



**HAL**  
open science

# Schema volumes finis : Estimation d'erreur a posteriori hierarchique par elements finis mixtes. Resolution de problemes d'elasticite non-linearie

Hicham Souhail

► **To cite this version:**

Hicham Souhail. Schema volumes finis : Estimation d'erreur a posteriori hierarchique par elements finis mixtes. Resolution de problemes d'elasticite non-linearie. Mathématiques [math]. Ecole Centrale de Lyon, 2004. Français. NNT : . tel-00005418

**HAL Id: tel-00005418**

**<https://theses.hal.science/tel-00005418>**

Submitted on 22 Mar 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée à

**L'ECOLE CENTRALE de LYON**

pour l'obtention du

**DIPLOME DE DOCTORAT**

par

**Hicham SOUHAIL**

---

**Schémas volumes finis :  
Estimation d'erreur a posteriori hiérarchique par  
éléments finis mixtes. Résolution de problèmes  
d'élasticité non-linéaire.**

---

Soutenue devant le jury composé de :

J.P. CROISILLE	Professeur à l'Université de Metz	Rapporteur
F. DUBOIS	Professeur au CNAM de Paris	Rapporteur
J.F. MAITRE	Professeur émérite à l'Ecole Centrale de Lyon	Directeur
M. MOUSSAOUI	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon	Examineur
A. REZGUI	Ingénieur -MFP MICHELIN- Clermont-Ferrand	Examineur
A.M. ZINE	Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lyon	Directeur
F. SIDOROFF	Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon	Examineur (invité)

FORMATION DOCTORALE EN ANALYSE NUMERIQUE,  
EQUATIONS AUX DERIVES PARTIELLES ET CALCUL  
SCIENTIFIQUE  
Ecole Doctorale MathIf

# Remerciements

Je suis heureux de pouvoir adresser mes remerciements à Messieurs le Professeur J.F. Maitre et A.M. Zine, directeurs de cette thèse, pour leur grande disponibilité, leurs conseils judicieux et leur soutien technique et moral tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur le professeur J.P. Croisille et Monsieur le Professeur F. Dubois qui se sont intéressés à ce travail, y ont apporté leurs remarques fructueuses et ont accepté d'être rapporteurs et membres du jury.

Je tiens également à remercier la société Michelin pour avoir financé ma thèse et leur représentant Monsieur A. Rezgui pour sa grande disponibilité, pour ses remarques fructueuses, son soutien moral; et le fait qu'il fasse partie de mon jury me fait un grand honneur. Je remercie également Monsieur J.M. Vacherand pour sa collaboration et ses remarques.

Je voudrais aussi adresser mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur M. Moussaoui pour sa grande disponibilité, son soutien, ses précieux conseils et de sa participation en tant que membre du jury.

Je remercie Monsieur le Professeur F. Sidoroff pour sa grande disponibilité, ses remarques sur la théorie de la mécanique des milieux continus et je le remercie aussi d'avoir accepté d'être membre de mon jury de thèse.

Je salue l'ensemble des membres du Département de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Centrale de Lyon, en particulier Madame F. Chatelin que je remercie pour son soutien moral, Mademoiselle E. Rouy pour ses conseils et ses remarques et mon ami H. Timouyas et collègue de bureau.

Je remercie mes parents, mon épouse, mes frères qui m'ont encouragé tout au long de ma thèse.

Je remercie également le reste de ma famille et mes amis qui n'ont pas hésité à prendre de leur temps pour m'aider dans les moments les plus difficiles.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui, à titres divers, ont contribué au bon déroulement de ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique.</b>	<b>14</b>
<b>1 Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique par les éléments finis mixtes.</b>	
<b>Application aux schémas volumes finis.</b>	<b>15</b>
1.1 Introduction.	16
1.2 Estimation hiérarchique : présentation dans un cadre abstrait du principe et des résultats fondamentaux	17
1.2.1 Cadre abstrait	17
1.2.2 Estimation a priori	17
1.2.3 Estimation d'erreur a posteriori hiérarchique	18
1.2.4 Application au cas des éléments finis mixtes	19
1.3 Schémas volumes finis et éléments finis mixtes	23
1.3.1 Problème modèle	23
1.3.2 Schéma volumes finis	23
1.4 Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique en formulation mixte	24
1.4.1 Discrétisation du problème modèle	24
1.4.2 Décomposition hiérarchique des espaces de discrétisation	26
1.4.3 L'estimateur : le problème à résoudre	27
1.4.4 Les fonctions de base des espaces de discrétisation	28
1.5 Construction de l'estimateur. Application aux schémas volumes finis	32
1.5.1 Calcul de l'estimateur par découplage	32
1.5.2 Détermination de l'estimateur	33
1.6 Comparaison erreur-estimateur et erreur de consistance	34
1.6.1 Encadrement de l'erreur	34
1.6.2 Estimation et localisation de l'erreur de consistance dans le cas triangulaire :	35
1.6.3 Estimation de l'erreur de consistance dans le cas rectangulaire	36
1.7 Calcul de la composante dans $\widehat{RT}_{1,h}^0$ ("rotationnel des bulles") de l'estimateur.	37
1.7.1 Solution approchée du système. Contribution à l'estimateur	37
1.7.2 Expression du second membre $b$ en fonction de $p_h$	38
1.7.3 Calcul pour le cas triangulaire	38
1.7.4 Calcul pour le cas rectangulaire	40

1.8	Calcul d'une expression approchée de la composante dans $\widehat{RT}_{1,h}^1$ (problèmes locaux) . . . . .	41
1.8.1	Cas triangulaire . . . . .	41
1.8.2	Cas rectangulaire . . . . .	43
1.9	Expression utilisable de l'estimateur avec prise en compte de l'erreur de consistance . . . . .	45
1.10	Retour sur la comparaison erreur-estimateur . . . . .	49
1.11	Essais numériques . . . . .	50
1.11.1	1 <sup>er</sup> Cas : $\ f - f_h\ _0$ dominant . . . . .	50
1.11.2	2 <sup>eme</sup> Cas : $\ f - f_h\ _0 = 0$ . . . . .	56
<b>Bibliographie 1</b>		<b>57</b>

## II Schémas volumes finis d'ordre élevé. 59

<b>2</b>	<b>Schémas volumes finis d'ordre élevé sur un domaine rectangulaire.</b>	<b>60</b>
2.1	Introduction . . . . .	61
2.1.1	Description du schéma volumes finis : . . . . .	61
2.2	Un schéma volumes finis d'ordre élevé . . . . .	63
2.2.1	Application au problème modèle . . . . .	64
2.3	Analyse du schéma . . . . .	66
2.3.1	Convergence du schéma et estimations d'erreur . . . . .	67
2.3.2	Etude de la consistance . . . . .	68
2.3.3	Validation numérique . . . . .	72
2.4	Application au problème de l'élasticité linéaire . . . . .	74
2.4.1	Présentation du problème . . . . .	74
2.4.2	Etude de la consistance . . . . .	76
2.4.3	Validation numérique . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Généralisation des schémas à un domaine quelconque.</b>	<b>81</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	82
3.1.1	Consistance . . . . .	85
3.2	Application du schéma volumes finis à un domaine avec fissure finie . . . . .	87
3.2.1	Essais numériques ( $k = 0, k = 2$ ) . . . . .	89
3.2.2	Comparaison avec un schéma volumes éléments finis . . . . .	95

<b>Bibliographie 2</b>		<b>96</b>
------------------------	--	-----------

## III Application à la résolution d'un problème d'élasticité non-linéaire. 98

<b>4</b>	<b>Introduction à la théorie de la mécanique des milieux continus en grandes déformations.</b>	<b>99</b>
4.1	Introduction . . . . .	100
4.2	Notions sur les grandes déformations . . . . .	100
4.2.1	Description Lagrangienne . . . . .	100

4.2.2	Description Eulérienne . . . . .	101
4.2.3	Déformation de grandeurs élémentaires . . . . .	101
4.3	Les tenseurs des déformations . . . . .	102
4.3.1	Tenseur de Cauchy-Green droit . . . . .	102
4.3.2	Tenseur des déformations de Green-Lagrange . . . . .	102
4.3.3	Tenseur de Cauchy-Green gauche . . . . .	103
4.3.4	Le cas des petites déformations infinitésimales . . . . .	104
4.4	Les tenseurs des contraintes . . . . .	105
4.4.1	Formulation eulérienne . . . . .	105
4.4.2	Formulation mixte . . . . .	105
4.4.3	Formulation lagrangienne . . . . .	105
4.4.4	Les relations entre les tenseurs des contraintes . . . . .	106
4.5	Comportement hyperélastique compressible . . . . .	107
4.5.1	Equation d'équilibre . . . . .	107
4.5.2	Matériau compressible . . . . .	107
4.5.3	Exemples des densités d'énergie dans le cas compressible . . . . .	108
4.6	Comportement hyperélastique isotrope incompressible . . . . .	109
4.6.1	Matériau incompressible . . . . .	109
4.6.2	Exemples des densités d'énergie dans le cas incompressible . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Application du schéma volumes finis à la résolution d'un problème d'élasticité non-linéaire.</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	112
5.2	Rappel du problème physique : . . . . .	112
5.3	Schémas volumes finis . . . . .	113
5.3.1	Résolution du problème non linéaire : . . . . .	114
5.3.2	Evaluation du tenseur des contraintes . . . . .	115
5.4	Essais numériques (domaine rectangulaire) : . . . . .	115
5.4.1	Estimation numérique de l'erreur : . . . . .	115
5.4.2	Simulations en traction et en compression d'un bloc de gomme : . . . . .	117
5.5	Essais numériques (domaine avec fissure) : . . . . .	120
5.5.1	Essais en Mode 1 . . . . .	122
5.5.2	Essais en Mode 2 . . . . .	124
5.6	Matériau quasi-incompressible . . . . .	126
5.6.1	Localisation du maximum des contraintes et endommagement . . . . .	127
	<b>Bibliographie 3</b>	<b>136</b>
	<b>Annexe 1</b>	<b>138</b>
1.1	Approximation des valeurs propres de la matrice $D_A^{-1}A$ . . . . .	138
1.1.1	Cas d'un maillage triangulaire . . . . .	138
1.1.2	Cas d'un maillage rectangulaire . . . . .	139
	<b>Annexe 2</b>	<b>141</b>
2.1	Calcul des matrices utilisées pour la résolution du problème local. . . . .	141
2.1.1	Cas d'un maillage triangulaire . . . . .	141
2.1.2	Cas d'un maillage rectangulaire . . . . .	142

<b>Annexe 3</b>	<b>144</b>
3.1 Déformations planes. . . . .	144
3.2 Le passage de la dimension 3 à la dimension 2 pour la loi de Saint-Venant-Kirchhoff . . . . .	145
<b>Bibliographie</b>	<b>146</b>

# Table des figures

1.1	Schéma volumes finis. . . . .	23
1.2	Schéma volumes finis : interface entre deux volumes de contrôle. . . . .	24
1.3	Décomposition de $RT_1(K)$ (les degrés de liberté). . . . .	29
1.4	Distribution des fonctions de base de l'espace $\widehat{RT}_1^0(K)$ pour deux éléments. . . . .	30
1.5	Décomposition de l'espace $P_1(K)$ . . . . .	30
1.6	Décomposition de l'espace $RT_1(K)$ . . . . .	31
1.7	Numérotation des faces du rectangle $K$ . . . . .	31
1.8	Décomposition de l'espace $P_{1,1}(K)$ en $P_0(K)$ et $\widehat{P}_1(K)$ . . . . .	32
1.9	Schéma qui explique le calcul de $r_1(\text{rot } \psi_e)$ . . . . .	39
1.10	Numérotation des éléments voisins et orientation des flux. . . . .	40
1.11	Numérotation des faces du rectangle $K$ . . . . .	43
1.12	Isovaleur de $\eta_{f,K}^2$ pour $h = 1/168$ . . . . .	53
1.13	Isovaleur de l'estimateur local sans le terme $\eta_{f,K}^2$ pour $h = 1/168$ . . . . .	53
1.14	Isovaleur de l'estimateur local pour $h = 1/168$ . . . . .	54
1.15	Isovaleur de l'erreur de consistance pour $h = 1/168$ . . . . .	54
1.16	Isovaleur de l'estimateur local sans la consistance pour $h = 1/168$ . . . . .	55
2.1	Une cellule $w$ du maillage rectangulaire. . . . .	62
2.2	Enrichissement de l'interpolation. . . . .	63
2.3	Une cellule $w$ du maillage rectangulaire. . . . .	65
2.4	La comparaison des cas $k = 0$ , $k = 2$ , $k = 4$ et $k = 6$ . . . . .	74
2.5	Découpage des faces. . . . .	75
3.1	Transformation de la cellule $\widehat{w}$ en $w$ . . . . .	83
3.2	Les domaines de référence et physique. . . . .	87
3.3	Les deux géométries. . . . .	90
3.4	Le maillage adapté. . . . .	90
3.5	La deuxième géométrie. . . . .	93
3.6	Transformation locale. . . . .	95
4.1	Passage de la configuration initiale à la configuration déformée. . . . .	101
5.1	La géométrie en traction et en compression. . . . .	117
5.2	Domaine initial et déformé pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	118
5.3	Déplacement vertical suivant la coupe $x = 1/2$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	118
5.4	Déplacement horizontal suivant la coupe $y = 1/2$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	118



5.5	T12 Contrainte de Cisaillement du tenseur de Cauchy suivant la coupe $y = x$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	119
5.6	Domaine initial et déformé pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	119
5.7	Déplacement vertical suivant la coupe $x = 1/2$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	119
5.8	Déplacement horizontal suivant la coupe $y = 1/2$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	120
5.9	T12 Contrainte de Cisaillement du tenseur de Cauchy suivant la coupe $y = x$ pour $(k = 0, h = 1/64)$ et $(k = 2, h = 1/10)$ . . . . .	120
5.10	Domaine étudié. . . . .	122
5.11	Le maillage initial et après déformation. . . . .	122
5.12	Déplacements : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord supérieur de la fissure). . . . .	123
5.13	Composantes du tenseur de Cauchy : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord supérieur de la fissure). . . . .	123
5.14	Composante $T_{22}$ : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord supérieur de la fissure) . . . . .	124
5.15	Le maillage initial et après déformation. . . . .	124
5.16	Déplacements et composante $\Pi_{11}$ : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord inférieur de la fissure). . . . .	125
5.17	Composante $T_{11}$ : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord inférieur de la fissure). . . . .	125
5.18	Composantes $T_{12}$ et $T_{22}$ : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord inférieur de la fissure). . . . .	126
5.19	Le maillage initial et après déformation. . . . .	126
5.20	Composantes de $T$ : Coupe suivant $y = 0.02$ (bord supérieur de la fissure). . . . .	127
5.21	L'évolution du maximum des composantes $\mathbf{T}_{11}$ , $\mathbf{T}_{12}$ et $\mathbf{T}_{22}$ en fonction de la traction imposée. . . . .	128
5.22	L'évolution du maximum des composantes $\mathbf{T}_{11}$ , $\mathbf{T}_{12}$ et $\mathbf{T}_{22}$ en fonction du cisaillement imposé. . . . .	129
5.23	Isovaleur de $\lambda$ : 5 <sup>ième</sup> itération. . . . .	131
5.24	Isovaleur de $\lambda$ : 11 <sup>ième</sup> itération. . . . .	132
5.25	Isovaleur de $\lambda$ : 30 <sup>ième</sup> itération. . . . .	132
5.26	Isovaleur de $\lambda$ : 38 <sup>ième</sup> itération. . . . .	132
5.27	Isovaleur de $\lambda$ : 44 <sup>ième</sup> itération. . . . .	133
5.28	Isovaleur de $\lambda$ : 51 <sup>ième</sup> itération. . . . .	133
5.29	Isovaleur de $\lambda$ : 56 <sup>ième</sup> itération. . . . .	133
5.30	La variation du maximum en fonction du nombre d'endommagement. . . . .	134
5.31	Isovaleur de $\lambda$ : 1 <sup>ière</sup> itération. . . . .	135
5.32	Isovaleur de $\lambda$ : 11 <sup>ième</sup> itération. . . . .	135
2.33	Numérotation des faces du triangle K . . . . .	141
2.34	Numérotation des faces du rectangle K. . . . .	142

# Liste des tableaux

1.1	Ordre de l'erreur de la solution. . . . .	51
1.2	Estimations globales. . . . .	55
1.3	L'ordre de l'estimateur global. . . . .	56
1.4	L'ordre de l'estimateur global. . . . .	56
2.1	Estimation du coefficient $\alpha$ : Problème modèle. . . . .	73
2.2	Le cas $k = 0$ , (Schéma à 9 points). . . . .	79
2.3	Le cas $k = 2$ , (Schéma à 25 points). . . . .	79
2.4	Le cas $k = 4$ , (Schéma à 49 points). . . . .	79
2.5	Le cas $k = 6$ , (Schéma à 81 points). . . . .	80
3.1	Cas test $N^{\circ}1$ . . . . .	91
3.2	Cas test $N^{\circ}2$ . . . . .	91
3.3	Cas test $N^{\circ}3$ . . . . .	92
3.4	Cas test $N^{\circ}4$ . . . . .	92
3.5	Cas test $N^{\circ}5$ . . . . .	94
5.1	Modèle de Saint-Venant-Kirchhoff : ordre de l'erreur pour $k = 0$ et $k = 2$ . . . . .	116
5.2	Les valeurs et les positions du maximum des contraintes. . . . .	128
5.3	Les valeurs et les positions du maximum des contraintes. . . . .	129
5.4	La variation du maximum en fonction du nombre d'étapes d'endommagement. . . . .	134

# Introduction générale.

# Introduction

Ce travail est composé de trois parties :

## Première partie (Chapitre 1) Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique par les éléments finis mixtes. Application aux schémas volumes finis.

Nous avons construit un estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique par les éléments finis mixtes pour les schémas volumes finis triangulaires et rectangulaires de plus bas degré pour le problème modèle. Pour l'estimation hiérarchique générale, nous avons rappelé les résultats fondamentaux établis dans un cadre abstrait par B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger et J.F. Maitre [1], Ensuite, nous avons appliqué ces résultats à la formulation mixte des schémas volumes finis introduite par J. Baranger, J.F. Maitre et F. Oudin [7].

Cela nous a permis d'explicitier pour  $u_h \in P_{0,h}$  (fonctions constantes par morceaux), solution exacte du schéma volumes finis, un estimateur pour  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u - \nabla_h u_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ , où  $\nabla_h u_h \in RT_{0,h}$  (espace de Raviart-Thomas d'ordre 1) est une fonction simple des sauts de  $u_h$  aux interfaces (voir [7]). L'estimateur théorique n'est autre que l'estimateur hiérarchique dans  $RT_{1,h} \times P_{1,h}$  (espace de Raviart-Thomas d'ordre 2), pour  $(u_h, \nabla_h u_h)$  qui est la solution du problème mixte dans  $RT_{0,h} \times P_{0,h}$  où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est remplacée par  $a_h(\cdot, \cdot)$  (voir [7]). Il est solution d'un problème mixte sur  $\widehat{RT}_{1,h} \times \widehat{P}_{1,h}$ , supplément bien choisi de  $RT_{0,h} \times P_{0,h}$  dans  $RT_{1,h} \times P_{1,h}$ . En utilisant la décomposition  $\widehat{RT}_{1,h} = \text{rot } P_{2,h}^0 \oplus \widehat{RT}_{1,h}^1$  introduite par B. Wohlmuth et R.H.W. Hoppe [20] pour le cas triangulaire et qu'on a étendue au cas rectangulaire, on obtient une approximation de l'estimateur par résolution de deux problèmes découplés, l'un est de type Laplacien discrétisé dans  $P_{2,h}^0$  (fonctions bulles quadratiques), et l'autre constitué de petits problèmes mixtes locaux (un par élément) dans  $\widehat{RT}_1^1(K) \times \widehat{P}_1(K)$ , qui peuvent être résolus explicitement.

Une nouvelle approximation permet d'explicitier la composante dans  $\text{rot } P_{2,h}^0$  en remplaçant la matrice  $A$  du Laplacien discrétisé par sa diagonale  $D_A$  qui lui est spectralement équivalente. En effectuant tous les calculs correspondants, on a pu donner l'expression de l'estimateur local  $\mathcal{E}_K$  en fonction des sauts de la solution volumes finis aux interfaces d'un voisinage de  $K$ , cela pour les cas triangulaire et rectangulaire. L'estimateur peut être modifié en prenant en compte l'erreur de consistance (sur  $a_h - a$ ).

Des essais numériques nous ont permis de donner une estimation expérimentale de l'ordre  $\alpha$  de l'estimateur d'erreur globale dans le cas d'un maillage carré (et lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ) pour le laplacien.

**Remarque 0.1** *Une première version de ce travail a fait l'objet d'une publication, avec J.F. Maitre, dans "Innovative Tools for Scientific Computation in Aeronautical Engineering" [28].*

## Deuxième partie (Chapitres 2, 3) Chapitre 2 : Schémas volumes finis d'ordre élevé sur un domaine rectangulaire.

### Chapitre 3 : Généralisation des schémas sur un domaine quelconque.

Dans le chapitre 2, nous introduisons un schéma volumes finis d'ordre élevé. Ce schéma, construit sur un domaine rectangulaire, est appliqué avec succès à des problèmes linéaires (laplacien, élasticité linéaire). Dans la première partie de ce chapitre, nous avons défini le schéma volumes finis et étudié la convergence de ce schéma pour lequel nous avons réussi à démontrer la consistance. La stabilité qui a fait l'objet d'un travail important n'a pas été établie et reste donc une question ouverte. Des essais numériques nous ont permis de donner une estimation expérimentale de l'ordre  $\alpha$  du schéma pour le laplacien et l'élasticité linéaire tel que

$$\|u - u_h\| \sim O(h^\alpha), \quad (0.1)$$

où  $u$  la solution exacte et  $u_h$  la solution calculée du problème considéré,  $\|\cdot\|$  une norme à définir.

**Remarque 0.2** *Ce travail a fait l'objet d'une publication, avec J.F. Maitre, A. Rezgui et A.M. Zine, dans "Finite Volumes for Complex Applications III " [27].*

Dans le chapitre 3, nous avons généralisé le schéma volumes finis à une géométrie quelconque. L'idée est de déterminer une transformation qui permet de ramener le calcul des flux sur des cellules rectangulaires d'une géométrie de référence. Nous avons donné, ensuite, des comparaisons avec la méthode schéma volumes éléments finis obtenu par T. Schmidt [42].

## Troisième partie (Chapitres 4, 5) Chapitre 4 : Introduction à la théorie de la mécanique des milieux continus en grande déformation.

### Chapitre 5 : Application du schéma volumes finis à la résolution d'un problème d'élasticité non-linéaire.

Dans le chapitre 4, nous présentons une introduction générale à la théorie de la mécanique des milieux continus en grande déformation.

Dans la première partie, nous définissons les tenseurs des déformations ainsi que les relations qui les relient. Dans le cas d'un matériau hyperélastique compressible et hyperélastique isotrope incompressible, nous rappelons les équations d'équilibre et donnons quelques exemples de densités d'énergie.

Dans le chapitre 5, nous présentons des applications des schémas volumes finis dans le cas d'un problème non linéaire compressible ainsi que l'analyse expérimentale de la singularité des contraintes au fond d'une fissure.

Ce chapitre a fait l'objet de recherches pour la société Michelin qui ont financé ma thèse. Plus précisément, on s'intéresse à la déformation d'un bloc de gomme bidimensionnel, de forme rectangulaire, présentant une entaille de rayon fini. On impose les déplacements sur

les parois horizontales et on suppose que les contraintes sont nulles sur les parois verticales ainsi que sur “les lèvres de la fissure”.

Il s’agit de calculer la solution déplacement à l’aide de la méthode de volumes finis développée dans le chapitre 2 et généralisée dans le chapitre 3. On suppose que le domaine, rempli de gomme, est déformable, homogène et compressible. Les effets thermiques et viscoélastiques sont négligés.

Le modèle mathématique régissant les déformations du bloc de gomme est constitué des équations de conservation classiques (quantité de mouvement et masse) auxquelles il faut ajouter une loi de comportement de type Saint-Venant-Kirchhoff.

Des essais numériques sur le modèle compressible et quasi-incompressible sont présentés dans ce chapitre. En se basant sur un critère lié au maximum des contraintes, nous avons procédé à des essais d’endommagement.

### Problème général :

On suppose que les particules de gomme, notées  $\mathbf{x}$ , occupent initialement  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$ ; l’évolution de la gomme peut alors être décrite à l’aide du système de lois de conservation suivant, écrit sous sa forme différentielle, dans le domaine de calcul  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = f \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_N, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (0.2)$$

où  $u$  est le déplacement,  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à l’interface,  $\mathbf{\Pi}$  est un tenseur des contraintes qui sera précisé plus loin (chapitre 4),  $\mathbf{f}$  la force extérieure volumique,  $\mathbf{g}$  la force extérieure surfacique.

## Première partie

# Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique.

# Chapitre 1

**Estimateur d'erreur a posteriori  
hiérarchique par les éléments finis  
mixtes. Application aux schémas  
volumes finis.**



## 1.1 Introduction.

L'idée de l'estimation d'erreur a posteriori hiérarchique a été introduite par R.E. Bank et A. Weiser [5] pour un problème elliptique symétrique et défini positif pour des discrétisations éléments finis  $P_1$  et généralisé plus tard par R.E. Bank et R.K. Smith dans [4], pour une famille de problèmes elliptiques, non symétriques, non définis positifs, et non linéaires, puis par B. Achchab et al [1] qui ont donné un cadre abstrait, pour lequel a été établi une estimation a priori et un estimateur a posteriori équivalent à l'erreur exacte, puis une application à une formulation mixte non symétrique, et ensuite par B. Wohlmuth et R.H.W. Hoppe [8] qui ont donné un estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique calculable en utilisant une décomposition hiérarchique des espaces de Raviart-Thomas.

Dans ce travail, nous adaptons cette stratégie hiérarchique aux schémas volumes finis et construisons un estimateur d'erreur hiérarchique pour ces schémas volumes finis, cela en utilisant l'interprétation "éléments finis mixtes" introduite dans J. Baranger, J.F. Maitre et F. Oudin [6].

On donne, dans le deuxième paragraphe, une définition des schémas volumes finis dans le cas des triangles et des rectangles. Dans le troisième paragraphe, on donne une décomposition hiérarchique de l'espace de Raviart-Thomas de premier degré en l'espace du plus bas degré et un supplémentaire, et on donne les relations entre ces espaces et les propriétés vérifiées.

Dans le quatrième paragraphe, on construit un estimateur d'erreur hiérarchique théorique en utilisant les espaces de Raviart-Thomas sur une formulation mixte d'un problème elliptique modèle, et on rend cet estimateur calculable.

## 1.2 Estimation hiérarchique : présentation dans un cadre abstrait du principe et des résultats fondamentaux

Dans ce paragraphe, on présente le cadre abstrait (voir [1]) dans lequel on établit une estimation a priori et un estimateur a posteriori équivalent à l'erreur exacte.

### 1.2.1 Cadre abstrait

On s'intéresse à un problème de type

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in M & \text{solution de :} \\ A(U, V) & = L(V), \quad \forall V \in M, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $M$  est un espace de Hilbert,  $A$  une forme bilinéaire sur  $M \times M$  et  $L$  est une forme linéaire continue sur  $M$ . On considère un espace de dimension finie  $M_h$ , et le problème approché

$$\begin{cases} \text{Trouver } U_h \in M_h & \text{solution de :} \\ A_h(U_h, V_h) & = L(V_h), \quad \forall V_h \in M_h, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $A_h$  est une forme bilinéaire sur  $M_h \times M_h$ .

On suppose qu'on a :

$$M_h \subset M, \quad (1.3)$$

$$L \in M'. \quad (1.4)$$

On présente en outre les hypothèses suivantes :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |A_h(U_h, V_h)| \leq C \|U_h\|_M \|V_h\|_M, \quad \forall U_h \in M_h, \quad \forall V_h \in M_h, \quad (1.5)$$

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{U_h \in M_h} \sup_{V_h \in M_h} \frac{|A_h(U_h, V_h)|}{\|U_h\|_M \|V_h\|_M} \geq \beta > 0. \quad (1.6)$$

Où  $C$  et  $\beta$  sont des constantes positives indépendantes de  $h$ , et  $\|\cdot\|_M$  est la norme de  $M$ .

### 1.2.2 Estimation a priori

**Théorème 1.1** *Si  $U$  est solution unique de (1.1),  $U_h$  solution de (1.2), alors, sous les hypothèses (1.3)-(1.6), on a l'estimation a priori suivante :*

$$\|U - U_h\|_M \leq \inf_{V_h \in M_h} \left\{ \|U - V_h\|_M + \sup_{W_h \in M_h} \frac{A_h(V_h, W_h) - A(U_h, W_h)}{\|W_h\|_M} \right\}. \quad (1.7)$$

### 1.2.3 Estimation d'erreur a posteriori hiérarchique

On enrichit l'espace  $M_h$  par l'espace  $\widehat{M}_h$ , pour obtenir l'espace  $\overline{M}_h$  :

$$\overline{M}_h = M_h \oplus \widehat{M}_h. \quad (1.8)$$

On considère l'approximation du problème (1.1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \overline{U}_h \in \overline{M}_h & \text{solution de :} \\ A(\overline{U}_h, \overline{V}_h) = L(\overline{V}_h), \quad \forall \overline{V}_h \in \overline{M}_h, \end{cases} \quad (1.9)$$

qui est plus riche que (1.2).

On introduit  $\widehat{\varepsilon}_h$ , approximation dans  $\widehat{M}_h$  de l'erreur  $U - U_h$  solution de :

$$\begin{cases} \widehat{\varepsilon}_h \in \widehat{M}_h, \\ A(\widehat{\varepsilon}_h, \widehat{V}_h) = L(\widehat{V}_h) - A(U_h, \widehat{V}_h), \quad \forall \widehat{V}_h \in \widehat{M}_h. \end{cases} \quad (1.10)$$

On suppose qu'on a les propriétés suivantes

$$\widetilde{M}_h \subset M, \quad (1.11)$$

$$\exists \widetilde{C} > 0 \text{ tel que } |A(U_h, V_h)| \leq \widetilde{C} \|U_h\|_M \|V_h\|_M, \quad \forall U_h \in \widetilde{M}_h, \quad \forall V_h \in \widetilde{M}_h, \quad (1.12)$$

$$\exists \widetilde{\beta} > 0 \text{ tel que } \inf_{U_h \in \widetilde{M}_h} \sup_{V_h \in \widetilde{M}_h} \frac{|A(U_h, V_h)|}{\|U_h\|_M \|V_h\|_M} \geq \widetilde{\beta} > 0. \quad (1.13)$$

$$\widetilde{M}_h = \overline{M}_h, \quad \widehat{M}_h; \quad \widetilde{\beta} = \overline{\beta}, \quad \widehat{\beta}.$$

On présente en plus l'hypothèse dite de saturation :

$$\|U - \overline{U}_h\|_M \leq \beta' \|U - U_h\|_M, \quad \text{où } 0 < \beta' < 1 \text{ constante.} \quad (1.14)$$

où  $U_h$  solution de (1.2) et  $\overline{U}_h$  solution de (1.9); et l'hypothèse d'existence de la constante de l'inégalité de Cauchy Schwartz forte :

$\exists \nu < 1$  indépendant de  $h$  tel que :

$$\forall V \in M_h, \quad W \in \widehat{M}_h : \quad |(V, W)_M| \leq \nu \|V\|_M \|W\|_M. \quad (1.15)$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.2** *Si  $U$  est solution de (1.1),  $U_h$  est solution de (1.2),  $\widehat{\varepsilon}_h$  solution de (1.10), alors sous les conditions (1.3)-(1.6), (1.11)-(1.15), l'estimateur a posteriori  $\widehat{\varepsilon}_h$  vérifie les inégalités suivantes :*

$$\|\widehat{\varepsilon}_h\|_M \leq C_1 \|U - U_h\|_M, \quad (1.16)$$

et

$$\|U - U_h\|_M \leq C_2 \left\{ \widehat{C} \|\widehat{\varepsilon}_h\|_M + \sup_{V_h \in M_h, \|V_h\|_M=1} (L(V_h) - A(U_h, V_h)) \right\}, \quad (1.17)$$

où

$$C_1 = \frac{\overline{C}}{\widetilde{\beta}} (1 + \beta') \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{\widetilde{\beta} (1 - \beta') \sqrt{1 - \nu^2}}.$$

**Remarque 1.1** *On trouve des exemples d'estimation de la constante  $\nu$  dans J.F. Maitre, F. Musy [9]*

## 1.2.4 Application au cas des éléments finis mixtes

On considère le problème variationnel mixte :

$$\begin{cases} p \in Q, & u \in V, \\ a(p, q) + b(q, u) = 0, & \forall q \in Q, \\ b(p, v) = f(v), & \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $V$  et  $Q$  sont deux espaces de Hilbert et  $a(., .)$  et  $b(., .)$  deux formes bilinéaires définies respectivement sur  $Q \times Q$ ,  $Q \times V$ , et  $f \in V'$ . On suppose que :

$$\exists C > 0; \quad \forall p \in Q, \quad \forall q \in Q, \quad |a(p, q)| \leq C \|p\|_Q \|q\|_Q, \quad (1.19)$$

$$\exists B > 0; \quad \forall p \in Q, \quad \forall v \in V, \quad |b(p, v)| \leq B \|p\|_Q \|v\|_V, \quad (1.20)$$

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{v \in V} \sup_{p \in Q} \frac{b(p, v)}{\|p\|_Q \|v\|_V} \geq \beta. \quad (1.21)$$

On introduit l'espace suivant :

$$T = \left\{ p \in Q; \quad \forall v \in V, \quad b(p, v) = 0 \right\}, \quad (1.22)$$

et on suppose que la forme bilinéaire  $a(., .)$  vérifie la condition de faible coercivité suivante :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{p \in T} \sup_{q \in T} \frac{a(p, q)}{\|p\|_Q \|q\|_Q} \geq \alpha > 0, \quad (1.23)$$

$$\sup_{q \in T} a(p, q) > 0, \quad \forall p \in T \text{ et } p \neq 0. \quad (1.24)$$

**Théorème 1.3** *Sous les conditions (1.19)-(1.24) le problème (1.18) est bien posé et on a en plus le résultat de stabilité suivant :*

$$\|u\|_V \leq C_{11} \|f\|, \quad (1.25)$$

$$\|p\|_Q \leq C_{12} \|f\|, \quad (1.26)$$

où  $C_{11}$  et  $C_{12}$  sont des constantes dépendant seulement de  $B$ ,  $\beta$ ,  $C$  et  $\alpha$ .

On introduit la forme bilinéaire  $A : (Q \times V) \times (Q \times V) \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par :  
pour  $(q_1, v_1) \in Q \times V$ ,  $(q_2, v_2) \in Q \times V$

$$A((q_1, v_1); (q_2, v_2)) = a(q_1, q_2) + b(q_1, v_2) + b(q_2, v_1), \quad (1.27)$$

et la forme linéaire :  $L : Q \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(q, v) \in Q \times V, \quad L(q, v) = f(v).$$

On note :  $M = Q \times V$  et pour  $X = (q, v) \in M$

$$\|X\|_M^2 = \|q\|_Q^2 + \|v\|_V^2.$$

Le problème (1.18) s'écrit alors sous la forme (1.1) et on a le résultat suivant :

**Théorème 1.4** *Les conditions (1.19)-(1.24) sont équivalentes aux conditions suivantes :*

$$\exists C > 0; |A((p, u), (q, v))| \leq C \|(p, u)\|_M \|(q, v)\|_M, \quad \forall (p, u) \in M, \quad \forall (q, v) \in M, \quad (1.28)$$

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{(p,u) \in M} \sup_{(q,v) \in M} \frac{|A((p, u), (q, v))|}{\|(p, u)\|_M \|(q, v)\|_M} \geq \beta > 0. \quad (1.29)$$

$$\sup_{(p,u) \in M} |A((p, u), (q, v))| > 0, \quad \forall (q, v) \neq (0, 0) \in M. \quad (1.30)$$

### • Structure hiérarchique

On considère la discrétisation du problème (1.18)

$$\begin{cases} p_h \in Q_h, & u_h \in V_h, \\ a_h(p_h, q_h) + b(q_h, u_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h, \\ b(p_h, v_h) = f(v_h), & \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $Q_h, V_h$  sont des espaces de dimension finie vérifiant  $Q_h \subset Q, V_h \subset V$  et  $a_h(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire sur  $Q_h \times Q_h$  qui approche la forme  $a(\cdot, \cdot)$ .

On note :

$$M_h = Q_h \times V_h.$$

On considère l'espace  $\overline{M}_h$ , qui contient  $M_h$  et est contenu dans  $M$ , défini par

$$\overline{M}_h = \overline{Q}_h \times \overline{V}_h,$$

avec  $Q_h \subset \overline{Q}_h \subset Q, V_h \subset \overline{V}_h \subset V$ .

On considère une décomposition des espaces comme au paragraphe 1.2.3 :

$$\begin{aligned} \overline{Q}_h &= Q_h \oplus \widehat{Q}_h, \\ \overline{V}_h &= V_h \oplus \widehat{V}_h, \end{aligned}$$

et on a  $\overline{M}_h = M_h \oplus \widehat{M}_h$  où  $\widehat{M}_h = \widehat{Q}_h \times \widehat{V}_h$  et l'on pose

$$\widetilde{T}_h = \left\{ p_h \in \widetilde{Q}_h; \quad \forall v_h \in \widetilde{V}_h, \quad b(p_h, v_h) = 0 \right\},$$

où  $\widetilde{V}_h = V_h, \overline{V}_h, \widehat{V}_h; \widetilde{Q}_h = Q_h, \overline{Q}_h, \widehat{Q}_h$  et  $\widetilde{T}_h = T_h, \overline{T}_h, \widehat{T}_h$ .

On définit les formes bilinéaires  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  respectivement sur  $\widetilde{Q}_h \times \widetilde{Q}_h, \widetilde{Q}_h \times \widetilde{V}_h$ , et l'on suppose qu'elles vérifient les hypothèses suivantes :

$$\forall p_h \in \widetilde{Q}_h, \quad \forall q_h \in \widetilde{Q}_h, \quad |a_h(p_h, q_h)| \leq \widetilde{A} \|p_h\|_Q \|q_h\|_Q, \quad (1.32)$$

$$\forall p_h \in \widetilde{Q}_h, \quad \forall v_h \in \widetilde{V}_h, \quad |b(p_h, v_h)| \leq \widetilde{B} \|p_h\|_Q \|v_h\|_V, \quad (1.33)$$

$$\inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \sup_{p_h \in \tilde{Q}_h} \frac{b(p_h, v_h)}{\|p_h\|_Q \|v_h\|_V} \geq \tilde{\beta}, \quad (1.34)$$

$$\inf_{p_h \in \tilde{T}_h} \sup_{q_h \in \tilde{T}_h} \frac{a_h(p_h, q_h)}{\|p_h\|_Q \|q_h\|_V} \geq \tilde{\alpha}, \quad (1.35)$$

où  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{\beta}$  et  $\tilde{\alpha}$  sont des constantes strictement positives indépendantes de  $h$ .

On considère les problèmes correspondants à (1.9) et (1.10) :

$$\begin{cases} \bar{p}_h \in \bar{Q}_h, & \bar{u}_h \in \bar{V}_h, \\ a(\bar{p}_h, \bar{q}_h) + b(\bar{q}_h, \bar{u}_h) = 0, & \forall \bar{q}_h \in \bar{Q}_h, \\ b(\bar{p}_h, \bar{v}_h) = f(\bar{v}_h), & \forall \bar{v}_h \in \bar{V}_h. \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_h^p \in \hat{Q}_h, & \varepsilon_h^u \in \hat{V}_h, \\ a(\varepsilon_h^p, \hat{q}_h) + b(\hat{q}_h, \varepsilon_h^u) = -a_h(p_h, \hat{q}_h) - b(\hat{q}_h, u_h), & \forall \hat{q}_h \in \hat{Q}_h, \\ b(\varepsilon_h^p, \hat{v}_h) = f(\hat{v}_h) - b(p_h, \hat{v}_h), & \forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h. \end{cases} \quad (1.37)$$

On a le résultat :

**Théorème 1.5** *Si les conditions (1.32)-(1.35) sont vérifiées, alors les problèmes (1.31), (1.36) et (1.37) sont bien posés.*

Pour la forme bilinéaire  $A$  définie sur  $\tilde{M}_h \times \tilde{M}_h$  par (1.27), on a le résultat suivant :

**Théorème 1.6** *Les conditions (1.32)-(1.35) sont équivalentes à :*

$$\exists \tilde{C} > 0; |A((p, u), (q, v))| \leq \tilde{C} \|(p, u)\|_M \|(q, v)\|_M, \quad \forall (p, u) \in \tilde{M}, \quad \forall (q, v) \in \tilde{M}, \quad (1.38)$$

$$\exists \tilde{\beta} > 0 \text{ tel que } \inf_{(p, u) \in \tilde{M}_h} \sup_{(q, v) \in \tilde{M}_h} \frac{|A((p, u), (q, v))|}{\|(p, u)\|_M \|(q, v)\|_M} \geq \tilde{\beta} > 0. \quad (1.39)$$

$$\sup_{(p, u) \in \tilde{M}_h} |A((p, u), (q, v))| > 0, \quad \forall (q, v) \neq (0, 0) \in \tilde{M}_h, \quad (1.40)$$

avec  $\tilde{\beta} = \beta$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\hat{\beta}$ ;  $\tilde{C} = C$ ,  $\bar{C}$ ,  $\hat{C}$  des constantes indépendantes de  $h$ .

On a les équivalences suivantes :

$$(1.18) \iff (1.1), \quad (1.36) \iff (1.9) \text{ et } (1.37) \iff (1.10).$$

**On va adapter le Théorème 1.2 au cas des éléments finis mixtes.**

On suppose que l'hypothèse de saturation (1.14) est vérifiée ainsi que l'hypothèse d'existence de la constante de l'inégalité de Cauchy Schwartz forte donnée dans (1.15), c'est-à-dire, dans le cas du problème mixte par :

$$(\|p - \bar{p}_h\|_Q^2 + \|u - \bar{u}_h\|_V^2)^{\frac{1}{2}} \leq \beta' (\|p - p_h\|_Q^2 + \|u - u_h\|_V^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } 0 < \beta' < 1, \quad (1.41)$$

et  $\exists \nu < 1$  indépendant de  $h$  tel que :

$$\forall (p, u) \in M_h, \quad (p, u) \in \widehat{M}_h : \quad |((p, u), (q, v))_M| \leq \nu \| (p, u) \|_M \| (q, v) \|_M. \quad (1.42)$$

• Calcul de  $\sup_{V_h \in M_h, \|V_h\|_M=1} (L(V_h) - A(U_h, V_h))$  dans le cas du problème mixte.

Comme

$$L(V_h) = L((q_h, v_h)) = f(v_h),$$

et

$$\begin{aligned} A(U_h, V_h) &= A((p_h, u_h), (q_h, v_h)) \\ &= a(p_h, q_h) + b(p_h, v_h) + b(q_h, u_h), \end{aligned}$$

on a

$$L(V_h) - A(U_h, V_h) = f(v_h) - a(p_h, q_h) - b(p_h, v_h) - b(q_h, u_h).$$

D'après la deuxième équation du problème (1.31), nous avons :

$$b(p_h, v_h) = f(v_h),$$

d'où

$$L(V_h) - A(U_h, V_h) = -a(p_h, q_h) - b(q_h, u_h).$$

D'après la première équation du problème (1.31), on obtient :

$$a_h(p_h, q_h) + b(q_h, u_h) = 0,$$

d'où finalement

$$L(V_h) - A(U_h, V_h) = (a_h - a)(p_h, q_h).$$

**Proposition 1.1** *On est dans les conditions d'application de théorème 1.2, l'estimateur est donc défini; il est donné par  $(\|\varepsilon_h^p\|_Q^2 + \|\varepsilon_h^u\|_V^2)^{1/2}$  et vérifie :*

$$(\|\varepsilon_h^p\|_Q^2 + \|\varepsilon_h^u\|_V^2)^{1/2} \leq C_1 (\|p - p_h\|_Q^2 + \|u - u_h\|_V^2)^{1/2}$$

$$(\|p - p_h\|_Q^2 + \|u - u_h\|_V^2)^{1/2} \leq C_2 \left\{ \widehat{C} (\|\varepsilon_h^p\|_Q^2 + \|\varepsilon_h^u\|_V^2)^{1/2} + \sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_Q} \right\}.$$

Où

$$C_1 = \frac{\overline{C}}{\widehat{\beta}} (1 + \beta') \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{\widehat{\beta} (1 - \beta') \sqrt{1 - \nu^2}},$$

et  $\widehat{\beta}$ ,  $\overline{\beta}$  sont les constantes inf-sup pour les espaces  $(\widehat{Q}_h, \widehat{V}_h)$  et  $(\overline{Q}_h, \overline{V}_h)$ ;  $\widehat{C}$ ,  $\overline{C}$  sont les constantes de la continuité des formes bilinéaires globales  $a(\cdot, \cdot)$  et  $a_h(\cdot, \cdot)$ ;  $\nu$  est la constante de Cauchy Schwartz forte entre les espaces  $(Q_h \times V_h, \widehat{Q}_h \times \widehat{V}_h)$  avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_M = (\cdot, \cdot)_Q + (\cdot, \cdot)_V$  et  $\beta' < 1$  est la constante de saturation avec la norme  $\|\cdot\|_M$ .

