



**HAL**  
open science

## Surfaces de Riemann parfaites en petit genre

Alexandre Casamayou

► **To cite this version:**

Alexandre Casamayou. Surfaces de Riemann parfaites en petit genre. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2000. Français. NNT: . tel-00005446

**HAL Id: tel-00005446**

**<https://theses.hal.science/tel-00005446>**

Submitted on 23 Mar 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2232

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR Alexandre Casamayou-Boucau

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

---

**Surfaces de Riemann parfaites en petit genre**

---

Soutenue le 12 juillet 2000.

Après avis de :

G. BESSON, Directeur de Recherche	Institut Fourier	Rapporteurs
U. HAMENSTÄDT, Professeur	Université de Bonn	

Devant la commission d'examen formée de :

G. BESSON, Directeur de Recherche	Institut Fourier	Président
R. KELLERHALS, Professeur	Université de Bordeaux	Rapporteur
C. BAVARD, Professeur	Université de Bordeaux	Examineurs
U. HAMENSTÄDT, Professeur	Université de Bonn	
P. SCHMUTZ SCHALLER, Professeur	Université de Genève	



À Sylvain Delas,  
† le dimanche 3 janvier 1999.



*Quant à lui, il marcha toute une journée dans le désert. Il vint s'asseoir à l'ombre d'un buisson, et demanda la mort en disant: "Maintenant, Seigneur, c'en est trop! Reprends ma vie: je ne vaud pas mieux que mes pères."*

*Puis il s'étendit sous le buisson, et s'endormit. Mais voici qu'un ange le toucha et lui dit: "Lève-toi, et mange!"*

*Il regarda, et il y avait près de sa tête un pain cuit sur la braise et une cruche d'eau. Il mangea, il but, et se rendormit.*

*Une seconde fois, l'Ange du Seigneur le toucha et lui dit: "Lève-toi, et mange! autrement le chemin serait trop long pour toi."*

*Elie se leva, mangea et but. Puis, fortifié par cette nourriture, il marcha quarante jours et quarante nuits jusqu'à l'Horeb, la montagne de Dieu. Là, il entra dans une caverne et y passa la nuit.*

*La parole du Seigneur lui fut adressée: " Sors dans la montagne et tiens-toi devant le Seigneur, car il va passer."*

*A l'approche du Seigneur, il y eut un ouragan, si fort et si violent qu'il fendait les montagnes et brisait les rochers, mais le Seigneur n'était pas l'ouragan;*

*et après l'ouragan, il y eut un tremblement de terre, mais le Seigneur n'était pas dans le tremblement de terre;*

*et après ce tremblement de terre, un feu, mais le Seigneur n'était pas dans ce feu;*

*et après ce feu, le murmure d'une brise légère.*

*Aussitôt qu'il l'entendit, Elie se couvrit le visage avec son manteau, il sortit et se tint à l'entrée de la caverne...*

Ier Livre des Rois 19,4-13a.  
(Première lecture pour la fête de Saint Bruno.)



# Remerciements

En tout premier lieu, je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance à Christophe Bavard. Pendant trois années, il a dirigé ce travail avec patience, exigence et enthousiasme. Malgré mes tâtonnements et mes difficultés, il n'a cessé de me prodiguer sa confiance. Jamais il n'a mesuré le temps qu'il m'a consacré. L'admirable étendue de ses compétences, ainsi que la profondeur de son intuition géométrique m'ont été un soutien vital tout au long de ce travail. Qu'il accueille ici ma profonde gratitude.

Je suis également extrêmement reconnaissant à Gérard Besson et Ursula Hamenstädt d'avoir accepté la lourde charge de rapporteur : qu'ils soient remerciés pour l'attention prêtée à la lecture de ma thèse, comme pour leur présence à ce jury.

Ruth Kellerhals, responsable enthousiaste du séminaire de Géométrie de Bordeaux-I, me fait l'honneur de participer au jury : qu'elle trouve en ces mots l'expression de ma reconnaissance pour cette marque de soutien.

Je suis tout spécialement honoré de la présence à ce jury de Paul Schmutz Schaller. La lecture de ses articles, ainsi que la discussion qu'il m'a accordée aux Diablerets, ont été une source stimulante et aide inestimable dans l'accomplissement de ce travail : qu'il soit remercié de tout cœur.

Je remercie également Jean-Marc Couveignes pour ses conseils précieux, Alexandru Dimca pour son aide en géométrie algébrique, Michel Mendès-France.

Mes pensées vont bien sûr à tous mes amis du laboratoire : Hugo Akrouf, mon aîné en géométrie différentielle, pour les discussions enrichissantes que nous avons pu avoir ensemble ; David Lubicz, mon collègue de bureau, pour ses innombrables conseils en informatique certes, mais bien plus encore pour la fidélité de son amitié ; Richard Nuadi, pour son soutien constant et son optimisme à toute épreuve ; Marc Lalaude-Labayle et Caroline Despierre pour la richesse de leur amitié ; et puis bien d'autres encore : Hakim, Iban, Jean-



Yves, Karine, Manu, Pascale, Thérèse, Thomas, etc...

Je souhaite également remercier Philippe Depouilly, Mauricette Jaubert, Joëlle Pargade, Sophie Bzoch, Cathy Métivier, Nadia Méchalak, Myriam Trin, tout le personnel de la Bibliothèque Math-Info, pour leur compétence, leur gentillesse et leur bonne humeur, qualités sans lesquelles la vie d'un laboratoire serait morne.

Merci à mes amis de promotion : Mathieu Bonnet, Carole Hohwiller et Thibaut Wirth, Ayumi Kurose, Marc-Stephane Zumbiehl, pour leur amitié fraternelle.

Merci encore à Pascal et Annick Cherrier pour les constants encouragements qu'ils m'ont prodigués. Merci à Hubert Hupkes pour les notes enchanteuses du Clavier bien tempéré. Merci à Augustin Laffay o.p. pour sa dilection.

Merci du fond du cœur à mes parents (qui ont toujours su donner sans compter pour que je puisse mener à bien mes études) et à mon frère Pierre, pour l'amour dont ils me font grâce.

Enfin, ma gratitude la plus intérieure revient à Patrick Langue s.j.

# Introduction

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ , i.e. une surface hyperbolique orientable fermée. On appelle systole de  $X$  la longueur minimale d'une géodésique fermée de  $X$  (une telle géodésique n'est jamais homotopiquement triviale). Comme  $X$  contient un disque plongé de rayon  $Systole(X)/2$ , on peut aisément majorer la systole en fonction du genre :  $Systole(X) < 2 \ln(4g)$ .

D'après [Mu], on sait qu'il existe un maximum pour la systole. La détermination de ce maximum est un problème naturel, analogue de la recherche de réseaux euclidiens de densité maximale en géométrie des nombres. Hormis le cas du genre 2, on ne connaît pas le maximum global. Il est donc naturel de rechercher les maxima locaux : une surface réalisant un maximum local sera appelée surface *extrême*.

Actuellement on ne connaît que peu d'exemples de telles surfaces. En genre **2**, la surface de Bolza est la seule surface extrême ([Sc1],[Ba2],[Je]). En genre **3**, il y a 3 surfaces extrêmes connues ([Sc1]), dont la quartique de Klein et la courbe de Wiman exceptionnelle. Il est fort probable que ce soient les seules en genre 3, cela reste à montrer toutefois. Ensuite P. Schmutz Schaller a exhibé deux surfaces extrêmes en genre **4**, dont une surface de triangle  $M(4)$ , et trois surfaces extrêmes en genre **5** ([Sc1],[Sc2]). En genre **6**, U. Hamenstädt a récemment trouvé une surface de triangle extrême  $S(13,4)$  ([Ha]). Ensuite viennent quelques autres exemples en genres supérieurs :  $S(21,5)$  en genre **10** ([Ha]),  $I(x|z)$  en genre **11** ([Sc1]),  $S_{13}$  en genre **12** ([Sc2]), ainsi qu'une suite infinie  $A(n)$  en genre impair supérieur à 7 ([Sc1]).

Ces considérations s'adaptent au cas non-compact (i.e. surfaces à bords ou à pointes). Dans certains cas non-compacts, la détermination de la systole maximale a été résolue par P. Schmutz Schaller, par le résultat suivant : les surfaces de Riemann qui correspondent à des sous-groupes principaux de

congruences du groupe modulaire sont des surfaces réalisant le maximum global de la systole pour leur genre respectif (cf. [Sc5]). D'autres exemples de maxima locaux sont donnés dans [Ha].

On s'intéresse ici exclusivement au cas compact, où la recherche de surfaces extrêmes paraît nettement plus délicate. Le but de ce travail est de trouver de nouveaux exemples en petit genre.

Il existe par ailleurs deux autres types de surfaces intéressantes à étudier, et plus générales qui interviennent dans la caractérisation des surfaces extrêmes. Une surface  $X$  est dite *parfaite* si les différentielles des fonctions longueur réalisant la systole engendrent affinement l'espace cotangent à  $T_g$  en  $X$ . Une surface  $X$  est dite *eutactique* si le vecteur nul de l'espace cotangent à  $T_g$  en  $X$  appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des différentielles des fonctions longueur réalisant la systole. On dispose alors du strict analogue du théorème de Voronoï pour les réseaux :

*Une surface de Riemann est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique ([Ba1]).*

Les surfaces parfaites sont en nombre fini modulo l'action du groupe  $Mod_g$  ([Ba4]). Les seuls exemples connus de surfaces parfaites non extrêmes sont donnés par P. Schmutz Schaller, qui décrit une suite de telles surfaces pour certains genres supérieurs à 10 ([Sc6]).

Dans le présent travail, on donne une nouvelle surface extrême et deux surfaces parfaites non extrêmes en genre 4 (ce sont les premiers exemples de telles surfaces en petit genre). L'idée de la méthode est de réaliser géométriquement les groupes d'automorphismes à 4 points de branchements, et d'en faire l'étude quasi-exhaustive en genre 4. En effet, le lieu des points fixes d'un tel automorphisme est une famille dépendant d'un paramètre complexe. On cherche alors, en faisant varier ce paramètre, à rendre maximale la systole dans la famille : il faut ensuite examiner si c'est un maximum pour la systole dans l'espace de Teichmüller. On peut établir, par des critères algébriques (formule de Hurwitz,...), la liste exhaustive des groupes d'automorphismes agissant sur les surfaces de genre 4 ([Bo]). Un problème rencontré ici a été de réaliser géométriquement la famille des points fixes d'un tel automorphisme, pour pouvoir en faire une étude effective.

Par extension de cette méthode, on trouve également une nouvelle surface extrême en genre 6, ainsi qu'une suite infinie de surfaces parfaites non extrêmes de genre  $g \geq 4$ . En outre, la méthode employée permet de retrou-

ver, de manière unifiée, les surfaces données par P. Schmutz Schaller en genre  $g \leq 5$  (cf. ch. 2, § 3.1, rem. 5).

Plus précisément, on obtient les résultats suivants :

**Théorème 1.** *En genre 4, il existe deux surfaces parfaites distinctes de  $M(4)$  et  $S_4$  (cf. Tab.1) :  $C_4$  extrême et modelée sur le graphe biparti  $K_{3,3}$  ; et  $A_4$  ayant la symétrie du cube.*

*En genre 6, il existe une surface extrême  $I_6$  ayant la symétrie de l'icosaèdre, et distincte de  $S(13, 4)$  (cf. Tab.1).*

**Théorème 2.** *Pour tout genre  $g > 3$ , il existe une surface parfaite non eutactique  $B_g$  invariante par le groupe diédral d'ordre  $2g$  (cf. Tab.1).*

Le tableau 1 récapitule les surfaces remarquables (sous-entendu parfaites ou extrêmes) de genre inférieur à 6, connues à ce jour.

genre	surface	$(systole)/2$	$\#\{syst\}$	prop.	références
2	$M^*$	1,52857	12	ex	(Bolza)[Sc1]
3	$M(3)$	1,99165	24	ex	(Wiman)[Sc1]
3	$T(x z)$	1,96797	21	ex	(Klein)[Sc1], § 3.1.2
3	$T(x y)$	1,96355	22	ex	[Sc1], § 3.1.2, rem. 5
4	$M(4)$	2,31225	36	ex	[Sc1], § 3.2.2
4	$A_4$	2,30660	28	p	§ 3.2.3
4	$C_4$	2,30159	21	ex	§ 2.1.4
4	$S_4$	2,26438	36	ex	[Sc2], § 2.1.3
4	$B_4$	2,10519	24	p	§ 5.1.2
5	$S_5$	2,45728	40	ex	[Sc2], § 2.2
5	$O(x z)$	2,44845	48	ex	[Sc1], § 2.2
5	$O(x y)$	2,37091	42	ex	[Sc1], § 2.2
5	$B_5$	2,16846	30	p	§ 5.2.2
6	$I_6$	2,55450	31	ex	§ 3.3.3
6	$S(13, 4)$	2,48284	39	ex	[Ha]
6	$B_6$	2,20223	36	p	§ 5.2.2
$g \geq 4$	$B_g$	$< 2, 27747$	$6g$	p	§ 5.2.2
$2n - 1 \geq 7$	$A(n)$	$< 2, 81698$	$14n$	ex	[Sc1]

TAB. 1 – Surfaces parfaites (p) ou extrêmes (ex) connues en genre  $g \leq 6$

Les surfaces eutactiques sont en nombre fini modulo l'action du groupe  $Mod_g$  ([Ba4]). Par ailleurs, la systole est une fonction de Morse topologique, et ses points critiques sont les surfaces eutactiques ([Ak]). La méthode employée pour la recherche de surfaces parfaites, permet de trouver parallèlement un certain nombre de surfaces eutactiques (Tab. 1.1), qui sont intéressantes à classifier en elles-mêmes puisque ce sont les points critiques de la fonction systole.

Par ailleurs, dans certains des exemples précédents, on détermine une sous-variété de l'espace de Siegel contenant strictement la famille de jacobiniennes associée à la famille de surfaces considérée.

Enfin, le dernier chapitre (ch. 6) est d'un esprit tout à fait différent des précédents. Il concerne une méthode purement algébrique qui permet de redémontrer l'extrémalité des surfaces respectivement de Bolza et de Klein. Néanmoins au vue des considérations concluant le dit chapitre, il serait nécessaire de développer beaucoup plus en avant l'idée de base afin de pouvoir l'appliquer à d'autres exemples.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>9</b>
1.1	Surfaces parfaites, surfaces eutactiques . . . . .	9
1.2	Méthode mise en œuvre . . . . .	10
1.2.1	Recherche de surfaces parfaites . . . . .	10
1.2.2	Recherche de surfaces eutactiques . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Doubles twistés</b>	<b>17</b>
2.1	Une famille de genre 4 modélisée sur $K_{3,3}$ . . . . .	17
2.1.1	Groupe d'automorphismes . . . . .	17
2.1.2	Equations . . . . .	18
2.1.3	Esquisse du graphe de la famille . . . . .	19
2.1.4	La surface $C_4$ est extrême . . . . .	24
2.1.5	Surfaces eutactiques . . . . .	26
2.2	Une famille de genre 5 modélisée sur le graphe cubique . . . . .	27
2.2.1	Groupe d'automorphismes . . . . .	27
2.2.2	Esquisse du graphe . . . . .	28
2.2.3	Surfaces eutactiques . . . . .	32
2.2.4	Indication sur le lieu des jacobienes . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Polyèdres réguliers</b>	<b>37</b>
3.1	L'octaèdre ( $g = 3$ ) . . . . .	37
3.1.1	Présentation de la famille . . . . .	37
3.1.2	Esquisse du graphe . . . . .	38
3.1.3	Surfaces eutactiques . . . . .	40
3.2	Le cube ( $g = 4$ ) . . . . .	41
3.2.1	Présentation de la famille . . . . .	41
3.2.2	Esquisse du graphe . . . . .	41
3.2.3	La surface $A_4$ est parfaite . . . . .	46
3.2.4	Indication sur le lieu des jacobienes . . . . .	47

3.3	L'icosaèdre ( $g = 6$ ) . . . . .	48
3.3.1	Présentation de la famille . . . . .	48
3.3.2	Esquisse du graphe . . . . .	49
3.3.3	La surface $I_6$ est extrême . . . . .	52
3.3.4	Surfaces eutactiques . . . . .	54
3.4	Le dodécaèdre ( $g = 10$ ) . . . . .	55
3.4.1	Présentation de la famille . . . . .	55
3.4.2	Esquisse du graphe . . . . .	55
3.4.3	Une surface eutactique non parfaite . . . . .	57
3.4.4	Surfaces eutactiques . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Groupes diédraux en genre 4</b>	<b>61</b>
4.1	Le double du pentagone . . . . .	61
4.1.1	Présentation de la famille . . . . .	61
4.1.2	Esquisse du graphe . . . . .	62
4.1.3	Surfaces eutactiques . . . . .	63
4.1.4	Indication sur le lieu des jacobiniennes . . . . .	65
4.2	L'octogone . . . . .	66
4.2.1	Présentation de la famille . . . . .	66
4.2.2	Esquisse du graphe . . . . .	66
4.2.3	Surfaces eutactiques . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Une suite infinie de surfaces parfaites</b>	<b>71</b>
5.1	Une surface parfaite en genre 4 . . . . .	71
5.1.1	Présentation de la famille . . . . .	71
5.1.2	La surface $B_4$ est parfaite . . . . .	72
5.1.3	Indication sur le lieu des jacobiniennes . . . . .	75
5.2	Généralisation en genre quelconque . . . . .	76
5.2.1	Construction d'une suite infinie . . . . .	76
5.2.2	La surface $B_g$ est parfaite . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Une méthode algébrique</b>	<b>81</b>
6.1	Méthode . . . . .	81
6.2	Surface de Bolza . . . . .	82
6.3	Surface de Klein . . . . .	83
6.4	Considérations sur la méthode algébrique . . . . .	85
	<b>Bibliographie</b>	<b>87</b>

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Surfaces parfaites, surfaces eutactiques

La systole d'une surface de Riemann compacte, marquée, de genre  $g$  est définie comme étant le minimum des fonctions longueur géodésique sur l'espace de Teichmüller, fonctions qui sont paramétrées par l'ensemble  $C_g$  des classes d'homotopie libre de courbes fermées de  $\Sigma_g$ , où l'on exclut les courbes triviales. La *fonction systole* a récemment été étudiée par P. Schmutz Schaller (cf. [Sc1, Sc2, Sc5, Sc6]) et par Ch. Bavard (cf. [Ba1]). On rappelle que la systole est bornée, et on peut améliorer la borne mentionnée dans l'introduction par:  $\cosh(\text{Systole}(X)/2) \leq (2 \sin \frac{\pi}{12g-6})^{-1}$  ([Ba2]).

Soit  $T_g$  l'espace de Teichmüller des surfaces de Riemann compactes, marquées, de genre  $g$ ; c'est aussi l'espace des métriques hyperboliques complètes à isotopie près sur une surface orientée  $\Sigma_g$  de signature  $(g, 0)$ . On rappelle que  $\dim_{\mathbb{R}} T_g = 6g - 6$ . L'espace de Teichmüller sera muni de la métrique de Weil-Petersson. Le groupe modulaire de Teichmüller  $Mod_g$  agit sur  $T_g$  par isométries de Weil-Petersson. Dans la suite, on note  $S(X)$  l'ensemble des éléments de  $C_g$  tels que  $l_c(X) = \text{Systole}(X)$  ("courbes de longueurs minimales, ou systoles"), où  $l_c$  désigne la longueur de la géodésique associée à  $c$  dans  $X$ .

Une première caractérisation des surfaces extrêmes a été établie par P. Schmutz Schaller dans [Sc1]. Nous utiliserons ici plutôt la caractérisation donnée par Ch. Bavard dans [Ba1] qui possède l'intérêt de faire apparaître l'analogie avec la théorie des réseaux.

Nous appellerons *surface de Riemann extrême* un maximum local de la



systole. Nous pouvons également définir, conformément à [Ba1], les notions de *surface de Riemann parfaite* et de *surface de Riemann eutactique* de la manière suivante. Soit  $X \in T_g$ ; la surface  $X$  est dite *parfaite* si les gradients (pour la métrique de Weil-Petersson)  $(\nabla_c(X))_{c \in S(X)}$  engendrent affinement l'espace tangent  $T_X(T_g)$ ; la surface  $X$  est dite *eutactique* si le vecteur nul de  $T_X(T_g)$  appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients  $(\nabla_c(X))_{c \in S(X)}$ . On remarque qu'une surface parfaite contient au moins  $\dim_{\mathbb{R}} T_g + 1 = 6g - 5$  systoles. Ch. Bavard a alors énoncé le résultat suivant, qui est le strict analogue du théorème de Voronoï pour les réseaux :

*Une surface de Riemann est extrême si et seulement si elle est parfaite et eutactique ([Ba1]).*

On sait que les surfaces de Riemann parfaites, ou eutactiques, sont en nombre fini modulo l'action du groupe  $Mod_g$ , et que leur systole est le logarithme d'un nombre algébrique ([Ba4]).

## 1.2 Méthode mise en œuvre

### 1.2.1 Recherche de surfaces parfaites

L'idée qui prélude à la recherche de nouveaux exemples de surfaces extrêmes en petit genre, est de considérer comme étant de bons candidats les surfaces qui ont un gros groupe d'automorphismes. En effet, si le groupe d'automorphismes est suffisamment gros, on peut espérer obtenir, avec l'action du groupe, un nombre conséquent de systoles, or une surface parfaite contient au moins  $6g - 5$  systoles.

Fort de ces considérations, on s'enquiert de la liste des groupes d'automorphismes qui peuvent agir sur une surface de Riemann de genre 4. On trouve une telle classification dans [Ku1] et dans [Bo]. L'article de Bogopol'skiï est cependant le plus riche puisqu'il donne, outre la signature de chaque groupe, l'action de celui-ci sur la surface. Nous avons cherché à étudier de manière quasi-exhaustive les actions des groupes répertoriés dans la table 2 de [Bo, p.15] : ce sont ceux qui ne sont ni abéliens, ni diédraux. Pour ce qui est des groupes diédraux, nous avons examiné ceux d'ordre au moins 8. Deux difficultés se présentent alors : d'une part réaliser géométriquement la famille des points fixes d'un tel automorphisme, d'autre part déterminer de manière effective la systole en fonction du paramètre complexe qui paramètre la famille.

Considérons donc un groupe  $G$  mentionné dans la table [Bo, pp.14-15]. Soit  $n$  le nombre de points de branchements. Plusieurs cas se présentent alors :

- Si  $\mathbf{n=3}$ , alors il existe une unique surface admettant  $G$  comme groupe d'automorphismes : c'est une surface de triangle. Dans [Sc1], P. Schmutz Schaller indique que parmi toutes les surfaces de triangle de genre 4, il en existe une seule qui soit extrême :  $M(4)$ .

- Si  $\mathbf{n=4}$ , alors il existe une famille de surfaces paramétrée par un unique paramètre complexe, et admettant  $G$  comme groupe d'automorphismes. Une fois acquise (par des critères purement algébriques) l'existence d'une telle famille, il reste toutefois la délicate question de savoir comment réaliser géométriquement une telle famille. Une première idée est de partir d'un graphe connexe trivalent de "genre" 4 (ici, le genre du graphe est entendu comme étant son nombre cyclomatique) : on place alors, à chaque sommet de ce graphe, un pantalon dont les 3 bords ont même longueur ; puis on les recolle suivant le tracé des arêtes du graphe, en effectuant partout le même twist (intuitivement, on épaissit les arêtes). On obtient de la sorte une famille de surfaces invariantes par un certain groupe  $G$ , paramétrée par le couple de réels  $(l, y) = (\text{twist}, \text{longueur})$  ou, de manière équivalente, par un nombre complexe appartenant au demi-plan de Poincaré ( $z = l + iy$ ). Le groupe  $G$  en question a donc une signature comptant 4 points de branchements : il ne reste plus qu'à le retrouver dans la table de [Bo]. En vue d'appliquer cette méthode, on fait donc l'inventaire des graphes trivalents de genre 4.

Cette méthode appliquée au graphe biparti  $K_{3,3}$  redonne une famille de surfaces invariantes par  $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$  (où  $\mathfrak{S}_3$  désigne le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments), famille en partie étudiée par P. Schmutz Schaller à partir d'une construction différente : c'est l'objet de § 2.1. Outre la surface extrême  $S_4$  mentionnée par P. Schmutz Schaller, on met ici en évidence une nouvelle surface extrême  $C_4$ . Par ailleurs, on décompose le demi-plan  $(l, y)$  en "cellules", où chaque cellule est associée à une classe de géodésiques : si pour une valeur donnée de  $(l, y)$  on se trouve dans telle cellule, cela signifie que les géodésiques associées à cette cellule réalisent alors la systole. Les maxima de la systole se trouvent nécessairement parmi les sommets de cette décomposition du demi-plan.

