



HAL
open science

Diffusion, étirement et intermittence dans le transport turbulent

Dario Vincenzi

► **To cite this version:**

Dario Vincenzi. Diffusion, étirement et intermittence dans le transport turbulent. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Nice Sophia Antipolis, 2003. Français. NNT : . tel-00005476

HAL Id: tel-00005476

<https://theses.hal.science/tel-00005476>

Submitted on 27 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES
de l’Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Physique

par

Dario Vincenzi

DIFFUSION, ETIREMENT ET INTERMITTENCE
DANS LE TRANSPORT TURBULENT

Soutenue publiquement le 11 décembre 2003 devant le jury composé de :

Y. Brenier	<i>Président</i>
M. Vergassola	<i>Directeur</i>
R. Benzi	<i>Rapporteur</i>
Y. Gagne	<i>Rapporteur</i>
U. Frisch	<i>Examineur</i>
A. Pumir	<i>Examineur</i>
A. Celani	<i>Invité</i>

Observatoire de la Côte d’Azur

Remerciements

Je tiens à remercier en premier Antonio Celani. Au cours de ces trois années, il m'a initié à l'étude de la turbulence et il m'a conseillé durant mes premières expériences de recherche, toujours avec cette disponibilité exceptionnelle qui lui appartient.

Je remercie mon directeur de thèse, Massimo Vergassola, pour ses conseils et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude aux rapporteurs de ma thèse, Roberto Benzi et Yves Gagne, ainsi qu'aux autres membres du jury, Yann Brenier, Uriel Frisch et Alain Pumir.

Je suis très reconnaissant à Hélène Frisch, directrice du Laboratoire « G. D. Cassini », pour avoir suivi avec intérêt mes études de doctorat et pour la gentillesse avec laquelle elle m'a accueilli.

Après avoir été responsables de ma « thèse de Laurea » en Italie, Roberto Festa et Andrea Mazzino m'ont offert la possibilité de continuer à collaborer avec eux durant mon doctorat et ont toujours suivi avec beaucoup d'intérêt le déroulement de mes recherches. Je les en remercie chaleureusement.

Tout au long de ces trois années de thèse, j'ai beaucoup apprécié l'atmosphère que j'ai trouvée à l'Observatoire. J'exprime ma gratitude à tous ceux qui ont contribué à rendre mon séjour aussi agréable. Merci à Hervé Bourdin, à Chiara Ferrari, et à tous les autres étudiants de l'Observatoire. Je remercie mes collègues de bureau, Lionel Bigot, Massimo Cencini, Alessandra Lanotte, Paolo Tanga. Je suis reconnaissant à Françoise Cassi, Tristan Guillot, Dimitri Laveder, Alain Noullez, Janine Provost, Catherine Renaud et aux autres membres du Laboratoire « G.D. Cassini ».

Je tiens ensuite à remercier Isabelle De Angelis, Victoria Pellegrini et Rose Hollande pour m'avoir toujours aidé avec patience dans les différentes démarches administratives. J'exprime ma gratitude à Catherine L'Hostis et Sylvie Vaquie, responsables de la Bibliothèque, qui ont toujours répondu avec gentillesse à mes demandes.

Merci également à tous ceux qui m'ont soutenu pendant les derniers mois de préparation de la thèse : Jérémie Bec, ma soeur Caterina, Agnese et Lorenzo, qui m'ont, une fois de plus, apporté les preuves de leur amitié.

Je termine en remerciant affectueusement mes parents, ma grand-mère, mon cousin, mes oncles et toute ma famille.

Table des matières

Introduction générale	1
I Du système de Lorenz à la diffusion déterministe	5
1 Introduction	7
2 Dynamique chaotique du système de Lorenz	13
Article : <i>An analytical approach to chaos in Lorenz-like systems. A class of dynamical equations</i>	15
Article : <i>Lorenz-like systems and classical dynamical equations with memory forcing : An alternate point of view for singling out the origin of chaos</i> .	23
3 Un modèle de diffusion déterministe	39
Article : <i>Lorenz deterministic diffusion</i>	41
II Transport passif en turbulence	49
1 Scalaire passif	51
1.1 Introduction	51
1.2 Anomalie d'échelle et techniques lagrangiennes	52
1.2.1 Intermittence à petite échelle	52
1.2.2 Le modèle de Kraichnan	53
1.2.3 Formalisme lagrangien	54
1.3 Intermittence à grande échelle	56
1.4 Conclusions et perspectives	60
Article : <i>Intermittency in passive scalar decay</i>	63
2 Dynamo magnétique	71
2.1 Introduction	71
2.2 Equation d'induction magnétique et dynamo cinématique	72
2.3 La dynamo de Kraichnan-Kazantsev	75
2.3.1 Fonction de structure du champ de vitesse	77
2.3.2 Intervalle inertiel	78
2.3.3 Nombre de Reynolds magnétique critique	80
2.3.4 Effet de la viscosité	81
Article : <i>The Kraichnan-Kazantsev Dynamo</i>	82

3 Polymères	103
3.1 Introduction	103
3.2 Le modèle de type « haltère »	104
3.3 Equation de Fokker-Planck	106
3.4 Solution stationnaire	108
3.5 Densité de probabilité dépendante du temps	110
3.5.1 Spectre discret	112
3.5.2 Branche continue	113
3.6 Moments de la densité de probabilité	115
Bibliographie	117

Introduction générale

Cette thèse est divisée en deux parties. La première est consacrée au chaos déterministe et la deuxième porte sur le transport turbulent passif.

Les citations par des numéros entre crochets renvoient à la bibliographie générale de la fin de la thèse. Les lettres entre crochets renvoient à ma liste des publications située à la fin de cette introduction.

Première partie : Du système de Lorenz à la diffusion déterministe

Les travaux sur ce sujet sont motivés par la volonté de mieux comprendre la dynamique des systèmes chaotiques et plus particulièrement la diffusion déterministe. Je me suis intéressé au bien connu système de Lorenz [1] dans le cadre duquel de nombreux résultats sur les systèmes dynamiques ont été obtenus.

L'évolution temporelle du système de Lorenz peut être interprétée comme le mouvement oscillatoire d'une particule classique dans un potentiel bistable [2]. En présence de friction, la dynamique est soutenue par un effet de « mémoire » sur l'évolution passée. Me basant sur cette interprétation, j'ai proposé de remplacer le potentiel original par un potentiel de forme plus simple conduisant à une version linéarisée par morceaux du système de Lorenz. J'ai alors effectué une analyse systématique de ce modèle qui m'a permis d'obtenir des résultats exacts. J'ai montré que le comportement chaotique vient dans ce cas du caractère discontinu des solutions d'une équation transcendente. De plus, le système linéarisé peut être lui même approché par une application unidimensionnelle chaotique dont j'ai étudié la dynamique. J'ai enfin comparé ces résultats avec des simulations numériques pour le système de Lorenz original. La similitude entre les deux systèmes m'a permis d'interpréter de manière précise le comportement chaotique du modèle de Lorenz et de généraliser les résultats obtenus à une classe plus vaste de systèmes dynamiques. Ces travaux ont fait l'objet d'une publication courte [A] et d'un article plus détaillé [B], tous deux en collaboration avec R. Festa et A. Mazzino.

Toujours dans le contexte de la théorie du chaos, je me suis ensuite intéressé à la diffusion déterministe. Il existe plusieurs exemples d'applications chaotiques qui peuvent engendrer des comportements macroscopiques du type diffusion normale. Comme la trajectoire est déterministe, ceci est une conséquence d'une dynamique microscopique chaotique et non pas d'un forçage aléatoire. J'ai ainsi appliqué mes travaux sur le système de Lorenz à la diffusion déterministe : lorsque le « potentiel de Lorenz » est remplacé par un réseau périodique, la trajectoire n'est plus confinée en espace, mais diffuse le long des cellules du réseau. J'ai ainsi obtenu un modèle continu de diffusion déterministe dont les propriétés ont été décrites dans un article publié en collaboration avec R. Festa et A. Mazzino [C].

Deuxième partie : Transport passif en turbulence

Pendant les quinze dernières années, le problème du transport passif a représenté un banc d'essais pour l'étude théorique de la turbulence hydrodynamique. Par exemple, la présence de lois d'échelle anormales a été expliquée en détail aussi bien pour le champ scalaire que pour le champ magnétique dans le cas de l'ensemble de Kraichnan [6]. Dans ce modèle l'écoulement est un champ aléatoire delta-corrélé en temps et autosimilaire en espace. Le transport passif est généralement moins difficile à traiter que la turbulence de Navier-Stokes puisqu'il s'agit d'un problème linéaire. Cette partie se compose de trois chapitres, chacun consacré à un exemple de transport passif : le scalaire, le champ magnétique et les polymères. Bien que ces problèmes se réfèrent à des phénomènes physiques très différents, ils sont tous trois décrits par une théorie très générale et ont plusieurs propriétés communes. L'évolution temporelle de chacune de ces trois quantités peut être reformulée en termes lagrangiens, c'est-à-dire suivant les trajectoires aléatoires des particules de fluide.

Le cas le plus simple de transport passif est celui d'un champ scalaire, comme par exemple la température ou la concentration d'un colorant. Je me suis intéressé au déclin du scalaire dans un écoulement turbulent incompressible. Chaves *et al.* [3] ont récemment montré que les propriétés statistiques asymptotiques d'un champ scalaire en déclin dans un écoulement turbulent sont universelles par rapport à la condition initiale. A partir de ce résultat, j'ai montré avec A. Celani que dans un écoulement autosimilaire, les queues de la densité de probabilité du scalaire décroissent plus lentement qu'une gaussienne [D]. Les grandes fluctuations ont par conséquent une fréquence beaucoup plus élevée que pour une distribution normale. Nous avons proposé une interprétation lagrangienne de cette propriété : les événements où deux particules de fluide restent proches durant leur évolution sont très probables. Ce résultat est lui aussi universel par rapport à la statistique de la condition initiale.

En revanche, il n'existe pas encore de prédiction générale dans le cas du régime forcé. Des résultats expérimentaux et numériques suggèrent qu'il n'y a pas d'universalité aussi forte qu'en déclin [4, 5].

La question de la dynamo magnétique s'inscrit dans le cas où la quantité transportée passivement est un champ vectoriel. Un champ magnétique advecté par un écoulement non homogène est amplifié par les gradients de vitesse et dissipé par la résistivité du fluide. Le but de la théorie de la dynamo cinématique est de prédire sous quelles conditions l'écoulement est en mesure de contrebalancer la dissipation ohmique et d'engendrer la croissance temporelle d'un faible champ magnétique initial. Lorsque le champ de vitesse est défini par le modèle de Kraichnan, ce problème peut être traité de façon semi-analytique. En 1967, Kazantsev [7] a réduit l'étude de la croissance des champs magnétiques dans un écoulement de Kraichnan à un problème de mécanique quantique. Il y a effet dynamo si un potentiel quantique, dont les propriétés sont définies par l'écoulement, admet des états liés. A partir de cette analogie, j'ai étudié l'influence des propriétés d'échelle du champ de vitesse sur le taux de croissance magnétique. Plus précisément, j'ai analysé comment la viscosité du fluide et l'échelle intégrale de l'écoulement affectent la taille des structures magnétiques et le temps typique de l'effet dynamo. Ces résultats, appuyés par des calculs numériques variationnels, ont fait l'objet d'une publication [E].

Il est important de remarquer que le modèle de Kraichnan-Kazantsev ne concerne que la croissance de la corrélation du champ magnétique en deux points distincts. Il serait intéressant d'étendre cette approche dans le but d'obtenir les corrélations à plusieurs

points et notamment leur évolution temporelle.

Je me suis finalement intéressé au transport passif de polymères. Ces chaînes très longues de molécules simples prennent généralement à l'équilibre une forme sphérique. Toutefois, en présence d'un écoulement non homogène, elles peuvent être étirées par les gradients de vitesse et atteindre des longueurs très grandes devant leur dimension de repos. On parle à ce propos de transition « enroulé/étiré » (coil/stretch) [8]. Dans l'un des modèles les plus simples de polymères, le modèle de type « haltère élastique », la macromolécule est décrite comme deux billes liées entre elles par un ressort linéaire [9]. Ces deux billes représentent les extrémités du polymère et leur séparation est une mesure de son élongation. Chertkov [10] et Balkovsky *et al.* [11,12] se sont récemment intéressés au transport de polymères dans un champ de vitesse aléatoire lisse. Ils ont montré que dans le régime stationnaire, la densité de probabilité de l'élongation des polymères est intermittente en temps et ses queues sont algébriques. La transition de l'état enroulé à l'état étiré se produit lorsque l'exposant de Lyapunov maximal de l'écoulement est égal à l'inverse du temps de relaxation élastique du polymère.

Pour étudier cette question j'ai considéré des polymères advectés par un champ de vitesse delta-corrélé en temps pour lequel l'équation de Fokker-Planck associée à la densité de probabilité de l'élongation peut être écrite explicitement. J'ai de cette manière obtenu l'expression exacte de la distribution stationnaire dans l'état enroulé. Dans l'état étiré, j'ai montré qu'il n'existe plus de solution stationnaire et que, généralement, l'extension des polymères croît avec le temps. Grâce à l'étude du spectre de l'opérateur différentiel associé à l'équation de Fokker-Planck, j'ai en outre exprimé la densité de probabilité à temps finis sous la forme d'un développement en fonctions propres de cet opérateur. Il m'a alors été possible de montrer son intermittence temporelle. Les résultats sur ce sujet, présentés dans la thèse, sont à l'heure actuelle en cours de rédaction.

Le modèle de type haltère élastique peut conduire à des extensions infinies des polymères qui sont physiquement impossibles. J'ai l'intention de m'intéresser prochainement aux propriétés de la densité de probabilité de la taille des polymères dans le cadre d'un modèle capable de prendre en compte cet effet non linéaire de leur élasticité, comme par exemple le modèle FENE [9].

Liste des publications afférentes à la thèse

- [A] R. Festa, A. Mazzino et D. Vincenzi, An analytical approach to chaos in Lorenz-like systems. A class of dynamical equations, *Europhys. Lett.* **56**, pp. 47-53 (2001).
- [B] R. Festa. A. Mazzino et D. Vincenzi, Lorenz-like systems and classical dynamical equations with memory forcing : An alternate point of view for singling out the origin of chaos, *Phys. Rev. E* **65**, p. 046205 (2002).
- [C] R. Festa, A. Mazzino et D. Vincenzi, Lorenz deterministic diffusion, *Europhys. Lett.* **60**, pp. 820-826 (2002).
- [D] A. Celani et D. Vincenzi, Intermittency in passive scalar decay, *Physica D* **172**, pp. 103-110 (2002).
- [E] D. Vincenzi, The Kraichnan-Kazantsev Dynamo, *J. Stat. Phys.* **106**, pp. 1073-1091 (2002).

Première partie

Du système de Lorenz à la
diffusion déterministe

Chapitre 1

Introduction

La théorie du chaos nous montre que les systèmes déterministes, même lorsqu'ils ne sont que faiblement non linéaires et de basse dimension, peuvent exhiber des comportements complexes et apparemment aléatoires à travers une grande sensibilité aux conditions initiales [13]. Le système de Lorenz est un des systèmes chaotiques les plus connus et a été le point de départ de l'analyse de nombreux aspects de la théorie du chaos. En étudiant le problème de la convection de Rayleigh-Bénard, Lorenz a obtenu en 1963 un système de trois équations différentielles pour les amplitudes de la température et de la fonction de courant du fluide [1]

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -Y + (r - Z)X \\ \dot{Z} &= -bZ + XY,\end{aligned}$$

les paramètres b , r , σ étant liés aux conditions de bords et aux propriétés du fluide. Pour certains valeurs de ces paramètres, la dynamique du système de Lorenz est chaotique et les trajectoires sont attirées sur un ensemble fractal ayant la forme de papillon bien connue représentée sur la figure 1.1(a) (voir par exemple Sparrow [14] pour une revue des propriétés du système de Lorenz). Pour une condition initiale quelconque dans l'espace (X, Y, Z) et après une période transitoire, la trajectoire effectue des oscillations alternées autour de deux points fixes instables symétriques par rapport à l'origine des coordonnées. Le nombre d'oscillations consécutives autour du même point varie de manière imprévisible.

Dans le régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque la condition initiale ne se fait plus sentir et que le mouvement est déjà confiné à l'ensemble attracteur, Takeyama a proposé une interprétation très simple de la dynamique du système de Lorenz [2]. La coordonnée $x \equiv X/[b(r-1)]^{1/2}$ satisfait l'équation

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + (x^2 - 1)x = -\alpha[x^2 - 1]_\beta x, \quad (1.1)$$

où les nouveaux coefficients sont exprimables en fonction des paramètres b , σ et r . Les crochets $[f]_\beta$ sont définis comme la mémoire d'une fonction sur la dynamique passée avec un poids exponentiel de temps caractéristique β^{-1}

$$[f]_\beta \equiv \beta \int_0^\infty ds e^{-\beta s} f(t-s).$$

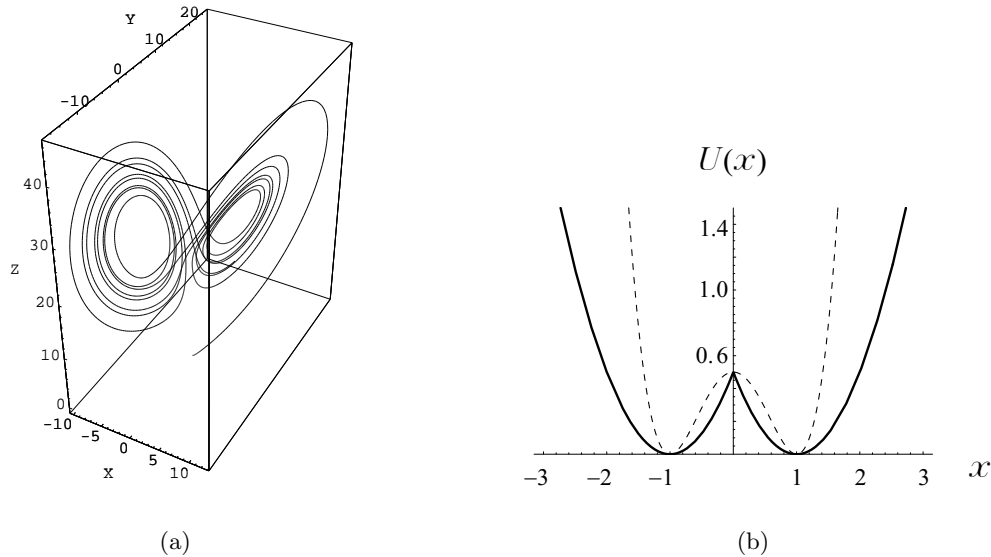


FIG. 1.1 – (a) Ensemble attracteur du système de Lorenz pour $b = 1$, $r = 26.5$ et $\sigma = 3$. (b) Le potentiel originaire de Lorenz (courbe en tirets) et le potentiel du système linéarisé par morceaux (courbe continue).

D'après l'équation (1.1), l'évolution du système de Lorenz est équivalente au mouvement d'une particule classique de masse unitaire qui oscille dans le potentiel bistable $U(x) = (x^2 - 1)^2/4$ dont les minima correspondent aux deux points fixes du système tridimensionnel. Les oscillations sont amorties par la friction $-\eta\dot{x}$ et amplifiées par l'effet de mémoire $\alpha[x^2 - 1]_\beta$. La dynamique du modèle est alors due au balancement entre ces deux termes et le comportement chaotique peut être expliqué par l'imprévisibilité de l'instant où le centre d'oscillation change.

Afin de mettre en évidence l'origine du chaos dans le système de Lorenz, on peut essayer de simplifier le plus possible le mouvement oscillatoire autour des points fixes instables tout en gardant la non linéarité qui caractérise le passage par $x = 0$. Dans ce but, j'ai choisi de passer du potentiel quartique $U(x)$ à un potentiel quadratique avec une discontinuité à l'origine. Il s'agit de remplacer le potentiel originaire par deux paraboles coupées en $x = 0$, ce qui correspond à linéariser le système de chaque côté de l'origine (voir Fig. 1.1(b)). Tant que la trajectoire reste, par exemple, dans la région $x > 0$, l'équation (1.1) peut être résolue de manière exacte et sa solution est de la forme

$$x(t) = 1 + e^{\lambda t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] + c_3 e^{-\gamma t}. \quad (1.2)$$

Les paramètres γ , λ et ω sont encore des fonctions de b , r , σ et les coefficients c_i dépendent linéairement de la vitesse et de l'accélération évaluées au moment du dernier passage par $x = 0$. L'équation (1.2) permet d'expliquer l'imprévisibilité de l'instant où la trajectoire traverse l'origine (ou, autrement dit, du nombre d'oscillations autour du même point fixe). Ce temps est en effet la plus petite solution de l'équation transcendante

$$e^{\lambda t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] + c_3 e^{-\gamma t} = -1 \quad (1.3)$$

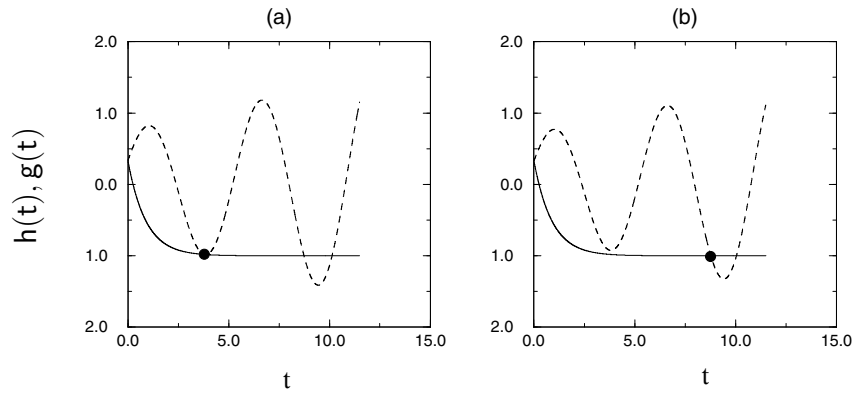


FIG. 1.2 – Solution de l'équation (1.3) pour deux ensembles de conditions initiales voisines ($h(t) = e^{\lambda t}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$ et $g(t) = -1 - c_3 e^{-\gamma t}$).

et il correspond à l'intersection entre une exponentielle décroissante et une oscillation amplifiée. Une petite perturbation des coefficients (soit de la vitesse soit de l'accélération initiale) peut donc provoquer une variation discontinue de l'instant auquel la solution passe par $x = 0$, d'où le comportement chaotique du système (voir Fig. 1.2).

Implicitement, l'équation (1.3) permet de connaître la durée T pendant laquelle la trajectoire reste dans l'un des demi-plans en fonction de la vitesse et de l'accélération lors de la traversée de $x = 0$. L'étude des courbes de niveau de cette fonction m'a permis de mettre en évidence le fait que T dépend discontinument des conditions d'entrée et ceci est à la base de la dynamique chaotique de Lorenz (voir Fig. 1.3).

Si le rapport γ/λ est suffisamment grand, on peut ensuite montrer qu'au moment de traverser le plan $x = 0$ la vitesse et l'accélération sont toujours reliées par la relation linéaire

$$\ddot{x} - 2\gamma\dot{x} + \frac{1}{2}(2 - \lambda^2 - \omega^2) \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0.$$

Le système linéarisé peut être approché par une application chaotique unidimensionnelle entre la vitesse au n -ième passage par $x = 0$ et la vitesse au $(n - 1)$ -ième passage (le

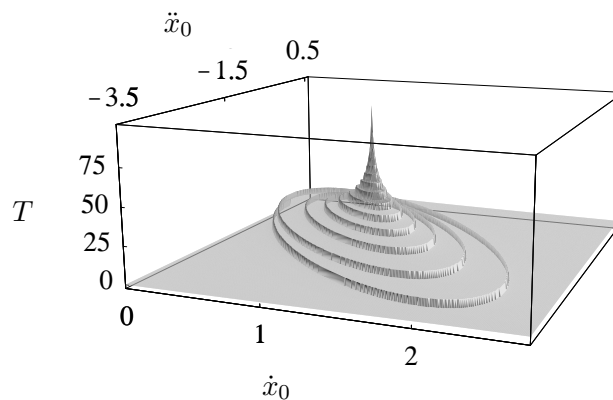


FIG. 1.3 – Temps de permanence dans un puits du potentiel linéaire en fonction de la vitesse et de l'accélération d'entrée dans le puits pour $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, $\eta = 0.78$.

même résultat a lieu pour les accélérations). Cette application est de nouveau définie par des équations implicites qu'on peut aisément résoudre numériquement (voir Fig. 1.4).

La comparaison avec les simulations numériques du modèle original montre, enfin, une très grande similitude entre ces deux systèmes. Le modèle linéarisé par morceaux est capable de traduire les propriétés particulières au système de Lorenz, mais grâce à sa simplicité il permet d'en étudier la dynamique chaotique de manière analytique.

L'interprétation dynamique du modèle de Lorenz qu'on a donné ici possède une extension intéressante. On peut en effet imaginer de remplacer le potentiel « parabolique » par un potentiel périodique : la dynamique de la solution ne sera plus confinée dans l'espace, mais on assistera à une diffusion dans un réseau unidimensionnel. Ce type de comportement porte le nom de *diffusion déterministe* qui doit être distinguée de la diffusion au sens stochastique du terme [15–17]. Une trajectoire typique $x(t)$ effectue des oscillations autour du minimum d'une cellule du réseau. Ce mouvement s'amplifie jusqu'à ce que la barrière de potentiel soit dépassée et que la trajectoire glisse dans l'une des deux cellules adjacentes. Ce processus recommence alors et la trajectoire diffuse de cellule en cellule. Les propriétés de la dynamique sont très similaires à celles du système linéarisé dont ce modèle dérive, la seule non linéarité étant une discontinuité de \ddot{x} au changement de cellule. L'aspect aléatoire des trajectoires n'est pas dû à la présence d'un terme stochastique dans l'équation du mouvement (comme par exemple dans l'équation de Langevin), mais vient de la grande sensibilité aux conditions d'entrée dans chaque cellule. Des conditions initiales voisines peuvent alors engendrer des dynamiques globales très différentes.

Le mouvement macroscopique peut être assimilé à une diffusion ordinaire et être décrit par des quantités statistiques aux grandes échelles comme par exemple le coefficient de diffusion $D \equiv (2t)^{-1} \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle$, la moyenne portant sur des ensembles opportuns de conditions initiales. Si $D = 0$, la dynamique est périodique et les trajectoires sont piégées dans un nombre fixé de cellules. En revanche, quand $D = \infty$, le mouvement est « balistique », c'est-à-dire la variance de la position croît comme t^2 . Finalement, une valeur finie de D indique un mouvement diffusif : changeant les paramètres, on peut obtenir une grande variété de régimes dont la figure 1.5 ne reporte que quelques exemples. Il est à remarquer que la dépendance de D des paramètres α , β , η est très irrégulière et parfois inattendue : par exemple, on peut passer du piégeage

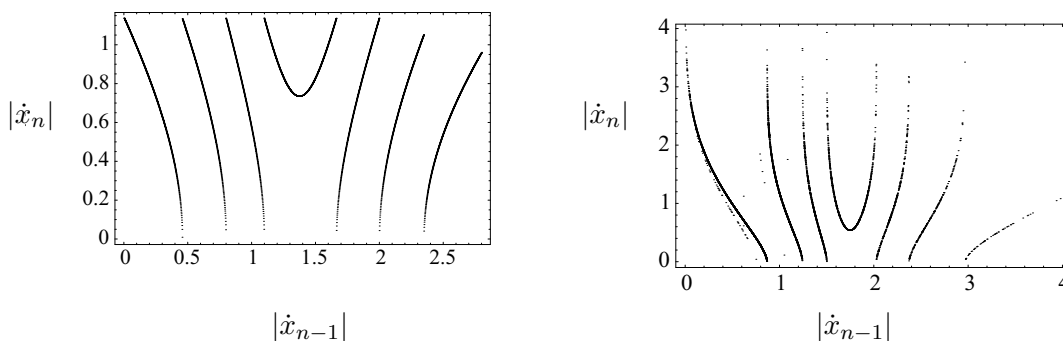


FIG. 1.4 – Relation entre la vitesse au n -ième passage par $x = 0$ et la vitesse au $(n - 1)$ -ième passage (a) pour le système linéarisé ; (b) pour le système de Lorenz.

à la diffusion (ou au mouvement balistique) même augmentant le coefficient de friction η .

Les articles qui suivent décrivent plus en détail les résultats discutés dans cette introduction. Ils ont été rédigés en collaboration avec Roberto Festa et Andrea Mazzi-
no.

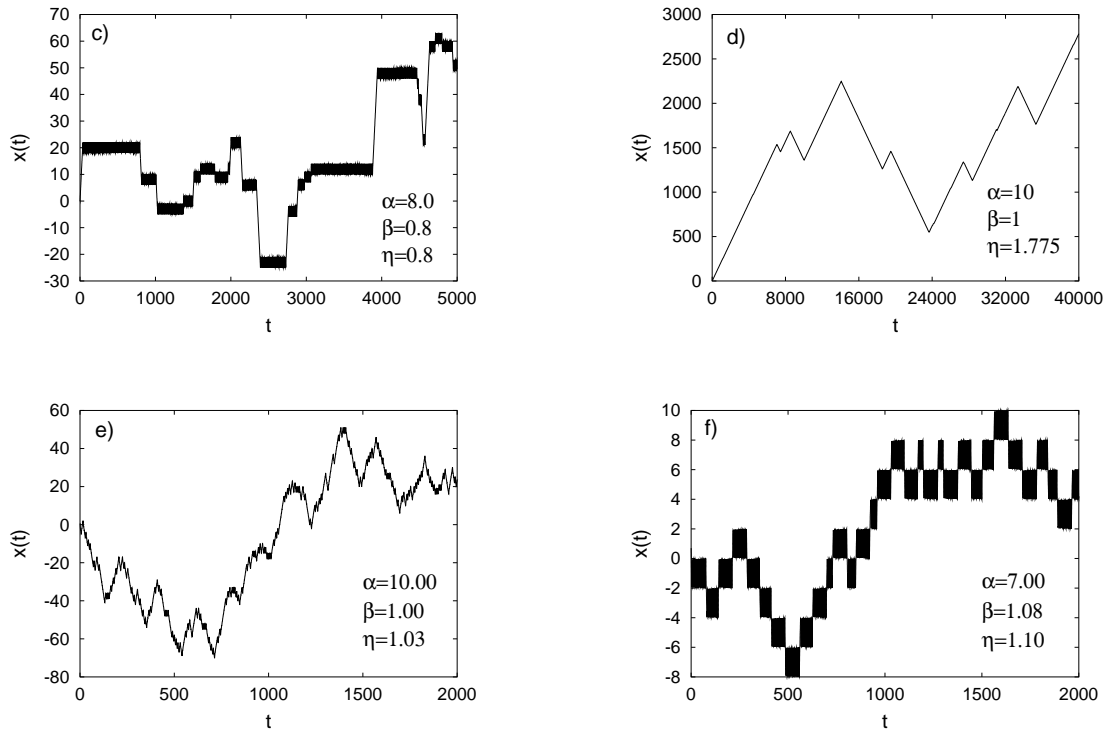


FIG. 1.5 – Exemples de diffusion déterministe dans le modèle de Lorenz périodisé.

Chapitre 2

Dynamique chaotique du système de Lorenz

Dans les articles inclus ci-après, je décris les mécanismes responsables du comportement chaotique d'une classe de systèmes dynamiques obtenus à partir du modèle de Lorenz. Pour cela, l'évolution du système originaire de Lorenz est interprétée comme un problème unidimensionnel de « temps de première sortie ». Cette étude est réalisée analytiquement dans le contexte du système linéarisé par morceaux et les résultats théoriques sont comparés aux simulations numériques pour le modèle complet.

An analytical approach to chaos in Lorenz-like systems. A class of dynamical equations

R. FESTA¹, A. MAZZINO^{2,1} and D. VINCENZI^{3,1}

¹ *INFN, Dipartimento di Fisica, Università di Genova - I-16146 Genova, Italy*

² *CNR-ISIATA, c/o Università di Lecce - I-73100 Lecce, Italy*

³ *CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur - B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4, France*

(received 26 January 2001; accepted in final form 17 July 2001)

PACS. 47.52.+j – Chaos.

PACS. 05.45.Ac – Low-dimensional chaos.

Abstract. – The mechanism responsible for the emergence of chaotic behavior has been singled out analytically within a class of three-dimensional dynamical systems which generalize the well-known E. N. Lorenz 1963 system. The dynamics in the phase space has been reformulated in terms of a first-exit-time problem. Chaos emerges due to discontinuous solutions of a transcendental problem ruling the time for a particle to cross a potential wall. Numerical results point toward the genericity of the mechanism.

Many chaotic phenomena in physical sciences and engineering can be satisfactorily described by low-dimensional autonomous dynamical systems. Among them the most celebrated example is the well-known E. N. Lorenz model [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y + x + (r - 1)(1 - z)x, \\ \dot{z} &= -b(z - xy), \end{cases} \quad (1)$$

here rewritten using rescaled variables x , y , z in the case $r > 1$. Besides it attracted the attention of the scientific community mainly on account of its ability to illustrate how a simple model can produce very rich and varied forms of dynamics, depending on the control parameters in the equations. In particular, chaotic behavior in its configuration space around three fixed unstable points $(0, 0, 0)$ and $(\pm 1, \pm 1, 1)$ may take place for r larger than a critical value, function of σ and b [1, 2].

Starting from the original work of Lorenz [1], a huge literature has grown on the subject (see, *e.g.*, refs. [3–6] for recent literature), almost independently of its somewhat doubtful success in satisfactorily describing the Rayleigh-Bénard hydrodynamical problem [7].

Quite surprisingly, the rigorous proof of the existence of a strange attractor for the Lorenz system has been given just very recently [8, 9]. The prove is based on rigorous techniques of dynamical mathematics, rigorous on the one hand but very far from physical intuition on the other hand.

Our aim here is to combine analytical approaches to chaos with the very familiar concept of classical mechanics to single out the origin of chaotic behavior for a class of Lorenz-like systems. Specifically, we shall reformulate the Lorenz model dynamics in the phase space in terms of more familiar ideas such as mechanical properties of particles moving in one-dimensional potential fields subjected to viscous forcing. Such reformulation will be the starting point to generalize the original Lorenz system to a whole class of Lorenz-like systems. Among them we shall select a particular piecewise linearized model through which analytical results can be obtained. As we shall see, the dynamics generated by this model can be mapped into a first-exit-time problem. This will allow us to identify analytically the origin of the system chaotic behavior. Finally, the robustness of the identified mechanism will be tested numerically for other fully nonlinear generalized Lorenz-like systems.

Let us start our analysis by noticing that, far from the initial transient, system (1) is equivalent to the (integral-) differential equation [10]

$$\ddot{x} = -(\sigma + 1)\dot{x} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}. \quad (2)$$

Equation (2) can be interpreted as a customary classical dynamical equation of motion for a (unit mass) particle subjected to a viscous force $-(\sigma + 1)\dot{x}$ in the potential field $\mathcal{U}(x, t)$. Here,

$$\mathcal{U}(x, t) = \frac{b}{2\sigma}U(x) + \left(1 - \frac{b}{2\sigma}\right)U_t(x) \quad (3)$$

is a potential field resulting from a weighted average (in the chaotic regime $b < 2\sigma$) of a constant quartic potential $U(x) \equiv \sigma(r - 1)(x^2 - 1)^2/4$ and a time-dependent quadratic one $U_t(x) \equiv \sigma(r - 1)[x^2 - 1]_b(x^2 - 1)/2$.

We use the notation

$$[f]_b \equiv b \int_0^\infty d\tau e^{-b\tau} f(t - \tau) \quad (4)$$

to indicate the steady-state response $u(t)$ of the linear system $\dot{u}(t) + bu(t) = bf(t)$ to the stationary forcing term $f(t)$. The integral (4) clearly represents the memory of $f(t)$ (at the time t), *i.e.* its exponentially weighted past evolution. Thus, the potential $U_t(x)$ depends on time through the exponential memory of the past motion.

One can check that, given x from (2), the variables y and z are obtained from the relations $y = \dot{x}/\sigma + x$ and $z = b/(2\sigma)x^2 + (1 - b/(2\sigma))[x^2]_b$, respectively. In this formulation it is, for instance, evident that x and y are synchronizing coordinates while this is not for z [3, 11].

The above description immediately leads to the following considerations highlighting the role of memory in the route to chaos. For $U_t \equiv 0$, the particle motion stops after some time in one of the two minima of $U(x)$. This because of the viscous term $(\sigma + 1)\dot{x}$. On the contrary, nontrivial behaviors, including chaotic ones, may take place due to the statistical balance between dissipation and energy exchanges produced by the memory-dependent potential U_t . The bistable character of U plays a crucial role for the emergence of chaos. Indeed, initially very close trajectories starting in the same cell may undergo completely different evolutions if, at a certain time, one has sufficiently energy to cross the peak in $x = 0$, while this is not for the other. This is the first clue that chaos arises from the unpredictability of the instants when particles pass through the barrier in $x = 0$. We shall give in the sequel the analytical proof of this heuristic argument together with the reason at the origin of such unpredictability. To do that, let us give a further reformulation of system (1). This will make it possible to generalize and simplify (1) with the final goal to deal with chaos analytically.

By suitably scaling the time: $t \mapsto \tau \equiv [(r-1)/2]^{1/2} t$, eq. (2) can be recast in the form

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + (x^2 - 1) x = -\alpha [x^2 - 1]_{\beta} x, \quad (5)$$

which further highlights the role of memory in the dynamics [12] (η , α and β are related to the original parameters σ , b and r).

A more expressive form of eq. (5) is

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \left(q(x) + \alpha [q(x)]_{\beta} \right) \Phi'(x) = 0, \quad (6)$$

where $\Phi(x) = 1/2 x^2$ and $q(x) = x^2 - 1 = 2\Phi(x) - 1$. This equation describes the motion of a (unit mass) particle subjected to a viscous force $-\eta \dot{x}$ and interacting with a fixed potential field $\Phi(x)$ through a “dynamically varying charge” $q_t(x) = q(x) + \alpha [q(x)]_{\beta}$. It is constituted by a fixed “core” charge, a “locally acquired” charge, related to the local potential, and an exponentially vanishing “memory” charge, continuously depending on the previous instantaneous charge history. This scheme can be used to mimic the instantaneous effective charge of a particle moving in a background (structured) particle bath. Indeed, the coupling of $[q(x)]_{\beta}$ with the background potential $\Phi(x)$ yields an endogenous forcing term which allows a self-sustained unceasing motion, even in the presence of friction, and causes a corresponding unceasing inner transfer of the bath charge.

At this point the Lorenz system (1) can be easily generalized in the form

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y + x + (r-1)(1-z)\Phi'(x), \\ \dot{z} &= -b \left[z - \frac{1}{2} q'(x)(y-x) - q(x) - 1 \right], \end{cases} \quad (7)$$

from which (asymptotically in time) eq. (6) follows after some algebraic manipulations.

As already observed, the chaotic behavior of Lorenz’s system essentially depends on the unpredictability of the instants when x change its sign: as long as it keeps constant sign, the system evolution is certainly nonlinear, and nevertheless not chaotic at all. This fact suggests a slight modification of the original form, in order to single out analytically the origin of chaos without being faced with the difficulties arising from nonlinear problems. We thus set in eqs. (6) and (7) $\Phi(x) = |x|$ and $q(x) = \Phi(x) - 1$ obtaining

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \left\{ |x| - 1 + \alpha [|x| - 1]_{\beta} \right\} \text{sgn}(x) = 0 \quad (8)$$

and the corresponding piecewise linearized system

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y + x + (r-1)(1-z) \text{sgn}(x), \\ \dot{z} &= -bz + b \text{sgn}(x) \frac{x+y}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

where $\text{sgn}(x) \equiv |x|/x$.

Our assumptions for Φ and q correspond in eq. (2) to $U(x) = \sigma(r-1)(|x|-1)^2/2$ and $U_t(x) = \sigma(r-1)[|x|-1]_{\beta}(|x|-1)$. The fundamental bistable character of U is thus maintained.

In order to solve eq. (8), we exploit the fact that it is left invariant under the transformations $x \mapsto -x$, $\tau \mapsto \tau$. We can thus focus on one of the two regions $x < 0$ and $x > 0$. Let us consider, *e.g.*, $x > 0$. Being eq. (8) a second-order integral-differential equation, it can

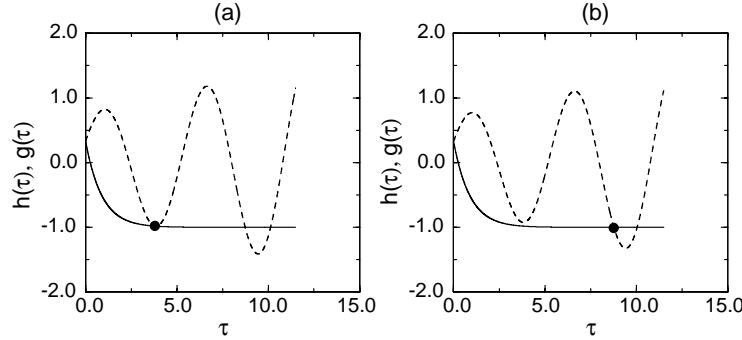


Fig. 1 – Graphical interpretation of the discontinuous character of τ_1 for small changes of the initial conditions. The full line represents $g(\tau)$, the dashed lines $h(\tau)$ for the parameters $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, $\eta = 0.78$ and for initial conditions: (a) $\dot{\xi}_0 = 2.26$, $\ddot{\xi}_0 = -2.00$; (b) $\dot{\xi}_0 = 2.30$, $\ddot{\xi}_0 = -2.00$. Bullets denote the first intersection between g and h defining the first collision time against the wall: (a) $\tau_1 = 3.91$; (b) $\tau_1 = 8.76$.

be reduced to an equivalent third-order linear differential equation by applying the operator $(d/d\tau + \beta)$. The result reads [13]

$$\frac{d^3\xi}{d\tau^3} + (\beta + \eta)\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (1 + \beta\eta)\frac{d\xi}{d\tau} + \beta(1 + \alpha)\xi = 0, \quad (10)$$

where $\xi \equiv x - 1$.

Notice that when the particles cross the barrier in $x = 0$, the evolution described by eq. (10) has to restart with new initial conditions corresponding to an elastic collision against a rigid wall posed in $x = 0$.

It can be checked that, in the case of chaotic motion, the general solution of eq. (10) can always be written in the form

$$\xi(\tau) = e^{\lambda_r\tau} (C_1 \cos(\lambda_i\tau) + C_2 \sin(\lambda_i\tau)) + C_3 e^{-\lambda_0\tau}, \quad (11)$$

with $\lambda_0, \lambda_r, \lambda_i \geq 0$ and C_1, C_2 and C_3 real coefficients determined from the initial conditions on $\xi, \dot{\xi}$ and $\ddot{\xi}$.

The instant τ_1 at which the first particle collision against the wall in $x = 0$ occurs is thus defined by the equation $\xi(\tau_1) = -1$. From (11), τ_1 is thus the smallest positive solution of the transcendental equation

$$C_1 e^{\lambda_r\tau_1} \cos(\lambda_i\tau_1) + C_2 e^{\lambda_r\tau_1} \sin(\lambda_i\tau_1) + C_3 e^{-\lambda_0\tau_1} = -1. \quad (12)$$

Geometrically, we can interpret τ_1 as the first intersection of $g(\tau) \equiv -C_3 e^{-\lambda_0\tau} - 1$, with $h(\tau) \equiv C_1 e^{\lambda_r\tau} \cos(\lambda_i\tau) + C_2 e^{\lambda_r\tau} \sin(\lambda_i\tau)$. The function g is a decreasing exponential and h an oscillating function with growing amplitude. It is thus easily understood why even a little modification of initial conditions can produce a discontinuous variation of τ_1 (see fig. 1). As we shall see, the same reason applies also for the class of systems (7). The dependence of τ_1 on the initial conditions $\dot{\xi}_0$ and $\ddot{\xi}_0$ ($\xi_0 = -1$) is implicitly contained in eq. (12). Coefficients C_1, C_2 and C_3 are indeed linearly related to the initial conditions. The way to describe the global behavior of τ_1 in terms of the pair $(\dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0)$, although simple, results quite lengthy. We thus confine our attention on the corresponding graphical shape presented in fig. 2. From the figure it appears that τ_1 shows sensitivity with respect to the initial conditions only in a limited subset

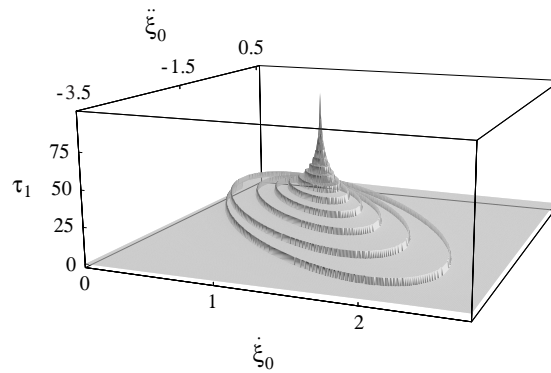


Fig. 2 – The behavior of the first collision time, τ_1 , defined by eq. (12), *vs.* the initial conditions $\dot{\xi}_0$ and $\ddot{\xi}_0$ for $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, $\eta = 0.78$.

of the half-plane $\dot{\xi}_0 \geq 0$. As we shall see, in the chaotic regime the system is quickly attracted inside this region. It will thus be clear why chaotic behaviors can arise also for apparently simple nonlinearities as isolated (noneliminable) discontinuities (see, *e.g.*, refs. [14–18] for other examples of piecewise linearized systems displaying varied forms of chaotic behavior).

Notice that the same behavior showed in fig. 2 for τ_1 holds for the n -th collision time τ_n as a function of the $(n-1)$ -th initial conditions $(\dot{\xi}_0^{(n-1)}, \ddot{\xi}_0^{(n-1)})$.

