



HAL
open science

Approximation de convexes par des polytopes et décomposition approchée de normes

François Gannaz

► **To cite this version:**

François Gannaz. Approximation de convexes par des polytopes et décomposition approchée de normes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT : . tel-00005258

HAL Id: tel-00005258

<https://theses.hal.science/tel-00005258>

Submitted on 9 Mar 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

François GANNAZ

pour obtenir le titre de

Docteur de l'université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : Mathématiques appliquées

Approximation de convexes par des polytopes et décomposition approchée de normes

Date de soutenance : 12 décembre 2003

Composition du jury :

Jean DELLA DORA	Président
Jean-Pierre DEDIEU	Rapporteur
Jean-Marie MORVAN	Rapporteur
Luc BIARD	Examineur
Bernard LACOLLE	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG, équipe MGA

Remerciements

A tous les thésards de la tour IRMA, merci. Car ces années de thèse auront pour moi été avant tout la rencontre de personnes formidables. Tout d'abord mes collègues de bureau : Guillaume qui m'a initié à un monde libre où s'ébattent gnous et pingouins, Voichiça qui m'a appris à placer Satomare sur une carte, Valérie et Sylvia qui m'ont dévoilé les joies de la fin de thèse, Ayman qui m'a initié à l'arabe lors de discussions s'étendant parfois à toute l'après-midi, Jocelyn qui m'a convaincu que la littérature anglaise ne se réduisait pas à Shakespeare, et encore Guillaume qui vient fermer cette boucle. Je sais que ce préambule n'est pas le meilleur endroit pour témoigner de mon affection, mais celle-ci est bien réelle.

L'énumération exhaustive de tous ceux qui ont compté pour moi pendant ces années au labo serait trop longue, mais me viennent à l'esprit, en vrac, Ouadia et Sophie qui ont commencé leur thèse en même temps que moi, Julie et Laurent que j'entendais rire à travers le mur, Olivier qui reste mon modèle, footballistiquement parlant, Antoine, Laurent et Etienne, alias les *bad boys* du bureau 14, Aude qui heureusement ne m'en veut plus de lui avoir cogné le genou, Alexandre et ses interrogations mathématiques, Franck qui partit à mes côtés à la découverte des conférences, Erwan avec qui j'ai souvent le plaisir d'être en total désaccord, Sophie et Jocelyn qui désormais n'auront pas à s'inquiéter de mon manque d'arva, et bien sûr toujours Guillaume-せんばい pour tant de discussions, découvertes, utopies. . . .

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres "honoraires" ou associés du labo, comme Pierre qui, au mépris du qu'en-dira-t-on, donna un soir de sa personne pour pallier le manque de chaise, Audrey qui porta un gâteau d'anniversaire jusque sur les pistes de ski, Alex qui passa comme moi des monts du Jura aux Alpes dauphinoises, Cécile qui sait si bien m'accompagner lorsqu'il s'agit de finir la poire tout en discutant philosophie nuitamment, Jean-Guillaume et Cécile qui ont tant fait pour diffuser en dehors du LMC les techniques modernes de répartition des vaches dans les prés. . . et tant d'autres que je ne mentionne pas ici.

Merci aussi à mes parents, frère et sœurs qui ont su tolérer aussi bien les moments d'enthousiasme où je leur parlais de maths (certes en vulgarisant, mais la géométrie riemannienne, même édulcorée, s'avère malheureusement indigeste) que les périodes de démotivation pendant lesquelles les mots thèse ou théorème m'incitaient plus à parler de Spinoza que de polytopes.

Je remercie également Bernard Lacolle d'avoir encadré cette thèse et en particulier de m'avoir aidé à réorienter le sujet lorsque l'impasse s'annonçait. Mes remerciements s'adressent aussi à mes rapporteurs Jean-Marie Morvan et Jean-Pierre Dedieu qui ont grandement contribué à la finalisation de ce mémoire, ainsi qu'à Jean Della Dora et Luc Biard qui ont accepté de faire partie du jury de soutenance.

Une attention particulière va enfin au grand Jean-Sébastien qui m'a soutenu, ému et réconforté jusque dans les derniers instants précédant la soutenance.

Un grand merci à tous ceux qui ont fait de ces années une expérience si plaisante et enrichissante.

Table des matières

Introduction	9
Notations	13
1 Rappels et prérequis	15
1.1 Corps convexes et polytopes	16
1.2 Fonctions support	18
1.2.1 Dans \mathbb{R}^d	18
1.2.2 Dans le plan	19
1.3 Distance de Hausdorff	21
1.3.1 Définitions	21
1.3.2 Extensions	22
1.4 Géométrie différentielle	23
1.4.1 Surfaces de \mathbb{R}^3	24
1.4.2 Dimensions supérieures	30
1.5 Géométrie riemannienne	30
1.5.1 Surface et métrique riemannienne	30
1.5.2 La première forme fondamentale	32
1.5.3 La seconde forme fondamentale	33
2 Approximation polytopiale asymptotique des convexes	37
2.1 Comportement asymptotique	39
2.2 Dispersion et triangulation de Delaunay	43
2.2.1 Définition	43

2.2.2	Évaluation locale	43
2.3	Recouvrement par des disques et problème de Tammes	45
2.4	Application directe	47
2.4.1	Convexes plans	47
2.4.2	Échantillonnage d'une paramétrisation	52
2.4.3	De l'approximation de la sphère S^d à un convexe lisse	54
3	Approximation et décomposition de norme	59
3.1	Introduction	61
3.2	Les outils	61
3.2.1	Notations	61
3.2.2	Norme duale	61
3.2.3	Norme définie par dualité	64
3.2.4	Décomposition de norme	68
3.2.5	Décomposition approchée de norme	70
3.3	Approximation de norme	71
3.3.1	Norme approchée	71
3.3.2	Échantillonnage de la sphère duale	73
3.3.3	Boule unité ou boule duale?	75
3.4	Norme sur un produit cartésien d'espaces	76
3.4.1	Caractérisation	76
3.4.2	Produit cartésien d'approximations de normes	79
3.5	Norme approchée et approximation de la boule duale	83
3.5.1	Norme l_2 approchée	83
3.5.2	Approximation d'une norme quelconque	86
4	Décomposition de normes et approximation de convexes	93
4.1	Introduction	95
4.2	Construction géométrique de polytopes approximants	95
4.2.1	Polytope approximant une boule de l_2^d	95
4.2.2	Polytope approximant une boule de l_p^d	100

4.2.3	Autres convexes lisses	103
4.3	Construction de décompositions approchées de normes	104
4.3.1	Décomposition approchée de l_2^d	104
4.3.2	Norme l_p^d	108
4.3.3	Normes euclidiennes	111
4.3.4	Normes l_p^d anisotropes	113
4.4	Des décompositions approchées aux polytopes approximants	114
5	Normes approchées et géométrie algorithmique	117
5.1	Expérimentation : Polyèdre approchant la sphère de \mathbb{R}^3	119
5.1.1	Borne Optimale	119
5.1.2	Lien entre longueur des arêtes d'un simplexe C et distance de Hausdorff	119
5.1.3	Projection stéréographique	120
5.1.4	Subdivision canonique selon θ, φ	121
5.1.5	Subdivision optimisée selon θ, φ	122
5.1.6	Subdivision de l'icosaèdre	124
5.1.7	comparaison des 4 méthodes	127
5.2	Expérimentation : Polygone approchant un convexe plan	127
5.2.1	Description du problème	128
5.2.2	Construction à erreur fixée	129
5.2.3	Construction à nombre de sommets fixés	132
5.2.4	Comparaison expérimentale	136
5.2.5	Influence du polygone initial	137
5.2.6	Améliorations possibles	138
5.3	Décomposition de norme et diagramme de Voronoï	140
5.3.1	Préliminaires	140
5.3.2	Approximation du diagramme de Voronoï	141
5.4	Plongement peu déformant	143
5.5	Diamètre approché	145

Introduction

J'ai toujours vu dans les mathématiciens des espèces de Rose-Croix et j'ai toujours regretté de ne pas être initié à leurs mystères.

Alexandre Soljenitsyne. *Le premier cercle.*

A l'origine de ce travail est l'idée d'introduire dans le domaine de la géométrie algorithmique les outils et les résultats de la géométrie riemannienne sur les convexes. Ces deux spécialités sont en effet restées jusqu'à présent relativement imperméables l'une à l'autre.

L'approximation polytopiale des convexes est un thème si vaste qu'il n'est pas difficile d'en faire remonter l'origine à l'Antiquité, à travers par exemple la fameuse méthode d'exhaustion d'Archimède. Mais l'étude moderne fut initiée par Fejes Toth dans [Toth 1948]. Il aborda alors le problème qui nous intéresse : la distance euclidienne étant prolongée à l'ensemble des compacts, comment construire un polytope approchant au mieux un convexe donné pour cette métrique ? Et quel est le comportement asymptotique de la distance du polytope au convexe ? Après avoir énoncé clairement ces questions, [Toth 1948] donna quelques indications de réponse pour des polytopes particuliers, mais surtout il conjectura les bornes asymptotiques qui ne furent pleinement démontrées qu'un demi-siècle plus tard. La principale étape fut ensuite [McClure and Vitale 1975] qui, grâce aux fonctions support de convexes, dressa une revue presque complète de l'approximation de convexes lisses du plan par des polygones.

Mais la véritable accélération ne vint qu'avec les années 80 où [Schneider and Wieacker 1981] prouva une des conjectures précédemment énoncées par Toth. Quoique la preuve soit restreinte par l'hypothèse d'un bord fortement dérivable, la voie était défrichée, et les outils de la géométrie riemannienne mis en place. Ensuite [Gruber 1993b] puis [Böröczky 2000] levèrent ces restrictions, en s'appuyant à nouveau sur les surfaces riemannienne et le recouvrement par des disques. Des propriétés annexes furent également traitées dans cette période, telles que le lien entre équioscillation et polytope approximant, ou comme les termes d'ordre supérieur dans l'étude asymptotique de l'approximation polyto-

piale. Une présentation d'ensemble est accessible dans [Gruber 1993a,b].

Dans le même temps, la géométrie algorithmique s'est également souvent intéressée à ce sujet, en particulier à travers des problèmes de maillage d'une surface. Mais l'approche était généralement plus pragmatique et souvent indépendante des travaux cités plus haut. Plus récemment des notions telles que les surfaces riemanniennes ont cependant fait leur entrée en géométrie algorithmique [Leibon and Letscher 2000].

Dans cette thèse, nous nous proposons de montrer l'utilité des outils théoriques de la géométrie riemannienne dans une optique de géométrie appliquée. Deux axes principaux nous guideront. Le premier est la construction de polytopes approchant un corps convexe donné. Le second, fortement lié au précédent, est l'élaboration d'une approximation d'une norme et son application pratique.

Le premier chapitre s'adresse à un lecteur déjà formé à la géométrie des convexes et des polytopes, mais aussi initié à la géométrie différentielle. Il propose d'abord un rapide tour d'horizon des notions fondamentales qui seront employées dans le reste du document, et se finit par une introduction à la géométrie des surfaces riemanniennes. Nous y définirons en particulier une distance sur une surface adaptée à l'approximation des convexes et en proposerons une expression faisant intervenir la courbure du bord du convexe.

Les principaux résultats de l'approximation des corps convexes lisses par des polytopes seront présentés au chapitre 2. Nous y proposons également un résultat permettant, à partir de la connaissance de la courbure, d'évaluer la qualité d'une approximation polytopiale inscrite.

Au chapitre 3 apparaît le second des deux axes de cette thèse. Nous définissons alors l'approximation de norme, ainsi que la notion essentielle de décomposition approchée d'une norme. Le principe est de substituer à une norme sur un espace vectoriel de dimension quelconque une norme polytopiale, *i.e.* dont la boule unité est un polytope. Cette nouvelle norme s'exprime et se calcule simplement, et peut être construite arbitrairement proche de la norme initiale. Nous établissons les propriétés fondamentales de ces objets mathématiques, puis nous proposons le concept de *produit cartésien de normes*. Enfin nous mettons en évidence une forte proximité avec l'approximation polytopiale des convexes en montrant que dans certains cas les problèmes sont similaires, et que dans le cas général, ils sont liés.

Le chapitre 4 s'intéresse aux constructions explicites tant d'approximations polytopiales de convexes que de décompositions de normes. Nous y proposons un procédé construisant par récurrence sur la dimension une décomposition des normes l_p et en déduisons une approximation des boules l_p . Une majoration de l'erreur est donnée ainsi qu'une généralisation à d'autres normes, en particulier

ellipsoïdales.

Les applications et les expérimentations font l'objet du chapitre 5. Dans un premier temps, nous y comparons différentes constructions d'approximations de la boule unité canonique. Puis nous expérimentons différentes stratégies permettant d'inscrire un polygone dans un convexe plan. Enfin, deux types d'applications des décompositions de normes sont présentés. L'un vise à étudier les propriétés d'un diagramme de Voronoï approché. L'autre, à travers le formalisme des plongements peu déformants, illustre comment une décomposition approchée permet un calcul rapide d'une approximation du diamètre. Ce problème du diamètre a été choisi car il peut être considéré comme emblématique de toute une catégorie de problèmes géométriques regroupant les cylindres englobants, enveloppe convexe, largeur, etc.

Notations

$f = o(g)$ f est négligeable devant g en a , c'est-à-dire :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que pour $t \in V$,
 $\|f(t)\| \leq \|g(t)\|$.

$f \sim g$ f est équivalente à g en a , c'est-à-dire :
 $f - g = o(g)$

$f = O(g)$ Il existe un voisinage V de a et $k \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \in V$,
 $\|f(t)\| \leq k\|g(t)\|$.

$f = \Omega(g)$ Il existe un voisinage V de a et $k \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \in V$,
 $\|f(t)\| \geq k\|g(t)\|$.

$f = \Theta(g)$ f est du même ordre que g en a , c'est-à-dire :
 $f = O(g)$ et $f = \Omega(g)$.

Chapitre 1

Rappels et prérequis

La courbure qu'on obtenait était bien éloignée de la perfection, mais, en substance, il se passait quelque chose, on pouvait créer une forme nouvelle, arbitraire : une puissance prenant acte, n'était-ce pas cela qu'entendait Aristote.

Primo Levi. *Le système périodique.*

Sommaire

1.1	Corps convexes et polytopes	16
1.2	Fonctions support	18
1.2.1	Dans \mathbb{R}^d	18
1.2.2	Dans le plan	19
1.3	Distance de Hausdorff	21
1.3.1	Définitions	21
1.3.2	Extensions	22
1.4	Géométrie différentielle	23
1.4.1	Surfaces de \mathbb{R}^3	24
	Généralités	24
	Courbures	26
1.4.2	Dimensions supérieures	30
1.5	Géométrie riemannienne	30
1.5.1	Surface et métrique riemannienne	30
1.5.2	La première forme fondamentale	32
1.5.3	La seconde forme fondamentale	33

1.1 Corps convexes et polytopes

On rappelle tout d'abord la définition fondamentale d'un convexe, ainsi que différentes propriétés en dimension finie. Pour davantage de précisions ainsi que des démonstrations, de nombreux livres sont disponibles, comme par exemple [Berger 1992a; Gruber 1993c].

