Groupoïdes quantiques mesurés : axiomatique, étude, dualité, exemples

Franck LESIEUR

Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans

UMR 6628 - BP 6759

45067 ORLEANS CEDEX 2 - FRANCE

e-mail : franck.lesieur@labomath.univ-orleans.fr

web : http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/membres/lesieur

Introduction

- PARTIE I : Notations - Outils
- PARTIE II : Définitions - Théorie générale
- PARTIE III : Exemples

Introduction

- PARTIE I : Notations - Outils
- PARTIE II : Définitions - Théorie générale
- PARTIE III : Exemples

Introduction

- PARTIE I : Notations - Outils
- PARTIE II : Définitions - Théorie générale
- PARTIE III : Exemples

PARTIE I :

Notations - Outils

Théorie spatiale

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N,
α une *-représentation non dégénérée et normale de N sur H.

Théorie spatiale

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N, α une *-représentation non dégénérée et normale de N sur H.

- On définit les **éléments bornés de $_{\alpha}H$ par rapport à ν** :

$$D({}_{\alpha}H,\nu)=\{\xi\in H\,|\exists C,\ ||\alpha(y)\xi||\leq C||\Lambda_{\nu}(y)||,\forall y\in\mathcal{N}_{\nu}\}$$

Théorie spatiale

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N, α une *-représentation non dégénérée et normale de N sur H.

- On définit les **éléments bornés de $_{\alpha}H$ par rapport à ν** :

$$D(_{\alpha}H,\nu) = \{\xi \in H \,|\, \exists C,\ ||\alpha(y)\xi|| \leq C||\Lambda_{\nu}(y)||, \forall y \in \mathcal{N}_{\nu}\}$$

- Alors, pour tout $\xi \in D(_{\alpha}H,\nu)$, il existe un opérateur borné $R^{\alpha,\nu}(\xi) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(H_{\nu}, H)$ tel que, pour tout $n \in \mathcal{N}_{\nu}$, on a :

$$R^{\alpha,\nu}(\xi)\Lambda_{\nu}(n) = \alpha(n)\xi$$

Théorie spatiale

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N, α une *-représentation non dégénérée et normale de N sur H.

- On définit les **éléments bornés de $_{\alpha}H$ par rapport à ν** :

$$D(\,_{\alpha}H,\nu)=\{\xi \in H \,|\exists C,\ ||\alpha(y)\xi|| \leq C||\Lambda_{\nu}(y)||, \forall y \in \mathcal{N}_{\nu}\}$$

- Alors, pour tout $\xi \in D(\,_{\alpha}H,\nu)$, il existe un opérateur borné $R^{\alpha,\nu}(\xi) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(H_{\nu},H)$ tel que, pour tout $n \in \mathcal{N}_{\nu}$, on a :

$$R^{\alpha,\nu}(\xi)\Lambda_{\nu}(n) = \alpha(n)\xi$$

- On définit aussi, pour tous $\xi,\eta \in D(\,_{\alpha}H,\nu)$, l'opérateur :

$$<\xi,\eta>_{\alpha,\nu}= R^{\alpha,\nu}(\eta)^{*}R^{\alpha,\nu}(\xi) \in \pi_{\nu}(N)' \simeq N^{o}$$

Produit tensoriel relatif

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N

α (resp. β) une *-(resp. anti-)représentation non dégénérée et normale de N sur un espace de Hilbert H (resp. K).

Produit tensoriel relatif

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N
α (resp. β) une *-(resp. anti-)représentation non dégénérée et normale de N sur un espace de Hilbert H (resp. K).

- On définit l'espace de Hilbert $\mathbf{K} \; {}_{\beta}\!\underset{\nu}{\otimes}_{\alpha} \; \mathbf{H}$ comme le complété séparé du produit tensoriel algébrique $K \odot D({}_{\alpha}H, \nu)$ pour le produit scalaire :
$$(\xi \odot \eta | \xi' \odot \eta') = (\beta(< \eta, \eta' >_{\alpha,\nu})\xi | \xi')$$
pour tous $\xi, \xi' \in K$ et tous $\eta, \eta' \in D({}_{\alpha}H, \nu)$.

Produit tensoriel relatif

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N
α (resp. β) une *-(resp. anti-)représentation non dégénérée et normale de N sur un espace de Hilbert H (resp. K).

- On définit l'espace de Hilbert $\mathbf{K} \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \mathbf{H}$ comme le complété séparé du produit tensoriel algébrique $K \odot D({}_\alpha H, \nu)$ pour le produit scalaire :
$$(\xi \odot \eta | \xi' \odot \eta') = (\beta(< \eta, \eta' >_{\alpha,\nu})\xi | \xi')$$
pour tous $\xi, \xi' \in K$ et tous $\eta, \eta' \in D({}_\alpha H, \nu)$.

- On peut définir, de manière naturelle, un opérateur $x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} y$ pour tous $x \in \beta(N)'$ et $y \in \alpha(N)'$.

