. Elle utilise le même questionnaire pour des élèves et pour des enseignants où huit énoncés relatifs au carré sont proposés[108] : ceux-ci sont à accepter ou rejeter comme définition du carré et une explication est demandée. Shir répertorie les arguments des élèves (grade 12) suivant trois critères : des critères mathématiques, des critères perceptifs et des critères relatifs à la fonction de communication d'une définition.
Ainsi, les justifications mathématiques des élèves, pour accepter ou rejeter une définition s'attachent à étudier si l'énoncé est bien une condition nécessaire et suffisante, s'il est équivalent à une définition connue, s'il est utile, s'il est minimal. Il en ressort donc des conceptions de niveau **logique** (équivalence, non redondance) mais aussi **cognitives** (rattachement à des définitions antérieurement connues). De plus, il apparaît qu'une définition doit être **opératoire**.

[108] Un carré est : (a) un rectangle ayant 4 côtés égaux – (b) un losange ayant un angle droit – (c) un parallélogramme dont les diagonales sont égales et perpendiculaires – (d) un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux et tous les angles sont droits – (e) un quadrilatère dont les diagonales sont égales, perpendiculaires et se coupent en leur milieu – (f) un polygone à 4 côtés où tous les côtés sont égaux et tous les angles sont égaux – (g) le lieu des points tel que la somme de leur distance à deux droites perpendiculaires données soit constante – (h) un objet qui peut être construit ainsi (dans le plan euclidien) : trace un segment ; des deux extrémités, construis deux perpendiculaires au segment, de même longueur que celui-ci (dans la même direction). Relie par un segment les deux sommets des perpendiculaires. Les quatre segments forment un quadrilatère qui est un carré.

La fonction de **communication** d'une définition fait ressortir différentes exigences pour les définitions de nature **langagière** chez les élèves : une définition doit être simple, claire, courte, élégante, familière. De plus, la définition doit être basée sur des concepts basiques (il faut comprendre ici des concepts bien connus des élèves voire premiers) et doit attraper les caractères propres à l'objet défini : ceci relève davantage d'exigences **logiques** (décomposition d'une définition en éléments plus simples), et même **aristotéliciennes** (recherche des différences spécifiques).
L'objet considéré étant géométrique, il est normal de voir apparaître des critères **perceptifs**, marquant que les élèves s'attachent à ne considérer que les parties intégrantes du carré (sommets et côtés), ce qui les conduit à rejeter par exemple des définitions mobilisant des propriétés sur les diagonales.

- Dans les activités proposées par Borasi (cf. §III du chapitre III), les élèves font preuve de certaines conceptions sur les définitions mathématiques. Il apparaît, d'une manière générale, que pour ces deux élèves, les mathématiques apparaissent comme quelque chose de prédéterminé (Borasi – 1992 - p.73) ; de plus, il existe "une bonne définition quelque part" (ibid. p.67), ce qui laisse peu de place à des activités de construction de définition. Ceci étant, lors des activités, ces mêmes élèves recherchent la ***meilleure définition possible****, la plus* ***universelle****,* tendent à vouloir une définition ***précise***, marquant la ***nouveauté*** (ibid. p.74). Ceci est conforme à leur vision des mathématiques. Avec les définitions, il s'agit donc d'être précis, et d'introduire par ces définitions quelque chose de nouveau. Notons que les interventions de Borasi dans ces échanges ne sont pas neutres et induisent chez les élèves des questionnements plus spécifiques à l'activité de construction de définition tels que : lorsqu'une définition a été obtenue, "marche-t-elle" sur de nouveaux problèmes ? D'autres remarques, encore induites pas Borasi, s'attachent à relever qu'une définition est dépendante d'un contexte (la définition d'un cercle en géométrie euclidienne n'est pas la même que celle d'un cercle sur une grille régulière), et que, lorsqu'un problème surgit, un contre-exemple par exemple, il faut l'exclure de la définition. Ceci reprend en fait quelques développements de Lakatos ; malheureusement, Borasi n'analyse pas les comportements des élèves sous cet angle.

II-2. Conceptions d'enseignants – une étude étrangère

Shir (2001) propose le même questionnaire que celui utilisé avec des élèves ci-dessus. Son article est intitulé "*what constitutes a (good) definition ? The case of a square*", ce qui laisse à penser qu'il existe des *bonnes* définitions. Son dispositif comprend 34 enseignants du secondaire, les questionnaires sont individuels et suivis d'une discussion commune par groupes de 3 à 5 enseignants. Huit énoncés relatifs au carré sont donc proposés : ceux-ci sont à accepter ou rejeter comme définition du carré (deux autres possibilités de réponse : indécis

ou pas de réponse). Les raisons du rejet ou de l'acceptation des énoncés comme (bonnes) définitions du carré sont également analysées.
La présentation des critères des enseignants pour l'acceptation ou le rejet des énoncés comme définition du carré se fait suivant deux perspectives : pédagogique et mathématique[109].
Parmi les critères **mathématiques** invoqués par les enseignants se trouvent : une définition est une **condition nécessaire et suffisante** ; une définition doit être **minimale** ; une (bonne) définition du carré doit être **équivalente à une définition connue du carré**.
Et les critères pédagogiques d'évaluation d'une définition comprennent des aspects **langagiers** tels que : une définition doit être claire, simple, et nous retrouvons les mêmes critères que ceux évoqués par les élèves comme : une définition doit être **basée sur des connaissances précédentes connues des élèves** et être ainsi familière.
De plus, un critère d'ordre perceptif et relevant de **l'usage** des définitions du carré apparaît : les énoncés définissant le carré par des propriétés portant sur les diagonales sont majoritairement refusés comme définition car illégitimes selon les enseignants, les diagonales du carré n'étant pas perçues comme partie intégrante du carré.
La **définition procédurale** du carré, à savoir une instruction permettant de tracer un carré, apporte des avis partagés : mathématiquement, ces enseignants considèrent qu'une définition ne peut pas être procédurale (ils remarquent qu'elles sont peu présentes dans les livres universitaires), bien que, pédagogiquement, une telle définition permet à l'élève de se **constituer sa propre image mentale** d'un carré.

Ainsi, il ressort chez ces enseignants des conceptions d'ordre général que nous re-classifions suivant des conceptions langagières, logiques et pédagogiques ou plutôt cognitives en fait.
Les conceptions d'un niveau logique comprennent : une définition est une condition nécessaire et suffisante, elle doit être minimale, non redondante et constituée à partir de mots déjà définis antérieurement. Les conceptions langagières s'intéressent au fait qu'une définition doit être claire, simple, familière. A noter que la *familiarité* à l'égard d'une définition comprend deux aspects liés : une définition n'utilisant que des termes déjà connus apportera aux élèves une certaine *familiarité* ; de plus, ce qui suit renforce celle-ci. Ce que nous avons appelé aspects pédagogiques reprend le point suivant développé par les enseignants : il ne faut pas faire intervenir dans une définition des éléments ne semblant pas appartenir à l'objet à définir (diagonales).
Enfin, l'intérêt pour des définitions procédurales est noté, bien que l'usage fait que celles-ci sont peu nombreuses : notons qu'en particulier, de telles définitions règlent la génération de l'objet défini et ainsi le problème de l'existence, ce qui ne semble pas ressortir chez les enseignants d'après l'article de Shir.

[109] Ce genre de classification pourrait être discuté … Certains critères mathématiques présentés seraient plutôt des critères pédagogiques …

Nous pouvant établir une conclusion générale sur les travaux de Shir sur les conceptions d'élèves et d'enseignants, car celles-ci sont très semblables et certainement liées à la nature de l'objet choisi (géométrique et connu de tous).
En particulier, nous voulons faire ressortir la propre conception de l'auteur sur les définitions mathématiques : des éléments de celle-ci sont explicites dans le cadre théorique. Il y apparaît qu'une définition mathématique doit être hiérarchique, non circulaire, non contradictoire, non ambiguë, indépendante de la représentation de l'objet, minimale, élégante, et deux définitions d'un même concept doivent être logiquement équivalentes. Nous retrouvons ici des conceptions communes, logiciennes surtout. Le problème de l'existence n'est pas noté.
La présentation théorique de Shir et ses résultats nous amènent à nous interroger sur le point suivant : jusqu'à quel point nos propres conceptions sur les définitions mathématiques interviennent lorsque nous faisons une étude sur la définition ? **Sommes-nous contraints par notre propre conception à n'observer que certains aspects ?**
En fait, les conceptions observées via le questionnaire sur les énoncés définissant "carré" reprennent les aspects présentés par Shir avec plus ou moins de force.
Ces conceptions (au sens large) demeurent générales et il n'est guère surprenant de les trouver chez des enseignants. Cela est peut-être moins évident chez les élèves ; ce genre de résultats nous questionne quant à la culture commune des élèves sur les définitions en mathématiques : cette culture commune est-elle interne aux mathématiques ou est-elle aussi extérieure ?

II-3. Conceptions d'enseignants – en France

Dans notre mémoire de DEA (2000), nous avons réalisé un questionnaire dans le but d'étudier le statut des définitions chez des enseignants, et plus précisément les rapports personnel et institutionnel de professeurs au concept de définition (collège, lycée, classes préparatoires).

Quelques précisions concernant le « rapport personnel » et le « rapport institutionnel » nous semblent ici nécessaires : en effet, s'il est possible de parler sans ambiguïté du rapport institutionnel quand il est question de l'analyse de manuels et de programmes, en revanche, quand il s'agit d'enseignants, il est important de nuancer et d'envisager leur rapport personnel plus ou moins en adéquation avec le rapport institutionnel évoqué précédemment.

> *Etant donné un objet O et une institution I, on dira que O existe pour I, ou que I connaît O, si I possède un rapport institutionnel à O, R(I,O), qui est le rapport du sujet idéal de I, le rapport à O qui devrait être celui d'un « bon » sujet de I. (…)*
>
> *D'une manière générale, nos rapports « personnels » sont le fruit de l'histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents : les différences interpersonnelles (entre X et X') sont l'expression, non seulement des différences dans le système (passé et présent) des assujettissements de X et de X' mais encore de la manière dont X et X' ont vécu et vivent ces assujettissements* (Chevallard – 1994 - p.314).

En effet, Chevallard considère que les rapports personnels évoluent sous la contrainte des rapports institutionnels :

> *Ces rapports institutionnels RI,p(Os) constituent le système essentiel des* conditions *et des* contraintes *sous lesquelles se forme et évolue le* rapport personnel *à Os des* acteurs *de l'institution* (Chevallard - 1989).

Plus précisément pour les enseignants :

> *le rapport R(Y ;O) est modelé par un certain rapport institutionnel Rc(E ;O) – où E désigne la position de professeur dans la classe C – auquel le rapport personnel tend bien souvent à se réduire(...) toujours, leurs rapports personnels sont codéterminés par des rapports institutionnels divers, non toujours compatibles* (Chevallard – 1994 - p.315).

♦ **Dispositif :** il nous a semblé important de présenter ce questionnaire à des personnes « intéressées », celui-ci nécessitant un certain temps de réflexion (une demi-heure minimum). Ainsi, le questionnaire a été proposé d'une part sur Internet (groupe de discussion : fr.sci.maths), et d'autre part à des enseignants de notre entourage.
Les enseignants ayant répondu au questionnaire sont de différents horizons : professeurs de collège, de lycée, de classes préparatoires et de lycée technologique (une diversité obtenue par le groupe de discussion). Ils ont participé de leur plein gré, critère que nous avons recherché afin d'optimiser les réponses. (Ce questionnaire est disponible dans les annexes).

♦ **Principales orientations du questionnaire**
Les études précédentes nous ont permis de mettre en évidence différentes conceptions : rappelons que ce questionnaire a été réalisé en DEA, et que les conceptions auxquelles nous nous référons ici sont moins affinées que celles présentées dans le chapitre III de cette thèse. Nous avions donc axé notre recherche en tenant compte des points suivants : tout d'abord, nous nous sommes intéressés aux **exigences internes aux définitions** permettant d'accepter une définition (dont l'existence, l'unicité de l'objet défini, l'équivalence entre le défini et le définissant, la non-contradiction au sens de Leibniz). En fait, derrière chaque définition, il y a un théorème (non ambiguïté ; non-contradiction / existence ; unicité). Par ailleurs, nous avons recherché des critères liés à **l'utilisation** et au **fonctionnement** des définitions tels que : une définition est un principe, a une valeur vraie (Kant), une définition a une valeur opératoire, le caractère arbitraire, de convention, d'une définition peut être discuté, ainsi que sa légitimité (débat essentialiste/nominaliste). De plus, une définition ne doit pas impliquer de contradiction (Frege), et enfin, une définition peut être vue comme un point de départ, ou un aboutissement (Kahane).

Dans le cadre du DEA, notre étude de manuels (collège) et de programmes récents (lycée) nous avait apporté un éclairage un peu différent : en particulier une définition peut avoir un caractère provisoire, il est « inutile » de définir certains mots (par exemple, *fonction*, *limite* ne doivent pas être définis, ceci est explicite dans les programmes de 1998), et un exemple, un dessin peuvent faire office de définition dans certains manuels (collège).

II-3.1. Construction et analyse a priori d'un questionnaire

Présentation du questionnaire (le questionnaire est disponible en annexe)
Pour faciliter « l'entrée en matière », nous avons opté pour une question « introductive » : les phrases proposées portent sur des cas particuliers et ont pour objectif de mettre en évidence quelques exigences que les enseignants ont à l'égard des définitions. Suivent des questions ouvertes questionnant en fait l'existence et l'unicité de l'objet défini, la forme langagière d'une définition, les fonctions d'une définition, la construction de définition. Nous avons également demandé aux enseignants de rédiger quelques définitions particulières, ce qui nous a permis, entre autres, d'étudier la forme langagière utilisée.

II-3.1.1. Question « introductive »

Question 1
Voici des extraits de manuels. Les phrases sont-elles des définitions ? Que définit-on ?

a) L'égalité ax+by+c=0 s'appelle une équation de la droite D dans le repère (O,I,J).
b) Une relation d'un ensemble E vers E est appelée relation dans E (« relation de E vers F » a été précédemment défini).
c) la signification de $f \leq g$ sur un intervalle I est : pour tout x de l'intervalle I, $f(x) \leq g(x)$.

Nous n'avons pas indiqué ici le statut des énoncés présentés. Pour nous, il s'agit de déterminer si ces phrases sont reconnues comme des définitions, et si oui, de quoi. Les questions que nous nous posons à ce propos sont :
Pour a) (in *Faire des mathématiques*) problème du contexte de cette phrase et la précision.
Pour b) : l'usage de « dans » est défini dans un cas particulier. On ne fait pas grand chose, cela mérite-t-il le statut de définition ?
Pour c) : Pourquoi ce choix ? Dans deux manuels consultés (Terracher et Transmath – Terminale S – 1998), nous avons trouvé deux présentations différentes, qui laissent à penser que cet énoncé est :

- soit une définition avec l'avertisseur <u>définition</u> et une phrase d'une certaine forme (dire que … signifie…), fréquemment utilisée par ailleurs dans Transmath pour les définitions (*dire que f est inférieure à g sur I, ce que l'on note alors $f \leq g$ sur I, signifie que pour tout x de I, $f(x)\leq g(x)$.)*
- soit la signification de l'écriture symbolique « $f \leq g$ » avec une avertisseur <u>signification de</u> *(l'écriture « $f \leq g$ sur un intervalle I» signifie que pour tout x de I, $f(x)\leq g(x)$.)*

II-3.1.2. Existence et unicité

Nous avons vu précédemment combien la question de l'existence de l'objet défini est de première importance dans les préoccupations des mathématiciens (existence qui doit être soit postulée soit démontrée). Ceux-ci s'attachent également au problème de l'unicité de l'objet défini. Nous proposons donc des définitions où soit l'existence, soit l'unicité, soit les deux sont mises en défaut (Question 2 : Déf 1 – Déf 2 – Déf 3). Cependant, l'existence et/ou l'unicité ne sont pas les seuls motifs possibles de controverse sur ces définitions.
- Pour la **définition 1** proposée [110] : le problème d'existence se pose lorsque $a \neq 0$ et $b = 0$: dans ce cas, q n'existe pas. L'unicité est mise en défaut si $a = b = 0$: dans ce cas, il y a une infinité de q.
- Pour la **définition 2** proposée[111]: ce point d'intersection n'existe pas toujours (pour certains quadrilatères croisés, lorsque les diagonales sont parallèles)
- Pour la **définition 3** proposée[112]: c'est une définition « datée » provenant de Delboeuf (1886). Nous pouvons dire qu'il n'y a pas unicité, cette définition s'appliquant également au cercle, ceci si l'on accorde au mot « semblable » un sens vague (courant) : ″qui ressemble à″. Or, il existe un sens mathématique précis pour le mot « semblable ». Définir la droite en utilisant les similitudes constitue un cercle vicieux.. L'interprétation peut réellement poser question ici. De plus, qu'est-ce qu'une « partie » ? Une union disjointe de « parties », lorsque ce mot est pris dans son acception « naturelle », est-elle une partie ? Dans ce cas, qu'en est-il de l'existence d'un tel objet ? Des contradictions peuvent alors émergées dans cette définition.

Dans cette question, l'institution n'est pas indiquée : les enseignants vont-ils se référer à leurs pratiques (par exemple, quand il est question du quotient, $b \neq 0$ peut apparaître comme une « habitude ») ou à des aspects « purement mathématiques » rarement, voire jamais, évoqués dans l'enseignement secondaire (comme l'existence et l'unicité) ?
De plus, les problèmes de l'existence et de l'unicité sont-ils le lieu de la définition, ou, au contraire doivent-ils être évoqués avant, ou après ?

II-3.1.3. Forme langagière d'une définition

Nous faisons l'hypothèse qu'un critère de reconnaissance d'une définition est la **forme** de la phrase qui définit. Pour en savoir plus, nous proposons dans les questions 2 et 9 deux formes différentes par la syntaxe et la sémantique :
- « on appelle » ou « est appelé »

[110] On appelle quotient de a par b (où a et b sont deux nombres réels) le nombre q tel que : $a = b \times q$.
[111] On appelle centre d'un quadrilatère le point d'intersection de ses diagonales.
[112] La droite est une ligne homogène, c'est-à-dire dont les parties, prises indifféremment, sont semblables entre elles et ne diffèrent qu'en longueur.

- « si.. alors… » et « si et seulement si » : nous pensons que les énoncés ainsi formulés ne seront pas acceptés d'emblée comme définition, ces formes se prêtant davantage (de par l'usage) à des théorèmes[113].

L'usage du « si et seulement si » dans la définition proposée à la question 9) peut être questionné pour deux motifs :
- il peut être considéré comme **non approprié** pour une définition (par référence à une forme langagière propre aux définitions) ;
- il peut être questionné du point de vue **logique** : la définition étant redondante, il ne peut y avoir équivalence logique entre « carré » et « quatre côtés égaux et quatre angles droits ». Nous faisons ici référence à une conception répandue mise en évidence par J. Rolland dans sa thèse : « condition nécessaire comme condition suffisante minimale » (Rolland - 1999).

La position des enseignants face à cette définition sera-t-elle en rapport avec ce qu'ils connaissent du carré (sa définition, ses propriétés caractéristiques, ce qu'ils enseignent) ou vont-ils appréhender cette définition comme « première » définition du carré ?
Si le carré est considéré comme **prédéfini**, le problème sera de reconnaître la condition nécessaire (« quatre côtés égaux et quatre angles droits » risque de ne pas être reconnue comme condition nécessaire pour le carré).
Si le carré **n'a pas déjà été défini** précédemment, alors la condition « quatre angles droits » est cohérente, non contradictoire, mais il est possible de lui substituer la condition « trois angles droits » (qui est suffisante pour avoir quatre angles droits dans un quadrilatère). Il reste alors à ajouter une condition portant sur les côtés pour définir le carré (en fait, les côtés ne sont pas fonction des angles) : par exemple, « deux côtés consécutifs égaux ».
Notons que dans les manuels et les programmes de collège, le carré est défini comme quadrilatère qui est à la fois un losange et un rectangle (cependant, les élèves connaissent le carré depuis l'école primaire), ce qui peut être un motif de refus de la définition 9.

II-3.1.4. Critères pour une « bonne », « mauvaise » définition

La question 3[114] aurait pu être formulée en termes de définition « mathématiquement correcte » : une telle formulation impliquant une institution précise, nous préférons laisser aux enseignants la liberté de décider si, effectivement, il est possible de parler de « bonnes » et de « mauvaises » définitions. Dans l'activité du chercheur, « bonnes » et « mauvaises » ne semblent pas être les mots adéquats : Lakatos explicite à ce propos le concept de zéro-

[113] **NB :** à la définition 4a) le si…alors… est explicite ; peut-être aurait-il été plus judicieux de proposer « un quadrilatère est un parallélogramme si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux ? ». Dans cette phrase, le « si » ferait office implicitement de « si et seulement si ».
[114] Pensez-vous qu'il existe des « bonnes définitions » et des « mauvaises définitions » ? Donnez un exemple de « mauvaise définition ». En quoi est-elle mauvaise ?

définition (voir chapitre III, § IV-4.3). Par rapport à quelle institution les enseignants vont-ils répondre? Vont-ils se placer relativement au savoir mathématique ? à un enseignement ? Que pouvons-nous attendre d'une telle question ?

♦ **Des exigences spécifiquement mathématiques concernant** :
- **l'existence** et l'**unicité**.
- **la redondance** : une mauvaise définition ; c'est le cas de la définition proposée à la question 9 : mais elle peut être vue cependant comme pédagogiquement intéressante, car pouvant aider à la compréhension de l'objet nouvellement introduit.
- **le cercle vicieux** : un dictionnaire de français comporte de nombreux cercles vicieux, mais ceci n'est pas légitime en mathématiques où des termes premiers sont posés et où il n'est possible de définir un nouvel objet qu'à partir d'entités déjà connues (termes premiers) ou définies.

♦ **Des exigences relativement à l'enseignement** :
- **la forme langagière** : une certaine forme permet, par exemple, la reconnaissance d'un énoncé comme définition.
- l'**utilité** d'une définition : on ne définit « légitimement » que des objets dont il va être question par la suite, soit pour donner un cadre, soit dans la perspective d'une utilisation dans des démonstrations (comme règle d'inférence ; comme abréviation).
- la **complexité** : une définition se doit d'être compréhensible à des élèves.
- une définition dépend du niveau, du **contexte**.

♦ **Le choix de la dénomination** :

Citons CEDIC-4ème et J. Kuntzmann :

> *Pour donner un nom à certains objets mathématiques, on énonce des définitions* (CEDIC)

et

> L*a dénomination c'est-à-dire le choix d'un nom pour une notion est un acte important. Il marque qu'on porte à cette notion <u>un intérêt durable</u>[115]. Il est nécessaire de ne l'accomplir qu'à bon escient.*
> *En principe les dénominations ne devraient pas créer de difficultés en mathématique où tout terme a <u>un sens bien précis</u>[116]* (Jean Kuntzmann – 1976 - p.78).

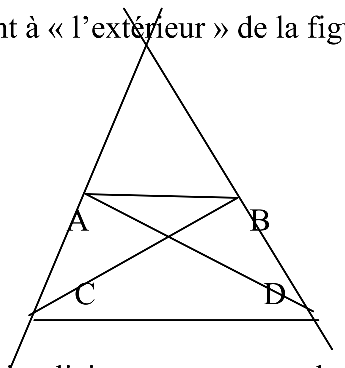
Deux aspects sont dégagés ici : d'une part, une dénomination n'a lieu que lorsque la notion en question présente un intérêt durable (intérêt que l'on trouve dans l'utilisation effective de cette notion) et, d'autre part, une dénomination permet que deux interlocuteurs mathématiciens parlent de la même chose (évoqué par Borel – 1948 - p.25). Nous retrouvons ici l'adhésion à une certaine « limpidité » des mathématiques, discipline qui se distingue par sa précision.

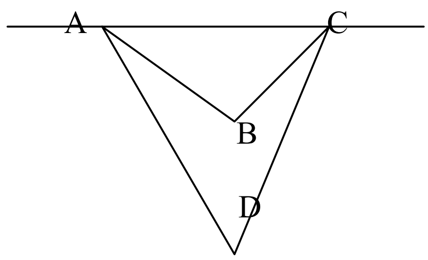
[115] C'est nous qui soulignons.
[116] C'est nous qui soulignons.

La question du choix du nom est sous-jacente dans le questionnaire à plusieurs reprises. “Traditionnellement” (notamment dans les manuels de collège) le quotient de la division euclidienne est défini par : *si trois nombres naturels non nuls a, b, q sont tels que :* $a=b\times q$*, alors le nombre q est appelé quotient de a par b* (définition extraite de Deledicq-Lassave-Missenard). Ici, nous proposons une définition du quotient de deux réels, ce qui est légitime en soi (sous réserve des conditions d’existence et d’unicité : supposer b différent de zéro) ; mais quel « intérêt durable » cela peut-il avoir ? Dans quelle théorie ?
De même, dans la définition 2 du « centre d’un quadrilatère », nous attendons un questionnement sur la pertinence et l’utilité de cette définition.
L’idée de cette définition nous est venue des manuels : en effet, il y est souvent question du centre d’un carré, sans que cela fasse l’objet d’une définition explicite, et il n’y a pas d’ambiguïté quant à ce point particulier du carré. A quelles occasions rencontre-t-on le centre du carré et de quel centre parle-t-on ? ce peut être :

- le point d’intersection des diagonales ;
- le point d’intersection des médiatrices des côtés (centre du polygone régulier “carré”) ;
- le centre de la symétrie le conservant ($5^{ème}$) ;
- le centre de rotations et de symétries le laissant globalement invariant ($4^{ème}$).

Dans le cas d’un quadrilatère quelconque, le choix du mot « centre » est discutable : il n’est pas nécessairement « judicieux », car il transporte la connotation de « milieu », ce qui, intuitivement, est particulièrement « perturbant » dans le cas de quadrilatères croisés ou non convexes (ce point se retrouvant à « l’extérieur » de la figure)





Cependant, un quadrilatère est implicitement convexe dans l’enseignement : en effet, tous les manuels actuels consultés ne présentent que des quadrilatères convexes et les énoncés comportant le mot « quadrilatère » ne précisent pas si ceux-ci sont convexes ou non, croisés ou non ; contrairement à certains manuels plus anciens (début des années 80) où le quadrilatère est défini comme polygone à quatre côtés et cette définition est précédée de la présentation des polygones convexes, non convexes, croisés, non croisés. Peut-être pouvons-nous attribuer ce changement aux programmes où il n’est question que de l’étude de polygones réguliers particuliers (triangle équilatéral, carré, hexagone et éventuellement octogone – $3^{ème}$).

♦ **Temporalité et contextualisation d'une définition**

A la question 2, nous proposons des définitions conformes à l'approche perceptive de la géométrie évoquée dans les programmes, en relation avec la réalité (*les travaux géométriques prennent appui sur l'usage des instruments de dessin et de mesure…Utiliser correctement, dans une situation donnée, le vocabulaire suivant : droite, cercle, centre, rayon, diamètre, angle, droites perpendiculaires, droites parallèles, demi-droite, segment, milieu*).

Les définitions 5,6,7 du questionnaire (question 2) s'adresseraient plutôt à un public de l'école primaire et feraient office d'approche définissante.

Remarque : qu'est-ce qu'une droite chez des élèves de 6ème ? Nous avons obtenu quelques réponses à ce sujet en interrogeant quelques élèves de ce niveau :

> *« une ligne qui est droite et simple »*
> *« une droite c'est une sorte de segment »*
> *« une droite c'est un segment (un trait) »*
> *« la définition de droite c'est ce qu'on dit comment on la trace et comment on la fait ».*

Prédiction : ces trois définitions ne seront pas perçues de la même façon. Les notions de droite et de droites perpendiculaires introduites respectivement avec la règle et l'équerre seront certainement mieux acceptées que la définition du cercle par son mode de génération, le compas. En fait, le cercle est « mieux » défini que la droite. Nous fondons notre hypothèse sur l'analyse de deux manuels :

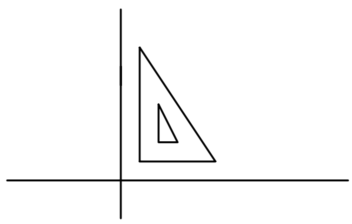
Dans la collection « Cinq sur Cinq », les instruments de base font l'objet d'une présentation particulière :

> la règle non graduée : pour tracer des segments, des droites.
> *L'équerre : pour tracer des angles droits ou des droites perpendiculaires, pour tracer des droites parallèles.*

Ce qui importe davantage dans le cours (partie RETENIR), c'est la représentation d'une droite (ci-dessous, extraite du manuel) qui met en évidence son aspect illimité:

…….______________ ……

De même, le cours insiste « visuellement » sur la relation entre équerre et droites perpendiculaires (partie RETENIR : ci-dessous, dessin extrait du manuel)



Droite et droites perpendiculaires sont des mots connus depuis l'école primaire : leur tracé, et donc leur reconnaissance dérive des instruments.

Dans la collection CEDIC, les titres des paragraphes mettent clairement en relation instruments et objets théoriques, et la présentation est conforme aux titres.

1- *La feuille de papier, le crayon, la règle – Plan, points, droites*

2- *L'équerre – Droites perpendiculaires*
3- *Le compas – Cercle*

Dans ces deux collections, seul le cercle est défini par centre et rayon.
Ces trois définitions posent également la question des rapports entre « réalité sensible » et « existence mathématique »: en effet, il est possible de montrer l'existence d'un objet mathématique en établissant un procédé de construction permettant de l'atteindre. Ici, nous proposons une possibilité de construction relevant de la perception et de la manipulation d'instruments, ce que nous pourrions considérer comme une première approche, certes « provisoire », des notions de droite, droites perpendiculaires et cercle.
Mais, de ce seul fait, sont-elles « mathématiquement correctes » du point de vue des enseignants ?

II-3.1.5. Absence de définition : pourquoi et que faire ?

Par rapport à ces interrogations, nous analyserons plus particulièrement les réponses aux questions 6 et 7. Quelles réponses pouvons-nous apporter à cette double question ?
L'absence de définition peut être justifiée de différentes façons : elle permet par exemple d'éviter tout abus de formalisme. La définition peut être considérée comme trop complexe par rapport à un niveau donné ou inutile par rapport à l'utilisation qui va suivre. Enfin, l'absence de définition pourrait permettre de faire construire cette définition, mais nous ne l'avons observé ni dans les manuels, ni dans les consignes des programmes.
Mais alors, que faire sans définition ? En fait, tout dépend de l'objet concerné et deux questions se posent alors : faut-il « tout » définir ? Et est-il possible de remplacer une définition par quelques exemples et/ou contre-exemples génériques ?
Les définitions de « fonction » et « limite » au lycée (non recommandées par les programmes) nous serviront d'appui pour répondre à cette question.

Pour les fonctions, les programmes se positionnent ainsi : la définition de fonction est explicitement proscrite au collège ($3^{\text{ème}}$) et visiblement non préconisée en 2^{nde}, où il est question de :

- *familiariser les élèves avec* ***la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions****.*
- *acquérir une* ***bonne maîtrise des fonctions usuelles****.*

Par ailleurs, *« ...*(le programme) *ne porte que sur l'étude d'exemples (...) Pour que les élèves <u>se forment une idée</u> assez large de la notion de fonction, on donnera quelques exemples de situations menant à des fonctions définies différemment ».*
De plus, il est à noter que les notions de parité, périodicité, maximum, minimum, fonctions croissante et décroissante ne doivent être mises en place que sur des exemples, et il est fortement question de leur signification graphique.
En seconde, comme en première S, il est conseillé d'éviter *« tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition…) ».*

En définitive, c'est aux élèves qu'il incombe de « se faire une idée » de la notion de fonction, la définition formelle n'étant pas recommandée par les programmes.

Pour les limites, les programmes de première S parlent de :

> *permettre aux élèves d'acquérir une première idée de cette notion (…)*
> *Pour l'introduction des limites, on s'appuie sur l'observation du comportement de quelques fonctions simples pour donner une idée du cas général* [117] .

En fait, les limites sont utilisées notamment pour *« fournir un langage commode pour introduire la dérivée »*. Dans de telles conditions, la définition des limites en ε n'est évidemment pas envisageable, ce que souligne le programme.

Il nous faut voir maintenant l'interprétation des programmes des auteurs de manuels : nous avons pour cela étudié les collections Transmath et Terracher de 1ère S et Terminale S – 1998.

Les **fonctions**, dans Transmath 2nde ont fait l'objet du choix suivant : les auteurs définissent *« fabriquer une fonction f de D dans R »* ; ceci sera repris en 1ère S mais sans l'intitulé « définition » et il n'en sera plus question en Terminale S. Dans Terracher 2nde , il est question d'énoncer ce que fait une fonction, mais sans avertisseur "définition" :

> *une fonction définie sur un intervalle associe à chaque nombre de cet intervalle un nombre réel et un seul.*

En fait, il n'est pas question de définir ce qu'est une fonction : il faut se contenter de ce que fait une fonction (définie sur un intervalle) et l'image qu'il ressort d'une telle présentation est qu'une fonction est un « procédé » ou un opérateur.

L'étude du traitement des limites est facilitée dans Transmath car cette collection est plus explicite que la collection Terracher : un paragraphe introductif marque un certain « besoin de s'expliquer » par rapport aux contraintes du programme : (en première S)

> *intuitivement, l'idée de limite d'une fonction n'est pas difficile. Si pour les valeurs de x proches de a, les nombres f(x) sont proches d'un nombre fixe l, on dit que l est la limite de la fonction f en a. Par exemple, lorsque x est proche de 1, f(x)=x+3 est proche de 4 ; 4 est la limite de f en 1. Mais dans cette « définition » de la limite, le mot* proche *pose problème : l'expression « x est proche de a » est vraiment trop imprécise.*
> *Il existe des définitions précises, mais conformément au programme, nous en resterons à une présentation intuitive du concept de limite et nous énoncerons les théorèmes usuels sur les opérations.*
> *D'ailleurs, lors du développement de l'Analyse aux XVIIè et XVIIIè siècles, le concept a été traité et utilisé intuitivement. C'est plus tard seulement que les mathématiciens, conscients de son importance primordiale, éprouvèrent la nécessité d'une définition précise et efficace.*

[117] C'est nous qui soulignons.

Quelques références historiques réapparaissent, toujours dans le chapitre consacré aux limites de fonction, dans le manuel de Terminale S, accompagnées d'une remarque concernant le travail de recherche du mathématicien :

> *Depuis Euler, l'ordre des principales notions de l'Analyse est : fonctions et suites, limites, dérivation, intégration. Or la définition actuelle d'une fonction date du début de ce siècle (par Fréchet), celles des limites date des années 1850 (Cauchy, Weierstraß,…) : toutes sont ultérieures à la découverte de la dérivation et de l'intégration.*
> *Il en est souvent ainsi en mathématiques, on crée d'abord de nouveaux outils pour résoudre des problèmes, on les utilise, on ordonne et on précise ensuite pour fonder la nouvelle théorie avec toute la rigueur nécessaire.*

Les auteurs de la collection Terracher sont beaucoup moins explicatifs : nous pouvons cependant interpréter une remarque telle que : *une phrase comme « f(x) tend vers… quand x tend vers… » nous apporte une « idée intuitive suffisante pour la suite »*, en terme de formalisme inutile, étant donnée l'usage de la notion de limite en 1ère S. Il ne s'agit plus de définir « formellement » mais il demeure « l'idée intuitive ».

II-3.1.6. Fonctions d'une définition

Quel est le statut d'une définition dans un cours de mathématiques ? Et s'il est parfois possible de se « passer » de définitions, à quoi servent-elles ? Quelques éléments de réponse (résultant de la partie épistémologie et de l'analyse des manuels) :
- décrire.
- situer un nouvel objet par rapport à des objets connus.
- donner un cadre
- caractériser.
- abréger le discours.
- éviter des ambiguïtés.
- démontrer.
- modéliser.

…

II-3.1.7. Rédiger quelques définitions…

Dans les questions précédentes, les enseignants ont répondu par rapport à certaines exigences personnelles et institutionnelles. Il nous a semblé intéressant de demander à ce moment du questionnaire de définir des mots « usuels », afin, notamment de vérifier si les participants sont en accord avec leurs remarques précédentes.
Encore une fois, aucun contexte n'est évoqué dans cette question, ce qui multiplie les possibilités de réponse, et, peut même être le motif d'un refus de réponse.
Les mots choisis ne sont pas anodins (question 8) :

- factoriser : traditionnellement, dans les manuels, factoriser, c'est « mettre en facteurs ».

Ainsi, *« factoriser une somme ou une différence, c'est l'écrire sous la forme d'un produit »* (Bouvier et Al -1979).

Dans le même ouvrage, les trois exemples donnés sont des factorisations obtenues par utilisation :
- d'identités remarquables
- de résultats du type MA + MB=M(A+B)
- $6x^3 - 2xy = 2x(3x^2 - y)$.

Néanmoins, rappelons que « factoriser » s'apparente à la mise en œuvre de procédés automatiques indissociables du contexte d'enseignement (étude de signe, calcul de limites…). La factorisation, mathématiquement, dépend de l'usage que l'on en fait.

> *« Si les mathématiques permettent de décider de la justesse d'une factorisation, elles ne permettent pas de dire si elle est légitime »* (Bessot – 1995).

En ce qui concerne la factorisation, Chevallard parle de notion protomathématique et des difficultés inhérentes au contrat didactique :

> *une difficulté protomathématique peut surgir du fait de la non-maîtrise d'une capacité requise par le contrat didactique pour le bon entendement de celui-ci, la maîtrise en question figurant alors comme pré requis du contrat didactique* (Chevallard - 1985).

- équation : ce mot n'est généralement pas défini dans les manuels.

En revanche, il est fréquemment question de « résoudre une équation » et il apparaît dans certains manuels qu'une équation est une égalité vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres :

> *Définition : une égalité est une phrase mathématique dont le verbe est le signe =. Le signe = se lit "est égal à"* (Deledicq-Lassave-Missenard (1982-5ème)).

Selon les auteurs, il y a différents types d'égalité, et ils nous proposent des égalités vraies (3=2+1), des égalités fausses (3=2+5), et des égalités dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses ($x+3=5$; $x^2+1=10$). En marge, les commentaires sont les suivants :

> *Egalité pouvant être vraie lorsque x représente certains nombres mais pouvant être fausse lorsque x représente d'autres nombres : 2x=x+1»*

Quittons maintenant l'institution « manuels » pour le « savoir savant » :

> *Employé seul, ce terme est mathématiquement indéfinissable. Son sens dépend essentiellement du contexte ou du qualificatif qui l'accompagne (équation différentielle, équation d'une conique…)* (Bouvier et Al -1979).

« Equation » est une notion mathématique que Chevallard qualifie de paramathématique ; les notions paramathématiques sont des outils de l'activité mathématique, et ne font pas l'objet d'un enseignement, mais ce sont *des objets de savoir auxiliaires nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être connus, mais ne sont pas enseignés.*

Equation et factoriser sont des mots que l'on pourrait qualifier de « flous », en ce sens que, séparés d'un certain contexte, il n'est pas possible d'associer sans ambiguïté le signifiant et le signifié.

- arbre : la définition *« graphe non orienté connexe sans cycle »* ou la définition récursive de l'arbre comme objet construit inductivement à partir du point en ajoutant une feuille sont des réponses peu probables.

Ce mot n'est pas défini dans les manuels. Cependant, l'usage que l'on fait des arbres (en première, terminale) utilise de nombreuses propriétés (passées sous silence) de cette définition. L. Balmand (1998) nous indique en effet que :

> *Cet objet (...) est présent de manière récurrente comme outil dans les manuels scolaires du secondaire mais n'est pas un objet d'enseignement en tant que concept mathématique.*

Il peut être question : - d'arbre de calcul (collège)
- d'arbre d'opérateurs (collège)
- d'arbre de choix (dénombrement –lycée)
- d'arbre de probabilités (lycée).

L'expérimentation de L. Balmand a mis en évidence :

> *Pour les enseignants, l'arbre est implicitement orienté, il a un nombre « fini » de branches. Sa définition et ses propriétés leur sont inconnues. Pourtant, l'arbre est un « outil naturel » : les personnes interrogées peuvent dire où il vit et dans quelles situations. Il est un outil de représentation et de résolution, utilisable dans des domaines restreints qui sont proposés par les manuels scolaires (combinatoire, dénombrement, probabilités).*

De même que pour « équation » où nous attendons des définitions de « résoudre une équation », ici, nous prévoyons des réponses concernant davantage l'usage de l'arbre en probabilités que sa définition.

II-3.1.8. Construction de définition

Lors de l'expérimentation proposée par N. Balacheff (1987 - problème du dénombrement des diagonales d'un polygone), plusieurs élèves ont soulevé la question de la définition de « polygone » et de « diagonale » ; celle-ci a joué *« un rôle essentiel à la fois dans la résolution du problème et dans leur démarche de validation »*. En quoi consiste, dans ce cas, cette problématique de la définition ? Il s'agit en fait de conflit de conceptions entre les élèves et de conflit suscité par une réfutation.

> Le caractère dominant de cette problématique est parfois renforcé par une conception globale du rôle de la définition dans une activité mathématique (…)
> - *la définition fixe des bases communes pour la résolution du problème*
> - *la situation est lue comme un jeu de la définition (ajout de conditions définitoires…).*

Nous devons répondre à la question : pourquoi faire construire des définitions ? Trois débuts de réponses avaient été envisagés lors du mémoire de DEA :

- par rapport à une problématique, la nécessité d'un nouvel objet se fait sentir : il s'agit alors de le déterminer (par rapport à cette problématique), de le caractériser, de le définir (exemple : modélisation).
- Un objet déjà connu (de manière « intuitive ») mais non défini, peut, à un certain niveau, ou dans des situations particulières, nécessiter une définition (par exemple, en cas de conflit).
- Pour un objet déjà connu et déjà défini : le but peut être d'établir des définitions équivalentes (jeu des propriétés caractéristiques) (éventuellement pour une utilisation dans des démonstrations).

II-3.1.9. Qu'est-ce qu'une définition ?

Une question en guise de conclusion … (question 10)
La première proposition de définition de « définition » est extraite du Dictionnaire des mathématiques. La deuxième provient de la thèse « une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège » de N.Balacheff, où il prend *« la notion de* ***définition*** *au sens naïf par rapport à une acception formelle dans laquelle la définition est une abréviation permettant une économie de mots »* et rejoint ainsi la valeur lexicale mise en évidence par Vinner. Le troisième énoncé est une adaptation de la définition au sens commun (Dictionnaire Larousse). La quatrième phrase souligne davantage un aspect logique. Et enfin la dernière proposition fait référence à Kant (pour qui les définitions ne sont jamais fausses) et assigne aux définitions un statut de proposition.

II-3.2. Résultats de la recherche

II-3.2.1. Forme d'une définition

L'hypothèse est qu'il existe une (ou des) construction(s) de phrases spécifique(s) aux définitions. Nous avons considéré deux formulations :

- **si…alors…** : celle-ci fait l'unanimité : ce ne peut être une définition. C'est une implication, une proposition mais ce ne peut être une définition du fait de la forme utilisée.
- **Si et seulement si** : ici, les avis sont partagés.

→ Soit cela est accepté comme « définition correcte » (E1, E3, E4, E5, E8, E9, E12[118]) et cela va du « farouche partisan » du si et seulement si (E8) car : *«c'est comme ça qu'on*

[118] Les enseignants participants à ce questionnaire sont notés E_i , où $1 \leq i \leq 12$.

m'a appris », au plus réticent (E4) : *« c'est énoncé plutôt comme un théorème. Mais c'est acceptable comme définition* » ;

→ Soit cela est directement reconnu comme un théorème (E2, E6, E7, E10, E11).

Pour E6, la définition 4b) est une propriété caractéristique et non une définition ; il ajoute cependant : *« si on admet qu'il s'agit d'une définition, elle me va ».*

Une définition serait-elle le résultat arbitraire d'un accord ? Paradoxalement, E6 dénonce la définition proposée à la question 9 : *« ce n'est pas une définition, c'est une propriété ».* La différence entre définition et propriété (déjà évoqué dans le chapitre II) réapparaît ici.

Pour E10, le si et seulement si, dans l'usage (enseignant de collège), est réservé aux propriétés caractéristiques (rappelons qu'au collège, le « si et seulement si » est proscrit et que toute propriété caractéristique est l'objet de deux énoncés séparés en « si…alors »).

E7 et E11 rejettent cet énoncé de par la formulation ; E11 est explicite quant à l'importance de la <u>forme</u> (souligné) dans une définition. La définition 4a) est rejetée car elle ne donne pas une propriété caractéristique et la définition 4b) est également refusée bien qu'étant une propriété caractéristique car elle <u>n'explique pas</u> ce qu'est un parallélogramme (un quadrilatère qui…). Nous pouvons supposer ici (pour E11) que la forme « un parallélogramme est un quadrilatère qui… » est préférable pour une définition, et ce pour deux raisons : - elle caractérise ;

- elle « apporte une explication » sur le nouvel objet .

- Il apparaît dans le questionnaire en général des **formes « favorites »**

→ certaines sont exprimées explicitement par E6 : « on appelle … » et le mot ou l'expression que l'on définit doit venir tôt dans la phrase définissante , et par l'enseignant E7 qui lui préfère « on nomme (mot à définir) … un (mots déjà définis) tel que (propriétés) ». De plus E7 note que toute propriété caractéristique peut être prise comme définition.

→ Certaines définitions étant proposées par les participants, nous avons été en mesure de dégager certaines formes « spontanées », en voici quelques extraits :

E2 : « … désigne… » , « … signifie… »

E4 : semble attacher une certaine importance aux formulations du type « s'appelle », « est appelé » , « on dit que … » (correctif apporté à l'énoncé 1-c) et propose une définition de la forme « … est … ».

E5 : en *« langage non mathématique »* [119], E5 reformule sans le « si et seulement si » et propose par ailleurs des définitions de la forme : « … est … » , « est appelé » , « on appelle ».

E7 : préfère mettre entre guillemets ce que l'on définit.

E10 : « par définition, un … est … »

[119] Nous nous interrogeons sur la signification de cette remarque.

Ainsi, la forme d'une définition est importante : pouvons-nous attribuer ces préférences relativement au rapport personnel des enseignants aux définitions et/ou à leur rapport institutionnel (manuels, classe…) ? Certainement les deux. En réalité, pour répondre plus précisément à cette question, nous sommes amenés à en poser une autre : pourquoi la forme est-elle si essentielle ? Nous pensons qu'il peut s'agir, d'une part d'un **critère de reconnaissance** (une certaine forme permet de décider sans ambiguïté du statut d'un énoncé), et, d'autre part d'un certain **usage** dans diverses institutions (manuels notamment). De plus, une définition étant une « explication » doublée d'une dénomination, la forme peut mettre en évidence ces deux caractéristiques des définitions que nous retrouvons chez les enseignants (voir réponses à la question 4).

A ces formes langagières générales, nous avons remarqué quelques particularités personnelles :
E8 : une définition commence toujours par « soit » (de même qu'un théorème selon ce participant).
E2 : il faut quantifier.
E4 : s'attache, semble-t-il (au vu des annotations ajoutées sur le texte du questionnaire aux définitions 1-a) et 2-1), à une présentation débutant par « Etant donné… ».

Retrouvons-nous les formes mises en évidence précédemment dans les formulations obtenues à la question 8 ? Malheureusement, la présentation typographique de cette question ne favorise pas la rédaction de définitions dans leur intégralité ; en effet, nous avons obtenu des réponses de la forme : *mot à définir : phrase définissante.*
Deux exceptions cependant : E6, pour qui la forme « on appelle » est très recherchée, a répondu ici conformément à cette exigence. Et E10 utilise la forme « … c'est … ».

II-3.2.2. Existence et unicité

Notre questionnement est le suivant : l'existence et l'unicité de l'objet que l'on définit doivent-elles faire l'objet d'une démonstration explicite ? et si oui, à quel moment cette démonstration doit-elle intervenir ? A l'inverse, n'est-il pas communément admis (implicitement) que toute définition mathématique, désignée comme telle, est une « bonne » définition relativement à ces questions d'existence et d'unicité même si celles-ci sont passées sous silence ?
Nous avons fait l'hypothèse que les définitions 1-2-3 seraient regardées sous l'aspect existence et unicité, de manière « systématique ». Existence et unicité qui pourraient également être reprises pour parler de « mauvaise » définition à la question 3.

- **Recherche explicite de l'existence et de l'unicité** (5 questionnaires concernés)

E5 : recherche systématique (le seul à apporter autant d'attention à cette vérification) à la question 2 : *« une définition découle (toujours ?) d'un théorème d'existence et d'unicité »* et *« une mauvaise définition peut être une définition dans laquelle on n'a pas pris la précaution de vérifier l'existence et l'unicité de ce que l'on définit »* (à la question 3).

E7 : recherche visiblement l'existence et l'unicité.

E8 : selon lui, l'existence et l'unicité doivent être prouvées *« AU PREALABLE »* et *« ce n'est pas la définition qui est en cause »* lorsque l'existence et l'unicité sont mises en défaut (ainsi, il serait possible de définir même s'il n'y a pas existence et unicité ?).

E9 : pour le quotient, l'existence et l'unicité doivent être *« préalablement établies ou admises »*. Pourtant, pas de réticence sur la définition 2 ; mais, à la question 3 où certaines *« règles »* sont énoncées : *« une définition ne doit pas inclure une propriété dont la démonstration serait passée sous silence ; exemple : « le cercle circonscrit à un triangle est celui qui passe par les 3 sommets » → cela suppose qu'on ait prouvé son existence et son unicité ».*

E6 : recherche existence et unicité à la question 1 pour justifier $b \neq 0$. A la définition 2, les cas *« pathologiques »* où il n'y a pas existence doivent être présentés à la suite de cette définition et il est ensuite question de *« généraliser »* la définition, pour inclure les dits cas.

- **Recherche non explicitée**

E3 : propose $b \neq 0$ à la définition 1 mais ne le justifie pas. La définition 2 est reçue comme acceptable, mais pourquoi ? (est-ce à cause de l'existence et de l'unicité ou pour que cela soit ″au milieu″ ?).

E4 : ne parle à aucun moment de l'existence et de l'unicité mais précise pour la définition 1 : *« a et b ≠ 0 »* et pour la définition 3 : *« alors un cercle, ça va »*.

E10 : il nous semble que ce sont l'existence et l'unicité qui soient en cause dans la définition1.

E11 : à la définition 1, le problème (d'unicité) posé par le cas $a \neq 0$ et $b=0$ est soulevé mais ce n'est pas repris dans la question 3 et les définitions 2 et 3 n'ont pas été considérées au regard des éventuels problèmes d'existence et d'unicité.

E12 : la condition $b \neq 0$ est simplement ajoutée.
A la définition 3 l'absence d'unicité n'est pas explicitée mais nous pouvons interpréter *« le cercle est aussi une ligne homogène »* ainsi.

Nous avons quelques difficultés à interpréter la condition $b\neq0$ ajoutée systématiquement quand celle-ci n'est pas accompagnée d'un commentaire mettant en évidence le problème de l'existence et de l'unicité : en effet, quand il est question de quotient, ne pouvons-nous pas alors attribuer cette condition à l'usage?

- **Une particularité : le théorème-définition**

E1 : les définitions 1 et 2 sont jugées *« incomplètes »* (démontrer l'unicité est une question de niveau).
E2 : l'existence et l'unicité ne font pas l'objet d'une recherche systématique en ce qui concerne les définitions. Cependant, il est question pour E1 et E2 de théorème-définition (barycentre – quotient), énoncés où l'existence et l'unicité de l'objet que l'on définit sont explicites et constituent la partie théorème.

Conclusion sur l'existence et l'unicité
Quand il est explicitement question d'existence et d'unicité :
- ce n'est pas le lieu de la définition . Une preuve préalable est nécessaire.
- Nous retrouvons finalement assez peu l'absence d'existence et d'unicité comme « mauvaise » définition (E5, E9).

Existence et unicité sont omniprésentes mais ne constituent pas nécessairement un critère de « mauvaise définition ».

II-3.2.3. « Bonnes et mauvaises » définitions

Cette préoccupation est l'objet explicite de la question 3. Cependant, nous ne nous contenterons pas, dans ce paragraphe, de l'analyse des réponses obtenues à cette question. En effet, les manifestations et les critiques à l'encontre des définitions que nous avons proposées d'une part, et les réactions à certaines autres questions (par exemple la question 8) d'autre part, nous permettront ici de compléter notre analyse.

a) La notion de « bonnes et mauvaises » définitions est en fait relative

Elle dépend :
- *du niveau* (E1)
- *du contexte* (E2)
- *des moyens dont on dispose et du public visé* (E9)
- *de l'objet que l'on définit et du niveau dans lequel on enseigne* (E10).

Ainsi, une définition dépend de l'institution dans laquelle elle s'inscrit ; cette institution peut être : les programmes, le niveau d'enseignement, la classe elle-même.
Nous retrouvons cette idée de dépendance à une institution en d'autres endroits du questionnaire : A la question 1-a), l'absence de contexte est désagréable à certains (E4 – E7 –

E8) : ici, il s'agit du contexte du cours. A la question 2, deux enseignants remarquent en préliminaires :

E7 : *« en général, la réponse dépend de la classe pour laquelle on propose telle ou telle définition. Une définition peut être « bonne » en CM1 (en 4ème) et « mauvaise » en 5ème (en Term.S) »*

E11 : *« cela dépend beaucoup du niveau auquel on se place ».*

Nous reviendrons ultérieurement sur la question 6, mais nous pouvons ici évoquer que la définition de « limite » (celle du savoir savant) est incompatible (selon E4) au lycée avec son utilisation, ce qui confirme encore la relation d'une définition avec l'institution classe.

A la question 7, E10 concède que *« les outils mathématiques nécessaires pour définir une notion à un niveau donné »* sont parfois absents, auquel cas une définition peut être *« remplacée exceptionnellement »* : ainsi, du point de vue de l'écologie, certaines définitions ne peuvent pas vivre dans certaines institutions.

A la question 8 :

- certains enseignants refusent de donner des définitions sans le choix d'un contexte *« clair »* (équation et factoriser pour E11 – équation, factoriser et arbre pour E7).
- parfois la rédaction est « adaptée au collège » (E9 et E10 : factoriser).
- certaines définitions sont énoncées relativement à différents niveaux (E8 précise, pour chaque définition, le niveau dans lequel s'inscrit la définition qu'il propose).
- enfin, les définitions peuvent être énoncées dans un domaine de mathématiques précis (E1 : équation : en géométrie et en algèbre – arbre en dénombrement).

A la question 9 : E1 *« préférerait introduire le carré à partir d'autres quadrilatères, on colle ainsi mieux à ce qu'on demandera aux élèves ».*

b) Les définitions proposées : comment sont-elles perçues ?

Nous nous étions demandé si, spontanément, les enseignants parlent de « bonnes et mauvaises » définitions. En fait, leur vocabulaire ne se limite pas à l'utilisation de ces deux mots :

E1	Correcte, logiquement correcte, mathématiquement correcte, acceptable, « avec les mains », vague, incomplète, à rejeter catégoriquement, mathématiquement fausse, mauvaise.
E2	Acceptable, définition de mathématiques, théorème-définition.
E3	Mauvaise.
E4	Acceptable, mauvaise, trop complexe.
E5	Acceptable, bonne, très correcte, mauvaise.
E6	Bonne, utile, universelle, pas assez universelle, proche du vécu de l'élève, sonne mal, donne de mauvaises habitudes, mauvaise à mon goût, très mauvaise, meurtrière, inabordable, inutilisable, trop formelle.
E7	Pure, convenable, naturelle, correcte, propre, très mauvais, bidon, formellement incorrecte.

E8	Correcte, raisonnable, formellement très correcte, inacceptable, très laide (redondante), absurde, incorrecte, inutile, nuisible, fausse, archi-fausse.
E9	Naïve.
E11	Pas très éclairante, floue au niveau du vocabulaire, trop flou, trop vague, redondante.
E12	Simple, simple d'emploi.

Les jugements positifs (correcte, logiquement correcte…) ne nous apportent pas d'informations précises sur les « bonnes » définitions. Les critiques sur les « mauvaises » définitions sont plus éloquentes. En effet, en ce qui concerne les « mauvaises » définitions :

- **Existence et unicité**

  elles sont apparues comme des critères nécessaires à une définition lors de l'analyse des définitions proposées à la question 2, mais leur absence ne semble pas être un motif suffisant pour qualifier une définition de « mauvaise », sauf pour E5 et E9 (qui reprennent cet aspect dans la question 3).

- **Les mathématiques et le réel**

  les définitions 5 – 6 – 7 ont permis l'émergence de la distinction, pratiquée par la Grèce antique entre monde sensible et monde intelligible, et présente également chez Aristote : les mathématiques, qui traitent d'entités abstraites ne peuvent pas avoir de rapports avec la réalité « physique ». Ceci est repris dans les réponses à la question 3 par :

E1 : *« les mathématiques doivent être autre chose que le réel même s'il est indispensable de partir du réel, mais ce ne doit être qu'un point de départ »* . Pour lui, les définitions 5-6-7 sont à *« rejeter catégoriquement »* car *« il faut distinguer la définition mathématique correcte et la représentation qu'on peut en faire »* ;
E3 : *« les définitions 5-6-7 sont mauvaises en cela qu'elles ne définissent pas un objet mais la perception que l'on en a. Peu précis. Comment raisonner après ? »* ;
E11 : *« une définition doit éclairer l'objet qu'elle définit tout en se plaçant essentiellement dans le monde mathématique ».*
Ces objections posent effectivement le problème du passage du monde réel au monde abstrait. Cependant, les définitions 5-6-7 ont également été observées sous l'angle du niveau d'enseignement (cf. Analyse a priori), et, ainsi, n'ont pas été l'objet d'un rejet général.

- **Redondance**

Ce critère n'apparaît à la question 3 que chez E9 (*« n'être pas superfétatoire »*).
Par ailleurs, ce problème est soulevé à la question 9 (E4, E6, E8, E9, E10, E11), mais nous ne pouvons pas considérer que la redondance soit un critère de « mauvaise » définition au regard des réponses obtenues. Comme le remarque E8, cette définition est *« correcte, mais très laide. Le mathématicien a horreur de la redondance ».*

En définitive, cette définition redondante du carré représente « assez bien » ce que l'on attend d'un carré (et conforte l'image mentale que nous avons du carré), et la redondance n'apparaît visiblement pas comme un critère de « mauvaise » définition dans l'enseignement.

- **Cercle vicieux**

En fait, ce critère n'apparaît pas sous cet intitulé mais est présent dans plusieurs réponses aux questionnaires de manière plus ou moins indirecte. Certains enseignants s'attachent en effet à préciser certaines règles devant être respectées par les définitions :
E9 précise que *« les termes de la définition doivent avoir été tous définis »*,
E2 note que la définition d'un mot nouveau ne doit être énoncée qu'à partir de mots connus où déjà définis,
et E8 présente la définition comme un objet métamathématique dissymétrique de la forme
nouveau mot := proposition à partir d'anciens mots.

- **Formalisme**

Il ressort des questionnaires qu'un excès de formalisme, relativement à un niveau donné, dans l'enseignement, est condamnable. Cet aspect se dégage des réponses à diverses questions du questionnaire (par exemple, la question 6).
Un excès de formalisme rend une *« définition inabordable et inutilisable dans certains cas »* (E6), est « inutile » (E7), voire *« nuisible »* (E8) et alors une telle définition apparaît comme mauvaise (E8). Comme *« une bonne définition doit être la plus simple possible »* (E12), une définition mathématique trop complexe peut être écartée au profit d'une « perception » : ce qui apparaît chez E6, E7 (pour les angles), et E1 qui considère que certaines définitions (fonction continue, limite), trop formelles par rapport au niveau du lycée, peuvent faire l'objet d'une approche « intuitive » (et il est en contradiction avec ce qu'il a dit sur les définitions 5-6-7).
Plus précisément sur les définitions de « limite » et de « fonction », *« une définition qui puisse tenir le choc de la rigueur est trop complexe à établir et surtout à utiliser »* (E4) car *« fait référence à des objets théoriques inconnus des élèves »* (E12)(quantificateurs). Ce qui est une explication des enseignants face à la contrainte des programmes proscrivant la définition de la limite au lycée.

- **Définitions « mauvaises » pour les élèves**

Deux participants considèrent qu'une définition peut être mauvaise, en ce sens qu'elle engendre des conceptions erronées chez les élèves.
E4 propose une « mauvaise » définition en seconde :

> *« On dit que deux droites sont orthogonales si elles forment un angle droit et qu'elles n'ont aucun point commun. Outre le fait que "former un angle droit" n'est pas net, l'idée "aucun point commun" est à rayer parce que c'est une idée fausse à ne pas installer dans la tête des élèves. »*

Et E6 parle de *« définitions meurtrières »* lorsqu'elles engendrent de *« mauvaises habitudes »*, c'est-à-dire lorsque les mots ne sont pas utilisés à bon escient ou lorsque l'on fait croire aux élèves que « 2-5 » est une erreur.

- **Utilité d'une définition**

E8 préfère les qualificatifs d'absurde (*un rond est un carré sans coin*), d'incorrecte (*c'est-à-dire non conforme aux usages et donc susceptible de devenir correcte un jour : N est l'ensemble des entiers au moins égaux à 1*) et d'inutile (*un triangle est petit ssi sa surface est inférieure à 2,789 cm²*) à celui de mauvaise.
D'autre part, E1 et E6 s'accordent à dire qu'une « bonne » définition se doit d'être exacte quelque soit le contexte (même si cela est contradictoire avec leurs remarques concernant les définitions 5-6-7), et E6 précise qu'une bonne définition est soit utile, soit universelle.
Ceci nous permet de revenir sur l'aspect « utilitaire » d'une définition évoquée dans l'analyse a priori, et sur lequel peuvent émerger des discussions à l'occasion de la question 2.
Malheureusement, les définitions 1 et 2 n'ont pas eu les effets escomptés. Seul E7 estime que la définition 1 est *« bidon »*, puisque *« si l'on connaît les réels, on connaît la division »*.
Concernant maintenant l'utilité d'une définition dans une démonstration (valeur opératoire d'une définition) si chère à Leibniz : cet aspect est présent (quoique apparaissant de manière un peu contradictoire) chez E2 ; en effet, E2 insiste sur l'importance de doubler toute définition par deux théorèmes (en si…alors) car *« une précaution à prendre lorsqu'on initie les élèves à la démonstration est de ne faire utiliser que des théorèmes »*. Pourtant l'une de ses réactions à la question 9 est la suivante : *« l'objectif visé en élaborant cette définition c'est de pouvoir rédiger des démonstrations et même peut-être d'automatiser les démonstrations ».* Il faut comprendre ici que la définition en question est une propriété caractéristique du carré.

- **Dénomination**

La définition 2, exception faite de la recherche de l'existence du point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère, permet d'aborder la pertinence de la dénomination.
Une réticence observée à l'égard de cette définition est effectivement le choix du mot « centre » pour désigner ce point :
E4 : *« moi je veux bien, mais je n'utiliserais pas le mot centre pour ce point sauf pour les parallélogrammes »* : en fait, pour les parallélogrammes, le mot centre est utilisé (de même que pour les carrés) dans le sens centre de symétrie, idée que nous retrouvons chez E10 :
« ce qui me gêne c'est le mot centre, qui pour moi sous-entend centre de symétrie. Au collège, j'utilise ce vocabulaire quand le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère est un centre de symétrie : ce qui n'est pas le cas pour tous les quadrilatères. »
Cette définition n'est pas très *« éclairante »* selon E11, rien ne justifiant le choix du mot « centre ».

Cependant, E5 estime que l'*« on peut par contre donner un nom à l'intersection (quand elle existe) des diagonales d'un quadrilatère »*. Ce qui est incompatible avec l'importance accordée par J. Kuntzmann à la dénomination.

II-3.2.4. Les fonctions d'une définition

Nous allons relier les réponses de la question 4 à celle de la question 10 (qu'est-ce qu'une définition ?).

1- **Raccourcis de langage** : E2, E5, E8 ; ils considèrent par ailleurs (question 10) qu'une définition est une abréviation. En tant que telle, une définition est une convention, et ne peut avoir de valeur vraie. Par exemple, définissons i comme la racine carrée de –1 : ceci est une définition abréviative et n'a d'utilité que dans la concision du discours. Whitehead et Russell (in *Principia Mathematica*) s'accordent même à ne considérer, en mathématiques, comme définition que les définitions abréviatives (à l'image de Pascal), ce qui enlève aux définitions toute leur importance.

2- **Modélisation** : E5, E8.

3- **Préciser le sens d'un mot nouveau** : E1, E7, E11. La réduction de la fonction d'une définition à la précision du sens d'un mot est une conception répandue (c'est son acception courante). Mais qu'est-ce que le sens ? Cela est difficile à définir a priori si l'on veut aller plus loin que « le sens d'un terme, c'est ce qu'il veut dire » ! Nous rappelons diverses interprétations du sens de « sens d'un mot » (Ogden et Richard – 1923) :
   - une propriété intrinsèque du mot
   - les autres mots liés au mot
   - les connotations du mot
   - la place du mot dans un système.