## 1.3 Schémas volumes finis et éléments finis mixtes

### 1.3.1 Problème modèle

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1.43)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné polygonal dans  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

### 1.3.2 Schéma volumes finis

On peut écrire l'équation aux dérivées partielles de (1.43) sous la forme :

$$\int_{\partial\omega} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{\omega} f \, dx dy = 0, \quad \forall \omega \subset \Omega, \quad (1.44)$$

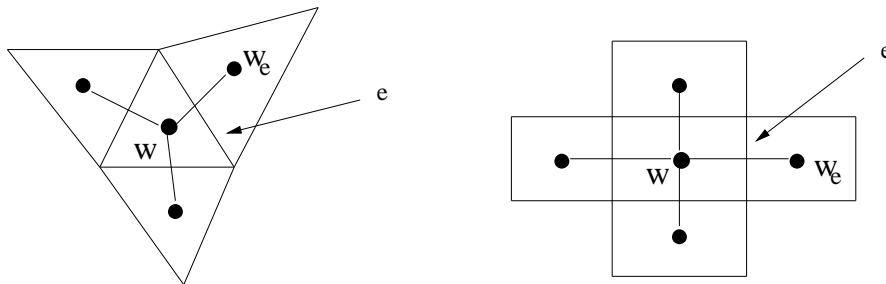


FIG. 1.1 – Schéma volumes finis.

et on s'intéresse au schéma volumes finis donné par F. Oudin et al [12], où l'équation associée au volume de contrôle  $K$  est :

$$\sum_{e \in \partial K} |e| \frac{u_{K_e} - u_K}{d(w_K, w_{K_e})} + |K| \bar{f}^K = 0. \quad (1.45)$$

Ce schéma consiste à associer une inconnue  $u_K$  au point  $w_K$ , centre du rectangle pour un maillage rectangulaire, et centre du cercle circonscrit du triangle pour un maillage triangulaire;  $d(w_K, w_{K_e})$  est la distance entre  $w_K$  et  $w_{K_e}$ ,  $\bar{f}^K$  est la moyenne de  $f$  sur  $K$ ,  $|e|$  est la mesure de la face  $e$  et  $|K|$  la mesure de  $K$ .

Construction de  $(u_h, p_h) \in P_{0,h} \times RT_{0,h}$  ( $P_{0,h}$  l'espace des fonctions constantes par morceaux et  $RT_{0,h}$  l'espace de Raviart-Thomas défini plus loin) à partir de la solution du schéma volumes finis :  $u_h \in P_{0,h}$ ;  $u_{h/K} = u_K^{FV}$ , et  $p_h \in RT_{0,h}$ ;  $p_h := \nabla_h u_h$  défini par

$$\begin{cases} p_h \in RT_{0,h}, \\ a_h(p_h, q_h) = -(u_h, \operatorname{div} q_h), \quad \forall q_h \in RT_{0,h}, \end{cases} \quad (1.46)$$





FIG. 1.2 – Schéma volumes finis : interface entre deux volumes de contrôle.

où la forme bilinéaire  $a_h(\cdot, \cdot)$  est définie par :

$$a_h(p, q) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \alpha_e \varphi_e(p) \varphi_e(q) \quad \text{avec} \quad \alpha_e = \frac{d(\omega, \omega_e)}{|e|}. \quad (1.47)$$

$\varphi_e(\cdot)$  est le flux de la face  $e$ , et  $\mathcal{E}_h$  étant l'ensemble des côtés du maillage  $\mathfrak{S}_h$ . Dans la base nodale de  $RT_{0,h}$ ,  $a_h$  correspond à la matrice  $\text{diag}(\alpha_e)$ .

## 1.4 Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique en formulation mixte

La formulation variationnelle mixte du problème (1.43) est : trouver  $(p, u) \in H(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} a(p, q) + b(q, u) = 0, & \forall q \in H(\text{div}, \Omega), \\ b(p, v) = l(v), & \forall v \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (1.48)$$

où  $p = \nabla u$  et  $H(\text{div}, \Omega) = \{q \in (L^2(\Omega))^2 / \text{div } q \in L^2(\Omega)\}$  et les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  et la fonctionnelle  $l(\cdot)$  sont définies par :

$$a(p, q) = \int_{\Omega} p \cdot q \, dx dy, \quad q, p \in H(\text{div}, \Omega),$$

$$b(q, v) = \int_{\Omega} \text{div } q v \, dx dy, \quad q \in H(\text{div}, \Omega), \quad v \in L^2(\Omega),$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy, \quad v \in L^2(\Omega).$$

**Remarque 1.2** *Toutes les conditions de l'existence et de l'unicité du problème (1.48) sont vérifiées.*

### 1.4.1 Discrétisation du problème modèle

Soit  $\mathfrak{S}_h$  un maillage (triangulaire ou rectangulaire) de  $\Omega$ . Dans le but de discrétiser (1.48), on choisit l'espace de Raviart-Thomas de plus bas degré pour  $p$ , et l'espace des fonctions constantes par morceaux pour  $u$ .

**Définition 1.1** *L'espace de Raviart-Thomas est défini par :*

$$RT_{0,h} = \left\{ q_h \in H(\operatorname{div}, \Omega), q_{h/K} \in RT_0(K), K \in \mathfrak{S}_h \right\}, \quad (1.49)$$

avec  $RT_0(K) = P_0(K)^2 + P_0(K)\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} = (x, y)^T$  pour les triangles et  $RT_0(K) = P_{1,0}(K) \times P_{0,1}(K)$  pour les rectangles où  $P_{m,n}(K)$  est l'espace des polynômes de degré  $m$  suivant  $x$  et  $n$  suivant  $y$  sur  $K$  ( $\dim(RT_0(K)) = \text{nombre de côtés de } K$ ).

Les degrés de liberté pour l'espace  $RT_0(K)$  sont donnés par les flux :  $\int_{e_i} q_h \cdot n \, ds$ , où  $n$  la normale unité extérieure à  $e_i$  et  $(e_i)_{i=1}^3$  (resp.  $(e_i)_{i=1}^4$ ) les faces de  $K$  pour les triangles (resp. pour les rectangles). L'espace des fonctions scalaires correspondant est  $P_{0,h}$  :

$$P_{0,h} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega), v_{h/K} \in P_0(K), K \in \mathfrak{S}_h \right\}, \quad (1.50)$$

où  $P_0(K)$  est l'espace des polynômes de degré 0. On a :  $\operatorname{div}(RT_{0,h}) = P_{0,h}$ .

La discrétisation mixte du problème (1.48) est définie par :

$$\begin{cases} p_h^{RT_0} \in RT_{0,h}, & u_h^{P_0} \in P_{0,h}, \\ a(p_h^{RT_0}, q_h) + b(q_h, u_h^{P_0}) = 0, & \forall q_h \in RT_{0,h}, \\ b(p_h^{RT_0}, v_h) = l(v_h), & \forall v_h \in P_{0,h}. \end{cases} \quad (1.51)$$

La solution du problème schéma volumes finis  $(p_h, u_h)$  définie en (1.46), est solution de (ref [12] [6]) :

$$\begin{cases} p_h \in RT_{0,h}, & u_h \in P_{0,h}, \\ a_h(p_h, q_h) + b(q_h, u_h) = 0, & \forall q_h \in RT_{0,h}, \\ b(p_h, v_h) = l(v_h), & \forall v_h \in P_{0,h}, \end{cases} \quad (1.52)$$

où  $a_h(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire définie sur  $RT_{0,h} \times RT_{0,h}$  en (1.47).

**Remarque 1.3** *Les contributions élémentaires  $\alpha_h^K$  sont données :*

• Pour le cas triangulaire par :

$$a_h^K(p_h, q_h) = \sum_{e \in \partial K} \alpha_e^K \varphi_e^K(p_h) \varphi_e^K(q_h); \quad K \in \mathfrak{S}_h, \quad (1.53)$$

avec (voir (1.47))  $\alpha_e^K = \frac{\cot g(\theta_e)}{2}$ , où  $\theta_e$  est l'angle opposé à la face  $e$  et  $\varphi_e(q_h) = \int_e q_h \cdot n_e \, ds$ , le flux.

• Pour le cas rectangulaire par :

$$a_h^K(p_h, q_h) = \sum_{l \in (n, s, e, w)} \alpha_l^K \varphi_l^K(p_h) \varphi_l^K(q_h); \quad K \in \mathfrak{S}_h, \quad (1.54)$$

avec  $\alpha_e^K = \alpha_w^K = \frac{h_x}{2h_y}$  et  $\alpha_n^K = \alpha_s^K = \frac{h_y}{2h_x}$ .

## 1.4.2 Décomposition hiérarchique des espaces de discrétisation

**Définition 1.2** *L'espace de Raviart-Thomas de degré 1 est défini par :*

$$RT_{1,h} = \left\{ q_h \in H(\operatorname{div}, \Omega), q_{h/K} \in RT_1(K), K \in \mathfrak{S}_h \right\},$$

avec  $RT_1(K) = P_1(K)^2 + P_1(K)\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} = (x, y)^T$  pour les triangles et  $RT_1(K) = P_{2,1}(K) \times P_{1,2}(K)$  pour les rectangles.  $P_1(K)$  est l'espace des polynômes de degré 1 sur  $K$ ;  $\dim RT_1(K) = 8$  dans le cas triangulaire et 12 dans le cas rectangulaire. L'espace des fonctions scalaires correspondant est  $P_{1,h}$  :

$$P_{1,h} = \left\{ v_h \in L^2(\Omega), v_{h/K} \in P(K), K \in \mathfrak{S}_h \right\},$$

avec  $P(K) = P_1(K)$  pour les triangles et  $P(K) = P_{1,1}(K)$  (noté aussi  $Q_1(K)$ ) pour les rectangles.

### Décomposition de l'espace des vecteurs

On définit la décomposition suivante (voir [8] pour les triangles) :

$$RT_{1,h} = RT_{0,h} \oplus \widehat{RT}_{1,h} \quad \text{tel que} \quad \widehat{RT}_{1,h} = (I - \rho)RT_{1,h}, \quad (1.55)$$

avec  $\rho : RT_{1,h} \rightarrow RT_{0,h}$  l'opérateur d'interpolation défini par les flux :

$$\varphi_e(\rho q) = \varphi_e(q), \quad \forall e \in \partial K. \quad (1.56)$$

On décompose l'espace  $\widehat{RT}_{1,h}$  en  $\widehat{RT}_{1,h}^0$  et un supplémentaire  $\widehat{RT}_{1,h}^1$  ie :

$$\widehat{RT}_{1,h} = \widehat{RT}_{1,h}^0 \oplus \widehat{RT}_{1,h}^1 \quad \text{avec} \quad \widehat{RT}_{1,h}^0 = \operatorname{rot}(P_{2,h}^0), \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \varphi = \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (1.57)$$

et  $P_{2,h}^0$  est l'espace des fonctions bulles quadratiques associées aux milieux des côtés et

$$\widehat{RT}_{1,h}^1 = \left\{ q_h \in \widehat{RT}_{1,h}, q_h \cdot n_{e/e} = 0, e \in \mathcal{E}_h \right\},$$

où  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des faces du maillage  $\mathfrak{S}_h$ .

Donc l'espace de Raviart-Thomas de degré 1 est décomposé sous la forme

$$RT_{1,h} = RT_{0,h} \oplus \widehat{RT}_{1,h}^0 \oplus \widehat{RT}_{1,h}^1. \quad (1.58)$$

### Décomposition de l'espace des scalaires

On définit la décomposition suivante :

$$P_{1,h} = P_{0,h} \oplus \widehat{P}_{1,h} \quad \text{où} \quad \widehat{P}_{1,h} = (I - \Pi)P_{1,h}, \quad (1.59)$$

avec  $\Pi$  la  $L^2$ -projection de  $P_{1,h}$  sur l'espace  $P_{0,h}$ .  $\widehat{P}_{1,h}$  est l'espace des fonctions de  $P_{1,h}$  à moyenne nulle par élément :

$$\widehat{P}_{1,h} = \left\{ v \in L^2(\Omega), v_{/K} \in P_1(K) \text{ et } \int_K v \, dx dy = 0; K \in \mathfrak{S}_h \right\}.$$

**Remarque 1.4** *On a  $\operatorname{div} \widehat{RT}_{1,h}^0 = 0$  et  $\operatorname{div} (\widehat{RT}_{1,h}^1) = \widehat{P}_{1,h}$ .*

### 1.4.3 L'estimateur : le problème à résoudre

La méthode d'estimation repose sur le problème vérifié par l'erreur  $e_h^p = p_h^{ex} - p_h$ ,  $e_h^u = u_h^{ex} - u_h$ , où  $(p_h, u_h) \in RT_{0,h} \times P_{0,h}$  est quelconque et  $(p_h^{ex}, u_h^{ex})$  la solution exacte du problème mixte discrétisé dans  $RT_{1,h} \times P_{1,h}$

$$\begin{cases} e_h^p \in RT_{1,h}, & e_h^u \in P_{1,h}, \\ a(e_h^p, \hat{q}_h) + & b(\hat{q}_h, e_h^u) = r_1(\hat{q}_h), \quad \forall \hat{q}_h \in RT_{1,h}, \\ & b(e_h^p, \hat{v}_h) = r_2(\hat{v}_h), \quad \forall \hat{v}_h \in P_{1,h}, \end{cases} \quad (1.60)$$

où les résidus sont définis par  $r_1 = r_1(p_h, u_h)$ ,  $r_2 = r_2(p_h)$  avec

$$\langle r_1(p_h, u_h), q_h \rangle = -a(p_h, q_h) - b(q_h, u_h), \quad \text{et} \quad \langle r_2(p_h), v_h \rangle = -\langle f, v_h \rangle - b(p_h, v_h).$$

**Remarque 1.5**  $(e_h^p, e_h^u)$  est l'approximation dans  $RT_{1,h} \times P_{1,h}$  de  $(e^p, e^u) = (p - p_h, u - u_h)$  avec  $(p, u)$  solution de (1.48).

Pour éviter la résolution de (1.60), on approche  $e_h^u, e_h^p$  par l' "approximation" hiérarchique" (voir (1.10))  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u) \in \widehat{RT}_{1,h} \times \widehat{P}_{1,h}$  (voir (1.55)) définie par :

$$\begin{cases} \varepsilon_h^p \in \widehat{RT}_{1,h}, & \varepsilon_h^u \in \widehat{P}_{1,h}, \\ a(\varepsilon_h^p, \hat{q}_h) + & b(\hat{q}_h, \varepsilon_h^u) = r_1(\hat{q}_h), \quad \hat{q}_h \in \widehat{RT}_{1,h}, \\ & b(\varepsilon_h^p, \hat{v}_h) = r_2(\hat{v}_h), \quad \hat{v}_h \in \widehat{P}_{1,h}. \end{cases} \quad (1.61)$$

Cet estimateur s'applique aux schémas volumes finis de paragraphe 1.3 en considérant  $u_h := u_h^{VF}$  et  $p_h := \sum_{e \in \partial K} \frac{[u_h]_e}{\alpha_e} p_e$  avec  $p_e, e \in \partial K$ , les fonctions de base de  $RT_{0,h}$  et le saut  $[u_h]_e$  de  $u_h$  sur la face  $e$  défini par  $[u_h]_e = u_{K_e^+} - u_{K_e^-}$ .

• Expressions des résidus  $r_1, r_2$  pour  $(p_h, u_h) \in RT_{0,h} \times P_{0,h}$  :

• Calcul de  $r_1$

$$r_1(q_h) = -a(p_h, q_h) - b(q_h, u_h),$$

et

$$b(q_h, u_h) = \int_{\Omega} \operatorname{div} q_h u_h \, dx dy.$$

Comme  $u_h \in P_{0,h}$  on a  $b(q_h, u_h) = 0$  car  $\operatorname{div} q_h \in \widehat{P}_{1,h}$ .

On a finalement

$$r_1(q_h) = -a(p_h, q_h), \quad (1.62)$$

soit

$$r_1(q_h) = - \sum_e \frac{[u_h]_e}{\alpha_e} \int_{\Omega} p_e \cdot q_h \, dx dy, \quad \forall q_h \in \widehat{RT}_{1,h}. \quad (1.63)$$

• **Calcul de  $r_2$**

$$\begin{aligned} r_2(v_h) &= l(v_h) - b(p_h, v_h), \quad v_h \in \widehat{P}_{1,h}, \\ &= - \int_{\Omega} f v_h \, dx dy - b(p_h, v_h). \end{aligned}$$

Comme  $\operatorname{div} p_h \in P_{0,h}$  et  $v_h \in \widehat{P}_{1,h}$ , on a  $b(p_h, v_h) = 0$ , soit :

$$r_2(v_h) = - \int_{\Omega} f v_h \, dx dy, \quad \forall v_h \in \widehat{P}_{1,h}. \quad (1.64)$$

**Détermination de  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u)$  :**

Le problème (1.61) à résoudre pour obtenir  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u)$  s'écrit d'après ce qui précède :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_h^p \in \widehat{RT}_{1,h}, \quad \varepsilon_h^u \in \widehat{P}_{1,h}, \\ \int_{\Omega} \varepsilon_h^p \cdot \hat{q}_h \, dx dy + \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{q}_h \varepsilon_h^u \, dx dy = - \int_{\Omega} p_h \cdot \hat{q}_h \, dx dy, \quad \hat{q}_h \in \widehat{RT}_{1,h}, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \varepsilon_h^p \hat{v}_h \, dx dy = - \int_{\Omega} f \hat{v}_h \, dx dy, \quad \hat{v}_h \in \widehat{P}_{1,h}. \end{array} \right. \quad (1.65)$$

**Remarque 1.6**  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u)$  dépend seulement de  $p_h$ , et donc uniquement des sauts de  $u_h$  pour le cas du schéma volumes finis. Si  $f \in P_{0,h}$ , l'estimateur ne dépend pas explicitement de  $f$  ( $\int_{\Omega} f \hat{v}_h \, dx dy = 0$ ). En fait  $\operatorname{div} \varepsilon_h^p$  est la projection de  $-f$  sur  $\widehat{P}_{1,h}$ .

### 1.4.4 Les fonctions de base des espaces de discrétisation

#### Cas d'un maillage triangulaire :

**Les degrés de liberté :**

- Pour l'espace  $RT_0(K)$ , ce sont les flux :

$$l_e(q) = \int_e q \cdot n_e \, ds, \quad \forall e \in \partial K.$$

- Pour l'espace  $\widehat{RT}_1^0(K)$ , ce sont les moments des flux :

$$l_e(q) = \int_e q \cdot n_e (s - \bar{s}^e) \, ds, \quad \forall e \in \partial K.$$

- Pour l'espace  $\widehat{RT}_1^1(K)$ , ce sont les moments de  $\operatorname{div}$  :

$$\begin{aligned} l_1(q) &= \int_K (x - x_K) \operatorname{div} q \, dx dy, \\ l_2(q) &= \int_K (y - y_K) \operatorname{div} q \, dx dy, \end{aligned}$$

où  $(x_K, y_K)$  est le centre de gravité du triangle.

Cette décomposition est schématisée dans la figure suivante :

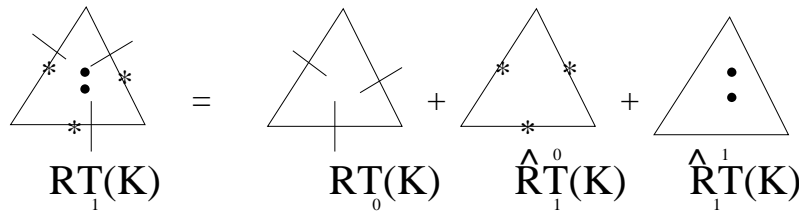


FIG. 1.3 – Décomposition de  $RT_1(K)$  (les degrés de liberté).

**Remarque 1.7** • Pour  $q \in \widehat{RT}_1(K)$ , les degrés de liberté, flux sont nuls :

$$\int_e q \cdot n_e ds = 0, \quad \forall q \in \widehat{RT}_1(K),$$

et donc

$$\int_K \operatorname{div} q dx dy = 0, \quad \forall K \in \mathfrak{S}_h.$$

• De plus, on a :

$$\operatorname{div} q = 0, \quad \text{pour } q \in \widehat{RT}_1^0(K),$$

et

$$q \cdot n_{e/K} = 0, \quad \forall e \in \partial K, \quad \text{pour } q \in \widehat{RT}_1^1(K).$$

**Décomposition locale de l'espace  $RT_1(K)$  :**

$$RT_1(K) \rightarrow RT_0(K) \oplus \widehat{RT}_1^0(K) \oplus \widehat{RT}_1^1(K).$$

**Les fonctions de base de l'espace  $RT_0(K)$  :** (Rappel)

Elles sont données par :

$$p_e = \bar{p}_e + \frac{\operatorname{div} p_e}{2} (x - x_K), \quad \forall e \in \partial K,$$

où  $\bar{p}_e$  est la moyenne sur  $K$  de  $p_e$  et  $x_K$  est le centre de gravité du triangle  $K$ . On a aussi :

$$p_e = \frac{(x - a_e)}{2 |K|}, \quad (1.66)$$

où  $a_e$  est le sommet en face du coté  $e$ .

**Les fonctions de base de l'espace  $\widehat{RT}_1^0(K)$  :**

On a

$$\widehat{RT}_{1,h}^0 = \operatorname{rot} (P_{2,h}^0).$$

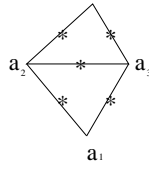


FIG. 1.4 – Distribution des fonctions de base de l'espace  $\widehat{RT}_1^0(K)$  pour deux éléments.

A la fonction bulle  $\varphi_{h,e}$ , associée au côté  $[a_2, a_3]$

$$\varphi_{h,e} = 4\lambda_2\lambda_3,$$

où  $(\lambda_i)_{i=1}^3$  sont les coordonnées barycentriques, correspond la fonction de base  $q_{1,h} \in \widehat{RT}_1^0(K)$  définie par

$$\begin{aligned} q_{1,h} &= \text{rot } \varphi_{h,e}^K = R^{\frac{\pi}{2}} \nabla \varphi_{h,e}^K \\ &= 4(\lambda_2 R^{\frac{\pi}{2}} \nabla \lambda_3 + \lambda_3 R^{\frac{\pi}{2}} \nabla \lambda_2) = \frac{2}{|K|} (\lambda_2 \overrightarrow{a_2 a_1} + \lambda_3 \overrightarrow{a_1 a_3}), \end{aligned}$$

où  $R^{\frac{\pi}{2}}$  désigne la rotation de  $\frac{\pi}{2}$ . De même, on obtient :

$$q_{2,h} = \frac{2}{|K|} (\lambda_1 \overrightarrow{a_2 a_1} + \lambda_3 \overrightarrow{a_3 a_2}), \quad q_{3,h} = \frac{2}{|K|} (\lambda_1 \overrightarrow{a_1 a_3} + \lambda_2 \overrightarrow{a_3 a_2}).$$

**Les fonctions de base de  $\widehat{RT}_1^1(K)$  :**

$\widehat{RT}_1^1(K)$  est l'espace des champs à densité de flux nulle au bord ( $q \cdot n = 0$  sur  $\partial K$ ). On choisit les éléments de base :

$$q_1 = \lambda_1(x)(x - a_1), \quad q_2 = \lambda_2(x)(x - a_2). \quad (1.67)$$

**Décomposition locale de l'espace  $P_1(K)$  :**

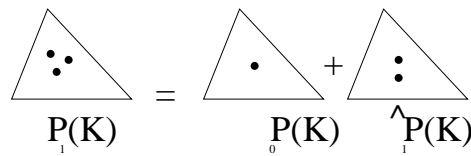


FIG. 1.5 – Décomposition de l'espace  $P_1(K)$ .

La décomposition de l'espace des polynômes de degré 1 localement :

$$P_1(K) = P_0(K) \oplus \widehat{P}_1(K).$$

**Les fonctions de base de l'espace  $\widehat{P}_1(K)$  :**

$$\widehat{v}_1 = 3\lambda_1 - 1, \quad \widehat{v}_2 = 3\lambda_2 - 1. \quad (1.68)$$

## Cas d'un maillage rectangulaire :

### Les degrés de liberté :

- Pour l'espace  $RT_0(K)$ , ce sont les flux :

$$l_e(q) = \int_e q \cdot n_e ds, \quad \forall e \in \partial K.$$

- Pour l'espace  $\widehat{RT}_1^0(K)$ , ce sont les moments des flux :

$$l_e(q) = \int_e q \cdot n_e (s - \bar{s}^e) ds, \quad \forall e \in \partial K.$$

- Pour l'espace  $\widehat{RT}_1^1(K)$ , ils sont donnés pour  $q = (q_1, q_2)$ , par (voir [11]) :

$$\begin{aligned} l_1(q) &= \int_K q_1 dx dy, & l_2(q) &= \int_K q_2 dx dy, \\ l_3(q) &= \int_K q_1 (y - y_K) dx dy, & l_4(q) &= \int_K q_2 (x - x_K) dx dy. \end{aligned}$$

### Décomposition locale de l'espace $RT_1(K)$ :

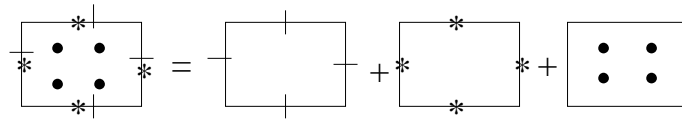


FIG. 1.6 – Décomposition de l'espace  $RT_1(K)$ .

$$RT_1(K) \rightarrow RT_0(K) \oplus \widehat{RT}_1^0(K) \oplus \widehat{RT}_1^1(K).$$

### Les fonctions de base de l'espace $RT_0(K)$ :

Pour  $[a, b]$  on note  $\lambda = \lambda_b$ , la coordonnée barycentrique associée à  $b$ .

Les fonctions de base sont données par :

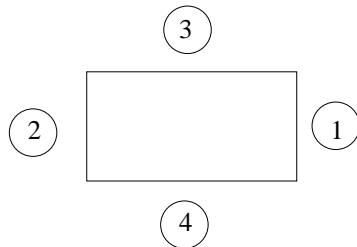


FIG. 1.7 – Numérotation des faces du rectangle  $K$ .

$$p_1 = \frac{1}{h_y} \lambda(x) e_1, \quad p_2 = -\frac{1}{h_y} (1 - \lambda(x)) e_1, \quad p_3 = \frac{1}{h_x} \lambda(y) e_2 \quad \text{et} \quad p_4 = -\frac{1}{h_x} (1 - \lambda(y)) e_2 \quad (1.69)$$



**Les fonctions de base de l'espace  $\widehat{RT}_1^0(K)$  :**

En notant  $\beta = 4\lambda(1 - \lambda)$ , les fonctions bulles sont données par :

$$\begin{aligned}\varphi_{1,h}(x, y) &= \lambda(x)\beta(y), & \varphi_{2,h}(x, y) &= \lambda(y)\beta(x), \\ \varphi_{3,h}(x, y) &= \lambda(x)\beta(y) \text{ et } \varphi_{4,h}(x, y) &= \lambda(y)\beta(x),\end{aligned}$$

et les fonctions de base par :

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= \text{rot } \varphi_{1,h}(x, y) = (-\lambda(x)\beta'(y), \lambda'(x)\beta(y)), \\ \hat{q}_2 &= \text{rot } \varphi_{2,h}(x, y) = (-\lambda'(y)\beta(x), \lambda(y)\beta'(x)), \\ \hat{q}_3 &= \text{rot } \varphi_{3,h}(x, y) = (-\lambda(x)\beta'(y), \lambda'(x)\beta(y)) \\ \hat{q}_4 &= \text{rot } \varphi_{4,h}(x, y) = (-\lambda'(y)\beta(x), \lambda(y)\beta'(x)).\end{aligned}$$

**Décomposition locale de l'espace  $\widehat{RT}_1^1(K)$  :**

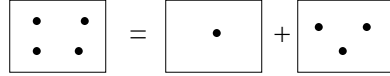
$\widehat{RT}_1^1(K)$  est l'espace des champs à densité de flux nulle ( $q \cdot n = 0$  sur  $\partial K$ ). On choisit les éléments de base suivants :

$$q_1 = \beta(x)e_1, \quad q_2 = \beta(x)\mu(y)e_1, \quad q_3 = \beta(y)e_2, \quad q_4 = \mu(x)\beta(y)e_2. \quad (1.70)$$

avec  $\mu = 2\lambda - 1$ .

**Décomposition de l'espace  $P_1(K)$  :**

On considère la décomposition suivante :



$$\boxed{\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix}} = \boxed{\bullet} + \boxed{\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ & \bullet \end{matrix}}$$

FIG. 1.8 – Décomposition de l'espace  $P_{1,1}(K)$  en  $P_0(K)$  et  $\widehat{P}_1(K)$ .

$$P_{1,1}(K) = P_0(K) \oplus \widehat{P}_1(K).$$

**Les fonctions de base de l'espace  $\widehat{P}_1(K)$  :**

$\widehat{P}_1(K)$  est l'espace orthogonal à  $P_0(K)$  (fonctions de  $P_{1,1}(K)$  à moyenne nulle), et on choisit les fonctions de base :

$$\begin{aligned}v_1(x, y) &= \mu(x) = 2\lambda(x) - 1, \\ v_2(x, y) &= \mu(y) = 2\lambda(y) - 1, \\ v_3(x, y) &= \mu(x)\mu(y) = (2\lambda(x) - 1)(2\lambda(y) - 1).\end{aligned} \quad (1.71)$$

## 1.5 Construction de l'estimateur. Application aux schémas volumes finis

### 1.5.1 Calcul de l'estimateur par découplage

Le problème (1.65) permet de définir l'estimateur d'erreur théorique  $E_h(p_h, u_h)$  et on rappelle que l'erreur de consistance est définie par  $\sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\text{div}, \Omega)}}$ .

Pour l'estimation de l'erreur de consistance, nous avons donné une borne pratique en utilisant les résultats obtenus dans [6].  $E_h(p_h, u_h)$  est donné par :

$$E_h^2(p_h, u_h) = \|\varepsilon_h^p\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + \|\varepsilon_h^u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u) \in \widehat{RT}_{1,h} \times \widehat{P}_{1,h}$  solution du problème (1.65). La résolution du problème (1.65) étant coûteuse, on l'approche par celle d'un problème (1.72) découplé en remplaçant la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  par une forme bilinéaire  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  pour laquelle les espaces  $\widehat{RT}_{1,h}^0$  et  $\widehat{RT}_{1,h}^1$  sont orthogonaux, à savoir :

$$\begin{aligned} \tilde{a}(r, s) &:= a(r_0, s_0) + a(r_1, s_1) \quad \forall r, s \in \widehat{RT}_{1,h}, \\ r &= r_0 + r_1 \quad r_0 \in \widehat{RT}_{1,h}^0, \quad r_1 \in \widehat{RT}_{1,h}^1, \\ s &= s_0 + s_1 \quad s_0 \in \widehat{RT}_{1,h}^0, \quad s_1 \in \widehat{RT}_{1,h}^1. \end{aligned}$$

Cela permet de décomposer le problème (1.72) en deux problèmes : un local sur  $\widehat{RT}_1^1(K) \times \widehat{P}_1(K)$  et un problème bien conditionné sur l'espace  $\widehat{RT}_{1,h}^0$ . Chaque problème local de dimension 4 pour le cas triangulaire et 7 pour le cas rectangulaire, se résout explicitement. Le deuxième problème de dimension le nombre de faces  $c$ , est résolu de façon approchée en remplaçant la matrice par sa diagonale.

### 1.5.2 Détermination de l'estimateur

L'équivalence entre  $a(\cdot, \cdot)$  et  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  est assurée par l'existence de deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  indépendantes de  $K$ ,  $K \in \mathfrak{S}_h$  et  $(0 < c_1 \leq c_2)$  telles que

$$c_1^2 \tilde{a}_{/K}(q, q) \leq a_{/K}(q, q) \leq c_2^2 \tilde{a}_{/K}(q, q), \quad q \in \widehat{RT}_{1,h}.$$

On montre facilement qu'on peut prendre  $c_2 = \sqrt{2}$ ; l'estimation de  $c_1$  est moins évidente elle dépend de la constante de inégalité de Cauchy Schwartz entre les deux espaces  $\widehat{RT}_1^1$  et  $\widehat{RT}_1^0$ .

On considère le problème variationnel discret modifié, en remplaçant la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  par  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_h^p \in \widehat{RT}_{1,h}, & \tilde{\varepsilon}_h^u \in \widehat{P}_{1,h}, \\ \tilde{a}(\tilde{\varepsilon}_h^p, \hat{q}_h) + b(\hat{q}_h, \tilde{\varepsilon}_h^u) = r_1(\hat{q}_h), & \hat{q}_h \in \widehat{RT}_{1,h}, \\ b(\tilde{\varepsilon}_h^p, \hat{v}_h) = r_2(\hat{v}_h), & \hat{v}_h \in \widehat{P}_{1,h}. \end{cases} \quad (1.72)$$

La solution  $\tilde{\varepsilon}_h^p$  du problème (1.72) peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\varepsilon}_h^p = \tilde{\varepsilon}_{h,0}^p + \tilde{\varepsilon}_{h,1}^p; \quad \tilde{\varepsilon}_{h,0}^p \in \widehat{RT}_{1,h}^0, \quad \tilde{\varepsilon}_{h,1}^p \in \widehat{RT}_{1,h}^1.$$

On obtient les deux problèmes variationnels découplés :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{h,1}^p \in \widehat{RT}_1^1(K), & \tilde{\varepsilon}_h^u \in \widehat{P}_1(K), \\ a_{/K}(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p, q_h) + b_{/K}(q_h, \tilde{\varepsilon}_h^u) = r_{1/K}(q_h), & q_h \in \widehat{RT}_1^1(K), \\ b_{/K}(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p, v_h) = r_{2/K}(v_h), & v_h \in \widehat{P}_1(K), \end{cases} \quad (1.73)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{h,0}^p \in \widehat{RT}_{1,h}^0, \\ a(\tilde{\varepsilon}_{h,0}^p, q_h) = r_1(q_h), \quad q_h \in \widehat{RT}_{1,h}^0. \end{cases} \quad (1.74)$$

## 1.6 Comparaison erreur-estimateur et erreur de consistance

### 1.6.1 Encadrement de l'erreur

Dans ce paragraphe, on rappelle l'expression de l'estimateur d'erreur hiérarchique théorique donnée dans le paragraphe 1.2.4. Le résultat suivant est une adaptation de la Proposition 1.1.

**Théorème 1.7** *On note  $E_h$  l'estimateur d'erreur global défini dans la Proposition 1.1, soit :*

$$E_h^2(p_h, u_h) = \|\varepsilon_h^p\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + \|\varepsilon_h^u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Alors il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que :

$$C_1 E_h(p_h, u_h) \leq (\|p - p_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 (E_h(p_h, u_h) + \sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}}).$$

avec

$$C_1 = \frac{\hat{\beta}}{\bar{C}(1 + \beta')} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\max(\hat{C}, 1)}{\bar{\beta}\sqrt{1 - \nu^2}(1 - \beta')},$$

où  $\hat{\beta}$ ,  $\bar{\beta}$  sont les constantes inf-sup pour les espaces  $(\widehat{RT}_{1,h}, \widehat{P}_{1,h})$  et  $(\overline{RT}_{1,h}, \overline{P}_{1,h})$ ;  $\hat{C}$ ,  $\bar{C}$  sont les constantes de la continuité des formes bilinéaires globales  $a(\cdot, \cdot)$  et  $a_h(\cdot, \cdot)$ ;  $\nu$  est la constante de Cauchy Schwartz forte entre les espaces  $(RT_{1,h}, \widehat{RT}_{1,h})$  avec le produit scalaire  $L^2$  et  $\beta' < 1$  est la constante de saturation avec la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$ .

**Preuve.** Voir [1] ■

L'indicateur d'erreur local est défini par :

$$E_K^2(p_h, u_h) = \|\operatorname{div} \varepsilon_h^p\|_{0,K}^2 + \|\varepsilon_h^p\|_{0,K}^2 + \|\varepsilon_h^u\|_{0,K}^2, \quad (1.75)$$

avec

$$E_h^2(p_h, u_h) = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} E_K^2(p_h, u_h).$$

**Remarque 1.8** *on a le même résultat pour la solution  $(p_h^{RT_0}, u_h^{P_0})$  du problème (1.51) mais sans le terme de l'erreur de consistance.*

## 1.6.2 Estimation et localisation de l'erreur de consistance dans le cas triangulaire :

On a le résultat suivant (voir [6]) :

**Proposition 1.2** *la forme bilinéaire  $a_h^K(.,.)$  satisfait :*

$$|a_h^K(p_h, q_h) - a^K(p_h, q_h)| \leq \varepsilon(h_K) \|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)} \|q_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}, \quad \forall p_h, q_h \in RT_0(K).$$

Avec  $\varepsilon(h_K) = \frac{h_K^2}{48}$  si  $K$  est équilatéral ( $\frac{h_K^2}{\delta_K^2} = 3$ ) et  $\varepsilon(h_K) = \frac{h_K}{3} \sqrt{\sigma_K^2 - 3} + O(h_K^2)$  dans le cas général, où  $\sigma_K$  est la constante de la famille régulière de maillages ( $\frac{h_K}{\delta_K} \leq \sigma_K$ ) ( $\delta_K$  : diamètre du cercle inscrit).

Cette majoration locale implique la majoration globale ; en remarquant que  $f_h = \operatorname{div} p_h$  (projection de  $f$  sur  $P_{0,h}$ ), on a :

**Corollaire 1.1** *L'erreur de consistance vérifie*

$$\sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h^K - a^K)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \leq \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_h \in RT_{0,h},$$

avec

$$\eta_K = \varepsilon(h_K) \left( \frac{c(K)}{3} \sum_{e \subset \partial K} \varphi_e^2 + \|f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.76)$$

avec  $\varepsilon(h_K)$  de la Proposition 1.2 et  $\varphi_e = \alpha_e^{-1}[u_h]_e$

$$\text{et } c(K) = \sum_{i=1}^3 \cot g \theta_i(K) = \frac{1}{4|K|} \sum_{i=1}^3 h_i^2.$$

**Preuve.** D'après la proposition précédente on a :

$$(a_h^K - a^K)(p_h, q_h) \leq \varepsilon(h_K) \|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)} \|q_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}, \quad \forall p_h, q_h \in RT_0(K),$$

alors

$$\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} (a_h^K - a^K)(p_h, q_h) \leq \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \varepsilon(h_K) \|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)} \|q_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}, \quad \forall p_h, q_h \in RT_{0,h},$$

d'où

$$\sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \leq \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \varepsilon(h_K)^2 \|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose

$$\eta_K^2 = \varepsilon(h_K)^2 \|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}^2,$$

et on a

$$\|p_h\|_{L^2(K)}^2 = \varphi_K^T(p_h) A_K \varphi_K(p_h) \leq \lambda_{\max}(A_K) \sum_{e \in \partial K} (\alpha_e^{-1} [u_h]_e)^2,$$

avec

$$\lambda_{\max}(A_K) = \frac{c(K) + \sqrt{c(K)^2 - 3}}{6} \leq \frac{c(K)}{3},$$

d'où le résultat. ■

### 1.6.3 Estimation de l'erreur de consistance dans le cas rectangulaire

On a le résultat suivant (J.F. Maitre) :

**Proposition 1.3** *la forme bilinéaire  $a_h^K(.,.)$  satisfait :*

$$|a_h^K(p_h, q_h) - a^K(p_h, q_h)| \leq \varepsilon(h_K) \|q_h\|_{H(\operatorname{div}, K)} |p_h|_{1,K}, \quad \forall p_h, q_h \in RT_0(K),$$

avec  $\varepsilon(h_K) = \frac{\sqrt{3}}{3} h_K$  et  $h_K = \max\{h_x^K, h_y^K\}$ .

**Remarque 1.9** *Avec la norme  $\|p_h\|_{H(\operatorname{div}, K)}$ , comme dans la Proposition 1.2, on obtient  $\varepsilon(h_K) = 2$  (voir [12]); la semi-norme  $|\cdot|_1$  est la bonne mesure ( $|p_h|_{1,K} = 0 \Rightarrow a_h^K(p_h, q_h) = a^K(p_h, q_h)$ ,  $\forall q_h \in RT_0(K)$ ).*

**Corollaire 1.2** *L'erreur de consistance vérifie :*

$$\sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \leq \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_h \in RT_0(\Omega),$$

avec

$$\eta_K = \varepsilon(h_K) |K|^{-1/2} \left[ (\varphi_e - \varphi_w)^2 + (\varphi_n - \varphi_s)^2 \right]^{1/2} \quad (1.77)$$

avec  $\varepsilon(h_K) = \frac{h_K}{\sqrt{3}}$  et  $\varphi_e = h_y [u_h]_e / d_e$ ,  $d_e = d(w_K, w_{K_e})$  par exemple.

**Preuve.** L'inégalité se démontre comme celle du Corollaire 1.1, et l'expression de  $\eta_K$  résulte du calcul exact de  $|p_h|_{1,K}$  en fonction des sauts de  $u_h$ . ■

## 1.7 Calcul de la composante dans $\widehat{RT}_{1,h}^0$ (“rotationnel des bulles”) de l’estimateur.

### 1.7.1 Solution approchée du système. Contribution à l’estimateur

Soit  $\mathfrak{S}_h$  un maillage triangulaire ou rectangulaire, le problème à résoudre de taille  $c \times c$  ( $c$  le nombre de côtés du maillage) est le suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{h,0}^p \in \widehat{RT}_{1,h}^0, \\ a(\tilde{\varepsilon}_{h,0}^p, q_h) = r_1(q_h), \quad \forall q_h \in \widehat{RT}_{1,h}^0. \end{cases} \quad (1.78)$$

Comme  $\widehat{RT}_{1,h}^0 = \text{rot}(P_{h,2}^0)$  le problème (1.78) est équivalent à :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{h,0}^p = \text{rot}(\varphi_h), \quad \varphi_h \in P_{h,2}^0, \\ \int_{\Omega} \nabla(\varphi_h) \cdot \nabla(\psi_h) dx dy = - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{rot}(\psi_h) dx dy, \quad \forall \psi_h \in P_{h,2}^0. \end{cases} \quad (1.79)$$

**Résolution du problème (1.78) : (Système  $c \times c$ )**

La fonction  $\varphi_h$  est donnée par  $\varphi_h = \sum_{k=1}^c \zeta_k \psi_k$  où  $(\psi_k)_{k=1}^c$  est la base nodale de l’espace  $P_{h,2}^0$ . Donc il faut résoudre le problème  $A\zeta = b$  pour trouver  $\tilde{\varepsilon}_{h,0}^p$ , avec

$$A = \left( \int_{\Omega} \nabla(\psi_i) \cdot \nabla(\psi_j) dx dy \right)_{1 \leq i, j \leq c} \quad \text{et} \quad b = \left( - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{rot}(\psi_i) dx dy \right)_{1 \leq i \leq c}.$$

Comme la matrice  $A$  est bien conditionnée, on peut l’approcher par sa diagonale et considérer  $b^T D_A^{-1} b$  comme approximation de  $\|\tilde{\varepsilon}_{h,0}^p\|_{0,\Omega}^2 = \|\text{rot} \varphi_h\|_{0,\Omega}^2 = b^T A^{-1} b$ .

On a les inégalités :

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(D_A^{-1} A)} b^T D_A^{-1} b \leq \|\tilde{\varepsilon}_{h,0}^p\|_{0,\Omega}^2 = b^T A^{-1} b \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(D_A^{-1} A)} b^T D_A^{-1} b.$$

L’estimateur local  $\xi_K$  est finalement défini par :

$$\xi_K^2 = \sum_{e \in \partial K} \frac{A_{ee}^K}{(A_{ee}^K + A_{ee}^{K'})^2} b_e^2, \quad (1.80)$$

et on a

$$\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \xi_K^2 = b^T D_A^{-1} b.$$

## 1.7.2 Expression du second membre $b$ en fonction de $p_h$

Calcul de  $r_1(\cdot)$  :

$$\begin{aligned} r_1(\text{rot}(\psi_e)) &= - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{rot}(\psi_e) \, dx dy, \\ r_1(\text{rot}(\psi_e)) &= - \int_{K_e^+ \cup K_e^-} p_h \cdot \text{rot}(\psi_e) \, dx dy. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_K p_h \cdot \text{rot}(\psi_e) \, dx dy &= \int_K \left( \frac{\partial(p_h)_y}{\partial y} - \frac{\partial(p_h)_x}{\partial x} \right) \, dx dy + \int_{\partial K} \psi_e ((p_h)_x \cdot n_y - (p_h)_y \cdot n_x) \, ds, \\ &= \int_{\partial K} \psi_e \begin{pmatrix} (p_h)_x \\ (p_h)_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_y \\ -n_x \end{pmatrix} \, ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_K p_h \cdot \text{rot}(\psi_e) \, dx dy = \int_e \psi_e p_h \cdot t_K^e \, ds, \quad \text{où } t_K^e \text{ est le vecteur tangent } (t_K^e = R^{\frac{-\pi}{2}} n_K^e \text{ sortante}).$$

Comme

$$r_1(\text{rot}(\psi_e)) = - \int_e \psi_e p_h \cdot t_K^e \, ds - \int_e \psi_e p_h \cdot t_{K_e}^e \, ds, \quad \text{avec } t_{K_e}^e = -t_K^e,$$

le second membre du problème (1.79) est donné par

$$\begin{aligned} b_e &= r_1(\text{rot}(\psi_e)) = \int_e \psi_e (p_{h/K_e} - p_{h/K}) \cdot t_K^e \, ds = \int_e \psi_e [p_h]_e \cdot t_K^e \, ds \\ &= \frac{2}{3} h_e [p_h]_e(m_e) \cdot t_K^e \quad \text{où } m_e \text{ le milieu de } e. \end{aligned}$$

## 1.7.3 Calcul pour le cas triangulaire

On va expliciter l'estimateur  $\xi_K$  (1.80). On utilise la numérotation des sommets et faces de la FIG. 1.9 autour du triangle  $K = (a_1 a_2 a_3)$ , et on note  $K_i$ ,  $i = 1$  à  $3$ , l'élément voisin de  $K$  partageant la face  $i$ . Il faut calculer  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  pour en déduire  $\xi_K$  par (1.80). On limite les explications au calcul de  $b_1$ .