Produit fibré

- Si $\beta(N) \subset M_1 \subset \mathcal{L}(K)$ et $\alpha(N) \subset M_2 \subset \mathcal{L}(H)$, on définit le **produit fibré des algèbres de von Neumann M_1 par M_2 au-dessus de N** par :

$$M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M_2 = (M_1' \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} M_2')' \subset \mathcal{L}(K \underset{\nu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H)$$

- Si (P_1, β') et (P_2, α') satisfont des relations analogues et si Φ_1 et Φ_2 sont des *-homorphismes normaux tels que :

$$\Phi_1 : (M_1)_\beta \rightarrow (P_1)_{\beta'} \text{ et } \Phi_2 : {}_\alpha(M_2) \rightarrow {}_{\alpha'}(P_2)$$

alors on peut définir un *-homomorphisme normal :

$$\Phi_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Phi_2 : M_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M_2 \rightarrow P_1 \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} P_2$$

Unitaire pseudo-multiplicatif

N désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur N, α (resp. β, $\hat{\beta}$) une *-(resp. anti-) représentation non dégénérée et normale de N sur un espace de Hilbert H.

On suppose que $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ commutent 2 à 2.

Unitaire pseudo-multiplicatif

Un **unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de** N **pour** $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ est un opérateur $W : H \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} H \longrightarrow H \underset{\nu^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} H$ tel que :

Unitaire pseudo-multiplicatif

Un **unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de** N **pour** $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ est un opérateur $W : H \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} H \rightarrow H \underset{\nu^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} H$ tel que :

- W est un unitaire ;

Unitaire pseudo-multiplicatif

Un **unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$** est un opérateur $W : H \underset{\nu}{_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} H \to H \underset{\nu^o}{_{\alpha}\otimes_{\beta}} H$ tel que :

- W est un unitaire ;
- W vérifie, pour tous $n, n' \in N$, les relations de commutations suivantes :
  - ▷ $(\hat{\beta}(n) \underset{N^o}{_{\alpha}\otimes_{\beta}} \alpha(n'))W = W(\alpha(n') \underset{N}{_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \beta(n))$;
  - ▷ $(\beta(n) \underset{N^o}{_{\alpha}\otimes_{\beta}} \hat{\beta}(n'))W = W(\beta(n) \underset{N}{_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \hat{\beta}(n'))$;

Unitaire pseudo-multiplicatif

Un **unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$** est un opérateur $W : H \underset{\nu}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} H \rightarrow H \underset{\nu^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} H$ tel que :

- W est un unitaire ;
- W vérifie, pour tous $n, n' \in N$, les relations de commutations suivantes :
  - $(\hat{\beta}(n) \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} \alpha(n'))W = W(\alpha(n') \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \beta(n))$;
  - $(\beta(n) \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} \hat{\beta}(n'))W = W(\beta(n) \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \hat{\beta}(n'))$;
- Relation pentagonale : $\ll W_{12}W_{13}W_{23} = W_{23}W_{12} \gg$

Bimodule de Hopf

N, M désignent des algèbres de von Neumann,
α une *-représentation non dégénérée et normale de N dans M,
β une *-antireprésentation non dégénérée, normale de N dans M.

On suppose que α et β commutent 2 à 2.

On désigne par **bimodule de Hopf** tout quintuplet $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ où Γ désigne un *-homomorphisme de M dans $M \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} M$ injectif et normal tel que, pour tout $n \in N$, on a :

- $\Gamma(\alpha(n)) = \alpha(n) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1$ et $\Gamma(\beta(n)) = 1 \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} \beta(n)$;
- Γ satisfait la relation $(\Gamma \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma = (id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \Gamma) \circ \Gamma$.

POP invariant

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf.

POP invariant

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf.

- Un POP nsf T_L de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est **invariant à gauche** si :

$$(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} T_L)\Gamma(x) = T_L(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}_{T_L}^+$$

POP invariant

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf.

- Un POP nsf T_L de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est **invariant à gauche** si :

$$(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} T_L)\Gamma(x) = T_L(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}_{T_L}^+$$

- Un *-anti-automorphisme R de M est une **coinvolution** si :

$$R^2 = id, R \circ \alpha = \beta \text{ et } \varsigma_{N^o} \circ (R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R) \circ \Gamma = \Gamma \circ R$$

POP invariant

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf.

- Un POP nsf T_L de M^+ dans $\overline{\alpha(N)}^+$ est **invariant à gauche** si :

$$(id \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} T_L)\Gamma(x) = T_L(x) \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1 \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{M}_{T_L}^+$$

- Un *-anti-automorphisme R de M est une **coinvolution** si :

$$R^2 = id, R \circ \alpha = \beta \text{ et } \varsigma_{N^o} \circ (R \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} R) \circ \Gamma = \Gamma \circ R$$

Remarque — Si T_L est un POP nsf invariant à gauche et si R et une coinvolution de M, alors $R \circ T_L \circ R$ est un POP nsf invariant à droite.

PARTIE II :

Définitions - Théorie générale

Unitaire fondamental

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf,

T_L (resp. T_R) un POP nsf sur N invariant à gauche (resp. droite),

H un espace de Hilbert sur lequel M agit,

μ un poids nsf sur N.

On note $\Phi = \mu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$ et $\hat{\beta}(n) = J_\Phi \alpha(n^*) J_\Phi$ pour tout $n \in N$.