Ces interprétations permettent de souligner une différence importante entre sens intrinsèque et sens interprété, différence qui porte ainsi sur la prise en considération (ou non) du contexte.
En effet, pour donner le sens d'un mot, la prise en compte ou non du contexte est importante.
Nous pouvons distinguer alors le « sens » (inhérent à un contexte et il est alors question de pragmatique) et la « signification »(indépendante du contexte et on parle de sémantique)[120].
Ainsi, Oswald Ducroc parle-t-il du sens d'un énoncé et de la signification d'une phrase (nous rappelons que Ducroc ramène l'étude de l'argumentation à l'étude de la langue).
Une remarque de E2 concernant le sens d'un mot : donner du sens à un mot permet d'avoir une image mentale, mais les images mentales produites par un mot ne permettent pas d'avoir une définition.

[120] Ce type de distinction est utilisé en intelligence artificielle, dans le traitement automatique des langues.

4- **Algébriser** : E8 (il faut comprendre ici l'aspect opératoire d'une définition).
Pour E12, une fonction d'une définition, c'est *« pouvoir construire un objet sans risque d'ambiguïté »* et pour E3, c'est *« préciser les propriétés d'un objet ».*
A la question « qu'est-ce qu'une définition ? », les avis sont partagés : quatre choisissent **l'abréviation** ; quatre autres **l'équivalence** et enfin trois optent pour **l'acception « courante »** du mot « définition », extraite (et modifiée) du dictionnaire.
De plus, la phrase « une définition est une proposition vraie » a fait l'objet des foudres des enseignants comme l'attestent ces extraits : E1 *« une définition introduit un nouveau mot, c'est un baptême, ça n'a rien à voir avec une proposition »*, E5 *«J'aurai plutôt envie de dire qu'une définition résulte d'une proposition vraie. D'ici à dire que définition=proposition vraie, c'est exagérer ».*
Remarquons que J.S Mill[121] note qu'une définition est, de manière « tacite », accompagnée d'une proposition d'existence, mais il sépare les deux et affirme ainsi qu'une définition n'a pas de valeur vraie.
E7 : *« 1) … et les propositions indécidables ?*
2) C'est du délire ! Cela ne peut pas être une définition du mot ***définition*** *puisque l'énoncé ne caractérise pas la définition mais en donne seulement une propriété ».*
E8 : *« NON, NON et NON ! Une définition est un méta objet. Elle est* ***extérieure*** *au monde des propositions. C'est un objet du même type qu'un théorème, pas qu'une proposition ».*
Rappelons que E8 accorde aux définitions un statut opératoire. Mais une question se pose à nous : **qu'est-ce qu'une proposition ?** Et la réponse à cette question est intrinsèquement liée au contexte. Par exemple, dans l'enseignement, certains énoncés ayant un statut opératoire analogue (à savoir : un rôle semblable dans la construction d'un discours démonstratif) tels que : théorème, proposition, corollaire…, sont fréquemment utilisés sans qu'une réelle distinction ne soit faîte. Relativement à l'institution des programmes, il ne sera question que du « Théorème de Pythagore » et jamais de « Proposition de Pythagore ». Nous avons demandé quelques précisions à E8 au sujet des propositions. E8 place en fait théorème et définition sur le même plan : celui du discours mathématique. Une proposition n'est qu'un objet du discours, selon lui, et peut être soit vraie, soit fausse, alors qu'un théorème peut également être indécidable.

II-3.2.5. Peut-on « remplacer » une définition ?

Majoritairement, il n'est pas question de remplacer une définition par une série d'exemples et de contre-exemples (E1, E3, E6, E7, E9, E10, E12). Les raisons invoquées sont les suivantes :
- la définition perd son caractère universel (E6).

[121] *A system of logic.*

- il est important de définir (même si les définitions sont formellement incorrectes ou approximatives) afin d'éviter que les élèves se sentent en position *« d'insécurité intellectuelle ».*
- les exemples et contre-exemples sont utiles pour *« faire comprendre une définition »* (E12).

Une contradiction à noter : E1 rejette l'idée de remplacer une définition par des exemples, et pourtant préconise une approche intuitive de la notion de fonction continue.

A noter également la nuance apportée par E10 : dans certaines situations, la définition peut être mathématiquement inaccessible pour les élèves et dans ce cas, il est nécessaire de trouver un substitut à la définition mais cela doit rester exceptionnel.

Les autres enseignants (E4, E8, E11) ayant répondu affirmativement à cette question ne sont pas très éclairants sur les raisons de ce choix :

E4 : *« pédagogiquement oui »,*

E8 : propose l'exemple du calcul matriciel (exemples au lycée et définition avec symbole sigma au niveau supérieur),

et E11 évoque les polynômes, concept qu'il est possible d'appréhender à l'aide d'exemples et de contre-exemples.

II-3.2.6. Définitions proposées par les enseignants

Nous ne reviendrons pas ici sur les refus de donner les définitions demandées, cela étant déjà été traité précédemment.

1- **Equation**

E5 *« sèche »* et E11, E7 refusent de définir sans contexte.

Selon nos prédictions, plusieurs s'attachent à préciser ce que signifie « résoudre une équation » (E1, E3, E10).

Sinon, une équation est une égalité (E3) prenant la valeur « vraie » ou « fausse » selon les valeurs de l'inconnue (E4, E9, E10).

Un autre aspect (nous changeons de contexte) des équations est évoqué :

« relation vérifiée par les coordonnées des points d'un ensemble » (E1, E12).

2- **Arbre**

Conformément à nos attentes, peu d'enseignants se sont aventurés à définir le mot « arbre » (cinq seulement). Deux refusent ouvertement de le définir (E11 : *« arbre de quoi ? »* ; E7 : *« pas sans le choix d'un contexte clair »*). Les définitions proposées évoquent davantage l'utilisation de l'objet « arbre » mais ne le définissent pas (E1, E9).

Les « vraies » définitions obtenues sont des définitions récursives :

E5 : *« - l'ensemble vide*

ou - un nœud d'où partent des branches et au bout de chaque branche, un arbre. »

E8 : *« Niveau Sup.(Arbres finis)*

Objet récursif : () est un arbre, si P1, ... Pk sont des arbres (P1, ..., Pk) en est un. (La difficulté est reportée dans la validation des définitions récursives) ».

Nous n'attendions pas la définition « graphe simplement connexe » : elle est apparue à une occasion seulement (E8).
Nous remarquons également que personne n'a proposé un schéma pour définition de l'arbre (aucune définition à l'aide d'exemples et de contre-exemples n'a été observée) ; nous posons la question suivante : existerait-il un implicite du type « une définition ne s'écrit qu'avec des mots et ne peut être qu'illustrée par des exemples et/ou schémas » ?

3- **Factoriser**

Les réponses sont pour ainsi dire unanimes :
Factoriser, c'est « transformer une expression algébrique en un produit » ou « en un produit de facteurs ». Il semblerait que ce mot déclenche un réflexe conditionné chez les enseignants ; peut-être est-ce pour la simple raison que c'est ce que l'on trouve dans les manuels.
Quelques réticences cependant : E11 et E7 refusent de définir les mots proposés (*« trop vague »* pour E11 et E7 sollicite un contexte). D'autre part E2 remarque que l'*«on devrait se passer de ce mot »*, mais nous n'en saurons pas davantage. A ce propos E8 est plus explicite :
« Niveau 4ieme : Ecrire sous forme de produit.
Niveau sup. : même définition mais en précisant que ce n'est pas une définition mathématique. Factoriser à une signification analogue à calculer ou à simplifier.
Calculer f(x) : la réponse f(x)=f(x) est mathématiquement correcte mais ce n'est pas ce qu'on attend.
Le mot factoriser n'a pas de signification mathématique. C'est un mot trop vague. Mais ce n'est pas grave. Pour faire des mathématiques, il est nécessaire d'utiliser des mots qui ne sont pas mathématiques ».

II-3.2.7. Construction de définitions

Certains n'ont pas répondu à cette question (E3, E10, E12). Pour les autres, quels sont les objets dont la définition est susceptible d'être construite ?
Les objets géométriques sont privilégiés pour cette activité : les quadrilatères (E1), bissectrice d'un angle (E2), cercle (E2), centre d'un cercle (E5), droites orthogonales (E4), plan dans l'espace (E11), droite, carré, triangle (E8). En géométrie, construire une définition peut signifier obtenir toutes les propriétés caractéristiques de l'objet que l'on définit. Il faut cependant distinguer les cas où un concept nouveau est abordé et les cas où il s'agit en fait de « reconstruire » une définition *(« les objets géométriques ont bien des avantages car l'intuition les concernant est facile à développer »* - E8).
Nous avons également obtenu comme propositions : fonction (E8), fonction numérique croissante sur un intervalle (E11), intégrale d'une fonction sur un intervalle (E4), aire,

proportionnalité (E5), quantités proportionnelles (E7), mesure (E6), irréductible (fraction – E9).
Nous avons demandé des précisions à deux enseignants : E8 et E11, et ce pour deux raisons :
- E8 propose de faire construire la définition de « droite », ce qui nous a semblé surprenant (dans l'enseignement secondaire) ;
- E11 propose « fonction numérique croissante sur un intervalle » et « plan dans l'espace » et nous savons que cet enseignant pratique effectivement la construction de ces définitions en classe, ce qui n'est pas nécessairement le cas des autres participants (à ce sujet, nous n'avons pas de précision concernant leurs pratiques enseignantes).

D'après les commentaires obtenus, il s'agit toujours de **caractériser** un objet mathématique. Lorsque cet objet est déjà connu, par exemple la droite, comment s'attacher à construire sa définition ?
E8 : *« construire une définition axiomatique d'un objet, c'est dégager les propriétés essentielles de cet objet. On se pose la question : quelles sont les propriétés désirables mathématiquement de ce qu'on nomme habituellement une droite ? Telle en sera la définition ».*
Et E8 nous propose une liste de propriétés intéressantes (dont certaines ne sont pas élémentaires) :
- non bornée (prolongeable indéfiniment)
- continue (réelle)
- géodésique (inégalité triangulaire)
- homogène (affine)
- plane (et vérifiant les postulats d'Euclide)

« A tout niveau, on peut définir la droite dès que l'on met en évidence les propriétés qui la caractérisent à ce niveau, c'est-à-dire qui la différencient des objets environnants ».

Ceci ne répond pas à la question : **dans quel cas pouvons-nous envisager une activité de construction de définition ?**
Pour répondre à cela, étudions les activités proposées (et réalisées en classe) par E11 : il faut qu'il y ait une **problématique** pour que le besoin de construire une définition se fasse sentir (ceci est également évoqué chez E6) :
- « fonction croissante sur un intervalle » en 2^{nde} :

rappelons que le programme de seconde demande explicitement de ne pas définir « fonction croissante » en 2^{nde}, mais cela fait partie des notions devant *« être mises en place sur des exemples ».* E11 constate qu'il est possible qu'à certains moments, les élèves ne soient pas d'accord pour conclure sur la monotonie d'une fonction donnée. De ce désaccord naît le besoin d'établir une définition de fonction croissante sur un intervalle.
E11 trouve un très grand intérêt à cette activité car elle permet un travail sur :
- le vrai et le faux et l'écriture avec des lettres et des quantificateurs ;

- ce qu'est une définition (au dire de E11 pour les élèves, les résultats sont d'abord des règles, des propriétés : ils ne comprennent pas ce qu'est une définition !) ;
- construction du concept et réfutation des définitions proposées par contre-exemples ;
- la représentation graphique (d'où proviennent les premières propositions des élèves) et sur les changements de cadres.

En ce qui concerne la construction de la définition d'un plan dans l'espace, en 1èreS, chez le même enseignant. Ici, le contexte est légèrement différent : les élèves de ce niveau ont déjà « une idée » de ce qu'est un plan et en ont manipulés, ils savent en donner des exemples.
Le point de départ est l'énoncé suivant, destiné à faire discuter sur la différence entre face et plan :

> *« soit ABCD un tétraèdre, R un point quelconque de (AB), distinct de A, T un point quelconque de (AC), distinct de A : (RT) est-elle contenue dans le plan (ABC) ? »*
>
> E11 nous fait le récit de son expérience :
>
> *« Pas de problème pour répondre intuitivement à la question précédente. Mais alors je pose la question :"qu'est-ce que le plan (ABC) ?".*
> *Il est sorti (au bout de la séance de deux heures) plusieurs définitions, dont plusieurs ont été réfutées. Deux ont été gardées (sans que j'intervienne beaucoup dans la formulation en tant que prof) parce qu'elles résistaient à tous les contre-exemples :*
> ** définition 1 : le plan (ABC) est l'ensemble des points de l'espace par lesquels passe une droite qui coupe deux côtés du triangle ABC en deux points distincts.*
> ** définition 2 : le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe un couple de réels x, y tels que* $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$. *L'intérêt :*
>
> - *Travail sur la vision dans l'espace.*
> - *Sur la reformulation.*
> - *Sur les quantificateurs.*
> - *Sur le vrai et le faux.*
> - *Sur la notion de propriété caractéristique (comment faire pour reconnaître qu'un point appartient au plan (ABC)).*
>
> *Je n'ai pas poursuivi au-delà des deux heures, mais il avait été conclu par les élèves qu'il fallait démontrer que les deux définitions étaient équivalentes, puisqu'on ne pouvait réfuter ni l'une, ni l'autre. »*

Ainsi, l'importance des définitions apparaît lorsque celles-ci permettent **de résoudre un conflit**, ou de **lever une ambiguïté**.

II-3.3. Conclusions

II-3.3.1. Rapport personnel et/ou rapport institutionnel ?

En préambule à l'analyse a priori du questionnaire, nous avons évoqué les rapports personnels et institutionnels, analysés par Chevallard. Celui-ci note l'importance et l'influence de diverses institutions lors de l'élaboration des rapports personnels d'un individu à un objet de savoir.
Nos interrogations sont les suivantes : pouvons-nous distinguer, au vu des réponses obtenues au questionnaire, le rapport personnel et le rapport institutionnel des enseignants aux définitions mathématiques ? De quelles institutions s'agit-il ?
Au regard des conditions et des contraintes inhérentes à chaque institution analysée, nous pensons pouvoir préciser le rapport personnel d'enseignants au concept de définition.

Prenons comme exemple les réponses obtenues à la question 8 pour le mot « factoriser » : ce mot exprime un objectif et a tendance à évoquer la mise en œuvre de certains procédés automatiques selon le contexte (c'est une *« notion mobilisée implicitement par le contrat »* Chevallard). Les enseignants définissent majoritairement ce mot de manière identique à celle des manuels, à l'exception d'un enseignant (E8), ce qui témoigne de l'existence d'un fort rapport institutionnel à ce mot. En ce qui concerne la définition du mot « arbre » : c'est un objet mathématique dont la définition est absente du secondaire, où l'arbre apparaît comme un outil pour la résolution de problèmes de dénombrement et de probabilités.
En l'absence d'institutionnalisation de cet objet, les exigences formelles très fortes que les enseignants ont sur la définition disparaissent : ils ne produisent le plus souvent qu'un vague discours qui ne définit rien (en revanche, l'enseignant E8 donne deux définitions précises, correctes mathématiquement).

Explicitons maintenant les diverses institutions présentes à l'occasion de ce questionnaire : les programmes, les manuels scolaires, le savoir savant, mais aussi le forum de discussion (et éventuellement nous-même) du fait du dispositif internet engagé pour ce questionnaire. Il est à remarquer que certains enseignants (E6, E8) sont intervenus directement sur le forum ; leurs réponses « publiques » dénotent une réflexion marquée par deux institutions : le forum (lieu de débat) et la communauté mathématique. Ceci étant, nous nous sommes adressé à des enseignants et ceux-ci ont répondu en tant que tels, révélant alors les contraintes instaurées par les manuels et les programmes (notamment lors des questions 8 et 9 par exemple).
Nous nous sommes alors trouvés face à une grande difficulté pour situer l'institution dans le cas général, et en conséquence, l'évaluation du rapport personnel de ces enseignants au concept de définition s'en est ressentie.

Nous pensons que le principal obstacle, dans le cas du concept de définition, à la mise à jour du rapport personnel (très marqué par le(s) rapport(s) institutionnel(s)) réside dans le fait que

notre questionnaire ne met en œuvre que des objets « connus » des enseignants. Il nous aurait été peut-être plus aisé de le discerner si nous avions proposé des définitions totalement hors institution scolaire, voire purement imaginaires.
Cependant, dans les réponses apportées à la question 9 (définition du « carré »), il peut être question du rapport personnel de certains enseignants. Les enseignants de collège proposent une définition du carré à partir de quadrilatères connus : ce qui est conforme à l'institution programmes de collège. Les autres enseignants insistent davantage sur la redondance de la définition proposée et recherchent une définition minimale, l'un d'entre aux posant même le problème de la démonstration de l'existence d'un tel objet. Nous sommes en présence à la fois du rapport institutionnel (utiliser les quadrilatères connus pour définir le carré) et du rapport « plus » personnel à la notion de définition lorsqu'il est question de la redondance.

Ainsi, le rapport personnel à une définition particulière se crée bien par le biais d'une (ou plusieurs) institutions et, par conséquent, il nous est difficile de délimiter le rapport personnel des enseignants aux définitions (dans leur ensemble), ceux-ci se retranchant de plus souvent derrière une institution pour répondre à certaines questions : encore un exemple, à la question 6, les programmes sont fortement mis en cause et vivement critiqués (l'institution des programmes est mise en cause relativement à une autre institution, pour laquelle les définitions « précises » constituent un point de départ et garantissent la cohérence de toute la théorie qui en découle).

La définition du mot « centre » (question 2) aurait pu faire émerger ce rapport personnel. En fait, les remarques concernant cette définition ont été influencées par l'utilisation de ce mot dans l'enseignement (en particulier centre de symétrie) : le choix du nom est apparu alors comme important mais l'utilité d'une telle définition n'a pas été évoquée et nous n'avons pas observé de réponses rejetant cette définition au profit d'une autre.

II-3.3.2. Activités de construction de définitions – « Obstacles » ?

L'étude des définitions mathématiques dans le savoir savant et dans l'enseignement a été motivée par un désir de réaliser des activités de construction de définition en classe. En fait, il s'agit de retranscrire dans l'enseignement une activité proche de celle du chercheur. Les *zéro-définitions* de Lakatos sont le point de départ d'un tel travail :

> *« une zéro-définition peut être adoptée, à titre d'essai, à l'origine du processus de recherche »* (Note des traducteurs – in Lakatos 1984 p.175)

L'analyse des réponses au questionnaire et des manuels nous a permis de mettre en évidence, au regard des conceptions des enseignants interrogés, quelques « obstacles » devant être pris en compte lors de la réalisation d'une ingénierie didactique de production de définition :
- **L'acception courante** du mot « définition ».

- « **Définir, c'est donner un nom** » : ceci occulte l'activité de définir et laisse à penser qu'une définition ne serait qu'une convention.
- **L'opposition entre définition et propriétés**. Une dialectique entre les deux est nécessaire.
- La **place restreinte des définitions dans l'enseignement** : comment sont-elles perçues par les élèves ? A ce propos, une réflexion de E11 est à prendre en compte (même si elle nécessite une vérification) :

> *« pour les élèves, les résultats sont d'abord des règles, des propriétés : ils ne comprennent pas ce qu'est une définition ! ».*

De plus, une définition affirme **l'existence** de quelque chose caractérisé par certaines propriétés ; cependant, les élèves n'ont jamais vu ou considéré les définitions sous cet angle.

- Les définitions sont toujours présentées comme **point de départ**.
- En quoi consiste une activité de construction de définition ? Pour les enseignants interrogés, il est davantage question de **redéfinir** des objets connus. Ceci pourrait effectivement être une première activité car elle permettrait aux élèves de comprendre le rôle d'une définition, ainsi que son élaboration. Dans un second temps, construire des définitions peut apparaître comme une **nécessité** lorsque se pose une problématique (nous nous rapprochons ici des *zéro-définitions*) ; rappelons, l'histoire des mathématiques nous le démontrent, qu'une définition mathématique se construit par aller retour successifs.
- **Les définitions à caractères provisoires sont absentes** dans les réponses des enseignants : pour eux, on ne définit que des choses précises ; dans un tel cas, il est difficile d'envisager une activité de construction de définition (en effet, celle-ci passe inévitablement par des définitions de « niveau zéro », définitions sur lesquelles un travail est nécessaire).

D'autre part, le rapport d'une personne à un objet implique une connaissance sur cet objet ; il nous faut alors déterminer ce qui, dans ce rapport, peut faire obstacle à l'activité de construction de définition. Nous faisons de plus l'hypothèse que Ri(X,O) renferme les mêmes obstacles didactique et épistémologique à la réalisation d'une situation de production de définition, quelque soit l'institution i. Une recherche consécutive à l'expérimentation de constructions de définitions en classe pourrait s'organiser autour d'une modélisation de ce type d'activités.

Chapitre V

Introduction aux situations expérimentales

Synthèse des études épistémologiques et didactiques de la définition

Nous avons dans le chapitre II décrit trois conceptions (Aristote, Popper et Lakatos) que nous allons réutiliser pour la construction de SCD. Ces conceptions sont complémentaires dans le sens qu'elles permettent de couvrir différentes problématiques liées à la définition (construction de concept, caractérisation, théorisation).
L'étude du chapitre III des travaux didactiques existants s'intéressant à la définition et, dans une moindre mesure, à la construction de définition, a montré le vide en matière d'élaboration de SCD et de leur analyse.
Les études écologiques du chapitre IV nous ont apporté un éclairage sur les rapports institutionnels d'enseignants à la définition et les usages de la définition dans les institutions didactiques du secondaire (programmes et manuels scolaires).

Objectifs

Nos objectifs sont multiples : nous projetons d'étudier la dévolution de constructions de définitions chez des étudiants de première année d'université (public disponible pour nos expérimentations). Dans ces expérimentations, nous avons recherché à étudier les processus de construction de définitions développés par ces étudiants.

Spécificité des objets mathématiques utilisés dans nos SCD

Les objets retenus pour la réalisation de situations de construction de définitions sont tous issus des mathématiques discrètes. Ce sont des objets faciles d'accès par leurs représentations, sur lesquels différents points de vue sont possibles. De plus, ces objets discrets sont non institutionnalisés et le rapport à la preuve qu'ils procurent est différent de celui pratiqué traditionnellement. En effet, on ne peut rien conclure sur un exemple, un cas particulier ne sert à rien pour tester une propriété. On a même très souvent le résultat suivant : une propriété fausse dans le cas général est vraie dans la plupart des cas, contrairement à la géométrie euclidienne par exemple où toute propriété vraie sur un exemple est vraie en général. Ainsi, la recherche de contre-exemples dans des cas discrets relève d'une réelle construction et non consiste pas simplement en la production d'un exemple « au hasard » (Grenier & Payan - 1998).

- L'arbre est un objet d'approche non problématique, facile d'accès par sa représentation : il n'est pas difficile de distinguer un arbre d'un non-arbre. Il est de plus approchable de différents points de vue, ce qui en fait un objet mathématique riche de par ses multiples définitions. La question de l'existence d'un tel objet ne se pose pas. Il n'y a de plus pas de référent particulier.

- Les droites discrètes

C'est un objet qui est encore au cœur de recherches actuellement. Il pose des questions différentes que celles posées dans le cadre euclidien : en effet, les droites discrètes sont utilisées (pratiques existantes en infographie, imagerie médicale etc.) mais non théorisées comme le sont les droites euclidiennes.

Réaliser une situation autour des droites discrètes a un intérêt car cet objet est problématique : il s'agit de réaliser une construction simultanée de l'objet et de sa représentation géométrique. Différentes problématiques peuvent apparaître notamment du fait de l'existence du référent “droite réelle”. De plus, des questionnements de nature axiomatique se posent de manière cruciale : il s'agit de l'existence, de la non-contradiction, de l'unicité de tels objets géométriques.

- Les déplacements sur une grille

Il n'est pas question ici de définir un objet ou une classe d'objets mais un ensemble de relations. Nous reviendrons mathématiquement sur ce point dans le détail au chapitre VIII.

Variables globales et locales

Le choix d'un type de SCD est une variable globale. Nous avons défini trois valeurs pour cette variable au chapitre II qui sont : CLASSIFICATION, MATHEMATISATION/MODELISATION et RESOLUTION DE PROBLEMES.

Le choix de l'objet mathématique est lié à la valeur de cette variable globale.

Nous avons alors trois variables locales dans chaque type de situation, notées v_1, v_2, v_3.

La première est le type d'objet mathématique. Les objets mathématiques peuvent être de différents “niveaux”, ce que nous préciserons ci-dessous dans la présentation des situations expérimentées.

La deuxième variable locale est le référent. v_2 prend ainsi les valeurs “référent donné”, “référent non donné”.

La troisième est la demande explicite d'une définition. v_3 prend les valeurs "demande explicite de définition", "sans demande explicite de définition".

Présentation des situations expérimentées

La première situation est de type CLASSIFICATION.
L'objet choisi est l'arbre : c'est un objet mathématique facile d'accès par sa représentation, peu problématique. Il était possible de mobiliser le référent "arbre naturel" (végétal), mais nous avons choisi de ne pas en appeler à un référent, c'est pourquoi nous l'avons appelé "truc". Une demande explicite de définition a été formulée lors de cette expérimentation.

Pour la deuxième situation, nous avons fait varier le type de situation et la variable locale "demande de définition". L'objet retenu fut "droite discrète", pour lequel il existe un référent implicite : la droite réelle, et plus généralement la géométrie euclidienne. Cet objet est lui plus problématique que l'arbre, mais est également facile d'accès par sa représentation.
Nous avons donc proposé une situation de type MATHEMATISATION/MODELISATION sans demande explicite de définition (problématisée par des triangles discrets). Nous avons de plus réalisé une situation de type CLASSIFICATION sans demande explicite de définition faisant suite à la situation précédente. Par ailleurs, une autre situation de ce même type mais avec demande explicite de définition a été mise en œuvre.

La dernière situation est de type Résolution de Problèmes. L'objet mathématique retenu est d'un autre "niveau" que les deux précédents : en effet, nous avons conçu une situation avec les concepts de "générateur", "indépendance", "minimalité" pour lesquels une représentation est difficile. Pour cela, la situation problématise des déplacements sur une grille discrète ; il y a ici un référent implicite à savoir les déplacements dans le plan réel.

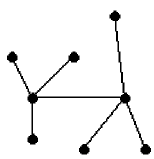
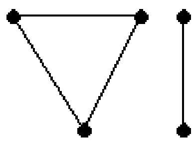
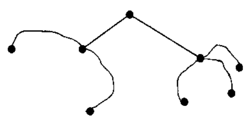
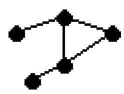
Chapitre VI

Arbres

I- “Arbre” : le concept mathématique et l’objet d’enseignement

I-1. Le concept mathématique

L’**arbre** est un concept central de la Théorie des Graphes, qui possède de nombreuses définitions équivalentes (voir ci-après) accessibles avec peu de connaissances. Dans la théorie, il est en général étudié et utilisé en tant que graphe ayant des propriétés particulières. Mais on peut aussi le décrire de manière simple par analogie avec l’objet de la biologie végétale, associée à sa représentation usuelle avec des points et des traits.
C’est cette approche qui nous intéresse dans un premier temps. En effet, la donnée d’un ensemble (de taille raisonnable) de points et de traits reliant ces points, est suffisante pour décider s’il s’agit d’un arbre ou non. De plus, la représentation usuelle de l’arbre contient de nombreux ostensifs faciles d’accès basés sur la perception, mais aussi des ostensifs de types combinatoires ou inductifs. Enfin, l’analogie avec l’arbre végétal fournit des critères de reconnaissance pertinents.
Ainsi, dans les exemples ci-dessous, il est facile de décider quels sont ceux qui représentent des arbres et ceux qui n’en sont pas.

 Arbre	 Non-arbre	 Arbre	 Non-arbre

On peut donc faire l’hypothèse que des *zéros-définitions* de l’arbre peuvent être construites dans une SCD mettant en jeu des représentations graphiques et que, de plus, cette tâche permet dans le même temps, la construction du concept mathématique.

Nous allons préciser ces *zéro-définitions* et les définitions mathématiques qui leurs sont attachées.

Tout d'abord, nous dénommerons *graphe* un objet composé de points (sommets) et de traits (arêtes*)*, *arbre* un graphe en un seul morceau (*connexe*) sans cycle, *forêt* un ensemble d'arbres disjoints (il s'agit ici de la recherche du *genre).*
Si nous recherchons les *différences spécifiques* de l'arbre au sein du *genre* "graphe", nous trouvons les propriétés suivantes :
CONNEXE : connexe (ou encore *en un seul morceau),*
~~CYCLE~~ : sans cycle,
CHEMIN: existence d'un chemin d'un sommet quelconque à n'importe quel autre sommet,
[n, n-1] : représentation ayant n-1 arêtes pour n sommets.

Chacune de ces propriétés relève d'un point de vue spécifique sur l'objet "arbre". Une approche **perceptive** globale peut mettre en évidence les propriétés **CONNEXE** et **~~CYCLE,~~** relevant d'une description morphologique de l'objet. En revanche, la propriété **CHEMIN,** comme son nom le suggère, nécessite un **cheminement** sur l'objet, l'approche est donc plus analytique ; mais nous faisons l'hypothèse que cette approche est possible, car le cheminement sur des arbres de probabilités est une pratique didactique présente au lycée. Enfin, la propriété **[n, n-1]** nécessite une conjecture sur la relation entre nombre de points et nombre d'arêtes dans un arbre, c'est-à-dire une approche de nature **combinatoire**.

Une autre approche du concept est accessible à partir de la même représentation (sommets, arêtes). Cette approche, dite **inductive**, n'est pas la moindre, car elle est basée sur une propriété qui fonde l'épistémologie du concept d'arbre : un arbre se décrit et se construit, à partir d'un point ou d'un arbre donné, en rajoutant un nouveau point et une arête reliant ce nouveau point et un point ancien, de telle façon qu'il n'y ait pas de cycle. Nous la désignerons par **INDUCTION.**

Enfin, une approche **dynamique** de l'objet, c'est-à-dire impliquant une action sur cet objet, peut être la suivante : il est possible de modifier un arbre en lui enlevant un sommet, une arête voire davantage et d'étudier l'objet restant.

Définitions du concept d'arbre

Les dix définitions considérées dans la suite découlent de l'étude que nous venons de faire. Elles sont donc liées à la représentation en points (sommets) et traits (arêtes) du concept d'arbre et aux différentes approches décrites ci-dessus. Elles caractérisent l'arbre comme un graphe particulier.

Soit G un graphe. **G est un arbre si et seulement s'il vérifie l'une des propriétés suivantes.**

Définitions	Nature principale des définitions
Def1- G est connexe sans cycle.	Perceptive, structurelle
Def2- entre deux sommets quelconques de G, il existe un unique chemin [122].	Perceptive, cheminement
Def3- G (à n sommets) est sans cycle avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def4- G (à n sommets) est connexe avec (n-1) arêtes	Combinatoire
Def5- G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle (graphe sans cycle maximal [123])	Dynamique (nécessite une action sur l'objet), optimal
Def6 - G est connexe, et si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe (connexe minimal [124])	Dynamique
Def7 - un arbre est soit un sommet isolé, soit un arbre auquel on ajoute un sommet pendant [125].	Inductive (ascendante), dynamique constructive
Def8- G est soit un sommet isolé, soit un graphe A, qui, privé d'un sommet pendant quelconque est soit un arbre, soit un sommet isolé.	Inductive (descendante), dynamique constructive
Def9- un arbre est soit un sommet isolé, soit deux arbres reliés par une arête.	Inductive, dynamique
Def10- un arbre est soit un sommet isolé, soit le graphe obtenu à partir d'une forêt[126] en reliant un nouveau sommet à un sommet de chacun des arbres de la forêt.	Inductive, dynamique

Définitions de l'arbre

NB : l'équivalence entre elles de toutes ces définitions est démontrée en annexe en fin de ce chapitre.

La définition Def1 peut être l'aboutissement d'un travail de description de l'objet basé sur le perceptif et la mise en évidence des propriétés ~~CYCLE~~ et **CONNEXE.**
La considération de la propriété CHEMIN (Def2) pose la question des manières de **parcourir** le graphe ; des questions relatives à l'orientation peuvent surgir.
L'étude **combinatoire** de la conjecture **[n, n-1]** peut induire des définitions telles que Def3 et Def4. Elle n'est possible que sur des graphes ayant peu de sommets.
L'approche **dynamique** de l'objet décrite ci-dessus est moins probable que les précédentes (ce n'est pas l'usage, dans l'enseignement, de modifier l'objet donné). Elle est basée sur les propriétés suivantes : si on supprime une arête quelconque sur un arbre, on perd la connexité ; si on ajoute une feuille à un arbre, on a toujours un arbre. Il est ainsi possible d'aboutir à des définitions où **l'optimalité** est considérée, telles les définitions Def5 et Def6.

[122] Dans tout le texte, chemin est non orienté.
[123] Maximal pour le nombre d'arêtes.
[124] Minimal pour le nombre d'arêtes.
[125] Un sommet pendant est un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul sommet.
[126] Forêt : ensemble d'arbres disjoints.

Enfin, l'approche dynamique permet également d'aboutir aux définitions **inductives** Def7, Def8 Def9 et Def10.

Cette étude nous permet de faire l'hypothèse que différentes *zéro-définitions* ou définitions peuvent émerger, dans une situation de construction de définitions de l'arbre basée sur la représentation du concept en sommets et arêtes.

I-2 Eléments d'étude écologique et rapports d'enseignants à l'objet mathématique

I-2.1. Quelques résultats de l'étude de L. Balmand (1998)

Eléments d'étude écologique

Dans les pratiques enseignantes et les manuels des années 90, l'arbre apparaît comme un outil familier, utilisé dès l'école primaire comme outil de représentation, et présent tout au long du collège et du lycée. Cependant, l'arbre est absent en tant qu'objet mathématique dans l'enseignement : aucune définition n'est institutionnalisée à aucun niveau scolaire. Le travail de recherche de L. Balmand (1998) a mis en évidence que, selon le niveau scolaire auquel on se situe, différents types d'arbres, ayant des fonctions spécifiques vivent dans les manuels scolaires et les pratiques didactiques. Nous allons rapporter les conclusions de son étude écologique de l'objet mathématique "arbre" (manuels et programmes antérieurs à 1998), sans omettre de considérer également le concept plus général de graphe, l'arbre étant un graphe particulier. Nous ne détaillerons pas ici les manuels et programmes étudiés par Balmand : nous proposerons nous-même ci-après une étude des derniers programmes et manuels, spécifique à la place et au rôle de l'arbre au lycée.

L'arbre peut tout d'abord être un **support d'exercice** appartenant à la formulation d'un énoncé : il n'est alors ni un outil de modélisation, ni un outil de représentation.
Il y a ensuite deux catégories d'arbres : les arbres de calculs et les arbres d'opérateurs d'une part et les arbres utilisés en dénombrement et probabilités (arbres de choix et arbres de probabilités) d'autre part.
Les arbres de calcul et d'opérateurs sont utilisés au collège dans les années 90 pour travailler la multiplication des décimaux et les calculs avec priorités. Ces arbres sont ainsi toujours orientés (gauche-droite, haut-bas) et leur fonction réside dans la visualisation de l'ordre des calculs.
Les arbres de choix apparaissent dans des exercices de dénombrement où ils ont un caractère d'exhaustivité. Ainsi, pour l'élève, utiliser un arbre signifie dénombrer, lister, lire un graphe (ordre des étapes, chemin critique). **Les arbres de probabilités** sont des arbres de choix dont les arêtes sont pondérées. Ils ont alors deux fonctions : celle de représentation graphique et

celle de résolution[127]. Une telle utilisation de l'arbre implique des propriétés implicites telles que :

- la suppression d'une arête quelconque sur un arbre implique qu'il n'y a plus d'arbre ;
- un arbre reste un arbre lors de l'ajout d'un sommet pendant ;
- mais il ne faut pas relier deux points quelconques dans un arbre, car alors, il n'y a plus d'arbre.

Dans les manuels récents que nous avons étudiés, l'arbre de probabilités (également appelé arbre pondéré) est présent et sert même de « démonstration » dans certains exercices de probabilités (Terminales S et ES), sans pour autant être défini, comme nous le verrons ci-après avec les nouveaux programmes.

Rapports d'enseignants aux objets "graphe" et "arbre"

Nous rappelons les résultats obtenus par Balmand (1998) sur les connaissances d'enseignants sur l'arbre' : pour les enseignants interrogés[128], la reconnaissance de l'objet est aisée mais pas sa caractérisation, ce qui conforte - et limite a priori - l'usage de l'arbre en tant qu'outil de représentation. Lorsqu'il y a caractérisation, la fonction de représentation de l'arbre est bien sûr présente, mais aussi la définition récursive (analogie avec l'objet naturel) et les notions d'arbre "orienté", d'arbre "fini". Il apparaît également diverses propriétés telles que : « l'arbre n'a qu'une racine » ; « à un nœud n'arrive qu'une seule branche » :

> *Pour les enseignants, l'arbre est implicitement orienté, il a un nombre 'fini' de branches. Sa définition et ses propriétés leur sont inconnues. Pourtant, l'arbre est un 'outil naturel' : les personnes interrogées peuvent dire où il vit et dans quelles situations. Il est un outil de représentation et de résolution, utilisable dans des domaines restreints qui sont proposés par les manuels scolaires (combinatoire, dénombrement, probabilités)* (Balmand, 1998).

Les personnes reconnaissant l'arbre, peuvent se prononcer sur le fait que tel objet en est un ou pas : ils connaissent par extension cet objet mathématique. Bien que les définitions produites soient très fortement liées à la fonction de représentation de l'arbre, il est apparu une définition inductive (probablement non reconnue comme telle) : *un arbre est une combinaison d'arbres élémentaire*, et une définition "naturelle" : *c'est un graphe que l'on parcourt en un sens précis, de la racine vers les feuilles par exemple*.

Les situations d'utilisation de l'arbre évoquées par ces enseignants sont les situations de dénombrement et de calcul de probabilités.

Nous retiendrons enfin de cette étude les éléments suivants. Le concept de graphe (celui de la théorie des graphes) n'est pas identifié, en conséquence, les deux concepts « graphe » et « arbre » sont dissociés. L'arbre est essentiellement un outil de représentation et de résolution

[127] *Ils* (les procédés dont l'arbre) *ont en germe des idées puissantes* (Terracher-1ère S-1991-p105) : il s'agit ici de mettre en évidence, sur des arbres, le principe multiplicatif pour dénombrer le nombre d'issues d'une expérience.
[128] Des professeurs de mathématiques en Lycée Technique et des stagiaires PLC2.

qui se reconnaît à son dessin particulier, utilisable dans des domaines spécifiques des programmes scolaires (combinatoire, dénombrement, probabilités). Enfin, la naturalisation de l'arbre et son « évidence » permettent de le considérer comme un outil de preuve, alors même qu'il n'est pas étudié comme objet mathématique.

I-2.2. Les nouveaux programmes et manuels (ouverture sur les graphes)

L'introduction de quelques éléments de la théorie des graphes dans les programmes de 2002, en spécialité de terminale ES (seulement) est un événement en soi, qui mériterait une analyse approfondie de la transposition didactique choisie par les programmes, des manuels et des pratiques enseignantes. Nous ne le ferons pas ici[129]. Nous avons mené malgré tout une analyse de quelques manuels et des programmes, pour tenter de répondre à des questions qui concernent plus spécifiquement notre étude, en particulier :
L'arbre a t-il un statut de concept mathématique (est-il défini, si oui, comment ?, quelles propriétés sont mises en avant ?). L'usage de l'arbre est-il plus large (et plus proche de celui de la théorie des graphes) ?

Six manuels ont été étudiés (correspondant aux programmes 2001 pour les manuels de première et aux programmes 2002 pour les manuels de terminale). Le tableau ci-dessous, qui donne les lieux d'occurrence de l'arbre dans ces manuels) permet de voir immédiatement que son rôle, ses fonctions et sa place n'ont pas évolué, relativement aux programmes précédents, excepté dans l'enseignement de spécialité de TES.

Manuels (2002)	Arbre (Chap. graphes)	Arbre (Chap. probabilités)	Arbre de choix	Arbre pondéré	Arbre de probabilités
Terracher-1ère S		x			
Transmath 1ère ES		x	x		
Déclic - TS			x	x	
Transmath – TS&ES				x	
Terracher TS					x
Transmath TES	x				

Mais, poursuivons notre analyse.

I-2.2.1. L'arbre dans les chapitres concernant le dénombrement et les probabilités

Aucune des expressions du tableau ci-dessus n'apparaît dans les programmes de 1ère S-ES. Il est pourtant question d'arbre dans Terracher (1ère S) et indifféremment d'"arbre" ou d'"arbre de choix" dans Transmath (1ère ES) pour "*envisager certaines techniques graphiques*

[129] Un mémoire de DEA va s'attaquer à cette question dès cette année universitaire au laboratoire Leibniz.

permettant de dénombrer, méthodiquement, les issues d'une expérience aléatoire. Dans le cas d'épreuves répétées, nous dégagerons un principe de comptage basé sur un arbre : le principe multiplicatif" (Terracher - 1ère S – 2001 – p.262). Il y est en particulier question de "*la méthode des arbres*", celle-ci étant présentée comme *économique* et permettant de *mieux comprendre le principe de comptage*. Ainsi, l'arbre est utilisé comme outil de représentation permettant une meilleure compréhension du dénombrement du nombre d'issues d'une expérience, et une aide au calcul.

Dans le BO n°4 d'août 2001[130], il est spécifié que, en terminale ES mais aussi en terminale S (ibid.p.70), ***un arbre de probabilités correctement construit constitue une preuve*** (p.59).
En particulier, **un arbre pondéré est considéré comme un outil de modélisation**.

Voici quelques extraits de programmes récents en rapport avec l'arbre utilisé comme outil de modélisation : *La construction d'un arbre pondéré* ***force à l'analyse de la situation*** (TES, programme 1999), ce qui est encore plus explicite dans les programmes suivants : *on utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux,* ***arbres****, diagrammes …****efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités*** (Term S & ES – prg 2002). Il faut même se limiter dans le choix des exercices.

> *Pour les dénombrements intervenant dans les problèmes, on en restera à des situations résolubles à l'aide d'arbres, de diagrammes ou de combinaisons* (in paragraphe Lois de probabilités – exemples de lois discrètes - Term S&ES - prg 2002)

Dans la partie concernant les probabilités, les termes employés dans les programmes de Terminale sont : arbre, arbre de probabilités, chemin, arc, sommet comme l'atteste cet extrait traitant de la formule des probabilités totales :

> *On explicitera dans le cas général les éléments des représentations graphiques en arbre (…) L'élève pourra, pour répondre à certaines questions, tracer un arbre et donner un résultat utilisant la formule des probabilités totales en ajoutant directement les produits des probabilités des arcs composant les chemins menant à un sommet terminal* (AccPrg en Probabilités Statistiques - TES-S 2002 – p.130)

Ce vocabulaire est repris dans Transmaths (TS – 2002 - p.264) et Terracher (TS – 2002 - p.275), en particulier le mot "chemin". Dans Terracher, in "*la méthode des arbres de probabilités*", la présentation typographique de ce paragraphe fait ressortir les mots *chemins* et *arbre*. Nous avons donc recherché dans les textes liés à ces deux mots, s'il était possible d'en extraire une définition. Un chemin est assimilé à l'intersection de deux évènements : il est composé de *branches*, sur lesquelles une convention est adoptée pour chaque chemin, *nous convenons de placer (…) une probabilité sur la première branche, des probabilités conditionnelles sur les autres*. L'arbre est alors présenté comme l'ensemble de tous les chemins possibles. Il est également spécifié que le déroulement de l'expérience implique que

[130] Dans les extraits de programmes, c'est nous qui soulignons (en gras).

l'arbre est orienté de gauche à droite ou de haut en bas. Les auteurs restent ici sur l'arbre comme outil de représentation d'une expérience.

Transmath a également choisi de présenter ceci sur un exemple où un arbre pondéré est décrit. Il apparaît alors les termes de "nœud, branche, états". Il s'ensuit une généralisation :

> *chaque nœud de l'arbre correspond à un état de l'expérience. Un c**hemin complet** va du départ à une extrémité de l'arbre et représente **l'intersection de tous les évènements** rencontrés sur ce chemin. On confond un chemin avec l'événement qu'il représente.*[131] (Transmath – TS 2002 - p.264)

Les auteurs présentent alors deux règles semblables au principe multiplicatif énoncé en première : *la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin – la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E*. Ceci est cohérent avec l'utilisation des arbres comme outil de représentation et de preuve présentée dans les programmes. Les commentaires des auteurs de manuels à ce sujet vont dans ce sens :

> *Un arbre permet de calculer immédiatement certaines probabilités (…) (Il n'est pas utile, sur une copie, de faire référence à un théorème du cours)* (Transmath – Term ES 2002 - p.279)

Il nous reste à examiner l'usage des termes "*arbres de choix*" et "*arbres pondérés*". Ceux-ci sont présentés dans Déclic (TS) dans un paragraphe intitulé "*des arbres pour dénombrer*" : il n'y a ainsi pas de doute quant à l'utilisation des arbres, les "*arbres de choix*" permettant de *modéliser une expérience* et de pratiquer le *principe multiplicatif* (comme dans Terracher –1ère S ci-dessus), et les "*arbres pondérés*" permettant de ***traduire commodément** les situations d'application de la formule des probabilités totales* (Déclic-TS-2002-p.213), ce conformément aux programmes.

I-2.2.2. L'arbre dans l'introduction à la théorie des graphes : un nom ou un concept ?

La théorie des graphes a fait son entrée dans les programmes 2002, pour les terminales ES - spécialité. Un arbre étant un graphe particulier, un lien va-t-il être fait avec les arbres de dénombrements et de probabilités ?
Il est explicite qu'il n'est pas question de faire un cours magistral sur cette partie du programme, *toute présentation magistrale ou théorique des graphes serait contraire au choix fait ici*. Il n'y a donc pas d'introduction axiomatique de la théorie des graphes. La résolution de problèmes par tâtonnements est privilégiée, ainsi, *l'optique première étant la résolution de problèmes, on insistera plus sur le bon usage des mots que sur leur définition formelle.* Il faut ici comprendre que la résolution de problèmes nécessite l'usage d'un certain vocabulaire

[131] C'est nous qui soulignons (en gras).

spécifique – les manuels proposent un vocabulaire abondant - mais qu'il faut éviter les définitions formelles ; nous retrouvons cet aspect, plus explicite, dans cet extrait de programme :

> *les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple)* (BO HS n°4 (30/08/2001) – TES).

Ceci nous questionne sur l'aspect *formel* des définitions et le fait que les définitions *simples* et *courtes* soient encouragées. Il semble que l'interprétation des auteurs de manuels soit la suivante : il y a de nombreux encarts de "vocabulaire", ceci évite l'usage de l'étiquette "définition". Nous avons également relevé une particularité dans Dimathème : des définitions, étiquetées comme telles, sont données uniquement lorsqu'un théorème leur fait suite. Ainsi, une définition de *graphe eulérien* précède le *Théorème d'Euler* et une définition de *nombre chromatique* précède un théorème portant sur ce type de nombre.
Nous pouvons extraire de ces programmes et des manuels étudiés une conception générale, certainement très répandue, selon laquelle les définitions revêtent un aspect formel, c'est-à-dire qu'elles structurent la présentation d'une théorie et que l'on commence par elles. Il est attendu que dans le cadre exclusif de la résolution de problème, ceci ne soit pas envisagé. En revanche, ce choix laisse une vraie place à des tâches de construction de définitions, ce qui n'est pas suggéré dans les programmes, pas plus qu'il n'est envisagé d'introduire des définitions provisoires des notions abordées (ce que nous aurions pu interpréter en terme de *zéro-définition*).

Dans les documents d'application des programmes de terminale ES, dans la partie intitulée "*les graphes dans l'enseignement de spécialité*", nous trouvons une occurrence du nom "arbre", dans un exemple (l'allumeur de réverbère) où il est proposé de *faire un arbre permettant l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour* (p.115). Ainsi, le terme "arbre" est encore utilisé comme "arbre de probabilités", il ne semble pas question de considérer l'objet mathématique "arbre" comme un graphe particulier. Par ailleurs, les manuels proposent une activité concernant les graphes probabilistes, et ne s'éloignent ainsi pas du domaine des probabilités.

Nous avons recherché des **définitions de "graphe" et "arbre"** dans les manuels. Si l'arbre est un graphe particulier, on peut s'attendre à ce qu'il soit défini après le concept de graphe. Nous n'avons pas trouvé de définition explicite de "graphe" dans les manuels consultés : en effet, dans Transmath, le terme "graphe" est introduit sur un exemple (*le schéma ci-dessus est appelé* ***graphe*** - p.310), de même que dans Dimathème, où il est cependant spécifié : *voici un graphe représenté par des sommets et des arêtes* (p.238), sans que les termes "sommets, arêtes" ne soient définis par ailleurs. Les programmes insistent sur le fait que le travail doit porter sur la résolution de problèmes, et non pas sur les définitions formelles ; ils proposent un

lexique ne comprenant que les notions du programme, où *la plupart des termes de ce lexique correspondent à leur sens intuitif et ne doivent pas faire l'objet de définitions formelles* (AccPrg – TES 2002 - p.116). Il y a une définition de "graphe"[132] dans ce lexique, mais pas de définition d'"arbre".
Un manuel fait exception (le Transmath TES 2002), parce qu'il propose une définition de l'arbre dans un de ses Travaux Dirigés : celui-ci est présenté comme un *graphe particulier*, mais les représentations données correspondent toutes à des *arbres binaires* (c'est-à-dire dont le degré de chaque sommet est égal à 2). Les questions posées dans ce manuel concernent le nombre des sommets, la propriété de connexité, et des conjectures sur les relations entre le nombre de sommets, le nombre de niveaux et le nombre d'arêtes. Après des commentaires de conclusion, vient la définition[133] suivante (correspond à la définition Def4 (combinatoire) vue en I-1) :

> *Il y a d'autres arbres que les arbres du type précédent, utilisés en probabilités. De manière générale,* ***on appelle arbre tout graphe connexe d'ordre* n *dont le nombre d'arêtes est égal à* n-1.** (Transmath – TES 2002 - p.337)

Dans tous ces manuels, aucun exercice ne traitant de l'arbre comme graphe particulier, nous pouvons faire l'hypothèse que la forte connotation de l'objet « arbre » (utilisé exclusivement jusqu'alors en dénombrement et probabilités) fait que **la niche de l'arbre est réduite à celle de « modèle probabiliste » et que le concept d'arbre n'est pas du tout construit.**

I-3. Situations de Construction de Définitions du concept d'arbre

Au chapitre II, nous avons mis en évidence trois conceptions (aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne) opératoires sur des types de problèmes de construction de définition différents, à savoir CLASSIFICATION, MATHEMATISATION/MODELISATION, RESOLUTION DE PROBLEMES.

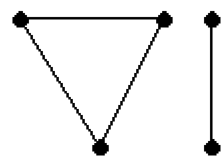
Relativement au concept mathématique d'"arbre", une tâche de CLASSIFICATION peut être par exemple « Définir, à partir d'exemples et de contre-exemples (ou non-exemples) ». Sur un tel type de tâches, la conception aristotélicienne (et la méthode de définition associée, *par genre et différences spécifiques*) est particulièrement opératoire.
Nous avons choisi d'expérimenter et d'étudier une telle tâche, l'analyse et les résultats obtenus font l'objet de la suite de ce chapitre.

Mais avant cela, regardons d'autres types de tâches possibles.

[132] *Un graphe est constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes* (AccPrg-TES-2002-p116).
[133] Nous imputons le terme "définition" à ce commentaire, eu égard à la forme langagière. C'est nous qui soulignons.

Un problème de type MATHEMATISATION/MODELISATION mettant en jeu le concept d'arbre peut revêtir deux aspects.
Il peut s'agir d'une tâche de modélisation où la construction de définition serait nécessaire, c'est-à-dire permettrait la résolution de la question posée. Ceci est le cas des problèmes de recherche de labyrinthes[134] où il y a modélisation du labyrinthe par des arbres (la propriété **CHEMIN** de la définition Def2 est mise en avant). Il ne s'agit pas de travailler au sein de la théorie des graphes mais de modéliser, mathématiser la situation par les arbres, qui possèdent la propriété recherchée (existence d'un unique chemin).
Un second type de tâche consisterait à rechercher une modélisation des arbres naturels (biologiques), c'est-à-dire à rechercher la structure mathématique commune à tous les arbres naturels. Dans cette tâche, qui relève aussi d'une modélisation, définir l'arbre aurait une utilité unificatrice, généralisatrice, et impliquerait en particulier une discussion sur racine, feuille, forêt.
Dans ces deux types de tâches, les conceptions aristotéliciennes et lakatosiennes peuvent être opératoires, ainsi que la conception poppérienne à partir du moment où l'élaboration d'une théorie incluant l'objet mathématique arbre est en jeu.

A l'image de la situation "polyèdres" proposée par Lakatos[135] (1961 & 1984), nous pourrions imaginer une tâche de type RESOLUTION DE PROBLEMES mettant en jeu une formule. Pour l'arbre, la formule pouvant être conjecturée est la suivante : pour n points, il y a (n-1) traits. Il s'agirait alors de caractériser la classe d'objets vérifiant cette formule.
Les objets vérifiant cette formule sont des graphes non connexes (avec des composantes connexes quelconques) ou des arbres.
Les composantes comportant des cycles peuvent être "compensées" par plusieurs composantes de type "arbre".



L'étude du rapport entre le nombre de cycles et le nombre de composantes peut faire ressortir l'intérêt des graphes particuliers que sont les arbres et permettre la construction de différentes définitions, basées sur les propriétés **CONNEXE**, ~~**CYCLE**~~, **CHEMIN**, **[n, n-1]**.
Les conceptions aristotélicienne (pour classifier et rédiger une définition) et lakatosienne (processus de réfutations et de construction de concept) sont ici mobilisables dans la perspective d'une construction de définitions.

134 Construire un labyrinthe où, entre deux points quelconques du labyrinthe, il existe un et un seul chemin.
135 Conjecture de la formule d'Euler à partir de laquelle la classe d'objets polyèdres est à caractériser.

II- La situation expérimentale

II-1. Présentation générale de la SCD

L'arbre est un concept "facile" d'accès par sa représentation {sommets ; arêtes}, la distinction entre ce qui est un arbre et ce qui n'en est pas est non problématique, même si la propriété de connexité est, elle, plus complexe. D'autre part, la connaissance en extension de l'objet ne pose pas question. Enfin, il n'existe pas de définition de l'arbre dans les institutions scolaires du secondaire. Tout ceci fait que le concept d'arbre se prête bien à une tâche de type CLASSIFICATION.

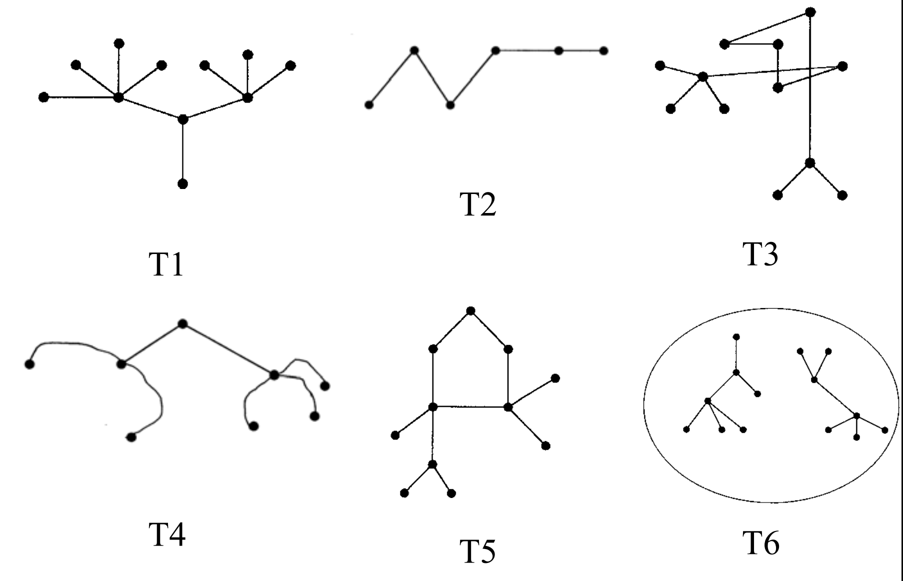
Les choix que nous avons fait pour la situation sont relatifs aux hypothèses suivantes :
- H1 : un nom « neutre » doit être donné pour que l'aspect nominal des définitions soit écarté ;
- H2 : des exemples et contre-exemples bien choisis suffisent pour faire la dévolution de la tâche de définition ;
- H3 : un réinvestissement des définitions construites est nécessaire pour étudier leur validité et leur opérationnalité.

« La simplicité est le sceau de la vérité » disaient les scolastiques. Puisqu'il est raisonnable de commencer par ce qui est simple, la situation contient une première tâche de type « définir, à partir d'exemples et de contre-exemples bien identifiés ».
Bien sûr, l'objet « arbre » n'est pas nommé, il faut donc prévoir, lorsque la tâche est finie, que le gestionnaire-observateur de la situation donne le nom, afin de négocier la seconde tâche, de réinvestissement des définitions construites.
Pour cette seconde tâche, le choix s'est porté sur la recherche et l'écriture d'une preuve mettant en jeu des définitions de l'arbre. Elle doit provoquer un retour sur les définitions construites lors de la première tâche (validations, reconstructions, modifications) et, éventuellement, la construction de nouvelles définitions.

II-2. Description des trois phases de la situation

Première phase : la tâche t_1 – classification à partir d'exemples et contre-exemples identifiés.

L'objet est désigné par le mot « truc », un nom neutre dont la sémantique n'est rattachée à rien.
Les exemples et contre-exemples ont été choisis pour d'une part, permettre un appui sur les propriétés « perceptives » de l'objet mathématique, à savoir connexe et sans cycle et, d'autre part, éviter que des caractéristiques qui n'auraient « rien à voir » avec le concept d'arbre soient induites (nombres de sommets, arêtes courbes ou droites, etc..).



1- comment définiriez-vous l'objet mathématique "truc" sachant que:

T1,T2,T3 et T4

sont des représentations de "truc" et que T5,T6 n'en sont pas ?

Il est prévu que le critère de « fin de la tâche » soit à la charge des étudiants. Dans un premier temps, les étudiants n'ont pas connaissance de la deuxième tâche t_2. La fonctionnalité évoquée de la ou des définitions construites est la communication à des pairs.

Deuxième phase : institutionnalisation du nom "arbre" et de concepts et noms de propriétés nécessaires pour la tâche t_2

Le Gestionnaire-Observateur (noté désormais GO[136]) a pour rôle, dans cette phase, de faire la transition entre la tâche t_1 et la tâche t_2. Pour cela, il doit intervenir avec un double objectif :

- donner le nom mathématique de l'objet "truc" de la tâche t_1 (activité de dénomination) ;
- désigner et institutionnaliser les concepts ou propriétés rencontrés dans la résolution de la tâche t_1 : graphe, sommet, arête, chemin, connexe, sans cycle.

En revanche, aucune synthèse, ni évaluation, ni institutionnalisation des définitions construites lors de la tâche t_1 ne doit être menée.

Troisième phase : tâche t_2 de réinvestissement des définitions construites

Conformément à l'hypothèse H3 ci-dessus, il s'agit de donner une autre fonctionnalité que celle de communication aux définitions produites et d'induire un travail sur la validité de ces définitions. L'énoncé choisi est le suivant :

Soit G un graphe (ensemble de points et de traits reliant ces points) connexe (en un seul morceau). Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

[136] GO : qui est aussi, dans certaines phases, un gentil observateur, neutre mais bienveillant !

II-3. Analyse a priori de la situation

II-3.1. Analyse de la tâche t_1

La tâche consiste en une recherche explicite de définition. Nous faisons l'hypothèse qu'elle est facilement dévoluable. Les définitions peuvent se construire par *genre et différences spécifiques*. Le genre est “graphe” et la recherche de propriétés permettant de différencier “arbre” au sein du genre “graphe” permet de construire une définition du concept mathématique sous-jacent à l'objet représenté. Selon les approches adoptées, *des différences spécifiques* différentes peuvent être mises en avant.

Il y a une **unité dans la représentation** choisie des exemples et contre-exemples, concernant les points pour les sommets et les traits pour les arêtes[137]. Cependant, nous avons fait varier la forme des arêtes, courbes (T4), ou segments de droite (T1, T2, T3), pour induire que « la forme des arêtes n'est pas un élément de caractérisation ». L'orientation des arêtes n'est pas en question ici.

Nous avons proposé quatre exemples et deux contre-exemples **identifiés comme tels** permettant de faire appel aux propriétés « perceptives »[138] de l'objet mathématique évoquées ci-dessus i.e. ~~CYCLE~~ et CONNEXE. Ces deux propriétés sont absentes des deux contre-exemples et ce sont elles qui les différencient des exemples : T5 contient un cycle et T6 contient deux composantes connexes. De plus, il suffit d'enlever à T5 une arête du cycle pour que T5 devienne un arbre ; il suffit d'ajouter une arête entre les deux composantes connexes de T6 pour que T6 soit un arbre.

La définition Def1 est donc favorisée dans cette tâche. De par les contre-exemples, les définitions Def5 (sans cycle et maximal) et Def6 (connexe minimal) sont elles aussi en jeu, même si elles nécessitent d'engager une action sur l'objet représenté et de le modifier (ce qui n'est pas d'usage dans les règles usuelles du contrat didactique).

Par ailleurs, il est possible de rechercher une **relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes**, ce qui aboutirait à une définition telle que Def 3 (~~CYCLE~~, **[n, n-1]**) ou Def4 (CONNEXE, **[n, n-1]**). Cette stratégie est envisageable car les graphes donnés ont un petit nombre de sommets et d'arêtes, mais elle est moins probable que les précédentes, car rien dans l'énoncé de la tâche n'induit la mise en oeuvre d'une technique de dénombrement. Cependant, la classification par dénombrement existe à certains moments dans les pratiques

[137] Donner différentes représentations graphiques des arbres pourraient induire un processus de recherche d'invariants. Ce pourrait être une tâche de modélisation du type MATHEMATISATION/MODELISATION , telle que la question de la structure commune aux arbres naturels.
[138] Perceptives au sens de « accessibles par la perception ». Ceci ne dispense pas d'un travail sur la définition.

scolaires : par exemple, en géométrie, le classement des polygones du plan par le nombre de côtés.

Bien que les définitions de type combinatoire ne soient pas favorisées a priori, elles peuvent être induites par des stratégies liées aux propriétés inductives de l'arbre. Cependant, les définitions de type **INDUCTION** concernées (Def7, Def8, Def9 et Def10), nécessitent de dégager les processus de génération des sommets et des arêtes ; elles sont donc liées à des **actions sur les arbres donnés** et à la construction éventuelle d'autres arbres. Ainsi, la définition Def7 décrit un algorithme de construction d'un arbre par **rajout d'un « sommet pendant »**. Def8 correspond, elle, à une **déconstruction** de l'objet donné. Def10 est la plus complexe : elle consiste à rajouter un sommet et autant d'arêtes qu'il y a de composantes connexes dans la forêt d'arbres donnée.

Enfin, pour la définition Def2 (**CHEMIN**), qui relève d'une démarche de **cheminement**, de déplacement[139] sur l'objet, notre hypothèse est que son émergence est peu probable. Cependant, la pratique probabiliste des arbres et du principe multiplicatif dans les manuels de lycée peu influer.

II-3.2. Analyse de la phase d'institutionnalisation

L'intervention de l'observateur entre les deux tâches a un double objectif. Dans un premier temps, il s'agit de donner le nom mathématique de l'objet travaillé sous le nom de « truc », ainsi que certains noms désignant les concepts nécessaires pour la tâche suivante : un *graphe* est un ensemble de points (nommés *sommets*) et de traits (nommés *arêtes*) reliant ces points, le « truc » est un *arbre*, c'est un graphe particulier, et « un seul morceau » sera désigné par *connexe*. Il s'agit ici d'une tâche collective de **dénomination** pour que "tout le monde parle de la même chose". L'introduction des termes graphe, arbre, sommet, arête, ne semble pas problématique. Le concept désigné par le terme « connexe » est plus complexe, une attention sera portée à son introduction.
Dans un second temps, il s'agit de présenter l'énoncé de la tâche t_2 et de faciliter la dévolution en donnant un exemple d'arbre « couvrant tous les sommets d'un graphe».
Rappelons qu'il est nécessaire, pour garder à la tâche t_2 tout son sens, aucune discussion ne doit être menée sur les productions des étudiants lors de la tâche t_1.

139 Un peu comme le jeu de l'oie … de sommets en sommets.

II-3.3. Analyse de la tâche t_2

Analyse mathématique

La preuve demandée nécessite d'utiliser une ou des définitions de l'arbre. Certaines de ces définitions sont opératoires pour la question posée, d'autres non. Ainsi, il est facile de voir que Def2 (existence d'un unique chemin entre deux sommets quelconques) ne peut opérer que sur des graphes ayant un très petit nombre de sommets et d'arêtes. Il en est de même pour les définitions Def3 et Def4 basées sur le dénombrement des arêtes.
Nous proposons ici deux stratégies de résolution de cette tâche.
Une première preuve, basée sur les définitions Def1 et Def5, consiste à construire un arbre contenu dans le graphe donné. On part d'un sommet quelconque. Ensuite, à chaque étape, on choisit un sommet et on le relie à tous ses sommets voisins non encore « couverts ». On est sûr d'arriver sur tous les sommets, puisque le graphe donné G est connexe, et de ne pas créer de cycle, par la construction même.
Une seconde preuve, utilisant la définition Def6 (un arbre est un graphe connexe minimal), consiste à donner un algorithme de déconstruction du graphe G jusqu'à l'obtention d'un arbre. Le graphe initial étant connexe, soit c'est un arbre, soit il contient au moins un cycle (d'après Def1). Si ce n'est pas un arbre, on peut enlever une ou des arêtes des cycles de G en conservant la connexité. Dès que l'on ne peut plus supprimer d'arêtes, on a un arbre ayant pour sommets ceux du graphe G initial, qui couvre donc bien tous les sommets de G. La définition Def6 permet d'affirmer que l'arbre cherché existe et que c'est le graphe connexe minimal obtenu ainsi à partir de G.
Cette preuve est plus immédiate que la précédente, mais elle peu probable à cause de la propriété de minimalité.
Enfin, les définitions inductives (Def7, Def8, Def9 et Def10) sont, elles aussi, opératoires pour l'obtention de cette preuve, mais elles ne sont pas privilégiées.