For $(\dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0) = (\lambda_0, -\lambda_0^2)$ one has $\tau_1 \rightarrow \infty$ (the peak in fig. 2). In this case, it is possible to show that the system configuration, described by $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi(\tau), \dot{\xi}(\tau), \ddot{\xi}(\tau))$, exactly lies on the stable manifold $\mathcal{W}^s \equiv \{t \mathbf{w}_3 | t\} - 1$ with $\mathbf{w}_3 \equiv (1, -\lambda_0, \lambda_0^2)$ and its motion is an exponential decay on the fixed point $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$.

For $(\dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0) \neq (\lambda_0, -\lambda_0^2)$ the evolution in the phase space $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ consists of both a “rapid” decay towards $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ along the stable manifold \mathcal{W}^s and a “slow” amplified oscillation on the two-dimensional unstable manifold, \mathcal{W}^u , generated by $\mathbf{w}_1 \equiv (1, \lambda_c, \lambda_c^2)$ and $\mathbf{w}_2 \equiv (1, \bar{\lambda}_c, \bar{\lambda}_c^2)$, with $\lambda_c = \lambda_r + i\lambda_i$ and $\bar{\lambda}_c = \lambda_r - i\lambda_i$.

Focusing now on the n -th collision, we thus have from eq. (12) the behavior of τ_n *vs.* the pair $(\dot{\xi}_0^{(n-1)}, \ddot{\xi}_0^{(n-1)})$. Taking the first and the second time derivative of eq. (12), we can relate $\dot{\xi}_0^{(n)}$ and $\ddot{\xi}_0^{(n)}$ to the initial conditions $\dot{\xi}_0^{(n-1)}$ and $\ddot{\xi}_0^{(n-1)}$ (remember that C_1, C_2 and C_3 are linearly related to such initial conditions). The result is a two-dimensional Poincaré map connecting $(\dot{\xi}_0^{(n-1)}, \ddot{\xi}_0^{(n-1)})$ to $(\dot{\xi}_0^{(n)}, \ddot{\xi}_0^{(n)})$. The nonlinear character of the map is entirely contained in the transcendental and discontinuous relation between τ_n and the initial conditions.

Let us now assume that the attraction towards the unstable manifold \mathcal{W}^u is sufficiently fast (the goodness of this approximation is controlled by $\beta + \eta$) for the system to be considered as belonging to \mathcal{W}^u at the collision time against the plane $\xi = -1$. If this is the case, “immediately” after the n -th collision, velocity and acceleration are connected by a straight line in the plane $\dot{\xi}_0^{(n-1)} - \ddot{\xi}_0^{(n-1)}$ intersecting the base of the curve shown in fig. 2. The functional dependence of τ_n on $\dot{\xi}_0^{(n-1)}$ and $\ddot{\xi}_0^{(n-1)}$ is thus restricted on this straight line, *i.e.* τ_n is a function of one variable alone, say, $\dot{\xi}_0^{(n-1)}$. The map $\tau_n = \tau_n(\dot{\xi}_0^{(n-1)})$ is shown in fig. 3(a).

Furthermore, the Poincaré map connecting $(\dot{\xi}_0^{(n-1)}, \ddot{\xi}_0^{(n-1)})$ to $(\dot{\xi}_0^{(n)}, \ddot{\xi}_0^{(n)})$ reduces to a one-dimensional map, say, between $\dot{\xi}_0^{(n-1)}$ and $\dot{\xi}_0^{(n)}$. Figure 4(a) shows this map for $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, $\eta = 0.78$. Its behavior is evidently chaotic: the discontinuities derive from the analogous ones in the function $\tau_n = \tau_n(\dot{\xi}_0^{(n-1)})$.

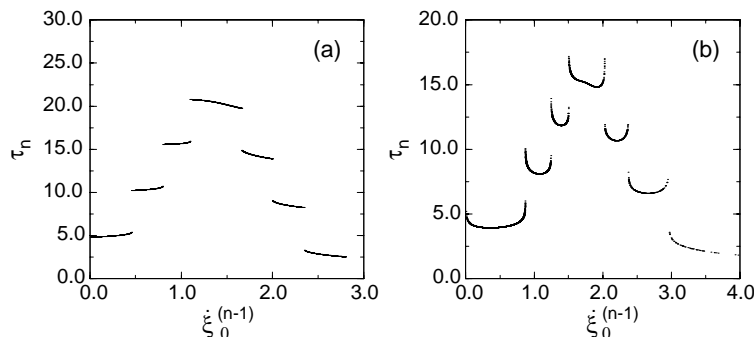


Fig. 3 – The one-dimensional map $\tau_n = \tau_n(\xi_0^{(n-1)})$; (a) for the piecewise linearized system (9); (b) for the Lorenz model (1).

The final question to be addressed concerns the relation of our results with the original Lorenz system (1) and more generally with the class of dynamical systems (7). When the evolution of the latter systems can be approximated in $x = 0$ by one-dimensional maps, behaviors similar to those observed for the piecewise linearized system have been found. Specifically, focusing on the Lorenz model (1), the analogous of the maps reported in figs. 3(a) and 4(a) are shown in figs. 3(b) and 4(b). Similar behaviors have been obtained for other choices of Φ and q in (7). These maps have been derived by numerical integration of (7) by a standard Runge-Kutta scheme, whereas we remember that all results relative to the piecewise linearized system have been obtained analytically.

The resemblance of figs. 3(a), 4(a) with figs. 3(b), 4(b) points toward the robustness of the mechanism we have identified as cause of chaos in the linearized system (9).

In conclusion, the origin of chaos for a whole class of three-dimensional autonomous dynamical systems has been singled out analytically exploiting familiar ideas related to mechanical properties of particles moving in one-dimensional potential fields in the presence of dissipation. Chaos is entirely contained in a (transcendental) equation ruling a first-exit-time problem (see fig. 1) whose solutions appear discontinuous for small changes in the initial conditions. More specifically, the chaotic dynamics of the Lorenz system is synthesized in the combination of the step-like first exit time (fig. 3) and the return map for the initial conditions (fig. 4). Results have been obtained analytically for a piecewise linearized model belonging to a more general

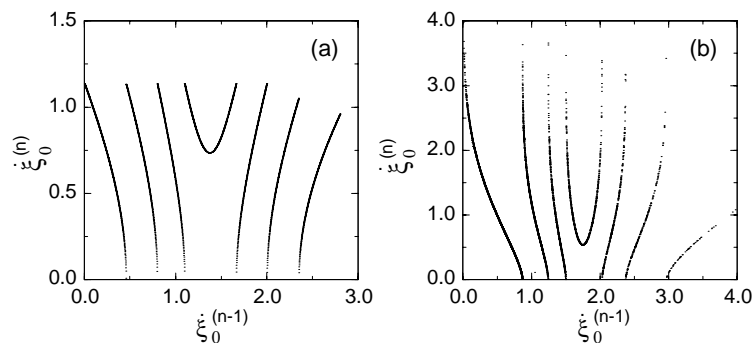


Fig. 4 – The one-dimensional map between $\xi_0^{(n)}$ and $\xi_0^{(n-1)}$; (a) for the piecewise linearized system (9); (b) for the Lorenz model (1).

class of dynamical systems. We, however, showed numerically that the basic reason for the chaos to emerge applies also for the general case.

Finally, it is under investigation whether or not our mechanism works also for higher-dimensional systems like those investigated, *e.g.*, in refs. [19, 20].

* * *

We thank G. CASSINELLI, A. CELANI, M. LA CAMERA, M. VERGASSOLA and A. VULPIANI for illuminating discussions and suggestions. AM has been partially supported by the INFN project GEPAIGG01.

REFERENCES

- [1] LORENZ E. N., *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963) 130.
- [2] SPARROW C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Vol. **41** of *Applied Mathematical Sciences* (Springer-Verlag) 1982.
- [3] MAINIERI R. and REHACEK J., *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 3042.
- [4] HUTT A., UHL C. and FRIEDRICH R., *Phys. Rev. E*, **60** (1999) 1350.
- [5] YANG J., *Phys. Rev. E*, **61** (2000) 6521.
- [6] MOHORIC A. and STEPISNIK J., *Phys. Rev. E*, **62** (2000) 6628.
- [7] SALTZMAN B., *J. Atmos. Sci.*, **19** (1962) 329.
- [8] TUCKER W., *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **328** (1999) 1197.
- [9] STEWART I., *Nature*, **406** (2000) 948.
- [10] Equation (2) can be obtained in the following way. From the first equation of system (1) y can be expressed in terms of x, \dot{x} . Replacing y in the third equation and taking the limit of initial conditions defined at $t_0 \rightarrow -\infty$ (this is the formal meaning of the words “far from initial conditions”), one obtains an expression for z involving x, \dot{x} and the memory of x^2 , defined as $[x^2]_b \equiv \int_0^\infty d\tau e^{-b\tau} x^2(t - \tau)$. Finally, starting from these expression for y and z , the second equation of system (1) yields eq. (2) for the variable x alone.
- [11] PECORA L. M., CARROLL T. L., JOHNSON G. A. and MAR D. J., *Chaos*, **7** (1997) 520.
- [12] Equation (5) resembles other examples of chaotic nonlinear nonautonomous equations, as, for instance, the inverse Duffing equation $\ddot{x} + \eta\dot{x} + (x^2 - 1)x = A \cos(\Omega t)$, which describes a sinusoidally forced anharmonic oscillator: in our case the motion is self-sustained through the generally nonsinusoidal “autonomous” forcing term $-\alpha [x^2 - 1]_\beta x$.
- [13] Notice that the effect of memory is now contained in the third-order character of eq. (10), where, unlike (8), solely differential operators are present.
- [14] ANDRONOV A. A., VITT A. A. and KHAIKEN S. E., *Theory of Oscillators* (Addison Wesley) 1966.
- [15] SPARROW C. T., *J. Math. An. Appl.*, **83** (1981) 275.
- [16] SHAW S. W. and HOLMES P. J., *J. Sound Vib.*, **90** (1983) 129.
- [17] MATSUMOTO T., CHUA L. O. and KOMURO M., *Physica D*, **24** (1987) 97.
- [18] LOZI R., *J. Phys. (Paris) Colloq.*, **39** (1978) C5.
- [19] MOON H.-T., *Phys. Rev. Lett.*, **79** (1997) 403.
- [20] BENZI R., MARROCU M., MAZZINO A. and TROVATORE E., *J. Atmos. Sci.*, **56** (1999) 3495.

PHYSICAL REVIEW E, VOLUME 65, 046205

Lorenz-like systems and classical dynamical equations with memory forcing: An alternate point of view for singling out the origin of chaos

R. Festa,¹ A. Mazzino,^{2,1} and D. Vincenzi^{3,1}

¹*INFN–Department of Physics, University of Genova, I-16146 Genova, Italy*

²*CNR-ISAC, Polo Scientifico dell’Università, I-73100 Lecce, Italy*

³*CNRS, Observatoire de la Côte d’Azur, Boîte Postale 4229, 06304 Nice Cedex 4, France*

(Received 21 September 2001; published 28 March 2002)

An alternate view for the emergence of chaos in Lorenz-like systems is presented in this paper. For such purpose, the Lorenz problem is reformulated in a classical mechanical form and it turns out to be equivalent to the problem of a damped and forced one-dimensional motion of a particle in a two-well potential, with a forcing term depending on the “memory” of the particle past motion. The dynamics of the original Lorenz system in the proposed particle phase space can then be rewritten in terms of a one-dimensional first-exit-time problem. The emergence of chaos turns out to be due to the discontinuous solutions of the transcendental equation ruling the time for the particle to cross the intermediate potential wall. The whole problem is tackled analytically deriving a piecewise linearized Lorenz-like system that preserves all the essential properties of the original model.

DOI: 10.1103/PhysRevE.65.046205

PACS number(s): 05.45.Ac

I. INTRODUCTION

The Lorenz dynamical system, originally introduced by Lorenz [1] in order to describe in a very simplified way the Rayleigh-Bénard problem [2,3], immediately became important in itself as one of the most studied low-dimensional chaotic systems. Even today the Lorenz model represents a paradigmatic example for both theoretical and numerical investigations in checking some results in chaos theory [4–7], in the study of geometrical properties of dynamical systems [8–11], in nonlinear analysis of time series [12,13], in the stabilization and synchronization of coupled systems [14–16], and so on.

Nevertheless, despite the great attention attracted over past decades, some fundamental and rigorous results have been obtained quite recently, as, for instance, the proof of the existence of the Lorenz attractor [17,18], usually using somewhat sophisticated mathematical tools.

On the contrary, our aim here is to provide a description of Lorenz system dynamical features, which requires quite simple analytical tools and, at the same time, allows a very intuitive inspection in Lorenz-like chaos. Preliminary results have been reported in a short communication [19]. Here we shall give more details and additional results.

Our interpretation will base itself upon the fact that in the “steady state,” i.e., far from the initial transient and when the memory of the initial conditions has been lost, the Lorenz system is equivalent to a suitably constructed second-order integral-differential equation. This equation can be regarded, for instance, as a customary second-order one-dimensional classical mechanics equation with a peculiar forcing term. The corresponding dynamics can be interpreted as the one-dimensional motion of a particle in a conservative quartic two-well potential, subjected to a viscous damping and to an additional force resulting from the past history of the motion. The latter force turns out to be essential for chaos to emerge

as it acts as an “endogenous” forcing able to permanently sustain the motion even in the presence of friction.

The previous interpretation of Lorenz dynamics actually leads to a generalization of the Lorenz model to a wider class of systems showing similar dynamical properties. We shall introduce a particular system belonging to such a class that because of its simplicity (piecewise linearity), will allow us to study the dynamics of the original model using analytical tools. Indeed, in the steady chaotic regime (i.e., when the system permanently lies on its attractor set) the evolution of a point in the Lorenz phase space consists of amplified oscillations around the two different fixed points. The most evident aspect of the chaotic regime is the unpredictability of the instant at which the center of the aforementioned amplified oscillations changes. The choice of a piecewise linearized version of the original model will allow us to highlight this point, while keeping unchanged the peculiar topological properties of the Lorenz dynamics. The exact equation ruling the instant of change of the oscillation center will be derived and a discontinuous dependence of this instant on the initial conditions will be highlighted. It will also be possible to write the analytical equations that define the first-return two-dimensional Poincaré map for the piecewise linearized system, which in turn synthesizes the main chaotic features of the model dynamics. Moreover, we shall show that, under suitable and reasonable conditions, the evolution of the system completely reduces to a one-dimensional chaotic map.

To summarize, starting from our interpretation, we shall be able to propose a piecewise linearized version of the Lorenz model, which on one hand has the same dynamical properties as the original system and, on the other hand, will provide analytical tools to explicate the emergence of chaos in Lorenz-like systems.

II. THE LORENZ EQUATION

The original Lorenz system [1] consists of the three first-order ordinary differential equations

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -Y + (r - Z)X, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY,\end{aligned}\quad (1)$$

where the dots indicate time derivatives and σ , b and r are positive parameters originally related to the fluid properties and to the boundary conditions in the Rayleigh-Bénard problem. (Lorenz [1] used $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $r = 28$.)

The fixed points of system (1) and their corresponding stabilities depend on r . For $r \leq 1$ there is only one (stable) fixed point in $(0,0,0)$. For $r > 1$ the origin loses its stability and a pair of new fixed points appear: $(\pm [b(r-1)]^{1/2}, \pm [b(r-1)]^{1/2}, r-1)$, which are stable in the range $1 < r \leq r_c$ with $r_c = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$. (Note that the critical value r_c exists if and only if $\sigma > b + 1$.) For $r > r_c$ all fixed points are unstable, and the Lorenz system can exhibit either periodic or chaotic behavior (see, e.g., Ref. [20] for a comprehensive exposition on the matter).

Since we are interested in the case $r > 1$, we can suitably define the scaled coordinates $x = X/[b(r-1)]^{1/2}$, $y = Y/[b(r-1)]^{1/2}$, $z = Z/(r-1)$, so that the system (1) becomes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y + x + (r-1)(1-z)x, \\ \dot{z} &= b(xy - z),\end{aligned}\quad (2)$$

with fixed points $(0,0,0)$ and $(\pm 1, \pm 1, 1)$.

We now reduce the Lorenz system to a unique differential equation for $x = x(t)$, whose solution makes a direct calculation of $y(t)$ and $z(t)$ possible. By inserting the expression for y in terms of x obtained from the first into the third equation of Eq. (2), one easily gets

$$\dot{z} + bz = \frac{b}{2\sigma} \left[\frac{d}{dt}(x^2) + 2\sigma x^2 \right], \quad (3)$$

whose general solution is given by

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{-b(t-t_0)} \left(z(t_0) - \frac{b}{2\sigma} x^2(t_0) \right) + \frac{b}{2\sigma} x^2(t) \\ &+ \left(1 - \frac{b}{2\sigma} \right) b \int_{t_0}^t ds e^{-b(t-s)} x^2(s).\end{aligned}\quad (4)$$

We have already stated that we are interested in the evolution of the Lorenz system in the chaotic steady state, i.e., far from the initial transient. Thus, we let t_0 move back to $-\infty$ and obtain the steady-state expression for $z(t)$, which can be written in the form

$$z(t) = \frac{b}{2\sigma} x^2(t) + \left(1 - \frac{b}{2\sigma} \right) [x^2]_b(t), \quad (5)$$

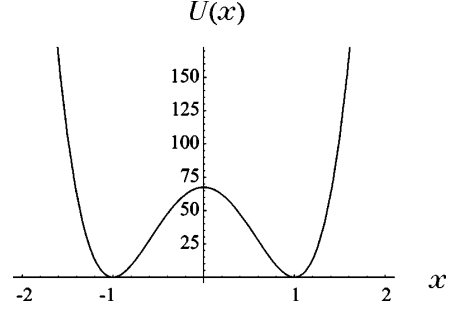


FIG. 1. The constant-in-time quartic potential U ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$). The classical particle representing the Lorenz system moves in the potential U subjected to a viscous damping and to a memory forcing. The minima of the potential wells correspond to the unstable points of the three-dimensional Lorenz system.

where we use the square brackets notation $[f]_k(t)$ to indicate the exponential average of any suitable time function f on its past history,

$$[f]_k(t) \equiv k \int_0^\infty ds e^{-ks} f(t-s). \quad (6)$$

From now on we shall refer to $[f]_k$ as the k exponentially vanishing memory of the function f or in short its memory. Note that, for the memory $[f]_k$ to exist, it suffices that $f(t) \approx O[\exp(-ht)]$, with $h < k$, as $t \rightarrow -\infty$ (the time functions we shall be dealing with are even bounded in this limit).

To summarize, we insert in the second equation of Eq. (2) $y(t)$ obtained from the first equation and $z(t)$ given by Eq. (5) and get for the variable $x = x(t)$ alone in chaotic steady state the following second-order differential equation with memory (in fact, an integral-differential equation):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} + \sigma(r-1) \left(\frac{b}{2\sigma} (x^2 - 1)x \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{b}{2\sigma} \right) [x^2 - 1]_b x \right).\end{aligned}\quad (7)$$

One can interpret this equation as the dynamical equation of a (unit mass) particle, viscously moving in a compound potential energy field consisting of a weighted average (in the chaotic regime $b/2\sigma < 1$) of a quartic potential energy field independent of time (Fig. 1)

$$U(x) = \sigma(r-1) \frac{(x^2 - 1)^2}{4} \quad (8)$$

and of a quadratic potential energy field

$$U_i(x) = \sigma(r-1) [x^2 - 1]_b \frac{(x^2 - 1)}{2}, \quad (9)$$

whose curvature is given by a suitable memory function of the past motion.

Without the memory term the particle would stop in one of the minima of the bistable potential U due to the damping

term $-(\sigma+1)\dot{x}$. Indeed, the U_t contribution yields, through an exponential average on the past evolution, an “endogenous” forcing term that can permanently sustain the motion. The particle oscillates with growing amplitude around the minimum of one of the potential well until its energy is sufficient to allow the crossing of the barrier in $x=0$. As mentioned already, the chaotic behavior of the system emerges just in the unpredictability of the instant at which the particle moves from one well to the other. Trajectories relative to very slightly different initial conditions can produce strongly different sequences in the number of oscillations in each well. In the following section we shall explain this fact analytically.

In order to simplify and standardize the analysis, let us rescale the time t in Eq. (7) as $t \rightarrow \tau \equiv [(r-1)b/2]^{1/2}t$, to obtain the equation (hereafter called *Lorenz equation*)

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \eta \frac{dx}{d\tau} + (x^2-1)x = -\alpha[x^2-1]_\beta x, \quad (10)$$

where

$$\eta = \frac{\sigma+1}{\sqrt{(r-1)b/2}}, \quad \alpha = \frac{2\sigma}{b} - 1, \quad \beta = \sqrt{\frac{2b}{r-1}}.$$

Note that, given b and r , σ (the viscosity parameter in the original problem) affects both the friction term and the forcing term in the Lorenz equation. This fact shows how much these “opposite” contributions are in fact strictly related if the equation is to be viewed as a representative of the original Lorenz system. Even if one now considers the Lorenz equation as the main subject of the study, one must note that not all the (positive) values of α , β , η are consistent with their definitions in terms of the original parameters b , σ , r . In particular, in order to observe chaotic behavior, the following inequality must hold:

$$\alpha > \frac{\eta[2 + \beta(\beta + \eta)]}{2\beta}. \quad (11)$$

(Further details on the relation between the two sets of parameters are given in Appendix A.)

Equation (10) allows us to highlight the role of the memory forcing term in the Lorenz system dynamics. For this purpose it is interesting to compare the Lorenz equation with other examples of chaotic nonlinear (nonautonomous) systems as, for instance, the inverse Duffing equation $\ddot{x} + \eta\dot{x} + (x^2-1)x = A \cos(\Omega t)$, which describes a sinusoidally forced quartic oscillator [21], or more appropriately the parametrically forced equation

$$\ddot{x} + \eta\dot{x} + (x^2-1)x = -A \cos(\Omega t)x. \quad (12)$$

Note that in the latter cases the motion is sustained by externally assigned forcing terms, while in the case of the Lorenz equation the motion is self-sustained by the endogenous term $-\alpha[x^2-1]_\beta x$. In Figs. 2 and 3 we give a numerically obtained comparison between the phase portraits of the Lorenz

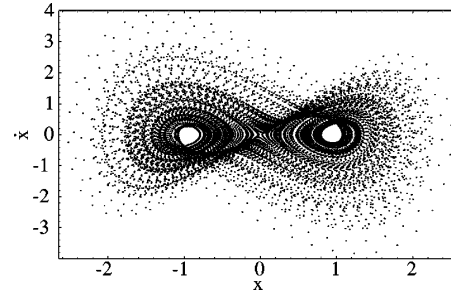


FIG. 2. Typical chaotic phase portrait for the original Lorenz model ($\eta=1.31$, $\alpha=10.30$, $\beta=0.216$).

equation and of Eq. (12) with parameters (α, β, η) , and (A, Ω) suitably chosen in order to get similar ranges of motion. Note that the endogenous Lorenz forcing term, mimed by $-A \cos(\Omega t)x$, is in fact neither monochromatic nor with vanishing average value.

III. THE GENERALIZED LORENZ SYSTEM

The Lorenz equation (10) can be usefully recast in the form

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \eta \frac{dx}{d\tau} + \{q(x) + \alpha[q(x)]_\beta\} \Phi'(x) = 0, \quad (13)$$

where the prime indicates the derivative with respect to x and in our case $\Phi(x) = x^2/2$ and $q(x) = x^2 - 1$. Such an equation can be interpreted as the description of the motion of a unit mass particle subjected to a viscous force $-\eta dx/d\tau$ and interacting with a potential field Φ through a “dynamically varying charge” $q_\tau(x) = q(x) + \alpha[q(x)]_\beta$. This charge depends both on the instantaneous particle position $x(\tau)$ [by means of the term $q(x)$] and on the past evolution (by means of the memory charge $[q(x)]_\beta$). The coupling of $[q]_\beta$ with the fixed potential field Φ acts as an endogenous forcing term that can sustain the motion even in the presence of

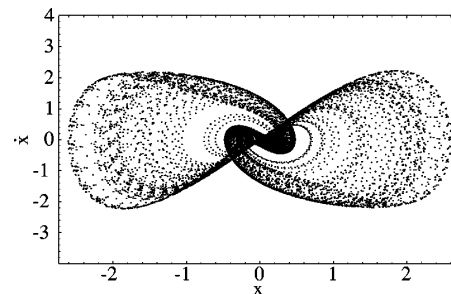


FIG. 3. Typical chaotic phase portrait for the inverse parametrically forced Duffing equation ($\eta=1.31$, $A=4.2$, $\Omega=0.99$). The chaotic evolution of this system is characterized by the competition between a viscous friction and a forcing term with the same structure of the right hand side of the Lorenz equation. Here, however, the forcing is externally given and the memory is replaced by a known function of time.

friction, and the chaotic behavior can actually arise from the synergy between this term and the viscosity. Put in the form (13), the Lorenz equation is arranged to be generalized to a generic charge $q(x)$ interacting with a generic potential field $\Phi(x)$. Correspondingly, it is possible to obtain a *generalized Lorenz system* whose “ x projection” (far from the initial transient) yields Eq. (13). Indeed, by inverting the calculation followed to derive Eq. (13) from system (2), one easily gets the generalized Lorenz dynamical system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= -y+x+(r-1)(1-z)\Phi'(x), \\ \dot{z} &= -bz+b\left[\frac{1}{2}q'(x)(y-x)+q(x)+1\right].\end{aligned}\quad (14)$$

Therefore, the specific Lorenz model can be viewed as singled out from a quite general class of dynamical systems that can exhibit chaotic behavior, their common essential property being an exponentially vanishing memory effect together with a viscous damping.

Equations (13) and (14) are related to Eq. (7) by assuming as potential energy field the quantity $\mathcal{U}=(b/2\sigma)U+(1-b/2\sigma)U_t$ with

$$U=\sigma(r-1)\int q(x)\Phi'(x)dx \quad \text{and} \quad U_t=\sigma(r-1)[q]_\beta\Phi. \quad (15)$$

Obviously, any choice of q and Φ should maintain the main properties of the Lorenz model, i.e., correspond to a two-well piecewise differentiable potential energy $U(x)$, such that $U(x)\rightarrow\infty$ as $|x|\rightarrow\infty$.

We shall now focus our attention on a particular choice for q and Φ , which will maintain all the qualitative properties of the Lorenz system and, at the same time, will allow us to deal with chaos analytically.

IV. THE PIECEWISE LINEARIZED LORENZ SYSTEM

A. Linearization near fixed points

As already noted, the chaotic behavior of the Lorenz system essentially depends on the unpredictability of the instants when x change its sign: as long as it keeps constant sign the system evolution is certainly nonlinear, and nevertheless not “chaotic” at all. This fact suggests a slight modification of the original form of the Lorenz system, in order to single out analytically the origin of chaos without facing any difficulties arising from nonlinear features. We thus set in Eqs. (13) and (14) $\Phi(x)=|x|$ and $q(x)=|x|-1$ obtaining (for $x\neq 0$) the piecewise linear Lorenz-like equation

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\eta\frac{dx}{d\tau}+\{|x|-1+\alpha[|x|-1]_\beta\}\text{sgn}(x)=0, \quad (16)$$

where $\text{sgn}(x)\equiv|x|/x$. The corresponding piecewise linearized dynamical system, with the original choice of parameters, is then given by

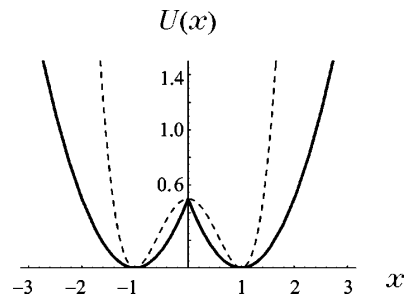


FIG. 4. Quartic potential U for the original Lorenz system (dashed line) and for the piecewise linearized system (full line). The linearization of the Lorenz system maintains the qualitative shape of the constant-in-time potential.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= -y+x+(r-1)(1-z)\text{sgn}(x), \\ \dot{z} &= -bz+b\text{sgn}(x)\frac{x+y}{2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Our assumptions on Φ and q correspond in Eq. (7) to $U(x)=\sigma(r-1)(|x|-1)^2/2$ and $U_t(x)=\sigma(r-1)[|x|-1]_\beta(|x|-1)$. Thus, we are faced with a simplified model, obtained by replacing the constant-in-time quartic potential with a piecewise quadratic one resulting from the superposition of two parabolas with vertex in ± 1 and truncated at $x=0$ (Fig. 4). The two-well character of U is obviously maintained as well as the piecewise differentiability. The replacement of the original potential actually corresponds to a linearization of the system around both unstable fixed points $(\pm 1, \pm 1, 1)$, with the matching performed in $x=0$. It appears that the chaotic behavior of the original model does not depend on the differentiability in $x=0$. One can guess that other classes of dynamical systems also can be transformed in a piecewise linearized version by means of the same operations.

It is easy to check that the fixed points of Eq. (17) are $(\pm 1, \pm 1, 1)$ and that the equation ruling their local stability is the same as for the original Lorenz system with parameters b , σ , $\rho\equiv(r+1)/2$. In particular, if $\sigma>b+1$, the critical value of r for our piecewise linear system (17) is given by $r_c^{(lin)}=2r_c-1$. In Figs. 5 and 6 two chaotic phase portraits for systems (2) and (17) are shown, corresponding to the same choice of b and σ , and different choices of r in order to preserve the relationships between r and the proper corresponding critical value.

While dealing with system (17), the main simplification is that it is separately linear for $x<0$ and $x>0$ and can thus be analytically solved in each region. Indeed, by applying the operator $(d/d\tau+\beta)$ to each side of Eq. (16) one obtains the equation

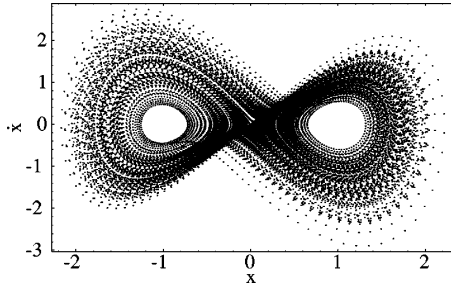


FIG. 5. Typical chaotic phase portrait for the original Lorenz system ($\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$).

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} + (\beta + \eta) \frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + \beta\eta) \frac{dx}{d\tau} + \beta(1 + \alpha)[x - \text{sgn}(x)] = 0, \quad (18)$$

which can be explicitly solved separately on each side of $x=0$. The nonlinearity of the model is simply reduced to a change of sign of the forcing term $\pm\beta(1+\alpha)$ when x crosses the plane $x=0$, henceforth denoted with π [22]. As we shall see, the crossing times are somewhat unpredictable, as they result from the discontinuous solutions of an (incidentally transcendental) equation. Our piecewise linearized system will thus turn out to be an important tool to analytically investigate the emergence of chaos in Lorenz-like systems. The main advantage of the piecewise linearization is that one has to deal only with the simplest nonlinearity, i.e., an isolated (not eliminable) discontinuity (see, e.g., Refs. [23–27] for other examples of piecewise linear chaotic dynamical systems).

B. Analysis of the motion

Let us now consider in detail the second-order integral-differential Eq. (16), which describes the evolution in time of x for the piecewise linearized system in the chaotic steady state. It is equivalent to a third-order nonlinear differential equation whose phase space is described by the coordinates x, \dot{x}, \ddot{x} (with a small abuse of notation from this time on we shall indicate with the dot the differentiation with respect to τ). Solutions of Eq. (16) can be easily calculated with tools

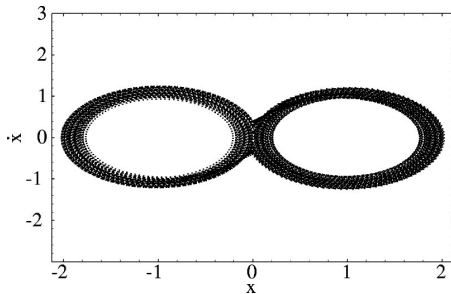


FIG. 6. Typical chaotic phase portrait for the piecewise linearized Lorenz system ($\sigma=10$, $b=8/3$, $r=55$).

of the customary analysis on each side of $x=0$. To obtain a global solution, such partial solutions should be matched at $x=0$ under the reasonable assumptions that the position x , the velocity \dot{x} , and the memory $[|x|]_\beta$ are continuous [28]. Notice that, in contrast, when crossing the plane π , the acceleration \ddot{x} turns out to be undefined. However, if $x(\tilde{\tau})=0$, referring to the left and right time limits $\ddot{x}(\tilde{\tau}^-)$ and $\ddot{x}(\tilde{\tau}^+)$, it appears from Eq. (16) that they are related by the equation $\ddot{x}(\tilde{\tau}^-) + \ddot{x}(\tilde{\tau}^+) = -2\eta\dot{x}(\tilde{\tau})$. In the sequel we shall refer to $\ddot{x}(\tilde{\tau}^-)$ and $\ddot{x}(\tilde{\tau}^+)$ as the acceleration “immediately” before and “immediately” after the crossing, respectively.

Since Eq. (16) is invariant under the transformation $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow \tau$, we can focus our attention only on one of the two regions, e.g., $x > 0$, and describe the motion in this half-space (the evolution in its twin half-space being recovered through the change $x \rightarrow -x$). Clearly, this is equivalent to putting a “rigid wall” in $x=0$ and looking at the crossing of π as an elastic collision.

In summary, according to the previous scheme, the system evolution in time is completely described by the following steps: (1) motion for $x > 0$; (2) collision against π and discontinuity of \ddot{x} ; and (3) inversion $x \rightarrow -x$ and matching with a new solution defined in the region $x > 0$ again.

1. Motion in the half-space $x > 0$

If we define $\xi \equiv x - 1$, Eq. (18) assumes a simple form

$$\ddot{\xi} + (\beta + \eta)\dot{\xi} + (1 + \beta\eta)\xi + \beta(1 + \alpha)\xi = 0, \quad (19)$$

which is a linear third-order differential equation (homogeneous and with constant coefficients). As a consequence of the Routh-Hurwitz theorem [29], a critical value α_c for the parameter α exists, i.e.,

$$\alpha_c = \frac{(1 + \beta\eta)(\beta + \eta)}{\beta} - 1. \quad (20)$$

For $\alpha > \alpha_c$ the fixed points are unstable saddle focus with a real negative eigenvalue $-\lambda_0$ and a pair of complex conjugates eigenvalues $\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i, \bar{\lambda}_1 = \lambda_r - i\lambda_i$.

For the sake of simplicity we shall indicate with $(0, \tau_1)$ the time interval between two consecutive collisions in the steady state of the system. Without loss of generality we assume $x(0)=0$ and $\dot{x}(0) > 0$. Then, it can be easily shown that in the time interval $(0, \tau_1)$ the motion in the phase space $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ ($\xi > -1$) is completely described by the equation

$$\xi(\tau) = \mathcal{M}(\tau)\mathcal{M}(0)^{-1}\xi_0, \quad (21)$$

where we have defined

$$\xi(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \xi(\tau) \\ \dot{\xi}(\tau) \\ \ddot{\xi}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \xi_0 \equiv \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \dot{\xi}_0 \\ \ddot{\xi}_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ \dot{\xi}(0) \\ \ddot{\xi}(0^+) \end{pmatrix},$$

and

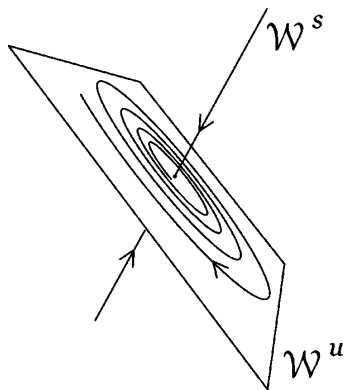


FIG. 7. Stable and unstable manifolds for the point $\xi=0$ in the phases space $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$. The evolution of the piecewise linearized system on each side of π consists of an exponential decay along \mathcal{W}^s and of an amplified oscillations on \mathcal{W}^u .

$$\mathcal{M}(\tau) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 \tau}) & \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 \tau}) & e^{-\lambda_0 \tau} \\ \operatorname{Re}(\lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}) & \operatorname{Im}(\lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}) & -\lambda_0 e^{-\lambda_0 \tau} \\ \operatorname{Re}(\lambda_1^2 e^{\lambda_1 \tau}) & \operatorname{Im}(\lambda_1^2 e^{\lambda_1 \tau}) & \lambda_0^2 e^{-\lambda_0 \tau} \end{pmatrix}.$$

(Note that, for $\alpha > \alpha_c$, $\mathcal{M}(0)$ is always invertible since $\det \mathcal{M}(0) = \lambda_i [\lambda_i^2 + (\lambda_r + \lambda_0)^2]$ and $\lambda_i > 0$.) The eigenvalues of the matrix $\mathcal{M}(\tau)\mathcal{M}(0)^{-1}$, which connects the vector $\xi(\tau)$ to its initial value ξ_0 , are $e^{\lambda_1 \tau}, e^{\bar{\lambda}_1 \tau}, e^{-\lambda_0 \tau}$, with corresponding (constant-in-time) eigenvectors

$$\mathbf{v}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_1^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_0 \\ \lambda_0^2 \end{pmatrix}.$$

With respect to the base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ one has

$$\xi(\tau) = e^{\lambda_r \tau} (c_1 e^{\lambda_i \tau} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-\lambda_i \tau} \mathbf{v}_2) + c_3 e^{-\lambda_0 \tau} \mathbf{v}_3. \quad (22)$$

For the saddle point $\xi=0$ there exist a stable one-dimensional manifold \mathcal{W}^s corresponding to \mathbf{v}_3 ,

$$\mathcal{W}^s = \{p \mathbf{v}_3 | p > -1\}$$

and an unstable two-dimensional manifold \mathcal{W}^u generated by $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (see Fig. 7),

$$\mathcal{W}^u = \left\{ p \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} + q \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2i} | p > -1, \quad q \in \mathbb{R} \right\}.$$

The evolution of the linearized system in the interval $(0, \tau_1)$ is the combination of an exponential decay along \mathcal{W}^s and of an amplified rotation on \mathcal{W}^u . To determine the relative quickness of each component of the motion with respect to the other, consider that from Eq. (19) it is easily checked that $\lambda_0 - 2\lambda_r = \beta + \eta$, and so $\lambda_0 > \lambda_r, \forall \alpha, \beta, \eta$. Therefore, the exponential decay along the stable manifold \mathcal{W}^s is always

more rapid than the exponential oscillating growth on the unstable manifold \mathcal{W}^u , the parameter controlling this difference being $\beta + \eta$.

Although the fixed points are saddle focus, it appears that the piecewise linearized system does not exhibit Shilnikov chaos [30] owing to the absence of an homoclinic orbit.

2. π collision and inversion

To complete the description of the piecewise linearized system dynamics, we consider the instant τ_1 at which the first collision occurs. At this time, as already remarked, the trajectory coming from the half-space $x > 0$ must be matched with the solution defined again in the same region, but with corresponding new “initial conditions” [31]

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1, \\ \dot{\xi}_1 &= -\dot{\xi}(\tau_1), \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\ddot{\xi}_1 = -\ddot{\xi}(\tau_1^+) = \ddot{\xi}(\tau_1^-) + 2\eta \dot{\xi}(\tau_1),$$

or, in matrix form

$$\xi_1 = \mathcal{I} \mathcal{D} \xi(\tau_1^+) \quad (23b)$$

with

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\eta & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The matrix \mathcal{D} accounts for the acceleration discontinuity in $x=0$, while \mathcal{I} yields the sign inversion after the impact. From Eqs. (21) and (23b) it follows that the velocity and the acceleration immediately after the collision are related to the initial conditions by the operator $\mathcal{P}(\tau) \equiv \mathcal{I} \mathcal{D} \mathcal{M}(\tau) \mathcal{M}(0)^{-1}$, according to the formula

$$\xi_1 = \mathcal{P}[\tau_1(\xi_0)] \xi_0. \quad (24)$$

Notice the highlighted dependence of τ_1 on ξ_0 , which reveals the nonlinear character of this important relationship.

Starting from the above results, the very origin of chaos in the piecewise linearized Lorenz system will be identified and discussed in the following section. We shall also show that the basic mechanisms for chaos to emerge apply also to the original Lorenz system.

C. Dependence of τ_1 on initial conditions

1. Unpredictability of the crossing time

As already observed, the instant at which the plane π is crossed, strongly depends on the initial conditions. This fact is strictly related to the chaotic behavior of Lorenz-like systems. Let us now study in some detail this topic for the piecewise linearized model.

The instant τ_1 at which the first collision occurs is defined by the condition $\xi(\tau_1) = -1$. From the first line of Eq. (21),

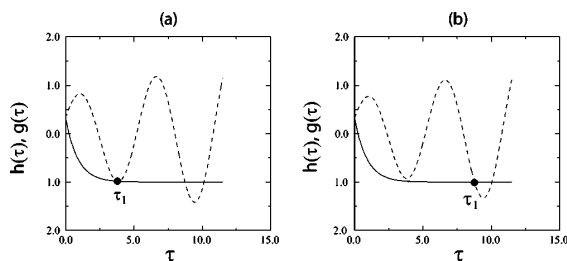


FIG. 8. Graphical interpretation of the discontinuous character of τ_1 for small changes of the initial condition. The full line is the curve $g(\tau_1)$, the dashed line is $h(\tau_1)$ for the parameters $\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$. Bullets denotes the first intersection between g and h , whose abscissa defines the residence time.

τ_1 is thus the smallest positive solution of the transcendental equation

$$-1 = C_1 e^{\lambda_r \tau_1} \cos(\lambda_i \tau_1) + C_2 e^{\lambda_r \tau_1} \sin(\lambda_i \tau_1) + C_3 e^{-\lambda_0 \tau_1}, \quad (25)$$

where C_1, C_2, C_3 are linearly related to initial conditions. The residence time τ_1 is therefore the first intersection of the graphs of $g(\tau_1) = -C_3 e^{-\lambda_0 \tau_1} - 1$ and $h(\tau_1) = C_1 e^{\lambda_r \tau_1} \cos(\lambda_i \tau_1) + C_2 e^{\lambda_r \tau_1} \sin(\lambda_i \tau_1)$. Since g is a decreasing exponential function and h an oscillating function with growing amplitude, one can easily understand why even a little modification of initial conditions can produce a discontinuous variation of τ_1 (Fig. 8).

In conclusion, the unpredictability of the residence time is closely connected to the discontinuous character of the solutions of Eq. (25). The chaotic behavior for the piecewise linearized system clearly stems from such unpredictability. Our claim is that an entirely analogous situation exists also for the original Lorenz model. We shall return, however, in more detail on this important analogy in the sequel.

2. The residence time τ_1 as a function of ξ_0 and $\ddot{\xi}_0$

We now explicitly investigate the dependence of τ_1 on the initial velocity and acceleration. As previously remarked, the function $\tau_1 = \tau_1(\xi_0, \ddot{\xi}_0)$ is implicitly defined as the smallest positive solution of Eq. (25). Since C_1, C_2, C_3 are linearly

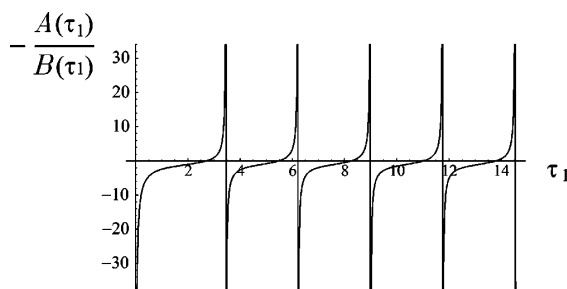


FIG. 9. Slope of the straight lines of the family \mathcal{S} ($\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$). [See Eq. (26) and Appendix B for the exact definition.]

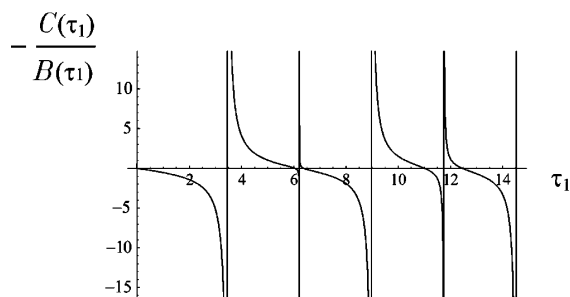


FIG. 10. Ordinate for $\xi_0=0$ of the straight lines of the family \mathcal{S} ($\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$). [See Eq. (26) and Appendix B for the exact definition.]

related to the initial conditions, Eq. (25) can be rewritten in terms of ξ_0 and $\ddot{\xi}_0$. In this form it describes a family \mathcal{S} of straight lines in the plane $\{\xi_0, \ddot{\xi}_0\}$ parametrized by τ_1 ,

$$\mathcal{S}: A(\tau_1)\xi_0 + B(\tau_1)\ddot{\xi}_0 + C(\tau_1) = 0 \quad (26)$$

[see Appendix B for the explicit expression of the coefficients $A(\tau_1), B(\tau_1), C(\tau_1)$].

Let us denote with $(T_i), i \geq 0$ the ordered sequence of the zeros of $B(\tau_1)$. Note that one always has $T_0=0$. The slope of the straight lines of $\mathcal{S}, -A/B$, and their ordinate for $\xi_0=0$, i.e., $-C/B$, have their singularities in $T_i, i \geq 0$. Both these functions are only asymptotically periodic because of the presence of terms proportional to $e^{-\lambda_0 \tau_1}$, which become negligible only for large τ_1 (Figs. 9 and 10).

In each interval $(T_i, T_{i+1}), i \geq 0$, the function $-A/B$ is growing everywhere (see Appendix B) and varies from $-\infty$ and $+\infty$. Therefore, as τ_1 increases, the straight lines of \mathcal{S} rotate counterclockwise and at the same time translate starting from the $\ddot{\xi}_0$ axis (obtained for $\tau_1=0$) (Fig. 11).

The envelope of the family \mathcal{S} is a curve

$$\gamma: \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(\tau_1), \\ \ddot{\xi}_0 = \ddot{\xi}_0(\tau_1), \end{cases}$$

which looks similar to an elliptic spiral (Fig. 12). (A parametrical representation of γ is given in Appendix B.)