Unitaire fondamental

- Il existe un unique unitaire $U_H : H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} H_\Phi \rightarrow H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$

  tel que :

  $$U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} \Lambda_\Phi(a)) = \sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$$

  pour tous $v \in D(H_\beta, \mu^o)$, $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et toute (N^o, μ^o)-base $(\xi_i)_{i\in I}$ de H_β, et tel que :

  $$\Gamma(x) = U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat{\beta}}} x)U_H^* \quad \text{pour tout } x \in M$$

Unitaire fondamental

- Il existe un unique unitaire $U_H : H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\!\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi \longrightarrow H \underset{\mu}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} H_\Phi$

  tel que :

$$U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\!\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) = \sum_{i \in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\!\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$$

  pour tous $v \in D(H_\beta, \mu^o)$, $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et toute (N^o, μ^o)-base $(\xi_i)_{i \in I}$ de H_β, et tel que :

$$\Gamma(x) = U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\!\otimes_{\hat\beta}} x)U_H^* \quad \text{pour tout } x \in M$$

Unitaire fondamental

- Il existe un unique unitaire $U_H : H \;{}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\; H_\Phi \longrightarrow H \;{}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha\; H_\Phi$

  tel que :

$$U_H(v \;{}_\alpha\!\underset{\mu^o}{\otimes}_{\hat\beta}\; \Lambda_\Phi(a)) = \sum_{i\in I} \xi_i \;{}_\beta\!\underset{\mu}{\otimes}_\alpha\; \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \;{}_\beta\!\underset{\mu}{\star}_\alpha\; id)(\Gamma(a)))$$

  pour tous $v \in D(H_\beta, \mu^o)$, $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et toute (N^o, μ^o)-base $(\xi_i)_{i\in I}$ de H_β, et tel que :

$$\Gamma(x) = U_H(1 \;{}_\alpha\!\underset{N^o}{\otimes}_{\hat\beta}\; x)U_H^* \quad \text{pour tout } x \in M$$

Unitaire fondamental

- Il existe un unique unitaire $U_H : H \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} H_\Phi \longrightarrow H \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} H_\Phi$ tel que :

$$U_H(v \underset{\mu^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} \Lambda_\Phi(a)) = \sum_{i\in I} \xi_i \underset{\mu}{{}_\beta\otimes_\alpha} \Lambda_\Phi((\omega_{v,\xi_i} \underset{\mu}{{}_\beta\star_\alpha} id)(\Gamma(a)))$$

  pour tous $v \in D(H_\beta, \mu^o)$, $a \in \mathcal{N}_{T_L} \cap \mathcal{N}_\Phi$ et toute (N^o, μ^o)-base $(\xi_i)_{i\in I}$ de H_β, et tel que :

$$\Gamma(x) = U_H(1 \underset{N^o}{{}_\alpha\otimes_{\hat\beta}} x)U_H^* \quad \text{pour tout } x \in M$$

- $W = U_{H_\Phi}^*$ est un unitaire pseudomultiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \hat\beta, \beta \rightsquigarrow$ **unitaire fondamental**

Groupoïde quantique mesuré

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf,
T_L (resp. T_R) un POP nsf sur N invariant à gauche (resp. droite).

- T_L est **β-adapté** s'il existe un poids ν_L nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{T_L}(\beta(n)) = \beta(\sigma_{-t}^{\nu_L}(n))\text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

T_R est **α-adapté** s'il existe un poids ν_R nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{T_R}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^{\nu_R}(n))\text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Groupoïde quantique mesuré

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ désigne un bimodule de Hopf,
T_L (resp. T_R) un POP nsf sur N invariant à gauche (resp. droite).

- T_L est **β-adapté** s'il existe un poids ν_L nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{T_L}(\beta(n)) = \beta(\sigma_{-t}^{\nu_L}(n))\text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

  T_R est **α-adapté** s'il existe un poids ν_R nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{T_R}(\alpha(n)) = \alpha(\sigma_t^{\nu_R}(n))\text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Groupoïde quantique mesuré

- On appelle **groupoïde quantique mesuré** tout bimodule de Hopf $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ muni de :

  ▷ T_L (resp. T_R) POP nsf invariant à gauche (resp. droite) ;

  ▷ ν poids nsf sur N qui rend T_L β-adapté et T_R α-adapté.

$\rightsquigarrow$ On note $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$

$\rightsquigarrow$ ν : **poids quasi-invariant**

Groupoïde quantique mesuré

- On appelle **groupoïde quantique mesuré** tout bimodule de Hopf $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma)$ muni de :

  ▷ T_L (resp. T_R) POP nsf invariant à gauche (resp. droite) ;

  ▷ ν poids nsf sur N qui rend T_L β-adapté et T_R α-adapté.

  $\rightsquigarrow$ On note $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$

  $\rightsquigarrow$ ν : **poids quasi-invariant**

REMARQUE — Si T_L est β-adapté par rapport à ν et R est une coinvolution alors $R \circ T_L \circ R$ est α-adapté par rapport à ν

Antipode

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, W l'unitaire fondamental associé.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

Antipode

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, W : unitaire fondamental associé.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

- La fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(id * \omega_{v,w})(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o)$ est égale à M.