Définition 1.1.1. Une partie C de \mathbb{R}^d est dite *convexe* si $\forall x, y \in C, [x, y] \subset C$ où $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

Cette définition nous amène à faire deux remarques : la première est qu'un convexe n'est pas nécessairement borné. La deuxième est qu'un convexe dans un espace vectoriel de dimension finie reste convexe dans tout espace plus vaste. Ainsi un disque de \mathbb{R}^2 est un convexe de \mathbb{R}^3 , alors que sa dimension n'est que de 2. Or certaines propriétés sont liées à la dimension intrinsèque du convexe, et on souhaiterait donc ne pas mélanger des objets de différentes dimensions. Pour pallier ces imprécisions, il est nécessaire d'introduire une notion plus restrictive que celle de convexe.

Définition 1.1.2. On appellera *corps convexe* un ensemble $C \subset \mathbb{R}^d$ compact, convexe et d'intérieur non-vide, et on notera \mathcal{C} l'ensemble des corps convexes. On notera $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^k$ l'ensemble des corps convexes dont le bord est de classe \mathcal{C}^k .

On verra plus loin dans ce chapitre, en abordant la géométrie différentielle, la définition précise d'une surface de bord \mathcal{C}^k . Un corps convexe sera d'ailleurs dit de classe \mathcal{C}^k si son bord l'est.

Parmi les différentes opérations possibles sur les convexes, l'une d'elles s'avère particulièrement utile ici.

Définition 1.1.3 (Somme de Minkowski). Soient C, D deux convexes de \mathbb{R}^d , alors on appelle somme de Minkowski de C et D , notée $C + D$, le convexe

$$C + D = \{x + y \mid x \in C, y \in D\} .$$

Nous ne définirons pas ici de manière générale un hyperplan séparant, mais nous en considérons une classe particulière que forment les hyperplans d'appui, ou hyperplans support.

Définition 1.1.4 (Hyperplan d'appui). Soit A un convexe inclus dans \mathbb{R}^d . Un *hyperplan d'appui* de A est un hyperplan H contenant un point a de A et tel que A soit inclus dans l'un des deux demi-espaces fermés délimités par H . On dira alors que H est un hyperplan séparant $\{a\}$ de A .

On rappelle qu'un corps convexe est dit *strict* (on dira aussi qu'il est strictement convexe) si tout hyperplan d'appui n'intersecte ce corps convexe qu'en un point.

Définition 1.1.5 (Sommet). Un point x d'un convexe A est un *sommet* de A si l'intersection des hyperplans d'appui à A en x est réduite à $\{x\}$.

Définition 1.1.6 (Enveloppe convexe). Soit A un ensemble inclus dans \mathbb{R}^d . L'*enveloppe convexe* de A est le plus petit convexe contenant A . C'est donc l'intersection des convexes contenant A .

Les mots “polyèdre” et “polytope” peuvent suivant les auteurs désigner des objets différents. Nous avons dans ce travail adopté les définitions de [Berger 1992a] qui ne font pas intervenir la dimension.

Définition 1.1.7 (Polyèdre convexe). Un *polyèdre convexe* est une intersection finie de demi-espaces fermés.

Définition 1.1.8 (Polytope). Un *polytope* est une intersection finie de demi-espaces fermés, compacte et d'intérieur non-vide. Autrement dit, un polytope est un corps convexe polyédrique.

Dans le cadre de l'approximation des corps convexes par des polytopes, nous serons fréquemment amenés à nous intéresser à deux catégories particulières, les polytopes inscrits et circonscrits. Rappelons pour cela qu'un corps convexe a pour frontière un ensemble non-vide, appelé aussi bord de ce corps convexe.

Définition 1.1.9. Un polytope P est dit *inscrit* dans un corps convexe C si ses sommets sont sur la frontière de C . Un polytope P est dit *circonscrit* à un corps convexe C si les hyperplans supportant ses faces sont des hyperplans d'appui de C .

On notera \mathcal{P} l'ensemble des polytopes, et \mathcal{P}_n le sous-ensemble des polytopes à au plus n sommets. Lorsqu'un convexe C à approcher sera fixé, on notera \mathcal{P}_n^i (respectivement \mathcal{P}_n^c) l'ensemble des polytopes ayant au plus n sommets et inscrits (respectivement circonscrits) dans C . Ces notations seront rappelées lors de leur première utilisation au chapitre 2.

Nous ferons enfin appel à une autre propriété des convexes qui utilise produit scalaire canonique de \mathbb{R}^d . Ce produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté $x.y$.

Proposition 1.1.10. Soit A un convexe et ν un vecteur normal à un hyperplan d'appui de A en un point a . Alors

$$\forall x \in A, x.a \leq \nu.a ,$$

ou bien

$$\forall x \in A, x.a \geq \nu.a .$$

1.2 Fonctions support

1.2.1 Dans \mathbb{R}^d

Plusieurs définitions des fonctions support sont possibles. Ainsi [Valentine 1964] considère qu'une fonction support est une application définie sur \mathbb{R}^d alors que [Berger and Gostiaux 1987; McClure and Vitale 1975] définissent cette application sur la sphère S^{d-1} uniquement. Nous adoptons ici ce dernier point de vue. La fonction support d'un convexe est ainsi définie sur la sphère unité de \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.1. Soit C un corps convexe, on définit la fonction support de C , notée s_C , par

$$s_C : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \sup_{m \in C} m \cdot u$$

où S^{d-1} désigne la sphère unité de \mathbb{R}^d et ' \cdot ' le produit scalaire usuel.

Cette définition peut se voir de façon géométrique. Ainsi $s_C(u)$ est la distance algébrique (c'est-à-dire que la distance est pourvue d'un signe) de l'origine à l'hyperplan affine tangent à C de normale u .

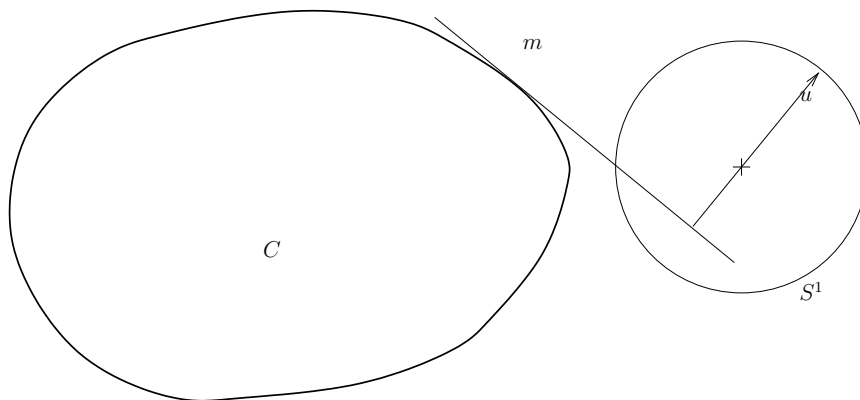


FIG. 1.1 – Fonction support d'un convexe

On remarquera aisément que quelque soit $C \in \mathcal{C}$, s_C est continue et que $\mathcal{S} = \{s_C; C \in \mathcal{C}\}$ est en bijection avec \mathcal{C} , autrement dit que la fonction support caractérise le convexe. Les preuves détaillées se trouvent dans [Valentine 1964]. Enfin, dans la plupart des cas, on se ramènera à considérer des corps convexes dont la fonction support est positive. En effet, une simple translation nous permet de l'assurer.

Proposition 1.2.2. Une fonction support est partout positive ou nulle si et seulement si l'origine du repère appartient au convexe.

Pour une étude complète des propriétés des fonctions support et un aperçu de leurs applications, le lecteur pourra se reporter à [Valentine 1964].

1.2.2 Dans le plan

Dans le plan, la fonction support d'un convexe peut s'écrire plus simplement qu'en dimension supérieure, et ses propriétés sont plus nombreuses. On définit toujours la fonction support s_C d'un corps convexe C par :

$$s_C : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \sup_{M \in C} M.u .$$

Dans \mathbb{R}^2 , on peut utiliser la bijection entre l'intervalle $[0, 2\pi[$ et S^1 pour définir s_C d'une autre façon :

$$s_C : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \mapsto \sup_{(x,y) \in C} (x \cos \theta + y \sin \theta) .$$

Sauf en cas d'ambiguïté, on utilisera par la suite indifféremment ces deux représentations.

L'interprétation géométrique de cette définition est que pour $u \in S^1$ fixé, $(u, s_C(u))$ définit une droite de normale u et de distance à l'origine $s_C(u)$ qui est l'unique droite support de C ayant pour normale extérieure u . Ainsi la fonction support s_C décrit l'ensemble des tangentes à C .

Pour étudier les propriétés locales de la fonction support, il est utile de pouvoir dériver cette fonction. Or [Valentine 1964] montre que cela est le cas si le bord d'un corps convexe admet une paramétrisation lisse.

Proposition 1.2.3 ([Valentine 1964]). *Si $C \in \mathcal{C}$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors sa fonction support l'est également.*

Puisque la proposition 1.2.3 lie la dérivabilité du bord d'un convexe à celle de sa fonction support, il est cohérent de chercher à relier la courbure du bord d'un convexe lisse aux dérivées de sa fonction support.

Proposition 1.2.4 ([Valentine 1964]). *Notons n_θ le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, et $r_C(\theta)$ le rayon de courbure du bord de C au point où la normale vaut n_θ . Alors pour $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ ce rayon vaut*

$$r_C(\theta) = s_C(\theta) + s_C''(\theta) .$$

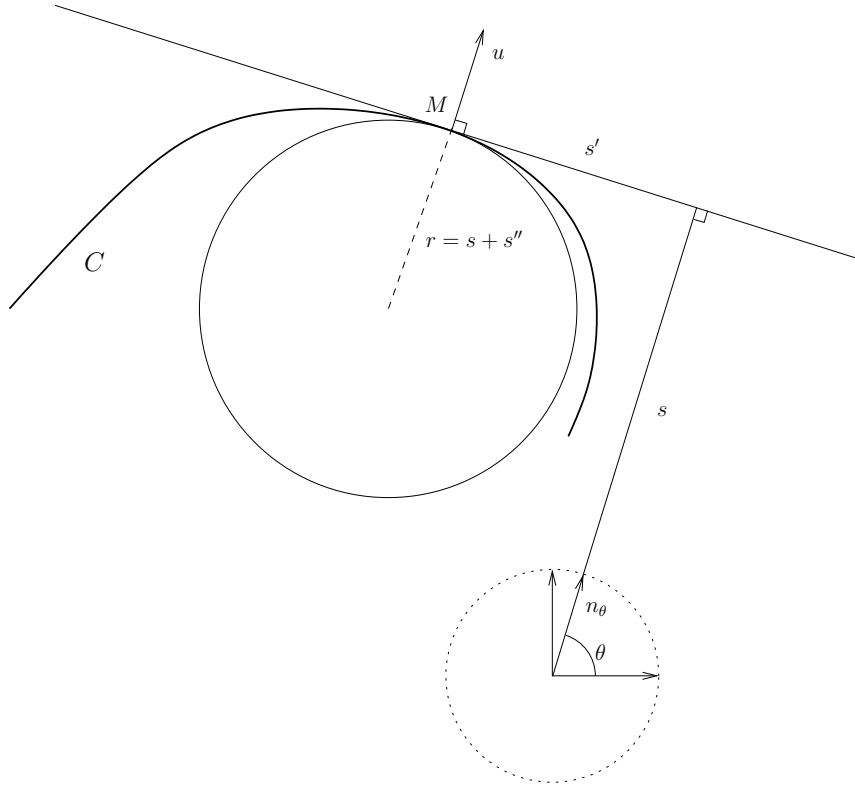


FIG. 1.2 – Fonction support et courbure en dimension 2

Une deuxième propriété est illustrée sur la figure 1.2. Pour un corps strictement convexe de classe \mathcal{C}^2 , elle permet de passer d'une représentation par sa fonction support à une paramétrisation. Puisque C est strictement convexe, à chaque tangente est associée un unique point du bord de C . En effet, ce point $f(\theta)$ s'écrit :

$$f(\theta) = s_C(\theta).n_\theta + s'_C(\theta).n_{\theta+\pi/2} . \quad (1.2.1)$$

La paramétrisation $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de ∂C ainsi construite admet donc quelques propriétés intéressantes. En particulier, la normale en $f(\theta)$ est n_θ , et

$$f'(\theta) = r_C(\theta)n_{\theta+\pi/2} .$$

• Réciproquement, on se donne $f : [0, a[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation \mathcal{C}^2 du bord de C et l'on cherche à en déduire la fonction support de C . On suppose que f parcourt ∂C dans le sens direct. Par définition,

$$s_C(\theta) = \sup_{t \in [0, a[} f(t).n_\theta .$$

En particulier, $s_C(\theta) = \sup\{f(t).n_\theta \mid f'(t).n_\theta = 0\}$. Or il existe $t_0 \in [0, a[$ tel que $f'(t_0)$ a même sens et même direction que $n_{\theta+\pi/2}$, et donc $s_C(\theta) = f(t_0).n_\theta$.

On remarquera cependant que dans la pratique le passage de la fonction support à une paramétrisation est plus aisé que la réciproque.

1.3 Distance de Hausdorff

1.3.1 Définitions

La distance de Hausdorff δ^H est la plus courante des métriques sur \mathcal{C} et on peut la considérer comme la métrique ‘standard’ de \mathcal{C} , ceci pour plusieurs raisons explicitées plus loin.

Définition 1.3.1. Si $C, D \in \mathcal{C}$, la distance de Hausdorff δ^H est définie par

$$\delta^H(C, D) = \max \left\{ \sup_{y \in D} d(y, C), \sup_{x \in C} d(x, D) \right\} .$$

Pour une preuve ainsi que davantage de détails, on pourra se référer avec profit au tour d’horizon sur les normes de convexes de [Shephard and Webster 1965].