Analyse a priori

Dans cette tâche (t_2), les définitions de l'arbre structurent la preuve demandée. Il devrait donc y avoir un retour sur les définitions produites et des questions sur leur validité et sur leur fonctionnalité dans cette preuve.
Nous avons vu que la tâche t_1 pouvait favoriser la construction de la définition Def1. Or celle-ci n'est pas la mieux adaptée pour la résolution de t_2, en particulier pour traiter la connexité. Ainsi, la tâche t_2 peut induire l'émergence de nouvelles définitions. Dans ce cas, la recherche simultanée de la preuve et de la construction d'une nouvelle définition, peut favoriser l'apparition de *proof-generated definitions*. Il restera à déterminer, lors de l'analyse des protocoles, si celles-ci sont reconnues par les étudiants comme de nouvelles définitions.
La construction effective de la preuve constitue en soi une validation des définitions construites lors de la tâche t_1. Comme nous l'avons précisé ci-dessus, l'écriture de cette

preuve est plus ou moins aisée suivant la définition de l'arbre utilisée. Différents cas peuvent se produire.
Les étudiants peuvent disposer d'une définition de l'arbre inachevée, ou incomplète, voire fausse : la tâche de "preuve" va apporter des rétroactions et des critères de validation sur cette définition. C'est à cette occasion que nous pourrions observer des *proof-generated definitions*.
Il se peut également que les étudiants disposent d'une "bonne" définition de l'arbre c'est-à-dire une propriété caractéristique adaptée aux exemples et contre-exemples et opératoire pour la preuve, auquel cas la tâche t_2 constituera une simple validation.
Le dernier cas à considérer est celui où les étudiants possèdent une définition mathématiquement correcte, mais ne parviennent pas à traiter la tâche t_2. Exception faite de difficultés liées à la simple rédaction d'une preuve, nous espérons alors quand même recueillir des éléments sur l'utilisation de cette « bonne » définition, voire sur la compréhension du concept d'arbre. De plus, une reconstruction de définition pourrait également être observée dans ce cas.

II-3.4. Organisation de la situation globale

Cette situation a été expérimentée avec des étudiants de première année d'université, travaillant en groupes de deux ou trois. **Le travail en groupes** est fondamental dans cette situation, pour deux raisons.
Tout d'abord, les situations de « construction de définitions » relèvent d'un type de tâches qui est absent des institutions didactiques usuelles : il est donc nécessaire d'organiser des interactions, autant pour favoriser la dévolution de la situation auprès des étudiants que pour recueillir des données pour notre recherche.
De plus, le travail en groupes augmente les chances de voir se construire différentes définitions lors de la première tâche : des approches différentes peuvent se développer, des contradictions et/ou des similitudes dans les exposés de ces approches peuvent alors être examinées par les étudiants.
Le travail en groupes est donc pour nous une condition pour que des phases adidactiques pour le concept mathématique puissent vivre.

Un GO (gestionnaire-observateur) est présent. Ses interventions peuvent être des explications de base sur la compréhension des tâches, des sollicitations sur l'écriture de la définition demandée. De plus, le GO s'autorise de répondre à certaines questions que les étudiants pourraient poser, par exemple, évoquer une situation de communication si la question « pourquoi définit-on ? » est posée. Mais il ne s'agit pas de dire quel est l'objet mathématique "truc", ni de valider les définitions produites par les étudiants dans la tâche t_1, pas plus que d'institutionnaliser celles-ci lors de la deuxième phase. Nous avons également prévu que le GO intervienne si la situation "se bloque", notamment en donnant d'autres exemples et/ou contre-exemples, voire en demandant quels peuvent être les plus petits arbres /

non-arbres. Ce dernier élément peut être également proposé à des étudiants ayant effectivement produit une définition afin de poursuivre l'étude mathématique des objets "trucs".

II-3.5. Analyse a priori du point de vue de la construction de définitions

Comme nous l'avons explicité précédemment, cette situation met en jeu trois aspects de la définition : la caractérisation d'un objet mathématique, l'énoncé définissant (dans la tâche t_1) et l'énoncé opératoire (dans la tâche t_2).
Nous faisons l'hypothèse que nous allons pouvoir inférer les conceptions des étudiants sur le concept de « définition » à partir à la fois des stratégies qu'ils développent dans le travail en groupe et de leurs productions finales. Deux processus nous intéressent particulièrement, celui, dans la tâche $t_{1,}$ permettant la construction de définitions et celui, dans la tâche $t_{2,}$ concernant la validation des définitions produites en $t_{1,}$ ou la construction d'autres définitions. Pour décrire et analyser ces processus, nous choisirons en particulier les modèles didactiques d'opérateur et contrôle.
D'après les analyses précédentes, le processus de définition s'articule ici autour de trois pôles : classification (Aristote) et généralisation – ou plutôt « d'élargissement » de définitions - (Lakatos) dans la tâche t_1, preuve (Lakatos) dans la tâche t_2.

Construction de définitions dans la tâche t_1

Rappelons que la tâche t_1 relève du type CLASSIFICATION, sur laquelle la conception aristotélicienne est opératoire.
La **méthode de définition par *genre et différences spécifiques*** permet en effet de déterminer - voire de nommer - un genre (graphe) puis de rechercher des propriétés caractéristiques de l'arbre, celui-ci étant considéré comme un graphe particulier. Les exemples et contre-exemples donnés favorisent ce processus, mais ne le mène pas forcément à son terme. Il nous faut donc rechercher, dans la conception aristotélicienne mais aussi dans la conception lakatosienne où une démarche de généralisation peut être à l'œuvre, des **opérateurs et des contrôles langagiers et logiques** pouvant intervenir dans ce processus.
Rappelons que l'aspect nominal a été écarté. Les **opérateurs langagiers** qui peuvent être mobilisés ici par les étudiants seront fortement liés à la **fonction de communication** de la définition : il s'agira de pouvoir expliquer l'objet « truc » à un tiers. Ces mêmes opérateurs peuvent également jouer le rôle de **contrôles**.
Des **opérateurs logiques** (Aristote) peuvent être mobilisés pour proscrire la redondance dans l'énoncé ou l'utilisation de mots non encore définis. Ils peuvent induire une définition de "graphe". Ils peuvent eux aussi agir également en qualité de **contrôles**.

En revanche, nous faisons l'hypothèse que la question de l'existence de l'objet à définir ne se posera pas (des représentations de l'objet étant données) : de même, la question de l'équivalence entre le nom et un énoncé définissant n'est pas en jeu ici.
La tâche t_1, mettant l'accent sur la caractérisation de l'objet mathématique représenté, peut induire, par elle-même, la **génération de nouveaux exemples et contre-exemples** (opérateur lakatosien) : par exemple, on construit de nouveaux « trucs » ou de nouveaux « non trucs », pour tester si une propriété repérée sur les exemples donnés est bien un invariant dans la définition que l'on met en place.
Ainsi, les opérateurs a priori mobilisables dans la tâche t_1 sont nombreux : définition par *genre et différences spécifiques*, opérateurs langagiers ou logiques, opérateurs liés à fonction de communication de la définition, utilisation et de la génération d'exemples et contre-exemples. Ceci est pour nous significatif de la richesse de la tâche.

Construction de définitions dans la tâche t_2

Notre question est la suivante : est-il possible de voir émerger un processus "à la Lakatos" lors de la résolution de cette tâche, même si elle n'est pas de type RESOLUTION DE PROBLEMES et même si l'objet est peu problématique.
Si une reconstruction de définitions s'amorce lors de la recherche de la preuve, des opérateurs et contrôles lakatosiens peuvent être en oeuvre : la **fonction de preuve** de la définition, liée à une dialectique entre preuve, définitions et construction de définitions (ce que Lakatos appelle *catalyse*) et la **production de contre-exemples** (réfutations).

II-3.6. Le milieu adidactique pour cette situation de construction de définitions

Dévolution des tâches t_1 et t_2

Nous faisons l'hypothèse que cette situation comporte effectivement un milieu adidactique à la fois pour le concept de définition et pour le concept d'arbre. Justifions cette hypothèse.
Pour la tâche t_1, le contrat didactique usuel permet de décoder ainsi les implicites de l'énoncé : il est **possible** de construire une définition de l'objet donné et les informations fournies sont suffisantes. L'objet à définir est un objet **mathématique** et les exemples et contre-exemples sont bien identifiés. L'objectif de la tâche est bien identifiable : il faut **produire une définition**.
L'analyse de la tâche menée ci-dessus montre qu'il existe, **pour t_1**, une **stratégie de base** qui relève de la **connaissance en extension** de l'objet à définir : en effet, les exemples et contre-exemples permettent de différencier ceux qui sont des « trucs » de ceux qui n'en sont pas. Ainsi, une stratégie de base peut consister en une **description** « naturelle » de l'objet et

conduire à l'énoncé « un truc est sans circuit, en un seul morceau », définition « correcte » pour un mathématicien (qui peut considérer que le problème est terminé)[140].
Nous faisons cependant l'hypothèse que cet énoncé ne sera pas forcément accepté par les étudiants comme une définition achevée; en effet, les conceptions d'élèves et d'enseignants décrites au chapitre précédent, montrent qu'une « bonne » définition doit être minimale et respecter certaines normes langagières. Ainsi, l'énoncé « sans circuit, en un seul morceau » peut surgir très rapidement, mais le travail de définition ne pas s'arrêter là. Rappelons que le critère de fin de la tâche appartient aux étudiants : leur exigence d'un énoncé élaboré conduirait alors à une étude suffisante de l'objet mathématique.
Cependant, si l'énoncé « sans circuit, en un seul morceau » est accepté tel quel, la tâche t_2 devrait permettre d'induire le travail de formalisation non réalisé dans t_1.

Les rétroactions possibles du milieu adidactique

Nous avons vu que la stratégie de base peut se révéler insuffisante au regard des conceptions usuelles sur les définitions en mathématiques. Nous pouvons anticiper d'une **stratégie optimale** consistant à **définir en compréhension** (c'est-à-dire à faire état de différentes caractérisations de l'objet mathématique), mais aussi prenant en compte certains invariants de ce qu'est une « bonne » définition, tels que : minimale (d'où la recherche d'une condition nécessaire et suffisante), dans un langage précis, etc.
En ce qui concerne la dévolution de t_2, nous avons montré que l'idée de la preuve est facilement **accessible**, mais que la rédaction de celle-ci est problématique du fait du traitement nécessaire du concept de connexité. Les stratégies adoptées ici par les étudiants dépendront de leur production dans la tâche t_1, comme nous l'avons précisé dans nos analyses a priori.

Le milieu adidactique pour la validation

Dans la tâche t_1, si la définition est vue comme un **énoncé,** la validation peut être sous-tendue par les contrôles langagiers et logiques que nous avons déjà évoqués, présents chez les étudiants. Lorsque la définition est considérée comme une **caractérisation** de l'objet mathématique, la validation peut provenir de l'objet mathématique lui-même, mais aussi des conceptions des étudiants à l'œuvre dans cette situation de définition. Les rétroactions apportées par les exemples et contre-exemples, consistent en une vérification des définitions produites voire en une validation de celles-ci. Mais **cette validation a une portée limitée** car elle ne permet que de confirmer que la définition comprend les exemples et exclut les contre-exemples donnés.

[140] Nous avons observé ceci lors de présentation de notre travail dans des conférences internationales : pour les mathématiciens présents, l'énoncé “sans circuit, en un seul morceau” représentait effectivement une définition mathématiquement correcte de l'arbre.

Dans la tâche t_2, les rétroactions apportées concernent la preuve c'est-à-dire la réalisation effective ou non de celle-ci. Deux rétroactions sont alors possibles : il peut apparaître une rétroaction de la preuve sur elle-même ou une rétroaction de la **preuve** sur les définitions produites en t_1.
Enfin, la négociation de la situation en adidactique est basée sur le travail en groupes. Cette « organisation adidactique » est indispensable, elle doit favoriser l'émergence de plusieurs points de vue et apporter, dans le milieu adidactique, les rétroactions et les critères de validation nécessaires, aussi bien sur le concept de définition que sur le concept mathématique en jeu.

III- Analyse de l'expérimentation

III-1. Le public et les questions pour notre analyse

Trois groupes d'étudiants de première année d'université ont participé à cette expérimentation, hors classe. Ces étudiants sont issus des filières Economie-Gestion et MIAS. Pour l'analyse, les groupes sont nommés par les initiales des prénoms des étudiants : il y a ainsi le groupe F/A (Fabien-Abdelrani), le groupe A/T/V (Angélique-Thibault-Vincent) et le groupe A/Y (Arnaud-Yohann). Lorsque nous reprenons uniquement une phrase de protocole, dans le corps de ce texte, nous mettons en caractère gras l'initiale de l'étudiant à qui appartient cette phrase.

L'analyse de l'expérimentation a pour objectif de répondre aux questions suivantes.
La première question est celle de la **dévolution de la situation** : la tâche de « construction de définitions » a-t-elle été prise en charge par les étudiants, et si oui, à quel niveau se situent les définitions construites (définitions *nominales*, *zéro-définitions*, *proof-generated definitions* etc.) ?
La deuxième question concerne les **conceptions** de ces étudiants sur la « définition en mathématiques » révélées dans cette situation, et les **fonctions attribuées aux définitions** par les étudiants. Nous rechercherons en particulier si ces conceptions évoluent au cours de la situation.
La troisième question concerne la **construction du concept mathématique** dans la situation Pour repérer s'il y a eu construction du concept d'arbre, nous étudierons les définitions construites, mais aussi le processus qui a permis d'aboutir à ces définitions.

Nous allons présenter une analyse de l' « essentiel » du travail de chacun des trois groupes, en spécifiant les questionnements mathématiques des étudiants, ainsi que leurs questionnements relatifs au concept de définition. Nous dégagerons ensuite les processus de construction de définitions grâce aux éléments théoriques dont nous disposons. Puis, nous spécifierons les conceptions des étudiants que nous avons pu inférer, sur le concept de définition en mathématiques.

III-2. Premiers résultats globaux

Un premier résultat est **que la dévolution de la situation de « construction de définition » s'est faite dans les trois groupes**, même si la négociation des tâches s'est passée différemment d'un groupe à l'autre. Nous signifions par là que tous les groupes ont construit des définitions significatives par rapport au concept d'arbre, et que, de plus, tous les ont réutilisées dans la seconde tâche. Signalons aussi que tous ont travaillé avec l'objet « truc » sans que le nom donné ne les perturbe (« donner un nom » n'aurait-il donc pas une grande signification dans l'activité mathématique ?). Enfin, la fonction de communication attribuée à la recherche de définition dans la première tâche a suffit aux étudiants comme raison de définir.

Un deuxième résultat est que **les étudiants ont tous accepté, dans leur travail, la cohabitation de plusieurs définitions**, pendant leur élaboration comme pendant leur utilisation, et aussi comme produits finaux, même si l'un des groupes a débattu du choix d'une définition unique avec des propriétés caractéristiques. Ce constat nous parait significatif relativement aux pratiques didactiques usuelles et aux conceptions inférées chez des enseignants, sur la nécessité de donner une unique « définition » d'un concept et de nommer les caractérisations équivalentes par un autre nom.

Un troisième résultat est que la deuxième phase s'est déroulée conformément à nos attentes : les noms de graphe, arbre, connexe, sans cycle ont été institutionnalisés collectivement. De plus, il a été nécessaire d'expliciter la consigne de la seconde tâche (surtout dans le groupe F/A), en particulier le terme "couvrant" : pour cela, le GO a donné un exemple d'arbre couvrant, sans que celui-ci ne soit tracé devant les étudiants pour ne pas induire une preuve inductive.

Nous allons maintenant analyser plus précisément les travaux et les productions de chacun des groupes.

III-3. Analyse des productions

Nous avons étiqueté dans les protocoles des énoncés s'apparentant à des *zéro-définitions*, voire à une *proof-generated definition*, en conformité avec l'utilisation de ces termes chez Lakatos. Ces *zéro-définitions* peuvent ne pas être perçues par les étudiants comme des

définitions provisoires, mais plutôt comme des “idées”. Repérer ces *zéro-définitions* nous a permis de souligner la progression des étudiants vers la production de définitions.
Les extraits de protocoles sont en retrait et en italique, ou bien, lorsqu’ils sont dans une phrase, en italique avec une référence à la ligne du protocole.

III-3.1. Groupe F/A (Fabien et Abdelrani)

C’est dans ce groupe que la phase de dévolution a été la plus longue, les questions étant sur l’utilité de la tâche et le côté abstrait des objets. Finalement, le travail de ce groupe a été très productif. Nous indiquons dans le tableau ci-dessous le nombre de définitions de différents types produites ou travaillées les tâches dans lesquelles elles ont émergées.

Définitions produites	Définitions reconnues	*Zéro-définitions*	*Zéro-définitions finalisées*	*Proof-generated definitions*
2 (t_1) + 1 (t_2)	3	1 (t_1)	0 (t_1)	1 (t_2)

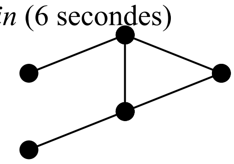
• Définitions produites en t_1

Le groupe F/A a produit une *zéro-définition* qui n’a pas aboutie et deux définitions, reconnues comme telles, associées respectivement aux définitions Def1 (**CONNEXE**, ~~**CYCLE**)~~ et Def2 (**CHEMIN**). Explicitons cela.
Dans un premier temps, les représentations données n’ont pas induit spontanément la recherche de propriétés, la non-familiarité d’un travail sur *des points et des traits* pouvant en être la cause. La dévolution a donc été négociée par le GO.
La production d’une *zéro-définition* a été laborieuse, les étudiants ayant des difficultés à exprimer les propriétés sous-jacentes et à repérer celles qui étaient pertinentes. Il a finalement été reconnu les éléments de définition de l’objet « truc » suivants :

> Le truc c’est *des points et des traits avec un trait central* (F/A-32s)
> T5 (contre-exemple) est le seul *qui est fermé* (F/A-78)
> Dans les trucs, *il y a au moins un trait qui touche tous les points*, (…) *parce que là, en fait, quelque part, si l’ensemble c’est pas un truc, c’est parce qu’ils se touchent pas, voilà.* (F/A-92)

Ce travail leur a permis finalement d’exprimer une **première définition** qui relève clairement de Def1 : des points reliés par des traits en un morceau et sans circuit, comme le montre l’extrait suivant :

99	F	:	*Ben, un truc, c’est une suite de points qui sont reliés par des traits.*
100	A	:	*Qui font un morceau.*
101	GO	:	*Un morceau.* (8 secondes)
102	A	:	*Et qui font pas de … une sorte de cercle…enfin* (6 secondes)
103	F	:	*Par exemple, si je dessine ça, c’est un truc ?* (il dessine)
104	A	:	*Non, non*



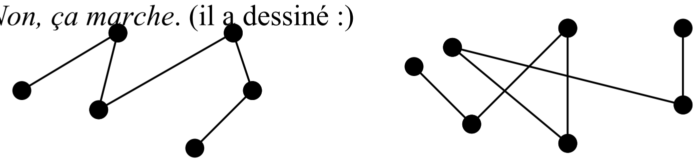
Cette définition a évoluée et est devenue :

> *une définition générale, c'est un ensemble, un ensemble de points reliés par des traits, mais ça vérifie certaines hypothèses. C'est qu'il y ait pas de circuit fermé et faut pas qu'il y ait, faut que le truc reste en un morceau* (F/A-175)

Il s'agit toujours de **Def1**, mais dans cette seconde formulation, le **genre** (*ensemble de points reliés par des traits*) est mis en évidence, ce qui n'était pas le cas dans la première formulation. Ainsi, le concept d'arbre peut se construire comme un graphe particulier.

Les limites de la validité de cette définition sont clairement posées : la définition produite est conforme aux exemples et contre-exemples donnés, mais il a pu y avoir « *des trucs qui nous ont échappé »*. La question de la reconnaissance de l'objet à partir de cette définition est aussi posée : est-ce assez précis, est ce suffisant ? (F/A-169,171). Ceci les amène à tester la définition sur de nouveaux exemples et de voir en particulier qu'il peut y avoir plus que deux arêtes qui partent d'un sommet.

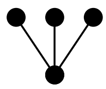
187 F : *Non, ça marche*. (il a dessiné :)



(10 secondes)

188 GO : *Alors, là, à chaque fois, tu as tracé des trucs où il n'y avait qu'un trait entre deux points ?*

189 F : *Oui. On peut aussi faire ça*



190 GO : *Voilà. On peut faire ça, oui. Est-ce que … tu vois, tu as rajouté des trucs … tu as dit : oui, on peut faire ça. Est-ce que la définition, elle interdit de faire ça, ou pas ?*

191 F : *C'est pas interdit … mais c'est pas obligatoire.*

192 A : *Elle en parle pas.*

193 F : *On peut en faire mention. Parce que, en fait, dans le T2, on voit bien qu'il y a pas d'embranchement.*

194 GO : *Est-ce que c'est nécessaire de le dire, ou pas ?*

195 F : *Non.*

La phase suivante du travail va être centrée sur la **recherche d'une définition de « circuit ».** Il s'agit d'étudier comment dissocier les sommets d'un cycle du reste du graphe, la propriété-en-acte sous jacente étant que « un sous-graphe est un circuit si tout sommet est de degré 2 » (F/A-208 à 267).

Cette phase aboutit à l**a seconde définition** (**Def2, CHEMIN)** : il existe *un seul chemin pour relier deux points* (F/A-302s), après avoir remarqué qu'une fois *la boucle cassée* dans T5, il n'y a plus qu'un chemin pour aller d'un point à un autre.

Cette définition marque un saut pour les étudiants : ils sont très “contents” de l’avoir obtenue car elle s’applique aisément sur tous les exemples et contre-exemples donnés et générés.

• Une amorce de *proof-generated definition* dans la résolution de la tâche t_2

La dévolution de la tâche n’a pas été facile : il a fallu revenir sur les termes nouvellement introduits et expliquer la consigne. Ensuite, la première stratégie pour élaborer la preuve demandée a consisté à *casser les boucles* dans le graphe connexe pour obtenir un arbre (T5 est utilisé comme exemple). Ceci leur semble relativement simple, perceptivement en tout cas.
La demande du GO d’une preuve – et non pas d’une simple idée de celle-ci – les engage dans un nouveau processus de définition. Les étudiants tentent de verbaliser le fait que la preuve découle de la définition :

> *c’est la définition qui démontre le truc* (**F**/A-524), *la démonstration, elle vient de la définition, non ?* (**F**/A-549).

L’utilisation lexicale des mots graphe et arbre pose question : les mots se confondent, et les concepts peut-être aussi.

> *Ce qui est pénible, c’est que dans le graphe, il y a arbre. Enfin, un autre mot. Il y a graphe mais sans l’arbre (…) Parce que quand on parle du graphe, on parle d’arbre aussi.* (F/**A**-564).

On peut faire l’hypothèse que la construction du concept d’arbre est encore « loin ». Ceci étant, la recherche de la preuve sur des exemples de graphes connexes à faible nombre de sommets, en cassant des cycles, les conduit expérimentalement à la propriété **[n, n-1],** sous-tendue par l’analogie avec le comptage des piquets et des intervalles dans les barrières.

Nous avons ici un début de *proof-generated definition* au sens où nous l’avons défini au chapitre II. La connexité est restée implicite, mais il est vrai que le graphe en jeu dans t_2 est déclaré connexe. L’aboutissement de cette *proof-generated definition* est une nouvelle définition de type **[n, n-1]** et **CONNEXE**, même si la connexité est restée implicite. L’intérêt de cette définition pour les étudiants est d’être *sans phrase*.

A la demande du GO, les étudiants argumentent sur le fait qu’il est possible d’écrire une définition à partir de cette propriété : ils la mettent en relation avec l’existence d’un cycle :

> *dans une boucle, il y a au moins autant de traits que de points (…) Donc, à partir du moment où on écrit ça, ça veut dire qu’il faut qu’il y ait un trait de moins que le nombre de points et il n’y a plus de boucle possible. On ne pourra jamais fermer quoique ce soit* (F/**A**-784).

et plus loin,

> *je prends un graphe à n sommets. C'est un graphe. Je ne sais pas encore si c'est un arbre. Seulement, je dis que je vais mettre (n-1) traits pour tous les relier et j'obtiens forcément un* arbre (**F**/A-888).

Et l'autre étudiant ajoute que *s'il n'y en a pas (n-1), c'est en deux morceaux* (F/**A**-891).

Par ailleurs, d'autres définitions auraient pu émerger au regard de quelques brefs extraits de protocoles : il y a en effet, un début de définition lorsque les étudiants ajoutent à un arbre des sommets pendants (F/A-190s) et la définition Def6 (connexe minimal) est implicite (F/A-628 et 835), mais il ne s'agit que de la manipulation d'objets, sans verbalisation.

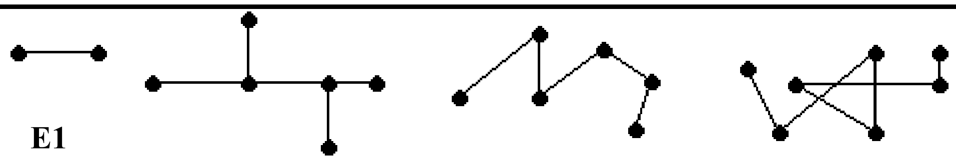
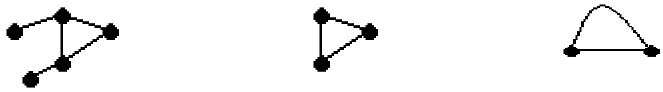
Finalement, la *proof-generated definition* n'a pas débouché véritablement sur une définition du fait de la non-maîtrise du concept de connexité, en particulier, les étudiants utilisent ce mot mais n'ont pas mis en relation l'existence du chemin avec la connexité.

• Analyse du processus de construction de définition

Dans la tâche t_1, le processus en oeuvre est de type aristotélicien : définition par *genre et différences spécifiques*, la recherche des différences spécifiques étant privilégiée. Le genre n'apparaît explicitement que dans la seconde formulation de leur première définition, mais ne fait pas l'objet d'une dénomination.

Les opérateurs utilisés sont de différents types : quelques critères langagiers (recherche d'une définition *simple*), **l'utilisation des exemples et contre-exemples** donnés (pour rechercher des caractéristiques, valider une définition produite), la **génération** de nouveaux exemples et contre-exemples, et des références d'ordre logique en terme de **condition suffisante** et condition **nécessaire**. Celles-ci sont observées séparément : la recherche d'une condition suffisante pour la caractérisation de l'objet est centrale dans les préoccupations des étudiants et la recherche de ce qui est nécessaire dans une définition relève d'une autre préoccupation, en relation avec les fonctions attribuées à une définition, à savoir **communication**, **faire un dessin**, **compréhension**. Ces **fonctions**, associées à des critères langagiers, constituent une part importante des **contrôles** : relativement à la fonction de communication, la définition est un énoncé *pas compliqué, simple* (contrôle sur la seconde formulation de la première définition). La fonction 'faire un dessin' ne leur semble a priori pas fondamentale pour une définition. La seconde définition est un énoncé *plus court*. Les étudiants utilisent également comme contrôles des exemples et contre-exemples produits.

Enfin, comme, pour nous, la production d'autres exemples ou contre-exemples est significative d'un travail sur le concept, nous le reproduisons tous ci-dessous. Ceux générés dans ce groupe sont "simples", linéaires et proches de ceux qui sont donnés, leur fonction essentielle étant une **fonction de validation des définitions produites**. Les contre-exemples produits viennent à la suite d'une demande du GO de recherche des plus petits non-arbres. L'absence de production de contre-exemples de graphe non connexe témoigne de la non-problématisation de la connexité.

4 exemples générés	 **E1** E2 E3(test de la définition) E4 (idem)
3 contre-exemples générés	 **C1** **C2** **C3**

Dans la tâche **t_2**, nous n'avons pas relevé d'opérateurs et de contrôles significatifs dans cette phase, à l'image de ceux décrits précédemment.

III-3.2. Groupe A/T/V

Les étudiants se rallient au fait qu'ils disposent de suffisamment d'éléments pour travailler (c'est-à-dire de suffisamment d'informations pour définir) : *l'ennui, c'est que volontairement, ils ne nous ont pas donné assez ...* (A/T/**V**-57), *on n'a pas assez de données* (A/T/**V**-94) mais *je pense qu'on a quand même pas mal d'informations* (A/**T**/V-101).

Définitions produites	Définitions reconnues	*Zéro-définitions*	*Zéro-définitions* finalisées	*Proof-generated definitions*
4 (t_1)	2	2 (t_1)	2 (t_1)	0

- **Définitions produites en t_1**

Ce groupe a produit deux *zéro-définitions* qui ont abouties sur deux définitions, reconnues comme telles.
La première *zéro-définition* est la suivante : *des points reliés entre eux, sans forme géométrique fermée, et pas deux formes géométriques* (A/T/V-36s). Elle a conduit à la formulation d'une **première définition** *plusieurs points reliés entre eux, mais sans jamais former une forme géométrique fermée, un seul morceau* (A/T/V-79) ce qui correspond à la définition **Def1**.
La seconde *zéro-définition* est de nature inductive : *truc c'est une racine qui est reliée à un certain nombre de trucs* (A/T/V-52). Elle débouche sur la **seconde définition** *un truc est un point relié à un ou plusieurs trucs* (A/T/V-76), ce qui correspond à la définition **Def10**. Dans la construction de cette définition inductive, les étudiants ont débattu de l'objet « vide », pour

déterminer quel était le plus petit arbre ; le « vide » a semblé à un moment être écarté de la définition, par convention :

432 A : *Moi, je pense que truc peut être vide ou infini.*
433 T : *Regarde : si je te donnes la définition … un truc, c'est : vide ou une unité reliée à des trucs. Donc, le truc le plus petit, c'est le vide ; le suivant, c'est un, tout seul et puis après tu en as des plus grands, voire des infinis. Si je dis maintenant un truc, c'est une unité ou une unité reliée à des trucs, à un ou plusieurs trucs : le plus petit, ce sera l'unité ; le deuxième, ce sera déjà un truc un peu plus compliqué (il dessine) et puis les suivants après ils ont plein de branches. Finalement, c'est … puisqu'on n'a pas d'exemples de savoir quel est le plus petit objet ici, on peut* ***prendre une convention****, mais on ne peut pas le décider à l'avance. Ou bien on peut dire que le plus petit, c'est une unité.*
434 A : *Mais à l'aide de ces représentations,* ***c'est à nous de décider*** *oui ou non. Il y a rien là-dedans qui nous dit …*
435 V : *Je pense qu'il faut essayer d'élargir …*

Malgré de nombreuses autres opportunités de définition, les étudiants ne retiendront que la seconde définition c'est-à-dire **Def10**, qui est passée par une formulation intermédiaire à cause d'une discussion sur "vide"[141], est-ce un arbre : *soit le vide, soit une unité reliée à un ou plusieurs autres trucs / un certain nombre d'objets reliés à d'autres objets à l'aide de liaisons, mais qui ne forment pas de polygones fermés* **Def10 & ~~CYCLE~~** (A/T/V-499s)
La formulation définitive retenue est *un truc, c'est un objet seul ou un objet relié à un ou plusieurs trucs* :

642 T : *Donc un truc, c'est un objet seul, ou …*
643 A : *Un objet relié à un ou plusieurs trucs.*
644 T : *Un objet relié à un ou plusieurs trucs.*
645 A : *Mais ne formant jamais de polygones fermés.*
646 T : *A un ou plusieurs autres trucs, alors ?*
647 V : *Oui, autres.*
648 T : *Oui, ou trucs séparés, je sais pas comment on peut dire ça.*
649 GO : *Donc votre définition ?*
650 T : *On en a un mais qui peut se finir sur un objet tout seul. Et dans ce cas-là, on exclut le cas du truc vide.*
651 A : *Oui, puisque tu le définis comme un objet.*
652 T : *Donc le plus petit truc qu'on puisse trouver, c'est un objet seul.*

Il apparaît pour ces étudiants, surtout Angélique, qu'**une seule définition suffit**, le reste n'est que propriétés. Le GO intervient en parlant de la possibilité d'avoir plusieurs définitions :

677 GO : *Ce que vous proposez, ça définit ce qu'on appelle des trucs. Ce qu'on peut vous proposer c'est éventuellement de définir le même objet, pas un objet plus restreint comme dit Vincent autrement, avec des éléments que vous avez dits au début, sur les courbes fermées …*
678 A : *Ça va être la même chose.*
679 V : ***Ça va être inclus dans la première définition****.*

[141] Cette discussion provient du fait que pour T, l'ensemble vide est bien un ensemble et que "vide" n'est pas pareil que "rien".

680 GO : *Ça va être le même objet. Il peut y avoir plusieurs définitions.*
681 A : ***J'ai l'impression de dire la même chose*.**
682 V : *J'ai l'impression qu'on a fini le travail. Et qu'on revient dessus sans cesse en rabâchant. Chaque fois on pourrait dire : oui, mais notre définition d'avant elle correspond.*
687 A : *C'est donner des **propriétés** en fait. Finalement. **C'est plus des définitions, c'est des propriétés pour moi.***

La première définition est alors également retenue, mais comme secondaire, par la formulation suivante : *des points reliés par des traits, tels qu'on trouve pas d'enchaînement cyclique de points … de forme fermée de points. Qui constitue une seule entité* (A/T/V-750s).

Deux autres définitions potentielles n'ont pas été retenues spontanément comme telles par les étudiants. Une possible troisième définition apparaît dans l'extrait suivant : elle correspond à la définition inductive **Def7** :

171 T : *Donc … De toute façon, si j'étais quelqu'un qui sait pas ce que c'est qu'un truc, je commencerais par un point … au moins un, ou plusieurs. Je pourrais me donner un ensemble de points. C'est un point et tu me dirais de le relier à quoi ?*
172 A : *A un ou plusieurs autres points à l'aide de traits.*

Une quatrième définition potentielle émerge et en réfère à la définition **Def2** :

695 T : *Et est-ce qu'on pourrait pas parler de chemin ? Parce que ça nous aiderait peut-être à définir, je sais pas. Si on dis ça et ça pour faire le T6. Bon, il existe aucun chemin entre ce point et ce point. Donc, c'est pas un truc.*
696 A : *Oui, mais il existe aucun chemin attends, entre … ah si oui, il existe tout le temps.*
697 T : *Même en te forçant, tu peux vraiment faire …*
698 A : *S'il existe un chemin entre chaque point pris deux par deux, en fait. Il faut que quand tu prennes deux points au hasard, il faut qu'il y ait tout le temps un chemin.*
699 T : *Les points sont reliés deux à deux par un chemin continu. Donc première règle : tous les points sont … on peut les relier deux à deux par un chemin.*
700 A : *Voilà. Ce qui implique …*
701 V : *Il faut qu'il y ait qu'un seul chemin possible pour aller d'un point à un autre et ça nous enlève notre …*

Le GO a négocié le statut de définition pour cet énoncé avec les étudiants.

Ceci montre la richesse mathématique des échanges. Nous pouvons affirmer que les différents points de vue adoptés par les trois étudiants de ce groupe ont favorisé l'émergence de multiples définitions : Angélique est sur la définition par *genre et différences spécifiques* et propose la première définition, Thibault est sur un point de vue inductif d'où la seconde définition, et Vincent tente de faire des liens entre les points de vue d'Angélique et Thibault. Ces deux définitions potentielles ne sont pas apparues explicitement sous l'intitulé "définition" car les étudiants n'étaient pas prêts à accepter plusieurs définitions.

• Définitions produites en t_2

Dans la mesure où deux définitions (Def1 et Def10) avaient été produites dans t_1, nous espérions voir les étudiants utiliser l'une d'entre elles pour rédiger la preuve. Mais ils ont construit une preuve en n'utilisant aucune de ces deux définitions, ni pour rédiger la preuve elle-même, ni pour vérifier qu'ils obtenaient effectivement un arbre.
Dans la résolution de la tâche t_2, les premières réflexions de ces étudiants décrivent une idée naturelle de la preuve mais ne font pas explicitement référence aux définitions données ci-dessus :

800	T	: *Ça revient à* ***enlever des chemins inutiles*** *... oui ... oui peut-être ... oui.*
801	V	: *C'est-à-dire en fait, on n'a qu'à enlever tout ce qui relie, tout ce qui permet de faire d'autres chemins.*
(…)		
809	A	: *Mais il n'y en a pas. Puisqu'on a décidé* ***pas de forme cyclique****.*

Thibault présente plusieurs façons de démontrer : construire l'arbre ou faire une preuve par l'absurde voire par récurrence (A/**T**/V-826). Il déclare même qu'il y a plusieurs preuves possibles car plusieurs définitions (A/T/V-871). Leur preuve va en fait consister en la construction de l'arbre couvrant : *on a un graphe connexe, on part d'un point* qu'ils relient à *tous ses voisins. Connexe.* Et à partir de chacun de ses voisins *on prend tous les points non reliés au graphe. (...) Et ça c'est possible parce que le graphe est connexe* (A/T/V-984s). Mais, il a fallu une intervention du GO pour leur montrer qu'effectivement ils n'ont ici utilisé aucune des définitions produites en t_1 et qu'ils n'ont pas vérifié que l'objet ainsi construit était un arbre. Face à l'incrédulité d'Angélique - elle ne *voit pas où est le problème*- , Thibault explique :

1039	T	: *... c'est très proche, ce qu'on est en train de dire, mais là, on part d'un truc qu'on a déjà fabriqué et on va le relier par plusieurs branches vers l'extérieur, alors que ce qu'on faisait jusqu'à maintenant c'était, on avait plusieurs trucs qui convergeaient vers un seul point qui était le sommet, racine, je sais pas comment on peut appeler ça.*

Il essaie ainsi de montrer qu'il y a une distance entre leur preuve inductive et la définition inductive donnée en t_1 : *ici, on part d'un point et on le relie à des trucs et là, on part d'un truc et on le relie à des points* (A/**T**/V-1061). Angélique remarque qu'en fait *c'est la même définition à l'envers* (**A**/T/V-1131). Les étudiants n'ont pas pour autant réécrit de nouvelle définition. Ainsi, la fonction de preuve d'une définition ne ressort pas. Pourtant, Vincent *propose qu'on classe les propriétés des trucs, comme ça on aura plus le problème de la définition. On pourra choisir la définition* (A/T/**V**-112). Malgré cela, il n'y a pas eu de nouvelle définition produite dans cette phase.

• Analyse du processus de construction de définitions

Nous avons pu identifier un processus **aristotélicien** qui s'est manifesté par la recherche des différences spécifiques, un listage de celles-ci. Ceci constitue l'une de leur stratégie optimale

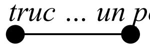
Si on essaie de répertorier tous les critères qui le définissent, on va bien obtenir quelque chose, on va les écrire (**A**/T/V-127). Par ailleurs, Thibault a eu une approche inductive immédiate sur l'objet : nous ne pouvons que faire des hypothèses pour interpréter ce point de vue. Il est possible que cet étudiant ait une connaissance spécifique de l'induction. Nous avons noté dans ce protocole de nombreuses références de sa part et de celle de Vincent à des arbres, organigrammes, arbres généalogiques, ce qui peut favoriser une approche constructive sur l'objet. C'est ainsi le seul groupe à avoir produit « rapidement » une définition inductive, et c'est aussi le seul à parler tout aussi rapidement et spontanément d'arbre … nous ne pouvons faire une hypothèse à propos de la possible influence du mot « arbre » sur la définition inductive produite : l'arbre pousse … De plus, le groupe a produit spontanément de nombreux exemples et contre-exemples, ce qui renforce l'aspect "construction de l'objet".

Nous avons relevé des opérateurs langagiers dans ce protocole, à commencer par la **dénomination** : en effet, Vincent débute sa recherche par une dénomination des exemples et contre-exemples donnés, en essayant de mettre en évidence par un nom la spécificité de chacun : *j'ai essayé à chaque fois de voir la différence avec les précédents* (A/T/**V**-13). Il appelle T1 *arbre*, T2 *ligne brisée*, T3 *recouvrement*, T4 *traits non droits*, T5 *jonction*, T6 *deux trucs*. Nous avons ici accès à une première description des objets. Mais ces noms n'ont pas été conservés par la suite (exception faite de résurgences du mot "arbre"). Par ailleurs, Angélique attribue des noms à des propriétés en faisant référence à des objets géométriques : elle parle de *polygone fermé* pour décrire un cycle. Ceci est récurrent jusqu'à la fin de la situation. Cette dénomination permet de diriger l'attention sur une propriété et de l'évoquer. Ainsi, les dénominations effectuées ont une fonction de **communication**. De plus, les étudiants choisissent d'appeler *point* un sommet (A/T/V-251) et en font un acte de dénomination : ici, ils mettent en évidence un élément premier, ce qui rejoint une approche **logicienne** des définitions[142] que nous retrouvons lorsqu'ils parlent de *chemin*, ils ne se contentent pas d'utiliser ce mot dans une acception commune, ils veulent le définir (A/T/V-713). Il apparaît de plus un autre opérateur logique : les étudiants recherchent une **définition *minimale***.
Les autres opérateurs langagiers en réfèrent principalement à la **précision** d'une définition : les étudiants cherchent à produire une définition *claire, précise*, moins *ambiguë*, quitte à utiliser un *pléonasme* (A/T/V-497).

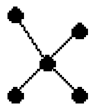
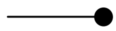
Les **contrôles** de ce groupe ne sont véritablement que d'un type : ils portent essentiellement sur les exemples et contre-exemples fournis et sur quelques autres générés par le groupe. En cela, il se distingue des groupes précédents. L'exemple T1 en particulier a fait office d'exemple prototypique, les autres exemples n'étant rapidement plus utilisés pour une quelconque vérification ou validation. Les étudiants décident de construire d'autres exemples

[142] Ne définir qu'à partir d'éléments premiers ou déjà définis.

pour la validation de leur définition, mais aussi pour faire preuve de leur compréhension du concept d'arbre :

114 V : *Si ça c'est un truc, là, on aurait pu dire, ta définition, c'était celle qui s'en rapproche le plus.*
115 T : *Et ben on peut faire l'inverse : on peut se dessiner des formes et on peut se dire est-ce que ça c'est un truc ou ça c'est pas un truc.*
116 V : *Oui, mais comment on peut faire ça si on n'a pas de définition de truc ?*
117 T : *Justement, on peut essayer de donner beaucoup plus d'exemples de trucs pour montrer qu'on a bien compris ce que c'était que des trucs. Enfin, je sais pas, pour moi, ça c'est un truc … un point,*
et puis ça c'est un truc 

A souligner également l'importance de la conception selon laquelle il ne faut qu'une définition, ce qui peut apparaître par ailleurs n'étant que des propriétés (selon ces étudiants). Une intervention de l'observateur a modifié quelque peu cette conception et donc à 'forcer' les étudiants à prendre conscience de l'existence dans leur propos de plusieurs définitions. Cela a induit un questionnement sur l'équivalence de ces multiples définitions dont le traitement a fait office de "contrôle-conclusion" de la première partie.

3 exemples générés[143]	 **E'1**  **E'2** E'3 
2 contre-exemples produits	 **C'1** **C'2 : vide**

De même que dans le groupe précédent, des questionnements mathématiques sur l'objet ont trouvé une réponse dans les exemples et contre-exemples donnés ou générés : il s'est agit dans ce groupe de traiter la représentation (T3,T4), la recherche d'une racine sur les exemples (T1), les cas extrêmes (plus petit, vide, infini) (E'3-C'2), la relation entre le nombre de points et le nombre de traits.
Nous n'avons pas noté d'interrogation particulière sur le concept de définition, seulement une affirmation de recherche d'une définition, de LA phrase définissante et du fait qu'une définition peut relever d'une convention.

III-3.3. Le Groupe A/Y (Arnaud et Yohann)

La dévolution de la tâche est rapide ; le mot « truc » ne gêne pas les étudiants et, comme le montre l'extrait suivant, qui se situe au tout début de l'activité, l'examen des exemples et contre-exemples leur permet de se faire une première idée de « truc » très pertinente :

[143] Nous n'avons inséré ici que les exemples et contre-exemples ayant fait l'objet de discussion entre les étudiants.

Y : *T'as une idée ?*
12 A : *Si, j'ai une idée : en fait dans T5, il y a un endroit où ça se relie.*
13 Y : *Oui, moi aussi.*
14 A : *C'est fermé. Et dans T6, c'est deux séparés.*
15 Y : *Oui. Donc déjà, on peut définir les autres par …*
16 A : *Par opposition.*
17 Y : ***Oui. Donc en fait, truc, c'est un …***
18 A : ***Une suite de points reliés entre eux sans se fermer.***
19 Y : *Sans circuit fermé en fait. Mais il peut y avoir des nœuds.*
20 A : *Sans circuit fermé, sans séparation.*
21 Y : *Et il faut qu'ils soient reliés entre eux quoi.* ***Il peut pas y avoir de point pas solidaire de tout le reste****. Apparemment, en plus les liens entre eux sont pas importants apparemment. Enfin la forme des liens.*
22 A : *Oui, à partir d'un même point, il peut y avoir, ça peut être rejoint par plusieurs points. (9 secondes)*
23 Y : *Mais c'est pas forcé qu'il y ait des nœuds, regarde. Parce que T2 …*
24 A : *Oui, dans T2, il n'y a pas de nœud. (44 secondes. Ils comptent les degrés)*

Ce groupe aussi a produit différents types de définition.

Définitions produites	Définitions reconnues	*Zéro-définitions*	*Zéro-définitions* finalisées	*Proof-generated definitions*
3 (t_1)	3	2 (t_1)	0 (t_1)	0

• Définitions produites en t_1

Deux *zéro-définitions* sont apparues dans ce groupe : la première est apparu au tout début du processus de recherche, mais n'a pas abouti ; elle s'intéressait à la recherche d'une propriété sur la *longueur de la plus longue chaîne* (A/Y-27). La seconde *zéro-définition* est apparu plus tard comme une “idée” pour les étudiants : il s'agit de la propriété **[n, n-1]** (A/Y-225s) à laquelle nous attribuons le statut de *zéro-définition* car elle n'a pas abouti sur une définition, certainement du fait de la négociation délicate du concept de connexité.

Finalement, trois définitions ont été produites.

La **première définition**, exprimé assez rapidement, en réfère à la définition **Def1** :

44 A : *C'est vrai. Mais pour définir la représentation d'un truc, on pourrait dire* ***que c'est un ensemble de points reliés les uns aux autres, sans pour autant avoir un circuit fermé, et sans pour autant qu'il y en ait qui soient complètement séparés des autres****. Comme le montre T5, T6.*

Celle-ci a été reformulée en : *un ensemble de points reliés entre eux par des traits, avec deux conditions : pas de circuit fermé / figure géométrique et aller de n'importe quel point vers n'importe quel autre en suivant les traits* (A/Y-45s), ce qui mobilise **Def1 & CHEMIN**. La recherche d'une explicitation de l'expression “figure géométrique” a favorisé l'émergence de la deuxième définition.

La **deuxième définition** s'intéresse donc à la propriété **CHEMIN**, exprimée dans **Def2** : *il existe un seul chemin pour aller de n'importe quel point à n'importe quel autre* (A/Y-65s). Si l'unicité du chemin est explicite, l'existence de ce chemin est elle implicite (connexité).
Les étudiants comparent alors cette nouvelle définition à la précédente pour déclarer qu'elle est meilleure.
On peut inférer ici, au passage, une **propriété-en-acte d'une « bonne » définition** : une définition est d'autant meilleure qu'elle contient moins de conditions, moins d'hypothèses à vérifier.

73	Y	:	*Il y a qu'une seule condition. Au lieu d'avoir deux conditions à vérifier à chaque fois sur chaque figure.*
74	A	:	*Oui, il n'y a qu'une hypothèse à vérifier.*
75	Y	:	*(il écrit) Il existe un unique chemin permettant d'aller d'un point à un autre point de la figure. Et c'est toujours un ensemble de points reliés par des traits.* *C'est une définition assez simple quand même. On peut peut-être faire plus simple, mais c'est déjà pas mal.*
76	A	:	*Oui.*

La **troisième définition** provient certainement de deux ajouts concernant une question sur le plus petit arbre : ceux-ci sont en fait des exclusions (au sens de Lakatos). Le premier ajout déclare que *le cas un est à part* (A/Y-123) (il s'agit d'un truc à un seul point, sans arête) et le second qu' *un point ne peut être relié à lui-même* (A/Y-151) (il s'agit là de l'expression dune propriété des graphes « simples », c'est-à-dire ne contenant pas d'arêtes multiples).
Ceci a abouti à l'énoncé d'une troisième définition qui relève de la définition **inductive Def7**.: o*n part de deux points reliés par un trait. On ajoute un point et on le relie à la figure précédente*.

274	A	:	*Là, je partirai d'un exemple simple. Après, tu rajoutes … t'as deux points, t'as un trait. Tu rajoutes un troisième point : pour le relier à la figure, il faut un trait de plus.*
275	Y	:	***Par récurrence, tu le ferais ?***
276	A	:	***Par récurrence, oui. Tu rajoutes un point, il te faut encore un trait. Et ainsi de suite.***
277	Y	:	*Mais il faut le relier tout le temps à la figure, le point.*
278	A	:	*Voilà.*
279	Y	:	*Et pour construire un truc, là, t'es sûr d'avoir un truc.*
280	A	:	*T'es sûr d'avoir un truc comme ça. Mais ça se fait par récurrence.*
281	Y	:	*Oui, ça se fait.*
282	A	:	*Là, au moins, on est sûr que c'est vrai. A partir du moment où, comme on dit que le plus petit truc existait : c'était deux points et un trait, à chaque fois que tu rajoutes un point, tu dois rajouter un trait, c'est toujours vrai dans la condition (n-1) traits par rapport à n points.*
283	Y	:	*Oui, c'est pas c… Et puis, tu donnes cette définition à n'importe qui qui connaît pas, il veut se construire …*
284	A	:	*Il est capable de construire …*
285	Y	:	*… un truc à douze points. Il part de deux et puis il en rajoute : à chaque fois, il fait un lien avec la figure.*
286	A	:	*Voilà.*

Les **fonctionnalités différentes des deux définitions CHEMIN** et **INDUCTION** sont immédiatement discutées par les deux étudiants, comme le montre cet extrait :

288	A	:	*Voilà. La définition pour en créer un, pour en faire un, et la définition quand on a des arbres, pour savoir si c'en est un ou pas.*
289	Y	:	*Voilà, c'est pas la même chose. Parce que celle-là, elle te sert juste à en créer, tu peux pas vérifier si ça en est.*
290	GO	:	*De quoi, la récurrence ?*
291	Y	:	*Oui.*
292	GO	:	*Si on t'en donne un (truc), tu peux pas la faire fonctionner (cette définition) ?*
293	Y	:	*Ben pour vérifier si ça en est un … il faut prendre … si, on peut le faire à la limite : on isole deux points au départ, et puis après on prend un point au hasard, on voit qu'il est relié avec la figure, donc on vérifie qu'il est bien relié avec la figure qu'on avait. Donc après on considère cette nouvelle figure-là, et on prend un autre point, par exemple celui-là, on voit qu'il est bien relié, donc on prend une nouvelle figure qui prend tout ça, et ainsi de suite. Mais pour vérifier, je préfère l'idée du chemin.*
294	A	:	*Oui, l'autre méthode est plus brève. Donc en fonction de ce qu'on veut faire, si on veut vérifier si la figure qu'on a c'est un truc ou pas, on prend la première définition, et si on veut en construire un nous-même, on prend la récurrence.*

• Définitions produites en t_2

La définition inductive donnée lors de la résolution de la tâche t_1 a été utilisée pour la rédaction de la preuve. Les étudiants ont également remarqué que l'arbre couvrant était bien un arbre, d'après les propriétés *en un seul morceau* et *sans cycle* (référence à Def1).

Le groupe n'a pas construit de nouvelle définition, mais l'élaboration de la preuve a provoqué un retour sur la deuxième définition construite par eux (**Def2, CHEMIN**) et la mise en évidence d'une relation entre "connexe" et "existence du chemin entre deux sommets quelconques". Par ailleurs, la propriété **[n, n-1]** n'a été mobilisée que pour vérification.

Nous avons relevé une définition potentielle à partir de la propriété suivante : « si on supprime une arête, l'arbre n'est plus connexe » (*si tu commences par enlever un trait, disons n'importe lequel, mais tu ne peux pas enlever n'importe lequel d'ailleurs : celui-là, tu n'as pas le droit de l'enlever* –A/**Y**-408). Cependant, cette propriété n'a pas été identifiée comme pouvant contribuer à une définition (Def6).

De nouveau, le groupe a travaillé sur l'opérationnalité des définitions, en relation avec des stratégies pour obtenir un arbre couvrant dans un graphe (A/Y-410-456 et plus). L'une des stratégies consiste à construire l'arbre dans le graphe sous la contrainte de règles qui assure qu'on a aucun cycle et tous les sommets atteints. L'autre consiste à enlever des arêtes du graphe donné de manière à détruire les cycles et garder la connexité.

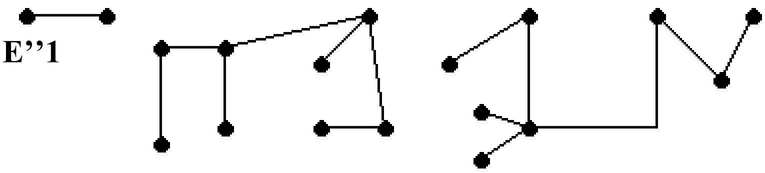
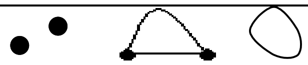
• Processus de construction de définitions

Ce groupe a également procédé par *genre et différences spécifiques*. Les principaux **opérateurs** utilisés sont langagiers : les étudiants s'attachent à *clarifier les choses*, à être précis et à avoir une définition *claire*, *simple*, *non ambiguë*. Les autres opérateurs sont logiques : ils concernent la recherche d'une **condition suffisante**.

Contrairement au groupe précédent, les contrôles utilisés ici sont nombreux et de types différents : logique (condition suffisante, minimale), langagier, utilisation d'exemples et contre-exemples donnés et générés, et des contrôles inhérents à la fonction attribuée à la définition.

Pour la première définition, un contrôle est effectué à partir **des exemples et contre-exemples** donnés dans l'énoncé. La deuxième définition a fait l'objet d'un contrôle sur son aspect **minimal** (*une seule condition*) et d'un contrôle **langagier** car la définition est *claire* (fatalement puisqu'elle est minimale ...).

D'autres contrôles ont été effectués sur des caractérisations de l'objet mathématique (sont-elles des conditions suffisantes ?), en plus des quatre **fonctions** attribuées par ces étudiants aux définitions : algorithmique, vérification, construction, compréhension. Ces contrôles semblent participer, pour les étudiants, d'une procédure de légitimation nécessaire des définitions produites ou utilisées.

3 exemples générés	 **E''1** **E''2** (test de la définition) **E''3**
3 contre-exemples générés	 **C''1** **C''2** **C''3**

Dans ce groupe, encore une fois, de nombreux questionnements mathématiques ont trouvé réponse dans les éléments donnés par l'énoncé mais aussi par la génération d'autres exemples et contre-exemples : il s'agit de la représentation (T3, T4), de la plus longue chaîne (T3), de la présence de nœud (T2), des cas extrêmes plus petit (demande du GO – E''1) et infini (*je crois qu'on peut continuer comme ça jusqu'à l'infini, un truc reste un truc*), de la relation entre le nombre de points et le nombre de traits (E''3).

II-3.4. Tableau récapitulatif des productions dans la tâche t_1

L'objet de ce tableau de synthèse est de montrer les ressemblances et différences entre les productions des trois groupes. Quand la production est une définition, nous donnons son numéro (elles sont été souvent rappelées, mais le lecteur peut se référer au début du chapitre pour retrouver son énoncé). Quand la production et une propriété, nous donnons son nom. On a noté CS, CN, CNS pour conditions suffisante, nécessaire, nécessaire et suffisante.

Groupes	Production	Fonction	Opérateurs	Contrôles	Processus
F/A	**Def1, Def2**	Communication, compréhension, dessin	ex/cex. CS. Langagier (simple)	Ex et cex donnés /fonctions. Langagiers (simple, courte)	Aristote Lakatos
A/Y	**Def1, Def1&CHEMIN, Def2, [n, n-1], Def7**	Communication, construction, vérification Preuve	ex/cex. /fonctions. Langagiers. CNS	Sur ex/cex donnés et produits. CS. /fonctions. Langagiers	Aristote, exclusion (explicite)
A/T/V	**Def1, ~~CYCLE~~, Def10, Def7, Def2**	Compréhension, construction	Ex/cex. CS. /fonctions. /représentation de l'objet Langagiers.	Sur ex/cex. Langagiers. Equivalence entre Def1 et Def2.	Aristote (le + explicite) Lakatos

Résumé des productions, t_1

III-4. Synthèse sur les processus de construction de définitions

Il s'agit ici de dégager les éléments invariants des processus ayant permis l'obtention des différentes définitions présentées ci-dessus. L'analyse de ces processus nous permettra d'affiner les conceptions des étudiants sur les définitions en mathématiques.

Dans les trois groupes, la méthode de définition *par genre et différences spécifiques* est à l'œuvre :

> *Mais il faut qu'on trouve les points communs qu'ils ont. Et les différences avec T5 et T6 ?* (**F**/A-6)
> *Mais, alors, c'est qu'on doit comparer ça, avec ces deux trucs en bas !* (F/**A**-10)
> *On va définir les autres* (les exemples) … *par opposition, la différence entre les quatre premiers et les deux derniers* (A/Y-15 et 34)
> *On peut commencer par des généralités, et puis après, aller vers des cas plus spécifiques, où un truc c'est des points reliés entre eux* (A/**T**/V-334)

Nous avons établi un diagramme (en annexe) recensant les opérateurs et contrôles mis en œuvre pour chaque groupe, en recherchant ceux-ci parmi les opérateurs et contrôles aristotéliciens et lakatosiens déjà identifiés dans le chapitre II.

Des **opérateurs langagiers**, relevant de la conception « aristotélicienne » ont été mis en œuvre, ils ont aussi été utilisés comme des **contrôles**. **Les fonctions** de communication et de « compréhension » attribuées aux définitions contribuent à la mobilisation de critères langagiers. Il est important de noter, au cours du travail, une pratique de **dénomination** : les étudiants se servent du vocabulaire de la géométrie pour décrire les représentations données, ce qui amène leur attention sur certaines propriétés (surtout la propriété ~~CYCLE~~).

Des **opérateurs et contrôles logiques** sont aussi présents : ils sont en œuvre dans la recherche de conditions suffisante ou nécessaire, ou nécessaire et suffisante, et lors du contrôle de la définition comme propriété caractéristique.
Des opérateurs et contrôles de type lakatosien sont également utilisés, lors de la génération et de l'utilisation de **nouveaux exemples et contre-exemples** : les étudiants s'appuient sur ceux déjà donnés dans l'énoncé de la tâche 1 pour définir (opérateurs) et sur ceux donnés et générés pour contrôler leurs définitions.

Le processus d'élargissement (Lakatos) de la définition est présent, parfois très explicitement:

275	A	: *Il faut … rien c'est pas un quadrilatère. Enfin, tu vois. Tu as un minimum de choses à avoir, et comme ils disent que c'est un objet mathématique, pour moi, c'est vraiment …*
281	V	: *Tu vas avoir ton rien qui va être égal à tout ce que tu veux. Tu peux élargir la définition de telle sorte que rien ça va être …*
435	V	: *Je pense qu'il faut essayer d'élargir …*

Dans ce groupe, nous trouvons également une volonté d'écarter un monstre (*monster-barring definition*), le monstre étant ici le vide.
Quand il s'agit de rédiger une définition, le registre est différent et certainement davantage versé sur des aspects langagiers. Cette remarque s'applique également pour les opérateurs.
Les étudiants utilisent tous les exemples et contre-exemples donnés pour vérifier que leur définition s'applique aux exemples et exclut les contre-exemples : *« (définition) qui est exacte pour les quatre premiers cas et qui montre que les deux derniers cas sont exclus »* (A/Y-176) Ce type de rétroaction leur suffit presque, en ce qui concerne l'aspect caractérisation de l'objet.

Questionnements mathématiques et questionnements sur la définition

Il y a des invariants dans les questionnements sur l'objet mathématique tel que le choix de la représentation et le nombre de points et de traits. L'uniformité dans la représentation est reconnue (points et traits, peu importe que les traits soient courbes, dans le plan ou dans l'espace. De plus, les exemples sont suffisamment variés en terme de nœuds, de ramifications, de racines, pour ne pas induire des propriétés non pertinentes.

Les questionnements sur le concept de définition seraient plutôt des affirmations voire des inquiétudes sur le statut de cette définition ; par exemple, la définition qu'ils produisent est-elle **universelle** ? Permet-elle un bon **passage au dessin** ?
Insistons sur le fait que **l'expression « définition générale » revient dans les trois groupes** et revêt visiblement deux significations.
La première signification est relative au processus de définition par *genre et différences spécifiques* ; en effet, l'arbre est une sous-classe de graphe, ainsi, définir le genre relève d'une

définition générale : *une définition générale, c'est un ensemble de points reliés par des traits … mais ça vérifie certaines hypothèses* (**F**/A–175).
La seconde est liée au fait que le nombre d'exemples et contre-exemples est limité, et donc peut-être perçu comme trop restrictif ; ainsi, les étudiants disent donner une définition « générale » au regard des informations qu'ils détiennent, définition qui pourrait être raffinée si de nouvelles informations survenaient, par exemple avec les cas limites comme l'atteste cet extrait : *on a donné une définition générale, à peu près … (…) si dans les exemples de trucs on avait eu un point tout seul qui est relié à aucun point, on aurait pu inclure le un* (A/**Y** – 166).
Nous pouvons également faire une hypothèse supplémentaire sur l'utilisation de l'expression « *définition générale* » : il peut s'agir d'une définition non mathématique, réduite à une définition par extension. Certains extraits vont dans ce sens : *« on le voit tout de suite »* (A/Y – 193) *« c'est général, c'est pas assez précis en fait »* (A/T/V – 528 au sujet de leur première définition).

III-5. Conceptions des étudiants sur la « définition »

Nous pouvons faire l'hypothèse, au regard des analyses présentées dans les chapitres III et IV, qu'une conception initiale des étudiants (de première année d'université) sur la « définition » comportait les éléments suivants : une définition est formée de termes précis et elle ne contient que des mots ou des concepts « premiers », ou des concepts connus ; une définition est une condition nécessaire et suffisante ; une définition sert à introduire un nouvel objet ; il n'y a qu'une définition et des propriétés pour un même objet mathématique. Nous appellerons C_0 cette conception. Elle est attestée par certaines remarques lors des travaux des groupes.

Quelques nouveaux éléments, précisant C_0, semblent provenir de la situation et de l'objet mathématique en jeu. Précisons.
Les étudiants ont défini par *genre et différences spécifiques* : ceci est particulièrement opératoire pour des problèmes de classification. Ils font de nombreuses références à la géométrie, en décrivant un arbre en termes de *figure géométrique, polygone non fermé, etc.*
Nous avons vu que les opérateurs et contrôles étaient surtout de types langagier et logique. La dénomination a joué un rôle important dans la désignation de propriétés par exemple, mais les étudiants n'ont pas éprouvé le besoin de définir, de nommer le genre (graphe) : peut-être n'est-ce pas suffisamment problématique ?
Il ressort que, d'un point de vue logique, il est important pour les étudiants d'avoir une définition **minimale**, et même de rechercher LA phrase définissante : le groupe A/T/V atteste clairement d'une conception prônant d'une définition unique, en un seul critère et une seule phrase :

320	V	: *Ben justement, ce qui serait bien, ce serait de trouver LA phrase.*
333	A	: *Je pense. De toute façon, en une phrase, tu peux pas définir un objet*

mathématique.

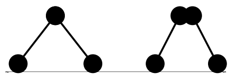
687 A : *C'est donner des propriétés en fait. Finalement. C'est plus des définitions, c'est des propriétés pour moi.*

Mais aussi, une définition peut être une convention :

433 T : *... Finalement, c'est ... puisqu'on n'a pas d'exemples de savoir quel est le plus petit objet ici, on peut prendre une convention, mais on ne peut pas le décider à l'avance.*

Il ressort de plus que la définition a principalement une fonction de communication, pour la compréhension et la présentation d'un concept.
La fonction de preuve d'une définition n'est pas nécessairement présente, malgré le réinvestissement de la définition dans la tâche t_2 : en effet, le groupe A/T/V n'utilise pas la définition inductive produite pour faire la preuve demandée, et semble fonctionner sur une conception selon laquelle « une définition explique mais ne démontre pas » et de plus, il y a une seule définition et des propriétés caractéristiques.
La position du groupe A/Y se situe à l'opposé : nous avons vu comment ce groupe accepte la production de plusieurs définitions et comment il les différencie dans leurs fonctions. Il y a eu une définition pour construire l'objet et pour prouver (définition inductive) ainsi qu'une définition pour reconnaître des arbres parmi des objets (connexe, sans cycle). Il est à noter que dans ce groupe A/Y, les contrôles sont plus nombreux que dans les autres groupes. Cela témoigne peut-être d'une plus grande flexibilité par rapport aux définitions, c'est-à-dire une souplesse quant à des définitions provisoires et multiples. Cette position leur a permis de mener à bien la preuve demandée.