Antipode

Il existe une antipode non bornée S telle que :

- pour tous $v, w \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu) \cap D((H_\Phi)_{\hat{\beta}}, \nu^o)$, l'élément $(id * \omega_{v,w})(W) \in \mathcal{D}(S)$ et on a :

$$S((id * \omega_{v,w})(W)) = (id * \omega_{v,w})(W^*)$$

Antipode

Il existe une antipode non bornée S telle que :

- pour tous $v, w \in D({}_{\alpha}H_{\Phi}, \nu) \cap D((H_{\Phi})_{\hat{\beta}}, \nu^{o})$, l'élément $(id * \omega_{v,w})(W) \in \mathcal{D}(S)$ et on a :

$$S((id * \omega_{v,w})(W)) = (id * \omega_{v,w})(W^{*})$$

- $S(x)^{*} \in \mathcal{D}(S)$ et $S(S(x)^{*})^{*} = x$ pour tout $x \in \mathcal{D}(S)$;

Antipode

Il existe une antipode non bornée S telle que :

- $S = R \circ \tau_{i/2}$ est une décomposition polaire où τ est un groupe à un paramètre d'automorphismes qui vérifie :
  - ▷ $\tau_t \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_t^\nu$ et $\tau_t \circ \beta = \beta \circ \sigma_t^\nu$;
  - ▷ $\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t) \circ \Gamma$

  et R est une coinvolution qui commute avec τ ;

Antipode

Il existe une antipode non bornée S telle que :

- $S = R \circ \tau_{i/2}$ est une décomposition polaire où τ est un groupe à un paramètre d'automorphismes qui vérifie :

  ▷ $\tau_t \circ \alpha = \alpha \circ \sigma_t^\nu$ et $\tau_t \circ \beta = \beta \circ \sigma_t^\nu$;

  ▷ $\Gamma \circ \tau_t = (\tau_t \underset{N}{{}_\beta\star_\alpha} \tau_t) \circ \Gamma$

  et R est une coinvolution qui commute avec τ ;

- S, R et τ sont indépendants de T_L et T_R.

$\rightsquigarrow$ R : **antipode unitaire** et τ : **groupe d'échelle**

Module et opérateur d'échelle

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, R est l'antipode unitaire associée.

Module et opérateur d'échelle

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, R est l'antipode unitaire associée.

$\rightsquigarrow (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, R \circ T_L \circ R)$ est un groupoïde quantique mesuré. On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

Module et opérateur d'échelle

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, R est l'antipode unitaire associée.

$\rightsquigarrow (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, R \circ T_L \circ R)$ est un groupoïde quantique mesuré. On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

- Il existe δ strictement positif affilié à $M \cap \alpha(N)' \cap \beta(N)'$ et λ strictement positif affilié à $Z(M) \cap \alpha(N) \cap \beta(N)$ tels que :

$$[D\Phi \circ R : D\Phi]_t = \lambda^{\frac{it^2}{2}} \delta^{it} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow \delta$: **module** et λ : **opérateur d'échelle**

Module et opérateur d'échelle

- Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a :
  - $\triangleright$ $[D\Phi \circ \tau_s : D\Phi]_t = \lambda^{-ist}$
  - $\triangleright$ $[D\Phi \circ R \circ \tau_s : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$
  - $\triangleright$ $[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi \circ R} : D\Phi]_t = \lambda^{ist}$
  - $\triangleright$ $[D\Phi \circ R \circ \sigma_s^{\Phi} : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$

Module et opérateur d'échelle

- Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

  ▷ $[D\Phi \circ \tau_s : D\Phi]_t = \lambda^{-ist}$

  ▷ $[D\Phi \circ R \circ \tau_s : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$

  ▷ $[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi \circ R} : D\Phi]_t = \lambda^{ist}$

  ▷ $[D\Phi \circ R \circ \sigma_s^{\Phi} : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$

- $R(\lambda) = \lambda$, $R(\delta) = \delta^{-1}$, $\tau_t(\delta) = \delta$ et $\tau_t(\lambda) = \lambda$;

Module et opérateur d'échelle

- Pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a :

  $\triangleright$ $[D\Phi \circ \tau_s : D\Phi]_t = \lambda^{-ist}$

  $\triangleright$ $[D\Phi \circ R \circ \tau_s : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$

  $\triangleright$ $[D\Phi \circ \sigma_s^{\Phi \circ R} : D\Phi]_t = \lambda^{ist}$

  $\triangleright$ $[D\Phi \circ R \circ \sigma_s^{\Phi} : D\Phi \circ R]_t = \lambda^{-ist}$

- $R(\lambda) = \lambda$, $R(\delta) = \delta^{-1}$, $\tau_t(\delta) = \delta$ et $\tau_t(\lambda) = \lambda$;

- δ est un cocaractère i.e $\Gamma(\delta) = \delta \;\, {}_\beta\underset{N}{\otimes}{}_\alpha \; \delta$.