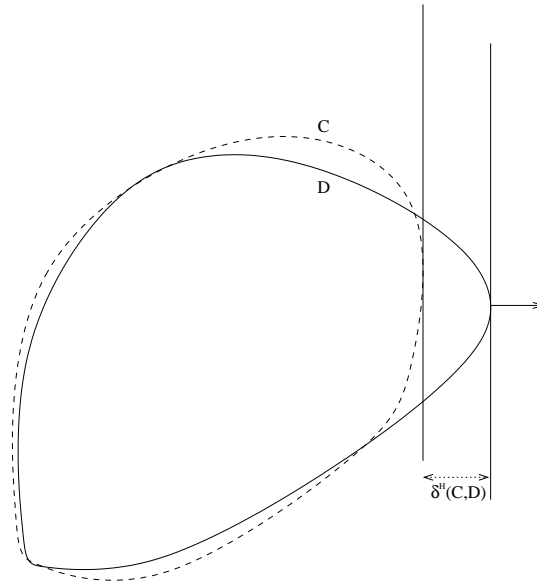


FIG. 1.3 – Distance de Hausdorff et fonction support

L’écriture précédente est la plus commune, mais la définition par les fonctions support est particulièrement simple :

Proposition 1.3.2. Si $C, D \in \mathcal{C}$,

$$\delta^H(C, D) = \sup_{u \in S^{d-1}} |s_C(u) - s_D(u)| = \|s_C - s_D\|_\infty .$$

Autrement dit, la distance de Hausdorff peut être définie comme le maximum des distances entre un plan tangent à C et le plan tangent à D de même normale extérieure.

Une troisième définition équivalente aux précédentes est possible.

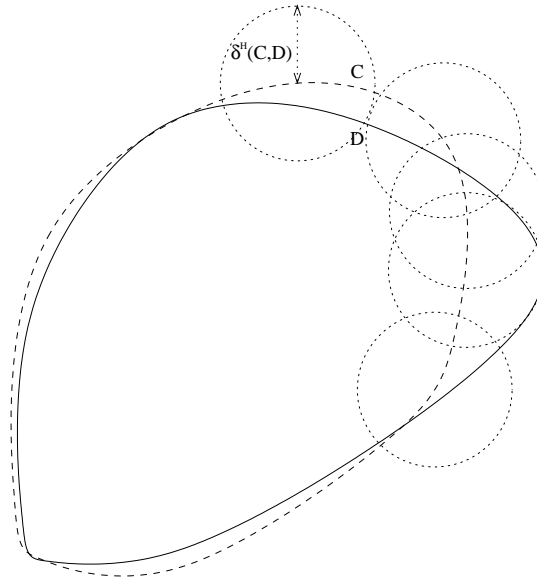


FIG. 1.4 – Distance de Hausdorff et somme de Minkowski

Proposition 1.3.3. *En notant $B = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|x\| \leq 1\}$ la boule unité, et pour tout $C, D \in \mathcal{C}$*

$$\delta^H(C, D) = \inf \{ \lambda > 0 \mid C \subset D + \lambda B \text{ et } D \subset C + \lambda B \} .$$

L'ensemble \mathcal{C} muni de δ^H n'est pas complet car $(\frac{1}{n}B)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans \mathcal{C} puisque sa limite dans l'ensemble des compacts de \mathbb{R}^n est un point, donc est d'intérieur vide. La métrique de Hausdorff présente cependant la possibilité d'être étendue à une distance sur l'espace des sous-ensembles compacts non-vides d'un espace métrique quelconque, dont elle prolonge la distance puisque :

$$\delta^H(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$$

ce qui justifie son appellation de distance naturelle sur les compacts non-vides.

1.3.2 Extensions

Nous n'évoquerons pas ici toute la "zoologie" des normes et pseudo-normes définies sur \mathcal{C} , mais deux variantes de la distance de Hausdorff méritent ici une brève évocation.

Métrique d'Eggleston Une variante commune est la *métrique d'Eggleston*

$$\delta^E(C, D) = \sup_{y \in D} d(y, C) + \sup_{x \in C} d(x, D) .$$

Comme $\delta^H \leq \delta^E \leq 2\delta^H$, les propriétés de δ^E diffèrent peu, et l'on ne considérera donc que δ^H .

Distance de Hausdorff généralisée La définition usuelle de la distance de Hausdorff peut se généraliser en ne prenant plus nécessairement pour référence la norme euclidienne canonique. Cette notion, très rarement introduite, sera pourtant particulièrement utile pour faire le lien entre l'approximation de convexes et l'approximation de normes.

Définition 1.3.4. Si φ est une norme sur \mathbb{R}^d , alors en notant d_φ la distance associée à φ , pour tout $C, D \in \mathcal{C}$ la quantité

$$\delta_\varphi^H(C, D) = \max \left\{ \sup_{y \in D} d_\varphi(y, C), \sup_{x \in C} d_\varphi(x, D) \right\}$$

définit une distance sur les corps convexes de \mathbb{R}^d .

Distance différence symétrique Une approche totalement différente de celle que nous avons choisie serait d'utiliser la distance *différence symétrique*, notée δ^S . Celle-ci est, après la distance de Hausdorff, une des plus fréquemment utilisées. Notons Δ l'opérateur de différence symétrique sur \mathcal{C} tel que $C\Delta D = (C \cup D) \setminus (C \cap D)$, et notons $\mu(A)$ le volume d'un ensemble A . Alors :

$$\delta^S(C, D) = \mu(C\Delta D)$$

A la différence de δ^H , la métrique δ^S est globale, en ce sens qu'une perturbation locale entraîne une modification de la distance, alors que la distance de Hausdorff étant définie par un maximum, une perturbation locale est généralement sans incidence sur la distance. Ces considérations et les propriétés spécifiques de la distance de Hausdorff font que nous ne nous intéresserons pas à la distance différence symétrique par la suite.

1.4 Géométrie différentielle

Le but n'est pas ici de donner un cours complet de géométrie différentielle, mais de rappeler les différentes notions utilisées dans ce travail, ainsi que certains choix de notations. Ce rapide tour d'horizon s'avère également nécessaire pour pouvoir ensuite définir la géométrie riemannienne en s'appuyant sur son ancêtre historique qu'est la géométrie différentielle. Le choix de présentation est également tourné vers la simplicité, au risque de perdre en généralité, voire en rigueur. Mais l'utilisation qui en sera faite par la suite ne fera pas appel à des objets complexes tels qu'espaces fibrés, tenseurs, etc., et de plus ces notions ne sont pas nécessaires à la perception intuitive de la géométrie différentielle. Le

lecteur pourra se référer avec profit à [Berger and Gostiaux 1987; Carmo 1976; Spivak 1979].

1.4.1 Surfaces de \mathbb{R}^3

Généralités

Avant tout, il est nécessaire de définir l'objet même de notre étude : la surface. Curieusement, cet objet est loin d'être mathématiquement évident, et, suivant le contexte, le mot de *surface* peut recouvrir bien des notions différentes. La définition choisie ici est tirée de [Berger and Gostiaux 1987] et constitue un compromis entre généralité et simplicité. Pour des raisons de convenance, nous noterons ici ψ les applications écrites φ dans ce livre.

Définition 1.4.1. On appelle *surface* de \mathbb{R}^3 , ou *sous-variété différentielle* de dimension 2 de \mathbb{R}^3 , un ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in S$, il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{R}^3 et un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^3 , ainsi qu'un difféomorphisme ψ :

$$\psi : U \rightarrow V \text{ tel que } \psi(U \cap S) = \psi(U) \cap \mathbb{R}^2 .$$

Si tous les difféomorphismes sont de classe \mathcal{C}^k , alors la surface est également dite de classe \mathcal{C}^k .

Cette définition a l'avantage d'exprimer simplement l'idée intuitive qui fonde le concept de 2-variété : c'est une réunion de petits ensembles qui peuvent chacun être ramenés "naturellement" dans un ouvert du plan. Cependant, on se ramènera souvent à une définition plus constructive mais plus générale :

Définition 1.4.2. Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . On appelle *atlas* de dimension 2 sur S une famille $\{\psi_i\}_{i \in I}$ d'applications et $\{U_i\}_{i \in I}$ de sous-ensembles de S vérifiant :

1. $S = \cup_{i \in I} U_i$
2. $\forall i \in I$, ψ_i est une bijection de U_i sur un ouvert $\psi_i(U_i)$ de \mathbb{R}^2 , et $\forall i, j \in I$, $\psi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
3. Si $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de $\psi_i(U_i \cap U_j)$ dans $\psi_j(U_i \cap U_j)$.

Si toutes les applications $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ sont des \mathcal{C}^k -difféomorphismes, alors la surface est dite de classe \mathcal{C}^k .

Définition 1.4.3. On appelle *variété abstraite* de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 un couple formé d'un sous-ensemble S de \mathbb{R}^3 et d'un atlas sur S .

En toute rigueur, la définition de variété abstraite repose non sur un atlas, mais sur une classe d'équivalence d'atlas par la relation de compatibilité, mais nous

n'entrerons pas ici dans les détails. Les applications $(\psi_i)_{i \in I}$ sont appelées dans [Berger and Gostiaux 1987] les cartes de cet atlas. Cependant, par la suite, **les cartes de S seront les applications $\varphi_i = \psi_i^{-1}$ définies sur un ouvert de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans S** . De plus, toute surface peut être décrite sous forme de variété de \mathbb{R}^3 (la réciproque est bien évidemment fautive) :

Proposition 1.4.4 ([Berger and Gostiaux 1987]). *Les sous-variétés de \mathbb{R}^3 sont des variétés de façon canonique.*

Une surface n'est donc pas, en toute rigueur, un simple sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . Cependant, on confondra souvent abusivement une surface et son image. Cette confusion n'est pas totalement erronée en ce sens que toutes les propriétés qui suivront ne dépendent pas de la paramétrisation choisie.

Le but de la notion de sous-variété est de garantir que localement une surface se comporte comme "un petit bout de plan". Une carte permet en effet de transporter les propriétés locales de \mathbb{R}^2 . Il existe d'autres types de surfaces, telles que les sous-variétés topologiques, pour lesquelles les cartes ne sont pas des difféomorphismes, et donc n'admettent pas nécessairement une différentielle injective. Les surfaces telles que définies en 1.4.1 ne présentent pas ce type de problème et sont dites régulières, au sens de la définition suivante :

Définition 1.4.5. Une *surface régulière* est une surface telle que pour chaque carte φ_i la différentielle de φ_i est de rang maximum en tout point, autrement dit $d\varphi_i$ est injective.

Une grande partie de la géométrie différentielle se déroule non sur la surface elle-même, mais sur son plan tangent en chaque point, qui a l'immense intérêt d'être un espace vectoriel. Nous ne nous étendrons pas sur sa définition, à la fois connue et intuitive.

Définition 1.4.6. Soit S une surface régulière et φ une de ses cartes. Le *plan tangent* à une surface S en un point $m = \varphi(u)$ de S est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathbb{T}_m S = d\varphi_u(\mathbb{R}^2)$$

où φ est une carte de S .

Dans certains cas, on sera amené à considérer le plan tangent affine qui est le translaté du plan tangent de sorte qu'il passe par m .

Définition 1.4.7. Soit S une surface et soit $m = \varphi(u)$ un point de S associé à la carte (φ, U) . Une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}^d$ est dite différentiable en m si la composée $f \circ \varphi$ l'est en u . Son *application tangente*, ou *différentielle* est alors

$$\begin{aligned} df_m : \mathbb{T}_m S &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ v &\mapsto d(f \circ \varphi)_u(d\varphi_u^{-1}(v)) . \end{aligned}$$

Grâce à cette définition, la différentiation devient une opération intrinsèque à S , ce qui ouvre de nouveaux horizons...

Courbures

Lors de l'étude locale d'une surface, le voisinage d'un point est l'image par une carte d'un ouvert de \mathbb{R}^2 . Il est donc naturel de chercher une approximation géométrique de premier ordre de cette surface à travers une approximation de premier ordre de la carte. Ce raisonnement conduit à la notion de tangence vu plus haut. Mais pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Un développement à l'ordre deux de la carte ne fournirait-il pas une approximation géométrique plus poussée de la surface ? La réponse est bien sûr positive, mais elle amène à introduire des objets moins intuitifs que précédemment. Après avoir survolé les définitions de surface et de tangence, nous nous attarderons maintenant sur différentes propriétés liées à la courbure d'une surface.

Pour présenter la courbure d'une surface, l'étude des courbes planes nous servira d'exemple de base à partir duquel nous extrapolerons. On commence donc par proposer deux définitions de la courbure dans le plan. Il sera par ailleurs fait usage de la terminologie du point mobile : il est souvent utile de se représenter un point parcourant la courbe, muni d'une certaine vitesse.

Courbure dans le plan Pour une courbe plane simple¹ \mathcal{C} , une carte est une application $\varphi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si la courbe est \mathcal{C}^2 , alors la formule de Taylor s'écrit :

$$\varphi(u+h) = \varphi(u) + h\varphi'(u) + \frac{h^2}{2}\varphi''(u) + o(h^2) . \quad (1.4.1)$$

En considérant $\varphi'(u)$ comme le vecteur directeur d'une droite, on construit $\mathbb{T}_u\mathcal{C} = \{h\varphi'(u); h \in \mathbb{R}\}$ qui est la tangente à \mathcal{C} en $m = \varphi(u)$. Il est immédiat que cette construction ne dépend pas de la paramétrisation de la carte, puisqu'une reparamétrisation ne change que la norme de ce vecteur, pas sa direction. On a donc obtenu une approximation de \mathcal{C} par une courbe algébrique du premier degré, *i.e.* une droite. Pour une approximation du deuxième ordre, il faut faire appel aux courbes du second degré, *i.e.* aux coniques. L'idée sous-jacente est que la courbure représente la vitesse à laquelle la courbe s'écarte de sa tangente. Pour un "petit déplacement" de longueur s le long de \mathcal{C} à partir de u , en approximation du premier ordre on se déplace d'une longueur s sur la tangente. Si l'on rajoute l'approximation du deuxième ordre, on s'écarte de cette tangente (orthogonalement) d'une distance qu'on notera $\frac{1}{2}\chi_m(s)$. Plus précisément, si l'on se place dans le repère de Frenet formé du vecteur tangent

¹Nous nous restreindrons aux sous-variétés de dimension 1 de \mathbb{R}^2 .