Nous avons également relevé quelques éléments de l'aspect plus "philosophique" de la conception aristotélicienne. En effet, A/T/V parle de la nature de la définition, un peu comme Aristote parlerait de l'essence : il s'agit dans cet extrait de résoudre le problème mathématique suivant : les objets ci-dessous sont-ils les mêmes, c'est-à-dire est-il possible de superposer les sommets ?



358 T : *ça, c'est dans la représentation, c'est pas dans la nature de truc.* (sur les sommets superposables)

363 A *: parce que c'est dans la représentation, c'est dans la nature. Si tu prends un quadrilatère et que tu estimes qu'il a des angles plats, c'est plus un quadrilatère. Et c'est dans la nature d'un quadrilatère, enfin, c'est un critère de définition.*

Cet extrait s'inscrit dans une discussion portant sur l'objet mathématique et sa représentation. Le problème du choix de la représentation est, de toute façon, écarté dans ce groupe, mais il a été surprenant de voir apparaître des arguments concernant la nature de l'objet !

III-6. Résultats

Un premier résultat est qu'il est possible de faire la dévolution d'une situation de construction de définitions de type CLASSIFICATION. En effet, l'analyse montre que tous les groupes ont produit des *zéro-définitions*, et que celles-ci ont évolué vers des *définitions* et, dans un des groupes, vers une *proof-generated definition*. Ces productions sont issues de phases adidactiques, l'organisation en groupes des étudiants ayant clairement permis l'émergence de différents points de vue sur l'objet étudié et un débat sur les définitions.

Un second résultat est qu'il y eut une activité de construction du concept mathématique d'arbre. Plusieurs éléments l'attestent. En particulier, des rétroactions sur l'objet mathématique ont eu lieu à partir du concept lui-même (cf. une discussion, dans un des groupes, sur la distance entre l'objet mathématique et sa représentation) et par des actions réflexives sur les *zéro-définitions*. De plus, les étudiants n'hésitent pas à considérer dans le même temps plusieurs définitions, à les comparer et à étudier les implications entre elles. Ils sont de plus capables d'en garder plusieurs, pour les réutiliser en soulignant leurs différentes fonctionnalités. Enfin, un groupe d'étudiants a produit très rapidement une définition récursive de l'arbre, ce que nous n'attendions pas.

Signalons deux autres résultats. Tout d'abord, le fait que les étudiants acceptent de travailler sans réticence sur un objet nommé "truc" ; le nom n'est donc peut-être pas si primordial que les institutions didactiques le pensent, elles qui accordent à la définition une fonction de dénomination importante.
Enfin, nous avons constaté que l'activité d'écriture (formalisation) d'une définition, peut induire, chez les étudiants, la recherche d'une « bonne et unique définition » et entraîner ainsi des confusions sur les propriétés du concept qu'ils ont eux-mêmes construites. Les débats mathématiques sont alors remplacés dans ces phases d'écriture par des discussions formelles parfois stériles.

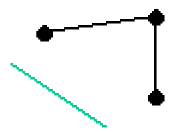
Annexe : équivalence des définitions de l'arbre

Un chemin est une suite de sommets et d'arêtes. Il y a connexité lorsqu'il existe un chemin.

Prélude : construction d'un graphe G à n sommets
Prenons un graphe G à n sommets auquel nous avons enlevé toutes les arêtes. Nous allons rajouter ces arêtes une à une. Deux cas peuvent se produire :

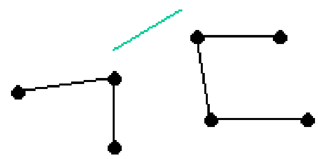
Construction 1 : l'arête ajoutée réunit deux sommets de la même composante connexe.
Alors :

- le nombre de composantes connexes du graphe ne change pas
- on crée un cycle dans la composante connexe



Construction 2 : l'arête ajoutée réunit deux sommets appartenant à des composantes connexes différentes.
Alors :

- le nombre de composantes connexes diminue de un
- on n'ajoute pas de cycle dans le graphe



Pour avoir un graphe sans cycle, il faudra donc passer par la construction 2.
Au départ, nous avons n sommets, donc n composantes connexes. A chaque ajout d'arête (suivant la méthode de la construction 2), le nombre de composantes connexes diminue de un. Après avoir ajouté n-1 arêtes, il ne reste qu'une composante connexe, le graphe est donc connexe. l faut donc ajouter au moins n-1 arêtes avant d'obtenir un graphe connexe.

Remarque :
Si G est connexe, alors le nombre d'arêtes est supérieur ou égal à n-1. Et tout ajout d'arête créera un cycle (construction 1). Donc, si G est sans cycle, alors le nombre d'arêtes est inférieur ou égal à n-1.

Equivalence des définitions de l'arbre

Nous avons précédemment évoqué l'aspect combinatoire (dénombrement) pour les définitions Def3 et Def4. Il est bien évident que l'accès à ces définitions nécessite effectivement un comptage du nombre de sommets et du nombre d'arêtes, mais aussi (et surtout) une explicitation de la relation liant le nombre de sommets et le nombre d'arêtes, via la description de la construction d'un arbre par exemple.

Def 2 => Def 1

G est connexe car il existe un chemin reliant deux sommets quelconques.
Supposons que G admette un cycle : deux sommets du cycle sont reliés par deux chemins distincts, contradiction.

Def 1 => Def 3

G connexe sans cycle. D'après la conclusion du prélude, il y a (n-1) arêtes.

Def 3 => Def 5

Soit G sans cycle avec (n-1) arêtes. Alors G n'a qu'une composante connexe. L'ajout d'une arête crée un cycle.

Def 5 => Def 4

Soit G sans cycle, avec (n-1) arêtes. Supposons G non connexe. Alors il existe au moins deux composantes connexes. On peut ajouter une arête sans créer de cycle (construction 1), contradiction.
Donc G est connexe, sans cycle, avec (n-1) arêtes.

Def 4 => Def 6

Evident.

Def 6 => Def 2

Supposons qu'il existe deux chemins distincts permettant de joindre une paire de sommets (i,j). Alors, il existe au moins une arête (k,l) appartenant au premier chemin mais pas au second. Supprimons cette arête : il existe encore un chemin permettant de joindre i à j. Le graphe est toujours connexe, et une arête a été supprimée : contradiction avec connexe minimal.

Nous avons donc démontré que Def1 ⇔Def2 ⇔ Def3 ⇔Def4 ⇔ Def5 ⇔ Def6
Nous allons maintenant démontrer que les définitions récursives sont équivalentes et que Def1⇔Def7

Propriété (utile) : un arbre a au moins un sommet pendant.
Preuve : (avec Def1) Soit (i,j) un plus long chemin élémentaire de l'arbre. Une extrémité, disons j, n'est pas reliée à un nouveau sommet (sinon, ce ne serait pas un plus long chemin), ni à un autre sommet du chemin (sinon, il y aurait un cycle), donc j est un sommet pendant.

Def 7 => Def 1

En ajoutant un sommet pendant, le graphe est connexe et on ne crée pas de cycle (construction 2 entre une composante connexe et un sommet isolé)

Def 1 => Def 7

G a un sommet pendant. On l’enlève : on a encore un arbre ... et on le rajoute (cf. Propriété)

Def 9 <=> Def 10

La définition Def10 est en fait la définition Def9 itérée.

Def7 <=> Def8

Def8 implique Def7 est évident.

Pour démontrer la réciproque il suffit de montrer par induction qu’il est possible d’enlever n’importe quel sommet pendant : si on enlève le sommet pendant x que l’on vient d’ajouter (Def7), alors il n’y a pas de problème. Sinon, on enlève x : on obtient un arbre. Par hypothèse d'induction, si on enlève n'importe quel sommet pendant, on obtient un arbre et en rajoutant x on a encore un arbre (Def7).

Def9 => Def1

En reliant deux composantes connexes par une arête, on rend le graphe connexe,et on ne crée pas de cycle

Def6 et Def1 => Def9

Par Def6 et Def1 la suppression d'une arête e décompose le graphe G en deux composantes connexes (sinon G ne serait pas connexe) et sans cycle (sinon G contiendrait un cycle). Donc G est bien obtenu à partir en connectant deux arbres par l'arête e.

Chapitre VII

Droites discrètes

I – Le concept mathématique “droite discrète”

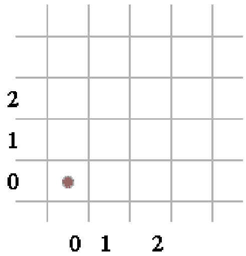
I-1. La géométrie discrète : contexte général, historique succinct

Nous avons déjà étudié des objets discrets tels que les graphes et les arbres, ou plus précisément des structures discrètes.
Nous nous intéressons maintenant à la construction d’un modèle discret d’un objet mathématique connu dans le monde réel : la droite euclidienne. Nous reviendrons ci-après sur l’objet géométrique “droite discrète” en tant que tel ci-après, mais rappelons tout d’abord le contexte de la géométrie discrète. La géométrie discrète fit son apparition dans les années 70. Les objets discrets ont été au centre des intérêts des graphistes notamment dès les années 60 (Bresenham par exemple pour la droite discrète en 1965). La géométrie discrète a quant à elle pour objectif de définir un cadre théorique pour transposer dans Z^n les éléments de base de la géométrie euclidienne ; les notions discrètes alors définies doivent être “le plus proche possible” des notions continues connues (cette idée “d’être au plus proche de” mériterait d’être précisée ...). Une grande partie de la difficulté de l’élaboration théorique d’une géométrie discrète réside justement dans cette idée, et comme le souligne Reveillès, *« le conflit permanent avec la géométrie euclidienne peut faire douter de l’existence en théorie organisée d’une géométrie discrète »* (Reveillès – 1991- p.17).
Il y a alors une grande complexité dans le choix des éléments de base et donc dans leur définition car *« il n’existe plus, en général, de définition canonique des objets souhaités (droites, plans, cercles, courbes, surfaces) mais une multitude de possibilités qu’il est impossible d’étudier tour à tour et qui, de cette façon provoqueraient très vraisemblablement des conflits internes (...) le problème essentiel se résume ainsi : quels sont les bons objets géométriques discrets ? Quelles sont leurs propriétés ? »* (ibid.). Reveillès propose l’introduction de la Géométrie Discrète Idéale pour éviter les conflits internes et les questions de choix de définition et donne, en particulier, une définition arithmétique, dite définition en compréhension (cf. § II-1.5 du chapitre II) de droite discrète. Remarquons que, dans l’esprit de Reveillès, il existe des définitions *canoniques,* et que son objectif de construction d’une géométrie discrète idéale est orienté par cette idée : rechercher une définition de la droite

discrète permettant d’étudier les propriétés intrinsèques de cet objet. Il est bien évident que le problème de définition des objets de base de la géométrie discrète se pose selon le contexte : notre expérimentation ne peut se situer, ne serait-ce que du fait du temps consacré par les étudiants à celle-ci, dans une perspective d’élaboration d’une théorie. Cependant, la richesse qu’offrent les objets discrets nous incite à penser qu’une situation de construction de définition de l’objet géométrique “droite discrète” est pertinente, et ce, d’un double point de vue : celui de **l’activité et du processus de construction de définition**, mais aussi celui de **l’activité de modélisation d’un objet continu**. En effet, les objets discrets procurent potentiellement, du fait de leur nature, des situations permettant d’appréhender la construction d’objets mathématiques, de leur définition, la confrontation éventuelle avec des objets réels (et donc avec la définition desdits objets réels), et ainsi, des questionnements relatifs à la théorie mathématique peuvent émerger.

Le type de modèle / représentation

Nous travaillons sur une grille régulière (maillage) telle que celle-ci :



Il est alors possible de parler de points (intersection des lignes) et donc de coordonnées entières de ces points, ou carreaux, et il est alors possible de parler également de coordonnées entières de ces carreaux, une fois l’origine fixée (l’origine est un carreau), et dans ce cas, il sera donc question des coordonnées entières des carreaux. Dans ce qui suit, nous parlerons invariablement de carreau ou de pixel, un carreau étant désigné par des coordonnées entières. Un point identifie un carreau : ce point peut être au centre du carreau (tel le schéma ci-dessus) ou une convention peut être établie, par exemple en prenant un point du maillage et en choisissant de l’associer au carreau “en haut à gauche”.

Différentes approches de l’objet « droite discrète » existent. L’Analyse Discrète Différentielle avec l’approche algorithmique de Bresenham, les algorithmes basés sur des analyses combinatoires, les algorithmes basés sur des analyses linguistiques, les petits harpons de Greene-Yoa, la discrétisation de Freeman et Pham, la discrétisation de Rosenfeld et finalement l’approche arithmétique de Reveillès qui en découle. Nous ne ferons pas ici l’histoire des définitions de “droite discrète” mais présenterons un questionnement mathématique permettant d’aborder les points centraux dans une activité de construction de définition de “droite discrète” et de classifier les définitions. Nous nous sommes pour cela appuyés sur les récents travaux de Reveillès (1991), ainsi que ceux de Vittone (1999) qui montrent notamment combien les résultats de Reveillès seraient fondateurs en matière de géométrie discrète. Certaines définitions proviennent de l’ouvrage “géométrie discrète en analyse d’images” de Chassery et Montanvert (1991).

I-2. L’objet géométrique “droite discrète”

I-2.1. Présentation d’une problématique autour de l’objet géométrique “droite discrète”

Il faut comprendre par “droite discrète” non pas un concept mathématique ayant une existence irrécusable dans le savoir savant, mais un objet discret modélisant un objet réel. En effet, la recherche “d’une” définition de droite discrète a connu (et connaît encore …) de nombreux méandres, ce que nous montrerons lors de la présentation de définitions de cet objet. Ainsi, le concept mathématique “droite discrète” est réellement problématique, c’est pourquoi nous allons l’approcher par ses représentations géométriques (colorisation de pixels). Il est alors nécessaire de se référer à ce dont la “droite discrète” est la modélisation : la droite réelle. Nous sommes de ce fait plongés dans une problématique de représentation d’un objet issu de la géométrie euclidienne par des pixels. Le référent étant toujours la droite réelle, trois approches s’offrent alors pour amorcer un processus de construction d’une définition de la “droite discrète” :

- approche n°1 : utiliser la droite réelle comme support physique ;
- approche n°2 : rechercher une séquence de pixels permettant d’obtenir un objet discret proche de l’idée de régularité que nous avons d’une droite i.e. sans trou, ni trop épais, ni trop fin, d’épaisseur “constante”, de pente constante (ceci appelle une analyse en terme de connexité, de proportionnalité, de topologie …) ;
- approche n°3 : ignorer la droite réelle et adopter un point de vue purement axiomatique.

Ces trois approches sont développées ci-après. Le dernier point est encore une problématique actuelle de recherche comme tend à le montrer la Géométrie Discrète dite Idéale de Reveillès.

Deux fonctions de la définition de “droite discrète” sont en relation directe avec les approches présentées ci-dessus : la fonction “**construction** de l’objet discret” et la fonction “**reconnaissance** de l’objet discret”. En effet, construire l’objet discret à partir de l’entité réelle (première entrée évoquée ci-dessus) pose la double question :

- Etant donnée une droite réelle, comment construire une droite discrète correspondante, et quelles sont les propriétés de l’objet discret par rapport à celles de l’objet continu ? Cette question relève de la première approche : il s’agit de **modéliser** une droite réelle par une droite discrète et ainsi de **construire** une droite discrète en étudiant la conservation (ou non) des propriétés mathématiques de ces objets. Ceci pose également des questions de nature axiomatique concernant l’unicité de la construction d’une droite discrète, une droite réelle étant donnée, par exemple.

- Etant donnée une droite discrète, quelle est la (ou les) droites réelles dont elle est issue ?

Cette seconde question relève d’une problématique de **reconnaissance** de droites discrètes, toujours en utilisant les droites réelles comme référent (première approche). Cependant, il est possible d'aborder cette problématique par l'approche n°2, et de s'interroger sur la régularité d'un motif par exemple, sans avoir recourt à la construction d'une (ou de) droite(s) réelle(s).

I-2.2. Problématique de définition de "droite discrète"

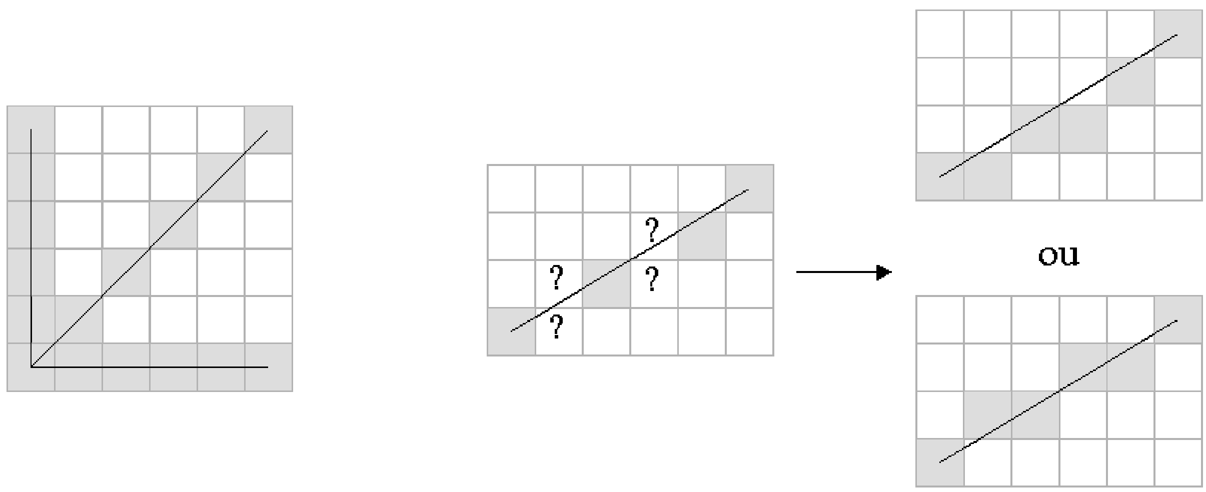
Nous avons établi dans le paragraphe précédent deux fonctions pour la définition de "droite discrète" (construction, reconnaissance) en relation avec trois types d'approches de cet objet géométrique : l'utilisation de la droite réelle comme support physique, l'utilisation de propriétés telles la régularité et l'axiomatique. Ces trois approches nous permettent de préciser trois problématiques de définition de "droite discrète". Nous pouvons représenter ceci dans un tableau et préciser les questionnements et stratégies propres à chaque case de ce tableau :

Problématique / Fonction de la définition	Droite réelle (support)	Etude des carreaux Régularité	Axiomatique
Construction	C1	C2	C3
Reconnaissance	R1	R2	R3

Problématiques "droites discrètes"

I-2.2.1. Utilisation de la droite réelle comme support

Utiliser la droite réelle comme support physique signifie tracer une droite réelle et discrétiser celle-ci par le choix de certains carreaux. Il est nécessaire de prendre en charge le passage du continu au discret. Pour les droites "horizontales", "verticales" et "à 45°", il n'y a pas d'ambiguïté durable : il est possible de les tracer sans se questionner, leur épaisseur sera constante, ainsi que la pente entre deux carreaux etc. (voir ci-dessous). Cependant, en traçant la première bissectrice discrète, la connexité n'est pas la même que dans les droites horizontales et verticales. Il est donc nécessaire de définir la connexité désirée. Pour toutes les autres orientations, cela est plus difficile, comme le montre la figure ci-dessous.



Reconnaître un ensemble de pixels comme étant une droite discrète requiert la construction d'une droite réelle, et donc de prendre en charge le passage du discret au continu. Ceci n'est pas trivial, et peut mener à des interrogations telles que : une séquence de pixels étant donnée, existe-t-il une droite réelle dont elle est la (ou une) discrétisation ? Ceci peut déboucher sur des questions de nature axiomatique.
Il est bien évident que les questions portant sur le double passage continu → discret (C1) et discret → continu (R1) sont nombreuses. Il en est de même pour les transformations géométriques. Par exemple, la discrétisation d'un segment réel ayant subi une rotation dans le continu est-elle identique à la discrétisation du même segment réel ayant subi une rotation dans le discret ?

I-2.2.2. Etude de séquences de pixels

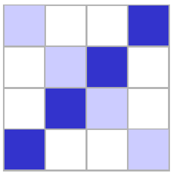
Si l'on sait reconnaître une séquence de pixels comme étant une "droite discrète", il sera alors possible de construire une droite discrète conformément aux critères utilisés pour la reconnaissance.
Les questions qui se posent alors sont par exemple : comment dire qu'un ensemble de carreaux coloriés est une droite ? Et déjà, quand est-ce une courbe ? Ceci nécessite notamment une étude en terme de connexité (i.e. éviter les sauts, les carreaux trop espacés, tendre à se rapprocher d'un aspect continu etc.).

I-2.2.3. Axiomatique

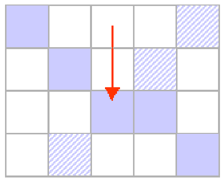
Nous allons présenter ici des questionnements relatifs à une problématique axiomatique.
Les questions axiomatiques que pose l'objet "droite" sont fondamentales, tant dans le domaine discret que dans le domaine euclidien. Elles concernent l'unicité d'une droite, l'intersection de deux droites, le parallélisme entre deux droites par exemple.
Une droite discrète est-elle unique ? Ceci amène naturellement la question : quels sont les éléments minimums requis permettant de savoir si un objet discret donné est une droite discrète (**R3, R3=>R2**) ? Deux points discrets, ou deux pixels suffisent-ils ? Quelle connexité faut-il choisir et quelles sont les conséquences de ces choix ?
Par deux points donnés, il passe plusieurs droites discrètes différentes : ceci peut être une source de questionnements (mais aussi de difficultés …)
Nous pouvons également porter les interrogations vers l'intersection de deux droites discrètes. Ce n'est pas parce que deux segments de droite discrets n'ont pas de point commun qu'il est possible d'affirmer que ces deux segments ne se coupent pas. En effet, deux segments 8-connexes [144] peuvent se couper sans avoir de carreau commun (on parle alors de point virtuel). Il est possible, en utilisant un système de codage, d'étudier l'intersection de deux droites discrètes. Les mêmes questionnements se posent pour la recherche de conditions

[144] Deux connexités (8-connexité et 4-connexité) sont définies §I-3.1.

nécessaires et suffisantes pour que deux segments discrets soient parallèles ou orthogonaux (pour cela, se référer à Chassery (1991)).



Intersection “virtuelle”



Un carreau d’intersection

I-2.2.4. Interrelations entre les colonnes du tableau

Au regard des questionnements proposés ci-dessus apparaissent nettement des relations entre les deux premières colonnes et la problématique axiomatique. Nous mettrons en évidence ces interrelations ci-après (dans l’étude mathématique de la construction de définition de l’objet “droite discrète” et dans l’analyse didactique des situations expérimentées)

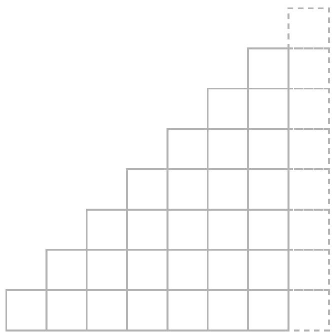
I-3. Sur les définitions de droite discrète

Etant donné l’état de l’art sur l’objet “droite discrète”, nous avons choisi de présenter ici un processus de construction de définition de cet objet, en utilisant les questionnements issus du tableau présenté ci-dessus, et en mettant en relation ce processus avec les définitions de la littérature informatique et mathématique. Ceci nous permettra de faire fonctionner la notion de *zéro-définition* de Lakatos (cf. chapitre II, paragraphe IV-4) et de montrer la richesse de l’objet “droite discrète” pour une SCD. De plus, l’analyse a priori des SCD expérimentées en sera facilitée en terme de processus de construction de définition. Nous mettrons en évidence dans cette étude l’état parfois inachevé des définitions de “droite discrète” dans les ouvrages d’informatique, de graphisme et de géométrie discrète. Ajoutons que l’objet géométrique “droite discrète” est au centre de préoccupations **pratiques** dont l’imagerie médicale : il n’y a pas, à proprement parler, de développement de théorie, ni de technologie, mais il existe, en différents endroits (algorithmique discrète, informatique, imagerie …) des techniques de construction et de reconnaissance d’objets discrets.

Notations utilisées :

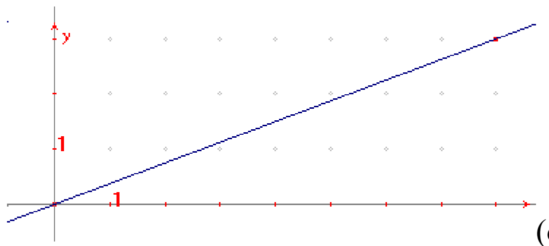
- nos *zéro-définitions* seront intitulées **ƵDef i** où i est un entier ; elles seront en caractères gras ;
- les définitions issues de la littérature seront désignées par *Def (i,α)* où i sera le numéro de la *zéro-définition* dont cette définition est issue et α sera une lettre (ordre lexicographique) ; elles seront en italiques.

Les symétries et autres transformations géométriques permettent de réduire l'étude à un octant [145]. **Tout ce qui suit est valable pour le premier octant, contenant l'origine.** Nous allons étudier des droites discrètes proches perceptivement des droites réelles, c'est-à-dire sans trou et non épaisses, que nous appellerons "**naïves**". Nous parlerons de droite discrète, mais aussi de segment de droite discret.
De plus, la restriction de l'étude au premier octant implique que les droites réelles sous-jacentes ont une pente inférieure ou égale à 1. Ainsi, considérant une séquence de pixels, nous nous déplaçons horizontalement et nous ne prenons qu'un seul pixel dans chaque colonne.



Voici le premier octant : la réduction de l'étude au premier octant permet de ne choisir, dans chaque colonne représentée, qu'un seul pixel (ceci pour l'obtention d'une discrétisation conforme à l'image que nous avons de "droite").

Différentes définitions de "droite discrète" vont donc être données ci-dessous : toutes seront illustrées sur l'exemple suivant : droite discrète (ou segment de droite discret) passant par les points (0,0) et (8,3).



(droite réelle y = 3/8 x)

Les définitions classifiées ci-dessous proviennent d'ouvrages d'informatique (informatique et graphisme : Rogers (1985) et Foley-Van Dam (1982) par exemple), de la thèse de Reveillès (1991) et de la thèse de J. Vittone (1999), cette dernière ayant donné un aperçu historique des propriétés que doit vérifier un arc discret pour être un segment de droite discrète naïve.

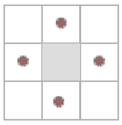
Nous faisons le choix de n'étudier que les droites discrètes dites "naïves" dans ce paragraphe : ce sont en fait les droites discrètes les plus proches perceptivement des droites euclidiennes (en terme d'épaisseur). Pour cela, nous allons préciser la connexité qui nous intéresse ci-après. Reveillès donne une définition de "droite discrète naïve" en caractérisant l'épaisseur de telles droites par max (|a|, |b|), lorsque a/b est la pente de la droite rationnelle correspondante. Nous

145 Octant : huitième de plan.

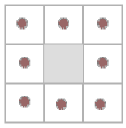
remarquons que l'étude de Reveillès est centrée sur les droites discrètes modélisées à partir de droites rationnelles (nous l'expliciterons au paragraphe I-3.2. ci-après).

I-3.1. Quelques notions de base

- Un chemin du plan discret est une suite de carreaux deux à deux connexes
- Connexité : deux connexités "naturelles" s'offrent à nous pour l'étude des droites discrètes, à savoir la 4-connexité (où nous allons considérer les carreaux connexes par un côté d'un carreau donné) et la 8-connexité (où nous allons considérer les carreaux connexes par un côté ou par un sommet d'un carreau donné). Pour un carreau donné, les 4 et 8 carreaux voisins sont représentés ci-dessous :



4-connexité



8-connexité

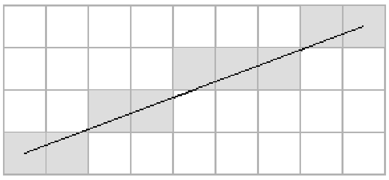
La 4-connexité est plus forte car elle impose une connexité par les côtés, contrairement à la 8-connexité qui impose une connexité par les côtés ou les sommets. Pour l'étude de droites discrètes, nous utiliserons la 8-connexité.
Soit maintenant k, avec k = 4 ou k = 8.
- Un chemin k-connexe , entre deux points discrets A et B est une suite de points discrets (P_0 , ..., P_n) avec P_0 = A , P_n = B et tels que P_i et P_{i+1} sont k-voisins (i = 0 , ... , n-1).
- Un ensemble de points est k-connexe si on peut relier deux points discrets quelconques de cet ensemble par un chemin k-connexe contenu dans cet ensemble.
- Un ensemble de points est un arc k-connexe si cet ensemble est k-connexe et si chacun de ses points possède exactement deux k-voisins excepté les extrémités.
- Un groupe de carreaux de même ordonnée (ou abscisse) se nomme « plage » ou « palier ».
- La structure d'une droite discrète est la succession de ses paliers.

I-3.2. Une première *zéro-définition* (utilisation de la droite réelle comme support physique)

Il s'agit de colorier les carreaux traversés par une droite réelle. Le problème est de savoir quels carreaux colorier : tous ou certains seulement ? comment les choisir ? Quelque soit le choix effectué (les carreaux situés au-dessus ou en-dessous de la droite réelle ou encore les carreaux "au plus près" de la droite réelle) les définitions sont équivalentes sur le fond.
Dans un premier temps, nous allons énoncer une *zéro-définition* tenant compte d'un segment réel, celui-ci étant défini par ses deux extrémités, puis, nous proposerons une *zéro-définition* utilisant la droite réelle dans son intégralité comme support de construction d'une droite discrète.

Une droite réelle est un objet géométrique défini par deux points : nous pouvons transposer ceci dans le cas discret et construire une droite discrète, deux carreaux appartenant à celle-ci étant donnés. Ceci induit un centrage de la recherche sur l'étude de la discrétisation de droites rationnelles (c'est le cas dans les travaux de Reveillès, Vittone). Mais nous n'allons pas nous limiter à la discrétisation de droites rationnelles : nous recherchons dans ce paragraphe à construire des droites discrètes à partir d'un support physique "droite réelle".

- Ƶdef 0 : la droite discrète joignant deux points P et Q est un chemin discret approximant le segment [PQ] de la droite réelle définie par P et Q



Voici un chemin discret approximant un segment réel. Peut-être en auriez-vous tracé un autre ?

Cette définition pose clairement le problème de l'unicité du chemin discret en question. Deux carreaux étant donnés, il ne détermine ainsi pas une unique droite discrète, contrairement au cas réel où la donnée de deux points permet de déterminer une unique droite réelle passant par ces deux points, ainsi que la pente de celle-ci.
De plus, une telle définition reste globale, non suffisante et surtout non opératoire, tant du point de vue de la construction que de la reconnaissance.
Nous allons formuler une *zéro-définition* plus claire quant à l'utilisation "physique" d'une droite réelle et donner les définitions de la littérature relatives à cette *zéro-définition*.

- Ƶdef 1 : une droite discrète est un ensemble de pixels traversés par une droite réelle.

Il est alors possible de distinguer des carreaux traversés strictement, ou non, par une droite réelle. Cela implique deux définitions :

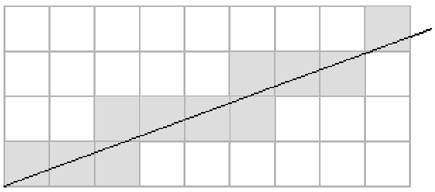
- ***Def (1,a)** : droite discrète recouvrante stricte (donnée par Reveillès –1991)*

C'est la droite formée par les pixels traversés par une droite réelle D de pente rationnelle. La droite recouvrante au sens strict est constituée des pixels que D coupe strictement.
On dit que D traverse strictement le pixel de coordonnées entières $(x_0\ ,\ y_0)$ si D rencontre son intérieur, c'est-à-dire s'il existe un point $(x\ ,\ y)\in D$ tel que $0 < \sup(|x - x_0|, |y - y_0|) < 1$.

- ***Def (1,b)** : droite discrète recouvrante large (donnée par Reveillès –1991)*

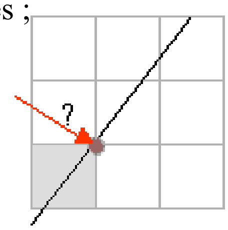
C'est la droite formée par les pixels traversés par une droite réelle D de pente rationnelle. La droite recouvrante au sens large accepte aussi les pixels intersectés au sens large.

On dit que D traverse au sens large le pixel de coordonnées entières (x_0 , y_0) si D passe par (x_0, y_0), mais ne contient que des points frontière de D.



L'utilisation des définitions *(1,a)* et *(1,b)* pour tracer une discrétisation de y=3/8x conduit au même résultat dans ce cas particulier.

Nous remarquons que ces deux définitions (*Def (1,a)* et *Def (1,b)*) ne sont pas satisfaisantes par rapport à nos critères initiaux dans la mesure où la discrétisation obtenue est "trop épaisse".
Ces deux définitions donnent un choix différent lorsqu'un point de la droite discrète est sur le maillage, elles n'apportent pas une connexité constante. En effet, si la droite réelle à discrétiser passe par un point du maillage, quatre carreaux sont alors concernés ; il **suffit** de se donner une **convention** permettant de choisir un carreau et rester cohérent avec la connexité choisie initialement, par exemple en choisissant toujours le carreau le plus à gauche et en bas du point du maillage concerné.



Comme nous l'avons questionné précédemment, comment conserver des propriétés de l'objet réel lors de la discrétisation ? Utiliser la pente dans un algorithme peut permettre de résoudre les problèmes de choix posés par l'utilisation de la droite réelle et peut donner l'impression d'aller "au plus près de" la droite réelle. Tenter de "s'approcher au plus près" d'une droite réelle donnée va donc être la préoccupation des définitions du paragraphe suivant.

I-3.3. Une deuxième *zéro-définition* (s'approcher de la droite réelle)

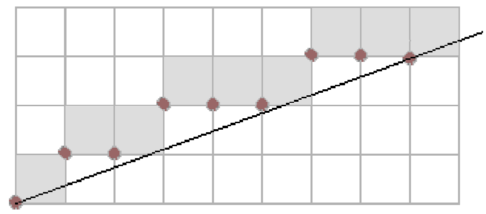
- Ƶdef 2 : une droite discrète est un ensemble de pixels les "plus près" d'une droite réelle donnée.

Le terme de "plus près" a été interprété de différentes façons : il est par exemple possible d'établir des définitions, utilisant les parties entières, supérieures ou inférieures, ce qui conduit à l'obtention de droites discrètes légèrement au-dessus ou au-dessous de la droite réelle. Nous proposons ici quatre définitions traitant "au plus près de " de différentes façons.
Les définitions (2,a) (2,b) (2,c) sont rappelées dans la thèse de Vittone (elles se réfèrent principalement à l'algorithme de Bresenham) sous l'étiquette "méthode" c'est-à-dire sous le couvert d'une présentation algorithmique. L'explicitation de la <u>représentation</u> d'une droite discrète peut expliquer l'absence de l'intitulé "définition". Comme nous l'avons expliqué en tête de paragraphe, il n'est pas tant prudent de parler de la définition du concept de "droite discrète" que de la définition de la représentation d'un ensemble de pixels appelée "droite

discrète". Ainsi, nous n'hésiterons pas à appeler "définition" des méthodes algorithmiques telles que Vittone les présentent. Soulignons la formulation de celles-ci, très semblable à ce que nous attendons communément d'une définition …
La définition (2,d), quant à elle, correspond à la définition dite "naïve" donnée par Reveillès.

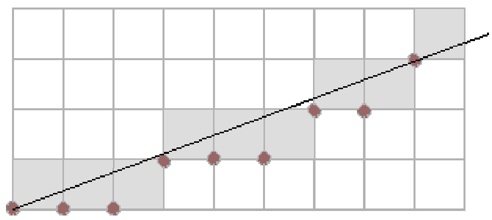
La méthode *BBQ* (*Background Boundary Quantization*) ou méthode des parties entières supérieures consiste à retenir les points discrets situés au-dessus ou sur la droite réelle à chaque fois que la droite réelle coupe une arête verticale du maillage. D'où la définition :

- ***Def (2,a)*** *(Dorst-Smeulders,1984) : la droite discrète est l'ensemble des points discrets (i,j) tel qu'il existe un point (x,y) de la droite réelle tel que x = i et 0 ≤ j – y < 1.*



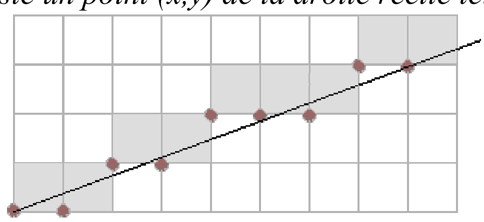
De manière analogue, la méthode *OBQ* (*Object Boundary Quantization*) ou méthode des parties entières inférieures consiste à retenir les points discrets situés au-dessous ou sur la droite réelle à chaque fois que la droite réelle coupe une arête verticale du maillage. D'où la définition :

- ***Def (2,b)*** *(Dorst-Smeulders,1984)* : *La droite discrète est l'ensemble des points discrets (i,j) tel qu'il existe un point (x,y) de la droite réelle tel que x = i et 0 ≤ y – j < 1.*



La méthode de Bresenham (ou méthode *GIQ, Grid Intersect Quantization*) consiste à retenir le point discret le plus proche de la courbe, à chaque fois que la courbe coupe une arête verticale du maillage. D'où la définition :

- ***Def (2,c)*** *(Bresenham,1965)* : *La droite discrète est l'ensemble des points discrets (i,j) tel qu'il existe un point (x,y) de la droite réelle tel que x = i et –1/2 ≤ y – j < 1/2.*

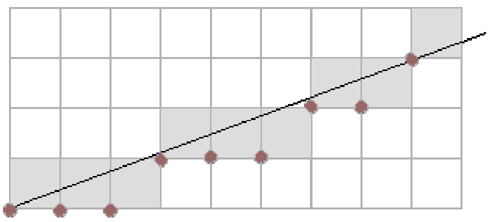


Avec les définitions ci-dessus, si D est une droite réelle donnée, les droites par défaut, par excès, de meilleure approximation entière (Bresenham) sont **équivalentes** c'est-à-dire qu'elles coïncident à translation près. En effet, le passage de la représentation par la méthode *OBQ* à celle par *GIQ* se fait par une translation de –1/2 de la droite réelle dans la direction (O*y*) et à celle par *BBQ* par une translation de –1 de la droite réelle dans la direction (O*y*).

Divers algorithmes existent mettant en œuvre ces définitions. L'algorithme de Bresenham (1965), par exemple, est le plus utilisé aujourd'hui, c'est pourquoi nous avons choisi de le présenter en annexe, à la fin de ce chapitre ; il est plutôt facile d'accès et explicite la définition (2,c) donnée ci-dessus. Soulignons que cet algorithme utilise les carreaux initial et final pour le tracé d'un segment de droite discret.
Ce qui nous amène à la définition dite "naïve" de Reveillès ; soulignons que Reveillès ne s'intéresse qu'à la discrétisation de droite de pente rationnelle a/b. Il traduit la notion de "au plus près" par une propriété arithmétique utilisant la partie entière. Ainsi,

- ***Def (2,d)*** *(définition "naïve" – Reveillès, 1991) : une droite réelle peut être approchée par la droite discrète naïve constituée par l'ensemble des points (i , [ai/b]) lorsque* $i \in \mathbf{Z}$ *([ ] désigne la partie entière) où a et b sont premiers entre eux.*

Ce que nous pourrions aussi décrire par l'algorithme suivant : la droite discrète est l'ensemble des points discrets de coordonnées les parties entières de *x* et de *y*, où *x* et *y* prendront les valeurs *x* := *x*+1 et *y* := *y*+p à chaque itération (p étant la pente de la droite rationnelle).



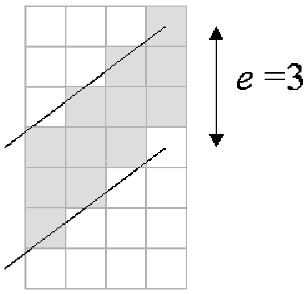
En terme de fonction de définition", les définitions données ci-dessus traitant la notion de "au plus près" répondent à une problématique de construction, et utilisent une droite réelle comme support physique. La reconnaissance d'une droite discrète avec ces mêmes définitions se révèle difficile, à moins d'être capable de retrouver une droite réelle permettant d'obtenir la discrétisation donnée. Le problème sera alors, un ensemble de pixels étant donné, d'obtenir une droite réelle, de le discrétiser et d'en vérifier l'adéquation avec l'ensemble de pixels de départ.

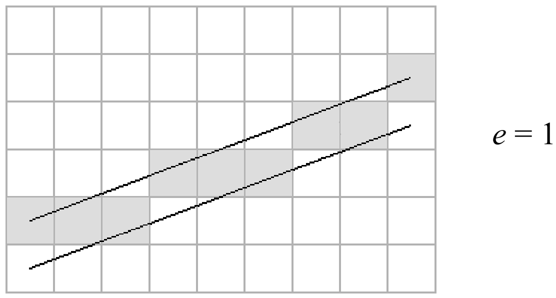
Nous avons présenté des définitions tentant de s'approcher au plus près de la droite réelle, en ne traçant que la droite réelle. Les définitions suivantes s'intéressent à s'approcher de la droite réelle, mais en se servant d'une bande (et non plus de la droite réelle seule) comme support physique.

I-3.4. Une troisième *zéro-définition* (utilisation d’une bande)

Nous allons ici utiliser une bande comme support physique de tracé : une bande est formée de deux droites réelles parallèles distantes de *e* (que nous appellerons *épaisseur*).

- Ƶdef 3 : une droite discrète est un ensemble de pixels situés “à l’intérieur” d’une bande d’épaisseur *e*. Ces pixels sont ceux dont la surface d’intersection avec l’intérieur de la bande est la plus grande (on prendra *e* pixels par colonne)





Les droites qui nous intéressent sont celles d’épaisseur $e = 1$: nous ne prendrons donc qu’un seul pixel par colonne après la définition (3,a).

- ***Def (3,a)*** *(Reveillès, 1991): une droite discrète est l’ensemble des points entiers d’une bande plane ; autrement dit, c’est l’ensemble des points (x,y) de* Z^2 *vérifiant deux inégalités :* $\gamma \leq ax-by < \gamma'$ *où a, b,* γ *et* γ' *sont réels, a et b premiers entre eux.*

Dans cette définition, Reveillès indique que :

la pente est a/b ;
le vecteur (-a,b) est le vecteur normal de la droite ;
les entiers γ et γ' sont les bornes de la droite ;
l’entier $\omega = \gamma' - \gamma$ est l’épaisseur arithmétique de la droite (attention : ne pas confondre ce que nous avons appeler épaisseur et ce que Reveillès appelle épaisseur arithmétique).

Rappelons ici quelques mots de Reveillès pour compléter la définition donnée ci-dessus et montrer ainsi sa problématique axiomatique :

> *« Disons brièvement qu’une droite discrète est l’ensemble des points entiers d’une bande rationnelle et que cette notion dépend d’un paramètre entier : l’épaisseur arithmétique w. C’est le lien cherché entre les domaines discret et discret idéal (…) Disons que sur ces droites, on définit des relations de parallélisme, d’orthogonalité, des symétries, qu’on peut étudier l’ensemble des droites passant par deux points, l’intersection de deux droites, la notion de segment, les inclusions de segments, la convexité, la dualité etc. Cependant leurs propriétés sont sensiblement différentes de celles de la géométrie usuelle ; par exemple, deux droites discrètes distinctes peuvent, si leur épaisseur est petite, ne s’intersecter en aucun point*

> *(…) toutefois, leur intersection sera non vide si leurs épaisseurs sont des entiers infiniment grands »* (Reveillès, 1991, p.33s).

Reveillès propose ainsi la définition *Def (3,a)* (dite *diophantienne* ou *arithmétique*) contenant, d'après Vittone, toutes les approches effectuées jusqu'alors. Il est possible de montrer que toute droite discrète obtenue avec l'une des autres définitions (autres que celle de Reveillès) est caractérisable par la définition diophantienne (i.e. il est possible de trouver a, b, γ et γ' tels que la définition diophantienne corresponde à une droite discrète donnée par l'une des autres définitions antérieures à celle de Reveillès. Une partie des démonstrations est disponible dans la thèse de Reveillès (1991)).

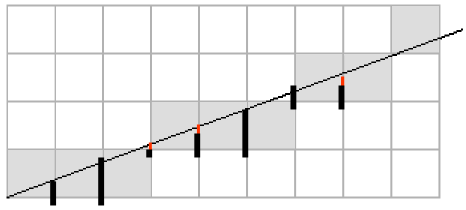
Jusqu'à présent, nous n'avons véritablement apporté de réponses qu'à la problématique de "construction d'une droite discrète", en utilisant une droite réelle comme support physique. Maintenant que nous avons construit des objets que nous appelons "droite discrète", il va s'agir de mettre en place des critères de reconnaissance de ces objets. Nous avons pour cela deux possibilités :

- reprendre les précédentes définitions et rechercher des propriétés concernant la structure des droites discrètes (i.e. la structure des paliers) ;
- se poser la question de la régularité pour elle-même (deuxième colonne du tableau).

La première possibilité a été étudiée par Reveillès : rechercher une définition structurelle signifie qu'il faut définir "droite discrète" de par l'étude de la structure (morphologie) d'une droite discrète. En particulier l'étude de la régularité des paliers peut aboutir à une définition. L'analyse arithmétique permet une compréhension approfondie de la structure d'une droite discrète[146] (cf. Reveillès – p.58s), le résultat en est l'algorithme de tracé suivant, aussi performant d'après Reveillès que celui de Bresenham. Remarquons qu'il est nécessaire de connaître la pente rationnelle (toute l'étude de Reveillès est restreinte à la discrétisation de droites rationnelles) et d'effectuer un calcul arithmétique : cet algorithme est en fait un théorème relevant de la *zéro-définition* Def2, et plus précisément des définitions Def2b et Def2d (voir dessin ci-dessous) :

- ***Algorithme de tracé*** *(Reveillès) : la droite discrète modélisant la droite rationnelle de pente a/b est une suite de paliers. Chacun de ces paliers correspond à une séquence croissante de la suite des restes de la division euclidienne de ax par b, $x \in Z$. Cette suite peut être obtenue par le principe suivant : « Partir de la valeur nulle et ajouter a à la somme en cours si celle-ci est inférieure à (b-a), retrancher (b-a) sinon ».*

[146] *« (…) les formules qui définissent les points de (D) ne pouvant pas être utilisées directement pour analyser ses structures. L'enjeu va consister essentiellement à les dégager peu à peu de la définition en suivant un chemin qui soit le plus proche possible du terrain algorithmique »* (Reveillès – 1991 – p.45).



Voici l'origine de cette caractérisation par les restes et l'illustration de ce résultat sur un exemple.
Si nous mettons en oeuvre un algorithme de tracé pour une droite naïve de pente *a*/*b* passant par l'origine : il s'agit de représenter les points de coordonnées entières (x,y) tels que $y = \left[\frac{ax}{b}\right]$ où $x \in Z$.

Cette droite représente donc une suite arithmétique tronquée par la fonction partie entière.

La division euclidienne de *ax* par *b* donne : $\frac{ax}{b} = \left[\frac{ax}{b}\right] + \frac{\left\{\frac{ax}{b}\right\}}{b}$ où $\left\{\frac{ax}{b}\right\}$ est le reste de cette division (il appartient à [0,b[). Ainsi, la droite naïve est une approximation par défaut de la droite rationnelle d'équation $y = ax/b$ et l'erreur commise lors de cette approximation est proportionnelle au reste (i.e. à *ax* modulo *b*). Reveillès note que, *« paradoxalement (...) toute l'information sur une droite discrète est contenue dans sa suite des restes »* (Reveillès, p.59).
Ainsi, les paliers de la suite des parties entières correspondent exactement aux séquences montantes de la suite des restes (notons que la suite des restes est périodique de période *b*).

Reprenons l'exemple précédent : soit la droite rationnelle de pente 3/8 passant par l'origine.
Les valeurs d'une période de ces deux suites sont les suivantes :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\left[\frac{ax}{b}\right]$	0	0	0	1	1	1	2	2
$\left\{\frac{ax}{b}\right\}$	0	3	6	1	4	7	2	5

Chaque séquence montante de la suite des restes correspond effectivement à un palier. La connaissance de cette suite permet de connaître l'algorithme de parcours (savoir si du point $(x,y) \in Z^2$ on doit passer au point $(x+1, y)$ ou au point $(x+1, y+1)$).
Pour obtenir "rapidement" cette suite des restes, il suffit d'appliquer le principe suivant : « Partir de la valeur nulle et ajouter *a* à la somme en cours si celle-ci est inférieure à *(b-a)*, retrancher *(b-a)* sinon ».

Il nous reste à espérer que cette suite des restes va pouvoir être caractérisée pour elle-même, sans appel à des considérations arithmétiques utilisant la pente rationnelle.

Synthèse sur les *zéro-définitions* précédentes
Les *zéro-définitions* 1,2,3 étudiées précédemment répondent à une problématique commune référant à la droite réelle (ressemblance géométrique). Dans la *zéro-définition* 1, les carreaux traversés par une droite réelle donnée sont considérés. Dans la *zéro-définition* 2, on s'intéresse aux carreaux "les plus près" d'une droite réelle donnée et dans la *zéro-définition* 3, ce sont les carreaux situés "à l'intérieur" d'une bande qui sont retenus.
La problématique à laquelle nous allons nous intéresser maintenant est une problématique de reconnaissance, sans se référer à la droite réelle comme support physique. Nous allons nous intéresser aux paliers (i.e. à la position relative des pixels les uns par rapport aux autres) et à la régularité de ces paliers, toujours dans le premier octant et pour une 8-connexité. Nous allons donc rechercher des propriétés relatives à la séquence de ces paliers. Remarquons que, dorénavant, nous parlerons davantage de segment de droites discrètes, ce qui nous conduira à l'étude de la reproductibilité de segments de droites discrètes pour définir droite discrète.

I-3.5. Des définitions intrinsèques

- Ƶdef 4 : une droite discrète est une séquence de paliers …p_1 p_2 p_3 … p_n … vérifiant certaines propriétés.

La recherche de ces propriétés a notamment engagé les chercheurs dans des procédures de codages et donc dans un examen des propriétés de ces codes. C'est le cas par exemple de Freeman. Il en résulte des critères, des caractérisations permettant de dire si un arc 8-connexe est un segment de droite discret. Il n'est donc pas toujours question de "définition", ce qui nous amène à poser la question suivante : lorsque Freeman, Rosenfeld, donnent des critères, quelle est pour eux la (ou une) définition de droite discrète ? Il semblerait que ce soit la *propriété de la corde* que nous allons présenter ci-après.
Nous allons présenter différentes caractérisations (pour conserver le vocabulaire d'origine des auteurs), en les étiquetant "définition" (ce sont des caractérisations qui pourraient être prises comme définition, même si elles ne sont pas en réalité des conditions nécessaires et suffisantes).

La question initiale est donc la suivante : à quelle(s) condition(s) un arc 8-connexe est-il un segment de droite discret ? Les pistes de recherche, historiquement, ont été les suivantes :
- utiliser un segment réel dont le segment discret en question est une discrétisation ;
- établir une reconnaissance dite *syntaxique*, s'intéressant à la structure de la séquence des paliers. Cette piste découle du point précédent.

Ceci nous montre en particulier toute la difficulté (l'impossibilité ?) de se placer dans une problématique uniquement axiomatique, sans utiliser la droite réelle comme référent.

D'après l'historique des définitions de "droite discrète" effectué par Vittone (1999), les caractérisations de Freeman et Rosenfeld sont équivalentes à la propriété de la corde (Rosenfeld).

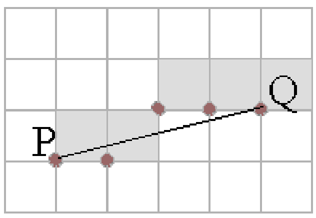
La propriété de la corde, établie par Rosenfeld, est liée à la représentation d'un segment réel. L'idée sous-jacente est la suivante : un ensemble de pixel E sera un segment de droite discret s'il existe un segment de droite réel dont la discrétisation donne E.
Rosenfeld montre qu'un arc 8-connexe est un segment de droite discrète naïve si et seulement s'il vérifie la ***propriété de la corde***. Voici cette propriété :

On appelle E un ensemble de pixels. On lui associe S un ensemble de points discrets (i.e. des points du maillage correspondants, par exemple, les points du maillage en bas à gauche de chaque pixel).
Wu (1982) a montré que la propriété de la corde de Rosenfeld est en fait une condition nécessaire et suffisante :

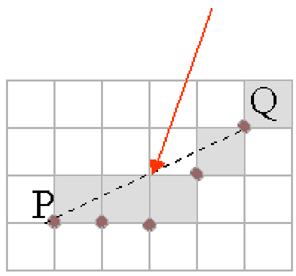
- ***Propriété de la corde*** *(Rosenfeld, 1974)* (in Chassery-Montanvert)

Soit S un ensemble de points discrets. On dit que S vérifie la propriété de la corde si pour tout couple (P,Q) de points de S et pour tout R appartenant au segment de droite réel joignant P à Q, il existe un point (discret) T de S tel que $d_\infty(T,R) < 1$.

Illustration



Cet ensemble de pixels
a la propriété de la corde.



Cet ensemble de pixels n'a pas
la propriété de la corde (le point désigné par la flèche est en cause).

Toujours dans la même idée, si l'on cherche un segment de droite réelle dont la discrétisation donne un ensemble de pixels donné, nous avons les résultats suivants (cf. Vittone - 1999) :

Ronse (1985) a montré que pour tout segment discret, il existe au moins un segment réel. Si nous notons E un ensemble de pixels, Nakamura (1985) a montré comment obtenir l'ensemble $\mathcal{E}$ des segments réels tel que E est la discrétisation d'un quelconque élément de $\mathcal{E}$. (pour cela, on associe à chaque point discret de E le segment vertical du maillage de longueur 1, semi-ouvert en haut. Un segment réel appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il ne coupe le maillage que sur les segments semi-ouverts précédemment définis)

Les codes de Freeman

3	2	1
4		0
5	6	7

Codes de Freeman des directions en 8-connexité

Pour les courbes 8-connexes, on associe à chaque direction un code variant de 0 à 7. On code ainsi les déplacements dans chaque direction. Le code de Freeman d'une courbe discrète 8-connexe (celle qui nous intéresse) consiste pour tout point P_i de la courbe, à conserver la direction suivant laquelle il est obtenu depuis le point P_{i-1} où P_{i-1} et P_i sont 8-voisins. Ce code est invariant : strictement en translation ; à une constante additive près modulo 8, en rotation ; à la longueur des sous-chaînes près en homothétie. Puisque nous nous limitons au premier octant, seules les valeurs 0 et 1 apparaîtront dans les codes.
Ce qui est appelé la discrétisation de Freeman est contenu dans la définition suivante :

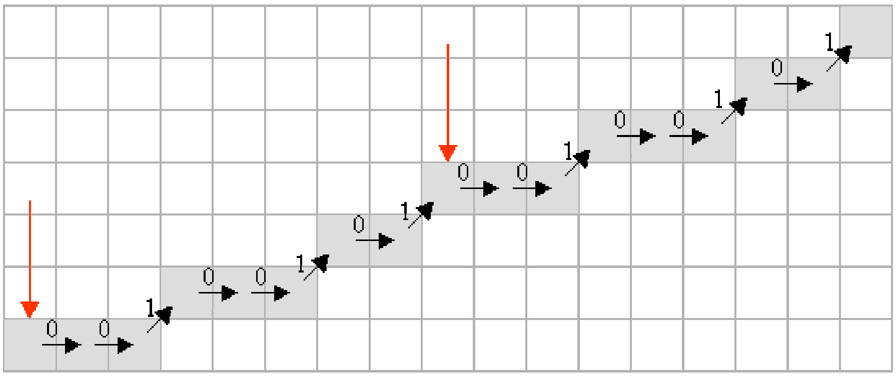
- ***Def (4,a)*** [147] *(caractérisation de Freeman)* : *le code d'un arc 8-connexe est celui d'un segment de droite si et seulement s'il vérifie trois critères :*

1- *au plus deux directions peuvent être présentes dans le code et ne peuvent différer que d'une unité modulo 8,*
2- *une des deux directions apparaît toujours de manière isolée,*
3- *la direction isolée est espacée de manière uniforme dans le code.*

Le troisième critère est difficilement interprétable. Nous avons tenté d'utiliser cette caractérisation sur les tracés réalisés précédemment avec chaque définition.
Les critères 1 et 2 sont vérifiés (la direction isolée est 1), mais le troisième critère pose de nombreuses questions quant à la signification de l'*uniformité* … Remarquons que, de toute façon, la vérification du critère 3 ne peut se faire que lorsque l'arc 8-connexe est suffisamment long et permet ainsi l'obtention d'un code de Freeman où le repérage d'une répartition uniforme de la direction isolée est facile à déterminer. La connaissance de ce que nous pourrions appeler période peut peut-être faciliter la tâche. L'exemple ci-dessous montre

[147] L'étiquette "définition" nous incombe.

le segment de droite reliant (0,0) à (3,8) ainsi qu'un prolongement de celui-ci. Les flèches désignent une possible période. Le code de Freeman est le suivant sur (0,0) à (3,8) :



La caractérisation de Freeman a été reformulée par Rosenfeld (en particulier le troisième critère), ce qui nous permet d'énoncer la caractérisation suivante, utile pour la reconnaissance de droites discrètes :

- ***Def (4,b)*** [148] *(caractérisation de Freeman-Rosenfeld): le code d'un arc 8-connexe est celui d'un segment de droite si et seulement s'il vérifie les critères suivants :*

1- *au plus deux directions peuvent être présentes dans le code et ne peuvent différer que d'une unité modulo 8*

2- *le code d'une droite est composé au plus de deux types de fragments comportant la direction isolée ;*

3- *la longueur de ces fragments diffère d'au plus une unité.*

Cette définition est incomplète car il n'y a pas d'itération de ces propriétés (voir le contre-exemple ci-après).

Nous sommes clairement sur une problématique de reconnaissance, qui peut être exprimée sans l'utilisation des codes de Freeman. Nous allons énoncer une définition reprenant sur le fond les caractéristiques énoncées à l'aide des codes de Freeman, et dont la forme est naturelle. C'est ce que les graphistes appellent la "caractérisation syntaxique" (cf. Chassery (1991)). Cette définition s'intéresse explicitement à la séquence des paliers. Soulignons que Chassey et Montanvert parlent de "caractérisation syntaxique" et non pas de définition, mais que par ailleurs, leur ouvrage ne contient pas d'énoncés intitulés "définition", mais seulement des "caractérisations". De plus, à la lecture de l'énoncé ci-dessous, il ne semble pas faire de doute quant au statut de définition que nous lui imputons :

- ***Def (4,c)*** *(in Chassery & Montanvert)* :

- un segment de droite discret est formé de sections, une section étant caractérisée par une suite de taille maximale de directions identiques qui définissent la direction de la section (huit directions sont possibles) ;

[148] L'étiquette "définition" nous incombe.

- les sections formant un segment de droite discret ont au plus deux directions distinctes qui diffèrent d'une unité (d'un angle de 45°) ; on parle de directions voisines ;
- pour l'une de ces directions, les sections sont toutes de longueur 1 ;
- pour l'autre direction, les sections (exceptées la première et la dernière) ne peuvent avoir pour longueur que deux valeurs distinctes qui ne diffèrent que d'une unité (soit n et n+1). De plus, l'une de ces valeurs n'apparaît que de manière isolée.

Cette définition est incomplète, tout comme la précédente, car il n'y a pas d'itération de ces propriétés. Nous allons donner un contre-exemple ci-après, mais tout d'abord, énonçons un théorème permettant de caractériser une droite discrète. Ce théorème sera très opératoire pour la reconnaissance d'une droite discrète, et est semblable aux définitions *(4,a) (4,b) (4,c)*. Nous donnerons l'idée de la preuve de ce théorème, en nous servant de la définition *(2,c)*. Ce théorème pourra ainsi être pris comme définition par la suite.

Soit un ensemble de pixels 8-connexe (dans le premier octant, un seul pixel par colonne lorsqu'on se déplace horizontalement). On caractérise cette séquence de pixels par des entiers $(p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots)$ représentant la longueur de chaque palier (i.e. le nombre de pixels formant un palier). On notera S_0 cette séquence.

Théorème : *une séquence de paliers est une droite discrète si et seulement si :*

- *c'est un arc 8-connexe ;*
- *S_0 et toute séquence issue de S_0 vérifient (P_i) $(i\geq 1)$*

On note (P_i) l'ensemble des propriétés suivantes :

- *La séquence S_i ne comprend que deux valeurs différant de 1 : soit n_i et n_i+1*
- *On remplace la séquence S_i par une nouvelle séquence notée S_{i+1} composée des longueurs des fragments ne comportant pas la valeur isolée.*

Idée de la preuve [149]
Soient $y = f(x)$ une droite réelle (en noir) et les points discrets associés (obtenus avec *Def(2,c)* - figure 1 ci-après).
Dans la séquence discrète, on note p la longueur du palier qui se répète et $p\pm 1$ la longueur du palier dit isolé dans la séquence.
On construit $x = f^{1}(y) - py$: c'est bien une droite réelle (figure 2 ci-après). La discrétisation de cette droite réelle donne des paliers de longueurs égales aux nombres de répétitions des paliers non isolés de la droite discrète initiale plus un.

[149] Il est toujours possible de se ramener au premier octant, si nécessaire, par symétrie.

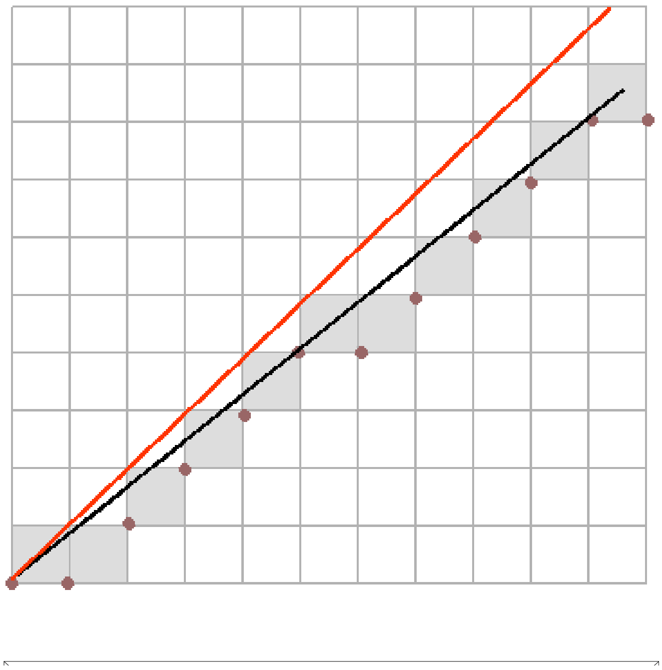


Figure 1

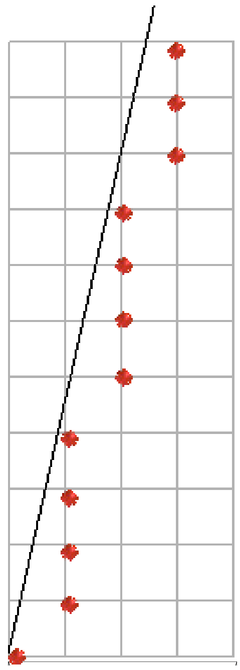


Figure 2

□

Ce théorème peut maintenant être pris comme définition de “droite discrète”

Contre-exemple aux définitions 4 précédentes

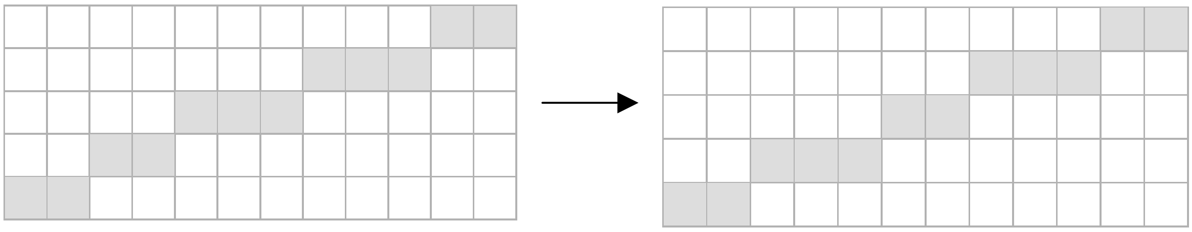
Soit (S) la séquence de longueurs de paliers suivante : 1-1-2-1-2-1-1-2-1-2-1-1-2-1-2-1-2-1-1-2-1-2-1-2.
2 apparaît comme valeur isolée, et pourtant, cette séquence n’est pas une droite : en effet, en itérant suivant le théorème ci-dessus, nous obtenons la séquence : 2-1-2-1-2-1-1-2-1-1 dans laquelle 2 est encore la valeur isolée et à l’itération suivante : 1-1-2-2, il n’y a plus de valeur isolée. Ainsi, la séquence (S) n’est pas une droite suivant notre théorème, mais en est une pour les définitions 4.