Il reste que l'idée de partir de graphes trivalents est assez limitative, et il n'est pas clair que l'on puisse de la sorte atteindre tous les groupes de signature 4, répertoriés dans [Bo]. On cherche alors à partir de graphes de valence au moins trois, en mettant éventuellement du genre aux sommets.

On peut par exemple considérer le graphe formé par 5 arêtes joignant deux sommets : la surface obtenue est alors le double twisté d'une surface de signature  $(0, 5)$  ayant la symétrie d'un pentagone régulier. Toutefois, cette famille ne semble pas contenir de surface parfaite (cf. § 4.1).

Plus intéressant est le cas du trèfle de genre 4 : on part d'une surface de signature  $(0, 8)$  dont on identifie les côtés deux à deux. Si la surface de signature  $(0, 8)$  a la symétrie du cube, on obtient une famille de surfaces fixées par  $\mathfrak{S}_4$ , le groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments. Elle contient donc forcément la surface de Bring (dont le groupe d'automorphismes est  $\mathfrak{S}_5$ ) et  $M(4)$  (dont le groupe d'automorphismes est  $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_3$ ). Ce fait, déduit de considérations purement algébriques, sera redémontré par une méthode géométrique au § 3.2.2. De plus on mettra en évidence l'existence, dans cette famille, d'une surface parfaite non eutactique  $A_4$  (cf. § 3.2.3).

Toujours à partir du graphe du trèfle, si la surface de signature  $(0, 8)$  a la symétrie de l'octogone régulier, on obtient une famille de surfaces fixées par le groupe diédral  $D_8$ , d'ordre 16. On n'a pu y déceler de nouvelle surface intéressante (cf. § 4.2).

Pour terminer l'étude exhaustive des actions mentionnées dans la table 2 de [Bo, p.15], il resterait à examiner l'action du corps des quaternions  $Q_8$  (mais cette action est moins intéressante puisqu'elle donne lieu à une famille de surfaces hyperelliptiques) ainsi que l'action de  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \triangleright \langle B \rangle$  (celle ne contenant pas  $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ ).

- Si  $n=5$ , on obtient une famille paramétrée par deux nombres complexes. Il faut alors fixer un des deux paramètres en fonction de l'autre pour faire une étude géométrique du même type que celle menée précédemment. A ce stade, on ne peut plus espérer mener une étude exhaustive. Des exemples intéressants se présentent néanmoins, comme celui de la surface associée au graphe fixé par le groupe diédral  $D_4$ , d'ordre 8. On opère cette fois-ci un découpage "mixte" de la surface en quatre pantalons et un surface de signature  $(0, 4)$ . L'étude menée au § 5.1.2 révèle l'existence d'une surface parfaite  $B_4$ . En outre cette construction se généralise en genre quelconque et permet de construire une suite infinie de surfaces parfaites  $B_g$  de genre  $g \geq 4$  quelconque, qui soient parfaites non eutactiques (cf. § 5.2.2).

Les exemples traités en genre 4, ont permis plusieurs autres généralisations en genres supérieurs : par exemple, la méthode appliquée au graphe biparti  $K_{3,3}$  donne dans le cas du graphe cubique la famille de genre 5 partiellement étudiée par P. Schmutz Schaller à partir d'une construction différente ([Sc2]).

On n'a pu y déceler de nouvelle surface intéressante ; on y retrouve toutefois la famille  $O(y)$  décrite différemment par rapport à [Sc1], et en particulier la surface  $O(x|y)$  (cf. § 2.2).

Au § 3.3.3, on donne un nouvel exemple de surface extrême en genre 6. En effet, la construction du § 3.2, qui consiste à recoller les bords opposés d'une surface de signature  $(0, 8)$  possédant la symétrie du cube, peut s'adapter au cas de tous les polyèdres réguliers : dans le cas de l'octaèdre (§ 3.1), on retombe sur une famille de genre 3, déjà étudiée à partir d'une construction différente en [Sc1] ; dans le cas de l'icosaèdre (§ 3.3), on obtient une famille de genre 6, paramétrée par un unique paramètre complexe, et ayant pour groupe d'automorphismes le groupe alterné de degré 5 (on peut d'ailleurs obtenir une présentation duale de cette famille en épaississant les arêtes du graphe de Petersen). On montre notamment que cette famille contient une surface extrême notée  $I_6$ . Néanmoins cette surface ne réalise qu'un maximum local de la systole, puisque cette même famille contient une surface eutactique  $E_{6,60}$  dont la systole est plus grande que celle de  $I_6$ . Dans le cas du dodécaèdre (§ 3.4.3), l'étude n'a pu révéler de surface intéressante. A noter que dans ces exemples polyédraux, la famille provient d'un graphe projectif.

Pour certains des exemples précédents, on détermine une sous-variété de l'espace de Siegel contenant strictement la famille de jacobiniennes associée à la famille de surfaces considérée. Sachant que la systole des surfaces de Riemann est l'analogue de l'invariant d'Hermite pour les réseaux, il est naturel de se poser la question de savoir si une surface de Riemann extrême (pour la systole) donne lieu à une jacobienne extrême (pour l'invariant d'Hermite). De fait, c'est vrai pour la surface de Bolza, la quartique de Klein et la surface de Wiman exceptionnelle (cf. [Ba3], [B-S]). Qu'en est-il dans le cas général?

### 1.2.2 Recherche de surfaces eutactiques

La méthode employée pour la recherche de surfaces parfaites permet de trouver parallèlement un certain nombre de surfaces eutactiques. Ces surfaces sont intéressantes à étudier puisque ce sont les points critiques de la systole ([Ak]). De plus, elles sont en nombre fini, modulo l'action du groupe  $Mod_g$  ([Ba4]).

On commence par rappeler un résultat relatif à l'eutaxie relative énoncé par Ch. Bavard dans [Ba3] :

**Propriété 1.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $Aut(X)$  et  $(T_X(T_g))^G$  le sous-espace des points fixes de  $G$  dans  $T_X(T_g)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $T_X(T_g)$*

qui contient  $(T_X(T_g))^G$ . Alors  $X$  est eutactique si et seulement si  $X$  est eutactique relativement à  $F$ .

En conséquence, dans chaque famille étudiée précédemment, il suffit de chercher une combinaison linéaire positive des gradients des fonctions longueur réalisant la systole, d'en déduire l'eutaxie relative, puis l'eutaxie globale. On examine alors trois types de surfaces :

- les surfaces de triangle. Elles sont forcément eutactiques, puisque tout point fixe isolé est eutactique ([Ba4, Cor.1.3]).
- les surfaces qui sont situées aux sommets du graphe décomposant le plan  $(l/y; y)$ . Dans ce cas, la systole de la surface est réalisée par (au moins) trois familles de géodésiques distinctes : on calcule les gradients des fonctions longueur  $\nabla L_1, \nabla L_2, \nabla L_3$ , vues comme fonctions de  $y$  et  $l$  :

$$dL_i = \frac{\partial L_i}{\partial y} dy + \frac{\partial L_i}{\partial l} dl$$

et on en cherche une combinaison linéaire avec des coefficients strictement positifs : s'il existe une telle combinaison linéaire, on en conclut que la surface est relativement eutactique, et donc eutactique par le résultat rappelé précédemment.

- les surfaces qui se trouvent sur une arête entre deux sommets du graphe décomposant le plan  $(l/y; y)$ , et qui réalisent le minimum de la systole sur cette arête. Pour une telle surface, la systole est réalisée par deux familles de géodésiques  $L_1$  et  $L_2$ . Cette surface réalise le minimum de la longueur  $L_1$  sous la contrainte  $L_1 = L_2$ , donc par utilisation des multiplicateurs de Lagrange, on en déduit que les deux gradients  $\nabla L_1$  et  $\nabla L_2$  sont colinéaires. Si en outre ils sont de sens opposés, alors la surface est strictement eutactique.

Le tableau 1.1 récapitule les surfaces eutactiques trouvées de la sorte.

genre	surface	$(systole)/2$	$\#\{syst\}$	propriété	références
3	$E'_{3,24}$	1,94239	18	eu	§ 3.1.3
3	$Frt$	1,89892	16	eu	(Fermat) § 3.1.3
3	$E_{3,24}$	1,83564	15	eu	§ 3.1.3
3	$E''_{3,24}$	1,83564	9	eu	§ 3.1.3
4	$Brg$	2,30159	20	eu	(Bring) § 3.2.2
4	$E_{4,36}$	2,19857	12	eu	§ 2.1.5
4	$E'_{4,36}$	2,19857	31	eu	§ 2.1.5
4	$E_{4,16}$	1,95799	16	eu	§ 4.2.3
4	$E_{4,10}$	1,95390	20	eu	§ 4.1.3
4	$C_{(1,1)}$	1,92484	18	eu	[B-L], § 2.1.5
4	$E'_{4,16}$	1,89892	12	eu	§ 4.2.3
4	$E'_{4,10}$	1,89453	15	eu	§ 4.1.3
5	$E_{5,48}$	2,37654	24	eu	§ 2.2.3
5	$E''_{5,48}$	2,37086	36	eu	§ 2.2.3
5	$E'_{5,48}$	2,19857	16	eu	§ 2.2.3
5	$E'''_{5,48}$	1,83564	18	eu	§ 2.2.3
6	$E_{6,60}$	2,60898	26	eu	§ 3.3.4
6	$E'''_{6,60}$	2,35066	25	eu	§ 3.3.4
6	$E''_{6,60}$	2,02989	21	eu	§ 3.3.4
6	$E'_{6,60}$	1,97544	20	eu	§ 3.3.4
10	$E_{10,60}$	2,68541	51	eu	§ 3.4.4
10	$\Sigma_{10}$	2,58639	55	eu	§ 3.4.3
10	$E'''_{10,60}$	2,58620	45	eu	§ 3.4.4
10	$E'_{10,60}$	2,53352	40	eu	§ 3.4.4
10	$E''_{10,60}$	1,96687	25	eu	§ 3.4.4

TAB. 1.1 – Quelques surfaces eutactiques (eu), non extrêmes



## Chapitre 2

### Doubles twistés

#### 2.1 Une famille de genre 4 modelée sur $K_{3,3}$

##### 2.1.1 Groupe d'automorphismes

On s'intéresse au graphe  $K_{3,3}$  (Cf. Fig. 2.1).

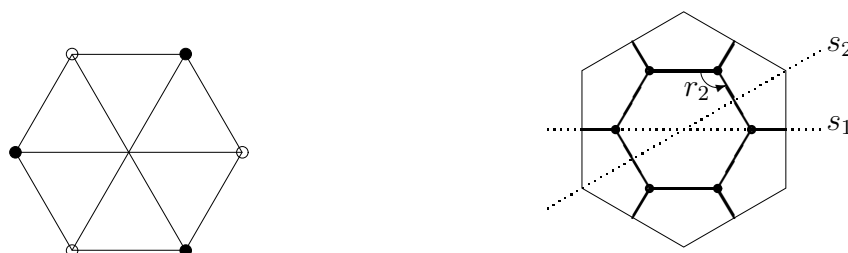


FIG. 2.1 – *Le graphe  $K_{3,3}$*

Son groupe d'automorphismes  $G$  est engendré par (cf. Fig. 2.1) :

- deux retournements  $s_1$  et  $s_2$ , dont les axes respectifs passent tous deux par le centre du graphe et forment entre eux un angle de  $\pi/6$ . Le retournement  $s_1$  passe en outre par un sommet.
- et une rotation  $r_2$  de centre l'un des sommets situé sur l'axe de  $s_1$ , d'angle  $2\pi/3$ .

On note  $r_1 = s_2 \circ s_1$  la rotation de centre le centre du graphe, d'angle  $\pi/3$ . Le groupe  $G$  est d'ordre 36. On remarque qu'il est isomorphe au groupe



$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ . En effet :

$$\begin{aligned} G &= \langle s_1, s_2, r_2 \rangle = \langle s_1, s_2, r_1, r_2 \rangle \\ &= \langle r_1^2, r_1 s_2 r_1^{-1} \rangle \times \langle r_1^2 r_2^2, r_1^3 \rangle \\ &\simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3. \end{aligned}$$

Une fois ce graphe donné, on épaissit les arêtes : on obtient alors une surface de Riemann. Cela revient à placer en chaque sommet du graphe un pantalon dont les trois bords ont même longueur et à les recoller les uns les autres selon un twist identique. Ce procédé nous fournit une famille de surfaces de Riemann paramétrée par deux réels : la longueur du bord et le twist.

### 2.1.2 Equations

D'après [B-L], on peut décrire cette famille comme intersection d'une quadrique et d'une cubique dans  $\mathbb{P}^3$  :

$$C_{(\alpha, \beta)} \begin{cases} x_0 x_1 + x_2 x_3 = 0 \\ \alpha^3 (x_0^3 - x_1^3) + \beta^3 (x_2^3 - x_3^3) = 0 \end{cases}$$

où le paramètre  $(\alpha, \beta)$  décrit  $\mathbb{P}^1$ . Le groupe d'automorphismes est engendré par les quatre automorphismes suivants :

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & j & \\ & & & j^2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau &= \begin{pmatrix} j & & & \\ & j^2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On se convainc facilement que  $Aut(C_{(\alpha, \beta)}) = \langle T, J \rangle \times \langle \tau, \iota \rangle = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ , tant que  $(\alpha, \beta) \neq (1, \pm 1)$ . Ce groupe noté  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \triangleright \langle A, B \rangle$  dans [Bo], et  $G(9 \times 4)$  dans [Ku1], a pour signature  $[2, 2, 2, 3]$ . Dans le cas particulier  $(\alpha, \beta) = (1, \pm 1)$ , il faut ajouter l'automorphisme suivant :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix},$$

et l'ordre du groupe d'automorphismes est alors porté à 72 : c'est un groupe de triangles  $(2, 4, 6)$ , noté  $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \triangleright \langle B, C \rangle$  dans [Bo], et  $G(9 \times 8)$  dans [Ku1].

### 2.1.3 Esquisse du graphe de la famille

Cette famille a déjà été étudiée en partie par P. Schmutz Schaller dans [Sc2] à partir d'une présentation différente : il considère en effet le double twisté d'une surface de genre  $(1, 3)$  ; si bien qu'au lieu de faire les twists selon les bords des pantalons (i.e. les géodésiques  $x$ ) comme le suggérait la méthode proposée au premier paragraphe, il exécute les twists selon les quatre cycles de longueur 6 du graphe (i.e. les géodésiques  $y$ ). Cela simplifie les calculs puisqu'il y a moins de géodésiques  $y$  que de géodésiques  $x$  : les effets du twist sont alors plus faciles à calculer. On adoptera donc ce point de vue dans cette étude.

On reprend ici toutes les notations de [Sc2]. Plus précisément :

- L'ensemble des géodésiques correspondants aux cycles d'ordre 6 du graphe est noté  $Y$ . Cette famille sépare la surface en deux sous-surfaces de genre  $(1, 3)$ . La famille étudiée est obtenue en faisant varier la longueur du bord  $y$  et le twist effectué selon  $Y$ . Dans la suite, on notera  $l$  la demi-longueur du twist.
- Chaque sous-surface est pavée par six hexagones à angles droits : trois côtés sont des portions de géodésiques  $y$  ; les trois autres côtés correspondent à des géodésiques fermées dont le groupe d'automorphismes (qui les laissent invariantes) est d'ordre 4. Cette dernière classe de géodésiques est noté  $X$ , et leur longueur  $2x$ .
- Soit  $x \in X$ , et soit  $y \in Y$ , il existe une unique plus petite géodésique simple  $z$  telle que  $x, y, z$  soient contenues dans une sous-surface de signature  $(1, 1)$ , et telle qu'en outre  $z$  intersecte  $x$  (resp.  $y$ ) une seule fois. On note  $X'$  la classe de ces géodésiques, et  $x'$  leur demi-longueur.
- La longueur d'un côté d'un hexagone du pavage déjà mentionné, correspondant à une géodésique de  $X$ , est notée  $t$ . La longueur de la seconde plus petite perpendiculaire commune entre deux géodésiques de  $Y$  est notée  $s$ .
- Soit  $a$  une géodésique fermée simple quelconque dans la surface. On note  $N(a)$  le nombre de points d'intersections de  $a$  avec les géodésiques de  $Y$ . On pose, par convention,  $N(a) = 0$  dans le cas où  $a \in Y$ .

**Remarque 1.** Dans tout ce qui suivra, on s'autorise l'abus de langage consistant à confondre le nom d'une géodésique avec sa demi-longueur ; par exemple,

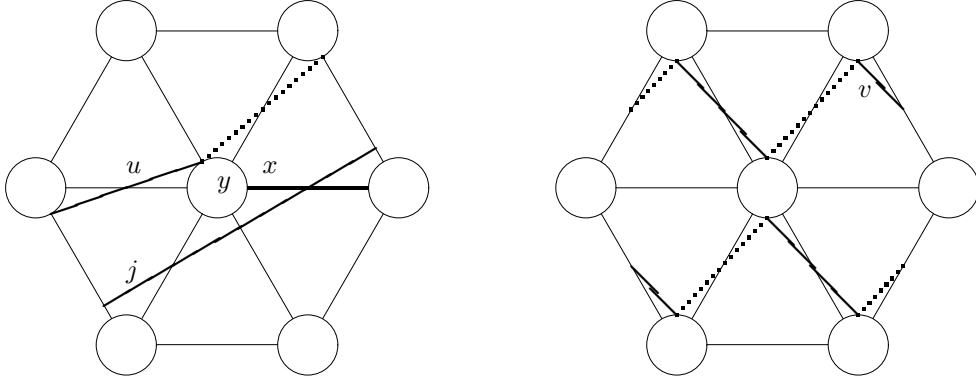
$x$  signifie indifféremment une géodésique de  $X$  ou sa demi-longueur.

On cherche à déterminer en chaque point du demi-plan  $(l/y, y)$  quelle est la systole de la surface correspondante à ce point : ceci revient à dessiner un graphe dont les arêtes correspondent à des surfaces dont la systole est réalisée simultanément par deux familles de géodésiques, et dont les sommets correspondent à des surfaces dont la systole est réalisée simultanément par trois familles de géodésiques (au moins).

On remarque tout d'abord que l'on peut se restreindre au domaine d'étude  $l/y \in [0, 1/2]$  en utilisant certaines symétries du graphe :

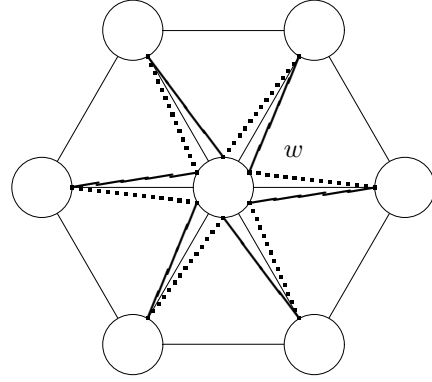
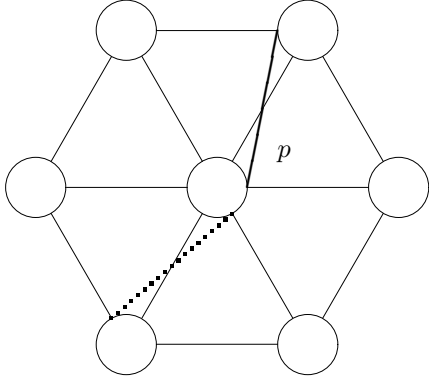
- Il est clair que deux surfaces obtenues à partir d'un twist opposé seront isométriques. Donc l'existence de la symétrie induite par  $l \mapsto -l$  permet de se restreindre au cas  $l > 0$ .
- Par ailleurs, l'action d'un twist entier selon  $Y$  envoie la géodésique  $x$  sur une géodésique  $x_1$  de longueur  $2 \arg \cosh(\cosh(t/2) \cdot \cosh(y-l))$  tout en laissant  $y$  invariante. De manière plus générale, un twist de  $k \in \mathbb{Z}$  tours selon  $Y$  envoie la géodésique  $x$  sur la géodésique  $x_k : x_k(l) = x(l - ky)$ . De même pour les géodésiques  $u, v, \dots$ . Le twist entier selon  $Y$  agit donc comme une translation  $(l/y, y) \mapsto (l/y - 1, y)$ , et notre étude peut à présent se restreindre au domaine  $0 \leq l/y \leq 1/2$ .

On donne maintenant les valeurs explicites des différentes géodésiques qui sont représentées sur les figures suivantes et qui nous serviront à construire une partie du graphe. Pour les formules de trigonométrie hyperbolique, on pourra se reporter à [Bu]. On commence par rappeler que  $\cosh t = \frac{\cosh y/3}{\cosh y/3 - 1}$



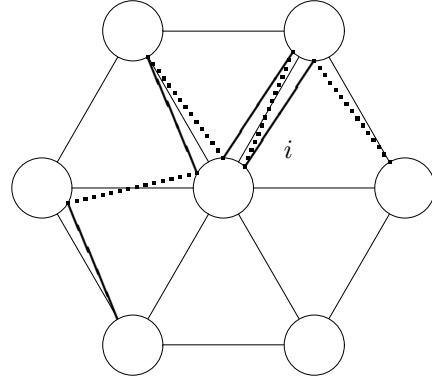
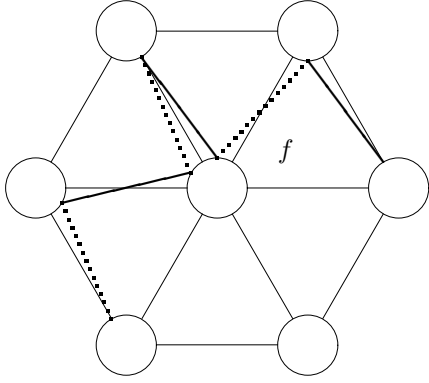
$$\cosh j = (2 \cosh \frac{y}{3} + 1) \cdot \cosh \frac{y}{3} \quad , \quad \cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l$$

$$\cosh \frac{u}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\frac{y}{3} - l) \quad , \quad \cosh \frac{v}{6} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\frac{y}{6} - l)$$



$$\cosh \frac{p}{6} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right)$$

$$\cosh \frac{w}{6} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh l - \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh l$$



$$\frac{f}{2} = \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\epsilon - l) \right)$$

$$+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{3} - \epsilon - l\right) \cdot \cosh l - \sinh\left(\frac{y}{3} - \epsilon - l\right) \cdot \sinh l \right)$$

$$i = \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\epsilon_1 - l) \right)$$

$$+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_1 - l\right) \cdot \cosh(\eta_1 + l) - \sinh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_1 - l\right) \cdot \sinh(\eta_1 + l) \right)$$

$$+ \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\eta_2 - l) \right)$$

$$+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_2 - l\right) \cdot \cosh(\eta_2 + l) - \sinh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_2 - l\right) \cdot \sinh(\eta_2 + l) \right)$$

$$+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh(\epsilon_2 - l) \cdot \cosh(l - \eta_1) - \sinh(\epsilon_2 - l) \cdot \sinh(l - \eta_1) \right)$$

**Remarque 2.** Sur les deux dernières figures, les points d'intersections de  $f$  (resp. de  $i$ ) avec  $y$  sont représentés de manière seulement approximative. En

outre les variables intermédiaires mentionnées dans les calculs de  $f$  et  $i$  sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \coth \epsilon &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh t}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh \frac{t}{2}} & , & \quad \tanh \eta_1 = \tanh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_1\right) \cdot \frac{\sinh d}{\sinh(t+d)} \\ \coth \epsilon_1 &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh(t+d)}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh \frac{t}{2}} & , & \quad \tanh \eta_2 = \tanh\left(\frac{y}{3} - \epsilon_2\right) \cdot \frac{\sinh \frac{t}{2}}{\sinh \frac{3t}{2}} \\ \coth \epsilon_2 &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh \frac{3t}{2}}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh(t-d)} & , & \quad \sinh d = \frac{\sinh \frac{t}{2}}{\cosh \frac{j}{2}} \end{aligned}$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

famille	‡ famille
$Y, V, W, P$	3
$J, I, X'$	18
$X, U, F$	9

Une fois ces calculs acquis, on construit le graphe de la manière suivante : on part de la surface extrême  $S_4$ . On trace alors les trois arêtes issues du point choisi, définies par l'égalité de deux familles de systoles choisies parmi les trois familles définissant le point en question (par exemple, si on part de  $S_4$ , on trace  $x = u$ ,  $x = j$ ,  $u = j$ ). On prolonge ces arêtes jusqu'au moment où une autre géodésique vient réaliser la systole : on arrive alors sur un autre sommet du graphe, d'où partent deux autres arêtes auxquelles on applique de nouveau ce procédé, et ainsi de suite.