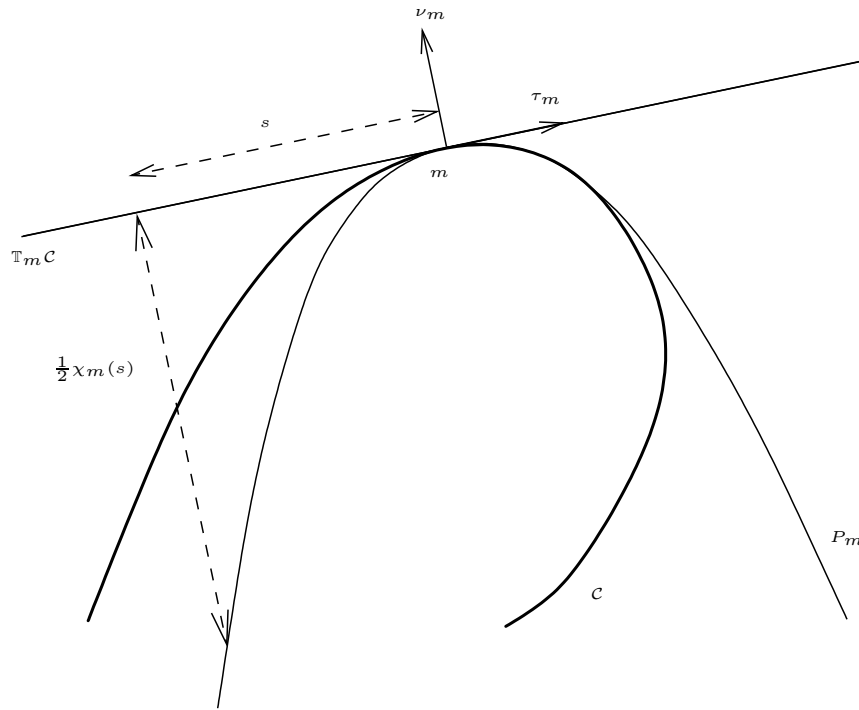


FIG. 1.5 – La courbure plane comme écart à la tangente

unitaire $\tau(u)$ et de la normale unitaire $\nu(u)$, la courbe \mathcal{C} est décrite dans cette base affine par :

$$\psi(u + s) = s\tau(u) + \frac{1}{2}\chi_m(s)\nu(u) + o(\|s\|^2) .$$

Un calcul technique nous montre qu'alors pour une paramétrisation quelconque :

$$\chi_m : s \mapsto \frac{s^2 \det(\varphi'(u), \varphi''(u))}{2 \|\varphi'(u)\|^3} .$$

En fait, cette opération revient à reparamétriser la courbe par abscisse curviligne ψ . En effet, on a alors $\|\psi'\| = 1$, donc $\tau = \psi'$, et ν a même direction² que ψ'' . Par suite,

$$\begin{aligned} \psi(s) &= s\psi' + \frac{s^2}{2}\psi''(u) + o(s^2) \\ &= s\tau + \frac{s^2}{2}\|\psi''(u)\|\nu + o(s^2) . \end{aligned}$$

L'expression $s \mapsto s\tau + \frac{s^2}{2}\|\psi''(u)\|\nu$ caractérise une parabole P_m que l'on appellera *parabole osculatrice* à \mathcal{C} en ce point³. Comme illustré sur la figure 1.5, la

²Cette paramétrisation est unique au sens de parcours près, et donc le sens de ψ'' par rapport à ν en dépend. On suppose ici pour simplifier que $\varphi'' \cdot \nu > 0$.

³Il est d'usage de considérer un cercle osculateur et non une parabole, mais si ces deux points de vue sont équivalents pour les courbes planes, les paraboles osculatrices se généraliseront plus facilement aux surfaces de \mathbb{R}^3 .

courbure peut se définir comme la forme quadratique

$$\chi_m : s \mapsto \|\psi''(u)\|s^2 .$$

Dans la pratique, on l'identifie au nombre $\|\psi''(u)\|$, mais il est essentiel de garder à l'esprit que derrière ce réel se trouve une forme quadratique qui est définie par rapport à l'espace tangent.

Une autre façon d'introduire la courbure plane est de se dire que puisque la tangente est associée à une approximation du premier ordre de la variation locale d'un point sur la courbe, la courbure sera associée à une approximation du premier ordre de la variation de la tangente. Si l'on décrit l'espace tangent par l'intermédiaire de sa normale unitaire ν ,

$$\nu : \mathcal{C} \rightarrow S^1$$

alors la courbure en m est la variation de cette normale :

$$\chi_m = d\nu_m : \mathbb{T}_m\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}_{\nu(m)}S^1 .$$

Puisque l'espace de départ de $\chi(m)$, comme l'espace d'arrivée, est isomorphe à \mathbb{R} , on peut considérer la courbure comme une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ou mieux, de $\mathbb{T}_m\mathcal{C}$ dans lui-même.

Dans l'espace Le procédé suivi pour obtenir une approximation géométrique d'ordre 2 d'une surface \mathcal{S} en un point m est très similaire. L'expression locale de la surface est identique à (1.4.1) à la différence près que h est ici un vecteur de \mathbb{R}^2 :

$$\varphi(u+h) = \varphi(u) + d\varphi_u(h) + \frac{1}{2}d^2\varphi_u(h,h) + o(\|h\|^2) . \quad (1.4.2)$$

Le premier ordre est donc caractérisé par $d\varphi_u$ dont l'image $d\varphi_u(\mathbb{R}^2)$ forme le plan tangent $\mathbb{T}_m\mathcal{S}$. De même que précédemment pour une courbe plane on se plaçait dans un repère local à m , on transporte désormais le repère dans lequel est décrit \mathcal{S} afin de ramener m à l'origine et le plan tangent à l'horizontale. Ce faisant, la généralité de la situation est conservée, mais l'écriture en est simplifiée. Pour un "petit déplacement" donné par un vecteur s de $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, on souhaite décrire la surface sous la forme :

$$\psi(u+s) = s + \frac{1}{2}\chi_u(s,s)\nu_u + o(\|s\|^2) .$$

Cette expression signifie que pour un déplacement (selon un vecteur s) dans le plan tangent, l'élévation de la surface par rapport à ce plan tangent est donnée par $\frac{1}{2}\chi_u(s,s)$. Si l'on reparamètre localement la surface par ψ de telle sorte que

$d\psi_u$ soit orthogonale, c'est-à-dire que $d\psi_u$ transforme une base orthonormée de \mathbb{R}^2 en une base orthonormée de $\mathbb{T}_m\mathcal{S}$, on s'aperçoit alors que

$$\chi_u(s, s) = d^2\psi_u .$$

L'expression $s \mapsto s + d^2\psi_u(s, s)\nu_u$ caractérise un paraboloïde P_m que l'on appellera *paraboloïde osculateur* à \mathcal{S} en m . La courbure est ainsi la forme quadratique

$$\chi_m : s \mapsto d^2\psi_u(s, s) .$$

Une deuxième façon de voir la courbure est, comme pour une courbe, de mesurer la variation de la normale

$$\nu : \mathcal{S} \rightarrow S^2 .$$

Cette application est appelée *application de Gauss*. La courbure est alors définie, à l'aide de la notion de différentielle sur une surface vue en 1.4.7, comme la forme quadratique associée à la différentielle de l'application de Gauss. Pour cela, on introduit l'application tangente de ν :

$$d\nu_m : \mathbb{T}_m\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{T}_mS^2 .$$

En identifiant \mathbb{T}_mS^2 et $\mathbb{T}_m\mathcal{S}$, et en notant par “.” le produit scalaire canonique, on peut alors définir la variation de la normale ainsi :

$$\begin{aligned} \chi_m : \mathbb{T}_m\mathcal{S} \times \mathbb{T}_m\mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{T}_mS^2 \\ (s_1, s_2) &\mapsto s_1 \cdot d\nu_m(s_2) . \end{aligned}$$

Cette forme quadratique de dimension 2 peut se diagonaliser. Donc dans une base (e_1, e_2) bien choisie de $\mathbb{T}_m\mathcal{S}$, l'application $d\nu$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} .$$

Les vecteurs e_i sont dits *directions principales* en m et les réels k_i *courbures principales*. Le déterminant de cette matrice, $K_m = k_1k_2$ est la *courbure de Gauss*. Parmi les innombrables propriétés faisant intervenir ces notions, on citera :

– Si $K_m > 0$, alors la surface est localement convexe en m , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de m qui soit inclus dans le bord d'un convexe.

– (Théorème d'Euler) Si la tangente à une courbe tracée sur la surface fait un angle θ avec la direction principale e_1 , alors la courbure de la courbe en ce point vaut $k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta)$.

Enfin, même si ce document n'en fera pas usage, il serait dommage de passer sous silence le remarquable⁴ théorème :

Si deux surfaces de classe \mathcal{C}^3 sont isométriques, alors elles ont même courbure de Gauss.

⁴Theorema egregium, dixit son propre auteur

1.4.2 Dimensions supérieures

Tout ce qui a été vu dans \mathbb{R}^3 se généralise sans difficulté (mis à part la lourdeur des notations) aux dimensions supérieures. Ainsi une hypersurface sera définie comme suit :

Définition 1.4.8. On appellera *hypersurface* de \mathbb{R}^d une *sous-variété différentiable* de dimension $d-1$ de \mathbb{R}^d , c'est-à-dire un ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in S$, il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{R}^d et un voisinage ouvert V de 0 dans \mathbb{R}^d , ainsi qu'un difféomorphisme φ :

$$\varphi : U \rightarrow V \text{ tel que } \varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^{d-1} .$$

Si tous les difféomorphismes sont de classe \mathcal{C}^k , alors cette hypersurface est également dite de classe \mathcal{C}^k .

L'hyperplan tangent est alors un espace vectoriel de dimension $d-1$, et l'application de Gauss est à valeurs dans S^{d-1} . On voit donc se profiler une courbure qui est désormais une forme quadratique de dimension $d-1$, et donc en chaque point de la surface, il existe $d-1$ directions principales avec leurs courbures principales associées. L'approximation géométrique d'ordre 2 de la surface est un parabolôïde caractérisé par cette forme quadratique. La courbure de Gauss reste par définition le produit des courbures principales .

1.5 Géométrie riemannienne

Cette partie vise à introduire la notion de *surface S munie de la métrique riemannienne induite par la seconde forme fondamentale*, dans le cas où cette seconde forme fondamentale est définie strictement positive. Cette notion est en effet particulièrement adaptée au problème d'approximation polyédrique. Cette présentation est volontairement succincte et repose sur l'analogie avec la géométrie différentielle classique. De plus, ce texte se restreint aux surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 et même plus exactement aux surfaces de \mathbb{R}^3 que l'on munit d'une certaine structure riemannienne. De même que la géométrie différentielle des surfaces de \mathbb{R}^3 se généralise aux sous-variétés de dimension k de \mathbb{R}^d , toutes les notions introduites ici s'expriment de manière similaire en dimension plus élevée. Le livre [Carmo 1993] contient une étude plus complète et plus précise.

1.5.1 Surface et métrique riemannienne

Comme souvent, le principe est simple, mais son exploitation riche de complexités. Pour illustrer le concept de surface riemannienne, considérons l'exemple non-mathématique suivant : un individu souhaite faire une randonnée en mon-

tagne d'un point à un autre, sans passer par les chemins. Le relief de la montagne définit une surface que l'on peut supposer lisse, et la distance entre ces deux points a alors un sens précis. Il existe d'ailleurs au moins un plus court chemin. Par contre, cette notion de distance ne prend pas en compte la praticabilité du chemin. Un modèle plus réaliste serait de pénaliser le passage par des terrains marécageux, des pierriers, des traversées de lac... La distance serait ainsi en quelque sorte proportionnelle au temps de parcours. Pour définir une telle distance, il faut donc donner localement une évaluation de la praticabilité. Une surface riemannienne permet cela, puisqu'elle permet de définir en chaque point la facilité à se déplacer dans une direction donnée⁵.

On définit ainsi une variété riemannienne plongée dans \mathbb{R}^3 comme la donnée d'une surface, *i.e.* d'une sous-variété différentiable de dimension 2, munie continûment d'une 2-forme quadratique définie positive en chaque point. Nous nous restreindrons à des surfaces riemanniennes dont les cartes soient de classe \mathcal{C}^2 .

Définition 1.5.1. On appellera *surface riemannienne* de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^3 le couple (S, ξ) formé d'une *sous-variété différentiable* S de dimension 2 de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{R}^3 et d'une application continue ξ qui à tout point m de S associe une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{T}_m S$. ξ_m sera appelée *produit scalaire* en m .

Donc toute surface de classe \mathcal{C}^2 peut être considérée comme une surface riemannienne de dimension 2, par exemple en considérant les restrictions du produit scalaire de \mathbb{R}^3 aux plans tangents.

On distinguera deux approches pour munir une surface de \mathbb{R}^3 d'une structure de surface riemannienne. Cette surface riemannienne n'est alors en général pas plongeable dans \mathbb{R}^3 .

– L'une consiste à se donner un atlas de la surface (donc en particulier un ensemble de cartes) et à associer à chaque "paramétrisation locale"

$$\varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

une application continue

$$g_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow SO_2$$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(z) & c(z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } ac - b^2 > 0 .$$

L'application g_i détermine un produit scalaire en tout point z du domaine D_i par $\langle u, v \rangle = u^T g_i(z) v$.

⁵Cet exemple peut donner une idée de la géométrie riemannienne, mais il présente de nombreux défauts. Par exemple, des problèmes de continuité, ou le fait que le sens de parcours d'un trajet ait une influence.

– L’autre approche est de se représenter la surface de \mathbb{R}^3 (sans en expliciter un atlas) où chaque plan tangent serait muni de son propre produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

En notant $\|\cdot\|_T$ la norme associée au produit scalaire, on peut alors généraliser la notion classique de distance sur la surface S :

$$d_I(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \|f'(t)\|_T dt ; f : [0, 1] \rightarrow S \text{ tel que } f(0) = A \text{ et } f(1) = B \right\} \quad (1.5.1)$$

En fait, on a simplement remplacé dans la définition “classique” de la distance la norme canonique de \mathbb{R}^3 par la norme locale au plan tangent. Cette distance est parfois appelée distance géodésique car elle est portée par des géodésiques, courbes particulières que nous ne définirons pas ici.

Dans la suite de ce chapitre, **toutes les surfaces seront strictement convexes**. Seules deux métriques particulières sur ces surfaces de \mathbb{R}^3 présentent à nos yeux un intérêt particulier : celles des deux formes fondamentales. Nous allons donc les passer en revue.

1.5.2 La première forme fondamentale

La première forme fondamentale en un point m correspond à la restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^3 à $\mathbb{T}_m S$, le plan tangent à S en ce point. Plus précisément, si $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation locale de la surface telle que $m = h(0, 0) = (0, 0, z)$, et ψ l’isomorphisme canonique de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{T}_m S$, on définit cette forme dans l’espace des paramètres

$$I : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto \langle \psi(u), \psi(v) \rangle = u^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} v$$

où $E = \langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \rangle$, $F = \langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle$, $G = \langle \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y} \rangle$.

Si l’on définit I sur l’espace tangent :

$$I : \mathbb{T}_m S \times \mathbb{T}_m S \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto u.v = u^T v .$$

Lorsque l’on souhaitera explicitement distinguer la première forme fondamentale du produit scalaire canonique, celle-ci sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$.