On rappelle que  $p_h = \sum_{e \in \partial K} \varphi_e(p_h) p_e$  avec  $\varphi_e(p_h) = \frac{[u_h]_e}{\alpha_e}$  et que les fonctions de base dans le cas d'un maillage triangulaire sont données par :

$$p_i = \frac{1}{2|K|} (x - a_i), \quad i = 1 \text{ à } 3.$$

- Calcul de  $b_1$  : le saut  $[p_h \cdot t_1]_1$  fait intervenir les fonctions de base  $p_i$ ,  $i = 1$  à  $3$ .

Soit  $m_{e_1}$  le milieu de  $[a_2, a_3]$ ; on a :  $t_K^{e_1} = \frac{a_2 - a_3}{h_1}$

$$[p_2]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1} = \frac{h_1}{4|K|}, \quad [p_3]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1} = -\frac{h_1}{4|K|},$$

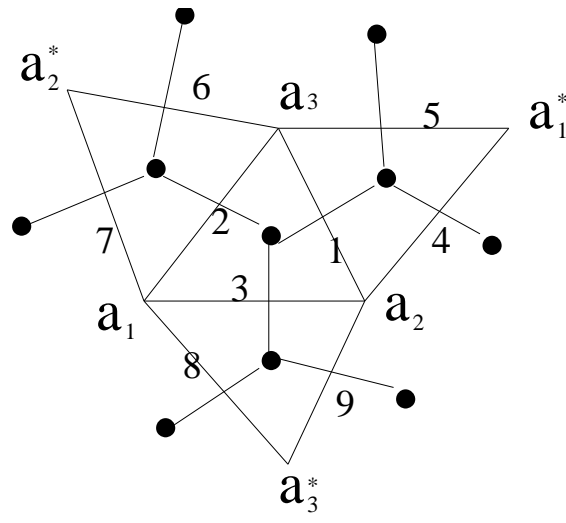


FIG. 1.9 – Schéma qui explique le calcul de  $r_1(\text{rot } \psi_e)$ .

$$[p_4]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1} = \frac{h_1}{4|K_1|}, \quad [p_5]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1} = -\frac{h_1}{4|K_1|},$$

et

$$[p_1]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1} = \left( \frac{(h_2^2 - h_3^2)}{4|K|} + \frac{(h_5^2 - h_4^2)}{4|K_1|} \right) \frac{1}{h_1}.$$

Comme

$$b_1 = \frac{2}{3} h_{e_1} \sum_{f \in \partial K_1^+ \cup \partial K_1^-} \varphi_f(p_h) [p_f]_{e_1}(m_{e_1}) \cdot t_K^{e_1},$$

on a

$$b_1 = \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{h_2^2 - h_3^2}{|K|} + \frac{h_5^2 - h_4^2}{|K_1|} \right) \varphi_1 + h_1^2 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{|K|} + \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{|K_1|} \right) \right].$$

On procède de même pour les 2 autres faces de  $K$  et on obtient les expressions :

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{h_3^2 - h_1^2}{|K|} + \frac{h_7^2 - h_6^2}{|K_2|} \right) \varphi_2 + h_2^2 \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{|K|} + \frac{\varphi_6 - \varphi_7}{|K_2|} \right) \right], \\ b_3 &= \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{|K|} + \frac{h_9^2 - h_8^2}{|K_3|} \right) \varphi_3 + h_3^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{|K|} + \frac{\varphi_8 - \varphi_9}{|K_3|} \right) \right]. \end{aligned}$$

L'estimateur  $\xi_K$  de  $\|\text{rot } \varphi_h\|_{0,K}$  dépend de 9 sauts  $[u_h]$  soit 10 valeurs de  $u_h$  ; on a en effet

$$\xi_K^2 = \sum_{e \in \partial K} \frac{A_{ee}^K}{(A_{ee})^2} b_e^2, \text{ soit finalement}$$

$$\begin{aligned} \xi_K^2 &= \frac{A_{11}^K}{36A_{11}^2} \left[ \left( \frac{h_2^2 - h_3^2}{|K|} + \frac{h_5^2 - h_4^2}{|K_1|} \right) \varphi_1 + h_1^2 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{|K|} + \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{|K_1|} \right) \right]^2 \\ &+ \frac{A_{22}^K}{36A_{22}^2} \left[ \left( \frac{h_3^2 - h_1^2}{|K|} + \frac{h_7^2 - h_6^2}{|K_2|} \right) \varphi_2 + h_2^2 \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{|K|} + \frac{\varphi_6 - \varphi_7}{|K_2|} \right) \right]^2 \\ &+ \frac{A_{33}^K}{36A_{33}^2} \left[ \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{|K|} + \frac{h_9^2 - h_8^2}{|K_3|} \right) \varphi_3 + h_3^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{|K|} + \frac{\varphi_8 - \varphi_9}{|K_3|} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (1.81)$$



avec (voir Annexe 1)

$$\frac{A_{ii}^K}{A_{ii}^2} = \frac{3}{4} \frac{c^K}{(c^K + c^{K_i})^2}, \quad i = 1 \text{ à } 3 \quad \text{où} \quad c^K = \sum_{i=1}^3 \cot g(\theta_i^K).$$

**Remarque 1.10** Dans (1.81) les coefficients du type  $h_i^2/|K|$  peuvent être remplacés par les fonctions des seules cotangentes des angles.

### 1.7.4 Calcul pour le cas rectangulaire

Par la suite, on utilise la numérotation des sommets et faces de la FIG. 1.10 autour du rectangle. On rappelle que  $p_h = \sum_{e \in \partial K} \varphi_e(p_h) p_e$  avec  $\varphi_e(p_h) = \frac{[u_h]_e}{\alpha_e}$  et que les fonctions de base dans le cas d'un maillage rectangulaire sont :

$$p_1 = \frac{1}{h_y} \lambda(x) e_1, \quad p_2 = \frac{1}{h_y} (1 - \lambda(x)) e_1, \quad p_3 = \frac{1}{h_x} \lambda(y) e_2 \quad \text{et} \quad p_4 = \frac{1}{h_x} (1 - \lambda(y)) e_2.$$

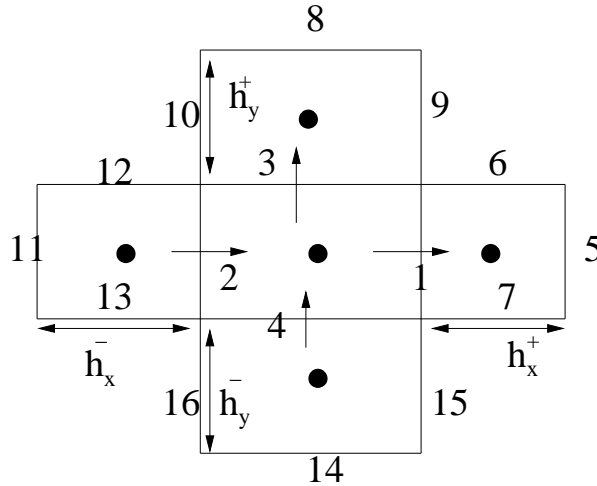


FIG. 1.10 – Numérotation des éléments voisins et orientation des flux.

On a montré au paragraphe 1.7.2 que :

$$b_e = \frac{2}{3} h_e \sum_{f \in \partial K_1^+ \cup \partial K_1^-} \varphi_f(p_h) [p_f]_e(m_e) \cdot t_K^e,$$

• Calcul de  $b_1$  (face 1) :

Sur l'élément  $K_e$  (l'élément à l'Est de K)  $t_e = e_2$ , donc

$$(p_6 \cdot t_e)(m_e) = (p_7 \cdot t_e)(m_e) = \frac{1}{2h_x^+},$$

Sur l'élément  $K$ ,  $t_e = -e_2$ , donc

$$(p_3 \cdot t_e)(m_e) = (p_4 \cdot t_e)(m_e) = -\frac{1}{2h_x^-}.$$

Comme  $p_1, p_2, p_5$  sont orthogonaux à  $t_e$ , l'expression de  $b_1$  est

$$b_1 = \frac{1}{3} h_y \left[ \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} - \frac{(\varphi_6 + \varphi_7)}{h_x^+} \right].$$

On procède de même pour les 3 autres faces de  $K$  et on obtient les expressions :

$$b_2 = \frac{1}{3} h_y \left[ \frac{(\varphi_{12} + \varphi_{13})}{h_x^-} - \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} \right],$$

$$b_3 = \frac{1}{3} h_x \left[ \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} - \frac{(\varphi_9 + \varphi_{10})}{h_y^+} \right],$$

$$b_4 = \frac{1}{3} h_x \left[ \frac{(\varphi_{15} + \varphi_{16})}{h_y^-} - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} \right].$$

L'estimateur  $\xi_K$  de  $\|\text{rot } \varphi_h\|_{0,K}$  dépend de 12 sauts  $[u_h]$  soit 9 valeurs de  $u_h$  ; on a en effet

$$\xi_K^2 = \sum_{e \in \partial K} \frac{A_{ee}^K}{(A_{ee})^2} b_e^2, \text{ soit finalement}$$

$$\begin{aligned} \xi_K^2 = \frac{1}{9} & \left[ \frac{A_{11}^K}{(A_{11})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} - \frac{(\varphi_6 + \varphi_7)}{h_x^+} \right]^2 + \frac{A_{22}^K}{(A_{22})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_{12} + \varphi_{13})}{h_x^-} - \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{A_{33}^K}{(A_{33})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} - \frac{(\varphi_9 + \varphi_{10})}{h_y^+} \right]^2 + \frac{A_{44}^K}{(A_{44})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_{15} + \varphi_{16})}{h_y^-} - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} \right]^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Avec

$$A_{11}^K = A_{22}^K = \frac{8}{3} \left[ \frac{2}{3} \frac{h_x}{h_y} + \frac{1}{5} \frac{h_y}{h_x} \right] \text{ et } A_{33}^K = A_{44}^K = \frac{8}{3} \left[ \frac{2}{3} \frac{h_y}{h_x} + \frac{1}{5} \frac{h_x}{h_y} \right], \quad (1.83)$$

$$A_{11} = \frac{8}{3} \frac{h_x + h_x^+}{h_y} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \frac{h_y^2}{h_x h_x^+} \right], \quad A_{22} = \frac{8}{3} \frac{h_x + h_x^-}{h_y} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \frac{h_y^2}{h_x^- h_x} \right], \quad (1.84)$$

$$A_{33} = \frac{8}{3} \frac{h_y + h_y^+}{h_x} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \frac{h_x^2}{h_y h_y^+} \right] \text{ et } A_{44} = \frac{8}{3} \frac{h_y + h_y^-}{h_x} \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \frac{h_x^2}{h_y^- h_y} \right]. \quad (1.85)$$

## 1.8 Calcul d'une expression approchée de la composante dans $\widehat{RT}_{1,h}^1$ (problèmes locaux)

### 1.8.1 Cas triangulaire

Résolution du problème local (sur un triangle  $K$ ) en utilisant les fonctions de base  $(q_i)_{i=1}^2$  (resp.  $(v_i)_{i=1}^2$ ) de l'espace  $\widehat{RT}_1^1$  (resp.  $\widehat{P}_{1,h}$ ) :

$$\begin{cases} A\phi(\widehat{\varepsilon}_{h,1}^p) + B^T \psi(\widehat{\varepsilon}_h^u) & = R_1(u_h), \\ B\phi(\widehat{\varepsilon}_{h,1}^p) & = R_2(f), \end{cases} \quad (1.86)$$

où  $R_1(u_h)$  et  $R_2(f)$  sont donnés par :

$$R_1(u_h) = -C\gamma = - \left( \begin{array}{c} \sum_{i=1}^3 \frac{[u_h]_{e_i}}{\alpha_{e_i}} \int_K p_i \cdot q_1 \, dx dy \\ \sum_{i=1}^3 \frac{[u_h]_{e_i}}{\alpha_{e_i}} \int_K p_i \cdot q_2 \, dx dy \end{array} \right),$$

$$C = \left( \int_K q_i \cdot p_j \, dx dy \right)_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4}, \quad \gamma_i = \varphi_i = \frac{[u_h]_{e_i}}{\alpha_{e_i}}, \quad ((p_i)_i \text{ les fonctions de base de l'espace } RT_0(K)),$$

$$R_2(f) = - \left( \begin{array}{c} \int_K f(3\lambda_1 - 1) \, dx dy \\ \int_K f(3\lambda_2 - 1) \, dx dy \end{array} \right).$$

$((\lambda_i)_i)$  sont les coordonnées barycentriques de l'élément  $K$ ,  $A = \left( \int_K q_i \cdot q_j \, dx dy \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ ,

$B = \left( \int_K \operatorname{div} q_j v_i \, dx dy \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ , (matrices symétriques inversibles explicitées dans l'Annexe 2).

La contribution à l'indicateur local est donnée par :

$$\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2,$$

soit  $\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \phi^T(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) A \phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) + \psi^T(\tilde{\varepsilon}_h^u) V \psi(\tilde{\varepsilon}_h^u)$ , avec  $V = \left( \int_K v_i v_j \, dx dy \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = B$ .

Si on résout le problème (1.86) on obtient :

$$\psi(\tilde{\varepsilon}_h^u) = B^{-1}(R_1(u_h) - A\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p)),$$

et

$$\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) = -\frac{4}{3} \frac{1}{|K|} \left( \begin{array}{c} 2 \int_K f v_1 \, dx dy + \int_K f v_2 \, dx dy \\ \int_K f v_1 \, dx dy + 2 \int_K f v_2 \, dx dy \end{array} \right).$$

Pour plus de détails voir Annexe 2.

**Proposition 1.4** *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 \leq \frac{h_K^2}{10} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2, \quad (1.87)$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 \leq \frac{h_K^4}{50} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{43}{300} \frac{h_K}{d_K} h_K^2 \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right). \quad (1.88)$$

avec  $\varphi_i = h_i [u_h]_i / d_i$ ,  $i = 1$  à  $3$  et  $d_K$  la plus petite hauteur du triangle  $K$ .

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 &= \phi^T(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p)A\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) \\ &= R_2(f)^T B^{-1}AB^{-1}R_2(f) \leq \lambda_{\max}(B^{-1}A)R_2(f)^T B^{-1}R_2(f).\end{aligned}$$

Comme  $\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 = R_2(f)^T B^{-1}R_2(f)$  on a

$$\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 \leq \lambda_{\max}(B^{-1}A)\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \leq \frac{h_K^2}{10}\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2,$$

(voir Annexe 2).

Pour la deuxième inégalité de la proposition, on a

$$\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 = \psi^T(\tilde{\varepsilon}_h^u)B\psi(\tilde{\varepsilon}_h^u), \quad \text{et} \quad \psi(\tilde{\varepsilon}_h^u) = -B^{-1}(A\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) + C\gamma),$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 &\leq 2(\phi^T(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p)AB^{-1}A\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) + (C\gamma)^T B^{-1}(C\gamma)), \\ &\leq 2(\lambda_{\max}(B^{-1}A)\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 + (C\gamma)^T B^{-1}(C\gamma)).\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(C\gamma)^T B^{-1}(C\gamma) &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(B)}\|C\gamma\|^2 \\ &= \frac{4}{|K|}\|C\gamma\|^2 \leq \frac{4}{|K|}\left(\sum_{ij} C_{ij}^2\right)\left(\sum_i \gamma_i^2\right).\end{aligned}$$

Comme  $\sum_{ij} C_{ij}^2 \leq \frac{43}{4800}h_K^4$  (Annexe 2) on a bien (1.88). ■

## 1.8.2 Cas rectangulaire

Dans le cas d'un maillage rectangulaire et en utilisant les fonctions de base des espaces, on obtient :

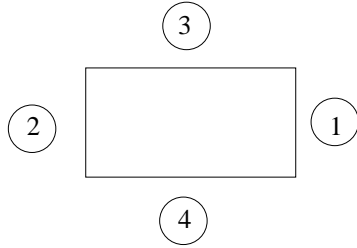


FIG. 1.11 – Numérotation des faces du rectangle K.

$$R_1(u_h) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} h_x^2 \frac{[u_h]_e}{h_x^e} - h_x^2 \frac{[u_h]_w}{h_x^w} \\ 0 \\ h_y^2 \frac{[u_h]_n}{h_y^n} - h_y^2 \frac{[u_h]_s}{h_y^s} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_2(f) = \begin{pmatrix} \int_K f(2\lambda(x) - 1) dx dy \\ \int_K f(2\lambda(y) - 1) dx dy \\ \int_K f((2\lambda(x) - 1)(2\lambda(y) - 1)) dx dy \end{pmatrix}.$$

avec  $h_x^e = d(w_K, w_e)$ , par exemple. Ici, on a  $A = \left( \int_K q_i \cdot q_j \, dx dy \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$

et  $B = \left( \int_K \operatorname{div} q_j v_i \, dx dy \right)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4}$ .

La résolution du problème algébrique donne :

$$\psi(\tilde{\varepsilon}_h^u) = \begin{pmatrix} \frac{h_x}{4h_y} \left( \frac{6}{5} \int_K f v_1 \, dx dy + (\gamma_1 - \gamma_2) \right) \\ \frac{h_y}{4h_x} \left( \frac{6}{5} \int_K f v_2 \, dx dy + (\gamma_3 - \gamma_4) \right) \\ \frac{6}{10} \frac{h_y h_x}{h_y^2 + h_x^2} \int_K f v_3 \, dx dy \end{pmatrix},$$

où

$$\gamma_1 = \frac{[u_h]_1}{h_x^+} h_y, \quad \gamma_2 = \frac{[u_h]_2}{h_x^-} h_y, \quad \gamma_3 = \frac{[u_h]_3}{h_y^+} h_x, \quad \text{et} \quad \gamma_4 = \frac{[u_h]_4}{h_y^-} h_x,$$

et

$$\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p) = -\frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_y} \int_K f v_1 \, dx dy \\ \frac{3}{h_x} \frac{h_y h_x}{h_y^2 + h_x^2} \int_K f v_3 \, dx dy \\ \frac{1}{h_x} \int_K f v_2 \, dx dy \\ \frac{3}{h_y} \frac{h_y h_x}{h_y^2 + h_x^2} \int_K f v_3 \, dx dy \end{pmatrix}.$$

Pour plus de détails voir Annexe 2.

**Proposition 1.5** *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 \leq \frac{h_K^2}{10} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2, \quad (1.89)$$

$$\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 \leq \frac{61}{400} \left[ \frac{h_K^4}{9} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \right] + \frac{1}{48} \left( h_x^2 \frac{h_x}{h_y} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + h_y^2 \frac{h_y}{h_x} (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right) \quad (1.90)$$

avec  $l = \min\{h_x, h_y\}$ ,  $h_K = \max\{h_x, h_y\}$ , longueur du rectangle  $K$ .

**Preuve.** Démontrons que  $\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 \leq \frac{h_K^2}{10} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 &= \phi^T(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p)A\phi(\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p), \text{ et avec l'expression de A (Annexe 2) :} \\
&= \frac{3}{10} \frac{|K|}{h_y^2} \left( \int_K f v_1 dx dy \right)^2 + \frac{3}{10} \frac{|K|}{h_x^2} \left( \int_K f v_2 dx dy \right)^2 \\
&\quad + \frac{27}{10} \frac{|K|}{3} \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \frac{h_x^2 h_y^2}{(h_x^2 + h_y^2)^2} \left( \int_K f v_3 dx dy \right)^2, \\
&\leq \frac{|K|^2}{10} \left( \max \left\{ \frac{1}{h_x^2}, \frac{1}{h_y^2}, \frac{1}{(h_x^2 + h_y^2)} \right\} \right) \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2, \\
&\leq \frac{h_K^2}{10} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2, \text{ (expression de } \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \text{ en Annexe 2).}
\end{aligned}$$

Démontrons la deuxième inégalité de la proposition.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 &= \psi^T(\tilde{\varepsilon}_h^u)V\psi(\tilde{\varepsilon}_h^u), \text{ et avec l'expression de V (Annexe 2),} \\
&= \frac{|K|}{3} \left( \frac{h_x^2}{16h_y^2} \left( \frac{6}{5} \int_K f v_1 dx dy + (\gamma_1 - \gamma_2) \right)^2 + \frac{h_y^2}{16h_x^2} \left( \frac{6}{5} \int_K f v_2 dx dy + (\gamma_3 - \gamma_4) \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{12}{100} \frac{h_x^2 h_y^2}{(h_x^2 + h_y^2)^2} \left( \int_K f v_3 dx dy \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 &\leq \frac{|K|}{3} \left( \max \left\{ \frac{61}{25} \left( \frac{h_x}{4h_y} \right)^2, \frac{61}{25} \left( \frac{h_y}{4h_x} \right)^2, \frac{12}{100} \frac{h_x^2 h_y^2}{(h_x^2 + h_y^2)^2} \right\} \right) \frac{|K|}{3} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \\
&\quad + \left( \frac{h_x}{4h_y} \right)^2 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + \left( \frac{h_y}{4h_x} \right)^2 (\gamma_3 - \gamma_4)^2, \\
&\quad \text{(expression de } \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \text{ en Annexe 2),}
\end{aligned}$$

et

$$\max \left\{ \frac{61}{25} \left( \frac{h_x}{4h_y} \right)^2, \frac{61}{25} \left( \frac{h_y}{4h_x} \right)^2, \frac{12}{100} \frac{h_x^2 h_y^2}{(h_x^2 + h_y^2)^2} \right\} \leq \frac{61}{400} \frac{h_K^2}{l^2},$$

donc

$$\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 \leq \frac{61}{400} \left[ \frac{h_K^4}{9} \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 \right] + \frac{1}{48} \left( h_x^2 \frac{h_x}{h_y} (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + h_y^2 \frac{h_y}{h_x} (\gamma_3 - \gamma_4)^2 \right).$$

■

## 1.9 Expression utilisable de l'estimateur avec prise en compte de l'erreur de consistance

On pose

$$Err(p_h, u_h) = (\|p - p_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a la majoration d'erreur (voir le Théorème 1.7)

$$Err(p_h, u_h) \leq c \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \tilde{E}_K^{*2}(p_h, u_h) \right)^{1/2} + \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2},$$

où  $\tilde{E}_K^{*2}$  est l'estimateur local donné par

$$\tilde{E}_K^{*2}(p_h, u_h) = \xi_K^2 + \|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 + \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2, \quad (1.91)$$

et où  $\eta_K$  est la contribution locale de l'erreur de consistance (voir Corollaire 1.1 pour le cas triangulaire et Corollaire 1.2 pour le cas rectangulaire). En majorant, on a :

$$Err(p_h, u_h) \leq c\sqrt{2} \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \tilde{E}_K^{*2}(p_h, u_h) + \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}.$$

Nous définissons alors l'estimateur  $\mathcal{E}_K$  prenant en compte l'erreur de consistance par :

$$\mathcal{E}_K^2 = \tilde{E}_K^{*2} + \eta_K^2, \quad (1.92)$$

qui vérifie

$$Err(p_h, u_h) \leq c\sqrt{2} \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \mathcal{E}_K^2 \right)^{1/2}.$$

Avec les Propositions 1.4 et 1.5, on a :

$$\tilde{E}_K^{*2} = \xi_K^2 + \left(1 + \frac{h_K^2}{10}\right) \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2 \quad (1.93)$$

où  $h_K = \max\{h_x, h_y\}$  pour le rectangle.

• **L'estimateur d'erreur prenant en compte l'erreur de consistance pour le cas triangulaire** ( $\mathcal{E}_K$  donné par (1.91), (1.92))

Dans le cas triangulaire, la contribution locale de l'erreur de consistance est donnée par (voir Corollaire 1.1)

$$\eta_K^2 = \varepsilon^2(h_K) \left( \frac{c(K)}{3} \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right) + \|f_h\|_{0,K}^2 \right).$$

avec  $\varphi_i = \frac{h_i[u_h]_i}{d_i}$  et  $\varepsilon(h_K) = \frac{h_K}{3} \sqrt{\sigma_K^2 - 3} + 0(h_K^2)$  avec  $\sigma_K = \frac{h_K}{\delta_K}$ ,  $\delta_K$  diamètre du cercle inscrit et  $f_h$  est la projection de  $f$  sur  $P_{0,h}$ .

En regroupant les différentes contributions ( $\xi_K^2$  de (1.91) et  $\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2$  de Proposition

1.4), on a : (voir FIG. 1.9 pour la numérotation) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_K^2 &= \frac{A_{11}^K}{36A_{11}^2} \left[ \left( \frac{h_2^2 - h_3^2}{|K|} + \frac{h_5^2 - h_4^2}{|K_1|} \right) \varphi_1 + h_1^2 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{|K|} + \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{|K_1|} \right) \right]^2 \\
&+ \frac{A_{22}^K}{36A_{22}^2} \left[ \left( \frac{h_3^2 - h_1^2}{|K|} + \frac{h_7^2 - h_6^2}{|K_2|} \right) \varphi_2 + h_2^2 \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{|K|} + \frac{\varphi_6 - \varphi_7}{|K_2|} \right) \right]^2 \\
&+ \frac{A_{33}^K}{36A_{33}^2} \left[ \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{|K|} + \frac{h_9^2 - h_8^2}{|K_3|} \right) \varphi_3 + h_3^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{|K|} + \frac{\varphi_8 - \varphi_9}{|K_3|} \right) \right]^2, \\
&+ \left( 1 + \frac{h_K^2}{10} + \frac{h_K^4}{50} \right) \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{43}{300} \frac{h_K}{d_K} h_K^2 \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right) \\
&+ \varepsilon^2(h_K) \left[ \frac{c(K)}{3} \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right) + \|f_h\|_{0,K}^2 \right],
\end{aligned} \tag{1.94}$$

avec (voir Annexe 1)

$$\frac{A_{ii}^K}{A_{ii}^2} = \frac{3}{4} \frac{c^K}{(c^K + c^{K_i})^2}, \quad i = 1 \text{ à } 3.$$

En omettant les termes négligables (lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ), on peut utiliser l'expression approchée :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_K^2 &= \frac{A_{11}^K}{36A_{11}^2} \left[ \left( \frac{h_2^2 - h_3^2}{|K|} + \frac{h_5^2 - h_4^2}{|K_1|} \right) \varphi_1 + h_1^2 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{|K|} + \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{|K_1|} \right) \right]^2 \\
&+ \frac{A_{22}^K}{36A_{22}^2} \left[ \left( \frac{h_3^2 - h_1^2}{|K|} + \frac{h_7^2 - h_6^2}{|K_2|} \right) \varphi_2 + h_2^2 \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{|K|} + \frac{\varphi_6 - \varphi_7}{|K_2|} \right) \right]^2 \\
&+ \frac{A_{33}^K}{36A_{33}^2} \left[ \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{|K|} + \frac{h_9^2 - h_8^2}{|K_3|} \right) \varphi_3 + h_3^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{|K|} + \frac{\varphi_8 - \varphi_9}{|K_3|} \right) \right]^2, \\
&+ \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{h_K^2}{9} \left[ \frac{(\sigma_K^2 - 3)c(K)}{3} + \frac{129}{100} \frac{h_K}{d_K} \right] \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right) + (\sigma_K^2 - 3) \|f_h\|_{0,K}^2,
\end{aligned} \tag{1.95}$$

où  $\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 = \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f - f_h)\|_{0,K}^2 \leq \|f - f_h\|_{0,K}^2$ .

**Remarque 1.11** Dans (1.94), (1.95) les coefficients du type  $h_i^2/|K|$  peuvent être remplacés par les fonctions des seules cotangentes des angles. Par exemple

$$\frac{h_2^2 - h_3^2}{|K|} = 2(\cotg \theta_2(K) - \cotg \theta_3(K)).$$

Dans le cas d'un maillage triangulaire équilatéral (et lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ), la contribution locale de l'estimateur approché est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_K^2 &= \frac{1}{144} \left[ \left( \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_5 \right)^2 + \left( \varphi_3 - \varphi_1 + \varphi_6 - \varphi_7 \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left( \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_8 - \varphi_9 \right)^2 \right] + \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{43\sqrt{3}}{300} h_K^2 \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2 \right),
\end{aligned}$$



avec  $\varphi_i = \sqrt{3}[u_h]_i$ .

• **L'estimateur d'erreur prenant en compte l'erreur de consistance pour le cas rectangulaire**

Dans le cas rectangulaire la contribution locale de l'erreur de consistance est donnée par (voir Corollaire 1.2)

$$\eta_K^2 = \frac{h_K^2}{3} \frac{1}{h_x h_y} \left( (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right).$$

En regroupant les différentes contributions, on a ici : (voir FIG. 1.10 pour la numérotation) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K^2 &= \frac{1}{9} \left( \frac{A_{11}^K}{(A_{11})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} - \frac{(\varphi_6 + \varphi_7)}{h_x^+} \right]^2 + \frac{A_{22}^K}{(A_{22})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_{12} + \varphi_{13})}{h_x^-} - \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} \right]^2 \right. \\ &+ \frac{A_{33}^K}{(A_{33})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} - \frac{(\varphi_9 + \varphi_{10})}{h_y^+} \right]^2 + \frac{A_{44}^K}{(A_{44})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_{15} + \varphi_{16})}{h_y^-} - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} \right]^2 \left. \right) \\ &+ \left( 1 + \frac{h_K^2}{10} + \frac{61}{3600} h_K^4 \right) \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \frac{h_K}{3} \left[ \frac{1}{l} + \frac{1}{16} \frac{h_x^2}{h_y^2} l \right] \\ &+ (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \frac{h_K}{3} \left[ \frac{1}{l} + \frac{1}{16} \frac{h_y^2}{h_x^2} l \right], \end{aligned} \quad (1.96)$$

avec  $\varphi_i = \frac{h_i[u_h]_i}{d_i}$  et  $A_{11}^K, A_{22}^K, A_{33}^K$  et  $A_{44}^K$  donnés par (1.83),  $A_{11}$  et  $A_{22}$  donnés par (1.84) et  $A_{33}, A_{44}$  donnés par (1.85).

En omettant les termes négligables (lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ), on peut utiliser l'expression approchée :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K^2 &= \frac{1}{9} \left( \frac{A_{11}^K}{(A_{11})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} - \frac{(\varphi_6 + \varphi_7)}{h_x^+} \right]^2 + \frac{A_{22}^K}{(A_{22})^2} h_y^2 \left[ \frac{(\varphi_{12} + \varphi_{13})}{h_x^-} - \frac{(\varphi_3 + \varphi_4)}{h_x} \right]^2 \right. \\ &+ \frac{A_{33}^K}{(A_{33})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} - \frac{(\varphi_9 + \varphi_{10})}{h_y^+} \right]^2 + \frac{A_{44}^K}{(A_{44})^2} h_x^2 \left[ \frac{(\varphi_{15} + \varphi_{16})}{h_y^-} - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{h_y} \right]^2 \left. \right) \\ &+ \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{h_K}{3l} \left( (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Dans le cas d'un maillage carré (et lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ), la contribution locale de l'estimateur approché est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K^2 &= \frac{5}{416} \left[ \left( \varphi_3 + \varphi_4 - (\varphi_6 + \varphi_7) \right)^2 + \left( \varphi_{12} + \varphi_{13} - (\varphi_3 + \varphi_4) \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left( \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_9 + \varphi_{10}) \right)^2 + \left( \varphi_{15} + \varphi_{16} - (\varphi_1 + \varphi_2) \right)^2 \right] \\ &+ \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{1}{3} \left( (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right), \end{aligned}$$

avec  $\varphi_i = [u_h]_i$ .

**Remarque 1.12** La différence entre les deux estimateurs (1.94) et (1.96) est due à l'estimation de l'erreur de consistance, en effet dans le cas triangulaire le carré de l'erreur de consistance est majorée par  $\varepsilon(h_K)^2 \|p_h\|_{H(\text{div}, K)}^2$ , d'où l'ordre  $O(h_K^2)$ . En revanche, dans le cas rectangulaire, elle est majorée par  $\varepsilon(h_K)^2 |p_h|_{1,K}^2$ , d'où l'ordre  $O(1)$ .

**Remarque 1.13** On a  $\|f_h\|_{0,K}^2 = \frac{1}{|K|}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^2$  (resp.  $\frac{1}{|K|}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4)^2$ ) pour le cas triangulaire (resp. rectangulaire).

**Remarque 1.14** L'estimateur dans le cas rectangulaire donné dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$ ), peut être généralisé facilement à  $d = n$ .

## 1.10 Retour sur la comparaison erreur-estimateur

L'équivalence entre les solutions des problèmes (1.72) et (1.65) est assurée par la proposition suivante :

**Proposition 1.6** Les solutions  $(\tilde{\varepsilon}_h^p, \tilde{\varepsilon}_h^u)$  et  $(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^u) \in \widehat{RT}_{1,h} \times \widehat{P}_{1,h}$  des problèmes variationnels discrets (1.72) et (1.65) sont équivalentes dans le sens où il existe des constantes ( $0 < C_1 \leq C_2$ ) et ( $C_3 > 0$ ) indépendantes du maillage  $\mathfrak{S}_h$  telles que :

$$\begin{aligned} C_1^2 \tilde{a}(\tilde{\varepsilon}_h^p, \tilde{\varepsilon}_h^p) &\leq a(\varepsilon_h^p, \varepsilon_h^p) \leq C_2^2 \tilde{a}(\tilde{\varepsilon}_h^p, \tilde{\varepsilon}_h^p), \\ \operatorname{div} \varepsilon_h^p &= \operatorname{div} \tilde{\varepsilon}_h^p, \\ \|\varepsilon_h^u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{L^2(\Omega)} + C_3 \tilde{a}(\tilde{\varepsilon}_h^p, \tilde{\varepsilon}_h^p)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

**Preuve.** On montre facilement que  $C_2 = \sqrt{2}$ , l'estimation de  $C_1$  est moins évidente (elle dépend de la constante de l'inégalité de Cauchy Schwartz entre les deux espaces  $\widehat{RT}_1^0$  et  $\widehat{RT}_1^1$ ). Voir [20] pour plus de détails sur  $C_1, C_2, C_3$ . ■

On rappelle que d'après le Théorème 1.7 sur l'estimateur théorique et en posant  $Err = (\|p - p_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$ , que nous avons :

$$C_4 \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} E_K^2(p_h, u_h) \leq (Err)^2 \leq C_5 \left( \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} E_K^2(p_h, u_h) + \sup_{q_h \in RT_{0,h}} \frac{(a_h - a)(p_h, q_h)}{\|q_h\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \right).$$

Avec  $C_4 = \frac{\hat{\beta}}{\overline{C}(1 + \beta')}$  et  $C_5 = \frac{\max(\hat{C}, 1)}{\beta \sqrt{1 - \nu^2}(1 - \beta')}$ . Et l'indicateur d'erreur local est défini par :

$$E_K^2(p_h, u_h) = \|\nabla \varphi_h\|_{0,K}^2 + \|P_{\widehat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \|\varepsilon_{h,1}^p\|_{0,K}^2 + \|\varepsilon_h^u\|_{0,K}^2.$$

D'après ce qui précède dans le paragraphe 1.7.1, nous avons :

$$\|\nabla \varphi_h\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(D_A^{-1}A)} \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \xi_K^2.$$

Où  $\xi_K^2$  est donné par (1.81) dans le cas des triangles et par (1.82) dans le cas des rectangles. Nous avons l'estimation d'erreur suivante :

$$E_K^2(p_h, u_h) \leq \tilde{C} \tilde{E}_K^2(p_h, u_h),$$

avec

$$\tilde{C} = C_5 \times \max \left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(D_A^{-1}A)}, C_2^2 + C_3, 1 \right\}.$$

Et l'indicateur d'erreur local se transforme en :

$$\tilde{E}_K^2(p_h, u_h) = \xi_K^2 + \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2 + \|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2.$$

Après majoration des termes  $\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2$ ,  $\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2$ , voir la Proposition 1.4 dans le cas des triangles et la Proposition 1.5 dans le cas des rectangles et prenant en compte l'erreur de consistance, on rappelle que nous avons :

$$Err \leq \tilde{C}\sqrt{2}\left(\sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \mathcal{E}_K^2\right)^{1/2}.$$

Où l'estimateur  $\mathcal{E}_K$  donné par :

$$\mathcal{E}_K^2 = \tilde{E}_K^{*2} + \eta_K^2,$$

et  $\tilde{E}_K^{*2}$  l'estimateur de  $\|\tilde{\varepsilon}_{h,1}^p\|_{0,K}^2$  et  $\|\tilde{\varepsilon}_h^u\|_{0,K}^2$  par majoration,  $\eta_K^2$  l'estimation de l'erreur de consistance donné par le Corollaire 1.1 dans le cas des triangles et le Corollaire 1.2 dans le cas des rectangles.

**Remarque 1.15** *On démontre facilement que  $\hat{C} = \bar{C} = 1$ , on peut calculer  $\hat{\beta}$ ,  $\bar{\beta}$  les constantes inf-sup pour les espaces  $(\widehat{RT}_{1,h}, \widehat{P}_{1,h})$  et  $(\overline{RT}_{1,h}, \overline{P}_{1,h})$ ;  $\nu$  la constante de Cauchy Schwartz forte entre les espaces  $(RT_{0,h}, \widehat{RT}_{1,h})$  avec le produit scalaire  $L^2$  à été calculée sur le demi-carré unité par B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger et J.F. Maitre [1] et  $\beta' < 1$  est la constante de saturation avec la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$ .*

## 1.11 Essais numériques

Le problème modèle, que nous considérons ici, est donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (1.99)$$

Le domaine de calcul est le carré unité,  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , de frontière  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \{(x, y) \in [0, 1]^2; y = 0\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2; y = 1\}, \\ \Gamma_N &= \{(x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 0\} \cup \{(x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 1\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{aligned}$$

### 1.11.1 1<sup>er</sup> Cas : $\|f - f_h\|_0$ dominant

Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on choisit les données suivantes :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ((a\pi)^2 + (b\pi)^2) \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ g(x, y) &= -a\pi \cos(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1, \\ g(x, y) &= a\pi \cos(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2, \\ u_D(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte du problème (1.99) est donnée par :

$$u(x, y) = \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

On considère une subdivision régulière d'un maillage de départ  $\mathfrak{S}_h$ . Les maillages suivants sont obtenus en découpant chaque élément en 4 sous-éléments. Ceci revient donc à construire des maillages dont les pas sont donnés par  $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ , où  $h_0 = h$  est le pas initial. Le tableau TAB.1.1 représente l'ordre de l'erreur de la solution pour les différents pas de maillage.

$h$	Erreur en max	Erreur en $L^2$
1/42	$1.302 \times 10^{-4}$	$2.951 \times 10^{-4}$
1/84	$3.147 \times 10^{-5}$	$7.395 \times 10^{-5}$
1/168	$7.728 \times 10^{-6}$	$1.850 \times 10^{-5}$

TAB. 1.1 – Ordre de l'erreur de la solution.

Dans le cas d'un maillage carré (et lorsque  $h_K \rightarrow 0$ ), on rappelle que la contribution locale de l'estimateur approché est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K^2 = \frac{5}{416} & \left[ \left( \varphi_3 + \varphi_4 - (\varphi_6 + \varphi_7) \right)^2 + \left( \varphi_{12} + \varphi_{13} - (\varphi_3 + \varphi_4) \right)^2 \right. \\ & + \left. \left( \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_9 + \varphi_{10}) \right)^2 + \left( \varphi_{15} + \varphi_{16} - (\varphi_1 + \varphi_2) \right)^2 \right] \\ & + \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 + \frac{1}{3} \left( (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right), \end{aligned}$$

avec  $\varphi_i = [u_h]_i$  pour ce maillage carré.

**Remarque 1.16** *On utilise la majoration suivante :*

$$\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 = \|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f - f_h)\|_{0,K}^2 \leq \|f - f_h\|_{0,K}^2.$$

Dans ce qui suit, on choisit  $a = b = 1$ . Le même test a été réalisé avec  $a = b = 5$  et on a retiré les mêmes remarques.

On pose  $\mathcal{E}_K^2 = \xi_K^2 + \eta_K^2 + \eta_{f,K}^2$  avec

$$\begin{aligned} \xi_K^2 = \frac{5}{416} & \left[ \left( \varphi_3 + \varphi_4 - (\varphi_6 + \varphi_7) \right)^2 + \left( \varphi_{12} + \varphi_{13} - (\varphi_3 + \varphi_4) \right)^2 \right. \\ & + \left. \left( \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_9 + \varphi_{10}) \right)^2 + \left( \varphi_{15} + \varphi_{16} - (\varphi_1 + \varphi_2) \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.100)$$

$\eta_K^2$  représente l'indicateur local (approché) de l'erreur de consistance donné par :

$$\eta_K^2 = \frac{1}{3} \left( (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \right), \quad (1.101)$$

$$\eta_{f,K}^2 = \|f - f_h\|_{0,K}^2. \quad (1.102)$$

Pour comparer l'influence de la contribution  $\eta_{f,K}^2$  dans l'estimateur  $\mathcal{E}_K^2$ , il faut donc visualiser cette contribution pour différents pas de maillage  $h = 1/42, 1/84, 1/168$ .

## Contribution de $\eta_{f,K}^2$

Nous présentons dans ce qui suit une carte des isovaleurs de  $\eta_{f,K}^2$  pour le pas de maillage  $1/168$ .

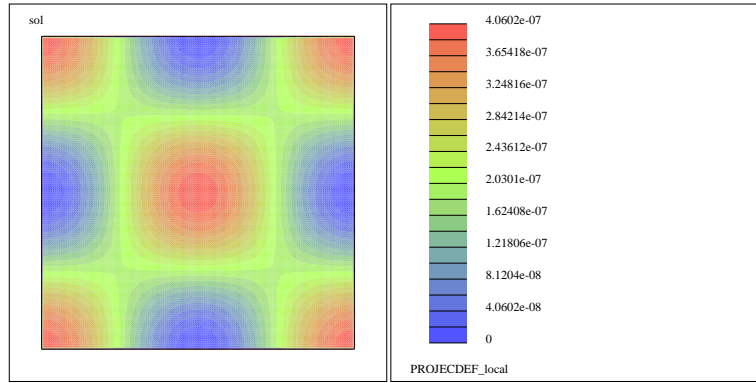


FIG. 1.12 – Isovalueur de  $\eta_{f,K}^2$  pour  $h = 1/168$ .

Pour les autres pas de maillage  $h = 1/42$ ,  $1/84$  nous avons remarqué que :  
 $0 \leq \eta_{f,K}^2 \leq 0.000105$  pour  $h = 1/42$  et  $0 \leq \eta_{f,K}^2 \leq 6.504 \times 10^{-6}$  pour  $h = 1/84$ .

## Contribution de l'estimateur local sans le terme $\eta_{f,K}^2$ donnée par $\xi_K^2 + \eta_K^2$

Nous présentons dans ce qui suit une carte des isovaleurs de l'estimateur local sans le terme  $\eta_{f,K}^2$  pour  $h = 1/168$ .

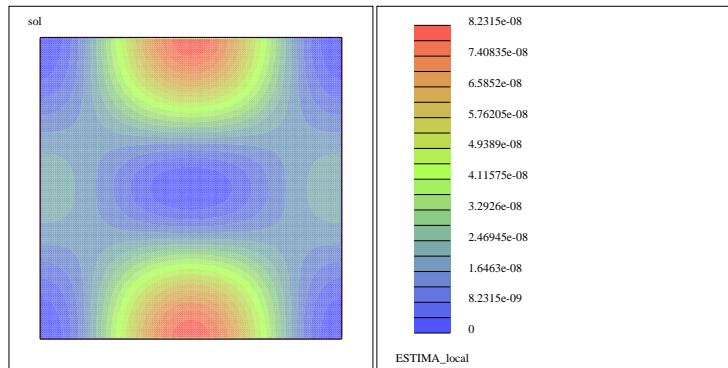


FIG. 1.13 – Isovalueur de l'estimateur local sans le terme  $\eta_{f,K}^2$  pour  $h = 1/168$ .

Pour les autres pas de maillage  $h = 1/42$ ,  $1/84$  nous avons remarqué que :  
 $0 \leq \xi_K^2 + \eta_K^2 \leq 2.091 \times 10^{-5}$  pour  $h = 1/42$  et  $0 \leq \xi_K^2 + \eta_K^2 \leq 1.313 \times 10^{-6}$  pour  $h = 1/84$ .

## Contribution de l'estimateur local complet $\mathcal{E}_K^2$

Ensuite, nous présentons une carte des isovaleurs de l'estimateur local complet  $\mathcal{E}_K^2$  pour  $h = 1/168$ .

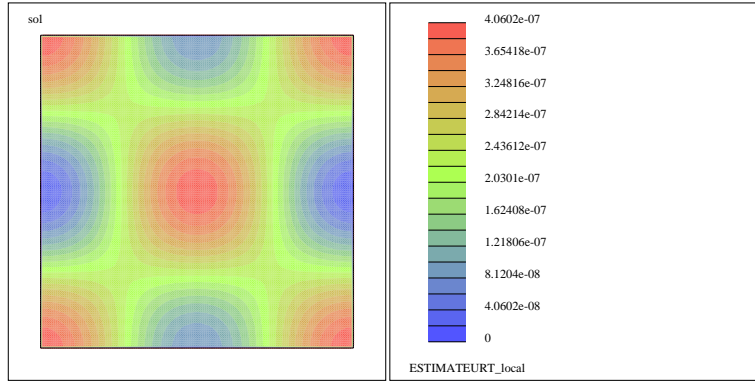


FIG. 1.14 – Isovaleurs de l'estimateur local pour  $h = 1/168$ .