La difficulté qui se présente est celle de vérifier qu'à chaque nouveau sommet, la nouvelle géodésique  $a$  réalise effectivement la systole. Pour des valeurs de  $y$  petites (c'est-à-dire  $y \leq 6, 5$ ), le rapport  $2a/t$  reste raisonnable (de l'ordre de 6 au plus), donc il est possible d'examiner les longueurs des géodésiques intersectant  $Y$  au plus 6 fois, et donc de décider si  $a$  est ou non la systole. Au delà,  $t$  décroît trop vite pour rendre ce type de vérification effective.

Néanmoins, les constatations suivantes permettent de se faire une idée du graphe pour des valeurs de  $y$  dépassant 6.

- Tout d'abord, on constate en examinant les équations donnant les valeurs de  $x, u, v, \dots$ , qu'on a (toujours dans le plan  $(l/y, y)$ ) une symétrie d'axe  $l/y = 1/6$ .
- Par ailleurs, si on regarde l'effet d'un twist entier selon  $X$  sur l'ensemble des géodésiques, on constate qu'on a l'action suivante (ici,  $\bar{u}$  désigne la géodésique

dont la longueur vaut, pour un twist donné  $l$ ,  $\bar{u}(l) = u(-l)$  :

avant twist	$X$	$W$	$Y$	$U$	$F$	$V$	$I$	$J$
après twist	$X$	$Y$	$\bar{W}$	$\bar{F}$	$\bar{U}$	$\bar{V}$	$J$	$\bar{I}$

- Ainsi donc, si on combine un twist entier selon  $X$  avec une inversion du sens du twist effectué selon  $Y$  (i.e. une symétrie d'axe  $l = 0$  sur le graphe), on complète le graphe pour des valeurs de  $y > 6$ .

L'allure du graphe est esquissée sur la figure 2.2. On y remarque une surface intéressante  $C_4$ , caractérisée à isométrie près par  $x = u = v$ , et dont on montrera l'extrémalité au paragraphe suivant. D'après les constatations

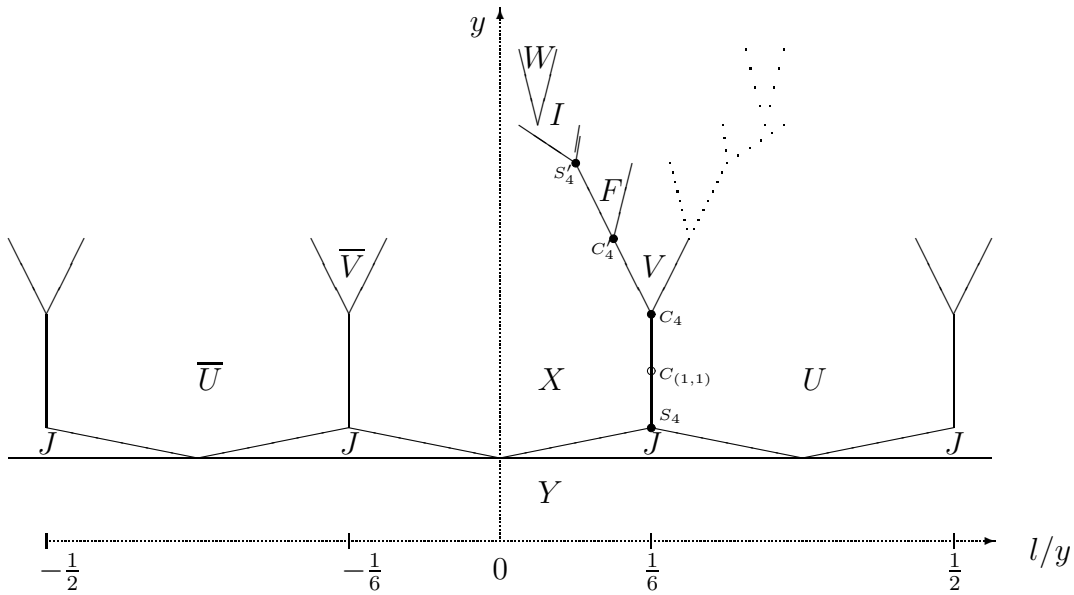


FIG. 2.2 –

énumérées plus haut, on retombe sur des surfaces isométriques aux surfaces extrêmes déjà trouvées : une surface  $C'_4$ , correspondant au sommet  $x = f = v$ , qui est isométrique à  $C_4$  ; et une surface  $S'_4$ , correspondant au sommet  $x = f = i$ , qui est isométrique à  $S_4$ . Ceci est corroboré par le calcul. Il est donc tout à fait vraisemblable que le graphe ne contienne pas d'autres surfaces extrêmes non isométriques à celles déjà mentionnées ; mais ce fait reste à prouver.

### 2.1.4 La surface $C_4$ est extrême

Dans ce paragraphe, on se limite à l'étude de la sous-famille  $x = u$ , ce qui revient à prendre un twist égal à  $y/3$ .

Soit  $v$  la géodésique, dont les six segments sont homotopes aux perpendiculaires communes  $t$  entre les bords  $y$ . Le calcul de  $v$  dans le cas général donne  $\cosh(v/6) = \cosh(t/2) \cdot \cosh(y/6 - l)$ . Sachant que dans ce paragraphe, on s'est imposé  $l = y/6$ , il s'ensuit immédiatement que  $v = 3t$ .

Si on trace le graphe des longueurs  $y, j, x, t$ , en fonction de  $y$ , on peut remarquer que

- \* entre  $y = 0$  et  $y \simeq 2,198$ ,  $y$  réalise la systole.
- \* entre  $y \simeq 2,198$  et  $y = y_{S_4} \simeq 2,373$ ,  $j$  réalise la systole.
- \* entre  $y = y_{S_4} \simeq 2,373$  et  $y \simeq 6,368$ ,  $x = u$  réalisent la systole.
- \* pour  $y \simeq 6,368$ ,  $x = u = v$  réalisent la systole.

Montrons à présent le résultat suivant :

**Théorème 3.** *Il existe un unique double twisté  $C_4$  de  $M_6$  (à isométrie près) vérifiant  $x = u = v$ . La surface  $C_4$  réalise un maximum local de la systole dans l'espace de Teichmüller de genre 4. Son ensemble de systoles est exactement  $X \cup U \cup V$ , et contient donc 21 systoles.*

*Preuve* • Montrons que  $F = X \cup U \cup V$  est l'ensemble des systoles de  $C_4$ . Après calculs, on obtient :  $\cosh y = 146 + 65\sqrt{5}$ ,  $\cosh t = (3 + \sqrt{5})/4$ ,  $\cosh x = (9 + 5\sqrt{5})/4$ ,  $2x = s + t$ , soit en valeurs approchées :

$$\begin{aligned} x = u = v &\simeq 2,30159; y \simeq 6,36765 \\ j &\simeq 4,38498; t \simeq 0,76720; s \simeq 3,83599 \end{aligned}$$

Soit  $a$  une systole de  $C_4$ . Alors le nombre  $N(a)$  d'intersections de  $a$  avec  $Y$  vaut au plus  $2v/t = 6$ . En comparant les valeurs de  $y$  et  $j$ , on voit que  $N(a) \neq 0$ . Donc  $2 \leq N(a) \leq 6$ . Si  $N(a) = 2$ , les deux segments de  $a$  sont homotopes aux perpendiculaires de longueur  $t$  puisque  $s > 3$ ; donc  $a \in X \cup U$ . Si  $N(a) = 4$ , les calculs montrent que  $a > 3$ . Enfin si  $N(a) = 6$ , forcément  $a \in V$  puisque  $2v/t = 6$  exactement, et qu'aucune autre géodésique coupant  $Y$  six fois n'égale  $v$ . Donc  $F$  est bien l'ensemble des systoles de  $C_4$ .

• Montrons à présent que  $C_4$  est eutactique et parfaite. Pour calculer le rang de l'espace engendré par les gradients des systoles, il est équivalent de calculer le rang de la matrice formée par le cosinus des angles d'intersections des systoles entre elles. En effet, la formule de Wolpert ([Wo]) appliquée à

deux systoles notées  $\sigma$  et  $\tau$  donne

$$\nabla l_\sigma(l_\tau) = \omega(l_\sigma, l_\tau) = \sum_{p \in \sigma \cap \tau} \cos \theta_p.$$

En écrivant la matrice intersection des systoles, on obtient une “matrice de Gram” symplectique, dont le rang égale précisément celui de l’espace engendré par les gradients des systoles.

Posons à présent :

- $a := \cos \alpha$ , où  $\alpha$  est l’angle aigu formé par les géodésiques  $x$  et  $v$  (qui est le même que celui formé par les géodésiques  $v$  et  $u$ ).
- $c := \cos 2\alpha = 2a^2 - 1$ ,  $2\alpha$  étant l’angle formé par les géodésiques  $x$  et  $u$  quand elles se coupent sur  $v$ .
- $d := \cos \theta$ , où  $\theta$  est l’angle formé par les géodésiques  $x$  et  $u$  quand elles se coupent sur  $y$ .

Après calculs, on trouve :

$$a = \cos \alpha = \frac{\tanh t/2}{\tanh u/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c = \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$d = \cos \theta = \cos(\pi - 2 \arcsin \frac{\sinh t/2}{\sinh u/2}) = -\frac{2 + \sqrt{5}}{5}$$

On détermine ensuite la matrice intersection des systoles entre elles (on range ici les systoles dans l’ordre suivant :  $u$ , puis  $x$ , puis  $v$ )

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1^t & 0 & \Omega_2 \\ \Omega_2^t & -\Omega_2^t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Omega_1 = \begin{pmatrix} -d & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & -c \\ -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d \\ 0 & -c & -d & 0 & 0 & 0 & -d & -c & 0 \\ 0 & -d & -c & -d & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & -d & -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & -c & 0 & 0 & -c & -d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & -c & -d & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d & -c & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & -c & 0 & 0 & -c & -d \end{pmatrix}, \text{ et } \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$$



Le calcul du rang donne<sup>1</sup> :

$$\text{rang}(\Omega) = 18 = 6g - 6$$

Donc la surface  $C_4$  est parfaite.

Par ailleurs, en ajoutant alors aux 18 premières colonnes de  $\Omega$  les trois dernières pondérées du coefficient  $-(c + d)/a > 0$ , on obtient un vecteur colonne nul : ceci entraîne précisément que la surface  $C_4$  est eutactique.

• D'après le théorème démontré par Ch. Bavard dans [Ba1], et rappelé en introduction, (parfaite et eutactique implique extrême), il s'ensuit immédiatement que  $C_4$  est une surface extrême.  $\square$

**Remarque 3.** La valeur de la systole de  $C_4$  coïncide avec celle de la surface de Bring (qui possède 20 systoles, et n'est pas extrême). Preuve que  $C_4$  ne peut réaliser le maximum global. En fait, la surface  $M(4)$  décrite par P. Schmutz Schaller dans [Sc1] possède une systole plus grande.

### 2.1.5 Surfaces eutactiques

• Dans la sous-famille  $x = u$ , on remarque que la systole admet un minimum local entre  $S_4$  et  $C_4$  : la surface correspondante possède 18 systoles de demi-longueur  $2 \cdot \arg \cosh \frac{3}{2} \simeq 1,92484$  ; cette surface n'est autre que la surface de triangle  $(2, 4, 6)$  notée  $C_{(1,1)}$  dans [B-L], donc cette surface est eutactique.

• Dans la sous-famille  $x = v$ , on remarque que la systole admet un minimum local entre  $C_4$  et  $C'_4$  : la surface correspondante, notée  $E_{4,36}$ , possède 12 systoles de demi-longueur  $x = v \simeq 2,19857$ . On calcule alors les gradients des longueurs  $x$  et  $v$  vues comme fonctions de  $l$  et de  $y$  ; on sait (par la méthode des multiplicateurs de Lagrange) qu'ils sont colinéaires ; reste à savoir s'ils sont de sens opposés ou non. En voici les valeurs approchées :

$$\begin{cases} dx \simeq -0,035.dy + 1,290.dl \\ dv \simeq 0,004.dy - 0,159.dl \end{cases}$$

Donc les gradients sont colinéaires de sens opposés, ce qui montre l'eutaxie relative de  $E_{4,36}$  et donc l'eutaxie globale (cf. § 1.2.2).

---

1. Tous les calculs de rang ont été effectués sur le logiciel de calcul PARI : afin d'éliminer les risques d'erreurs d'arrondis, on a calculé à chaque fois le rang, ainsi que le polynôme caractéristique de la matrice, où les entrées étaient données avec une précision de 500 décimales.

• Enfin, on peut remarquer que la surface  $E'_{4,36}$  caractérisée à isométrie près par  $y = j = x$  est eutactique. Cette surface possède 31 systoles de demi-longueur  $y = j = x \simeq 2,19857$ . Comme précédemment, on calcule les gradients des différentes longueurs :

$$\begin{cases} dx \simeq -0,760.dy + 0.dl \\ dy = 1.dy + 0.dl \\ dv \simeq 0,367.dy + 0.dl \end{cases}$$

Il est clair qu'on peut écrire une combinaison linéaire strictement positive de ces gradients, montrant par là l'eutaxie de  $E'_{4,36}$ .

## 2.2 Une famille de genre 5 modélée sur le graphe cubique

### 2.2.1 Groupe d'automorphismes

On étudie dans ce chapitre la famille de genre 5, provenant du graphe du cube : on épaissit les arêtes du cube ; autrement dit, on place un pantalon en chaque sommet et on les recolle tous selon un twist identique. Cette famille est

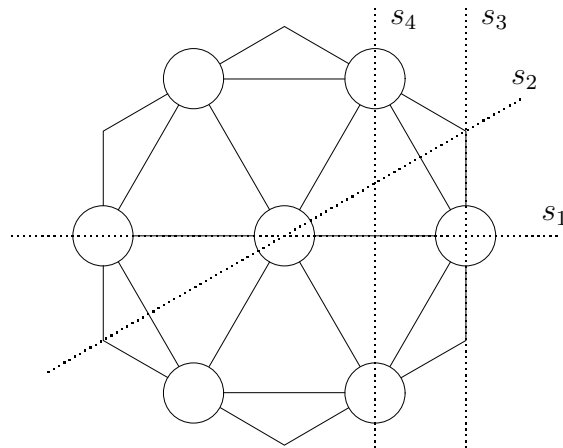


FIG. 2.3 – La sous-surface  $M_8$  (les côtés opposés sont identifiés)

décrite par P. Schmutz Schaller dans [Sc2], selon une présentation différente : en effet, il considère le double twisté d'une surface  $M_8$  de signature  $(1,4)$

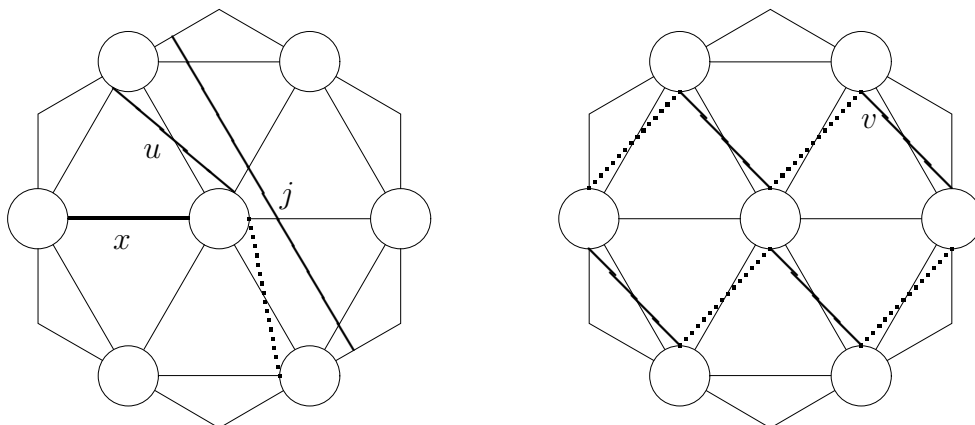
(cf. Fig. 2.3). Le groupe d'automorphismes de cette surface est engendré par quatre retournements, dont les axes respectifs sont indiqués sur la figure 2.3. On obtient alors un groupe d'automorphismes à 48 éléments : c'est le groupe noté  $G_4(48)$  dans [Ku2], de signature  $[2, 2, 2, 3]$ .

### 2.2.2 Esquisse du graphe

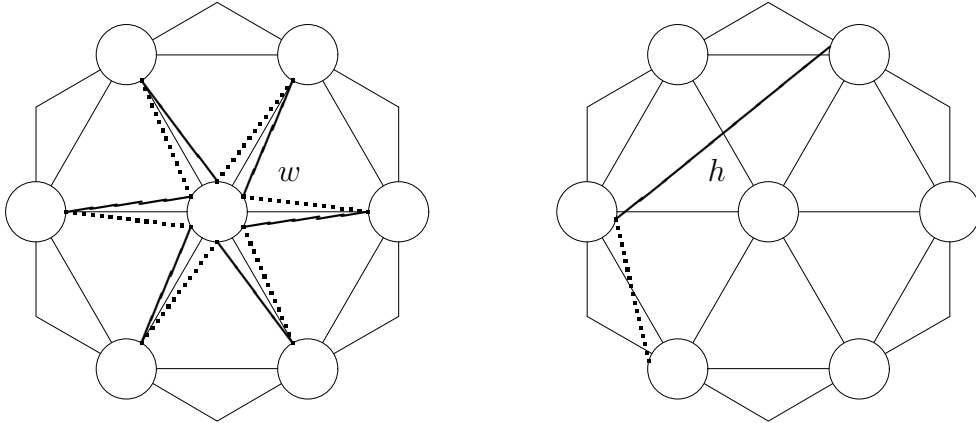
L'étude se mène sensiblement de la même façon que dans le paragraphe précédent. Dans ce cas, il apparaît toutefois une géodésique  $h$  qui n'apparaissait pas dans la discussion du genre 4. On note encore  $t$  la longueur de la plus courte perpendiculaire entre deux bords  $y$ , et on a :

$$\cosh t = \frac{\cosh y/3}{\cosh y/3 - 1}.$$

Voici les figures représentant les différentes géodésiques qui entrent en jeu, ainsi que leur longueur :

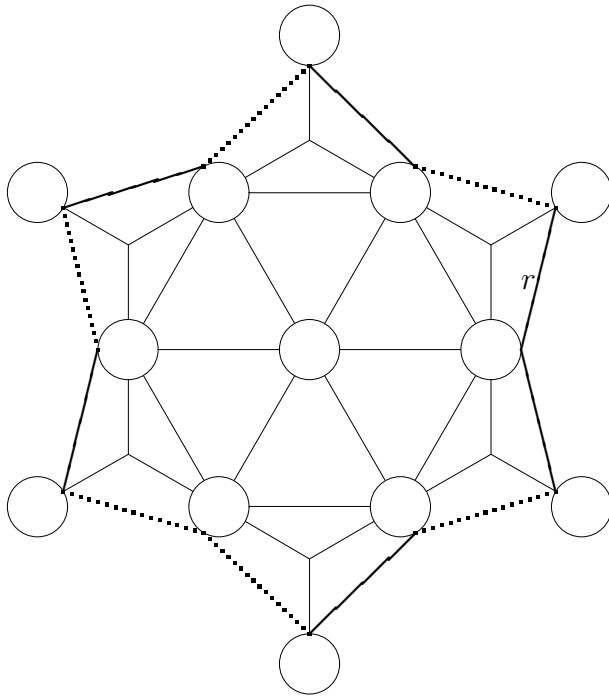


$$\begin{aligned} \cosh \frac{j}{2} &= \frac{1}{2} + \cosh \frac{y}{3} \\ \cosh \frac{x}{2} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l \\ \cosh \frac{u}{2} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \\ \cosh \frac{v}{4} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \end{aligned}$$



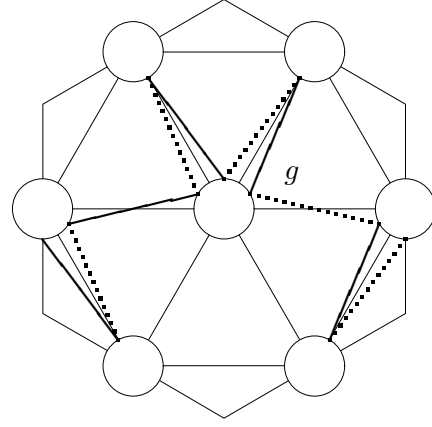
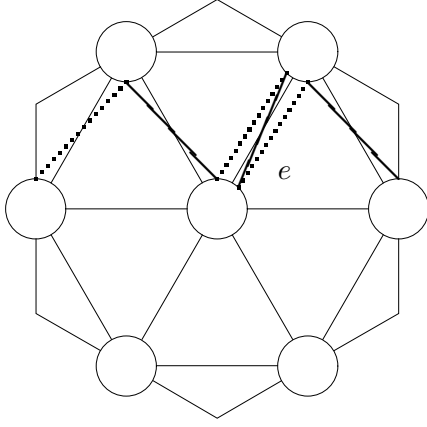
$$\cosh \frac{w}{6} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh l - \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh l$$

$$\cosh h = \cosh\left(\frac{y}{2} - 2l\right) \cdot \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh \frac{s}{2} + \cosh t, \text{ où } \sinh \frac{s}{2} = \frac{\cosh(y/3)}{\sinh(y/6)}$$



$$\cosh \frac{r}{6} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{3} - l\right) + \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{3} - l\right)$$

**Remarque 4.** Sur les deux figures suivantes, les points d'intersections de  $e$  (resp. de  $g$ ) avec  $y$  sont représentés de manière seulement approximative.



$$\begin{aligned}
e &= \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\eta_2 - l) \right) \\
&+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - \eta_1 - l\right) \cdot \cosh(\eta_2 + l) - \sinh\left(\frac{y}{2} - \eta_1 - l\right) \cdot \sinh(\eta_2 + l) \right) \\
&+ \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\eta_3 - l) \right) \\
&+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} + \eta_1 - l\right) \cdot \cosh(\eta_3 + l) - \sinh\left(\frac{y}{2} + \eta_1 - l\right) \cdot \sinh(\eta_3 + l) \right) \\
\frac{g}{2} &= \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\eta - l) \right) \\
&+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{3} - \eta - l\right) \cdot \cosh(\zeta + l) - \sinh\left(\frac{y}{3} - \eta - l\right) \cdot \sinh(\zeta + l) \right) \\
&+ \arg \cosh \left( \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh(\zeta - l) + \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh(\zeta - l) \right)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh \frac{3t}{2}}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh \epsilon} ; & \tanh \eta_2 &= \tanh\left(\frac{y}{3} - \eta_1\right) \cdot \frac{\sinh \frac{t}{2}}{\sinh \frac{3t}{2}} \\
\eta_3 &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh(t - \epsilon)}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh \frac{t}{2}} ; & \tanh \epsilon &= \tanh \frac{t}{2} \cdot \frac{\sinh(y/6 - d)}{\sinh(y/2 - d)} \\
\eta &= \coth \frac{y}{3} + \frac{\tanh(t + \delta)}{\sinh \frac{y}{3} \cdot \tanh \frac{t}{2}} ; & \tanh \zeta &= \tanh\left(\frac{y}{3} - \eta\right) \cdot \frac{\sinh(d)}{\sinh(t + d)} \\
\tanh \delta &= \tanh \frac{t}{2} \cdot \frac{\sinh y/6}{\sinh y/2} ; & \coth d &= \coth \frac{y}{2} + \frac{\tanh \frac{t}{2}}{\sinh \frac{y}{2} \cdot \tanh \frac{s}{2}}
\end{aligned}$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-dessous le nombre de

géodésiques contenues dans cette famille.

famille	# famille
$Y, W, R$	4
$V$	6
$J, X, U, G$	12
$H, E$	24

On trace à présent le graphe de la famille dans le plan  $(l/y, y)$  (cf. Fig. 2.4). On part de la surface  $S_5$ . En suivant l'arête  $x = u$ , on arrive à la surface  $O(x|z)$  décrite dans [Sc1]. En repartant sur l'arête  $x = h$ , on parvient à une surface telle que  $x = h = v$ . Le calcul montre alors que c'est la surface  $O(x|y)$  (cf. [Sc1]). Autrement dit, l'arête  $x = h$  correspond à la famille  $O(y)$  considérée dans [Sc1]. On peut d'ailleurs établir la correspondance entre les notations des deux articles de P. Schmutz Schaller (tableau ci-dessous).

notations de [Sc2]	$V$	$U$	$X$	$H$
notations de [Sc1]	$Y$	$Z$	$X_1$	$X_2$

La famille étudiée peut finalement se voir alternativement comme modelée soit sur le graphe du cube (point de vue équivalent à [Sc2]), soit comme double twisté de l'octaèdre (point de vue de [Sc1]). Ceci s'avère cohérent avec le fait que le cube et l'octaèdre ont le même groupe d'automorphismes directs.