Métrique associée Ce produit scalaire définit sur le plan tangent une norme $\|\cdot\|_I$ qui n’est autre que la norme usuelle. La forme I est une donnée intrinsèque de la surface, c’est-à-dire invariante par isométrie, et la distance sur la surface

associée à une telle forme est par définition

$$d_I(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \|f'(t)\|_I dt ; f : [0, 1] \rightarrow S \text{ tel que } f(0) = A \text{ et } f(1) = B \right\} \quad (1.5.2)$$

Pour la norme associée à cette première forme fondamentale, le cercle unité du plan tangent en m est tout simplement l'intersection de la sphère unité de \mathbb{R}^3 centrée en m par translation et de ce plan. En particulier, $\|f'(t)\|_I = \|f'(t)\|$. Donc la longueur au sens de d_I d'une courbe tracée sur S coïncide avec la longueur euclidienne dans \mathbb{R}^3 de cette courbe. On en déduit que $d_I(A, B)$ correspond à la longueur du plus court chemin sur S pour la distance usuelle de \mathbb{R}^3 . C'est ainsi la distance naturelle sur une surface différentiable de \mathbb{R}^3 .

1.5.3 La seconde forme fondamentale

La seconde forme fondamentale se définit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} II : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle dh(\psi(u)), \psi(v) \rangle_I \\ &= u^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

où E, F, G sont donnés ci-dessus, et $L = \langle \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \nu \rangle$, $M = \langle \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \nu \rangle$, $N = \langle \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \nu \rangle$.

Sur l'espace tangent, on a :

$$\begin{aligned} II : \mathbb{T}_m S \times \mathbb{T}_m S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle df(u), v \rangle_I . \end{aligned}$$

On rappelle que S est le bord d'un convexe strict. Alors cette forme quadratique est strictement positive et elle induit un produit scalaire, et donc une norme, sur le plan tangent. Ainsi, le cercle unité pour cette norme sur chaque plan tangent est une ellipse dont les axes sont les directions principales de la surface en son point de contact. Les dimensions de cette ellipse sont les racines carrées des rayons de courbure principaux. Dans le cas général, autrement dit que la surface soit strictement convexe ou non, cette conique est appelée *indicatrice de Dupin*.

De façon plus détaillée, la norme II sur le plan tangent peut s'interpréter géométriquement de la façon suivante : on munit \mathbb{R}^3 du repère orthonormé induit par les directions principales et on écrit localement l'équation de la surface sous la forme $\{(u, v, z(u, v))\}$. On pose ε un petit réel positif et $\mathbb{T}_m S$ le plan tangent à S en m . On notera parfois pour simplifier $p = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On écrit ensuite le

développement de Taylor de z à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} z(u, v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} u^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} uv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} v^2 + o(u^2 + v^2) \\ &= \frac{1}{2} II(p, p) + o(u^2 + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \|p\|_H^2 + o(\|p\|_H^2) . \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Donc si l'on introduit $T_{m,\varepsilon} = \mathbb{T}_m S - \varepsilon \nu(m)$, le translaté de $\mathbb{T}_m S$ le long de la normale, ce plan rencontre la surface selon la courbe fermée

$$\mathcal{C}_{m,\varepsilon} = \{(x, y, \varepsilon) \mid z(x, y) = \varepsilon\}$$

et donc

$$\mathcal{C}_{m,\varepsilon} = \{(p, \varepsilon) \text{ tel que } \|p\|_H^2 = 2\varepsilon + \eta(p)\} .$$

où $\eta(p) = o(\|p\|_H^2)$ est défini d'après (1.5.3). On obtient donc que les points du plan tangent $\mathbb{T}_m S$ à distance ε de m pour la distance d_H sont *asymptotiquement* les projetés orthogonaux de $\mathcal{C}_{m,\varepsilon^2/2}$ sur $\mathbb{T}_m S$, *i.e.* les projetés orthogonaux de l'intersection de la surface avec $T_{m,\varepsilon^2/2}$. En fait, ce sont exactement les projetés de l'intersection de $T_{m,\varepsilon^2/2}$ avec le paraboloïde osculateur de S en m .

La construction de l'indicatrice de Dupin dilatée d'un facteur ε par l'intersection du paraboloïde osculateur et du plan tangent translaté de $\varepsilon^2/2$ est fondamentale, puisqu'elle relie la norme II à l'approximation locale de la surface par un plan. Il est donc clair que l'approximation d'un convexe suffisamment lisse par un polytope sera en partie décrite par la seconde forme fondamentale sur le bord du convexe.

MÉTRIQUE ASSOCIÉE :

De même que pour la première forme fondamentale, l'expression (1.5.1) définit une distance associée à II sur la surface

$$d_H(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \|f'(t)\|_H dt ; f : [0, 1] \rightarrow S \text{ tel que } f(0) = A \text{ et } f(1) = B \right\}$$

Cette distance est différente de la distance usuelle d_I puisque les plans tangents sont normés différemment. En effet :

$$\begin{aligned} \|f'(t)\|_H &= \sqrt{II(f'(t), f'(t))} \\ &= \left[f'(t)^T P^T \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} P f'(t) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[(P f'(t))^T \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} (P f'(t)) \right]^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

où P est la matrice orthogonale de la rotation qui transforme le repère du plan tangent en ses directions principales (e_1, e_2) .

Donc

$$\|f'(t)\|_H = [k_1 \langle f'(t), e_1 \rangle^2 + k_2 \langle f'(t), e_2 \rangle^2]^{\frac{1}{2}} .$$

On utilise alors la formule d'Euler qui affirme que pour un vecteur v faisant un angle θ avec la première direction principale, la courbure normale selon cette direction vaut :

$$k_v = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta) , \quad (1.5.4)$$

d'où l'on déduit

$$\|f'(t)\|_H = \sqrt{k_{f'(t)}} \|f'(t)\| . \quad (1.5.5)$$

En notant toujours $k_{f'(t)}$ la courbure normale au point $f(t)$ selon la direction $f'(t)$, on en déduit une nouvelle expression de la distance associée à la deuxième forme fondamentale :

$$d_{II}(A, B) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{k_{f'(t)}} \|f'(t)\| dt ; \right. \\ \left. f : [0, 1] \rightarrow S \text{ tel que } f(0) = A \text{ et } f(1) = B \right\} .$$

Remarques :

1. Si l'on considère les métriques I et II sur une sphère de rayon R , on obtient

$$d_{II} = \frac{1}{\sqrt{R}} d_I . \quad (1.5.6)$$

Autrement dit, ces deux métriques riemanniennes sont, à un facteur près, identiques.

2. Plus généralement, en notant l la longueur euclidienne d'une courbe et l_R sa longueur au sens de d_{II} , on remarquera que l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à (1.5.3) donne :

$$l_R \leq \sqrt{2\pi} l . \quad (1.5.7)$$

Chapitre 2

Approximation asymptotique des convexes par des polytopes

El original dice *catorce*, pero sobran motivos para inferir que, en el boca de Asterión, ese adjetivo numeral vale por *infinitos*.

Jorge Luis Borges. *La casa de Asterión*.

Résumé

Ce chapitre est centré sur l'étude du comportement asymptotique de l'approximation des convexes (en particulier des convexes à bord \mathcal{C}^2) par des polytopes. Après avoir présenté les principaux résultats dans ce domaine, nous introduirons certains des outils qui ont participé à ces travaux, comme la dispersion et le recouvrement par des disques du bord d'un convexe muni d'une structure riemannienne spécifique. Cette étude asymptotique, mal maîtrisée en dimension supérieure à 3, est par contre bien connue dans le plan, et nous en ferons l'illustration. Enfin, nous proposons deux apports personnels, le premier reliant dispersion et triangulation de Delaunay sur une surface, le second transformant un polytope d'approximation de S^d en un polytope approchant $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ donné.

Sommaire

2.1	Comportement asymptotique	39
	Irrégularité de l'approximation	42
	Convexes non lisses	42
2.2	Dispersion et triangulation de Delaunay	43
2.2.1	Définition	43
2.2.2	Évaluation locale	43
2.3	Recouvrement par des disques et problème de Tammes	45
2.4	Application directe	47
2.4.1	Convexes plans	47
2.4.2	Échantillonnage d'une paramétrisation	52
2.4.3	De l'approximation de la sphère S^d à un convexe lisse	54
	Dans \mathbb{R}^2	55
	Dans \mathbb{R}^d	55

2.1 Comportement asymptotique

Dans cette section, on s'attachera à présenter un équivalent, quand le nombre n de sommets tend vers l'infini, de la distance de Hausdorff d'un convexe à sa meilleure approximation polytopiale ; autrement dit, à donner un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$ de $\delta^H(C, \mathcal{P}_n)$, où $C \in \mathcal{C}$ est fixé, et \mathcal{P}_n est l'ensemble des polytopes à n sommets. Le terme $\delta^H(C, \mathcal{P}_n)$ représente donc la distance de Hausdorff entre le corps convexe C et un polytope de meilleure approximation à n sommets.

On notera par la suite μ , respectivement σ , la mesure de volume, respectivement d'aire, habituelle sur \mathbb{R}^d .

Une première propriété établit dans [Gruber 1983] le lien entre approximation par des polytopes inscrits et par des polytopes circonscrits dans le cadre de δ^H , et permet de restreindre l'étude au cas des polytopes inscrits. On rappelle (voir 1.1) que \mathcal{P}_n est l'ensemble des polytopes à n sommets, et on note $\mathcal{P}_{(n)}$ les polytopes à au plus n faces, et que \mathcal{P}^i désigne les polytopes inscrits dans C , tandis que \mathcal{P}^c désigne les polytopes circonscrits.

Proposition 2.1.1. *Pour tout $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1$ et pour $n \rightarrow +\infty$, on a :*

$$\begin{aligned} \delta^H(C, \mathcal{P}_n^i) &\sim \delta^H(C, \mathcal{P}_n^c) \sim 2 \delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \dots \\ \dots \sim \delta^H(C, \mathcal{P}_{(n)}^i) &\sim \delta^H(C, \mathcal{P}_{(n)}^c) \sim 2 \delta^H(C, \mathcal{P}_{(n)}) . \end{aligned}$$

Ainsi, considérer des polytopes à n faces ou à n sommets ne changera pas la qualité de l'approximation, et les polytopes inscrits et circonscrits s'approchent avec une efficacité équivalente d'un convexe \mathcal{C}^1 , cette vitesse de convergence étant deux fois plus faible que pour un polytope quelconque (non nécessairement inscrit ni circonscrit).

Et l'on obtient finalement le théorème fondamental :

Théorème 2.1.2 ([Gruber 1993b]). *Soit $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ de courbure de Gauss κ_C . Alors pour $n \rightarrow +\infty$*

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} \sqrt{\kappa_C(x)} d\sigma(x) \right)^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}}$$

où θ_{d-1} représente la densité minimale de recouvrement de \mathbb{R}^{d-1} par des boules unité (donc $\theta_{d-1} > 1$) et $\kappa_{d-1} = \mu(B^{d-1})$ est le d -volume de la boule unité de \mathbb{R}^{d-1} .

Cette formule a été proposée il y a de cela un demi-siècle par [Toth 1948]

pour $d \in \{2, 3\}$, avant d'être prouvée par [Schneider and Wieacker 1981] pour $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^3$ tel que $\kappa_C > 0$ et finalement démontrée sous sa forme actuelle par [Gruber 1993b].

Idée de la preuve : Pour une preuve détaillée, le lecteur pourra se reporter à [Gruber 1993b]. L'idée est d'établir l'équivalence entre les polytopes inscrits de meilleure approximation asymptotique de C et les recouvrements de plus faible densité du bord de C par des disques géodésiques de même rayon.

La première implication dans cette équivalence découle de la propriété :

Soit P un polytope inscrit dans le corps convexe C . Alors les disques géodésiques centrés en les sommets de P et de même rayon $\sqrt{2 \delta^H(C, P)}$ recouvrent le bord de C .

Réciproquement :

Soit $x_1, \dots, x_n \in \partial C$ et $\varepsilon > 0$ tels que les disques géodésiques de centres x_1, \dots, x_n et de rayon ε recouvrent le bord de C . Alors $\delta^H(C, P) \leq \varepsilon^2/2$ où P est l'enveloppe convexe de $\{x_1, \dots, x_n\}$.

On montre alors que la densité de recouvrement de ∂C pour un grand nombre de petits disques tend vers la densité θ_{d-1} de recouvrement de \mathbb{R}^{d-1} , ce qui se traduit par :

$$\frac{n \times \text{aire d'un disque}}{\text{aire de } \partial C} \sim \frac{n \varepsilon^{d-1} \kappa_{d-1}}{\text{aire de } \partial C} \sim \theta_{d-1} ,$$

d'où

$$\varepsilon^2 \sim \left(\frac{\theta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} (\text{aire de } \partial C) \right)^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}} .$$

Ce qui donne l'expression du théorème car $2 \delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \delta^H(C, \mathcal{P}_n^i)$. □

Remarques :

1. De cet équivalent de $\delta^H(C, \mathcal{P}_n)$ pour n tendant vers l'infini peut se déduire une expression dans laquelle la variable n'est plus le nombre de sommets mais l'erreur d'approximation. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$ donné, on définit $n(\varepsilon)$ comme étant le plus petit entier tel que $\delta^H(C, \mathcal{P}_{n(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. Pour simplifier l'écriture, posons

$$K = \frac{\theta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} \sqrt{\kappa_C(x)} d\sigma(x) .$$

Alors pour ε tendant vers 0,

$$n(\varepsilon) \sim K \left(\frac{1}{4\varepsilon} \right)^{(d-1)/2} . \tag{2.1.1}$$

En effet, il suffit de prouver que pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, la limite de $n(\varepsilon_k) \varepsilon_k^{(d-1)/2}$ existe et vaut $\frac{K}{2^{d-1}}$. Rappelons que, par construction, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_{n(\varepsilon)}) \leq \varepsilon < \delta^H(C, \mathcal{P}_{n(\varepsilon)-1}) . \quad (2.1.2)$$

Or quand ε_k tend vers 0, on a nécessairement que $n(\varepsilon_k)$ tend vers $+\infty$. Alors le théorème précédent implique que pour k tendant vers $+\infty$

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_{n(\varepsilon_k)})^{(d-1)/2} \sim \frac{K}{2^{d-1}} \frac{1}{n(\varepsilon_k)} .$$

Et donc on déduit de (2.1.2) que pour k tendant vers $+\infty$

$$\varepsilon_k^{(d-1)/2} \sim \frac{K}{2^{d-1}} \frac{1}{n(\varepsilon_k)} ,$$

ce qui prouve bien que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} n(\varepsilon_k) \varepsilon_k^{(d-1)/2} = \frac{K}{2^{d-1}} .$$

2. Une conséquence immédiate de ce théorème en notant $\chi(C)$ la caractéristique d'Euler de C et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz est l'expression suivante :

$$\left(\int_{\partial C} \kappa_C^{1/2} d\sigma \right)^2 \leq \int_{\partial C} \kappa_C d\sigma \int_{\partial C} d\sigma = 2\pi \chi(\partial C) \sigma(\partial C)$$

Aussi parmi tous les convexes de bord \mathcal{C}^2 et d'aire fixée, la convergence de \mathcal{P}_n est la plus lente pour un convexe C à courbure constante, autrement dit que les sphères sont les convexes lisses les plus "problématiques" pour l'approximation par des polytopes.