Pour les autres pas de maillage  $h = 1/42$ ,  $1/84$  nous avons remarqué :  $0 \leq \mathcal{E}_K^2 \leq 1.05 \times 10^{-4}$  pour  $h = 1/42$  et  $0 \leq \mathcal{E}_K^2 \leq 6.504 \times 10^{-6}$  pour  $h = 1/84$ .

**Remarque 1.17** *Si  $f$  est constante par morceaux alors  $\|f - f_h\|_{0,K}^2 = 0$ . Donc la contribution locale de l'estimateur est plus petite comme le montrent les tests numériques.*

## Contribution de l'erreur de consistance $\eta_K^2$

Nous présentons une carte des isovaleurs de la contribution de l'erreur de consistance  $\eta_K^2$  pour  $h = 1/168$ .

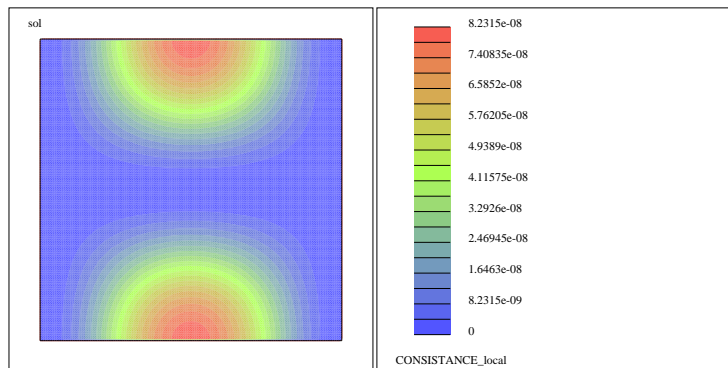


FIG. 1.15 – Isovaleurs de l'erreur de consistance pour  $h = 1/168$ .

Pour les autres pas de maillage  $h = 1/42$ ,  $1/84$  nous avons remarqué :  $0 \leq \eta_K^2 \leq 2.0907 \times 10^{-5}$  pour  $h = 1/42$  et  $0 \leq \eta_K^2 \leq 1.313 \times 10^{-6}$  pour  $h = 1/84$ .

## Contribution de l'estimateur sans l'erreur de consistance et sans le terme $\eta_{f,K}^2$

Nous présentons dans ce qui suit une carte des isovaleurs de l'estimateur local sans l'erreur de consistance sans le terme  $\eta_{f,K}^2$  pour le pas de maillage  $h = 1/168$ .

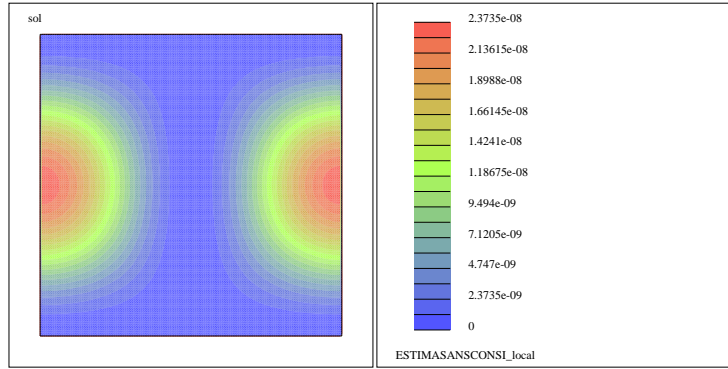


FIG. 1.16 – Isovaleur de l'estimateur local sans la consistance pour  $h = 1/168$ .

Pour les autres pas de maillage  $h = 1/42, 1/84$  nous avons remarqué :  
 $0 \leq \xi_K^2 \leq 6.0196 \times 10^{-6}$  pour  $h = 1/42$  et  $0 \leq \xi_K^2 \leq 3.7875 \times 10^{-7}$  pour  $h = 1/84$ .

## L'ordre de l'erreur de consistance

Le tableau TAB.1.2 représente les résultats obtenus pour les différentes contributions globales de l'estimateur :  $\eta_\Omega^2$ ,  $\xi_\Omega^2$ ,  $\eta_{f,\Omega}^2$ ,  $\xi_\Omega^2 + \eta_\Omega^2$  et  $\mathcal{E}_\Omega^2$ . Avec  $\eta_\Omega^2 = \sum_{K \in \Omega} \eta_K^2$ ,  $\xi_\Omega^2 = \sum_{K \in \Omega} \xi_K^2$ ,

$$\eta_{f,\Omega}^2 = \sum_{K \in \Omega} \eta_{f,K}^2 \text{ et } \mathcal{E}_\Omega^2 = \sum_{K \in \Omega} \mathcal{E}_K^2$$

$h$	$\eta_\Omega^2$	$\xi_\Omega^2$	$\eta_{f,\Omega}^2$	$\xi_\Omega^2 + \eta_\Omega^2$	$\mathcal{E}_\Omega^2$
1/42	$8.750 \times 10^{-3}$	$2.521 \times 10^{-3}$	$8.657 \times 10^{-2}$	$1.127 \times 10^{-2}$	$9.785 \times 10^{-2}$
1/84	$2.245 \times 10^{-3}$	$6.474 \times 10^{-4}$	$2.217 \times 10^{-2}$	$2.892 \times 10^{-3}$	$2.506 \times 10^{-2}$
1/168	$5.683 \times 10^{-4}$	$1.639 \times 10^{-4}$	$5.609 \times 10^{-3}$	$7.322 \times 10^{-4}$	$6.342 \times 10^{-3}$

TAB. 1.2 – Estimations globales.



Afin d'estimer l'ordre de l'erreur  $\alpha$ , on écrit :

$$\eta_{f,\Omega}^2 = O(h^{\alpha_1}), \quad \eta_{\Omega}^2 = O(h^{\alpha_2}), \quad \xi_{\Omega}^2 = O(h^{\alpha_3}), \quad \mathcal{E}_{\Omega}^2 + \xi_{\Omega}^2 = O(h^{\alpha_4}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\Omega}^2 = O(h^{\alpha_5}).$$

Dans les tableaux TAB.1.3, on donne les valeurs de  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  pour  $\eta_{f,\Omega}^2$ ,  $\eta_{\Omega}^2$  et  $\xi_{\Omega}^2$  estimés pour des valeurs successives de  $h=1/42$ ,  $1/84$  et  $1/168$ .

$\eta_{f,\Omega}^2$	$h$	1/84	1/168	$\eta_{\Omega}^2$	$h$	1/84	1/168	$\xi_{\Omega}^2$	$h$	1/84	1/168
	$\alpha_1$	1.96	<b>1.98</b>		$\alpha_2$	1.962	<b>1.982</b>		$\alpha_3$	1.961	<b>1.981</b>

TAB. 1.3 – L'ordre de l'estimateur global.

Dans le tableau TAB.1.4, on donne les valeurs approchées de  $\alpha_i$ ,  $i = 4, 5$  pour l'estimateur d'erreur globale complet  $\mathcal{E}_{\Omega}^2$  et pour la contribution  $\xi_{\Omega}^2 + \eta_{\Omega}^2$ .

$\xi_{\Omega}^2 + \eta_{\Omega}^2$	$h$	1/84	1/168	$\mathcal{E}_{\Omega}^2$	$h$	1/84	1/168
	$\alpha_4$	1.962	<b>1.981</b>		$\alpha_5$	1.965	<b>1.982</b>

TAB. 1.4 – L'ordre de l'estimateur global.

Les tableaux TAB.1.3 et TAB.1.4 montrent que les contributions  $\eta_{\Omega}^2$ ,  $\xi_{\Omega}^2$ ,  $\eta_{f,\Omega}^2$ ,  $\xi_{\Omega}^2 + \eta_{\Omega}^2$  et  $\mathcal{E}_{\Omega}^2$  de l'estimateur ont le même ordre  $O(h)$ .

### 1.11.2 2<sup>eme</sup> Cas : $\|f - f_h\|_0 = 0$

Ensuite nous présentons un deuxième test avec le choix de :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ g(x, y) &= -2x, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1, \\ g(x, y) &= 2x, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2, \\ u_D(x, y) &= x^2 - y^2, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte du problème (1.99) est donnée par :

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Pour ce cas test qui correspond à  $f = 0$ , nous avons calculé la contribution de l'estimateur local, ce qui nous a permis de conclure que l'erreur est très petite.

# Bibliographie

- [1] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger, J.F. Maitre, *Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes*, Numer. Math. 80, 159-179, (1998).
- [2] A. Agouzal, F. Oudin, *A posteriori error estimator for finite volume methods*, Applied Mathematics and Computation 110, 239-250, (2000).
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates*,  $M^2AN$ , 19, 7-32, (1985).
- [4] R.E. Bank and R.K. Smith, *A Posteriori Error Estimate based on Hierarcal Bases*. SIAM J. Numer. Anal. 30, 921-935, (1993).
- [5] R.E. Bank and A. Weiser, *Some A Posteriori Error Estimators for elliptic partial differential equations*, Math. Comp. 44, 283-301, (1985).
- [6] J. Baranger, J.F. Maitre, F. Oudin, *Connection between finite volume and mixed finite element methods*,  $M^2AN$ , vol. 30,  $N^0$  4, p. 445 à 465, (1996).
- [7] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, (1991).
- [8] R.H.W. Hoppe and B. Wohlmuth, *A comparaison of a posteriori error estimators for mixed finite elements discretizations by Raviart-Thomas elements*, Mathematics of Computation, Vol. 68, Number 228, Pages 1347-1378, (1999).
- [9] J.F. Maitre, F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods : an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, in Multigrid Methods Proceedings, Cologue 1981, lecture notes in Mathematics 960, Springer, heidelberg, 535-544, (1982).
- [10] J.F. Maitre and H. Souhail, *A Finite Volume A Posteriori Error Estimator generated by a Hierarchical Mixed Finite Element Basis*, in Innovative Tools for Scientific Computation in Aeronautical Engineering; edited by J. Periaux, P. Joly, O. Pironneau and E. Onate, CIMNE Barcelona, 17-27, (2001).

- [11] J.C. Nedelec, *Notions sur les techniques d'éléments finis*. Mathematiques et Applications 7, Ellipses-Edition Marketing, (1991).
- [12] F. Oudin, *Schémas volumes finis pour Problèmes Elliptique : Analyse a Priori et a Posteriori par éléments finis mixtes, Méthode de décomposition de domaines*. Thèse présentée devant l'Université Claude Bernard Lyon I, (1995).
- [13] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, In Mathematical aspects of the finite Element Method; I. Galligani and E. Magenes (eds.), Springer-Verlag, 292-315, (1977).
- [14] J.E. Roberts, J.M. Thomas *Mixed and hybrid methods*. In P.G. Ciarlet, J.L. Lions, (eds.) Handbook of Numerical Analysis II. Finite Element Methods, Part I, North-Holland, Amsterdam, (1989).
- [15] R. Verfürth, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley-Teubner, (1996).

## Deuxième partie

Schémas volumes finis d'ordre élevé.

## Chapitre 2

**Schémas volumes finis d'ordre élevé  
sur un domaine rectangulaire.**

## 2.1 Introduction

Comme avec la méthode des éléments finis, on cherche à approcher la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles en se donnant :

- un ensemble fini de domaines  $w_i$  appelés cellules ou volumes de contrôle,
- une caractérisation de la solution.

On distingue deux familles de volumes finis :

1. On se donne les cellules  $\{w_i\}_{i=1}^N$ , la solution discrète est caractérisée par ses valeurs moyennes sur ces cellules. Il faut ensuite relier les flux aux valeurs moyennes. C'est le schéma centré sur les cellules ou cell-centered.
2. On se donne une triangulation du domaine  $\Omega$ , la solution discrète est caractérisée par ses valeurs aux noeuds. On associe à chaque noeud un volume de contrôle. C'est le schéma centré sur les noeuds.

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'aux schémas centrés sur les noeuds. Dans cette famille de schémas, on distingue deux types d'approches :

*A- La méthode des Volumes-Différences-Finis :*

Le maillage est rectangulaire. Les flux sont approchés en écrivant des développements de Taylor. Ce sera l'approche adoptée pour développer, dans la section 2.2, un schéma d'ordre élevé. Ce schéma sera étudié en détail tout le long de ce travail.

*B- La méthode des Volumes-Eléments-Finis :*

La triangulation est quelconque. L'approximation des flux est basée sur un espace éléments finis.

### 2.1.1 Description du schéma volumes finis :

Nous allons, dans ce qui suit, décrire brièvement ces méthodes sur le problème modèle. Soit  $\Omega$ , un domaine rectangulaire de  $\mathbb{R}^2$ , ce sera le cas de tous les domaines utilisés dans ce chapitre.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $f \in L^2(\Omega)$ . Soit  $w_i$  un volume de contrôle quelconque. Nous avons, en utilisant le théorème de Gauss,

$$\int_{w_i} -\operatorname{div}(\nabla u) \, dx dy = - \int_{\partial w_i} \nabla u \cdot n \, ds, \quad (2.2)$$

donc

$$\int_{\partial w_i} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{w_i} f \, dx dy = 0. \quad (2.3)$$

#### A- Méthode des Volumes-Différences-Finis :

On se donne un maillage structuré. Soit  $N_x$  et  $N_y$ , le nombre de points respectivement suivant  $x$  et suivant  $y$ . Un noeud  $N_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq N_x$  et  $1 \leq j \leq N_y$  du maillage a pour coordonnées  $(x_i, y_j)$ , la cellule  $\{w_{i,j}\}$  associée au noeud  $N_{i,j}$  est obtenue en joignant les centres de gravité des rectangles (voir FIG. 2.1).

En prenant en compte l'orientation de la normale, le terme du bord dans l'équation (2.3) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial w_{i,j}} -\nabla u \cdot n \, ds &= \int_{F_E} -\frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{F_N} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{F_W} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{F_S} \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &\simeq \left\{ \frac{h_x^W + h_x^E}{2} \left( \frac{U - U_N}{h_y^N} + \frac{U - U_S}{h_y^S} \right) + \frac{h_y^N + h_y^S}{2} \left( \frac{U - U_E}{h_x^E} + \frac{U - U_W}{h_x^W} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

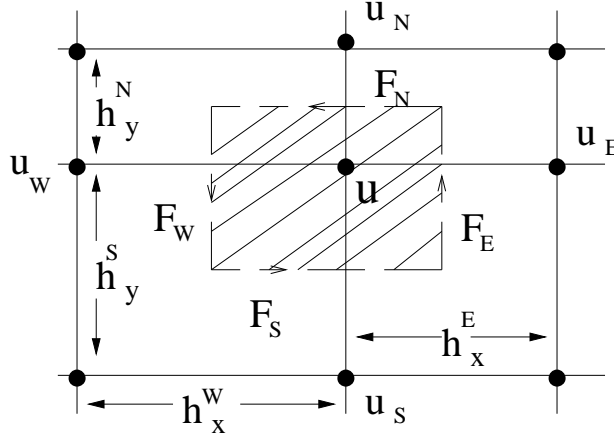


FIG. 2.1 – Une cellule  $w$  du maillage rectangulaire.

**Remarque 2.1** Dans le cas particulier où :  $h_x = h_y = h_y^N = h_y^S = h_x^S = h_x^E$ , nous avons

$$\int_{\partial w} -\nabla u \cdot n \, ds \simeq 4U - U_N - U_S - U_E - U_W. \quad (2.5)$$

Ce qui correspond à un schéma différences finis à 5 points.

#### B- Méthodes de Volumes-Eléments-Finis :

On décrit ici la “Box Method” qui peut être considérée comme étant la première méthode de Volumes-Eléments-Finis. Soit  $\mathfrak{S}_h$  une triangulation de  $\Omega$ . A  $\mathfrak{S}_h$ , on associe l'espace éléments finis :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_{h/K} \in P_1, \forall K \in \mathfrak{S}_h \right\}.$$

On note  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N_h$  les sommets de  $\mathfrak{S}_h$  et  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N_h$  les fonctions de base de  $V_h$ .

$$u \in V_h \iff u(x) = \sum_i u(S_i) \varphi_i(x),$$

Ce qui permet ensuite d'évaluer les flux aux interfaces des éléments.

## 2.2 Un schéma volumes finis d'ordre élevé

On remarque que pour évaluer le flux sur la face Est, par exemple, on utilise dans (2.4), les deux valeurs voisines de la face,  $U_E$  et  $U$ . Ce qui correspond à une interpolation par des polynômes de Lagrange constants en  $y$  et de degré 1 en  $x$ . Dans le but d'augmenter l'ordre du schéma, comme dans Dubois [3], le calcul des flux fera intervenir plusieurs points du maillage (voir FIG. 2.2). Pour l'interpolation, on utilisera des polynômes dans  $Q_{k+1,k}$  ou dans  $Q_{k,k+1}$  suivant que la face est horizontale ou verticale. Pour  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_{m,n}$  étant l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$  suivant  $x$  et de degré inférieur ou égal à  $n$  suivant  $y$ .

$$Q_{m,n} = Vect\left\{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} \mid \alpha_1 \leq m, \alpha_2 \leq n\right\}, \quad \dim Q_{m,n} = (m+1)(n+1). \quad (2.6)$$

Il est facile de voir que les fonctions de forme de  $Q_{m,n}$ , associées au noeud de coordonnées  $(x_i, y_j)$ , sont données par :

$$\varphi_{ij}(x, y) = L_i(x)\Lambda_j(y),$$

où  $L_i$  et  $\Lambda_j$  sont les polynômes de Lagrange à une variable donnés par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^m \left(\frac{x - x_l}{x_i - x_l}\right) \quad \text{et} \quad \Lambda_j(y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \left(\frac{y - y_l}{y_j - y_l}\right). \quad (2.7)$$

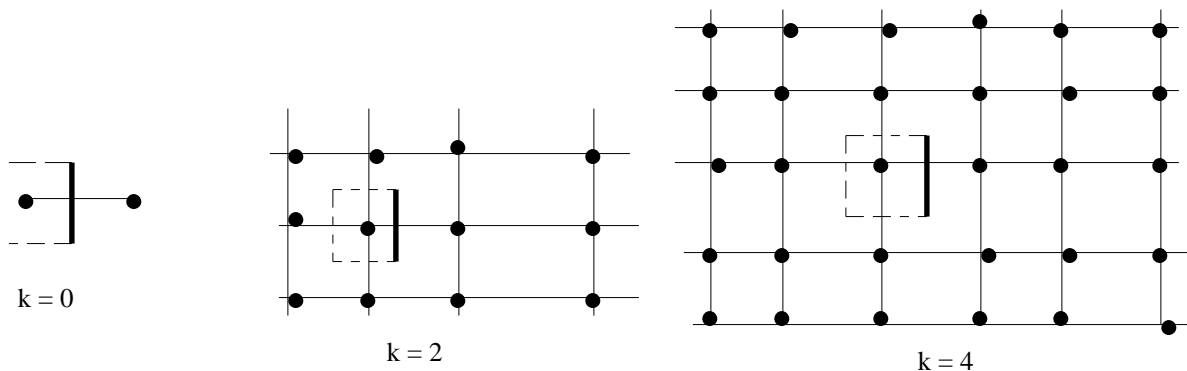


FIG. 2.2 – Enrichissement de l'interpolation.

On ne s'intéresse qu'aux schémas volumes finis centrés, c'est-à-dire pour des valeurs de  $k$  paires. Soit  $u_h \in X_h = G(\Omega_h)$ , l'ensemble des fonctions de grilles. Dans les espaces  $Q_{k+1,k}$  et  $Q_{k,k+1}$ , on note par  $I_e(u_h)$  l'interpolé de  $u_h$  sur la face  $e$  du volume de contrôle  $w_{i,j}$ . Pour la face Est, par exemple, nous avons pour  $k_1 = \frac{k}{2}$ .

$$I_E(u_h)(x_E, y) = \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} u_{pq} L_p(x_E) \Lambda_q(y), \quad u_{pq} = u_h(x_p, y_p). \quad (2.8)$$

**Remarque 2.2** Si  $k = 0$  le schéma volumes finis est défini en interpolant  $u$  sur les faces horizontales dans l'espace  $Q_{0,1}$  et sur les faces verticales dans  $Q_{1,0}$ ; le schéma volumes finis est à 5 points. Pour  $k$  pair quelconque, le schéma obtenu est à  $(\dim Q_{k+2,k+2} - 4) = (k+1)(k+5)$  points.



**Remarque 2.3** L'idée de ce travail à été inspirée des recherches de H. Belarbi [1] et de A. Rezgui [7] [8] [9]. Une première version de ce travail a fait l'objet d'une publication, avec J.F. Maitre, A. Rezgui, A.M. Zine [5].

### 2.2.1 Application au problème modèle

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  avec  $mes(\Gamma_D) > 0$ . Le problème modèle, que nous considérons ici, est donné par :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ A\nabla u \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.9)$$

Où  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\Gamma_N)$ ,  $u_D$  la trace de  $u$  sur  $\Gamma_D$ .  $A$  est une matrice d'ordre 2 telle que

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad (A\zeta, \zeta) = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\|\zeta\|^2, \quad \alpha > 0. \quad (2.10)$$

Soit  $w_{i,j}$ , un volume de contrôle ( $w_{i,j} \subset \Omega$ ). Pour appliquer le schéma introduit plus haut au problème modèle, nous allons, dans un premier temps, pour simplifier l'écriture, considérer le cas particulier  $A = \mathbf{I}$ . En appliquant la formule de Gauss, on obtient :

$$\int_{\partial w_{i,j}} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{w_{i,j}} f \, dx dy = 0. \quad (2.11)$$

La cellule  $w_{i,j}$  étant rectangulaire (voir FIG. 2.3), on pose  $\partial w_{i,j} = F_E \cup F_W \cup F_N \cup F_S$ , où  $F_E = \{x_E\} \times [y_S, y_N]$ ,  $F_W = \{x_W\} \times [y_S, y_N]$ ,  $F_S = [x_W, x_E] \times \{y_S\}$  et  $F_N = [x_W, x_E] \times \{y_N\}$ . Alors

$$\int_{\partial w_{i,j}} \nabla u \cdot n \, ds = \int_{F_E} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{F_W} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{F_S} \nabla u \cdot n \, ds + \int_{F_N} \nabla u \cdot n \, ds.$$

Les vecteurs normaux extérieurs à  $w_{i,j}$  étant parallèles aux axes et unitaires, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \int_{\partial w_{i,j}} \nabla u \cdot n \, ds &= \int_{F_E} \frac{\partial u}{\partial x} \, ds - \int_{F_W} \frac{\partial u}{\partial x} \, ds + \int_{F_N} \frac{\partial u}{\partial y} \, ds - \int_{F_S} \frac{\partial u}{\partial y} \, ds \\ &= \int_{y_S}^{y_N} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_E, s) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_W, s) \right) ds + \int_{x_W}^{x_E} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_N) - \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_S) \right) ds. \end{aligned}$$

La discrétisation de l'équation (2.11) est donnée par :

$$\sum_{e \in \partial w_{i,j}} \int_e \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} \, ds + \int_{w_{i,j}} f \, dx dy = 0, \quad \forall w_{i,j} \subset \Omega. \quad (2.12)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, sur les faces Est et Ouest par exemple, seule la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est présente. Ses interpolés dans  $Q_{k+1,k}$  sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial x}(x_E, y) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} u_{pq} L'_p(x_E) \Lambda_q(y), \\ \frac{\partial I_W(u_h)}{\partial x}(x_W, y) &= \sum_{p=i-k_1-1}^{i+k_1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} u_{pq} L'_p(x_W) \Lambda_q(y). \end{aligned} \quad (2.13)$$

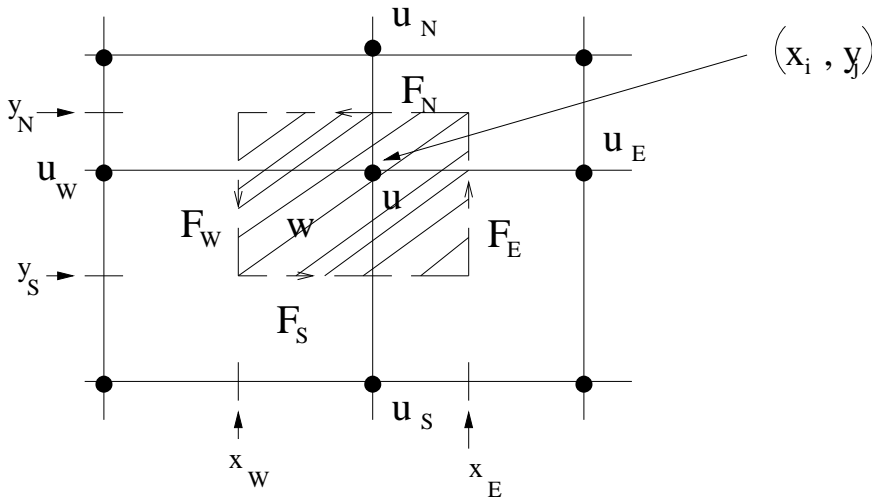


FIG. 2.3 – Une cellule  $w$  du maillage rectangulaire.

Sur les faces Sud et Nord, l'interpolation se fait dans l'espace  $Q_{k,k+1}$  et s'obtient de la même manière.

Finalement, en remplaçant les interpolés de  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial w_{i,j}} \int_e \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} ds &= \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} \left( \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} u_{pq} L'_p(x_E) - \sum_{p=i-k_1-1}^{i+k_1} u_{pq} L'_p(x_W) \right) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \\ &+ \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1} \left( \sum_{q=j-k_1}^{i+k_1+1} u_{pq} \Lambda'_q(y_N) - \sum_{q=j-k_1-1}^{j+k_1} u_{pq} \Lambda'_q(y_S) \right) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx. \end{aligned}$$

Ou encore,

$$\begin{aligned} &\sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} \left( \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} u_{pq} L'_p(x_E) - \sum_{p=i-k_1-1}^{i+k_1} u_{pq} L'_p(x_W) \right) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \\ &+ \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1} \left( \sum_{q=j-k_1}^{i+k_1+1} u_{pq} \Lambda'_q(y_N) - \sum_{q=j-k_1-1}^{j+k_1} u_{pq} \Lambda'_q(y_S) \right) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx + \int_{w_{i,j}} f dx dy = 0. \end{aligned}$$

**Remarque 2.4** Notons que dans notre cas, si  $k = 0$  nous obtenons le schéma volumes finis introduit par Gallouet dans [4].

Pour  $k = 2$  par exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial w_{i,j}} \int_e \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} ds &= \sum_{q=j-1}^{j+1} \left( \sum_{p=i-1}^{i+2} u_{pq} L'_p(x_E) - \sum_{p=i-2}^{i+1} u_{pq} L'_p(x_W) \right) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \\ &+ \sum_{p=i-1}^{i+1} \left( \sum_{q=j-1}^{i+2} u_{pq} \Lambda'_q(y_N) - \sum_{q=j-2}^{j+1} u_{pq} \Lambda'_q(y_S) \right) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} & \sum_{q=j-1}^{j+1} \left( \sum_{p=i-1}^{i+2} u_{pq} L'_p(x_E) - \sum_{p=i-2}^{i+1} u_{pq} L'_p(x_W) \right) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \\ + & \sum_{p=i-1}^{i+1} \left( \sum_{q=j-1}^{j+2} u_{pq} \Lambda'_q(y_N) - \sum_{q=j-2}^{j+1} u_{pq} \Lambda'_q(y_S) \right) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx + \int_{w_{i,j}} f dx dy = 0. \end{aligned}$$

Le schéma volumes finis introduit ici, s'écrit donc sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{p,q} M_{p,q} u_{p,q}^{i,j} = b_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N_x, \quad 1 \leq j \leq N_y. \quad (2.14)$$

Avec

$$M_{p,q} = \left. \begin{aligned} & (\Lambda'_q(y_N) - \Lambda'_q(y_S)) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx \\ + & (L'_p(x_E) - L'_p(x_W)) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy, \end{aligned} \right\} \text{ pour } i - k_1 \leq p \leq i + k_1; \quad j - k_1 \leq q \leq j + k_1,$$

$$\left. \begin{aligned} M_{p,j+k_1+1} &= \Lambda'_{j+k_1+1}(y_N) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx \\ M_{p,j-k_1-1} &= -\Lambda'_{j-k_1-1}(y_N) \int_{x_W}^{x_E} L_p(x) dx \end{aligned} \right\} \text{ pour } i - k_1 \leq p \leq i + k_1.$$

$$\left. \begin{aligned} M_{i+k_1+1,q} &= L'_{i+k_1+1}(x_E) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \\ M_{i-k_1-1,q} &= -L'_{i-k_1-1}(x_W) \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy \end{aligned} \right\} \text{ pour } j - k_1 \leq q \leq j + k_1.$$

**Remarque 2.5** Dans (2.14), le terme du second membre  $b_{i,j} = - \int_{w_{i,j}} f(x,y) dx dy$  et est évalué par une intégration numérique de Gauss :

$$\int_{w_{i,j}} f dx dy = \sum_{k=1}^{N_{pg}} \sum_{l=1}^{N_{pg}} w_k w_l f(\xi_k, \eta_l), \quad (2.15)$$

où  $(w_k)_{k=1}^{N_{pg}}$  sont les poids de Gauss,  $\xi_k, \eta_l$  les points de Gauss respectivement suivant  $x$  et  $y$  et  $N_{pg}$  le nombre de points de Gauss.

## 2.3 Analyse du schéma

Soit  $\mathfrak{S}_h$ ,  $h > 0$  une triangulation du domaine  $\Omega$  en rectangles  $K$ . A chaque noeud de la triangulation, on associe un volume de contrôle  $w$ . Soit  $N_h$  le nombre de ces volumes de contrôle. Nous allons, dans ce qui suit, procéder à l'analyse du schéma volumes finis, introduit plut haut.

### 2.3.1 Convergence du schéma et estimations d'erreur

Afin d'étudier la convergence du schéma volumes finis, nous introduisons les fonctionnelles  $L_w$  et  $L_{w,h}$  définies par :

$$\begin{aligned} L_w &: X \longrightarrow Y \\ v &\longmapsto L_w(v) = - \sum_{e \subset w} \int_e \frac{\partial v}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{w,h} &: X_h \longrightarrow Y_h \\ v_h &\longmapsto L_{w,h}(v_h) = - \sum_{e \subset w} \int_e \frac{\partial I_e(v_h)}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

avec

$$Y = \mathbb{R}, \quad X = H^2(\Omega), \quad Y_h = \mathbb{R} \text{ et } X_h = G_h(\Omega).$$

Soit  $f_{w,h} = \int_w f(x,y) dx dy$ , avec les notations précédentes, l'équation (2.12) s'écrit sous la forme :

$$L_{w,h}(u_h) + f_{w,h} = 0, \quad \forall w \subset \Omega. \quad (2.16)$$

(2.16) définit le schéma volumes finis qui est étudié dans la suite. Rappelons d'abord les définitions suivantes :

**Définition 2.1** (*Stabilité*)

Le schéma volumes finis (2.16) est stable s'il existe une constante  $c_s$  indépendante de  $h$  telle que

$$c_s \|v_h\|_{X_h} \leq \|L_{w,h}(v_h)\|_{Y_h}, \quad \forall v_h \in X_h,$$

où  $\|\cdot\|_{X_h}$  et  $\|\cdot\|_{Y_h}$  sont deux normes à définir.

**Définition 2.2** (*Consistance*)

Le schéma volumes finis (2.16) est consistant s'il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  et  $\alpha$  un réel positif tels que

$$\|L_{w,h}(r_h(u)) + f_{w,h}\|_{Y_h} \leq c h^\alpha,$$

ou  $r_h(u)$  est l'opérateur de restriction.

Il est facile de voir que le schéma volumes finis (2.16) est convergent s'il est stable et consistant. En effet :

en utilisant la linéarité de l'opérateur  $L_h$ , l'égalité (2.16) ainsi que la stabilité et la consistance, on obtient :

$$\|u_h - r_h(u)\|_{X_h} \leq c_s^{-1} \|L_{w,h}(r_h(u)) + f_{w,h}\|_{Y_h} \leq c_s^{-1} c h^\alpha,$$

### 2.3.2 Etude de la consistance

On note  $h_x$  et  $h_y$  les pas de discrétisation suivant  $x$  et  $y$  respectivement :

$$h_y = \max_j h_{y_j} \text{ et } h_x = \max_i h_{x_i},$$

où  $h_{y_j}$  et  $h_{x_i}$  les longueurs de la cellule  $w_{i,j}$  respectivement suivant  $y$  et  $x$ .

**Proposition 2.1** *On suppose que  $u \in C^{k+3}(\Omega)$ . Soit  $w$  une cellule du maillage, il existe alors une constante  $C$  dépendant de  $k$ , indépendante de  $h_x$  et de  $h_y$  telle que*

$$\left| \sum_{e \in \partial w} \frac{1}{\text{mes}(e)} \int_e \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} \right) ds \right| \leq C \max(h_x, h_y)^{k+1}, \quad (2.17)$$

où  $u_h \in X_h = G(\Omega_h)$  est l'ensemble des fonctions grilles et  $I_e(u_h)$  l'interpolé de  $u_h$  sur la face  $e$  de  $w$ .

**Preuve.** On cherche à majorer le terme  $\frac{1}{\text{mes}(e)} \int_e \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} \right) ds$ .

Sur la face Est  $F_E$  de la cellule, la normale extérieure  $n$  vaut  $(1,0)$ , donc

$$\frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial x} \right) ds, \quad (2.18)$$

ainsi en remplaçant  $I_E(u_h)$ , l'interpolé de  $u_h$ , par des polynômes de  $Q_{k+1,k}$  donné par (2.8), on obtient :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial x} \right)(x_E, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_E, y) - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \Lambda_q(y) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} u(x_p, y_q) L_p(x) \right](x_E). \quad (2.19)$$

Comme  $\sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} u(x_p, y_q) L_p(x) \in P_{k+1}$ ,  $P_{k+1}$  étant l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k+1$ , en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral (voir Ciarlet-Wagschal [2]) à la fonction  $u_q : x \mapsto u(x, y_q)$  nous avons :

$$u(x, y_q) = \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} u(x_p, y_q) L_p(x) - \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} R_{k+1}(u_q, x_p, x) L_p(x), \quad (2.20)$$

avec  $R_{k+1}(u_q, x_p, x) = \frac{1}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} u_q^{(k+2)}(tx_p + (1-t)x, y_q) (x_p - x)^{k+2} dt$ .

En dérivant l'expression (2.20) on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} u(x_p, y_q) L_p(x) \right] = \frac{\partial u(x, y_q)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} R_{k+1}(u_q, x_p, x) L_p(x) \right].$$

En multipliant cette expression par  $\Lambda_q(y)$  et en additionnant suivant  $q$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \Lambda_q(y) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} u(x_p, y_q) L_p(x) \right] &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\partial u(x, y_q)}{\partial x} \Lambda_q(y) \\ &+ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} S_{k+1}(u_q, x_p, x) L_p(x) \Lambda_q(y) \\ &+ \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} R_{k+1}(u_q, x_p, x) L'_p(x) \Lambda_q(y), \end{aligned}$$

où  $S_{k+1}(u_q, x_p, x) = \frac{\partial}{\partial x} (R_{k+1}(u_q, x_p, x))$ .

Ainsi, de (2.19), on tire

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial x} \right)(x_E, y) &= \frac{\partial u(x_E, y)}{\partial x} - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\partial u(x_E, y_q)}{\partial x} \Lambda_q(y) \\ &- \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} S_{k+1}(u_q, x_p, x_E) L_p(x_E) \Lambda_q(y) \quad (2.21) \\ &- \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} R_{k+1}(u_q, x_p, x_E) L'_p(x_E) \Lambda_q(y). \end{aligned}$$

D'autre part,  $\sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\partial u(x_E, y_q)}{\partial x} \Lambda_q(y)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$  en  $y$ ,

en appliquant, une seconde fois, la formule de Taylor à la fonction  $v_E : y \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x_E, y)$ , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_E, y) - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_E, y_q) \Lambda_q(y) = - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} R_k(v_E, y_q, y) \Lambda_q(y), \quad (2.22)$$

avec  $R_k(v_E, y_q, y) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{(k+2)} v_E}{\partial x \partial y^{k+1}}(x_E, ty_q + (1-t)y) (y_q - y)^{k+1} dt$ .

D'après (2.21) et (2.22) on trouve :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u_h)}{\partial x} \right)(x_E, y) &= - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} R_k(v_E, y_q, y) \Lambda_q(y) \\ &- \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \Lambda_q(y) S_{k+1}(u_q, x_p, x_E) L_p(x_E) \\ &- \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \Lambda_q(y) R_k(u_q, x_p, x_E) L'_p(x_E). \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} R_k(v_E, y_q, y) \Lambda_q(y), \\
J &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \Lambda_q(y) S_{k+1}(u_q, x_q, x_E) L_p(x_E), \\
K &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \Lambda_q(y) R_{k+1}(u_q, x_q, x_E) L'_p(x_E).
\end{aligned}$$

En reprenant les expressions de  $R_{k+1}$  et  $R_k$  données précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\Lambda_q(y)}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{(k+2)} v_E}{\partial x \partial y^{k+1}}(x_E, ty_q + (1-t)y)(y_q - y)^{k+1} dt, \\
J &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{\Lambda_q(y) L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+2} \frac{\partial^{(k+3)} u}{\partial x^{k+3}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+2} dt \\
&\quad - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{(k+2) \Lambda_q(y) L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+1} dt, \\
K &= \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{\Lambda_q(y) L'_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+2} dt.
\end{aligned}$$

Dans l'égalité (2.18), on pose  $E(y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right)(x_E, y)$  et  $L = \int_{F_E} E(y) dy$ .

En regroupant les expressions  $I$ ,  $J$  et  $K$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
E(y) &= - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \frac{\Lambda_q(y)}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x \partial y^{k+1}}(x_E, ty_q + (1-t)y)(y_q - y)^{k+1} dt \\
&\quad - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{\Lambda_q(y) L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+2} \frac{\partial^{(k+3)} u}{\partial x^{k+3}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+2} dt \\
&\quad + \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{(k+2) \Lambda_q(y) L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+1} dt \\
&\quad - \sum_{q=j-k2}^{j+k2} \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{\Lambda_q(y) L'_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q)(x_p - x_E)^{k+2} dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= - \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) \left( \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x \partial y^{k+1}}(x_E, ty_q + (1-t)y) (y_q - y)^{k+1} dt \right) dy \\
&- \sum_{q=j-k1}^{j+k1} I_q \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+2} \frac{\partial^{(k+3)} u}{\partial x^{k+3}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q) (x_p - x_E)^{k+2} dt \\
&+ \sum_{q=j-k1}^{j+k1} I_q \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{(k+2)L_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q) (x_p - x_E)^{k+1} dt \\
&- \sum_{q=j-k1}^{j+k1} I_q \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} \frac{L'_p(x_E)}{(k+1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+1} \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q) (x_p - x_E)^{k+2} dt,
\end{aligned}$$

où  $I_q = \int_{y_S}^{y_N} \Lambda_q(y) dy$ . Dans le but de majorer L, on introduit les constantes  $M_{1,k+1}$ ,  $M_{k+3,0}$  et  $M_{k+2,0}$  données par :

$$\begin{aligned}
M_{1,k+1} &= \sup_{t \in [0,1]; y \in [y_S, y_N]; q} \left| \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x \partial y^{k+1}}(x_E, ty_q + (1-t)y) \right|, \\
M_{k+3,0} &= \sup_{t \in [0,1]; p; q} \left| \frac{\partial^{(k+3)} u}{\partial x^{k+3}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q) \right|, \\
M_{k+2,0} &= \sup_{t \in [0,1]; p; q} \left| \frac{\partial^{(k+2)} u}{\partial x^{k+2}}(tx_p + (1-t)x_E, y_q) \right|.
\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mes(F_E)} |L| &\leq \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{1,k+1}}{k!} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |y_q - y|^{k+1} |\Lambda_q(y)| dy \\
&+ \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{k+3,0}}{(k+1)!} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} |(x_p - x_E)^{k+2} L_p(x_E)| \\
&+ \frac{(k+2)}{mes(F_E)} \frac{M_{k+2,0}}{(k+1)!} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} |(x_p - x_E)^{k+1} L_p(x_E)| \\
&+ \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{k+2,0}}{(k+1)!} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \sum_{p=i-k1}^{i+k1+1} |(x_p - x_E)^{k+2} L'_p(x_E)|.
\end{aligned}$$

D'une part, pour  $y \in [y_S, y_N]$ , nous avons :

$$|(y_q - y)^{k+1}| \leq Ch_y^{k+1} \quad \text{et} \quad |(x_p - x_E)^{k+2}| \leq Ch_x^{k+2}.$$



D'autre part, comme  $L'_p(x_E) = O\left(\frac{1}{h_x}\right)$  alors  $|(x_p - x_E)^{k+2}L'_p(x_E)| \leq Ch_x^{k+1}$  et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{mes(F_E)}|L| &\leq \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{1,k+1}}{k!} Ch_y^{k+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \\ &+ \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{k+3,0}}{k!} Ch_x^{k+2} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \\ &+ \frac{(k+2)}{mes(F_E)} \frac{M_{k+2,0}}{k!} Ch^{k+2} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy \\ &+ \frac{1}{mes(F_E)} \frac{M_{k+2,0}}{k!} Ch_x^{k+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} \int_{y_S}^{y_N} |\Lambda_q(y)| dy. \end{aligned}$$

Finalement, en posant

$$C_1 = \frac{k+5}{k!} C \max\{M_{1,k+1}, M_{k+3,0}, M_{k+2,0}\} \text{ et } M_q = \sup_{y \in [y_S, y_N]} |\Lambda_q(y)|,$$

on obtient

$$\frac{1}{mes(F_E)} \left| \int_{y_S}^{y_N} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right) (x_E, y) dy \right| \leq C_1 \max(h_x, h_y)^{k+1} \sum_{q=j-k1}^{j+k1} M_q,$$

ou encore

$$\frac{1}{mes(F_E)} \left| \int_{y_S}^{y_N} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right) (x_E, y) dy \right| \leq C \max(h_x, h_y)^{k+1}.$$

D'ou le résultat de la consistance. ■

**Remarque 2.6** *La stabilité est démontrée pour  $k = 0$  dans R. Eymard, T. Gallouet et R. Herbin [4], mais la démonstration qui a fait l'objet d'une longue étude reste à faire dans le cas général ( $k = 2, k = 4, k = 6$ ).*

### 2.3.3 Validation numérique

Le schéma volumes finis, introduit et analysé plus haut, a été implanté pour le problème modèle (2.9) avec  $A = I$ . Le domaine de calcul est le carré unité,  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , de frontière  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \{(x, y) \in [0, 1]^2; y = 0\} \cup \{(x, y) \in [0, 1]^2; y = 1\}, \\ \Gamma_N &= \{(x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 0\} \cup \{(x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 1\}. \end{aligned}$$

Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on choisit les données suivantes :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ((a\pi)^2 + (b\pi)^2) \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ g(x, y) &= a\pi \cos(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_N, \\ u_D(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte du problème (2.9) est donnée par :

$$u(x, y) = \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Afin d'estimer l'ordre de l'erreur  $\alpha = \alpha(k)$ ,  $k$  étant le paramètre d'interpolation, on écrit

$$\|u - u_h\| = O(h^\alpha).$$

$\|\cdot\|$  est une norme à préciser. On considère une subdivision régulière d'un maillage de départ  $\mathfrak{S}_h$ . Les maillages suivants sont obtenus en découpant chaque élément en 4 sous-éléments. Ceci revient donc à construire des maillages dont les pas sont donnés par  $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ , où  $h_0 = h$  est le pas initial.

**Estimation de l'erreur avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$**  : Dans le tableau TAB. 2.1, on donne les valeurs de  $\alpha$  estimées pour les valeurs successives de  $h_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ . Pour un  $k$  donné, nous soulignons la valeur de  $\alpha$  correspondant au maillage le plus fin. La norme adoptée ici est la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

$k \backslash h$	1/8	1/16	1/32	1/64
0	1.74	1.84	1.97	<b>1.99</b>
2	1.90	2.53	2.80	<b>2.90</b>
4	3.03	3.56	3.81	<b>3.91</b>
6	4.22	4.54	4.84	<b>4.92</b>

TAB. 2.1 – Estimation du coefficient  $\alpha$  : Problème modèle.

Les résultats obtenus dans le tableau précédent montrent que pour  $k = 0$ , au lieu de  $\alpha = 1$  espéré d'après la proposition 2.1, on obtient  $\alpha = 2$  ce qui est certainement une conséquence du choix du maillage. Pour  $k = 2$ , le résultat est conforme à l'estimation théorique. Pour les autres valeurs de  $k$ , il y a une perte de précision ( $\alpha \simeq 4$  et  $5$  pour  $k$  respectivement égal à 4 et 6). A notre avis, ces résultats sont dûs aux effets de bord. Dans ces cas, les maillages devraient être suffisamment fins.