Unicité

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré,
On note $\Phi = \mu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

THÉORÈME — *Soit* $\widetilde{T_L}$ *un POP nsf de* M *vers* $\alpha(N)$ *invariant à gauche et* β*-adapté par rapport à* ν*. Alors, il existe* p *strictement positif affilié à* $Z(N)$ *tel que :*

$$[D\widetilde{T_L} : DT_L]_t = \beta(p)^{it} \textit{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Unicité

THÉORÈME — *Si* $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu', T'_L, T'_R)$ *désigne un groupoïde quantique mesuré et s'il existe* h *et* k *strictement positifs, affiliés à* N *et commutants fortement tels que :*

$$[D\nu' : D\nu]_t = k^{\frac{it^2}{2}} h^{it} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors les objets fondamentaux sont donnés, pour tout $t \in \mathbb{R}$*, par :*

$$R' = R, \tau'_t = Ad_{\alpha([D\nu':D\nu]^*_t)\beta([D\nu':D\nu]_t)} \circ \tau_t, \lambda' = \lambda \text{ et } \dot{\delta}' = \dot{\delta}$$

où $\dot{\delta}$ *désigne la classe d'équivalence de* δ *pour la relation* $\delta_1 \sim \delta_2$ *si, et seulement s'il existe* z *strictement positif affilié à* $Z(N)$ *tel que* $\delta_2^{it} = \beta(z)^{it}\delta_1^{it}\alpha(z)^{-it}$.

Structure duale

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, W l'unitaire fondamental et R l'antipode unitaire associés.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

Structure duale

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, W l'unitaire fondamental et R l'antipode unitaire associés.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

Hypothèse supplémentaire de densité :

$$D(H_\beta, \nu^o) \cap J_\Phi \Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}) \text{ est dense dans } H$$

Structure duale

$(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ désigne un groupoïde quantique mesuré, W l'unitaire fondamental et R l'antipode unitaire associés.

On note $\Phi = \nu \circ \alpha^{-1} \circ T_L$.

Hypothèse supplémentaire de densité :

$$D(H_\beta, \nu^o) \cap J_\Phi \Lambda_\Phi(\mathcal{N}_\Phi \cap \mathcal{N}_{T_L}) \text{ est dense dans } H$$

REMARQUE — Cette hypothèse est vérifiée dans le cas où la base est semifinie.

Structure duale

- la base = N ;

Structure duale

- la base = N ;
- $\hat{M}$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$;

Structure duale

- la base = N ;
- $\hat{M}$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$;
- la représentation = α et l'antireprésentation = $\hat{\beta}$;

Structure duale

- la base = N ;
- $\hat{M}$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$;
- la représentation = α et l'antireprésentation = $\hat{\beta}$;
- $\hat{\Gamma}(x) = \sigma_{\nu^o} W (x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_\nu$ pour tout $x \in \hat{M}$;

Structure duale

- la base = N ;
- $\hat{M}$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$;
- la représentation = α et l'antireprésentation = $\hat{\beta}$;
- $\hat{\Gamma}(x) = \sigma_{\nu^o} W(x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_\nu$ pour tout $x \in \hat{M}$;
- $\hat{R}(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$ pour tout $x \in \hat{M}$;

Structure duale

- la base = N ;
- $\hat{M}$ désigne la fermeture faible de l'espace vectoriel engendré par les opérateurs $(\omega_{v,w} * id)(W)$ pour tout $v \in D({}_\alpha H_\Phi, \nu)$ et tout $w \in D((H_\Phi)_\beta, \nu^o)$;
- la représentation = α et l'antireprésentation = $\hat{\beta}$;
- $\hat{\Gamma}(x) = \sigma_{\nu^o} W(x \underset{N}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1) W^* \sigma_\nu$ pour tout $x \in \hat{M}$;
- $\hat{R}(x) = J_\Phi x^* J_\Phi$ pour tout $x \in \hat{M}$;
- il existe $\widehat{T_L}$ POP nsf de $\hat{M}$ vers $\alpha(N)$ invariant à gauche et $\hat{\beta}$-anti-adapté par rapport à ν dans le sens suivant :

Structure duale

DÉFINITION — On dit qu'un POP nsf $\widehat{T_L}$ de $\hat{M}$ vers $\alpha(N)$ est $\hat{\beta}$**-anti-adapté** s'il existe ν poids nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{\widehat{T_L}}(\hat{\beta}(n)) = \hat{\beta}(\sigma_t^{\nu}(n)) \quad \text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Structure duale

DÉFINITION — On dit qu'un POP nsf $\widehat{T_L}$ de $\hat{M}$ vers $\alpha(N)$ est **$\hat{\beta}$-anti-adapté** s'il existe ν poids nsf sur N tel que :

$$\sigma_t^{\widehat{T_L}}(\hat{\beta}(n)) = \hat{\beta}(\sigma_t^{\nu}(n)) \quad \text{pour tous } n \in N \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

THÉORÈME — *La structure duale est un groupoïde quantique mesuré si, et seulement si la base est semifinie. Dans ce cas, le groupoïde quantique mesuré et la structure biduale coïncident.*

PARTIE III :

Exemples

Groupoïdes

(G, G^0, s, r) désigne un groupoïde localement compact et σ-compact. On suppose que :

- G est muni d'un système de Haar $\{\lambda^u, u \in G^0\}$,
- G^0 est muni d'une mesure quasi-invariante ν.

On note $\mu = \nu \circ \lambda$ et L la représentation régulière gauche.