3. Le problème que pose l'expression 2.1.2 est que la constante θ_d n'est connue que pour $d \in \{1, 2, 3\}$. Dans le plan, le recouvrement optimal se construit par le pavage périodique des hexagones réguliers inscrits dans les disques. On obtient alors $\theta_1 = 1$, $\kappa_1 = 1$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, $\kappa_2 = \pi$. Depuis [Hales 1997a,b] ces constantes sont également connues pour $d = 3$.
4. On remarquera enfin que la démonstration établit un parallèle entre les recouvrements par des disques géodésiques et les polytopes approximatifs. On peut par exemple envisager d'appliquer des algorithmes du type de Bubble-Mesh [Kenji Shimada and Takayuki 1997; Colin de Verdière 1991] pour construire des polyèdres d'approximation des convexes de \mathbb{R}^3 . Des résultats théoriques sur ce thème font l'objet de [Gruber 1998].

Irrégularité de l'approximation

Une proposition démontrée par P.M. Gruber et P. Kenderov dans [Gruber and Kenderov 1982] montre que le cas des convexes de bord \mathcal{C}^2 est une exception : pour presque tout convexe, on ne peut espérer trouver un équivalent de $\delta^H(C, \mathcal{P}_n)$ puisque cette distance oscille avec n . Ce résultat peut se formuler de la manière suivante :

Théorème 2.1.3 ([Gruber and Kenderov 1982]). *Si $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que $0 < f(n) < g(n) = o(\frac{1}{n^{2/(d-1)}})$. Alors pour presque tout corps convexe C et pour $\mathcal{Q}_n \in \{\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n^i, \mathcal{P}_n^c\}$*

$$\begin{aligned} \delta^H(C, \mathcal{Q}_n) &< f(n) && \text{pour une infinité de } n \\ \delta^H(C, \mathcal{Q}_n) &> g(n) && \text{pour une infinité de } n \end{aligned}$$

La mesure utilisée sur \mathcal{C} ainsi que la preuve se trouvent dans [Gruber and Kenderov 1982]. Ce théorème est également lié à un résultat qui semble très naturel, à savoir que les corps convexes \mathcal{C}^2 sont plus difficilement approximables que la majorité des convexes dont le bord n'est pas lisse, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Convexes non lisses

De tous les convexes, les convexes lisses sont les plus difficiles à approcher par des polytopes [Schneider and Wieacker 1981]. En effet, alors que pour $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$, le comportement asymptotique est connu et régulier :

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) = \Theta\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}}\right).$$

Mais si on ne suppose plus que le bord du convexe est lisse, alors la convergence peut être irrégulière, au sens du résultat précédent. Cependant elle sera au pire de même ordre, comme le prouve le résultat suivant :

Théorème 2.1.4 ([Schneider and Wieacker 1981]). *Soit C un corps convexe de \mathbb{R}^d .*

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) = O\left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}}\right)$$

pour d fixé et $n \rightarrow +\infty$.

2.2 Dispersion et triangulation de Delaunay

2.2.1 Définition

Soit C un corps strictement convexe de \mathbb{R}^3 dont le bord S est de classe \mathcal{C}^2 . Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ des points sur cette surface. On construit alors un polyèdre inscrit et un polyèdre circonscrit à C par :

$$P^i\{x_1, \dots, x_n\} = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_n\}) ,$$

$$P^c\{x_1, \dots, x_n\} = H_C^+(x_1) \cap \dots \cap H_C^+(x_n) ,$$

où $H_C^+(x)$ est le demi-espace fermé contenant C et de frontière le plan tangent à C en x .

Puisque C est strictement convexe, la courbure de Gauss est strictement positive en tout point de S , et on peut donc munir S de la métrique d_H induite par la seconde forme fondamentale.

[Gruber 1993a] introduit alors la notion de dispersion :

Définition 2.2.1. On appelle *dispersion* sur S des points $\{x_1, \dots, x_n\}$ appartenant à S le nombre

$$\begin{aligned} \text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} &= \inf \{ \lambda > 0 \mid S \subset B_{d_H}(x_1, \lambda) \cup \dots \cup B_{d_H}(x_n, \lambda) \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 \mid \forall y \in S, d_H(y, \{x_1, \dots, x_n\}) < \lambda \} . \end{aligned}$$

On rappelle que d_H désigne la distance sur S induite par la deuxième forme fondamentale.

Cette dispersion se rattache à l'approximation des convexes par des polytopes.



Théorème 2.2.2. Si $\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors

$$\delta^H(C, P^i\{x_1, \dots, x_n\}) \sim \delta^H(C, P^c\{x_1, \dots, x_n\}) \sim \frac{1}{2}(\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\})^2 .$$

2.2.2 Évaluation locale

Nous nous proposons ici de relier la notion de dispersion définie ci-dessus à celle de triangulation de Delaunay sur une surface. Une telle triangulation est définie de manière similaire au cas euclidien : une triangulation est de Delaunay si pour tout simplexe un disque géodésique englobant de rayon minimal ne contient aucun sommet de la triangulation en son intérieur. Cette propriété caractéristique est dite *propriété du cercle vide*. La difficulté est qu'ici ce disque englobant n'est

pas nécessairement unique. Il existe cependant des algorithmes de construction d'une telle triangulation sur une surface riemannienne. Dans [Borouchaki and George 1996; Chen and Bishop 1997; Kenji Shimada and Takayuki 1997] la convergence de ces algorithmes vers une triangulation de Delaunay n'est pas prouvée, et l'accent est plutôt porté sur les résultats expérimentaux. Par contre, [Leibon and Letscher 2000] ont prouvé l'existence sous certaines conditions de cette triangulation et ont proposé et implémenté un tel algorithme.

On cherche donc à évaluer la dispersion associée à $\{x_1, \dots, x_n\}$, un ensemble de points de S donnés; plus précisément, on désire obtenir une évaluation locale de la dispersion. L'idée est de considérer une triangulation \mathcal{T} de $\{x_1, \dots, x_n\}$ sur la surface S basée sur les points $\{x_1, \dots, x_n\}$, et d'exprimer la dispersion en fonction d'une quantité associée à chaque triangle T de \mathcal{T} . En effet, la dispersion peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} &= \inf \{ \lambda > 0 \mid \forall (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in \mathcal{T}, \\ &\quad \forall y \in (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), d_{II}(y, \{x_1, \dots, x_n\}) < \lambda \} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 \mid \forall T \in \mathcal{T}, \forall y \in T, d_{II}(y, \{x_1, \dots, x_n\}) < \lambda \} . \end{aligned}$$

Si on définit la notion d'écart à $\{x_1, \dots, x_n\}$ par $ec(y) = d_{II}(y, \{x_1, \dots, x_n\})$, alors

$$\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} = \inf \{ \lambda > 0 \mid \forall T \in \mathcal{T}, \forall y \in T, ec(y) < \lambda \} .$$

Sur chaque triangle T , la fonction $y \mapsto ec(y)$ atteint son maximum car T est compact. Donc

$$\forall T \in \mathcal{T}, \exists m_T / \forall y \in T, ec(y) \leq ec(m_T) .$$

Autrement dit, sur tout triangle T , il existe un point à distance maximale des $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Or parmi les faces de \mathcal{T} , une face T_0 réalise le maximum des $ec(m_T)$, donc

$$\exists T_0 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}, \exists y_0 = m_{T_0} \in T_0 \text{ tel que } \forall y \in S : ec(y) \leq ec(y_0) .$$

On voudrait donc que l'écart en ce point y_0 ne dépende que de la face T_0 , et donc que

$$ec(y_0) = d_{II}(y_0, \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}) .$$

Mais cette condition n'est vérifiée que si T_0 vérifie la propriété du cercle vide (un cercle désigne le bord d'un disque mesuré pour la métrique de la surface, c'est-à-dire un disque géodésique). Auquel cas y_0 est le centre du cercle circonscrit¹ à T_0 . Ainsi si \mathcal{T} est une triangulation de Delaunay, la dispersion vaut :

$$\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} = \sup \{ r_T \mid T \in \mathcal{T}, r_T \text{ rayon du cercle circonscrit à } T \} .$$

¹En réalité, ce centre d'un cercle sur une surface riemannienne n'est pas nécessairement unique. Cependant, le bord d'un convexe muni de d_{II} est localement convexe (au sens de la géométrie riemannienne : unicité locale du plus court chemin), et donc pour des triangles "suffisamment petits" l'unicité est garantie.

Or [Leibon and Letscher 2000] a prouvé que si tout point de S est suffisamment proche d'un des points $\{x_1, \dots, x_n\}$ (suivant un critère qui dépend de la surface), alors une triangulation de Delaunay de $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans S existe. Autrement dit, pour une surface riemannienne donnée, il existe un réel positif ρ tel que si l'union des disques géodésiques de rayon ρ et de centres $\{x_1, \dots, x_n\}$ recouvrent la surface, alors l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$ admet une triangulation de Delaunay. En considérant le bord d'un corps strictement convexe muni de la distance riemannienne associée à la deuxième forme fondamentale, on en déduit que si la dispersion est suffisamment petite, une triangulation de Delaunay existe. Plus précisément, on a donc montré le résultat suivant :

Théorème 2.2.3. *Si $\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors $\{x_1, \dots, x_n\}$ admet une triangulation de Delaunay \mathcal{T} dans S pour n assez grand et*

$$\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} = \sup \{r_T \mid T \in \mathcal{T}, r_T \text{ rayon minimal des disques géodésiques contenant } T\}.$$

Remarque : Si \mathcal{T} n'est pas de Delaunay, alors

$$\text{disp}_S\{x_1, \dots, x_n\} \leq \sup \{r_T \mid T \in \mathcal{T}, r_T \text{ rayon du cercle circonscrit à } T\} \tag{2.2.1}$$

mais cette majoration n'est dans ce cas pas nécessairement optimale.

2.3 Recouvrement par des disques et problème de Tammes

On considère toujours un corps convexe C de \mathbb{R}^3 dont le bord S est de classe \mathcal{C}^2 . Contrairement à la situation sur S^2 , la distance d_H induite par la seconde forme fondamentale sur S n'est pas identique à la distance euclidienne.

Théorème 2.3.1. *Pour un tel corps convexe, construire un recouvrement de S par n disques géodésiques pour la métrique d_H de même rayon asymptotiquement minimal est équivalent à construire un polyèdre inscrit dans C de meilleure approximation asymptotique pour δ^H . Les centres des disques correspondent alors aux sommets du polyèdre.*

Preuve :

La preuve se trouve dans [Gruber 1983]. Cette construction est simplement le placement des n points $\{x_1, \dots, x_n\}$ de manière à minimiser leur dispersion. Dans le premier cas, ces points représentent le centre des disques géodésiques, et dans le second cas, les sommets du polyèdre. □

Mais le cas où C est une sphère, en particulier pour $C = S^2$, est intéressant, car on peut alors chercher à relier les trois problèmes classiques suivants :

1. Comment construire un polyèdre inscrit dans S^2 à n sommets approchant asymptotiquement au mieux S^2 ?
2. *Recouvrement par des disques* : comment placer n disques de même rayon minimal sur la sphère de manière à ce qu'ils recouvrent le bord de S^2 ? *i.e.* Comment réaliser le $\min \max_{x \in S^2} d(x, \{x_1, \dots, x_n\})$?
3. *Problème de Tammes* : comment placer n points sur S^2 afin de maximiser le minimum des distances d'un point à l'autre ? Cette question peut aussi se poser sous la forme : comment placer n cercles de même rayon maximal sur la sphère sans que ceux-ci se chevauchent ? *i.e.* Comment réaliser le $\max \min_{i \neq j} d(x_i, x_j)$?

Le problème de Tammes, posé en 1930 par le botaniste M. Tammes a été très étudié sous des noms divers : placement de cercles sur la sphère, “packing points on the sphere”, etc. Parmi les articles en proposant un tour d’horizon, [Berger 1992b] propose une approche historique et complète mais techniquement peu détaillée. On pourra aussi se référer à [O’Rourke 1997a; Saff and Kuijlaars 1997] pour davantage de précisions.

Puisque la distance induite par la deuxième forme fondamentale est proportionnelle à la distance usuelle de S^2 (confère 1.5.6), le théorème précédent montre immédiatement que les problèmes 1 et 2 sont asymptotiquement équivalents.

Le lien entre les problèmes 2 et 3 est par contre moins apparent. Il est cependant bien connu et évident qu’un placement optimal de cercles de rayon ε induit un recouvrement de rayon 2ε et de même sommets. Nous nous proposons ici de faire une simple observation : en admettant la conjecture que la solution du problème de Tammes admet une triangulation quasi-équilatérale², alors le problème de Tammes revient asymptotiquement à chercher une triangulation quasi-équilatérale de S^2 dont la plus petite arête soit maximale. Sous ces mêmes conditions, le problème 2 reviendrait d’après la section précédente à minimiser la plus grande arête.

Or un résultat de [Colin de Verdière and Marin 1990] montre que pour une triangulation quasi-équilatérale de la sphère, le minimum des angles tend vers $3\pi/10$ et le maximum vers $2\pi/5$. Le rapport entre la plus grande et la plus petite

²(\mathcal{T}_n) sera appelé triangulation *quasi-équilatérale* si

- (i) La borne supérieure des diamètres des triangles de \mathcal{T}_n tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Il existe des angles α, β tels que $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ tel que $\forall n > N$, les angles des triangles de \mathcal{T}_n sont dans l’intervalle $[\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$.
- (iii) Toute triangulation admet un triangle où un angle est inférieur à α , et un triangle où un angle est supérieur à β .
- (iv) α est maximal et β est minimal.

arête est donc au moins de $2 \sin(2\pi/5)$, ce qui établit qu'un placement optimal de cercles de rayon ε sur S^2 (admettant une triangulation quasi-équilatérale) induit un recouvrement par des disques de rayon $2 \sin(2\pi/5)\varepsilon$.

2.4 Application directe

2.4.1 Convexes plans

Un résultat ancien [Toth 1948] permet tout d'abord de comparer les approximations par de polygones inscrits, circonscrits ou quelconques.

Théorème 2.4.1 ([Toth 1948]). $\forall C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1$ et pour $n \rightarrow +\infty$, on a pour $n \rightarrow +\infty$:

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n^i) \sim \delta^H(C, \mathcal{P}_n^c) \sim 2\delta^H(C, \mathcal{P}_n).$$

Plus précisément, [McClure and Vitale 1975] montre comment passer d'un polygone inscrit à un polygone circonscrit tout en conservant asymptotiquement la même approximation.