From Eq. (26) the contour lines of the function τ_1 are parts of straight lines in the plane $(\xi_0, \ddot{\xi}_0)$. Indeed, according to the definition, each line of \mathcal{S} is in fact a contour line for τ_1 only where its points do not belong to another line corresponding to a smaller value of τ_1 and, furthermore, only where their abscissas correspond to positive values of ξ_0 . Rather than a family of straight lines, the function contour lines are rays or segments according to the constant value of τ_1 .

For τ_1 ranging from 0 to T_2 these lines perform a complete counterclockwise “rotation,” starting from the ξ_0 axis. Thus, they cover the entire half-plane $\xi_0 \geq 0$ except the region inside their envelope; from this first rotation one obtains a set of rays (Fig. 13).

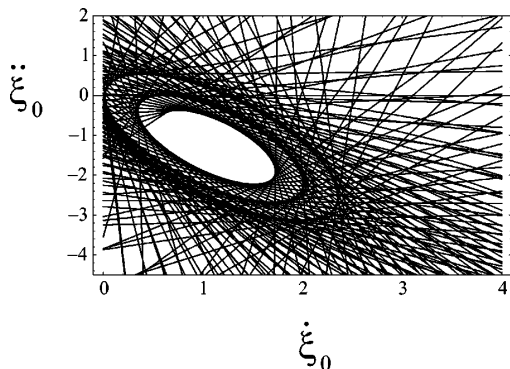


FIG. 11. Family of curves S [defined in Eq. (26)] for $\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$.

Subsequently, for τ_1 ranging from T_2 to T_4 the contour lines become segments of variable orientation and contained in the region delimited by the curve already generated from the first rotation and the new envelope of the second set of straight lines. This behavior repeats itself $\forall \tau_1 \in [T_{2i}, T_{2i+1}]$, $i \geq 0$. Because of the aperiodic character of the functions involved, the curve γ outlines in the positive half plane a structure consisting of “pseudoelliptic” annula. Moving counterclockwise along each of these annula, τ_1 grows continuously. On the contrary, passing through the border that separates two different bands, one meets discontinuities in the dependence of τ_1 on initial conditions.

The curve γ “winds” round the point $P_0 \equiv (\lambda_0, -\lambda_0^2)$ (see Fig. 12). For $(\xi_0, \xi_0) \rightarrow (\lambda_0, -\lambda_0^2)$ one has $\tau_1 \rightarrow \infty$, since for these initial conditions one obtains $C_1 = C_2 = 0$ and the system exactly lies on the stable manifold \mathcal{W}^s . Its motion is in this case an exponential decay towards the fixed point $\xi = 0$.

The previous observations allow to easily guess the structure of the graph of $\tau_1 = \tau_1(\xi_0, \xi_0)$ shown in Fig. 14. It should be noted that τ_1 shows instability with respect to the initial conditions only in a limited subset of the half plane $\xi_0 \geq 0$. As we shall see, it is natural to expect that in the chaotic regime the system is quickly attracted inside this region.

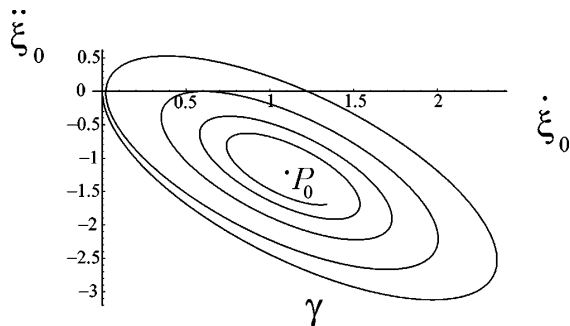


FIG. 12. Envelope γ of the family of straight lines S looks similar to a spiral ($\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$).

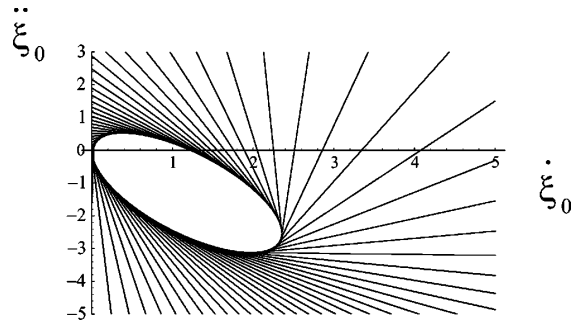


FIG. 13. Contour lines of the residence time τ_1 as a function of the initial conditions (ξ_0, ξ_0) for $\tau_1 \in [0, T_2]$ ($\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$).

D. The piecewise linearized model as a one-dimensional map

1. The π -plane Poincaré map

At this point of our study we have analyzed in some detail the unpredictability of the time at which the system crosses the plane π . To completely motivate the chaotic dynamics of the piecewise linearized system and thus of the original model, we must, however, add some further results on the attracting set of the system.

All results obtained in the preceding section can be easily extended to the n th collision against π . Specifically, denoting with ξ_n the array assigning position, velocity, and acceleration immediately after the n th collision

$$\xi_n \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ \xi_n \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

we have [similar to Eq. (24)]

$$\xi_n = \mathcal{P}(\tau_n) \xi_{n-1}, \quad (27)$$

where we have denoted with τ_n the n th residence time, i.e., the time interval between the $(n-1)$ th collision and the n th one.

The first line of Eq. (27) gives τ_n in terms of ξ_{n-1} and ξ_{n-1} : the dependence of this time on the $(n-1)$ th initial

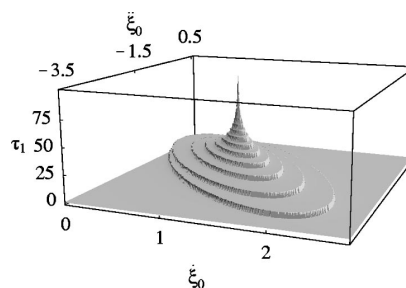


FIG. 14. Graph of τ_1 as a function of the initial conditions, obtained by numerical solution of the transcendental Eq. (25) ($\alpha=6.50$, $\beta=0.19$, and $\eta=0.78$).

conditions has already been discussed in Sec. IV C 2. Knowing τ_n , the other two lines allow to relate the velocity $\dot{\xi}_n$ and the acceleration $\ddot{\xi}_n$ to $\dot{\xi}_{n-1}$ and $\ddot{\xi}_{n-1}$. Equation (27) defines a two-dimensional first-return Poincaré map between $(\dot{\xi}_n, \ddot{\xi}_n)$ and $(\dot{\xi}_{n-1}, \ddot{\xi}_{n-1})$ obtained from the section $\xi = -1$ of the phase space $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$. We recall that, in spite of its appearance, the map (27) is in fact nonlinear, since the matrix \mathcal{P} depends on τ_n , which is a transcendental discontinuous function of the $(n-1)$ th initial conditions. Moreover, under suitable conditions, the two-dimensional map for the linearized system practically reduces to a one-dimensional map.

2. Approximation of the system with a one-dimensional map

It has been already shown that for $\xi > -1$ the motion in the phase space has the form (22)

$$\xi(\tau) = c_1 e^{\lambda_1 \tau} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\bar{\lambda}_1 \tau} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{-\lambda_0 \tau} \mathbf{v}_3,$$

where λ_0 and $\lambda_r = \text{Re}(\lambda_1)$ satisfy the equation $\lambda_0 - 2\lambda_r = \beta + \eta$, which in turn implies $\lambda_0 > \lambda_r$. As a consequence the evolution in the phase space $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ consists both of a “rapid” decay towards $\xi = 0$ along the stable manifold \mathcal{W}^s and of a “slow” amplified oscillation on \mathcal{W}^u . We thus expect the phase trajectories to be strongly attracted on the unstable manifold and, once on \mathcal{W}^u , to slowly spiral outwards. Provided trajectories start close enough to \mathcal{W}^u , then they meet the π -plane very close to its intersection with \mathcal{W}^u itself, i.e., along the straight line

$$\mathcal{L}^- : \begin{cases} \ddot{\xi} + 2\lambda_r \dot{\xi} + (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \xi = 0 \\ \xi = -1. \end{cases} \quad (28)$$

Let us assume that the attraction towards the unstable manifold is very strong and thus it takes place almost instantaneously (the goodness of this assumption is controlled by $\beta + \eta$). Under this hypothesis all trajectories approximately hit π along the straight line \mathcal{L}^- . Thus, from Eq. (23b), it follows that, immediately after each collision, the system necessarily lies very close to the straight line

$$\mathcal{L}^+ : \begin{cases} \ddot{\xi} + 2(\eta + \lambda_r) \dot{\xi} - (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \xi = 0, \\ \xi = -1. \end{cases} \quad (29)$$

Therefore, the following relation between velocity and acceleration is expected to hold approximately:

$$\ddot{\xi}_n + 2(\eta + \lambda_r) \dot{\xi}_n - (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \xi_n = 0. \quad (30)$$

From Eqs. (16) and (30) an analogous linear dependence between the velocity and the memory follows

$$(\eta + 2\lambda_r) \dot{\xi}_n - \alpha w_n + 1 - (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) \xi_n = 0, \quad (31)$$

where w_n denotes the β -memory of ξ evaluated at the n th collision. As a consequence, in the limit we have considered, the attracting set for the map (27) is \mathcal{L}^+ and, therefore, it reduces to a one-dimensional map.

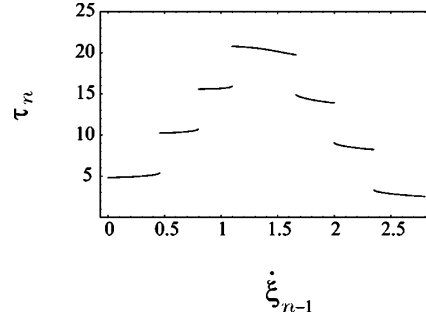


FIG. 15. Map of the first-exit time τ_n as a function of the crossing velocity $\dot{\xi}_n$, obtained by numerical solutions of Eqs. (27) and (30) ($\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, and $\eta = 0.78$.)

Since in the chaotic steady state the velocity and the acceleration, which define the initial conditions for the trajectory after each impact, are not independent, the time τ_n can be expressed as a function of $\dot{\xi}_{n-1}$ alone: $\tau_n = \tau_n(\dot{\xi}_{n-1})$ (see Fig. 15). The behavior of this map is easily understood if we refer to the graph of τ_1 as a function of $\dot{\xi}_0$ and $\ddot{\xi}_0$ (see Fig. 14). Indeed, in the chaotic regime \mathcal{L}^+ is superimposed to the region of the plane $(\dot{\xi}_{n-1}, \ddot{\xi}_{n-1})$ contained by γ , where τ_1 shows unstable behavior with respect to a change in the initial conditions (Fig. 16). For those values of $\dot{\xi}_{n-1}$, for which \mathcal{L}^+ passes through the same “pseudo-elliptic” corona, τ_n slowly changes with varying crossing velocity. On the contrary, when \mathcal{L}^+ intersects the boundary between two different coronas, τ_n shows a discontinuity in its dependence on $\dot{\xi}_{n-1}$ (Fig. 15).

The linear dependence between velocity and acceleration immediately after each collision implies that the Poincaré map (27) becomes one dimensional, e.g., a map between $\dot{\xi}_n$ and $\dot{\xi}_{n-1}$. Figure 17 shows this fact for $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, and $\eta = 0.78$. By a simple inspection of the derivatives corresponding to the fixed points of the map one can easily check that they are all unstable, so that the map produces a chaotic behavior. Note that the discontinuities simply corre-

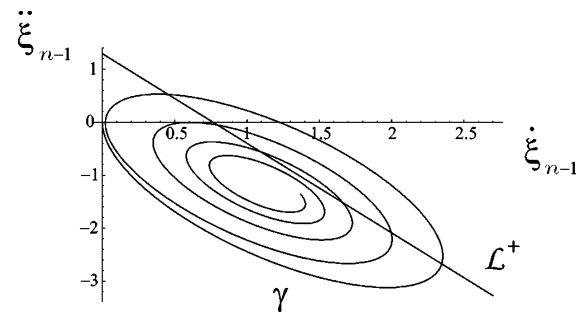


FIG. 16. During chaotic evolution the couple of crossing conditions $(\dot{\xi}_n, \dot{\xi}_{n-1})$ is attracted on the straight line \mathcal{L}^+ , which is superimposed on the instability region of the residence time τ_n (identified by the curve γ). The graph refers to the values $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, and $\eta = 0.78$.

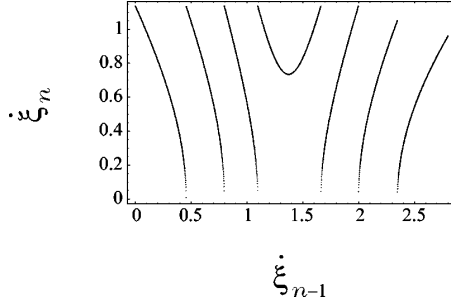


FIG. 17. Velocity $\dot{\xi}_n$ at the n th crossing of the plane $x=0$ as a function of the velocity $\dot{\xi}_{n-1}$ ($\alpha=6.50, \beta=0.19, \eta=0.78$). However, notice that, in the steady-state chaotic evolution, the map is restricted to the range $(0,1.2)$ of possible values of $\dot{\xi}_{n-1}$.

spond to the analogous ones in the function $\tau_n = \tau_n(\dot{\xi}_{n-1})$, evaluated along the straight line given by Eq. (30) and drawn in Fig. 16.

For the sake of completeness, we turn now to the description of the piecewise linearized system in the original phase space x, \dot{x}, \ddot{x} . There the system has two fixed points $(\pm 1, 0, 0)$. For each one there exists a stable manifold

$$\mathcal{W}_{\pm}^s = \{p\mathbf{v}_3 + (\pm 1, 0, 0) \mid p \gtrless \mp 1\} \quad (32)$$

and an unstable manifold

$$\mathcal{W}_{\pm}^u = \left\{ p \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} + q \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{2i} + (\pm 1, 0, 0) \mid p \gtrless \mp 1 \text{ and } q \in \mathbb{R} \right\}. \quad (33)$$

During the evolution, the trajectories are rapidly attracted on the unstable manifold relative to the half plane where they belong (Fig. 18). Thus, immediately after the crossing of the π plane, the phase point lies on one of the straight lines

$$\ddot{x} + 2(\eta + \lambda_r)\dot{x} + (\lambda_r^2 + \lambda_i^2)\text{sgn}(\dot{x}) = 0 \\ x = 0,$$

while the memory and the velocity are linearly related according to equation

$$(\eta + 2\lambda_r)\dot{x}_n - \alpha \text{sgn}(\dot{x}_n)w_n + 1 - (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) = 0. \quad (34)$$

As for the crossing of the π plane, the system can, therefore, be described by a one-dimensional map. To get the maps $\tau_n = \tau_n(\dot{x}_{n-1})$ and $\dot{x}_n = \dot{x}_n(\dot{x}_{n-1})$ from the analogous ones in the rigid wall scheme, one has simply to consider that $\dot{\xi}_n$ coincides with $|\dot{x}_n|$.

The reader should note that all the maps we have drawn in the preceding figures have been obtained by numerically solving the analytical Eq. (27), which exactly defines τ_n , $\dot{\xi}_{n+1}$, and $\ddot{\xi}_{n+1}$, and they have not been computed by numerical integration of the differential system (as usual for

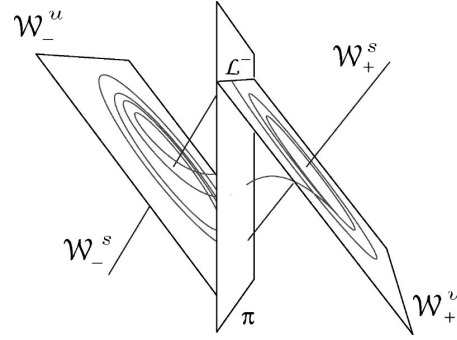


FIG. 18. Attraction of the piecewise linearized system on the manifolds \mathcal{W}_{\pm}^u . The evolution of the system on each side of π consists of a “rapid” exponential decay along the stable manifold and of a “slow” amplified oscillation on the unstable manifold.

non-solvable dynamical systems, such as the Lorenz original one). Thus, the use of numerical tools has been required only because of the transcendental character of the concerned equation.

We explicitly remark that, in general, the attraction towards \mathcal{W}^u is not infinite, but nevertheless more rapid than the amplified rotation on the unstable manifold (remember that $\lambda_0 - 2\lambda_r = \beta + \eta > 0 \forall \alpha, \beta, \eta$). Therefore, we can expect that, if $\beta + \eta$ is finite, the attractor set is not exactly the straight line \mathcal{L}^+ , but a narrow “strip” that contains \mathcal{L}^+ . This strip intersects the region of the graph of τ_n where the residence time is strongly dependent on initial conditions and the mechanism for chaos to arise is absolutely the same. Our numerical simulations for finite $\beta + \eta$ are in excellent agreement with these predictions and then we do not show their corresponding graphs here, since they are practically indistinguishable from the graphs we have already discussed.

V. COMPARISON WITH THE ORIGINAL LORENZ SYSTEM

We conclude our analysis by showing some simulated numerical results. Before doing that, some remarks are worth discussing. We previously considered x, \dot{x}, \ddot{x} as independent coordinates in the phase space because of their physical meaning: it is more intuitive to speak about acceleration rather than of memory of the system. Unfortunately, if we want to “assign initial conditions” to the original Lorenz system after the crossing of the plane π , we cannot consider the acceleration and the velocity since from Eq. (10) they are not independent variables in $x=0$. Indeed the relation $\ddot{x}_n + \eta\dot{x}_n = 0$ always holds, while the memory is not known *a priori*. As a consequence, we have to consider as independent initial conditions the position, velocity, and memory. However, it is worth remarking that the comparison between the Lorenz system and the piecewise linearized one is completely meaningful. This is because for the latter model w_{n-1} is easily known in terms of $\dot{\xi}_{n-1}$ and $\ddot{\xi}_{n-1}$ from Eq. (16): for the linearized system the choice of $\dot{\xi}_{n-1}$ or of w_{n-1} is absolutely equivalent.

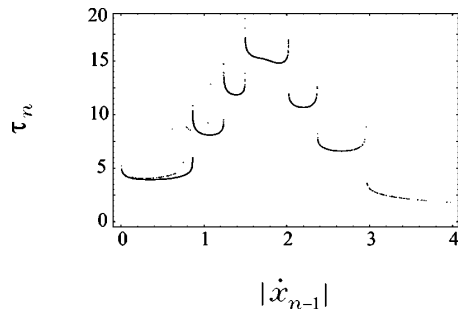


FIG. 19. Map $\tau_n = \tau_n(|\dot{x}_{n-1}|)$ for the original Lorenz system, obtained by numerical integration of the system (35) ($\alpha=10.30$, $\beta=0.216$, and $\eta=1.31$).

Since we are interested in the behavior of the Lorenz system in the chaotic steady state, all the following results are thus obtained via the numerical integration of the steady-state differential system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} + \eta v + (x^2 - 1)x &= -\alpha wx, \\ \dot{w} &= -\beta w + \beta(x^2 - 1), \end{aligned} \quad (35)$$

where now $w = [x^2 - 1]_\beta$. This dynamical system, as already proved, is equivalent to the system (2) far from the initial transient.

We can now turn to the comparison with the piecewise linearized system. For the original Lorenz model we have computed the maps that relate τ_n and $|\dot{x}_n|$ to $|\dot{x}_{n-1}|$, respectively, by numerical integration of the system (35) (the notations are the same as in the previous section). Figures 19 and 20 show the results we obtained: the qualitative behavior of these maps is very similar to that of the analogous maps for the piecewise linearized system. As we shall see, the mechanism for chaos to arise is indeed the same. Note that the maps in Figs. 19 and 20 are not perfectly univocal: obviously this is due to the fact that, in general, the Lorenz system does not reduce exactly to an one-dimensional map when the plane $x=0$ is crossed.

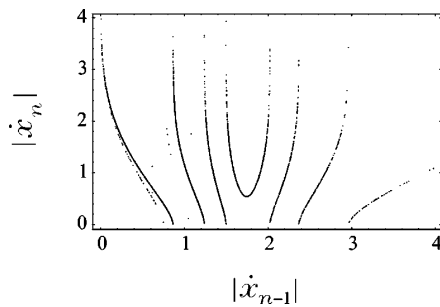


FIG. 20. Map between $|\dot{x}_n|$ and $|\dot{x}_{n-1}|$ for the original Lorenz system, obtained by numerical integration of the system (35) ($\alpha=10.30$, $\beta=0.216$, and $\eta=1.31$).

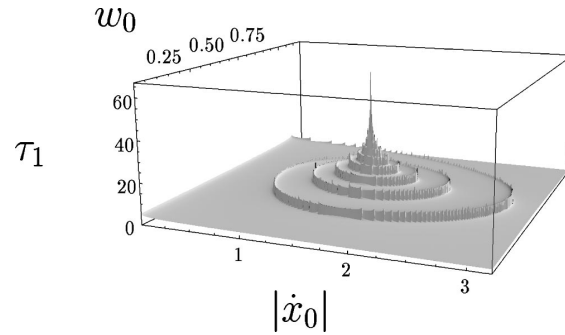


FIG. 21. Graph of τ_1 as a function of the crossing conditions for the original Lorenz system, obtained by numerical integration of the system (35) for different initial conditions ($\alpha=10.30$, $\beta=0.216$, and $\eta=1.31$).

From direct computation it appears that the residence time around a fixed point depends on the initial conditions in a way similar to that of the linearized system (Fig. 21). There is a region in which τ_1 varies continuously with varying initial conditions and a region (Figs. 21 and 22) of strong instability. In the latter region τ_1 changes continuously along each “annulus” of the “spiral,” whereas it shows abrupt discontinuities crossing the boundary of each annulus. As expected, the system is attracted to that region (Fig. 23) and the maps in Figs. 19 and 20 derive from the overplotting between Figs. 23 and 22.

The chaos actually emerges due to the combination of the steplike first-exit-time (Fig. 19) and of the piecewise return map (Fig. 20) for initial conditions. This mechanism is the same as for the linearized model, for which we gave an analytical description. The results we obtained for the piecewise linearized system, therefore, provide in our opinion a useful

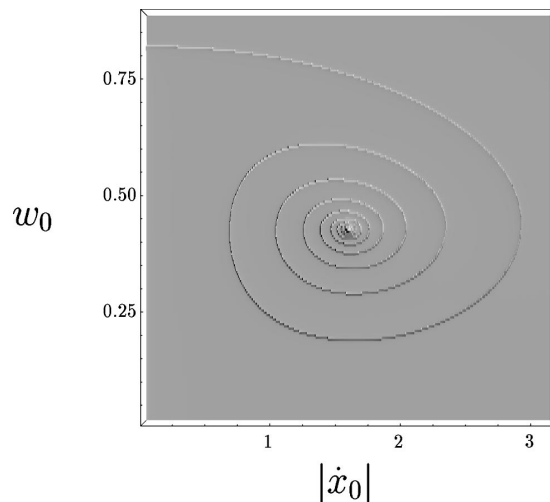


FIG. 22. Graph of τ_1 as a function of the crossing conditions viewed from the above in the case of the original Lorenz system ($\alpha=10.30$, $\beta=0.216$, and $\eta=1.31$).

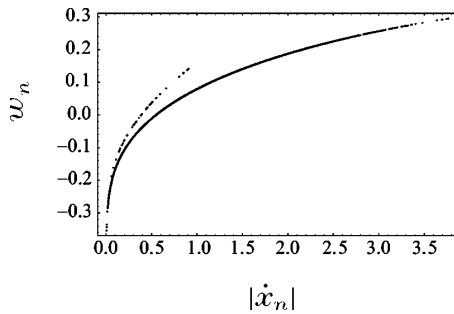


FIG. 23. Map between the crossing memory w_n and the corresponding crossing velocity $|\dot{x}_n|$ for the original Lorenz system ($\alpha = 10.30$, $\beta = 0.216$, and $\eta = 1.31$).

enlightening tool to understand both the original Lorenz system and its eventual generalizations.

Finally, in order to point out the connection between the original Lorenz system and its piecewise linearized version, it is illuminating to compare the tentlike map shown by Lorenz in his original work [1] with the analogous map for our simplified system. Describing the relation between two consecutive maxima of the coordinate $z(t)$, Lorenz found a univocal tent-like map (Fig. 24). For our linearized system we obtain similar results (see Fig. 25). The growing branch of the map is approximately linear, since for small values of z the system evolution is confined in a half-space and, there, it essentially consists of an exponentially amplified oscillation. For large values of z , the map has the same shape of the Lorenz tentlike map. The linear growing of the left branch of the map is due to the simplification we made on the evolution on each side of $x=0$. The shape of the right branch shows that the piecewise linear system keeps all the complexity of the Lorenz model, which can be attributed to the unpredictability of the $x=0$ crossing. The latter property is the very origin of chaos in Lorenz-like systems.

VI. CONCLUSIONS

The main conclusions from the present paper can be summarized as follows. We have reformulated in a classical me-

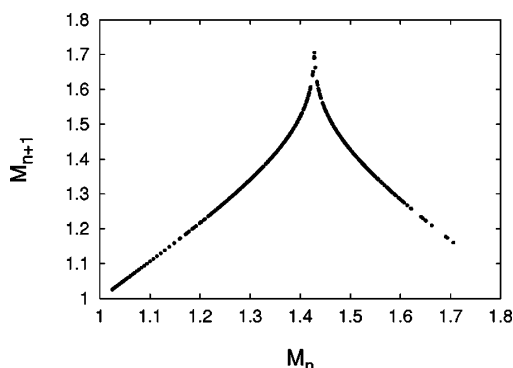


FIG. 24. Tentlike map for the original Lorenz system ($b = 8/3$, $\sigma = 10$, and $r = 28$). M_n denotes the n th maximum of the coordinate $z(t)$.

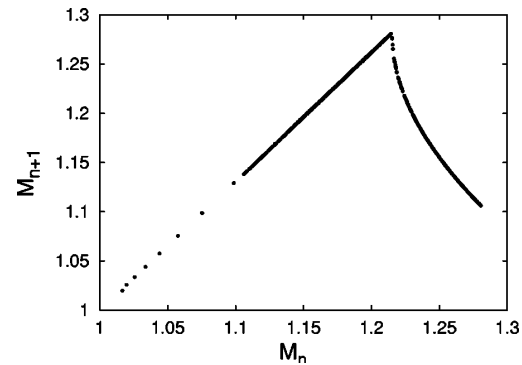


FIG. 25. Tentlike map for the piecewise linearized system ($b = 8/3$, $\sigma = 10$, and $r = 100$).

chanics form the dynamics of Lorenz-like systems and showed that its three-dimensional phase-space dynamics can be mapped into a one-dimensional motion of a particle oscillating in a conservative quartic two-well potential, subjected to a viscous dissipation and to a memory forcing. Starting from this interpretation, we have introduced a piecewise linearized version of the Lorenz system (belonging to a larger family of Lorenz-like systems), which substantially has the same properties of the original model with the advantage that it allows an analytical treatment.

The most evident aspect of chaotic regime is the unpredictability of the instant at which the center of the particle amplified oscillation changes. Chaos arises due to the combination of the steplike behavior of this time with the piecewise return map defining the crossing conditions. This aspect has been singled out analytically, focusing on the piecewise linearized version. There, the exact equation for the time, at which the oscillation center changes, has been derived and the discontinuous dependence of this time on the crossing conditions has been shown analytically.

By means of numerical simulations we have verified that the highlighted mechanisms for the chaos to emerge survive also for the fully nonlinear Lorenz system, where analytical techniques are not applicable.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank M. La Camera and A. Vulpiani for useful discussions and suggestions. This work was partially supported by the INFN through Project No. GEPAIGG01. D.V. was partially supported by grants from the University of Nice and from the University of Genova.

APPENDIX A: PARAMETERS α , β , η

In the Lorenz system, the following conditions for σ, b, r have to be satisfied in order to have three unstable fixed points:

$$\sigma, b, r \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{A1a})$$

$$r > 1, \quad (\text{A1b})$$

$$\sigma > b + 1, \quad (\text{A1c})$$

$$r > r_c. \quad (\text{A1d})$$

The parameters α, β, η are defined as follows:

$$\alpha = \frac{2\sigma}{b} - 1, \quad \beta = \sqrt{\frac{2b}{r-1}}, \quad \eta = \frac{\sigma+1}{\sqrt{(r-1)b/2}}.$$

From Eqs. (A1a) and (A1b) it immediately follows that α, β, η are positive too. Therefore, σ, b, r can be rewritten in terms of α, β, η in the form

$$\sigma = -\frac{(1+\alpha)\beta}{\beta(\alpha+1)-2\eta},$$

$$r = 1 - \frac{4}{\beta[\beta(\alpha+1)-2\eta]},$$

$$b = -\frac{2\beta}{\beta(\alpha+1)-2\eta}.$$

Under the hypothesis $\alpha, \beta, \eta \in \mathbb{R}^+$, Eqs. (A1a) and (A1b) are equivalent to

$$\beta(\alpha+1) < 2\eta, \quad (\text{A2})$$

while Eq. (A1c) corresponds to the inequality

$$\beta(\alpha+1) > \beta + \eta. \quad (\text{A3})$$

Specifically, Eqs. (A1a), (A1b), and (A1c) then imply

$$\alpha > \frac{\eta}{\beta} > 1. \quad (\text{A4})$$

Finally, Eq. (A1d) can be rewritten in terms of new parameters as

$$\alpha > \frac{\eta[2 + \beta(\beta + \eta)]}{2\beta}, \quad (\text{A5})$$

from which necessarily Eq. (A4) follows.

APPENDIX B: FAMILY \mathcal{S}

The family of straight lines \mathcal{S} is defined by the equation

$$\mathcal{S}: A(\tau_1)\dot{\xi}_0 + B(\tau_1)\ddot{\xi}_0 + C(\tau_1) = 0$$

where

$$A(\tau_1) = -2\lambda_i\lambda_r e^{-\lambda_0\tau_1} + e^{\lambda_r\tau_1}[2\lambda_i\lambda_r \cos(\lambda_i\tau_1) + (\lambda_0^2 + \lambda_i^2 - \lambda_r^2)\sin(\lambda_i\tau_1)],$$

$$B(\tau_1) = \lambda_i e^{-\lambda_0\tau_1} + e^{\lambda_r\tau_1}[(\lambda_r + \lambda_0)\sin(\lambda_i\tau_1) - \lambda_i \cos(\lambda_i\tau_1)],$$

$$C(\tau_1) = -\lambda_i(\lambda_i^2 + \lambda_r^2)e^{-\lambda_0\tau_1} - \lambda_0 e^{\lambda_r\tau_1}[\lambda_i(2\lambda_r + \lambda_0) \times \cos(\lambda_i\tau_1) + \{\lambda_i^2 - (\lambda_0 + \lambda_r)\lambda_r\}\sin(\lambda_i\tau_1)] + [\lambda_i(\lambda_i^2 + (\lambda_0 + \lambda_r)^2)].$$

1. Slope of straight lines of \mathcal{S}

We indicate with $(T_i)_{i \geq 0}$ the ordered sequence of the zeros of B : $T_i < T_{i+1} \forall i \geq 0$ with $B(T_i) = 0 \forall i \geq 0$. The first derivative of $-A/B$ is positive over the whole domain of definition. Indeed one has

$$-\frac{d}{d\tau_1} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{\lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} [\lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} + e^{-\lambda_0\tau_1} \{-\lambda_i \cos(\lambda_i\tau_1) - (\lambda_0 + \lambda_r) \sin(\lambda_i\tau_1)\}] [\lambda_i^2 + (\lambda_0 + \lambda_r)^2]}{\lambda_i e^{-\lambda_0\tau_1} + e^{\lambda_r\tau_1} [-\lambda_i \cos(\lambda_i\tau_1) - (\lambda_r + \lambda_0) \sin(\lambda_i\tau_1)]^2}$$

with

$$\lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} + e^{-\lambda_0\tau_1} \{-\lambda_i \cos(\lambda_i\tau_1) - (\lambda_0 + \lambda_r) \sin(\lambda_i\tau_1)\} > 0 \quad \forall \tau_1 \in \cup_{i=0}^{\infty} (T_i, T_{i+1}) \subset \mathbb{R}^+.$$

The latter inequality can be easily proved. Indeed,

$$\begin{aligned}
(\lambda_r + \lambda_0)\tau_1 &> \ln(1 + (\lambda_r + \lambda_0)\tau_1) \\
\Rightarrow e^{(\lambda_r + \lambda_0)\tau_1} &> 1 + (\lambda_r + \lambda_0)\tau_1 > \cos(\lambda_i\tau_1) + \frac{(\lambda_r + \lambda_0)}{\lambda_i}\tau_1 \\
\Rightarrow \lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} &> e^{-\lambda_0\tau_1}[\lambda_i\cos(\lambda_i\tau_1) + (\lambda_r + \lambda_0)\sin(\lambda_i\tau_1)] \\
\forall \tau_1 &\in \cup_{i=0}^{\infty}(T_i, T_{i+1}) \subset \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

2. Envelope of family \mathcal{S}

A parametrical (not regular) representation of the envelope of the family \mathcal{S} is obtained deriving ξ_0 and $\ddot{\xi}_0$ with respect to τ_1 . This can be done from the system

$$A(\tau_1)\xi_0 + B(\tau_1)\ddot{\xi}_0 + C(\tau_1) = 0,$$

$$\partial_{\tau_1} A(\tau_1)\xi_0 + \partial_{\tau_1} B(\tau_1)\ddot{\xi}_0 + \partial_{\tau_1} C(\tau_1) = 0.$$

The result

$$\gamma: \begin{cases} \xi_0 = \xi_0(\tau_1), \\ \ddot{\xi}_0 = \ddot{\xi}_0(\tau_1) \end{cases}$$

is given by

$$\begin{aligned}
\xi_0(\tau_1) &= \{-\lambda_0[\lambda_i(1 + e^{-\lambda_0\tau_1})\cos(\lambda_i\tau_1) - \lambda_i(e^{-(\lambda_0 + \lambda_r)\tau_1} \\
&\quad + e^{\lambda_r\tau_1})] - (\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \lambda_0\lambda_r)(e^{-\lambda_0\tau_1} - 1) \\
&\quad \times \sin(\lambda_i\tau_1)\} / \{\lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} + e^{-\lambda_0\tau_1}[-(\lambda_0 \\
&\quad + \lambda_r)\sin(\lambda_i\tau_1) - \lambda_i\cos(\lambda_i\tau_1)]\}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_0(\tau_1) &= (\lambda_0^2\{\lambda_i[\cos(\lambda_i\tau_1) - e^{\lambda_r\tau_1}] + \lambda_r\sin(\lambda_i\tau_1)\} \\
&\quad + (e^{-\lambda_0\tau_1} - 1)[\lambda_i\cos(\lambda_i\tau_1) - \lambda_r\sin(\lambda_i\tau_1)](\lambda_r^2 \\
&\quad + \lambda_i^2) + -\lambda_0\{e^{-\lambda_0\tau_1}[(\lambda_i^2 - \lambda_r^2)\sin(\lambda_i\tau) \\
&\quad + 2\lambda_i\lambda_r\cos(\lambda_i\tau_1)] - 2\lambda_i\lambda_r e^{-(\lambda_0 + \lambda_r)\tau_1}\} / \{\lambda_i e^{\lambda_r\tau_1} \\
&\quad + e^{-\lambda_0\tau_1}[-(\lambda_0 + \lambda_r)\sin(\lambda_i\tau_1) - \lambda_i\cos(\lambda_i\tau_1)]\}.
\end{aligned}$$

-
- [1] E.N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
[2] Lord Rayleigh, *Philos. Mag.* **32**, 529 (1916).
[3] B. Saltzman, *J. Atmos. Sci.* **19**, 329 (1962).
[4] K. Pyragas, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2265 (2001).
[5] D. Xu, *Phys. Rev. E* **63**, 027201 (2001).
[6] H. Nijmeijer, *Physica D* **154**, 219 (2001).
[7] S. Iplikci and Y. Denizhan, *Physica D* **150**, 163 (2001).
[8] M. Clerc, P. Couillet, and E. Tirapegui, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3820 (1999).
[9] C. Raab and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **64**, 016216 (2001).
[10] D. Pingel, P. Schmelcher, and F.K. Diakonov, *Phys. Rev. E* **64**, 026214 (2001).
[11] G. Yan and L. Yuan, *Physica D* **154**, 43 (2001).
[12] J.B. Gao, *Phys. Rev. E* **63**, 066202 (2001).
[13] C.P. Unsworth, M.R. Cowper, S. McLaughlin, and B Mulgrew, *Physica D* **155**, 51 (2001).
[14] A. d'Anjou, C. Sarasola, F.J. Torrealdea, R. Orduna, and M. Graña, *Phys. Rev. E* **63**, 046213 (2001).
[15] D. Pazó, N. Montejo, and V. Pérez-Muñuzuri, *Phys. Rev. E* **63**, 066206 (2001).
[16] H. Busch, M.-Th. Hütt, and F. Kaiser, *Phys. Rev. E* **64**, 021105 (2001).
[17] W. Tucker, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **328**, 1197 (1999).
[18] I. Stewart, *Nature (London)* **406**, 948 (2000).
[19] R. Festa, A. Mazzino, and D. Vincenzi, *Europhys. Lett.* **56**, 47 (2001).
[20] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences Vol. 41 (Springer-Verlag, New York, 1982).
[21] F.C. Moon and P.J. Holmes, *J. Sound Vib.* **65**, 285 (1979); *ibid.* **69**, 339 (1980).
[22] Equation (18) describes a single loop feedback system (in the absence of input) with linear transfer function $[s^3 + (\beta + \eta)s^2 + (1 + \beta\eta)s + \beta(1 + \alpha)]^{-1}$ and nonlinear feedback $-\beta(1 + \alpha)\text{sgn}(x)$.
[23] A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaiken, *Theory of Oscillators* (Pergamon, Oxford, 1966).
[24] C.T. Sparrow, *J. Math. Anal. Appl.* **83**, 275 (1981).
[25] S.W. Shaw and P.J. Holmes, *J. Sound Vib.* **90**, 129 (1983).
[26] T. Matsumoto, L.O. Chua, and M. Komuro, *Physica D* **24**, 97 (1987).
[27] T. Yang and L.O. Chua, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **10**, 2015 (2000).
[28] The continuity at $x=0$ of \dot{x} and $[|x|]_\beta$ corresponds to the continuity of x , $y=x+\dot{x}/\sigma$ and $z=(b/2\sigma)|x|+(1-b/2\sigma)[|x|]_\beta$.
[29] P. Lancaster, *Theory of Matrices with Applications* (Academic Press, Orlando, FL, 1985).

- [30] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [31] For the sake of simplicity we frequently speak of “initial conditions” for a trajectory after a generic collision. Obviously,

we refer to the conditions that a solution, which matches a preceding trajectory, must satisfy in $x=0$. We always consider the evolution of the system in the steady state and so far from the initial transient.

Chapitre 3

Un modèle de diffusion déterministe

Au chapitre précédent, nous avons vu que la dynamique du système de Lorenz est équivalente au mouvement unidimensionnel d'une particule classique dans un potentiel à deux puits. En remplaçant ce potentiel par un réseau périodique, j'ai obtenu un exemple de diffusion dite déterministe, c'est-à-dire engendrée par le comportement chaotique du modèle et non pas par un forçage stochastique.

Ces études ont été l'objet d'un article, reproduit ci-après, publié dans *Europhysics Letters* en collaboration avec Roberto Festa et Andrea Mazzino.

Lorenz deterministic diffusion

R. FESTA¹, A. MAZZINO^{2,1} and D. VINCENZI^{3,1(*)}

¹ *INFM-Dipartimento di Fisica, Università di Genova - I-16146 Genova, Italy*

² *ISAC/CNR, Sezione di Lecce - Strada provinciale Lecce-Monteroni km 1.2
73100 Lecce, Italy*

³ *CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur - B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4, France*

(received 26 March 2002; accepted in final form 25 September 2002)

PACS. 05.45.-a – Nonlinear dynamics and nonlinear dynamical systems.

PACS. 05.60.-k – Transport processes.

Abstract. – The Lorenz 1963 dynamical system is known to reduce in the steady state to a one-dimensional motion of a classical particle subjected to viscous damping in a past history-dependent potential field. If the potential field is substituted by a periodic function of the position, the resulting system shows a rich dynamics where (standard) diffusive behaviours, ballistic motions and trapping take place by varying the model control parameters. This system permits to highlight the intimate relation between chaos and long-time deterministic diffusion.

Introduction. – Chaotic dynamical systems are known to exhibit typical random processes behaviour due to their strong sensitivity to initial conditions. Deterministic diffusion arises from the chaotic motion of systems whose dynamics is specified, and it should be distinguished from noise-induced diffusion where the evolution is governed by probabilistic laws. Diffusive (standard and anomalous) behaviours have been observed in periodic chaotic maps (see, *e.g.*, refs. [1, 2] and references therein) and in continuous-time dynamical systems [3, 4]. The analysis of deterministic diffusion is relevant for the study of non-equilibrium processes in statistical physics. The major aim is to understand the relationship between the deterministic microscopic dynamics of a system and its stochastic macroscopic description (think, for example, at the connection between Lyapunov exponents, Kolmogorov-Sinai entropy and macroscopic transport coefficients, firstly highlighted by Gaspard and Nicolis [5]).

In this brief communication we present a first analysis of a new model of one-dimensional deterministic diffusion, suggested by a classical-mechanics interpretation of the celebrated Lorenz 1963 system [6]. The steady-state chaotic dynamics of the Lorenz system can indeed be recasted as the one-dimensional motion of a classical particle subjected to viscous damping in a past history-dependent potential field (see refs. [7, 8], and ref. [9] for an earlier preliminary analysis).

We shortly recall that the (scaled) Lorenz dynamical system is given by

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= -y + x + (r - 1)(1 - z)x, \\ \dot{z} &= b(xy - z), \end{cases} \quad (1)$$

(*) E-mail: vincenzi@obs-nice.fr

with $r > 1$. For $1 < r < r_c$, where $r_c = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$, three fixed points exist: $(0, 0, 0)$ (unstable) and $(\pm 1, \pm 1, 1)$ (stable). For $r > r_c$, all fixed points are unstable, and the Lorenz system can exhibit either periodic or chaotic behaviour on a strange attractor set (see, *e.g.*, ref. [10] for a comprehensive exposition on the subject matter).

In the steady state, the system (1) can be reduced to a one-dimensional integro-differential equation for the x -coordinate [8, 9],

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + (x^2 - 1)x = -\alpha [x^2 - 1]_{\beta} x, \quad (2)$$

where $\alpha = (2\sigma/b) - 1$, $\beta = [2b/(r-1)]^{1/2}$, $\eta = (\sigma + 1)/[(r-1)b/2]^{1/2}$, and the time is scaled by a factor $[(r-1)b/2]^{1/2}$ with respect to the time coordinate in eqs. (1). The square brackets in eq. (2) indicate the *exponentially vanishing memory* which is defined, for any suitable time function $f(t)$, by

$$[f]_k(t) \equiv k \int_0^{\infty} ds e^{-ks} f(t-s).$$

According to eq. (2), the Lorenz-system chaotic dynamics corresponds to a one-dimensional motion in a constant-in-time quartic potential $U(x) = (x^2 - 1)^2/4$. Even in the presence of friction ($\eta \neq 0$), the motion can be sustained by a time-dependent memory term which takes into account the system past evolution.

Although eq. (2) has been deduced from the Lorenz system (1), it can be generalized to a wider class of equations showing similar dynamical properties [8]. Indeed, it can be usefully recast in the form

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \{q(x) + \alpha[q(x)]_{\beta}\} \Phi'(x) = 0, \quad (3)$$

where the prime indicates the derivative with respect to x . Equation (2) is obtained for $\Phi(x) = x^2/2$ and $q(x) = x^2 - 1$. The generalized equation (3) can be regarded as the description of the motion of a unit mass particle subjected to a viscous force $-\eta \dot{x}$ and interacting with a potential field $\Phi(x)$ through a dynamically varying ‘‘charge’’ $q_t(x) = q(x) + \alpha[q(x)]_{\beta}$. This charge depends both on the instantaneous particle position $x(t)$ and on the past history $\{x(t-s) \mid 0 \leq s < \infty\}$. It is just the coupling of $[q(x)]_{\beta}$ with the fixed potential field $\Phi(x)$ the origin of an endogenous forcing term which can sustain the motion even in the presence of friction: the chaotic behaviour can actually arise from the synergy between this term and the viscosity.

Moreover, one can easily verify that eq. (3) corresponds to the *generalized Lorenz system*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -y + x + (r - 1)(1 - z)\Phi'(x), \\ \dot{z} = -bz + b \left[\frac{1}{2} q'(x)(y - x) + q(x) + 1 \right]. \end{cases} \quad (4)$$

The specific Lorenz model can thus be viewed as singled out from a quite general class of dynamical systems which can exhibit chaotic behaviour, their common essential property being an exponentially vanishing memory effect together with a viscous damping.

In our previous paper [7, 8] the main chaotic dynamical features of the original Lorenz system have been investigated through the analysis of the piecewise linear system corresponding to the choice $\Phi(x) = |x|$ and $q(x) = |x| - 1$.

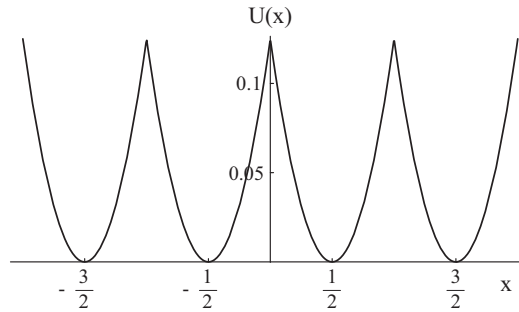


Fig. 1 – Periodic lattice of truncated parabolae. The system evolves in the periodic constant-in-time potential $U(x)$ subjected to a viscous damping and to a memory effect on the past motion.