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\Gamma_G : L^\infty(G, \mu) \to L^\infty(G^2, \mu^2)$ tel que $\Gamma_G(f)(x, y) = f(xy)$;

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\Gamma_G : L^\infty(G, \mu) \longrightarrow L^\infty(G^2, \mu^2)$ tel que $\Gamma_G(f)(x, y) = f(xy)$;
- $j_G f(x) = f(x^{-1})$;

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\Gamma_G : L^\infty(G, \mu) \to L^\infty(G^2, \mu^2)$ tel que $\Gamma_G(f)(x, y) = f(xy)$;
- $j_G f(x) = f(x^{-1})$;
- $P_G f(y) = \int_G f(x)\, d\lambda^{r(y)}(x)$

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\Gamma_G : L^\infty(G, \mu) \to L^\infty(G^2, \mu^2)$ tel que $\Gamma_G(f)(x, y) = f(xy)$;
- $j_G f(x) = f(x^{-1})$;
- $P_G f(y) = \int_G f(x)\, d\lambda^{r(y)}(x)$

$\rightsquigarrow (L^\infty(G^0, \nu), L^\infty(G, \mu), \alpha, \beta, \Gamma_G, \nu, P_G, j_G \circ P_G \circ j_G)$
groupoïde quantique mesuré commutatif

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\widehat{\Gamma_G}(L(g))\xi(x,y) = \int_G g(s)\xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\, d\lambda^{r(x)}(s)$;

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\widehat{\Gamma_G}(L(g))\xi(x,y) = \int_G g(s)\xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\, d\lambda^{r(x)}(s)$;
- $\widehat{P_G}(L(f)) = \alpha(f|_{G^0})$

Groupoïdes

- $\alpha : f \mapsto f \circ r$ et $\beta : f \mapsto f \circ s$ de $L^\infty(G^0, \nu)$ dans $L^\infty(G, \mu)$;
- $\widehat{\Gamma_G}(L(g))\xi(x, y) = \int_G g(s)\xi(s^{-1}x, s^{-1}y)\, d\lambda^{r(x)}(s)$;
- $\widehat{P_G}(L(f)) = \alpha(f|_{G^0})$

$\rightsquigarrow (L^\infty(G^0, \nu), \mathcal{L}(G), \alpha, \alpha, \widehat{\Gamma_G}, \nu, \widehat{P_G}, \widehat{P_G})$
groupoïde quantique mesuré symétrique

Groupes quantiques

THÉORÈME — *Les groupoïdes quantiques mesurés dont la base* N *est égale à* $\mathbb{C}$ *sont exactement les groupes quantiques localement compacts (dans le cadre des algèbres de von Neumann) introduits par J. Kustermans et S. Vaes. La dualité obtenue dans ce travail généralise la dualité des groupes quantiques.*

Dimension finie

$(M, \Gamma, \kappa, \varepsilon)$ désigne une C*-algèbre de Hopf faible,
h la mesure de Haar et ε_t l'application but,
E_h^s et E_h^t les esp. cond. de Haar source et but.
On note $N = \varepsilon_t(M)$ la sous algèbre de Cartan but.

Dimension finie

$(M, \Gamma, \kappa, \varepsilon)$ désigne une C*-algèbre de Hopf faible,
h la mesure de Haar et ε_t l'application but,
E_h^s et E_h^t les esp. cond. de Haar source et but.
On note $N = \varepsilon_t(M)$ la sous algèbre de Cartan but.

On suppose que $\kappa^2_{|N} = id$.

Dimension finie

- $(N, M, id_{|N}, \kappa_{|N}, \Gamma, h \circ \alpha, E_h^t, E_h^s)$ est un groupoïde quantique mesuré.

Dimension finie

- $(N, M, id_{|N}, \kappa_{|N}, \Gamma, h \circ \alpha, E_h^t, E_h^s)$ est un groupoïde quantique mesuré.
- Réciproquement, tout groupoïde quantique mesuré de dimension finie est une C*-algèbre de Hopf faible.

  $\rightsquigarrow$ On utilise la théorie des isométries partielles multiplicatives de J.M Vallin.

Cas compact

W est un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ de type compact et faiblement régulier, ν la forme canonique et ξ un vecteur fixe et binormalisé.

Cas compact

W est un unitaire pseudo-multiplicatif au-dessus de N pour $\alpha, \beta, \hat{\beta}$ de type compact et faiblement régulier, ν la forme canonique et ξ un vecteur fixe et binormalisé.

On désigne par :

- $\mathcal{A}$ l'algèbre de von Neumann engendré par la jambe droite de W;
- $\Gamma(x) = \sigma_{\nu^o} W(x \underset{\nu^o}{{}_\alpha\otimes_\beta} 1) W^* \sigma_\nu$ pour tout $x \in \mathcal{A}$;
- $E = (\omega_\xi \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} id) \circ \Gamma$ et $F = (id \underset{\nu}{{}_\beta\star_\alpha} \omega_\xi) \circ \Gamma$.

Cas compact

- $(N, \mathcal{A}, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré.
  $\rightsquigarrow F = R \circ E \circ R$,
  $\rightsquigarrow \lambda = \delta = 1$,
  $\rightsquigarrow \hat{W}$: unitaire fondamental associé.