Comme dans le cas du genre 4, plusieurs symétries permettent de restreindre le domaine d'étude dans le demi-plan :

- La symétrie  $l \mapsto -l$ , qui correspond à l'inversion du sens du twist effectué selon  $Y$ .
- La translation de vecteur parallèle à l'axe des abscisses, de norme 1, qui correspond à l'action d'un twist entier selon  $Y$ .
- La symétrie d'axe  $l/y = 1/4$  qui se lit sur l'expression des différentes géodésiques.
- Enfin, l'action d'un twist entier selon  $X$  qui opère de la manière suivante :

avant twist	$X$	$W$	$Y$	$U$	$H$	$V$
après twist	$X$	$Y$	$\bar{W}$	$\bar{G}$	$\bar{E}$	$\bar{V}$

Toutes ces considérations permettent à présent de compléter le graphe (Fig. 2.4).

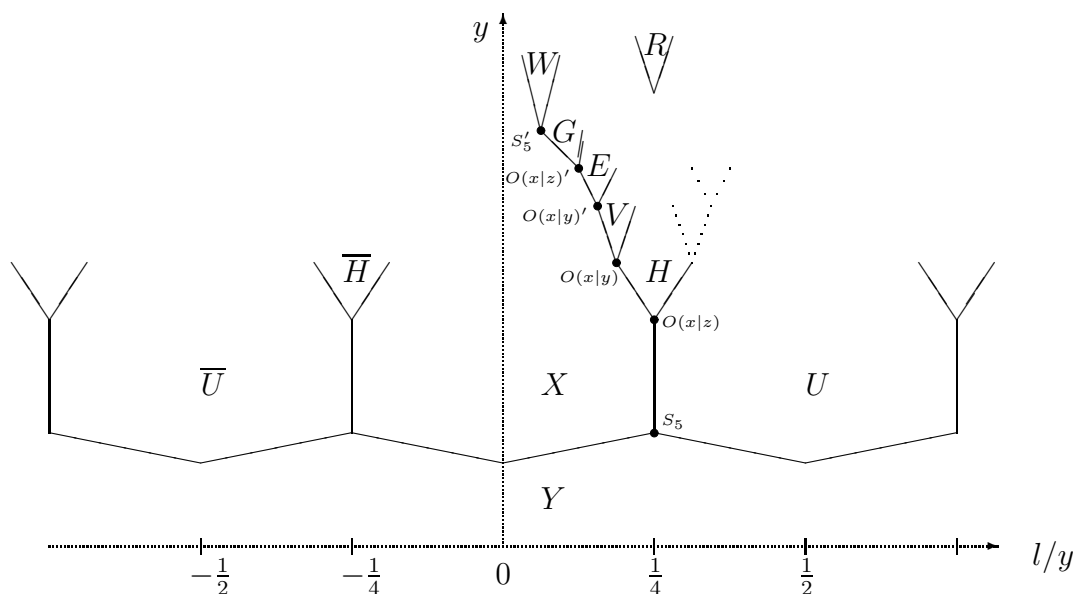


FIG. 2.4 –

### 2.2.3 Surfaces eutactiques

Sur la plupart des arêtes de la figure 2.4, on peut trouver une surface eutactique réalisant le minimum de la systole le long de l'arête considérée. On trouve de la sorte quatre surfaces eutactiques. On résume les détails des données dans le tableau 2.1.

arête	surface	$(systole)/2$	$y$	$l$	$\#\{syst\}$
$x = y$	$E_{5,48}$	$x = y \simeq 2,19857$	2,19857	0	16
$x = u$	$E'_{5,48}$	$x = u \simeq 2,37654$	3,09630	0,77407	24
$x = h$	$E''_{5,48}$	$x = h \simeq 2,37086$	4,70040	1,00518	36
$x = v$	$E'''_{5,48}$	$x = v \simeq 1,83564$	6,31609	0,81271	18

TAB. 2.1 – *Surfaces eutactiques, non extrêmes*

Le tableau 2.2 donne les valeurs approchées des gradients des fonctions longueur : ces valeurs permettent de vérifier que les gradients sont de sens opposés, et donc que les quatre surfaces considérées sont effectivement eutactiques.

$E_{5,48}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,760.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$
$E'_{5,48}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,391.dy + 1,564.dl \\ du \simeq 0,391.dy - 1,564.dl \end{cases}$
$E''_{5,48}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,153.dy + 1,842.dl \\ dh \simeq 0,038.dy - 0,460.dl \end{cases}$
$E'''_{5,48}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,080.dy + 1,852.dl \\ dv \simeq 0,095.dy - 2,194.dl \end{cases}$

TAB. 2.2 – Valeurs approchées des gradients des longueurs

### 2.2.4 Indication sur le lieu des jacobienes

On peut se demander quel est le lieu des jacobienes de la famille étudiée, dans l'espace de Siegel. Pour cela, on détermine l'action du groupe d'automorphismes sur une base de l'homologie; puis, on calcule le lieu des points fixes dans l'espace de Siegel par l'action suivante.

Soit  $M$  la matrice représentant l'action d'un automorphisme sur l'homologie. Si on décompose  $M$  en quatre blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

alors, l'action de  $M$  sur l'espace de Siegel s'écrit :

$$M * Z = (A.Z + B).(C.Z + D)^{-1}.$$

On prend comme base de l'homologie, l'ensemble  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq 5} \cup \{\beta_i\}_{1 \leq i \leq 5}$  représenté sur la figure 2.5.

Dans le cas présent, l'action des quatre symétries sur cette base de l'homologie s'écrit :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$



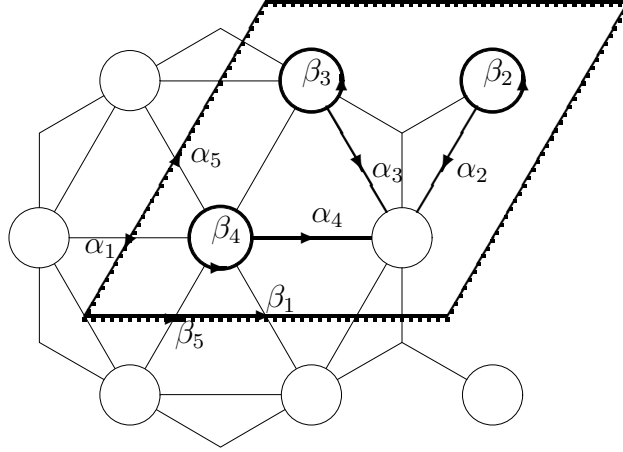


FIG. 2.5 – Une base de l'homologie

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On intervertit les cinq premiers vecteurs de la base de l'homologie avec les cinq derniers pour simplifier les calculs.

On résout alors le système suivant :

$$S_k * Z = Z, \quad k = 1, \dots, 4.$$

On s'attendrait à obtenir, une solution dépendant d'un seul paramètre complexe ; en fait, dans le cas présent l'ensemble des solutions du système étudié est paramétré par deux complexes (que nous noterons  $a$  et  $b$ ), et  $Z$  est de la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{4a^2-1}{4a-1} & a & a - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{4a^2-2a-1}{4a-1} \\ a & b & \frac{4(b+a)-1}{8} & \frac{4(b-a)+1}{8} & a - \frac{1}{2} \\ a - \frac{1}{2} & \frac{4(b+a)-1}{8} & b & \frac{4(b-a)+1}{8} & a \\ -\frac{1}{2} & \frac{4(b-a)+1}{8} & \frac{4(b-a)+1}{8} & \frac{4(b-a)+1}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{4a^2-2a-1}{4a-1} & a - \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2} & \frac{4a(a-1)}{4a-1} \end{pmatrix},$$

avec les conditions *ad hoc* sur  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  pour que la partie imaginaire de  $Z$  soit définie positive.



## Chapitre 3

# Polyhèdres réguliers

### 3.1 L'octaèdre ( $g = 3$ )

#### 3.1.1 Présentation de la famille

On considère une surface de signature  $(0, 6)$  ayant la symétrie de l'octaèdre ; autrement dit, on "écorne" les sommets d'un octaèdre. On nomme  $y$  les géodésiques de bord. On recolle alors les bords opposés deux à deux (Fig.3.1) en opérant un twist de longueur  $2l$  : on obtient une surface de genre 3, ayant pour groupe d'automorphismes  $\mathfrak{S}_4$ . En fait, on va montrer qu'on obtient,

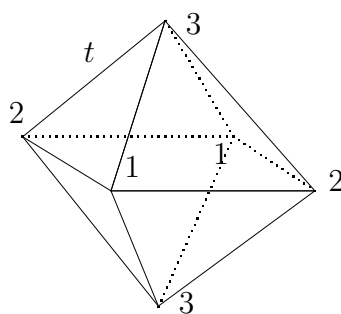
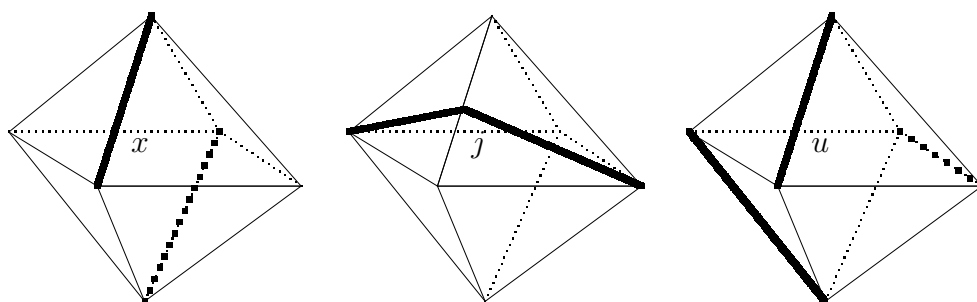


FIG. 3.1 – *L'octaèdre*

par une construction différente, la famille  $T(y)$  étudiée dans [Sc1] où elle est décrite comme le double twisté du tétraèdre.

### 3.1.2 Esquisse du graphe

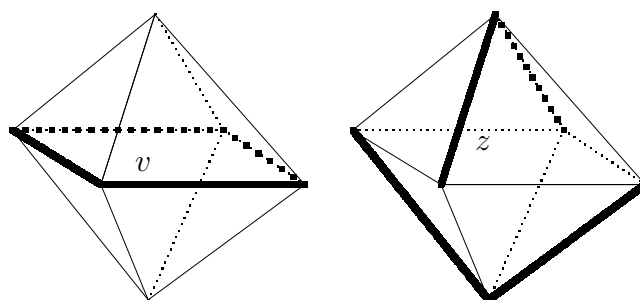
On commence par donner les géodésiques qui interviennent dans la construction du graphe pour  $y$  et  $l$  pas trop grands. On note  $t$  la plus petite perpendiculaire commune entre deux bords voisins (Fig.3.1); on a  $\sinh(t/2) = 1/2 \cdot \sinh(y/4)$ . Pour chaque géodésique représentée ci-dessous, on donne ensuite sa valeur (pour chaque schéma, on prend  $z = 0$ ).



$$\cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right)$$

$$\cosh j = \sinh t \cdot \sinh \frac{y}{2} \cdot \cosh l$$

$$\cosh \frac{u}{3} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{4} - l\right)$$



$$\cosh \frac{v}{4} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l$$

$$\cosh \frac{z}{2} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{4} - l\right) \cdot \cosh l - \sinh\left(\frac{y}{4} - l\right) \cdot \sinh l$$

On donne ci-contre le cardinal de chaque famille de géodésiques citées précédemment, ainsi que la correspondance avec les notations de [Sc1]. On peut à présent donner une esquisse du graphe dans la zone  $(l/y; y) \in [-1/2, 1/2] \times [0, 5]$  (le graphe s'étend ensuite horizontalement par une translation de vecteur  $(1, 0)$ ):

famille	‡ famille	[Sc1]
$Y$	3	$Z$
$X$	6	$X_1$
$J$	12	$X_2$
$U$	4	$Y$
$Z$	6	-
$V$	3	-

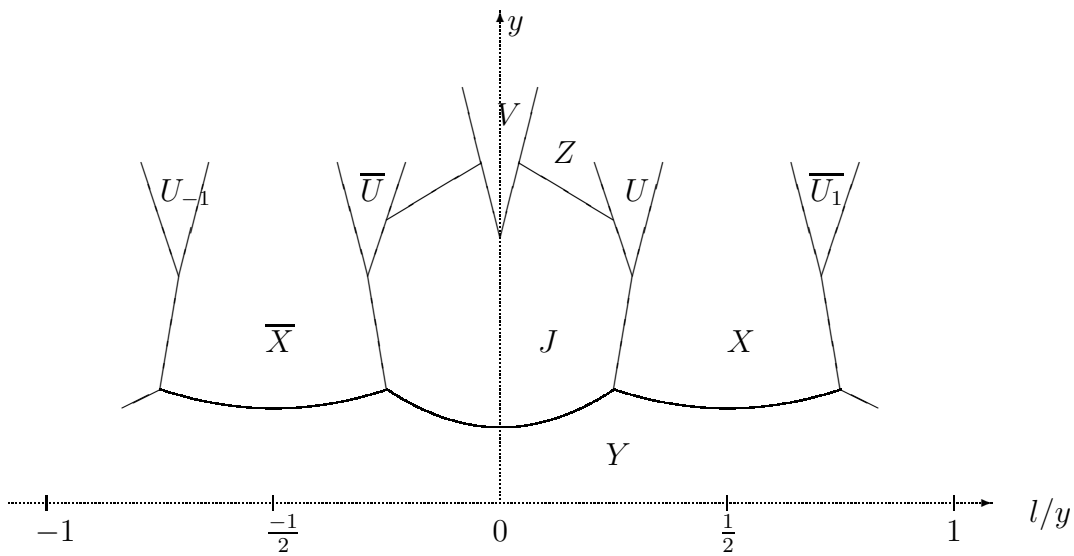


FIG. 3.2 –

On retrouve parmi les sommets du graphe deux surfaces extrêmes déjà connues :

- la surface caractérisée à isométrie près par  $y = j = x$ , qui n'est autre que la quartique de Klein, notée  $T(x|z)$  dans [Sc1]. A noter que la surface caractérisée par  $j = v = z$ , lui est isométrique.
- la surface caractérisée à isométrie près par  $j = x = u$ , qui n'est autre que la surface notée  $T(x|y)$  dans [Sc1]. A noter que la surface caractérisée par  $j = u = z$ , lui est isométrique.

On ne manquera pas de remarquer l'analogie parfaite entre la partie du graphe restreinte à  $l/y \in [0, 1/2]$  et la décomposition cellulaire du demi-plan paramétrisant l'ensemble des jacobiniennes de cette famille, donnée en [Ba3,

Fig.3]. Ceci ne fait qu'appuyer la présomption que le réseau extrême  $F_6$  ne serait autre que la jacobienne de la surface extrême  $T(x|y)$ .

### 3.1.3 Surfaces eutactiques

Sur la plupart des arêtes de la figure 3.2, on peut trouver une surface eutactique réalisant le minimum de la systole le long de l'arête considérée. On trouve de la sorte quatre surfaces eutactiques, dont la surface de Fermat notée  $Frt$ . On résume les détails des données dans le tableau 3.1. La surface

arête	surface	$(systole)/2$	$y$	$l$	$\#\{syst\}$
$y = j$	$E_{3,24}$	$y = j \simeq 1,83564$	1,83564	0	15
$j = x$	$E'_{3,24}$	$j = x \simeq 1,94239$	2,30259	0,58253	18
$j = u$	$Frt$	$j = u \simeq 1,89892$	3,05715	0,49110	16
$x = y$	$E''_{3,24}$	$x = y \simeq 1,83564$	1,83564	0,91782	9

TAB. 3.1 – Surfaces eutactiques, non extrêmes

de Fermat est eutactique, puisque c'est une surface de triangle. Pour ce qui est des trois autres surfaces, le tableau 3.2 donne les valeurs approchées des gradients des fonctions longueur : ces valeurs permettent de vérifier que les gradients sont de sens opposés, et donc que ces trois surfaces sont effectivement eutactiques.

$E_{3,24}$	$\begin{cases} dj \simeq -0,209.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$
$E'_{3,24}$	$\begin{cases} dx \simeq 0,168.dy - 1,373.dl \\ dj \simeq -0,067.dy + 0,546.dl \end{cases}$
$E''_{3,24}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,844.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$

TAB. 3.2 – Valeurs approchées des gradients des longueurs

## 3.2 Le cube ( $g = 4$ )

### 3.2.1 Présentation de la famille

On considère une surface de signature  $(0, 8)$  ayant la symétrie du cube ; autrement dit, on écorne les sommets d'un cube. On nomme  $y$  les géodésiques de bord. On identifie alors les bords opposés deux à deux (cf. Fig. 3.3), et on obtient une surface de genre 4, ayant pour groupe d'automorphismes  $\mathfrak{S}_4$ . D'après [Bo], la signature de ce groupe est  $[2, 2, 2, 4]$ . La famille construite

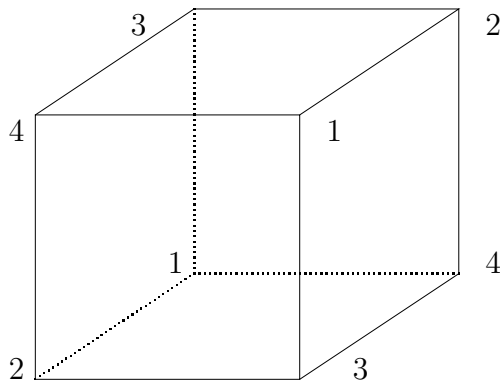


FIG. 3.3 – *Le cube*

est donc paramétrée par un couple de paramètres réels  $(l, y)$ , où  $l$  désigne le demi-twist selon lequel on recolle les géodésiques  $y$ . Toujours d'après la classification de [Bo], on peut conjecturer que cette famille contiendra la surface de Bring (dont le groupe d'automorphismes est  $\mathfrak{S}_5$ , [R-R]), et la surface  $M(4)$  (dont le groupe d'automorphismes est  $\mathfrak{S}_4 \times \langle x | x^3 = 1 \rangle$ , [Sc1]), ce qui est effectivement vérifié dans ce qui suit.

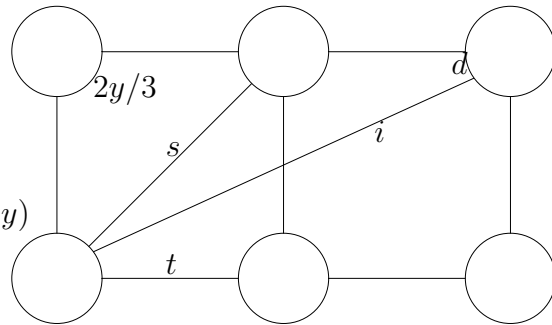
### 3.2.2 Esquisse du graphe

On commence par donner les géodésiques qui interviennent dans la construction du graphe pour  $y$  et  $l$  pas trop grands.

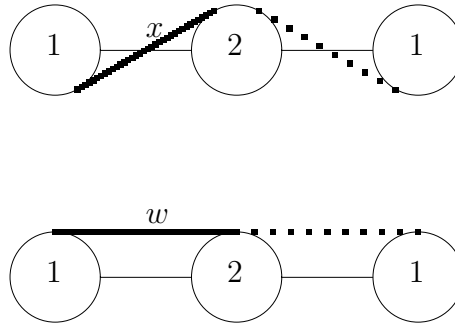
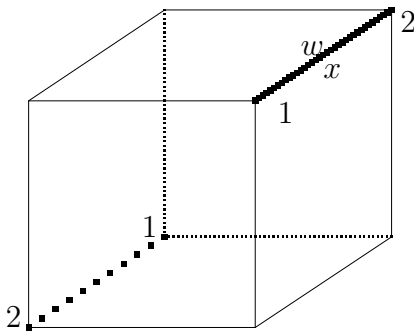
On note  $y$  la géodésique de bord. Soit  $t$ ,  $s$  et  $i$  les perpendiculaires suivantes :



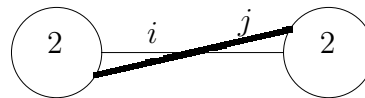
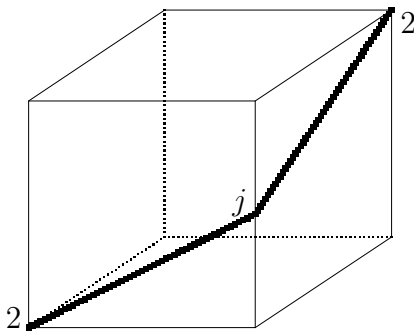
$$\begin{aligned} \sinh(t/2) &= 1/(\sqrt{2} \sinh y/3) \\ \sinh(s/2) &= 1/\tanh(y/3) \\ \cosh i &= (-\cosh s \cdot \cosh t \\ &\quad + \sinh s \cdot \sinh t \cdot \cosh y) \\ \sinh d &= \frac{\sinh y \cdot \sinh s}{\sinh i} \end{aligned}$$



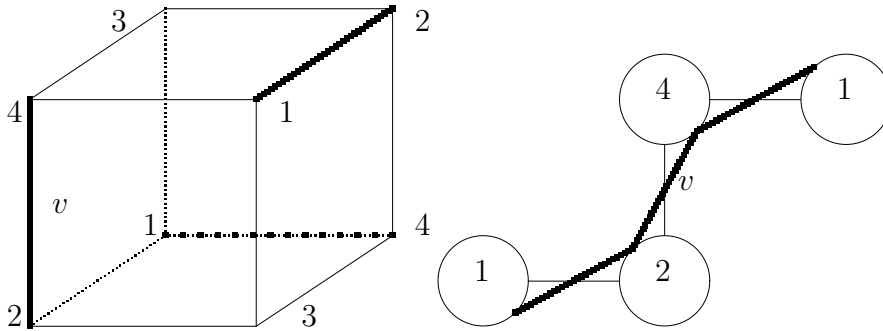
On donne à présent la longueur des géodésiques représentées sur les schémas successifs :



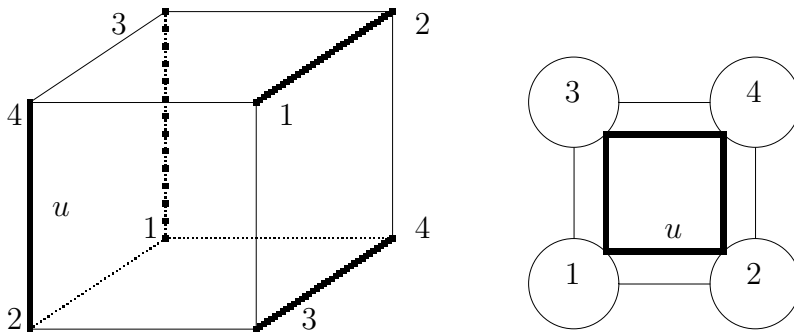
$$\begin{aligned} \cosh w &= \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} + l\right) - \sinh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{2} + l\right) \\ \cosh \frac{x}{2} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \end{aligned}$$



$$\cosh j = \cosh \frac{i}{2} \cdot \cosh\left(l + \frac{y}{6} - d\right)$$



$$\cosh \frac{v}{3} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right)$$



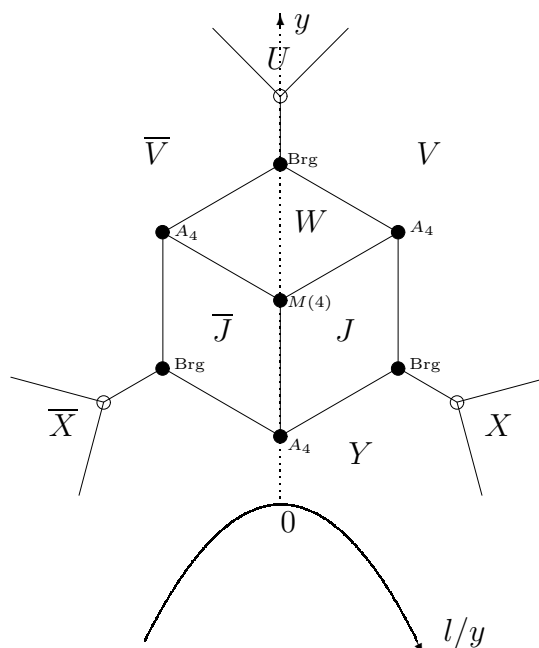
$$\cosh \frac{u}{2} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} + l\right) - \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{6} + l\right)$$

On donne ci-contre le cardinal de chaque famille de géodésiques citées précédemment (ici  $\bar{j}$  désigne la géodésique dont la longueur vaut, pour un twist donné  $l$ ,  $\bar{j}(l) = j(-l)$ ).

famille	# famille
$Y, V, \bar{V}$	4
$W, J, \bar{J}$	12
$U, X, \bar{X}$	6

On peut maintenant donner une esquisse du graphe de la famille dans la zone  $(l/y; y) \in [-1/2, 1/2] \times [0, 4]$ . Dans l'allure qualitative du graphe donnée ci-dessous, on a "tordu" l'axe des abscisses pour faire apparaître ce qui semble être une symétrie locale du graphe, car en fait, sur un schéma quantitatif, le cône de  $x$  devrait être à peu près axé autour de la droite  $l/y = 1/2$ .