The Lorenz diffusion. – If in eq. (3) one substitutes the quantities $q(x)$ and $\Phi'(x)$ with x -periodic functions, the chaotic jumps between the two infinite wells of the original quartic potential $U(x)$ correspond to chaotic jumps among near cells. The result is a deterministic diffusion in an infinite lattice, induced by a Lorenz-like chaotic dynamics. Equation (3) will be thus called the *Lorenz diffusion equation*. In order to use as far as possible analytical tools, we shall consider the unit wavelength periodic potential $U(x) = \frac{1}{2}(\{x\} - \frac{1}{2})^2$ (corresponding to $q(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$ and $\Phi(x) = \{x\}$), where $\{x\}$ indicates the fractionary part of x . This potential field obviously consists of a lattice of truncated parabolae (see fig. 1). By simple substitution one easily derives the equation

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \{x\} - \frac{1}{2} + \alpha \left[\{x\} - \frac{1}{2} \right]_{\beta} = 0, \quad (5)$$

where η denotes the friction coefficient, α is the memory amplitude and β is related to the inertia whereby the system keeps memory of the past evolution.

Inside each potential cell, eq. (5) can be recasted in a third-order linear differential form. Indeed, by applying the operator $(d/dt + \beta)$ to each side of eq. (5), one obtains (for $x \neq n$)

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + (\beta + \eta) \frac{d^2 x}{dt^2} + (1 + \beta\eta) \frac{dx}{dt} + \beta(1 + \alpha) \left(x - n - \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (6)$$

It is worth observing that the nonlinearity of the original model is simply reduced to a change of sign of the forcing term $\beta(1 + \alpha)(\{x\} - \frac{1}{2})$ when x crosses the cell boundaries (in our case the integer values). As we will see, chaotic dynamics essentially results from the unpredictability of the crossing times. Note that η and β play a symmetrical role in the dynamics: the solution of eq. (6) is indeed left invariant if one changes β with η , while keeping $\beta(1 + \alpha)$ constant.

Partial solutions of the third-order nonlinear differential equation can be easily calculated inside each open interval $(n, n + 1)$. To obtain a global solution, such partial solutions should be matched at $x = n$ by assuming that the position x , the velocity \dot{x} and the memory $[[x]]_{\beta}$ are continuous, whereas the acceleration \ddot{x} turns out to be undefined. However, it is easily shown that each pair of acceleration values “immediately” before and after the crossing times are related by $\ddot{x}^{(+)} - \ddot{x}^{(-)} = \text{sgn}(\dot{x})$.

The fixed points of eq. (5) are, of course, $x = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, and their local stability depends on the roots of the characteristic polynomial associated to eq. (6). All the fixed points are unstable when α is larger than the critical value $\alpha_c = \beta^{-1}(1 + \beta\eta)(\beta + \eta) - 1$. In this case there are one real negative root ($-\lambda_0 < 0$) and a complex conjugate pair of roots with positive

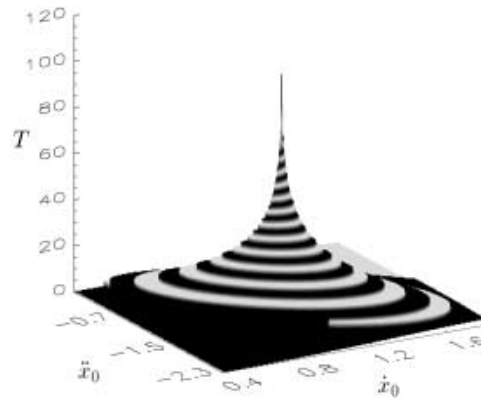


Fig. 2 – Dependence of the exiting time from the elementary cell on the initial conditions \dot{x}_0, \ddot{x}_0 for $\alpha = 6.50$, $\beta = 0.19$, $\eta = 0.78$. The graph has been obtained via numerical solution of eq. (8). Backward ($x = n$) and forward ($x = n + 1$) exiting cases have been distinguished by different colors. The structure of the graph can be guessed through the analysis of the contour lines of the function $T = T(\dot{x}_0, \ddot{x}_0)$ (see ref. [8] for further details).

real part $\lambda_{\pm} = \lambda \pm i\omega$ ($\lambda > 0$). For $\alpha > \alpha_c$, the partial solution in the generic open interval $(n, n + 1)$ can be finally written in the explicit form

$$x(t) = e^{\lambda t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) + C_3 e^{-\lambda_0 t} + n + 1/2, \quad (7)$$

where the constants C_1, C_2, C_3 are linearly related to the (cell-by-cell) entering conditions. The motion inside each cell consists of an amplified oscillation around a central point which translates towards the center of the cell. A change of cell yields a discontinuous variation of the acceleration \ddot{x} and, consequently, of the coefficients C_1, C_2, C_3 .

Suppose that, at a given time, say $t = 0$, the particle enters the n -th cell at its left boundary with positive velocity (the reverse case can be symmetrically analyzed). In this case $C_3 = -(C_1 + \frac{1}{2})$. The question is now on whether the particle leaves the cell either from the left side (*i.e.* $x = n$) or from the right side of the cell (*i.e.* $x = n + 1$). Once assigned the model parameters λ_0, λ and ω , the minimum positive time T such that

$$|e^{\lambda T}(C_1 \cos(\omega T) + C_2 \sin(\omega T)) - (C_1 + 1/2)e^{-\lambda_0 T}| = 1/2 \quad (8)$$

depends, of course, on C_1, C_2 , and therefore on the entering conditions \dot{x}_0, \ddot{x}_0 . Unfortunately, the direct problem is transcendent. Moreover, as shown in fig. 2, its solution is strongly sensitive to the entering conditions. This fact is a direct consequence of the crossing time definition: T is indeed determined by the intersection of an amplified oscillation and a decreasing exponential. A small change in the entering conditions may thus cause a discontinuous variation of the crossing time. This is the very origin of the system chaotic dynamics which suggests a stochastic treatment of the Lorenz diffusion equation.

Despite the fact that we have a three-dimensional space of parameters to investigate the model behaviours, the interesting region is actually a limited portion. This easily follows from the following simple considerations. For η large enough in eq. (5), the motion rapidly stops in one of the lattice fixed points. In order to have non-trivial solutions, the viscous coefficient must be smaller than a maximum value which can be explicitly derived from the condition $\alpha > \alpha_c$: $\eta_{\max} = \{[(1 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta^2]^{1/2} - 1 - \beta^2\}/(2\beta)$. In the opposite limit, if η is too small, the friction term is negligible with respect to the memory term, and the resulting motion is

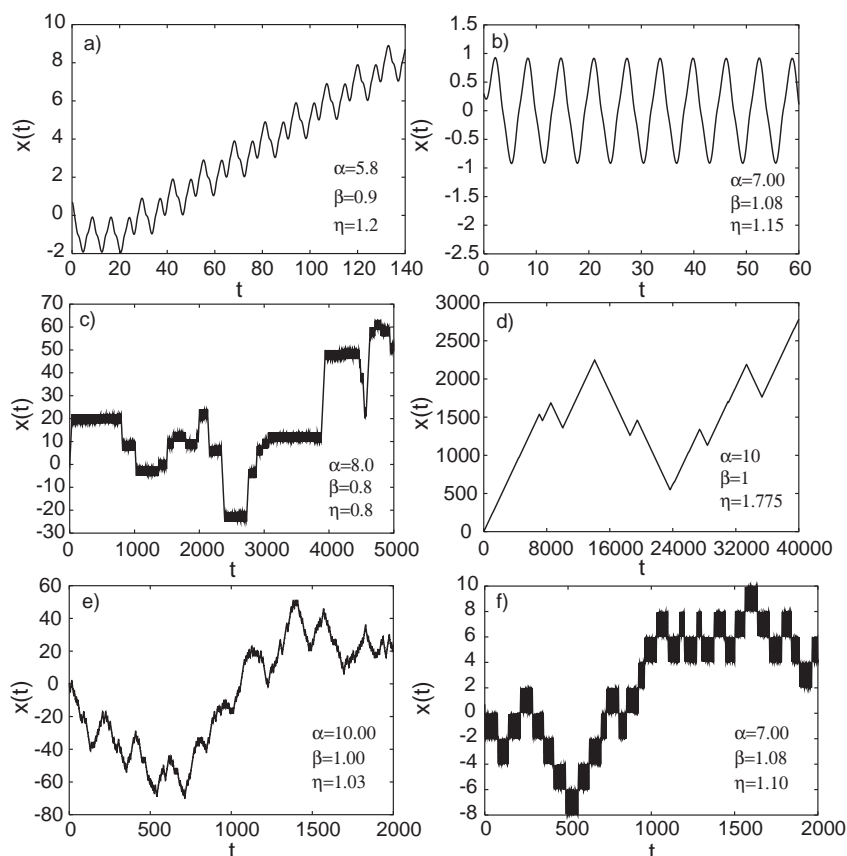


Fig. 3 – a) A typical ballistic motion with a more complex structure than a simple crossing of adjacent cells. Ballistic motion generally corresponds to a periodic behaviour in the cell crossing. b) Trapping in two cells. c)-f) Different kinds of trajectories generating diffusive motions.

“ballistic”, *i.e.*, $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \sim t^2$ ⁽¹⁾. Analogous considerations can be repeated for α and β . Inside this limited region of parameters the Lorenz diffusion equation generates a wide variety of behaviours: as we will see, the observed regimes are strongly sensitive to the control parameters, and, furthermore, this dependence is often in contrast with the intuitive meaning of α , β , η .

In fig. 3 a few numerical simulation of eq. (5) are shown, corresponding to different values of the parameters. These examples suggest that the variety of motion regimes ranges from “ballistic” ones to clearly “diffusive”, and even “trapped” in one cell or in groups of nearby cells.

The analysis of the motion in the elementary cell shows that the system rapidly reaches a steady state. In the diffusive regimes the points corresponding to subsequent cell entering conditions \dot{x}_0 , \ddot{x}_0 are quickly attracted on a particular locus of the plane (fig. 4). In the general situation, this attracting set does not define a univocal map between the entering velocity and acceleration. However, it is not difficult to see that, for large T , \dot{x}_0 and \ddot{x}_0 satisfy the piecewise

⁽¹⁾Due to the deterministic nature of the system, averages should be intended over the initial conditions. In our numerical simulations we have typically chosen the initial conditions to be uniformly distributed over some real interval, and we have naturally assumed that the diffusion coefficient is independent of the choice of the initial ensemble.

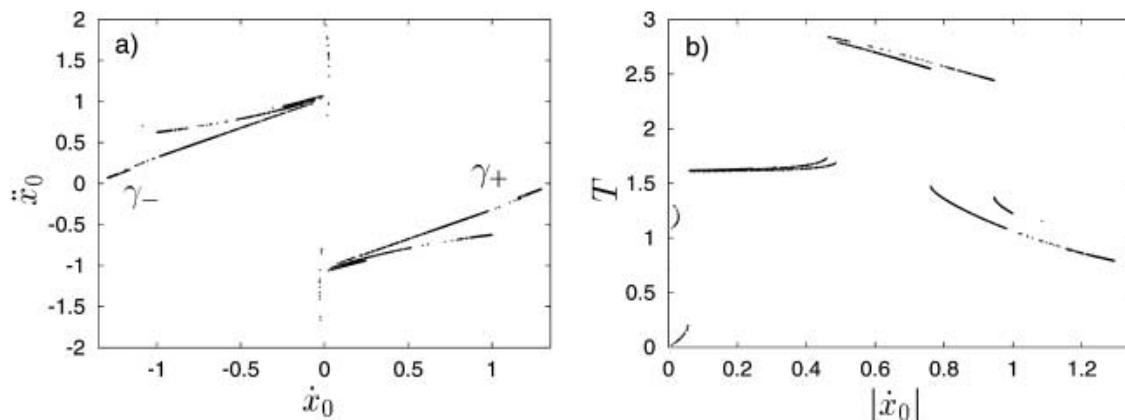


Fig. 4 – a) A typical attracting set for the n -th cell entering conditions \dot{x}_0, \ddot{x}_0 . The corresponding trajectory is shown in fig. 3 e). One should note the presence of the straight lines defined by eq. (9), here denoted by γ_+ and γ_- . b) Attracting set in the plane (T, \dot{x}_0) . The step-like structure of the set derives from the superposition of the points in a) on a graph similar to that shown in fig. 2.

linear relation [8]

$$\ddot{x}_0 - 2\lambda\dot{x}_0 + \frac{1}{2}(2 - \lambda^2 - \omega^2)\text{sgn}(\dot{x}_0) = 0. \quad (9)$$

If the diffusive regime admits large enough times of permanence, the couple of straight lines defined by eq. (9) therefore belongs to the entering-condition attracting set (fig. 4). Moreover, in the limiting case of very large λ_0 , the attracting set exactly reduces to such lines, and in the steady state eq. (9) is satisfied by all entering conditions [8].

The macroscopic evolution of the system can be statistically analyzed by introducing the diffusion coefficient $D \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle / (2t)$. Diffusive regimes are identified by a finite value of D . As shown in fig. 3, different values of the control parameters can lead to qualitatively very different diffusive motions. What is surprising is that the change of regime is very irregular and abrupt with D , and sometimes it does not reflect our intuition on the role played by the parameters in eq. (5). For instance, D shows a nonmonotonic dependence on the viscosity η (fig. 5), and it is possible to observe transitions from trapped (or diffusive) motion to ballistic ones even by increasing the viscosity itself (table I). It is worth recalling that similar complex behaviours in discrete nonlinear maps have been observed in refs. [11–13] and, more recently, in ref. [14].

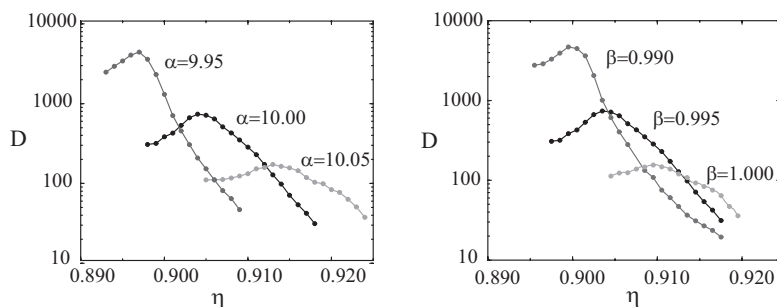


Fig. 5 – Dependence of the diffusion coefficient D on the viscosity parameter η for different values of α and β .

TABLE I – *Different long-time behaviours as a function of η , for fixed α and β . Note the nontrivial, highly structured dependence of the diffusion coefficient on the control parameter.*

η	Regime	η	Regime
< 0.850	ballistic	1.425–1.725	trapped
0.850–0.875	trapped	1.725–1.975	diffusive
0.875–0.900	ballistic	1.975–2.050	trapped
0.900–1.050	diffusive	2.050–2.325	diffusive
1.050–1.175	trapped	2.325 <	trapped
1.175–1.425	diffusive		

Despite the somehow strange aspect of some system trajectories, it should be stressed that no anomalies (*i.e.* superdiffusive transport) have been encountered in the statistical analysis of diffusion, the distribution of long flies having always exponential tails.

To conclude, we have presented a deterministic system which can generate large-scale diffusive transport induced by a Lorenz-like microscopic chaotic dynamics. Two main problems should still be tackled. First, a more systematic analysis of the Lorenz diffusion equation could highlight interesting properties of the diffusion coefficient. Indeed, the very irregular dependence of D on the control parameters might be indicative of a fractal structure of the diffusion, as already observed in other chaotic maps [1,14]. Second, it would be interesting to consider a two-dimensional extension of the Lorenz diffusion equation, mainly to investigate the possible emergence of anomalous diffusion induced by the increased spatial dimension.

* * *

The authors would like to thank R. KLAGES and M. LA CAMERA for very useful suggestions. DV was supported by grants of the University of Nice and of the University of Genova. This work has been partially supported by the INFM project GEPALGG01 and Cofin 2001, prot. 2001023848.

REFERENCES

- [1] KLAGES R. and DORFMAN J. R., *Phys. Rev. E*, **59** (1999) 5361.
- [2] WEIBERT K., MAIN J. and WUNNER G., *Phys. Lett. A*, **292** (2001) 120.
- [3] GASPARD P., *Phys. Rev. E*, **53** (1996) 4379.
- [4] CASTIGLIONE P., MAZZINO A., MURATORE-GINANNESCHI P. and VULPIANI A., *Physica D*, **134** (1999) 75.
- [5] GASPARD P. and NICOLIS G., *Phys. Rev. Lett.*, **65** (1990) 1693.
- [6] LORENZ E. N., *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963) 130.
- [7] FESTA R., MAZZINO A. and VINCENZI D., *Europhys. Lett.*, **56** (2001) 47.
- [8] FESTA R., MAZZINO A. and VINCENZI D., *Phys. Rev. E*, **65** (2002) 046205.
- [9] TAKEYAMA K., *Progr. Theor. Phys.*, **60** (1978) 613.
- [10] SPARROW C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer-Verlag, New York) 1982.
- [11] SCHELL M., FRASER S. and KAPRAL R., *Phys. Rev. A*, **26** (1982) 504.
- [12] GROSSMANN S. and FUJISAKA H., *Phys. Rev. A*, **26** (1982) 1779.
- [13] FUJISAKA H. and GROSSMANN S., *J. Phys. B Condens. Matter*, **48** (1982) 261.
- [14] KORABEL N. and KLAGES R., arXiv:nlin.CD/0206027.

Deuxième partie

Transport passif en turbulence

Chapitre 1

Scalaire passif

1.1 Introduction

La dispersion de la fumée dans l'air ou d'un colorant dans un liquide donne une image familière de la capacité d'un fluide turbulent à transporter et remuer une quantité scalaire. La température et la concentration d'une substance chimique sont également des exemples typiques de champs scalaires en hydrodynamique. On dit que le scalaire est *passif* si ses effets dynamiques sur le champ de vitesse qui le transporte peuvent être négligés. Par exemple, pour qu'une espèce chimique puisse être considérée passive, il faut exclure les réactions chimiques qui pourraient entraîner des échanges d'énergie avec le champ de vitesse. De même, le champ de température est passif si l'on peut négliger la poussée d'Archimède dans la dynamique du fluide.

L'évolution d'un champ scalaire θ transporté par un écoulement \mathbf{v} incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) est décrite par l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + f, \quad (1.1)$$

κ étant la diffusivité moléculaire du scalaire et f le terme de forçage. Cette équation d'advection-diffusion doit être en outre associée à la condition initiale $\theta_0(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r}, 0)$. L'avantage du modèle passif est qu'il n'y a pas de couplage entre l'équation (1.1) et les équations de Navier-Stokes pour le champ de vitesse : les propriétés de \mathbf{v} sont indépendantes du champ θ et peuvent être fixées. Nous décrivons dans ce chapitre les propriétés statistiques aux grandes échelles spatiales d'un champ scalaire transporté par un écoulement turbulent satisfaisant une propriété d'échelle de la forme $|\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})| \sim |\mathbf{r}|^h$ ($0 \leq h < 1$); nous nous appuyons ici sur l'analyse de la dynamique lagrangienne associée à l'équation eulérienne (1.1).

En l'absence de source ($f = 0$), la densité d'énergie du scalaire, $\theta^2/2$, est dissipée au taux $\epsilon_\theta = \kappa \langle |\nabla \theta|^2 \rangle$. En revanche, un forçage non nul introduit de l'énergie aux grandes échelles et le champ scalaire peut atteindre un régime stationnaire. Durant l'évolution, le terme *inertiel* $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta$ est responsable de l'apparition de fluctuations à des échelles de plus en plus petites et engendre ainsi un flux d'énergie constant des grandes échelles vers celles plus petites. Ce mécanisme disparaît à l'échelle *diffusive* r_d où la dissipation devient comparable au terme inertiel et empêche l'excitation d'échelles encore plus petites. Dans l'intervalle diffusif, $r \ll r_d$, les fluctuations sont atténuées par le terme de dissipation et le champ scalaire est spatialement régulier.

Si la diffusivité tend vers zéro, on pourrait imaginer que la dissipation devienne de plus en plus faible. En réalité, alors que l'échelle diffusive r_d diminue, le terme inertiel produit des fluctuations à des échelles toujours plus petites et le taux de dissipation ϵ_θ reste fini. Ce comportement est souvent appelé *anomalie dissipative* pour souligner que la limite $\kappa \rightarrow 0$ est singulière et ne correspond pas du tout au régime sans diffusivité (voir par exemple Falkovich *et al.* [18]).

Ces propriétés du scalaire passif sont analogues à celles de la turbulence de Navier-Stokes tridimensionnelle. Le champ de vitesse \mathbf{v} satisfait l'équation

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f},$$

où ν est la viscosité du fluide. On observe ici la même cascade d'énergie de l'échelle intégrale du champ de vitesse vers l'échelle visqueuse où l'énergie cinétique de l'écoulement est dissipée. Le problème du scalaire passif est néanmoins bien plus simple puisque l'équation (1.1) est linéaire. Pour cette raison, ce problème a été l'objet de nombreuses études au cours des dernières années où des méthodes ont été empruntées à la théorie des champs et à la physique statistique. Deux propriétés qui ont été bien expliquées pour le scalaire passif et que l'on retrouve dans la turbulence de Navier-Stokes sont la présence de lois d'échelle anomales et l'intermittence à petite échelle.

1.2 Anomalie d'échelle et techniques lagrangiennes

1.2.1 Intermittence à petite échelle

Un écoulement turbulent est maintenu par l'injection d'énergie à l'échelle intégrale L_v ; cette énergie est ensuite dissipée par la viscosité à l'échelle de Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\epsilon_v)^{1/4}$, $\epsilon_v = \nu \langle (\nabla \mathbf{v})^2 \rangle$ étant le taux de dissipation. Dans l'intervalle compris entre l'échelle d'injection et celle de dissipation (*intervalle inertiel*), les moments des incréments longitudinaux de la vitesse sont proportionnels à une puissance de la séparation

$$\langle [(\mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{r}/r]^n \rangle \equiv \langle (\delta_r v)^n \rangle \propto r^{\zeta_n},$$

$r = |\mathbf{r}|$ étant une distance dans l'intervalle inertiel. La dépendance des exposants ζ_n en fonction de l'ordre n n'est pas celle que l'on pourrait prédire dimensionnellement sur la base de l'hypothèse de similarité de Kolmogorov, soit $\zeta_n = n/3$ [19]. Au contraire, l'exposant d'échelle ζ_n est une fonction strictement concave et non décroissante de n : la différence entre la valeur de Kolmogorov $n/3$ et la valeur réelle de ζ_n croît donc avec l'ordre n . On appelle cette propriété *anomalie d'échelle*. La conséquence la plus importante de l'anomalie des exposants est l'*intermittence à petite échelle* : on ne peut pas faire coïncider la densité de probabilité des incréments de vitesse pour des séparations différentes simplement en la multipliant par un coefficient opportun. La densité de probabilité de $\delta_r v$ s'éloigne de plus en plus d'une gaussienne au fur et à mesure que r décroît et, lorsque $r \rightarrow 0$, le facteur d'aplatissement $\langle (\delta_r v)^{2n} \rangle / \langle (\delta_r v)^2 \rangle^n$ croît comme $r^{\zeta_{2n} - 2\zeta_n}$, la différence $\zeta_{2n} - 2\zeta_n$ étant positive. En définitive, les fluctuations de la vitesse sont de plus en plus intenses lorsqu'on regarde des échelles de plus en plus petites. (Pour une discussion détaillée de l'intermittence à petite échelle, voir Frisch [20] et Sreenivasan et Antonia [21].)

Un phénomène semblable a lieu pour un champ scalaire transporté par un écoulement turbulent : la distribution des fluctuations à petite échelle du scalaire est loin d'être

gaussienne, ce qui contredit la théorie d'autosimilarité de Kolmogorov, Obukhov et Corrsin [22]. Ce comportement n'est pas dû à l'intermittence éventuelle de l'écoulement porteur et il est même possible de l'observer pour un champ de vitesse gaussien. Les exposants d'échelle σ_n définis par $\langle |\delta_r \theta|^n \rangle \propto r^{\sigma_n}$ montrent une déviation de la valeur obtenue par analyse dimensionnelle plus forte que les exposants associés au champ de vitesse. C'est pour cette raison que l'intermittence à petite échelle du scalaire a été interprétée comme un phénomène indépendant de l'intermittence du champ de vitesse [21, 23–25]. Comme nous l'avons dit plus haut, l'intermittence du scalaire a été expliquée théoriquement et dans plusieurs cas, les exposants d'échelle anomaux ont été calculés explicitement. La plupart de ces résultats ont été obtenus dans le cadre du modèle de Kraichnan, rare exemple en turbulence pour lequel on peut obtenir des résultats exacts [6] (voir Shraiman et Siggia [26] et Falkovich *et al.* [18] pour une revue).

1.2.2 Le modèle de Kraichnan

Afin d'étudier le transport d'un champ scalaire passif par un écoulement turbulent, Kraichnan a introduit un modèle simplifié où le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ est aléatoire, gaussien, de moyenne nulle et a pour covariance

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') \rangle = \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) \delta(t - t'), \quad (1.2)$$

$\delta(t - t')$ étant la fonction de Dirac. Le champ \mathbf{v} est par définition statistiquement stationnaire en temps et homogène en espace. La propriété remarquable du modèle de Kraichnan est sa δ -corrélation en temps qui définit un processus stochastique sans mémoire. Ce modèle a l'avantage de permettre l'obtention de résultats exacts qui peuvent être interprétés comme la limite de comportements réels pour des temps de corrélation de l'écoulement tendant vers zéro.

Une définition complète du champ de Kraichnan nécessite de connaître le tenseur de covariance $\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r})$. Si l'on impose l'incompressibilité, l'invariance statistique par rotations et réflexions ainsi que l'invariance d'échelle, le tenseur $\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r})$ dans l'intervalle inertiel prend la forme

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) = D_0 \delta_{ij} - S_{ij}(\mathbf{r}),$$

où la constante D_0 représente la diffusivité turbulente de l'écoulement et $S_{ij}(\mathbf{r})$ (qui définit la statistique des différences de vitesse) s'écrit aux petites séparations $r \ll L_v$

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^\xi \left[(d - 1 + \xi) \delta_{ij} - \xi \frac{r_i r_j}{r^2} \right] + O\left(\frac{r}{L_v}\right)^2 \quad 0 \leq \xi \leq 2.$$

Le paramètre D_1 détermine l'intensité des fluctuations de la vitesse et ξ est l'exposant d'échelle de l'écoulement dans l'intervalle inertiel. Si l'on veut être plus proche de la réalité, on peut introduire une échelle de coupure équivalente à l'échelle de dissipation de Kolmogorov en dessous de laquelle l'écoulement est lisse. Dans la limite où cette échelle tend vers zéro, l'écoulement n'est plus différentiable, mais seulement Hölder-continu d'exposant $\xi/2$: plus ξ est petit, plus le champ \mathbf{v} est irrégulier en espace.

Une des difficultés que l'on rencontre dans l'étude du scalaire passif dans un écoulement turbulent est le « problème de la fermeture » : les corrélations à plusieurs points du champ scalaire ne satisfont pas des équations fermées, mais la corrélation d'un certain ordre dépend des corrélations d'ordre supérieur. Généralement, cette difficulté est

contournée en introduisant des relations phénoménologiques qui permettent de fermer les équations. Dans le cas du modèle de Kraichnan, ce problème disparaît du fait de la δ -corrélation en temps et la fonction de corrélation à n points¹ $C_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}, t) \equiv \langle \theta(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1, t) \dots \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{n-1}, t) \rangle$ est solution d'une équation aux dérivées partielles (qu'on n'écrit pas ici) qui ne contenant que C_n et C_{n-2} (voir par exemple [18, 26]). L'analyse de cette équation a montré que l'anomalie d'échelle des corrélations du scalaire est liée aux propriétés de ses solutions homogènes, appelées aussi « modes zéro ». La déviation à l'ordre dominant des exposants σ_n de leur valeur normale a été ainsi calculée explicitement de manière perturbative pour les asymptotiques $\xi \rightarrow 0$ [27–29], $\xi \rightarrow 2$ [30–32] et dans le cas d'une très grande dimension spatiale ($d \rightarrow \infty$) [33, 34]. Les σ_n ont aussi été explicités dans un modèle en couche δ -corrélé en temps proposé par Benzi *et al.* [35]. Les prévisions théoriques dans les limites $\xi \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow 2$ ont été confirmées par Frisch *et al.* [36] qui ont calculé numériquement les exposants anomaux du scalaire pour des facteurs d'échelle dans l'intervalle $(0, 2)$.

1.2.3 Formalisme lagrangien

Nous décrivons maintenant la dynamique lagrangienne pour le cas en déclin que nous étudierons dans la prochaine section. Rappelons que le déclin d'un champ scalaire transporté par un écoulement incompressible \mathbf{v} est régi par l'équation aux dérivées partielles (1.1) avec un terme de forçage nul ($f = 0$). Cette description eulérienne peut être reformulée de façon lagrangienne et le transport peut être décrit en terme de trajectoires stochastiques.

Regardons d'abord le cas d'une diffusivité nulle : l'équation (1.1) est alors du premier ordre et linéaire. Le champ vectoriel \mathbf{v} définit un ensemble de courbes caractéristiques (trajectoires lagrangiennes) solutions des équations différentielles

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}(s) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}(s), s), \quad \boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{\rho}_0. \quad (1.3)$$

Si le champ de vitesse est suffisamment lisse (Lipschitz), les solutions de (1.3) sont uniques. Pour les cas en déclin, le scalaire est conservé le long de chaque trajectoire ou, en d'autres termes, une trajectoire donnée porte une valeur fixée du scalaire. Le champ eulérien $\theta(\mathbf{r}, t)$ est alors égal à la condition initiale évaluée le long de la trajectoire particulière aboutissant en \mathbf{r} à l'instant t

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_0(\boldsymbol{\rho}(s)), \quad \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}.$$

En général, un écoulement turbulent n'est pas lisse, mais seulement Hölder-continu (la théorie de Kolmogorov prédit un exposant $1/3$) et nous ne sommes plus garantis de l'unicité de la solution de l'équation (1.3). Pour résoudre l'équation (1.1), il est nécessaire de considérer des distributions de probabilité sur l'ensemble des solutions du problème lagrangien (1.3) et l'expression eulérienne du scalaire passif est donné en moyennant sur toutes les trajectoires qui aboutissent en \mathbf{r} . Ces concepts peuvent être formalisés par la notion de *flux généralisé* introduite par Brenier [37, 38] (voir aussi E et Vanden Eijnden [39, 40] et Le Jan et Raimond [41]).

Si la diffusivité n'est pas nulle, l'équation d'advection-diffusion est effectivement du deuxième ordre et on ne peut plus la résoudre de la manière indiquée ci-dessus. On choisi

¹En réalité, à cause de l'homogénéité statistique spatiale, la corrélation à n point ne dépend que de $n - 1$ séparations.

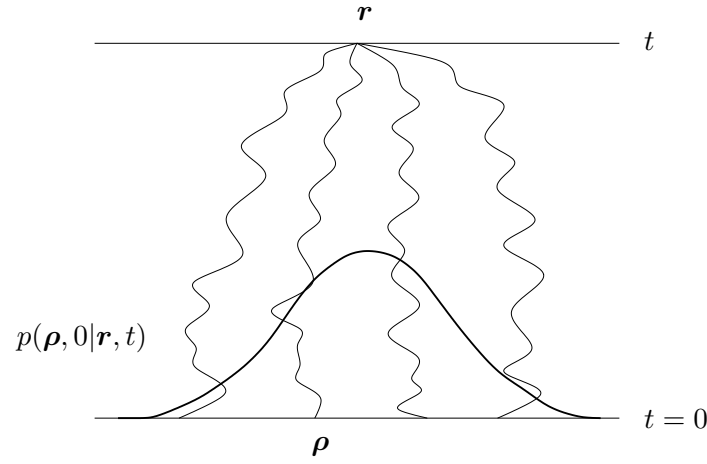


FIG. 1.1 – Lorsque l'écoulement est turbulent, le champ scalaire $\theta(\mathbf{r}, t)$ dans la limite de diffusivité nulle, est obtenu en moyennant la valeur lagrangienne par rapport aux trajectoires stochastiques aboutissant en \mathbf{r} à l'instant t .

généralement de superposer à l'écoulement originaire \mathbf{v} un bruit blanc, c'est-à-dire un processus stochastique vectoriel gaussien tel que

$$\langle \boldsymbol{\eta}(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t').$$

On introduit ensuite un champ scalaire auxiliaire ϕ qui, pour une réalisation fixée du bruit, doit satisfaire une équation de transport, sans terme de diffusion, où le nouvel écoulement porteur est $\mathbf{v} + \sqrt{2\kappa} \boldsymbol{\eta}$

$$\partial_t \phi + [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \sqrt{2\kappa} \boldsymbol{\eta}(t)] \cdot \nabla \phi = 0, \quad (1.4)$$

la condition initiale étant la même que pour θ : $\phi(\mathbf{r}, 0) = \theta_0(\mathbf{r})$. Il est facile de voir que $\bar{\phi}$, moyenne de ϕ par rapport aux réalisations du bruit blanc, vérifie la même équation que le champ θ

$$\partial_t \bar{\phi} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\phi} = \kappa \nabla^2 \bar{\phi}.$$

Pour une réalisation fixée de $\boldsymbol{\eta}$, on peut résoudre l'équation (1.4) par la méthode des caractéristiques (qui sont alors des courbes stochastiques). L'expression du champ θ est donnée en moyennant la solution par rapport aux trajectoires aléatoires aboutissant en \mathbf{r} à l'instant t

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \overline{\phi(\boldsymbol{\rho}(s), s)} = \overline{\theta_0(\boldsymbol{\rho}(s))}, \quad \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r},$$

soit

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \int d\boldsymbol{\rho} \theta_0(\boldsymbol{\rho}) p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0 | \mathbf{r}, t).$$

Dans cette expression, nous avons introduit le propagateur $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, t | \mathbf{r}, 0)$ qui représente la densité de probabilité qu'une particule lagrangienne, qui au temps t se trouve en \mathbf{r} , était à l'instant initial à la position $\boldsymbol{\rho}$ (voir Fig. 1.1).

Dans la limite $\kappa \rightarrow 0$, il faut de nouveau distinguer deux cas. D'après ce que nous avons vu ci-dessus, si l'écoulement est Lipschitz, la probabilité de transition $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0 | \mathbf{r}, t)$

est dégénérée et tend vers $\delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})$. Si, au contraire, le champ de vitesse est turbulent (Hölder-continu avec exposant inférieur à un), la probabilité limite $p(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t) \equiv \lim_{\kappa \rightarrow 0} p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$ n'est pas dégénérée².

Finalement, si la valeur ponctuelle du champ scalaire est déterminée par la distribution des trajectoires lagrangiennes individuelles, les corrélations à $2n$ points seront définies par les configurations à plusieurs particules. Le mouvement à un point est associé à la probabilité de transition $p(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$. De façon similaire, on introduit le propagateur à $2n$ particules $\mathcal{P}_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\underline{\mathbf{r}}, t)$, $\underline{\boldsymbol{\rho}}$ étant le vecteur qui détermine la configuration des $2n$ particules : $\underline{\boldsymbol{\rho}} \equiv (\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_n)$. Le moment d'ordre $2n$ est alors donné par la moyenne de la corrélation initiale du même ordre sur l'ensemble des configurations lagrangiennes

$$\langle \theta^{2n} \rangle_v(t) = \int \mathcal{P}_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\underline{\mathbf{r}}, t) C_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0) d\underline{\boldsymbol{\rho}}.$$

1.3 Intermittence à grande échelle

L'intermittence à petite échelle des champs scalaires est généralement due à la présence de structures fortement localisées et associées à de très grands gradients. La déviation d'une loi d'échelle normale est mesurée par les quantités statistiques basées sur l'évaluation du champ turbulent en deux points proches.

Les mesures à un seul point tiennent compte, au contraire, des fluctuations globales présentes à toutes les échelles et elles sont dominées par les contributions plus intenses des grandes échelles. En conséquence, la statistique à un seul point n'est pas sensible à l'intermittence à petite échelle.

Pendant longtemps, on a pensé qu'en turbulence développée la statistique à un point aussi bien de la vitesse que du scalaire devait être gaussienne. De plus, des expériences semblaient confirmer cette conviction. Le premier résultat qui a contredit une statistique gaussienne à grande échelle a été obtenu dans les années quatre-vingt à l'Université de Chicago. Les grandes fluctuations de température mesurées pour la convection de Rayleigh-Bénard sont plus fréquentes que celles prédites par une distribution gaussienne [43,44]. Plus précisément, ces expériences ont montré que la densité de probabilité à un point de la température a des queues exponentielles (et donc plus larges que gaussiennes) aux grandes valeurs. Ces queues très larges de la densité de probabilité à un point indiquent la formation de structures cohérentes à grande échelle superposées au bruit turbulent. A titre d'exemple, dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, la surface inférieure d'une boîte remplie de fluide est maintenue à une température plus haute que la surface supérieure et les parois sont isolées thermiquement. Lorsque la différence de température est suffisamment grande, des mouvements convectifs de l'échelle de la boîte apparaissent. Des fluctuations turbulentes se superposent à cet écoulement moyen et l'intermittence à grande échelle se manifeste par la présence de panaches de fluide chaud qui montent occasionnellement vers la surface supérieure ou de fluide froid qui ont un mouvement inverse. D'après la définition utilisée par Majda et Kramer [45], nous appelons *intermittence à grande échelle* ce phénomène caractérisé par des événements intenses plus fréquents qu'une distribution gaussienne.

²Il est important de remarquer que la situation serait très différente si le champ de vitesse était fortement compressible [42].

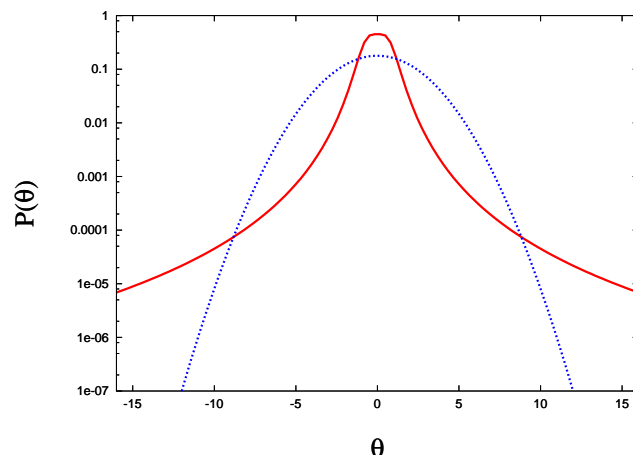


FIG. 1.2 – Exemple de densité de probabilité intermittente (courbe continue) qui déploie des queues plus larges qu’une distribution gaussienne (courbe en tirets).

Les premiers résultats théoriques sur l’intermittence à grande échelle sont dû à Pumar, Shraiman et Siggia [46] qui ont prédit des queues exponentielles pour la densité de probabilité du scalaire dans un modèle phénoménologique de transport turbulent. Des résultats exacts ont ensuite été obtenus pour le déclin du scalaire (en absence de forçage) dans le contexte du modèle proposé par Majda : pour un écoulement linéaire en espace et δ -corrélé en temps, on peut montrer rigoureusement que les facteurs d’aplatissement du scalaire sont plus grands que ceux d’une gaussienne et ainsi que les queues de la densité de probabilité décroissent plus lentement [47]. Vanden Eijnden a récemment généralisé le modèle de Majda et a donné une interprétation lagrangienne de l’intermittence à grande échelle [48].

Les études que nous allons décrire dans la suite du chapitre ont été largement motivées par les travaux de Vanden Eijnden et par les résultats récents sur le déclin du scalaire de Chaves *et al.* [3]. Comme nous allons le voir, le déclin d’un champ scalaire transporté par un écoulement turbulent est génériquement décrit, dans la limite de diffusivité nulle, par une statistique à un point intermittente.

Dans la suite, la densité de probabilité du scalaire sera dite *intermittente* si les facteurs d’aplatissement sont plus grands que ceux d’une gaussienne, c’est-à-dire

$$\frac{\langle \theta^{2n} \rangle}{\langle \theta^2 \rangle^n} > (2n - 1)!! \quad (1.5)$$

Comme nous l’avons dit, cette condition implique que la loi de probabilité des événements rares est fortement différente d’une gaussienne. Dans le cas gaussien, les fluctuations par rapport à la valeur moyenne de la distribution décroissent rapidement avec l’intensité du scalaire. En revanche, si la densité de probabilité est intermittente, des fluctuations très faibles et très probables alternent avec des fluctuations plus larges qui se produisent avec une fréquence beaucoup plus élevée que dans le cas gaussien (voir Fig. 1.2). L’étude des propriétés statistiques pour le déclin d’un champ scalaire est intéressante non seulement du point de vue théorique, mais encore dans les applications. Imaginons par exemple que le champ θ soit une concentration de polluant atmosphérique (non réactif) et qu’il y ait un seuil au delà duquel la concentration devienne dangereuse.

Il est alors indispensable de connaître de façon précise la fréquence des événements dangereux.

Dans la suite, je vais montrer qu'aux temps longs, la condition (1.5) est génériquement vérifiée dans la limite de diffusivité nulle et lorsque l'écoulement porteur est invariant d'échelle avec un exposant inférieur à un, c'est-à-dire pour un champ de vitesse non pas lisse, mais Hölder-continu (ce qui est typique d'un écoulement turbulent). Ces résultats sont basés sur une interprétation lagrangienne de la dynamique.

Dans le cas d'une évolution passive, le champ de vitesse \mathbf{v} peut être choisi de manière à représenter un écoulement turbulent, c'est-à-dire irrégulier en espace. Nous nous donnons les propriétés statistiques d'un champ de vitesse incompressible stationnaire et homogène. Si l'on s'intéresse à l'intermittence à grande échelle, il faut considérer les facteurs d'aplatissement du scalaire et donc toutes les corrélations d'ordre pair. Il sera indispensable que le propagateur a $2n$ particules (cfr. section 1.2.3) satisfasse une propriété d'autosimilarité de la forme³

$$\mathcal{P}_{2n}(\lambda \underline{\rho}, 0 | \lambda \underline{\mathbf{r}}, \lambda^{1-h} t) = \lambda^{-(2n-1)d} \mathcal{P}_{2n}(\underline{\rho}, 0 | \underline{\mathbf{r}}, t) \quad (0 \leq h < 1). \quad (1.6)$$

Une telle condition est trivialement vérifiée pour un modèle de Kraichnan avec $\xi = 2h$. De façon plus générale, on s'attend à ce qu'elle soit satisfaite pour un écoulement autosimilaire quelconque dans la limite de diffusivité nulle ; h représente alors l'exposant de Hölder du champ de vitesse et mesure son irrégularité spatiale, la valeur $h = 1$ correspondant à un écoulement lisse. Remarquons que la condition (1.6) implique que les particules lagrangiennes se séparent de manière super-diffusive : $\langle |\mathbf{r}(t)|^n \rangle \propto t^{n/(1-h)}$ [18].

Pour la condition initiale, on suppose que c'est un champ aléatoire statistiquement homogène et caractérisé par une échelle de corrélation finie L_θ (techniquement cette hypothèse revient à imposer l'intégrabilité de tous les cumulants de la distribution de probabilité du champ initial).

Sous ces conditions, Chaves *et al.* [3] ont montré qu'aux temps longs la densité de probabilité du scalaire prend la forme autosimilaire

$$P(\theta, t) \sim t^{-\frac{d}{2(1-h)}} Q\left(\theta t^{-\frac{d}{2(1-h)}}\right), \quad (1.7)$$

d étant la dimension de l'écoulement. Le déclin du scalaire est caractérisé par une décroissance en loi de puissance qui devient de plus en plus abrupte lorsque h s'approche de 1. Remarquons que ce comportement est très différent de celui observé pour un champ de vitesse lisse sans coupure infrarouge. Le déclin est dans ce cas exponentiel et la densité de probabilité de l'intensité du scalaire est intermittente en temps (voir Balkovsky et Fouxon [49]).

Une propriété importante est que la fonction d'autosimilarité Q ne dépend pas de la forme spécifique de la distribution initiale [3]. Plus précisément, dans un développement en cumulants des corrélations initiales, la contribution dominante aux temps longs est donnée par les termes d'ordre deux (c'est-à-dire les moments d'ordre deux de θ_0). Asymptotiquement la distribution ne dépend plus des moments d'ordre supérieur et la statistique du champ scalaire est la même que si la condition initiale avait été gaussienne. Cela implique l'universalité du déclin par rapport à la statistique du champ initial.

³L'exposant $(2n - 1)d$ vient de l'hypothèse d'homogénéité statistique et le vecteur $\underline{\rho}$ détermine la configuration de $2n - 1$ particules par rapport au barycentre.