Rechercher à rendre une séquence discrète la plus “**régulière**” possible, en **modifiant les paliers** (recherche d'une répartition uniforme de ces paliers) aboutirait à cette définition également. Par exemple, si l'on veut discrétiser une droite réelle de pente 4,7 on construira une séquence discrète comprenant des paliers de longueur 4 et 5 : 4,7 étant plus proche de 5, les paliers de longueur 4 seront des paliers isolés.
Ainsi, nous pouvons énoncer une *zéro-définition* supplémentaire reprenant cette idée :

– Ƶdef 5 : une droite discrète est une séquence de pixels ayant une répartition uniforme de paliers qu’on ne peut plus améliorer du point de vue de la régularité.

Exemple : soit une séquence de carreaux avec des paliers de longueurs 2 et 3, par exemple 2-2-3-3-2-2-3-3-2 … Cette séquence peut être modifiée en 2-3-2-3-… Il apparaît alors un palier isolé (2 ou 3). Perceptivement, nous avons obtenu une répartition uniforme de paliers.

Lorsqu'il n'est plus possible d'améliorer cette répartition, nous obtenons alors une droite discrète.



I-4. Types de SCD avec l'objet « droite discrète »

L'objet géométrique "droite discrète" peut faire l'objet d'une situation de type CLASSIFICATION : en effet, c'est un objet accessible géométriquement et il est envisageable de réaliser une situation analogue à la situation "arbre", à partir d'exemples et contre-exemples identifiés ou non. Cependant, "droite discrète" est un concept encore en construction dans la recherche actuelle, plus problématique que "arbre". De plus, un référent extérieur est dans ce cas désigné (droite euclidienne), contrairement à la situation "arbre" qui n'impliquait pas de référent particulier. Ainsi, une situation de construction de définition de "droite discrète" de type CLASSIFICATION est possible, mais déjà plus problématique mathématiquement, qu'une demande explicite de définition soit formulée ou non.
Un référent extérieur étant naturellement désigné (droite euclidienne) dans une étude de l'objet géométrique "droite discrète", une situation de construction de définition de type MATHEMATISATION/MODELISATION peut être conçue. De plus, nous avons étudié différentes problématiques autour de l'objet "droite discrète" : il s'agit des problématiques de construction, de reconnaissance et de la problématique axiomatique. Celles-ci permettent de concevoir des problèmes dont la résolution nécessite une construction de définition de "droite discrète", c'est-à-dire des situations de construction de définition de type RESOLUTION DE PROBLEMES. En effet, "droite discrète" est un objet géométrique discret pouvant intervenir dans la construction d'autres objets géométriques discrets, à l'image de la droite euclidienne. S'intéresser à la construction d'objets géométriques tels que les triangles discrets implique des questionnements de type axiomatique sur ces objets discrets, dans une perspective de construction de ceux-ci.

II- Deux situations expérimentales : problèmes posés

II-1. Choix des situations

Reprenons nos problématiques initiales sur les “droites discrètes” :

Problématique / Fonction de la définition	Droite réelle (support)	Etude des carreaux Régularité	Axiomatique
Construction	C1	C2	C3
Reconnaissance	R1	R2	R3

Problématiques “droites discrètes”

L’analyse mathématique de l’objet “droite discrète” a souligné l’omni-présence de la problématique “axiomatique”. En effet, la reconnaissance ou la construction de “droites discrètes” pose des questionnements de nature axiomatique, que ce soit dans une problématique d’utilisation de la droite réelle ou dans une problématique n’en appelant qu’à l’aspect “régularité” de tels objets géométriques. L’étude d’objets discrets dans une perspective uniquement axiomatique ne nous semble pas pertinente auprès d’étudiants de première année d’université encore peu familiarisés avec des questionnements de cette nature. C’est pourquoi nous avons conçu deux situations où la problématique axiomatique existe mais n’est pas isolée. La première problématise l’objet géométrique “droite discrète”, sans demander explicitement de définition ; l’élaboration d’une définition est laissée à la charge des étudiants. Nous attendons que les étudiants en appellent à la construction de définition dans cette situation de type RESOLUTION DE PROBLEMES. La seconde situation contient une demande explicite de définition et est de type CLASSIFICATION.

Première situation : type RESOLUTION DE PROBLEMES

La première situation expérimentée met en jeu des triangles discrets : aucun dessin n’est donné aux étudiants, mais la consigne demande de construire des triangles discrets et d’en expliquer la construction. La problématique axiomatique (3ème colonne du tableau) a réellement une place importante (questionnements relatifs aux points, segments reliant ces points, intersections de segments etc.) alors que la problématique ayant trait à la deuxième colonne du tableau est plus faible, les segments tracés pour la construction de triangles discrets étant courts ; ne serait-ce que perceptivement, l’aspect régularité n’est que faiblement présent. Nous avons réalisé une situation de réinvestissement du travail réalisé sur les triangles discrets, toujours en ne demandant pas explicitement de définition de “droite discrète”.

Seconde situation : type CLASSIFICATION
La seconde situation expérimentée met en scène des courbes discrètes, le problème étant de reconnaître lesquelles sont des “droites discrètes”. Dans cette situation, contrairement aux triangles, la problématique axiomatique est plus faible, alors que la problématique concernant la régularité est plus importante : les courbes discrètes sont plus longues que ne le sont des triangles discrets. Pour cette situation, nous n’avons pas prévu de situation de réinvestissement des définitions produites par les étudiants, contrairement à “arbre”. En effet, l’objectif de définir “droite discrète” est ambitieux, et nous n’attendons pas une définition nécessairement achevée. Notre but est d’observer la problématique de définition des étudiants, notamment par rapport aux différentes colonnes du tableau ci-dessus, en particulier la colonne “axiomatique” : nous allons pour cela spécialement intéressés aux changements de point de vue (combinatoire, graphique, axiomatique) des étudiants pour montrer la richesse de leurs questionnements.

II-2. Situation sans demande explicite de définition : les triangles discrets – problématique “axiomatique” : problème posé

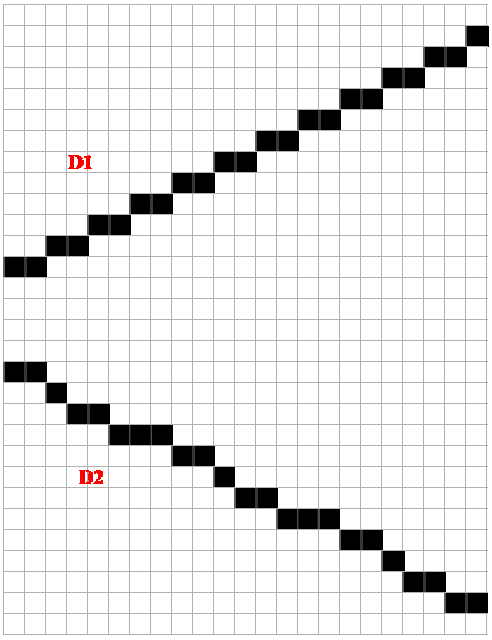
Cette expérimentation a été réalisée en deux temps (deux fois trois heures environ), avec des étudiants de Deug Première Année (filières MIAS).

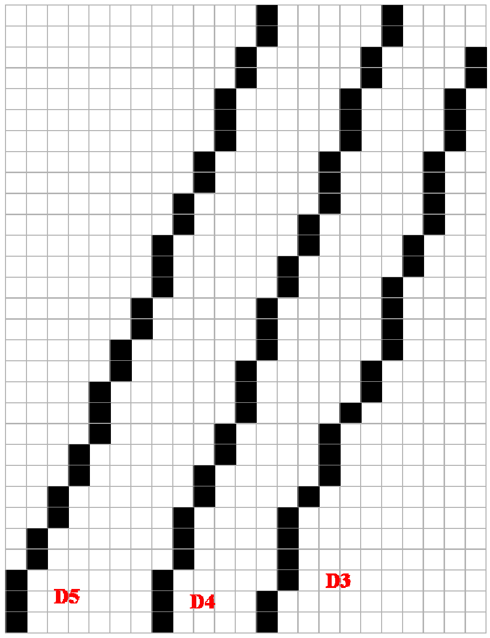
- La **première séquence** est la suivante (3 étudiants)[150] :

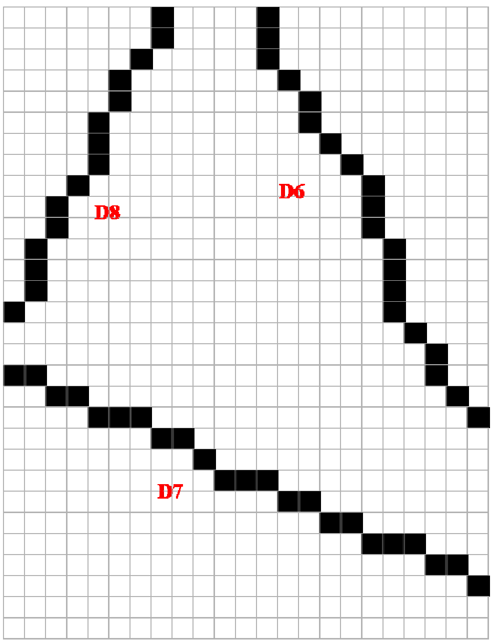
On veut colorier des carreaux d’une grille régulière (ci-jointe). Dessinez des triangles (en coloriant des carreaux). Expliquez votre construction.

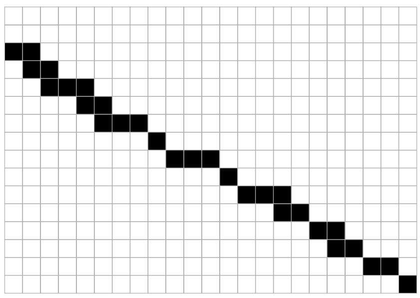
- La **seconde séquence** a été conçue au regard des résultats obtenus lors de la première séquence ; 2 des 3 étudiants ayant assistés à la première séance ont participé, une semaine s’est écoulée entre les deux séquences. Cette séquence comporte deux phases : nous avons tout d’abord demandé aux étudiants de rappeler leur travail précédent. Une demande de reconnaissance d’objets (droites ou pas droites) leur a été ensuite posée[151].

[150] Une seconde question était prévue (mais elle n’a pas été donnée aux étudiants, faute de temps dans la première séquence) Conjecture : les médianes d’un triangle sont concourantes.
[151] Nous avions éventuellement prévu de demander explicitement une définition de “droite discrète”, mais nous ne l’avons pas fait.







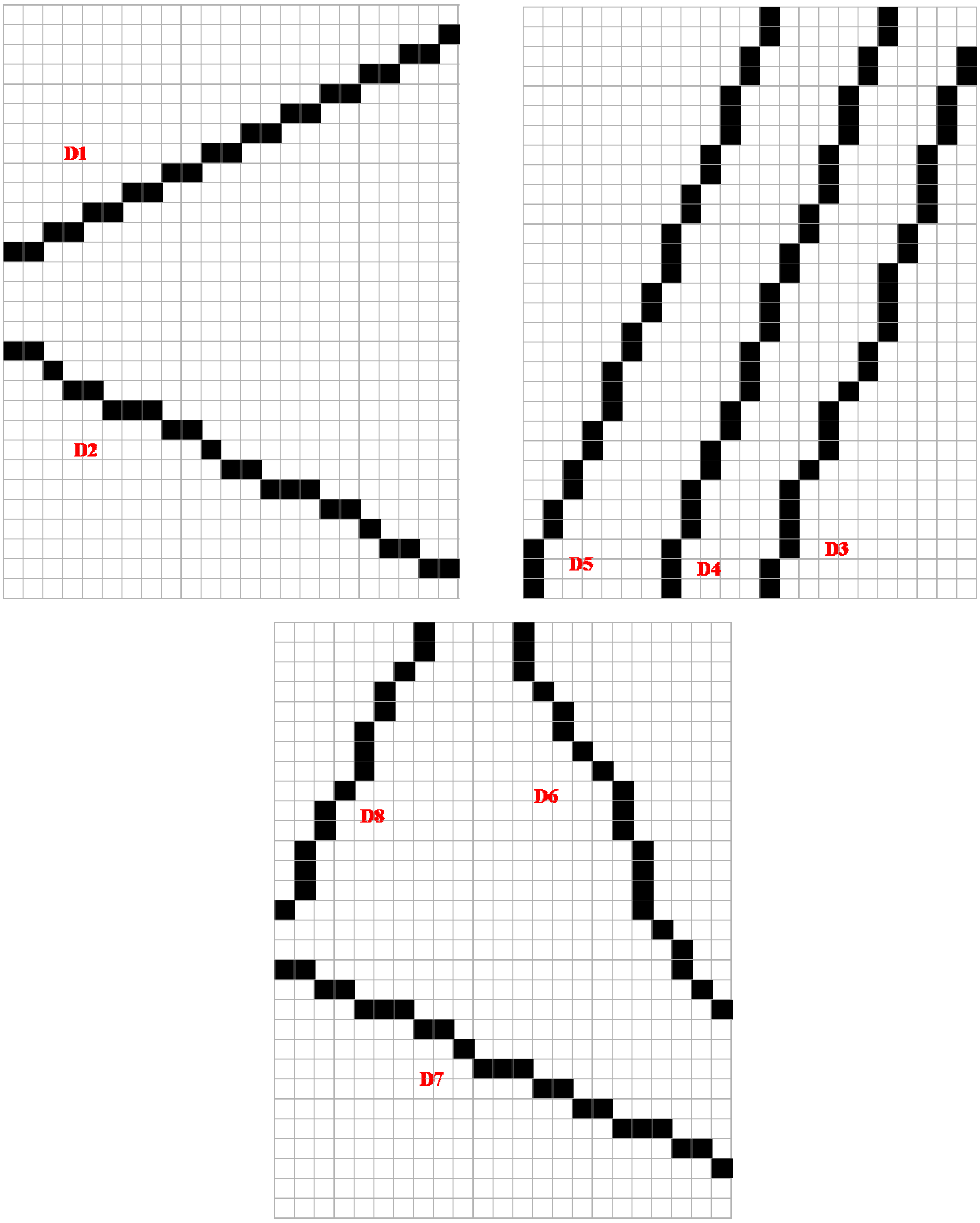


D9

II-3. Situation avec demande explicite de définition – problématique “régularité” : problème posé

Consigne : voici des objets qui sont des droites, et d’autres qui n’en sont pas. Dans ce contexte, on colorie des carreaux. La question que l’on se pose est la suivante : comment définir « droite » à partir de ces éléments ?
(NB : cette consigne n’a été donnée qu’oralement)

Des objets discrets ressemblant tous plus ou moins à des droites discrètes, nommés Di ($i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 8$) sont donnés sur des feuilles quadrillées : leur nature (droite discrète ou non) n’est pas dévoilée par l’observateur.



II-4. Types de tâches en jeu dans ces deux situations

Nous avons dans ces situations deux tâches distinctes : la première est la **construction** de triangles discrets (première situation). Le traitement de cette tâche comprend la construction de définition de “droite discrète”. La seconde tâche est la **reconnaissance** de “droites discrètes” parmi des exemples et des contre-exemples non identifiés (première et seconde situation). Celle-ci comprend également la construction de définition de “droite discrète”. Dans les faits, nous avons choisi de formuler une demande explicite de définition dans la seconde situation au regard des résultats obtenus sans demande de définition dans la première situation. Cela nous permettra en particulier d’analyser ce qu’une demande explicite de définition apporte au travail mathématique des étudiants.
Nous allons donc analyser trois tâches :
$\mathbf{t_1}$: construction de triangles discrets ;
$\mathbf{t_2}$: reconnaissance de droites discrètes sans demande explicite de définition de “droite discrète” ;
$\mathbf{t_3}$: reconnaissance de droites discrètes avec demande explicite de définition de “droite discrète”.
Remarquons que l’analyse mathématique des tâches $\mathbf{t_2}$ et $\mathbf{t_3}$ est la même : en revanche, l’analyse a priori diffère.

III- Analyses mathématiques et analyses a priori des tâches t_i

III-1. Tâche t_1 : construction de triangles discrets

III-1.1. Analyse mathématique de t_1

Le point de départ est ici, non pas des droites discrètes, mais des triangles discrets. Ainsi, le premier référent est “triangle réel”. Un triangle de la géométrie euclidienne est défini de manière unique par la donnée de trois points, de trois angles et d'un segment ou de trois droites. La problématique de **construction** de triangles discrets est doublée d’une problématique **axiomatique**. En effet, utiliser le référent “triangle réel” pour construire des triangles discrets questionne la construction de droites discrètes, deux pixels étant donnés, mais aussi l’existence de l’intersection de deux droites discrètes. Il s’agit alors de définir “segment discret” et “droite discrète” et d’étudier le comportement de cet objet géométrique. Il apparaît ainsi un second référent potentiel à savoir la droite réelle.

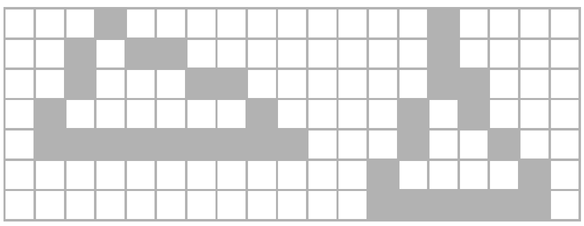
Comment définir “droite discrète” ?

Pour répondre à cette question, nous allons reprendre les étapes de la présentation du paragraphe I et mettre en évidence la double problématique construction-axiomatique. Ceci est traité dans les paragraphes ci-après.

III-1.2. Analyse a priori de t_1

Dans cette tâche, nous avons une demande explicite de construction d'objets discrets (triangles). Il y a une problématique axiomatique forte, dans laquelle deux fonctions de la définition sont en jeu (construction, reconnaissance). De plus, l'aspect "régularité/linéarité" est peut-être plus faible pour des triangles discrets que pour des droites discrètes. Nous pouvons en effet supposer que les triangles discrets tracés par les étudiants seront de petite taille, même si nous leur donnons des feuilles A3. Ainsi, l'aspect "régularité" développé dans le paragraphe I-2 peut apparaître plus faiblement que pour des droites discrètes, tracées sur toute la longueur d'une feuille A4.

Par référence à un triangle réel, un triangle discret peut être défini par trois pixels par les étudiants. Il s'agit alors de relier trois pixels donnés par trois segments de droites discrets. Par ailleurs, un triangle discret peut être perçu comme formé de trois segments de droites discrets qu'il va alors falloir construire.
Lorsqu'un triangle discret est défini par trois carreaux, il s'agit de tracer trois segments discrets les reliant et ainsi le problème de l'intersection de ces segments ne se pose pas explicitement. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'un triangle discret est défini par les trois droites discrètes supports des côtés.
L'intersection de deux droites discrètes peut être 0, 1, 2 carreaux voire plus. Ceci peut poser des questions de nature axiomatique par rapport à la géométrie euclidienne où deux droites non parallèles s'intersectent en un point et un seul.
De plus, l'aspect **perceptif** des triangles tracés est important : en effet, des triangles discrets peuvent avoir une allure "creuse", "bombée" (voir ci-dessous).



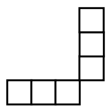
Tracer des triangles discrets en appelle donc à construire des segments, des droites discrètes. Nous faisons l'hypothèse que l'enjeu de construction d'objets discrets simples est suffisamment fort pour engager les étudiants dans un processus de construction de définition de ces objets. L'énoncé demande par ailleurs une explication des procédés de construction de triangles discrets, ce qui renforce la fonction de construction de la définition de droite discrète.

Ainsi, la construction de définition de segment discret et/ou droite discrète se fait en regard du tracé de triangles discrets. C'est-à-dire que la perception d'un triangle discret peut influer sur les tracés des segments discrets.

Une définition n'étant pas explicitement demandée, les étudiants vont-ils s'engager d'eux-mêmes explicitement dans l'élaboration de définitions ?
Dans la mesure où aucune définition n'est, et ne sera, demandée explicitement, les opérateurs et contrôles aristotéliciens sont écartés momentanément, jusqu'à ce que les étudiants se placent précisément sur une activité de construction de définition de triangles discrets et donc de droites discrètes ou segments discrets.

III-2. Présentation des choix effectués pour les exemples et contre-exemples (non étiquetés comme tels)

Nous avons choisi une unité dans la représentation des objets discrets.
Nous avons délibérément écarté des objets de ce type,
faisant l'hypothèse qu'ils auraient été rapidement écartés.
Nous n'imposons pas de tenir la feuille horizontalement ou verticalement.



D1 est l'exemple de droite discrète le plus “évident”, tant perceptivement que de par le calcul de la pente (½). De même, D6 n'est pas de manière évidente une droite discrète, ne serait-ce que pas une appréhension perceptive (elle comporte en effet trop d'irrégularités).

Les six autres exemples sont davantage sujets à discussion, car la perception seule est insuffisante. Par exemple, D4 et D5 peuvent sembler être des droites, alors que D8 peut sembler ne pas être en être une ... Le choix des objets discrets a été fait en tenant compte de l'aspect perceptif que nous avons supposé très fort au préalable : nous avons donc représenté des objets s'apparentant à des droites, car recelant perceptivement une forte régularité, ainsi que d'autres plus délicats, dans le but de susciter des débats entre les étudiants, de montrer l'insuffisance de la perception et de les engager dans la construction de définitions de droite discrète.

Contrairement à la situation “arbres”, nous avons donné plus de contre-exemples que d'exemples sans les étiquetés comme tels. La génération de nouveaux exemples peut s'en trouver favorisée. Des exemples triviaux peuvent être facilement produits. L'enjeu de la situation est la reconnaissance, mais la génération d'exemples et de contre-exemples s'inscrit dans une problématique de construction. Ceci sera repris dans l'analyse a priori.

III-3. Analyse mathématique de la tâche : reconnaissance de droites discrètes

La reconnaissance de droites discrètes parmi des courbes discrètes non identifiées est une forme de classification plus complexe que celle que nous avons demandée dans la situation “arbre”. La fonction de la définition de “droites discrètes” mobilisée ici est celle de reconnaissance.
Ainsi, le problème se pose comme étant un problème de reconnaissance d’une droite discrète, mais aussi comme étant un problème de construction de ces droites. En effet, la reconnaissance des quelques courbes discrètes données n’est pas le seul objectif de cette situation : il s’agit également de reconnaître des droites discrètes parmi d’autres objets discrets. La recherche d’une définition de “droite discrète” passe ainsi également par la génération de nouveaux exemples, mêmes triviaux, mais aussi de contre-exemples (cf. processus lakatosien de construction de définition).
La présentation des différentes problématiques (paragraphes I-2 & I-3) a permis de souligner les questionnements mathématiques conduisant à l’élaboration de *zéro-définitions* puis de définitions de “droite discrète”. Nous allons en reprendre ici les jalons.

Nous rappelons que nous écartons, dans un premier temps, les définitions recouvrantes *(1,a)* et *(1,b)*, celles-ci produisant des droites épaisses : elles n’interviennent pas dans la reconnaissance des objets discrets donnés, ceux-ci étant d’épaisseur naïve (d’épaisseur 1). Nous nous plaçons de plus dans le cadre de la 8-connexité.
Nous allons questionner les *zéro-définitions* exposées précédemment et analyser leur aspect opératoire, ce qui soulignera l’aspect provisoire de celles-ci et donc leur devenir (évolution ou disparition) dans un processus de construction de définition.

- Les *zéro-définitions* utilisant la droite réelle comme support physique (**Ƶdef 0, 1, 2**) ne permettent de trancher que pour les cas où la représentation ne fait pas de doute (D_3, D_6). En effet, tous les objets donnés sont des arcs 8-connexes (et ne peuvent donc pas être donnés par la *zéro-définition* **Ƶdef 1**). Remarquons que l’usage de l’une de ces *zéro-définitions* nécessite l’utilisation de la règle pour tracer un segment de droite réelle : avec l'aide d'une règle, en recherchant les carreaux les plus près du segment "reliant" des carreaux proches des deux extrémités, on peut clairement "améliorer" certaines "droites", et donc les éliminer des droites discrètes. Par ailleurs, la *zéro-définition* **Ƶdef 3** nécessite le tracé d’une bande.
De plus, l’utilisation de la droite réelle comme support pose des questionnements inhérents à la représentation et à l’utilisation de la règle ; le réinvestissement de connaissances utilisées dans le réel est également problématique : par exemple, puisque deux points suffisent à définir une droite réelle, en est-il de même avec deux carreaux pour la détermination d’une droite discrète ? Ceci conduit à une problématique axiomatique.

Mais alors, quels points choisir pour déterminer un segment réel ? une bande ?
Comment utiliser la règle ? Pour quoi faire et comment ?

- Les définitions *(3,α)* et *(2,d)* nécessitent la connaissance de la pente et demandent donc une méthode pour obtenir cette pente, d'où l'émergence de questionnements relatifs à la période (et/ou pseudo-période). Les définitions *(2,a) (2,b) (2,c)* requièrent la prise en compte d'un point initial et d'un point final. Ces définitions issues de la littérature posent autant de questions que les *zéro-définitions*.

Si pente il y a, comment la déterminer ?
(analytiquement, géométriquement, autrement ?)

- La *zéro-définition* **Ƶdef4** est clairement insuffisante et requiert un questionnement approfondi sur la structure d'une séquence de paliers. Les propriétés vérifiées par les paliers peuvent être données de manière plus "naturelle", sans forcément utiliser un code. Dans ce cas, les questions suivantes se posent :

Est-il possible de parler de période, de pseudo-période ?
La présence (ou non) d'une période est-elle une condition nécessaire et suffisante pour avoir une droite discrète ?
A partir de quelle longueur une séquence permet-elle la reconnaissance d'un segment de droite discret ?

Nous verrons dans l'analyse a priori les rétroactions des D_i donnés sur ces questions.

Résolution et mise en relation avec les définitions de l'objet géométrique

Nous avons choisi de présenter un tableau afin de mettre en évidence les possibilités de construction de définition offertes par l'objet "droite discrète", de manière chronologique, dans l'idée d'une résolution "naturelle" du problème. Nous ne présentons pas ici tout le processus de construction de définition, mais donnons les pistes envisageables dans ce domaine avec les droites discrètes, ainsi que leur portée mathématique. Ce tableau reprend notamment les questionnements mathématiques décrits dans le paragraphe I ainsi que les définitions de la littérature présentées dans le paragraphe I-3.

Zéro-définition	**Définition littérature**	**Fonction de la définition**	**Nature de la définition**	**Questionnement mathématique**	**Questionnement axiomatique**
ƶdef 0,1	*Def(1,a)* et *Def (1,b)*	**Construction** Reconnaissance s'il est possible de déterminer une droite réelle à partir d'une courbe discrète	Descriptive, perceptive	Droite épaisse ? Connexité ? Topologie ? Comment tracer une droite réelle associée ?	Un ensemble de pixels étant donné, existe-t-il une (unique) droite réelle correspondante ?
ƶdef 2	*Def(2,a)* *Def(2,b)* *Def(2,c)* *Def (2,d)*	**Construction** voire Reconnaissance	Algorithmique Arithmétique Algorithmique	Que doit-on connaître de la droite réelle (pente, point de départ, point d'arrivée) ? Période ?	Deux pixels étant donnés, passe-t-il une droite discrète par ces pixels ? Si oui, est-elle unique ?
ƶdef 3	*Def (3,a)* *Def (3,b)*	**Construction** voire reconnaissance si la pente est connue	Arithmétique Algorithmique	Pente ? Restes ? période ?	Unicité ?
ƶdef 4	*Def (4,a)* *Def (4,b)* *Def (4,c)*	Reconnaissance Et construction	Algorithmique Structurelle	Comment accéder à une information sur la séquence des paliers ? Quid de l'itération ?	Unicité ?
ƶdef 4	Def (théorème)	Reconnaissance Et construction	Algorithmique Structurelle	Paliers, structure des paliers, période	Unicité
ƶdef 5	Def (théorème)	Reconnaissance Et construction	Physique (modification de la régularité)	Régulier ? Comment modifier une séquence sans perdre la connexité ?	Unicité ?

Relations entre *zéro-définitions* et questionnements mathématiques, axiomatiques

D'après ce tableau, les définitions de "droite discrète" issues des *zéro-définitions* **ƶdef 1**, **2**, **3** permettent principalement la construction d'une droite discrète lorsque l'on connaît la droite réelle et/ou la pente de celle-ci. En découle alors une certaine reconnaissance. Ainsi, il faut connaître la pente de la droite à discrétiser, et en ce qui concerne la reconnaissance, le premier point de difficulté consistera à déterminer cette pente réelle. Nous ne pouvons pas dire que l'une de ces définitions permette la reconnaissance « instantanée » d'une droite discrète. En

revanche, les définitions issues de la *zéro-définition* **Ƶdef 4** le permettent (ce qui signifie que la problématique concerne l'aspect régularité de l'objet discret). Le GO aura donc tout intérêt à inciter les étudiants à construire des droites discrètes, en donnant une pente implicitement (par exemple, demander de relier deux points par un segment de droite), ce qui induira de plus une amorce de problématique axiomatique.
Si *zéro-définition* il y a, ce sera soit une *zéro-définition* ayant une fonction de construction telles les *zéro-définitions* **Ƶdef 0, 1, 2** soit une *zéro-définition* ayant davantage une fonction de reconnaissance, recherchant une propriété sur les paliers (*zéro-définition* **Ƶdef 4** voire *zéro-définition* **Ƶdef 3**). Dans les deux cas, l'aspect perceptif est important et l'étude sur l'objet discret (physique) est présente. L'analyse du *concept image* de droite réelle s'avère donc pertinente : elle permettra en effet de mesurer les conditions d'émergence et d'évolution des *zéro-définitions* par rapport à une certaine "représentation" de droite réelle (analytique, géométrique ou autre).
Toujours d'après ce tableau, l'émergence de *proof-generated definition* n'est pas favorisée dans la mesure où la problématique axiomatique n'est pas explicitement donnée aux étudiants : est-ce un obstacle à la dévolution de la SCD ? En terme de réinvestissement de définition et de rétroactions, cela constituera-t-il un manque ? Il reste envisageable de motiver une *proof-generated definition* avec des questionnements axiomatiques relatifs à l'existence et à l'unicité des droites discrètes, ainsi que des questionnements plus généraux reprenant des résultats connus avec les droites réelles tels que des propriétés de parallélisme, d'intersection de deux droites, voire du milieu d'un segment.

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, nous avons une grande variété dans la nature des définitions de droite discrète, mais les fonctions possibles de ces définitions sont limitées à la construction et à la reconnaissance. Nous n'avons pas prévu de réinvestissement de la définition dans cette activité, ce qui pourrait, a priori, poser la question de la validation des définitions produites. Nous faisons cependant l'hypothèse que la situation est suffisamment riche pour l'observation d'une activité de construction de définition, et, comme dans les autres situations, ne minorons pas le rôle du GO. Nous gardons à l'esprit, pour l'analyse des résultats, ces deux questions : les deux fonctions de reconnaissance et de construction sont-elles suffisantes pour la dévolution du processus de construction de définition ? Un moment de réinvestissement supplémentaire de la (ou des) définition(s) produite(s) est-il nécessaire ?

Mais … lesquelles sont des droites discrètes ?
Nous allons montrer que D_1, D_5 sont des droites discrètes, alors que D_2, D_3, D_4, D_6, D_7, D_8 n'en sont pas.
Nous pouvons ordonner les D_i par difficulté de différenciation croissante (cet ordre est relativement approximatif et n'est pas total) : (D_1 , D_6), D_3 , D_8 , D_2 , D_4 , D_7 , D_5

(D_1 , D_6): comme nous l'avons dit précédemment, ce sont des objets pour lesquelles la reconnaissance est aisée. En effet, justifier que D_1 est une droite discrète et D_6 n'en est pas une peut se faire via la **régularité** de la pente (le calcul est aisé pour D_1 : ½), la **connexité**, voire l'utilisation intuitive (et perceptive) de la **règle**.
D_3 : l'utilisation de la règle fait apparaître que le remplacement de certains carreaux par d'autres rapprocherait D_3 d'une droite. Par exemple le sixième carreau à partir du bas doit être déplacé sur la droite.
D_8 : il apparaît une sous-période (1-2-3) que l'on peut nettement améliorer en 2-2-2.
D_2 a une sous période 2-1-2-3 que l'on peut améliorer en 2-2-2-2. Toutefois, avec une règle, il n'apparaît pas clairement de carreaux qu'il faudrait déplacer.
D_4 possède également une sous-période (2-2-3-3) améliorable en 2-3-2-3.
D_7 semble être assez "droite". Le sous-segment discret 3-2-1-2 peut être amélioré en 2-2-2-2 (remarquons que nous obtenons alors un segment de droite discrète).
D_5 semble être le cas le plus difficile à traiter : en effet, c'est un segment de droite discrète mais le déplacement du troisième carreau en partant du bas semble l'améliorer : on obtient ainsi une droite par répétition de la séquence 2-2-3.

Seuls D_1 et D_5 sont des droites discrètes. Nous allons appliquer la dernière définition donnée au paragraphe I-3-5 à D_4 et D_5:
- D_4 est une séquence de paliers de longueur 2 ou 3 : il n'y a pas de direction isolée dans la séquence 2 - 2 - 3 - 3 - 2 - 2 - 3 - 3 - 2 - 2 - 3 – 3 , donc D_4 n'est pas une droite discrète.
- D_5 est une séquence de paliers de longueur 2 ou 3 :
dans 2 - 2 - 3 - 2 - 2 - 3 - 2 - 2 - 3 - 2 - 2 - 2 - 3 , 3 est la direction isolée. Nous construisons alors une nouvelle séquence : 2 - 2 - 2 - 3 où 3 et la direction isolée. Ainsi, D_5 est une droite discrète.

III-4. Demande explicite ou non de définition : analyse a priori des tâches t_2 et t_3

III-4.1. Intérêts de l'objet “droite discrète”

L'objet mathématique “droite discrète” présente de nombreux intérêts. Il y a de multiples enjeux derrière cette activité (informatique, graphisme). Le travail sur cet objet implique le réinvestissement de connaissances stables (géométrie euclidienne) dans un nouveau contexte, ce qui le place dans une problématique axiomatique. De plus, nous avons présenté une multitude de *zéro-définitions* accessibles, ce qui nous permet d'affirmer que cet objet “droite discrète” est facilement dévoluable.
Dans la mesure où le référent “droite réelle” est très présent, il nous faudra étudier en particulier le rôle du *concept image* de droite réelle. De plus, de nombreux contrôles perceptifs sont attendus : nous espérons que ceux-ci ne bloqueront pas l'activité de

construction de définition, en particulier dans la tâche t_2 où aucune définition n'est explicitement demandée.

III-4.2. Analyse a priori de la tâche : construire une définition de "droite discrète" pour reconnaître les D_i

Cette analyse a priori est valide pour la tâche t_3, mais aussi pour la tâche t_2 à partir du moment où les étudiants ont exprimé qu'ils sont sur la construction de définition de "droite discrète".

III-4.2.1.Fonctions de la définition en jeu

La principale fonction de la définition est de parvenir à différencier les objets discrets appartenant à la famille des droites des autres. Nous sommes ainsi dans une perspective de délimitation de ce qui est ou n'est pas une droite discrète. De ce fait, plusieurs actions de classification peuvent être menées par les étudiants ce qui signifie qu'ils peuvent s'engager dans plusieurs procédures successives, en affinant progressivement leur caractérisation de droite discrète. Ainsi, la tâche première est une tâche de reconnaissance.
Par ailleurs, une sous-tâche, de par une seconde fonction de la définition, peut être évoquée par les étudiants : la construction de droite discrète. En effet, ils pourraient être rapidement amenés à construire des droites discrètes (en utilisant une définition), ce qui motiverait davantage l'activité de construction de définition.
En définitive, cette situation soulève la nécessité de définir pour construire, reconnaître, se mettre d'accord, lever l'ambiguïté tout en restant en conformité avec le *concept image* [152] de "droite réelle" (l'utilisation du *concept image* dans l'analyse a priori est exposée ci-après).

III-4.2.2. Rôles des connaissances : *concept image* de "droite réelle"

Contrairement à la situation "arbre", il existe ici un référent, l'objet mathématique "droite réelle", qui pré-existe à l'objet discret. Ainsi, des connaissances antérieures à l'expérimentation vont être mobilisées, ne serait-ce que pour tracer et confronter des droites discrètes à des droites réelles.
Les étudiants de première année d'université sont donc à même de faire appel à leurs représentations, définitions de "droite réelle", à savoir :

- la règle permet de tracer une droite réelle (primaire-collège)
- une droite est déterminée par deux points (primaire-collège)
- une droite peut être définie analytiquement (i.e. pente et ordonnée à l'origine) : la pente représente une caractéristique importante d'une droite réelle donnée, elle est constante, quelque soit le segment de droite étudié (collège-lycée).

[152] Les termes de *concept image* et *concept definition* sont en italiques et en anglais dans le texte (la proximité de l'anglais et du français dans ce cas précis peut engendrer des confusions). Ces concepts sont présentés dans le chapitre I. Il est possible d'interpréter commodément *concept definition* par "définition formelle".

- la "somme" de deux droites est une droite (de pente la somme des pentes des deux droites initiales : c'est ce que nous avons utilisé pour démontrer le théorème-définition du paragraphe I-3.5.)

Ces connaissances peuvent apporter des rétroactions perceptives (usage de la règle) et impliquent des stratégies de résolution (registre analytique par exemple).
Le rôle du perceptif est ici très important, et nous permet d'entamer une analyse en terme de *concept image*. Nous faisons l'hypothèse que le *concept image* de “droite” (géométrie euclidienne) est très fort chez les étudiants. En effet, cet objet géométrique ne semble pas présenter de difficultés. Il est manipulé depuis l'école primaire, mais est peu problématisé, et les définitions formelles de “droite réelle” disponibles au collège et au lycée sont analytiques et non pas géométriques. Ainsi, la reconnaissance et la construction de droites discrètes font fonctionner le *concept image* de “droite réelle”. Celui-ci est insuffisant, et la mobilisation de définitions formelles de “droite réelle” est ici problématique : en effet, dans un registre analytique par exemple, il est nécessaire de (re)définir “pente” dans le cas discret.
A supposer que les étudiants mobilisent effectivement leur connaissance de la droite réelle, et s'engagent dans un processus de définition utilisant la droite réelle comme support pour la droite discrète, d'autres connaissances, de nature topologique, vont alors apparaître. En effet, les notions de distance, d'intérieur, de frontière sont à mettre en oeuvre si l'on considère la droite discrète comme étant la “trace” d'une droite réelle. De plus, quand dira-t-on que deux objets sont les mêmes ?
Le problème de l'unicité de la “droite discrète” définie se pose ici de manière “naturelle” : dans la géométrie euclidienne, une droite est déterminée de manière unique par deux points. Or, dans le cas discret, deux carreaux ne suffisent pas à la détermination d'une droite discrète.

III-4.2.3. Registres, opérateurs, contrôles pour la construction de définition – processus de construction de définition

Les pistes de recherche de définition de “droite discrète” précédemment évoquées mobilisent en particulier l'utilisation de “droite réelle”, à partir de laquelle des *zéro-définitions* sont possibles. Les questionnements mathématiques peuvent alors porter sur : le problème de la représentation des points définissant la droite réelle ; la minimisation du nombre de carreaux coloriés / traversés (voire en terme de connexité, qualitativement) ; la recherche d'une relation entre le nombre de carreaux coloriés et le coefficient de pente etc.
Nous formulons ici une hypothèse forte : une *zéro-définition* est « toujours » une **description**, elle est basée sur la **perception**. De ce fait, elle est naturellement amenée à évoluer ou à disparaître.
Dans le cas discret, les étudiants peuvent avoir conscience qu'une *zéro-définition* est insuffisante car justement fondée sur la perception et/ou la simple description “physique” des objets, ce que nous avions observé pour les arbres où la description morphologique de ceux-ci

était apparue insuffisante aux étudiants car “peu précise”. La simple description des objets était perçue par ces étudiants comme non appropriée pour une définition mathématique, ce qui souligne également l'importance du rôle des conceptions des étudiants sur les définitions dans un processus de construction de définition.

Nous avons donc, dans la situation “droite discrète”, de multiples *zéro-définitions* possibles. Elles sont dépendantes du système de représentation (registre-L) dans lequel se placent les étudiants. Le système de représentation sert à exprimer les éléments du problème (P) et des opérateurs (R). Nous avons ainsi, dans cette situation, des systèmes de représentations pouvant coexister. Parmi ceux-ci, nous avons :

- le registre langagier
- le registre du réel (perception, utilisation de la règle)
- le registre géométrique (référent “droite réelle”, géométrie euclidienne)
- le registre algorithmique
- le registre arithmétique (utilisation des parties entières par exemple)
- le registre analytique (représentation avec un système de coordonnées et recherche de la pente)
- le registre axiomatique (par exemple, existence, unicité de droites discrètes)

Par exemple, le registre algorithmique et le registre arithmétique peuvent coexister (il est possible d'écrire un algorithme à partir de certaines définitions telles que la définition de Bresenham ou la définition de “droite naïve”).
Ainsi, la construction de définitions dans cette situation comprend plusieurs “niveaux” dont les interactions alimentent le processus.

Nous pouvons anticiper de l'émergence de *zéro-définitions* et de *proof-generated definitions*. En effet, l'utilisation de la droite réelle comme support à la droite discrète peut favoriser l'émergence d'une *zéro-définition* (utilisation d'un aspect perceptif, description et questionnements liés à la représentation des objets mathématiques en jeu). De plus, les questionnements mathématiques inhérents au passage discret-continu et continu-discret, les questionnements axiomatiques, la confrontation aux propriétés et théorèmes euclidiens peuvent motiver des *proof-generated definitions* et être ainsi autant de lieux de réinvestissement de la (ou des) définition(s) produite(s). Ce qui laisse présager de *zéro-définitions* évolutives.

Cette situation de reconnaissance et de construction de “droites discrètes” mobilise des opérateurs et contrôles aristotéliciens et lakatosiens car elle appartient au type CLASSIFICATION, et que des exemples et contre-exemples non identifiés sont donnés. De plus, la problématique axiomatique en appelle à des opérateurs et contrôles poppériens.

Les opérateurs et contrôles aristotéliciens sont langagiers : ils interviennent dans une construction explicite de définitions. Ils sont également logiques (caractérisation, condition nécessaire et suffisante, non redondance etc.).
La fonction de la définition induit des opérateurs lakatosiens : la fonction de reconnaissance d'objets se place davantage sur CLASSIFICATION et donc sur des opérateurs aristotéliciens dont la définition par *genre et différences spécifiques*. En revanche, la fonction de construction d'objets implique plus spécifiquement l'opérateur lakatosien “génération d'exemples et contre-exemples”. Celui-ci peut également servir de contrôle. Il reste un dernier contrôle lakatosien à décrire : le contrôle par la dialectique avec une preuve. Dans la situation “droite discrètes” peuvent apparaître des problématiques de preuves d'existence, d'unicité par exemple, liées aux questionnements axiomatiques. Ces derniers ne sont pas pris en charge par la conception lakatosienne.
Ce qui nous conduit à décrire des opérateurs et contrôles poppériens pour le traitement de cette problématique axiomatique. Ceux-ci dépassent un peu le cadre de cette expérimentation. En effet, bien qu'il soit possible de traiter des questions d'existence et d'unicité, il est plus difficile de replacer ceci dans la construction d'une théorie de “géométrie discrète”.
Les questions peuvent être traitées par les étudiants et faire ressortir certaines particularités sur les définitions mathématiques : qu'en est-il de l'intersection de deux droites ? Comment prolonger un segment de droite ? Comment repérer et utiliser la pente d'une droite ? Comment caractériser des droites parallèles ou perpendiculaires ? etc. Ces questions peuvent constituer un lieu privilégié pour le réinvestissement d'une définition de droite discrète, et sont certainement, pour nous, des moments propices à l'observation des conceptions d'étudiants en matière de définition (exigences par rapport à une définition mathématique, à son possible aspect provisoire, à l'inscription d'une définition dans un cadre plus large telle la géométrie discrète par comparaison avec la géométrie euclidienne ...). Mais cela ne conduira probablement pas à la production d'une théorie “géométrie discrète” à l'image de celle proposée par Reveillès par exemple, qui souligne lui-même les difficultés et contradictions rencontrées dans une telle tâche.
L'élaboration d'une telle théorie mobilise en particulier des opérateurs et contrôles liés à l'axiomatique. Dans la conception poppérienne, nous trouvons l'opérateur “génération de réfutations”, à rapprocher de l'opérateur lakatosien “génération d'exemples et contre-exemples”, mais aussi “ne rien dériver de la définition”, c'est-à-dire ne pas obtenir d'autres résultats à partir de la définition : ce dernier opérateur ne nous concerne pas car il considère la définition comme une simple abréviation, ce que nous écartons bien sûr. Il nous reste à décrire les contrôles poppériens pouvant prendre part au traitement de la problématique axiomatique. Ces contrôles interviennent dans la validation de l'une de deux théories en concurrence. Le premier contrôle s'effectue sur le nombre de postulats qui doit être le plus faible possible. Dans le cas discret, il s'agit par exemple de considérer les postulats suivants et leur nécessité : par deux carreaux, il passe une droite discrète, par deux carreaux, il ne passe qu'une droite

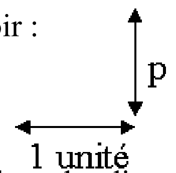
discrète. Ceci relève d'analogies à partir de la géométrie euclidienne. Le second contrôle est une grande résistance aux réfutations : le problème est de savoir quand arrêter les réfutations, ce à quoi Popper ne répond pas. A cela s'ajoute un contrôle *métascientifique*, dont dispose certainement le chercheur du fait de sa longue pratique, mais qui est très vraisemblablement non disponible chez des étudiants. La conception poppérienne ne prend pas en charge un contrôle décrit par Leibniz et Frege, qu'il serait bon d'ajouter ici : celui de non-contradiction du système théorique.

Tous ces opérateurs (aristotéliciens, lakatosiens, poppériens) contribuent à l'évolution de *zéro-définitions*. Les contrôles décrits ci-dessus sont autant de moyen de validation de celles-ci. Il nous reste à étudier les rétroactions du milieu.

III-4.2.4. Analyse du milieu pour la validation

"Quel milieu pour la validation ?" reste une question centrale pour mener à bien notre analyse.
En ce qui concerne les connaissances mathématiques en jeu, des rétroactions **perceptives** sont possibles par analogie des objets mathématiques discrets avec les objets géométriques réels (i.e. les connaissances antérieures en matière de géométrie) et par l'utilisation de la règle. Nous avons déjà évoqué ceci avec le *concept image* de "droite réelle". L'usage perceptif de la règle permet d'écarter D_3 et D_6. Pour les autres D_i, il est nécessaire de dépasser ce stade perceptif, et de mettre en œuvre par exemple une description plus fine de l'utilisation de cet instrument pour la reconnaissance de droites discrètes.

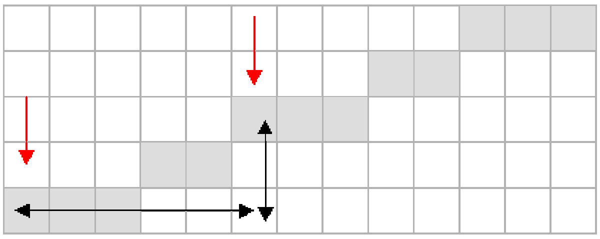
Il est important de rappeler que l'étude de la structure des droites discrètes est important dans cette activité de reconnaissance. En effet, la reconnaissance des droites discrètes peut être effectuée via une étude de leur structure morphologique, et ainsi, la mise en œuvre de la pente (et de la proportionnalité) caractérisant une droite réelle peut apparaître nécessaire pour définir.
Intéressons-nous à la "recherche de la pente" : celle-ci peut impliquer la recherche d'une période par analogie avec la traduction géométrique de la définition analytique d'une pente *p* à savoir :



Cette définition de la pente utilisée au lycée, où p est un nombre réel, n'est ici pas envisageable, puisque nous travaillons avec des carreaux.

Dans le cadre discret, la lecture de la pente rationnelle s'effectue en comptant horizontalement et verticalement les carreaux séparant deux carreaux-extrémités.
S'il est possible de déterminer une "régularité", même perceptivement, voire une période, il est alors envisageable d'effectuer un calcul de pente, tel que le montre l'exemple ci-dessous :

les flèches supérieures indiquent la période. Le calcul (flèches doubles) donne une pente de 2/5.



Tout le problème réside dans le choix de deux carreaux pour effectuer le calcul d'une pente. Dans les exemples donnés, il peut y avoir validation ou invalidation d'une pente calculée ainsi par changement des carreaux initial et final ayant permis le calcul (il s'agit alors de l'étude des rétroactions du milieu didactique). La pente est alors nécessairement rationnelle, ce qui pose la question suivante : la pente recherchée est-elle rationnelle ou réelle ? En effet, pourquoi ne serait-il pas possible de discrétiser n'importe quelle droite réelle ?
Dans les objets discrets donnés, certaines périodes apparaissent de manière évidente : par exemple, pour D_1, la période est de deux carreaux. De même pour D_4 où il est aisé de voir la répétition de paliers de longueurs 2 et 3 : 2-2-3-3. Lorsqu'une telle période n'apparaît pas, comme c'est le cas pour D_3, il est possible de considérer que tout le segment discret donné représente la période. Mais ceci ne nous donne pas d'information sur le segment considéré. Ainsi, se pose la question de la période comme condition nécessaire et/ou suffisante de "droite discrète".
Par ailleurs, il est possible d'agir sur les objets discrets par modification d'une séquence de pixels. En effet, modifier quelques pixels dans une séquence jusqu'à l'obtention d'une possible "droite discrète" peut aboutir à une définition, ou *zéro-définition* semblable à la *zéro-définition* **zdef 5** i.e. une droite discrète est un ensemble de pixels non améliorable (avec une répartition aussi "bonne" que possible) ; la rétroaction est alors essentiellement perceptive. D_4 peut être l'objet d'une telle modification : la séquence 2-2-3-3 peut être mieux répartie en 2-3-2-3. Si une droite est une séquence non améliorable, alors D_5 pourra être vue comme n'étant pas une droite.
Ainsi, les rétroactions des D_i sont réelles, et permettent d'enclencher un processus de définition, mais il reste des questions à traiter. Nous pouvons décrire ainsi une stratégie de base, dont l'évolution vers une stratégie optimale dépend du processus de construction de définition décrit précédemment.

Stratégie de base : elle utilise le référent "droite réelle" et consiste en l'utilisation d'une définition et/ou d'un tracé de droite réelle pour l'adapter au cas discret.
Elle est insuffisante car de nombreuses questions se posent, tant pour la discrétisation d'une droite réelle que pour l'utilisation de la définition analytique de "droite", comme nous l'avons vu précédemment. De plus, le comportement des objets discrets n'est pas semblable à celui

des objets de la géométrie euclidienne classique d'où un questionnement axiomatique. L'étude du double passage réel-discret et discret-réel est source de tels questionnements.

Stratégie optimale : elle passe par un questionnement sur l'approche nécessaire à la construction de la définition de droite discrète (approche structurelle, algorithmique, arithmétique par exemple) et sur la mise en œuvre qui en découle. Le réinvestissement de la définition alors produite peut être réalisé avec les Di donnés. Une stratégie optimale revêt plusieurs aspects :

- un questionnement de nature axiomatique ;
- un questionnement relatif à la fonction de reconnaissance : celui-ci peut passer par la prise en charge du traitement de la droite réelle ou par la prise en charge du traitement de l'aspect "régularité" exclusivement ;
- un questionnement relatif à la fonction de construction.

C'est notamment la multiplicité de ces approches qui fera la richesse des productions des étudiants.

III-4.2.5. Difficultés possibles

L'analyse mathématique montre la richesse de l'objet géométrique, ainsi que les différentes approches possibles sur cet objet. La fonction de la définition, à savoir reconnaissance ou construction, peut se révéler insuffisante. De plus, des perturbations dues à la confrontation entre le modèle discret et le modèle réel peuvent apparaître : des questionnements de nature axiomatique peuvent en effet apparaître comme troublant pour des étudiants. Par ailleurs, il n'est pas toujours aisé de reconnaître une droite discrète, et même si l'enjeu de reconnaissance est fort, il peut être décourageant pour des étudiants peu avancés dans la résolution.

III-4.2.6. Organisation et interventions du GO

Les interventions du GO font partie intégrante de la situation expérimentale et ont pour but de palier aux éventuelles difficultés évoquées ci-dessus. Il peut s'agir de relancer si nécessaire la rédaction de la définition (pour t_3 surtout), mais aussi de gérer la situation (pour la faire évoluer) en demandant de construire une droite discrète quelconque ou particulière (en donnant deux points, éloignés ou proches), de dessiner ou redessiner une droite discrète ou encore de donner d'autres exemples ou contre-exemples (sans en préciser forcément le statut). Remarquons que ces interventions ne sont évidemment pas neutres : par exemple, une demande du GO de construction ou reconstruction de droites discrètes pourrait induire la *zéro-définition* **Ƶdef 5**.

III-4.3. Analyse a priori de la tâche t_2 : spécificités par rapport à t_3

L'analyse mathématique de la situation met en relation les questionnements mathématiques et les *zéro-définitions* de "droite discrète". Elle nous permet d'avoir une vision globale sur l'activité mathématique en jeu dans cette situation. La tâche t_2 étant une tâche de reconnaissance et non de définition, il est possible (probable) que les étudiants s'engagent dans un processus de résolution proche de celui décrit ci-dessus sans en référer explicitement à une construction de définition de "droite discrète". Une telle situation nous apporte des enseignements quant à la capacité des étudiants à s'engager explicitement dans un processus de construction de définition. Nous pourrons analyser leurs productions avec les *zéro-définitions* précédentes et étudier la place et l'évolution de celles-ci, que la construction de définition soit exprimée ou non. De plus, nous pourrons obtenir des résultats quant à l'influence d'une demande explicite de définition sur l'activité des étudiants. Nous faisons l'hypothèse que l'absence de demande explicite de définition est un élément déterminant. En effet, les effets de contrat décrits dans la situation "arbre" sont réels.
A partir du moment où les étudiants sont consciemment et explicitement sur une activité de construction de définition, l'analyse a priori ci-dessus est valide. Mais, si ce n'est pas le cas, des opérateurs et contrôles vont disparaître : en effet, les opérateurs et contrôles langagiers aristotéliciens, spécifiquement mobilisés dans la formulation de définitions seront écartés. Dans ce cas, nous pourrons évaluer l'importance de ceux-ci dans le processus de construction de définition (nous avions vu en effet leur rôle dans la situation "arbre").

Spécificité de t2 : elle fait suite à t_1

Dans la tâche t_1, il s'agit de construire des triangles discrets et nous avons vu la résolution de cette tâche par la construction de définition de "droite discrète". Nous rappelons qu'à aucun moment une demande de définition n'a été formulée dans t_1. A supposer que les étudiants restent dans t_1 sur une problématique de construction pure, sans prendre à leur charge explicitement la définition de certains objets discrets, t_2 aura alors deux objectifs :

- permettre un **réinvestissement** des résultats obtenus lors de la résolution de t_1 ;
- **mettre en avant la fonction de reconnaissance** d'objets discrets et ainsi étudier de nouveau la capacité des étudiants à inscrire leur activité dans une activité de construction de définition.

A supposer maintenant que les étudiants traitent t_1 par la construction de définitions, t_2 permettra un réinvestissement de celles-ci.

IV- Analyse des expérimentations

Rappelons les *zéro-définitions* de “droite discrète” développées dans l’analyse mathématique. Nous avons trois *zéro-définitions* dans une problématique “s’approcher d’une droite réelle” à savoir :

- Ƶdef 0 : la droite discrète joignant deux points P et Q est un chemin discret approximant le segment [PQ] de la droite réelle définie par P et Q.

- Ƶdef 1 : une droite discrète est un ensemble de pixels traversés par une droite réelle.

- Ƶdef 2 : une droite discrète est un ensemble de pixels les “plus près” d’une droite réelle donnée.

Dans le même ordre d’idée, une autre *zéro-définition* utilise la construction d’une bande réelle :

- **Ƶdef 3** : une droite discrète est un ensemble de pixels situés “à l’intérieur” d’une bande d’épaisseur *e*. Ces pixels sont ceux dont la surface d’intersection avec l’intérieur de la bande est la plus grande (on prendra *e* pixels par colonne).

Nous avions enfin présenté deux *zéro-définitions* intrinsèques (problématique liée à la régularité) :

- Ƶdef 4 : une droite discrète est une séquence de paliers …p_1 p_2 p_3 … p_n … vérifiant certaines propriétés.

- Ƶdef 5 : une droite discrète est une séquence de pixels ayant une répartition uniforme de paliers qu’on ne peut plus améliorer du point de vue de la "régularité".

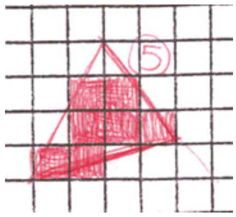
IV-1. Analyse des productions, résultats - Triangles discrets

NB : les phrases des étudiants sont *en italique*.
Les étudiants sont Nicolas (N), Rémi (Re) et Raphaël (Ra)

IV-1.1. Connaissances utilisées par les étudiants – problématique des étudiants

Différentes caractérisations de triangles sont apparues : pour les étudiants, un triangle est considéré soit *comme trois droites / traits* (enveloppe connexe), soit comme *trois points*, mais aussi et surtout comme une surface. Deux étudiants parmi les trois de ce groupe dessinent des triangles “pleins”, ce qui renforce le recourt à la perception. Les triangles pleins tracés leur posent des problèmes pour la visualisation des angles du triangle et de ses sommets :

102 Ra :

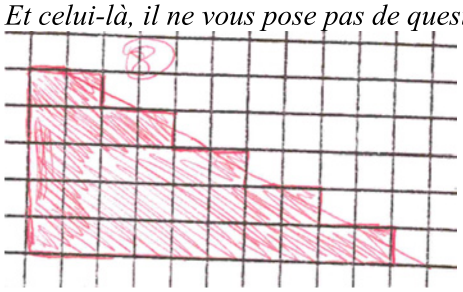


... celui-là sur lequel j'ai un doute.

103 Re : *Celui-là, il était vraiment fait ...*

104 Ra : *Parce que quand on enlève les traits, on le voit plus le triangle.*

105 O : *Et celui-là, il ne vous pose pas de questions ?*



106 Ra : *Sauf ça peut-être. L'angle ...*

(...)

127 N : *C'est vrai qu'un triangle, c'est aussi défini par trois points, donc quand il y a un palier comme ça, c'est plus difficile de trouver un sommet.*

Nous pouvons faire l'hypothèse que le tracé de triangles pleins dépend soit de leur perception courante des triangles, soit du contexte que nous leur proposons où des points sont matérialisés par des carreaux.

L'abandon des triangles pleins leur laisse une forte perception de l'objet intérieur/extérieur :

162 Re : *En fait, ça dépend si on veut que ce soit l'extérieur qui soit plus propre, ou si on veut que ce soit l'intérieur. Parce que ... ça dépend si on veut être plus précis, là on a un petit angle ... ou plus précis de l'intérieur, donc il vaut mieux colorier celui-là. Comment expliquer ?*

Au-delà du triangle, des considérations sur les approximations affines (dites *lignes moyennes*[153]) et sur la pente surtout sont apparues. Cette dernière est définie de manière opératoire ainsi : *quand tu avances de un pas de un, tu montes de tant*.

Remarquons que la technique utilisée par les étudiants pour compter le nombre de carreaux séparant deux carreaux donnés est peu ordinaire ; ils ont en effet compté tous les carreaux, ce qui augmente de 1 leurs calculs de variations par rapport à notre calcul.

Les étudiants ne sont pas sur une explicitation de construction de définition, mais sur la recherche d'une *« règle »* selon leurs propres termes, leur permettant de construire des triangles discrets. *« Il doit bien exister une règle »* disent-ils. Cette *« règle »* peut s'apparenter à une définition. En effet, ils recherchent une règle **opératoire pour la construction**, **précise**,

[153] 121 Re : *Si c'était une mesure de ... en fonction du temps, on a des points qu'on trace. Et après on trace la ligne qui passe par le plus de points.*

124 N : *C'est expérimentalement trouver la ligne moyenne.*

non ambiguë. Mais est-ce suffisant pour parler de “définition” au lieu de “règle” ? L’analyse ci-après de leur processus de construction de cette “règle” nous éclairera sur ce point.

Les étudiants sont clairement sur une problématique de construction de l’objet discret à partir de l’objet réel mais aussi sur une problématique de construction et de reconnaissance mobilisant la “régularité”. L’aspect axiomatique est également questionné, mais davantage par le GO que par les étudiants. Les étudiants ne sont pas perturbés par le fait d’avoir plusieurs tracés pour relier un carreau à un autre, et ne se posent ainsi pas de questions sur l’unicité. Ils ne se positionnent que par rapport à des choix.

IV-1.2. Questionnements posés par les étudiants - registres

Les étudiants ont questionné différentes propriétés perceptives ou mathématiques de l’objet segment discret. Il en ressort trois registres : la perception, le registre géométrique (utilisation du référent “droite réelle” comme support physique) et le registre analytique (utilisation du référent “droite réelle” comme support analytique, travail sur la pente).
L’entrée dans le problème s’est faite par la perception, qui n’a pas quitté les étudiants. Il s’agit pour eux de travailler sur une *régularité* perceptive : celle-ci intervient pour dire qu’il n’y a pas de trou, pas de rupture : les étudiants parlent de *droite homogène* et du fait que *sur chaque colonne, il faut que ce soit rempli* (implicitement, connexité par les sommets au moins …). Mais la régularité est aussi traduite par un comptage de carreaux, et la recherche de créneau *régulier* (Ra). C’est peut-être pour cela que le registre géométrique fonctionne de pair avec la perception ou le registre analytique. En effet, l’utilisation du référent géométrique “droite réelle” est effective (surtout chez N) mais est un peu délaissée au profit de recherches sur la pente d’une droite discrète et la répartition des carreaux sur celle-ci où la perception joue un rôle important. Ainsi, leur travail “analytique” est contrôlé géométriquement (tracé d’un couloir) et perceptivement (existence d’une répartition dite *régulière, homogène* des carreaux). Il débouche sur l’énoncé d’une *règle* de nature arithmétique.

IV-1.3. Des *zéro-définitions*

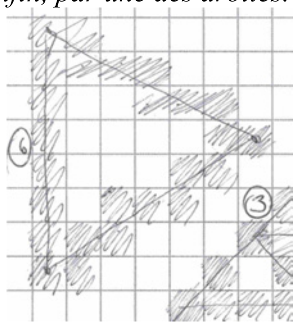
Dans la mesure où aucune définition n’était explicitement demandée, et où les étudiants ne se sont pas exprimés sur des définitions de “droite discrète”, mais sur la recherche d’une “règle” de construction, nous avons choisi de présenter le cheminement de leur réflexion, en mettant en évidence les problématiques liées à : l’utilisation de la droite réelle, l’utilisation de l’aspect “régularité”, les questionnements de nature axiomatique.

Utilisation de la droite réelle comme support physique

Une fois la discussion sur les triangles *pleins* passée, les étudiants ont étudié des triangles à partir de trois sommets et ont recherché à relier ces sommets. Des segments de droite réelle ont été tracés. Nicolas s'est clairement placé sur le choix des carreaux traversés ou touchés par une droite réelle. Soulignons que Nicolas est le seul à ne pas avoir tracé des triangles pleins.

68 N : *Moi, je me suis dit que un triangle c'était trois traits … plus ou moins épais. (…)*

77 N : *Voilà, c'est tout bien … et après quand j'ai des angles divers, je trace les trois droites, et par où passe la droite, je colorie. Je colorie les cases qui sont touchées par la droite … enfin, par une des droites.*



Le choix des carreaux à colorier est discuté et il ressort plusieurs choix : colorier tous les carreaux traversés par la droite réelle ; colorier tous les carreaux qui sont *beaucoup traversés* par la droite réelle ; colorier ceux qui sont les plus à l'intérieur du triangle réel (*coupés et visibles de l'intérieur)*

177 Re : *Déjà, celui qui est traversé, il faut le regarder, celui qui ne l'est pas, il faut le laisser tomber. Après, il faut regarder s'il est traversé un tout petit peu, il faut peut-être pas en tenir compte ; s'il est traversé beaucoup, il faut plus le regarder.*

Nous sommes ici en présence d'une *zéro-définition* de type **Ƶdef 0,1,2**. Les étudiants notent qu'il n'y a alors que la discrétisation d'un triangle réel donne plusieurs triangles discrets. Et ceci ne les engage pourtant pas dans des questionnements de nature axiomatique. Cette *zéro-définition* n'a pas évolué car les étudiants ont rencontré une réelle difficulté dans le tracé de droites réelles : quels points réels faut-il utiliser pour tracer ces droites réelles ? C'est-à-dire où placer les points dans un carreau ? Raphaël a utilisé des points du maillage, Rémi et Nicolas des centres de carreaux.