Néanmoins, on a pris le parti de déformer le graphe puisque, outre la symétrie d'axe  $l = 0$ , il semble apparaître une invariance (locale ?) du graphe par rotation de centre  $M(4)$ , d'angle  $2\pi/3$ . En effet, le calcul montre que l'on retrouve trois fois, à isométrie près, les surfaces  $Brg := C_{y=j=v}$ ;  $A_4 := C_{y=j=\bar{j}}$  et  $C_{u=v=\bar{v}}$ . L'examen du graphe révèle ainsi plusieurs surfaces intéressantes :



- La surface  $C_{y=j=v}$  (ou une des deux autres surfaces qui lui sont isométriques : plus précisément  $C_{w=v=\bar{v}}$  ou  $C_{y=\bar{j}=\bar{v}}$ ) : on remarque que cette surface admet exactement 20 systoles, de demi-longueur

$$y = j = v = 3 \arg \cosh \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \simeq 2,30159.$$

En outre, ses systoles pavent la surface en carrés et pentagones, et se coupent toutes selon le même angle

$$\alpha = \arccos(\tanh^2(\arg \cosh \frac{3 + \sqrt{5}}{4})/2) \simeq 1,43656.$$

C'est donc la surface de Bring (cf. [R-R]), qui est eutactique, non parfaite. Elle est notée Brg sur le graphe.

- La surface  $C_{w=j=\bar{j}}$  qui admet exactement 36 systoles, de demi-longueur

$$w = j = \bar{j} = \arg \cosh \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,31225.$$

On retrouve donc la surface  $M(4)$ , qui est extrême (cf. [Sc1]).

• La surface  $C_{w=j=v}$  (ou une des deux autres surfaces qui lui sont isométriques : plus précisément  $C_{w=\bar{j}=\bar{v}}$  ou  $C_{y=\bar{j}=j}$ ) : cette surface admet exactement 28 systoles, de demi-longueur

$$w = j = v \simeq 2,30660.$$

Cette surface que l'on notera  $A_4$  sera étudiée dans le prochain paragraphe ; on montrera notamment que c'est une surface parfaite non eutactique.

• La surface  $C_{y=x=v}$ , notée  $E_{24}$  (ou une des deux autres surfaces qui lui sont isométriques : plus précisément  $C_{y=\bar{x}=\bar{v}}$  ou  $C_{u=v=\bar{v}}$ ) : cette surface admet exactement 14 systoles, de demi-longueur

$$y = x = v \simeq 2,29347.$$

Comme  $14 < 6g - 5 = 19$ , cette surface ne peut être parfaite. De plus, on peut montrer que cette surface n'est pas strictement eutactique.

Remarquons par ailleurs que, tout comme dans les chapitres précédents, on a une invariance du graphe par translation de longueur 1 le long de l'axe des abscisses ; ainsi, cette allure de graphe se transporte au niveau de l'axe  $l/y = 1$ , puis  $l/y = 2$ , etc... De manière plus globale, on obtient donc le

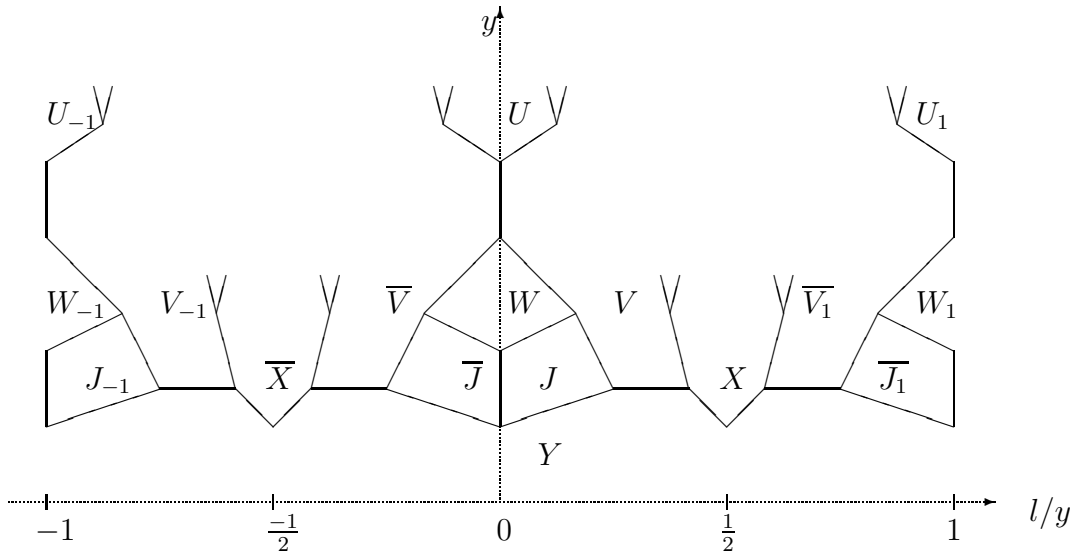


FIG. 3.4 –

graphe reproduit sur la figure 3.4, où les géodésiques affectées d'un indice se déduisent des autres par l'effet d'un twist entier selon  $Y$  ; par exemple, on a la formule :  $\forall k \in \mathbb{Z}, j_k(l) = j(l - ky)$ .

### 3.2.3 La surface $A_4$ est parfaite

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la surface  $A_4$ , définie à isométrie près, par  $y = j = \bar{j}$ ; on montre le résultat suivant :

**Théorème 4.**  *$A_4$  est une surface parfaite non eutactique. Son ensemble de systoles est exactement  $Y \cup J \cup \bar{J}$ .*

*Preuve* • Montrons  $Y \cup J \cup \bar{J}$  est l'ensemble des systoles de  $A_4$ . Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} y &\simeq 2,30659999071; & w &\simeq 2,33858918081 \\ u &\simeq 3,22774965596; & x &\simeq 2,92041491748 \\ v &\simeq 2,60164724868; & l &= 0 \\ t &\simeq 1,51944655787; & s &\simeq 2,44147924868 \end{aligned}$$

Soit  $a$  une systole de  $A_4$ . Alors le nombre  $N(a)$  d'intersections de  $a$  avec  $Y$  vaut au plus  $E(2y/t) = 3$ . Donc  $0 \leq N(a) \leq 3$ . Si  $N(a) = 3$ , alors  $a \in V \cup \bar{V}$ ; mais  $v = \bar{v} > y$ , donc  $N(a) < 3$ . Si  $N(a) = 2$ , alors  $a \in W \cup X \cup \bar{X}$ ; mais  $w = \bar{w} > y$  et  $x > y$  donc  $N(a) < 2$ . D'où,  $a \in Y \cup J \cup \bar{J}$ .

• Montrons à présent que  $A_4$  est parfaite.

**Lemme 1.** *Dans un quadrilatère hyperbolique, l'angle  $\psi$ , opposé à l'angle droit est donné par la formule :*

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin\left(\alpha - \arctan \frac{\tanh a}{\sinh b}\right) \cdot \sin\left(\beta - \arctan \frac{\tanh b}{\sinh a}\right) \cdot \cosh a \cdot \cosh b \\ &\quad - \cos\left(\alpha - \arctan \frac{\tanh a}{\sinh b}\right) \cdot \cos\left(\beta - \arctan \frac{\tanh b}{\sinh a}\right) \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  désignent les longueurs des deux côtés adjacents à l'angle droit, et  $\alpha, \beta$  respectivement leurs angles opposés. On notera, dans la suite :

$$\cos \psi = F(a, \alpha; b, \beta).$$

On donne à présent les coefficients qui interviennent dans l'écriture de la matrice intersection des systoles :

$$\begin{aligned} b &= \cos \beta = \frac{\tanh(d-y/6)}{\tanh j} && \simeq 0,167373 \\ d &= \cos \delta = 2 \cos^2 F\left(\frac{t}{2}, \beta; \frac{y}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - 1 && \simeq 0,828711 \\ e &= F\left(\frac{t}{2}, \pi - \beta; \frac{y}{6}, \frac{\pi+\delta}{2}\right) && = d \\ c &= F\left(\frac{t}{2}, \beta; \frac{y}{2}, \frac{\pi-\delta}{2}\right) && \simeq 0,411716 \\ m &= F\left(\frac{t}{2}, \pi - \beta; \frac{y}{6}, \frac{\pi-\delta}{2}\right) && \simeq 0,208497 \end{aligned}$$

En rangeant les systoles dans l'ordre suivant  $\{y_1, \dots, y_4, j_1, \bar{j}_1, \dots, j_{12}, \bar{j}_{12}\}$ , la matrice intersection s'écrit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_4 \\ -{}^t\Lambda_1 & 0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ -{}^t\Lambda_2 & \Omega_3 & 0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ -{}^t\Lambda_3 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ -{}^t\Lambda_4 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -b & -b & -b & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b & -b & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b & -b & -b & -b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b & -b & -b & -b & -b \end{pmatrix}, \Omega_1 = \begin{pmatrix} -m & -c & 0 & 0 & 0 & e \\ d & -m & 0 & 0 & 0 & -m \\ -m & e & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -e & m & c & 0 \\ 0 & 0 & m & -d & m & 0 \\ 0 & 0 & c & m & -e & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & e & -m & -c & 0 & 0 \\ -e & 0 & 0 & 0 & c & m \\ m & 0 & 0 & 0 & m & -d \\ c & 0 & 0 & 0 & -e & m \\ 0 & -c & -m & e & 0 & 0 \\ 0 & -m & d & -m & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Omega_3 = \begin{pmatrix} m & -d & m & 0 & 0 & 0 \\ c & m & -e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & -m & -c \\ 0 & 0 & 0 & -m & d & -m \\ 0 & 0 & 0 & -c & -m & e \\ -e & m & c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du rang donne par ailleurs :

$$\text{rang}(\Omega) = 18 = 6g - 6$$

Donc la surface  $A_4$  est parfaite.

• Notons enfin que  $A_4$  n'est pas eutactique. En effet, si on pondère les 4 premières colonnes du coefficient  $2c - g$ , et les 24 autres du coefficient  $b$ , on a une combinaison linéaire nulle :

$$(2c - g) \cdot \sum_1^4 C_{y_i} + b \cdot \sum_1^{12} (C_{j_i} + C_{\bar{j}_i}) = 0,$$

cependant, les deux coefficients sont de signes opposés :  $b \simeq 0,17 > 0$  et  $2c - g \simeq -0,0053 < 0$ .  $\square$

### 3.2.4 Indication sur le lieu des jacobiennes

Parmi les 12 géodésiques  $j$ , on en choisit 4 (notées  $\{j_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ ) qui ne s'intersectent pas 2 à 2 et telles que  $\forall i, 1 \leq i \leq 4, j_i$  intersecte  $y_i$ . La famille  $\{y_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{j_i\}_{1 \leq i \leq 4}$  forme alors une base de l'homologie.

Par ailleurs, le groupe d'automorphismes du cube est engendré par deux éléments : une rotation, notée  $r$ , d'ordre 4, passant par le milieu d'une face ; et un retournement, noté  $s$ , d'axe passant par le milieu de deux arêtes.

L'action du groupe d'automorphismes sur la base construite précédemment se décrit de la manière suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit  $Z$  une matrice appartenant à l'espace de Siegel. On résout le système

$$\begin{cases} R * Z = Z \\ S * Z = Z \end{cases}$$

Et on obtient que  $Z$  est de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} a & b & -b & 1+b \\ b & a & 1+b & -b \\ -b & 1+b & a & b \\ 1+b & -b & b & a \end{pmatrix}$$

La condition  $\Im m(Z) > 0$  s'écrit :

$$\begin{cases} \Im m(a) > 0 \\ \Im m(b) > 0 \\ \Im m(a) > 1 + 3\Im m(b) \end{cases}$$

### 3.3 L'icosaèdre ( $g = 6$ )

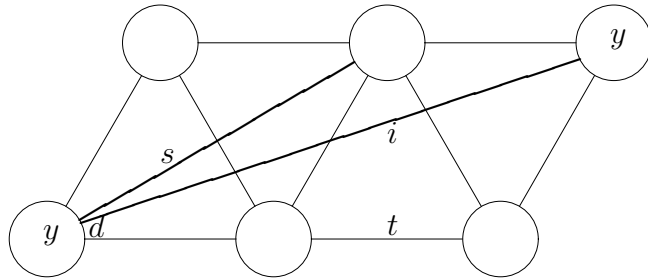
#### 3.3.1 Présentation de la famille

On considère une surface de signature  $(0, 12)$  ayant la symétrie de l'icosaèdre. On nomme  $y$  les géodésiques de bords. En identifiant alors les bords opposés deux à deux, on obtient une surface de genre 6, ayant pour groupe d'automorphismes  $\mathfrak{A}_5$ , le groupe alterné de degré 5 (d'ordre 60). En faisant varier la longueur du bord  $y$  et le twist  $2l$  selon lequel on recolle les bords opposés, on obtient une famille de surfaces de Riemann, paramétrée par un couple de paramètres réels  $(l, y)$ . Dans un premier temps, on donne une allure du graphe, puis dans le dernier paragraphe, on montre que cette famille contient une surface extrême.

### 3.3.2 Esquisse du graphe

Dans ce paragraphe, on recense en premier lieu les géodésiques qui coupent l'ensemble des bords au plus trois fois (cette liste sera utilisée pour la construction du graphe comme pour la démonstration du théorème inclus dans le dernier paragraphe), puis on donne les longueurs de deux classes de géodésiques intersectant l'ensemble des bords respectivement 5 et 10 fois : celles-ci nous permettront de compléter le graphe.

On commence par donner les longueurs des perpendiculaires représentées sur le schéma ci-contre (les hexagones figurés correspondent aux faces triangulaires de l'icosaèdre).



$$\sinh \frac{t}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sinh(y/5)}, \quad \cosh \frac{s}{2} = \sinh t \cdot \sinh \frac{2y}{5}$$

$$\sinh d = \frac{\sinh y \cdot \sinh s}{\sinh i}, \quad \cosh i = \sinh t \cdot \sinh s \cdot \cosh y - \cosh t \cdot \cosh s$$

Ensuite, on calcule les longueurs des géodésiques intersectant au plus trois fois l'ensemble  $Y$  des bords. Pour une systole  $a$ , on note  $N(a)$  le nombre d'intersections entre  $a$  et  $Y$ . On numérote en outre les bords de la manière suivante : on choisit un sommet que l'on numérote 1 ; ce sommet est entouré de 5 faces triangulaires formant un pentagone ; on numérote alors les cinq sommets de ce pentagone de 2 à 6 dans le sens trigonométrique.

• Si  $N(a) = 0$ , alors  $a \in Y \cup K$ , où  $K$  désigne l'ensemble des géodésiques qui sont homotopes à une "circonférence" de l'icosaèdre ; leur longueur vaut :

$$\sinh \frac{k}{10} = \sinh \frac{y}{5} \cdot \cosh \frac{t}{2}$$

• Si  $N(a) = 1$ , alors  $a \in J$ , où  $J$  désigne l'ensemble des géodésiques homotopes au segment  $i$ . On a alors :

$$\cosh j = \cosh \frac{i}{2} \cdot \cosh(d - \frac{y}{10} - l)$$



- Si  $N(a) = 2$ , alors  $a \in X_t \cup X'_t \cup W_t \cup X_s \cup X'_s \cup W_s$ . Ces géodésiques sont représentées sur la figure suivante :



Dans le schéma précédent, la longueur de la perpendiculaire commune entre deux bords vaut soit  $t$ , soit  $s$ ; ceci explique la présence d'un indice dans les notations  $X_t, X_s, etc...$ . En réalité, la géodésique affectée d'un indice  $s$  sera toujours plus grande que la géodésique respective affectée de l'indice  $t$ . On se bornera donc à donner seulement les valeurs de  $x_t, x'_t, w_t$ , omettant dès à présent les indices  $t$  :

$$\begin{aligned} \cosh \frac{x}{2} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \\ \cosh x' &= \cosh t \cdot \cosh(y - l) \cdot \cosh l - \sinh(y - l) \cdot \sinh l \\ \cosh w &= \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} + l\right) - \sinh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{2} + l\right) \end{aligned}$$

- Si  $N(a) = 3$ , alors  $a \in V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$ . L'indice que porte  $v$  désigne le nombre de segments homotopes à  $t$ ; par conséquent,  $v_k$  possède  $(3 - k)$  segments homotopes à  $s$ . Par exemple, la géodésique joignant les bords 1-4-6-1 est dans  $V_0$ . De fait, le calcul montre que  $v_0$  est toujours la plus petite parmi les quatre types de géodésiques  $V_k, 0 \leq k \leq 3$ . Pour exemple, on donnera l'expression de  $v_1$  (outre celle de  $v_0$ ). Dans la suite  $v$  désigne  $v_0$ .

$$\begin{aligned} \cosh \frac{v}{3} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{10} - l\right) \\ v_1 &= \arg \cosh\left(\cosh \frac{s}{2} \cdot \cosh\left(\frac{2y}{5} - l - \epsilon\right)\right) \\ &\quad + \arg \cosh\left(\cosh t \cdot \cosh\left(\frac{3y}{10} - l\right) \cdot \cosh(\epsilon - l)\right) \\ &\quad + \sinh\left(\frac{3y}{10} - l\right) \cdot \sinh(\epsilon - l) \end{aligned}$$

$$\text{où } \coth \epsilon = \frac{\sinh t \cdot \cosh 2y/5 + \tanh s/2 \cdot \cosh t}{\sinh t \cdot \sinh 2y/5 - \tanh s/2 \cdot \tanh 3y/10}$$

La liste exhaustive des géodésiques intersectant  $Y$  au plus trois fois étant close, on donne à présent deux autres géodésiques intéressantes :

- On note  $z$  la géodésique possédant 5 segments homotopes à  $t$  (donc en particulier  $N(z) = 5$ ). Par exemple, la géodésique joignant les bords 5-3-6-4-2-5 est de ce type-ci. On a en outre :

$$\cosh \frac{z}{5} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{3y}{10} - l\right)$$

- On note  $u$  la géodésique possédant 10 segments homotopes à  $t$  (donc en particulier  $N(u) = 10$ ). Par exemple, la géodésique joignant les bords 1-6-4-5-3-1-6-4-5-3-1 est de ce type-là. On a en outre :

$$\cosh \frac{u}{5} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{10} + l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{10} - l\right) - \sinh\left(\frac{y}{10} + l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{10} - l\right)$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

Fort de ces calculs, on peut donner à présent une esquisse du graphe de la famille pour  $l/y \in [0, 1/2]$ , puis, par les arguments de symétrie habituels, l'étendre horizontalement (Fig. 3.5).

famille	‡ famille
$Y, U, Z$	6
$V$	10
$X$	15
$X', W$	30
$J$	60

Parmi les sommets de ce graphe, on remarque deux surfaces non isométriques :

- La surface  $E_{6,60}$  définie par  $y = v = \bar{v}$  (qui est en outre isométrique à la surface définie par  $u = v = \bar{v}$ ) : cette surface admet exactement 26 systoles, de demi-longueur

$$y = v = \bar{v} \simeq 2,60898.$$

Cette surface ne peut pas être parfaite, puisqu'elle possède seulement 26 systoles et que  $26 < 6g - 5 = 31$ .

- La surface  $I_6$  définie par  $y = v = x$  (qui est en outre isométrique à la surface  $I'_6$  définie par  $z = v = x$ ) : cette surface admet exactement 31 systoles, de demi-longueur

$$y = v = x \simeq 2,55450.$$

Dans le prochain paragraphe, on s'attache à montrer l'extrémalité de cette dernière surface.

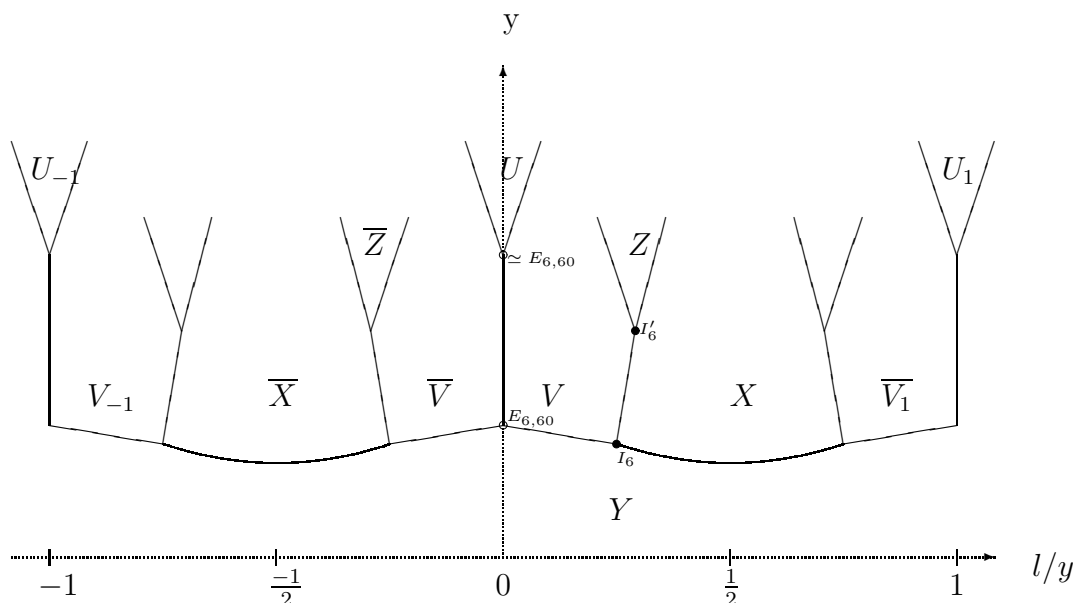


FIG. 3.5 –

### 3.3.3 La surface $I_6$ est extrême

Dans ce paragraphe, on s'attache à montrer le résultat suivant :

**Théorème 5.** *Il existe une unique surface  $I_6$  caractérisée, à isométrie près, par  $y = x = v$ . La surface  $I_6$  réalise un maximum local de la systole dans l'espace de Teichmüller de genre 6. Son ensemble de systoles est exactement  $Y \cup X \cup V$ , et contient donc 31 systoles.*

*Preuve* • Montrons que  $F = Y \cup X \cup V$  est l'ensemble des systoles de  $I_6$ . Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} y = x = v &\simeq 2,554500933; & k &\simeq 6,779736716; & j &\simeq 3,135994174 \\ x' &\simeq 3,114078230; & w &\simeq 2,793330751; & v_1 &\simeq 3,568905386 \\ t &\simeq 1,672747025; & s &\simeq 3,599590847; & l &\simeq 0,3399602340 \end{aligned}$$

Soit  $a$  une systole de  $I_6$ . Alors le nombre  $N(a)$  d'intersections de  $a$  avec  $Y$  vaut au plus  $E(2y/t) = 3$  (puisque en outre  $t < (t+s)/2 < s$ ), donc  $a$  est comprise dans une des familles inventoriées au paragraphe précédent. En comparant les valeurs approchées des longueurs de ces différentes géodésiques, on conclue que  $a \in Y \cup X \cup V$ .