Cas compact

- $(N, \mathcal{A}, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, E, F)$ est un groupoïde quantique mesuré.
  $\rightsquigarrow F = R \circ E \circ R$,
  $\rightsquigarrow \lambda = \delta = 1$,
  $\rightsquigarrow \hat{W}$: unitaire fondamental associé.

- Réciproquement, si $(N, M, \alpha, \beta, \Gamma, \nu, T_L, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré, tel que T_L est une espérance conditionnelle, alors :

  ▷ $\exists\ \nu'$ état normal et fidèle sur N tel que $\sigma^{\nu'} = \sigma^{\nu}$

  ▷ l'unitaire fondamental est de type discret.

Inclusion de profondeur 2

$M_0 \subseteq M_1$ désigne une inclusion d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 munie d'un POP nsf T_1 de M_1 vers M_0.

Inclusion de profondeur 2

$M_0 \subseteq M_1$ désigne une inclusion d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 munie d'un POP nsf T_1 de M_1 vers M_0.

$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq$ ... est la tour de Jones associée qui est munie canoniquement de POP nsf T_i de M_i vers M_{i-1} pour tout $i \geq 1$.

Inclusion de profondeur 2

$M_0 \subseteq M_1$ désigne une inclusion d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 munie d'un POP nsf T_1 de M_1 vers M_0.

$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ est la tour de Jones associée qui est munie canoniquement de POP nsf T_i de M_i vers M_{i-1} pour tout $i \geq 1$.

On suppose que :

- $T_{2|M_0' \cap M_2}$ et $T_{3|M_1' \cap M_3}$ sont semifinis,
- M_0, M_1 et $M_0' \cap M_1$ sont semifinies.

Inclusion de profondeur 2

$M_0 \subseteq M_1$ désigne une inclusion d'algèbres de von Neumann de profondeur 2 munie d'un POP nsf T_1 de M_1 vers M_0.

$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ est la tour de Jones associée qui est munie canoniquement de POP nsf T_i de M_i vers M_{i-1} pour tout $i \geq 1$.

On suppose que :

- $T_{2|M_0' \cap M_2}$ et $T_{3|M_1' \cap M_3}$ sont semifinis,
- M_0, M_1 et $M_0' \cap M_1$ sont semifinies.

On peut munir alors $M_0' \cap M_2$ et $M_1' \cap M_3$ de structures de groupoïdes quantiques mesurés en dualité dont la base est $M_0' \cap M_1$.

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \longrightarrow M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \to M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \to M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\bigotimes_\alpha} M$ qui à x associe $1 \underset{Z(M)}{{}_\beta\bigotimes_\alpha} x$,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \to M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \to M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $1 \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} x$,

$\beta : M \to M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $j(x) \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1$,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \longrightarrow M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $1 \underset{Z(M)}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} x$,

$\beta : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $j(x) \underset{Z(M)}{{}_\beta\!\otimes_\alpha} 1$,

τ une trace nsf sur $Z(M)$,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \longrightarrow M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $1 \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} x$,

$\beta : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $j(x) \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1$,

τ une trace nsf sur $Z(M)$,

T un POP nsf de M vers $Z(M)$ tel que $\nu = \tau \circ T$,

GQM espace

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann et ν un poids nsf sur M,

$j : M \longrightarrow M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $1 \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} x$,

$\beta : M \longrightarrow M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M$ qui à x associe $j(x) \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} 1$,

τ une trace nsf sur $Z(M)$,

T un POP nsf de M vers $Z(M)$ tel que $\nu = \tau \circ T$,

$T_R = id \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} T$ et $R = \varsigma_{Z(M)} \circ (j \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} j)$

GQM espace

- $(M, M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M, \alpha, \beta, id, \nu, R \circ T_R \circ R, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré.

  $\leadsto$ R : antipode unitaire,

  $\leadsto$ $\sigma^{\nu'}_{-t} \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma^{\nu}_t$: groupe d'échelle,

  $\leadsto$ $\lambda = \delta = 1$

GQM espace

- $(M, M' \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} M, \alpha, \beta, id, \nu, R \circ T_R \circ R, T_R)$ est un groupoïde quantique mesuré.

  $\rightsquigarrow R$: antipode unitaire,
  $\rightsquigarrow \sigma^{\nu'}_{-t} \underset{Z(M)}{{}_\beta\otimes_\alpha} \sigma^{\nu}_{t}$: groupe d'échelle,
  $\rightsquigarrow \lambda = \delta = 1$

- $(M, Z(M)', id, j, id, \nu, j \circ T^{-1} \circ j, T^{-1})$ désigne l'objet dual.

GQM des paires

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann,

GQM des paires

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann,

ν un poids nsf sur M et $H = L^2(M)$

GQM des paires

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann,

ν un poids nsf sur M et $H = L^2(M)$

$j : M \longrightarrow M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

GQM des paires

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann,

ν un poids nsf sur M et $H = L^2(M)$

$j : M \to M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \to M' \otimes M$ qui à x associe $1 \otimes x$,

GQM des paires

$M \subset \mathcal{L}(L^2(M))$ désigne une algèbre de von Neumann,

ν un poids nsf sur M et $H = L^2(M)$

$j : M \to M'$ qui à x associe $J_\nu x^* J_\nu$,

$\alpha : M \to M' \otimes M$ qui à x associe $1 \otimes x$,

$\beta : M \to M \otimes M$ qui à x associe $j(x) \otimes 1$

GQM des paires

- $(M, M' \otimes M, \alpha, \beta, id, \nu, \nu' \otimes id, id \otimes \nu)$ est un groupoïde quantique mesuré.