241 N : *Ou sinon, on peut tracer plusieurs droites qui partent de différents endroits. Par exemple, tu prends un point dans chaque angle et un au milieu.*(d'un carreau)

242 Re : *Mais ces points, tu peux pas les … mettons que tu as à le faire faire par un ordinateur, tu calcules, ce point, tu peux absolument pas le définir.*

243 N : *Tu vas pas dire la première partie du pixel !*

244 Re : *Ou à gauche du pixel … tu dis pixel et puis voilà. Quand tu vas tracer ton triangle, déjà, tu vas colorier les sommets, il faut partir de là.*

245 N : *C'est toujours trois points dessinés … non, ça dépend, si tu prends un triangle très resserré, comme ça, lui, tu vas pas forcément le dessiner.*
246 Re : *Non, ce que je veux dire, c'est que tu as pas le droit de faire ça en fait. On va dire que ce point est pas défini ; tu vas te donner le carré, logiquement, tu n'as le droit de travailler qu'avec ça, c'est le seul truc que tu sais.*

Ainsi, la méthode de construction de droites discrètes à partir du tracé de droites réelles va être un peu délaissée. Les étudiants cherchent alors à n'utiliser que les carreaux, pour deux raisons : les ordinateurs ne font que de l'approximation (référence à la pixélisation) et de plus, *on ne peut pas définir les points dans les carreaux*, c'est pourquoi les étudiants décident de ne parler que de coordonnées de pixels : ils expriment ainsi une vision de la nature discrète du problème.

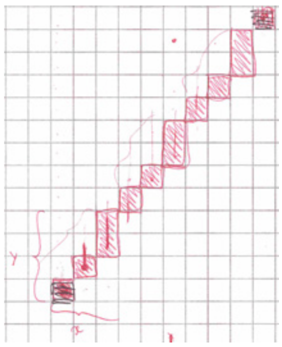
L'utilisation d'un référent réel réapparaîtra sous une autre forme, par le tracé d'un couloir, ce qui relève de la *zéro-définition* **Ƶdef 3**.
La fonction de ces *zéro-définitions* va consister en la vérification de tracés discrets obtenus par une autre méthode, conjointement toujours avec la perception. Il ne s'agit pas pour les étudiants de retenir comme méthode de construction de triangles discrets ces *zéro-définitions*.

Régularité et répartition

La recherche d'une régularité est omni-présente, et se traduit fréquemment par des arguments perceptifs. Nous avons vu que deux *zéro-définitions* peuvent découler d'une telle considération : la première (**Ƶdef 4**) s'intéresse aux propriétés de la séquence de paliers d'une droite discrète, la seconde à l'amélioration de ces paliers (**Ƶdef 5**).
Les étudiants se sont approchés de cette dernière. En effet, ils argumentent souvent, en évoquant la régularité, autour de la modification d'une séquence. Ceci fait suite à la mise de côté du référent physique "droite réelle" au profit du comptage du nombre de carreaux horizontalement et verticalement (sommets inclus) entre deux carreaux. Les étudiants s'intéressent alors à la pente, définie par *quand tu avances de un pas de un, tu montes de tant*, et cherchent à l'*approximer* : ils sont ainsi dans un registre analytique. La pente est ainsi définie par un quotient entre le nombre de carreaux horizontaux et verticaux séparant deux carreaux donnés. Leur idée directrice est de réduire le problème de tracé d'une droite discrète au tracé de petits segments, où le choix des carreaux ne sera pas problématique : *il faut diviser en parties égales*. Mais ils n'en réfèrent plus à la pente et utilisent la division euclidienne qu'ils interprètent ainsi : le quotient est le nombre de carreaux de chaque palier. Le reste est appelé *erreur*. Ils disent devoir placer cette *erreur* de manière *homogène*. Les étudiants ont ainsi traité "physiquement" l'information contenue dans le reste de la division euclidienne : ils ont appelé "*erreur*" ce reste et ont cherché à le répartir, le plus "*uniformément possible*" dans les paliers. La discussion porte alors sur où placer cette erreur ? c'est-à-dire à une extrémité ou un peu partout ?

256 N : *De toute façon, la pente, c'est défini que quand tu avances de un pas de un, tu montes de tant.*
257 Re : *Il faudrait qu'on trace nos triangles qu'en faisant des trucs comme ça. Donc là, on fait comment ?*
258 Ra : *Là, t'en fais un.*
259 Re : *Il faut diviser en parties égales. A ce moment-là, tu as ...*
260 N : *Forcément, si tu as un reste, là tu auras ...*
261 Ra : *C'est ça le problème : comment gérer la partie quand c'est impair. Quand c'est pair, ça pose aucun problème.*
262 N : *C'est ce que je disais : un truc de 7 par 13 ... c'est pas évident.*
263 Re : *Il faut gérer la division. Il faut savoir la hauteur que tu vas avoir ici. Là, trois, trois, ... c'est au hasard, après, il faudra faire un calcul. Là, on arrive dans les choux ...*

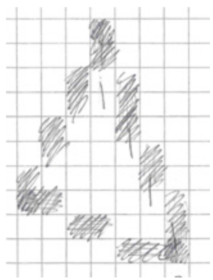
Nous allons reprendre un exemple produit par les étudiants pour expliquer ce qui va devenir leur *règle* :



638 Re : *13 et 10. Là ça tombe pile poil. J'ai fait 13 divisé par 10, j'obtiens 1. Après, je fais 1 fois 10. Et après je fais 13 moins ce nombre que je viens de trouver : ça me fait trois. Donc j'ai trois points qui sont des erreurs. Enfin, à partir de ces trois points, je reprends 10 et je divise par ces trois points d'erreur, et j'obtiens trois segments et en fait, ces trois segments, je les trace. Et le seul moyen de tracer ça et ça, c'est de faire ça. Et pareil d'ici à là. Et ici, c'est remplir, c'est tout.*

Dans cet exemple, le reste de la division euclidienne (3) est réparti en trois carreaux sur trois segments dont les paliers sont de un carreau (le quotient est 1). Les étudiants vont mettre en évidence une méthode arithmétique pour déterminer le plus petit segment sur lequel répartir l'erreur. Ils traitent facilement la répartition de carreaux sur des petits segments, par amélioration de l'aspect perceptif, comme le montre cet extrait :

463 N : *J'ai essayé une autre technique. Là, au lieu d'en mettre trois, trois, trois et un, j'ai fait trois, deux, trois, deux.*



Ceci est en accord avec la *zéro-définition* **Zdef 5**, dont l'évolution conduit, comme nous l'avons montré au paragraphe I-3.5, à une définition intrinsèque de "droite discrète". Mais les étudiants n'approfondissent pas cette idée, peut-être parce que les séquences ainsi améliorées sont petites et donc l'obtention d'une régularité est obtenue rapidement par une unique transformation. Le GO a tenté de mettre en valeur cette idée, mais sans qu'elle soit reprise par les étudiants :

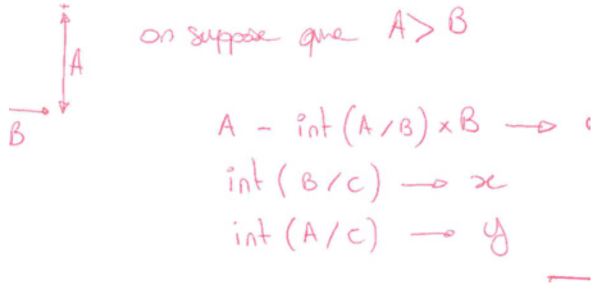
503	N	:	*(...) 11 sur 3, ça fait quoi ...*
504	Ra	:	*11, ça fait 4-3-4.*
505	O	:	*Qu'est-ce que c'est qui est en question sur ce qu'on est en train de faire là ? Sur les choix que vous allez faire entre cumuler à la fin ou répartir ?*
506	Re	:	*C'est la répartition.*
507	O	:	*Qu'est-ce que c'est ? Vous voyez pas ce qui peut être en question ?*
508	N	:	*Sur l'arrondi ?*
509	O	:	*Mais géométriquement, pas sur les nombres.*
510	Re	:	*C'est le respect de la forme.*
512	N	:	*Il faut pas que ça fasse quelque chose comme ça. Il faut que ça s'approche plus d'une droite.*

Dans la répartition de l'erreur, les étudiants sont par ailleurs « distraits » par la tâche "construction de triangles discrets" : en effet, ils cherchent à répartir cette erreur pour chacun des trois segments discrets, de telle façon à conserver une régularité perceptive pour le triangle. Il s'ensuit une orientation du triangle, ainsi qu'une répartition également orientée de chacune des erreurs sur chaque segment.

Remarquons que le reste est appelé *erreur* certainement car pour les étudiants, faire des droites discrètes revient à faire une approximation des droites réelles, et cela ne tombe pas toujours juste. Les étudiants sont clairement sur une problématique de construction de l'objet discret conformément aux *zéro-définitions* **ƶdef 1, 2, 3**, mais aussi **ƶdef 5** pour la répartition uniforme des paliers. A ce moment du protocole, une certaine "*règle*" est énoncée (nous rapportons ci-dessous la fin de protocole car elle est plus lisible) : dans cet extrait, A et B sont les nombres de carreaux horizontalement et verticalement entre les deux carreaux extrémités du segment discret à tracer :

665	Re	:	*Oui. Et B, pareil. On suppose que A est supérieur à B. Si c'est pas vrai, on tourne. Et donc là, j'ai fait cette opération ... ça me donne l'erreur en fait : il y aura trois carreaux, on sait pas où les placer. Après, je vais les répartir, je vais répartir chacune des erreurs là-dedans ; je divise ça par l'erreur et j'obtiens la petite base.*
666	O	:	*La quantité de carreaux qu'il va falloir mettre sur l'horizontal ?*
667	Re	:	*Oui, pour une petite unité en fait. Et là, je fais pareil pour ici. J'ai obtenu ça en fait. Donc là, c'est mon y et là, c'est mon x. Et là, c'est clair que pour tracer ça, on est revenu à un cas simple, donc on a 2-1 et 1.*
668	O	:	*Ou on aurait pu mettre 2-1-1. Dans l'autre sens.*
669	Re	:	*Oui, mais ça après, on va le respecter : après on le reproduit à chaque fois. Disons que là, l'erreur, soit elle sera là, soit elle sera là. Il y aura pas au milieu à faire un arrangement.*
670	N	:	*Oui, parce que là, ce que j'ai fait, il y a deux fois le même.*
671	Re	:	*Alors que là, ça se réparti bien homogène et ...*
672	N	:	*... c'est régulier. (...)*

677 Re : *J'ai ma fonction qui trace la ligne. J'appelle cette fonction, je donne mes deux coordonnées, ça va me faire ce calcul à l'intérieur et je vais rappeler cette fonction qui me fait tracer que ça en fait.*



Ainsi, la construction d'une droite discrète passe par une détermination arithmétique d'un segment "de base" qu'il faudra répéter. Les exemples générés par les étudiants n'ont pas apporté de rétroactions sur ce point : en effet, cette règle s'avère problématique lorsqu'il n'est pas possible de déterminer ce segment élémentaire. Pourtant, Nicolas questionne l'existence de ce découpage, mais l'autorité de Rémi tue la discussion : *on a une* ***règle*** *et elle est rapide. Ça demande pas beaucoup de calculs*. Nous avions souligné que cette *règle* pouvait être identifiée à une définition : cet extrait montre qu'elle doit être *rapide*, *sans trop de calculs*, ce qui pourrait relever de conceptions sur les définitions mathématiques.
Par ailleurs, le problème de l'unicité n'est pas traité, même si Nicolas remarque qu'*il y a un grand nombre de manières d'aller d'un point à un autre*. Les questionnements de nature axiomatique n'ont en fait pas vécu dans cette situation.

IV-1.4. Synthèse sur les *zéro-définitions* et le processus de construction de définitions

Le cheminement décrit ci-dessus montre la multiplicité des pistes de recherche des étudiants ; celles-ci ont été identifiées par les *zéro-définitions* **Ƶdef 1,2,3,5**, les trois premières relèvent de l'utilisation de la droite réelle comme support physique et la dernière provient d'une recherche de régularité par modification de paliers d'une séquence discrète, mais aussi de la recherche d'une *règle* efficace pour le tracé de droites discrètes, deux carreaux étant donnés.
Pour référer à ce que nous avons appelé problématique "régularité", les étudiants parlent de "*règle de répartition*" : celle-ci consiste à répartir le reste de la division euclidienne de la plus grande variation par la plus petite soit à l'une des extrémités, soit le plus uniformément possible sur les paliers.
L'aspect "répétition de paliers" ne sera explicitement présent qu'à la fin du protocole, au moment du bilan, lorsque nous avons demandé aux étudiants de présenter leur problématique en vue de faire un cours.

Les *zéro-définitions* utilisant la droite réelle, ainsi que le *couloir*, (**Ƶdef 1,2,3**) comme support physique n'ont pas été retenues pour la rédaction de la "*règle*". Nous pouvons faire l'hypothèse que ceci est inhérent aux différentes possibilités de tracés qu'elles procurent, mais nous n'avons pas d'extrait explicite à ce propos. Si une demande explicite de définition avait été formulée, nous aurions peut-être eu davantage accès à ce genre d'argument. Nous pouvons

de plus émettre une hypothèse sur l'unicité de la *règle* énoncée par les étudiants : si cette règle est implicitement considérée comme une *définition*, le fait qu'une seule *règle* ait été formulée peut correspondre à la conception selon laquelle il n'y a qu'une définition, le reste étant des propriétés.
Ceci étant, il est important de noter que les *zéro-définitions* (**Ƶdef 1,2,3**) n'intervenant pas dans la formulation de la *règle* font office de **contrôle** des tracés obtenus par la *règle*.

Opérateurs et contrôles
Nous n'avons pas observé d'opérateurs ni de contrôles de types langagiers ou logiques. Dans la mesure où aucune demande explicite de définition n'a été formulée, il n'est pas surprenant de ne pas voir de forts opérateurs langagiers. Le fait qu'une définition véhicule un aspect caractérisation, implique des opérateurs et contrôles logiques. Or, dans la situation présente, les étudiants se sont attachés à la recherche d'une "règle" leur permettant de construire des triangles discrets, et n'ont donc pas eu d'opérateurs et contrôles logiques ayant trait à une condition nécessaire et suffisante par exemple. Cependant, en assimilant la *règle* à une définition, nous avons relevé quelques éléments ayant pu avoir une fonction d'opérateur (même s'ils ne sont que très épisodiques dans le protocole) : la règle est dite *rapide*, *sans trop de calculs*, elle apparaît opératoire pour la construction, précise, non ambiguë (les étudiants n'utilisent pas ces derniers termes).
En ce qui concerne les opérateurs et contrôles lakatosiens, nous pouvons noter l'importance de l'opérateur/contrôle construction de l'objet (la *règle* devant permettre la construction de triangles discrets). La génération d'exemples a également tenu son rôle, mais il n'y a pas eu de contre-exemples en vue de réfuter une proposition. La validation de la "*règle*" produite s'est effectuée sur des exemples seulement et perceptivement par le recourt aux *zéro-définitions* 1,2,3 (tracer d'un couloir et d'un droite réelle). Par ailleurs, les aspects plus axiomatiques n'ont été que très peu problématisés par les étudiants.

Le bilan de la séance
Un bilan a été réalisé avec ces étudiants : le GO a orienté la discussion sur les définitions et a demandé comment ils élaboreraient un cours sur les droites discrètes. Ce petit bilan a été fait rapidement, avec de nombreuses interventions du GO. Cependant, nous avons relevé quelques éléments de conceptions de ces étudiants sur les définitions mathématiques, et surtout noté que pour les étudiants, droite discrète n'est en fait pas définie à la fin de cette expérimentation : ils soulignent la dépendance au contexte de cet objet.

990	O	:	*Et pour vous, le gros problème était situé où ?*
991	Ra	:	*La droite. Tracer une droite.*
992	N	:	*Choisir.*
993	Re	:	*Plutôt de … une règle qui peut être utilisée par une … plutôt que de définir une règle abstraite, dans ma tête, j'ai trouvé une règle qui peut être faite par une machine.*

Le GO demande alors si l'algorithme proposé dans la *règle* n'est en fait pour les étudiants pas une définition :

999 Ra : *C'est pas vraiment une droite, non plus, parce que c'est pas …*
1000 N : *Oui, même le truc qui est régulier, c'est pas vraiment une droite non plus !*
1003 Re : *Une droite, ça rentre dans un contexte, c'est pas … on a une forme qui est comme ça, on va dire, c'est un carré, même si … pour nous, on a une droite, une droite, c'est une droite, parce qu'on associe la droite à une construction. On aurait un cercle fait de plein de droites, on penserait à un cercle, pas à une droite. Là, on voit vraiment que c'est de lignes, parce que … on pense pas qu'à ligne, on pense aussi à ce qu'on peut construire avec des lignes ; on sait qu'un carré, c'est fait avec des lignes, donc …*
(…)
1011 N : *On peut peut-être définir que c'est pas une droite à partir du moment où il y a un carré qui est colorié et que ça passe pas par la droite qui relie les deux points. Si par exemple je colorie celui-là, bon … tu es d'accord avec moi que ce sera pas une droite.*

IV-2. Analyse des productions, résultats - Reconnaissance sans demande explicite de définition

IV-2.1. Rappel de la séance précédente par les étudiants

Ce rappel nous a permis de revenir sur la *règle* énoncée la semaine précédente : nous l'avons redonnée car les étudiants ne la retrouvaient pas. Nous avons ainsi pu relever des éléments les ayant marqués dans ce travail. En particulier, il n'a pas été question de définition mais il semble qu'effectivement, la *règle* ait le statut de définition :

309 N : *Il faudrait définir une règle précise pour faire la limite entre droite / pas droite.*

La *règle* a été utilisée pour générer quelques droites discrètes, ce qui a permis l'émergence d'un cas particulier mettant en défaut l'usage de celle-ci aux yeux des étudiants. En effet, pour 8 carreaux horizontalement et 9 carreaux verticalement, l'utilisation de la *règle* ne permet pas de découper en plus petits segments discrets, mais simplement en un carreau, ce qui ne semble pas être considéré comme une répétition pour les étudiants.

La *zéro-définition* **Ƶdef 3** a été reprise par Nicolas : il apparaît que la recherche de segments qui se répètent est importante dans l'explicitation de la règle, et elle est mise en relation, par Nicolas, avec la *zéro-définition* **Ƶdef 3**. Il énonce alors une nouvelle propriété pour les droites discrètes : lorsqu'un carreau est entièrement dans le *couloir*, ce carreau est *le lieu où ça se répète*, c'est-à-dire qu'il est à une extrémité d'une période. Nicolas est arrivé à cette conclusion car il a tout d'abord reformulé ces choix de carreaux dans un couloir en disant de prendre tous les carreaux ayant plus de la moitié de leur aire dans le couloir.

IV-2.2. Reconnaissance des D_i

La donnée des D_i a fait repartir réellement les étudiants dans une activité mathématique. Ils mettent en oeuvre quatre méthodes pour la reconnaissance de droites discrètes : le tracé d'un couloir pour chaque D_i, le placement de la règle et le tracé d'une droite réelle, le comptage de la longueur des paliers, la recherche de *défauts* dans les D_i. A ces méthodes s'ajoutent quatre propriétés : la première est la répétition. Les étudiants recherchent dans les D_i la répétition d'une séquence (ce que nous avions appelé période précédemment). La deuxième est la régularité, retraduite en *pas trop d'écart entre les paliers*. Il s'agit ici de la longueur des paliers, qui avait été traitée dans la séquence précédente par modification de celle-ci pour l'obtention d'une régularité (**Ƶdef 5**). La troisième propriété considérée est la courbure des objets discrets : cela reste perceptif, par analogie avec la courbure d'un cercle. La quatrième propriété est en fait la modification des paliers dans une séquence pour améliorer celle-ci.
La règle formulée la semaine précédente n'est pas utilisée pour la reconnaissance de droites discrètes : elle pose en effet le problème du choix de deux carreaux sur un objet discret D_i pour la réalisation des calculs, ainsi que le tracé suivant la *règle* d'une droite discrète dont il faut vérifier l'adéquation avec le D_i considéré. Cette démarche pose effectivement de nombreuses questions : les étudiants ne l'ont pas mise en œuvre, mais l'explicitation qu'ils en donnent est liée à la fonction de la *règle* (elle permet de construire, et non pas de reconnaître) :

374	O	:	*Si on revient à ce que tu faisais tout à l'heure, avec tes divisions, est-ce que tu trouveras 3-3-2-2 ou 3-2-3-2 ?*
375	R	:	*Déjà, celle-là on sait qu'on peut l'arranger. Et puis ça me disait pas ce qu'était une droite, mais ça en créait une.*

Deux *zéro-définitions* vont se trouver en quelque sorte en concurrence : la *zéro-définition* **Ƶdef 3** et la *zéro-définition* **Ƶdef 5**, du fait de l'orientation des étudiants vers le couloir et l'amélioration de paliers.

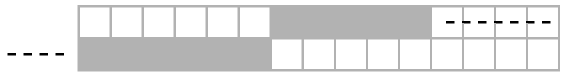
Reconnaissance des droites discrètes

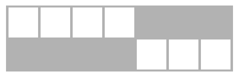
D_1 n'a suscité aucun problème : pour les étudiants, c'est une droite discrète car elle est *régulière*, n'a pas de *défauts*, ni de *variation brusques*.
D_3 et D_6 ont également été écartées, D_3 perceptivement et sortant du *couloir*, D_6 ayant un grand *décrochage* et perceptivement une *courbure*.
D_2 est également reconnue comme n'étant pas une droite discrète car la séquence 1-2-3 contenue dans D_2 peut être améliorée en 2-2-2.
D_5 est classée dans les droites discrètes perceptivement et comprise dans le *couloir* de Nicolas.
Le cas plus délicat pour les étudiants dans la reconnaissance est D_4.

Nous voyons ressortir dans le traitement des D_i la mise en œuvre des différentes propriétés évoquées ci-dessus.

IV-2.3. Morceau de droite versus droite

Le travail de reconnaissance sur ces objets discrets a conduit les étudiants à faire évoluer les *zéro-définitions* 3 et 5, notamment par une demande explicite du GO de rédaction de critères de reconnaissance (ligne 165) mais aussi par une activité de définition de segment de droite un peu induite par le GO : en effet, les étudiants évoquent des droites de *grande distance* et le GO en profite pour leur demander de tracer une droite de 1 sur 1000, ce qu'ils font ainsi :



Le GO leur demande alors si ce segment est une droite : 
C'est alors que les étudiants différencie la définition de droite et la définition de morceau de droite, malgré la contradiction que leur activité soulève : en effet, ils reconnaissent leur tracé comme une droite discrète, mais pas le segment issu de celle-ci comme un segment de droite.

248 N : *C'est pas régulier. Ça pourrait être un morceau de droite, mais ce sera pas une droite.*
249 R : *Oui, la définition, c'est pas la même pour un morceau de droite et une droite.*
250 N : *Oui.*
251 R : *Une droite correcte est pas forcément un morceau.*
252 N : *Si : une droite, c'est un morceau de droite.*
253 R : *Non, un morceau d'une droite correcte est pas forcément une droite correcte.*

La poursuite de la discussion n'a pas distinctement porté sur la définition de segment de droite, mais les nombreuses évocations de la nécessité d'avoir des sous-séquences, des répétitions et une homogénéité ont certainement contribué à l'énoncé ci-dessous :

411 N : *On peut dire un truc pour que ce soit une droite : c'est quelque soient les petits éléments que tu prennes, ça fait une droite, tu peux dire que l'ensemble est une droite. Si une partie droite est une droite, l'ensemble est une droite : c'est normal. Ça marche bien sur celle-là (D1). Si tous les bouts de droite sont une droite, l'ensemble est une droite.*
412 GO : *Ça veut dire quoi !??*
413 N : *Quelque soit le segment qu'on prenne, si ça s'assimile à une droite, l'ensemble sera une droite.*

La distinction effectuée par les étudiants entre droite et "bout de droite" est liée au prolongement d'un segment de droite : en effet, pour les étudiants, prolonger un segment de droite peut être fait « n'importe comment » auquel cas il n'y aura alors pas de droite, ou « correctement » de telle façon à avoir une droite par prolongement :

439 GO : *C'est quoi la différence entre droite et bout de droite ?*
440 N : *Ça c'est un bout de droite, c'est pas une droite pour moi.* (5-1) *ça peut être une droite comme pas une droite.*

441 GO : *Ça dépend de la façon dont tu vas le répéter, c'est ça ?*
442 N : *Ça dépend comment on le continue. Ça c'est un bout de droite qui permet pas de faire une droite (1-1-1-1-1-7-1-1-1-1-3) Il y a une cassure.*

Pour traiter la reconnaissance de droite discrète avec ces arguments, Nicolas va écarter les extrémités en parlant de *variations* dans une droite discrète :

279 N : *C'est quelque chose d'assez homogène. Enfin, non. Il y a pas de grosses variations dedans en dehors des extrémités. Parce que là, il y a des grosses variations, mais c'est aux extrémités (1-5-1), donc on peut arranger ça en rajoutant. Tandis que si j'avais encore un autre carreau comme ça, 2 comme ça, un comme ça et 6 comme ça, ça, quoi qu'on rajoute, on aura vraiment du mal à en faire une droite (1-5-1-1-2-1-6)*

La recherche d'une faible variation, de peu d'écart entre les paliers et les modifications sur des petites séquences pour les rendre plus régulières vont apporter des éléments pour une *zéro-définition* **Ƶdef 4**.

IV-2.4. Evolution des *zéro-définitions*

Evolution de la *zéro-définition* Ƶdef 3

Le *couloir*, surtout développé par Nicolas, a pris une fonction dans la reconnaissance d'objets discrets. Nicolas a formulé par écrit (en parlant de point au lieu de carreau) : *si un point est colorié et n'appartient pas au "couloir" => l'ensemble n'est pas une droite* et *si un point est entièrement inclus dans le "couloir" et n'est pas colorié => l'ensemble n'est pas une droite*. Cependant, le tracé de ce couloir n'est pas questionné : en effet, le couloir en question est toujours tracé avec les deux carreaux extrêmes des segments de droites discrets donnés. Le GO est intervenu sur ce point en questionnant l'unicité de ce couloir et en suggérant que, quelque soit le couloir tracé, il y avait peut-être une propriété à étudier. Mais les étudiants n'ont pas repris cette idée.

Evolution de la *zéro-définition* Ƶdef 5, des éléments pour la *zéro-définition* Ƶdef 4

La *zéro-définition* **Ƶdef 5** est dans cette partie très utilisée par les étudiants, mais n'apparaît en fait que comme une technique : elle n'a pas le statut de définition opératoire. La problématique "régularité" a deux aspects pour les étudiants : le premier concerne la régularité des paliers. Le second consiste en l'amélioration de séquences de paliers. Les deux coexistent et sont mobilisés simultanément dans une première moitié de protocole, jusqu'à ce que la modification de paliers l'emporte. Les étudiants n'avaient pas à rédiger de définition, c'est peut-être la raison pour laquelle la modification des paliers n'a pas été finalisée. De plus, certaines séquences leur semblent *régulière*, *presque droite*, même si une amélioration est possible ; lors de la recherche d'une caractérisation de *plus petits bouts*, Rémi se pose de nombreuses questions :

447 R : *Droite, on sait pas ce que c'est on n'a pas défini. C'est quoi qu'il faut qu'on rajoute pour qu'un bout de droite se transforme en rien ?? On a des solutions qui marchent et d'autres qui marchent pas. A 2-1-1, si on ajoute un là, ça sera pas une droite. Qu'est-ce qu'on peut ajouter pour que ça ne puisse plus devenir une droite ?*
448 N : *Un autre bout de droite qui n'est pas une droite !*
449 R : *Un seul carreau.*
450 N : *Celui-là.*
451 R : *Mais on peut le prendre ?*
452 N : *Mais si on respecte la règle du couloir ... non.*

De plus, des éléments pouvant alimenter une autre *zéro-définition* sont présents : là encore, ils apparaissent parfois de manière isolée, et une demande explicite de définition aurait peut-être pu inciter les étudiants à synthétiser leur recherche (par mobilisation d'opérateurs logiques par exemple). Les éléments en question contribueraient à la *zéro-définition* **Ƶdef 4** : il s'agit de *pas de décrochage important*, *un d'écart entre les paliers*, ainsi que la suppression des extrémités d'un segment discret. Ces fragments de *zéro-définition* sont particulièrement présents lors de discussion portant sur le prolongement de quelques paliers, mais il n'y a pas eu de formulation sur les séquences de paliers proches de ce que nous avions appelé "direction isolée".

Définitions opératoires pour la reconnaissance

La *zéro-définition* **Ƶdef 3** (le couloir) s'est avérée utile pour la reconnaissance des D_i, sans pour autant être retenue et énoncée comme définition. Pourquoi n'y a-t-il pas eu de définition telle que la *zéro-définition* 4 ou la *zéro-définition* 5 approfondies ? Il semble qu'il pèse encore de nombreuses incertitudes sur des petites séquences pour les étudiants. De plus, l'absence de prise en charge d'une formulation synthétique de ces éléments par les étudiants est un hypothétique obstacle. A la fin de la séance, les étudiants reprennent à la demande du GO les éléments leur permettant de reconnaître et de construire des droites discrètes. Cet extrait montre que le problème de la délimitation entre droite/non droite n'est pas encore réglé :

468 GO : *(...) Vous avez vu plein de trucs. Dans tous ces éléments qu'est-ce qui vous permet de reconnaître et de construire un peu, vous diriez quoi ?*
469 R : *On parlait de séquence.*
470 N : *La régularité. Pas de décrochage.*
471 GO : *Pas de décrochage ?*
472 N : *Le 5-1.*(un palier de longueur 5 suivi d'un palier de longueur1)
473 R : *Oui, c'est vraiment un grand décalage.*
474 N : *Il y a essayer de fractionner.*
475 R : *Il faut qu'il y ait un carreau par colonne.*
476 N : *Ça, c'est pas obligé : j'en ai fait une et puis après j'en ai mis deux.*
477 R : *Il faut pas que ça tourne.*
478 N : *1-1-2-2-3-3-4-4-5-5, ça tourne ...*
479 R : *Ça varie de un mais c'est pas une droite.*
480 GO : *Donc ce que vous dites, c'est encore pas suffisant.*
481 N : *Il y a une marge, il faut savoir jusqu'à quel moment on a une droite.*

IV-2.5. Opérateurs, contrôles

L'activité des étudiants ne se plaçant pas explicitement sur la définition, il n'y a toujours pas d'opérateurs et de contrôles langagiers. En revanche, quelques opérateurs logiques, ayant également la fonction de contrôle, ont été mobilisés : il s'agit principalement de conditions nécessaires, portant sur le couloir (voir ci-dessus) et les *décrochages* entre les paliers :

285	N	:	*De toute façon, c'est une condition nécessaire pour que ce soit un morceau de droite. Qu'il y ait pas de décrochage.*
286	R	:	*Ce décrochage là est bon, celui-là est bon, et celui-là, il est plus bon (entre 5 et 1).*
287	N	:	*Il y a des grosses variations. Là, c'est 4-1-1.*

L'opérateur "génération d'exemples" est effectivement mobilisé ; les paliers de ces exemples sont modifiés, mais les exemples produits par les étudiants n'ont pas tenu le rôle de contrôle. Les contrôles sont principalement perceptifs et effectués par la *zéro-définition* **Ƶdef 3**.

IV-3. Analyse des productions, résultats – Reconnaissance avec demande explicite de définition

Pour l'expérimentation "droites discrètes" avec demande explicite de définition, nous avons un unique protocole (durée : 1h45) : Clara et Eric sont des étudiants de Deug Economie-Gestion, Dominante Formalisation (Mathématiques), $1^{ère}$ année.

Nous présentons ci-après une analyse reprenant la construction de définition. Celle-ci nous permettra de souligner les différences par rapport à la tâche t_2 où aucune définition explicite n'était demandée.

IV-3.1. Choix d'un modèle de représentation – exemples et contre-exemples

La référence à des concepts mathématiques réels connus (droite, équation, statistiques et approximation) fait rapidement apparaître des considérations sur l'abscisse et l'ordonnée ([3]), le domaine d'incertitude ([21]) utilisé dans Excel et en statistiques. Le problème est effectivement pour les étudiants de choisir un élément caractéristique pour parler des droites discrètes. Ce groupe ne considère pas le centre d'un carreau comme représentatif du carreau, mais tente quatre modèles successifs, les paliers étant retenus comme élément déterminant :

- une représentation utilisant les points situés aux extrémités de chaque palier ([39])
- une représentation utilisant les points situés au milieu de chaque palier ([55])
- une représentation tenant compte du fait qu'un *palier est un espace de définition dans lequel il y a un point* ([92])

- une représentation prenant le carreau comme point ce qui fait apparaître la nécessité de tracer des traits aussi larges que les carreaux (idée de bande encadrant la droite réelle - [99-101])

Dans chacune de ces représentations, la règle demeure un instrument important, Clara l'utilisant fréquemment sans la mentionner. Nous reprendrons ce point dans l'étude du *concept image* de droite réelle.

Bien que les étudiants ne limitent pas leur étude au premier octant comme nous l'avons fait dans l'analyse mathématique, ils remarquent quelques propriétés de symétrie et regardent naturellement les objets discrets donnés dans ce que nous pourrions appeler le “bon sens” i.e. naïf, comme l'atteste cet extrait :

> 94 C : *on n'est pas obligé d'essayer avec un carreau de longueur et plusieurs carreaux de hauteurs : c'est la même chose, c'est la même droite. Tu comprends ce que je veux dire ? Quand tu inverses l'axe des x et des y, tu t'en fiches. Tu inverses les cadrans. C'est une droite aussi : ça, c'est la réciproque de la droite comme ça, ça va ?*

IV-3.2. Reconnaissance des exemples et contre-exemples dans les tracés donnés – rétroactions du milieu

Pour ces étudiants, D_1, D_4, D_5 sont des droites alors que les autres n'en sont pas.
D_1 et D_6 sont rapidement identifiés perceptivement comme étant respectivement une droite et une courbe.
D_2 a été écartée des droites discrètes car elle comporte des paliers dont la différence des longueurs est strictement supérieure à un : les étudiants conjecturent une partie de la *zéro-définition* 4.
D_3 a tout d'abord été classé dans les non-droites car il comporte des paliers de longueur un. Il sera écarté de toute façon car il comporte des paliers de longueur 4 et de longueur 2 (écart supérieur strictement à un).
D_4 et D_5 seront ceux qui posent le plus de questions : en effet, perceptivement, par le tracé d'une boîte, et n'ayant pas de paliers de longueur un, D_4 et D_5 ont été déclarés droites.
Remarquons que l'incertitude pesant sur plusieurs exemples motive des tests de définition sur les exemples et contre-exemples donnés et générés. Le fait que nous ayons donné peu d'exemples de droites discrètes est certainement un facteur motivant la génération d'autres exemples.
Le calcul de la pente pour la construction une “droite discrète” a été évoqué, mais n'a pas abouti sur une définition de l'objet géométrique. Dans la mesure où certains D_i n'ont pas de répétition d'une même période, la technique mettant en œuvre le calcul d'une pente doit être approfondie. Ce que les étudiants n'ont pas fait. L'utilisation de la règle, perceptive au départ, a été systématisée, notamment par le tracé d'une bande.

Les objets discrets D_i ont principalement servi dans la recherche de caractéristiques et de tests de celles-ci.

IV-3.3. La fonction de la définition : un opérateur efficace, non neutre

La principale fonction d'une définition produite est celle de la consigne : définir pour parvenir à différencier les objets qui sont des droites discrètes des autres. L'enjeu est ici suffisamment fort, en particulier du fait du traitement plus "délicat" de D_4 et D_5. De plus, l'objet géométrique "droite réelle" étant certainement perçu comme facile d'accès par les étudiants, la dévolution du problème s'en trouve favorisée.

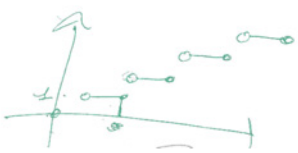
Le GO est intervenu pour induire la fonction de construction et de modification de droite discrète, les étudiants étant peut-être un peu "timides" en matière de génération d'exemples supplémentaires (il est vrai que ce n'était pas dans la consigne ...). Cette fonction supplémentaire a motivé notamment la génération d'autres exemples et contre-exemples, ce que nous estimons être une praxis fondamentale dans un processus de construction de définition (cf. Lakatos et le processus de resserrement autour des caractéristiques).

IV-3.4. *Concept image* et ruptures – rôle du perceptif

Nous avons analysé précédemment le *concept image* de "droite réelle".
Le *concept image* de droite réelle disponible chez les étudiants comprend deux aspects : un aspect "physique", lié à l'utilisation de la règle et un aspect un plus "théorique", lié à certaines caractéristiques de l'objet mathématique.
Il est difficile de savoir pour quelle raison les étudiants n'ont pas fait appel explicitement à une définition géométrique ou analytique de droite réelle (i.e. à un *concept definition* de droite réelle) : est-ce dû au fait que l'objet "droite" est trop banal, ordinaire, non sujet à être problématisé dans l'institution scolaire ? ou les étudiants pensent-ils que la définition qu'ils connaissent de droite n'est pas opératoire dans la situation présente ? N'ayant qu'un groupe dans cette expérimentation, nous ne sommes pas en mesure de trancher. Notons cependant que les évocations de situations connues mobilisant les droites sont fréquentes : il est en effet question de statistiques (nuages de points et approximation), de droites en escaliers. Nous pouvons faire l'hypothèse (c'est peut-être même une affirmation ...) que l'utilisation de droites allant de soi traditionnellement, leur définition n'est pas utilisée en tant que telle, il sera davantage question de caractérisation ...
Quoiqu'il en soit, la théorie de Vinner se révèle efficace pour notre analyse : nous sommes en présence d'étudiants utilisant abondamment le *concept image* de "droite réelle", mais n'en référant pas au *concept definition* de cet objet mathématique.

L'insuffisance du *concept image* "physique" se manifeste lors de la tentative de reconnaissance des droites discrètes : l'utilisation de la règle est en jeu, mais revêt différentes utilisations dans le cas discret, d'où les différentes tentatives de représentation (exposées ci-dessus). Certaines caractéristiques de l'objet mathématique, sont également mises en oeuvre : il est surtout question de régularité, les étudiants restant sur un aspect perceptif. Cette insuffisance du *concept image* de droite réelle constitue un effet positif, indispensable au bon fonctionnement de la SCD ; des éléments du *concept definition* de droite réelle sont mobilisés à savoir la pente, mais surtout la régularité, l'infinité de points ([101]).

IV-3.5. Relations / passages du discret vers le continu et inversement

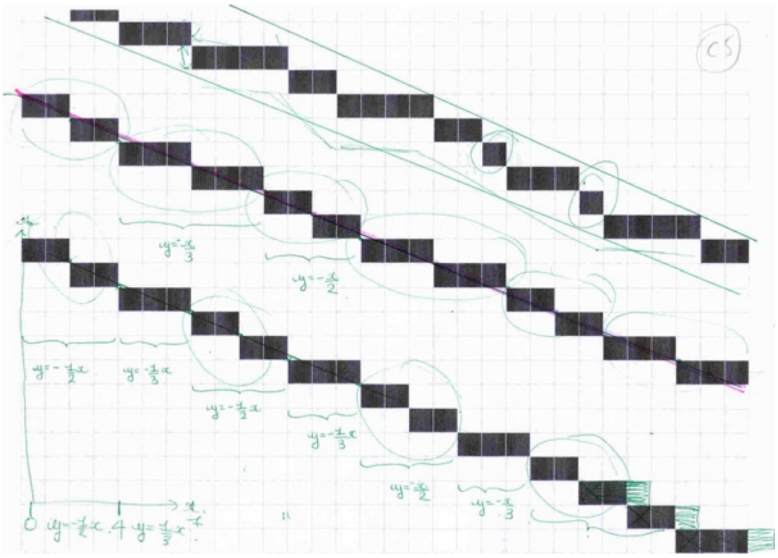
Considérer les relations du discret vers le continu et inversement nous permet de poursuivre sur l'analyse du rôle du *concept image* et de l'aspect perceptif. Il nous semble plus facile d'effectuer un passage continu → discret dans un premier temps : en effet, la droite réelle peut servir de support physique, de même que son équation cartésienne et ses caractéristiques (pente etc.). Il est possible d'utiliser une droite réelle de deux points de vue : un point de vue purement physique, et un point de vue analytique consistant à la recherche de la pente. Comment alors déterminer la pente d'une droite discrète ? (l'ordonnée à l'origine est moins problématique à déterminer).
Les étudiants n'ont pas pris à leur charge le passage continu → discret, mais sont davantage entrés dans un processus de différenciation entre droites discrètes et non droites, conformément à la consigne. Lors de la production de nouveaux exemples et contre-exemples, les étudiants ne se sont pas appuyés sur la droite réelle physique. Ainsi, la problématique "régularité" prédomine et les étudiants ne sont pas dans une perspective de construction de l'objet : ils évoquent rapidement un *taux de croissance constant*, une *régularité*, et un "*pattern*", mot qui a été traduit par "*modèle*" par la suite : *« ce serait un modèle qui est reproduit plusieurs fois, mais est-ce qu'on peut parler de droite à ce moment-là ? »* (C [7]), et la fonction de reconnaissance prédominant, le passage continu → discret n'a pas été l'objet de discussion.
En revanche, la relation discret → continu est examinée ; en effet, Clara évoque les nuages de points dont on fait une approximation en statistiques et redessine, dans le continu, D_5 , en traçant  et , ce qui lui pose des problèmes de "définition" des points où s'effectuent les sauts.
Ses réflexions sont les suivantes :

> 15 C : *Tu as 2-2-3, 2-2-3, est-ce qu'on peut appeler ça une droite ? C'est vrai qu'on peut voir tout des bouts de droites, tous mis ensemble. Oui, mais c'est bizarre comme une droite.*

> *Parce que regarde ici, on le définit comment ? de là à là ? Si ça, c'est le point 1, à x=1, on définit comment ?*

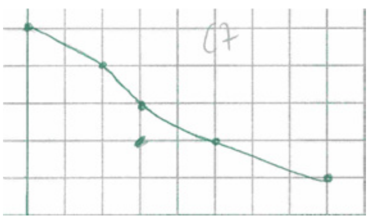
Le travail des étudiants s'oriente ici vers la séquence des paliers, cela conduira à une *zéro-définition* proche de **Ƶdef 4**.

Cela se poursuit par le calcul de "pente" des séquences régulières (i.e. des séquences de paliers comportant chacun le même nombre de carreaux de D_4 et D_5), tel que le montre le dessin ci-dessous. Cependant, cette pratique n'a pas été décrite : en particulier, nous n'avons pas de trace orale expliquant le mode d'obtention de ces pentes. De plus, les étudiants n'ont pas cherché à calculer la pente d'un plus grand fragment. Le fait qu'ils aient noter des valeurs aurait pu déboucher par exemple sur une définition ou une *zéro-définition* proche de ce qui est énoncé dans la *zéro-définition* **Ƶdef 5**, et donc un travail supplémentaire sur la structure des paliers. Mais les étudiants n'ont pas travaillé sur les relations entre différentes pentes d'un même objet discret.



La recherche de pentes rationnelles va rapidement dévier sur des interrogations portant sur la répétition d'un "*pattern*" et la vision d'une droite discrète comme étant un ensemble de segments de droite discrets.

Les autres discussions sur discret → continu se rapportent aux différentes tentatives de représentation évoquées précédemment : les paliers sont représentés par des points et ceux-ci sont reproduits dans un repère orthogonal puis reliés à main levée : le résultat obtenu (voir ci-dessous D_8 ainsi modélisé) leur permet dans ce cas précis de conclure que D_8 n'est pas une droite discrète.



Cette stratégie est écartée car l'utilisation de celle-ci ne permet pas d'obtenir des droites discrètes parmi les D_i : 55 C : *si on fait avec toutes, on aura plus beaucoup de droites !*

IV-3.6. Opérateurs et contrôles

La recherche d'invariants dans l'utilisation d'opérateurs et de contrôles dans une situation où une "demande explicite de définition" est formulée, est un point important de nos analyses. En effet, celle-ci nous permet en particulier de comparer l'activité de définition des étudiants ayant réalisé la tâche t_2 et celle des étudiants de la tâche t_3.
Les opérateurs langagiers concernent principalement la *précision*, en conformité avec la conception selon laquelle « il faut être précis dans une définition ». Remarquons que cet opérateur, qui tient également le rôle de contrôle, est un peu plus qu'un simple contrôle langagier : en effet, être précis dans une définition implique en particulier que la définition ne s'applique qu'à la classe des objets définis. Dans le protocole, l'appel à la *précision* constitue un opérateur-contrôle langagier mais aussi un contrôle sur la définition produite (c'est effectivement un contrôle aristotélicien où la définition ne s'applique qu'au défini) :

126 E : *Là, on nous donne des trucs avec deux ou trois. On peut avoir des trucs aussi avec juste un.*
127 C : *Qu'est-ce que tu veux dire avec juste un ? Ahhhhh ! Avec juste un carreau unitaire ça marche, tu as raison.*
128 E : *Je sais pas.*
129 C : *Tu as bien raison. Oui, oui. Ça marche comme ça. Il faut être plus précis dans la définition, en fait.*

Un autre opérateur langagier fut la dénomination d'éléments prenant part à la définition : celui-ci traduit qu'il est nécessaire de ne définir qu'à partir de choses déjà connues ou définies par ailleurs, ce qui relève alors d'un opérateur logique :

328 C : *et comment on va appeler la différence ?*
335 E : *on peut vous rajouter un lexique ?*

La fonction de classification, et ainsi la méthode de définition par genre et différences spécifiques sont présentes : les étudiants cherchent à délimiter ce qu'est et ce qu'est pas une droite discrète. La classification va porter sur les droites et les non-droites, par recherche de caractéristiques spécifiques aux droites et d'autres spécifiques aux non-droites :

33 E : *on va procéder par élimination* (…)
59 C : *il faudrait déterminer les caractéristiques qui nous permettraient de dire que les autres en sont ou pas* (…)
103 C : *et c'est ça qui est difficile : où tu commences à dire non, c'en n'est plus une et où tu commences à dire oui, c'en est une.*

Ainsi, la recherche de propriétés caractéristiques est au cœur du problème et représente à la fois un opérateur et un contrôle logique (condition nécessaire) :

36 C : *on va écrire ce qu'on juge être les caractéristiques* (…)
53 C : *t'as trouvé une propriété ?*
103 C : *mais ça peut être déjà un élément dissuasif (...) ou bien c'est une condition.*

La recherche de contre-exemples est utilisée comme opérateur, mais aussi un contrôle, et les étudiants cherchent à ne pas se limiter à des cas particuliers :

94 C : *pour l'instant, on n'a pas réussi à contre-prouver (...) On avait prouvé des existences, enfin, là, ça marche.*
111 C : *il me faudrait des contre-exemples. Vous en avez d'autres ?*
184 C : *on est tombé sur un mauvais hasard*
88 C : *on va recommencer ... il faut tester : en maths, il y a un truc qu'il faut jamais faire, c'est prendre le chiffre deux, dire que ça marche avec deux et puis hop !*

Nous avons ainsi des opérateurs et contrôles aristotéliciens (langagiers, logiques), un opérateur lakatosien (génération d'exemples et contre-exemples) qui tient également le rôle de contrôle mais aussi des contrôles perceptifs, passant par l'utilisation de la règle.

Notons de plus un contrôle spécifique au passage discret→continu, où les étudiants vérifient l'existence d'une droite réelle passant par tous les points d'une courbe discrète donnée ; leur conclusion est la suivante :

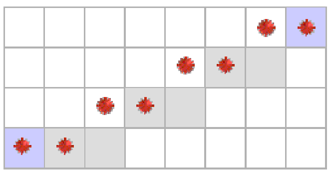
47 C : *Ah oui, tu as raison, j'avais pas vu. Donc, non effectivement, on n'a pas un modèle. Et si on relie les points comme l'autre, ça marche pas. On n'arrive pas à faire une droite qui passe par tous les points ... non, c'est qu'on arrive pas à faire une droite qui passe par tous les points, mais maintenant, est-ce qu'on peut appeler ça une droite quand même, même si elle passe pas par tous les points ?*
48 E : *Même si elle dévie légèrement.*
49 C : *Mais le trait que je vais tracer, il va être droit, mais il passe pas par tous les points qu'on a décidés, regarde, là, le trait il est bien, puisque je vais le tracer avec la règle. Mais à chaque fois, il passe dans le noir par contre. Sauf là, mais il passe toujours dans le noir. Donc est-ce qu'on peut faire comme en stats ? Tu sais, on avait un 'trend', on avait un nuage de points, on faisait hop !*

IV-3.7. Génération d'exemples et contre-exemples

Les opérateurs et contrôles nous permettent de rapprocher le processus de construction de définition des étudiants à un processus identifié ; cependant, la compréhension du processus disponible chez les étudiants passe par l'identification des *zéro-définitions* et de leur évolution. D'après le paragraphe précédent, les opérateurs et contrôles évoquent quelque peu le processus aristotélicien (surtout de par les aspects langagiers et logiques ce qui n'a rien de surprenant dans la mesure où nous demandons explicitement une définition). Le processus lakatosien est également présent, et c'est peut-être là le plus important : en effet, les étudiants s'attachent à ne pas se restreindre à des cas particuliers et sont effectivement engagés dans la production d'exemples et de contre-exemples. Ceci étant, nous n'avons pas relevé de trace de *proof-generated definition* ; en effet, des questionnements axiomatiques issus des connaissances de géométrie euclidienne (intersection de droite, appartenance d'un point à une droite, parallélisme etc.) ne sont pas apparus. Ainsi, aucun enjeu de preuve n'a pu favoriser l'émergence de *proof-generated definition*.

Ce que nous considérons alors comme important, dans le cadre d'un processus lakatosien, et ce, même si des *proof-generated definitions* ne sont pas produites, est l'explicitation des exemples et contre-exemples générés, ainsi que leur rôle dans le processus de construction de définition.

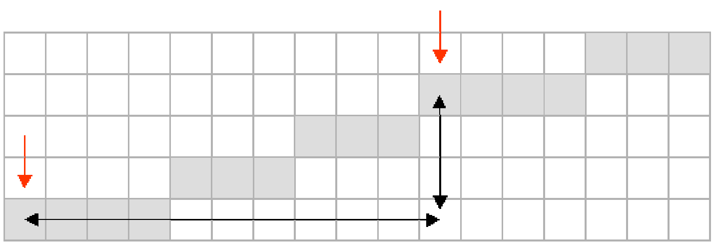
Nous pouvons clairement affirmer que les étudiants sont sur la construction d'une définition de "droite discrète", celle-ci étant liée à la fonction de reconnaissance. Ainsi, les exemples et contre-exemples construits par les étudiants sont appréhendés de manière perceptive, mais aussi, sont générés relativement à une définition structurelle, conforme à une certaine régularité.
Les exemples significatifs produits par les étudiants sont au nombre de trois, à commencer par la production d'un dessin **modifié** de D_5, pour donner à celle-ci "plus de régularité" (il faut comprendre ici en terme de régularité des paliers) : ils obtiennent une succession de 3-2-2-3-2-2 etc. ce qui correspond à une droite discrète de pente 3/7 (voir ci-dessous le dessin obtenu pour une pente de 3/7 – les carreaux marqués d'un point rouge sont ceux choisis par l'algorithme de Bresenham). Rappelons que D_5 est une droite discrète de pente rationnelle 10/23 en valeur absolue et soulignons que les étudiants ne disent pas que ces deux droites (i.e. D_5 et D_5 modifiée) sont les mêmes : ils ne portent qu'un jugement perceptif sur l'aspect de celles-ci.



Exemple généré n°1 (modification de D_5)

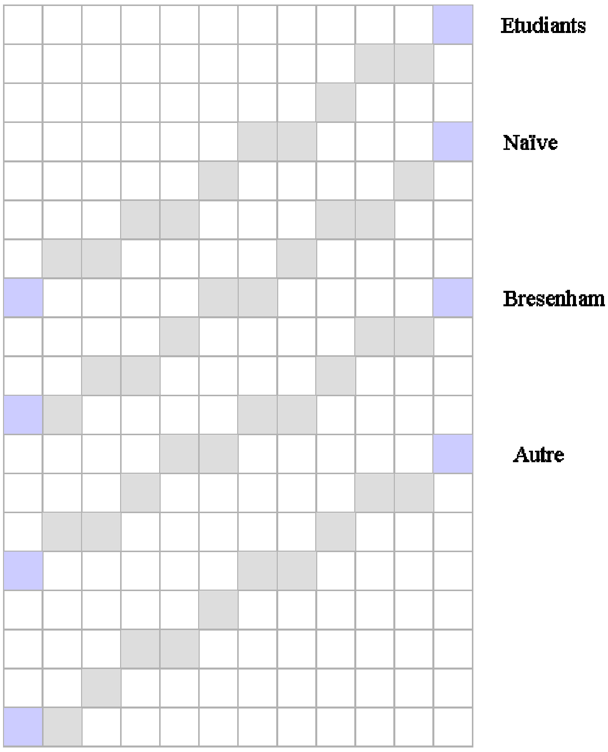
Il est intéressant de noter ici que la modification d'une séquence de pixels n'a pas abouti sur la construction d'une définition telle que **Ƶdef 5**, contrairement au groupe Rémi/Nicolas participant à la tâche reconnaissance de droites discrètes sans demande explicite de définition. Clara et Eric sont en fait sur une problématique "régularité" et recherchent la répétition d'une séquence, et certaines propriétés de cette séquence. Ils ne sont pas sur la modification des séquences.

Le deuxième exemple produit a servi de test : les étudiants ont voulu expérimenter la technique de tracé d'un objet discret comprenant la **répétition d'un modèle**, avec des paliers plus longs que précédemment. Ils ont ainsi tracé une séquence de type 3-3-4-3-3-4 etc. Notons que ceci représente une droite discrète de pente 3/10 (voir dessin ci-dessous : le tracé des flèches nous incombe). Pour eux, la justification est encore de type perceptif (usage de la règle qui débouchera sur le tracé d'une *boîte* entourant une droite discrète).



Exemple généré n°2

Le troisième exemple produit résulte d'une demande de l'observateur : **tracer un segment reliant deux points** (pente 7/11). Ci-dessous se trouvent le tracé produit par les étudiants et ceux obtenus avec les définitions naïves (arithmétique) et la définition de Bresenham (algorithmique). Nous avons ajouté un autre tracé pour montrer une modification perceptive de la régularité.



Parmi les quatre tracés ci-dessus, trois (dont celui produit par les étudiants) possède la séquence 2-2-1-2-1-2-1 en commun. Ce qui n'est pas le cas de la dernière. Nous avons demandé aux étudiants quel tracé ils préféraient. Il est amusant (ou surprenant) de constater qu'ils ne préfèrent pas le dernier tracé au leur, malgré la forte régularité de celui-ci. Peut-être est-ce dû au coefficient 7/11 (deux nombres premiers) qui semble perçu comme une "curiosité de la nature" par les étudiants : pour eux, la présence de deux nombres premiers est peut-être incompatible avec une trop grande régularité ? Ceci n'est que pronostic, le protocole ne nous apprenant rien sur ce point précis. Le lecteur remarquera que les trois premiers tracés correspondent à une droite discrète de pente 7/11, alors que le dernier est celui d'une droite discrète de pente 2/3 : en effet, les trois premiers appartiennent à une droite répétition de la séquence 1-2-1-2-2-1-2, alors que le dernier appartient à une droite répétition de la séquence 1-2.

Les contre-exemples produits ont eu pour but de tester les séquences de paliers acceptables pour une droite discrète, par exemple : la proximité d'un palier de quatre carreaux et d'un palier de un carreau est-elle problématique ? Pour les étudiants, le nombre de carreaux entre deux paliers ne doit différer de plus de un. Nous allons maintenant établir les *zéro-définitions* en jeu.

IV-3.8. Les définitions produites et les conditions de leur émergence - synthèse

Situer dans un tableau les définitions produites par les étudiants et les conditions de leur émergence (et/ou de leur rejet), ainsi que les questionnements mathématiques et ceux relatifs au concept de définition, nous permet de faire l'historique du processus de définition. Nous avons appelé "définitions produites" tous les énoncés des étudiants pouvant s'apparenter à une définition mathématique. (NB : ce tableau conserve la chronologie).

Définitions produites	***Zéro-définition* de référence**	**Fonction** (pour les étudiants)	**Questionnement mathématique voire axiomatique**	**Questionnement présent sur le concept de définition**	**Nature et Type de définition**
Répétition d'un modèle [7s]	**Ƶdef 4**	Reconnaissance	régularité, séquence des paliers, une droite est-elle un ensemble de segments ? Qu'est-ce qu'un "pattern" ?	Aucun	Structurelle & perceptive ; *Zéro-définition*
La droite réelle passe par les carreaux noircis [55]	**Ƶdef 0,1**	Reconnaissance	Où est le point dans un palier ?	Peu acceptable car utilisation de la règle [57]	Perceptive ; *zéro-définition*
Si on a un modèle, on a une droite [70]	**Ƶdef 4**	Reconnaissance	Tous les pattern conviennent-ils ? Quels types de paliers ?	Aucun	Structurelle ; CN
Il ne faut pas qu'il y ait une différence de plus de deux ? [86]	**Ƶdef 4**	Reconnaissance	Est-ce le « un carreau » qu'il faut éviter ?	Tester une définition, ne pas se limiter à des cas particuliers.	Structurelle ; CN participant à une CNS
Tracé d'une boîte dont les bords ont une pente constante [101s]	**Ƶdef 3**	Reconnaissance	Comment tracer la boîte ? (passage du discret au continu en retraçant la droite réelle à partir de la boîte)	Où commence-t-on à dire que l'on a une droite ? [SIC-103]	Structurelle, fonctionnelle ; CN voire définition
Une droite a toujours un domaine d'incertitude plus grand qu'un carreau unitaire [123]	**Ƶdef 4**	Reconnaissance Construction	Contre-exemple : droite de pente 1	*Il faut être plus précis dans la définition* [129]	Structurelle ; Définition
Une droite est la répétition d'un cycle + un écart de un entre les paliers [205s – 317s]	**Ƶdef 4**	Reconnaissance Construction (fonction secondaire) Communication (reconnaissance par autrui [376])	Est-ce que l'ensemble est une droite ?	- Aspect langagier (répétition d'un cycle) - Dénomination (comment appeler la différence ? [328]) - Aspect lexical / éléments premiers : ils veulent définir "palier", "direction"	Structurelle ; Définition

Résultats et lecture du tableau

Une seule définition a été produite par ce groupe : *la répétition d'une séquence, dans la même direction, dont la différence entre deux paliers ne doit pas être plus grande que un.*
Lexique : palier, direction
Le fait qu'une seule définition ait été produite résulte de l'abandon du tracé de la *boîte*, celui-ci étant tributaire de l'usage de la règle, ce que les étudiants ont rejeté. De plus, les *zéro-définitions* utilisant une droite réelle comme support physique n'ont pas été approfondies, pour deux raisons : les étudiants ont essayé plusieurs choix de points pour tracer une droite réelle sur un tracé discret, pour ne finalement retenir que l'idée de la *boîte*. De plus, le rejet de l'instrument "règle", marque la fin d'une tentative de *zéro-définition* utilisant la droite réelle comme support physique. Cela témoigne en particulier que pour les étudiants, une définition ne doit pas être tributaire de l'usage d'un instrument (là encore, l'imprécision apporté par l'utilisation d'un instrument est en jeu).
Ainsi, les étudiants se sont privés de la possibilité de produire certaines définitions (celles issues des *zéro-définitions* **Ƶdef 1** et **Ƶdef 2**) utilisant la droite réelle comme support, du fait de leur volonté de définir "droite discrète" indépendamment de l'usage de la règle, c'est-à-dire de manière intrinsèque. De plus la *zéro-définition* **Ƶdef 5** n'est pas non plus apparue : modifier un objet donné ne rentre peut-être pas dans le contrat.
Définir "droite discrète" par une caractérisation est ce dont les étudiants se sont le plus approchés, et sur laquelle se sont portées leurs exigences (langagières, logiques, précision). La principale fonction motivant les étudiants est la fonction de reconnaissance : ce qui peut expliquer leur recherche d'une définition **structurelle** et non arithmétique ou algorithmique. De plus, ils n'ont abordé les questions de segment de droite reliant deux points que du point de vue de la régularité des paliers, sans entrer dans un processus arithmétique mettant en oeuvre les coordonnées desdits points.
Nous avons alors deux *zéro-définitions* (**Ƶdef 3** et **Ƶdef 4**) : l'une va aboutir (**Ƶdef 4**) mais l'autre sera abandonnée du fait de l'intervention d'un instrument dans la définition mais surtout des problèmes rencontrés lors du tracé d'une *boîte* entourant une courbe discrète donnée.
Nous n'avons pas de *proof-generated definition* car il n'y a pas eu de questionnements véritablement axiomatiques.
Il apparaît clairement que les étudiants sont dans une perspective de reconnaissance d'objets, donc de recherche de propriétés intrinsèques aux "droites discrètes". En conséquence, leur étude se place au niveau de la détermination de la structure d'une séquence de pixels, et de ses paliers. Nous avons déjà décrit le rejet de l'usage de la règle : ceci se répercute comme un refus d'une utilisation de la droite réelle pour définir "droite discrète".

V- Synthèse, résultats sur les deux situations expérimentales

Rappelons que le concept “droite discrète” est encore problématique dans la recherche mathématique actuelle. En effet, il n'y a pas d'objet privilégié qui s'impose. Nous pouvons dire ainsi que, dans cette situation, le concept de « droite discrète » était nécessairement à construire, alors que, dans la situation précédente, le concept d'arbre était seulement à « rejoindre ».

Les différentes versions de la situation « droite discrète » n'ont pas été dévoluées de la même manière, du point de vue de la construction de définition. Elles correspondent à des valeurs différentes de deux variables globales : demande explicite de définition ou non, reconnaissance ou construction d'objets mathématiques.
La situation « reconnaissance de droites discrètes » a été expérimentée sous deux formes : avec et sans demande explicite de définition. La « demande explicite de définition » semble favoriser le travail de mise en relation entre différentes définitions et mobilise des opérateurs et contrôles de différents types (langagiers, logiques et lakatosiens (génération d'exemples et de contre-exemples en particulier)) qui agissent dans les caractérisations du concept en jeu.

Dans la situation de « reconnaissance de droites discrètes », sans demande explicite de définition, le travail d'un des groupes n'a pas été pleinement finalisé comme il l'aurait pu l'être, si une telle demande avait été formulée. En effet, ce groupe a produit plusieurs *zéro-définitions* de droite discrète, issues de points de vue différents sur l'objet géométrique. Cependant, ces *zéro-définitions* sont restées atomisées et aucune étude sur les implications entre elles n'a été mise en œuvre. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'une demande explicite de définition aurait pu finaliser la construction du concept de droite discrète dans ce groupe.

Dans la situation « triangles discrets », il s'agissait de construire des triangles, il n'y avait pas de demande explicite de définitions. Notre hypothèse était que cette tâche induirait une activité de définitions des objets concernés (point, segment de droite, droite). En fait, les étudiants se sont essentiellement centrés sur l'activité de production de triangles, les quelques *zéro-définitions* qui ont été données n'ont pas été travaillées.
La situation « triangles discrets » mériterait d'être ré-expérimentée sur un temps plus long, car c'est une situation de recherche complexe dont la problématique axiomatique est déterminante. Par exemple, elle contient des questions non résolues telles que l'intersection de deux droites.

Notre expérimentation a fait ressortir une variable didactique non prévue dans notre analyse préalable : le type de fonction de la définition. Cette variable prenait ici deux valeurs : définir pour construire, dans la situation « triangles discrets » et définir pour reconnaître dans les deux autres situations. Les étudiants ne traitent pas simultanément ces deux fonctions (construction et reconnaissance). Pourtant, même si chaque situation ne mettait en jeu explicitement (dans l'énoncé de la tâche) qu'une seule de ces fonctions, nous pouvions nous attendre à ce que les étudiants les mobilisent dialectiquement, comme dans toute démarche scientifique.

Néanmoins, dans les situations expérimentées, la dévolution a été favorisée par la facilité d'accès aux objets (arbre, droite discrète) par leurs représentations, et aussi par la possibilité d'énoncer des *zéro-définitions* basées sur la perception ou la description physique de ces objets. La richesse des productions dans les situations « droite discrète » témoigne de la capacité des étudiants à adopter des points de vue différents sur un même objet. De plus, ces points de vue sont proches de ceux de la communauté scientifique.
Nous dirons pour terminer que, dans un enseignement qui développerait la démarche scientifique, la demande explicite (ou non) ne devrait pas être une variable didactique.

ANNEXE sur "droites discrètes"

Algorithme de Bresenham (1965)
Cet algorithme permet de tracer une droite de meilleure approximation entière. C'est un parcours incrémental des points entiers les plus voisins d'une droite réelle. Il repose sur le calcul de l'erreur commise en coloriant un carreau. On va choisir d'incrémenter y de 0 ou 1 suivant les cas. Cette incrémentation est déterminée par l'examen de la distance entre la droite rationnelle et le plus proche carreau : cette distance est la distance verticale, suivant le maillage. Elle est appelée « erreur » (notée e par la suite). Nous allons regarder si l'erreur que nous commettons est plus petite ou plus grande que ½ .

L'algorithme est le suivant :

On initialise $e = 0$, $x = x_1$, $y = y_1$
Début de la boucle
  On affiche le pixel (x , y)
  $e := e + p$
  Si $e \geq 1/2$, alors $y := y + 1$ (on prendra le carreau « au-dessus »)
    $e := e - 1$
  $x := x + 1$ (sinon, on prendra le carreau « à côté »)
Fin de la boucle.