On peut donc supposer dans l'étude des propriétés asymptotiques d'un champ scalaire en déclin que le champ initial θ_0 est gaussien. De telles considérations m'ont permis de montrer que l'expression de la densité de probabilité $P(\theta, t)$ peut être exprimée :

$$P(\theta, t) = \int d\sigma_v H(\sigma_v, t) G(\theta/\sigma_v), \quad (1.8)$$

où G désigne la distribution gaussienne de θ_0 , la quantité σ_v^2 est la variable aléatoire définie par

$$\sigma_v^2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\langle \theta_0 \rangle} \int d\boldsymbol{\rho} d\boldsymbol{\rho}' \langle \theta_0(\boldsymbol{\rho}) \theta_0(\boldsymbol{\rho}') \rangle p(\boldsymbol{\rho}, 0 | \mathbf{r}, t) p(\boldsymbol{\rho}', 0 | \mathbf{r}, t) \quad (1.9)$$

et H est la densité de probabilité de σ_v , donnée uniquement par les propriétés du champ de vitesse \mathbf{v} . Avant même de spécifier l'interprétation physique de σ_v , notons que la forme (1.8) implique à elle seule l'intermittence à grande échelle. En effet, une conséquence immédiate est que le scalaire θ a la même statistique que le produit de deux variables indépendantes dont l'une est gaussienne

$$\theta \stackrel{\text{loi}}{\simeq} \theta_0 \sigma_v \quad \text{pour } t \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

En vertu de l'inégalité de Jensen, on a $\langle \sigma_v^{2n} \rangle \geq \langle \sigma_v^2 \rangle^n$, d'où l'inégalité pour les facteurs d'aplatissement

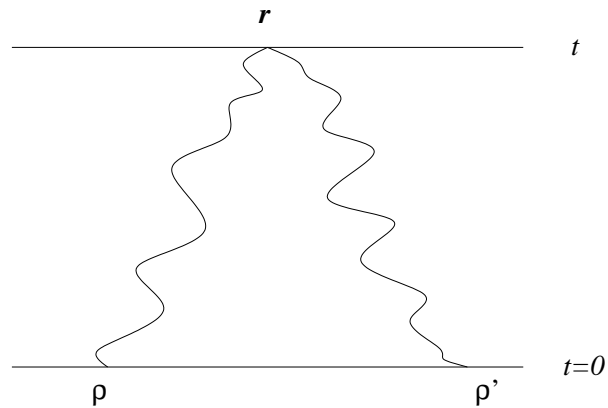
$$\frac{\langle \theta^{2n} \rangle}{\langle \theta^2 \rangle^n} \geq (2n - 1)!!. \quad (1.11)$$

Pour avoir égalité dans cette expression on doit avoir $H(\sigma_v, t) = \delta(\sigma_v - \sigma(t))$, ce qui n'est généralement pas le cas lorsque l'écoulement n'est pas lisse. En conclusion, la densité de probabilité asymptotique $P(\theta, t)$ a des queues plus larges que celles d'une gaussienne et les événements rares sont par conséquent beaucoup plus fréquents. J'ai montré que, quelles que soient les propriétés statistiques de la condition initiale, un champ transporté par un écoulement turbulent autosimilaire a une distribution anormale, ce qui montre une certaine forme d'universalité de l'intermittence du déclin d'un scalaire passif.

Quelques commentaires sur la forme asymptotique (1.10). Elle peut être comprise en termes de trajectoires et conduit à une interprétation lagrangienne de l'intermittence. L'intensité du scalaire s'écrit comme le produit de deux variables aléatoires indépendantes⁴. L'une, θ_0 , est gaussienne et ne dépend que de la condition initiale. L'autre, σ_v , est une variable toujours positive ne dépendant que des propriétés statistiques du champ de vitesse. Considérons deux particules lagrangiennes distinctes qui se rencontrent au temps t à la position \mathbf{r} (voir Fig. 1.3). Puisque la longueur de corrélation initiale du scalaire L_θ est finie, σ_v s'interprète comme la probabilité que la distance à l'instant $t = 0$ entre les deux particules soit inférieure à L_θ . La variable aléatoire σ_v est ainsi reliée à la probabilité que des couples de particules lagrangiennes restent proches durant leur évolution. Or, les grandes fluctuations de l'intensité du scalaire se produisent pour des grandes valeurs de σ_v : l'intermittence à grande échelle est due aux événements où des particules initialement proches restent proches au cours de l'évolution temporelle⁵.

⁴L'indépendance vient de l'hypothèse d'évolution passive.

⁵Un résultat similaire a été discuté par Vanden Eijnden sous des hypothèses différentes [48].



$$\sigma_v^2(\mathbf{r}, t) \equiv \text{Prob}\{ |\rho - \rho'| < L_\theta \}$$

FIG. 1.3 – Interprétation lagrangienne de l’intermittence à grande échelle. Les grandes fluctuations du scalaire à la position \mathbf{r} sont associées aux événements où deux trajectoires lagrangiennes aboutissent en \mathbf{r} après être restées en dessous de l’échelle L_θ durant toute l’évolution passée.

Les travaux présentés dans cette section ont été l’objet d’une collaboration avec Antonio Celani qui a donné lieu à une publication dans *Physica D*, reproduite à la fin du chapitre.

1.4 Conclusions et perspectives

On s’intéresse maintenant au régime stationnaire atteint par le scalaire, ce qui nécessite d’ajouter un terme de forçage f au membre de droite de l’équation d’advection-diffusion (1.1). Cette fois-ci, l’intensité du scalaire n’est plus conservé le long des trajectoires lagrangiennes, mais sa dérivée temporelle est égale au forçage évalué le long de la trajectoire considérée. On a

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}, t) + \sqrt{2\kappa} \boldsymbol{\eta}(t), & \boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r} \\ \dot{\theta} = f \end{cases} \quad (1.12)$$

et l’expression formelle du champ scalaire eulérien est donc

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \overline{\int_{-\infty}^t ds f(\boldsymbol{\rho}(s), s)}.$$

On distingue maintenant deux cas.

D’une part, quand le forçage est gaussien, on peut procéder de manière similaire au cas en déclin et les propriétés statistiques du scalaire peuvent de nouveau s’obtenir du produit de deux variables aléatoires indépendantes dont l’une est gaussienne

$$\theta \stackrel{\text{loi}}{=} \theta' \hat{\sigma}_v. \quad (1.13)$$

La variable θ' dépend cette fois-ci du forçage et $\hat{\sigma}_v$ est toujours donnée par l'écoulement. Une conséquence de l'équation (1.13) est que la distribution à un point de θ est de nouveau intermittente. La variable $\hat{\sigma}_v$ ne s'interprète plus comme la probabilité, mais comme le temps nécessaire pour que deux particules lagrangiennes se séparent d'une distance égale à la longueur de corrélation du forçage. L'intermittence est donc due aux réalisations pour lesquelles les trajectoires restent « longtemps » au dessous de l'échelle typique du forçage.

D'autre part, pour un forçage non gaussien, il n'existe pas pour l'instant de théories et les propriétés statistiques du scalaire dans le régime asymptotique sont encore un problème ouvert. On s'attend à des résultats très différents du cas gaussien puisque des résultats expérimentaux et numériques suggèrent que les densités de probabilité puissent être sous-gaussiennes, c'est-à-dire aient des queues plus basses que celles de la distribution gaussienne [4, 5]. Le régime forcé semble ainsi ne pas avoir des propriétés d'universalité aussi fortes que le cas en déclin.



Intermittency in passive scalar decay

A. Celani^a, D. Vincenzi^{b,*}

^a CNRS, INLN, 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France

^b CNRS UMR 6529, Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4, France

Received 9 January 2002; received in revised form 10 July 2002; accepted 30 July 2002

Communicated by M. Vergassola

Abstract

We consider the decay of a passive scalar in a rough turbulent flow. We show that at large times the scalar intensity is statistically equivalent to the product of two independent random variables. The first factor is a Gaussian variable related to the typical fluctuation at initial conditions. The second factor is essentially the probability that, in a given realization of the flow, tracer particles separate at a very slow rate. Therefore, the large-time scalar distribution is always broader than Gaussian for any initial condition, and large scalar excursions are associated to small relative dispersion events.

© 2002 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 47.27.Qb; 47.27.Eq

Keywords: Turbulence; Passive scalar; Intermittency

1. Introduction

Intermittency is a relevant aspect of fluid turbulence and the understanding of this phenomenon has attracted much interest in recent years [1]. Roughly speaking, the term intermittency is used to describe situations where rare events have a relatively large probability to occur. Physical quantities that are known to exhibit an intermittent behavior are, e.g., velocity differences, pressure and temperature fluctuations. Here, we will be interested in the intermittency of the single-point statistics of a decaying scalar field—as temperature or impurity concentration—passively transported by an incompressible turbulent flow.

The properties of passive scalar decay may be different for velocity fields that vary smoothly in space and for rough (fully developed turbulent) flows. As for smooth velocity, the problem is considered by Son [2] and Balkovsky and Fouxon [3]. They obtain an exponential decay in time for the scalar concentration. Different moments of the scalar probability function decay at different rates, i.e. the decay is not self-similar in time, and the degree of intermittency increases with time. Another important theoretical contribution to the understanding of the scalar decay is given by Majda et al. [4–6]. His model represents the evolution of a passive scalar diffusing in a random linear shear flow

* Corresponding author. Tel.: +33-4-92003172; fax: +33-4-92003121.

E-mail address: vincenzi@obs-nice.fr (D. Vincenzi).

with zero correlation time. In that case the decay is self-similar.¹ Despite of its simplicity, the Majda model allows to capture many features of the scalar decay, first of all intermittency. The exact form of high-order moments is found by exploiting a quantum mechanics analogy and the scalar distribution function is consequently shown to be broader than Gaussian, for Gaussian initial conditions. Its tails were later rigorously estimated by Bronski and McLaughlin [7–9] to be stretched exponentials with an exponent depending on the spatial correlation of the initial condition. A recent contribution in the study of scalar decay in linear shear flows is given by Vanden Eijnden [10], who shows that large values of the scalar intensity are a reflection of slowly spreading Lagrangian paths.

In the case of rough velocity fields, the passive scalar decay is treated by Eyink and Xin [11] and Chaves et al. [12] within the context of the Kraichnan model [13]. In particular, in Ref. [12] the asymptotic scalar decay is proved to be self-similar and universal with respect to the random initial condition. These conclusions are extended to a generic self-similar velocity field and supported by numerical simulations on more realistic flows, specifically two-dimensional Navier–Stokes turbulent flows [14,15]. The results obtained in Ref. [12] will be the starting point of our analysis.

The aim of this paper is to prove that, in the limit as the molecular diffusivity tends to zero, the intermittency of a *decaying* passive scalar transported by a *rough* flow is a universal feature. We suppose that the flow is self-similar for distances shorter than the velocity correlation length. Besides, the spatial correlation of the initial scalar field is assumed to be rapidly decaying in space.

The exposition is divided into two parts.

First, we recall the results of Chaves et al. [12], who demonstrate that, at large times, the dominant contribution to the scalar statistics coincides with that given by Gaussian initial conditions.

Second, we show that at large times the scalar intensity is statistically equivalent to the product of two independent random variables. The first factor is a Gaussian variable related to the typical fluctuation at initial conditions. The second factor is essentially the probability that, in a given realization of the flow, tracer particles separate at a very slow rate. Therefore, the large-time scalar distribution is always broader than Gaussian for any initial condition, and large scalar excursions are associated to small relative dispersion events.

It is worth remarking that these results have been proved rigorously by Vanden Eijnden [10] in the special case of linear shear flows and then extended (under different hypotheses from ours) to more general velocity fields, including rough ones.

We remark that the present results are neither valid for smooth flows nor for forced scalar turbulence. Those cases require a separate treatment that is beyond the purpose of this paper.

2. All initial conditions are asymptotically equivalent to Gaussian initial conditions

The evolution of a passive scalar quantity θ diffusing in an incompressible turbulent flow \mathbf{v} is described by the equation

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (1)$$

where κ denotes the molecular diffusivity.

The initial random condition $\theta(\mathbf{r}, 0)$ is taken statistically homogeneous, with zero mean, and with correlation functions rapidly decaying in space.²

¹ Remark that, although the flow is smooth even in this case, the Lyapunov exponent is zero. This fact has important consequences on the particle trajectories within the flow. We will come back in the sequel to the relation between the Eulerian (scalar field) statistics and the Lagrangian (fluid particles) one.

² Precisely, all the cumulants of the initial scalar field (see Eq. (13)) should be integrable.

If we denote by $L_\theta(t)$ the correlation length of the scalar field $\theta(\mathbf{r}, t)$, the decay will take rise after a characteristic time $T_\theta \simeq L_\theta(0)/v_{\text{rms}}$. In the sequel we will always consider time scales much larger than T_θ .

We take as advecting flow \mathbf{v} an incompressible random field statistically homogeneous in space and stationary in time. Moreover, we assume that the velocity field has self-similar statistics with scaling exponent h ($0 \leq h < 1$), in a sense that will be precisely stated later on (see Eq. (4)). Obviously, the self-similarity holds only for distances shorter than the correlation length of the velocity field, L_v , and $L_\theta(t)$ is supposed to be always shorter than L_v . Since in a self-similar flow $L_\theta(t)$ is known to grow as $t^{1/(1-h)}$, this means that we focus on times much larger than T_θ , but, however, shorter than the time $T_v = O(L_v^{1-h})$ needed for the scalar correlation length to reach the size L_v .

The evolution equation (1) can be solved in terms of particle trajectories satisfying the stochastic differential equation

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt + \sqrt{2\kappa} d\boldsymbol{\eta}(t), \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\eta}$ is the standard d -dimensional Brownian motion. The particle advection is described by the conditional probability density $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$ that, for a given realization of the velocity field, a tracer particle, being at time t in the position \mathbf{r} , were at the initial time in the position $\boldsymbol{\rho}$. Since the stochastic differential equation (2) defines a Markov process, the probability $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$ satisfies the associated Fokker–Planck equation

$$\partial_t p^\kappa + \mathbf{v} \cdot \nabla p^\kappa = \kappa \nabla^2 p^\kappa \quad (3)$$

with initial condition $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, t|\mathbf{r}, t) = \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r})$.

The limiting case $\kappa \rightarrow 0$ will be considered here. If the field \mathbf{v} is Lipschitz continuous in \mathbf{r} (i.e. smooth), the solution of Eq. (2) is unique in that limit and the random probability $p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, t|\mathbf{r}, t)$ degenerates to the distribution $\delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}(t'))$ centered at the unique trajectory $\mathbf{r}(t')$. On the contrary, if \mathbf{v} is not Lipschitz continuous (i.e. it is rough), the solution of Eq. (2) fails to be unique and p^κ tends to a non-degenerate probability density as $\kappa \rightarrow 0$ (see Refs. [16–18]). Here we are interested in a rough flow. The (broad) limiting probability will henceforth be denoted by $p(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$.

The many-particle probability density function (PDF) $\mathcal{P}_{2n}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_{2n}, 0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}, t)$ that $2n$ tracer particles, that at time t lie in the positions $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}$, were at the initial time $t = 0$ in the positions $\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_{2n}$, respectively, is expressible in terms of the random probability density $p(\boldsymbol{\rho}, 0|\mathbf{r}, t)$ as $\langle p(\boldsymbol{\rho}_1, 0|\mathbf{r}_1, t), \dots, p(\boldsymbol{\rho}_{2n}, 0|\mathbf{r}_{2n}, t) \rangle_v$. For the sake of simplicity, we will hereafter indicate by an underlined bold type the set of $2n$ vectors in d dimensions that specify the particle configuration, we will write, e.g. $\mathcal{P}_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\underline{\mathbf{r}}, t)$.³

We assume the following scaling behavior for \mathcal{P}_{2n} :

$$\mathcal{P}_{2n}(\lambda \underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\lambda \underline{\mathbf{r}}, \lambda^{1-h} t) = \lambda^{-(2n-1)d} \mathcal{P}_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\underline{\mathbf{r}}, t) \quad (0 \leq h < 1), \quad (4)$$

which is expected to hold for rough self-similar flows, in the limit $\kappa \rightarrow 0$. It is worth recalling that, under that assumption, Lagrangian particles separate super-diffusively according to a generalization of the Richardson law: $\langle |\underline{\mathbf{r}}(t)|^\zeta \rangle \propto t^{\zeta/(1-h)}$ [1].

The propagator \mathcal{P}_{2n} relates the scalar correlation functions at every time t to those at the initial time

$$C_{2n}(\underline{\mathbf{r}}, t) \equiv \langle \theta(\mathbf{r}_1, t), \dots, \theta(\mathbf{r}_{2n}, t) \rangle = \int \mathcal{P}_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0|\underline{\mathbf{r}}, t) C_{2n}(\underline{\boldsymbol{\rho}}, 0) d\underline{\boldsymbol{\rho}}. \quad (5)$$

³ Due to the velocity field homogeneity, the Lagrangian particle statistics actually depends only on their relative separations, the absolute position of the center of mass being irrelevant. \mathcal{P}_{2n} is therefore, a function of only $2n - 1$ independent space vectors. In the sequel, all the integrations over the configuration space are to be understood as performed over the set of independent coordinates; the volume element $d\underline{\boldsymbol{\rho}}$ has thus a dimension $(2n - 1)d$.

The single-point moments of the scalar PDF are therefore

$$C_{2n}(\underline{\mathbf{0}}) = \langle \theta^{2n} \rangle(t) = \int \mathcal{P}_{2n}(\underline{\rho}, 0 | \underline{\mathbf{0}}, t) C_{2n}(\underline{\rho}, 0) d\underline{\rho}, \quad (6)$$

where $\underline{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, and the symbol $\langle \cdot \rangle$ denotes independent averages over the velocity field and over the initial condition $\langle \cdot \rangle \equiv \langle \cdot \rangle_0$. Exploiting the rescaling of \mathcal{P}_{2n} (Eq. (4)) with $\lambda = t^{-1/(1-h)}$, Eq. (6) can be eventually recasted as

$$\langle \theta^{2n} \rangle(t) = \int \mathcal{P}_{2n}(\underline{\rho}, 0 | \underline{\mathbf{0}}, 1) C_{2n}(t^{1/(1-h)} \underline{\rho}, 0) d\underline{\rho}. \quad (7)$$

From Eq. (7) it is clear that the time dependence of $\langle \theta^{2n} \rangle$ is completely determined by the spatial properties of the initial condition. To know the large-time expression of the single-point moments, we should therefore investigate the behavior of the initial correlation functions as the particle separations become infinite. Two different classes of initial conditions can be identified according to whether the Corrsin integral [19] $J_0 = \int C_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$ is vanishing or not [12]. J_0 is conserved by the evolution equation (1) and therefore, its value is set by the initial correlation function. We explicitly consider here the case $J_0 \neq 0$. When $J_0 = 0$, it can be shown that for the realizability of the initial condition the integral $J_1 = \int r^{1-h} C_2(\mathbf{r}, 0) d\mathbf{r}$ cannot vanish [11]. For a discussion of the $J_0 = 0$ case we refer the reader to Ref. [12]. For the sake of clarity, let us start from the case $2n = 2$

$$\langle \theta^2 \rangle(t) = \int \mathcal{P}_2(\rho_1, \rho_2, 0 | \underline{\mathbf{0}}, 1) C_2(t^{1/(1-h)} \rho_{12}, 0) d\rho_{12}, \quad (8)$$

where $\rho_{12} = \rho_1 - \rho_2$. In the large-time limit, $C_2(t^{1/(1-h)} \rho_{12}, 0)$ tends to $J_0 t^{-d/(1-h)} \delta(\rho_{12})$ and the variance of the scalar PDF assumes the asymptotic expression

$$\langle \theta^2 \rangle(t) \simeq J_0 t^{-d/(1-h)} \mathcal{P}_2(\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{0}} | \underline{\mathbf{0}}, 1). \quad (9)$$

In the case $2n = 4$ it is convenient to consider the cumulant expansion

$$C_4(\underline{\rho}, 0) = K_4(\underline{\rho}) + K_2(\rho_{12})K_2(\rho_{34}) + K_2(\rho_{13})K_2(\rho_{24}) + K_2(\rho_{14})K_2(\rho_{23}), \quad (10)$$

where the second-order cumulant K_2 coincides with the correlation C_2 for zero mean initial conditions. As a consequence of their definition, the cumulants of a joint probability distribution tend to zero, when any two of the points on which they depend become infinitely far apart [21]. The large-time expression of $C_4(t^{1/(1-h)} \underline{\rho}, 0)$ is thus

$$J_0^{(4)} t^{-3d/(1-h)} \delta(\rho_{12})\delta(\rho_{13})\delta(\rho_{14}) + J_0^2 t^{-2d/(1-h)} [\delta(\rho_{12})\delta(\rho_{34}) + \delta(\rho_{13})\delta(\rho_{24}) + \delta(\rho_{14})\delta(\rho_{23})], \quad (11)$$

where $J_0^{(4)} = \int K_4(\underline{\rho}) d\underline{\rho}$. It is then immediately seen that the large t contribution to $\langle \theta^4 \rangle$ is dominated by the two-particle terms in Eq. (11)

$$\langle \theta^4 \rangle > (t) \simeq \frac{3J_0^2}{t^{2d/(1-h)}} \int \mathcal{P}_4(\rho_1, \rho_1, \rho_2, \rho_2, 0 | \underline{\mathbf{0}}, 1) d\rho_1 d\rho_2. \quad (12)$$

This explicitly shows that, at large t , the value of $\langle \theta^4 \rangle(t)$ for a generic homogeneous initial field is equivalent to that given by a Gaussian condition with the same value of the Corrsin integral. This conclusion holds for all moments, and therefore the large-time one-point statistics is only determined by the Gaussian contribution from the initial condition.

Let us now turn to show that the contribution stemming from the second-order cumulants is the leading one for all $\langle \theta^{2n} \rangle(t)$. In general, one should consider the cumulant expansion for $C_{2n}(\underline{\rho}, 0)$ (see, e.g., Ref. [20])

$$C_{2n}(\underline{\rho}, 0) = \sum \frac{1}{q!} \prod_{p=1}^q K(\mu^{(p)}), \quad (13)$$

where the summation is performed over all ordered set of vectors $\boldsymbol{\mu}^{(p)} \in \mathbb{N}^{2n}$, $\mu_i^{(p)} \in \{0, 1\}$, with as sum the vector $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{2n}$. In that representation, $K^{(\boldsymbol{\mu}^{(p)})}$ denotes the cumulant $K_m(\boldsymbol{\rho}_{i_1}, \boldsymbol{\rho}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{\rho}_{i_m})$ of order $m = \sum \mu_i^{(p)}$ and depending on the particles positions $\boldsymbol{\rho}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\rho}_{i_m}$, where the indexes i_1, \dots, i_m are identified by the non-zero components of $\boldsymbol{\mu}^{(p)}$. If K_m is integrable, one obtains the large-time expression

$$\begin{aligned} & K_m(t^{1/(1-h)} \boldsymbol{\rho}_{i_1}, t^{1/(1-h)} \boldsymbol{\rho}_{i_2}, \dots, t^{1/(1-h)} \boldsymbol{\rho}_{i_m}) \\ & \simeq J_0^{(m)} t^{-(m-1)d/(1-h)} \delta(\boldsymbol{\rho}_{i_1} - \boldsymbol{\rho}_{i_2}) \delta(\boldsymbol{\rho}_{i_1} - \boldsymbol{\rho}_{i_3}) \cdots \delta(\boldsymbol{\rho}_{i_1} - \boldsymbol{\rho}_{i_m}) \end{aligned} \quad (14)$$

with⁴ $J_0^{(m)} = \int K_m(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}$. The initial condition correlation functions are reasonably assumed to decay rapid enough to guarantee the integrability of all the cumulants. Every integral in the sum (13) is thus convergent by hypothesis. The generic addendum in that sum results from the product of q ($q \leq n$) cumulants (whose orders have as sum $2n$) and so leads a large-time contribution proportional to $t^{-(2n-q)d/(1-h)}$. It follows that the $(2n-1)!!$ terms like $K_2(t^{1/(1-h)} \boldsymbol{\rho}_{i_1, i_2}) \cdots K_2(t^{1/(1-h)} \boldsymbol{\rho}_{i_{2n-1}, i_{2n}})$ (corresponding to $q = n$) are the dominant ones in the limit of large t . The ratio between the non-Gaussian contribution from the initial condition and the two-particle one decays as $t^{-d/(1-h)}$ with a proportionality constant depending on the initial condition and on the order of the cumulant. Consequently, the large-time expression of the scalar single-point moments for a generic n reads⁵ (see Ref. [12])

$$\langle \theta^{2n} \rangle(t) \simeq \frac{J_0^n}{t^{nd/(1-h)}} (2n-1)!! \int \mathcal{P}_{2n}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_n, \boldsymbol{\rho}_n, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 1) d\boldsymbol{\rho}_1, \dots, d\boldsymbol{\rho}_n. \quad (15)$$

It could be already inferred from Eq. (15) that in general $\theta(\mathbf{0}, t)$ is not normally distributed at large times. Indeed, the condition for Gaussianity is that the integral appearing in Eq. (15) should be proportional to a constant to the n th power for all n . The only known occurrence of this factorization is when the Lagrangian particles are independent and \mathcal{P}_{2n} equals the product of $2n$ terms of the type $\mathcal{P}_1(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{0}|\mathbf{r}, t)$. Within the framework of the Kraichnan model this is exactly verified only for a diffusive velocity field [12].

In the next section we present an alternative, more informative demonstration of the super-Gaussian behavior of scalar statistics. It will unveil the relation between large scalar excursions and the depletion of particle dispersion.

3. Gaussian initial conditions give super-Gaussian large-time distributions

We have recalled above the result obtained in Ref. [12] that the large-time scalar PDF for an arbitrary initial condition coincides with that obtained from a Gaussian initial condition with the same value of J_0 . We can now focus on the situation where $\theta(\mathbf{r}, 0)$ is a Gaussian random field and then prove that $\theta(\mathbf{r}, t)$ is super-Gaussian. This will demonstrate that the passive scalar decay in a self-similar rough flow is generically intermittent.

The scalar field at time t can be written in the form

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \int \theta(\boldsymbol{\rho}, 0) p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{0}|\mathbf{r}, t) d\boldsymbol{\rho}, \quad (16)$$

where $p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{0}|\mathbf{r}, t)$ is the random probability density defined in Section 2: $p(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{0}|\mathbf{r}, t) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} p^\kappa(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{0}|\mathbf{r}, t)$. For a given realization of the velocity field the scalar PDF $P(\theta, t)$ may be expressed in the form $P(\theta, t) = \langle \delta(\theta - \theta(\mathbf{r}, t)) \rangle$ by means of the Lagrangian expression of θ (Eq. (16)). The above average is performed over the initial condition

⁴ The integral $J_0^{(2)}$ coincides with the Corrsin integral J_0 .

⁵ Notice that in the case $J_0 = 0$ the scalar single-point moments decay is different: $\langle \theta^{2n} \rangle(t) \propto t^{-n[d/(1-h)+1]}$ [12].

statistics and the realizations of the velocity field. Exploiting the oscillatory representation of the Dirac delta and averaging over the Gaussian initial condition yields

$$P(\theta, t) = \left\langle \frac{1}{(2\pi \langle \theta_0^2 \rangle)^{1/2} \sigma_v(\mathbf{r}, t)} e^{-\theta^2/2(\theta_0^2)\sigma_v^2(\mathbf{r}, t)} \right\rangle_v \quad (17)$$

with

$$\sigma_v^2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\langle \theta_0^2 \rangle} \int d\rho d\rho' C_2(\rho - \rho', 0) p(\rho, 0 | \mathbf{r}, t) p(\rho', 0 | \mathbf{r}, t), \quad (18)$$

and $\langle \theta_0^2 \rangle = C_2(\mathbf{0}, 0)$. If the initial condition has a correlation length L_θ , the random variable $\sigma_v^2(\mathbf{r}, t)$, that depends on the specific realization of the flow, can be interpreted as the probability that two tracer particles clumped in \mathbf{r} at time t , were initially at a distance smaller than L_θ

$$\sigma_v^2(\mathbf{r}, t) \simeq \text{Prob}\{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'| < L_\theta\}. \quad (19)$$

The random probability $\sigma_v^2(\mathbf{r}, t)$ is therefore inversely related to the dispersion rate of a scalar blob: the larger the $\sigma_v^2(\mathbf{r}, t)$, the smaller the rate-of-growth of the blob.

Since \mathbf{v} is a random field, $\sigma_v(\mathbf{r}, t)$ is characterized by a PDF $H(\sigma_v, t)$, determined by the velocity statistics. The complete scalar PDF is then derived by taking the average over such distribution

$$P(\theta, t) = \int d\sigma_v H(\sigma_v, t) \frac{1}{(2\pi \langle \theta_0^2 \rangle)^{1/2} \sigma_v} e^{-\theta^2/2(\theta_0^2)\sigma_v^2}. \quad (20)$$

Remark that, after averaging over the velocity statistics, the dependence on \mathbf{r} is lost due to the statistical homogeneity of \mathbf{v} . The latter expression for $P(\theta, t)$ is the convolution between H and the Gaussian distribution with zero mean and variance $\langle \theta_0^2 \rangle$. This can be recast in the statement that the random variable θ at any time t can always be expressed as

$$\theta \triangleq \theta_0 \sigma_v, \quad (21)$$

where θ_0 is a Gaussian variable with variance $\langle \theta_0^2 \rangle$ only depending on the initial condition. The evolution of $P(\theta, t)$ in time is contained in $H(\sigma_v, t)$, which is in turn determined by the Lagrangian statistics of the turbulent advecting flow. An analogous factorization is proved to be at the origin of asymptotic scalar intermittency in linear shear flows [10].

The single-point scalar moments are then easily computed as⁶

$$\langle \theta^{2n} \rangle(t) = (2n - 1)!! \langle \theta_0^2 \rangle^n \langle \sigma_v^{2n} \rangle_v(t). \quad (22)$$

The Jensen inequality [20] insures that $\langle \sigma_v^{2n} \rangle_v \geq \langle \sigma_v^2 \rangle_v^n$, and thus

$$\frac{\langle \theta^{2n} \rangle(t)}{[\langle \theta^2 \rangle(t)]^n} \geq (2n - 1)!!. \quad (23)$$

Therefore, the scalar PDF $P(\theta, t)$ is always broader than Gaussian, except for the case $H(\sigma_v, t) = \delta(\sigma_v - \bar{\sigma}(t))$. Physically, the condition $H(\sigma_v, t) = \delta(\sigma_v - \bar{\sigma}(t))$ is expected to hold only for the special case of a diffusive velocity field. This is in agreement with the results in Eq. (15) for a Kraichnan velocity field with exponent $h = 0$ [12]. As an instance of the relation (21), if the distribution function of σ_v^2 is exponential, the scalar PDF has exponential tails

⁶ It should be noted that the scalar single-point moments converge to the large-time expression (15) not uniformly in n [10]. Therefore, each moment $\langle \sigma_v^{2n} \rangle(t)$ satisfies the decay law (15) only for times $t \gg O(n^{(1-h)/2})$.

as in the case of two-dimensional Navier–Stokes flows analyzed in Ref. [12]. In general, we expect the statistics of σ_v^2 to be sensitive to the details of the velocity field.

It should be noted that large deviations of θ correspond to large values of σ_v . According to the physical meaning of σ_v^2 (see Eq. (19)), the passive scalar intermittency is therefore connected to clustering phenomena of the Lagrangian trajectories. This has been already pointed out by Shraiman and Siggia [22] for smooth flows and in a more general context by Vanden Eijnden [10].

4. Conclusions and discussion

We have shown that the large-time one-point statistics of a decaying passive scalar is generically intermittent. The scalar intensity is a random variable equivalent to the product of a Gaussian variable related to the initial condition times a positive random variable that measures the frequency of exceedingly small particle dispersion events. Our conclusions are independent of the choice of random initial conditions, which are only assumed to be homogeneous in space and with rapidly decaying spatial correlation.

It could be of interest to investigate the situation where the velocity field is itself intermittent, as in real three-dimensional flows. Since the previous arguments hold for whatever h , $0 < h < 1$, it is plausible that intermittency is present also in this case. It is, however, unclear whether the decay will still be self-similar in time. This point requires further investigations.

We remark that similar results can be obtained in the case of forced passive scalar transport with Gaussian forcing. In that situation a source term $f(\mathbf{r}, t)$ should be added to the right-hand side of Eq. (1) and the scalar intermittency is proved by following a method similar to the one we have presented. In the forced case the quantity σ_v^2 becomes the average time a fluid spot takes to reach a size larger than the correlation length of the forcing. Note, however, that these results hold only for a Gaussian forcing. We do not expect in the forced case the same degree of universality as in the decaying case. Finally, there are experimental [23] and numerical [24] observations of sub-Gaussian scalar PDFs (i.e., with narrower than Gaussian tails) for forced scalar. There, the sub-Gaussianity of the scalar distribution may stem from a sub-Gaussian statistics of the forcing. Further analysis is needed to clarify this point.

Acknowledgements

We would thank A. Mazzino, E. Vanden Eijnden, and M. Vergassola for useful suggestions and discussions. The work was partially supported by the European Union under Contract No. HPRN-CT-2000-00162. DV was supported by a doctoral grant of the University of Nice.

References

- [1] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.* 73 (2001) 913–975.
- [2] D.T. Son, Turbulent decay of a passive scalar in the Batchelor limit: exact results from a quantum-mechanical approach, *Phys. Rev. E* 59 (1999) R3811–R3814.
- [3] E. Balkovsky, A. Fouxon, Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem, *Phys. Rev. E* 60 (1999) 4164–4174.
- [4] A.J. Majda, The random uniform shear layer: an explicit example of turbulent diffusion with broad tail probability distribution, *Phys. Fluids A* 5 (1993) 1963–1970.
- [5] A.J. Majda, Explicit inertial range renormalization theory in a model of turbulent diffusion, *J. Statist. Phys.* 73 (1993) 515–542.
- [6] R.M. McLaughlin, A.J. Majda, An explicit example with non-Gaussian probability distribution for nontrivial scalar mean and fluctuation, *Phys. Fluids* 8 (1996) 536–547.

- [7] J.C. Bronski, R.M. McLaughlin, Scalar intermittency and the ground state of periodic Schrödinger equations, *Phys. Fluids* 9 (1996) 181–190.
- [8] J.C. Bronski, R.M. McLaughlin, The problem of moments and the Majda model for scalar intermittency, *Phys. Lett. A* 265 (2000) 257–263.
- [9] J.C. Bronski, R.M. McLaughlin, Rigorous estimate of the tails of the probability distribution function for the random linear shear model, *J. Statist. Phys.* 98 (2000) 897–915.
- [10] E. Vanden Eijnden, Non-Gaussian invariant measures for the Majda model of decaying turbulent transport, *Commun. Pure Appl. Math.* 54 (2001) 1146–1167.
- [11] G.L. Eyink, J. Xin, Self-similar decay in the Kraichnan model of a passive scalar, *J. Statist. Phys.* 100 (2000) 679–741.
- [12] M. Chaves, G. Eyink, U. Frisch, M. Vergassola, Universal decay of scalar turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001) 2305–2308.
- [13] R.H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* 11 (1968) 945–963.
- [14] J. Paret, P. Tabeling, Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: experimental observations, *Phys. Fluids* 10 (1998) 3126–3136.
- [15] G. Boffetta, A. Celani, M. Vergassola, Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior, *Phys. Rev. E* 61 (2000) R29–R32.
- [16] D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen, Slow modes in passive advection, *J. Statist. Phys.* 90 (1998) 519–569.
- [17] W.E.E. Vanden Eijnden, Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 97 (2000) 8200–8205.
- [18] Y. Le Jan, O. Raimond, Integration of Brownian vector fields, *Ann. Probab.* 30 (2002) 826–873.
- [19] S. Corrsin, The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. Aeronaut. Sci.* 18 (1951) 417–423.
- [20] A.N. Shiryayev, *Probability*, Springer, Berlin, 1984.
- [21] A.S. Monin, A.M. Yaglom, in: J. Lumley (Ed.), *Statistical Fluid Mechanics*, vol. 1, MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [22] B. Shraiman, E.D. Siggia, Lagrangian path integrals and fluctuations in random flows, *Phys. Rev. E* 49 (1994) 2912–2927.
- [23] Jayesh, Z. Warhaft, Probability distribution of a passive scalar in grid-generated turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 3503–3506.
- [24] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, M. Vergassola, Fronts in passive scalar turbulence, *Phys. Fluids* 13 (2001) 1768–1783.

Chapitre 2

Dynamo magnétique

2.1 Introduction

La notion de *dynamo magnétique* se rapporte au processus physique par lequel le champ magnétique est amplifié et soutenu par le mouvement d'un fluide conducteur électriquement neutre.

Le développement d'une théorie de la dynamo est pour l'essentiel motivé par ses applications astrophysiques. L'idée que les champs magnétiques des corps célestes peuvent avoir une origine hydrodynamique remonte à J. Larmor qui en 1919, a proposé que le magnétisme du Soleil ait pour origine le mouvement du plasma qui constitue son cœur [50]. A l'heure actuelle, une grande partie des phénomènes magnétiques observés dans les planètes, les étoiles et les galaxies est expliquée par des mécanismes hydrodynamiques [51–53].

La décroissance d'un champ magnétique dans un corps conducteur de dimension linéaire l et de conductibilité électrique σ est associée à un temps caractéristique $\tau = l^2 \sigma \mu_0$, μ_0 étant la permittivité magnétique du vide. Pour le noyau métallique de la Terre ($l \simeq 3 \times 10^6$ m, $\sigma \simeq 10^5 \Omega^{-1} m^{-1}$), on obtient un temps de relaxation de 3×10^4 ans, ce qui est beaucoup plus court que l'âge actuel de la planète (presque 5×10^9 ans). Sans un mécanisme qui lui permette de se maintenir, le champ magnétique terrestre aurait donc déjà disparu. Seule la conversion en énergie magnétique de l'énergie cinétique propre aux écoulements convectifs à l'intérieur de la planète peut expliquer les observations sur la nature et l'évolution du champ magnétique terrestre.

Le champ magnétique transporté par un fluide conducteur est amplifié par les gradients du champ de vitesse et dissipé par la résistivité non nulle du fluide. De manière générale, on dit qu'il y a *effet dynamo* si l'amplification par l'écoulement l'emporte sur la dissipation ohmique. Le but fondamental de la théorie de la dynamo est d'établir sous quelles conditions l'écoulement conduit effectivement à cet effet dynamo. Dans ce chapitre, ce problème est abordé dans le cadre générale du modèle de Kraichnan [6], c'est-à-dire lorsque le champ magnétique est transporté par un champ de vitesse auto-similaire en espace et δ -corrélé en temps (voir la section 1.2.2). Je décris de manière générale l'influence des propriétés du champ de vitesse sur le champ magnétique et notamment sur ses propriétés spatiales et temporelles.

Avant d'entrer dans les détails de l'effet dynamo, je vais présenter les mécanismes à la base de la croissance du champ magnétique par un exemple très simple. Il s'agit de la dynamo « stretch-twist-fold » (étirement-torsion-repliement) proposée par Ya. B.

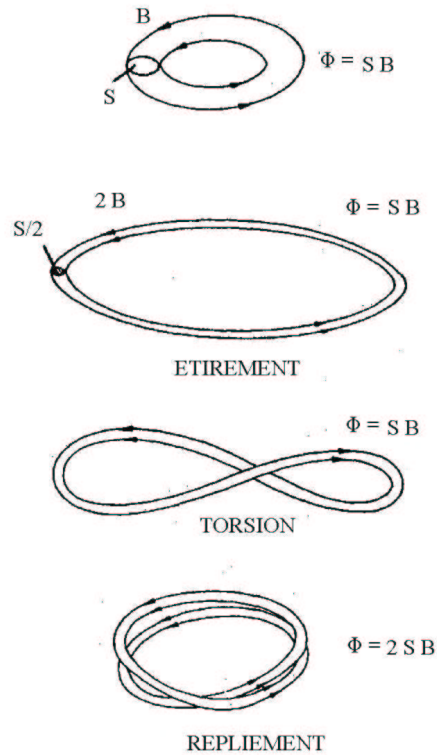


FIG. 2.1 – Dynamo « stretch-twist-fold » de Zel'dovich.

Zel'dovich en 1971 et publiée pour la première fois en 1972 [54]. On considère initialement un tube de flux ayant la forme d'un tore et on appelle Φ le flux magnétique à travers une surface transversale à ce tube (voir Fig. 2.1). Le tube est tout d'abord étiré par l'écoulement de manière uniforme et incompressible jusqu'à atteindre une longueur égale au double de sa longueur initiale. Le flux magnétique à travers le tube torique étiré est encore Φ . Ensuite, le tube est tordu en forme de huit et finalement replié dans son volume original, le flux total à travers une surface transversale au tore étant maintenant 2Φ . Après n cycles identiques, le flux final sera $2^n\Phi$: le champ magnétique croît donc exponentiellement vite en temps avec un taux égal à $\ln 2$ (si le temps pour un cycle entier est unitaire). Même s'il s'agit d'un modèle très simplifié, la dynamo de Zel'dovich permet de se faire une idée de certains aspects fondamentaux de l'effet dynamo. Nous verrons dans la suite que cet effet peut dépendre de la complexité de l'écoulement, bien qu'il ne soit pas nécessaire qu'il ait une l'hélicité $\langle \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \rangle$ non nulle.

2.2 Equation d'induction magnétique et dynamo cinématique

L'évolution du champ magnétique transporté par un écoulement \mathbf{v} est déterminée par les équations de Maxwell. Dans des conditions non relativistes, on peut négliger le courant de déplacement qui serait responsable de contributions de l'ordre de v^2/c^2 ,

c étant la vitesse de la lumière. En outre, on suppose que le fluide est un conducteur ohmique de conductivité σ constante. Combinant donc la loi d'Ampère ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$), la loi de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$), la loi d'Ohm ($\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$) et en utilisant l'incompressibilité de l'écoulement ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), on obtient l'équation d'induction magnétique (voir par exemple [51, 52, 55])

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \kappa \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Le coefficient devant le laplacien est la *diffusivité magnétique* $\kappa = (\mu_0 \sigma)^{-1}$, inversement proportionnelle à la conductivité électrique du fluide. Bien évidemment, le champ \mathbf{B} doit d'autre part vérifier la condition de solénoïdalité $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

En général, l'équation d'induction doit être complétée par les équations ordinaires de l'hydrodynamique. Le couplage entre le champ magnétique et le champ de vitesse est matérialisé par la force de Lorentz qui est responsable de la présence du terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ dans les équations de Navier-Stokes. Or, lorsqu'on s'intéresse à l'origine des champs magnétiques, il est naturel de supposer qu'à l'instant initial le champ \mathbf{B} a une faible amplitude et qu'il n'affecte donc pas la dynamique du milieu conducteur. On néglige donc la force de Lorentz (qui est quadratique en \mathbf{B}), ce qui implique que l'évolution du champ de vitesse est indépendante de \mathbf{B} . L'étude de la croissance des champs magnétiques se ramène ainsi à un problème de transport passif linéaire entièrement déterminé par l'équation (2.1) (accompagnée d'une condition initiale et de conditions aux bords adéquates). La théorie de la *dynamo cinématique* a pour objet l'analyse de l'équation d'induction pour un champ de vitesse \mathbf{v} donné et décrit l'évolution du champ magnétique avant la saturation produite par la force de Lorentz.

En l'absence d'écoulement ($\mathbf{v} = 0$), l'équation (2.1) se réduit à l'équation de diffusion $\partial_t \mathbf{B} = \kappa \nabla^2 \mathbf{B}$. Un champ magnétique initial ayant une échelle caractéristique l est dissipé pendant un temps de l'ordre de l^2 / κ . Par contre, le mouvement du fluide introduit un effet inductif qui peut amplifier le champ magnétique et convertir l'énergie cinétique en énergie magnétique : ce transfert d'énergie est dû à la présence du terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Par analogie avec l'équation de Navier-Stokes, l'intensité relative de l'amplification par induction et de la dissipation est définie par le *nombre de Reynolds magnétique*

$$R_m \equiv \frac{UL}{\kappa}$$

où L et U sont respectivement l'échelle et l'amplitude caractéristiques du champ de vitesse. Pour se donner une idée de l'ordre de grandeur de ce nombre, on a $R_m \simeq 160$ pour le noyau de la Terre, $R_m \simeq 2 \times 10^8$ pour la couche convective du Soleil et $R_m \simeq 10^6$ pour un disque galactique [53].

De façon générale, le problème de la dynamo cinématique consiste à établir sous quelles conditions l'action inductive l'emporte sur la dissipation, ce qui correspond à chercher des solutions de l'équation (2.1) qui croissent en temps. On définit alors le *taux de croissance magnétique*

$$\gamma(R_m) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \langle \ln B^2 \rangle \quad (2.2)$$

et il y a effet dynamo si $\gamma(R_m)$ est positif. Au siècle dernier, l'existence d'un effet dynamo a été démontrée dans plusieurs écoulements laminaires et stationnaires [56–59]. Ici nous nous attaquons au problème de la dynamo cinématique dans un champ turbulent de Kraichnan en suivant l'approche quantique proposée par Kazantsev en 1967 [7].

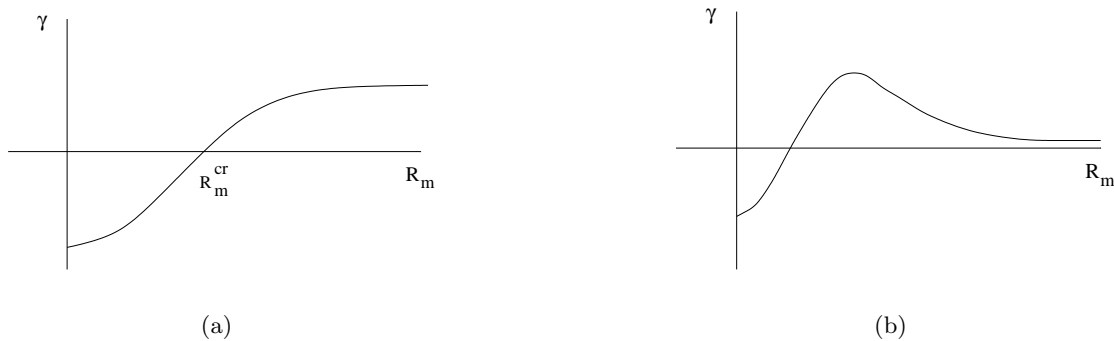


FIG. 2.2 – Classification de l’effet dynamo selon le comportement du taux de croissance magnétique γ lorsque le nombre de Reynolds magnétique R_m tend vers l’infini : (a) dynamo rapide ; (b) dynamo lente.

D’après la définition (2.2), le taux de croissance (et donc l’effet dynamo) est une fonction du nombre de Reynolds magnétique. Lorsque R_m tend vers zéro, la diffusion magnétique l’emporte sur l’action du champ de vitesse et γ est négatif. Pour qu’un effet dynamo soit possible, il faut que γ s’annule pour une certaine valeur critique $R_m^{(cr)}$ et devienne positif pour un accroissement de $R_m > R_m^{(cr)}$. Suivant le comportement de γ pour $R_m \rightarrow \infty$, on distingue alors deux classes d’effet dynamo (voir Fig. 2.2) : soit le taux de croissance magnétique tend vers une valeur positive indépendante de κ (*dynamo rapide*), soit, après être devenu positif, il tend vers zéro (*dynamo lente*)¹. Ce comportement dans la limite de faible dissipation dépend évidemment des propriétés du champ de vitesse : la dynamo de Zel’dovich (Fig. 2.1) est un cas de dynamo rapide puisque le taux de croissance $\gamma = \ln 2$ est indépendant de κ . (Pour un exemple de dynamo lente voir la dynamo d’Alfvén [61].)