**Remarque 2.7** *Nous avons fait varier les deux réels  $a$  et  $b$  et nous avons constaté que l'erreur ne varie pas en fonction de ces deux constantes. Les résultats présentés plus haut sont obtenus avec  $a = b = 1$ .*

**Remarque 2.8** *D'autres normes ont été testées, elles donnent les mêmes résultats d'estimation que la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .*

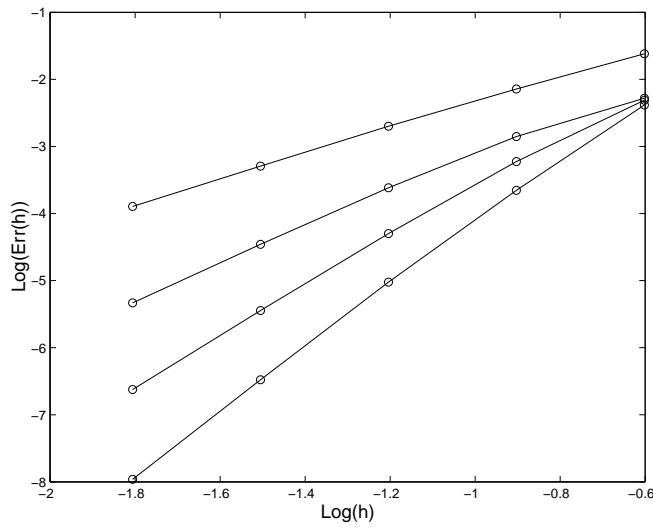


FIG. 2.4 – La comparaison des cas  $k = 0$ ,  $k = 2$ ,  $k = 4$  et  $k = 6$ .

## 2.4 Application au problème de l'élasticité linéaire

### 2.4.1 Présentation du problème

Sous les effets des charges  $f$  (forces volumique) et  $g$  (charge surfacique) sur  $\Gamma_N$  l'équilibre d'un corps élastique  $B$  homogène et isotrope, occupant un domaine  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  et  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ , est régi par le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -\text{div} \left( T(\nabla \mathbf{u}) \right) = f \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ T(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} = g \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (2.23)$$

Où  $f \in (L^2(\Omega))^2$ ,  $g \in (L^2(\Gamma_N))^2$ ,  $\mathbf{u}_D$  est la trace de  $\mathbf{u}$  sur  $\Gamma_D$  et  $T(\nabla \mathbf{u})$  est le tenseur de contraintes de Cauchy. Soit  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  le tenseur symétrisé des déformations, dans le cas de la loi de Hooke (petites déformations), le tenseur des contraintes est donné par :

$$T(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))\mathbf{I}. \quad (2.24)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé. Soit  $w$  ( $w \subset \Omega$ ) un volume de contrôle, en appliquant le théorème de Gauss, nous avons

$$\int_{\partial w} T(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} \, ds + \int_w f \, dx dy = 0. \quad (2.25)$$

**Avant d'aborder la discrétisation du problème (2.25), nous présentons d'abord les modification apportées au schéma dans le cas où la matrice  $A$  du problème modèle (2.9) n'est plus l'identité.** Contrairement au cas du problème modèle avec  $A = I$ , sur une même face, les termes de flux font intervenir les deux dérivées  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Pour  $k = 0$ , sur la face Est par exemple, l'espace des polynômes utilisé pour l'interpolation est  $Q_{1,0}$ , ce qui revient à supposer que  $u$  est constante en  $y$ . Ceci se traduit par  $\frac{\partial I_e(u)}{\partial y} = 0$ . Afin de contourner cette difficulté, nous découpons la face en deux morceaux  $F_E^N$  et  $F_E^S$  (voir FIG. 2.5). On interpole ensuite sur chacun des morceaux par des polynômes de  $Q_{1,1}$  ( $k = 0$ ).

Pour une cellule  $w$  quelconque du domaine  $\Omega$ , en notant  $e$  les faces de  $\partial w$ , nous avons :

$$\sum_{e \in \partial w} \int_e A \nabla u \cdot n \, ds + \int_w f \, dx dy = 0, \quad \forall w \subset \Omega. \quad (2.26)$$

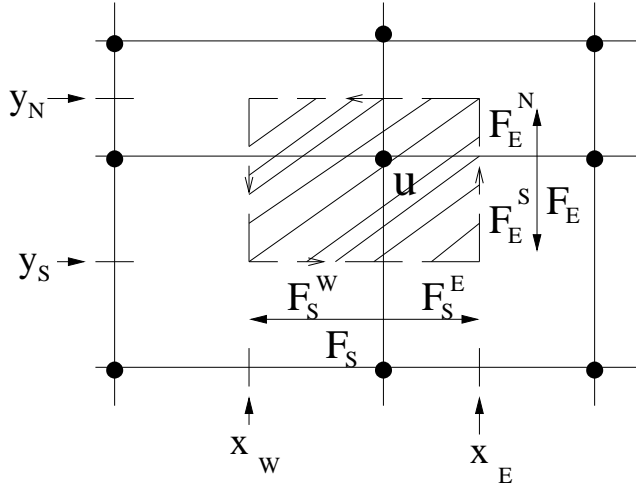


FIG. 2.5 – Découpage des faces.

Comme  $\partial w = F_E \cup F_W \cup F_S \cup F_N$  et  $F_E = F_E^N \cup F_E^S$ ,  $F_W = F_W^N \cup F_W^S$ ,  $F_N = F_N^E \cup F_N^W$ ,  $F_S = F_S^E \cup F_S^W$  (voir FIG. 2.5), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \partial w} \int_e A \nabla u \cdot n \, ds &= \int_{F_E} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x}(x_E, s) \, ds + \int_{F_E^N} a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}(x_E, s) \, ds + \int_{F_E^S} a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}(x_E, s) \, ds \\ &- \int_{F_W} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x}(x_W, s) \, ds - \int_{F_W^N} a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}(x_W, s) \, ds - \int_{F_W^S} a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}(x_W, s) \, ds \\ &+ \int_{F_N^E} a_{21} \frac{\partial u}{\partial x}(s, y_N) \, ds + \int_{F_N^W} a_{21} \frac{\partial u}{\partial x}(s, y_N) \, ds + \int_{F_N} a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_N) \, ds \\ &- \int_{F_S^E} a_{21} \frac{\partial u}{\partial x}(s, y_S) \, ds - \int_{F_S^W} a_{21} \frac{\partial u}{\partial x}(s, y_S) \, ds - \int_{F_S} a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_S) \, ds. \end{aligned}$$

Rappelons que  $k_1 = \frac{k}{2}$ . Pour expliciter les calculs, nous ne considérons que la face Est. Pour les autres faces, le calcul se fait de la même manière. Dans la suite, nous soulignons les différences constatées entre l'application du schéma au problème modèle avec  $A = I$  et  $A \neq I$ .

- Pour le terme  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , l'interpolation sur la face  $F_E$  se fait dans l'espace  $Q_{k+1,k}$ , de la même manière qu'avant (voir (2.13)).

- Par contre pour le terme  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , on utilise  $(k+2)^2$  points correspondant à une interpolation dans  $Q_{k+1,k+1}$  par demi-face  $F_E^N$  et  $F_E^S$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_E^N(u)}{\partial y}(x_E, y) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1+1} u_{pq} L_p(x_E) \Lambda'_q(y), \\ \frac{\partial I_E^S(u)}{\partial y}(x_E, y) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1-1}^{j+k_1} u_{pq} L_p(x_E) \Lambda'_q(y).\end{aligned}$$

**Nous sommes maintenant en mesure de développer le schéma volumes finis pour le problème d'élasticité linéaire.**

Soit  $e$  une face de  $\partial w$  ( $w \subset \Omega$ ), la discrétisation de l'équation (2.25) est donnée par :

$$\sum_{e \in \partial w} \int_e T(\nabla I_e(\mathbf{u})) \mathbf{n} ds + \int_w f dx dy = \sum_{e \in \partial w} \int_e T\left(\frac{\partial I_e^x(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_e^y(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds + \int_w f dx dy = \text{(2.27)}$$

Où  $\frac{\partial I_e^x(u)}{\partial x}$  est l'interpolé de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  sur la face  $e$  et  $\frac{\partial I_e^y(u)}{\partial x}$  l'interpolé de  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sur la face  $e$ .

Comme  $\partial w = F_E \cup F_W \cup F_N \cup F_S$ ,  $F_E = F_E^N \cup F_E^S$ ,  $F_W = F_W^N \cup F_W^S$ ,  $F_N = F_N^E \cup F_N^W$  et  $F_S = F_S^E \cup F_S^W$  (voir FIG. 2.5), nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{e \in \partial w} \int_e T(\nabla I_e(\mathbf{u})) \mathbf{n} ds &= \int_{F_E^S} T\left(\frac{\partial I_E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_E^S(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds + \int_{F_E^N} T\left(\frac{\partial I_E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_E^N(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds \\ &+ \int_{F_W^S} T\left(\frac{\partial I_W(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_W^S(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds + \int_{F_W^N} T\left(\frac{\partial I_W(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_W^N(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds \\ &+ \int_{F_N^W} T\left(\frac{\partial I_N^W(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_N(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds + \int_{F_N^E} T\left(\frac{\partial I_N^E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_N(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds \\ &+ \int_{F_S^W} T\left(\frac{\partial I_S^W(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_S(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds + \int_{F_S^E} T\left(\frac{\partial I_S^E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_S(\mathbf{u})}{\partial y}\right) \mathbf{n} ds.\end{aligned}$$

où  $I_E(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k}$  sur la face Est,  $I_E^N(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Est-Nord et  $I_E^S(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Est-Sud et  $I_N(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $Q_{k,k+1}$  sur la face Nord,  $I_N^E(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Nord-Est et  $I_N^W(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Nord-Ouest.

### 2.4.2 Etude de la consistance

On rappelle que  $h_x$  et  $h_y$  sont les pas de discrétisation suivant  $x$  et  $y$  respectivement :

$$h_y = \max_j h_{y_j} \quad \text{et} \quad h_x = \max_i h_{x_i},$$

où  $h_{y_j}$  et  $h_{x_i}$  les longueurs de la cellule  $w_{i,j}$  respectivement suivant  $y$  et  $x$ .

**Proposition 2.2** On suppose que  $\mathbf{u} \in (C^{k+3}(\Omega))^2$ . Soit  $w$  une cellule du maillage, il existe alors une constante  $C$  dépendant de  $k$  indépendante de  $h_x$  et de  $h_y$  telle que

$$\left\| \sum_{e \in \partial w} \frac{1}{\text{mes}(e)} \int_e (T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - T(\nabla I_e(\mathbf{u}_h))\mathbf{n}) ds \right\|_1 \leq C \max(h_x, h_y)^{k+1}, \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{u}_h \in X_h = G(\Omega_h)$ , l'ensemble des fonctions grilles. Et  $I_e(\mathbf{u}_h)$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}_h$  sur la face  $e$  de  $w$ .

**Preuve.** On cherche à majorer le terme  $\frac{1}{\text{mes}(e)} \int_e (T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - T(\nabla I_e(\mathbf{u}_h))\mathbf{n}) ds$ .

Sur la face Est  $\mathbf{n} = (1, 0)$ , en remplaçant  $T(\nabla \mathbf{u})$  par sa valeur donnée par (2.24), on obtient :

$$T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} = \left( 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))\mathbf{I} \right) \mathbf{n} = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{array} \right\},$$

ainsi

$$T\left(\frac{\partial I_e^x(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_e^y(\mathbf{u})}{\partial y}\right)\mathbf{n} = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial I_e^x(u)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial I_e^y(v)}{\partial y} \\ \mu \left( \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} + \frac{\partial I_e^x(v)}{\partial x} \right) \end{array} \right\}.$$

On pose  $Err = T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - T\left(\frac{\partial I_e^x(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_e^y(\mathbf{u})}{\partial y}\right)\mathbf{n}$ ,

$$Err = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(u)}{\partial x} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(v)}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(v)}{\partial x} \right) \end{array} \right\},$$

et  $I = \int_{F_E} T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - T\left(\frac{\partial I_e^x(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_e^y(\mathbf{u})}{\partial y}\right)\mathbf{n} ds$ , donc

$$I = \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(u)}{\partial x} \right) ds + \lambda \int_{F_E} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(v)}{\partial y} \right) ds \\ \mu \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} \right) ds + \mu \int_{F_E} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(v)}{\partial x} \right) ds \end{array} \right\}.$$

Pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , on note par  $\|\mathbf{x}\|_1$ ,  $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$ , donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} (T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} - T(\nabla I_e(\mathbf{u}))\mathbf{n}) ds \right\|_1 &\leq (\lambda + 2\mu) \left| \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(u)}{\partial x} \right) ds \right| \\ &+ \lambda \left| \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(v)}{\partial y} \right) ds \right| \\ &+ \mu \left| \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} \right) ds \right| \\ &+ \mu \left| \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial I_e^x(v)}{\partial x} \right) ds \right|. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1 (étude du schéma volumes finis pour le problème modèle),

$$\exists c_1 > 0; \frac{1}{mes(F_E)} \left| \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right) ds \right| \leq c_1 \max(h_x, h_y)^{k+1}.$$

Il reste donc à majorer  $\frac{1}{mes(F_E)} \left| \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} \right) ds \right|$ . Avec

$$I_e^y(u)(x_E, y) = \begin{cases} I_E^N(u)(x_E, y) & \text{si } y > y_j, \\ I_E^S(u)(x_E, y) & \text{si } y \leq y_j, \end{cases}$$

où  $y_j$  l'ordonnée du noeud  $N_{i,j}$  auquel est associée la cellule  $w$ , donc

$$\int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_e^y(u)}{\partial y} \right) ds = \int_{F_E^N} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_E^N(u)}{\partial y} \right) ds + \int_{F_E^S} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_E^S(u)}{\partial y} \right) ds$$

On s'intéresse à la majoration du terme  $\int_{F_E^N} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial I_E^N(u)}{\partial y} \right) ds$ . Comme  $I_E^N(u)$  est l'interpolé de  $u$  par les polynômes de  $Q_{k+1,k+1}$  et que  $Q_{k+1,k} \subset Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face  $F_E^N$  ( $F_E^N \subset F_E$ ) de la cellule  $w$ . La suite de la preuve est donc la même que pour le problème modèle. D'où le résultat ■

### 2.4.3 Validation numérique

Les modifications introduites, pour prendre en compte les termes contenant des dérivées en  $y$  (voir le début du paragraphe 2.4), ont été implantées et testées sur le problème d'élasticité linéaire (2.23). Le domaine de calcul est toujours le carré unité avec le même type de condition aux limites, les données du problème sont :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

où pour  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (2\mu((a\pi)^2) + \lambda((a\pi)^2) + \mu(b\pi)^2) \sin(a\pi x) \cos(b\pi y) \\ &\quad + (ab(\pi^2)(\mu + \lambda) \sin(b\pi x) \cos(a\pi y)), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ f_2(x, y) &= (2\mu((b\pi)^2) + \lambda((b\pi)^2) + \mu(a\pi)^2) \sin(a\pi x) \cos(b\pi y) \\ &\quad + (ab(\pi^2)(\mu + \lambda) \sin(b\pi x) \cos(a\pi y)), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= (2\mu a\pi + \lambda a\pi) \cos(a\pi x) \cos(b\pi y) - \lambda b\pi \sin(b\pi x) \sin(a\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_N, \\ g_2(x, y) &= \mu(a\pi \cos(a\pi x) \cos(b\pi y) - b\pi \sin(a\pi x) \sin(b\pi y)), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_N, \end{aligned}$$

les conditions de Dirichlet sont données par :

$$\begin{aligned} u_D(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D, \\ v_D(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte du problème (2.23) est donnée par : ( $\mathbf{u}_{ex} = (u, v)$ )

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ v(x, y) &= \sin(a\pi x) \cos(b\pi y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

## Estimation d'erreur avec la norme $\|\cdot\|_\infty$

Pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , on donne ci-dessous les valeurs de  $\alpha$  estimées pour différentes valeurs de  $h$  (obtenues avec  $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ ). On commence d'abord par le schéma à 9 points correspondant à  $k = 0$  et on finira avec le schéma à 81 points correspondant à  $k = 6$ . Dans tout ce qui suit,  $Err(h)$  représente l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ex}\|_\infty$  et  $R_h(h)$  le résidu.

Les tableaux suivants représentent les résultats obtenus pour  $k = 0, 2, 4, 6$ . Correspondant resp. à 9, 25, 49 et 81 points. Nous avons représenté en gras la valeur de  $\alpha$  correspondant au maillage le plus fin ( $h = \frac{1}{64}$ ).

$h$	1/16	1/32	1/64	$h$	1/32	1/64
$Err(h)$	4.968E-02	1.618E-03	4.468E-03	$\alpha$	1.62	<b>1.86</b>
$R_h(h)$	0.22E-15	0.33E-15	0.49E-15			

TAB. 2.2 – Le cas  $k = 0$ , (Schéma à 9 points).

$h$	1/16	1/32	1/64	$h$	1/32	1/64
$Err(h)$	5.726E-03	7.029E-04	8.387E-05	$\alpha$	3.03	<b>3.07</b>
$R_h(h)$	0.22E-15	0.33E-15	0.49E-15			

TAB. 2.3 – Le cas  $k = 2$ , (Schéma à 25 points).

$h$	1/16	1/32	1/64	$h$	1/32	1/64
$Err(h)$	4.034E-04	1.950E-05	1.071E-06	$\alpha$	4.37	<b>4.19</b>
$R_h(h)$	0.31E-15	0.47E-15	0.68E-15			

TAB. 2.4 – Le cas  $k = 4$ , (Schéma à 49 points).



$h$	1/16	1/32	1/64			
$Err(h)$	1.867E-04	5.960E-06	1.838E-07	$h$	1/32	1/64
$R_h(h)$	0.40E-15	0.57E-15	0.85E-15	$\alpha$	4.97	<b>5.02</b>

TAB. 2.5 – Le cas  $k = 6$ , (Schéma à 81 points).

Il apparait que  $\alpha = 2$ , correspondant au schéma volumes finis  $k = 0$ , reste surévalué. Ceci est certainement lié au choix du maillage (uniforme). La valeur de  $\alpha = 3$ , correspondant à  $k = 2$ , est conforme au résultat théorique obtenu dans la proposition 2.2. Les autres valeurs de  $\alpha$  restent inférieures aux valeurs espérées. Ceci est, encore une fois, une conséquence des effets de bord.

# Chapitre 3

Généralisation des schémas à un domaine quelconque.

### 3.1 Préliminaires

Le schéma volumes finis introduit précédemment s'applique, avec succès, à des domaines rectangulaires. Dans le but de le généraliser à un domaine  $\Omega$  quelconque, nous introduisons une application  $\varphi$  qui transforme  $\Omega$  en un domaine rectangulaire  $\widehat{\Omega}$ . A l'aide de transformations d'intégrales, qui seront précisées plus loin, les flux seront alors évalués sur les faces des cellules rectangulaires  $\widehat{w} \subset \widehat{\Omega}$ .

Dans tout ce qui suit, on appellera domaine logique ou de référence un domaine rectangulaire  $\widehat{\Omega}$  et domaine physique le domaine  $\Omega$ . On suppose qu'il existe une application  $\varphi$  ( $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme) qui transforme  $\widehat{\Omega}$  en  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \varphi &: \widehat{\Omega} \longmapsto \Omega \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) &\longmapsto (x_1, x_2) = \varphi(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), \end{aligned}$$

On note  $D\varphi$  la différentielle de  $\varphi$  définie par  $D\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ ;  $i, j = 1, 2$ . Sur  $\widehat{\Omega}$ , on définit un maillage rectangulaire et un ensemble de cellules  $\{\widehat{w}_i\}_{i=1}^N$ . Les volumes de contrôles  $w_i \subset \Omega$  sont alors obtenus par transformation des cellules  $\widehat{w}_i$  (voir FIG. 3.1).

Pour discrétiser l'équation (2.9) du chapitre 2, avec  $A = I$ , il faut approcher :

$$\int_w f dx, \quad \int_{\partial w \cap \Gamma_N} g ds \quad \text{et} \quad \int_{\partial w \setminus \Gamma_N} \nabla u \cdot n ds.$$

On commence par le calcul de  $\int_w f dx$ . Soit  $\widehat{w}$  telle que  $w = \varphi(\widehat{w})$ , nous avons par changement de variable :

$$\int_w f dx = \int_{\widehat{w}} \widehat{f} |det(D\varphi)| d\widehat{x} = \int_{\widehat{w}} f \circ \varphi(\widehat{x}) |det(D\varphi(\widehat{x}))| d\widehat{x}.$$

Le terme  $\int_{\widehat{w}} f \circ \varphi(\widehat{x}) |det(D\varphi(\widehat{x}))| d\widehat{x}$  est évalué par une intégration numérique de Gauss, ie :

$$\int_{\widehat{w}} f \circ \varphi(\widehat{x}) |det(D\varphi(\widehat{x}))| d\widehat{x} = \sum_{p,q=1}^{Npg} w_p w_q f \circ \varphi(\widehat{\xi}_p, \widehat{\eta}_q) |det(D\varphi(\widehat{\xi}_p, \widehat{\eta}_q))|, \quad (3.1)$$

où  $(\widehat{\xi}_p, \widehat{\eta}_q)$  les points de Gauss,  $Npg$  le nombre de points de Gauss et  $(w_p)_{p=1}^{Npg}$  les poids de Gauss, en 1 dimension.

Il vient ensuite la contribution de la condition au limite de Neumann. Pour  $w$  une cellule telle que  $\partial w \cap \Gamma_N \neq \emptyset$ , nous avons :

$$\int_{\partial w \cap \Gamma_N} \nabla u \cdot n ds = \int_{\partial w \cap \Gamma_N} g ds = \sum_{e \in \partial w \cap \Gamma_N} \int_e g ds.$$

Pour évaluer les intégrales sur les arêtes du bord de la cellule, nous avons le résultat suivant (voir Sokolowski-Zolesio [13]) :

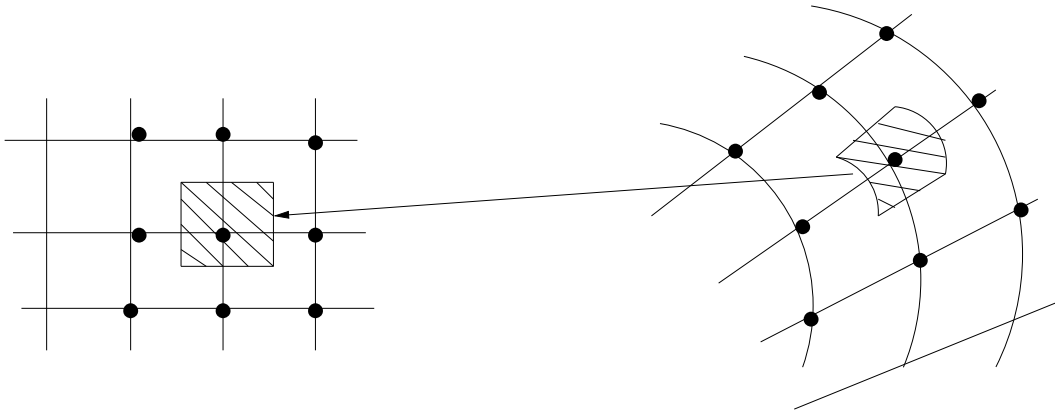


FIG. 3.1 – Transformation de la cellule  $\hat{w}$  en  $w$ .

**Proposition 3.1** Soit  $\psi$  l'application ( $C^1$ -difféomorphisme) qui transforme la face  $\hat{e}$  en  $e$ . Pour tout  $h \in L^1(e)$

$$\int_e h ds = \int_{\hat{e}} h \circ \psi \|M(\psi)\hat{n}\|_{\mathbb{R}^2} d\hat{s}, \quad (3.2)$$

où  $M(\psi) = \det(D\psi) [D\psi]^{-T}$ ,  $\hat{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\hat{e}$ .

Ou en déduit que :

$$\int_e g ds = \int_{\hat{e}} g \circ \varphi \|M(\varphi)\hat{n}\|_{\mathbb{R}^2} d\hat{s}.$$

Comme  $M(\varphi) = \det(D\varphi) [D\varphi]^{-T} = \text{Cof}(D\varphi)$ , la matrice des cofacteurs, nous avons

$$M(\varphi)\hat{n} = \begin{pmatrix} D\varphi_{22}(\hat{x})\hat{n}_x - D\varphi_{21}(\hat{x})\hat{n}_y \\ -D\varphi_{12}(\hat{x})\hat{n}_x + D\varphi_{11}(\hat{x})\hat{n}_y \end{pmatrix},$$

et donc

$$\|M(\varphi)\hat{n}\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{(D\varphi_{22}(\hat{x})\hat{n}_x - D\varphi_{21}(\hat{x})\hat{n}_y)^2 + (D\varphi_{12}(\hat{x})\hat{n}_x - D\varphi_{11}(\hat{x})\hat{n}_y)^2}.$$

Sur la face Est, par exemple,  $\hat{n} = (1, 0)$  et

$$\int_e g ds = \int_{\hat{e}} g \circ \varphi \sqrt{D\varphi_{22}^2(\hat{x}) + D\varphi_{12}^2(\hat{x})} d\hat{s}.$$

Et pour finir, on calcule les flux internes. Pour ce faire, nous rappelons la transformée de Piola (voir Roberts et Thomas [10]) : Pour  $q \in H(\text{div}, w)$  et pour  $e \in \partial w$ ,

$$\int_e q \cdot n ds = \int_{\hat{e}} \hat{q} \cdot \hat{n} d\hat{s}, \quad \text{avec } \hat{q}(\hat{x}) = (\det D\varphi)(D\varphi)^{-1}q(x). \quad (3.3)$$

Donc

$$\int_e q \cdot n \, ds = \int_{\hat{e}} \det(D\varphi) \left[ (D\varphi)^{-1} q(x) \right] \cdot \hat{n} \, d\hat{s}. \quad (3.4)$$

Pour  $q = \nabla u$ , on obtient :

$$\int_e \nabla u \cdot n \, ds = \int_{\hat{e}} \det(D\varphi) \left[ (D\varphi)^{-1} \nabla u(x) \right] \cdot \hat{n} \, d\hat{s}.$$

Comme  $\nabla u(x) = (D\varphi(x))^{-T} \widehat{\nabla} \hat{u}(\hat{x})$  avec  $\widehat{\nabla} \hat{u}(\hat{x}) = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right)$ , le passage du domaine physique au domaine de référence est donné par :

$$\int_e \nabla u \cdot n \, ds = \int_{\hat{e}} \det(D\varphi) \left[ (D\varphi)^{-1} (D\varphi)^{-T} \widehat{\nabla} \hat{u}(\hat{x}) \right] \cdot \hat{n} \, d\hat{s}. \quad (3.5)$$

Ainsi,

$$\int_{\partial w} \nabla u \cdot n \, ds = \sum_{e \in \partial w} \int_e \nabla u \cdot n \, ds = \sum_{\hat{e} \in \partial \hat{w}} \int_{\hat{e}} \det(D\varphi) \left[ (D\varphi)^{-1} (D\varphi)^{-T} \widehat{\nabla} \hat{u}(\hat{x}) \right] \cdot \hat{n} \, d\hat{s}.$$

On pose  $B = \det(D\varphi) (D\varphi)^{-1} [D\varphi]^{-T} = \text{Cof}(D\varphi)^T [D\varphi]^{-T}$ , les composantes de la matrice  $B$  sont données par :

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{\det(D\varphi)} (D\varphi_{12}^2 + D\varphi_{22}^2), & b_{22} &= \frac{1}{\det(D\varphi)} (D\varphi_{11}^2 + D\varphi_{21}^2), \\ b_{12} &= b_{21} = -\frac{1}{\det(D\varphi)} (D\varphi_{11} D\varphi_{12} + D\varphi_{22} D\varphi_{21}), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial w} \nabla u \cdot n \, ds &= \sum_{\hat{e} \in \partial \hat{w}} \int_{\hat{e}} (B \widehat{\nabla} \hat{u}) \cdot \hat{n} \, d\hat{s} \\ &= \int_{\hat{F}_E} (B \widehat{\nabla} \hat{u}) \cdot \hat{n} \, d\hat{s} + \int_{\hat{F}_W} (B \widehat{\nabla} \hat{u}) \cdot \hat{n} \, d\hat{s} + \int_{\hat{F}_N} (B \widehat{\nabla} \hat{u}) \cdot \hat{n} \, d\hat{s} + \int_{\hat{F}_S} (B \widehat{\nabla} \hat{u}) \cdot \hat{n} \, d\hat{s}. \end{aligned}$$

Ou encore, en prenant en compte l'orientation de la normale  $\hat{n}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial w} \nabla u \cdot n \, ds &= \int_{\hat{F}_E} \left( b_{11} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) (\hat{x}_E, \hat{s}) \, d\hat{s} - \int_{\hat{F}_W} \left( b_{11} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) (\hat{x}_W, \hat{s}) \, d\hat{s} \\ &+ \int_{\hat{F}_N} \left( b_{21} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) (\hat{s}, \hat{y}_N) \, d\hat{s} - \int_{\hat{F}_S} \left( b_{21} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) (\hat{s}, \hat{y}_S) \, d\hat{s}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Avec le découpage des faces :

$$\hat{F}_N = \hat{F}_N^E \cup \hat{F}_N^W, \quad \hat{F}_S = \hat{F}_S^E \cup \hat{F}_S^W, \quad \hat{F}_E = \hat{F}_E^S \cup \hat{F}_E^N \quad \text{et} \quad \hat{F}_W = \hat{F}_W^S \cup \hat{F}_W^N,$$

et en approchant  $\hat{u}$  par  $I_\varepsilon(\hat{u})$ , la discrétisation correspondante à (3.6) est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \int_{\hat{F}_E^N} (b_{11} \frac{\partial I_{\hat{E}}^N(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial I_{\hat{E}}^N(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}_E, \hat{y}) d\hat{y} + \int_{\hat{F}_E^S} (b_{11} \frac{\partial I_{\hat{E}}^S(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial I_{\hat{E}}^S(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}_E, \hat{y}) d\hat{y} \\
& - \int_{\hat{F}_W^N} (b_{11} \frac{\partial I_{\hat{W}}^N(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial I_{\hat{W}}^N(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}_W, \hat{y}) d\hat{y} - \int_{\hat{F}_W^S} (b_{11} \frac{\partial I_{\hat{W}}^S(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{12} \frac{\partial I_{\hat{W}}^S(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}_W, \hat{y}) d\hat{y} \\
& + \int_{\hat{F}_N^E} (b_{21} \frac{\partial I_{\hat{N}}^E(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial I_{\hat{N}}^E(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}, \hat{y}_N) d\hat{x} + \int_{\hat{F}_N^W} (b_{21} \frac{\partial I_{\hat{N}}^W(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial I_{\hat{N}}^W(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}, \hat{y}_N) d\hat{x} \\
& - \int_{\hat{F}_S^E} (b_{21} \frac{\partial I_{\hat{S}}^E(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial I_{\hat{S}}^E(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}, \hat{y}_S) d\hat{x} - \int_{\hat{F}_S^W} (b_{21} \frac{\partial I_{\hat{S}}^W(\hat{u})}{\partial \hat{x}} + b_{22} \frac{\partial I_{\hat{S}}^W(\hat{u})}{\partial \hat{y}})(\hat{x}, \hat{y}_S) d\hat{x}.
\end{aligned}$$

Comme plus haut, on pose  $k_1 = \frac{k}{2}$  avec  $k$  pair. On rappelle que l'interpolation de  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}$  sur la face  $\hat{F}_E$  et de  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}}$  sur les demi-faces  $\hat{F}_E^N$  et  $\hat{F}_E^S$  de  $\hat{F}_E$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\hat{E}}(\hat{u})}{\partial \hat{x}}(\hat{x}_E, \hat{y}) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1} \hat{u}_{pq} \hat{L}'_p(\hat{x}_E) \hat{\Lambda}_q(\hat{y}), \\
\frac{\partial I_{\hat{E}}^N(\hat{u})}{\partial \hat{y}}(\hat{x}_E, \hat{y}) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1+1} \hat{u}_{pq} \hat{L}_p(\hat{x}_E) \hat{\Lambda}'_q(\hat{y}), \\
\frac{\partial I_{\hat{E}}^S(\hat{u})}{\partial \hat{y}}(\hat{x}_E, \hat{y}) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1-1}^{j+k_1} \hat{u}_{pq} \hat{L}_p(\hat{x}_E) \hat{\Lambda}'_q(\hat{y}),
\end{aligned}$$

l'interpolation de  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}}$  sur la face  $\hat{F}_N$  et de  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}}$  sur les demi-faces  $\hat{F}_N^E$  et  $\hat{F}_N^W$  de  $\hat{F}_N$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\hat{N}}(\hat{u})}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}_N) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1+1} \hat{u}_{pq} \hat{L}_p(\hat{x}) \hat{\Lambda}'_q(\hat{y}_N), \\
\frac{\partial I_{\hat{N}}^E(\hat{u})}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}_N) &= \sum_{p=i-k_1}^{i+k_1+1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1+1} \hat{u}_{pq} \hat{L}'_p(\hat{x}) \hat{\Lambda}_q(\hat{y}_N), \\
\frac{\partial I_{\hat{N}}^W(\hat{u})}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}_N) &= \sum_{p=i-k_1-1}^{i+k_1} \sum_{q=j-k_1}^{j+k_1+1} \hat{u}_{pq} \hat{L}'_p(\hat{x}) \hat{\Lambda}_q(\hat{y}_N).
\end{aligned}$$

### 3.1.1 Consistance

Comme dans le cas rectangulaire, nous montrons dans ce qui suit que le schéma obtenu par transformation du domaine est consistant.

On note  $h_x$  et  $h_y$  les pas de discrétisation du domaine de référence suivant  $x$  et  $y$  respectivement :

$$h_y = \max_j h_{y_j} \quad \text{et} \quad h_x = \max_i h_{x_i},$$

où  $h_{y_j}$  et  $h_{x_i}$  sont les longueurs de la cellule  $\widehat{w}_{i,j}$  respectivement suivant  $y$  et  $x$ .

**Proposition 3.2** *On suppose que  $u \in C^{k+3}(\Omega)$ . Soient  $\varphi \in C^{k+3}(\Omega)$  une application qui transforme le domaine  $\Omega$  en un rectangle  $\widehat{\Omega}$  et  $w$  une cellule du domaine  $\Omega$  et  $e$  une face de  $\partial w$ , il existe alors une constante  $C$  dépendant de  $k$  et de l'application  $\varphi$  et indépendante de  $h_x$  et de  $h_y$  telle que*

$$\left| \sum_{e \in \partial w} \frac{1}{\text{mes}(e)} \int_e \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial I_e(u_h)}{\partial n} \right) d\sigma \right| \leq C \max(h_x, h_y)^{k+1} \quad (3.7)$$

où  $u_h \in X_h = G(\Omega_h)$ , l'ensemble des fonctions grilles. Et  $I_e(u_h)$  est l'interpolé de  $u_h$  sur la face  $e$  de  $w$ .

**Preuve.** La preuve est basée sur le résultat de la proposition 2.1. En effet, soit  $w$  la cellule de  $\Omega$  associée au noeud  $N_{ij}$  dont les coordonnées sont  $x_i$  et  $y_j$  et  $F_E$  la face Est de  $w$ . Soit  $\widehat{F}_E^N$  et  $\widehat{F}_E^S$  les deux morceaux de  $\widehat{F}_E$ , face Est, de  $\widehat{w} \subset \widehat{\Omega}$ . Nous avons d'après (3.6),

$$\begin{aligned} \int_{F_E} \frac{\partial u}{\partial x} ds &= \int_{\widehat{F}_E^N} (b_{11} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} + b_{12} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}})(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} + \int_{\widehat{F}_E^S} (b_{11} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} + b_{12} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}})(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}, \\ \int_{F_E} \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} ds &= \int_{\widehat{F}_E^N} (b_{11} \frac{\partial \widehat{I_E^N}(u)}{\partial \widehat{x}} + b_{12} \frac{\partial \widehat{I_E^N}(u)}{\partial \widehat{y}})(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} \\ &\quad + \int_{\widehat{F}_E^S} (b_{11} \frac{\partial \widehat{I_E^S}(u)}{\partial \widehat{x}} + b_{12} \frac{\partial \widehat{I_E^S}(u)}{\partial \widehat{y}})(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}. \end{aligned}$$

Avec

$$I_E(u)(x_E, y) = \begin{cases} I_E^N(u)(x_E, y) & \text{si } y > y_j, \\ I_E^S(u)(x_E, y) & \text{si } y \leq y_j. \end{cases}$$

En retranchant les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right) ds &= \int_{\widehat{F}_E^N} b_{11} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} - \frac{\partial \widehat{I_E^N}(u)}{\partial \widehat{x}} \right)(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} + \int_{\widehat{F}_E^N} b_{12} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial \widehat{I_E^N}(u)}{\partial \widehat{y}} \right)(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} \\ &\quad + \int_{\widehat{F}_E^S} b_{11} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} - \frac{\partial \widehat{I_E^S}(u)}{\partial \widehat{x}} \right)(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} + \int_{\widehat{F}_E^S} b_{12} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial \widehat{I_E^S}(u)}{\partial \widehat{y}} \right)(\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}. \end{aligned}$$

Comme

$$\widehat{I_E^N}(u)(\widehat{x}, \widehat{y}) = I_E^N(u) \circ \varphi(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{ij} \widehat{u}_{ij} L_i \circ \varphi_1(\widehat{x}, \widehat{y}) \Lambda_j \circ \varphi_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{ij} \widehat{u}_{ij} \widehat{L}_i(\widehat{x}) \widehat{\Lambda}_j(\widehat{y}),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{F_E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} \right) ds &= \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{\widehat{F}_E^N} b_{11} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^N(\widehat{u})}{\partial \widehat{x}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} \\
&+ \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{\widehat{F}_E^N} b_{12} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^N(\widehat{u})}{\partial \widehat{y}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} \\
&+ \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{\widehat{F}_E^S} b_{11} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^S(\widehat{u})}{\partial \widehat{x}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s} \\
&+ \frac{1}{\text{mes}(F_E)} \int_{\widehat{F}_E^S} b_{12} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^S(\widehat{u})}{\partial \widehat{y}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}.
\end{aligned}$$

D'autre part,  $b_{ij}(x, y)$  est bornée sur  $[\widehat{y}_{\widehat{S}}, \widehat{y}_{\widehat{N}}]$  et sur  $[\widehat{x}_{\widehat{W}}, \widehat{x}_{\widehat{E}}]$ , pour majorer  $\int_{F_E} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial I_E(u)}{\partial x} ds$ , il suffit donc de majorer  $\int_{\widehat{F}_E^N} b_{11} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{x}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^N(\widehat{u})}{\partial \widehat{x}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}$  et  $\int_{\widehat{F}_E^S} b_{12} \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial \widehat{I}_E^S(\widehat{u})}{\partial \widehat{y}} \right) (\widehat{x}_E, \widehat{s}) d\widehat{s}$ . Ceci s'obtient de la même façon que pour la proposition 2.1 du second chapitre. ■

### 3.2 Application du schéma volumes finis à un domaine avec fissure finie

Le domaine  $\Omega$  que nous considérons ici est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  présentant une fissure de rayon fini (voir FIG. 3.2), le choix de ce domaine est motivée par son utilisation ultérieure pour les déformations des corps hyperélastiques abordées dans la troisième partie de ce travail. Nous allons auparavant construire la transformation  $\varphi$  qui nous permet de nous ramener à un domaine de référence rectangulaire  $\widehat{\Omega}$ .

On se donne  $\widehat{\Omega} = (\widehat{\Omega}_1 \cup \widehat{\Omega}_2 \cup \widehat{\Omega}_3)$ , la transformation  $\varphi$  est construite de sorte que sa restriction  $\varphi_i$  au bloc  $\widehat{\Omega}_i$  est donnée par :

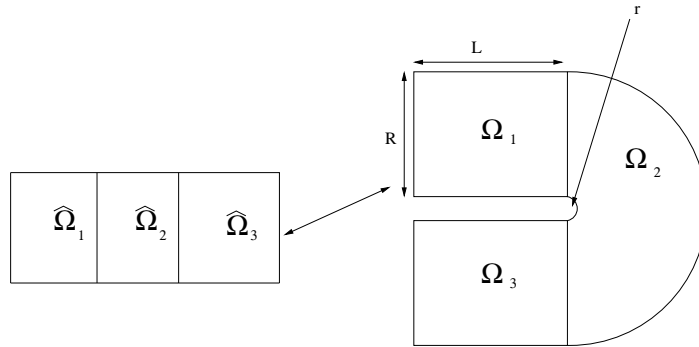


FIG. 3.2 – Les domaines de référence et physique.



**Bloc 1 :** la fonction  $\varphi_1 = \varphi_{/\widehat{\Omega}_1}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: \widehat{\Omega}_1 \longmapsto \Omega_1 \\ (\widehat{x}, \widehat{y}) &\longmapsto (x, y) = \varphi_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = \left( L(\widehat{x} - 1), r + (R - r)\widehat{y} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} &: \Omega_1 \longmapsto \widehat{\Omega}_1 \\ (x, y) &\longmapsto (\widehat{x}, \widehat{y}) = \varphi_1^{-1}(x, y) = \left( \frac{x}{L} + 1, \frac{y - r}{R - r} \right). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D\varphi_1 &= \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & R - r \end{pmatrix} \text{ et } \det(D\varphi_1) = L(R - r), \\ [D\varphi_1]^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R - r} \end{pmatrix} \text{ et } \det([D\varphi_1]^{-1}) = \frac{1}{L(R - r)}. \end{aligned}$$

**Blocs 2 :** la fonction  $\varphi_2 = \varphi_{/\widehat{\Omega}_2}$  définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &: \widehat{\Omega}_2 \longmapsto \Omega_2 \\ (\widehat{x}, \widehat{y}) &\longmapsto (x, y) = \varphi_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \left( \rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta) \right), \end{aligned}$$

où

$$\theta = \frac{\pi}{4}(3 - \widehat{x}) \text{ et } \rho = r + (R - r)\widehat{y}.$$

$$D\varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4}(r + (R - r)\widehat{y}) \sin(\theta) & (R - r) \cos(\theta) \\ -\frac{\pi}{4}(r + (R - r)\widehat{y}) \cos(\theta) & (R - r) \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'application réciproque est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} &: \Omega_2 \longmapsto \widehat{\Omega}_2 \\ (x, y) &\longmapsto (\widehat{x}, \widehat{y}) = \varphi_2^{-1}(x, y) = \left( 3 - \frac{4}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - r}{R - r} \right), \end{aligned}$$

et

$$[D\varphi_2]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4y}{\pi(x^2 + y^2)} & -\frac{4x}{\pi(x^2 + y^2)} \\ \frac{1}{(R - r)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{1}{(R - r)\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}.$$

**Bloc 3 :** la fonction  $\varphi_3 = \varphi_{/\widehat{\Omega}_3}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi_3 &: \widehat{\Omega}_3 \longmapsto \Omega_3 \\ (\widehat{x}, \widehat{y}) &\longmapsto (x, y) = \varphi_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = \left( -L(\widehat{x} - (Nb - 1)), -r - (R - r)\widehat{y} \right), \end{aligned}$$

où  $Nb$  le nombre des blocs. On a donc

$$\varphi_3^{-1} : \Omega_3 \longmapsto \widehat{\Omega}_3$$

$$(x, y) \longmapsto (\widehat{x}, \widehat{y}) = \varphi_3^{-1}(x, y) = \begin{cases} \widehat{x} = -\frac{x}{L} + Nb - 1, \\ \widehat{y} = -\frac{y+r}{R-r}. \end{cases}$$

Et

$$D\varphi_3 = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -(R-r) \end{pmatrix}, \quad \det(D\varphi_3) = L(R-r),$$

$$[D\varphi_3]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R-r} \end{pmatrix}, \quad \det([D\varphi_3]^{-1}) = \frac{1}{L(R-r)}.$$

### 3.2.1 Essais numériques ( $k = 0$ , $k = 2$ )

Pour  $f$ ,  $g$  et  $u_D$  données, on considère le problème modèle

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(T(\nabla \mathbf{u})) = f \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ T(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n} = g \text{ sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.8)$$

Où le tenseur  $T(\nabla \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u}$  pour le problème du Laplacien et  $T(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))I$  avec  $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$  pour le problème d'élasticité linéaire.

Les données  $f$ ,  $g$  et  $u_D$  sont choisies de sorte que la solution analytique de (3.8) soit de la forme :

$$u(x, y) = v(x, y) = x^2 + y^2, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 2xy), \\ v(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 + y^2 - 2xy). \end{cases} \quad (3.9)$$

Les essais présentés ici consistent en une comparaison des deux schémas volumes finis correspondant à  $k = 0$  et  $k = 2$ . Deux géométries, (voir FIG. 3.3), sont mises en jeu : une géométrie rectangulaire et une géométrie obtenue par transformation d'un rectangle de référence. Ceci nous a permis entre autres de valider les nouveaux éléments du code associés à la transformation. Le détail du calcul pour la transformation est donné plus loin (voir chapitre 5, paragraphe 5.5).

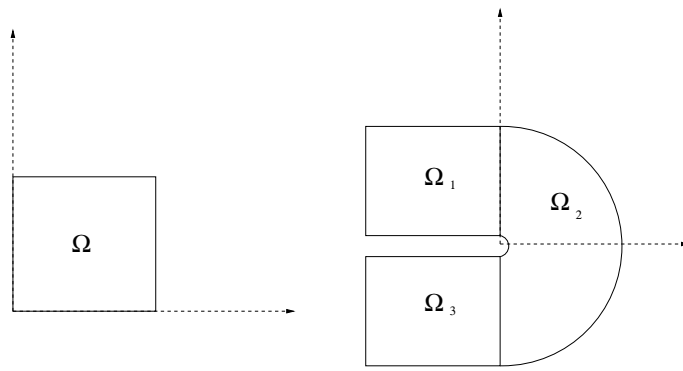


FIG. 3.3 – Les deux géométries.