Ainsi, à chaque pixel, l'erreur augmente de p, et lorsqu'elle est supérieure à ½, on allume le pixel du dessus, l'erreur est alors minorée de 1. Ceci s'entend tant que $x < x_2$ et $y < y_2$.
Le problème de cet algorithme, d'un point de vue pratique, est l'utilisation de nombres à virgules (e et p). Il est possible de le modifier, en multipliant chaque opération par ($dx = x_2 - x_1$) pour que $e \in Z$, ce qui simplifiera les calculs. L'algorithme devient alors :

On initialise $e = 0$, $x = x_1$, $y = y_1$ et on note $dx = x_2 - x_1$ et $dy = y_2 - y_1$

Début de la boucle
  On affiche le pixel (x , y)
  $e := e + dy$
  Si $e \geq dx/2$, alors $y := y + 1$ (on prendra le carreau au-dessus)
    $e := e - dx$
  $x := x + 1$ (sinon, on prendra le carreau « à côté »)
Fin de la boucle.

NB : la description de l'algorithme de Bresenham passe sous silence la question suivante : lorsque deux choix sont possibles (à cause de l'équidistance), lequel faut-il choisir ? Rogers (1985) souligne que dans ce cas, il n'y a pas de choix clair.
Remarquons de plus que l'algorithme de Bresenham, tel qu'il est décrit ci-dessus, n'utilise pas le tracé de la droite réelle, mais seulement l'accroissement entre le point initial et le point final.

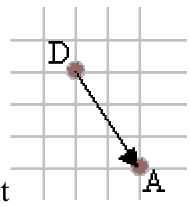
Chapitre VIII

Déplacements sur une grille discrète

I – Etude mathématique

I-1. Problème général : étude des déplacements sur une grille discrète ($\mathbb{Z}^2$)

Le problème qui nous intéresse ici est le suivant :
Prenons une grille discrète ($\mathbb{Z}^2$). Un « point de la grille » est un point du maillage.
Soit un ensemble E de *k* déplacements élémentaires sur cette grille. A partir d'un point donné de la grille, quels sont les points atteignables en appliquant ces déplacements autant de fois que l'on veut ?



Un **déplacement élémentaire** est un vecteur à coordonnées entières : par exemple, le déplacement « 2 carreaux à droite et 3 carreaux en bas », qui peut être matérialisé sur la grille avec un point *D* de départ et un point *A* d'arrivée. Nous le noterons ainsi : d(2D,3B) où 2D désigne un déplacement de n carreaux à droite, 3B trois carreaux en bas (G désignera « à gauche » et H « en haut »).
Un **déplacement** est une combinaison entière (positive) de déplacements élémentaires.

Nous noterons $a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_kd_k$ une combinaison entière de *k* déplacements élémentaires où a_i sont des entiers naturels, $1 \leq i \leq k$. Dans cette combinaison vectorielle sur le plan discret, les coefficients sont des entiers naturels et les vecteurs sont à coordonnées entières. C'est donc une addition réitérée de déplacements élémentaires, elle est associative et commutative.
Nous pouvons reformuler notre problème, sous la forme du type de tâches suivant :

> ***Etant donné un ensemble E de k vecteurs à coordonnées entières, quels sont les points atteignables, à partir d'un point donné, par des combinaisons entières de ces vecteurs ?***

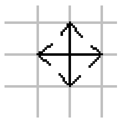
I-2. Etude mathématique

Cette étude a pour but de mettre en évidence les questionnements fondamentaux que pose un tel type de tâches, et de définir les concepts mathématiques en jeu. **Dans tout ce qui suit, un "point de départ" est fixé**, nous ne le rappellerons pas systématiquement.

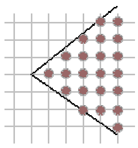
I-2.1. Comment atteindre tous les points de la grille ?

Le traitement de cette question induit de rechercher s'il **existe** un ensemble E de déplacements élémentaires permettant effectivement d'atteindre tous les points de grille. S'il en existe (au moins un), il faudra **caractériser** de tels ensembles **générant** tous les points de la grille.

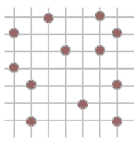
Un tel ensemble existe : par exemple, l'ensemble des quatre déplacements unitaires E = {d(1D), d(1G), d(1H), d(1B)} permet de manière évidente d'atteindre tous les points de la grille.



Pour caractériser un tel ensemble **générateur**, il est possible d'étudier des ensembles de déplacements élémentaires permettant d'aller :



1) sur **tous les points d'une zone de la grille** ce que nous appellerons **"densément" ;**



2) **un peu partout, proche de n'importe où**, c'est-à-dire quelque soit un point P de la grille, il existe un point atteint A "proche" tel que la distance[154] entre P et A soit bornée (indépendamment de P). Nous appellerons dorénavant cette propriété "**u.p-partout**" (pour "un peu partout")

Lorsque les deux propriétés "u.p-partout" et "densément" sont vérifiées, il est alors possible d'atteindre tous les points de la grille. Soulignons la fonction opératoire de ces deux propriétés pour définir "ensemble générateur".

On peut donc choisir d'étudier des ensembles de déplacements élémentaires générant tous les points de la grille, ou générant seulement un ensemble de points donné.

I-2.2. Problème inverse et minimalité

Le problème donné au départ est un problème « premier » par rapport à celui que nous venons de voir : étant donné un ensemble E de déplacements élémentaires, où permet-il d'aller sur la grille ? c'est-à-dire quels points permet-il d'atteindre ?
Une fois l'ensemble des points atteints déterminé, on peut alors étudier la question suivante :

Est-il possible d'enlever un déplacement élémentaire de E sans changer l'ensemble des points atteints avec E ?

Cette question est celle de la minimalité de l'ensemble E donné. Un ensemble de déplacements élémentaires est dit **minimal** lorsque la suppression de l'un de ces déplacements élémentaires modifie l'ensemble des points atteints.

[154] Distance sur la grille ou toute autre distance euclidienne.

On peut se poser alors la question de la caractérisation d'un ensemble générateur du plan discret qui sont minimal, un tel ensemble est dit **générateur minimal.**
Enfin, les ensembles générateurs d'un secteur donné du plan discret (ou de tout le plan discret) et minimaux (au sens ci-dessus) sont-ils **minimums**, c'est-à-dire, ont-ils tous la même cardinalité ?

I-2.3. Chemins, chemins différents

Soit E un ensemble de k déplacements élémentaires notés d_1, d_2, …, d_k. Nous allons étudier les chemins permettant de se rendre d'un point A fixé à un point B atteint.
Nous appellerons **chemin** pour aller d'un point A à un point B, une combinaison entière de déplacements élémentaires de E ; un chemin peut donc être décrit par un k-uplet (a_1, a_2, …, a_k) où les a_i, pour $1 \leq i \leq k$, sont les coefficients entiers de cette combinaison.
Deux **chemins de A à B** sont **dits différents** si et seulement si les k-uplets les caractérisant sont différents. Ou encore, deux chemins sont les mêmes si les familles[155] de déplacements élémentaires qui les décrivent sont les mêmes. Du fait de la commutativité, **l'ordre des déplacements élémentaires n'intervient pas** dans la description d'un chemin. Par exemple, (d1, puis 2d2) et (d2, puis d1, puis d2) correspondent à un seul chemin.

On peut se poser alors la question des relations entre le nombre de chemins pour aller de A à B avec l'ensemble E, et la propriété de minimalité de E :

> *lorsqu'il y a (au moins) deux chemins différents, est-il possible de supprimer un déplacement élémentaire dans E ?*

La réponse est non : l'étude de cette question est complexe, même sur ℕ.
Voici un contre-exemple sur la droite entière. Soit E = {d(2D) ; d(3D)}, que l'on notera, sans risque de confusion, **2** et **3**. Avec ces deux déplacements élémentaires, il est possible de générer 11 de deux façons différentes, soit en faisant 4 × **2** + 1 × **3**, soit en faisant 1 × **2** + 3 × **3.** Mais il n'est possible d'enlever ni 2, ni 3 dans E, car alors 11 ne pourrait plus être atteint.
Ainsi, E est générateur et minimal pour 11.

On constate donc que, l'existence de plusieurs chemins n'implique pas forcément la non-minimalité de l'ensemble E. On va donc devoir considérer plusieurs types d'ensemble E :

- il n'y **a pas unicité du chemin en au moins un point** c'est-à-dire qu'il existe au moins un point atteignable d'au moins deux manières différentes : cela n'implique pas que E est non-minimal ;
- tout point de la grille peut être atteint d'au moins deux manières différentes. Nous appellerons cette propriété "**redondant partout**" ; l'ensemble E est alors non minimal, ce qui est le cas lorsqu'un déplacement élémentaire de E est combinaison entière d'autres éléments de E ;

[155] Dans une famille, chaque élément peut apparaître plusieurs fois.

- tout point de la grille peut être atteint d'une et une seule façon (unicité du chemin), ce que nous appellerons "**redondant nulle part**". L'ensemble E est alors, de manière évidente, minimal.

I-2.4. Ensembles générateurs minimaux de Z et leurs cardinalités

Nous avons vu, au paragraphe I-2.2, que des ensembles générateurs minimaux peuvent avoir des cardinalités différentes. Nous allons étudier cette particularité du discret, en commençant par la droite des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Pour construire un ensemble de déplacements élémentaires générateur sur $\mathbb{Z}$, il faut prendre des entiers **premiers entre eux dans leur ensemble**[156] : ainsi la propriété "densément" est vérifiée pour les entiers positifs (cf. théorème de Bezout[157]). Parmi ces entiers premiers entre eux, certains doivent être positifs, d'autres négatifs (pour aller "u.p-partout" c'est-à-dire "un peu partout à droite" et "un peu partout à gauche"). La démonstration du théorème de Bezout se trouve en annexe à la fin de ce chapitre.

Par exemple, pour générer $\mathbb{Z}$ avec quatre entiers, on construit quatre entiers positifs premiers dans leur ensemble (par exemple 2×3×7, 3×5×7, 2×3×5, 2×5×7 c'est-à-dire **42, 105, 30 et 70**). D'après Bezout (voir note de la page précédente), il sera alors possible de générer **1**, donc d'aller "densément" sur $\mathbb{N}$. Et pour aller "u.p-partout", il suffit de prendre l'un des entiers choisis comme entier négatif , en lui attribuer le signe - . Dans l'exemple ci-dessus E = {**42, 105, - 30 et 70} est un ensemble générateur de Z.**

Nous pouvons ainsi construire des ensembles (de déplacements élémentaires) générateurs et minimaux de cardinalités différentes. Par exemple, E = {**1**; **-1**} et F = {**2** ; **3** ; **-6**} sont générateurs minimaux[158], de cardinalités respectivement 2 et 3.

De fait, on a le théorème suivant :

> **Théorème : il existe sur $\mathbb{Z}$ des ensembles de déplacements élémentaires générateurs minimaux à *k* éléments, *k* aussi grand que l'on veut.**

Ainsi, la cardinalité des ensembles de déplacements élémentaires minimaux générateurs de **Z** n'est pas un invariant. Cependant, l'étude de la génération de tous les entiers relatifs a montré que **ce problème est mathématiquement clos sur** $\mathbb{Z}$. L'étude du problème général de Froebénius est quant à elle beaucoup plus complexe (cf. Ramirez-Alphonsin, JL. (2002)). Nous allons voir maintenant que le problème **n'est pas mathématiquement clos dans le plan discret.**

---

[156] Des entiers premiers entre eux dans leur ensemble sont des entiers dont le PGCD est 1.

[157] Théorème de Bezout : des entiers $a_1, a_2, \dots , a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe des entiers relatifs $u_1, \dots , u_n$ tels que $u_1 a_1 + \dots + u_n a_n = 1$.

[158] Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que ces deux ensembles sont générateurs minimaux.

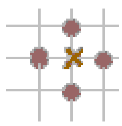
Nous allons monter que, dans le plan discret **Z** ^{2}, il est possible de construire des ensembles générateurs minimaux constitués d'autant de déplacements élémentaires que l'on veut. Nous allons étudier la construction de tels ensembles.

I-2.5. Construction d'ensemble de déplacements élémentaires générateurs, minimaux sur Z ^{2,}, à *k* éléments

Dans ce qui suit, nous **noterons E_k l'ensemble de tous les ensembles générateurs du plan discrets composés de k déplacements élémentaires**. Nous cherchons à générer **tous** les points de la grille, un point de départ étant donné.
L'étude des propriétés "générateur" et "minimal" sur une grille discrète est plus complexe à mener que sur $\mathbb{Z}$: c'est pourquoi nous allons étudier d'abord les premières valeurs de k.

Etude de E_2
Aucun ensemble de deux déplacements élémentaires ne permet de générer tous les points de la grille. En effet, deux déplacements élémentaires ne peuvent générer q'un secteur strict du plan discret, c'est donc la propriété "u.p-partout" qui n'est jamais vérifiée. Il est possible d'étudier l'ensemble des points générés dans le secteur accessible, relativement aux propriétés "u.p-partout" et "densément". La minimalité d'un ensemble à deux éléments est, quant-à-elle, assez facile à repérer.

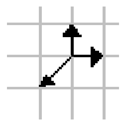
Etude de E_4
Nous avons étudié au paragraphe I-2.1, l'ensemble générateur E = {d(1D), d(1G), d(1H), d(1B)}. Cet ensemble est minimal, car, de manière évidente, lorsqu'on enlève l'un des déplacements élémentaires, le quadrant du plan correspondant ne peut plus être atteint, on ne peut donc plus aller "u.p-partout".
Nous pouvons reprendre cette idée pour construire d'autres ensembles de quatre déplacements élémentaires générateurs minimaux. Considérons la grille suivant les deux directions verticale et horizontale : pour parcourir tous les points d'une droite horizontale, il faut atteindre les points 1 et -1, à partir d'un point donné (0 par exemple, ci-dessous, marqué par une croix) et de même en verticale.



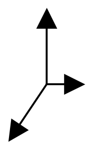
En particulier, on sait que s'il est possible de générer les "quatre points cardinaux" à partir d'un point fixe, il sera possible d'atteindre tous les points de la grille.
Intéressons-nous maintenant à la génération des points discrets d'une droite horizontale D_h : atteindre les points 1 et -1 permet d'atteindre tous les points de D_h. Il est clair qu'il est nécessaire d'avoir au moins deux déplacements élémentaires pour cela (un dans le sens positif et un dans le sens négatif), puisque nous ne faisons que des combinaisons entières de ces déplacements. Il suffit de prendre deux nombres premiers entre eux (un positif, un négatif) : le

théorème de Bezout nous assure la génération de 1 et de –1 : c'est ce que nous avions étudié sur $\mathbb{Z}$ au paragraphe I-2.4. Et nous ferons de même pour une droite verticale.
Ainsi, il est possible de générer des ensembles de quatre déplacements élémentaires générateurs, minimaux avec deux déplacements élémentaires horizontaux, de sens opposés tels que les composantes soient premières entre elles, et de deux déplacements élémentaires verticaux obtenus de la même façon.
Nous n'avons pas ici caractérisé tous les ensembles de quatre déplacements élémentaires générateurs, minimaux, mais seulement ceux composés de déplacements élémentaires horizontaux et verticaux.

Etude de E_3
Il existe des ensembles de trois déplacements élémentaires générateurs minimaux : par exemple E = {d(1D), d(1H), d(1G,1B)}.



Nous allons nous inspirer de cet exemple pour caractériser d'autres ensembles de trois déplacements élémentaires générateurs et minimaux. Tout d'abord, d'après l'étude de E_2, un tel ensemble est nécessairement minimal : en effet, nous avons démontré qu'il n'était pas possible de générer tous les points de la grille avec seulement deux déplacements élémentaires.
Utilisons la caractérisation opératoire de "générateur", c'est-à-dire les deux propriétés : aller "u.p-partout" et "densément".
Traitons tout d'abord la propriété "u.p-partout" : nous pouvons construire deux déplacements élémentaires permettant d'aller par exemple dans un quart de plan : il suffit de prendre un déplacement horizontal et un déplacement vertical. Ainsi, nous atteignons des points d'un quart de plan. Nous construisons alors un troisième déplacement élémentaire permettant de « translater » ce quart de plan et donc d'atteindre d'autres zones de la grille.



Avec trois déplacements élémentaires ainsi construits, nous pouvons aller "u.p-partout" mais pas nécessairement "densément". La question d'aller « densément» revient à déterminer **quantitativement** ces trois déplacements, une fois leurs directions choisies. Nous pouvons utiliser le même type d'argument (horizontal/vertical) que dans E_4 : notons $v_1(x\ ;\ 0)$, $v_2(0\ ;\ y)$ et $v_3\ (-t\ ;\ -z)$ les trois déplacements élémentaires retenus et leurs composantes (x, y, z et t sont des entiers naturels). En faisant le même raisonnement que pour E_4 , il suffit de choisir x et t premiers entre eux et y et z premiers entre eux.

Etude de E_5
En conservant la perception horizontale/verticale de la grille, il est possible de construire des ensembles générateurs minimaux de cinq déplacements élémentaires : on construit tout d'abord deux déplacements élémentaires horizontaux générant une droite horizontale (en

choisissant deux nombres premiers entre eux, un positif, un négatif). On construit ensuite trois déplacements élémentaires verticaux pour générer une droite verticale : pour avoir un ensemble de cinq déplacements élémentaires générateur **minimal**, il est nécessaire de “bien choisir” ces trois déplacements élémentaires verticaux. Il suffit de prendre deux entiers positifs premiers entre eux (pour générer 1) et un nombre négatif, le but est maintenant de générer –1, non premier avec les précédents (car sinon, il sera possible de supprimer un déplacement positif et perdre ainsi la minimalité) : par exemple : 2, 3 et –6.

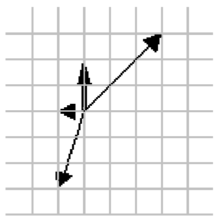
Généralisation à E_k

L’étude des premiers E_k, $k = 2, \ldots, 5$, nous permet d’aborder le théorème d’existence suivant.

> **Théorème : il existe des ensembles de déplacements élémentaires sur la grille générateurs minimaux à *k* éléments, *k* aussi grand que l’on veut.**

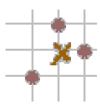
Eléments pour la preuve
Pour construire un ensemble générateur minimal de *k* déplacements élémentaires, il suffit de construire un ensemble générateur minimal de (*k*-2) déplacements horizontaux, permettant de générer $\mathbb{Z}$ (voir paragraphe I-2.4). Il suffit alors d’ajouter deux déplacements élémentaires verticaux, par exemple les déplacements d(1H) et d(1B).

Mais, *k* étant donné (aussi grand que l’on veut), **nous ne savons pas construire tous les ensembles de *k* déplacements élémentaires générateurs minimaux**. Nous avons en effet démontré l’existence de tels ensembles en construisant des déplacements élémentaires horizontaux et verticaux. Mais il en existe d’autres :
par exemple {d(3D,3H), d(2H), d(1G), d(1G,3B)}
est un ensemble générateur minimal de quatre déplacements élémentaires. Nous étudierons cet exemple ci-après.



I-2.6. Comment prouver qu’un ensemble de déplacements élémentaires est générateur ou minimal

L’étude que nous venons de mener nous fournit deux techniques pour prouver qu’un ensemble E de déplacements élémentaires est **générateur.**
La première consiste à démontrer que les déplacements élémentaires de E permettent d’aller “u.p-partout”, “densément”.
La seconde consiste à générer les points d’un système générateur connu. D’après l’étude de E_3 et de E_4, il suffit de démontrer que les déplacements élémentaires de E permettent de générer les trois points d’un système générateur (voir ci-dessous, ou leur image par rotation), ou, si cela est plus facile, les quatre points cardinaux du point de départ.



Ceci pourrait être résolu par une mise en équation avec les composantes des déplacements élémentaires et une résolution de système diophantien[159]. Des exemples sont donnés dans l'analyse a priori de notre situation expérimentale au paragraphe III.
Pour démontrer qu'un ensemble E de déplacements élémentaires est **minimal**, il faut étudier s'il est possible d'enlever un déplacement sans que l'ensemble des points engendrés par E ne soit modifié. L'étude du nombre de chemins différents allant d'un point donné à un point généré par E peut amener à la suppression d'un déplacement élémentaire. Mais plusieurs cas sont à considérer, comme nous l'avons vu au paragraphe I-2.3. ci-dessus.

I-2.7. Construction de définitions dans ce problème

Nous faisons l'hypothèse que la question des ensembles générateurs minimaux du plan discret est suffisamment riche, mais aussi assez abordable (par des études de cas), pour être l'objet d'une situation de construction de définitions.
Les concepts ou propriétés qui nous intéressent particulièrement sont, pour les ensembles de déplacements élémentaires, ceux de "générateur" et "minimal" et, pour les chemins, ceux de « redondant partout" et "redondant nulle part".
Caractériser les ensembles de déplacements élémentaires permettant d'atteindre tous les points de la grille - c'est-à-dire définir « aller u.p-partout » et « densément », permet de démontrer qu'un ensemble de déplacements élémentaires est générateur et de construire des ensembles de déplacements élémentaires générateurs minimaux.

II- Mise en relation avec les concepts d'algèbre linéaire

II-1. Les concepts de "dépendance" et "générateur" en mathématiques

Les concepts de "générateur", "dépendance" n'appartiennent pas exclusivement à l'algèbre linéaire. Ils existent et sont définis dans différents domaines des mathématiques tels que la géométrie, la théorie des graphes et les probabilités.
Par exemple, nous avons vu au chapitre VI que l'opération "ajout d'un sommet pendant" permet de **générer** tous les arbres, à partir d'un point isolé (définition inductive de l'arbre).
Le concept de "dépendance" est présent dans des champs des mathématiques autres que l'algèbre linéaire. Par exemple, en probabilités, il est question de la modélisation d'**évènements indépendants** : soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$; les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

[159] Les "systèmes diophantiens" en jeu ici sont des systèmes d'équations du premier degré à coefficients et variables entiers (relatifs).

Pourquoi accorder autant d'importance au concept d'indépendance ? En algèbre linéaire, il y a équivalence, pour une famille finie de vecteurs, entre les propriétés "libre maximale" et "génératrice minimale". Ces propriétés permettent de définir la « base » et la dimension d'un espace vectoriel, toutes les bases d'un espace vectoriel ayant même cardinalité (théorème de la dimension).

Nous allons présenter quelques résultats de travaux didactiques portant sur l'algèbre linéaire pour souligner les difficultés récurrentes et même les obstacles rencontrés dans cet enseignement, et justifier ainsi notre tentative d'en problématiser quelques concepts.

II-2. Résultats de travaux didactiques sur l'Algèbre Linéaire

II-2.1. Des difficultés reconnues dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

De nombreux travaux français et internationaux en didactique des mathématiques témoignent de difficultés rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.
Les analyses épistémologiques de Dorier & Al (1997) ont montré comment l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire et la forte axiomatique qui lui est attachée, constitue une source de difficultés pour des étudiants non mathématiciens professionnels. Parmi les obstacles qui ont été mis en évidence, mentionnons le formalisme du à un enseignement très axiomatique, le changement de registres, les nombreuses définitions et théorèmes nouveaux (Dorier &Al , 1997-p.114 s).
De plus, l'absence de liens entre les cours de géométrie du collège et du lycée et ceux d'algèbre à l'université (Gueudet-Chartier, 2000) ne contribue pas à la formation de représentations mentales suffisantes chez les étudiants pour la construction des concepts. Harel (1989 et 1990) a souligné la difficulté d'une mise en relation des définitions de l'algèbre linéaire avec des *concept images*[160] ou, tout au moins, avec une certaine représentation mentale des concepts mathématiques. Par ailleurs, il a évalué que *moins du tiers des étudiants citent $\mathbb{R}^n$ comme exemple d'espace vectoriel* alors que cela représente *un pas obligatoire dans la construction de la notion d'espace vectoriel : il y a donc des progrès à faire dans son apprentissage.* (Dorier et Al-1997-p.116). Ainsi, Harel souligne que *l'incorporation d'une réflexion géométrique dans l'enseignement du premier cours d'algèbre linéaire contribue de façon significative à la compréhension des étudiants* (ibid. p.216).
Cependant, même si le recours à des considérations géométriques constitue un "plus" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, il n'est pas suffisant, et Harel signale les dangers d'une telle approche. De toute façon, d'un point de vue épistémologique, ce n'est pas le cadre géométrique seul qui a permis la genèse de l'algèbre linéaire, mais bien sa mise en rapport avec d'autres cadres (par exemple, le cadre analytique).

[160] I.e. concept images des concepts d'algèbre linéaire (indépendance, etc.).

II-2.2. Les définitions en algèbre linéaire

Les mêmes travaux montrent que les définitions de l'algèbre linéaire sont sources de difficultés car nombreuses et formelles. Nous allons reprendre ce point et nous référer ici principalement à la thèse de Behaj (1999) : son étude s'intéresse à la structuration du savoir des débuts de l'algèbre linéaire. Behaj a demandé à des étudiants de rédiger une présentation destinée à des étudiants débutants, et construit des protocoles d'entretien avec des enseignants et étudiants marocains[161]. Cette étude nous apporte quelques conceptions sur les définitions en mathématiques.

L'analyse mathématique réalisée par Behaj ne remet pas en cause les définitions institutionnalisées de l'algèbre linéaire : elle place la discussion sur un bloc de notions (famille liée, libre, génératrice, dimension, base) et étudie les combinaisons possibles dans le choix de la définition et des propriétés d'une notion du bloc. De plus, les définitions sont analysées du point de vue de leur formulation, en langage naturel ou en langage formel. Il faut comprendre ici langage naturel comme n'utilisant pas le formalisme de l'algèbre linéaire. Il n'est donc pas question dans ces travaux de considérer un processus de définition, pas plus que de regarder des possibles définitions énoncées en des termes "naturels" (ce que nous pourrions peut-être rapprocher de *zéro-définitions*).

Il ressort de ces questionnaires, des conceptions sur les définitions mathématiques, en particulier sur leur statut et leur fonction. Ainsi, lors de la préparation d'un cours par des étudiants, les *définitions sont d'abord pensées et explicitées en termes de situation réelle de résolution avant d'être formulées et reportées dans la présentation.* (Behaj–1999–p.149). Les étudiants établissent une hiérarchisation par rapport à l'apprentissage, ce qui se traduit par l'énoncé de certaines définitions en **langage naturel** (non formel) [162]. Il est important pour eux de **favoriser la compréhension** des concepts mathématiques introduits par une définition, sans remettre en question la place de celle-ci au **commencement** d'un cours. De plus, deux fonctions sont explicitement attribuées par les étudiants aux définitions :

- **la fonction de présentation de connaissances**, dans un exposé théorique, axiomatique : celle-ci induit une certaine hiérarchie, un ordre *logico-déductif* dans lequel les étudiants s'emploient à *n'utiliser dans une définition que des mots déjà définis et des données préalablement vues* (Behaj) ;
- et celle de **résolution de problèmes**, où nous retrouvons une fonction plus opératoire de certaines définitions.

Nous avons montré, dans un chapitre précédent, que la règle qu' « une définition doit être unique dans l'exposé d'un concept » est assez répandue et même préconisée par les programmes. Or, les étudiants interviewés par Behaj soulignent qu'il est intéressant de donner

[161] Enseignants de première année d'algèbre et étudiants de 1ère jusqu'à 4ème année d'université.

[162] Behaj a noté que des étudiants plus âgés que les premières années étaient plus favorables à des définitions plus **formelles**, ce qui va certainement de pair avec une familiarité plus grande et une pratique plus importante des notions d'algèbre linéaire et des mathématiques en général.

deux définitions complémentaires de “base”, l’une pour structurer les connaissances, l’autre pour la résolution de problèmes.
Donnons un exemple d’utilisation de définitions en algèbre linéaire dans la résolution de problèmes. Dans une étude praxéologique des concepts de “famille libre, famille liée”, Gueudet-Chartier (2000) analyse en particulier le type de tâche “déterminer si une famille est libre”, pour laquelle elle propose différentes techniques (au niveau DEUG) : utiliser un système linéaire, utiliser une matrice, utiliser le déterminant. La description de la première technique comprend l’écriture de la définition de “famille libre” : Gueudet-Chartier parle alors de la **fonction technologique** de “***la traduction de la définition***”.
Il est également intéressant de noter dans cette étude praxéologique la comparaison entre types de tâches en DEUG et types de tâches au lycée : l’aspect dominant au lycée concerne “famille liée” (détermination de vecteurs colinéaires dans le plan et coplanaires dans l’espace) alors que l’aspect premier à l’université est “famille libre”. L’enseignement de la notion de dépendance faite au lycée est certainement plus “naturel” que celui de libre fait à l’université. Soulignons que la difficulté inhérente au formalisme d’usage dans la définition de “famille libre” s’ajoute à la représentation mentale quasi inaccessible de cette notion.

II-2.3. Les propositions de Rogalski et Harel

Rogalski souligne la **nécessité d’une problématique** pour l’algèbre linéaire :

> *Nous faisons l’hypothèse que c’est une* ***problématique*** *plus que des problèmes qu’il faudra transmettre à l’étudiant, au moment de l’introduction des concepts qu’on veut enseigner. Plus précisément, il faut mettre les étudiants en état de* ***comprendre*** *– et d’accepter – le* ***rôle du détour théorique formel et généralisateur*** *comme une réponse à tout un champ de problème et de questionnements qui « se ressemblent » … alors qu’ils ne le savent pas.*[163] (Dorier&Al-1997-p.160)

Rogalski insiste donc sur le rôle du détour théorique généralisateur des concepts d’algèbre linéaire.
Nous faisons l’hypothèse qu’une problématique “naïve”, située en amont de l’algèbre linéaire, est nécessaire pour approcher les concepts de générateur, indépendance. C’est ce que nous proposons de faire dans notre situation.

Le cadre théorique de G. Harel et l’importance du principe de nécessité
Harel propose une étude des difficultés rencontrées par les élèves en algèbre linéaire en utilisant les notions de *concept image* et *concept definition*. Il montre que les étudiants ne construisent pas de *concept image* effectif pour les concepts d’algèbre linéaire (son étude porte plus spécifiquement sur le concept de “famille libre”). Une part des *concept definitions* est oubliée et les étudiants ne sont pas en mesure de les reconstruire (Harel-1998-p.499s).

[163] C’est nous qui soulignons (en gras).

Pour argumenter son propos et mettre en œuvre une étude comparée de deux types d'enseignement de l'algèbre linéaire, Harel distingue trois **principes d'apprentissage** : le principe de concrétisation, le principe de nécessité et le principe de généralisabilité. Ceux-ci déterminent un cadre théorique dans la lignée des travaux piagétiens.
Le principe de **concrétisation** concerne la capacité d'abstraction, le principe de **nécessité** s'intéresse à la nécessité intellectuelle que l'étudiant doit ressentir lors de nouveaux apprentissages et le principe de **généralisabilité** vient compléter les deux précédents et traite de la capacité des étudiants à abstraire à partir de l'étude de cas particuliers.
Harel met en avant le principe de nécessité : il requiert la détermination de ce qui peut relever d'un besoin intellectuel dans une population d'étudiants, relativement à un concept mathématique donné, le choix d'un "bon problème" dont la solution permettra d'aboutir à la découverte du concept (une aide peut être apportée aux étudiants dans la découverte du concept). Il propose trois types de "nécessité intellectuelle" que nous pouvons mettre en relation avec des conceptions et fonctions des définitions : nécessité de *computation* (fonction calculatoire), nécessité de *formalisation* (fonction de théorisation), nécessité *d'élégance* (définir de manière élégante, peut-être minimale, non redondante, en limitant le nombre d'axiomes).

Harel s'appuie sur un exemple - proposé également par Rogalski - pour illustrer son propos : la notion d'indépendance. Quelle nécessité intellectuelle y a-t-il pour l'étudiant dans l'étude de cette notion ? Sa proposition est la suivante : étudier des systèmes d'équations linéaires. Le problème consistera à déterminer l'existence et l'unicité des solutions, et c'est là qu'intervient le principe de nécessité.
L'étude comparée de Harel sur l'enseignement du concept d'indépendance en l'algèbre linéaire portant sur deux groupes, selon deux modes d'enseignement (l'un traditionnel – noté LAa- et l'autre mettant en œuvre le principe de nécessité - noté LAb) montre que les étudiants du groupe Lab acquièrent des outils conceptuels pour l'analyse de situations et la résolution de problèmes (Harel – 1998 - p.505).

II-3. Synthèse des travaux et notre proposition

Il ressort de ces différents travaux qu'il est nécessaire de **problématiser** les concepts de l'algèbre linéaire (Rogalski) et de montrer la **nécessité** de ceux-ci (Harel). Les ouvertures proposées concernent la géométrie et l'étude de la résolution de systèmes linéaires. Harel insiste ainsi sur l'importance de placer les étudiants dans des situations problématiques et montre, par une étude comparative, que l'enseignement du concept d'indépendance est plus fructueux lorsque les étudiants en réfèrent au "principe de nécessité".
Dans le champ de l'algèbre linéaire, les définitions sont surtout reconnues par leur statut **formel** : elles sont, pour les étudiants, **nombreuses**, **difficiles** à comprendre et à apprendre.

Ceci ne peut pas être uniquement attribué au fait que les définitions données en algèbre linéaire, en particulier celle de “famille libre”, soit difficiles du point de vue de la compréhension **logique**. Harel a en effet montré la **difficile construction du *concept image* des concepts d’algèbre linéaire** (en particulier, le *concept image* de “famille libre”). Par ailleurs, deux fonctions des définitions sont ressorties des propos des étudiants interrogés par Behaj : la fonction de présentation de connaissances et la fonction de résolution de problèmes. Remarquons que ceci n’est en fait pas spécifique à l’algèbre linéaire.

Le problème “déplacements sur une grille” étudié ci - après, a été conçu de façon à ce que les étudiants ne l’associent pas spontanément à l’algèbre linéaire, et que la problématique fasse ressortir une activité de construction de définitions.
L’étude de déplacements élémentaires sur $\mathbb{Z}^2$ problématise les concepts de “générateur”, “minimalité”, “indépendance”, ce que ne permet pas l’algèbre linéaire. En effet, il y a « écrasement » de ces concepts en algèbre linéaire : toutes les familles génératrices minimales sont minimums et « tout est équivalent » : “générateur minimal” est équivalent à “libre maximal” et le théorème de la dimension assure que les bases ont même cardinalité.

Dans le plan discret, les rapports entre générateur, libre, minimalité, base, dimension sont nécessairement questionnés. En particulier, le concept de “générateur” met en évidence ici deux aspects non distingués en algèbre linéaire : “u.p-partout” et “dense”. Plusieurs cas doivent être étudiés : un ensemble de déplacements élémentaires pourra n’être ni u.p-partout, ni dense ; ou bien, u.p-partout et non dense ; ou encore, non u.p-partout mais dense sur l'espace engendré. De même qu’en algèbre linéaire, c’est le concept de “générateur minimal” (minimal pour l’ensemble engendré), que nous espérons se voir développer dans cette situation. Le concept de “famille libre” est questionné dans notre situation par ce que nous avons appelé “redondant nulle part”. La notion de “redondance” apparaît à deux titres, la minimalité également. L’étude des “chemins différents” peut permettre de questionner la dépendance des déplacements et déboucher sur une analyse de la relation entre l’existence de chemins différents (en au moins un point, partout ou nulle part) et la minimalité.

III – La situation “déplacements sur une grille”

III-1. Une expérimentation de Math.en.Jeans (1994)

Un problème analogue à celui de notre situation a été expérimenté par Math.en.Jeans, avec des élèves de collège. Il était formulé en termes de *communication sur une grille*, sous l’énoncé suivant :

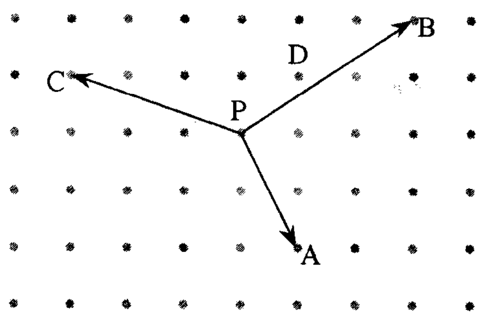
« Des personnes (ou, si vous préférez, des relais électroniques…) sont disposées sur un plan en formant un réseau à maille carrée. Chaque personne peut communiquer des informations à certaines autres personnes, à condition de respecter certaines règles ;

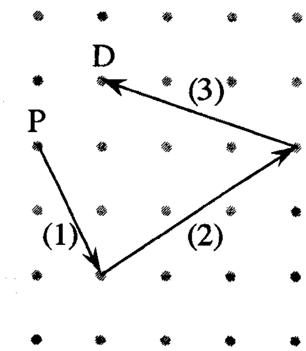
exemple : chaque personne *P* peut informer :

• la personne *A* située 1 pas à l'est, 2 pas au sud
• la personne *B* située 2 pas au nord, 3 pas à l'est
• la personne *C* située 1 pas au nord, 3 pas à l'ouest.

Ainsi, *P* ne peut pas informer directement la personne *D*, qui est pourtant proche : 1 pas à l'est, 1 pas au nord.

Par contre, on peut informer *D* en trois étapes :





Pour la commodité de l'exposé nous avons traduit ces règles par trois vecteurs du plan : (1 ; -2) ; (3 ; 2) ; (-3 ; 1).

ces règles sont les mêmes pour toutes les personnes.

Les trois vecteurs en jeu étaient les suivants : v_1 (1 ; -2) v_2 (3 ; 2) et v_3 (-3 ; 1). Cet ensemble de déplacements est générateur (u.p-partout et dense).

Les résultats principaux de l'expérimentation sont les suivants : les élèves ont réalisé deux études, l'une sur la génération des points d'une droite, l'autre sur la génération des points de la grille.

Les élèves sont parvenus dans leur première étude au théorème et à la conjecture suivante :

> *Théorème : [avec une règle positive et une règle négative] si nous arrivons à allumer les points +1 ou –,1 alors nous arriverons à allumer tous les points de la droite.*
>
> *Conjecture : si a et b sont premiers entre eux, alors nous atteindrons les points 1 et –1.*

Et, dans la seconde étude, au théorème suivant :

> *Théorème : si on arrive à atteindre les 4 voisins de 0 (1 au nord, 1 au sud, 1 à l'est, 1 à l'ouest), alors on est sûr de pouvoir atteindre tous les points de la grille.*

Les questions de cardinalité des ensembles de déplacements et de minimalité de ceux-ci n'ont pas été abordées.

III-2. Les problèmes mathématiques de notre situation expérimentale

III-2.1. Présentation de notre situation expérimentale

Nous avons posé une suite de trois problèmes différents relevant du même type de tâche « Etude des points générés sur une grille par un ensemble de déplacements élémentaires ».

Les variables différenciant ces trois tâches jouent sur les propriétés suivantes : ensemble générateur ou non, u.p-partout, dense, minimal ou non. Dans l'énoncé donné aux étudiants, nous parlons de "déplacements" au lieu de "déplacements élémentaires".

La première tâche propose un ensemble de **deux** déplacements élémentaires ne permettant d'aller que dans un secteur du plan discret, non densément (c'est-à-dire **non u.p-partout**, **non densément**).
Un ensemble **générateur** de **quatre** déplacements élémentaires (u.p-partout et dense) est donné dans la tâche 2 ; il est **non minimal**.
La troisième tâche propose un ensemble **générateur minimal de quatre** déplacements élémentaires (c'est un exemple non trivial d'ensemble de quatre déplacements élémentaires)

III-2.2. Consignes et énoncés

Les textes des trois tâches sont distribués l'un après l'autre au cours de la séance par le GO.

Consignes générales

Aujourd'hui, nous allons nous intéresser à des déplacements sur une grille (feuilles jointes).
Dans chaque problème, on s'autorisera un ensemble de déplacements. Ces déplacements pourront être utilisés autant de fois que l'on veut, et ce, dans n'importe quel ordre.
On se donne un "point de départ" A (choisissez-le à proximité du centre de la feuille).
Pour chacun de ces problèmes, on se posera les questions suivantes:
• Partant du point A, quels points de la grille peut-on atteindre?
• On se donne un autre point : B. Peut-on aller de A vers B ? Si oui, y a-t-il différentes manières de s'y rendre ? Qu'est-ce que vous entendez par "différent"?
• Peut-on supprimer un ou plusieurs déplacements ? Si oui, quelles en sont les conséquences?

Problème 1

- Les déplacements autorisés sont :
  d_1 : 2 carreaux à droite et 1 carreau en haut.
  d_2 : 3 carreaux à gauche et 3 carreaux en bas.
- Le point B est situé trois carreaux à droite et trois carreaux en bas de A.

Problème 2

- Les déplacements autorisés sont :
  d_1 : 2 carreaux à droite et 3 en haut
  d_2 : 5 carreaux à gauche et 2 en bas
  d_3 : 5 carreaux à droite et 3 en bas
  d_4 : 1 carreau à droite.
- Le point B est situé deux carreaux à droite et deux carreaux en bas de A.

Problème 3

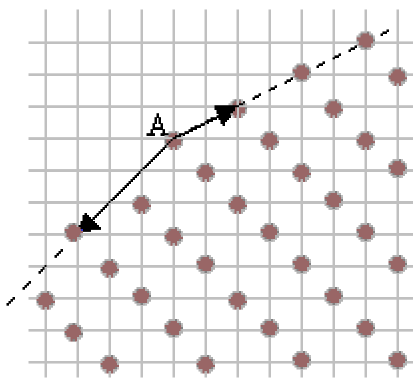
- Les déplacements autorisés sont :
  d_1 : 3 carreaux à droite et 3 en haut
  d_2 : 2 carreaux en haut
  d_3 : 1 carreau à gauche
  d_4 : 1 carreau à gauche et 3 en bas.
- Le point B est situé un carreau à droite et six carreaux en haut de A.

III-3. Analyse mathématique

Les déplacements sont représentés à partir d'un point A fixé et les points de la grille sont repérés par rapport à ce point A. Les déplacements pourront être représentés par un couple de composantes entières. Les coordonnées des points et les composantes des vecteurs sont notées de la même manière (un couple de valeurs).

III-3.1. La tâche 1

Nous avons démontré au paragraphe I-2.5. que les ensembles de deux déplacements élémentaires ne permettent pas d'atteindre tous les points de la grille mais seulement certains points d'un secteur du plan discret.
Les deux déplacements élémentaires proposés forment un ensemble qui ne vérifie ni la propriété "u.p-partout", ni la propriété "dense" sur la grille entière.

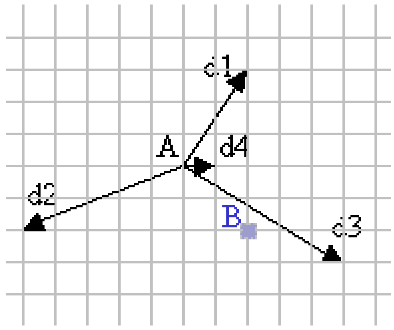


Nous avons représenté ci-contre les points atteints à partir de A avec les deux déplacements proposés.

Ces points sont bien répartis dans le secteur, on peut dire que l'ensemble proposé est u.p- partout, pour le secteur engendré tout point du secteur est à une distance pas plus que 1 (carreau) d'un point du secteur atteint.

III-3.2. La tâche 2

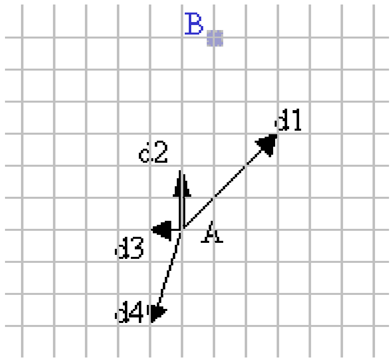
Les quatre déplacements élémentaires donnés permettent d'aller partout (c'est-à-dire "u.p-partout" et "densément") sur la grille. En effet, d'après les orientations des déplacements, il est facile de vérifier qu'il est possible d'aller "u.p-partout".
De plus, une combinaison de ceux-ci permet par exemple de montrer qu'il est possible de générer les points (1,0), (0,1) et (-1,-1). En effet, on obtient (1,0) avec d_4, (0,1) avec $5d_1+4d_2+2d_3$ et (-1,-1) avec$2d_1+2d_2+d_3$.
Cet ensemble de déplacements est donc générateur : il permet d'atteindre tous les points de la grille.



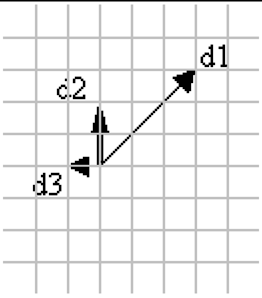
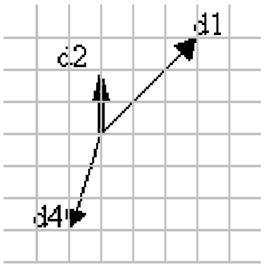
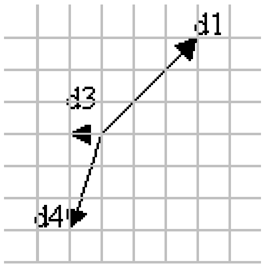
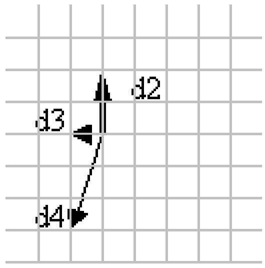
Est-il minimal ? Pour aller de A à B, il y a deux chemins différents $d_1+d_3+d_2$ ou d_2+7d_4. Nous avons vu, dans l'étude du problème général (paragraphe I), que cela ne dit rien sur e caractère minimal (ou non) de l'ensemble (il faudrait prouver que tous les points de la grille peuvent être atteints par au moins deux chemins différents !). En revanche, pour démontrer que l'ensemble des quatre déplacements proposé n'est pas minimal, il **suffit d'écrire l'un des déplacements élémentaires comme combinaison entière (positive) des autres**. Après un petit travail technique, on peut établir que $d_3=d_1+18d_4+3d_2$ et $d_4=18d_1+15d_2+8d_3$. Ce qui implique que l'on peut enlever d_3 ou d_4 à l'ensemble de départ sans détruire la propriété « générateur ».
Donc $\{d_1, d_2, d_3\}$ et $\{d_1, d_2, d_4\}$ sont aussi des ensembles générateurs et ils sont nécessairement minimaux (puisque deux déplacements élémentaires ne suffisent pas pour générer tous les points de la grille).

III-3.3. La tâche 3

Cet ensemble est générateur de la grille entière (nous laissons la preuve au lecteur).
Il est de plus **minimal** , bien qu'il existe deux chemins différents pour aller de A vers B ($2d_1+5d_3$ ou $d_1+3d_2+d_3+d_4$).
Prouvons qu'il n'est pas possible de supprimer un déplacement. Pour cela, on peut démontrer soit qu'il n'est possible d'écrire **aucun** des d_i en fonction des trois autres, soit que la suppression d'un des d_i entraîne la perte de l'une des propriétés "u.p-partout" ou "dense".

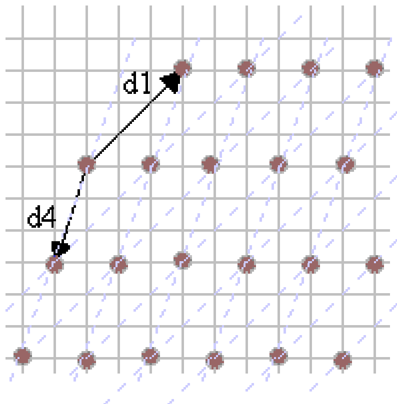


Etudions les quatre sous-ensembles de déplacements élémentaires de cardinalité 3 contenus dans l'ensemble donné : $\{d_1, d_2, d_3\}$ $\{d_1, d_2, d_4\}$ $\{d_1, d_3, d_4\}$ et $\{d_2, d_3, d_4\}$

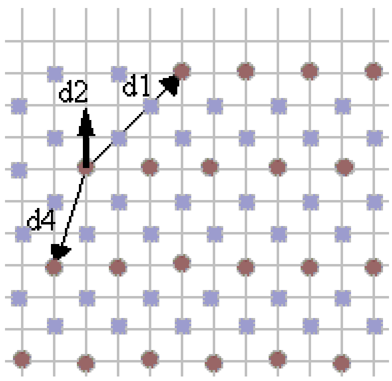
$\{d_1, d_2, d_3\}$	$\{d_1, d_2, d_4\}$	$\{d_1, d_3, d_4\}$	$\{d_2, d_3, d_4\}$
			
Ne va pas “u.p-partout”	A étudier, car u.p-partout	A étudier, car u.p-partout	Ne va pas “u.p-partout”

La propriété “aller u.p-partout” n’est clairement pas vérifiée par les sous-ensembles $\{d_1, d_2, d_3\}$ et $\{d_2, d_3, d_4\}$ car deux déplacements déterminent une zone où certains points sont atteints et le troisième déplacement n’apporte rien de plus en terme de “u.p-partout”, étant dirigé vers cette même zone.

Pour les deux sous-ensembles restants, $\{d_1, d_2, d_4\}$ et $\{d_1, d_3, d_4\}$, il nous faut étudier la propriété “dense” car ces ensembles de déplacements vont “u.p-partout”[164]. Comme ils ont les déplacements d_1 et d_4 en commun, nous allons tout d’abord étudier les points générés par $\{d_1, d_4\}$.



Il est possible de le faire graphiquement (ci-contre). Nous pouvons de plus faire une remarque de nature “arithmétique” : verticalement, les déplacements d_1 et d_4 ne peuvent générer que des multiples de 3 (avec 3 et –3). Ainsi, les points de coordonnées (x,1) et (x,2) ne sont atteignables par d_1 et d_4.



Lorsque l’on ajoute le déplacement d_2 à $\{d_1, d_4\}$, il va être possible d’atteindre des points de coordonnées (x ;1) et (x ; 2) (x entier) car d_2 apporte une composante paire verticalement, mais horizontalement, il reste des points non atteints. Pour démontrer que cet ensemble ne permet d’aller “densément” partout, il suffit d’exhiber un point non atteint.

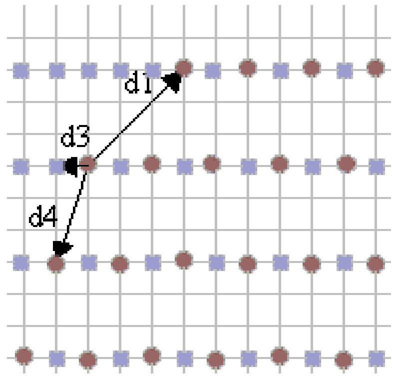
Démontrons que le point (0 ; 1) n’est pas atteint. Notons les composantes des déplacements ainsi :
d_1 (3 ; 3) , d_2 (0 ; 2) et d_4 (-1 ; -3)

[164] Preuve facile laissée au lecteur.

Si le point (0 ; 1) était atteignable par $\{d_1, d_2, d_4\}$, alors il existerait α, β, γ entiers tels que :

$$\begin{cases} 3\alpha - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 3\gamma = 1 \end{cases}.$$ Ce système est impossible, α et γ étant entiers naturels.

Donc $\{d_1, d_2, d_4\}$ est un ensemble de déplacements non générateur pour la grille entière.



Ajoutons maintenant le déplacement d_3 à $\{d_1, d_4\}$. Il n'est pas possible d'atteindre des points de coordonnées (x,1) et (x,2) car d_3 n'apporte rien de nouveau verticalement, mais horizontalement, tous les points des droites ci-contre seront atteints.
De même que ci-dessus, démontrons que le point (0 ; 1) n'est pas atteint avec $\{d_1, d_3, d_4\}$.
Nous avons les composantes des déplacements : d_1 (3 ; 3) d_3 (-1 ; 0) et d_4 (-1 ; -3).
Si le point (0 ; 1) était atteignable par $\{d_1, d_3, d_4\}$, alors il existerait α, β, γ entiers tels que :

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\gamma = 1 \end{cases}$$. La seconde équation est impossible, α, et γ étant entiers. Il n'est donc pas possible d'atteindre le point (0 ; 1) avec $\{d_1, d_3, d_4\}$.
Donc $\{d_1, d_3, d_4\}$ est un ensemble de déplacements élémentaires non générateur pour la grille.
Ainsi, il n'est pas possible de supprimer un déplacement de l'ensemble $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ donné, sinon on perd la propriété "générateur" : soit par perte de la propriété "aller u.p-partout", soit par perte de la propriété "densément". L'ensemble donné $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ est donc générateur minimal.

III-4. Analyse a priori de la situation

III-4.1. Le dispositif et le public

Comme pour les deux autres situations, les étudiants participant à cette expérimentation sont des étudiants de première année d'université (filières MASS, MIAS). Nous avons proposé cette situation en cours d'année universitaire. Il faut donc prévoir que certains étudiants feront appel à des concepts de l'algèbre linéaire, s'ils l'ont étudié en cours (combinaisons linéaires, générateur, famille libre/liée, base). C'est pourquoi il était important de négocier cette situation comme « différente » et donc créer les conditions pour que le milieu ne contienne pas en priorité les concepts de l'algèbre linéaire.

Cette expérimentation ayant été réalisée dans le module Jeux-Maths, où le travail en groupes est usuel, les étudiants se sont placés dans leurs groupes habituels (d'effectifs 3 ou 4).

III-4.2. Choix des différentes tâches de la situation

Le rôle de la tâche 1 est de **négocier la situation** comme différente de l'algèbre linéaire "connue". Cette tâche permet aux étudiants de "rentrer" dans la situation, de s'approprier les règles. Même si nous n'avons pas donné un exemple pour chacun des cas pouvant apparaître avec deux déplacements élémentaires (dense et non u.p-partout, non dense et u.p-partout, non dense et non u.p-partout), l'étude de l'ensemble proposé devrait suffir pour conjecturer fortement qu' « il est nécessaire d'avoir plus de deux déplacements élémentaires pour générer tous les points de la grille ».

Dans la tâche 2, on a vu qu'il est possible de **supprimer un déplacement bien choisi et que le tout reste générateur**. Les notions de dépendance et redondance peuvent émerger. Cette tâche permet de démontrer que « trois déplacements élémentaires **peuvent suffire** pour générer tous les points de la grille », **mais on ne sait pas à l'issue de cette tâche si tous les systèmes générateurs sont à trois éléments**.

L'objectif de la tâche 3 est de montrer que « trois déplacements ne suffisent pas toujours ». Il s'agit en effet ici d'un **ensemble de quatre déplacements générateur et minimal**. On peut donc approcher le résultat suivant : le théorème de la dimension est faux dans le cas discret.

Ces trois tâches contiennent aussi l'étude de la notion de "chemins différents", et l'analyse des conséquences de la suppression d'un déplacement – là encore, "générateur" et "minimal" sont présents. Nous avons proposé un point B pour faire travailler les étudiants sur les déplacements donnés et observer la représentation qu'ils vont choisir (vecteur ou autre). Soulignons que les points B des tâches 2 et 3 sont atteignables par des chemins différents, alors que l'ensemble de déplacements donné à la tâche 2 est non minimal et que celui proposé à la tâche 3 est minimal.
Nous faisons l'hypothèse que cette problématique peut induire une tâche de construction de définition de la notion de "redondance" et des conséquences de celle-ci.

Nous avons choisi de ne pas demander explicitement de définition pour les concepts de "générateur" et "indépendance". Cependant, la question concernant les "chemins différents" doit orienter l'étude des liens entre ces concepts et la redondance et la minimalité.
D'autres questions peuvent émerger :

- a-t-on équivalence entre les deux assertions "un déplacement s'écrit en fonction des autres" et "n'importe lequel s'écrit en fonction des autres" ?
- a-t-on l'implication "il existe un point pour lequel il y a deux chemins différents" implique "redondant partout" ? Lorsqu'il y a plusieurs chemins, que peut-on en déduire du point de vue de la minimalité ?

Ces types de questions devraient faire émerger des constructions de définitions (déplacements liés, générateur).

III-4.3. Dévolution de construction de définitions

Nous avons déjà observé des processus de construction de définitions lorsqu'une définition était explicitement demandée. Ici, ce n'est pas le cas. A partir du moment où les étudiants entreront explicitement dans une activité de définition, les opérateurs et contrôles de type aristotélicien et lakatosien pourront être mobilisés. Il s'agit des opérateurs et des contrôles que nous avons mis en évidence dans les expérimentations “arbre” et “droite discrète” (langagiers, logiques, génération d'exemples et contre-exemples, fonctions de la définition etc.).
La première fonction des définitions dans cette situation est de différencier les propriétés (générateur, minimalité, redondance). La deuxième fonction est de permettre la vérification de l'aspect générateur et minimal des ensembles de déplacements donnés. La troisième fonction est celle de construction d'ensembles de déplacements générateurs minimaux : celle-ci vient s'ajouter aux précédentes, elle n'est présente explicitement dans les questions. L'analyse mathématique montre combien la construction de définition est ici tributaire des questionnements mathématiques liés au problème. Il ne s'agit pas seulement de “constater” que deux déplacements ne permettent pas d'atteindre tous les points de la grille et qu'il est possible de trouver un ensemble de quatre déplacements “bien choisis” générateur et minimal. Des questionnements portant sur les équivalences entre les propriétés de certains ensembles de déplacements dépend la construction de définitions.

La question “Peut-on aller de A vers B ? Si oui, y a-t-il différentes manières de s'y rendre ? Qu'est-ce que vous entendez par "différent"?” est en fait une demande de définition de “chemins différents”. Définir “chemins différents” n'est a priori pas problématique : leur pratique des vecteurs peut vraisemblablement leur faire définir “chemins différents” par “déplacements utilisés différents”. Il est important pour nous d'étudier l'influence de cette question sur l'activité des étudiants mathématique et définitoire. Cependant, nous devons, pour être complets, étudier de possibles *zéro-définitions* pour “chemins différents”.

Construction de définitions

Nous avons dans la situation “déplacements” une forte problématique de détermination d'ensembles de déplacements permettant d'atteindre tous les points d'une grille discrète : les résultats de l'algèbre linéaire (notamment le théorème de la dimension par exemple) sont ici mis en défaut.
Nous avons dans les questions posées, non pas demandé explicitement une définition, mais tenté d'orienter leurs recherches vers “chemins différents”. Les définitions de générateur, générateur minimal, redondant, peuvent émerger à la suite de questionnements sur les

chemins allant d'un point à un autre. En particulier, nous avons les équivalences suivantes : générateur minimal correspond à redondant nulle part, c'est-à-dire libre en algèbre linéaire, et libre maximal correspond à générateur.
Il s'agit maintenant de déterminer des *zéro-définitions* et *proof-generated definitions*.

***Zéro-définition* de la notion de "chemins différents"**
Il est possible de voir émerger lors de la tâche 1 une *zéro-définition* de la notion de "chemins différents" du type suivant : deux chemins sont différents lorsque les coefficients dans la combinaison entière de déplacements élémentaires sont différents. Ceci peut évoluer dans la tâche 2 vers une définition : deux chemins sont différents lorsque les déplacements élémentaires utilisés sont différents. Cette définition peut également apparaître dès le début de la situation. Il sera indispensable d'analyser l'utilisation de la propriété (l'existence d'au moins deux chemins différents) pour questionner la redondance et la minimalité (voir paragraphe I).

Nous avons par ailleurs trois concepts à définir : "générateur", "minimalité" et "redondance". Nous allons donc nous intéresser aux *zéro-définitions* d'ensemble générateur de déplacements, d'ensemble générateur minimal de déplacements, de redondance, et à leur évolution, avec l'objectif de la génération de tous les points de la grille.

***Zéro-définition* d'un ensemble "générateur" de déplacements élémentaires c'est-à-dire un ensemble de déplacements élémentaires permettant d'atteindre tous les points de la grille.**
C'est une *zéro-définition* naturelle, mais peu opératoire pour la construction de tels ensembles et surtout coûteuse pour la vérification de cette propriété. Elle est donc amenée à évoluer dès la seconde tâche où le nombre de déplacements à étudier est strictement supérieur à 2. Remarquons qu'elle est opératoire dans le registre graphique, "à la main", lorsque l'ensemble de déplacements étudié comporte deux déplacements seulement. Cette *zéro-définition* est amenée à évoluer vers une définition opératoire décrivant les deux propriétés "u.p-partout" et "dense".

***Zéro-définition* d'un ensemble générateur minimal de déplacements élémentaires**

- *zéro-définition* 1 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de trois déplacements permettant d'atteindre tous les points de la grille.
- *zéro-définition* 2 : un ensemble de déplacements générateur minimal est un ensemble de déplacements non liés - ou non colinéaires deux à deux.

La première *zéro-définition* provient des tâches 1 et 2. Elle est liée à la connaissance des étudiants sur les bases en géométrie analytique, voire en algèbre linéaire. La résolution de la tâche 3 permet d'invalider cette *zéro-définition*.

La seconde *zéro-définition* a une origine géométrique : pour les étudiants n'ayant pas encore suivi un cours universitaire d'algèbre linéaire, des connaissances sur la colinéarité de vecteurs dans le plan et la coplanarité dans l'espace peuvent intervenir.

Le statut de ces *zéro-définitions* devrait évoluer vers le statut de *proof-generated definitions*, et donc vers les définitions données dans le paragraphe I, du fait des problématiques de preuve suivantes : la preuve de l'existence d'ensembles de déplacements élémentaires générateurs minimaux, la construction de tels ensembles, la preuve nécessaire à l'établissement des propriétés “générateur” et “minimal” de certains ensembles de déplacements élémentaires. Les deux premières tâches demandent une certaine réflexion par rapport au problème général – nous pouvons faire l'hypothèse qu'elles peuvent émerger, du fait de la progression des trois tâches posées - mais la dernière est explicitement en jeu dans la situation proposée. Ainsi, l'évolution de ces *zéro-définitions* est liée au traitement des trois tâches de la situation, ceux-ci mettant en évidence la validité de ces *zéro-définitions* ainsi que leur efficacité.

Dévolution de la situation de construction de définitions

Ne demandant pas explicitement de définition, nous pouvons nous interroger sur la dévolution de la situation : en fait, il n'existe aucune technique institutionnelle pour le type de tâche “construire une définition”, cette activité n'est pas une pratique usuelle des étudiants. L'absence de demande explicite de définition implique que les opérateurs et contrôles mis en œuvre dans les situations “arbre” et “droite discrète” ne seront “disponibles” qu'à partir du moment où les étudiants entreront dans un processus de construction de définitions et se l'approprieront. Nous avons demandé explicitement de travailler, pour chaque tâche, sur la notion de chemins différents (sur un exemple particulier, deux points étant donnés). Nous attendons que les étudiants questionnent la relation entre l'existence de chemins différents et la minimalité.

IV- Analyse et résultats de l'expérimentation

IV-1. Méthodologie pour l'analyse

Dans l'analyse, nous avons privilégié trois groupes ayant traité les trois tâches de la situation et/ou dont les stratégies de résolution relèvent de questionnements différents. Nous les avons appelés “groupe Bleu” (étudiants A/B/C), “groupe Jaune” (étudiants D/P/J/F) et “groupe Rose” (étudiants S/P/T/Z). Notons que le groupe Rose n'a pas abordé la troisième tâche. Le GO est toujours noté O.

Nous allons analyser le travail des étudiants sur les concepts mathématiques avec les outils présentés dans l'analyse a priori : il nous faut donc rechercher des stratégies mettant en œuvre une activité proche des *zéro-définitions* présentées au paragraphe précédent. L'étude des fonctions qu'aurait eu une définition, si elle avait été construite, nous permettra d'identifier des extraits de protocoles : nous allons donc analyser plus spécifiquement les stratégies des étudiants face aux problèmes de communication, de vérification des propriétés "générateur", "minimalité", voire de construction d'ensembles de déplacements générateurs minimaux. Notre objectif sera de déterminer alors des *zéro-définitions* potentielles.
Nous rechercherons par ailleurs des opérateurs et des contrôles "connus", ainsi que l'acte de dénomination (celui-ci peut nous apporter des indications quant à un début d'activité de définition).

IV-2. Dévolution de la situation et référence à l'algèbre linéaire

Il était prévisible de voir émerger des analogies avec un cours d'algèbre linéaire : certains étudiants ayant participé à cette situation avaient en effet eu un cours en amphithéâtre d'algèbre linéaire portant sur les concepts de familles libres / liées, générateur et base. Ils ont transposé à cette situation la propriété suivante : il est possible de supprimer un déplacement lorsqu'il peut être produit à partir des autres. Cela a conduit certains groupes à la résolution de systèmes d'équations diophantiens. Les étudiants ne disposant pas de ce cours d'algèbre linéaire n'ont pas forcément choisi la technique "résolutions de systèmes" pour résoudre la question "peut-on supprimer un déplacement ?" : nous détaillerons ces stratégies dans le paragraphe suivant. Nous pouvons déjà classer les groupes d'étudiants en deux types, ceux pour lesquels le recours à des notions d'algèbre linéaire est effectif, ceux n'utilisant pas ces notions (car ils n'ont pas encore suivi ce cours) :

- premier type : les étudiants utilisent l'algèbre linéaire (nombreuses références au cours et à la résolution de problèmes mobilisant la notion de famille libre / liée). Pour la résolution des tâches 1, 2 et 3, ils traduisent les données en systèmes linéaires et disposent de techniques suffisamment éprouvées pour les résoudre et interpréter les solutions. Pour ce type d'étudiants, définir n'est pas l'activité centrale de la situation (exemple : groupe bleu).
- second type : les références à l'algèbre linéaire ne font pas l'unanimité dans le groupe car les étudiants en disposant sont minoritaires. Celles-ci peuvent être une "aide à penser" et peuvent orienter la réflexion d'étudiants mais ne sont pas l'outil de résolution pour les tâches proposées (exemples : groupes Jaune et Rose).