D’après ce que nous avons vu ci-dessus, une condition nécessaire pour qu’il y ait effet dynamo est sûrement d’avoir un nombre de Reynolds magnétique suffisamment élevé. Toutefois, cela ne suffit généralement pas : l’écoulement ne doit pas avoir de structure spatiale « trop simple ». En effet, un théorème de Zel’dovich nous indique qu’un champ de vitesse plan ne peut amplifier un champ magnétique lui même plan [60, 62]. De même, en géométrie sphérique il ne peut pas y avoir effet dynamo pour un écoulement purement torique, c’est-à-dire sans composante radiale [63]. Ainsi, lorsqu’on impose trop de symétrie au champ de vitesse, il peut y avoir une amplification transitoire du champ magnétique, mais qui est toujours suivie d’une décroissance asymptotique de \mathbf{B} (pour une revue des théorèmes antidynamo voir par exemple Gilbert [55]).

Les écoulements turbulents que l’on observe dans la nature sont souvent suffisamment irréguliers pour que la condition de complexité topologique y soit automatiquement satisfaite. De plus, les corps célestes étant généralement de grande dimension, les nombres de Reynolds magnétiques qui leur sont associés prennent des valeurs très élevées et les mécanismes qui conduisent à l’effet dynamo y sont ainsi possibles. Les premières observations expérimentales de l’effet dynamo sont relativement récentes, car il est très difficile d’obtenir en laboratoire des nombres de Reynolds magnétiques suffisamment

¹La classification en dynamo lente et dynamo rapide a été proposée par Zel’dovich et Ruzmaïkin en 1980 [60].

élevés. Les expériences les plus connues qui ont permis de mesurer la dynamo sont celles de Riga et Latvia basés sur la dynamo de Ponomarenko [64] et celle de Karlsruhe qui fait usage de la dynamo de Roberts [65].

Avant de terminer cette introduction, rappelons que la formulation lagrangienne associée à l'équation (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\rho}(t), t) + \sqrt{2\kappa} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{b}} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\eta}$ est de nouveau un bruit blanc (cf. section 1.2.3). Le champ eulérien $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ est alors obtenu en moyennant les champs lagrangiens par rapport aux différentes trajectoires aboutissant en \mathbf{r} à l'instant t : $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{b}}$. Les équations (2.3) impliquent que le champ lagrangien \mathbf{b} le long d'une trajectoire donnée évolue exactement comme le vecteur tangent à la trajectoire considérée. Dans un écoulement régulier aux petites échelles, le module de \mathbf{b} croît donc exponentiellement avec un taux donné par l'exposant de Lyapunov le plus grand de l'écoulement. Toutefois, le champ eulérien \mathbf{B} étant la moyenne du vecteur lagrangien évalué le long de *plusieurs* trajectoires stochastiques, la distribution des directions des vecteurs tangents est décisive pour l'effet dynamo. L'évolution temporelle du champ magnétique résulte donc de l'action opposée de l'amplification du module de \mathbf{b} et de la dispersion de ses directions.

2.3 La dynamo de Kraichnan-Kazantsev

Génériquement, il existe deux types de dynamo cinématique. Le premier est lié à la croissance du champ moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$; cette dynamo « de champ moyen » est un phénomène à grande échelle et dépend fortement des propriétés non universelles du système telles que la géométrie, la rotation, l'écoulement moyen, etc. Le deuxième type de dynamo vient de l'interaction entre le champ magnétique et la turbulence et est caractérisé par l'amplification des fluctuations de l'énergie magnétique $\langle B^2 \rangle$. Nous nous intéressons ici au deuxième type de dynamo cinématique. L'écoulement turbulent est modélisé par un champ de Kraichnan, ce qui permet de réduire l'étude de l'effet dynamo à un problème standard de mécanique quantique.

Choisir $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ dans le cadre du modèle de Kraichnan représente un des rares cas où le problème de la dynamo cinématique peut être abordé semi-analytiquement. En effet, la δ -corrélation en temps du champ de vitesse permet d'écrire une équation différentielle fermée pour le moment d'ordre deux du champ magnétique. Rappelons que dans le modèle de Kraichnan (introduit de manière plus détaillée au chapitre 1), le champ de vitesse est un champ aléatoire gaussien, de moyenne nulle et dont la corrélation à deux points s'écrit

$$\langle v_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{x}, t') \rangle = \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) \delta(t - t') = [\mathcal{D}_{ij}(0) - S_{ij}(\mathbf{r})] \delta(t - t').$$

Le tenseur $S_{ij}(\mathbf{r})$ décrit les propriétés statistiques des différences de vitesse alors que $\mathcal{D}_{ij}(0) = D_0 \delta_{ij}$ mesure la diffusivité turbulente de l'écoulement. $S_{ij}(\mathbf{r})$ est choisi de manière à obtenir un écoulement statistiquement isotrope et invariant par parité. L'approximation de corrélation temporelle nulle est valable si le champ de vitesse est corrélé à des temps beaucoup plus courts que les temps caractéristiques associés à l'effet dynamo.

Les conséquences d'une corrélation temporelle finie sur la dynamo ont été discutées par Schekochihin et Kulsrud, qui ont notamment montré que ce choix implique la réduction des taux de croissance magnétique [66]. Finalement, nous considérons un champ de vitesse tridimensionnel car selon le théorème de Zel'dovich, il ne peut y avoir effet dynamo en dimension deux [62].

Si le champ initial $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ est homogène, isotrope et invariant par parité, le champ magnétique au temps t conserve les mêmes symétries grâce à l'invariance par translation, rotation et réflexion² de l'équation d'induction (2.1). En conséquence, le tenseur de corrélation du champ magnétique à des instants coïncidants s'écrit sous la forme [22]

$$\langle B_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{x}, t) \rangle = G_1(r, t) \delta_{ij} + G_2(r, t) \frac{r_i r_j}{r^2}. \quad (2.4)$$

Comme le champ magnétique est de divergence nulle, les fonctions G_1 et G_2 ne sont pas indépendantes, mais doivent satisfaire l'équation $r^2 \partial_r G_1 = -\partial_r (r^2 G_2)$. Le tenseur (2.4) est donc défini par une seule fonction scalaire, par exemple sa trace $H(r, t) \equiv 3G_1(r, t) + G_2(r, t)$. Déterminer la fonction H est équivalent à résoudre une équation de Schrödinger à temps imaginaire et masse variable

$$\partial_t \Psi = \frac{1}{m(r)} \partial_r^2 \Psi - U(r) \Psi. \quad (2.5)$$

La fonction d'onde Ψ est reliée à la trace du tenseur de corrélation par une transformation du type

$$\Psi(r, t) = F(r) \int_0^r H(\rho, t) \rho^2 d\rho, \quad (2.6)$$

où la fonction F ne dépend que de la variable spatiale r . La masse m et le potentiel U dans l'équation (2.5) s'écrivent en fonction de la trace de la fonction de structure du champ de vitesse, $s(r) \equiv \sum S_{ii}(r)$. L'équation de Schrödinger (2.5) a été obtenue à l'aide de techniques diagrammatiques par Kazantsev [7] et par intégration gaussienne par parties par Vergassola [68].

D'après la relation (2.6), il est évident qu'il y a effet dynamo si la fonction d'onde Ψ croît en temps. Suivant l'approche quantique, Ψ peut être projeté sur une base d'états d'énergie donnée : $\Psi(r, t) = \sum_E \psi_E(r) e^{-Et}$. L'existence d'un effet dynamo est donc équivalente à la présence d'états à énergie négative ou, plus précisément, c'est le signe de l'énergie de l'état fondamental qui détermine la possibilité de la dynamo. En résumé, le problème de la dynamo cinématique pour un écoulement de Kraichnan se ramène à un problème aux valeurs propres pour un opérateur du type de Schrödinger : l'énergie de l'état fondamental donne le taux de croissance asymptotique $\gamma(\kappa)$ et la fonction propre ψ_{E_0} qui lui est associée détermine les propriétés spatiales du champ magnétique engendré par l'écoulement.

Depuis l'article écrit par Kazantsev en 1967, la dynamo dans un champ de vitesse du type du modèle de Kraichnan a été étudiée dans la limite de nombres de Reynolds magnétiques infinis [68], pour des formes particulières du potentiel quantique [69–73] ou pour des écoulements lisses [74–76].

A noter que le modèle de Kraichnan-Kazantsev ne concerne que les corrélations à deux points du champ magnétique. Il pourrait être intéressant d'étudier la structure spatiale du champ \mathbf{B} en considérant les corrélations à plus de deux points et notamment d'explicitier leur croissance temporelle.

²La dynamo pour un modèle de Kraichnan ayant une hélicité non nulle a été traitée par Boldyrev [67].

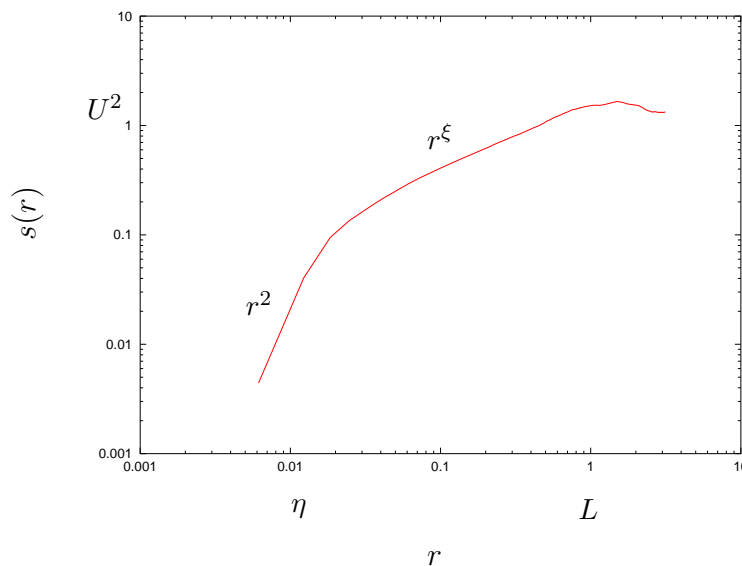


FIG. 2.3 – Forme de la trace de la fonction de structure d’un champ de vitesse turbulent et définition des échelles intégrale et visqueuse.

2.3.1 Fonction de structure du champ de vitesse

Nous avons vu que la masse m et le potentiel U dans l’équation de Schrödinger sont donnés par la trace de la fonction de structure du champ de vitesse de Kraichnan, $s(r)$. Rappelons que pour un écoulement turbulent la fonction $s(r)$ prend la forme typique illustrée par la figure 2.3 (voir par exemple Frisch [20]). La fonction de structure tend vers une valeur constante, $\mathcal{D}_{ii}(0)$, au delà de l’échelle de corrélation $L \equiv [1/\mathcal{D}_{ii}(0)] \int_0^\infty dr \mathcal{D}_{ii}(r)$ (dite aussi *échelle intégrale*). L’échelle la plus petite qui caractérise l’écoulement est déterminée par la dissipation visqueuse : l’action de la viscosité ν rend le champ de vitesse lisse en dessous de l’échelle de Kolmogorov $\eta \equiv (\nu/\epsilon_v^3)^{3/4}$, ϵ_v désignant le taux de dissipation de l’énergie cinétique par unité de masse.

L’intervalle d’échelles compris entre η et L est appelé *intervalle inertiel*. Le champ de vitesse y est invariant d’échelle avec un exposant $\xi/2$ ($\xi \in [0, 2]$) qui en mesure l’irrégularité spatiale. Pour un champ de vitesse δ -corrélé en temps, la loi d’échelle proposée par Kolmogorov, $s(r) \sim r^{2/3}$ (caractéristique de la turbulence développée), est obtenue pour $\xi = 4/3$.

La dissipation ohmique définit quant à elle une échelle typique pour le champ magnétique. Il s’agit de l’échelle diffusive r_d en dessous de laquelle le terme d’induction devient négligeable devant le terme de dissipation. Le nombre de Reynolds magnétique mesure l’importance de l’étirement à grande échelle par rapport à la dissipation magnétique à petite échelle ; il est donc lié au rapport entre l’échelle intégrale et l’échelle diffusive, ce qui conduit à l’estimation $R_m \approx L/r_d$. Le rapport entre l’échelle visqueuse et l’échelle diffusive est quant à lui déterminé par le nombre de Prandtl magnétique $Pr \equiv \nu/\kappa \approx (\eta/r_d)^\xi$. Dans les galaxies, le nombre de Prandtl est très élevé (de l’ordre de 10^4) et l’écoulement est lisse [75] alors que la dynamo solaire et la dynamo terrestre

sont caractérisées par des nombres de Prandtl très faibles (respectivement de l'ordre de 10^{-2} pour le Soleil [77] et 10^{-5} pour la Terre [78]).

Dans les sections suivantes, je décris comment les propriétés du champ de vitesse décrites ci-dessus affectent la croissance du champ magnétique.

2.3.2 Intervalle inertiel

Dans l'intervalle inertiel, $\eta \ll r \ll L$, on peut négliger la présence de l'échelle visqueuse et de l'échelle intégrale, ce qui correspond à se limiter aux régimes asymptotiques $R_m \rightarrow \infty$ et $Pr \rightarrow 0$. Dans cette gamme d'échelles, le champ de vitesse est caractérisé par l'exposant $\xi/2$ qui est égal à l'exposant de Hölder de l'écoulement. La fonction de structure du champ de vitesse prend alors la forme :

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^{\xi-2} [(2 + \xi)r^2 \delta_{ij} - \xi r_i r_j].$$

Il s'agit exactement des hypothèses effectuées initialement par Kazantsev [7] et reprises par Vergassola [68]. Notons que la dynamo à petite échelle, $r \ll \eta$, peut être étudiée dans cette limite à condition de choisir $\xi = 2$ [74–76].

Revenons à présent à l'approche quantique. D'après l'expression variationnelle de l'énergie

$$E = \frac{\int dr m U \psi_E^2 + \int dr (\psi_E')^2}{\int dr m \psi_E^2},$$

il est évident que pour étudier l'effet dynamo dans la situation considérée, il suffit d'analyser les états liés d'une particule quantique de masse unitaire dans le potentiel $V(r) \equiv m(r)U(r)$.

En accord avec les théorèmes antidynamo, le potentiel quantique en dimension deux est partout positif, il n'y a pas d'états liés et l'effet dynamo est donc impossible [70].

Regardons le cas tridimensionnel. Aux échelles inférieures à r_d le potentiel V est répulsif quelle que soit la valeur de ξ (voir Fig. 2.4). Cette barrière de la forme $2/r^2$ vient

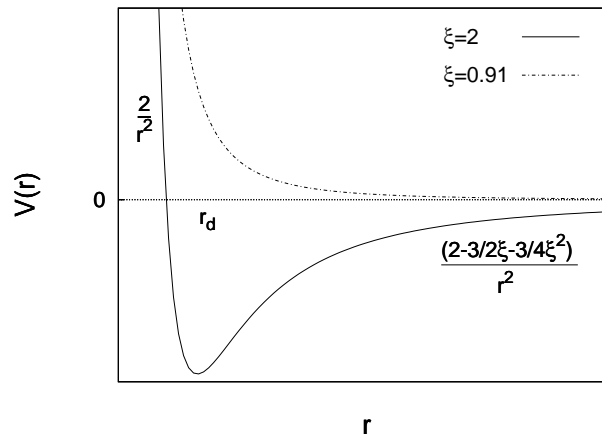


FIG. 2.4 – Forme du potentiel quantique $V(r)$. Pour $\xi > 1$, le puits de potentiel est suffisamment profond pour que des états liés puissent exister. Si au contraire $\xi < 1$, il n'y a pas d'états liés et la dynamo est impossible.

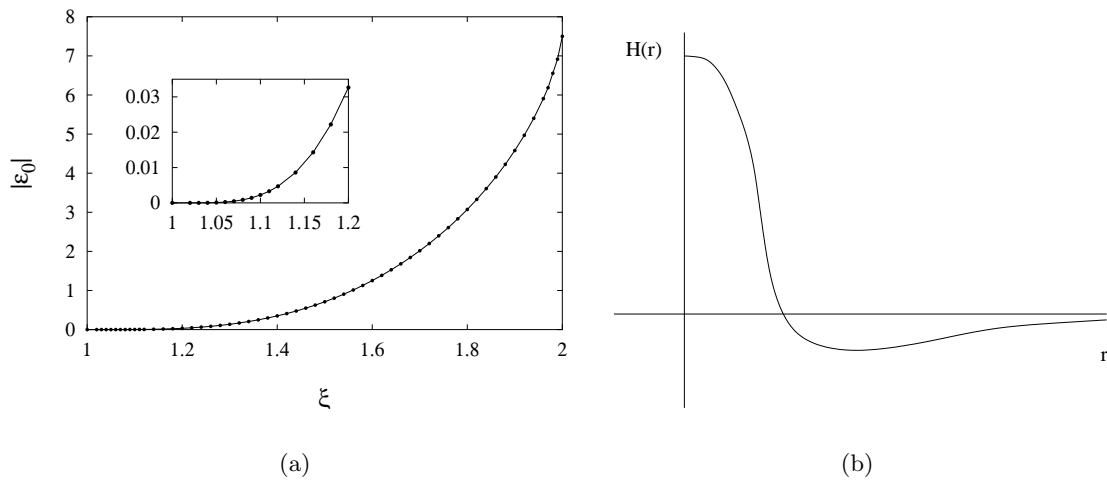


FIG. 2.5 – (a) Taux de croissance du champ magnétique en fonction de l'exposant de Hölder de l'écoulement. (b) Forme de la trace de la corrélation du champ magnétique dans l'intervalle inertiel.

de la dissipation à petite échelle qui tend à amortir la croissance du champ magnétique. Pour $\xi < 0.915$, le potentiel reste positif pour tout r et il ne peut y avoir d'effet dynamo. Lorsque ξ dépasse 0.915, un puits de potentiel commence à se former à l'échelle r_d , mais jusqu'à $\xi = 1$ il n'est pas assez profond pour qu'il puisse exister des états liés. Après $\xi = 1$, l'énergie de l'état fondamental E_0 devient de plus en plus négative au fur et à mesure que ξ s'approche de 2 et le champ magnétique croît exponentiellement en temps. La valeur $\xi = 1$ apparaît donc comme un seuil pour l'effet dynamo dans les limites $R_m \rightarrow \infty$ et $Pr \rightarrow 0$ [7, 68]. Notons que ce résultat a été reformulé en termes lagrangiens par Celani et Mazzino : au dessous du seuil, les corrélations des vecteurs tangents aux trajectoires stochastiques décroissent comme une puissance du temps alors que, s'il y a effet dynamo, elles croissent exponentiellement [80].

Les valeurs propres du potentiel s'écrivent sous la forme

$$E = \frac{\epsilon(\xi)}{t_d}$$

où $t_d \equiv r_d^2/\kappa$ est le temps typique associé à la diffusion magnétique. L'échelle temporelle caractéristique de la croissance exponentielle du champ magnétique est donc donnée par le temps diffusif t_d .

Puisque l'équation (2.5) est auto-adjointe, le taux $\epsilon(\xi)$ se doit d'être réel ; dans la limite $R_m \rightarrow \infty$, ce taux est en outre indépendant de κ , ce qui signifie que la dynamo de Kraichnan-Kazantsev est une dynamo rapide. J'ai calculé le taux de croissance magnétique (normalisé par t_d) à l'aide de la méthode variationnelle proposée par Morse et Feshbach [81] (voir Fig. 2.5(a)). Cette méthode, largement employée en mécanique quantique, a l'avantage de ne demander aucune hypothèse sur la fonction propre de l'état fondamental ψ_{E_0} . Pour $\xi = 1$, le taux de croissance tend vers zéro et l'effet dynamo disparaît. En revanche, pour des valeurs croissantes de l'exposant d'échelle du champ de vitesse, l'effet dynamo devient de plus en plus rapide et un taux de croissance maximal

égal à $\epsilon_0 = E_0 t_d = 15/2$ est obtenu pour $\xi = 2$. Ce taux avait été prédit théoriquement dans le cas d'un écoulement lisse [7, 74, 79].

La dépendance de $\epsilon_0(\xi)$ en fonction de l'exposant ξ avait été obtenue numériquement par Kazantsev pour $1.25 < \xi < 2$. Toutefois, il avait supposé que ψ_{E_0} décroît exponentiellement à l'infini, ce qui ne correspond pas à la bonne solution de l'équation de Schrödinger. En effet, pour $1 < \xi < 2$, j'ai montré que ψ_{E_0} décroît à l'infini comme une exponentielle « étirée » associée à l'échelle caractéristique r_d .

Les propriétés de la fonction d'onde ψ_{E_0} m'ont permis de prédire l'allure générale de la trace du tenseur de corrélation du champ magnétique (voir la formule (2.6)). La fonction $H(r)$ tend vers une constante pour $r \rightarrow 0$ et se comporte pour $r \rightarrow \infty$ comme

$$H(r) \propto - \exp \left[- \frac{\sqrt{-2\epsilon_0(\xi)}}{2 - \xi} \left(\frac{r}{r_d} \right)^{(2-\xi)/2} \right].$$

Le signe moins dans cette expression vient de la condition de solénoïdalité qui impose que le champ magnétique soit toujours anticorrélé aux grandes échelles [70] (voir Fig. 2.5(b)).

En conclusion, dans le régime asymptotique $R_m \rightarrow \infty$ et $Pr \rightarrow 0$, le champ magnétique est caractérisé par des structures spatiales de taille r_d et sa croissance temporelle est dominée par le temps diffusif t_d .

En ce qui concerne les propriétés spatiales du champ magnétique, il est encore important de remarquer que la distribution du champ \mathbf{B} est intermittente à petite échelle. Vergassola a calculé les exposants anomaux pour le champ magnétique en fonction du paramètre ξ du modèle de Kraichnan. Il a montré que contrairement au cas du scalaire passif, il y a déjà anomalie à l'ordre deux [68].

2.3.3 Nombre de Reynolds magnétique critique

Lorsque R_m est fini, la diffusion turbulente aux grandes échelles devient importante. Dans le modèle quantique cela correspond à l'apparition d'une seconde barrière de potentiel de la forme $2/r^2$, mais cette fois-ci à l'échelle L (voir la Fig. 2.6(a)). Pour une valeur de ξ fixée et tant que le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment élevé, la séparation entre l'échelle diffusive et l'échelle intégrale est telle que le puits de potentiel est suffisamment profond pour qu'il y ait des états liés. Quand R_m diminue, les deux barrières s'approchent, le minimum du potentiel croît et en dessous d'une valeur critique $R_m^{(cr)}$, l'effet dynamo disparaît [69, 70]. Ce phénomène peut être expliqué qualitativement de la manière suivante. L'amplification du champ magnétique requiert que les trajectoires lagrangiennes se séparent, mais cela ne peut se passer que jusqu'à l'échelle intégrale au delà de laquelle la diffusion turbulente a lieu. Bien évidemment, cette échelle doit être plus grande que les échelles où la diffusivité magnétique est efficace : pour avoir effet dynamo il faut ainsi avoir une séparation d'échelle suffisante entre la dissipation ohmique et la diffusion turbulente.

A l'aide de la méthode variationnelle mentionnée ci-dessus, j'ai calculé la valeur critique du nombre de Reynolds magnétique pour le modèle de Kraichnan (voir Fig. 2.6(b)). L'étude de la fonction d'onde ψ_{E_0} m'a en outre permis de montrer que la longueur de corrélation du champ \mathbf{B} n'est pas affectée par le nombre de Reynolds magnétique et qu'elle reste de l'ordre de l'échelle diffusive r_d . En revanche, la décroissance à l'infini de la trace du tenseur de corrélation devient dans ce cas exponentielle [69, 70].

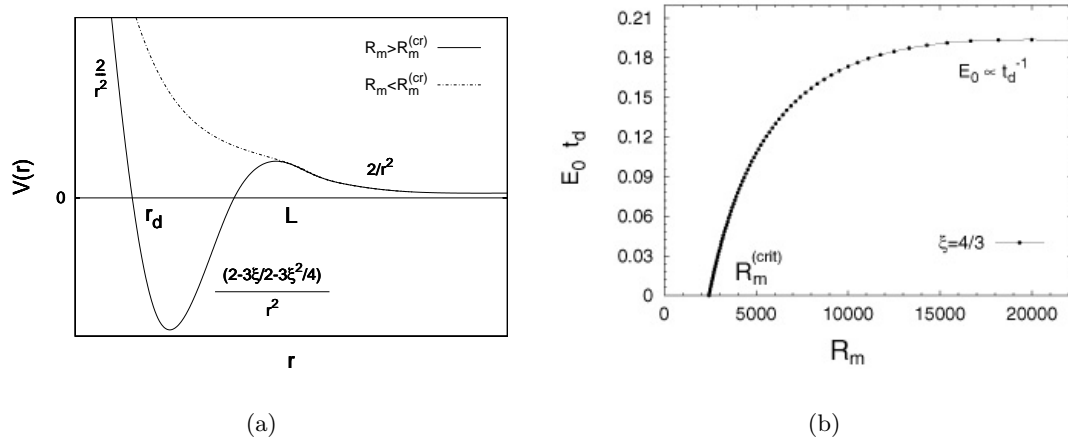


FIG. 2.6 – (a) Forme du potentiel pour des nombres de Reynolds magnétiques finis. La présence de l'échelle intégrale introduit une deuxième barrière de potentiel aux grandes échelles. Si le nombre de Reynolds magnétique est trop petit, la dynamo disparaît, même si $\xi > 1$. (b) Taux de croissance du champ magnétique obtenu par calcul variationnel et nombre de Reynolds magnétique critique correspondant au scaling de Kolmogorov (c'est-à-dire $\xi = 4/3$). Le temps caractéristique de l'effet dynamo est encore égal au temps diffusif t_d .

2.3.4 Effet de la viscosité

Le nombre de Prandtl détermine la séparation entre l'échelle de Kolmogorov η (où la dissipation visqueuse atténue la turbulence hydrodynamique) et l'échelle diffusive r_d (où l'énergie magnétique est dissipée par la résistivité du fluide). Une fois de plus, l'analyse de la forme du potentiel quantique $V(r)$ et de ses états liés m'a permis d'obtenir les propriétés de la fonction de corrélation de \mathbf{B} et de sa croissance temporelle en fonction de ce nombre de Prandtl.

Si Pr n'est pas nul et inférieur à un, les propriétés du champ magnétique ne changent pas qualitativement par rapport à la situation étudiée dans l'intervalle inertiel. La longueur de corrélation du champ magnétique est r_d et sa croissance est déterminée par le temps diffusif t_d . Pour $Pr \gg 1$, on est dans le régime de Batchelor et on peut se ramener à l'étude dans l'intervalle inertiel effectuée dans le cas $\xi = 2$.

Pour les valeurs intermédiaires de Pr , la viscosité est responsable du déplacement du minimum du potentiel vers l'échelle η . La longueur de corrélation du champ magnétique est alors de l'ordre de η et le temps caractéristique de l'effet dynamo est égal au temps visqueux $t_v \approx \eta^2/\nu$. En résumé, le nombre de Prandtl magnétique détermine la taille des structures du champ magnétique ainsi que l'échelle temporelle de la dynamo.

Il est enfin important de remarquer que le calcul variationnel du taux de croissance magnétique en fonction du nombre de Prandtl montre que ce taux est maximal pour Pr de l'ordre de un, c'est-à-dire lorsque $\eta \approx r_d$ (voir Fig. 2.7). Cet effet est une conséquence de l'accroissement de la profondeur du puits de potentiel dû à la présence de l'échelle visqueuse.

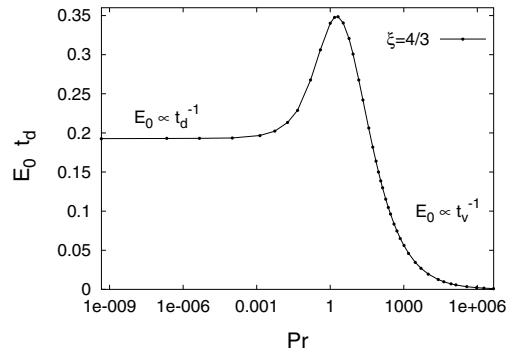


FIG. 2.7 – Taux de croissance du champ magnétique en fonction du nombre de Prandtl magnétique.

Les résultats présentés dans cette section sont décrits de manière plus détaillée dans l'article inclu ci-après.

The Kraichnan–Kazantsev Dynamo

D. Vincenzi¹

Received June 27, 2001; accepted October 8, 2001

We investigate the dynamo effect generated by an incompressible, helicity-free flow drawn from the Kraichnan statistical ensemble. The quantum formalism introduced by Kazantsev [A. P. Kazantsev, *Sov. Phys. JETP* **26**, 1031–1034 (1968)] is shown to yield the growth rate and the spatial structure of the magnetic field. Their dependences on the magnetic Reynolds number and the Prandtl number are analyzed. The growth rate is found to be controlled by the largest between the diffusive and the viscous characteristic times. The same holds for the magnetic field correlation length and the corresponding spatial scales.

KEY WORDS: Turbulent transport; Magnetohydrodynamics; Dynamo effect; Kraichnan statistical ensemble.

1. INTRODUCTION

Magnetic fields generated by turbulent motion of conductive fluids are relevant to many astrophysical applications.⁽¹⁾ Two competing mechanisms are at stake: magnetic field's amplification by the gradients of the advecting flow and magnetic energy's dissipation due to the finite resistivity of the fluid. Which one prevails, depends on the specific properties of the flow and does not bear a general answer. There are however some specific models where a complete analysis can be carried out and those will be the subject of interest of this work.

The evolution of an initially given magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ in an incompressible flow of a conductive fluid is determined by the following equations⁽²⁾

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \kappa \nabla^2 \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

¹ CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4, France, Dipartimento di Fisica, Università di Genova, Via Dodecaneso, 33, I-16142, Genova, Italy; e-mail: vincenzi@obs-nice.fr

where $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ denotes the velocity field. The magnetic diffusivity κ , assumed to be uniform and constant, is proportional to the inverse of the electric conductivity of the fluid.

The dimensionless number which expresses the viscosity-to-diffusivity ratio is the Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$, where ν indicates the viscosity of the fluid.

In Eqs. (1) the term $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ is a purely advective contribution that preserves the magnetic energy. The stretching term $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ acts either as an energy source or as a sink depending on the local properties of the flow. Finally, the diffusive term $\kappa \nabla^2 \mathbf{B}$ is responsible for the small-scale ohmic dissipation and balances the inertial terms at the diffusive scale r_d .

The relative importance of the two contributions on the right-hand side of (1) is given by the magnetic Reynolds number $R_m = UL/\kappa$, where L denotes the integral scale of the flow and U the characteristic velocity at such scale. The number R_m can be regarded as a dimensionless measure of the fluid conductivity. For $R_m \rightarrow 0$ the diffusion dominates and the magnetic energy density (proportional to B^2) always decays to zero in time. In the opposite limit, $R_m \rightarrow \infty$, the diffusion term is relevant only at very small scales and the magnetic field is almost frozen in the fluid. At high magnetic Reynolds numbers we can expect that the flow be able to enhance the magnetic field, producing a consequent growth in time of B^2 . The last process is called dynamo effect, referring to the energy transfer from the velocity field to the magnetic one.

The field \mathbf{B} acts on the velocity via the Lorentz force, which yields a term proportional to $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ in the Navier–Stokes equations. Generally speaking, it would be necessary to take into account such feedback action on \mathbf{v} . However, since we are interested in understanding the initial generation of the magnetic field, we can assume for the initial conditions $B^2 \ll v^2$ and neglect the Lorentz force contribution. In this kinematic approach \mathbf{v} is a prescribed velocity field and the evolution equations (1) are totally uncoupled from Navier–Stokes equations. Given the initial condition $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ and appropriate boundary conditions, Eqs. (1) completely determine the magnetic field evolution.

To prescribe the velocity, we use the Kraichnan statistical ensemble,⁽³⁾ where \mathbf{v} is taken Gaussian, homogeneous, isotropic and δ -correlated in time. The motivation is that it allows an analytical solution of the dynamo problem.

The flow is assumed to be characterized by two scales: the integral scale L and the viscous scale η , determined by the balance between dissipation and transport in Navier–Stokes equations. The velocity is supposed to be smooth up to the viscous scale η and to scale as $r^{\xi/2}$ ($0 \leq \xi \leq 2$) in the inertial range $\eta \ll r \ll L$. The parameter $\xi/2$ is the Hölder exponent of the

velocity and can be thought of as a measure of the field roughness: for $\xi = 2$ the velocity is smooth in space, while the case $\xi = 0$ corresponds to a diffusive field.

The magnetic Reynolds number and the Prandtl number are related to the relative importance of the scales involved in the physical problem by the relations: $R_m \simeq L/r_d$ and $Pr \simeq (\eta/r_d)^\xi$.

It is well known that magnetic dynamo can emerge for a helical flow due to the α -effect.^(1,5) Here we will restrict to a parity invariant statistical ensemble so that the α -effect is ruled out. (For recent results on helical Kraichnan velocity fields see, e.g., ref. 6).

The analysis of kinematic dynamo for a Kraichnan velocity field is made easier by a simple quantum mechanics formulation, first introduced by Kazantsev.⁽⁴⁾ The δ -correlation in time of the flow allows for the single time correlation function for the magnetic field $\langle B_i(\mathbf{x}, t) B_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$ to be expressed in terms of a function that satisfies a one-dimensional Schrödinger-like equation. The problem of the dynamo effect can thus be mapped into that of studying the bound states of a quantum particle in a given potential that only depends on the velocity correlation function. In particular, the ground state energy E_0 will turn out to be the asymptotic magnetic field rate-of-growth.

In ref. 4 Kazantsev finally restricted himself to the limiting case of $R_m \rightarrow \infty$ and $Pr \rightarrow 0$. He proved that dynamo can take place only for a velocity scaling exponent in the range $1 \leq \xi \leq 2$ and he provided a numerical evaluation of E_0 vs ξ for $1.25 < \xi < 2$. The rate-of-growth for a smooth field ($\xi = 2$) was theoretically estimated on the ground of quantum mechanical considerations.

The Kazantsev quantum model was extended by Ruzmaïkin and Sokolov⁽⁷⁾ to a more realistic velocity field. In particular, the main consequence of finite magnetic Reynolds numbers was found to be the existence of a threshold value $R_m^{(cr)}$ for the appearance of dynamo. Further, the magnetic field was shown to be concentrated at small scales (of the order of $R_m^{-1/2}$) and to be always anticorrelated at large scales. The results of ref. 7 were later generalized by Novikov *et al.*⁽⁸⁾ to consider an inertial scaling behavior with scaling exponent $\xi = 2/3$.

In more recent years the Kraichnan–Kazantsev dynamo problem was exactly solved in the special case of a smooth turbulent velocity field. Gruzinov *et al.*⁽⁹⁾ found the formula which determines the rate-of-growth for a d -dimensional flow and generalized it to a non- δ -correlated flow. The exact analysis of moments and multipoint correlation functions of the magnetic field was carried out by Chertkov *et al.*⁽¹⁰⁾ by means of a Lagrangian approach. They also obtained the expression for the rate-of-growth of the $2n$ th moment of the field \mathbf{B} in terms of the Lyapunov exponents of the turbulent flow.

Finally, the last contribution in solving the Kazantsev model is due to Schekochihin *et al.*,⁽¹¹⁾ which describe the case of a d -dimensional Kraichnan velocity field with a generic degree of compressibility in the limiting case of very large Prandtl numbers (of interest in astrophysical applications).

The aim of this paper is to give a comprehensive description of the Kraichnan–Kazantsev model, zeroing in on the dependence of the dynamo effect on the dimensionless numbers R_m and Pr . We have been motivated by the observation that the literature has provided many results valid in different limiting cases, while an unified treatment of the problem as a function of R_m and Pr still lacked.

We find that, while the magnetic Reynolds number determines the presence of dynamo, the Prandtl number influences the magnetic field correlation length and its rate-of-growth. More precisely, the correlation length of the field \mathbf{B} is shown to be the largest between r_d and η , and its rate-of-growth is proportional to the largest between the diffusive and the viscous characteristic time-scale.

At the end of the paper we also point out a non-monotonic dependence of the rate-of-growth on the Prandtl number. This results might be of relevance to physical applications.

Many of the results appearing in this paper are completed by numerical computations based on the variation-iteration method described in Appendix A. This algorithm has the advantage of not relying on any assumption on the functional form of the solution of the Schrödinger-like equation. That was the case for previous numerical computations and therefore the selected behavior for the wave function was not always the right one.

The rest of paper is organized as follows. In Section 2 we define more precisely the Kraichnan model and, following Kazantsev,⁽⁴⁾ we describe the quantum formalism mentioned above. In particular we derive the Schrödinger equation which is at the core of the quantum approach. In Section 3, we revisit the case of infinite magnetic Reynolds number and zero Prandtl number. Starting from these results, we then study how the dynamo effect is influenced by R_m and Pr . Section 4 is devoted to conclusions.

2. THE KRAICHNAN–KAZANTSEV MODEL

In this section we recall in detail the quantum formalism introduced by Kazantsev in ref. 4. The random velocity field is assumed to be incompressible, Gaussian, homogeneous, isotropic, parity invariant, and δ -correlated in time. Under these hypotheses it is completely defined by its correlation matrix

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}', t) \rangle &= \delta(t-t') \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) \\ &= \delta(t-t') [\mathcal{D}_{ij}(0) - S_{ij}(\mathbf{r})] \quad (\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2)$$

where $S_{ij}(\mathbf{r})$ denotes the structure function of the field \mathbf{v} .

The δ -correlation in time of \mathbf{v} is an essential property in order to write a closed equation for the magnetic field correlation function, which (under a suitable transformation) reduces to a Schrödinger-like equation.

We impose homogeneous and isotropic initial conditions for \mathbf{B} . Therefore, on account of the translational and rotational invariance of Eqs. (1), the magnetic field maintains homogeneous and isotropic statistics at every time t . Its correlation tensor has thus the form (see, e.g., ref. 14)

$$\langle B_i(\mathbf{x}, t) B_j(\mathbf{x}', t) \rangle = G_1(r, t) \delta_{ij} + G_2(r, t) \frac{r_i r_j}{r^2} \quad (3)$$

Because of the solenoidality condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, the functions G_1 and G_2 are related by the following differential equation

$$\frac{\partial G_1}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (G_2 r^2) \quad (4)$$

The covariance of \mathbf{B} is then completely described by a single scalar function, e.g., its trace $H(r, t) = 3G_1(r, t) + G_2(r, t)$. Obviously, the dynamo effect will correspond to an unbounded growth in time of $H(r, t)$.

The correlation function $H(r, t)$ can be transformed into another function $\Psi(r, t)$ that solves the imaginary time Schrödinger equation

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \left[\frac{1}{m(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - U(r) \right] \Psi = 0 \quad (5)$$

in which the mass and the potential depend on r only through $S_{ii}(r)$. (For the details see Appendix B and ref. 4).

To study the dynamo effect it is useful to put in evidence the time dependence of Ψ . As usual in quantum mechanics, we thus expand the “wave function” Ψ in terms of the “energy” eigenfunctions $\Psi(r, t) = \int \psi_E(r) e^{-Et} \rho(E) dE$ [or $\Psi(r, t) = \sum_E \psi_E(r) e^{-Et}$ for discrete energy levels] and obtain the “stationary” equation

$$\frac{1}{m(r)} \frac{d^2 \psi_E}{dr^2} + [E - U(r)] \psi_E = 0 \quad (6)$$

Referring to the meaning of Ψ , it is clear that an unbounded growth of the magnetic field corresponds to the existence of negative energies in Eq. (6). In particular, it is the sign of the ground state energy E_0 that determines the presence of dynamo and its value eventually represents the asymptotic

growth rate of the magnetic field. Indeed, in this case it is the ground state $\psi_{E_0} e^{-E_0 t}$ that dominates the growth in time. (Recall that the negative energy levels of a Schrödinger equation are always discrete).

By looking at the variational expression for the eigenvalues derived from Eq. (6)

$$E = \frac{\int mU\psi_E^2 dr + \int (\psi'_E)^2 dr}{\int m\psi_E^2 dr} \quad (7)$$

one can easily conclude that the presence of dynamo effect is equivalent to the existence of bound states for a quantum particle of unit (r -independent) mass in the potential $V(r) = m(r) U(r)$.⁽¹²⁾ Therefore, in order to state if dynamo can take place for a given velocity field, it is sufficient to study the properties of V .

Having summarized the quantum mechanics formalism for a magnetic field transported by a Kraichnan turbulent flow, in the next section we study the dynamo effect for a velocity correlation function that mimics the real physical situation. In particular, we numerically compute E_0 and describe the properties of the ground state eigenfunction as R_m and Pr are varied. From this analysis we are able to obtain information about the critical magnetic Reynolds number, the correlation length of the magnetic field, the asymptotic behaviors of its correlation function, and the characteristic time-scale of the magnetic field growth.

3. TURBULENT DYNAMO

We consider the realistic situation of a structure function $S_{ii}(r)$ that scales as r^2 for $r \ll \eta$ (as expected in the viscous range), as r^ξ ($0 \leq \xi \leq 2$) in the inertial range $\eta \ll r \ll L$, and that tends to a constant value $\mathcal{D}_{ii}(0)$ for $r \gg L$.

The case $\xi = 0$ corresponds to the diffusive behavior, while the other limit $\xi = 2$ describes a velocity field that is smooth at all scales below the integral scale L . For the other values of ξ , the field \mathbf{v} is only a Hölder continuous function of r with exponent $\xi/2$ (in the inertial range). The parameter ξ thus represents a measure of the field roughness.

An explicit expression for the velocity correlation tensor, which has the desired scaling properties, is, for example,

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathcal{D}}_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (8)$$

with

$$\hat{\mathcal{D}}_{ij}(\mathbf{k}) = D_0 \frac{e^{-\eta k}}{(k^2 + L^{-2})^{(\xi+3)/2}} P_{ij}(\mathbf{k}) \quad (9)$$

The solenoidal projector $P_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$ ensures the incompressibility of the velocity field.

In what follows we refer to Eq. (9) whenever we show numerical computations that exemplify our conclusions. However, it should be noted that our results are general: they depend only on the qualitative properties of $S_{ii}(r)$ and not on its explicit form.

3.1. Fully Developed Turbulent Dynamo

We first consider the limiting case of $R_m \rightarrow \infty$ and $Pr \rightarrow 0$. Under these conditions the diffusive scale r_d is in the inertial range and the presence of the cutoffs L and η is neglected: only the scaling behavior r^ξ ($0 \leq \xi \leq 2$) is considered for the velocity structure function.

The general expression of $S_{ij}(r)$ for an homogeneous, isotropic, parity invariant, incompressible field that scales as r^ξ is⁽¹⁴⁾

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} S_{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^\xi \left[(2 + \xi) \delta_{ij} - \xi \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \quad (10)$$

where the coefficient D_1 has the dimensions of length^(2- ξ)/time.

In this limit the total energy $\mathcal{D}_{ii}(0)$ diverges with the infrared cutoff as L^ξ .

In order to analyze the existence of dynamo, let us turn to the quantum formulation described above. The potential V has the following asymptotic behaviors (see Appendix B and ref. 4 for the complete expression)

$$V(r) \sim \begin{cases} 2/r^2 & r \ll r_d \\ (2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{3}{4}\xi^2)/r^2 & r_d \ll r \end{cases} \quad (11)$$

For sufficiently small ξ the potential is positive for all r , it does not generate bound states and therefore the dynamo can not take place. For larger ξ , V is repulsive up to $r \simeq r_d$ and becomes attractive at infinity (Fig. 2). A quantum mechanical analysis based on asymptotic behaviors (11) allows to establish that $\xi = 1$ is the exact threshold for the dynamo effect.^(4, 12)

If $0 \leq \xi \leq 1$ the turbulent flow alone is unable to increase the magnetic field and B^2 finally decays in time. For those values of ξ , the presence of a

forcing term in Eq. (1) is necessary to obtain a statistically stationary state.⁽¹²⁾ A forcing term can represent boundary conditions on the field \mathbf{B} , or it can be due to the presence of a large-scale mean magnetic field (see, e.g., ref. 13). This is, for example, the case of the solar corona, in which small-scale turbulent fluctuations and large-scale magnetic fields coexist.

From now on we restrict to the values $1 \leq \xi \leq 2$, for which the dynamo is present.

If Eq. (6) is rewritten in a rescaled form by means of the transformation $r \rightarrow r/r_d$, $r_d = (\kappa/D)^{1/\xi}$, it is easy to see that the eigenvalues of the energy must take the form

$$E = \epsilon(\xi) t_d^{-1} \quad (12)$$

where $\epsilon(\xi)$ depends only on the scaling exponent ξ and $t_d = r_d^2/\kappa$ is the characteristic time of magnetic diffusion.

We have already noted that the ground state eigenfunction dominates the evolution in time and that E_0 is the asymptotic magnetic growth rate. We numerically compute $\epsilon_0(\xi)$ as a function of ξ by the variation-iteration method described in Appendix A. The quantity ϵ_0 grows with ξ as shown in Fig. 1. When ξ tends to one, ϵ_0 approaches zero and the bound states disappear. In the other limit, ϵ_0 reaches the value $15/2$ according to the known theoretical predictions.^(4, 9, 10)

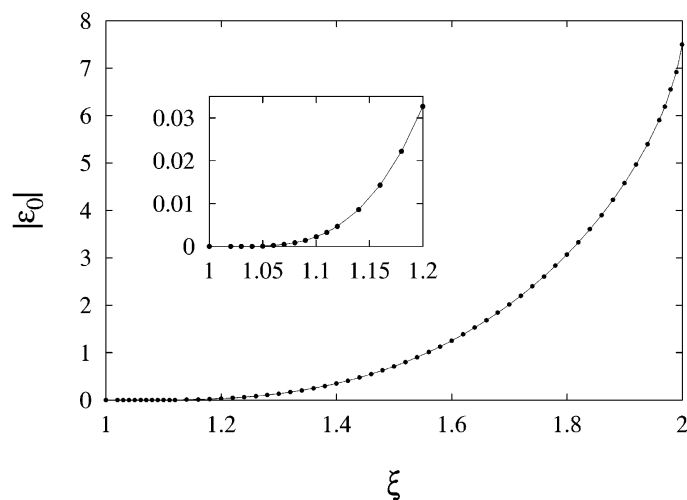


Fig. 1. The dependence of the magnetic growth rate $\epsilon_0 = E_0 t_d^{-1}$ on the scaling exponent ξ in the limit of infinite R_m and zero Pr , as computed by the variation-iteration method described in Appendix A.