Pour le domaine rectangulaire, nous avons considéré un maillage formé de  $97 \times 21$ , et pour le domaine courbe avec fissure, nous avons considéré un maillage formé de  $21 \times 21$  pour le premier et le troisième bloc,  $57 \times 21$  pour le deuxième bloc. Afin d'améliorer les résultats du calcul, nous avons utilisé un raffinement suivant l'axe des  $y$  comme le montre la figure FIG. 3.4.

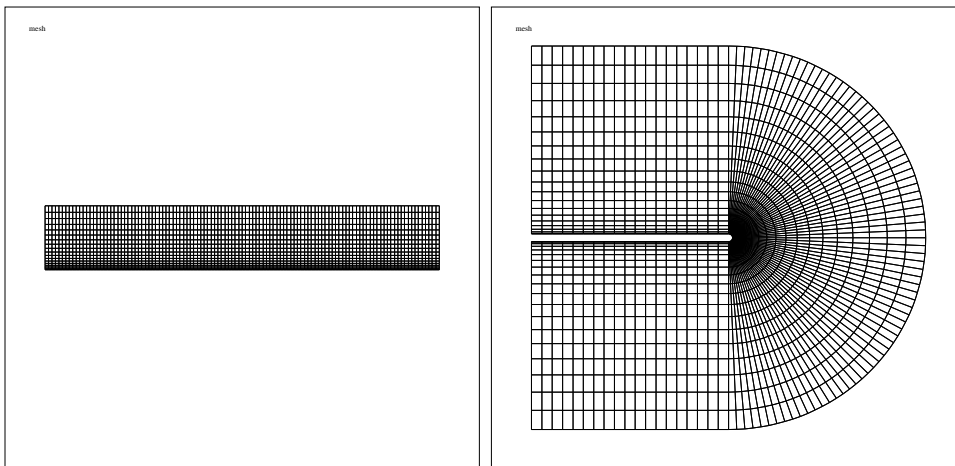


FIG. 3.4 – Le maillage adapté.

$A_1$  : Cas test  $N^{\circ 1}$  : Domaine rectangulaire et  $T(\nabla \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u}$ .

Schéma	Solution test	Erreur en max	Erreur en $L^2$
$k = 0$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$2.07 \times 10^{-3}$	$4.59 \times 10^{-4}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$2.07 \times 10^{-3}$	$4.59 \times 10^{-4}$
$k = 2$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$5.25 \times 10^{-15}$	$2.46 \times 10^{-15}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$5.24 \times 10^{-15}$	$2.46 \times 10^{-15}$
$k = 0$	$x^2 + y^2$	$3.41 \times 10^{-15}$	$2.42 \times 10^{-14}$
$k = 2$	$x^2 + y^2$	$3.11 \times 10^{-15}$	$5.21 \times 10^{-14}$

TAB. 3.1 – Cas test  $N^{\circ 1}$ .

$A_2$  : Cas test  $N^{\circ 2}$  : Domaine rectangulaire et  $T(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))I$ .

Schéma	Solution test	Erreur en max	Erreur en $L^2$
$k = 0$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$5.89 \times 10^{-2}$	$1.27 \times 10^{-2}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$4.91 \times 10^{-2}$	$1.27 \times 10^{-2}$
$k = 2$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$5.21 \times 10^{-15}$	$3.12 \times 10^{-14}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$5.21 \times 10^{-15}$	$3.12 \times 10^{-14}$
$k = 0$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$5.21 \times 10^{-15}$	$3.12 \times 10^{-14}$
	$v(x, y) = x^2 + y^2$	$5.21 \times 10^{-15}$	$3.12 \times 10^{-14}$
$k = 2$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$2.15 \times 10^{-15}$	$4.11 \times 10^{-14}$
	$v(x, y) = x^2 + y^2$	$2.15 \times 10^{-15}$	$4.11 \times 10^{-14}$

TAB. 3.2 – Cas test  $N^{\circ 2}$ .

Il est évident que pour les deux cas test précédents, le passage de  $k = 0$  à  $k = 2$  améliore considérablement la qualité de la solution puisqu'on passe d'une erreur de l'ordre de  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  pour  $k = 0$  à  $10^{-15}$  pour  $k = 2$ . Notons aussi que la seconde solution  $u = v = x^2 + y^2$  est bien approchée aussi bien avec  $k = 0$  que  $k = 2$ .

$A_3$  : Cas test  $N^{\circ}3$  : Domaine fissuré et  $T(\nabla \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u}$ .

Schéma	Solution test	Erreur en max	Erreur en $L^2$
$k = 0$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$2.01 \times 10^{-3}$	$6.61 \times 10^{-4}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$1.9 \times 10^{-3}$	$6.61 \times 10^{-4}$
$k = 2$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$7.3 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-4}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$7.29 \times 10^{-4}$	$2.8 \times 10^{-4}$
$k = 0$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$1.83 \times 10^{-16}$	$4.4 \times 10^{-16}$
$k = 2$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$2.27 \times 10^{-4}$	$3.02 \times 10^{-4}$

TAB. 3.3 – Cas test  $N^{\circ}3$ .

$A_4$  : Cas test  $N^{\circ}4$  : Domaine fissuré et  $T(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}))I$ .

Schéma	Solution test	Erreur en max	Erreur en $L^2$
$k = 0$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$5.7 \times 10^{-2}$	$1.16 \times 10^{-2}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$4.7 \times 10^{-2}$	$1.16 \times 10^{-2}$
$k = 2$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$4.88 \times 10^{-3}$	$8.22 \times 10^{-3}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$1.47 \times 10^{-2}$	$8.22 \times 10^{-3}$
$k = 0$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$5.06 \times 10^{-2}$	$9.06 \times 10^{-3}$
	$v(x, y) = x^2 + y^2$	$4.62 \times 10^{-2}$	$9.06 \times 10^{-3}$
$k = 2$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$1.83 \times 10^{-3}$	$7.42 \times 10^{-4}$
	$v(x, y) = x^2 + y^2$	$4.67 \times 10^{-3}$	$7.42 \times 10^{-4}$

TAB. 3.4 – Cas test  $N^{\circ}4$ .

Pour les cas test  $N^{\circ}3$  et 4 (géométrie fissuré) l'analyse des résultats est moins évidente. En effet, dans le cas de la première solution ( $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2 - 2xy)$  et  $v(x, y) = \frac{1}{2}(-x^2 + y^2 - 2xy)$ ) le passage de  $k = 0$  à  $k = 2$  nous permet d'améliorer légèrement la qualité de la solution, nous passons en effet d'une erreur de  $10^{-2}$  ( $10^{-3}$ ) à une autre de l'ordre de  $10^{-3}$  ( $10^{-4}$ ) et ceci pour les deux problèmes test. Par contre pour la seconde solution, le schéma associé à  $k = 0$  semble mieux se comporter sur un domaine fissuré que celui obtenu pour  $k = 2$ , alors que pour l'élasticité linéaire nous avons une amélioration en passant de  $k = 0$  à  $k = 2$ . Ce comportement paradoxal est peut-être dû à la transformation géométrique qui n'est pas "assez régulière".

Afin de tester l'influence de la transformation sur les calculs (Sur l'interface du bloc 1 et bloc 2, la transformation précédente est de classe 1), nous présentons dans le tableau TAB. 3.5 les mêmes hypothèses sauf que la transformation du bloc 1 et 3 est la même que pour le bloc 2, ce qui correspond au domaine de la figure FIG. 3.5 .

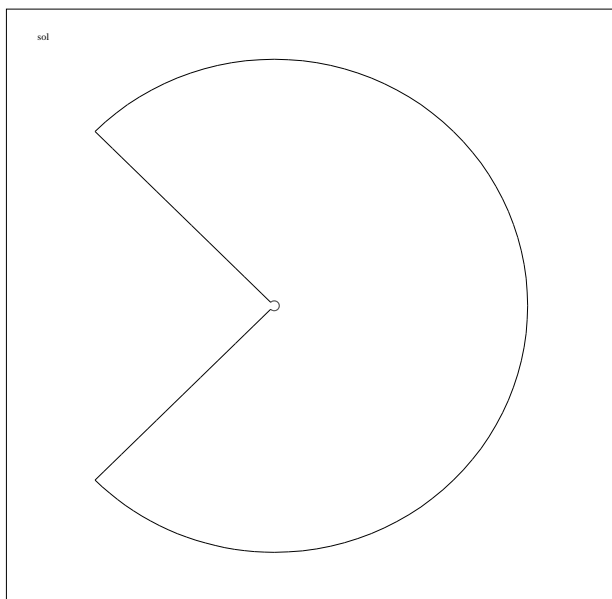


FIG. 3.5 – La deuxième géométrie.

$A_5$  : Cas test  $N^{\circ 5}$  : Domaine fissuré (portion de couronne) et  $T(\nabla u) = \nabla u$ .

Schéma	Solution test	Erreur en max	Erreur en $L^2$
$k = 0$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$2.464 \times 10^{-5}$	$1.747 \times 10^{-5}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$2.464 \times 10^{-5}$	$1.747 \times 10^{-5}$
$k = 2$	$0.5(x^2 - y^2 - 2xy)$	$4.102 \times 10^{-6}$	$4.073 \times 10^{-7}$
	$0.5(-x^2 + y^2 - 2xy)$	$4.102 \times 10^{-6}$	$4.073 \times 10^{-7}$
$k = 0$	$u(x, y) = x + y$	$1.249 \times 10^{-4}$	$5.155 \times 10^{-5}$
$k = 2$	$u(x, y) = x + y$	$1.074 \times 10^{-5}$	$8.785 \times 10^{-7}$
$k = 0$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$1.110 \times 10^{-16}$	$0.872 \times 10^{-16}$
$k = 2$	$u(x, y) = x^2 + y^2$	$2.775 \times 10^{-16}$	$1.820 \times 10^{-16}$

TAB. 3.5 – Cas test  $N^{\circ 5}$ .

Ce cas test a permis d'améliorer légèrement la qualité de la solution pour les deux schémas volumes finis  $k = 0$  et  $k = 2$  et même pour le passage de  $k = 0$  à  $k = 2$ . En effet, d'après la proposition 3.2, l'erreur est de l'ordre  $O(h^{k+1})$  si  $\varphi \in C^{k+3}(\Omega)$ , c'est le cas pour cet exemple.

### 3.2.2 Comparaison avec un schéma volumes éléments finis

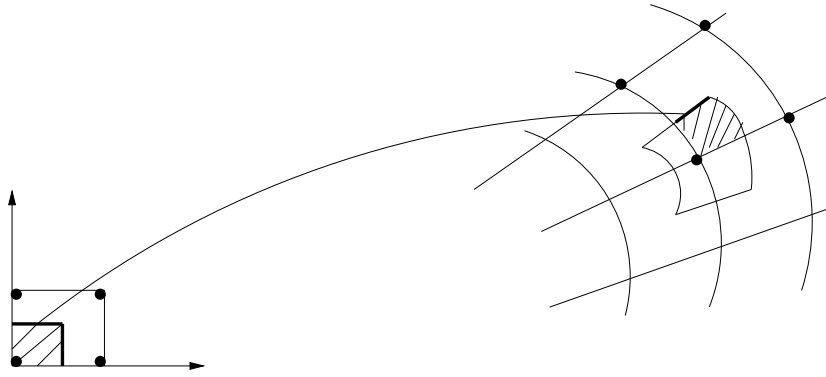


FIG. 3.6 – Transformation locale.

Le schéma Volumes-Eléments-Finis étudié par T. Schmidt dans [11] [12] a pour principe de placer les valeurs de  $u$  aux noeuds du maillage  $\mathfrak{S}_h$ . Le domaine  $\Omega$  est décomposé en des cellules  $\{w_i\}_{i=1}^N$  autour de chaque noeud du maillage. Par l'application d'une transformation locale  $\varphi_K : K \rightarrow \hat{K}, \forall K \in \mathfrak{S}_h$ , sur l'élément de référence carré  $] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[$  on ramène le calcul des flux sur le bord de la cellule  $\hat{w}_K$  image de  $w_K$  par cette transformation. Les flux sont approchés sur les demi-faces de la cellule  $\hat{w}_K$  par interpolation dans  $Q_{1,1}$ .

Dans notre cas, si on considère le schéma volumes finis à neuf points, ce qui correspond à  $k = 0$ , et si on suppose que la transformation  $\varphi$ , qui transforme  $\Omega$  en  $\hat{\Omega}$ , est locale (cellule par cellule), on obtient le même schéma.



# Bibliographie

- [1] H. Belarbi, *Faisabilité de la méthode des volumes finis pour la simulation de problèmes de mécanique des solides compressibles*, D.E.S.S, Paris 6, (2000).
- [2] P.G. Ciarlet and C. Wagschal, *Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element method*, Numer. Math. 17, 84–100, (1971).
- [3] F. Dubois, *Interpolation de Lagrange et volumes finis*, Note Aérospatiale ST/S numero 104109, (1992).
- [4] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet and J. L. Lions eds, vol VII, (2000).
- [5] J.F. Maitre, A. Rezgui, H. Souhail, A.M. Zine, *High order finite volume schemes. Application to non-linear elasticity*, in Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin and D. Kröner eds, 405-412, Hermes Penton Science, (2002).
- [6] R. Peyret, C. Taylor, *Computational methods for fluid flows*, Springer Verlag, Berlin, (1983).
- [7] A. Rezgui, *Schémas numériques compacts et non compacts d'ordre trois pour le calcul d'écoulements compressibles*, Thèse à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, October (1997).
- [8] A. Rezgui, *An analysis of accuracy and convergence of finite volume methods*. Comput. Fluid Dynam. J., 8(3), 369-377, (1999).
- [9] A. Rezgui, P. Cinnella et A. Lerat, *Third-order accurate finite volume schemes for Euler computations on curvilinear meshes*, Comput. Fluids 30, 875-901, (2001).
- [10] J.E. Roberts, J.M. Thomas, *Mixed and Hybrid*, Handbook of Numerical Analysis, vol II : Finite Element Methods (Part 1), Edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, (1991).

- [11] T. Schmidt, *Analyse zweier Finite-Volumen Methoden für elliptische partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung auf Vierecksgittern*, Doctoral Thesis, Kiel, (1992).
- [12] T. Schmidt, Kiel, *Box Schemes on Quadrilateral Meshes*, Computing 51, 271-292,, (1993).
- [13] J. Sokolowski, J.P. Zolesio, *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag, (1991).

## Troisième partie

Application à la résolution d'un  
problème d'élasticité non-linéaire.

## Chapitre 4

**Introduction à la théorie de la  
mécanique des milieux continus en  
grandes déformations.**

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une présentation de quelques éléments de mécanique des milieux continus en grandes déformations. Les mesures de déformations et de contraintes sont présentées aussi bien dans la configuration initiale que dans la configuration déformée. Ensuite, nous établissons les lois de comportement d'un milieu hyperélastique compressible et d'un milieu hyperélastique isotrope incompressible.

Le contenu de ce chapitre à été le fruit d'une lecture des références suivantes : essentiellement de P.G. Ciarlet [4], P.G. Ciarlet et G. Geymonat [3], M. Djaoua [7], M.F. Jazzar [10], P. Ladevèze [11], R.W. Ogden [16] [17], F. Sidoroff [19] [20] [21], C. Truesdell et W. Noll [23] et J.M. Vacherand [24].

## 4.2 Notions sur les grandes déformations

Considérons, à l'état initial, un solide  $D$  de volume  $\Omega_0$  et de frontière  $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$ , avec  $\Gamma_0 = \Gamma_D^0 \cup \Gamma_N^0$  où  $\Gamma_D^0$  représente la frontière des déplacements imposés et  $\Gamma_N^0$  représente la frontière des forces imposées.

Après déformation à l'instant  $t$  le solide prendra un volume  $\Omega_t$  de frontière  $\partial\Omega_t$ , où  $\partial\Omega_t = \Gamma_t$  avec  $\Gamma_t = \partial\Gamma_D^t \cup \partial\Gamma_N^t$ .

### 4.2.1 Description Lagrangienne

Afin de connaître le mouvement d'un système dans le repère  $\mathfrak{R}$ , il faut connaître les fonctions traduisant l'application  $\psi$  (une application ponctuelle bijective  $\psi(t, t')$  de  $\Omega_{t'}$  sur  $\Omega_t$ ) dans ce repère. Ces fonctions sont donc les inconnues d'un problème de mécanique des milieux continus. En effet, la description lagrangienne est déterminée par une seule fonction. Cette fonction doit, pour tout instant  $t$ , admettre une fonction réciproque. Si, pour tout couple  $(0, t)$ ,  $\varphi$  est une fonction différentiable de  $X$ , on peut associer à  $\varphi$  une application linéaire qui représente la transformation entre les voisinages de  $X$  et de  $x$ . En conséquence, le mouvement de ce solide est décrit par une famille d'application  $\varphi_t$  :

$$\begin{aligned}\varphi_t : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\ X &\longmapsto \varphi(X, t) = X + U(X, t),\end{aligned}$$

où  $U$  représente le déplacement de la particule  $P$ .

Définissons le mouvement local de la particule  $P_t$  en faisant appel à la transformation tangente ; cette application linéaire tangente s'écrit :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad (4.1)$$

ou encore

$$dx = \mathbf{F}(X, t)dX. \quad (4.2)$$

Nous définissons ainsi le tenseur du gradient de déformation  $\mathbf{F}$  qui permet le passage de la configuration initiale à la configuration déformée ou l'inverse

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{ij} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j}, \\ \mathbf{F} &= \nabla \varphi = \mathbf{I} + \nabla U.\end{aligned}$$

La description Lagrangienne fait intervenir les variables dans la configuration initiale.

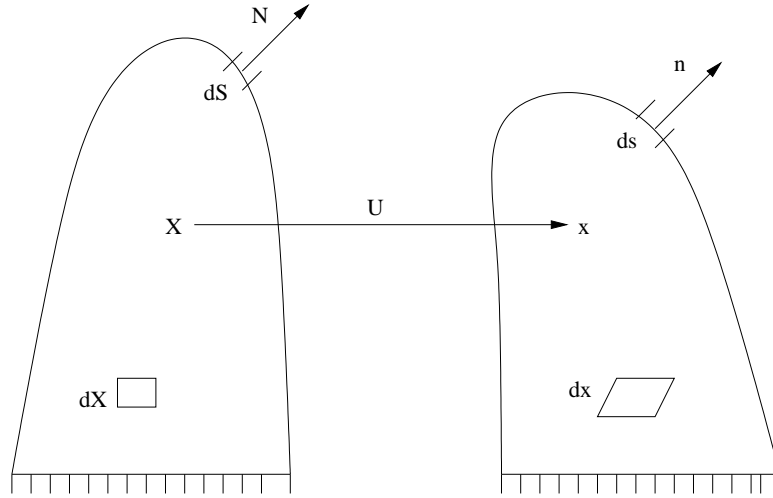


FIG. 4.1 – Passage de la configuration initiale à la configuration déformée.

### 4.2.2 Description Eulérienne

Elle est donnée à l'aide de quatre variables, qui sont  $x_1, y_1, z_1$  et  $t$ ; les composantes  $(x_1, y_1, z_1)$  représentent la position de la particule  $P_t$  à l'instant  $t$ , ces composantes sont appelées les variables d'Euler; les inconnues sont les composantes du déplacement  $U(X, t)$  de la particule à l'instant  $t$ .

La description eulérienne fait intervenir les variables dans la configuration déformée.

### 4.2.3 Déformation de grandeurs élémentaires

A- Déformation de l'élément de volume :

Le théorème de changement de variable permet de donner, dans le cas d'un élément de volume, une loi qui définit le volume élémentaire déformé à partir du volume élémentaire initial en effet :

$$v(t) = \int_{D(t)} dV(t) = \int_{D(0)} |\det \mathbf{F}| dV_0,$$

donc  $\det \mathbf{F}$  est une mesure (locale) pour le changement de volume. Nous avons  $\mathbf{F}(X, 0) = \mathbf{I}$  donc  $\det \mathbf{F}(X, 0) > 0$ ; la bijectivité implique que  $\det \mathbf{F}(X, t) \neq 0$  donc  $|\det \mathbf{F}(X, t)| = \det \mathbf{F}(X, t)$  pour tout  $t > 0$ .

Ainsi,

$$dv = \det \mathbf{F} dV, \tag{4.3}$$

la loi qui définit le volume élémentaire déformé à partir du volume élémentaire initial est donc donnée par :

$$dV \longmapsto dv = \det \mathbf{F} dV,$$

où  $dV$  représente le volume élémentaire du domaine initial et  $dv$  représente le volume élémentaire du domaine déformé;  $\det \mathbf{F} > 0$ , et dans le cas d'un matériau incompressible  $\det \mathbf{F} = 1$ .

B- Déformation de l'élément de surface :

On note par  $\mathbf{N}$  la normale sur la surface élémentaire du domaine initial et par  $\mathbf{n}$  la normale sur la surface élémentaire du domaine déformé et  $\text{Cof}$ , la matrice des cofacteurs. La loi de déformation d'une surface élémentaire du domaine initial noté  $\mathbf{N}dS$  en une surface élémentaire du domaine déformé noté  $\mathbf{n}ds$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}dS \longmapsto \mathbf{n}ds &= (\text{Cof } \mathbf{F})\mathbf{N}dS \\ &= (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dS. \end{aligned}$$

### 4.3 Les tenseurs des déformations

Les tenseurs des déformations sont définis dépendamment d'une configuration donnée. Nous définissons par la suite les formulations dans les deux configurations  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$ .

#### Description lagrangienne :

Dans cette partie, nous définissons le tenseur de Cauchy-Green droit et de déformation ainsi que les trois invariants des déformations souvent utilisés dans la définition des lois de comportement pour l'élasticité non-linéaire.

#### 4.3.1 Tenseur de Cauchy-Green droit

Soient  $dU$  et  $dW$  deux vecteurs dans l'espace de la configuration initiale  $\Omega_0$  et  $du$  et  $dw$  leurs images dans la configuration déformée  $\Omega_t$ , d'après la relation (4.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} du \cdot dw &= (\mathbf{F}dU) \cdot (\mathbf{F}dW), \\ du \cdot dw &= dU \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F}dW. \end{aligned}$$

Cette relation permet de définir le tenseur de Cauchy-Green droit sous la forme :

$$du \cdot dw = dU \cdot \mathbf{C}dW,$$

donc le tenseur de Cauchy-Green droit est donné par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T \nabla U. \quad (4.4)$$

$\mathbf{C}$  est symétrique par définition. De plus, il est défini positif et  $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{F})^2 > 0$ .

#### 4.3.2 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

La variation de produit scalaire de deux vecteurs élémentaires avant et après déformation permet de définir le tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$du \cdot dw - dU \cdot dW = 2 dU \cdot \mathbf{E} dW,$$

où

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T \nabla U). \quad (4.5)$$

$\mathbf{E}$  représente le tenseur des déformations de Green-Lagrange. Les trois invariants du tenseur de Cauchy-Green droit qui traduisent le comportement dans le cas isotrope sont donnés sous la forme :

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}), \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2} \left[ \text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right], \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

On peut définir les trois invariants en fonction des valeurs propres du gradient de déformation  $(\lambda_i)_{i=1}^3$ .

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \\ I_3(\mathbf{C}) &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned}$$

Introduisons les dérivées des trois invariants par rapport à  $\mathbf{C}$ , qu'on va utiliser par la suite pour la définition des lois de comportement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I}, \\ \frac{\partial I_2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} &= I_1(\mathbf{C})\mathbf{I} - \mathbf{C}, \\ \frac{\partial I_3(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} &= I_3(\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}. \end{aligned}$$

## Description Eulérienne :

### 4.3.3 Tenseur de Cauchy-Green gauche

Soient  $dU$  et  $dW$  deux vecteurs dans l'espace de la configuration initiale  $\Omega_0$  et  $du$  et  $dw$  leurs images dans la configuration déformée  $\Omega_t$ . Donc

$$du = \mathbf{F}dU \quad \text{et} \quad dw = \mathbf{F}dW,$$

donc

$$dU = \mathbf{F}^{-1}du \quad \text{et} \quad dW = \mathbf{F}^{-1}dw,$$

ou encore

$$dU \cdot dW = du \mathbf{F}^{-1} \cdot dw \mathbf{F}^{-1} \quad \text{et} \quad dU \cdot dW = du \cdot (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{-1} dw.$$

A partir de cette égalité, on définit le tenseur de Cauchy-Green gauche noté  $\mathbf{B}$  et vérifiant la relation suivante :

$$dU \cdot dW = du \cdot \mathbf{B}^{-1} dw,$$



le tenseur de Cauchy-Green gauche est défini par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{I} + \nabla U + \nabla U^T + \nabla U \nabla U^T. \quad (4.6)$$

### Tenseur de Euler-Almansi

La variation du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires avant et après déformation permet de définir le tenseur des déformations dans la description Eulérienne :

$$du \cdot dw - dU \cdot dW = du \cdot dw - du \cdot \mathbf{B}^{-1} dw = du \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) dw = 2 du \cdot \mathbf{A} dw,$$

où  $\mathbf{A}$  représente le tenseur des déformations de Euler-Almansi, défini par :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}).$$

### 4.3.4 Le cas des petites déformations infinitésimales

L'approximation signifie que  $\nabla U$  est petit et que le terme  $\nabla U^T \nabla U$  peut être négligé devant  $\nabla U$  et  $\nabla U^T$ . Les petites déformations infinitésimales sont réalisées dans le cas où la déformation est définie par :

$$\varepsilon(U) = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T) \quad : \text{tenseur taux de déformation.}$$

Comme le tenseur de Green-Lagrange est donné par  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  et le gradient de déformation par  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla U$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (\mathbf{I} + \nabla U)^T (\mathbf{I} + \nabla U) \\ &= \mathbf{I} + \nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T \nabla U. \end{aligned}$$

Dans le cas de petites perturbations, on néglige le terme d'ordre deux du développement de  $\mathbf{C}$ , donc dans le cas de petites déformations, l'expression de  $\mathbf{C}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{I} + \nabla U + \nabla U^T, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{I} + 2\varepsilon(U). \end{aligned}$$

Dans les mêmes conditions, on donne l'expression du tenseur de Cauchy-Green gauche dans le cas de petites perturbations, en négligeant le terme d'ordre deux du développement de  $\mathbf{B}$ , on obtient :

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + 2\varepsilon(U),$$

comme l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange est donnée par  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$  donc l'expression de  $\mathbf{E}$  en fonction du déplacement est donnée par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \nabla U)^T (\mathbf{I} + \nabla U) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T + \nabla U^T \nabla U).$$

Dans le cas de petites perturbations, en négligeant le terme d'ordre deux du développement de  $\mathbf{E}$ , donc dans le cas des petites déformations, l'expression de  $\mathbf{E}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T), \\ \mathbf{E} &= \varepsilon(U). \end{aligned}$$

Dans les mêmes conditions, on donne l'expression du tenseur de Euler-Almansi, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} + 2\varepsilon(U))^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - 2\varepsilon(U))) \\
 &= \varepsilon(U).
 \end{aligned}$$

## 4.4 Les tenseurs des contraintes

Les contraintes sont caractérisées à partir des efforts internes sur un élément de surface associé à une configuration donnée.

### 4.4.1 Formulation eulérienne

Les efforts internes dans la configuration déformée à travers un élément de surface  $\mathbf{n} ds$  sont définis par la relation suivante :

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} ds.$$

En formulation eulérienne, on définit par  $\mathbf{T}$  le tenseur des contraintes de Cauchy, donné par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} : \quad \Omega_t &\longrightarrow \Omega_t \\
 \mathbf{n} ds &\longmapsto \mathbf{T} \mathbf{n} ds.
 \end{aligned}$$

### 4.4.2 Formulation mixte

Afin de faire les calculs par rapport à la configuration initiale, on exprime la relation de l'élément de surface dans le domaine initial  $\Omega_0$  et le domaine déformé  $\Omega_t$ , soit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\Pi} : \quad \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\
 \mathbf{N} dS &\longmapsto \mathbf{\Pi} \mathbf{N} dS.
 \end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathbf{\Pi}$  définit une application de la configuration initiale dans la configuration déformée ; de plus il n'est pas symétrique.  $\mathbf{\Pi}$  est appelé le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

### 4.4.3 Formulation lagrangienne

A partir de la transformation du vecteur  $du$  dans la configuration initiale  $\Omega_0$ , nous définissons le tenseur des contraintes en formulation lagrangienne :

$$dU = \mathbf{F}^{-1} du.$$

Cette relation permet de définir l'application suivante qui donne la définition du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_0 \\ \mathbf{N} dS &\longmapsto \mathbf{S} \mathbf{N} dS, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{S}$  représente le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

#### 4.4.4 Les relations entre les tenseurs des contraintes

A partir des expressions qui définissent les différentes contraintes, nous exprimons les relations entre les tenseurs des contraintes qui permettent le passage d'une configuration à l'autre. (configuration initiale pour le deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ , configuration déformée pour le tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{T}$  et entre les deux configurations le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$ ).

$$d u = \mathbf{T} \mathbf{n} d s, \quad (4.7)$$

$$d u = \mathbf{\Pi} \mathbf{N} d S, \quad (4.8)$$

$$d U = \mathbf{S} \mathbf{N} d S. \quad (4.9)$$

D'après les deux relations (4.7) et (4.8) on peut donner la relation suivante entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{T} \mathbf{n} d s = \mathbf{\Pi} \mathbf{N} d S,$$

or, d'après la transformation de l'élément de surface qui est présentée par  $\mathbf{n} d s = \text{Cof } \mathbf{F} \mathbf{N} d S$ , on conclut que :

$$\mathbf{T} (\text{Cof } \mathbf{F}) \mathbf{N} d S = \mathbf{\Pi} \mathbf{N} d S.$$

Donc la relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{T} \text{Cof } \mathbf{F} \\ &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T. \quad (4.10)$$

De plus, d'après les deux relations (4.8) et (4.9) et la relation de passage pour les vecteurs élémentaires  $d u = \mathbf{F} d U$ , nous exprimons la relation entre le premier et le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{S}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{\Pi} \mathbf{N} d S = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{N} d S,$$

ou encore

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \mathbf{S}. \quad (4.11)$$

Finalement les trois tenseurs sont liés par :

$$\mathbf{\Pi} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F} \mathbf{S}. \quad (4.12)$$

En multipliant la relation (4.12) à droite par  $\mathbf{F}^T$ , comme  $(\text{Cof } \mathbf{F}) \mathbf{F}^T = \det \mathbf{F} \mathbf{I} = J \mathbf{I}$ , on obtient :

$$\det(\mathbf{F}) \mathbf{T} = \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T,$$

donc

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (4.13)$$

## 4.5 Comportement hyperélastique compressible

### 4.5.1 Equation d'équilibre

Soit  $\Omega_0$  (respectivement  $\Omega$ ) le solide qui occupe le domaine dans la configuration initiale (resp. déformé), et  $\partial\Omega_0$  (resp.  $\partial\Omega$ ) la frontière de ce domaine telle que  $\partial\Omega^0 = \Gamma_N^0 \cup \Gamma_D^0$  (resp.  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ ). A partir de la relation fondamentale de la dynamique, nous écrivons dans le domaine  $\Omega_0$ , les équations locales du mouvement :

$$\begin{cases} -\text{Div } \mathbf{\Pi} = \rho_0 \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_0, \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{N} = T \text{ sur } \Gamma_N^0, \\ u = u_0 \text{ sur } \Gamma_D^0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ces équations peuvent aussi être écrites dans le domaine déformé par :

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{T} = \rho \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{T} \mathbf{n} = t \text{ sur } \Gamma_N, \\ u = \hat{u}_0 \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.15)$$

Avec  $\mathbf{f}$  la force volumique par unité de masse,  $T$  et  $t$  les forces surfaciques par unité d'aire dans  $\Omega_0$  et dans  $\Omega$ ,  $\rho_0$  et  $\rho$  les masses volumiques dans  $\Omega_0$  et dans  $\Omega$  et  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{n}$  les vecteurs unitaires aux frontières  $\Gamma_N^0$  et  $\Gamma_N$ . Notons que si  $\boldsymbol{\tau}$  est un tenseur,

$$(\text{div } \boldsymbol{\tau})_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}, \quad (\text{Div } \boldsymbol{\tau})_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial X_j} \tau_{ij}.$$

### 4.5.2 Matériau compressible

Soit  $W$  l'énergie des déformations internes, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donné par

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}, \quad (4.16)$$

et d'après (4.13) le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = \frac{2}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T.$$

Il est connu (voir [12]) que, pour un matériau hyperélastique et isotrope, l'énergie interne des déformations dépend des trois invariants.

$$W(x, \mathbf{F}) = W(x, I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})).$$

Le tenseur  $\mathbf{\Pi}$ , dans le cas d'un matériau hyperélastique isotrope, est donné par :

$$\mathbf{\Pi} = 2\mathbf{F}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{C}^{-1}\right). \quad (4.17)$$

L'expression de  $\mathbf{T}$  est donnée par :

$$\mathbf{T} = 2I_3^{-\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3}\mathbf{I}\right). \quad (4.18)$$

### 4.5.3 Exemples des densités d'énergie dans le cas compressible

La fonction d'énergie dans le cas d'un matériau de Saint-Venant-Kirchhoff en fonction du tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  est donnée par :

$$W(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2). \quad (4.19)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé classiques introduites pour l'élasticité linéaire. Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff ainsi que le tenseur des contraintes de Cauchy sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= 2\mathbf{F}\left(\frac{\lambda}{4}\text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{F} + \frac{\mu}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})\right), \\ \mathbf{T} &= \frac{2}{\det \mathbf{F}}\left(\mathbf{F}\left(\frac{\lambda}{4}\text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{F} + \frac{\mu}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})\right)\mathbf{F}^T\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

La fonction d'énergie, dans le cas d'un matériau compressible définie par Ciarlet et Geymonat en fonction du trois invariants, est donnée par :

$$W(\mathbf{F}) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + a(I_3 - 1) - (C_1 + 2C_2 + a) \ln(I_3),$$

où  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $a$  sont des constantes physiques liées au matériau.

Dans ce cas et en appliquant l'expression (4.17)  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{T}$  sont donnés par :

$$\mathbf{\Pi} = 2\mathbf{F}\left((C_1 + C_2 I_1)\mathbf{I} - C_2\mathbf{C} + (a I_3 - (C_1 + 2C_2 + a))\mathbf{C}^{-1}\right),$$

$$\mathbf{T} = 2I_3^{1/2}\left((C_1 + C_2 I_1)\mathbf{B} - C_2\mathbf{B}^2 + (a I_3 - (C_1 + 2C_2 + a))\mathbf{I}\right).$$

La fonction d'énergie, dans le cas d'un matériau compressible pour la loi de Mooney-Rivlin en fonction du trois invariants, est donnée par :

$$W(\mathbf{F}) = C_0\left(I_3 - \frac{1}{I_3}\right)^2 + C_1\left(\frac{I_1}{(I_3)^{\frac{1}{3}}} - 3\right) + C_2\left(\frac{I_2}{(I_3)^{\frac{2}{3}}} - 3\right).$$

$\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{T}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= 2\left(\frac{C_1}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} + \frac{C_2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}\text{tr}(\mathbf{C})\right)\mathbf{F} - \frac{2C_2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}\mathbf{F}\mathbf{C} \\ &+ \left(4C_0(\det(\mathbf{C}))^2 - \frac{1}{\det(\mathbf{C})^2}\right) - \frac{2C_1}{3\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}}\text{tr}(\mathbf{C}) - \frac{2C_2}{3\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2))\mathbf{F}^{-T}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{2}{\det \mathbf{F}}\left(\frac{C_1}{\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}} + \frac{C_2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}\text{tr}(\mathbf{C})\right)\mathbf{F} - \frac{2C_2}{\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}\mathbf{F}\mathbf{C} \\ &+ \left(4C_0(\det(\mathbf{C}))^2 - \frac{1}{\det(\mathbf{C})^2}\right) - \frac{2C_1}{3\det(\mathbf{C})^{\frac{1}{3}}}\text{tr}(\mathbf{C}) - \frac{2C_2}{3\det(\mathbf{C})^{\frac{2}{3}}}(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)).\end{aligned}$$

Notons que  $C_0$  dépend de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\nu$  suivant la relation

$$C_0 = \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \frac{C_1 + C_2}{24}.$$

## 4.6 Comportement hyperélastique isotrope incompressible

### 4.6.1 Matériau incompressible

Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff dans le cas incompressible est donné par :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \text{Cof } \mathbf{F}, \quad (4.21)$$

$$\det \mathbf{F} = 1. \quad (4.22)$$

Comme  $\text{Cof } \mathbf{F} = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}$  et  $\det \mathbf{F} = 1$ , nous avons

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T}, \quad (4.23)$$

ou encore

$$\mathbf{\Pi} = 2\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{F}^{-T}, \quad (4.24)$$

$p$  la pression.

Le tenseur des contraintes de Cauchy est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-T}\right)\mathbf{F}^T, \\ &= 2\mathbf{F}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Pour un matériau isotrope la fonction d'énergie dépend des trois invariants, donc

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}.$$

Les tenseurs  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{T}$  sont donc donnés par :

$$\mathbf{\Pi} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{F} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{F}\mathbf{C} - p\mathbf{F}^{-T}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{F}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}\right]\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}. \quad (4.26)$$

## 4.6.2 Exemples des densités d'énergie dans le cas incompressible

Simple exemple du matériau de neo-Hookean (Treloar [22]). La fonction d'énergie, dans le cas d'un matériau incompressible en fonction du premier invariant  $I_1$ , est donnée par :

$$W(\mathbf{F}) = C_{10}(I_1 - 3).$$

Où  $C_{10}$  une constante du matériau. Dans ce cas, et en appliquant les expressions (4.25) et (4.26),  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{T}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= 2C_{10}\mathbf{F} - p\mathbf{F}^{-T}, \\ \mathbf{T} &= 2C_{10}\mathbf{F}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Dans le cas du modèle de Mooney–Rivlin, la fonction d'énergie, dans le cas d'un matériau compressible définie par Mooney [15], Rivlin [18] en fonction des trois invariants, est donnée par :

$$W(\mathbf{F}) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3).$$

Où  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  des constantes du matériau. Dans ce cas et en appliquant les expressions (4.25) et (4.26),  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{T}$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= 2\left[(C_{10} + C_{01}I_1)\mathbf{F} - 2C_{01}\mathbf{F}\mathbf{C}\right] - p\mathbf{F}^{-T}, \\ \mathbf{T} &= 2\mathbf{F}\left[(C_{10} + C_{01}I_1)\mathbf{I} - C_{01}\mathbf{C}\right]\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Les problèmes à étudier sont :

- Dans le cas compressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) + \mathbf{f} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_N, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.27)$$

Où  $\mathbf{\Pi}$  est donné par :

$$\mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(x, \mathbf{I} + \nabla u). \quad (4.28)$$

- Dans le cas incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) + \mathbf{f} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \det(\mathbf{F}) = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_N, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.29)$$

Où  $\mathbf{\Pi}$  est donné par :

$$\mathbf{\Pi}(x, \mathbf{F}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(x, \mathbf{I} + \nabla u) - p(\mathbf{I} + \nabla u)^{-T}. \quad (4.30)$$

**Remarque 4.1** Concernant l'étude mathématique (existence, unicité, régularité,...) des deux problèmes (4.27) et (4.29) on renvoie à P. Le Tallec [12], P.G. Ciarlet [4] et J.M. Ball [1] et aux références qu'ils contiennent.

## Chapitre 5

Application du schéma volumes finis  
à la résolution d'un problème  
d'élasticité non-linéaire.



## 5.1 Introduction

Le schéma volumes finis, d'ordre élevé, introduit et analysé plus haut, est testé dans ce qui suit, sur un problème de déformations planes d'un bloc de gomme hyperélastique. Bien que le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff compressible ne soit pas parfaitement réaliste (sauf peut être pour des petites déformations, voir Ciarlet [4]), nous l'avons adopté pour deux raisons : d'une part, il est relativement facile à mettre en oeuvre, et d'autre part, il fournit une idée claire sur les difficultés inhérentes aux déformations des matériaux hyperélastiques.

Nous avons, dans un premier temps, adopté une géométrie simple qui nous a permis de valider les calculs sur des cas test dont la solution analytique est donnée. Nous avons ensuite utilisé une géométrie plus complexe qui consiste en un domaine de  $\mathbb{R}^2$  comprenant une fissure de rayon fini (voir FIG. 5.10). Cette géométrie a été ensuite adoptée pour tester des cas d'endommagement.

## 5.2 Rappel du problème physique :

On considère un bloc de gomme, occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  avec  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ . Quand il est soumis à des forces  $f$  et  $g$ , les déformations planes (voir Annexe 3 pour la justification du modèle 2D) du bloc sont régies par le problème aux limites :

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{\Pi}) + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{\Pi}\mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.1)$$

Où  $\mathbf{\Pi}$  est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Rappelons que pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, la fonction d'énergie  $W$  est donnée par

$$W(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}).$$

Le premier tenseur de Piola Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$ , défini par  $\mathbf{\Pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$ , peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}.$$

On en déduit donc que

$$\mathbf{\Pi} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I},$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= 2\mathbf{F} \left( \frac{\lambda}{4} \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{I} + \frac{\mu}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \right), \\ \mathbf{\Pi} &= 2(\nabla u + \mathbf{I}) \left( \frac{\lambda}{2} \text{tr} \left( \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2} + \frac{1}{2} \nabla u^T \nabla u \right) \mathbf{I} + \mu \left( \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2} + \frac{1}{2} \nabla u^T \nabla u \right) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

### 5.3 Schémas volumes finis

En appliquant la formule de Gauss à la première équation de (5.1), on obtient :

$$\int_{\partial w} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_w \mathbf{f} dx dy = 0, \quad (5.3)$$

où  $w$  est une cellule quelconque de  $\Omega$ . Comme  $\partial w = F_E \cup F_W \cup F_N \cup F_S$  nous avons

$$\int_{\partial w} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds = \int_{F_E} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_{F_W} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_{F_N} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_{F_S} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds.$$

Nous développons les calculs pour les faces Est et Nord, sachant que pour les autres faces les calculs sont semblables. Ensuite, suivant l'idée de décomposition des faces introduite au paragraphe 2.4, nous écrivons  $F_E = F_E^S \cup F_E^N$  (voir FIG. 2.5.) et  $F_N = F_N^E \cup F_N^W$ , et nous avons

$$\int_{F_E} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds = \int_{F_E^N} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_{F_E^S} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds, \quad (5.4)$$

$$\int_{F_N} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds = \int_{F_N^E} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds + \int_{F_N^W} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds. \quad (5.5)$$

Comme le tenseur  $\mathbf{\Pi}$  dépend de  $\nabla \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)$ , les termes de (5.4) et (5.5) seront approchés comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{F_E^N} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds &= \sum_{p=1}^{Npg} w_p \mathbf{\Pi} \left( \frac{\partial I_E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_E^N(\mathbf{u})}{\partial y} \right) \mathbf{n}(x_E, y_p), \\ \int_{F_E^S} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds &= \sum_{q=1}^{Npg} w_q \mathbf{\Pi} \left( \frac{\partial I_E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_E^S(\mathbf{u})}{\partial y} \right) \mathbf{n}(x_E, y_q), \end{aligned}$$

où  $I_E(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k}$  sur la face Est,  $I_E^N(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Est-Nord et  $I_E^S(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Est-Sud.

$$\begin{aligned} \int_{F_N^E} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds &= \sum_{p=1}^{Npg} w_p \mathbf{\Pi} \left( \frac{\partial I_N^E(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_N(\mathbf{u})}{\partial y} \right) \mathbf{n}(x_p, y_N), \\ \int_{F_N^W} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds &= \sum_{q=1}^{Npg} w_q \mathbf{\Pi} \left( \frac{\partial I_N^W(\mathbf{u})}{\partial x}, \frac{\partial I_N(\mathbf{u})}{\partial y} \right) \mathbf{n}(x_q, y_N), \end{aligned}$$

où  $I_N(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k,k+1}$  sur la face Nord,  $I_N^E(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Nord-Est et  $I_N^W(\mathbf{u})$  est l'interpolé de  $\mathbf{u}$  dans  $Q_{k+1,k+1}$  sur la demi face Nord-Ouest et  $(y_p)_{p=1}^{Npg}$  les points de Gauss sur les faces Est et Ouest,  $(x_p)_{p=1}^{Npg}$  les points de Gauss sur les faces Nord et Sud,  $(w_p)_{p=1}^{Npg}$  les poids de Gauss et  $Npg$  est le nombre de point de Gauss,  $x_E$  représente l'abscisse de la face Est et  $y_N$  représente l'ordonnée de la face Nord.

### 5.3.1 Résolution du problème non linéaire :

Pour  $\{w_{ij}\}_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y}$  une cellule quelconque de  $\Omega$ , si  $U$  désigne le vecteur des inconnues, on pose

$$\Phi_{ij}(U) = \int_{\partial w_{ij}} \mathbf{\Pi}(U) \mathbf{n} \, ds + \int_{w_{ij}} \mathbf{f} \, dx dy. \quad (5.6)$$

Pour simplifier les notations, on introduit le changement d'indice  $I = (j - 1) \times N_x + i$ ,  $1 \leq i \leq N_x$  et  $1 \leq j \leq N_y$ . L'équation algébrique (5.6) s'écrit alors

$$\Phi_I(U) = \int_{\partial w_I} \mathbf{\Pi}(U) \mathbf{n} \, ds + \int_{w_I} \mathbf{f} \, dx dy,$$

nous avons donc à résoudre le problème algébrique non linéaire

$$\Phi(U) = 0.$$

Pour se faire, nous avons adopté l'algorithme de Newton–Raphson suivant :

1. Initialisation :  $U_0 \in \mathbb{R}^N$  et  $\varepsilon > 0$  donné
2. Pour  $n \geq 1$ ,  $U_n$  étant connu, on résout

$$D\Phi(U_n)\delta U = -\Phi(U_n). \quad (5.7)$$

3. Mise à jour :

$$U_{n+1} = U_n + \delta U.$$

4. Test de convergence.

Si  $\|\delta U\| \leq \varepsilon$  et  $\|\Phi(U_n)\| \leq \varepsilon$ , on s'arrête.