Il est à noter que nous ne pouvons affirmer clairement que les étudiants se situent dans le cadre de l'algèbre linéaire simplement parce qu'ils utilisent un vocabulaire et des techniques de cette théorie. En effet, les étudiants "sont" dans le cadre de l'algèbre linéaire lorsqu'ils recherchent pour l'ensemble de déplacements s'ils sont générateurs, libres ou non, et résolvent des systèmes d'équations par exemple. Mais ils sont également "en dehors" de ce cadre lorsque nous observons que la tâche3 ne les "gêne" pas et qu'ils ne questionnent alors pas le théorème de la dimension, pas plus qu'il n'y a de questionnement sur un ensemble de k déplacements générateur minimal, avec $k > 4$.

Nous avons parlé des références au cours d'algèbre linéaire, mais, indépendamment du fait que les étudiants soient "mixtes" par rapport à cette donnée, des références plus particulières à la géométrie sont également apparues telles que la notion de vecteur, celle-ci étant assimilée à celle de déplacement. La représentation par des vecteurs est persistante : en effet, les étudiants utilisent fréquemment le mot "vecteur" en lieu et place du mot "déplacement" (lapsus linguae révélateur), reprennent l'idée que deux déplacements pourraient suffire dans un temps avancé de l'expérimentation alors qu'ils ont résolu avec succès le tâche 1 (groupe Jaune). Il est un peu surprenant de voir les étudiants représentés les déplacements donnés par la somme de deux vecteurs horizontal/vertical.
Ce qui nous amène à rappeler l'importance de la tâche 1 dans la négociation de la situation comme différente de "choses connues" : l'utilisation du mot "vecteur" n'est en soi pas fâcheuse. Mais elle induit des règles d'utilisation de ces vecteurs et des résultats non valides dans le cas discret (il suffit de deux vecteurs pour générer tout le plan, par exemple). La situation présente n'autorise que des combinaisons entières de déplacements et ceci a permis aux étudiants de s'affranchir quelque peu de leurs connaissances sur les vecteurs. C'est aussi ce qui leur a permis de ne pas s'attarder sur la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (à savoir les vecteurs de composantes (0 ; 1) et (1 ; 0)) proposée par P dans le Groupe Jaune :

3	P	:	*Le problème, c'est que si on exprime comme ça, on risque de tomber sur des moitiés de déplacements (...) tu considères à droite, x positif, à gauche, x négatif, en haut, y positif et en bas, y négatif. (...)*
5	D	:	*Avec ton idée de vecteurs, c'est plus simple.*
6	P	:	*Le problème avec la technique de vecteurs, on risque de tomber sur des demi et les demi-déplacements je suis pas sûr que ce soit autorisé. Ou des tiers ...*
7	D	:	*Oui, c'est sûr que tu ne vas pas prendre un tiers de déplacement.* (Groupe Jaune-pb1)

La tâche 1 a ainsi permis aux groupes Jaune et Rose de remarquer la différence entre les questions posées et leur cours d'algèbre linéaire, d'autant plus que les étudiants n'ayant pas eu encore ce cours refusaient catégoriquement d'utiliser ces concepts :

341	S	:	*Le truc c'est que…non je n'ai pas l'impression que ce soit la même chose* (que l'algèbre linéaire)*, puisque ici on peut pas atteindre le point là.*
(…)			*(...)*
351	P	:	*A chaque fois tu essayes de recaser tes cours, alors tu vois très bien que cela ne sert à rien.*
352	S	:	*Non mais là c'est évident. Mais une combinaison linéaire, c'est un truc lambda v, où v c'est un vecteur quelconque…*
353	P	:	*Je ne sais pas ce que c'est !* *(...)*

373 S : *Parce que justement ce n'est pas un espace vectoriel, je veux dire ça y ressemble, mais ce n'est pas un espace vectoriel. Déjà il n'y a pas d'élément nul, et en plus les lambdas dont on pourrait se servir, ils ne peuvent pas être négatifs. Comment dire, en fait, tu as seulement deux types de déplacement, mais tu ne peux pas faire, en fait, par exemple quand tu fais le (3 ; 3), comme ça tu ne peux pas faire le (3 ; 3) dans l'autre sens. Et pareil avec le (2 ; 1), tu peux pas faire le, le (-2 ; - 1).* (Groupe Rose)

Les étudiants faisant référence au cours d'algèbre linéaire constatent seulement que les "règles" du jeu sont différentes, que les combinaisons sont entières positives, mais ils n'évoquent pas la nécessité de redéfinir des concepts de l'algèbre linéaire.

IV-3. Synthèse du travail de chacun des groupes

Pour situer d'une manière générale les actions et formulations des étudiants, nous proposons tout d'abord de décrire les stratégies développées dans chaque groupe. Nous centrerons ensuite notre propos sur les définitions produites de "chemins différents", "générateur", "minimalité".

Le **groupe Bleu** a fait de nombreuses références à l'algèbre linéaire, notamment la notion de "dépendance". Les étudiants ont tout d'abord recherché à caractériser analytiquement les points atteints (par des équations de droites passant par les points atteints). Cette technique s'est avérée coûteuse dès la seconde tâche : en effet, les étudiants de ce groupe projetaient de caractériser analytiquement l'ensemble des points atteints avec quatre déplacements, faire de même avec seulement trois déplacements, et comparer enfin si ces deux ensembles de points atteints étaient les mêmes. Ceci a conduit à l'abandon de cette technique dans la tâche 2 : leur nouvelle technique consiste à rechercher s'il est possible d'atteindre les quatre points cardinaux du point A de départ. Dans ce groupe, l'importance des quatre directions (droite, gauche, haut, bas) traduit ce que nous avons appelé "u.p-partout" :

162 B : *Mais là, comment on va faire, la technique, ça me plaît pas, **on va jamais s'en sortir**. Il faudrait trouver une autre technique. On va appeler nos vecteurs.*
163 A : *Moi, j'aimerais bien **en éliminer un**.*
164 B : *Le dernier ...*
165 A : ***Si tu peux faire un déplacement de 1 carreau à droite avec ces trois-là, il sert à rien**.*
166 B : *Vers la droite, il y a quoi ... 5 à droite, 5 à gauche et 2 à droite, donc avec 5, -5 et 2, tu n'arrives pas à faire un ... ah si ! Parce que tu fais 2+2+2-5, mais après il faut voir avec le haut et le bas : ça fait 3+3+3-2 ... donc ça marche pas, tu peux pas ... en maths on a déjà du faire ça des centaines de fois ... avec les vecteurs*
167 D : *Tu peux aller dans 4 sens. Il y aura 4 points d'arrivée. ...*(Groupe Bleu-Pb2)

Ces réflexions ci-dessus, ainsi que l'écriture de systèmes d'équations (dans la technique précédente dite coûteuse), les conduisent à l'énoncé d'une nouvelle technique pour montrer que les ensembles de déplacements donnés sont générateurs : générer à partir des déplacements donnés les quatre points cardinaux.

178 B : *Pour pouvoir aller partout, il faudrait qu'on ait une combinaison … Pour savoir si on peut aller sur chaque point de la grille exactement, on prend ça, avec les coordonnées multipliées par a, b, c ou d (c'est nos alpha, bêta, gamma …). Tu essaies, si tu trouves (1 ; 1), ça veut dire que tu peux aller là. Ensuite, tu fais ce système avec (1 ;1) pour voir si tu as des solutions. Tu fais le système avec (1 ; -1) pour voir si tu peux aller là, et avec (-1 ;1) et avec (-1 ;-1).*
179 A : *Oui, pour* ***voir si tu peux atteindre les quatre points qu'il y a autour*** *!*
180 B : *Ça veut alors dire que tu peux aller partout. Si on peut prouver ça, on aura plus de questions à se poser. Et si on peut pas le prouver … ça veut dire qu'il y a des conditions, et vu que c'est compliqué, soit il y a une technique …*
181 A : *C'est pas ces quatre-là. Il faut prendre ceux-là*
182 B : *Ah oui ! Il faut prendre (1 ; 0) (-1 ; 0) (0 ; 1) et (0 ; -1). Ça nous fait quand même quatre systèmes d'équations à résoudre ! Mais il y a plein de solutions avec ça ! Mais prouver qu'il y en a une, ça suffit. Et il faudra qu'elle marche pour l'autre aussi*. (Ils font les calculs, cherchent les coefficients par essais-erreurs) (Groupe Bleu-Pb2)

A partir de ce moment, les étudiants ont exclusivement résolu des systèmes d'équations à coefficients et variables entiers pour montrer la propriété "générateur". Pour répondre à la question portant sur les conséquences de la suppression d'un déplacement, ils ont utilisé deux méthodes : la première en appèle à la non-utilisation de l'un des déplacements pour obtenir les quatre points cardinaux (tâche 2) et la seconde étudie la conservation des quatre directions lors de la suppression d'un déplacement (tâche 3).

Le **groupe Jaune** a également tenté de mettre en relation les points atteints avec une base "canonique" mais cela a été abandonné. Ce groupe a beaucoup travaillé sur les combinaisons entières des déplacements donnés afin de générer des déplacements dits "élémentaires" (c'est-à-dire ceux permettant d'atteindre les quatre points cardinaux). Ces étudiants n'ont pas tenté de résoudre des systèmes : ils ont procédé par essais/erreurs pour déterminer quatre déplacements "élémentaires" à partir des éléments donnés et ont utilisé des arguments graphiques, enrichis par des propos de directions et de parité, pour tenter de supprimer des déplacements. Là encore l'importance des quatre directions droite-gauche-haut-bas est à noter ; elle traduit "u.p-partout" et est utilisée dans l'étude de la suppression d'un déplacement :

122 D : *Deux d1 plus trois d2 plus dix d4 égal d5, comme ça. Déjà, on peut aller n'importe où là et là.*
123 J : *On peut prendre toute la droite.*
124 D : *Tu prends un point A de départ, tu peux prendre toute la droite, droite-gauche. Après il faut réussir …*
125 J : *Toute la hauteur ?*
126 D : *En fait d1+d2+3d4=d6. Après il faut réussir à tomber en dessous du point de départ, comme on peut monter.*
127 J : *C'est bon. Après tu fais des d6. Tu pars de d2, tu reviens juste au-dessous et tu*

fais d6.

(…)

141 D : *Mais après, peut-être que … on peut pas supprimer d1, parce que c'est le seul qui nous fait monter. On peut pas supprimer d2, c'est le seul qui nous fait aller à gauche.*

142 P : *Oui, et d4, il est vachement important.*

143 J : *Si on supprime d3, c'est bon.* (Groupe Jaune-Pb2)

Le **groupe Rose** est certainement le "moins avancé" des trois groupes : ces étudiants n'ont en effet pas travaillé sur la tâche 3, et sont restés sur un travail graphique dans les tâches 1 et 2. Ils ont en effet représenté le secteur de la grille atteint, ainsi que les points atteints dans ce secteur (tâche1). Dans la tâche 2, les étudiants du groupe Jaune raisonnent sur la propriété "u.p-partout", mais cela est moins lisible que dans les groupes précédents. Cependant, l'étude de la suppression d'un déplacement se fait relativement à la perte de points d'un secteur (les quatre directions décrites précédemment se révèlent encore importantes) :

1084 P : *Parce que si on supprime d_1 vu que c'est comme tout à l'heure, c'est la partie qui monte. Et après on peut que descendre ou rester sur la même ligne. Forcement tout ça se supprime et c'est encadré par les demi-droites là et là.*

1085 O : *Là et là, donc on va dans cette zone là !*

1086 P : *Voila, dans ce secteur là !*

1087 O : *Parce que c'est le seul qui fait aller par là.*

1088 P : *Pareil si on supprime d_2 on va rester dans cette zone. Heu, ça, ça se supprime. On n'atteint jamais cette zone.*(Groupe Rose-Pb2)

Il ressort en particulier de ces trois groupes que la propriété "u.p-partout" est présente par la nécessité qu'évoquent les étudiants d'avoir quatre directions représentées (droite, gauche, haut, bas).

IV-4. Une *zéro-définition* de la notion de "chemins différents"

Nous avons observé différentes formulations pour "chemins différents" sans que celles-ci ne soient réellement questionnées par les étudiants. En effet, des définitions sont apparues, sans pour autant être déclarées comme telles. Celles-ci traduisent en particulier l'influence des opérations connues sur les vecteurs. Remarquons que le concept de vecteur n'a été ni questionné, ni défini.

Dans la tâche 1, les groupes ont énoncé que des chemins étaient différents lorsque les coefficients des déplacements utilisés étaient différents, l'ordre dans lequel sont effectués les déplacements n'intervenant pas. Ceci constitue une *zéro-définition* de la notion de "chemins différents" : celle-ci a évolué dans tous les groupes.
Le groupe Rose a modifié sa définition dans la tâche 2 en :

1004 T : *Chemin différent, c'est que, je ne sais pas, on peut peut-être utiliser plusieurs déplacements…différents pour arriver jusqu'à…B. (…)J'ai dit que une manière* *différente, c'est que l'on peut utiliser différents chemins avec les différents déplacements.* (Groupe Rose-Pb2)

Ces étudiants ont de plus remarqué que le fait d'atteindre tous les points de la grille impliquait nécessairement qu'il y aurait alors une infinité de chemins (il est en effet possible de faire des détours).

Les groupes Jaune et Bleu ont également abordé les "détours" pour savoir s'il était alors question de chemins différents ou non. Ils ne traitent pas cette question de la même façon.
Pour le groupe Bleu, il s'agit de chemins différents :

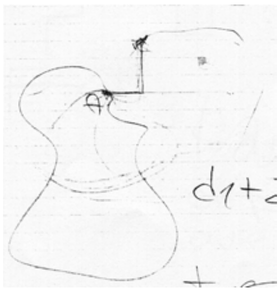
320 B : *Oui, étant donné qu'on peut aller partout, ça veut dire qu'on peut aller n'importe où et revenir à B, donc ça fait un chemin différent.* (Groupe Bleu-Pb3)

Le groupe Jaune quant à lui parle de "chemin nul" dans la tâche 2 : les étudiants définissent "chemins différents" par "déplacements utilisés différents"

194 D : *Si on a les quatre, on peut faire des chemins différents parce qu'on peut aller partout avec ces trois et partout avec ces trois-là donc forcément ce sera des chemins différents, on prend pas les mêmes vecteurs.*
196 D : *Si on prend pas les mêmes déplacements, c'est pas le même chemin.*
233 D : *Comme on peut faire un chemin avec d1, d2, d3 et on peut faire aussi un chemin avec d1, d2, d4, et ben c'est deux chemins différents.* (Groupe Jaune-Pb2)

Et le "chemin nul" n'est pas un élément retenu pour la caractérisation de "chemins différents" : il est possible de faire un détour, mais pour ces étudiants, cela n'en fait pas pour autant un chemin différent

252 D : *Tu montes à un moment. Donc tu passes par un A et ce A, tu le mets en dernier. Parce que toi tu fais un chemin A+B+C. Ben tu fais B+C+A ou alors ça en gros :*



253 J : *Et pour toi, ils ne seront pas différents ?*
254 D : *Ben non, parce qu'on fait un chemin nul, enfin un chemin qui revient.*
255 P : *Ça revient à faire un vecteur et une combinaison de tous les autres, même lui-même. Ce qu'il faudrait arriver à faire, c'est une combinaison qu'avec les autres.*(Groupe Jaune-Pb2)

Plus particulièrement, nous n'avons pas vu émerger de réelles questions sur l'implication : chemins différents => un déplacement (au moins) supprimable, et sa réciproque. Ainsi la problématique des "chemins différents" n'a pas été associée à celle de la redondance.

IV-5. Une *définition-en-acte* du concept de “générateur”

IV-5.1. Générateur

La définition “naturelle” de générateur (atteindre tous les points de la grille) n’est en soi pas problématique. Cependant, elle n’est pas opératoire pour démontrer qu’un ensemble de déplacements élémentaires est générateur. C’est pourquoi nous avions distingué les propriétés de “u.p-partout” et dense” dans l’analyse mathématique.

Les étudiants parlent de “*zones*” (ce qui correspond à “u.p-partout”) et de “*tous les points*” (ce qui correspond parfois à “dense”). Il est clair, dans tous les groupes, que la propriété “u.p-partout” est présente, c’est-à-dire aller partout en terme de *zones*, ou de *secteurs* de la grille. Les étudiants, dès la tâche 1, parlent souvent *d’aller partout*, de *délimiter la surface, la zone* des points atteints (groupe Bleu-[16]). Ils cherchent à atteindre toutes les zones (celles-ci correspondant en général à : en haut, en bas, à droite, à gauche). L’étude des raisonnements menés par les étudiants lors de la suppression d’un déplacement favorise l’observation de la propriété “u.p-partout”. En effet, ceci est explicite dans tous les groupes :

141 D : *Mais après, peut-être que … on peut pas supprimer d1, parce que c’est le seul qui nous fait monter. On peut pas supprimer d2, c’est le seul qui nous fait aller à gauche*. (Groupe Jaune-Pb2)

1080 P : *Si on supprime d_1 il y a déjà toute la partie du haut qui se supprime. C’est bien ça ? (…) Pareil si on supprime d_2 on va rester dans cette zone. Ca, ça se supprime. On n’atteint jamais cette zone.* (Groupe Rose-Pb2)

Le groupe Bleu utilise une méthode analytique (résolution de systèmes à coefficients et variables entiers) mais remarque quand même lors de la résolution de la tâche 2 que :

278 A : *Si on enlève d1 …*
279 B : *Avec celui-là, on va dans ce sens-là, avec celui-là, on va dans ce sens-là, avec celui-là, on va dans ce sens-là.*
280 A : *Juste en regardant les déplacements, avec d2, d3, on pourra plus monter.*
281 B : *Oui, on pourra jamais monter.*
282 O : *Et sur la zone où on peut aller, est-ce qu’on peut encore aller partout ?*
283 A : *Je serai tenter de dire non.*
284 O : *Oui, mais tout à l’heure, avec d4, vous étiez « tentés » aussi !*
285 A : *Oui, mais là, on prend un point et la case juste en dessous, le minimum en descendant, disons, c’est deux. Alors que là … comme il y a la différence de parité sur les déplacements verticaux …*
286 B : *Tu peux pas utiliser des termes plus … ?*
287 A : *Tu descends de 2, tu montes de 3, tu te déplaces de 1 carreau ! Regarde, là ce qu’on fait, c’est 2 au minimum.*
288 B : *Oui, on peut descendre que de deux.*
289 A : *Ou alors, de trois, mais pas de un. Déjà … après tu peux atteindre tous ceux-là.*
290 B : *En droite-gauche.* (Groupe Bleu-Pb2)

Nous identifions ainsi une ***propriété-en-acte*** : avoir toutes les directions représentées (droite, gauche, haut, bas) est une condition nécessaire pour avoir un ensemble de déplacements générateur.

La propriété “dense” a eu plus de difficultés à émerger. En effet, les étudiants des groupes Bleu et Jaune se sont intéressés à la recherche de la génération de quatre points élémentaires : identifier la propriété “dense” n’est alors plus possible. De plus, la prégnance de l’algèbre linéaire, où aller “u.p-partout” est équivalent à “dense”, ne facilite pas les choses. Nous n’avons donc pas relevé de *zéro-définition* de “générateur” comprenant clairement les deux propriétés “u.p-partout” et “dense” : en effet, si *zéro-définition* il y avait eu, celle-ci aurait été mise à l’épreuve, voire réfutée, et aurait ainsi évoluée ou disparue. En revanche, il ressort des protocoles une **propriété opératoire** caractérisant “générateur” : un ensemble de déplacements est générateur dès qu’il permet d’atteindre quatre points élémentaires [*tu peux aller dans quatre sens. Il y aura quatre points d’arrivée* (Groupe Bleu-Pb2)] ou de générer quatre déplacements élémentaires ; les étudiants ramènent ainsi les ensembles de déplacements proposés à un système connu comme étant générateur :

132 J : *On devrait le montrer en fonction des déplacements connus, élémentaires quoi.*
133 D : *Donc ça fait deux d2, d1, huit d4.*
134 P : *Là, tu l’as exprimé en fonction de la base canonique.*
135 D : *Là, on peut avoir tous les vecteurs.*
136 J : *On peut aller partout, vraiment partout.*
137 D : *Là, on a quatre vecteurs de base.*
138 P : *On a quatre déplacements. Il faudrait que deux vecteurs de base.*
139 J : *On a tous les déplacements possibles. On va sur toute notre feuille.* (Groupe Jaune-Pb2)

Mais pour le groupe Jaune, la recherche de déplacements “élémentaires” ne va pas être systématisée par une résolution de systèmes. Ces étudiants vont rester dans un questionnement de type “u.p-partout”.

Ainsi, les étudiants ayant recours à des systèmes linéaires et explicitant la notion de dépendance (groupe Bleu) ne sont pas gênés pour répondre aux questions. Ils font preuve d’une technique suffisamment performante dans la résolution de systèmes pour tirer des conclusions sur la propriété “générateur” des ensembles de déplacements proposés. Cela leur est possible du fait de la mise en évidence de quatre points à atteindre (quatre points cardinaux).
Pour les autres groupes, expliquer qu’un ensemble de déplacements atteint effectivement tous les points de la grille est délicat : le groupe Rose n’a que des explicitations très partielles et le groupe Jaune parvient à répondre par un travail de génération des quatre déplacements dits “élémentaires” à partir des déplacements donnés.

IV-5.2. Générateur minimal

Comme nous l’avons vu ci-dessus, la relation entre “chemins différents” et “minimalité” n’a pas été questionnée. Mais la minimalité a été caractérisée en acte : la problématique autour de “générateur et “générateur minimal” est pointée dans les questions demandant d’étudier les points atteints et les conséquences d’une suppression de déplacement(s). Lorsque les étudiants ont recherché à générer quatre “points cardinaux” ou quatre “déplacements élémentaires” dans la tâche 2, la non-utilisation de l'un des déplacements leur est apparue évidente. Ainsi, les étudiants en ont conclu à son inutilité. Ils font ressortir de plus le fait que lorsqu'un déplacement peut être généré à partir d'autres, il peut être supprimé :

301 D : *Il faut savoir si on enlève l'un ou l'autre. L'un ou l'autre sont obligatoires …*
302 J : *Ou est-ce que les deux sont obligatoires ? Il faut essayer d'exprimer un en fonction des trois autres. Si on arrive à en exprimer un, il est inutile.* (Groupe Jaune-Pb3)

Le groupe Bleu reste dans des techniques de type “résolution de système”, et le groupe Jaune revient à la propriété de “u.p-partout” quand il s'agit de supprimer un déplacement dans la tâche 3 pour montrer que d_3 ne peut pas être supprimé :

317 P : *Si on veut exprimer par exemple d3, il faut qu'on aille à gauche.*
Il faut en trouver un qui va à gauche, et le seul qui va à gauche, c'est d4. Si on veut supprimer le petit, il faut d4. Mais si on utilise d4 après lui, il va trop en bas, donc après il faudra remonter. Et après, si on veut remonter, il y a deux possibilités. On peut utiliser d2, mais si on utilise d2, à chaque fois, on va arriver soit juste en-dessous, soit juste au-dessus. Et sinon, on peut utiliser d1, mais il va trop nous décaler à droite et ça marchera pas non plus. (Groupe Jaune-Pb3)

Ainsi, nous identifions une ***définition-en-acte*** de “générateur minimal” et une ***définition-en-acte*** de “ensemble minimal de déplacements” : un ensemble de déplacements est générateur minimal lorsque tous les déplacements sont utilisés dans la recherche de quatre déplacements unitaires. Et un ensemble de déplacements n'est pas minimal lorsqu'un déplacement est combinaison entière des autres.
Ces deux *définitions-en-acte* permettent à l'action des étudiants d'être opératoire. Ce sont des fonctions propositionnelles en relation avec la *proposition-en-acte* de générateur décrite précédemment (quatre directions nécessaires).

Notons que le groupe Rose n'a pas approché le concept de “générateur” par les quatre déplacements unitaires, et n'a utilisé que la propriété “u.p-partout” : l'observateur leur a désigné la propriété de dépendance dans la tâche 2.
Remarquons de plus que, sur la dépendance entre les déplacements, les étudiants ne questionnent pas l'équivalence entre « un s'écrit en fonction des autres » et « n'importe lequel s'écrit en fonction des autres »

IV-6. Résultats

Cette situation est très différente des situations précédentes (arbre et droite discrète) pour les raisons suivantes. D'une part, elle est du type RESOLUTION DE PROBLEMES, plus complexe que celui des situations précédentes. Ensuite, la situation fait travailler sur des objets (déplacement, chemin) et les concepts à définir sont des propriétés de ceux-ci (générateur, indépendance, redondance, minimalité). Enfin, les objets en jeu ne sont pas des objets matériels, on ne peut pas manipuler les représentations. Dans cette situation, les seuls objets « matériels » sont les déplacements élémentaires, qui permettent de générer les déplacements. En fait, la difficulté de la tâche ici est la résolution du problème lui-même et les objets sur lesquels on travaille n'ont pas besoin, dans un premier temps, d'être explicitement définis.

Ces caractéristiques de la situation expliquent en partie qu'aucune vraie activité de définition des propriétés des déplacements (générateur, etc..) n'ait eu lieu. Ceci atteste que les étudiants n'ont pas pu prendre une distance suffisante par rapport aux objets manipulés. Une hypothèse plausible est que cette prise de distance est trop rarement travaillée dans l'enseignement.
De plus, la prégnance de certaines connaissances d'algèbre linéaire et, en particulier, l'utilisation d'un vocabulaire associé (même mal utilisé) ont pu court-circuiter l'activité de construction de définitions.
Cependant, la définition « naturelle » de générateur (atteindre tous les points de la grille) s'est transformée en une propriété opératoire (générer quatre points ou déplacements élémentaires). De plus, nous avons identifié deux *définitions-en-acte* : l'une pour "générateur minimal", l'autre pour "ensemble minimal".

Malgré tout, cette situation « déplacements sur une grille » doit être gardée, mais modifiée relativement à sa complexité (due à la conjonction des trois variables ci-dessus). En effet, cette situation semble fondamentale pour questionner les concepts visés (générateur, indépendance, minimalité, etc…). Une hypothèse est qu'une demande explicite de définition de ces concepts favoriserait à la fois la résolution du problème mathématique et la construction de définitions. Nous pourrions aussi envisager une situation qui permette de problématiser ces concepts à partir d'objets matériels (par exemple, couverture du plan par des fractals, ou génération de certains types de graphes).

ANNEXE : preuve du Théorème de Bezout

Théorème de Bezout

Les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe des entiers relatifs $u_1, \dots, u_n$ tels que $u_1 a_1 + \dots + u_n a_n = 1$ (*)

Preuve

- Si (*) est vérifiée, alors le pgcd de $a_1, a_2, \dots, a_n$ est 1.
- Montrons par récurrence la réciproque.

Si n=2, l'affirmation est déduite du théorème suivant :

> ***Théorème** : quelque soit a et b entiers relatifs, il existe x et y entiers relatifs tels que : $ax+by = d$ où d est le pgcd de a et b.*
>
> *Preuve*
>
> *Par application de l'algorithme d'Euclide :*
>
> $r_1 = b - q_0 a = x_1 a + y_1 b$, $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$.
>
> $r_2 = a - q_1 r_1$
> $= a - bq_1 + q_0 q_1 a$
> $= (1+q_0 q_1)a + (-q_1)b$
> $= x_2 a + y_2 b$, $x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$.
>
> *Par récurrence, si* $r_{k-2} = x_{k-2}\, a + y_{k-2}\, b$ *et* $r_{k-1} = x_{k-1}\, a + y_{k-1}\, b$
>
> *alors on a :* $r_k = r_{k-2} - q_{k-1}\, r_{k-1}$
> $= (x_{k-2} - q_{k-1}\, x_{k-1})\, a + (y_{k-2} - q_{k-1}\, y_{k-1})\, b$
> $= x_k\, a + y_k\, b$
>
> *d'où* $r_n = \text{pgcd}(a, b) = x_n\, a + y_n\, b$, *avec* x_n *et* y_n *entiers relatifs.*

□

Nous allons montrer plus généralement que pour $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$: $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = d$ où $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Soit $d' = \text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Alors : d est le pgcd de d' et de a_n. Par le théorème ci-dessus, il existe x et y entiers relatifs tels que : $d = x\, d' + y\, a_n$

L'hypothèse de récurrence est que la réciproque de Bezout est vraie pour (n-1) nombres.

Donc il existe $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_{n-1}'$ entiers relatifs tels que : $d' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' a_i$

Or $d = x\, d' + y\, a_n$ d'où $d = x \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i' a_i + y a_n$ soit $d = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ où $\lambda_i = x\, \lambda_i'$ pour i =1,…,n-1 et $\lambda_n = y$

□

Conclusion

Résultats et perspectives de recherche

1- Etude épistémologique de « la définition »

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence différents points de vue épistémologiques sur la définition, que nous avons modélisés en termes de conceptions (aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne), en décrivant plus spécifiquement les opérateurs et contrôles associés. Ces conceptions se sont révélées complémentaires dans le sens qu'elles permettent de couvrir des problématiques spécifiques liées à la définition (construction de concept, caractérisation, théorisation). Nous avons fait ressortir cette complémentarité en utilisant le modèle *cK¢* (Balacheff, 1995&2003), de par la nature des problèmes concernés par chacune de ces conceptions, mais aussi de par la spécificité des *opérateurs et contrôles* (Balacheff, ibid.) alors mobilisés. De plus, l'utilisation de ce modèle nous a permis d'éviter tout historicisme, et s'il peut être surprenant de passer d'Aristote à Popper et Lakatos par un saut dans le temps considérable, il n'en est rien dans les faits, car cette modélisation prend ces trois auteurs comme représentants de courants de pensée sur le concept de définition ; la conception aristotélicienne, par exemple, ne reflète pas seulement la pensée d'Aristote, ne serait-ce que du fait de son inscription dans le débat opposant les courants essentialistes et nominalistes, débat non clos encore au début du XXème siècle. L'étude des « théories » de la définition de Leibniz, Kant et Durkheim, ainsi que de Couturat et Pascal nous a permis de mieux circonscrire les **trois conceptions** que nous avons retenues. Il nous resterait cependant à **établir définitivement leur exhaustivité** : en effet, sur un sujet (« la définition ») à la fois complexe et si peu étudié à l'heure actuelle pour lui-même, serait-il possible de décrire une quatrième conception non redondante avec les trois précédentes ?

Cette question, encore ouverte aujourd'hui, peut être attaquée de deux façons : la première consisterait en une étude plus spécifique du concept de définition dans des domaines où la construction de définitions peut sembler très normée, à savoir la lexicologie et la logique. Pour cela, l'étude de la théorie des modèles de Tarski nous ouvrirait peut-être des voies non encore explorées. La seconde s'intéresserait à l'étude de constructions de concepts et de définitions spécifiques, dans le but de mettre à l'épreuve les trois conceptions sur un processus historique, d'évaluer leur « limite » (à partir des textes et lettres des protagonistes de la construction de certains concepts). Ceci requiert à la fois une étude mathématique, une modélisation par les conceptions, mais aussi une caractérisation du « degré de problématique » apporté par lesdits concepts. Nous pourrions par exemple reprendre l'étude concernant les concepts d'intégrabilité au sens de Riemann-Stieltjes et de variation bornée, ceux-ci étant identifiés par Lakatos comme *proof-generated concepts* dont l'origine est la preuve de Dirichlet de la conjecture de Fourier (SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES). L'exemple présenté par Kahane (1999) pour montrer qu'une définition est un aboutissement, à savoir « L^2 complet », nous offre également matière à réflexion : il s'agit notamment de souligner la construction de la géométrie des espaces de Hilbert, de travailler, comme le disait Riesz *« sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables »*. Kahane évoque deux solutions distinctes proposées par Riesz et par Fischer en réponse à un problème sur une certaine classe de coefficients de Fourier[165] : sans le dire en ces termes, Kahane est en fait en train de souligner que ces deux solutions reposent sur un même *proof-generated concept*, à savoir « complet », en relation avec les espaces L^p ($p\geq 1$). Ceci nous ramène à la nécessité d'étudier de manière approfondie la notion de *proof-generated definition*.

L'objectif principal de cette seconde voie est ainsi de « montrer » un peu plus la portée des conceptions aristotélicienne, lakatosienne et poppérienne, en particulier par rapport à la description de la dialectique entre construction de concept et construction de définitions. Cela permettra de plus de revenir sur l'étude des relations entre définition et preuve (*proof-generated definition* et *proof-generated concept*) et d'approfondir celles-ci.

2- Etude des travaux didactiques existants sur « définition » et « construction de définition ». Conceptions

L'étude des travaux didactiques concernant la définition a montré le vide en matière d'étude de Situations de Construction de Définition dans l'enseignement. Un vide cependant relatif si l'on attribue le nom de SCD aux situations de classification (Freudenthal, Fletcher) et de redéfinition (Vinner, Borasi, Duchet-MeJ). Cependant, il apparaît clairement un espace de recherche libre théoriquement pour l'étude de telles situations, tant dans l'élaboration de SCD que dans l'analyse des productions des élèves, du point de vue de la construction de définitions. En effet, les pistes théoriques suggérées par les approches des auteurs ci-dessus concernent principalement la notion de *concept image* (Vinner) et la Théorie des Situations Didactiques pour les situations-recherche (Duchet). Néanmoins, ce dernier type de situation n'est pas spécifiquement analysé du point de vue des processus de construction de définitions. De plus, notre étude écologique a montré que, dans les programmes et les manuels du secondaire, la définition occupe une place invariante et a des fonctions très réduites, qui ne

[165] Il s'agit de la recherche de la caractérisation des coefficients de Fourier des fonctions sommables. Les suites de coefficients de Fourier des fonctions de carré sommable sont cependant connues.

permettent pas l'entrée dans une démarche de construction d'un concept. L'étude des rapports institutionnels d'enseignants à la définition va dans le même sens ; et comme le rapport personnel des enseignants est fortement contraint par les rapports institutionnels, les SCD peuvent permettre la reconstitution d'un nouveau rapport personnel au concept de définition idoine à l'activité de recherche mathématique.
Rappelons ici que les principales conceptions des enseignants et des étudiants/élèves (Borasi, 1992 – Ouvrier-Buffet, 2000 – Shir, 2001&2002) comprennent des exigences relatives à la rigueur logique, à l'existence et à l'unicité d'objets définis, mais aussi à la minimalité (non redondance) d'une définition, voire à l'élégance de celle-ci. Ainsi, le rapport institutionnel-personnel à la définition n'est pas vide et son étude, associée aux processus de construction de définitions à l'œuvre chez les étudiants observés, nous permet d'envisager **l'utilisation de SCD dans le but de faire évoluer ce rapport (conceptions) d'élèves, d'étudiants, d'enseignants à la définition**.

Ces différentes études nous ont fourni des raisons et permis de faire des hypothèses, pour élaborer des situations de construction de définitions de concepts mathématiques. Nous avons expérimenté trois types de SCD. Les résultats propres à chacune de ces situations ont été présentés à la fin des chapitres correspondants, et nous les synthétisons ci-après (§3).

3- Situations expérimentées : résultats

Reprécisons les principales **caractéristiques d'une Situation de Construction de Définitions**, et complétons les réponses à nos questions de recherche. Les points suivants sont communs aux SCD et nous permettent de souligner ce qui est invariant dans les SCD expérimentées.

- A propos des processus de construction de définitions

Les processus de construction de définitions mis en œuvre par les étudiants ayant participé aux expérimentations comprennent les éléments suivants.
Nous avons étudié la construction de *zéro-définitions* qui se sont avérées évolutives. La mobilisation d'opérateurs et contrôles spécifiques a contribué significativement au processus de construction de définitions car elle a permis l'évolution des *zéro-définitions* produites par les étudiants. Ces opérateurs et contrôles (qui se révèlent souvent comme étant des opérateurs-contrôles) sont de type lakatosien (tel que la recherche de contre-exemples), mais aussi de type aristotélicien, langagier et logique. Rappelons que la demande explicite de définition a permis une certaine réflexivité sur les définitions en construction du fait de la mobilisation particulière d'opérateurs et contrôles aristotéliciens (ceci est spécifiquement étudié dans la situation « droite discrète » où la demande explicite de définition est apparue comme une variable).

Les processus des étudiants comprennent également des questionnements sur les implications et les équivalences entre les différents énoncés produits à l'occasion du travail sur les définitions : il n'était pas évident a priori que ceci se produise du fait des conceptions identifiées des étudiants au concept de définition.

- Le statut et la nature des concepts en jeu

Nous avons montré qu'une condition nécessaire au « bon fonctionnement » d'une SCD est la suivante : les objets mathématiques en jeu doivent être « nouveaux » c'est-à-dire ni naturalisés, ni institutionnalisés. Différents points de vue sur ces objets doivent être accessibles pour favoriser l'émergence de plusieurs définitions. La présence d'un référent pour l'objet est à prendre en compte, car elle questionne l'objet à définir, voire re-questionne des objets institutionnalisés par ailleurs pouvant apparaître comme évidents.

Une « bonne » caractéristique pour un concept est qu'il se prête ainsi facilement à plusieurs *zéro-définitions*. En effet, le travail relatif aux *zéro-définitions* rend possible le processus de construction de définitions et la construction du concept mathématique : la dialectique entre construction de concept et construction de définition est visible dans l'évolution des *zéro-définitions*. Il est vrai que les objets discrets retenus se prêtent particulièrement bien à des SCD. Des objets du cadre de la géométrie peuvent présenter de « bonnes » caractéristiques pour des SCD : en effet, nous pouvons relever une proximité entre le domaine de la géométrie et celui des mathématiques discrètes, en ce qui concerne l'accessibilité des objets par leurs représentations, mais aussi les différentes approches qu'il est possible d'avoir sur ces concepts, telles celles présentées par Fletcher (1970) sur la convexité (cf. chapitre III - §II). Nous pouvons par exemple concevoir une SCD concernant la définition du « centre d'un objet ». Ceci reste à étudier. Remarquons de plus que le domaine de la géométrie n'a pas le même statut institutionnellement que celui des mathématiques discrètes, ces dernières faisant une entrée « timide » par la théorie des graphes en Terminale ES (spécialité maths). Ainsi, l'élaboration de SCD en géométrie doit prendre en compte cet aspect, et ainsi s'attacher à « naturaliser » les objets de ce domaine, en s'intéressant aux différentes significations que ceux-ci peuvent revêtir. Nous avons conscience que tous les concepts mathématiques ne peuvent se prêter a priori aux SCD. L'étude historique de certains concepts d'analyse (cf. §1) pourrait nous apporter des réponses quant à la caractérisation recherchée : le domaine de l'analyse semble, a priori, peu propice à la constitution de SCD au regard des exigences que nous avons spécifiées précédemment ; il est donc nécessaire de l'étudier plus spécifiquement.

- Construction et enrichissement de la démarche scientifique

Au vu de nos résultats, nous pouvons formuler l'hypothèse suivante : pour que la construction d'un concept soit possible, il faut qu'une certaine « compétence » pour la démarche scientifique soit mobilisable. Cette démarche comprend notamment les points suivants : la mobilisation de différents points de vue sur une situation et un concept mathématique, le va-et-vient entre ces points de vue, mais aussi un questionnement sur le (ou les) concept(s) concerné(s) relatif à une remise en cause de propriétés (ce qui rejoint la méthode générale de

“Preuves et réfutations” de Lakatos). Rappelons, à ce propos, qu’une *zéro-définition* n’est pas définitive : elle est vouée à l’évolution, ou à la disparition, et ceci n’est possible que si l’activité s’inscrit dans une démarche scientifique. Si cette compétence était construite par ailleurs, l’évolution de *zéro-définitions* vers des définitions serait plus assurée. Cependant, la constitution de cette démarche scientifique ne peut pas se réaliser uniquement dans des situations de construction de définitions, car celles-ci ne sont pas représentatives à elles seules des problématiques des chercheurs. Il faut donc que cette démarche scientifique soit également construite ailleurs, dans d’autres types de situations.

- Des organisations didactique et mathématique spécifiques

La mise en place dans la classe de situations de construction de définitions nécessite des organisations mathématiques et didactiques spécifiques (Bosch, Gascon 2001). En particulier, dans une organisation mathématique usuelle, la définition du concept qui va être étudié est donnée d’emblée (et elle est en général unique) : ceci est incompatible avec la négociation d’une situation de construction de cette définition. De plus, le fonctionnement d’une SCD nécessite la mise en place d’une organisation didactique non usuelle qui laisse suffisamment de temps à l’élève pour construire des définitions, ce que nous avons observé pour la situation « Déplacements sur une grille ».

Nos expérimentations nous ont permis de mettre en évidence trois principales **variables didactiques** pour les SCD : la première variable est de type épistémologique et concerne les **fonctions** de la définition. Dans la situation « Droites discrètes », les fonctions de reconnaissance et de construction de l’objet géométrique en jeu se sont en effet révélées significatives ; la prise en compte simultanée de celles-ci s’intègre aussi dans une démarche plus globale que la construction de définitions, à savoir la démarche scientifique. La deuxième variable est la **demande explicite de définition** : l’étude, dans la situation « Droites discrètes », des deux valeurs possibles de cette variable, nous a permis de formuler des hypothèses quant à l’influence de cette demande explicite sur le processus de construction de définitions (cf. §3). La troisième variable didactique est l’organisation sociale des étudiants en **groupes** (elle s’avère déterminante pour ce type de situations). Le GO doit négocier avec cette composante, en acceptant aussi des phases de recherche plus individuelles. Le rôle du GO s’avère spécifique et doit être étudié de manière plus approfondie.

4- Vers une situation fondamentale pour la construction de définitions

- Les spécificités de chacune de nos situations

Nous avons montré que les Situations de Construction de Définitions de type CLASSIFICATION sont facilement dévoluables, telle la situation « Arbre ». Dans les autres types de situation, la dévolution dépend de la demande explicite de définition, mais pas seulement.

La demande explicite de définition favorise en particulier la mobilisation d'opérateurs et contrôles spécifiques qui vont avoir un rôle réflexif sur la construction de définitions. Ces opérateurs et contrôles permettent aux étudiants de prendre de la distance par rapport au concept mathématique en jeu et favorisent ainsi l'évolution de *zéro-définitions* vers des définitions.

La situation « Droites discrètes » a la particularité de se situer à la croisée de deux types de SCD : CLASSIFICATION, ou RESOLUTION DE PROBLEMES, et MATHEMATISATION/MODELISATION. L'analyse que nous en avons faite tient compte de cette spécificité et nous donne de premiers éléments pour envisager une situation plus spécifiquement de type MATHEMATISATION/MODELISATION.

Par ailleurs, la situation « Déplacements sur une grille », relevant du type RESOLUTION DE PROBLEMES, sans demande de définition, et mobilisant des concepts abstraits, a abouti sur une production de définitions sous forme de *définitions-en-acte* et *propriétés-en-acte* (Vergnaud, 1991) : celles-ci se sont révélées suffisantes pour avancer dans la résolution du problème.

Il est important de souligner que le choix de types de situations que nous avons effectué n'est pas lié aux objets mathématiques retenus : en effet, pour chaque objet mathématique, nous avons évoqué plusieurs SCD envisageables relativement à notre typologie.

- Une situation fondamentale pour la construction de définitions

Nous pouvons affirmer que les trois situations étudiées constituent des éléments d'une situation fondamentale pour l'apprentissage de la construction de définitions.
En effet, dans une SCD, la connaissance visée est la suivante : savoir construire des définitions d'un concept, mettre en œuvre des processus de construction de définitions ; ces processus vont apparaître lors de la mise en œuvre d'invariants dans le traitement des situations. Ce qui s'inscrit dans quelque chose de plus général, à savoir la pratique d'une démarche scientifique :

> *une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories* ... (Brousseau-1982-p.186).

La mise en place d'une situation fondamentale repose notamment sur les hypothèses suivantes, formulées par Brousseau (nous allons revenir sur celles-ci au regard des résultats obtenus).
Dorénavant, nous parlerons d'*étudiant*, sans nécessairement en référer aux étudiants ayant participé à nos expérimentations, dans le sens étymologique du terme.
La première hypothèse de Brousseau est une hypothèse sur l'étudiant : il « faut » que l'étudiant change de point de vue (du fait de la situation), sans que cela ne soit dû à un effet de contrat. Dans les situations que nous avons expérimentées, nous avons noté des changements de points de vue chez les étudiants, tant sur le concept de définition que sur les objets

mathématiques en jeu. Ceci n'était a priori pas évident dans la mesure où « définir » ne correspond pas au rôle usuel de l'étudiant (dans une institution « enseignement »).
La deuxième hypothèse concerne le savoir mathématique : les situations doivent être élaborées de façon à ce que la connaissance visée joue pour les étudiants le rôle de *réponse adaptative optimum* (la connaissance visée étant ici la construction de définitions). A ce sujet, la situation « Déplacements sur une grille » est très prometteuse, mais demande à être retravaillée. Soulignons en particulier que la construction de définitions apparaît effectivement comme *réponse adaptative optimum* (pour reprendre l'expression de Brousseau) pour le chercheur dans son activité mathématique ; ceci peut effectivement se produire chez des étudiants, dans une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEME ou MATHEMATISATION/MODELISATION, mais pas dans une SCD CLASSIFICATION.
La troisième hypothèse concerne la formation des concepts chez l'étudiant (Legrand-1996, p.236). Il semble bien difficile de réaliser la condition de Brousseau suivante : *« s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variables* ***tous*** *les problèmes culturellement connus où la connaissance intervient »* (SIC-Brousseau-1982), c'est pourquoi Legrand propose « la nécessité de clôture de la situation fondamentale » c'est-à-dire, pour répondre aux exigences concernant les variables d'une situation fondamentale : *« la situation sous laquelle la connaissance se présente doit contenir en germe (sans devoir être* déconstruite*) les potentialités d'évolution du savoir et rendre possible de nouveaux apprentissages »* (Legrand - 1996, p.237). Les variables d'une situation fondamentale *changent le statut cognitif de la connaissance visée, en tant que moyen de contrôle de l'action, moyen de communication, moyen de preuve, algorithme de référence* etc. (Brousseau - 1982, p.198). Il s'agit maintenant d'effectuer un retour expérimental à la situation fondamentale (à savoir les trois SCD expérimentées) dans le but d'expliciter les variables de celle-ci en question.

Il est ainsi nécessaire pour nous de réétudier et d'enrichir les caractéristiques des situations (correspondant aux variables didactiques que nous avons identifiées), en particulier pour des SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES.
Puisque ce qui nous concerne est la co-construction d'un concept et de ses définitions, il pourrait être intéressant de proposer de telles situations avec des concepts soit déjà institutionnalisés, soit naturalisés : il faudrait alors étudier tout d'abord la « désinstitutionnalisation » ou la « dénaturalisation » de ces concepts, rechercher à la rendre possible. Nous pouvons d'ores et déjà suggérer quelques pistes à ce propos : il pourrait s'agir de construire une SCD mettant en jeu, de manière problématique, des objets mathématiques déjà institutionnalisés c'est-à-dire : soit lesdits objets ne sont pas reconnaissables, soit la définition existante, supposée connue des étudiants, s'avère inefficace. Cette approche s'apparente, dans une certaine mesure, aux changements de contexte proposés par Borasi et Duchet (cf. Chapitre III). Un travail de définition sur un objet déjà institutionnalisé peut

contribuer à la « désinstitutionnalisation » en question s'il s'avère déstabilisant : ceci est bien sûr à étudier.

5- Perspectives de recherche

Nos perspectives de recherche peuvent être résumées suivant quatre axes principaux.
Le premier concerne la poursuite de l'étude épistémologique du concept de définition (cf. §1). Celle-ci nous permettra notamment d'approfondir l'étude des relations entre définition et preuve (*proof-generated concept*), mais aussi de réétudier le type de SCD RESOLUTION DE PROBLEMES, et d'asseoir l'opérationnalité des trois conceptions (aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne) dans l'étude de processus de construction de définitions, qu'ils soient empruntés à l'histoire des mathématiques, ou à l'œuvre chez des étudiants.
Le deuxième axe de nos perspectives de recherche s'intéresse à la caractérisation des SCD (cf. §3) mais aussi à l'étude théorique de la gestion de celles-ci. En effet, le rôle de l'observateur est spécifique dans les SCD et partage assurément des points communs avec la gestion du débat scientifique (Legrand-1993), mais aussi avec celle des Situations de Recherche en Classe (Groupe SiRC – ERTé Maths à Modeler). Il est ainsi nécessaire d'approfondir l'étude du processus de dévolution et du rôle du GO dans les SCD, ce qui nous permettra notamment de poursuivre l'étude de l'enseignant dans de telles situations.
Si la modélisation cK¢ s'est avérée pertinente pour l'étude des processus de construction de définitions chez les étudiants, nous avons cependant eu recours à la notion de *définition-en-acte* pour la présentation des résultats de la situation « Déplacements sur une grille ». Ainsi, une troisième perspective de recherche se présente dans l'étude des relations entre l'analyse de processus de construction de définitions par cK¢, les *zéro-définitions*, les *proof-generated definitions* et les *définitions-en-acte*. De plus, l'étude de SiRC (**Si**tuation de **R**echerche pour la **C**lasse) sous le regard des SCD pourrait nous apporter des éléments quant aux SCD elles-mêmes, mais aussi quant à la démarche scientifique (cf. §3).
Notre dernière perspective de recherche atteste de la portée du présent travail pour l'enseignement : il s'agit de l'étude de l'utilisation des SCD comme situations de **diagnostic des connaissances** et des difficultés que peuvent avoir des étudiants à propos d'un concept déjà enseigné, l'utilisation des SCD pour faire évoluer les conceptions sur la définition (statut et fonction de la définition), d'une part, et l'étude de l'intégration de ce type de situation dans la formation des enseignants, d'autre part.

BIBLIOGRAPHIE

Aristote, *Organon – Les Topiques / Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par J.Tricot). Paris, Vrin, Ed.1965 / 1970.

Arnauld d'Andilly, A. (1995) *La logique de Port-Royal* [Document électronique] Num. BNF de l'éd. de Paris : [s.n.], 1878. in-16. Notice n° : FRBNF37298615.

Arsac, G. (1996) Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. In D. Grenier, *Séminaire de Didactique et de Technologies Cognitives en Mathématiques*, 69-100. IMAG Grenoble.

Audin, P. & Duchet, P. (1992) La recherche à l'école : Math.en.Jeans. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, n°121, 107-131. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Balacheff, N. (1987) Les définitions comme outils dans la résolution de problème *in XI° Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.

Balacheff, N. (1995) Conception, connaissance et concept. *In D. Grenier (Ed.) Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*, 219-244, IMAG. Grenoble.

Balacheff, N. (2003) cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. *XIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (à paraître) La Pensée Sauvage, Grenoble.

Ball-Loewenberg, D. & Bass, H. (2000) Making Believe: The Collective Construction of Public Mathematical Knowledge in the Elementary Classroom. *In D.Phillips (Ed.), Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education.* University of Chicago Press. Chicago.

Balmand, L. (1998), *Etude d'un objet combinatoire : le graphe*. Mémoire DEA, Laboratoire Leibniz – Equipe CNAM, Grenoble.

Balmand, L. (2001) Etude d'un objet combinatoire : le graphe, *Petit x*, n°56, 35-60.

Behaj, A. (1999) *Eléments de structurations à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire*. Thèse, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès.

Belhaj D., Bonafe F., Faure C., Gannoun A., Kieffer F., Saby N., Tisseron C., (2000) *Les unités de méthodologie en Deug*, IREM Montpellier 2.

Berge, C. (1970) *Graphes et hypergraphes*. Dunod Université.

Bessot, A. (1995) Le contrat didactique, un outil central pour l'analyse des situations d'enseignement. *Didactique des Disciplines Scientifiques et Formation des enseignants* : acte du 1er colloque régional des pays francophones du sud-est asiatique, 308-312. Maison d'édition de l'éducation. Hanoï.

Bishop, A (1999) Values in Mathematics Education: Making Values Teaching Explicit in the Mathematics Classroom. *Séminaire Didatech n°191*. Laboratoire Leibniz – IMAG. Grenoble.

Bonnel, J-F. (1871) *Essai sur les définitions géométriques*. Paris, Ch.Delagrave et Cie – Libraires-Editeurs.

Borel, E. (1948) La définition en mathématiques. In Le Lionnais, F., *Les grands courants de la pensée mathématique*. Albert Blanchard, Ed. 1962, 24-34, Paris.

Borasi, R. (1992) *Learning mathematics through inquiry*, Heinemann – Portsmouth, New Hampshire.

Bosch, M. & Gascon, J. (2001) Organiser l'étude – Théories et empiries. *Actes de la XIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 23-40. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

Bresenham, JE. (1965) Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Systems Journal*, 4(1), 25-30.

Brousseau, G. (1982) Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, n°45, 183-226. LSD2-IMAG. Grenoble.

Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, n° 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997) *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Chassery, JM. & Montanvert, A. (1991) *Géométrie discrète en analyse d'images*, Hermès, Paris.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage. Grenoble. 2ème édition (1991).

Chevallard, Y. (1989) Le concept de rapport au savoir : rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire Didatech*, n°108, 211-235.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 12-1, 73-112. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. In *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 313-320.

Couturat, L. (1905) *Les principes des mathématiques*. Félix Alcan, Paris.

Deloustal, V. (2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x*, n°55, 35-70. IREM de Grenoble.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2,* 248-255. Stellenbosch, RSA.

Dorier, JL. & Al (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La pensée Sauvage, Grenoble.

Dorst, L. & Smeulders, A.W.M (1984) Discrete representation of straight lines. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.* PAMI 6, 450-463.

Duchet, P. (1997) De la recherche à la formation : MATh.en.JEANS. *Actes de l'Université d'été Recherche mathématique et Formation (Dijon Juillet 1996)*, IREM de Bourgogne, 129-160.

Duchet, P. & Mainguené, J. (2003) Les apprentis-chercheurs de MATh.en.JEANS. *Actes Journées COPIRELEM*, 167-178. La Roche sur Yon, 17-19 Mai 2002. IREM des Pays de la Loire.

Durkheim, E. (1884) *Cours de philosophie fait au Lycée de sens*. Paris. Bibliothèque de la Sorbonne, Manuscrit 2351.

Fletcher, T.J. (1970) *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4ème Edition. OCDL. Paris

Foley, J.D. & Van Dam, A. (1982) *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison Wesley, USA.

Freeman, H (1970) Boundary encoding and processing. In B.S. Lipkin & A. Rosenfeld editors, *Picture Processing and Psychopictorics*, 241-266. New York Academic.

Frege, G. (1884) *Les fondements de l'arithmétique*. Paris, Editions du Seuil, Ed.1969.

Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.

Gérald, N. (1999) De la définition du trapèze, *Bulletin de l'APMEP, n°422*, 292-294.

Grenier, D. & Payan, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *RDM*, vol. 18-2, 59-100. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grenier, D & Payan, C. (2003) Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du Séminaire National de DDM*, édité par l'ARDM. Paris.

Gueudet-Chartier, G. (2000) *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Thèse, IMAG, Grenoble.

Harel, G. (1989a) Learning and teaching linear algebra : difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11, 139-148.

Harel, G. (1989b) Applying the principle of multiple embodiements in teaching linear algebra: Aspects of familiarity and mode of representation, *School Science and Mathematics* 89, 49-57.

Harel, G. (1990) Using geometric models and vector arithmetic to teach high school students basic notions in linear algebra, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology* 21, 387-392.

Harel, G. (1998) Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (Or Vice Versa), *The American Mathematical Monthly* 105, 497-507.

Hintikka, J. (1980) *La philosophie des mathématiques chez Kant.* PUF l'interrogation philosophique. Paris.

Hull, D. (1965) The Effect of Essentialism on Taxonomy - Two Thousand Years of Stasis, Part I. *British J. Phil. Sci.,* vol. 15(60), pp. 314-326.

Kahane, J-P. (1999) Quelques aspects des définitions mathématiques, *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, n°189, 10-14.

Kant, I. (1781-1787) Critique de la raison pure. In Kant, I. *Oeuvres philosophiques-VolII*. La Pléiade. Gallimard. Ed. 1980.

Knecht, H. (1981) *La logique chez Leibniz (essai sur la rationalisme baroque)*. Lausanne, Editions l'Age d'Homme.

Kuntzmann, J. (1976) Evolution et étude critique des enseignements de mathématique. Paris, CEDIC.

Lakatos, I. (1961) *Essays in the logic of mathematical discovery*, Thesis, Cambridge (University Library).

Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations*, Cambridge, CUP.

Lakatos, I. (1984) *Preuves et Réfutations*, trad. Balacheff&Laborde. Hermann, Paris.

Legrand, M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM* n°10. Topiques Editions.

Legrand, M. (1996) La problématique des situations fondamentales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°16-2, 221-279. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Liard, L. (1873) *Des définitions géométriques et des définitions empiriques.* Thèse publiée à La Librairie Philosophique de Ladrange. Paris.

MATh.en.JEANS (1994) Communication sur une grille. Collèges l'Ardillière de Nézant, Saint Brice sous Forêt et Condorcet, Pontault-Combault. *Actes MATh.en.JEANS*, 45-50. Ed. MATh.en.JEANS, Paris. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/94045050.pdf

MATh.en.JEANS (1995) Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? Collèges Condorcet (77340 Pontault-Combault) et Victor Hugo (93160 Noisy-le-Grand). *Actes MATh.en.JEANS*, 95-103. Ed. MATh.en.JEANS, Paris. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/95095103.pdf

MATh.en.JEANS (1997) Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? *Actes MATh.en.JEANS*, 175-176. Ed. MATh.en.JEANS, Paris. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175175.pdf http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175176.pdf (Présentation du sujet & fiche d'accompagnement pédagogique).

Mill, J.S (1889) Système de logique déductive et inductive. Félix Alcan. Paris.

Mill, J.S. (1973) *A Sytem of logic ratiocinative and inductive : being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation* . Books 1-3 / by John Stuart Mill ; ed. of the text J. M. Robson ; introd. by R. F. McRae.

Moore, R. (1994) Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Ogden, C. & Richard, I. (1923) *The Meaning of Meaning*. Routlegde. London.

Ouvrier-Buffet, C. (2000) *Le concept de définition : étude épistémologique et didactique*. Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Equipe CNAM. Grenoble.

Ouvrier-Buffet, C. (2001) Le concept de définition : étude épistémologique et didactique – *texte existant sous forme électronique dans les actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. Edition La Pensée Sauvage – Grenoble**.**

Ouvrier-Buffet, C. (2002) Zum Begriff der Definition - Eine epistemologisch-didaktische Untersuchung – In W. Peschek *"Beiträge zum Mathematikunterricht 2002",* 383-386 - Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin (ISBN 3-88124-334-6).

Ouvrier-Buffet, C. (2002) An activity for constructing a definition. In A. D Cockburn & E. Nardi (Eds), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4,* 25-32. University of East Anglia, UK.

Ouvrier-Buffet, C. (2003) Definition construction and concept formation – *CERME 3 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Bellaria, Italie (disponible sous forme électronique : http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft/TG3_draft/TG3_OuvrierBuffet_draft.pdf)

Ouvrier-Buffet, C. (2003) Outils théoriques pour l'analyse de situations de construction de définition - *Séminaire présenté à la XIIè Ecole d'été de Didactique des Mathématiques* (à paraître)

Ouvrier-Buffet, C. (2003) Can the Aristotelian and Lakatosian Conceptions constitute a tool for the analysis of a definition construction process ? [à paraître] *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* - Ed. A. Gagatsis – Cyprus.

Pascal, B. (1655/1659-1660) De l'Esprit Géométrique / L'Art de Persuader. In Pascal B., *Oeuvres completes-Vol2*. La Pléiade, Gallimard, Ed.1980.

Perrin-Glorian, M.J. (1998) Comment définir un trapèze isocèle ? *Bulletin de l'APMEP, n°419*, 709-711.

Pimm, D. (1993) Just a matter of definition, *Educational Studies in Mathematics*, 25, 261-277.

Poincaré, H. (1920) *Science et méthode*. Flammarion, Paris.

Poincaré, H. (1932) *La science et l'hypothèse*. Bibliothèque de Philosophie Scientifique. Flammarion. Paris.

Pólya, G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod. Paris.

Popper, K. (1945) *The Open Society and its Ennemies*, Routledge & Kegan Paul. London.

Popper, K. (1961) *The Logic of Scientific Discovery*, Basic Books. New York.

Popper, K. (1962) *La société ouverte et ses ennemies* (tome1-l'ascendant de Platon). Seuil, Ed.1979.

Popper, K. (1978) *La logique de la découverte scientifique*, Payot. Paris.

Popper, K. (1985) *Conjectures et réfutations – La croissance du savoir scientifique*. Trad. De Launay. Payot, Paris.

Popper, K. (1990) *Le réalisme et la science (post-scriptum à la logique de la découverte scientifique)*, Hermann. Paris.

Ramirez-Alphonsin, JL. (2002 soumis) The Diophantine Frobenius Problem, 190 p. (*preprint Laboratoire Combinatoire & Optimisation Discrète, CNRS & Université Paris 6*).

Reveillès, JP. (1991) *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Doctorat d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Robert, A. (1982) *L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur,* Thèse d'état, Université de Paris VII.

Robert, A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP, n°340*, 431-449.

Robinson, R. (1954) *Definition*, Oxford at the Clarendon Press.

Rogers, D.F. (1985) *Procedural elements for computer graphics*, McGraw-Hill Book Co – USA.

Rolland, J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. Thèse Université Joseph Fourier, Laboratoire Leibniz, Grenoble.

Rosenfeld, A (1974) Digital straight line segments. *IEEE Trans. on Computers*, C-23, 1264-1269.

Rudin, W (1953) *Principles of Mathematical Analysis*. Première Edition. McGraw-Hill. New-York.

Shir, K. & Zaslavsky, O. (2001) What constitutes a (good) definition? The case of a square. In proceedings of *25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4,* 161-168. Netherlands, Utrecht University.

Shir, K. & Zaslavsky, O. (2002) Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A. D Cockburn & E. Nardi (Eds), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4,* 201-208. University of East Anglia, UK.

Sober, E. (1980) Evolution, Population Thinking, and Essentialism. *Philosophy of Science,* vol. 47(3), pp. 350-383.

Tall, D. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html

Tarski, A. (1936) *Introduction à la logique*. Gauthier-Villars, Ed.1971. Paris.

Timmermans, B. (1995) *La résolution des problèmes de Descartes à Kant*. PUF, l'interrogation philosophique. Paris.

Turnau, S. (2000) Sur la définition d'un trapèze isocèle, *Bulletin de l'APMEP, n°426*, p.92.

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, n°10/2.3, 133-169.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980) Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley.

Vinner, S. (1991) The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dardrecht : Kluwer.

Vittone, J. (1999) *Caractérisation et reconnaissance de droites et de plans en géométrie discrète*. Thèse, Université Joseph Fourier. Grenoble

Vygostky, L.S (1997) *Pensée et langage*. Traduction de F.Sève. Paris, La Dispute.

Wittgenstein, L. (1961) *Tractatus logico-philosophicus*, Gallimard-Collection Idées.

Wu, L.D (1982) On the chaincode of a line. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.* PAMI 4, 347-353.

DICTIONNAIRES & ENCYCLOPEDIES

Bouvier A., George M., Le Lionnais F. (1979), *Dictionnaire des mathématiques*. Paris, PUF, 4ème édition (1993).

Diderot, D'Alembert (1787), L'ENCYCLOPEDIE Paris, ACL-éditions, Réédition du bicentenaire 1987.

Girodet J. (1976), *Logos – grand dictionnaire de la langue française*. Bordas. Ligugé.

Hutton, C. (1795) *Mathematical and Philosophical Dictionary (vol I)*. Hildesheim New York: G.Olms, 1973 (fac similé de l'édition de Londres : Robinson, 1795).

Encyclopedia Universalis (2002).

PROGRAMMES

Programmes de collège et lycée CNDP 1998.

BO n°10 (15 oct.98) hors série.

Programmes en vigueur en 1998.

BO n°20 (17/05/1990) ; BO spécial n°2 (2/05/1991) ; BO HS (24/09/1992) Tome II ; BO n°22 (24/06/1993) ; BO spécial n°7 (7/07/1994) ; BO HS n°4 (12/06/1997).

Programmes en vigueur en 2002.

MANUELS SCOLAIRES

Antibi, A., Barra, R. (1998 & 2002), ***Transmath*** *2^nde^, 1^ère^ S et Terminales S & ES*. Nathan.

Beltramone, JP., Felloneau, C., Galandrin, JP., Le Foulgocq, S., Misset, L., Talamoni, C. (2002) ***Déclic*** *Maths, Term S* – Hachette.

Carême, A., Chareyre, B. & Al (2002) *Collection* ***Math'x*** – *Term S* – Didier.

Deledicq, A., Lassave, C., Missenard, D. (1979), ***Faire des mathématiques*** *4^ème^*. CEDIC.

Deledicq, A., Lassave, C., Missenard, D. (1981 à 1984), ***Faire des mathématiques*** *6^ème^-5^ème^-4^ème^-3^ème^*. CEDIC.

Delord, C., Vinrich, G., Bourdais, M. (1995 à 1999), ***Cinq sur Cinq*** *6^ème^-5^ème^-4^ème^-3^ème^*. Hachette.

Malaval, J., Courbon, D., Tardy, C. (2002) *Math – Collection* ***Hyperbole*** *– Terminale ES* – Nathan.

Serra, E., D.Barberi, & Al (1998-1999), ***Math*** *4^ème^-3^ème^*. Bordas.

Terracher, P.H., Ferrachoglou, R. (1998 & 2002), *Collection* ***Terracher*** *1^ère^ S et Terminales S & ES*. Hachette.