• Montrons à présent que  $I_6$  est eutactique et parfaite. Pour cela, on calcule la matrice intersection des systoles. Soient respectivement :

- $\alpha$  l'angle aigu formé par les géodésiques  $x$  et  $y$ .
- $\beta$  l'angle aigu formé par les géodésiques  $v$  et  $y$ .
- $\gamma$  l'angle formé par les géodésiques  $x$  et  $v$  quand elles se coupent sur  $t$ .
- $\delta$  l'angle formé par les géodésiques  $x$  et  $v$  lorsqu'elles se coupent sur  $y$ .

Posons à présent :

$$\begin{aligned}
 a &:= \cos \alpha = \frac{\tanh(y/2-l)}{\tanh x/2} && \simeq 0,823907 \\
 b &:= \cos \beta = \frac{\tanh(l-y/10)}{\tanh v/3} && \simeq 0,207432 \\
 c &:= \cos \gamma = \frac{\cosh x/2 \cdot \cosh v/3 - \cosh 2y/5}{\sinh x/2 \cdot \sinh v/3} && \simeq 0,698984 \\
 d &:= \cos \delta = \cos(\pi - \alpha - \beta) && \simeq 0,383493
 \end{aligned}$$

On détermine ensuite  $\Omega$ , la matrice intersection des systoles entre elles (on range ici les systoles dans l'ordre suivant :  $y$ , puis  $x$ , puis  $v$ ) :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ -{}^t\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ -{}^t\Omega_2 & -{}^t\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \Omega_2 = \begin{pmatrix} b & b & b & b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & b & b & 0 & 0 & b & b \\ b & 0 & b & 0 & 0 & b & b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & b & 0 & b & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b & 0 & b & b & b & 0 \\ b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -{}^t\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \end{pmatrix}, \Omega_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & -d & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d & -d & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d & -d \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -d & 0 & -c & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -d & -d & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c & -d & -c & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & -c & -d & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ -d & -c & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & -d \\ -c & -d & -c & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & -d & -c & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -c & 0 \\ 0 & -d & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 & -d & -c & 0 & 0 & 0 & -c \\ -d & 0 & 0 & -d & 0 & -c & -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & -d & 0 & -c & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du rang donne :

$$rang(\Omega) = 30 = 6g - 6$$

Donc la surface  $I_6$  est parfaite.

Par ailleurs, si on pondère alors les 6 premières colonnes de  $\Omega$  avec le coefficient  $(c + d) > 0$ , les 15 suivantes avec le coefficient  $b > 0$ , et les 10 dernières avec le coefficient  $a > 0$ , et si l'on ajoute toutes ces colonnes ensemble, on obtient un vecteur colonne nul : ceci entraîne précisément que la surface  $I_6$  est eutactique.

- $I_6$  est parfaite et eutactique donc extrême.  $\square$

### 3.3.4 Surfaces eutactiques

Sur la plupart des arêtes de la figure 3.5, on peut trouver une surface eutactique réalisant le minimum de la systole le long de l'arête considérée. On trouve de la sorte trois surfaces eutactiques. On vérifie également que  $E_{6,60}$  est eutactique. On résume les détails des données dans le tableau 3.3.

arête	surface	$(systole)/2$	$y$	$l$	$\#\{syst\}$
$y = v = \bar{v}$	$E_{6,60}$	$y = v = \bar{v} \simeq 2,60898$	2,60898	0	26
$v = \bar{v}$	$E'_{6,60}$	$v = \bar{v} \simeq 1,97544$	4,81212	0	20
$x = y$	$E''_{6,60}$	$x = y \simeq 2,02989$	2,02989	1,01495	21
$x = v$	$E'''_{6,60}$	$x = v \simeq 2,35066$	3,42805	0,77869	25

TAB. 3.3 – Surfaces eutactiques, non extrêmes

Le tableau 3.4 donne les valeurs approchées des gradients des fonctions longueur : ces valeurs permettent de vérifier qu'on a bien une combinaison linéaire positive des gradients, ce qui entraîne l'eutaxie des quatre surfaces considérées.

$E_{6,60}$	$\begin{cases} dv \simeq -0,706.dy - 1,091.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \\ d\bar{v} \simeq -0,706.dy + 1,091.dl \end{cases}$
$E'_{6,60}$	$\begin{cases} dv \simeq 0.dy - 2,323.dl \\ d\bar{v} \simeq 0.dy + 2,323.dl \end{cases}$
$E''_{6,60}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,798.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$
$E'''_{6,60}$	$\begin{cases} dx \simeq 0,633.dy - 1,775.dl \\ dv \simeq -0,670.dy + 1,880.dl \end{cases}$

TAB. 3.4 – Valeurs approchées des gradients des longueurs

## 3.4 Le dodécaèdre ( $g = 10$ )

### 3.4.1 Présentation de la famille

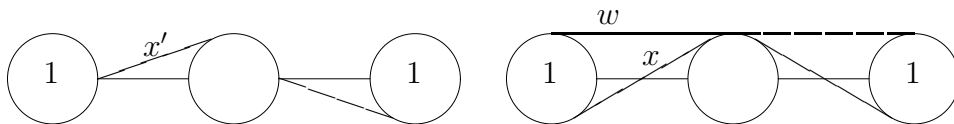
On considère une surface de signature  $(0, 20)$  ayant la symétrie du dodécaèdre. On nomme  $y$  les géodésiques de bords. En identifiant alors les bords opposés deux à deux, on obtient une surface de genre 10, ayant pour groupe d'automorphismes  $\mathfrak{A}_5$ , le groupe alterné de degré 5 (d'ordre 60). En faisant varier la longueur du bord  $y$  et le twist  $2l$  selon lequel on recolle les bords opposés, on obtient une famille de surfaces de Riemann, paramétrée par un couple de paramètres réels  $(l, y)$ . On s'attache à donner l'allure du graphe de cette famille. Par contre, on n'a pas pu déceler parmi les sommets représentés de surface extrême.

### 3.4.2 Esquisse du graphe

On se borne ici, à calculer les longueurs des géodésiques qui serviront à construire le graphe. Pour cela, on calcule la longueur de la perpendiculaire entre deux bords.

Les arêtes du dodécaèdre partagent la surface considérée en 12 décagones à angles droits. Soit  $t$  la longueur d'une telle arête ; on a :  $\sinh \frac{t}{2} = \frac{\cos(\pi/5)}{\sinh(y/3)}$ .

Soient  $x$ ,  $x'$  et  $w$  les géodésiques représentées sur la figure suivante (c'est l'analogie du cas de l'icosaèdre) :



Les longueurs respectives de ces géodésiques valent :

$$\begin{aligned} \cosh \frac{x}{2} &= \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh \left( \frac{y}{2} - l \right) \\ \cosh x' &= \cosh t \cdot \cosh(y - l) \cdot \cosh l - \sinh(y - l) \cdot \sinh l \\ \cosh w &= \cosh t \cdot \cosh \left( \frac{y}{2} - l \right) \cdot \cosh \left( \frac{y}{2} + l \right) - \sinh \left( \frac{y}{2} - l \right) \cdot \sinh \left( \frac{y}{2} + l \right) \end{aligned}$$

On note  $v$  la géodésique possédant 5 segments homotopes à  $t$ , joignant deux

sommets opposés, et ayant pour longueur :

$$\cosh \frac{v}{5} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right)$$

On note  $u$  la géodésique possédant 10 segments homotopes à  $t$ , ces segments délimitant deux décagones opposés dans le dodécaèdre, et ayant pour longueur :

$$\cosh u = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \cosh\left(\frac{y}{6} + l\right) - \sinh\left(\frac{y}{6} - l\right) \cdot \sinh\left(\frac{y}{6} + l\right)$$

Pour ces familles de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

On donne à présent l'allure du graphe (Fig. 3.6).

famille	‡ famille
$Y$	10
$X$	15
$W, X'$	30
$V, U$	6

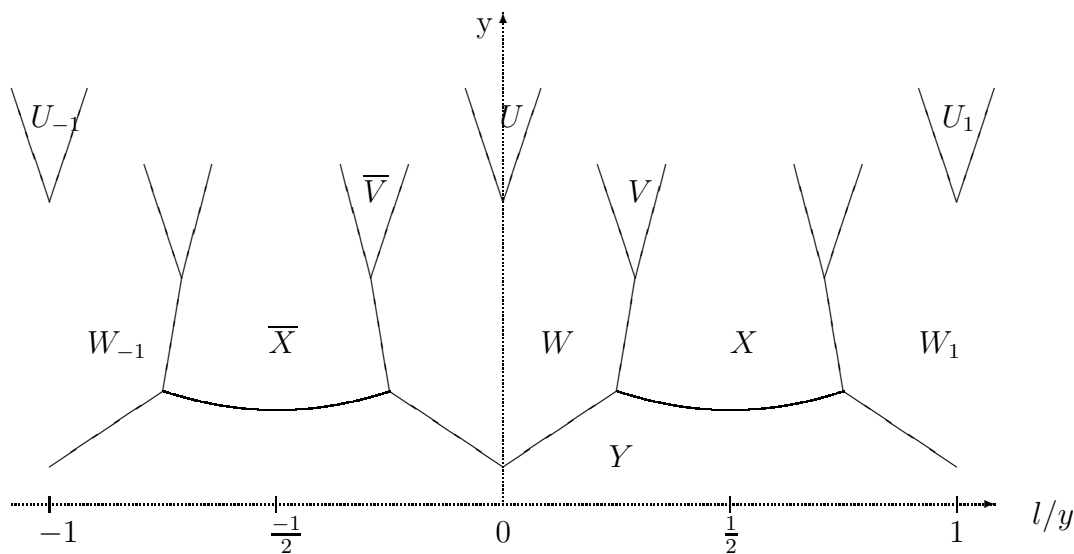


FIG. 3.6 –

Deux surfaces sont à considérer :

- la surface notée  $E_{10,60}$ , caractérisée à isométrie près par  $x = w = v$ , contenant 51 systoles de demi-longueur :

$$x = w = v \simeq 2,68541.$$

Cette surface ne peut être parfaite puisque  $51 < 6g - 5 = 55$ . Par contre, on montrera qu'elle est eutactique.

- la surface  $\Sigma_{10} = C_{y=x=w}$  contenant 55 systoles de demi-longueur :

$$y = x = w \simeq 2,58639.$$

Cette surface est eutactique, néanmoins elle n'est pas parfaite ; c'est ce que l'on montre dans le paragraphe suivant.

### 3.4.3 Une surface eutactique non parfaite

On montre que la surface  $\Sigma_{10}$  est eutactique, non parfaite.

- Par le raisonnement habituel, on montre que  $F = Y \cup X \cup W$  est exactement l'ensemble des systoles. Pour cela, on examine les différentes longueurs des géodésiques intersectant l'ensemble des bords  $Y$  au plus  $E(2y/t) = 3$  fois. On omet ici les détails de cette vérification.

- Pour montrer l'eutaxie de cette surface, on calcule les gradients des fonctions longueur :

$$\begin{cases} dx \simeq 0,415.dy - 1,739.dl \\ dy = 1.dy + 0.dl \\ dw \simeq -0,099.dy + 0,357.dl \end{cases}$$

et on constate qu'il en existe une combinaison linéaire strictement positive.

- Pour constater que cette surface n'est pas parfaite, on détermine  $\Omega$ , la matrice intersection des systoles. On convient de noter :

$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha = \frac{\cosh y}{\cosh y + 1} && \simeq 0,869767 \\ b &= \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cosh(y/3) - \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha && \simeq 0,144820 \\ c &= \sin^2 \alpha \cdot \cosh(y/3) - \cos^2 \alpha && \simeq -0,416748 \\ d &= \cos 2\alpha = 2a^2 - 1 && \simeq 0,512989 \end{aligned}$$

On écrit la matrice  $\Omega$  par blocs  $5 \times 5$  :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \dots & \Omega_{1,11} \\ -{}^t\Omega_{1,2} & \Omega_{2,2} & \dots & \Omega_{2,11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -{}^t\Omega_{1,11} & -{}^t\Omega_{1,10} & \dots & \Omega_{11,11} \end{pmatrix}$$



Les blocs  $\Omega_{i,j}$  sont des matrices carrées circulantes d'ordre 5. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,3} &= C(-a, 0, -a, 0, 0) , \Omega_{1,5} = C(-a, 0, 0, 0, 0) \\
\Omega_{1,6} &= C(a, 0, -d, 0, 0) , \Omega_{1,8} = C(a, 0, 0, 0, 0) \\
\Omega_{1,9} &= C(-d, 0, a, 0, 0) , \Omega_{1,11} = C(-d, 0, 0, 0, 0) \\
\Omega_{2,4} &= C(-a, 0, 0, 0, -a) , \Omega_{2,5} = C(0, 0, -a, 0, 0) \\
\Omega_{2,7} &= C(a, 0, 0, 0, -d) , \Omega_{2,8} = C(0, 0, -d, 0, 0) \\
\Omega_{2,10} &= C(-d, 0, 0, 0, a) , \Omega_{2,11} = C(0, 0, a, 0, 0) \\
\Omega_{3,6} &= C(-a, 0, 0, -c, 0) , \Omega_{3,8} = C(-c, 0, 0, -c, 0) \\
\Omega_{3,9} &= C(-a, 0, -c, 0, 0) , \Omega_{4,7} = C(-a, -c, 0, 0, 0) \\
\Omega_{4,10} &= C(-a, 0, 0, 0, -c) , \Omega_{4,11} = C(0, 0, -c, -c, 0) \\
\Omega_{5,6} &= C(-c, 0, 0, 0, 0) , \Omega_{5,7} = C(0, 0, 0, -c, 0) \\
\Omega_{5,8} &= C(-a, 0, 0, 0, 0) , \Omega_{5,9} = C(0, 0, -c, 0, 0) \\
\Omega_{5,10} &= C(0, 0, -c, 0, 0) , \Omega_{5,11} = C(-a, 0, 0, 0, 0) \\
\Omega_{6,6} &= C(0, 0, b, -b, 0) , \Omega_{6,8} = C(0, 0, 0, -b, 0) \\
\Omega_{6,11} &= C(b, 0, 0, 0, 0) , \Omega_{7,7} = C(0, -b, 0, 0, b) \\
\Omega_{7,8} &= C(0, 0, b, 0, 0) , \Omega_{7,11} = C(0, 0, 0, -b, 0) \\
\Omega_{8,9} &= C(b, 0, 0, 0, 0) , \Omega_{8,10} = C(0, 0, -b, 0, 0) \\
\Omega_{9,9} &= C(0, 0, -b, b, 0) , \Omega_{9,11} = C(0, 0, 0, b, 0) \\
\Omega_{10,10} &= C(0, b, 0, 0, -b) , \Omega_{10,11} = C(0, 0, -b, 0, 0)
\end{aligned}$$

où  $C(\omega_1, \dots, \omega_5)$  désigne la matrice circulante suivante :

$$C(\omega_1, \dots, \omega_5) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \\ \omega_5 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_4 & \omega_5 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_1 \end{pmatrix}$$

Ensuite on complète la matrice  $\Omega$  par antisymétrie, et les blocs non encore complétés sont à remplir par le bloc nul  $C(0, 0, 0, 0, 0)$ .

Le calcul donne :  $\text{rang}(\Omega) = 48 < 6g - 6 = 54$ . Donc la surface  $\Sigma_{10}$  n'est pas parfaite.

Ceci s'explique par le fait que  $F$  n'est pas paramétrisante : en effet  $F$  fournit 15 données (sous-entendu distances ou angles) par décagone, or pour déterminer un décagone hyperbolique, il faut 18 données.

### 3.4.4 Surfaces eutactiques

Sur la plupart des arêtes de la figure 3.6, on peut trouver une surface eutactique réalisant le minimum de la systole le long de l'arête considérée. On trouve de la sorte trois surfaces eutactiques. On vérifie également que  $E_{10,60}$  est eutactique. On résume les détails des données dans le tableau 3.5.

arête	surface	$(systole)/2$	$y$	$l$	$\#\{syst\}$
$x = v = w$	$E_{10,60}$	$x = v = w \simeq 2,68541$	3,47900	0,55842	51
$y = w$	$E'_{10,60}$	$y = w \simeq 2,53352$	2,53352	0	40
$y = x$	$E''_{10,60}$	$x = y \simeq 1,96687$	1,96687	0,98344	25
$x = w$	$E'''_{10,60}$	$x = w \simeq 2,58620$	2,61976	0,33309	45

TAB. 3.5 – Surfaces eutactiques, non extrêmes

Le tableau 3.6 donne les valeurs approchées des gradients des fonctions longueur : ces valeurs permettent de vérifier qu'on a bien une combinaison linéaire positive des gradients, ce qui entraîne l'eutaxie des quatre surfaces considérées.

$E_{10,60}$	$\begin{cases} dx \simeq 0,725.dy - 1,898.dl \\ dv \simeq -0,958.dy - 0,218.dl \\ dw \simeq 0,071.dy + 0,492.dl \end{cases}$
$E'_{10,60}$	$\begin{cases} dw \simeq -0,099.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$
$E''_{10,60}$	$\begin{cases} dx \simeq -0,874.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$
$E'''_{10,60}$	$\begin{cases} dx \simeq 0,431.dy - 1,748.dl \\ dw \simeq -0,089.dy + 0,362.dl \end{cases}$

TAB. 3.6 – Valeurs approchées des gradients des longueurs



## Chapitre 4

# Groupes diédraux en genre 4

### 4.1 Le double du pentagone

#### 4.1.1 Présentation de la famille

On s'intéresse ici au double twisté du pentagone. On entend par "pentagone" la surface de signature  $(0, 5)$ , qui admet pour groupe d'automorphismes le groupe diédral  $D_5$  d'ordre 10 (Fig. 4.1). Le double twisté de ce pentagone

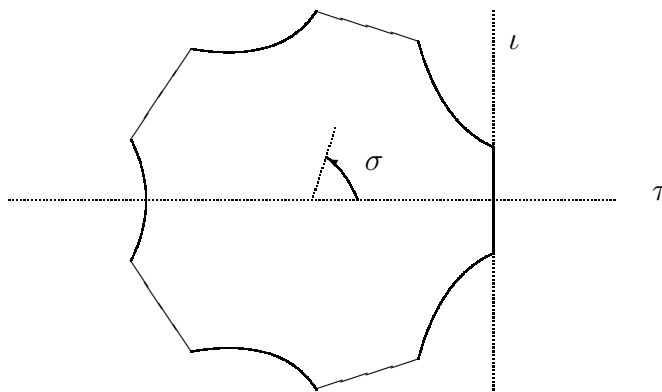


FIG. 4.1 – “Le pentagone” vu de dessus

définit alors une famille de surfaces hyperelliptiques de genre 4, paramétrée par un couple de réels twist-longueur. Son groupe d'automorphismes est le groupe diédral  $D_{10}$  d'ordre 20 ; il est noté  $H(20, 20)$  dans [Ku1] ; sa signature vaut  $[0, 20; 2, 2, 2, 5]$  ; il est engendré par (cf. Fig. 4.1) :

- une rotation  $\sigma$  d'ordre 5.
- un retournement  $\tau$ , qui avec  $\sigma$  engendrent un groupe diédral.
- un retournement qui échange les deux pentagones, et qui n'est autre que l'involution hyperelliptique.

### 4.1.2 Esquisse du graphe

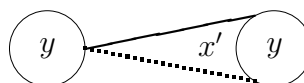
De même que dans les précédents chapitres, on donne les valeurs des géodésiques qui interviennent dans la discussion, puis les symétries qui réduisent la domaine d'étude, et enfin l'allure du graphe.

Sur les figures suivantes, on représente le pentagone vu de profil (i.e. on le regarde en étant dans le plan de la rotation  $\sigma$ ), et on donne les valeurs des géodésiques correspondantes aux schémas successifs :



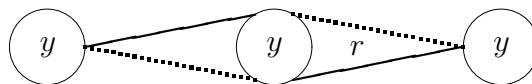
$$\cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l$$

$$\cosh x' = \cosh t \cdot \cosh(y-l) \cdot \cosh l - \sinh(y-l) \cdot \sinh l$$

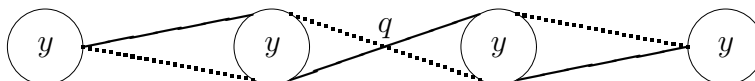


$$\cosh \frac{w}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(y-l)$$

$$\cosh \frac{v}{10} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right)$$



$$\cosh \frac{r}{2} = \cosh t \cdot \cosh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \cosh l - \sinh\left(\frac{y}{2} - l\right) \cdot \sinh l$$



$$\frac{q}{2} = \arg \cosh \left( \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh(\eta - l) \right) \\ + \arg \cosh (\cosh t \cdot \cosh(y - \eta - l) \cdot \cosh l - \sinh(y - \eta - l) \cdot \sinh l)$$

$$\text{où } \sinh \frac{t}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4 \cdot \sinh y/2}, \text{ et } \coth \eta = \coth y + \frac{\tanh t}{\sinh y \cdot \tanh t/2}$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

famille	# famille
$V$	1
$Y, X, W, R, Q$	5
$X'$	10

En ce qui concerne les symétries du graphe, on a :

- La symétrie d'axe  $l = 0$  (inversion du sens du twist effectué selon  $Y$ ).
- La translation de vecteur parallèle à l'axe des abscisses, de norme 1, qui correspond à l'action d'un twist entier selon  $Y$ .
- La symétrie d'axe  $l/y = 1/2$  qui se lit sur l'expression des différentes géodésiques.
- Enfin, l'action d'un twist entier selon  $X$  qui opère de la manière suivante :

avant twist	$X$	$X'$	$R$	$Y$	$Q$	$W$	$V$
après twist	$\bar{X}$	$\bar{X}'$	$Y$	$\bar{R}$	$\bar{W}$	$\bar{Q}$	$\bar{V}$

La figure 4.2 donne l'allure du graphe de la famille. On remarque soit par le calcul, soit par des considérations sur les symétries déjà mentionnées, que tous les sommets portés sur le graphe (i.e. pour des valeurs de  $y$  restant inférieures à 5), correspondent à des surfaces isométriques à la surface notée  $E_{4,10}$  et caractérisée à isométrie près par  $x = x' = y$ .

### 4.1.3 Surfaces eutactiques

- On note  $E_{4,10}$  la surface caractérisée à isométrie près par  $x = x' = y$ . On se convainc que l'ensemble des systoles est exactement  $X \cup X' \cup Y$ . En effet  $x \simeq 1,9539$  et  $t \simeq 1,32$ , donc  $E(x/t) = 1$ . On peut calculer le rang de  $\Omega$ , la matrice intersection des systoles :  $\text{rang}(\Omega) = 14 < 18$ , donc cette surface n'est pas parfaite. Par contre on peut montrer que cette surface est

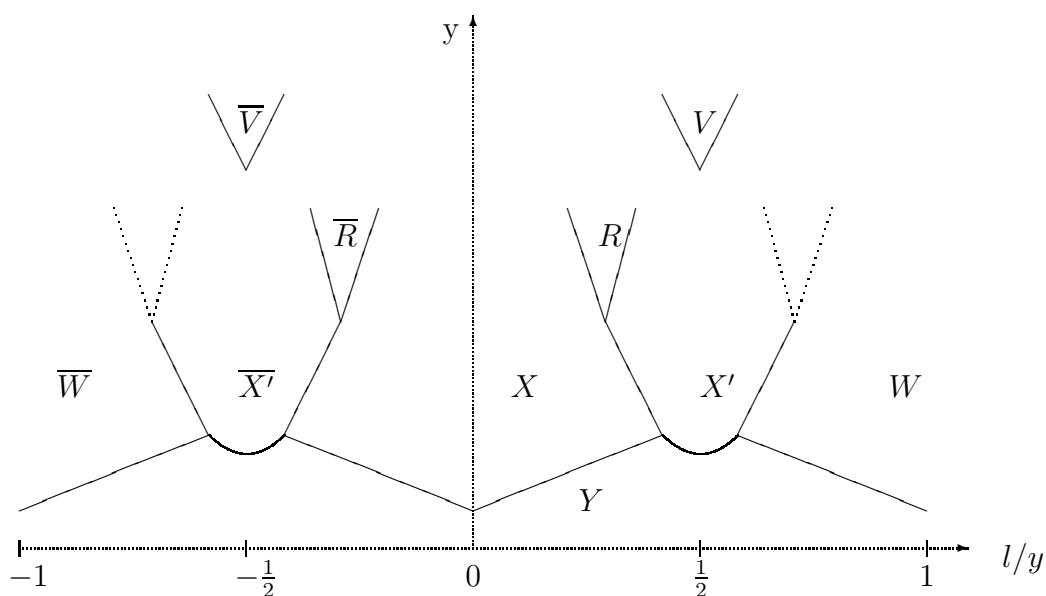


FIG. 4.2 –

eutactique; on calcule pour cela les gradients des longueurs :

$$\begin{cases} dx \simeq -0,592.dy + 1,565.dl \\ dy = 1.dy + 0.dl \\ dx' \simeq -0,145.dy - 0,558.dl \end{cases}$$

On constate qu'il y a une combinaison linéaire strictement positive des gradients, donc  $E_{4,10}$  est eutactique.