Sinon  $n \leftarrow n + 1$  et en recommence à partir de 2.

**Remarque 5.1**  $D\Phi(U_n)$  est la matrice Jacobienne du système, elle est calculée à chaque itération et stockée sous forme profil. De plus, pour économiser du temps de calcul, cette matrice peut être évaluée pour  $k = 0$ , ce qui réduit considérablement sa taille, alors que le résidu  $\Phi(U_n)$  est calculé avec  $k = 2$ .

**Remarque 5.2** Pour tester la convergence, nous avons adopté la norme discrète

$$\|\mathbf{V}\|^2 = h_x h_y \sum_{I=1}^{N_x \times N_y} \mathbf{V}_I^2.$$

$h_x$  et  $h_y$  sont les pas de discrétisation suivant  $x$  et  $y$  et donnés par  $h_x = \frac{1}{N_x - 1}$  et

$$h_y = \frac{1}{N_y - 1}.$$

### 5.3.2 Evaluation du tenseur des contraintes

Le système algébrique (5.7) nous fournit un vecteur solution qui n'est autre que les déplacements aux noeuds du maillage. Les flux étant évalués aux faces des cellules, ceci nous permet donc de récupérer aussi bien les deux tenseurs de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{\Pi} = \mathbf{F} \mathbf{S}$ ) que le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T.$$

L'idéal serait de représenter ces tenseur aux noeuds d'intégrations, mais ne disposant pas d'outil de visualisation qui permettraient de le faire, nous avons procédé à une moyenne de ces valeurs. Nous présentons donc ces tenseurs aux milieux des arêtes du maillage dual ( $\Omega = \bigcup_{i=1} w_i$ ).

## 5.4 Essais numériques (domaine rectangulaire) :

Les tests numériques effectués dans le cadre du problème non-linéaire se présentent comme suit :

1. **Estimation numérique de l'erreur** : sur une géométrie simple (le carré unité), les données  $f$  et  $g$  sont choisies de sorte qu'on dispose d'une solution analytique, nous calculons ensuite l'erreur.
2. **Simulations en traction et en compression d'un bloc de gomme** : sur une géométrie simple, un bloc rectangulaire de gomme, nous effectuons des tests de traction et de compression à 40%.
3. **Essais en Mode 1 et Mode 2** : La géométrie est complexe, elle consiste en 1 bloc de gomme présentant une fissure de rayon fini. Elle est soumise à une traction sur les deux parois horizontales (Mode 1) ou un étirement horizontal avec des forces opposées (Mode 2). Les mode 1 et 2 sont des termes utilisés en mécanique du solide, ils correspondent respectivement à des essais de traction et de cisaillement.
4. **Localisation du maximum des contraintes et endommagement** :

### 5.4.1 Estimation numérique de l'erreur :

Le domaine de calcul est le carré unité,  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , de frontière  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  où

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2; y = 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2; y = 1 \right\}, \\ \Gamma_N &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times ]0, 1[; x = 1 \right\}. \end{aligned}$$

On choisit les données suivantes :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= 32 \times (\lambda + 2\mu)x^2 - 32 \times (\lambda + 2\mu)y^2 - 4 \times (3\lambda + 5\mu)y \\
&\quad - 4 \times (5\lambda + 11\mu)x - 2\lambda - 6\mu, \quad \forall(x, y) \in \Omega, \\
f_2(x, y) &= 32 \times (\lambda + 2\mu)x^2 - 32 \times (\lambda + 2\mu)y^2 - 4 \times (3\lambda + 5\mu)y \\
&\quad - 4 \times (5\lambda + 11\mu)x - 2\lambda - 6\mu, \quad \forall(x, y) \in \Omega, \\
g_1(x, y) &= 8 \times (\lambda + 2\mu)x^3 + 8 \times (\lambda + 2\mu)x^2 + 8 \times (\lambda + 2\mu)x \\
&\quad + 4 \times (\lambda + 2\mu)xy + 8 \times (\lambda + 2\mu)xy^2 + 2\lambda y + 4(\mu + \lambda)y^2, \quad \forall(x, y) \in \Gamma_N, \\
g_2(x, y) &= 8 \times (\lambda + 2\mu)x^3 + 4 \times (\lambda + 2\mu)x^2 + 2\mu x + 4 \times (\lambda + 3\mu)xy \\
&\quad + 8 \times (\lambda + 2\mu)xy^2 + 2\mu y + 4\mu y^2, \quad \forall(x, y) \in \Gamma_N,
\end{aligned}$$

les conditions de Dirichlet sont données par :

$$\begin{aligned}
u_D(x, y) &= x^2 + y^2 \quad \forall(x, y) \in \Gamma_D, \\
v_D(x, y) &= x^2 + y^2 \quad \forall(x, y) \in \Gamma_D.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution exacte du problème (5.1) est donnée par  $\mathbf{u}_{ex} = (u, v)$  :

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= x^2 + y^2, \quad \forall(x, y) \in \Omega, \\
v(x, y) &= x^2 + y^2, \quad \forall(x, y) \in \Omega.
\end{aligned}$$

L'erreur numérique  $Err(h)$  est donnée par :

$$Err(h) = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h\|,$$

$\mathbf{u}_{ex}$  est la solution exacte,  $\mathbf{u}_h$  est la solution calculée,  $\|\cdot\|$  est une norme qui sera précisée plus loin.

Pour tester le problème non linéaire, nous avons considéré un maillage uniforme formé de  $31 \times 31$  points.

Modèle	Schéma	Erreur en max	Erreur en $L^2$
Saint-Venant-Kirchhoff	$k = 0$	$2.4 \times 10^{-4}$	$5.47 \times 10^{-5}$
	$k = 2$	$1.34 \times 10^{-15}$	$1.08 \times 10^{-15}$

TAB. 5.1 – Modèle de Saint-Venant-Kirchhoff : ordre de l'erreur pour  $k = 0$  et  $k = 2$ .

Notons que pour une géométrie simple, le passage du schéma volumes finis  $k = 0$  à  $k = 2$  améliore considérablement la qualité de la solution puisqu'on passe d'une erreur de l'ordre de  $10^{-4}$  pour  $k = 0$  à  $10^{-15}$  pour  $k = 2$ . De plus, ces calculs ont permis de valider les termes non-linéaire ajoutés au code déjà testé dans le cadre de l'élasticité linéaire.

## 5.4.2 Simulations en traction et en compression d'un bloc de gomme :

Riches des validations précédentes, nous nous sommes intéressés à des problèmes physiques plus réalistes à savoir les déformations d'un bloc de gomme bidimensionnel qui occupe le domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On impose un déplacement nul sur tout le bord inférieur, les faces gauche et droite sont libres et le déplacement sur le bord supérieur est imposé  $((u,v) = (0,0.4)$  pour la traction, et  $(u,v) = (0,-0.4)$  pour la compression). Les coefficients physiques sont donnés par  $\lambda = 0.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$  et  $\mu = 0.012 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ , notons que ces coefficients correspondent à un bloc de caoutchouc (voir Ciarlet [4]).

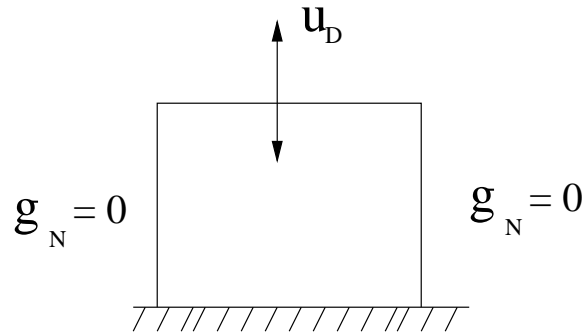


FIG. 5.1 – La géométrie en traction et en compression.

**Remarque 5.3** Afin de comparer les deux schémas volumes finis  $k = 0$  et  $k = 2$ , nous avons considéré deux maillages : un maillage grossier de  $11 \times 11$  points dans le cas  $k = 2$  et un maillage fin de  $65 \times 65$  points pour  $k = 0$ . En effet, pour le problème linéaire, l'erreur est en  $O(h^2)$  pour  $k = 0$  et en  $O(h^3)$  pour  $k = 2$ . Le choix de  $h_0 = 1/64$  et  $h_2 = 1/10$  a été fait pour obtenir à peu près la même précision dans les deux cas.

Pour illustrer les résultats numériques, nous avons sélectionné un ensemble de courbes qui nous semblent significatives. Une coupe le long de la droite  $x = 1/2$  (FIG. 5.3, FIG. 5.7), une coupe le long de la droite  $y = 1/2$  (FIG. 5.4, FIG. 5.8) et une coupe le long de la droite  $y = x$  (FIG. 5.5, FIG. 5.9). Ces courbes font apparaître les déplacements (horizontal et vertical) ainsi que les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{T}$ .

## A- Essais en traction :

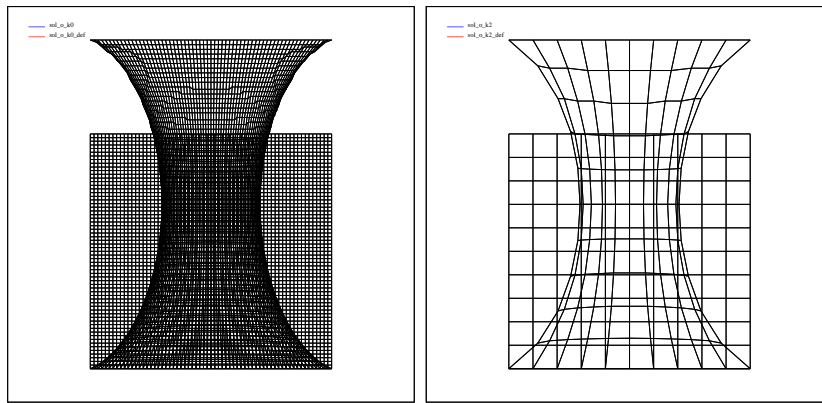


FIG. 5.2 – Domaine initial et déformé pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

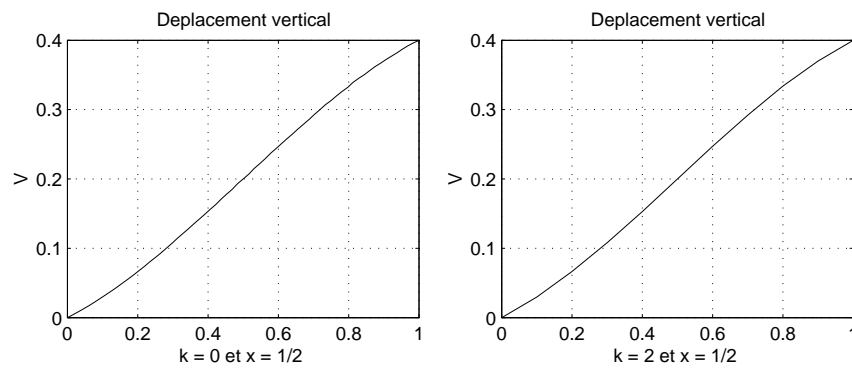


FIG. 5.3 – Déplacement vertical suivant la coupe  $x = 1/2$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

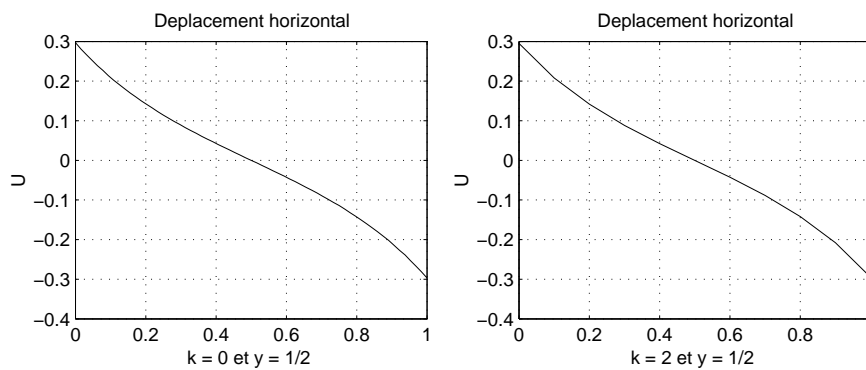


FIG. 5.4 – Déplacement horizontal suivant la coupe  $y = 1/2$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

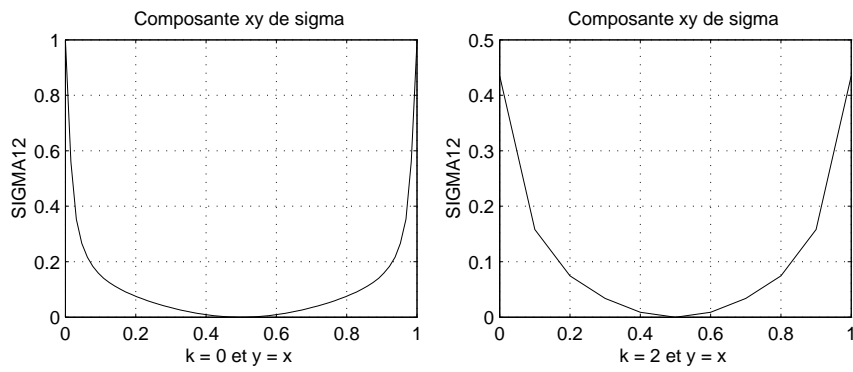


FIG. 5.5 – T12 Contrainte de Cisaillement du tenseur de Cauchy suivant la coupe  $y = x$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

## B- Essais en Compression :

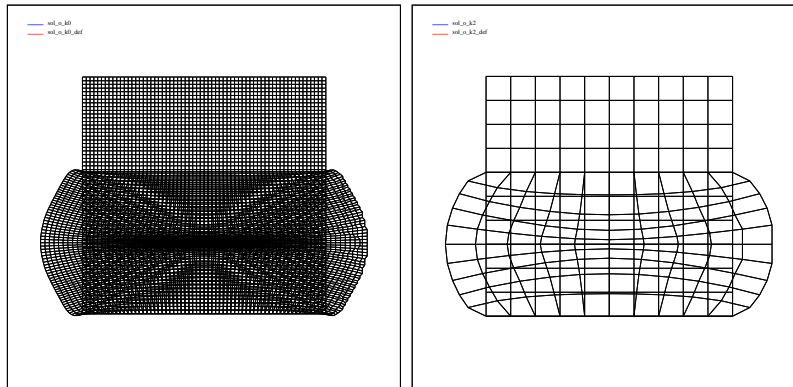


FIG. 5.6 – Domaine initial et déformé pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

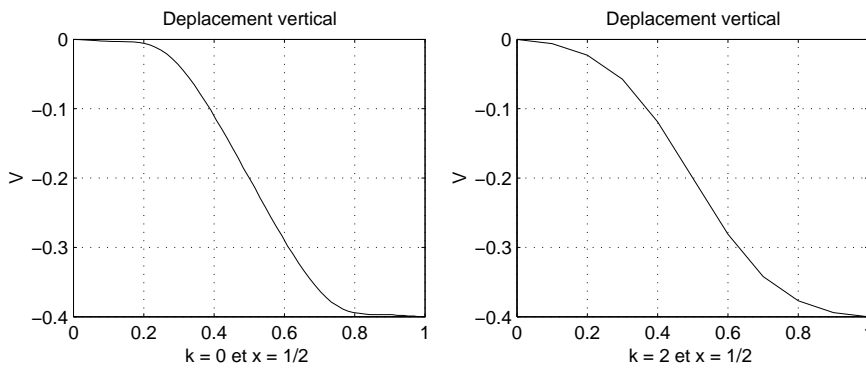


FIG. 5.7 – Déplacement vertical suivant la coupe  $x = 1/2$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .



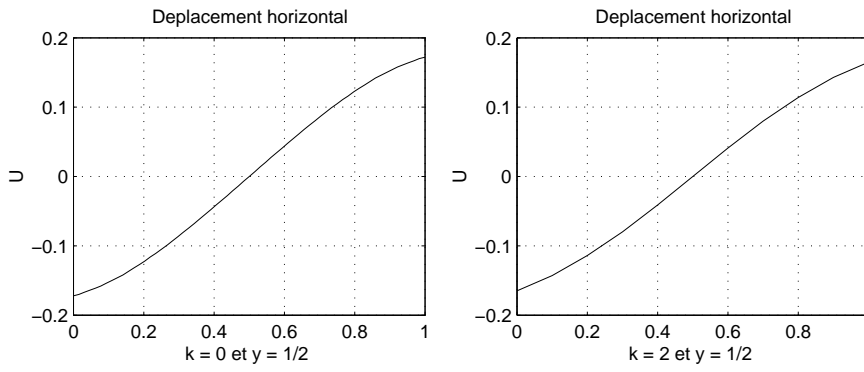


FIG. 5.8 – Déplacement horizontal suivant la coupe  $y = 1/2$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

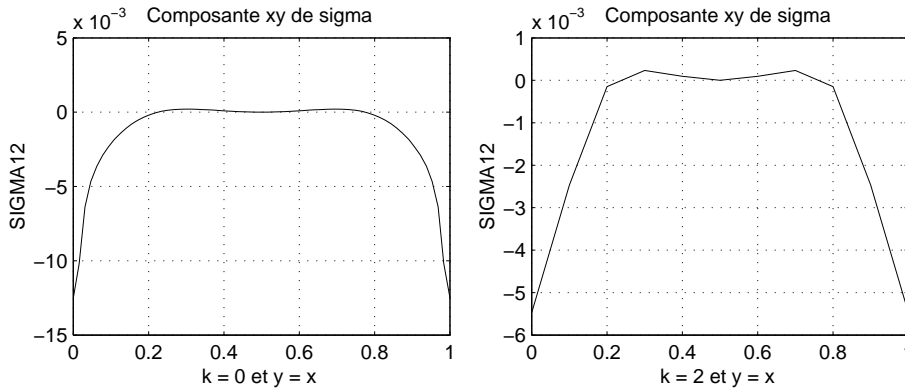


FIG. 5.9 – T12 Contrainte de Cisaillement du tenseur de Cauchy suivant la coupe  $y = x$  pour  $(k = 0, h = 1/64)$  et  $(k = 2, h = 1/10)$ .

## 5.5 Essais numériques (domaine avec fissure) :

On suppose que le bloc de gomme occupe un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  comportant une fissure finie de fond circulaire de rayon 0.02 (voir FIG. 5.10). Le problème considéré ici est le même que (5.1) (page 102). Le domaine n'étant pas rectangulaire, il faut alors préciser les effets de la transformation sur le calcul des flux.

En appliquant la formule de Gauss, on obtient

$$\int_{\partial w} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} \, ds + \int_w \mathbf{f} \, dx dy = 0,$$

ou encore,

$$\int_{\partial w \setminus \Gamma_N} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} \, ds + \int_{\partial w \cap \Gamma_N} \mathbf{g} \, ds + \int_w \mathbf{f} \, dx dy = 0.$$

Pour le calcul du terme  $\int_{\partial w} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds$ , on écrit d'abord

$$\int_{\partial w} \mathbf{\Pi} \mathbf{n} ds = \left( \begin{array}{c} \int_{\partial w} q_1 \cdot \mathbf{n} ds \\ \int_{\partial w} q_2 \cdot \mathbf{n} ds \end{array} \right) \text{ où } q_1^T = (\mathbf{\Pi}_{11}, \mathbf{\Pi}_{12}) \text{ et } q_2^T = (\mathbf{\Pi}_{21}, \mathbf{\Pi}_{22}).$$

On reprend ensuite la transformation donnée dans le troisième chapitre par (3.4). Pour une composante vecteur  $q_i$ , nous avons donc :

$$\sum_{e \in \partial w} \int_e q_i \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{\hat{e} \in \partial \hat{w}} \int_{\hat{e}} \det(D\varphi) (D\varphi)^{-1} q_i \circ \varphi(\hat{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{s}, \quad i = 1, 2,$$

ou encore

$$\sum_{e \in \partial w} \int_e q_i \cdot \mathbf{n} ds = \sum_{\hat{e} \in \partial \hat{w}} \int_{\hat{e}} \text{Cof} (D\varphi)^T q_i \circ \varphi(\hat{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{s}, \quad i = 1, 2.$$

Il est facile de voir, pour  $q_1$  par exemple, que

$$\text{Cof} (D\varphi)^T q_1 \circ \varphi(\hat{x}) = \left( \begin{array}{c} D\varphi_{22}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{11} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{12}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{12} \circ \varphi(\hat{x}) \\ D\varphi_{11}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{12} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{21}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{11} \circ \varphi(\hat{x}) \end{array} \right),$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial w} q_1 \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\partial \hat{w}} (D\varphi_{22}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{11} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{12}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{12} \circ \varphi(\hat{x})) \hat{n}_x d\hat{s} \\ &+ \int_{\partial \hat{w}} (D\varphi_{11}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{12} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{21}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{11} \circ \varphi(\hat{x})) \hat{n}_y d\hat{s}. \end{aligned}$$

De même pour  $q_2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\partial w} q_2 \cdot \mathbf{n} ds &= \int_{\partial \hat{w}} (D\varphi_{22}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{21} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{12}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{22} \circ \varphi(\hat{x})) \hat{n}_x d\hat{s} \\ &+ \int_{\partial \hat{w}} (D\varphi_{11}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{22} \circ \varphi(\hat{x}) - D\varphi_{21}(\hat{x}) \mathbf{\Pi}_{21} \circ \varphi(\hat{x})) \hat{n}_y d\hat{s}. \end{aligned}$$

Conditions aux limites considérées :  $\left\{ \begin{array}{l} u = (u_D, v_D) \text{ sur la partie } \Gamma_D \text{ de la frontière de } \Omega, \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{n} = 0 \text{ sur la partie } \Gamma_N \text{ de la frontière de } \Omega. \end{array} \right.$

Le maillage est formé de  $21 \times 21$  points pour les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_3$  et de  $57 \times 21$  points pour  $\Omega_2$ , (voir FIG. 5.11). Afin de prendre en considération la singularité, nous avons adopté un raffinement dans la direction  $Oy$  pour les trois sous-domaines. Le schéma volumes finis utilisé est celui correspondant à  $k = 0$  ("Schéma à 9 points")

Pour analyser les résultats numériques, nous avons dans ce qui suit, sélectionné un ensemble de courbes qui nous semblent significatives. Une coupe suivant le bord supérieur de la fissure (voir figures FIG. 5.12, FIG. 5.13 et FIG. 5.14).

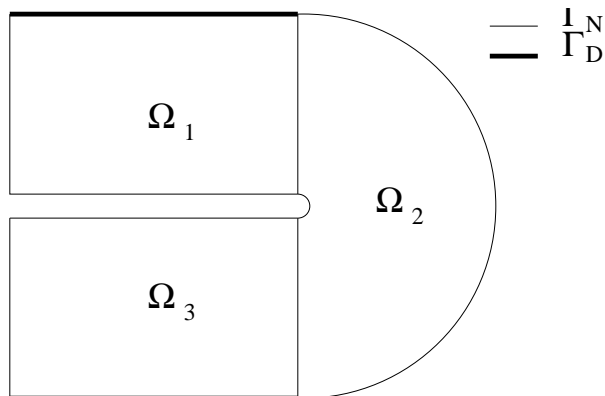


FIG. 5.10 – Domaine étudié.

Ces courbes font apparaître les déplacements (horizontal et vertical), les composantes du premier tenseur de Piola-Kirchhoff "PK1" et les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{T}$ .

Pour le Mode 1 et pour des raisons de symétrie, nous présentons uniquement les coupes sur la partie supérieure du domaine alors que pour le Mode 2, les conditions aux limites en déplacement font que cette symétrie est rompue, il est donc nécessaire de voir ce qui se passe dans la partie inférieure du domaine.

### 5.5.1 Essais en Mode 1

Géométrie et conditions aux limites :  $u_D = 0$  et  $v_D = 0.2$  sur la partie supérieure de  $\Gamma_D$  et  $-0.2$  sur la partie inférieure  $\Gamma_D$ .

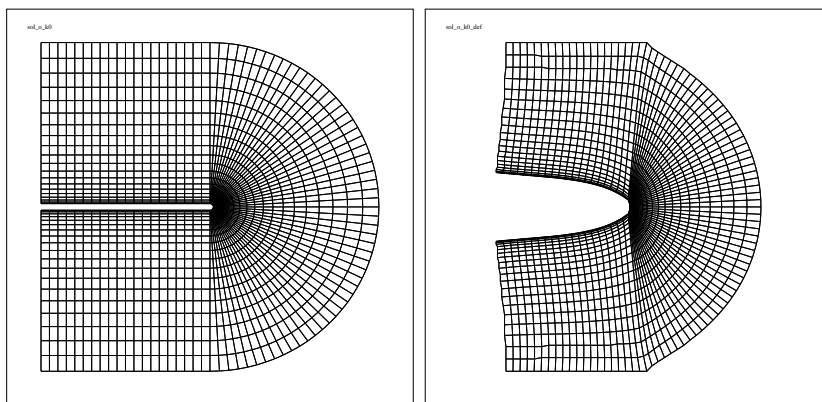


FIG. 5.11 – Le maillage initial et après déformation.

Les valeurs le long du bord de fissure sont données par deux courbes, la première correspond à la partie horizontale ( $y = 0.02$ ;  $x \in [-1, 0]$ ), la seconde correspond à la partie courbe jusqu'au fond de fissure, abscisse curviligne :  $s = 0$  à  $0.03$ .

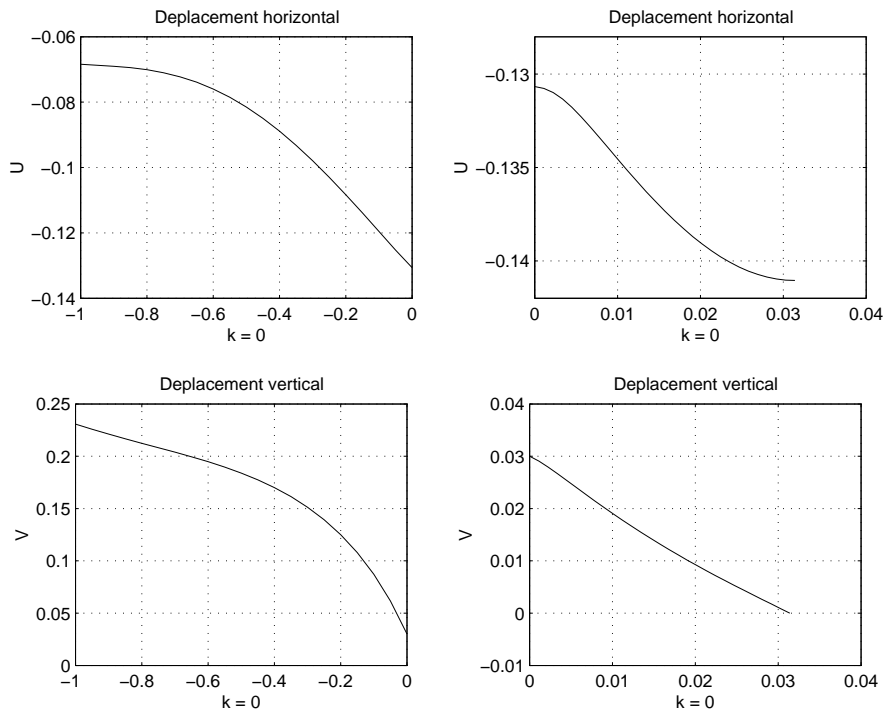


FIG. 5.12 – Déplacements : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord supérieur de la fissure).

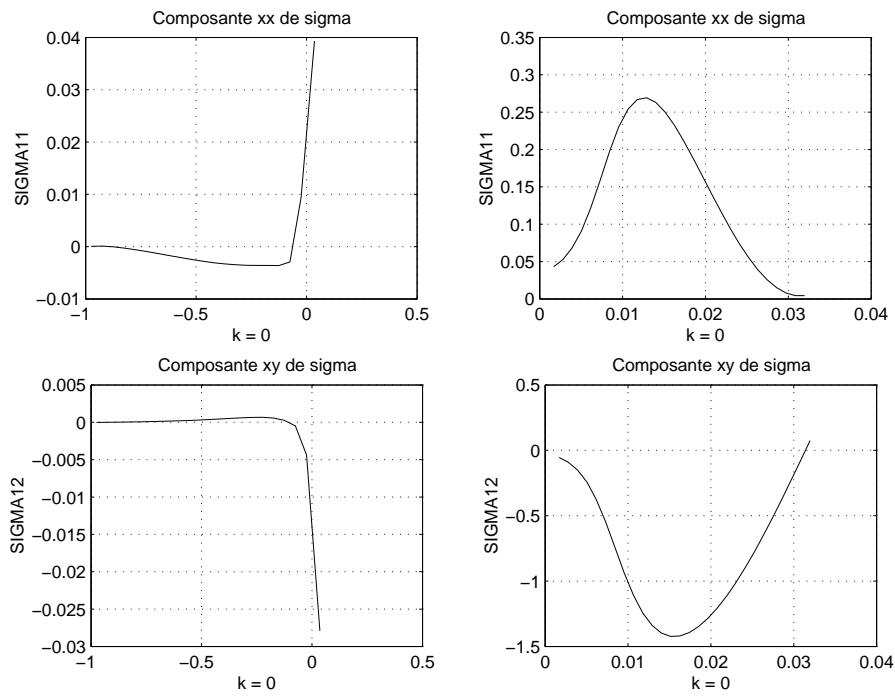


FIG. 5.13 – Composantes du tenseur de Cauchy : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord supérieur de la fissure).

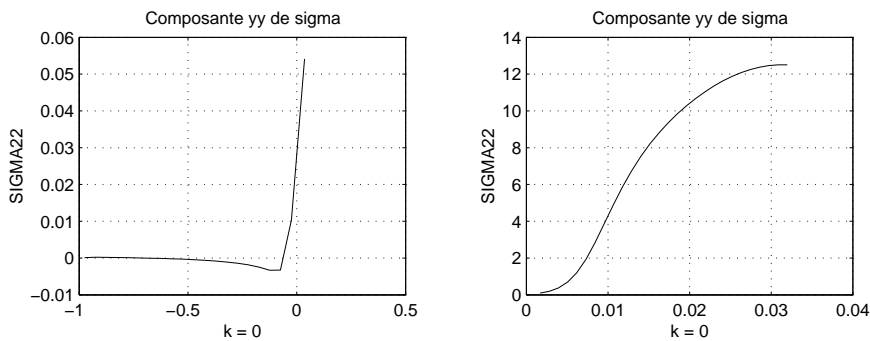


FIG. 5.14 – Composante  $T_{22}$  : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord supérieur de la fissure)

En analysant les courbes qui précèdent, on remarque que les conditions aux limites de Dirichlet sont vérifiées pour les déplacements ainsi que pour les composantes du premier tenseur de Piola-Kirchhoff (les conditions de Neumann sont vérifiées, en effet pour la coupe suivant le bord supérieur de la fissure (voir les figures FIG. 5.12 et FIG. 5.14). Le déplacement horizontal est représenté en deux courbes dont la première représente cette composante suivant la droite  $y = r$  ( $-1 \leq x \leq 0$ ), et la deuxième présente la suite du déplacement sur le fond supérieur de la fissure (pour cette partie la courbe est donnée en coordonnées curvilignes  $s = r\theta$ ).

**Remarque 5.4** *Les mêmes calculs ont été effectués avec le schéma volumes finis associés à  $k = 2$ . Nous avons remarqué qu'au fond de la fissure, il y a une grande différence entre les coupes réalisées pour les deux méthodes volumes finis  $k = 0$  et  $k = 2$ , notamment pour les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy. N'ayant pas compris l'origine de ces différences, nous avons préféré ne pas représenter les résultats pour  $k = 2$ .*

## 5.5.2 Essais en Mode 2

Géométrie et conditions aux limites :  $u_D = 0.2$  sur la partie supérieure de  $\Gamma_D$  et  $-0.2$  sur la partie inférieure de  $\Gamma_D$ , et  $v_D = 0$ .

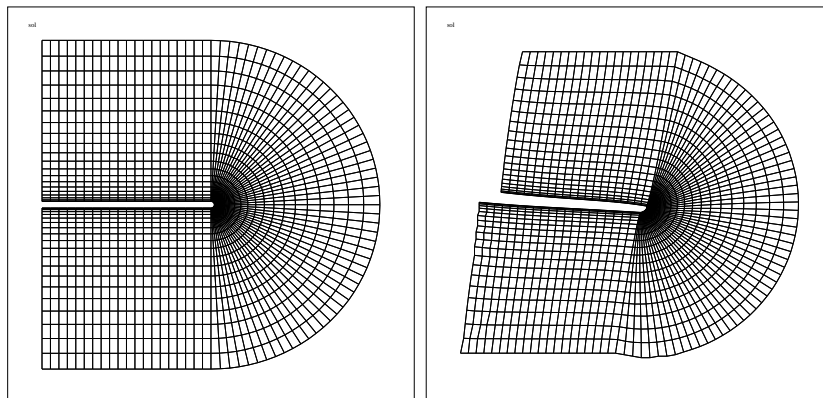


FIG. 5.15 – Le maillage initial et après déformation.

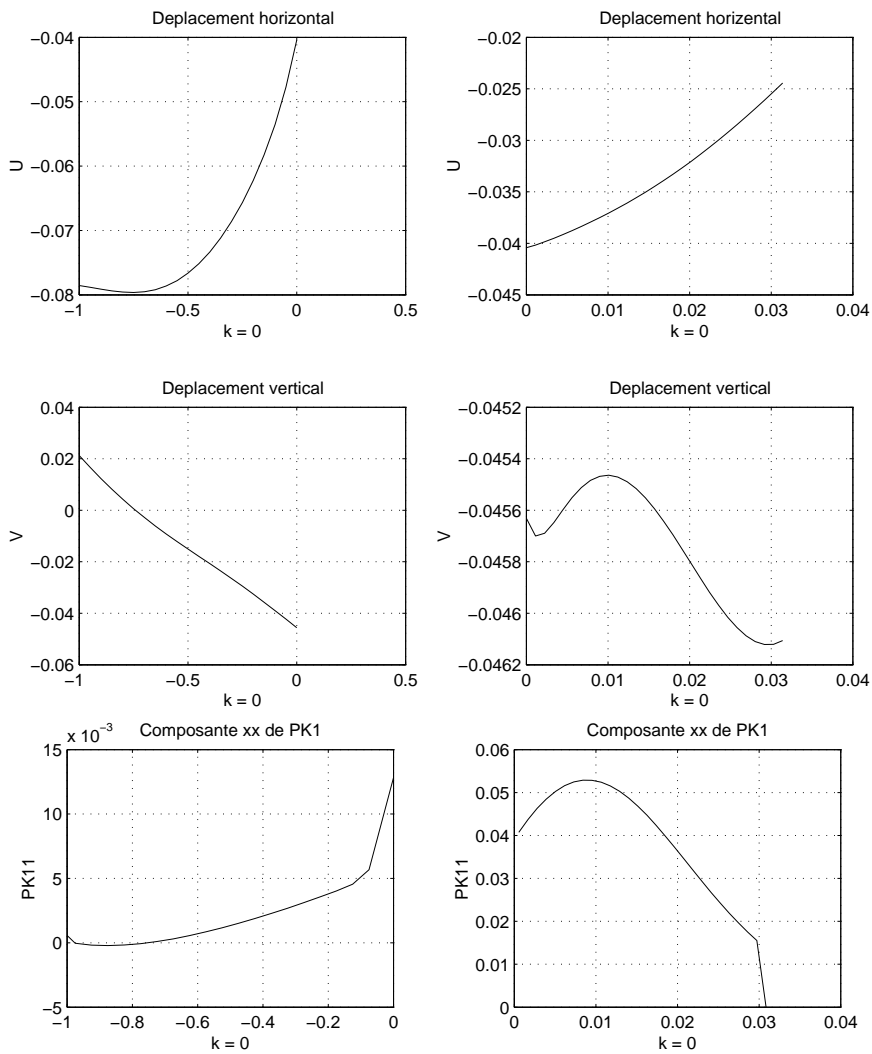


FIG. 5.16 – Déplacements et composante  $\Pi_{11}$  : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord inférieur de la fissure).

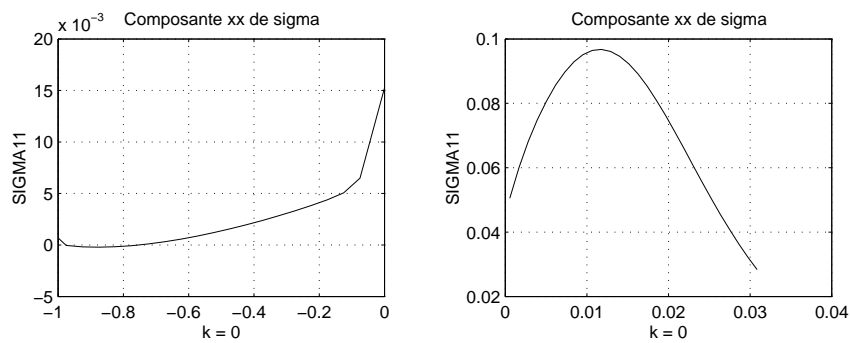


FIG. 5.17 – Composante  $T_{11}$  : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord inférieur de la fissure).

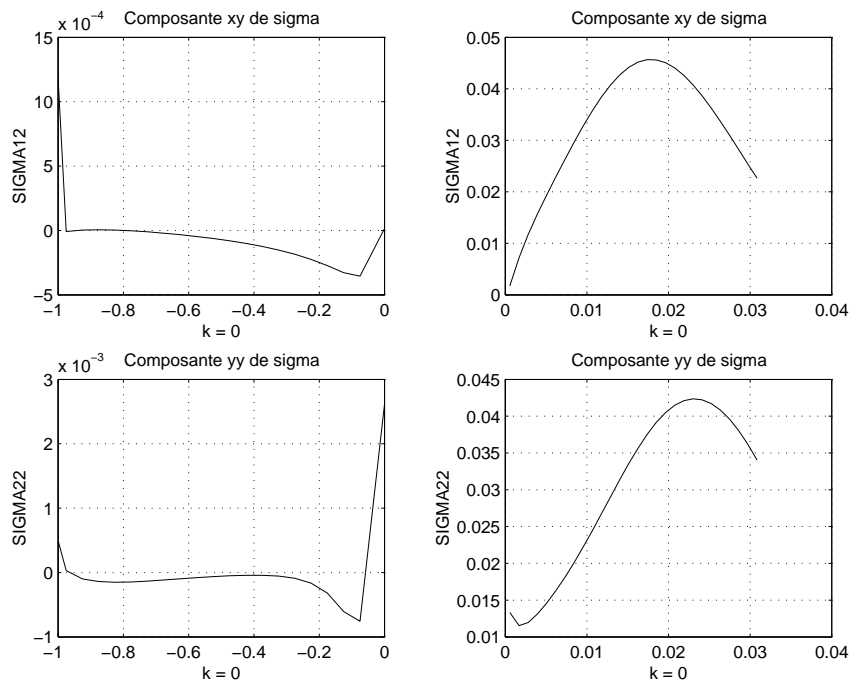


FIG. 5.18 – Composantes  $T_{12}$  et  $T_{22}$  : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord inférieur de la fissure).

## 5.6 Matériau quasi-incompressible

Afin de tester la robustesse de notre schéma, nous avons choisi une valeur de  $\nu = 0.499$  proche de la valeur critique 0.5. Le schéma s'est bien comporté. Les déplacements sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus pour  $\nu = 0.485$ , en revanche les contraintes présentent des pics plus importants que ceux observés auparavant. C'est pour ça que nous n'avons présenté que les coupes des contraintes (voir FIG. 5.20).

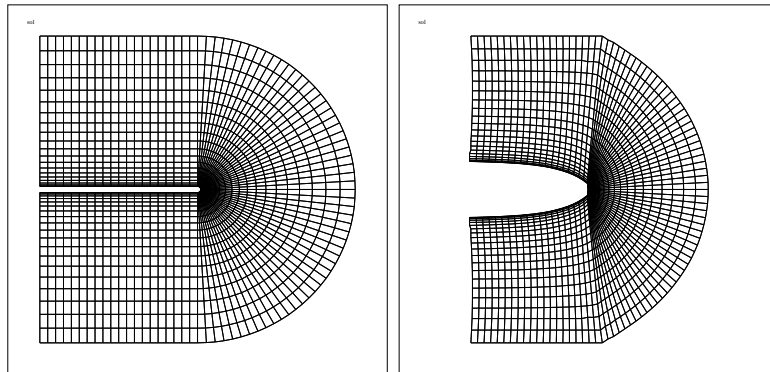


FIG. 5.19 – Le maillage initial et après déformation.

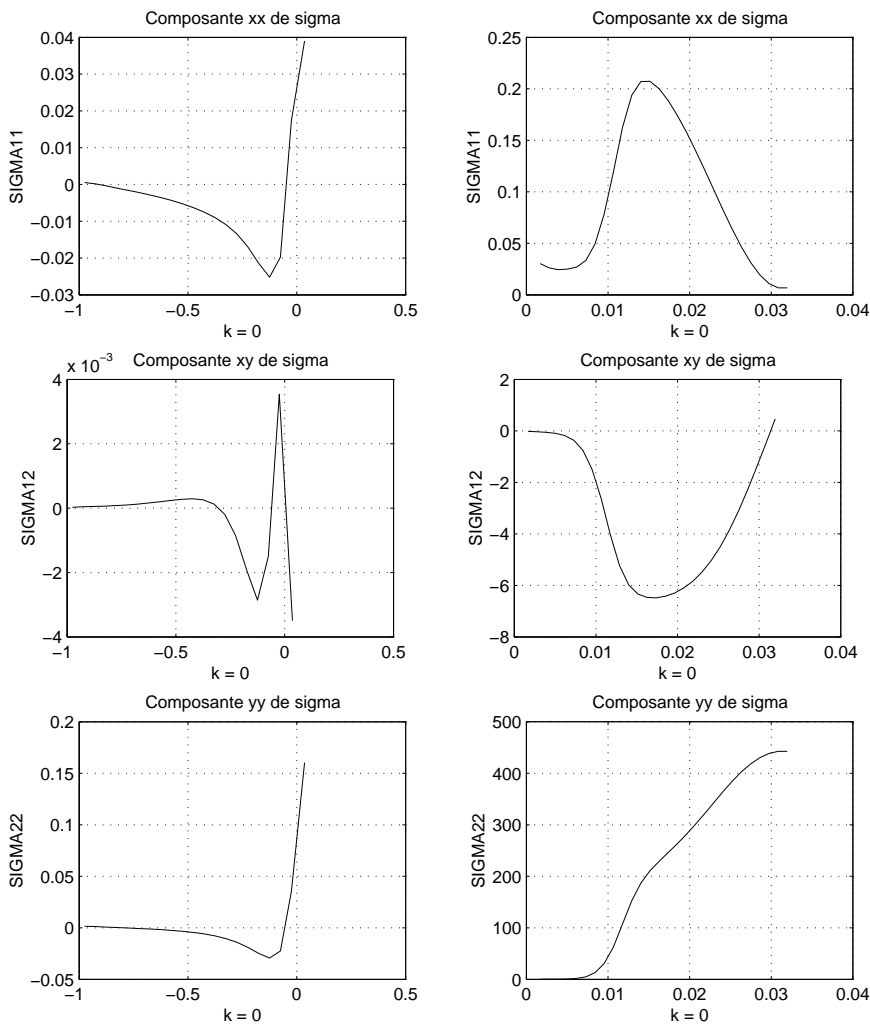


FIG. 5.20 – Composantes de  $T$  : Coupe suivant  $y = 0.02$  (bord supérieur de la fissure).

### 5.6.1 Localisation du maximum des contraintes et endommagement

Un des points essentiels, dans la simulation des grandes déformations, est la localisation du maximum des contraintes. C'est peut être même le point qui a motivé ce travail. En effet, par leur caractère de conservation locale, les schémas volumes finis sembleraient plus adaptés à des phénomènes locaux.

Les tableaux suivants présentent le comportement du maximum de la valeur absolue des  $(\mathbf{T}_{ij})_{ij}$  en fonction de la traction imposée pour le mode 1 et en fonction du cisaillement imposé pour le mode 2. La position du maximum est donnée en coordonnées polaires (rayon et angle). Notons que l'unité du maximum des contraintes est  $10^4 MPa$ .



## A- Localisation du maximum des contraintes : Mode 1.

Traction %	$ \mathbf{T}_{11} $	$\rho$	$\theta$	$ \mathbf{T}_{12} $	$\rho$	$\theta$	$ \mathbf{T}_{22} $	$\rho$	$\theta$
4	0.0110	0.02	40°	0.0076	0.02	37°	0.0382	0.02	1°
8	0.0216	0.02	46°	0.0291	0.02	37°	0.1574	0.02	2°
12	0.0540	0.02	43°	0.1847	0.02	30°	1.4719	0.02	2°
16	0.1720	0.02	50°	0.7202	0.02	40°	5.5108	0.02	2°
20	0.2693	0.02	53°	1.4227	0.02	47°	12.5061	0.02	2°

TAB. 5.2 – Les valeurs et les positions du maximum des contraintes.