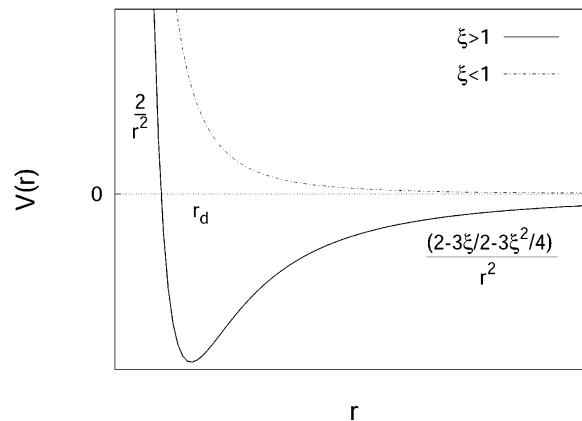


Fig. 2. The shape of the quantum potential V in the limit $R_m \rightarrow \infty$ and $Pr \rightarrow 0$ for $\xi > 1$ (dynamo effect) and for $\xi < 1$ (no dynamo effect).

An estimation for ϵ_0 vs ξ already appears in ref. 4, but there the results are limited to the values $1.25 < \xi < 2$. Moreover, the numerical computations in that paper are performed by a variational method based on the particular guess $r^2 e^{-\beta r}$ for the eigenfunction ψ_{E_0} . This ansatz is correct for $r \ll r_d$, but it fails to capture the right behavior for $r \gg r_d$. Indeed, if we insert the asymptotic behaviors (11) in Eq. (6), we find that (for $1 < \xi < 2$) $\psi_E(r)$ shows a stretched exponential decay with characteristic scale r_d and stretching exponent $(2 - \xi)/2$ (Fig. 3). The variation-iteration method we used (see Appendix A) presents the big advantage of not requiring an explicit form for ψ_{E_0} . The algorithm provides as results both the eigenvalue and the corresponding eigenfunction.

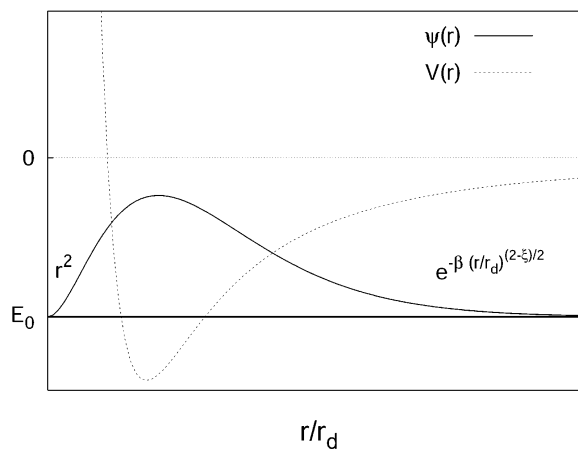


Fig. 3. The asymptotic behaviours of the “stationary wave function” ψ_{E_0} in the limit of infinite R_m and zero Pr . The maximum at $r \simeq r_d$ determines the magnetic field correlation length.

From the expressions of $\psi_{E_0}(r)$ we can recover the behavior of $H(r, \cdot)$ (see the definition (B2) in Appendix B). We have that, for $r \ll r_d$, the magnetic field correlation function is approximately constant, while, if $1 < \xi < 2$, $H(r, \cdot)$ decays for $r \gg r_d$ as a stretched exponential with characteristic scale r_d

$$H(r, \cdot) \propto e^{-\beta (r/r_d)^{(2-\xi)/2}} \quad (r_d \ll r \ll L) \quad (13)$$

where the prefactor

$$\beta = \frac{\sqrt{2 |\epsilon_0(\xi)|}}{2-\xi} \quad (14)$$

depends on the growth rate $\epsilon_0(\xi)$. We can thus conclude that, for $1 < \xi < 2$, the magnetic field has a spatial distribution characterized by structures whose scales are of order r_d .

Observe that, as pointed out in refs. 7 and 8, the magnetic field has always anticorrelated tails in the large scale, due to the solenoidality condition. Formally, this is a consequence of the exponential decay of $\psi_{E_0}(r)$, which implies $\int_0^\infty H(\rho, \cdot) \rho^2 d\rho = 0$ (see Eq. (B2) and ref. 7).

The cases $\xi = 2$ and $\xi = 1$ have to be treated separately. Indeed, the asymptotic properties cannot be deduced directly from Eq. (6).

The smooth case is solved by Chertkov *et al.* in ref. 10 by a Lagrangian approach that relates the growth rate to the Lyapunov exponents. There is a big difference between the situation of a smooth velocity field and one that is just Hölder continuous. In the former case the correlation function is found to depend on the spatial coordinate as $H(r, t) \propto r^{-5/2}$ (equivalent to $\psi_{E_0}(r) \propto r^{1/2}$), which implies the presence of structures with at least one dimension of inertial range size. Actually the magnetic field in the smooth case has been shown to be characterized by strip-like objects.

The case $\xi = 1$ can be solved exactly. Indeed, the appropriate ground state eigenfunction of Eq. (6) is (recall that $\xi = 1$ is the threshold for dynamo and hence $E_0 = 0$)

$$\psi_0(x) = C \frac{\sqrt{1+x} (-2x + (2+x) \ln(1+x))}{x}, \quad (x = r/r_d) \quad (15)$$

where the constant C is related to the value of $H(0, \cdot)$ by the relation $C = 3 \sqrt{\kappa} r_d^2 H(0, \cdot)$.

If we neglect logarithmic corrections, the asymptotic behavior of ψ_0 for $r \gg r_d$ is $\psi_0(r) \propto r^{1/2}$, which yields again $H(r, \cdot) \propto r^{-5/2}$ for $r \gg r_d$.

The results we have outlined in this section will be useful in the following to describe the general case where the velocity energy spectrum has an

infrared and an ultraviolet cutoff. Indeed, we will study a structure function that for $r \ll \eta$ scales as r^2 and so takes the $\xi = 2$ behavior, while for $r \gg L$ tends to a constant value like in the diffusive case $\xi = 0$.

3.2. Finite Reynolds Effect

Let us analyze the situation of finite R_m (and zero Prandtl number). The principal fact is that a large-scale cutoff L appears for velocity field correlations. The diffusive scale r_d is again within the inertial range of the velocity fluctuations, and the presence of the viscous cutoff can be neglected. The velocity structure function therefore scales as r^ξ for $r \ll L$ and tends to $\mathcal{D}_{ii}(0)$ for $r \gg L$.

The potential V behaves as in the previous case for $r \ll L$, while it takes the $\xi = 0$ behavior for $r \gg L$

$$V(r) \sim \begin{cases} 2/r^2 & r \ll r_d \\ (2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{3}{4}\xi^2)/r^2 & r_d \ll r \ll L \\ 2/r^2 & L \ll r \end{cases} \quad (16)$$

The main consequence of a finite R_m is that V is repulsive also at large scales. It is thus clear that, for sufficiently high R_m , a potential well is present at scales of order r_d . On the contrary, if R_m is too small, the well can be absent or anyway not deep enough to generate bound states^(7, 8) (see Fig. 4). Therefore, for sufficiently small R_m , the dynamo does not take place, even for $1 < \xi < 2$.

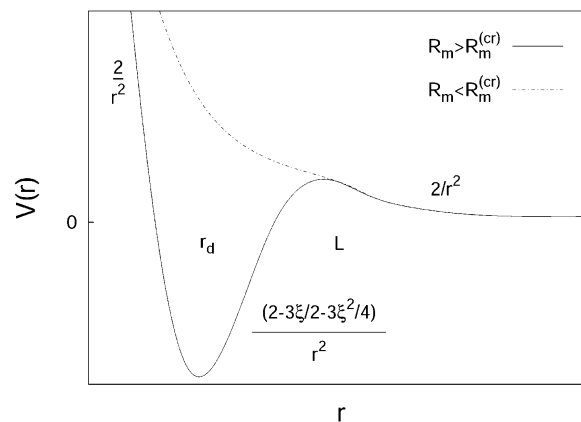


Fig. 4. A qualitative picture of the quantum potential shape for R_m respectively above and below the critical value $R_m^{(cr)}$ ($1 < \xi < 2$).

The effect of a large-scale cutoff on the velocity energy spectrum is thus the presence of a critical Reynolds number $R_m^{(cr)}$. For R_m smaller than that value the potential V has not bound states or equivalently, on account of our quantum mechanic interpretation, the velocity field is unable to favor the magnetic field growth and the ohmic dissipation eventually prevails on stretching.

The dependence of the dimensionless rate-of-growth $|E_0| t_d^{-1}$ on R_m is shown in Fig. 5 for $R_m > R_m^{(cr)}$ in the case of the scaling $\xi = 4/3$. (Observe that, as a consequence of the velocity field δ -correlation in time, the value $\xi = 4/3$ corresponds to the Kolmogorov scaling). It should be noted that, for $R_m \gg R_m^{(cr)}$, E_0 takes the inertial range behavior $E_0 \simeq \epsilon_0(\xi) t_d^{-1}$. A numerical estimation of $R_m^{(cr)}$ was already given in ref. 8 for a different velocity structure function by a reverse iterations method. Once more we note that such numerical algorithm is based on a particular choice for the wave function, which does not take into account the stretched exponential decay typical of the inertial range.

We can again deduce from Eq. (6) some properties of the function $H(r, \cdot)$. The correlation length of the magnetic field is again of order r_d and, at $r \gg L$, $H(r, \cdot)$ shows an exponential decay

$$H(r, \cdot) \propto -e^{-\gamma(r/L)} \quad (L \ll r) \quad (17)$$

with $\gamma = E_0[L^2/(2\bar{\kappa})]^{-1}$, $\bar{\kappa} = \kappa + \mathcal{D}_{ii}(0)/6$. (The negative exponential decay of the wave function at scales much larger than L was already pointed out in refs. 7 and 8).

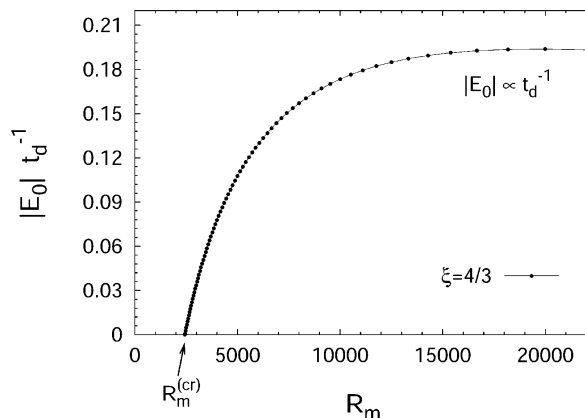


Fig. 5. The dependence of the magnetic growth rate on the magnetic Reynolds number for $Pr \rightarrow 0$ and $\xi = 4/3$. The numerical computation is performed using expression (9) for the correlation tensor of the magnetic field.

3.3. Nonzero Prandtl Effect

Finally, we consider the situation of nonzero Prandtl number (at infinite Reynolds number). This is equivalent to look at the influence of the viscous scale on the dynamo effect.

If $Pr < 1$, the diffusive scale r_d is in the inertial range, while, if $Pr > 1$, it lies within the viscous range. The structure function $S_{ii}(r)$ scales as r^2 for $r \ll \eta$ and as r^ξ for $r \gg \eta$.

From the previous considerations we can expect for the potential V the same asymptotic behaviors for $r \rightarrow \infty$ as in the case of $Pr = 0$. Therefore, if $R_m \rightarrow \infty$, the Prandtl number does not affect the presence of dynamo. (Note however that, if the magnetic Reynolds number is finite, a critical Prandtl number exists^(8,11)). What is sensitive to Pr is the correlation length of the magnetic field, that approximately corresponds to the scale at which the function ψ_{E_0} begin its exponential-like decay. When $Pr < 1$, the potential has nearly the same shape as in the case $Pr = 0$

$$V(r) \sim \begin{cases} 2/r^2 & r \ll r_d \\ (2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{3}{4}\xi^2)/r^2 & r_d \ll r \end{cases} \quad (18)$$

and the correlation length is of order r_d .

On the contrary, when $Pr > 1$, the potential well is modified by an attractive $\xi = 2$ contribution

$$V(r) \sim \begin{cases} 2/r^2 & r \ll r_d \\ -4/r^2 & r_d \ll r \ll \eta \\ (2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{3}{4}\xi^2)/r^2 & \eta \ll r \end{cases} \quad (19)$$

For these Pr the function $\psi_{E_0}(r)$ grows as r^2 for $r \ll r_d$, as $r^{1/2}$ in the range $r_d \ll r \ll \eta$ and has a stretched exponential decay for $\eta \ll r$. We can thus conclude that, when $Pr > 1$, the magnetic field correlation length is of order η .

In consequence, the correlation length of \mathbf{B} is always the largest between the diffusive scale r_d and the viscous scale η , their ratio being controlled by the Prandtl number $Pr \simeq (\eta/r_d)^\xi$.

On account of what we have just seen, we expect that for $Pr \ll 1$ the ground state energy will be proportional to the diffusive time: $E_0 \simeq \epsilon_0(\xi) t_d^{-1}$. In the other limit, $Pr \gg 1$, we can predict an approximate expression for E_0 by a simple scaling argument. Indeed, for large Pr the potential V behaves like in the case $\xi = 2$ and we can expect $E_0 \propto D_1$ (see ref. 10 for the discussion of the smooth case). Knowing that $S_{ii}(r) \propto r^2$ for $r \ll \eta$ and $S_{ii}(r) \propto D_1 r^\xi$ in the inertial range, we can match the previous behaviors to obtain $D_1 \propto \eta^{\xi-2}$. Finally, we recall that from dimensional arguments we

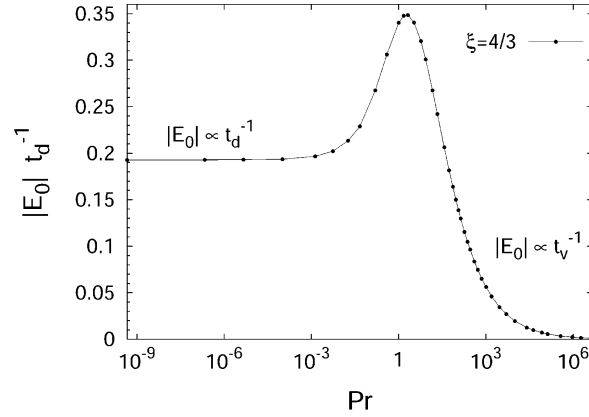


Fig. 6. The dependence of the magnetic growth rate on the Prandtl number for $\xi = 4/3$ and in the limit $R_m \rightarrow \infty$. The numerical computation is performed using expression (9) for the correlation tensor of the magnetic field.

have $\eta \simeq (\nu/D_1)^{1/\xi}$. Summarizing the previous considerations, it is easily seen that, for $Pr \gg 1$, the relation $E_0 \propto t_v^{-1}$ holds (the time $t_v = \eta^2/\nu$ is the characteristic one for the velocity diffusion).

The Prandtl number $Pr \simeq (t_v/t_d)^{\xi/(\xi-2)}$ thus influences also the magnetic field rate-of-growth: in the presence of dynamo, B^2 increases with a characteristic time-scale determined by the largest between the viscous and the diffusive time (see Fig. 6).

To conclude this section, we discuss a result that emerges from numerical computations: the magnetic rate-of-growth has a non-monotonic dependence on the Prandtl number and it reaches a maximum for $Pr \simeq 1$ (Fig. 6). We can explain this behavior referring once more to the Kazantsev quantum formalism. For $Pr < 1$ the $\xi = 2$ behavior is practically absent in the potential V , while, when Pr approaches the value 1, the scale η begins to come into play yielding a strongly attractive $-4/r^2$ contribution at scales $r_d \ll r \ll \eta$. The $\xi = 2$ potential is more attractive than that of $\xi < 2$ and the ground state energy increases in absolute value. Then, as Pr becomes larger, $|E_0|$ decreases as explained above. In other words as long as the viscous behavior affects only the potential shape around r_d , its only effect is to make the well deeper and so to favor the dynamo. When viscosity becomes very large, the level of velocity fluctuations lowers significantly, inducing eventually the depletion of the rate-of-growth.

4. CONCLUSIONS

We have presented a unified treatment of the kinematic dynamo problem in the framework of the Kraichnan–Kazantsev model. Much attention has been

paid to highlighting the influence of the magnetic Reynolds number and of the Prandtl number on the dynamo effect. As already noted, the previous analysis depends only on the qualitative properties of the velocity structure function. We thus expect that our conclusions hold for a generic turbulent flow with the same statistical symmetries and be relevant for real applications.

APPENDIX A. VARIATION-ITERATION METHOD

For the numerical analysis of Schrödinger equation (6) we make the transformation $y = a^{-r}$ ($a > 1$) which maps $(0, \infty)$ on the finite interval $(0, 1)$. (The constant a should be chosen to properly resolve this interval). Equation (6) can thus be rewritten in the form

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\mathcal{M}\psi \quad (\text{A1})$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -(\ln a)^2 \left(y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} \right) + \frac{m(y)}{y} (U(y) - U_{\min}) \\ \mathcal{M} &= \frac{m(y)}{y}, \quad \lambda = E - U_{\min} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

and U_{\min} denotes the minimum value of U . \mathcal{L} and \mathcal{M} are positive-definite self-adjoint operators defining a spectrum of eigenvalues λ bounded from below and which extends to infinity. Moreover, \mathcal{L} is invertible on all functions twice differentiable on $(0, 1)$ and vanishing at the boundaries of the interval. Under these hypotheses the variation-iteration method described in ref. 15 provides a valuable tool to compute the lowest eigenvalue λ_0 of Eq. (A1) and the corresponding eigenfunction ψ_0 . Indeed, let φ_0 be an initial trial function such that $\int_0^1 \psi_0 \mathcal{M} \varphi_0 dy \neq 0$ and define the n th iterate φ_n as

$$\varphi_n \equiv \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M} \varphi_{n-1} = (\mathcal{L}^{-1} \mathcal{M})^n \varphi_0 \quad (\text{A3})$$

Then, as n is increased, the sequence φ_n converges to the eigenfunction φ_0 . The n th approximation to λ_0 is given by the following variational expression employing φ_n as trial function

$$\lambda_0^{(n)} = \frac{\int_0^1 \varphi_n \mathcal{L} \varphi_n dy}{\int_0^1 \varphi_n \mathcal{M} \varphi_n dy} \quad (\text{A4})$$

The set $\lambda_0^{(n)}$ form a monotonic sequence of decreasing values, approaching λ_0 from the above. The advantage of the variation-iteration technique is that no expression is required *a priori* for the function ψ_0 . We only have to choose any guess for initial function φ_0 and then improve the result by iterating the method for sufficiently large n . The convergence is more rapid the smaller is the ratio between λ_0 and the following eigenvalue.

Finally, for the numerical implementation of the method, we exploited the first order discrete expression of \mathcal{L} preserving the boundary conditions on ψ . If $(0, 1)$ is divided in intervals of length Δ and $y_i = i\Delta$, we have

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{m(y_i)}{y_i} (U(y_i) - U_{\min}) + \frac{(\ln a)^2}{2\Delta^2} \times \begin{cases} (-y_{i-1} - y_i) & \text{if } i = j+1 \\ (y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) & \text{if } i = j \\ (-y_i - y_{i+1}) & \text{if } i = j-1 \end{cases} \quad (\text{A5})$$

APPENDIX B. THE SCHRÖDINGER EQUATION IN THE DYNAMO THEORY

In the present appendix we refer to the notation adopted in the body of the paper. So, the trace of the correlation tensor $\langle B_i(\mathbf{x}, t) B_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$ will be denoted by $H(r, t)$.

As a consequence of the velocity δ -correlation in time, H satisfies a closed equation that, under a suitable transformation, takes on the form of a one-dimensional Schrödinger-like equation. In order to exploit this fact, let us denote $s(r) = S_{ii}(r)$ and define the following quantities

$$\bar{s}(r) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \frac{s(\rho)}{2} \rho^2 d\rho \quad (\text{B1})$$

$$A(r) = \kappa + \bar{s}(r), \quad A_1(r) = A(r) + 3\kappa + \frac{s(r)}{2}$$

Then, the function

$$\Psi(r, t) = \sqrt{\kappa} \exp\left(\int_0^r \frac{A_1(\rho)}{2\rho A(\rho)} d\rho\right) \frac{1}{r^3} \int_0^r H(\rho, t) \rho^2 d\rho \quad (\text{B2})$$

solves the imaginary time Schrödinger equation

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \left[\frac{1}{m(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - U(r) \right] \Psi = 0 \quad (\text{B3})$$

where

$$m = \frac{1}{2A}, \quad U = -\frac{1}{r} \frac{ds}{dr} + \frac{1}{2r^2} \frac{A_1^2}{A} + A \frac{d}{dr} \left(\frac{A_1}{rA} \right) \quad (\text{B4})$$

(See ref. 4 for the detailed derivation). If we expand Ψ in terms of the energy eigenfunctions $\Psi(r, t) = \int \psi_E(r) e^{-Et} \varrho(E) dE$, we get the stationary equation

$$\frac{1}{m(r)} \frac{d^2 \psi_E}{dr^2} + [E - U(r)] \psi_E = 0 \quad (\text{B5})$$

The dynamo effect corresponds to the presence of negative eigenvalues in Eq. (B5).

The correlation function $H(r, \cdot)$ must tend to a constant value as $r \rightarrow 0$ and decreases to zero as $r \rightarrow \infty$. From the definition (B2) we have therefore that Eq. (B5) must be solved with the boundary conditions that $\psi_E(r)$ vanishes as $r \rightarrow 0$ and increases as $r \rightarrow \infty$ slowly enough to guarantee that $H(r, \cdot)$ decreases to zero. In particular, if $s(r)$ tends to a constant as $r \rightarrow \infty$, $\psi_E(r)$ cannot increase more rapidly than r .

We consider now the explicit expression

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathcal{D}}_{ij}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (\text{B6})$$

with

$$\hat{\mathcal{D}}_{ij}(\mathbf{k}) = D_0 \frac{e^{-\eta k}}{(k^2 + L^{-2})^{(\xi+3)/2}} P_{ij}(\mathbf{k}) \quad (\text{B7})$$

The transverse projector $P_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$ ensures the incompressibility of the velocity field.

In the limits $\eta \rightarrow 0$ and $L \rightarrow 0$, $S_{ij}(r)$ takes the form

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} S_{ij}(\mathbf{r}) = D_1 r^\xi \left[(2 + \xi) \delta_{ij} - \xi \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \quad (\text{B8})$$

with

$$D_1 = \frac{4\pi \cos(\pi\xi/2) \Gamma(-1-\xi)}{\xi+3} D_0 \quad (\text{B9})$$

(The function Γ is the Euler function).

If we insert $s(r) = 2(\xi + 3) D_1 r^\xi$ in (B4), the transformation (B2) takes on the form

$$\Psi(r, t) = \frac{(\kappa + D_1 r^\xi)^{1/2}}{r} \int_0^r H(\rho, t) \rho^2 d\rho \quad (\text{B10})$$

while its inverse reads

$$H(r, t) = \frac{(2\kappa - D_1 r^\xi(\xi - 2)) \Psi(r, t) + 2r(\kappa + D_1 r^\xi) \Psi'(r, t)}{2r^2(\kappa + D_1 r^\xi)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B11})$$

For the mass and the potential we obtain the following expressions

$$m(r) = \frac{1}{2(\kappa + D_1 r^\xi)} \quad (\text{B12})$$

$$U(r) = \frac{4\kappa^2 + A(\xi) \kappa D_1 r^\xi + B(\xi) D_1^2 r^{2\xi}}{r^2(\kappa + D_1 r^\xi)} \quad (\text{B13})$$

with $A(\xi) = (8 - 3\xi - \xi^2)$ and $B(\xi) = (4 - 3\xi - \frac{3}{2}\xi^2)$.

For the sake of completeness we write also the expressions of the trace $s(r)$, which we used to compute E_0 respectively in the case of finite R_m and in the case of nonzero Pr

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} s(r) = \frac{4\pi D_0 L^\xi}{\Gamma\left(\frac{\alpha + \xi + 1}{2}\right)} \times \left[\Gamma\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right) - \sqrt{\pi} \frac{L}{r} G_{1 \frac{1}{3}}^2 \left(\frac{r^2}{4L^2} \left| \begin{array}{c} 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\xi + 1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \end{array} \right. \right) \right] \quad (\text{B14})$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} s(r) = 8\pi D_0 \eta^\xi \left(\Gamma(-\xi) + \frac{\eta}{r} \left(1 + \frac{r^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1+\xi}{2}} \Gamma(-1-\xi) \times \sin \left[(1 + \xi) \arctan \left(\frac{r}{\eta} \right) \right] \right) \quad (\text{B15})$$

(The function G denotes the G -Meijer's function of argument $r^2/(4L^2)$. See ref. 16 for the exact definition). The explicit expressions of the mass and the potential can be derived from (B4).

ACKNOWLEDGMENTS

I would like to express my gratitude to A. Celani for his fundamental contribution in developing this work. A. Mazzino and M. Vergassola are acknowledged for useful discussions and suggestions. This work was supported by the doctoral grants of the Nice University, by the Department of Physics of the Genova University, by the European Union under Contract HPRN-CT-2000-00162, and by CEFIPRA (project 2404-02).

REFERENCES

1. H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
2. E. N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields* (Clarendon Press, Oxford, 1979).
3. R. H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* **11**:945–953 (1968).
4. A. P. Kazantsev, Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid, *Sov. Phys. JETP* **26**:1031–1034 (1968).
5. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Pergamon Press, Frankfurt, 1980).
6. S. Boldyrev, *A Solvable Model for Nonlinear Mean Field Dynamo*, astro-ph/0105354 (2001).
7. A. A. Ruzmaïkin and D. D. Sokolov, The magnetic field in mirror-invariant turbulence, *Sov. Astron. Lett.* **7**:388–390 (1981).
8. V. G. Novikov, A. A. Ruzmaïkin, and D. D. Sokolov, Kinematic dynamo in a reflection-invariant random field, *Sov. Phys. JETP* **58**:527–532 (1983).
9. A. Gruzinov, S. Cowley, and R. Sudan, Small-scale-field dynamo, *Phys. Rev. Lett.* **77**:4342–4344 (1996).
10. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and M. Vergassola, Small-scale turbulent dynamo, *Phys. Rev. Lett.* **83**:4065–4068 (1999).
11. A. A. Schekochihin, S. A. Boldyrev, and R. M. Kulsrud, *Spectra and Growth Rates of Fluctuating Magnetic Fields in the Kinematic Dynamo Theory with Large Magnetic Prandtl Numbers*, astro-ph/0103333 (2001); submitted to *Astrophys. J.* (2001).
12. M. Vergassola, Anomalous scaling for passively advected magnetic fields, *Phys. Rev. E* **53**:R3021–R3024 (1996).
13. N. V. Antonov, A. Lanotte, and A. Mazzino, Persistence of small-scale anisotropies and anomalous scaling in a model of magnetohydrodynamics turbulence, *Phys. Rev. E* **61**:6586–6605 (2000).
14. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 2, J. Lumley, ed. (MIT Press, Cambridge, MA, 1975).
15. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw–Hill Book Company, Inc., United States of America, 1953).
16. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).

Chapitre 3

Polymères

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la dynamique d'une solution diluée de polymères dans un écoulement turbulent. Les polymères sont modélisés par des « haltères » élastiques et l'écoulement par un champ stochastique de Kraichnan. Ces hypothèses m'ont permis d'écrire une équation de Fokker-Planck pour la distribution de probabilité de la taille des polymères. L'étude des solutions de cette équation donne des résultats exacts sur la transition « coil-stretch » (enroulé-étiré) [8].

Les polymères sont des chaînes de molécules simples appelées monomères. Leur structure peut être assez complexe, comme c'est par exemple le cas de la macromolécule d'ADN. A l'équilibre, les polymères sont enroulés sur eux-mêmes et peuvent être approchés par des objets sphériques de rayon r_0 donné. Lorsqu'elles sont transportées par un écoulement non homogène, ces molécules se déforment, s'allongent et peuvent atteindre des dimensions bien plus grandes que leur taille d'équilibre r_0 . On définit l'extension d'une macromolécule par la distance r entre ses deux extrémités : dans l'état allongé on a $r \gg r_0$. Deux effets se contrebalancent dans la déformation des polymères : d'une part, les molécules sont étirées par les gradients du champ de vitesse et, d'autre part, leur élasticité tend à les ramener vers leur taille d'équilibre. Le rapport entre l'intensité de ces effets est mesuré par le nombre adimensionnel de Weissenberg, Wi , défini comme le produit du temps typique de relaxation élastique de la molécule par l'exposant de Lyapunov maximal de l'écoulement (qui représente le taux moyen de croissance logarithmique de la séparation entre particules fluides).

Bien évidemment, l'allongement d'un polymère est limité par une valeur maximale r_{\max} . Nous nous intéressons au transport turbulent de polymères dont l'échelle caractéristique de déformation satisfait $r_0 \ll r \ll r_{\max}$. Des études théoriques, numériques et expérimentales semblent indiquer que sous cette hypothèse la relaxation du polymère est linéaire [82–84]. L'élasticité du polymère peut ainsi être modélisée par la loi de Hooke et, en absence d'écoulement, la relaxation est exponentielle $r \propto e^{-t/\tau}$, τ étant le temps caractéristique du mode propre d'oscillation le plus lent.

Dans les applications, l'extension des polymères, aussi grande soit elle, n'atteint jamais l'échelle visqueuse η_v de l'écoulement turbulent (où la dissipation est comparable à l'advection). Au dessous de cette échelle, les fluctuations de la vitesse sont atténuées par la viscosité qui rend l'écoulement lisse. Puisque $r \ll \eta_v$, on peut donc supposer que les polymères interagissent toujours avec un écoulement différentiable [85].

Si le champ de vitesse est régulier à petite échelle, l'exposant de Lyapunov maximal λ donne une estimation de la valeur caractéristique des gradients de vitesse¹ : $\lambda \approx |\nabla \mathbf{v}|$. Le nombre de Weissenberg $Wi = \lambda\tau \approx |\nabla \mathbf{v}|\tau$ est donc le rapport entre le temps de relaxation élastique et le temps caractéristique d'allongement. Si $Wi < 1$, la contraction a lieu plus rapidement et la longueur du polymère converge vers la longueur d'équilibre r_0 . La plupart des molécules relaxent vers l'équilibre ; c'est l'état « coiled » (enroulé). En revanche, lorsque $Wi > 1$, la relaxation est faible et les gradients de vitesse peuvent faire subir d'importantes déformations aux polymères. La dynamique des polymères dépend alors fortement des propriétés de l'écoulement. Balkovsky *et al.* ont montré que dans un champ de vitesse aléatoire², les molécules sont fortement allongées dès que le nombre de Weissenberg est supérieure à un [11, 12]. Les polymères se trouvent ainsi dans l'état « stretched » (étiré). La transition « coil-stretch » a ainsi lieu pour $Wi = 1$.³

Les effets dynamiques des polymères sur le champ de vitesse porteur sont ici négligés. Nous considérons des polymères passifs dans un écoulement dont nous fixons les propriétés. Cependant, il est important de remarquer que dans l'état stretched, les molécules sont très allongées et l'échange entre l'énergie cinétique de l'écoulement et l'énergie élastique des polymères produit une rétroaction sur l'évolution du champ de vitesse. On peut prendre en compte ce couplage en considérant un terme additionnel dans le tenseur des contraintes qui figure dans les équations de Navier-Stokes (on parle alors de fluide non newtonien). Pour que l'approche passive soit justifiée, il faut que l'intensité de la tension des polymères sur l'écoulement soit inférieure à $\nu_v \lambda$, ν_v étant la viscosité newtonienne du fluide [11, 12]. Quand on ne peut pas négliger la rétroaction sur le champ de vitesse, l'effet le plus remarquable de la présence de polymères dans un écoulement est la réduction de traînée (voir par exemple [85, 87, 88]).

Nous passons maintenant à la description du modèle utilisé dans ce chapitre. Il s'agit d'un modèle de polymère très simplifié et qui est à la base de descriptions plus complexes. Ce modèle nous permet d'étudier de manière exacte la transition coil-stretch. Dans l'état coiled, j'obtiens la densité de probabilité stationnaire de la taille des polymères et le temps de relaxation vers cette distribution. L'étude des moments de l'élongation r montre que sa densité de probabilité est intermittente en temps. Dans l'état stretched, il n'y a pas de distribution stationnaire et le modèle de transport passif devient inapproprié.

3.2 Le modèle de type « haltère »

Un modèle standard de polymère a été proposé par Rouse : la molécule est représentée par une chaîne de N masses reliées entre elles par des ressorts linéaires [9]. La dynamique de ce système peut être décrite en décomposant le mouvement du polymère sur un ensemble de modes propres d'oscillation linéaire. A chaque mode on peut associer un temps de relaxation qui caractérise la décroissance temporelle de son amplitude. Dans beaucoup d'applications, le comportement du polymère est dominé par le mode

¹Pour un écoulement incompressible λ est toujours positif.

²Plus précisément, les résultats de Balkovsky *et al.* concernent le cas où le temps typique de variation des gradients de vitesse est du même ordre de grandeur que l'inverse de leur valeur caractéristique.

³A noter qu'il peut y avoir des écoulements particuliers où la transition coil-stretch n'a jamais lieu. Cela est dû à la présence d'une composante de rotation trop intense pour permettre aux molécules de s'aligner dans la direction d'étirement [86].

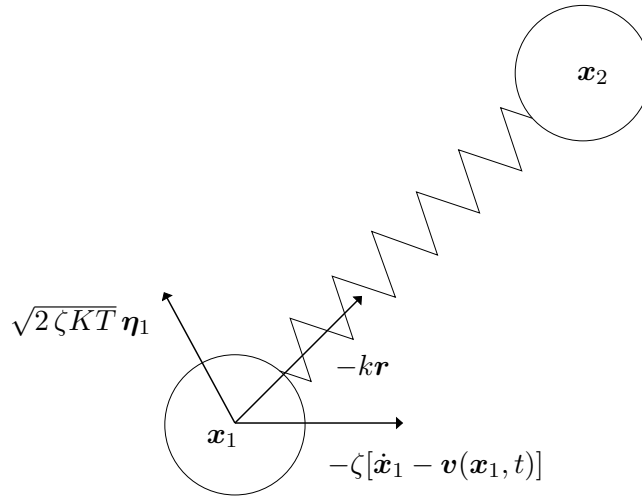


FIG. 3.1 – Modèle de type « haltère » : la molécule de polymère est modélisée par deux billes reliées entre elles par un ressort. Chaque bille est soumise à la force élastique du ressort, à la force de Stokes et au bruit d’agitation thermique.

fondamental qui a un temps de relaxation $\tau \approx \zeta/k$, ζ étant le coefficient de friction du polymère et k la raideur du ressort.

Le modèle de type « haltère » est une simplification du modèle de Rouse [9, 89, 90]. Seul le mode fondamental d’oscillation est pris en compte et l’élasticité du polymère est modélisée par un ressort unique entre les extrémités de la molécule.

Nous considérons donc deux billes de rayon l liées à leurs centres par un ressort linéaire de raideur k et longueur au repos nulle (voir Fig. 3.1). Pour une chaîne de N monomères de longueur L , la valeur de la raideur est $k = 3KT/(N - 1)L^2$, où K est la constante de Boltzmann et T la température [91]. La position des billes est donnée par les vecteurs \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Les deux billes représentent les extrémités du polymère. Leur séparation $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ est donc une mesure de l’élongation de la molécule.

La friction qui agit sur une bille lorsqu’elle est plongée dans un fluide est déterminée par la loi de Stokes et est donc proportionnelle à sa vitesse relative avec l’écoulement : $-\zeta[\dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t)]$ où $\dot{\mathbf{x}}_i$ est la vitesse de la i -ième bille et \mathbf{v} la vitesse du fluide à la position de la bille. Le coefficient de friction vaut $\zeta = 6\pi l \nu_s$, ν_s étant la viscosité dynamique du fluide⁴.

On suppose que la taille des billes est suffisamment petite pour que leur dynamique soit influencée par le bruit d’agitation thermique (voir par exemple [92]), décrit mathématiquement par un processus gaussien $\sqrt{2\zeta KT} \boldsymbol{\eta}_i$ tel que

$$\langle \boldsymbol{\eta}_i(t) \rangle = 0 \quad \langle \boldsymbol{\eta}_i^k(t) \boldsymbol{\eta}_j^\ell(t') \rangle = \delta_{ij} \delta^{k\ell} \delta(t - t') \quad (i = 1, 2).$$

A cause de ce bruit, la taille d’équilibre de l’haltère en l’absence d’écoulement n’est pas

⁴Il faudrait aussi tenir compte de la perturbation du champ de vitesse due à la présence de l’autre bille et la loi de Stokes serait ainsi modifiée : $-\zeta[\dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t) - \mathbf{v}'(\mathbf{x}_i, t)]$, \mathbf{v}' étant la perturbation. En première approximation, on néglige cette correction (dite « interaction hydrodynamique ») qui aurait l’effet de réduire le temps de relaxation [9].

nulle, mais de l'ordre de $r_0 = \sqrt{KT/k}$ (pour une température T donnée on peut estimer r_0 en considérant l'énergie élastique de la molécule $E = kr^2/2$ et sa valeur à l'équilibre $E \approx KT/2$).

En résumé, les équations dynamiques pour les deux billes sont

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_1 &= -k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \zeta [\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{v}(\mathbf{x}_1, t)] + \sqrt{2\zeta KT} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 &= -k(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) - \zeta [\dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{v}(\mathbf{x}_2, t)] + \sqrt{2\zeta KT} \boldsymbol{\eta}_2(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Puisque la taille des polymères est beaucoup plus petite que l'échelle visqueuse de l'écoulement [85], les molécules sont en mouvement dans un champ de vitesse de Batchelor, c'est-à-dire dans un écoulement au gradient uniforme dans l'espace [93]

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_1, t) + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \nabla \mathbf{v}(t). \quad (3.2)$$

Lorsqu'on néglige les effets inertiels⁵, on obtient finalement à partir de (3.1) une équation différentielle stochastique pour l'élongation de la molécule [90]

$$\dot{r} = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{r}{\tau} + \sqrt{\frac{2r_0^2}{\tau}} \boldsymbol{\eta}, \quad (3.3)$$

où $\tau = \zeta/2k$ et $\boldsymbol{\eta} \equiv (\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)/\sqrt{2}$ a les mêmes propriétés que $\boldsymbol{\eta}_1$ et $\boldsymbol{\eta}_2$. Cette équation prend en compte les effets importants dans la dynamique d'une molécule de polymère. Les gradients de vitesse déforment la molécule qui a une réaction élastique pour revenir à la taille d'équilibre. L'interaction des particules du fluide qui se trouvent autour du polymère est modélisée par un bruit brownien $\sqrt{2r_0^2/\tau} \boldsymbol{\eta}$.

A noter qu'un polymère ne peut être décrit par ce modèle en forme d'haltères élastiques infiniment extensibles que lorsque son élongation est beaucoup plus petite que sa taille maximale r_{max} . Il existe toutefois des modèles plus réalistes où la loi de Hooke est remplacée par une force qui diverge lorsque la taille du polymère s'approche de r_{max} (voir par exemple le modèle FENE [9]). Ainsi, pour des extensions très grandes le temps de relaxation τ n'est plus constant, mais il dépend de l'élongation r . Ces modèles introduisent donc un régime non linéaire [84].

Nous analysons maintenant la distribution de probabilité de la taille des polymères lorsque ceux-ci sont transportés par un écoulement de Kraichnan.

3.3 Equation de Fokker-Planck pour la distribution de probabilité de la séparation

La densité de probabilité de l'élongation d'un polymère, $P(\mathbf{r}, t)$, satisfait une équation de Fokker-Planck associée à l'équation différentielle stochastique (3.3) (voir par exemple [92, 95])

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_j \nabla_j v_i - \frac{r_i}{\tau} \right) P = \frac{r_0^2}{\tau} \frac{\partial^2 P}{\partial r_i \partial r_i}, \quad (3.4)$$

où nous avons fait usage de la convention des indices répétés.

⁵La masse des billes peut être éliminée dans la limite où l'échelle temporelle qui caractérise les fluctuations browniennes de la vitesse, m/ζ , est beaucoup plus petite que le temps de relaxation des haltères, $\zeta/2k$ [94].

La probabilité $P(\mathbf{r}, t)$ dépend du champ de vitesse \mathbf{v} que nous n'avons pas encore spécifié. Afin de modéliser un écoulement turbulent, nous choisissons de nouveau le champ stochastique de Kraichnan qui permet d'écrire une équation fermée pour la densité de probabilité du module de la séparation $r = |\mathbf{r}|$. Si la vitesse est δ -corrélée en temps, l'équation (3.3) se réduit à un simple processus stochastique multiplicatif du même type que ceux étudiés dans [96–99].

Pour un écoulement de Kraichnan lisse (d'exposant d'échelle $\xi = 2$), le tenseur de covariance des gradients de vitesse prend la forme

$$\langle \nabla_i v_j(t) \nabla_k v_\ell(t') \rangle = 2D_1[(d+1)\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}] \delta(t-t'), \quad (3.5)$$

d étant la dimension physique de l'écoulement ($d = 2, 3$ dans les applications).

L'équation pour la densité de probabilité moyenne $\hat{P}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle P(\mathbf{r}, t) \rangle_v$ est obtenue en moyennant l'équation (3.4) par rapport aux réalisations du champ de vitesse

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} - D_1 \left[(d+1) \frac{\partial}{\partial r_i} r_j \frac{\partial}{\partial r_i} r_j - \frac{\partial}{\partial r_i} r_j \frac{\partial}{\partial r_j} r_i - \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \frac{\partial}{\partial r_j} r_j \right] \hat{P} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial r_i} r_i \hat{P} = \frac{r_0^2}{\tau} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r_i \partial r_i}.$$

Le terme $\langle \nabla_j v_i P \rangle_v$ est calculé par intégration gaussienne par parties [20, 100, 101] et en utilisant la formule (3.5).

Pour caractériser la transition coil-stretch, il suffit de connaître la probabilité du module de \mathbf{r} : dans l'état coiled les valeurs les plus probables de l'élongation sont proches de la taille d'équilibre r_0 tandis que dans l'état stretched les extensions larges deviennent de plus en plus probables.

D'après l'équation pour \hat{P} , la fonction densité de probabilité du module de la séparation, $p(r, t) \equiv \int \hat{P}(\mathbf{r}, t) r^{d-1} d\Omega$, est solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} [\mathcal{K}_1(r)p] + \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\mathcal{K}_2(r)p], \quad (3.6)$$

où \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 sont respectivement les coefficients de dérive et de diffusion et s'écrivent

$$\mathcal{K}_1(r) = a(1-q)r + \frac{b(d-1)}{r} \quad \mathcal{K}_2(r) = ar^2 + b \quad (3.7)$$

$$a = \frac{\Delta}{2} \quad b = \frac{r_0^2}{\tau} \quad q = \frac{2}{\Delta} \left(\frac{1}{\tau} - \lambda \right). \quad (3.8)$$

Le paramètre $\lambda = D_1 d(d-1)$ coïncide avec l'exposant de Lyapunov principal de l'écoulement de Kraichnan lisse et $\Delta = 2D_1(d-1)$ est la variance de la distribution asymptotique des exposants de Lyapunov ; elle est reliée aux corrélations des gradients de \mathbf{v} [102–104] (voir aussi [18]). Les constantes a , b et d sont toujours positives tandis que le signe de q dépend de la valeur du nombre de Weissenberg $Wi = \lambda\tau$: q est positif pour $Wi < 1$ et négatif dans le cas opposé. Les coefficients \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 ne dépendent pas du temps en raison de la stationnarité du champ de Kraichnan.

L'équation de Fokker-Planck (3.6) se réduit dans la limite $r_0 \rightarrow 0$ à l'équation obtenue par Chertkov en approchant le module du vecteur de séparation \mathbf{r} par sa composante la plus longue [10]. Cette équation a ensuite été étudiée par Thiffeault dans le contexte d'un champ de Kraichnan tridimensionnel [105].

Conditions de bords

Nous allons expliciter maintenant la solution de l'équation (3.6) en utilisant des méthodes standards de l'étude des équations de Fokker-Planck (voir par exemple [92, 95–99, 106]). Pour trouver une solution, il faut compléter l'équation (3.6) par une condition initiale $p(r, 0)$ et par des conditions de bords opportunes sur l'intervalle $(0, \infty)$. Réécrivons dans ce but l'équation de Fokker-Planck sous la forme

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial r} = 0, \quad (3.9)$$

où la fonctionnelle

$$J[p(r, t)] = \mathcal{K}_1(r)p(r, t) - \frac{\partial}{\partial r} [\mathcal{K}_2(r)p(r, t)] \quad (3.10)$$

est appelée *courant de probabilité* par analogie avec les équations de transport de la masse ou de la chaleur. L'équation (3.9) est une *équation de conservation de la probabilité* : le courant de probabilité s'interprète comme le taux de probabilité qui traverse l'abscisse r dans la direction positive.