• Une autre surface eutactique apparaît : celle qui réalise le minimum de la systole le long de l'arc  $x = x'$ . Cette surface, notée  $E'_{4,10}$ , possède 15 systoles de demi-longueur  $x = x' \simeq 1,89453$ . Comme précédemment, on calcule les gradients des différentes longueurs :

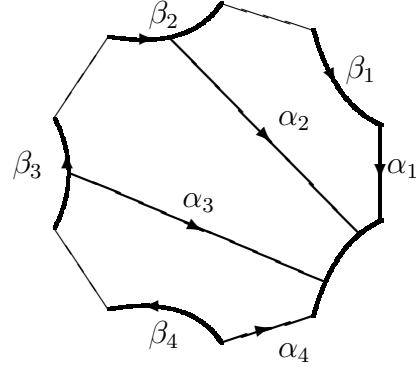
$$\begin{cases} dx \simeq -0,345.dy + 1,758.dl \\ dx' \simeq 0,157.dy - 0,799.dl \end{cases}$$

Il est clair qu'on peut écrire une combinaison linéaire strictement positive de ces gradients, d'où l'eutaxie de  $E'_{4,10}$ .

## 4.1.4 Indication sur le lieu des jacobienes

Comme dans le chapitre précédent, on détermine l'action du groupe d'automorphismes sur une base de l'homologie; puis, on calcule le lieu des points fixes dans l'espace de Siegel.

Dans le cas présent, l'action des trois automorphismes sur une base de l'homologie s'écrit :  $\iota = -I_8$ ,



$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'involution hyperelliptique agissant de manière triviale sur l'espace de Siegel, il n'y a que les deux premiers automorphismes qui puissent donner une information sur le lieu des points fixes. L'ensemble des solutions de ce système est paramétré par deux variables complexes (notées  $a$  et  $b$  dans ce qui suit) et détermine un lieu plus vaste que celui décrit par les jacobienes de la famille.

Après calculs, les deux conditions

$$\sigma * Z = Z \text{ et } \tau * Z = Z$$

sont équivalentes à l'existence de  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tels que :

$$Z = \begin{pmatrix} 2a & b & -a-b & -a-b \\ b & 2a & b & -a-b \\ -a-b & b & 2a & b \\ -a-b & -a-b & b & 2a \end{pmatrix}.$$

Pour que  $Z$  ait une partie imaginaire définie positive, il faut en outre que  $a$  et  $b$  vérifient :

$$\begin{cases} 0 < \Im m(a) \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Im m(a) < \Im m(b) < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Im m(a) \end{cases}$$



## 4.2 L'octogone

### 4.2.1 Présentation de la famille

On considère une surface de signature  $(0, 8)$  ayant la symétrie de l'octogone ; autrement dit, on écorne les sommets d'un édredon octogonal. On

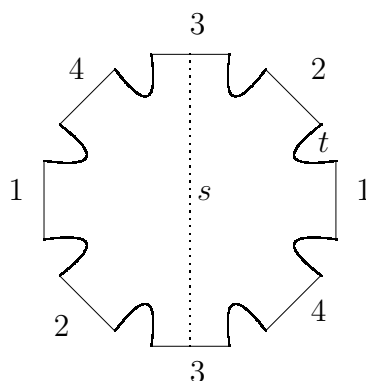


FIG. 4.3 – “L’octogone” vu de dessus

nomme  $y$  les géodésiques de bords. On identifie alors les bords diamétralement opposés deux à deux (Fig. 4.3), et on obtient une surface de genre 4, ayant pour groupe d’automorphismes  $D_8$ . D’après [Bo], la signature de ce groupe est  $[0, 16; 2, 2, 2, 8]$  ; la famille construite est donc paramétrée par un couple de paramètres réels  $(l, y)$ , où  $l$  désigne le demi-twist selon lequel on recolle les géodésiques  $y$ .

### 4.2.2 Esquisse du graphe

Soit  $t$  la longueur de la plus courte perpendiculaire commune entre deux bords  $y$ . Soit  $s$  la longueur de la perpendiculaire commune entre deux bords opposés (cf. Fig. 4.3). On a les formules suivantes :

$$\sinh \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 \cdot \sinh y/2}$$

$$\sinh \frac{s}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\tanh y/2}$$

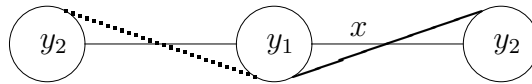
Soit  $j$  la géodésique homotope à  $s$  ; sa longueur vaut :

$$\cosh j = \cosh \frac{s}{2} \cdot \cosh l$$

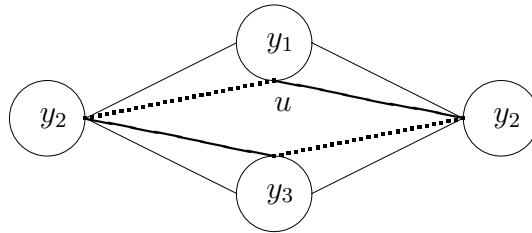
Soit  $h$  la géodésique homotope à la réunion des huit segments  $t$  ; sa longueur vaut :

$$\cosh \frac{h}{8} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l$$

Sur les figures suivantes, on représente l'octogone vu de profil, et on donne les valeurs des géodésiques correspondantes aux schémas successifs :



$$\cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh \left( \frac{y}{2} - l \right)$$



$$\cosh \frac{u}{2} = \cosh t \cdot \cosh l \cdot \cosh \left( \frac{y}{2} - l \right) - \sinh l \cdot \sinh \left( \frac{y}{2} - l \right)$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

famille	# famille
$Y, X, U$	4
$J$	8
$H$	1

Pour construire le graphe de la famille, on se restreint, grâce à la symétrie d'axe  $l = 0$  (inversion du sens du twist effectué selon  $Y$ ) et à la translation de vecteur parallèle à l'axe des abscisses de norme 1 (action d'un twist entier selon  $Y$ ) , au domaine  $0 \leq l/y \leq 1/2$ . Ensuite, on remarque qu'un twist de demi-longueur  $t$ , effectué selon la géodésique  $h$  agit de la manière suivante :

avant twist	$H$	$\bar{X}$	$J$	$Y$
après twist	$H$	$X$	$J$	$U$

On peut à présent donner l'allure du graphe (cf. Fig. 4.4). En fait, les arguments de symétrie mentionnés ci-dessus permettent d'affirmer que les

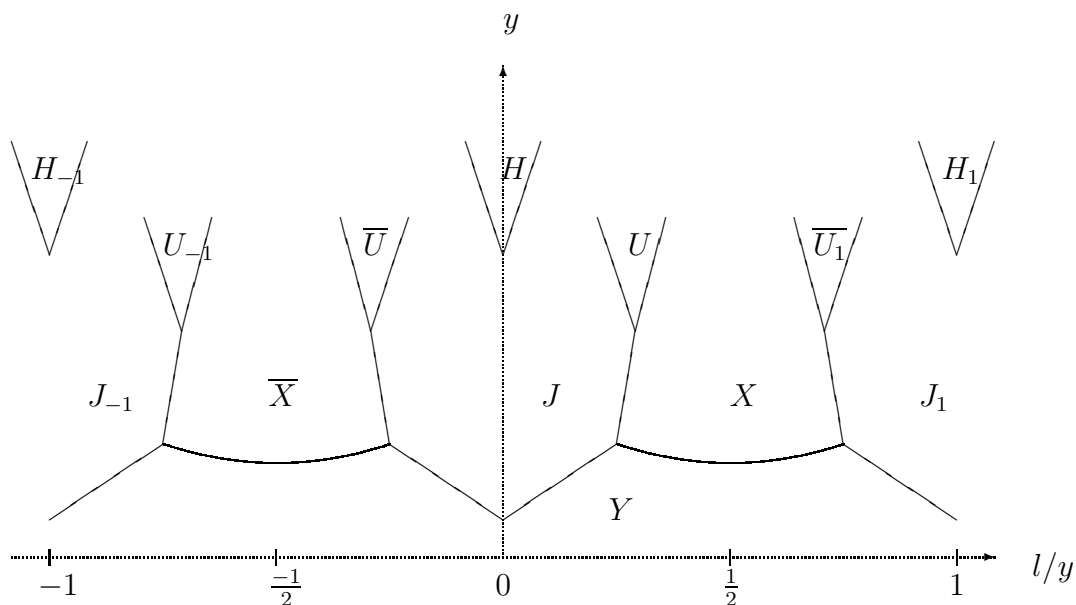


FIG. 4.4 –

sommets de ce graphe sont isométriques à une unique surface notée  $E_{4,16}$  et caractérisée par  $x = j = y$  (par exemple  $C_{x=j=u}$  est isométrique à  $C_{x=j=y}$ ); ceci est corroboré par le calcul.

### 4.2.3 Surfaces eutactiques

- La surface notée  $E_{4,16}$ , caractérisée par  $x = j = y$ , admet comme ensemble de systoles  $X \cup J \cup Y$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que  $E(2y/t) = 2$ , et d'examiner les différentes géodésiques coupant  $Y$  au plus deux fois. La surface  $E_{4,16}$  possède donc exactement 16 systoles, de longueur :

$$x = j = y \simeq 1,95799.$$

Vu que  $16 < 6g - 5 = 19$ , il est clair que la surface  $E_{4,16}$  ne peut pas être parfaite. Par contre cette surface est eutactique : pour montrer cela, on calcule les gradients des longueurs :

$$\begin{cases} dx \simeq 0,009.dy - 1,414.dl \\ dy = 1.dy + 0.dl \\ dj \simeq -0,273.dy + 0,383.dl \end{cases}$$

L'eutaxie de  $E_{4,16}$  s'en déduit facilement.

• On peut repérer une autre surface eutactique : celle qui réalise le minimum de la systole le long de l'arc  $y = j$ . Cette surface, notée  $E'_{4,16}$ , possède 12 systoles de demi-longueur  $y = j \simeq 1,89892$ . Comme précédemment, on calcule les gradients des différentes longueurs :

$$\begin{cases} dj \simeq -0,293.dy + 0.dl \\ dy \simeq 1.dy + 0.dl \end{cases}$$

Il est clair qu'on peut écrire une combinaison linéaire strictement positive de ces gradients, d'où l'eutaxie de  $E'_{4,16}$ .



## Chapitre 5

# Une suite infinie de surfaces parfaites

### 5.1 Une surface parfaite en genre 4

#### 5.1.1 Présentation de la famille

On s'intéresse à la famille associée au graphe représenté sur la figure 5.1. Son groupe d'automorphismes  $G$  est engendré par une rotation  $\sigma$  d'ordre 4 et un retournement  $\tau$  : c'est le groupe diédral  $D_4$ , d'ordre 8, de signature  $[2, 2, 2, 2, 4]$  d'après [Bo].

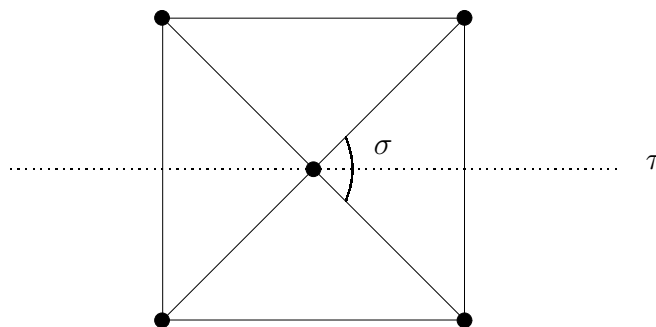
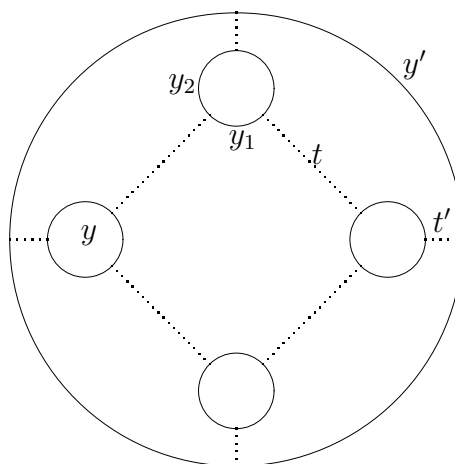


FIG. 5.1 –

La famille obtenue par cette construction est paramétrée par deux paramètres complexes. Pour se ramener à une famille à un paramètre, on va fixer une condition supplémentaire.

On découpe la surface suivant les courbes indiquées en pointillés sur le schéma ci-contre, en une surface “centrale” de signature  $(0, 4)$  et quatre pantalons.

On peut alors paramétrer la famille par les deux couples de réels (twist, longueur) correspondant à la déformation de la surface selon les quatre géodésiques  $y$  et selon la géodésique  $y'$ .



Dans la suite de ce chapitre, on choisit d'imposer  $t = t'$ , ce qui donne alors une famille paramétrée par le seul couple de paramètres réels  $(l, y)$ , où  $l$  est la longueur du demi-twist effectué selon  $Y \cup Y'$ . En effet,  $y$  détermine entièrement les longueurs  $y_1, y_2, t = t', y'$ . Pour obtenir  $y_1$  et  $y_2$ , il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 & = 2y \\ \cosh y_1 - 2 \cosh y_2 & = -1 \end{cases}$$

Ensuite,  $t$  et  $y'$  sont donnés par les formules :  $y' = 2y_2$  et

$$\cosh t = \frac{\cosh y_2}{\cosh y_2 - 1}$$

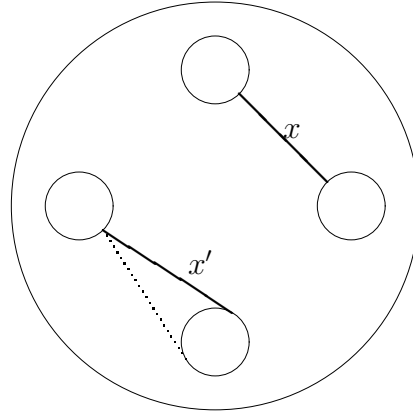
On aurait aussi bien pu se donner  $t$  et calculer les autres longueurs en fonction de  $t$ , en remarquant que :

$$\begin{cases} \cosh y_1 & = \frac{\cosh t + 1}{\cosh t - 1} \\ \cosh y_2 & = \frac{\cosh t}{\cosh t - 1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2y & = y_1 + 2y_2 \\ 2y' & = 4y_2 \end{cases}$$

### 5.1.2 La surface $B_4$ est parfaite

On note  $X$  l'ensemble des 8 géodésiques qui coïncident avec la réunion de deux segments  $t$  lorsque le twist est nul (cf. Fig. ci-dessous).

Soit  $x \in X$ , et soit  $y \in Y$  intersectée par  $x$ , il existe une unique plus petite géodésique simple  $z$  telle que  $x, y, z$  soient contenues dans une sous-surface de signature  $(1, 1)$ , et telle qu'en outre  $z$  intersecte  $x$  (resp.  $y$ ) une seule fois. On note  $X'$  l'ensemble de ces 12 géodésiques, et  $x'$  leur demi-longueur.



Soit  $x \in X$  intersectant  $y'$ , il existe une unique plus petite géodésique simple  $z$  telle que  $x, y', z$  soient contenues dans une sous-surface de signature  $(1, 1)$ , et telle qu'en outre  $z$  intersecte  $x$  (resp.  $y'$ ) une seule fois. On note  $X''$  l'ensemble de ces 4 géodésiques, et  $x''$  leur demi-longueur.

Montrons à présent :

**Théorème 6.** *La surface  $B_4$  caractérisée (à isométrie près) par  $y = x = x'$  est une surface parfaite non eutactique. Son ensemble de systoles est exactement  $Y \cup X \cup X'$ , et contient donc 24 systoles.*

*Preuve* • Montrons que  $F = Y \cup X \cup X'$  est l'ensemble des systoles de  $B_4$ . Après calculs, on obtient :

$$y = x = x' \simeq 2,105192; y' \simeq 2,518569$$

$$x'' \simeq 2,463039; t \simeq 1,376618; l \simeq 0,7435077$$

Soit  $a$  une systole de  $B_4$ . Alors le nombre  $N(a)$  d'intersections de  $a$  avec  $Y$  vaut au plus  $E(2y/t) = 3$ . Donc  $N(a) \leq 2$ . Les valeurs données ci-dessus permettent de conclure.

• Montrons que  $B_4$  est parfaite. On donne la matrice intersection des systoles prises dans l'ordre  $Y \cup X \cup X'$ . Posons :

$$a = \cos \alpha = \frac{\cosh y}{\cosh y + 1} \simeq 0,806398$$

$$c = \cos 2\alpha = 2a^2 - 1 \simeq 0,300557$$

$$e = \sin^2 \alpha \cdot \cosh(y - y_1) - \cos^2 \alpha \simeq -0,270249$$

$$f = \sin^2 \alpha \cdot \cosh(y - y_2) - \cos^2 \alpha \simeq -0,167792$$

$$h = \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cosh(y - y_1) - \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \simeq 0,370541$$

$$k = \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cosh(y - y_2) - \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \simeq 0,535783$$



Soit  $\Omega$  la matrice intersection :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \Omega_{1,4} & \Omega_{1,5} & -\Omega_{1,3} \\ -{}^t\Omega_{1,2} & 0 & 0 & \Omega_{2,4} & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} \\ -\Omega_{1,3} & 0 & 0 & \Omega_{3,4} & \Omega_{3,5} & \Omega_{1,3} \\ -{}^t\Omega_{1,4} & -{}^t\Omega_{2,4} & -{}^t\Omega_{3,4} & \Omega_{4,4} & 0 & \Omega_{4,6} \\ -{}^t\Omega_{1,5} & -{}^t\Omega_{2,5} & -{}^t\Omega_{3,5} & 0 & -\Omega_{4,4} & \Omega_{5,6} \\ \Omega_{1,3} & -{}^t\Omega_{2,6} & -{}^t\Omega_{3,6} & -{}^t\Omega_{4,6} & -{}^t\Omega_{5,6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Omega_{1,2} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}, \Omega_{1,3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \Omega_{1,4} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -a \\ -a & c & 0 & 0 \\ 0 & -a & c & 0 \\ 0 & 0 & -a & c \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{1,5} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & c \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & c & -a & 0 \\ 0 & 0 & c & -a \end{pmatrix}, \Omega_{2,4} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & e \\ e & a & 0 & 0 \\ 0 & e & a & 0 \\ 0 & 0 & e & a \end{pmatrix}, \Omega_{2,5} = \begin{pmatrix} a & e & 0 & 0 \\ 0 & a & e & 0 \\ 0 & 0 & a & e \\ e & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{2,6} = \begin{pmatrix} f & f & 0 & 0 \\ 0 & f & f & 0 \\ 0 & 0 & f & f \\ f & 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \Omega_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f \\ f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{pmatrix}, \Omega_{3,5} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{4,4} = \begin{pmatrix} 0 & -h & 0 & h \\ h & 0 & -h & 0 \\ 0 & h & 0 & -h \\ -h & 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \Omega_{4,6} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \Omega_{5,6} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du rang donne alors :

$$\text{rang}(\Omega) = 6g - 6 = 18.$$

Donc la surface est parfaite.

• Par contre  $B_4$  n'est pas eutactique. En effet, si on pondère les colonnes (regroupées par quatre) par les coefficients  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6$ , on obtient les relations :

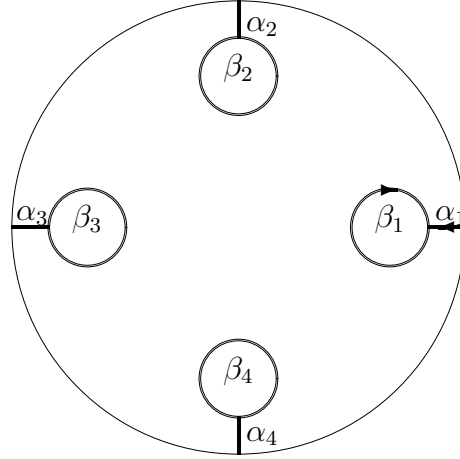
$$\begin{cases} \lambda_1/\lambda_2 = \frac{a^2+ae-2f^2}{a(k-f+a-c)} \simeq 0,386 > 0 \\ \lambda_3/\lambda_2 = \frac{a^2+ae+2fc-2fa-2ak}{a(k-f+a-c)} \simeq -0,269 < 0 \\ \lambda_4/\lambda_2 = \frac{a-f}{k-f+a-c} \simeq 0,805 > 0 \\ \lambda_6/\lambda_2 = \frac{a+e-2f}{k-f+a-c} \simeq 0,721 > 0 \end{cases}$$

□

## 5.1.3 Indication sur le lieu des jacobiniennes

Soit  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq 5} \cup \{\beta_i\}_{1 \leq i \leq 5}$  une base de l'homologie définie comme indiqué ci-contre.

Alors, le groupe d'automorphismes agit sur cette base de la manière suivante :



$$\sigma = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \text{ où } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ où } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices appartenant à l'espace de Siegel, fixées par  $\sigma$  et  $\tau$ , sont de la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{pmatrix}$$

La condition  $\Im m(Z) > 0$  s'écrit :

$$\begin{cases} \Im m(a) > 0 \\ |\Im m(c)| < \Im m(a) \\ 2|\Im m(b)| < \Im m(a) + \Im m(c) \end{cases}$$

## 5.2 Généralisation en genre quelconque

### 5.2.1 Construction d'une suite infinie

On généralise la construction considérée au paragraphe précédent. Soit  $g \in \mathbb{N}$ , tel que  $g \geq 3$ ; on considère la famille de surfaces de genre  $g$ , admettant pour groupe d'automorphismes le groupe diédral  $D_g$ , d'ordre  $2g$ , et construite à partir du graphe suivant : on considère  $g$  sommets formant un polygone régulier à  $g$  côtés; les arêtes sont les côtés du polygone; on place ensuite un  $(g + 1)$ -ième sommet au centre du polygone et on joint le centre aux autres sommets par des arêtes radiales.

Soit une surface appartenant à cette famille. La décomposition opérée au § 5.1.1, donne un découpage de cette surface en une sous-surface de signature  $(0, g)$  (on note  $2t$  la longueur de ses bords) et  $g$  pantalons. On conserve les mêmes notations qu'au § 5.1.1. A savoir, on note  $y$  les  $g$  géodésiques de bords "intérieures", et  $y'$  la géodésique "extérieure". On note  $y_1$  la longueur du segment de  $y$ , contenu dans la sous-surface centrale de signature  $(0, g)$ , et  $y_2$  la longueur du segment de  $y$ , contenu dans un des pantalons. On suppose ici que les trois bords de chaque pantalon ont tous la même longueur  $2t$ .