Théorème 2.4.2 ([McClure and Vitale 1975]). Soit $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ un corps convexe plan de classe \mathcal{C}^2 et $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_n < 2\pi$. On définit P_n^i le polygone inscrit dans C dont les sommets ont pour normale n_{θ_k} sur ∂C , et P_n^c le polygone circonscrit à C dont les faces ont pour normale n_{θ_k} . Alors pour $n \rightarrow +\infty$, on a :

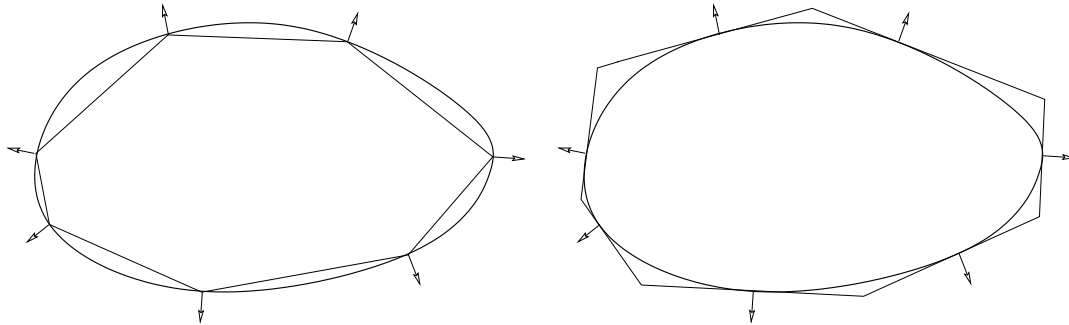
$$\delta^H(C, P_n^i) \sim \delta^H(C, P_n^c).$$


FIG. 2.1 – Polygones inscrits et circonscrits associés à une même liste d'angles

Enfin le même article [McClure and Vitale 1975] établit l'ordre de convergence de $\delta^H(C, \mathcal{P}_n)$, ce qui peut désormais être regardé comme un cas particulier de 2.1.2. Par la suite, [Ludwig 1999] a par ailleurs affiné cette expression en évaluant les termes suivants de ce développement asymptotique pour des convexes à bord $\mathcal{C}^k, k > 2$.



Théorème 2.4.3 ([Ludwig 1999]). Soit $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ de courbure $k > 0$.

Alors

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \frac{1}{16} \left(\int_{\partial C} \sqrt{k(x)} \, d\sigma(x) \right)^2 \frac{1}{n^2} .$$

Remarques :

1. Si le bord du convexe est décrit par une paramétrisation longueur d'arc $f : [0, l[\rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\|f'(s)\| = 1$ quel que soit s , et avec l la longueur de la courbe, alors $\|f''(s)\| = k(s)$ et l'équivalence s'écrit :

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \frac{1}{16} \left(\int_0^l \sqrt{\|f''(s)\|} \, ds \right)^2 \frac{1}{n^2} .$$

2. Si C est décrit par sa fonction support s_C , alors l'équivalence s'écrit :

$$\delta^H(C, \mathcal{P}_n) \sim \frac{1}{16} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{s_C(\theta) + s_C''(\theta)} \, d\theta \right)^2 \frac{1}{n^2} .$$

En effet, $\theta'(s) = k(s)$, donc $\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)} \, d\theta = \int_0^l \sqrt{k(s)} \, ds$, et on exprime alors le rayon de courbure en fonction de s_C avec (1.2.4).

McClure et Vitale proposent dans [McClure and Vitale 1975] deux approches pour construire des polygones inscrits ou circonscrits asymptotiquement optimaux. Leur point de vue est focalisé sur la représentation du convexe par sa fonction support, mais englobe différentes métriques comme la déviation d'aire, de longueur, ou les distances δ^p pour $1 \leq p \leq \infty$.

Une constatation liminaire permet de simplifier la représentation du problème d'approximation. En effet, si P_n^i est un polygone inscrit dans C , il peut être représenté par la liste (ordonnée) de ses sommets. Or, puisque C est strictement convexe, à chacun de ces sommets est associé un unique vecteur normal unitaire n_{θ_k} , et l'on peut donc représenter P_n^i par les angles θ_k que ces vecteurs normaux font avec l'horizontale. De même tout polygone circonscrit P_n^c est décrit par les angles des vecteurs normaux de ses faces. Ces deux polygones étant de même approximation asymptotique d'après (2.4.2), une telle liste ordonnée $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n < 2\pi$ caractérise l'ordre asymptotique d'approximation polygonale (inscrite ou circonscrite) que l'on notera $e(\theta_{1..n})$.

Première méthode La première approche est intitulée *répartition empirique* des points sur le bord de C . Si on fixe $F :]0, 2\pi[\rightarrow]0, 1[$ une fonction de répartition angulaire vérifiant $F(0^+) = 0$ et $F(2\pi^-) = 1$, on définit la liste des n angles associés par :

$$\theta_k = F^{-1}\left(\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{pour } k = 1 \dots n .$$



Théorème 2.4.4 ([McClure and Vitale 1975]). *Si F est une fonction dite "de répartition angulaire" et $f = F'$ sa dérivée strictement positive, bornée et \mathcal{C}^0 par morceaux, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e(\theta_{1..n}) = \frac{1}{8} \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in [0, 2\pi[} \frac{r(\theta)}{f(\theta)^2} .$$

Corollaire 2.4.5 ([McClure and Vitale 1975]). *Si $F(\theta) = \left(\int_0^\theta \sqrt{r(t)} dt\right) \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)} dt\right)^{-1}$, alors pour $n \rightarrow +\infty$*

$$e(\theta_{1..n}) \sim \frac{1}{8} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2 \frac{1}{n^2}$$

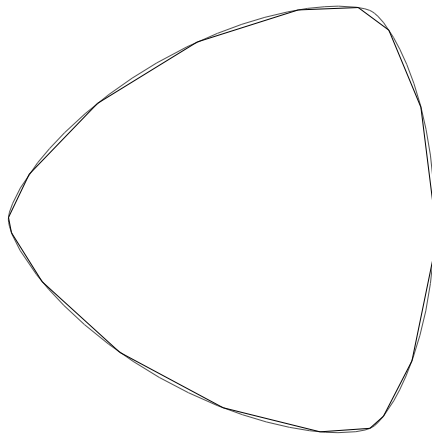
et cette répartition est optimale.

Remarque :

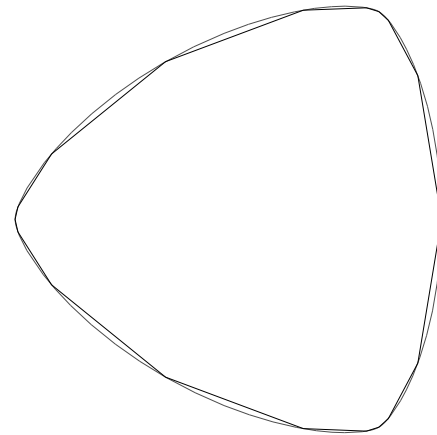
Si l'on munit ∂C le bord du convexe C d'une métrique qui n'est pas la métrique euclidienne mais une métrique riemannienne d_H définie par :

$$d_H(A, B) = \int_A^B \sqrt{k} d\sigma$$

alors la répartition optimale des angles consiste à découper ∂C en segments de même longueur pour d_H et à placer les sommets du polygone inscrit aux centres de ces segments. On peut se persuader de l'optimalité de cette construction par rapport à l'équirépartition angulaire en regardant la figure 2.2



Arcs de même longueur pour d_H



Equirépartition angulaire

FIG. 2.2 – Influence de la courbure sur la répartition des sommets

Seconde méthode La seconde approche de [McClure and Vitale 1975] est basée sur la connaissance de l'erreur locale d'approximation. A partir d'une

liste ordonnée d'angles $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n < 2\pi$, et en posant $\theta_{n+1} = \theta_1$, on crée un "découpage" de C et des polygones P^c, P^i : on se fixe un point A intérieur à C et on note M_i les point de ∂C où la normale unitaire vaut n_{θ_i} . On note alors $C_{(i)}$ l'intersection de C avec le secteur $M_i A M_{i+1}$, et de même $P_{(i)}^i$ (respectivement $P_{(i)}^c$) l'intersection de P^i (respectivement P^c) avec $M_i A M_{i+1}$.

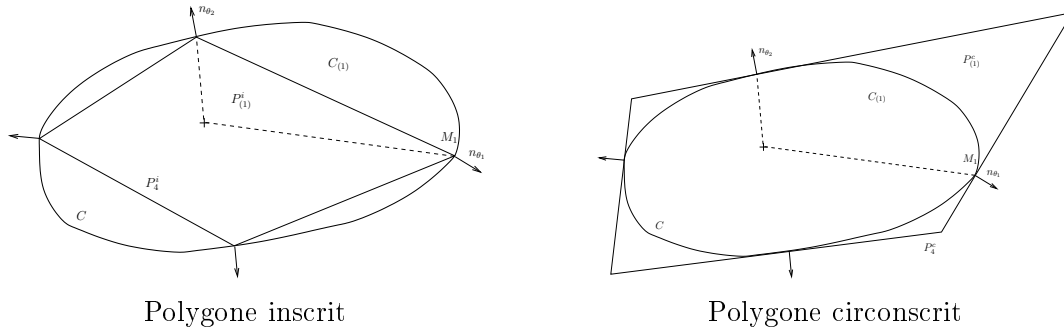


FIG. 2.3 – Découpage d'un polygone en secteurs

On définit alors l'erreur locale inscrite par

$$e^i(\theta_i) = \delta^H(C_{(i)}, P_{(i)}^i)$$

et l'erreur locale circonscrite par

$$e^c(\theta_i) = \delta^H(C_{(i)}, P_{(i)}^c) .$$

Théorème 2.4.6 ([McClure and Vitale 1975]). *Avec les notations précédentes, les erreurs locales vérifient :*

$$e^c(\theta_i) \sim e^i(\theta_i)$$

Donc on notera $e(\theta_i)$ l'erreur locale pour l'approximation asymptotique inscrite ou circonscrite.

Théorème 2.4.7 ([McClure and Vitale 1975]). *Avec les notations précédentes, l'erreur locale est asymptotiquement :*

$$\begin{aligned} e(\theta_i) &\sim \frac{1}{8} r(\theta_i) (\theta_i - \theta_{i+1})^2 \\ &\sim \frac{1}{8} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2 \end{aligned}$$

et l'erreur d'approximation globale s'en déduit par :

$$e(\theta_{1..n}) = \sup_{i=1..n} e(\theta_i) .$$

Un dernier résultat, baptisé 'balancing local errors' par [McClure and Vitale 1975] permet de conclure cette approche : si les erreurs locales sont équivalentes,

alors l'approximation est asymptotiquement optimale. Cependant cet article ne prouve ce résultat que pour des métriques différentes de δ^H .

Théorème 2.4.8 ([McClure and Vitale 1975]). *Soit $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n < 2\pi$. Si $e(\theta_1) \sim e(\theta_2) \sim \dots \sim e(\theta_n)$, alors les polygones P_n^i et P_n^c sont asymptotiquement optimaux.*

Preuve :

Si $e(\theta_1) \sim e(\theta_2) \sim \dots \sim e(\theta_n)$, alors

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{r(\theta)} d\theta \sim \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \sqrt{r(\theta)} d\theta .$$

Et donc

$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{r(\theta)} d\theta \sim \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)} d\theta .$$

Or $e(\theta_{1..n}) = \sup_{i=1..n} e(\theta_i) = \sup_{i=1..n} \frac{1}{8} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2$.

Donc on obtient le résultat optimal :

$$e(\theta_{1..n}) \sim \frac{1}{8} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2 \frac{1}{n^2} .$$

□

Equioscillations Une propriété célèbre des polygones de meilleure approximation est leur équi-oscillation. De la même manière que les polynômes de Tchebychev oscillent autour de la fonction continue qu'ils approchent, ainsi pour un polygone $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\delta^H(C, P) = \delta^H(C, \mathcal{P}_n)$, la distance des sommets de P au convexe est égale à la distance à laquelle les arêtes de P 'pénètrent' dans C , qui vaut bien sûr $\delta^H(C, P)$. Autrement dit, $\sup_{x \in C} d(x, P) = \sup_{y \in P} d(C, y)$. Cette propriété n'est malheureusement pas suffisante pour caractériser un polygone de meilleure approximation, comme le montre la figure 2.4.

A défaut d'optimalité totale, [Ludwig 1999] prouve que cette condition entraîne néanmoins une optimalité asymptotique :

Théorème 2.4.9. *Soit $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^2$ et P_n un polygone équi-oscillant pour C . Alors quand $n \rightarrow +\infty$, P_n réalise une approximation asymptotiquement optimale de C .*

Meilleure approximation de S^1 Pour le cas particulier d'un disque D fermé de rayon $R > 0$, on peut déterminer explicitement une suite de polygones de

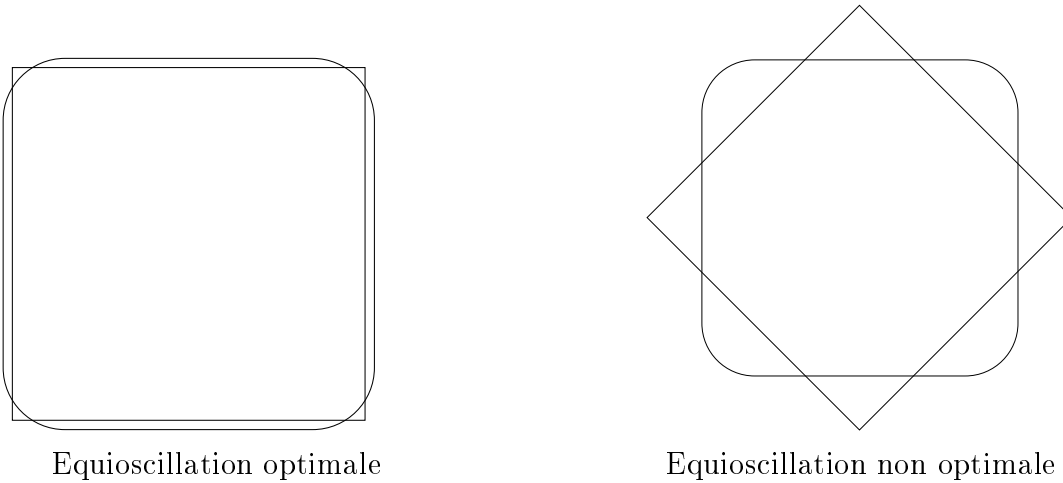


FIG. 2.4 – Equioscillations d'un polytope

meilleure approximation de D . Soit P_n un polygone inscrit à n faces. On subdivise alors le convexe selon 2.3. Sur chaque morceau $D^{(i)}$ de D , l'erreur d'approximation s'écrit

$$\delta^H(D^{(i)}, P_n^{(i)}) = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{l_i^2}{4R^2}} \right)$$

où l_i est la longueur du $i^{\text{ème}}$ côté de P_n .