La solution de l'équation de Fokker-Planck doit satisfaire la condition de normalisation $\int_0^\infty p(r, t) dr = 1$ pour tout $t > 0$ car il s'agit d'une densité de probabilité. En intégrant l'équation (3.9) par rapport à r entre 0 et ∞ , on voit aisément que la fonction de courant doit alors satisfaire : $J(0, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} J(r, t)$. Nous considérons ici des conditions de bords un peu plus fortes (dites *conditions réfléchissantes*) qu'on impose habituellement aux solutions d'une équation de Fokker-Planck sur un domaine infini [92, 95, 106]. Nous cherchons une solution telle que le courant de probabilité soit nul à la fois en zéro et à l'infini

$$\begin{aligned} J(0, t) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} J(r, t) &= 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Cela revient à imposer qu'il n'y ait pas de flux de probabilité sur les bords de l'intervalle où l'équation est définie.

3.4 Solution stationnaire

Puisque les coefficients $\mathcal{K}_1(r)$ et $\mathcal{K}_2(r)$ ne dépendent pas du temps, on peut supposer que la densité de probabilité $p(r, t)$ tende vers une distribution stationnaire $p_0(r)$ indépendante de la condition initiale et du temps.

D'après l'équation (3.9), le courant de probabilité associé à cette solution stationnaire doit être constant, indépendant de r et de t : $J[p_0] = J_0 = \text{const.}$ Plus particulièrement, si l'on impose les conditions (3.11), le courant de probabilité est identiquement nul $J_0 = 0$. La solution stationnaire est alors obtenue par l'équation (3.10) qui se réécrit

$$\frac{d}{dr} [\mathcal{K}_2(r)p_0(r)] - \mathcal{K}_1(r)p_0(r) = 0.$$

On voit aisément que sa solution prend la forme

$$p_0(r) = \frac{C}{\mathcal{K}_2(r)} \exp \left[\int_{r_1}^r \frac{\mathcal{K}_1(y)}{\mathcal{K}_2(y)} dy \right]. \quad (3.12)$$

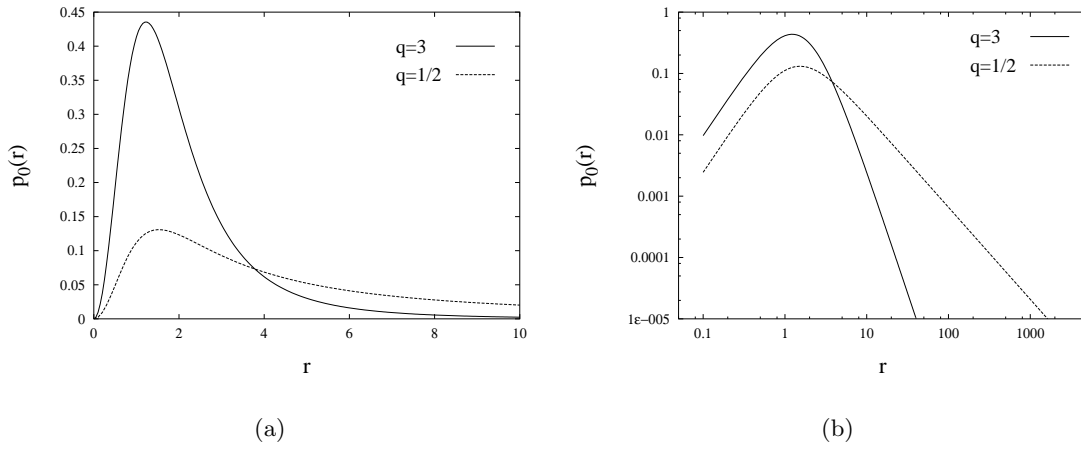


FIG. 3.2 – Densité de probabilité stationnaire de l'élongation du polymère r pour $r_0 = 1$, $d = 3$, $\lambda = 6$; courbe continue : $\tau = 1/7$ (soit $q = 1/2$); courbe en tirets : $\tau = 1/12$ (soit $q = 3$). La taille des polymères est de plus en plus concentrée autour de l'élongation d'équilibre au fur et à mesure que q croît ou, de manière équivalente, que Wi décroît.

La constante C et la borne d'intégration r_1 (qui ne sont pas indépendantes) sont fixées par la condition de normalisation.

Pour la forme particulière (3.7) des coefficients de dérive et de diffusion, la distribution stationnaire du module de la séparation n'existe que lorsque q est positif (q est défini par (3.8)). Elle s'écrit

$$p_0(r) = N_0 r^{d-1} \left(1 + \frac{a}{b} r^2\right)^{-(q+d)/2} \quad (q > 0). \quad (3.13)$$

N_0 est une constante de normalisation qui pour $q > 0$ vaut (voir [107] - formule 3.252.2)

$$N_0 = 2 \left(\frac{a}{b}\right)^{d/2} \frac{\Gamma\left(\frac{q+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},$$

Γ étant la fonction d'Euler de seconde espèce. Pour des valeurs de r proches de zéro, la distribution stationnaire tend vers zéro algébriquement : on a $p_0(r) \sim r^{d-1}$. Le maximum de probabilité est localisé à $r \approx r_0$ et aux grandes valeurs on a une queue algébrique :

$$p_0(r) \propto r^{-1-q} \quad \text{pour } (r \rightarrow \infty).$$

Ces deux caractéristiques sont prédites théoriquement par Balkovsky *et al.* [11,12] pour un champ de vitesse aléatoire générique et elles sont confirmées par des simulations numériques dans des écoulements bidimensionnels [108] et tridimensionnels [109]. Si $q > 0$ (et donc $Wi < 1$), l'intégrale de normalisation $\int_0^\infty dr p_0(r)$ est déterminée par les petites valeurs de r : cela signifie que la plupart des molécules ont une dimension linéaire à peu près égale à l'extension d'équilibre r_0 (voir Fig. 3.2). Au contraire, pour $q < 0$ (soit $Wi < 1$) l'intégrale de normalisation diverge. Il n'existe alors pas de distribution de probabilité stationnaire : la plupart des molécules sont fortement allongées et le

transport de polymères ne peut plus être décrit par un modèle passif. Le changement de signe de l'exposant q correspond donc à la transition coil-stretch [11, 12].

La valeur de q calculée ici (équation (3.8)) coïncide avec celle estimée par Balkovsky *et al.* au voisinage de la transition ($\lambda \approx \tau^{-1}$) [11, 12]. Pour obtenir ce résultat, ils ont considéré une approximation quadratique de la fonction de Cramér associée aux grandes déviations des exposants de Lyapunov de l'écoulement [20, 110]. Dans le cas d'un champ de vitesse du type de Kraichnan, la fonction de Cramér est exactement quadratique pour toute valeur de λ [102].

3.5 Densité de probabilité dépendante du temps

Examinons à présent la distribution de probabilité $p(r, t)$ de l'élongation r pour un instant t fini. L'équation de Fokker-Planck non stationnaire peut être résolue en utilisant la méthode de séparation des variables qui consiste ici à chercher la solution sous la forme $p(r, t) = p_\nu(r) e^{-\nu t}$. On se ramène ensuite à un problème aux valeurs propres

$$L_{\text{FP}} p_\nu = -\nu p_\nu, \quad (3.14)$$

où L_{FP} désigne l'opérateur de Fokker-Planck

$$L_{\text{FP}} \cdot \equiv -\frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{K}_1(r) \cdot) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\mathcal{K}_2(r) \cdot).$$

Avec les conditions de bords réfléchissantes, cet opérateur est symétrique et sémi-défini négatif par rapport au produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^\infty f(r)g(r)[p_0(r)]^{-1} dr. \quad (3.15)$$

En conséquence, les valeurs propres ν sont toujours réelles et non négatives. Le spectre est en général composé d'une partie discrète (finie ou dénombrable) et d'un ensemble continu. Bien évidemment, si le niveau discret $\nu = 0$ appartient au spectre de l'opérateur, l'équation de Fokker-Planck admet une solution stationnaire p_0 qui coïncide avec la fonction propre associée à $\nu = 0$.

Lorsqu'on impose des conditions réfléchissantes aux bords ($J_\nu(0) = J_\nu(\infty) = 0$), les fonctions propres associées au spectre discret forment un ensemble orthogonal par rapport au produit scalaire (3.15)

$$\int_0^\infty p_{\nu_n}(r)p_{\nu_{n'}}(r)[p_0(r)]^{-1} dr = \delta_{nn'}. \quad (3.16)$$

Pour le spectre continu, la condition d'orthogonalité (3.16) est remplacée par

$$\int_0^\infty p_\nu(r)p_{\nu'}(r)[p_0(r)]^{-1} dr = \delta(\nu - \nu'), \quad (3.17)$$

où $\delta(\nu - \nu')$ est la fonction de Dirac. En définitive, si l'ensemble des fonctions propres $\{p_\nu\}$ forme une base complète, on peut écrire la densité de probabilité dépendante du temps sous la forme

$$p(r, t) = \sum_n A_n p_{\nu_n}(r) e^{-\nu_n t} + \int d\nu A(\nu) p_\nu(r) e^{-\nu t}, \quad (3.18)$$

où les coefficients du développement sont déterminés par la condition initiale $p(r, 0)$

$$A_n = \int_0^\infty p(r, 0) p_{\nu_n}(r) [p_0(r)]^{-1} dr \quad \text{et} \quad A(\nu) = \int_0^\infty p(r, 0) p_\nu(r) [p_0(r)]^{-1} dr.$$

Il est important de remarquer que la probabilité de transition $p(r, t|\varrho, 0)$ est la solution particulière de l'équation de Fokker-Planck (3.6) associée à la condition initiale $p(r, 0|\varrho, 0) = \delta(r - \varrho)$. Elle aussi peut être écrite sous la forme (3.18), c'est-à-dire

$$p(r, t|\varrho, 0) = \sum_n [p_0(\varrho)]^{-1} p_{\nu_n}(\varrho) p_{\nu_n}(r) e^{-\nu_n t} + \int d\nu [p_0(\varrho)]^{-1} p_\nu(\varrho) p_\nu(r) e^{-\nu t}.$$

L'équation aux valeurs propres (3.14) pour le problème défini par l'équation de Fokker-Planck (3.6) se réécrit

$$(ar^2 + b) \frac{d^2 p_\nu}{dr^2} + \left[a(q+3)r - \frac{b(d-1)}{r} \right] \frac{dp_\nu}{dr} + \left[a(q+1) + \frac{b(d-1)}{r^2} + \nu \right] p_\nu = 0. \quad (3.19)$$

Grâce au changement de variable $y = -ar^2/b$, cette équation se ramène à une équation de type équation de Fuchs avec trois singularités régulières en 0, 1 et ∞

$$p_\nu'' + \frac{d-2+(q+4)y}{2y(y-1)} p_\nu' + \frac{1-d+(q+\nu/a+1)y}{4y^2(y-1)} p_\nu = 0,$$

où $p_\nu' = dp_\nu/dy$. A l'aide d'un changement d'inconnue approprié, on peut toujours transformer une telle équation en équation hypergéométrique de Gauss [111]. Au lieu de p_ν , introduisons la nouvelle fonction $w_\nu = y^{(1-d)/2} p_\nu$ satisfaisant l'équation de Gauss

$$w_\nu'' + \frac{-d+(2d+q+2)y}{2y(y-1)} w_\nu' + \frac{d^2+dq+\nu/a}{4y(y-1)} w_\nu = 0. \quad (3.20)$$

Réécrite sous cette forme, l'équation aux valeurs propres (3.14) montre clairement que seuls les paramètres d et q déterminent la forme des fonctions propres p_ν : a et b ne définissent que des facteurs d'échelle pour le spectre de l'opérateur de Fokker-Planck et pour la variable r .

Considérons tout d'abord que la dimension d'espace d est pair. La solution générale de l'équation (3.20) au voisinage de l'origine est

$$A F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; y) + B y^{1-d/2} F(1+\alpha_\nu-\gamma, 1+\beta_\nu-\gamma; 2-\gamma; y),$$

où

$$\alpha_\nu = \frac{d}{2} + \frac{q}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{q^2 - \frac{4\nu}{a}}, \quad \beta_\nu = \frac{d}{2} + \frac{q}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{q^2 - \frac{4\nu}{a}}, \quad \gamma = \frac{d}{2},$$

F étant la série hypergéométrique de Gauss et A et B des constantes arbitraires. Une conséquence immédiate est que la solution générale de l'équation aux valeurs propres (3.19) au voisinage de l'origine s'écrit

$$A r^{d-1} F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; -\epsilon r^2) + B r F(1+\alpha_\nu-\gamma, 1+\beta_\nu-\gamma; 2-\gamma; -\epsilon r^2), \quad (3.21)$$

où $\epsilon = a/b$. Les deux solutions indépendantes ci-dessus ont un comportement différent lorsque r tend vers zéro. Pour satisfaire la condition de réflexion à l'origine, on doit forcément imposer $B = 0$.

Si maintenant la dimension d'espace est pair, le premier terme de (3.21) reste inchangé alors que le second a une singularité logarithmique à l'origine [111] : de nouveau, la liaison en zéro n'est satisfaite qu'à condition de choisir $B = 0$. En conclusion, quelle que soit la dimension d , les fonctions propres de l'opérateur L_{FP} qui vérifient les conditions de bords réfléchissantes (3.11) ont la forme

$$p_\nu(r) = N_\nu r^{d-1} F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; -\epsilon r^2), \quad (3.22)$$

où N_ν désigne la constante de normalisation. La série hypergéométrique de Gauss peut être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe avec une coupure sur l'axe réel positif entre 1 et ∞ [112]. Les fonctions propres p_ν sont ainsi des fonctions analytiques dans l'ensemble de leur domaine de définition $(0, \infty)$.

3.5.1 Spectre discret

La branche discrète du spectre est déterminée par la condition d'orthogonalité (3.16). En vertu de la formule qui exprime le prolongement analytique de la série hypergéométrique au voisinage du point à l'infini, on a

$$\begin{aligned} F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; -\epsilon r^2) = & \\ & \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta_\nu - \alpha_\nu)}{\Gamma(\beta_\nu)\Gamma(\gamma - \alpha_\nu)} \epsilon^{-\alpha_\nu} r^{-2\alpha_\nu} F(\alpha_\nu, \alpha_\nu + 1 - \gamma; \alpha_\nu + 1 - \beta_\nu; -1/\epsilon r^2) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha_\nu - \beta_\nu)}{\Gamma(\alpha_\nu)\Gamma(\gamma - \beta_\nu)} \epsilon^{-\beta_\nu} r^{-2\beta_\nu} F(\beta_\nu, \beta_\nu + 1 - \gamma; \beta_\nu + 1 - \alpha_\nu; -1/\epsilon r^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

De plus, comme $F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha_\nu \beta_\nu}{\gamma} z + O(z^2)$, on voit sans peine que p_ν ne peut être normalisée que si $\gamma - \alpha_\nu$ est un entier non positif. Le spectre discret est donc défini par la condition $\gamma - \alpha_\nu = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) qui correspond aux niveaux

$$\nu_n = 2an(q - 2n), \quad n < q/4.$$

Pour une valeur fixée de l'exposant q , l'ensemble des valeurs propres discrètes est alors borné supérieurement par $aq^2/4$ et il est formé par un nombre fini de niveaux. Si $0 < q < 4$, la seule valeur propre discrète est $\nu = 0$ qui est associée à la densité de probabilité stationnaire ; au fur et à mesure que q croît, d'autres niveaux discrets apparaissent. Si en revanche l'exposant q est négatif, il n'y a pas de spectre discret et la solution stationnaire n'existe pas. D'après la formule due à Euler [111], on a

$$F(\alpha_\nu, \beta_\nu; \gamma; -\epsilon r^2) = (1 + \epsilon r^2)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha_\nu, \gamma - \beta_\nu; \gamma; -\epsilon r^2)$$

et les fonctions propres du spectre discret sont des fonctions rationnelles qui s'écrivent en termes des anciens paramètres (voir Fig. 3.3)

$$p_n(r) = N_n r^{d-1} \left(1 + \frac{a}{b} r^2\right)^{-(d+q)/2} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (n - q/2)_m (-\epsilon)^m}{(d/2)_m m!} r^{2m} \quad (n < q/4).$$

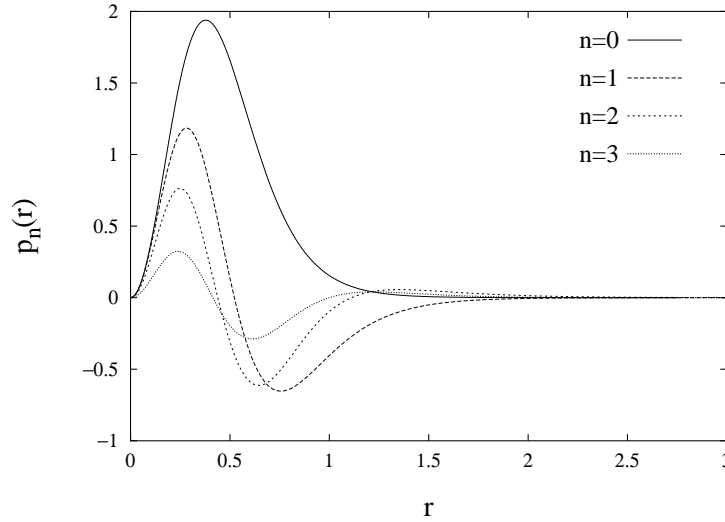


FIG. 3.3 – Fonctions propres du spectre discret pour $d = 3$, $a = b = 1$, $q = 13$ et $n = 0, \dots, 3$.

$(A)_m$ désigne ici le symbole de Pochhammer $(A)_m = A(A-1)\dots(A+m-1)$, $(A)_0 = 1$, et N_n est le coefficient de normalisation (voir [107] - formule 3.194.3)

$$N_n = \frac{2 \left(\frac{a}{b}\right)^{d/2} \Gamma\left(\frac{q+d}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right]^{1/2}} \left[\sum_{m=0}^n \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^{m+\ell} (-n)_m (-n)_\ell (n-q/2)_m (n-q/2)_\ell}{(d/2)_m (d/2)_\ell m! \ell!} \times \right. \\ \left. \Gamma\left(\frac{d}{2} + m + \ell\right) \Gamma\left(\frac{q}{2} - m - \ell\right) \right]^{-1/2}.$$

Pour des séparations très grandes, les fonctions propres du spectre discret se comportent comme une puissance dont l'exposant dépend de l'ordre n :

$$p_n(r) \propto r^{-1-q+2n} \quad (r \rightarrow \infty).$$

3.5.2 Branche continue

Le spectre continu coïncide avec l'intervalle $(aq^2/4, \infty)$ et les valeurs propres peuvent être écrites sous la forme $\nu = aq^2/4 + 4au^2$, u étant un nombre réel positif. Pour plus de commodité, remplaçons la condition d'orthogonalité (3.17) par

$$\int_0^\infty p_u(r) p_{u'}(r) [p_0(r)]^{-1} dr = \delta(u - u').$$

Les fonctions propres de la branche continue sont alors

$$p_u(r) = N_u r^{d-1} F\left(\frac{d}{2} + \frac{q}{4} - iu, \frac{d}{2} + \frac{q}{4} + iu, \frac{d}{2}, -\frac{a}{b}r^2\right)$$

où le coefficient de normalisation peut être calculé à partir de l'expression asymptotique de la fonction hypergéométrique (3.23) (voir par exemple Landau et Lifchitz [113])

$$N_u = \frac{2\sqrt{N_0}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{d/4} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{q}{4} + iu\right) \Gamma\left(-\frac{q}{4} + iu\right)}{\Gamma(2iu)} \right|.$$

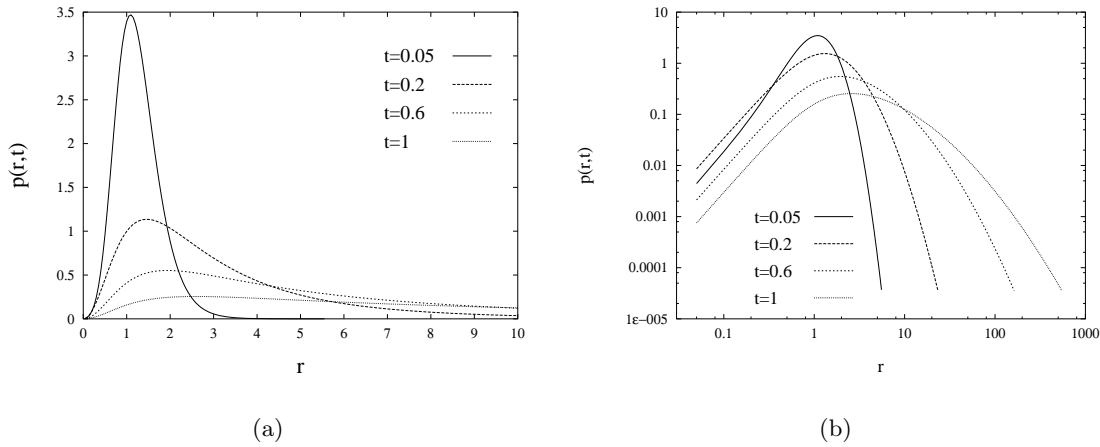


FIG. 3.4 – Evolution temporelle de la densité de probabilité de la séparation dans l'état stretched. La distribution s'éloigne de la forme gaussienne et les grandes extensions deviennent toujours plus probables.

A l'infini, les fonctions p_u sont des fonctions oscillantes dont l'amplitude décroît comme $r^{-1-q/2}$:

$$p_u(r) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{b}\right)^{-(d+q)/4} \sqrt{N_0} \frac{\cos(2u \ln r + \delta_u)}{r^{1+q/2}},$$

où

$$\delta_u = \arg \left[\frac{\Gamma(2iu) \left(\frac{a}{b}\right)^{iu}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \frac{q}{4} + iu\right) \Gamma\left(-\frac{q}{4} + iu\right)} \right].$$

En conclusion, le développement de la densité de probabilité de transition de l'extension d'un polymère transporté par un écoulement de Kraichnan lisse est

$$p(r, t | \varrho, 0) = \sum_n^{q/4-1} [p_0(\varrho)]^{-1} p_n(\varrho) p_n(r) e^{-\nu_n t} + \int_0^\infty du [p_0(\varrho)]^{-1} p_u(\varrho) p_u(r) e^{-\nu(u)t}.$$

Si q est positif, la distribution de probabilité relaxe vers la solution stationnaire. Lorsque q est assez large ($q > 4$), le temps typique de relaxation est donné par l'inverse de la première valeur propre du spectre discret, c'est-à-dire $[2a(q-2)]^{-1}$. Si $q < 4$, c'est la branche continue qui règle la relaxation et le temps caractéristique est $4/(aq^2)$. A noter que l'échelle temporelle typique dépend du paramètre q , c'est-à-dire de la différence entre τ^{-1} et l'exposant de Lyapunov de l'écoulement λ . La dépendance est quadratique pour $q < 4$ et linéaire si $q > 4$ (ce comportement est typique des processus stochastiques avec un bruit blanc multiplicatif [96-99]).

Comme nous l'avons déjà noté, pour q négatif, il n'y a pas de solution stationnaire, les grandes séparations deviennent de plus en plus probables avec le temps et la description passive est alors inappropriée (voir Fig. 3.4).

3.6 Moments de la densité de probabilité

Si $m < q$ ($m \in \mathbb{N}$), le moment d'ordre m de la distribution de probabilité stationnaire p_0 peut être obtenu explicitement

$$M_m \equiv \langle r^m \rangle = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \quad (m < q).$$

Cette expression est en accord avec l'approximation proposée par Thiffeault [105]. Le fait que, pour q fixé, les moments d'ordre élevé divergent est une fois de plus dû à la présence de polymères très allongés. Quand q diminue, le nombre de moments qui diverge croît et la probabilité de trouver des molécules très étirées devient plus grande.

La dépendance temporelle des moments de l'élongation peut être déduite de l'équation de Fokker-Planck (3.6). Le moment d'ordre m satisfait l'équation différentielle

$$\dot{M}_m = am(m - q)M_m + bm(d + m - 2)M_{m-2}. \quad (3.24)$$

Aux temps longs, M_m a une croissance exponentielle de la forme

$$M_m(t) \propto e^{am(m-q)t},$$

ce qui est en accord avec la prévision de Chertkov [10]. La densité de probabilité $p(r, t)$ est par conséquent intermittente en temps : les facteurs d'aplatissement croissent avec le temps et la distribution s'éloigne de la forme gaussienne. Les fluctuations intenses sont donc toujours plus probables.

Les résultats décrits dans ce chapitre sont en cours de rédaction.

Bibliographie

- [1] E. N. LORENZ, Deterministic non periodic flow, *J. Atmos. Sci.* **20**, pp. 130-141 (1963).
- [2] K. TAKEYAMA, Dynamics of the Lorenz Model of Convective Instabilities, *Progr. Theor. Phys.* **60**, pp. 613-615 (1978).
- [3] M. CHAVES, G. EYINK, U. FRISCH, M. VERGASSOLA, Universal decay of scalar turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp. 2305-2308 (2001).
- [4] JAYESH and Z. WARHAFT, Probability distribution of a passive scalar in grid-generated turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **67**, pp. 3503-3506 (1991).
- [5] A. CELANI, A. LANOTTE, A. MAZZINO, and M. VERGASSOLA, Fronts in passive scalar turbulence, *Phys. Fluids* **13**, pp. 1768-1783 (2001).
- [6] R. H. KRAICHNAN, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* **11**, pp. 945-963 (1968).
- [7] A. P. KAZANTSEV, Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, pp. 1806-1813 (1967) [*Sov. Phys. JETP* **26**, pp. 1031-1034 (1968)].
- [8] P. G. DE GENNES, Coil-stretch transition of dilute flexible polymer under ultra-high velocity gradients, *J. Chem. Phys.* **60**, p. 5030-5042 (1974).
- [9] R. B. BIRD, O. HASSAGER, R. C. ARMSTRONG, and C. F. CURTISS, *Dynamics of Polymeric Liquids, Kinetic Theory*, vol. II (Wiley, New York, 1977).
- [10] M. CHERTKOV, Polymer Stretching by Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **84**, pp. 4761-4764 (2000).
- [11] E. BALKOVSKY, A. FOUXON, and V. LEBEDEV, Turbulent Dynamics of Polymer Solutions, *Phys. Rev. Lett.* **84**, pp. 4765-4768 (2000).
- [12] E. BALKOVSKY, A. FOUXON, and V. LEBEDEV, Turbulence of polymer solutions, *Phys. Rev. E* **64**, p. 056301 (2001).
- [13] E. A. JACKSON, *Perspective of nonlinear dynamics* (Cambridge University Press, New York, 1991).
- [14] C. SPARROW, *The Lorenz Equations : Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Applied Mathematical Sciences Vol. 41 (Springer-Verlag, New York, 1982).
- [15] A. J. LICHTENBERG and M. A. LIEBERMAN, *Regular and chaotic dynamics*, Applied Mathematical Sciences vol. 30 (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [16] R. KLAGES, *Deterministic diffusion in one-dimensional chaotic dynamical systems* (Wissenschaft and Technik-Verlag, Berlin, 1996).

- [17] R. KLAGES and J. R. DORFMANN, Simple deterministic dynamical systems with fractal diffusion coefficients, *Phys. Rev. E* **59**, pp. 5361-5383 (1999).
- [18] G. FALKOVICH, K. GAWĘDZKI, and M. VERGASSOLA, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.* **73**, pp. 913-975 (2001).
- [19] A. N. KOLMOGOROV, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, pp. 301-305 (1941).
- [20] U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [21] K. R. SREENIVASAN and R. A. ANTONIA, The phenomenology of small-scale turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, pp. 435-472 (1997).
- [22] A. S. MONIN and A. M. YAGLOM, *Statistical Fluid Mechanics*, J. Lumley ed. (MIT Press, Cambridge, MA, 1975).
- [23] R. A. ANTONIA, E. J. HOPFINGER, Y. GAGNE, and F. ANSELMET, Temperature structure functions in turbulent shear flows, *Phys. Rev. A* **30**, pp. 2704-2707 (1984).
- [24] K. SREENIVASAN, On local isotropy of passive scalars in turbulent shear flows, *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, pp. 165-182 (1991).
- [25] Z. WARHAFT, Passive scalars in turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, pp. 203-240 (2000).
- [26] B. I. SHRAIMAN and E. D. SIGGIA, Scalar Turbulence, *Nature* **405**, pp. 639-646 (2000).
- [27] K. GAWĘDZKI and A. KUPIAINEN, Anomalous scaling of the passive scalar, *Phys. Rev. Lett.* **75**, pp. 3834-3837 (1995).
- [28] D. BERNARD, K. GAWĘDZKI, and A. KUPIAINEN, Anomalous scaling in the N -point functions of a passive scalar, *Phys. Rev. E* **54**, pp. 2564-2572 (1996).
- [29] A. PUMIR, Anomalous scaling behaviour of a passive scalar in the presence of a mean gradient, *Europhys. Lett.* **34**, pp. 25-29 (1996).
- [30] B. SHRAIMAN and E. SIGGIA, Anomalous scaling of a passive scalar in turbulent flow, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* **321**, pp. 279-284 (1995).
- [31] B. SHRAIMAN and E. SIGGIA, Symmetry and scaling of turbulent mixing, *Phys. Rev. Lett.* **77**, pp. 2463-2466 (1996).
- [32] A. PUMIR, B. I. SHRAIMAN, and E. D. SIGGIA, Perturbation theory of the δ -correlated model of a passive scalar advection near the Batchelor limit, *Phys. Rev. E* **55**, pp. R1263-1266 (1997).
- [33] M. CHERTKOV, G. FALKOVICH, I. KOLOKOLOV, and V. LEBEDEV, Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar, *Phys. Rev. E* **52**, 4924-4941 (1995).
- [34] M. CHERTKOV and G. FALKOVICH, Anomalous scaling exponents of a white-advection passive scalar, *Phys. Rev. Lett.* **76**, pp. 2706-2709 (1996).
- [35] R. BENZI, L. BIFERALE, A. WIRTH, Analytic calculation of anomalous scaling in random shell models for a passive scalar, *Phys. Rev. Lett.* **78**, pp. 4926-4929 (1997).

- [36] U. FRISCH, A. MAZZINO, and M. VERGASSOLA, Intermittency in Passive Scalar Advection, *Phys. Rev. Lett.* **80**, pp. 5532-5535 (1998).
- [37] Y. BRENIER, The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids, *J. Am. Math. Soc.* **2**, pp. 225-255 (1989).
- [38] Y. BRENIER, The dual least action problem for an ideal incompressible fluid, *Arch. Rational Mech. Anal.* **122**, 323-351 (1993).
- [39] W. E and E. VANDEN EIJNDEN, Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97**, pp. 8200-8205 (2000).
- [40] W. E and E. VANDEN EIJNDEN, A note on generalized flows, *Physica D* **183**, pp. 159-174 (2003).
- [41] Y. LE JAN and O. RAIMOND, Integration of Brownian vector fields, *Ann. Prob.* **30**, pp. 826-873 (2002).
- [42] K. GAWĘDKI and M. VERGASSOLA, Phase transition in the passive scalar advection, *Physica D* **138**, pp. 63-90 (2000).
- [43] F. HESLOT, B. CASTAING, and A. LIBCHABER, Transition to turbulence in helium gas, *Phys. Rev. A* **36**, pp. 5870-5873 (1987).
- [44] B. CASTAING, G. GUNARATNE, F. HESLOT, L. KADANOFF, A. LIBCHABER, S. THOMAE, X.-Z. Wu, S. ZALESKI, G. ZANETTI, Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **204**, pp. 1-30 (1989).
- [45] A. J. MAJDA and P. R. KRAMER, Simplified models for turbulent diffusion : Theory, numerical modelling, and physical phenomena, *Phys. Rep.* **314**, pp. 237-574 (1999).
- [46] A. PUMIR, B. SHRAIMAN, and E. D. SIGGIA, Exponential tails and random advection, *Phys. Rev. Lett.* **66**, pp. 2984-2987 (1991).
- [47] A. J. MAJDA, Explicit inertial range renormalization theory in a model of turbulent diffusion with broad tail probability distribution, *Phys. Fluids A* **5**, pp. 1962-1970 (1993).
- [48] E. VANDEN EIJNDEN, Non-Gaussian invariant measures for the Majda model of decaying turbulent transport, *Commun. Pure Appl. Math.* **54**, pp. 1146-1167 (2001).
- [49] E. BALKOVSKY and A. FOUXON, Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem, *Phys. Rev. E* **60**, pp. 4164-4174 (1999).
- [50] J. LARMOR, How could a rotating body as the Sun become a rotating magnet ?, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.* **159**, pp. 159-160 (1919).
- [51] H. K. MOFFATT, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [52] E. N. PARKER, *Cosmical magnetic fields, their origin and their activity* (Oxford University Press, New York, 1979).
- [53] Ya. B. ZEL'DOVICH and A. A. RUZMAÏKIN, The hydromagnetic dynamo as the source of planetary, solar, and galactic magnetism, *Usp. Fiz. Nauk* **152**, pp. 263-284 (1987) [*Sov. Phys. Usp.* **30**, pp. 494-504 (1987)].

- [54] S. I. VAÏNSHTEÏN and Ya. B. ZEL'DOVICH, Origin of Magnetic Fields in Astrophysics (Turbulent "Dynamo" Mechanisms), *Usp. Fiz. Nauk* **106**, pp. 431-457 (1972) [*Sov. Phys. Usp.* **15**, pp. 159-172 (1972)].
- [55] A. D. GILBERT, Dynamo Theory, in *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, vol. 2, ed. S. Friedlander and D. Serre, pp. 355-441 (Elsevier Science, 2003).
- [56] A. HERZENBERG, Geomagnetic dynamos, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* **250**, pp. 543-583 (1958).
- [57] D. LORTZ, Exact solution of the hydromagnetic dynamo problem, *Plasma Phys.* **10**, pp. 967-972 (1968).
- [58] G. O. ROBERTS, Dynamo action of fluid motion with two-dimensional periodicity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **271**, pp. 411-454 (1972).
- [59] Yu. B. PONOMARENKO, Theory of the hydromagnetic generator, *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **6**, pp. 47-51 (1973) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **14**, pp. 775-778 (1973)].
- [60] Ya. B. ZEL'DOVICH and A. A. RUZMAÏKIN, The magnetic field in a conducting fluid in two-dimensional motion, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **78**, pp. 980-986 (1980) [*Sov. Phys. JETP* **51**, pp. 493-497 (1980)].
- [61] H. ALFVEN, Discussion of the Origin of the Terrestrial and Solar Magnetic Fields, *Tellus* **2**, pp. 74-82 (1950).
- [62] Ya. B. ZEL'DOVICH, The Magnetic Field in the Two-dimensional Motion of a conducting Turbulent Liquid, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, pp. 154-155 (1956) [*Sov. Phys. JETP* **4**, pp. 460-462 (1957)].
- [63] W. M. ELSASSER, Induction effects in terrestrial magnetism, I. Theory, *Phys. Rev.* **69**, pp. 106-116 (1946).
- [64] A. K. GAILITIS, O. A. LIELAUSIS, S. DEMENT'EV, E. PLATACIS, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN, H. HÄNEL, and G. WILL, Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility, *Phys. Rev. Lett.* **84**, pp. 4365-4368 (2000).
- [65] R. STIEGLITZ and U. MÜLLER, Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Phys. Fluids* **13**, pp. 561-564 (2001).
- [66] A. A. SCHEKOCHIHIN and R. M. KULSRUD, Finite-correlation-time effects in the kinematic dynamo problem, *Phys. Plasmas* **8**, pp. 4937-4953 (2001).
- [67] S. BOLDYREV, A Solvable Model for Nonlinear Mean Field Dynamo, *Astrophys. J.* **562**, pp. 1081-1085 (2001).
- [68] M. VERGASSOLA, Anomalous scaling for passively advected magnetic fields, *Phys. Rev. E* **53**, pp. R3021-R3024 (1996).
- [69] A. A. RUZMAÏKIN and D. D. SOKOLOV, The magnetic field in mirror-invariant turbulence, *Pis'ma Astron. Zh.* **7**, pp. 701-704 (1981) [*Sov. Astron. Lett.* **7**, pp. 388-390 (1981)].
- [70] V. G. NOVIKOV, A. A. RUZMAÏKIN, and D. D. SOKOLOV, Kinematic dynamo in a reflection-invariant random field, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **85**, pp. 909-918 (1983) [*Sov. Phys. JETP* **58**, pp. 527-532 (1983)].

- [71] O. V. ARTAMONOVA and D. D. SOKOLOV, Asymptotic solution of the problem on magnetic field generation in mirror-symmetric turbulence, *Vestn. Moscow Univ. Ser. 3 Fiz. Astr.* **27** No. 3, pp. 8-13 (1986).
- [72] Ya. B. ZEL'DOVICH, S. A. MOLCHANOV, A. A. RUZMAÏKIN, and D. D. SOKOLOV, Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium, *Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys.* **7**, pp. 1-110 (1988).
- [73] Ya. B. ZEL'DOVICH, A. A. RUZMAÏKIN, and D. D. SOKOLOV, *The Almighty Chance* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [74] A. GRUZINOV, S. COWLEY, and R. SUDAN, Small-scale-field dynamo, *Phys. Rev. Lett.* **77**, pp. 4342-4344 (1996).
- [75] A. A. SCHEKOCHIHIN, S. A. BOLDYREV, and R. M. KULSRUD, Spectra and Growth Rates of Fluctuating Magnetic Fields in the Kinematic Dynamo Theory with Large Magnetic Prandtl Numbers, *Astrophys. J.* **567**, pp. 828-852 (2002).
- [76] A. A. SCHEKOCHIHIN, S. COWLEY, J. MARON, and L. MALYSHKIN, Structure of Small-Scale Magnetic Fields in the Kinematic Dynamo Theory, *Phys. Rev. E* **65**, 016305 (2002).
- [77] E. T. VISHNIAC, The dynamics of flux tubes in high- β plasma. II. Bouyancy in stars and accretion disks, *Astrophys. J.* **451**, pp. 816-824 (1995).
- [78] P. H. ROBERTS and G. A. GLATZMAIER, Geodynamo theory and simulations, *Rev. Mod. Phys.* **72**, pp. 1081-1123 (2000).
- [79] M. CHERTKOV, G. FALKOVICH, I. KOLOKOLOV, and M. VERGASSOLA, Small-scale turbulent dynamo, *Phys. Rev. Lett.* **83**, pp. 4065-4068 (1999).
- [80] A. CELANI and A. MAZZINO, en préparation (2003).
- [81] P. M. MORSE and H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1983.)
- [82] T. T. PERKINS, S. R. QUAKE, D. E. SMITH, and S. CHU, Relaxation of a Single DNA Molecule Observed by Optical Microscopy, *Science* **264**, pp. 822-826 (1994).
- [83] S. R. QUAKE, H. BABCOCK, and S. CHU, The dynamics of partially extended single molecules of DNA, *Nature* (London) **388**, pp. 151-154 (1997).
- [84] J.W. HATFIELD and S. R. QUAKE, Dynamic Properties of an Extended Polymer in Solution, *Phys. Rev. Lett.* **82**, pp. 3548-3551 (1999).
- [85] J. L. LUMLEY, Drag reduction by additives, *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **1**, pp. 367-384 (1969).
- [86] J. L. LUMLEY, On the solution of equations describing small scale deformation, *Symp. Math.* **9**, pp. 315-334 (1972).
- [87] K. SREENIVASAN and C. M. WHITE, The onset of drag reduction by dilute polymer additives and the maximum drag reduction asymptotic, *J. Fluid Mech.* **409**, pp. 149-164 (2000).
- [88] E. DE ANGELIS, C. M. CASCIOLA, R. BENZI, and R. PIVA, Homogeneous isotropic turbulence in dilute polymers : scale by scale budget, nlin.CD/0208016, soumis à *Phys. Fluids* (2002).
- [89] E. J. HINCH, Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows, *Phys. Fluids* **20**, pp. S22-S30 (1977).

- [90] H. C. ÖTTINGER, *Stochastic Processes in Polymeric Fluids* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [91] R. B. BIRD, R. C. ARMSTRONG, and O. HASSAGER, *Dynamics of Polymeric Liquids, Fluid Mechanics*, vol. I (Wiley, New York, 1977).
- [92] H. RISKEN, *The Fokker-Planck Equation, Methods of Solution and Applications*, in Springer Series in Synergetics, H. Haken ed. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989).
- [93] G. K. BATCHELOR, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity, *J. Fluid Mech.* **5**, pp. 113-133 (1959).
- [94] J. D. SCHIEBER and H. C. ÖTTINGER, The effect of bead inertia on the Rouse model, *J. Chem. Phys.* **89**, pp. 6972-6981 (1988).
- [95] C. W. GARDINER, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*, in Springer Series in Synergetics, H. Haken ed. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985).
- [96] A. SCHENZLE and H. BRAND, Multiplicative stochastic processes in statistical physics, *Phys. Lett. A* **69**, pp. 313-315 (1979).
- [97] A. SCHENZLE and H. BRAND, Multiplicative stochastic processes in statistical physics, *Phys. Rev. A* **20**, pp. 1628-1647 (1979).
- [98] R. GRAHAM, Forward Hopf bifurcation with multiplicative gaussian white noise : exact Fokker-Planck solution, *Phys. Lett. A* **80**, pp. 351-353 (1980).
- [99] R. GRAHAM and A. SCHENZLE, Carleman imbedding of multiplicative stochastic processes, *Phys. Rev. A* **25**, pp. 1731-1754 (1982).
- [100] K. FURUTSU, On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium, *J. Res. Nat. Bur. Standards D* **67**, pp. 303-323 (1963).
- [101] E. A. NOVIKOV, Functionals and the random-force method in turbulence theory, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, pp. 1919-1926 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, pp. 1290-1294 (1965)].
- [102] R. H. KRAICHNAN, Convection of a passive scalar by a quasi-uniform random straining field, *J. Fluid Mech.* **64**, pp. 737-762 (1974).
- [103] Y. LE JAN, On Isotropic Brownian Motions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **70**, pp. 609-620 (1985).
- [104] P. H. BAXENDALE, The Lyapunov spectrum of a stochastic flow of diffeomorphisms, in *Lyapunov Exponents : proceedings of a Workshop held in Bremen, November 12-15, 1984*, L. Arnold and V. Wihstutz eds., *Lecture Notes in Math.* **1186**, pp. 322-337 (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [105] J.-L. THIFFEAULT, Finite extension of polymers in turbulent flow, *Phys. Lett. A* **308**, pp. 445-450 (2003).
- [106] R. L. STRATONOVICH, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1963).
- [107] I. S. GRADSHTEYN and I. M. RYZHIK, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1965).

- [108] G. BOFFETTA, A. CELANI, and S. MUSACCHIO, Two-dimensional Turbulence of Dilute Polymer Solutions, *Phys. Rev. Lett.* **91**, p. 034501 (2003).
- [109] B. ECKHARDT, J. KRONJÄGER, and J. SCHUMACHER, Stretching of polymers in a turbulent environment, *Comput. Phys. Commun.* **147**, pp. 538-543 (2002).
- [110] O. E. LANFORD, *Entropy and Equilibrium States in Classical Mechanics*, in *Statistical Mechanics and Mathematical Problems* (Springer, Berlin, 1973).
- [111] E. GOURSAT, *Léçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent*, Vol. I (Hermann & C^{ie} Editeurs, Paris, 1933).
- [112] E. T. COPSON, *An introduction to the theory of functions of a complex variable* (Oxford University Press, Oxford, 1978).
- [113] L. LANDAU and E. LIFCHITZ, *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory* (MIR Editions, Moscow, 1966).

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties. La première est dédiée au chaos déterministe et, plus particulièrement, aux propriétés d'une classe de systèmes dynamiques qui constitue une généralisation du modèle de Lorenz. L'évolution temporelle de ce système peut être interprétée comme le mouvement oscillatoire d'une particule classique dans un potentiel bistable. Cette interprétation a permis d'effectuer une analyse systématique des propriétés chaotiques du système de Lorenz et d'obtenir un exemple de diffusion déterministe unidimensionnelle.

La deuxième partie porte sur le transport turbulent passif. Le cas le plus simple de transport est celui d'un champ scalaire, comme la température ou la concentration d'un colorant. L'étude de la dynamique des particules lagrangiennes montre que les grandes fluctuations d'un scalaire en déclin dans un écoulement turbulent incompressible, sont plus fréquentes que celles prédites par une distribution gaussienne. Un cas de transport plus complexe est le transport d'un champ vectoriel comme le champ magnétique. Dans le cadre du modèle de Kraichnan, le problème de la dynamo magnétique peut être transformé dans un problème de mécanique quantique. Cela permet d'analyser l'influence des propriétés d'échelle de l'écoulement porteur sur la croissance du champ magnétique. Le dernier cas traité de transport passif concerne la transition « enroulé/étiré » d'un polymère. Lorsque l'écoulement porteur est défini par le modèle de Kraichnan, la distribution de probabilité de l'élongation du polymère satisfait une équation du type Fokker-Planck. Cette équation est résolue de façon exacte par un développement en fonctions propres.

Diffusion, stretching, and intermittency in turbulent transport

Summary

This thesis is divided in two parts. The first one is dedicated to deterministic chaos and, in particular, to the properties of a class of dynamical systems generalising the Lorenz model. The time evolution of the Lorenz system can be interpreted as the oscillating motion of a classical particle moving in a bistable potential. This interpretation yields a systematic analysis of the properties of this model and allows to obtain an example of one-dimensional deterministic diffusion.

The second part is devoted to passive turbulent transport. The transport of a scalar field, examples being the temperature or the concentration of a colorant, is the simplest case of transport. It turns out, studying the dynamics of lagrangian particles, that the large fluctuations of a scalar decaying in an incompressible turbulent flow are more frequent than those predicted by a Gaussian distribution. A more complex case is the transport of a vector field like the magnetic field. The problem of the magnetic dynamo effect can be transformed, within the context of the Kraichnan model, in a quantum mechanics problem. This allows to analyze how the scaling properties of the advecting flow affect the growth of the magnetic field. Finally, the last considered case of passive transport refers to the coil-stretch transition of a polymer. When the advecting flow is defined by the Kraichnan model, the probability distribution of the polymer elongation satisfies a Fokker-Planck equation. This last equation is solved exactly by means of an eigenfunction expansion.