La famille est donc paramétrée par le couple de réels  $(l, y)$ , où  $l$  est la longueur du demi-twist effectué selon  $Y \cup Y'$ . En effet,  $y$  détermine entièrement les longueurs  $y_1, y_2, t = t', y'$ . Pour obtenir  $y_1$  et  $y_2$ , il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 & = & 2y \\ \cosh y_1 - 4 \cos^2(\pi/g) \cdot \cosh y_2 & = & 1 - 4 \cos^2(\pi/g) \end{cases}$$

Ensuite,  $t$  et  $y'$  sont donnés par les formules :  $y' = gy_2/2$  et

$$\cosh t = \frac{\cosh y_2}{\cosh y_2 - 1}$$

On aurait aussi bien pu se donner  $t$  et calculer les autres longueurs en fonction de  $t$ , en remarquant que :

$$\begin{cases} \cosh y_1 & = & 1 + \frac{4 \cos^2(\pi/g)}{\cosh t - 1} \\ \cosh y_2 & = & \frac{\cosh t}{\cosh t - 1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2y & = & y_1 + 2y_2 \\ 2y' & = & \frac{g}{2} y_2 \end{cases}$$

### 5.2.2 La surface $B_g$ est parfaite

On note  $X$  l'ensemble des  $2g$  géodésiques qui coïncident avec la réunion de deux segments  $t$  lorsque le twist est nul. Une telle géodésique a pour demi-longueur :

$$\cosh \frac{x}{2} = \cosh \frac{t}{2} \cdot \cosh l$$

Soit  $x \in X$ , et soit  $y \in Y$  intersectée par  $x$ , il existe une unique plus petite géodésique simple  $z$  telle que  $x, y, z$  soient contenues dans une sous-surface de signature  $(1, 1)$ , et telle qu'en outre  $z$  intersecte  $x$  (resp.  $y$ ) une seule fois. On note  $X'$  l'ensemble de ces géodésiques, et  $x'$  leur demi-longueur, qui vaut :

$$\cosh x' = \cosh t \cdot \cosh(y - l) \cdot \cosh l - \sinh(y - l) \cdot \sinh l$$

Soit  $x \in X$  intersectant  $y'$ , il existe une unique plus petite géodésique simple  $z$  telle que  $x, y', z$  soient contenues dans une sous-surface de signature  $(1, 1)$ , et telle qu'en outre  $z$  intersecte  $x$  (resp.  $y'$ ) une seule fois. On note  $X''$  l'ensemble de ces géodésiques, et  $x''$  leur demi-longueur, qui vaut :

$$\cosh x'' = \cosh t \cdot \cosh(y' - l) \cdot \cosh l - \sinh(y' - l) \cdot \sinh l$$

Pour chaque famille de géodésiques, on donne ci-contre le nombre de géodésiques contenues dans cette famille.

On va montrer que la surface caractérisée, à isométrie près, par  $y = x = x'$  est parfaite quel que soit le genre  $g > 2$ .

famille	# famille
$Y'$	1
$Y, X''$	$g$
$X$	$2g$
$X'$	$3g$

**Remarque 5.** En fait le cas  $g = 3$  est particulier, et on l'exclura donc de la discussion qui suit. En effet, si  $g = 3$ , on retrouve sur une surface déjà connue, notée  $T(x|y)$  par P. Schmutz Schaller (cf. [Sc1]) : le calcul permet d'affirmer que cette surface contient 22 systoles de demi-longueur :

$$y = y' = x = x' = x'' \simeq 1,963546301.$$

Cette surface est non seulement parfaite, mais encore extrême.

Montrons à présent le résultat suivant :

**Théorème 7.** *Soit  $g > 3$ . Il existe une unique surface, notée  $B_g$ , caractérisée, à isométrie près, par  $y = x = x'$ . Cette surface est parfaite et non eutactique. Son ensemble de systoles est exactement  $Y \cup X \cup X'$ , et contient donc  $6g$  systoles.*

*Preuve* • La condition  $y = x = x'$  est équivalente au système :

$$\begin{cases} \cosh t = \frac{(3 \cosh y + 1) \cosh y}{(\cosh y + 1)^2} \\ \tanh l = \frac{(-1 + \cosh y)}{(1 + \cosh y)} \coth y \end{cases} \quad (5.1)$$

On remarque que, à  $g$  fixé, la fonction  $(3 \cosh y + 1) \cosh y / (\cosh y + 1)^2$  est strictement croissante par rapport à  $y$ ; par ailleurs  $y_1$  et  $y_2$  sont des fonctions strictement décroissantes de  $t$ , donc  $y$  est une fonction de  $t$  strictement décroissante, donc  $t$  est une fonction de  $y$  strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe une unique solution en  $y$  à la première équation du système 5.1. En outre, la fonction  $\coth(y)(-1 + \cosh y) / (1 + \cosh y)$  est strictement croissante par rapport à  $y$ , donc  $l$  est déterminé de manière unique par la deuxième équation du système 5.1.

On en déduit qu'il existe un unique couple  $(l, y)$  correspondant (pour un genre donné  $g$ ) aux conditions  $y = x = x'$ . D'où l'unicité de  $B_g$ .

• Montrons que  $F = Y \cup X \cup X'$  est l'ensemble des systoles de  $B_g$ . On note  $s$  la longueur de la perpendiculaire commune (entre deux géodésiques  $y$ ), qui soit la plus courte parmi celles qui ne valent pas  $t$ ; un calcul immédiat donne  $\cosh s = \cosh^2 t \cdot \cosh y_1 - \cosh^2 t$ . Le tableau 5.1 donne une estimation des diverses longueurs en fonction du genre. En étudiant les suites  $(y_g)_{g>4}$  et  $(t_g)_{g>4}$ , on remarque qu'elles sont strictement croissantes et qu'elles tendent vers les valeurs limites reportées dans la dernière colonne du tableau 5.1. En

$g$	3	4	5	6	$+\infty$
$x = x' = y$	1,963546	2,105192	2,168463	2,202235	2,277469
$x''$	1,963546	2,463039	3,018964	3,601196	$+\infty$
$y'$	1,963546	2,518569	3,099004	3,689017	$+\infty$
$t$	1,324921	1,376618	1,397931	1,408875	1,432212
$s$	1,324921	2,335152	2,667805	2,830168	3,379919
$l$	0,679361	0,743508	0,772511	0,788072	0,822923
$2y/t$	2,96	3,06	3,10	3,13	3,18

TAB. 5.1 – Longueurs des géodésiques en fonction de  $g$

outre, on se convainc assez facilement que  $E(2y/t) \leq 3$ .

Soit  $a$  une systole de  $B_g$ . Alors le nombre  $N(a)$  d'intersections de  $a$  avec  $Y$  vaut au plus  $E(2y/t) = 3$ . Donc  $N(a) \leq 2$ . Les valeurs données dans le tableau 5.1 permettent de conclure.

• Montrons que  $B_g$  est parfaite. Pour cela on reprend le raisonnement utilisé par P. Schmutz Schaller dans [Sc1, Prop.7.2] : on montre que  $F$  est paramétrisante, ce qui entraînera la perfection de  $B_g$ . On rappelle à ce propos qu'un ensemble fini  $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  de  $n$  géodésiques est dit paramétrisant si l'application suivante est un plongement :

$$h_F : \begin{cases} \mathcal{T}_g & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \Sigma & \longmapsto & (l_{a_1}(\Sigma), \dots, l_{a_n}(\Sigma)) \end{cases}$$

On montre ici que  $F = Y \cup X \cup X'$  est paramétrisante. L'ensemble  $X$  réalise une partition de  $B_g$  en  $2g$  hexagones et 2 polygones à  $2g$  côtés (isométriques l'un de l'autre) ; cette partition induit une partition de chaque géodésique de  $Y \cup Y'$  en segments. Leurs longueurs et leurs angles orientés formés avec les géodésiques de  $X$ , sont entièrement déterminés par  $F$  (évidemment le fait qu'autour d'une géodésique de  $Y \cup Y'$ , il y ait au plus une face non-triangulaire -sur chaque feuillet- est un point crucial ici). Il s'ensuit que les hexagones de la partition de  $B_g$  sont entièrement déterminés par  $F$ .

Soit à présent  $M$  une des deux faces polygonales à  $2g$  côtés ; soient  $x_1$  et  $x_2$  deux géodésiques de  $X$ , bordant  $M$  et qui soient voisines (i.e. elles intersectent la même géodésique  $y \in Y$ ). Soit  $z$  une géodésique intérieure à  $M$  telle que  $x_1, x_2, z$  bordent un pantalon  $N$  (i.e.  $z$  est homotope à deux segments  $s$ ). Alors  $N$  est déterminée par  $x_1, x_2$  et la longueur du segment de  $y$  contenu dans  $N$ . Soient  $y_1, y_2 \in Y$  les deux autres géodésiques intersectées par  $N$ . Les longueurs et les angles des segments  $y_i \cap N$ ,  $i = 1, 2$  sont déterminés, ainsi que les angles formés avec  $z$ . On réitère le raisonnement avec  $M \setminus N$ , et il en découle que  $M$  est déterminée par  $F$ .

$F$  est donc paramétrisante ; en particulier  $h_F$  est une immersion en  $B_g$  (cf. [Sc3] et [Sc4]), donc  $B_g$  est parfaite.

• Pour étudier l'eutaxie relative, on commence par donner la matrice intersection des systoles prises dans l'ordre  $Y \cup X \cup X'$ . On pose

$$\begin{aligned} a &= \cos \alpha = \frac{\cosh y}{\cosh y + 1} \\ c &= \cos 2\alpha = 2a^2 - 1 \\ e &= \sin^2 \alpha \cdot \cosh(y - y_1) - \cos^2 \alpha \\ f &= \sin^2 \alpha \cdot \cosh(y - y_2) - \cos^2 \alpha \\ h &= \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cosh(y - y_1) - \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \\ k &= \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cosh(y - y_2) - \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \end{aligned}$$

Soit  $\Omega$  la matrice intersection :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1,2} & \Omega_{1,3} & \Omega_{1,4} & \Omega_{1,5} & -\Omega_{1,3} \\ -{}^t\Omega_{1,2} & 0 & 0 & \Omega_{2,4} & \Omega_{2,5} & \Omega_{2,6} \\ -\Omega_{1,3} & 0 & 0 & \Omega_{3,4} & \Omega_{3,5} & \Omega_{1,3} \\ -{}^t\Omega_{1,4} & -{}^t\Omega_{2,4} & -{}^t\Omega_{3,4} & \Omega_{4,4} & 0 & \Omega_{4,6} \\ -{}^t\Omega_{1,5} & -{}^t\Omega_{2,5} & -{}^t\Omega_{3,5} & 0 & -\Omega_{4,4} & \Omega_{5,6} \\ \Omega_{1,3} & -{}^t\Omega_{2,6} & -{}^t\Omega_{3,6} & -{}^t\Omega_{4,6} & -{}^t\Omega_{5,6} & 0 \end{pmatrix}$$

où les blocs  $\Omega_{i,j}$  sont des matrices carrées circulantes d'ordre  $g$  ; plus précisément

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} &= C(a, 0, 0, \dots, 0, a) & , & \quad \Omega_{1,3} = C(a, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \Omega_{1,4} &= C(c, 0, 0, \dots, 0, -a) & , & \quad \Omega_{1,5} = C(-a, 0, 0, \dots, 0, c) \\ \Omega_{2,4} &= C(a, 0, 0, \dots, 0, e) & , & \quad \Omega_{2,5} = C(a, e, 0, 0, \dots, 0) \\ \Omega_{2,6} &= C(f, f, 0, 0, \dots, 0) & , & \quad \Omega_{3,5} = C(f, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ \Omega_{4,4} &= C(0, -h, 0, 0, \dots, h) & , & \quad \Omega_{4,6} = C(k, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ \Omega_{6,5} &= C(0, k, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

où  $C(\omega_1, \dots, \omega_g)$  désigne la matrice circulante suivante :

$$C(\omega_1, \dots, \omega_g) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_g \\ \omega_g & \omega_1 & \dots & \omega_{g-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_1 \end{pmatrix}$$

(On aurait pu essayer de montrer que  $\det(\Omega') \neq 0$  où  $\Omega'$  est la matrice extraite de  $\Omega$  en supprimant les 6 colonnes et les 6 lignes numérotées  $g.(n+1)$  avec  $n = 0, 1, \dots, 5$ . Ceci impliquerait  $\text{rang}(\Omega) = 6g - 6$ , et fournirait une autre preuve du fait que la surface soit parfaite.)

• Enfin, montrons que  $B_g$  n'est pas strictement eutactique. Par un argument d'eutaxie relative (cf. [Ba3] §1.4), il suffit d'affecter du même coefficient toutes les colonnes correspondantes au géodésiques d'une même famille. De fait, si on pondère les colonnes (regroupées par quatre) par les coefficients  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6$ , on obtient les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1/\lambda_2 = \frac{a^2+ae-2f^2}{a(k-f+a-c)} > 0 \\ \lambda_3/\lambda_2 = \frac{a^2+ae+2fc-2fa-2ak}{a(k-f+a-c)} < 0 \\ \lambda_4/\lambda_2 = \frac{a-f}{k-f+a-c} > 0 \\ \lambda_6/\lambda_2 = \frac{a+e-2f}{k-f+a-c} > 0 \end{cases}$$

# Chapitre 6

## Une méthode algébrique

### 6.1 Méthode

Soit  $p \in \mathcal{T}_g$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Soit  $\Gamma_p$  le groupe d'automorphismes de  $p$ . Alors,  $\Gamma_p$  agit sur l'espace tangent  $T_p(\mathcal{T}_g)$ . On rappelle le résultat suivant, montré par Christophe Bavard (cf. [Ba1]) :

**Proposition 1.** *Si l'action de  $\Gamma_p$  sur  $T_p(\mathcal{T}_g)$  est irréductible, alors  $p$  est parfait et eutactique, donc strictement extrême.*

Dans ce chapitre, on se propose de redémontrer l'extrémalité de la surface de Bolza et de la surface de Klein par une méthode purement algébrique. On procède de la manière suivante :

1. On déduit de l'équation algébrique de la surface une base de différentielles abéliennes.
2. On calcule l'action du groupe d'automorphismes de la surface sur la base de différentielles abéliennes.
3. A partir de la base des différentielles abéliennes, on construit une base de différentielles quadratiques de la surface (cf. [F-K]), et on détermine l'action du groupe d'automorphismes sur cette base : c'est une représentation (notée  $\chi$  dans la suite) du groupe d'automorphismes dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $3g - 3$ .
4. On calcule alors le caractère de la représentation. Si cette représentation est irréductible, on conclut l'extrémalité de la surface à l'aide de la proposition rappelée ci-dessus.



## 6.2 Surface de Bolza

On rappelle l'équation de la surface de Bolza :

$$y^2 = x - x^5.$$

Le groupe d'automorphismes  $G$  est engendré par les deux automorphismes suivants :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = \left( \frac{x-1}{x+1}, i \frac{2\sqrt{2}y}{(x+1)^3} \right) \\ \psi(x, y) = \left( \frac{x-i}{ix-1}, \frac{2\sqrt{2}y}{(ix-1)^3} \right) \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$$\phi^8 = \psi^2 = (\phi\psi)^3 = 1.$$

On peut choisir comme base de différentielles abéliennes les deux différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{dx}{y} \\ \omega_1 = \frac{x dx}{y} \end{cases}$$

L'action du groupe d'automorphismes sur cette base s'écrit de la sorte :

$$\begin{cases} \phi^* \omega_0 = -\frac{i\sqrt{2}}{2}(\omega_0 + \omega_1) \\ \phi^* \omega_1 = -\frac{i\sqrt{2}}{2}(-\omega_0 + \omega_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi^* \omega_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-\omega_0 + i\omega_1) \\ \psi^* \omega_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-i\omega_0 + \omega_1) \end{cases}$$

On construit à présent une base de différentielles quadratiques :

$$\{\theta_1 = \omega_0^2; \theta_2 = \omega_0\omega_1; \theta_3 = \omega_1^2\}$$

Et l'action du groupe d'automorphismes sur cette base devient :

$$\begin{cases} \phi^* \theta_1 = -\frac{1}{2}(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3) \\ \phi^* \theta_2 = -\frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_1) \\ \phi^* \theta_3 = -\frac{1}{2}(\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi^* \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 - 2i\theta_2 - \theta_3) \\ \psi^* \theta_2 = \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_3) \\ \psi^* \theta_3 = -\frac{1}{2}(\theta_1 + 2i\theta_2 - \theta_3) \end{cases}$$

Donc la représentation du groupe d'automorphismes est engendré par les deux matrices suivantes :

$$Mat(\phi; \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Mat(\psi; \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2i & -1 \\ i & 0 & i \\ -1 & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le caractère de la représentation :

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} |tr(g)|^2 = \frac{24}{24} = 1.$$

Conclusion : *la surface de Bolza est extrême.*

## 6.3 Surface de Klein

On rappelle l'équation de la surface de Klein dans  $\mathbb{P}^2$  :

$$F(x, y, z) = x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Le groupe d'automorphismes  $G_K$  est engendré par les deux automorphismes suivants :

$$S = \begin{pmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^4 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

où  $\zeta = \exp(2i\pi/7)$ , et  $a = \frac{\zeta^2 - \zeta^{-2}}{i\sqrt{7}}$ ,  $b = \frac{\zeta^4 - \zeta^{-4}}{i\sqrt{7}}$ ,  $c = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{i\sqrt{7}}$ .

On a les relations suivantes :

$$S^7 = T^2 = (ST)^3 = 1.$$

Si on introduit l'automorphisme  $P$  défini par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors on peut donner la description de  $G_K$  suivante (cf. [Ri2]) :

$$G_K = \{P^j S^k, S^l T P^j S^k \mid j, k, l \in \mathbb{N}; 0 \leq j \leq 2; 0 \leq k, l \leq 6\}.$$

On peut choisir comme base de différentielles abéliennes les trois différentielles suivantes  $\{x\Omega, y\Omega, z\Omega\}$  où :

$$\Omega = \frac{xdy - ydx}{y^3 + 3z^2x} = \frac{xdy - ydx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{zdx - xdz}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{ydz - zdy}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

On remarque que  $G_K$  agit sur  $\Omega$  de la manière suivante :

$$S^*\Omega = \Omega \text{ et } T^*\Omega = -\Omega \text{ et } P^*\Omega = \Omega.$$

L'action du groupe d'automorphismes sur la base de différentielles abéliennes s'en déduit trivialement.

On construit à présent une base de différentielles quadratiques :

$$\begin{cases} \phi_1 = x^2\Omega^2, & \phi_2 = xy\Omega^2, & \phi_3 = y^2\Omega^2 \\ \phi_4 = xz\Omega^2, & \phi_5 = yz\Omega^2, & \phi_6 = z^2\Omega^2 \end{cases}$$

Après calcul de l'action du groupe d'automorphismes sur cette base, on en déduit que la représentation du groupe d'automorphismes est engendré par les deux matrices suivantes :

$$Mat(S; \phi) = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta^4 \end{pmatrix}$$

$$Mat(T; \phi) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 & ac & bc & c^2 \\ 2ab & ac + b^2 & 2bc & bc + a^2 & ab + c^2 & 2ac \\ b^2 & bc & c^2 & ab & ac & a^2 \\ 2ac & bc + a^2 & 2ab & ab + c^2 & ac + b^2 & 2bc \\ 2bc & ab + c^2 & 2ac & ac + b^2 & bc + a^2 & 2ab \\ c^2 & ac & a^2 & bc & ab & b^2 \end{pmatrix}$$

En outre,

$$\text{Mat}(P; \phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le caractère de la représentation :

$$(\chi, \chi) = \frac{1}{\#G_K} \sum_{g \in G_K} |\text{tr}(g)|^2 = \frac{168}{168} = 1.$$

Conclusion : *la surface de Klein est extrême.*

## 6.4 Considérations sur la méthode algébrique

La méthode exposée ici peut paraître certes alléchante puisque relativement aisée à mettre en œuvre. Toutefois deux inconvénients non négligeables ne manquent pas de se présenter :

- D'une part la condition d'irréductibilité est suffisante mais non nécessaire pour conclure quant à l'extrémalité de la surface. Par exemple, dans le cas de la courbe de Wiman exceptionnelle (encore appelée surface de Picard et notée  $M(3)$  par P. Schmutz Schaller dans [Sc1]) qui est extrême, on trouve  $(\chi, \chi) = 3$ . Dans le cas de la famille  $C_{(\alpha, \beta)}$  étudiée au chapitre 1 et qui contient deux surfaces extrêmes, on trouve :

$$(\chi, \chi) = \begin{cases} 4 & \text{si } (\alpha, \beta) \neq (1, \pm 1) \\ 3 & \text{si } (\alpha, \beta) = (1, \pm 1) \end{cases}$$

- D'autre part, pour pouvoir espérer tomber sur une action irréductible, le groupe d'automorphisme  $\text{Aut}(X_g)$  devra nécessairement être très gros. En effet, si  $(\chi, \chi) = 1$ , alors

$$1 \geq \frac{|\chi(\text{Id})|^2}{\#\text{Aut}(X_g)} = \frac{(3g-3)^2}{\#\text{Aut}(X_g)},$$

autrement dit, on doit avoir en genre  $g$ ,

$$\#\text{Aut}(X_g) \geq (3g-3)^2.$$

Comme par ailleurs, la borne d'Hurwitz donne

$$\#Aut(X_g) \leq 84(g-1),$$

cette méthode n'a de chance d'aboutir que si

$$g \leq 10.$$

Enfin, on aurait pu espérer appliquer cette méthode à la surface de Macbeath de genre 7 (cf. [MB]) en cherchant à savoir si la représentation du groupe d'automorphismes dans l'espace des différentielles quadratiques de dimension  $3g - 3 = 18$  était irréductible ou non : en fait, la réponse est négative puisque l'examen de l'atlas des groupes nous révèle que  $PSL(2, 7)$  admet des représentations irréductibles de dimension au plus 9.

# Bibliographie

- [Ak] H.AKROUT, *Singularités topologiques des systoles généralisées*, Prépublication de l'Université Bordeaux-I, (Avril 2000).
- [Ba1] CH.BAVARD, *Systole et invariant d'Hermite*, J. reine angew. Math., **482**(1997), 93-120.
- [Ba2] CH.BAVARD, *La systole des surfaces hyperelliptiques*, Prépublication de l'E.N.S. Lyon, **71**(1992).
- [Ba3] CH.BAVARD, *Familles hyperboliques de réseaux symplectiques*, Prépublication de l'Université Bordeaux-I, **59**(1997).
- [Ba4] CH.BAVARD, *Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues*, Prépublication.
- [B-L] CH.BIRKENHAKE, H.LANGE, *A family of abelian surfaces and curves of genus four*, Manuscr.Math., **85**(1994), 393-407.
- [Bo] O.V.BOGOPOL'SKIÏ, *Classifying the actions of finite groups on orientable surfaces of genus 4*, Siberian Advances in Math., **7**(1997) n°4, 9-38.
- [Bu] P.BUSER, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Math. n°106, Birkhäuser Verlag (1992).
- [B-S] P.BUSER, P.SARNAK, *On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J.H.Conway and N.J.A.Sloane)*, Invent. Math., **117**(1994), 27-56.
- [F-K] H.M.FARKAS, I.KRA, *Riemann Surfaces*, GTM 71, Springer Verlag, Berlin New-York, 1980.
- [Ha] U.HAMENSTÄDT, *New examples of maximal surfaces*, Preprint.
- [I-T] Y.IMAYOSHI, M.TANIGUSHI, *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer Verlag, Berlin New-York, 1992.
- [Je] F.W.JENNY, *Ueber den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf einer Schar kompakter Riemannscher Fläschen*, Comment. Math. Helvetici, **59**(1984), 193-203.

- [Ku1] I.KURIBAYASHI, A.KURIBAYASHI, *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera three or four*, J. Pure and Applied Algebra, **65**(1990), 277-292.
- [Ku2] I.KURIBAYASHI, A.KURIBAYASHI, *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genera five*, J. of Algebra, **134**(1990), 80-103.
- [MB] A.M.MACBEATH, *On a curve of genus 7*, Proc. London Math. Soc., **15**(1965) n°3, 527-542.
- [Mu] D.MUMFORD *A remark on Mahler's compactness theorem*, Proc. of the A.M.S., **28**(1971) n°1, 289-294.
- [Ri1] G.RIERA, *Automorphisms of abelian varieties associated with Klein surfaces*, J.London Math. Soc., **51**(1995), 442-452.
- [Ri2] G.RIERA, *Deformations of Klein's curve and representations of its group of 168 automorphisms*, Complex Variables, **6**(1986), 265-281.
- [R-R] G.RIERA, R.E.RODRÌGUEZ *The period matrix of Bring's curve*, Pacific J. of Math., **154**(1992) n°1, 179-200.
- [Sc1] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*, Geometric and Functional Analysis GAFA, **3**(1993), 564-631.
- [Sc2] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Systoles on Riemann surfaces*, Manuscr. Math., **85**(1994), 429-447.
- [Sc3] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen*, Comment. Math. Helvetici, **68**(1993), 278-288.
- [Sc4] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Une paramétrisation de l'espace de Teichmüller de genre  $g$  donnée par  $6g - 5$  géodésiques explicites*, Séminaire de géométrie spectrale et géométrie, Chambéry-Grenoble (1991-1992), 59-64.
- [Sc5] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces*, The Journal for Geometric Analysis, **4**(1994), 207-218.
- [Sc6] P.SCHMUTZ SCHALLER, *Perfect non-extremal Riemann surfaces*, Canad. Math. Bull., **43**(2000) n°1, 115-125.
- [Wo] S. WOLPERT, *On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface*, Ann. of Math., **117**(1983), 207-234.