On remarque que le maximum des trois composantes  $\mathbf{T}_{ij}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  croît en fonction de la traction imposée. Ce maximum est localisé sur le bord de la fissure à un angle  $\theta$ . Cet angle est indépendant de la traction ( $\theta_o = 2$ ) pour la composante  $\mathbf{T}_{22}$  et variable pour les deux autres composantes  $\theta \in [40^\circ, 53^\circ]$  pour  $\mathbf{T}_{11}$  et  $\theta \in [30^\circ, 47^\circ]$  pour  $\mathbf{T}_{12}$

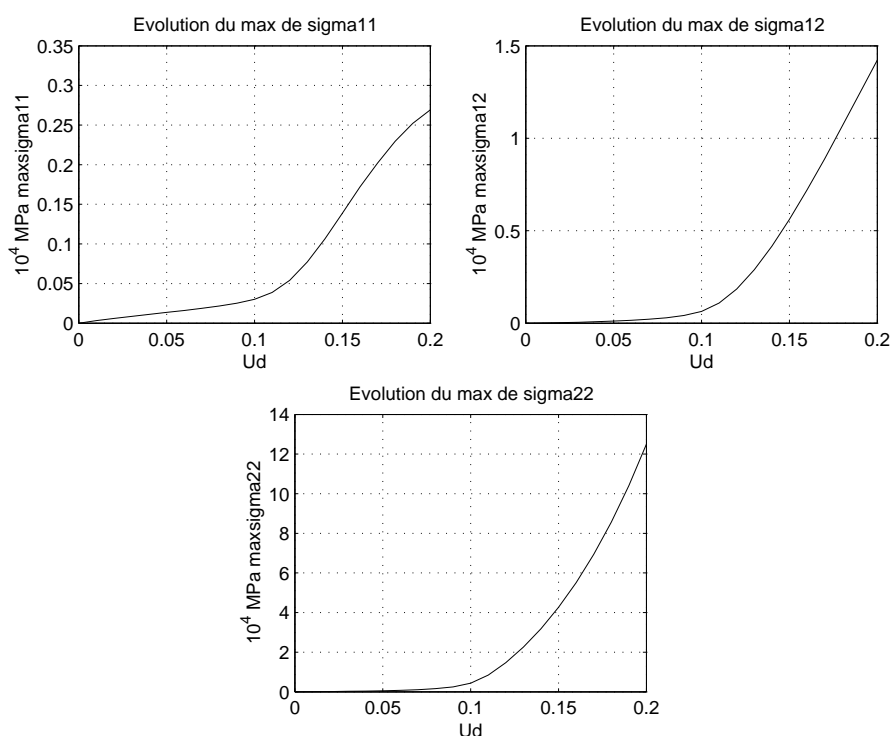


FIG. 5.21 – L'évolution du maximum des composantes  $\mathbf{T}_{11}$ ,  $\mathbf{T}_{12}$  et  $\mathbf{T}_{22}$  en fonction de la traction imposée.

## B- Localisation du maximum des contraintes : Mode 2.

Cisaillement %	$ \mathbf{T}_{11} $	$\rho$	$\theta$	$ \mathbf{T}_{12} $	$\rho$	$\theta$	$ \mathbf{T}_{22} $	$\rho$	$\theta$
4	0.0090	0.02	$66^\circ$	0.0026	0.02	$50^\circ$	0.0065	0.02	$59^\circ$
8	0.0210	0.02	$63^\circ$	0.0073	0.02	$47^\circ$	0.0138	0.02	$69^\circ$
12	0.0370	0.02	$63^\circ$	0.0147	0.02	$43^\circ$	0.0236	0.02	$76^\circ$
16	0.0605	0.02	$60^\circ$	0.0259	0.02	$40^\circ$	0.0430	0.02	$80^\circ$
20	0.9073	0.02	$71^\circ$	1.9947	0.02	$71^\circ$	4.4470	0.02	$71^\circ$

TAB. 5.3 – Les valeurs et les positions du maximum des contraintes.

De même, on note que le maximum des trois composantes  $\mathbf{T}_{ij}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  croît en fonction du cisaillement imposé. Ce maximum est localisé sur le bord de la fissure à un angle  $\theta$ . Cet angle est variable pour les composantes de  $\mathbf{T}$ ,  $\theta \in [60^\circ, 71^\circ]$  pour  $\mathbf{T}_{11}$ ,  $\theta \in [40^\circ, 71^\circ]$  pour  $\mathbf{T}_{12}$  et  $\theta \in [59^\circ, 80^\circ]$  pour  $\mathbf{T}_{11}$ . Quand le cisaillement imposé est 20%, on remarque que les trois composantes sont localisées dans la même position  $\rho = 0.02$  et  $\theta = 71^\circ$ .

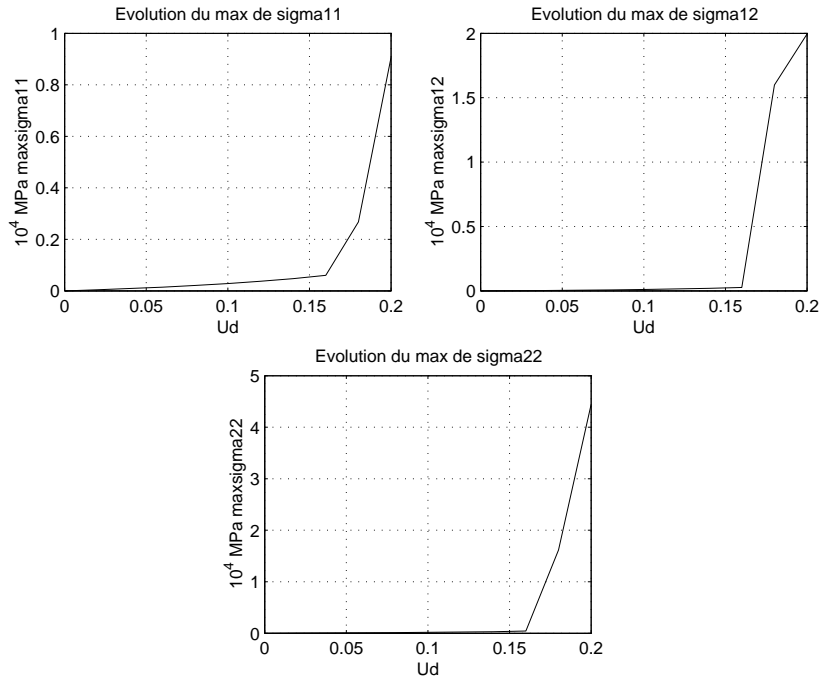


FIG. 5.22 – L'évolution du maximum des composantes  $\mathbf{T}_{11}$ ,  $\mathbf{T}_{12}$  et  $\mathbf{T}_{22}$  en fonction du cisaillement imposé.

## C- Endommagement

On ne présentera que le mode 1, sachant que les calculs ont été réalisés aussi pour le mode 2. Nous n'avons en effet pas noté des différences majeures entre les deux modes. Pour détecter les directions de propagation d'une fissure, on cherche, suivant un critère donné, à déterminer les régions endommagées. Ce critère est lié au maximum de contraintes. Les contraintes sont calculées aux faces des cellules. Soit  $\mathbf{T}$  le tenseur des contraintes de Cauchy, à chaque cellule  $No$ ,  $No = 1, \dots, N_{cell}$ ,  $N_{cell}$  étant le nombre de cellules, il sera associé un maximum portant sur la norme des contraintes

$$\mathbf{T}_{Loc}(No) = \max_{p=1,4} \|\mathbf{T}(N_o^p)\|, \quad N_o^p \text{ désigne la } p^{ieme} \text{ face de la cellule } No.$$

avec

$$\|\mathbf{T}(No)\|^2 = \mathbf{T}(No) : \mathbf{T}(No) = \sum_{ij=1}^2 \mathbf{T}_{ij}^2(No).$$

Ensuite, on détermine un maximum global.

$$\mathbf{T}_{Glo} = \max_{No=1, N_{cell}} (\mathbf{T}_{Loc}(No)). \quad (5.8)$$

Les paramètres physiques sont, dans le cas du modèle de Hooke ou de Saint-Venant-Kirchhoff, donnés par les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Ces deux coefficients sont, eux-même, fonction du module de Young  $E$ .

$$\lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times E,$$

$$\mu = \frac{1}{2(1+\nu)} \times E.$$

L'endommagement se traduit par des zones de faible élasticité. Dans la pratique, quand on décide qu'une cellule est endommagée, alors on lui attribue un module de Young plus petit. Ceci est fait suivant **l'algorithme** :

### 1. Initialisation :

- $E_0$ ,  $\mu_0$  donnés, pour  $No = 1, \dots, N_{cell}$ , on pose.

$$\lambda(No) = \lambda(E_0, \mu_0),$$

$$\mu(No) = \mu(E_0, \mu_0),$$

- on se donne aussi deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que.

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \beta < 1.$$

- on se donne le nombre maximum d'endommagement  $N_{endom}$ .

### 2. On résout, à l'aide du schéma volumes finis décrit au début de ce chapitre, le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ u = u_D \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.9)$$

3. Pour  $No = 1, \dots, N_{cell}$ , on calcule  $\|\mathbf{\Pi}(No)\|$  et  $\mathbf{\Pi}_{Glo}$  donné par (5.8).

4. Critère d'endommagement :

$$\text{Si } \alpha \mathbf{\Pi}_{Glo} \leq \|\mathbf{\Pi}(No)\| \leq \mathbf{\Pi}_{Glo}, \quad (5.10)$$

la cellule  $No$  sera endommagée, ce qui revient à diminuer  $E(No)$ , suivant

$$E(No) \leftarrow E(No) \times \beta.$$

ceci revient donc à diminuer  $\lambda(No)$  et  $\mu(No)$ .

5. Aller en 2 si le nombre d'endommagement est inférieur ou égal  $N_{endom}$ .

## Tests numériques

L'algorithme précédent est appliqué au problème (5.9) où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  comportant une fissure de fond circulaire de rayon 0.02 voir figure FIG. 5.10. Par la suite  $N_{endom}$  représente le nombre de fois où le matériau a été endommagé, on a choisi  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 0.6$ .

Les conditions aux limites considérées sont les mêmes que dans le paragraphe 5.5 ainsi que le maillage.

**Remarque 5.5** Les coefficients  $E_0$  et  $\nu_0$  sont donnés par  $E_0 = 0.037 \times 10^4 \text{MPa}$  et  $\nu_0 = 0.485$  par la suite on prend  $E_0 = 0.037$  et  $\nu_0 = 0.485$ , ( $\lambda_0 = 0.4028058$  et  $\mu_0 = 0.0124579$  donc l'unité des contraintes est  $10^4 \text{MPa}$ ).

Pour détecter les zones endommagées, il faut donc visualiser l'évolution des paramètres physiques du matériau. Nous présentons dans ce qui suit une carte des isovaleurs de  $\lambda$  à chaque étape de l'algorithme précédent.

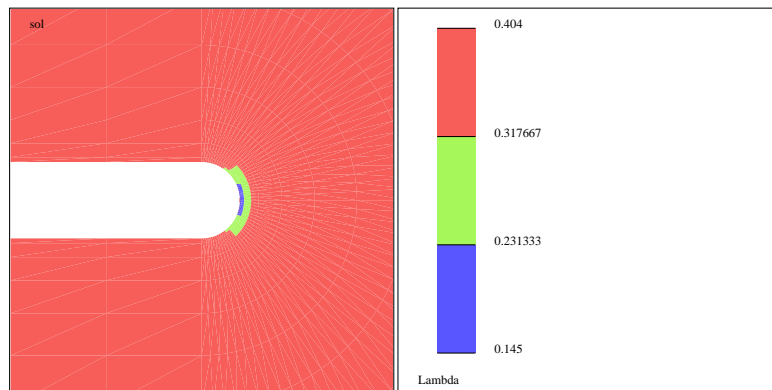


FIG. 5.23 – Isovaleur de  $\lambda$  : 5<sup>ème</sup> itération.

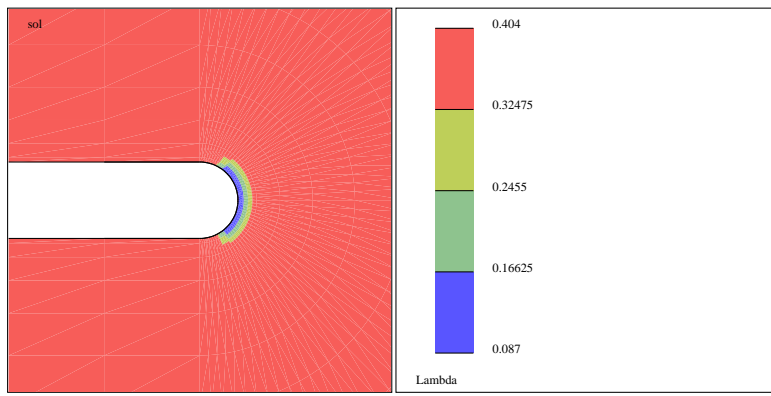


FIG. 5.24 – Isovaleur de  $\lambda$  : 11<sup>ème</sup> itération.

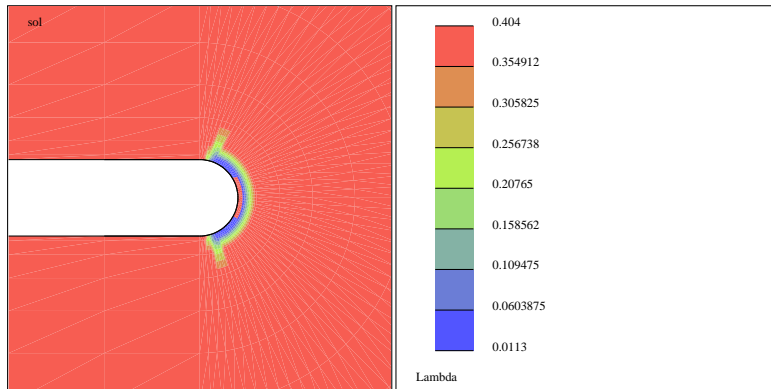


FIG. 5.25 – Isovaleur de  $\lambda$  : 30<sup>ème</sup> itération.

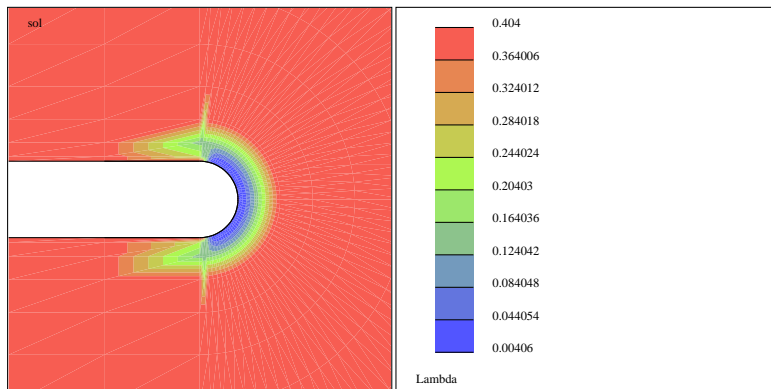


FIG. 5.26 – Isovaleur de  $\lambda$  : 38<sup>ème</sup> itération.

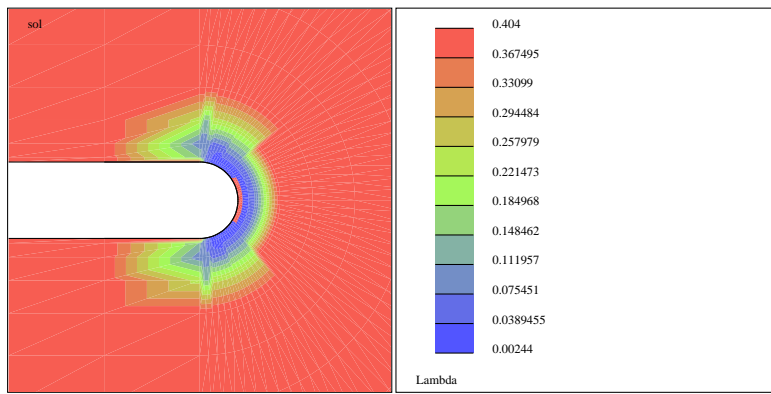


FIG. 5.27 – Isovaleur de  $\lambda$  : 44<sup>ième</sup> itération.

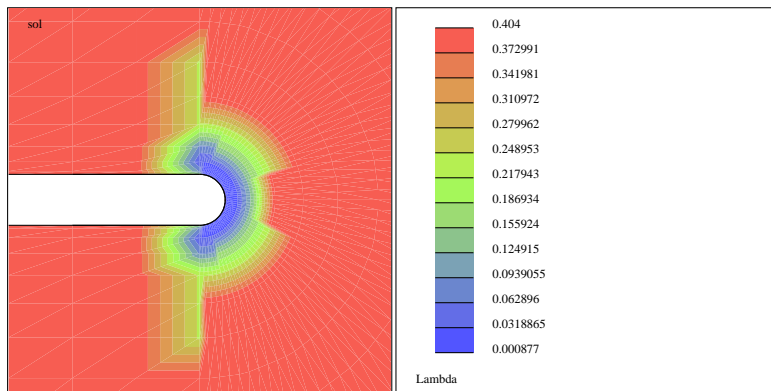


FIG. 5.28 – Isovaleur de  $\lambda$  : 51<sup>ième</sup> itération.

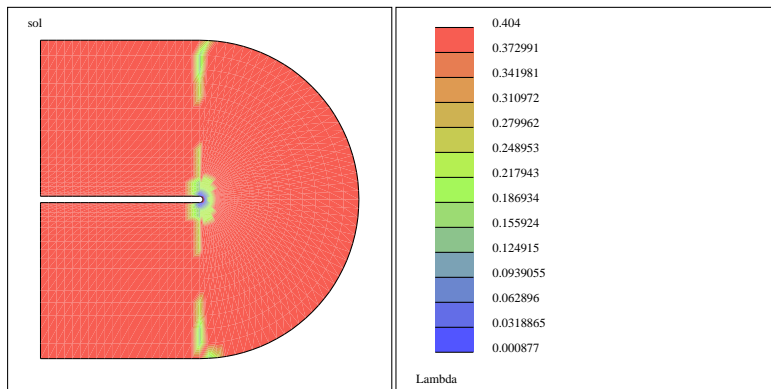


FIG. 5.29 – Isovaleur de  $\lambda$  : 56<sup>ième</sup> itération.

**La variation du maximum des contraintes en fonction du nombre “ d’étapes d’endommagement”.**

$N_{endom}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{Glo}$	12.47	7.34	4.35	2.60	1.56	0.92	0.54	0.33	0.19	0.11	0.07	0.04

TAB. 5.4 – La variation du maximum en fonction du nombre d’étapes d’endommagement.

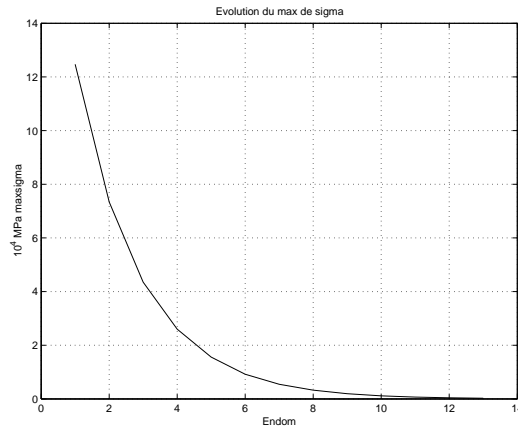


FIG. 5.30 – La variation du maximum en fonction du nombre d’endommagement.

Les résultats obtenus et illustrés dans les figures (FIG. 5.23 à FIG. 5.29 ), confirment les réponses auxquelles nous nous attendions, à savoir une propagation des fissures dans des directions qui correspondent à la première et à la deuxième bissectrice.

## Comparaison avec la méthode éléments finis

A titre de comparaison, nous avons affiché quelques résultats obtenus avec un code éléments finis (MEF++) et qui nous ont été envoyés par l'équipe de GIREF, université Laval que nous remercions pour leur collaboration.

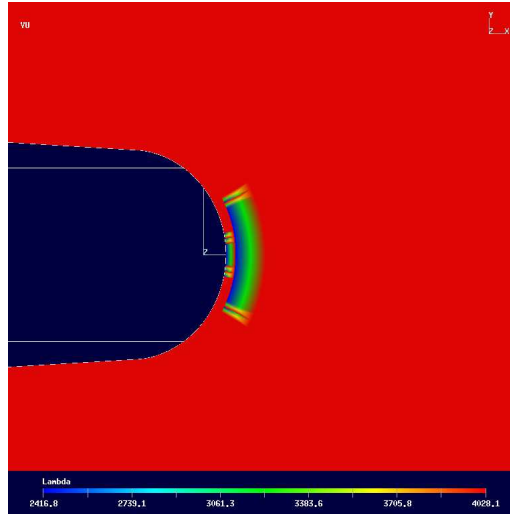


FIG. 5.31 – Isovaleur de  $\lambda$  : 1<sup>ière</sup> itération.

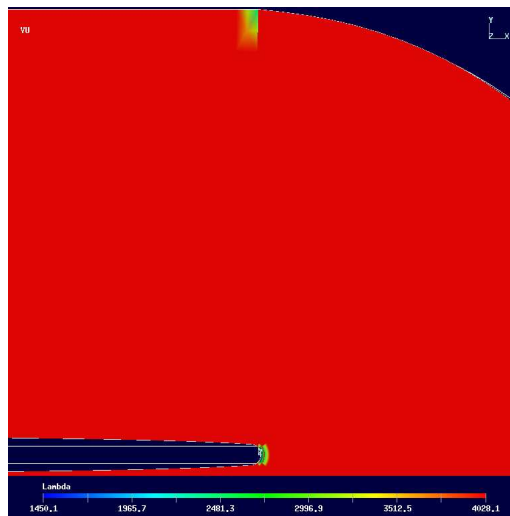


FIG. 5.32 – Isovaleur de  $\lambda$  : 11<sup>ième</sup> itération.



# Bibliographie

- [1] J.M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 63, 337-403, (1977).
- [2] C. Carpentier-Gabrieli, *Modélisation théorique et Numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*, Thèse à l'Université d'Aix-Marseille II, (1995).
- [3] P.G. Ciarlet and G. Geymonat, *Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire*, C.R.A.S, Serie II 295, 423-426, (1982).
- [4] P.G. Ciarlet, *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, (1985).
- [5] P. Destuynder, *Modélisation mécanique des milieux continus*, Mathématiques et Applications N° 516, Ellipes, (1991).
- [6] P. Destuynder et M. Djaoua, *Estimation de l'erreur sur le coefficient de la singularité de la solution d'un problème elliptique sur un ouvert avec coin*, R.A.I.R.O Analyse numérique/ Numerical Analysis vol. 14, n3, p.239 à 248, (1980).
- [7] M. Djaoua, *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes de la rupture*, Thèse à L'Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, (1983).
- [8] P. Grisvard, W.Wendland and J.R Whiteman, *Singularities and constructive Methods for their Treatment*, Proceedings, Oberwolfach, (1983).
- [9] D.Q. Haines and W.D. Wilson, *Strain energy density of rubber-like materials*, J. Mech. Phys. Sol. 27, 345-360, (1979).
- [10] M.F. Jazzar, *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*, Thèse à l'Université d'Aix-Marseille II, (1993).
- [11] P. Ladevèze, *Mécanique non linéaire des structures*, Hermes, (1996).

- [12] P. Le Tallec, *Numerical methods for non linear threedimensional elasticity*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L Lions eds, North Holland, (1994).
- [13] P. Le Tallec, *Numerical Analysis of viscoelastic problems*, RMA, P.G. Ciarlet and J.L Lions eds, Masson, (1990).
- [14] G. Martin Borret, *Sur la Propagation de Fissure dans les Elastomères*, Thèse Ecole Polytechnique, Paris, (1998).
- [15] M. Mooney, *A theory of large elastic deformations*, J. Appl. Phys. 11, 582-592, (1940).
- [16] R.W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity. On the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids*, Proceedings Roy. Society London A328, 567-583, (1972).
- [17] R.W. Ogden, *Volume charges associated with the deformation of rubber-like solids*, J. Mech. Phys. Solids 24, 323-338, (1976).
- [18] R.S. Rivlin, *Large elastic deformations of isotropic materials. II Some uniqueness theorems for pure homogeneous deformations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A240, 491-504, (1948).
- [19] F. Sidoroff, *Mécanique des solides T.2 Résistance des matériaux*, (1981).
- [20] F. Sidoroff, *Comportement des matériaux*, Ecole Centrale de Lyon, Troisième année "D.E.A" Notes Prises au cours, (1984).
- [21] F. Sidoroff, *Mécanique et Thermodynamique des milieux continus*, Ecole Centrale de Lyon, Troisième année "D.E.A", Notes Prises au cours, (1984).
- [22] L.R.G. Treloar, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1975).
- [23] C. Truesdell and W. Noll, *The nonlinear field theories of mechanics theory of elasticity*, Handbuch der Physik, III/3, 1-602, Springer, Berlin, (1965).
- [24] J.M. Vacherand, *Mécanique des milieux continus et matériaux*, Notes de cours, Clermont-Ferrand, (1970).

# Annexe 1

## 1.1 Approximation des valeurs propres de la matrice $D_A^{-1}A$

### 1.1.1 Cas d'un maillage triangulaire

**Notation 1.1** on note par :

$$A = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy \quad \text{et} \quad D_A = \text{diag}(A), \quad \text{et} \quad A_K = \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx dy \quad \text{et} \quad D_{A_K} = \text{diag}(A_K).$$

Où les fonctions bulles  $\varphi_i$  sont définies par  $\varphi_1 = 4\lambda_2\lambda_3$ ,  $\varphi_2 = 4\lambda_1\lambda_3$  et  $\varphi_3 = 4\lambda_2\lambda_1$ .

**Lemme 1.1** Les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(D_A^{-1}A) &\leq \max_K \lambda(D_{A_K}^{-1}A_K), \\ \min_K \lambda(D_{A_K}^{-1}A_K) &\leq \lambda_{\min}(D_A^{-1}A). \end{aligned}$$

### Détermination des approximations des valeurs propres de $D_A^{-1}A$

Il est connu que :

$$A_K = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} c & -c_3 & -c_2 \\ -c_3 & c & -c_1 \\ -c_2 & -c_1 & c \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_i = \cot g(\theta_i) \quad \text{et} \quad c = c_1 + c_2 + c_3 \quad (c \geq \sqrt{3}),$$

**Bornes pour**  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$  :

**Proposition 1.1** • Quel que soit le signe de  $c_1c_2c_3$  on a :

$$\lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1}A_K) \leq 1 + \frac{1}{c} \left( c^2 - 2 - \frac{2c_1c_2c_3}{\sqrt{c^2 - 2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{c} \left( c^2 - 2 + \frac{2c_1c_2c_3}{\sqrt{c^2 - 2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1}A_K).$$

De plus si on a  $c_1c_2c_3 > 0$  alors  $\lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1}A_K) \leq 1 + \frac{\sqrt{c^2 - 2}}{c}$ , donc  $\lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1}A_K) \leq 2$

• Si  $c_1c_2c_3 < 0$

$$1 - \frac{\sqrt{c^2 - 2}}{c} \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1}A_K).$$

- Si  $c_1 c_2 c_3 > 0$ , on a

$$\frac{4}{9} \left(1 - 2 \frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \frac{\delta_K^2}{h_K^2} \leq \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1} A_K),$$

$$\lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1} A_K) \leq 2 - \frac{1}{c^2} \leq 2.$$

- Si  $c_1 c_2 c_3 < 0$ , on a

$$\frac{4}{9} \frac{\delta_K^2}{h_K^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1} A_K),$$

$$\lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1} A_K) \leq 2 + \frac{4}{27} - \frac{1}{c^2} \leq 2 + \frac{4}{27}.$$

et si la triangulation  $\mathfrak{S}_h$  est une famille régulière de maillages ( $\frac{h_K}{\delta_K} \leq \sigma_K$ ), donc

$$\frac{1}{\sigma_K} \leq \frac{\rho_K^2}{h_K^2} \leq \frac{\delta_K^2}{h_K^2},$$

donc

- Si  $c_1 c_2 c_3 > 0$

$$\frac{4}{9} \left(1 - 2 \frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \frac{1}{\sigma_K^2} \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1} A_K).$$

- Si  $c_1 c_2 c_3 < 0$

$$\frac{4}{9} \frac{1}{\sigma_K^2} \leq \lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1} A_K).$$

### 1.1.2 Cas d'un maillage rectangulaire

Détermination de  $\lambda_{\max}(D_A^{-1} A)$  et  $\lambda_{\min}(D_A^{-1} A)$  :

on a

$$\lambda_{\min}(D_{A_K}^{-1} A_K) \leq \lambda(D_{A_K}^{-1} A_K) \leq \lambda_{\max}(D_{A_K}^{-1} A_K),$$

avec

$$A_K = \left( \int_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy \right)_{0 \leq i, j \leq 4}, \text{ et } D_{A_K} = \text{diag}(A_K).$$

On a

$$A_K = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } A_1 = M\left(\frac{h_x}{h_y}\right) \text{ et } A_2 = M\left(\frac{h_y}{h_x}\right),$$

avec

$$M(t) = \frac{8}{3} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t + \frac{1}{5}t^{-1} & \frac{1}{3}t - \frac{1}{5}t^{-1} \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{5}t^{-1} & \frac{2}{3}t + \frac{1}{5}t^{-1} \end{pmatrix}.$$

En posant  $t = \frac{h_x^2}{h_y^2}$ , les 4 valeurs propres de  $A$  sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{t}{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}t} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\frac{1}{3}t + \frac{2}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}t} \text{ valeurs propres de } A_1, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}t} \text{ et } \lambda_4 = \frac{\frac{2}{5}t + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}t} \text{ valeurs propres de } A_2. \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\lambda_{max}(D_{A_K}^{-1}A_K) \leq 2 - \frac{11}{13}\sigma_K^2 \text{ et } \lambda_{min}(D_{A_K}^{-1}A_K) \geq \frac{11}{13}\sigma_K^2$$

avec

$$\sigma_K = \frac{\min\{h_x, h_y\}}{\max\{h_x, h_y\}} = \frac{l}{L}.$$

# Annexe 2

## 2.1 Calcul des matrices utilisées pour la résolution du problème local.

### 2.1.1 Cas d'un maillage triangulaire

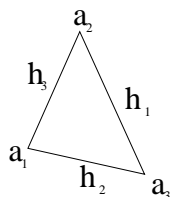


FIG. 2.33 – Numérotation des faces du triangle K

On a

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_K q_i \cdot q_j \, dx dy, \quad i, j = 1 \text{ à } 2 \\ &= \int_K \lambda_i \lambda_j (x - a_i) \cdot (x - a_j) \, dx dy, \quad i, j = 1 \text{ à } 2. \end{aligned}$$

d'où la matrice A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{|K|}{360} \begin{pmatrix} 6H^2 - 8h_1^2 & H^2 - 8h_3^2 \\ H^2 - 8h_3^2 & 6H^2 - 8h_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } H^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2. \\ &= \frac{|K|^2}{45} \begin{pmatrix} c + 2c_1 & -\frac{3}{2}c + 2c_3 \\ -\frac{3}{2}c + 2c_3 & c + 2c_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c_i = \cot g(\theta_i), \quad c = \sum_{i=1}^3 c_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= \int_K \operatorname{div} q_j v_i \, dx dy, \quad i, j = 1 \text{ à } 2, \\ &= \int_K \operatorname{div} (\lambda_j (x - a_j)) \times (3\lambda_i - 1) \, dx dy, \end{aligned}$$

$$B = \frac{|K|}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^T = V,$$

donc

$$B^{-1} = \frac{4}{3|K|} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où } B^{-1}A = \frac{8|K|}{135} \left[ \frac{c}{4}I + \begin{pmatrix} 2c_1 + c_3 & c_3 - c_1 \\ c_3 - c_2 & 2c_2 + c_3 \end{pmatrix} \right],$$

et on a :

$$\lambda_{\max}(B^{-1}A) = \frac{2|K|}{27} \left[ c + \frac{4}{5}\sqrt{c^2 - 3} \right] \leq \frac{h_K^2}{10}.$$

On a :

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \int_K q_i \cdot p_j \, dx dy, \quad i = 1 \text{ à } 2, \quad j = 1 \text{ à } 3, \\ &= \frac{1}{2|K|} \int_K \lambda_i(x - a_i) \cdot (x - a_j) \, dx dy, \quad i = 1 \text{ à } 2, \quad j = 1 \text{ à } 3. \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} -2h_1^2 + 6(h_2^2 + h_3^2) & 3h_1^2 + h_2^2 - 9h_3^2 & 3h_1^2 - 9h_2^2 + h_3^2 \\ h_1^2 + 3h_2^2 - 9h_3^2 & -2h_2^2 + 6(h_1^2 + h_3^2) & -9h_1^2 + 3h_2^2 + h_3^2 \end{pmatrix}.$$

On a enfin :

$$\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 = R_2(f)^T B^{-1} R_2(f), \quad \text{où } R_2(f) = - \begin{pmatrix} \int_K f(3\lambda_1 - 1) \, dx dy \\ \int_K f(3\lambda_2 - 1) \, dx dy \end{pmatrix}.$$

### 2.1.2 Cas d'un maillage rectangulaire

Dans le cas d'un maillage rectangulaire et en utilisant les fonctions de base, on obtient :

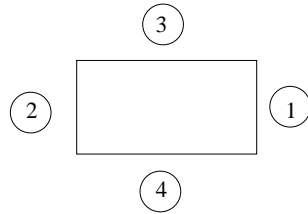


FIG. 2.34 – Numérotation des faces du rectangle K.

$$A = \frac{8}{15} |K| \operatorname{diag} \left( 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3} \right), \quad B = -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} h_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_x & 0 \\ 0 & \frac{h_y}{3} & 0 & \frac{h_x}{3} \end{pmatrix},$$

où  $A_{i,j} = \int_K q_i \cdot q_j \, dx dy$   $i, j = 1 \text{ à } 4$ , et  $B_{i,j} = \int_K \operatorname{div} q_j v_i \, dx dy$ ,  $j = 1 \text{ à } 4$ ,  $i = 1 \text{ à } 3$ , avec les  $q_i$  définis en (1.70) et les  $v_i$  définis en (1.71).

La matrice  $C$  définie par

$$C_{i,j} = \int_K q_i \cdot p_j \, dx dy \quad i, j = 1 \text{ à } 4, \quad \text{les } p_j \text{ sont donnés par (1.69),}$$

est égale à

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} h_x E & 0 \\ 0 & h_y E \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$V_{i,j} = \int_K v_i v_j \, dx dy; \quad i, j = 1 \text{ à } 3,$$

est égale à

$$V = \frac{|K|}{3} \text{diag} \left( 1, 1, \frac{1}{3} \right).$$

On a enfin :

$$\|P_{\hat{P}_{h,1}}^{L^2}(f)\|_{0,K}^2 = R_2(f)^T V^{-1} R_2(f), \quad \text{où } R_2(f) = \begin{pmatrix} \int_K f(2\lambda(x) - 1) \, dx dy \\ \int_K f(2\lambda(y) - 1) \, dx dy \\ \int_K f((2\lambda(x) - 1)(2\lambda(y) - 1)) \, dx dy \end{pmatrix}.$$



# Annexe 3

## 3.1 Déformations planes.

Soit  $\Omega$  un cylindre dont les génératrices sont parallèles aux axes, et  $u = (u_1, u_2, u_3)$  le vecteur déplacement. On suppose que  $u_1$  et  $u_2$  ne dépendent que de  $x_1$  et de  $x_2$  et que  $u_3 = 0$ . Dans ce cas, le gradient des déplacements est donné par :

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le gradient de déformation s'écrit alors

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla u = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  le tenseur des déformations. Ses composantes sont :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \quad \text{et} \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

Le tenseur  $\mathbf{C}$ , de Cauchy-Green droit, s'écrit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u = \mathbf{I} + 2\varepsilon(u) + \nabla u^T \nabla u,$$

ou encore :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + 2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les invariants de  $\mathbf{C}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \text{tr}(\mathbf{C}) = 1 + \text{tr}(\mathcal{C}), \\ I_2(\mathbf{C}) &= \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathcal{C})^2 - \text{tr}(\mathcal{C}^2)) + \text{tr}(\mathcal{C}), \\ I_3(\mathbf{C}) &= \det(\mathbf{C}) = \det(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

### 3.2 Le passage de la dimension 3 à la dimension 2 pour la loi de Saint-Venant-Kirchhoff

Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est donné par :

$$\mathbf{\Pi} = 2\mathbf{F}\left(\frac{\lambda}{4}\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{I} + \frac{\mu}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})\right).$$

Comme

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} - \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \frac{\lambda}{4} \text{tr} \begin{pmatrix} \mathcal{C} - \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{C} - \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi,

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Pi}_{33} \end{pmatrix}$$

Où

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{F}\left(\frac{\lambda}{4}\text{tr}(\mathcal{C} - \mathbf{I})\mathbf{I}_2 + \frac{\mu}{2}(\mathcal{C} - \mathbf{I})\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{\Pi}_{33} = \frac{\lambda}{2}\text{tr}(\mathcal{C} - \mathbf{I})$$

Revenons maintenant à l'équation d'équilibre.  
comme

$$\text{div} \mathbf{\Pi} = \text{div} \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{\Pi}_{33}}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{\Pi}_{33}}{\partial x_3} = 0$$

Alors

$$\text{div} \mathbf{\Pi} = \text{div} \mathbf{B}$$

Ce qui permet donc de traiter un problème bidimensionnel.

# Bibliographie

- [1] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger, J.F. Maitre, *Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. Application aux éléments finis mixtes*, Numer. Math. 80 : 159-179, (1998).
- [2] A. Agouzal, F. Oudin, *A posteriori error estimator for finite volume methods*, Applied Mathematics and Computation 110, 239-250, (2000).
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates*,  $M^2AN$ , 19, 7-32, (1985).
- [4] J.M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 63, 337-403, (1977).
- [5] R.E. Bank and R.K. Smith, *A Posteriori Error Estimate based on Hierarcal Bases*, SIAM J. Numer. Anal. 30, 921-935, (1993).
- [6] R.E. Bank and A. Weiser, *Some A Posteriori Error Estimators for elliptic partial differentialequations*, Math. Comp. 44, 283-301, (1985).
- [7] J. Baranger, J.F. Maitre, F. Oudin, *Connection between finite volume and mixed finite element methods*,  $M^2AN$ , vol. 30,  $N^0$  4, p. 445 à 465, (1996).
- [8] H. Belarbi, *Faisabilité de la méthode des volumes finis pour la simulation de problèmes de mécanique des solides compressibles*, D.E.S.S, Paris 6, (2000).
- [9] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer- Verlag, (1991).
- [10] C. Carpentier-Gabrieli, *Modélisation théorique et Numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*, Thèse à l'Université d'Aix-Marseille II, (1995).
- [11] P.G. Ciarlet, *Elasticité tridimensionnelle*, Masson, (1985).

- [12] P.G. Ciarlet and G. Geymonat, *Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire*, C.R.A.S, Serie II 295, 423-426, (1982).
- [13] P. Destuynder, *Modélisation mécanique des milieux continus*, Mathématiques et Applications N° 516, Ellipes, (1991).
- [14] P. Destuynder et M. Djaoua, *Estimation de l'erreur sur le coefficient de la singularité de la solution d'un problème elliptique sur un ouvert avec coin*, R.A.I.R.O Analyse numérique/ Numerical Analysis vol.14, n3, p.239 à 248, (1980).
- [15] M. Djaoua, *Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes de la rupture*, Thèse à L'Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, (1983).
- [16] F. Dubois, *Interpolation de Lagrange et volumes finis*, Note Aérospatiale ST/S numero 104109, (1992).
- [17] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet and J. L. Lions eds, vol VII, (2000).
- [18] P. Grisvard, W. Wendland and J.R. Whiteman, *Singularities and constructive Methods for their Treatment*, Proceedings, Oberwolfach (1983).
- [19] D.Q. Haines and W.D. Wilson, *Strain energy density of rubber-like materials*, J. Mech. Phys. Sol. 27, 345-360, (1979).
- [20] R.H.W. Hoppe and B. Wohlmuth, *A comparaison of a posteriori error estimators for mixed finite elements discretizations by Raviart-Thomas elements*, Math. of Comp. 68, Number 228, pp 1347-1378, (1999).
- [21] A. Ivankovic, I. Demirdzic, J.G. Williams and P.S. Leever, *Application of the finite volume method to the analysis of dynamic fracture problems*, International Journal of Fracture 66, 357-371, (1994).
- [22] M.F. Jazzar, *Modélisation du comportement hyperélastique quasi incompressible de structures acier-élastomères et validation expérimentale*, Thèse à l'Université d'Aix-Marseille II, (1993).
- [23] P. Ladevèze, *Mécanique non linéaire des structures*, Hermes, (1996).
- [24] P. Le Tallec, *Numerical Analysis of viscoelastic problems*, RMA, P.G. Ciarlet and J.L Lions eds, Masson, (1990).
- [25] P. Le Tallec, *Numerical methods for non linear threedimensional elasticity*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L Lions eds, North Holland, (1994).

- [26] J.F. Maitre, F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods : an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, in Multigrid Methods Proceedings, Cologne 1981, lecture notes in Mathematics 960, Springer, Heidelberg, 535-544, (1982).
- [27] J.F. Maitre, A. Rezgui, H. Souhail, A.M. Zine, *High order finite volume schemes. Application to non-linear elasticity*, in Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin and D. Kröner eds, 405-412, Hermes Penton Science, (2002).
- [28] J.F. Maitre and H. Souhail, *A Finite Volume A Posteriori Error Estimator generated by a Hierarchical Mixed Finite Element Basis*, in Innovative Tools for Scientific Computation in Aeronautical Engineering; edited by J. Periaux, P. Joly, O. Pironneau and E. Onate, CIMNE Barcelona, 17-27, (2001).
- [29] G. Martin Borret, *Sur la Propagation de Fissure dans les Elastomères*, Thèse Ecole Polytechnique, Paris, (1998).
- [30] M. Mooney, *A theory of large elastic deformations*, J. Appl. Phys. 11, 582-592, (1940).
- [31] J. Necas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [32] J.C. Nedelec, *Notions sur les techniques d'éléments finis*, Mathematiques et Applications 7, Ellipses-Edition Marketing, (1991).
- [33] R.W. Ogden, *Large deformation isotropic elasticity. On the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids*, Proceedings Roy. Society London A328, 567-583, (1972).
- [34] R.W. Ogden, *Volume charges associated with the deformation of rubber-like solids*, J. Mech. Phys. Solids 24, 323-338, (1976).
- [35] F. Oudin, *Schémas volumes finis pour Problèmes Elliptique : Analyse a Priori et a Posteriori par éléments finis mixtes, Méthode de décomposition de domaines*, Thèse, présentée devant l'Université Claude Bernard Lyon I, (1995).
- [36] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, In Mathematical aspects of the finite Element Method, I. Galligani and E. Magenes (eds.), Springer-Verlag, 292-315, (1977).
- [37] A. Rezgui, *Schémas numériques compacts et non compacts d'ordre trois pour le calcul d'écoulements compressibles*, Thèse à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, October (1997).

- [38] A. Rezgui, P. Cinnella et A. Lerat, *Third-order accurate finite volume schemes for Euler computations on curvilinear meshes*, Comput. Fluids 30, 875-901, (2001).
- [39] A. Rezgui, *An analysis of accuracy and convergence of finite volume methods*, Comput. Fluid Dynam. J., 8(3) : 369-377, (1999).
- [40] R.S. Rivlin, *Large elastic deformations of isotropic materials. II Some uniqueness theorems for pure homogeneous deformations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A240, 491-504, (1948).
- [41] J.E. Roberts, J.M. Thomas, *Mixed and hybrid methods*, In P.G. Ciarlet, J.L. Lions, (eds.) Handbook of Numerical Analysis II. Finite Element Methods (Part I), North-Holland, Amsterdam, (1989).
- [42] T. Schmidt, *Analyse zweier Finite-Volumen Methoden fur elliptische partielle differentialgleichungen 2. Ordnung auf vierecksgittern*, Doctoral Thesis, Kiel, (1992).
- [43] T. Schmidt, Kiel, *Box Schemes on Quadrilateral Meshes*, Computing 51, 271-292,, (1993).
- [44] F. Sidoroff, *Mécanique des solides T.2 Résistance des matériaux* , (1981).
- [45] F. Sidoroff, *Comportement des matériaux*, Ecole Centrale de Lyon, Troisième année "D.E.A", Notes Prises au cours, (1984).
- [46] F. Sidoroff, *Mécanique et Thermodynamique des milieux continus*, Ecole Centrale de Lyon, Troisième année "D.E.A", Notes Prises au cours, (1984).
- [47] J. Sokolowski, J.P. Zolesio, *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*, Springer-Verlag, (1991).
- [48] L.R.G. Treloar, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press, Oxford, (1975).
- [49] C. Truesdell and W. Noll, *The nonlinear field theories of mechanics theory of elasticity*, Handbuch der Physik, III/3, 1-602, Springer, Berlin, (1965).
- [50] J.M. Vacherand, *Mécanique des milieux continus et matériaux*, Notes de cours, Clermont-Ferrand, (1970).
- [51] R. Verfürth, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley-Teubner, (1996).

- [52] M.A. Wheel, *Exploiting the Finite Volume Method in Structural Analysis*, A Review, Numerical Methods in Engineering'96, John Wiley et Sons Ltd, (1996).