  $\rightsquigarrow$ $R = \varsigma \circ (j \otimes j)$: antipode unitaire,
  $\rightsquigarrow$ $\sigma^{\nu'}_{-t} \otimes \sigma^{\nu}_{t}$: groupe d'échelle,
  $\rightsquigarrow$ $\lambda = \delta = 1$

GQM des paires

- $(M, M' \otimes M, \alpha, \beta, id, \nu, \nu' \otimes id, id \otimes \nu)$ est un groupoïde quantique mesuré.

  $\rightsquigarrow R = \varsigma \circ (j \otimes j)$: antipode unitaire,
  $\rightsquigarrow \sigma^{\nu'}_{-t} \otimes \sigma^{\nu}_{t}$: groupe d'échelle,
  $\rightsquigarrow \lambda = \delta = 1$

- $(M, \mathcal{L}(H), id, j, id, \nu, j \circ \nu^{-1} \circ j, \nu^{-1})$ désigne l'objet dual.

Opérations

- $((N_i, M_i, \alpha_i, \beta_i, \Gamma_i, \nu_i, T_L^i, T_R^i))_{i\in I}$ désigne une famille de groupoïdes quantiques mesurés.

$$(\bigoplus_{i\in I} N_i, \bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{i\in I} \alpha_i, \bigoplus_{i\in I} \beta_i, \ldots$$

$$\ldots, \bigoplus_{i\in I} \Gamma_i, \bigoplus_{i\in I} \nu_i, \bigoplus_{i\in I} T_L^i, \bigoplus_{i\in I} T_R^i)$$

devient un groupoïde quantique mesuré.
$\rightsquigarrow$ une somme de groupes quantiques localement compacts, avec différents scalaires d'échelle, produit un groupoïde quantique mesuré avec un opérateur d'échelle non scalaire.

Opérations

- Pour $i = 1, 2$, $(N_i, M_i, \alpha_i, \beta_i, \Gamma_i, \nu_i, T_L^i, T_R^i)$ désignent des groupoïdes quantiques mesurés.

$$(N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2, \ldots$$

$$\ldots, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \nu_1 \otimes \nu_2, T_L^1 \otimes T_L^2, T_R^1 \otimes T_R^2)$$

devient un groupoïde quantique mesuré.

Opérations

- Pour $i = 1, 2$, $(N_i, M_i, \alpha_i, \beta_i, \Gamma_i, \nu_i, T_L^i, T_R^i)$ désignent des groupoïdes quantiques mesurés.

$$(N_1 \otimes N_2, M_1 \otimes M_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2, \ldots$$

$$\ldots, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \nu_1 \otimes \nu_2, T_L^1 \otimes T_L^2, T_R^1 \otimes T_R^2)$$

devient un groupoïde quantique mesuré.

- Intégrale directe de groupoïdes quantiques mesurés.

Références

- G. Böhm, F. Nill & K. Szlachányi : *Weak Hopf algebras I. Integral theory and C*-structure*, J. Algebra, **221** (1999), 385-438 ;
- S. Baaj & G. Skandalis : *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres*, Ann. Sci. ENS, 26 (1993), 425-488 ;
- A. Connes : *Non Commutative Geometry*, Academic Press, 1994 ;
- M. Enock : *Inclusions of von Neumann algebras and quantum groupoïds II*, J. Funct. Analysis, 178 (2000), 156-225 ;
- M. Enock : *Quantum groupoids of compact type*, à paraître au Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu ;
- M. Enock & J.M. Vallin : *Inclusions of von Neumann algebras and quantum groupoids*, J. Funct. Analysis, **172** (2000), 249-300 ;
- J. Kustermans & S.Vaes : *Locally compact quantum groups*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **33**(6) (2000), 837-934 ;
- J. Kustermans & S.Vaes : *Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting*,Math. Scandinava, **92**(1)(2003), 68-92 ;
- D. Nikshych & L. Vainerman : *Algebraic versions of a finite dimensional quantum groupoid*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **209** (2000), 189-221 ;
- J.M Vallin : *Bimodules de Hopf et Poids opératoriels de Haar*, J. Operator theory, 35 (1996), 39-65 ;
- J.M Vallin : *Unitaire pseudo-multiplicatif associé à un groupoïde, applications à la moyennabilité*, J. Operator theory **44** (2000), 347-368 ;
- J.M Vallin : *Groupoïdes quantiques finis*, J. Alg. **239** (2001), 215-261 ;
- J.M Vallin : *Multiplicative partial isometries ans finite quantum groupoids*, Proceedings of the Meeting of Theorical Physicists and Mathematicians, Strasbourg, 2002, IRMA Lectures in Mathematics and Theorical Physics (2) 189-227.