Donc $\delta^H(D^{(i)}, P_n^{(i)})$ est minimal si et seulement si l_i est minimal. Ainsi $\delta^H(D, P_n)$ est minimal si et seulement si $\max_i l_i$ est minimal, autrement dit si P_n est donc un polygone régulier inscrit dans D . De même, les polygones circonscrits, tout comme les polygones quelconques, de meilleure approximation d'un disque sont réguliers.

2.4.2 Échantillonnage d'une paramétrisation

Nous proposons ici une démonstration personnelle d'un résultat classique. Cet exemple nous sert d'illustration de la pertinence de la notion de dispersion.

Lemme 2.4.10. *Soit $f : U \rightarrow]0, 1[^{d-1} \rightarrow \partial C \subset \mathbb{R}^d$ une paramétrisation bijective d'une partie du bord d'un convexe C . Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $X = \left\{ \frac{k}{m} ; 1 < k < n \right\}^{d-1}$ l'ensemble des n sommets d'une grille régulière sur U . Alors pour $n \rightarrow \infty$*

$$\text{disp}_{f(U)} f(X) = \Theta \left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}} \right) .$$

Preuve :

D'après 2.1.2 et 2.2.2, on obtient une borne inférieure sur cette dispersion :

$$\text{disp}_{f(U)} f(X) = \Omega \left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}} \right) .$$

Soit $c \in f(U)$ un point de l'image de f . D'après (1.5.3), et en désignant par $k_{\gamma'(t)}$ la courbure de ∂C au point $\gamma(t)$ selon la direction $\gamma'(t)$, la distance pour la seconde forme fondamentale s'écrit :

$$d_{II}(c, f(X)) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{k_{\gamma'(t)}} \|\gamma'(t)\| dt ; \gamma : [0, 1] \rightarrow f(U) \right. \\ \left. \text{tel que } \gamma(0) = A \text{ et } \gamma(1) = B \right\} .$$

Si k_1, k_2 sont les courbures principales en un point de ∂C , alors de manière immédiate

$$d_{II}(c, f(X)) \leq \sqrt{\sup_{\partial C} \{k_1, k_2\}} \\ \inf \left\{ \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt ; \gamma : [0, 1] \rightarrow f(U) \text{ tel que } \gamma(0) = A, \gamma(1) = B \right\}$$

Autrement dit

$$d_{II}(c, f(X)) \leq \sqrt{\sup_{\partial C} \{k_1, k_2\}} d_I(c, f(X)) . \quad (2.4.1)$$

Or, f étant un homéomorphisme de U sur $f(U)$, il est possible d'écrire

$$d_I(c, f(X)) \leq \left(\max_{u \in U} \|df_u\| \right) d(f^{-1}(c), X) \\ \leq \left(\max_{u \in U} \|df_u\| \right) \frac{\sqrt{2}}{m}$$

Cette dernière expression découlant du fait que $d(f^{-1}(c), X) \leq \frac{\sqrt{2}}{m}$. Donc, en posant $\kappa = \max_{\partial C} \{k_1, k_2\}$, l'expression (2.4.1) devient

$$d_{II}(c, f(X)) \leq \frac{\sqrt{2\kappa}}{m} \max_{u \in U} \|df_u\| .$$

Il ne reste qu'à remarquer que le nombre n de sommets de la grille est $(m-1)^{d-1}$, et que par conséquent

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{1 + n^{\frac{1}{d-1}}} ,$$

ce qui permet de montrer que

$$d_{II}(c, f(X)) \leq \sqrt{2\kappa} \max_{u \in U} \|df_u\| \frac{1}{1 + n^{\frac{1}{d-1}}} . \quad (2.4.2)$$

Or, puisque par définition

$$\text{disp}_{f(U)} f(X) = \sup_{c \in f(U)} d_{II}(c, f(X)) ,$$

la majoration (2.4.2) induit

$$\text{disp}_{f(U)} f(X) \leq \sqrt{2\kappa} \max_{u \in U} \|df_u\| \frac{1}{1 + n^{\frac{1}{d-1}}} ,$$

et le comportement asymptotique énoncé est ainsi prouvé. \square

Théorème 2.4.11. *Soit C un corps convexe, et soit f_1, \dots, f_k un atlas de ∂C . On suppose que $f_i :]0, 1[^{d-1} \rightarrow \partial C$. Posons $X = \left\{ \frac{k}{m} \mid 1 < k < m \right\}^{d-1}$ l'ensemble des sommets d'une grille régulière sur U , et posons P le polytope à n sommets défini par l'enveloppe convexe de $\cup_{1 \leq i \leq k} f_i(X)$. Alors P_n est une approximation polytopiale inscrite de C d'ordre optimal, i.e.*

$$\delta^H(P, C) = \Theta(\delta^H(\mathcal{P}_n^i, C)) .$$

Preuve :

Le lemme précédent nous permet d'affirmer que sur toutes les images de cartes, la dispersion est en $\Theta\left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}}\right)$. Notons V_n les n sommets de P_n . Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2.2 liant approximation polytopiale et dispersion des sommets pour obtenir que :

$$\begin{aligned} \delta^H(P, C) &= \frac{1}{2} (\text{disp}_{\partial C} V_n)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \Theta\left(\frac{1}{(n/k)^{2/(d-1)}}\right) \\ &\leq \Theta\left(\frac{1}{(n)^{2/(d-1)}}\right) \end{aligned}$$

ce qui est bien d'ordre optimal d'après 2.1.2. \square

2.4.3 De l'approximation de la sphère S^d à un convexe lisse

Pour clore ce chapitre, nous proposons une application directe des outils de géométrie riemannienne à la construction de polytopes approximants. Le terme "application" ne sous-entend ici aucune mise en pratique du procédé proposé, puisque ce dernier repose sur la connaissance de la réciproque de l'application de Gauss, ce qui est peu réaliste.

Connaissant P_n des polytopes à n sommets de bonne approximation asymptotique de la sphère unité, on se propose de construire des polytopes Q_n approchant un corps convexe C fixé, et de majorer asymptotiquement la distance de Q_n à C en fonction de $\delta^H(P_n, S^d)$. On supposera C de classe \mathcal{C}^2 .

Dans \mathbb{R}^2

Si l'on se place dans le plan, on peut alors ordonner les sommets de P_n et les noter $(M_i)_{0..n-1}$. On suppose ici que P_n est inscrit dans S^1 . [McClure and Vitale 1975] ont obtenu en 1975 une évaluation locale de l'erreur d'approximation pour un convexe quelconque :

$$\delta^H(S^1, P_n) \sim \max_{i=0..n-1} \left\{ \frac{1}{8} \rho(M_i) (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \right\}$$

où θ_i est l'angle que fait la normale au point M_i avec l'horizontale, et $\rho(M_i)$ est le rayon de courbure en ce point.

On peut donc définir un équivalent de l'erreur locale d'approximation de S^1 au point M_i par

$$\varepsilon_{S^1}(M_i) = \frac{1}{8} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 .$$

Cette expression est un développement asymptotique de l'erreur d'approximation associée au segment $[M_i M_{i+1}]$. Un équivalent de l'erreur globale est alors donné par

$$\delta^H(S^1, P_n) \sim \max_{i=0..n-1} \varepsilon_{S^1}(M_i) .$$

Une méthode naturelle de passage de P_n à un polygone inscrit dans C utilise l'application de Gauss. Si l'on note $\nu : C \rightarrow S^1$ l'application de Gauss qui à tout point de C associe sa normale unitaire, ν est une bijection puisque C est strictement convexe. On construit donc les points $N_i = \nu^{-1}(M_i)$ comme dans la figure 2.5. Le polygone Q_n ainsi défini admet pour erreur d'approximation locale :

$$\begin{aligned} \varepsilon_C(N_i) &\sim \frac{1}{8} \rho(N_i) (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \\ &\sim \rho(N_i) \varepsilon_{S^1}(\theta_i) \end{aligned}$$

donc finalement

$$\delta^H(C, Q_n) \leq \left(\max_{N \in \partial C} \rho(N) \right) \delta^H(S^1, P_n) + o(\delta^H(S^1, P_n)) .$$

On remarquera que ce procédé place plus de sommets dans les zones de forte courbure qu'ailleurs, ce qui est nécessaire pour obtenir une approximation d'ordre optimal. Cependant, ce procédé n'est, bien sûr, pas optimal : en fait, il met trop de sommets aux endroits de forte courbure.

Dans \mathbb{R}^d

Le principe vu dans \mathbb{R}^2 peut en fait se généraliser aux dimensions supérieures, et, comme pour le plan, l'accroissement de l'erreur d'approximation est fonction de la courbure du bord du convexe.

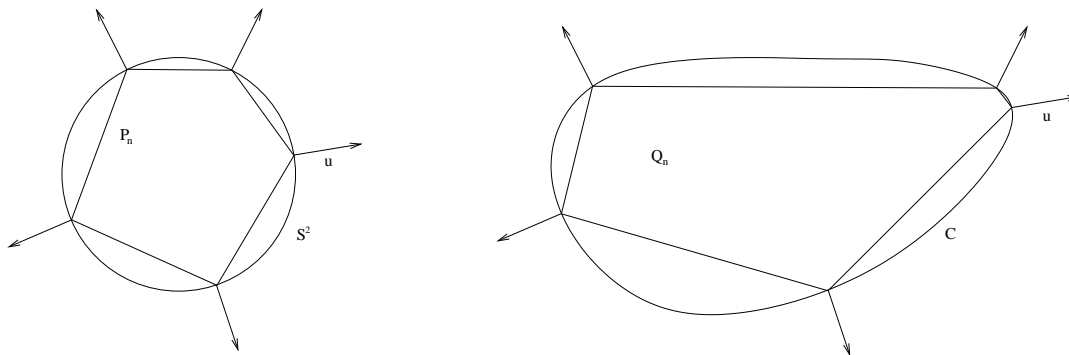


FIG. 2.5 – De S^1 à un convexe plan quelconque

Dans \mathbb{R}^d , on se donne P_n un polyèdre inscrit dans S^{d-1} et l'on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ ses sommets. On a alors

$$\delta^H(S^{d-1}, P_n) \sim \frac{1}{2} (\text{disp}_{S^{d-1}}\{x_1, \dots, x_n\})^2$$

et l'on pose $\varepsilon_n = \delta^H(S^{d-1}, P_n)$. Soit C un corps convexe de classe \mathcal{C}^2 . On définit de même que dans le plan l'application de Gauss $\nu : \partial C \rightarrow S^{d-1}$ qui à tout point de ∂C associe sa normale unitaire. ν réalisant une bijection, on pose $Q_n = \text{conv}(\{\nu^{-1}(x_i)\}_{1..n})$ le polyèdre convexe inscrit dans C et associé à P_n . Évaluer asymptotiquement $\delta^H(C, Q_n)$ revient ainsi à exprimer la dispersion des sommets de Q_n .

Théorème 2.4.12. Notons R le maximum des rayons de courbure en tout point du bord de C . Si $\varepsilon_n = \delta^H(S^{d-1}, P_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, alors

$$\delta^H(C, Q_n) \leq R\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) .$$

Preuve :

Notons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ les sommets de P_n , $(y_1, \dots, y_n) = (\nu^{-1}(x_1), \dots, \nu^{-1}(x_n))$ les sommets de Q_n , et Y l'ensemble de ces n points de C . Pour majorer l'erreur d'approximation de C , il suffit de savoir majorer la dispersion de Y . Or on a :

$$\text{disp}_C Y = \inf \{ \lambda > 0 \mid \forall y \in \partial C, d_H(y, Y) \leq \lambda \} .$$

Pour $y \in C$, posons $x = \nu(y) \in S^2$. Par hypothèse,

$$\text{disp}_{S^2} X \sim \varepsilon_n$$

donc $d_H(x, X) \sim \varepsilon_n$, et sans nuire à la généralité, on peut supposer que $d_H(x, x_1) \sim \varepsilon_n$. En utilisant alors le lemme suivant, on en déduit que

$$\text{disp}_C Y \leq \sqrt{R} \text{disp}_{S^2} X$$

et donc

$$\text{disp}_C Y \leq \sqrt{R}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) .$$

Finalement, le théorème 2.2.2 nous permet de conclure que :

$$\delta^H(C, Q_n) \leq \left(\sqrt{R}\varepsilon_n + o(\varepsilon_n) \right)^2 .$$

La majoration finale est donc bien celle escomptée. □

Lemme 2.4.13. *On note $\text{dist}_{S^{d-1}}$ la distance géodésique sur S^{d-1} . Alors*

$$d_H(y, y_1) \leq \sqrt{R} \text{dist}_{S^{d-1}}(x, x_1) .$$

Preuve :

La distance entre deux points de ∂C se mesure le long du plus court chemin pour la métrique d_H :

$$d_H(y, y_1) = \inf \left\{ \int_0^1 \|f'(t)\|_H dt ; f : [0, 1] \rightarrow S \text{ tel que } f(0) = y \text{ et } f(1) = y_1 \right\}$$

Posons $g = \nu \circ f$. Puisque ν est un homéomorphisme, quand f parcourt tous les chemins de y à y_1 sur ∂C , dans le même temps g parcourt tous les chemins de x à x_1 sur S^{d-1} . En particulier, en choisissant pour g l'arc géodésique minimal de S^{d-1} qui relie x à x_1 , et $f = \nu^{-1} \circ g$, on obtient

$$d_H(y, y_1) \leq \int_0^1 \|(\nu^{-1} \circ g)'(t)\|_H dt .$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \|(\nu^{-1} \circ g)'\|_H^2 &= \|(d\nu_{\nu^{-1} \circ g})^{-1} \circ g'\|_H^2 \\ &= \langle (d\nu_{\nu^{-1} \circ g})^{-1} \circ g', (\nu^{-1} \circ g)' \rangle_H \\ &= \langle d\nu_{\nu^{-1}} \circ g \circ (d\nu_{\nu^{-1} \circ g})^{-1} \circ g', (\nu^{-1} \circ g)' \rangle \\ &= \langle g', (\nu^{-1} \circ g)' \rangle \end{aligned}$$

Pour calculer ce produit scalaire dans le plan tangent à ∂C , il est pratique de se placer dans la base locale des directions principales (e_1, \dots, e_{d-1}) . On sait alors que $d\nu$ s'exprime par une matrice diagonale dont les éléments sont les courbures principales $\{k_i\}_{1..d-1}$.

$$\begin{aligned} \langle g', (\nu^{-1} \circ g)' \rangle &= \begin{pmatrix} g'.e_1 \\ \vdots \\ g'.e_{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{d-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g'.e_1 \\ \vdots \\ g'.e_{d-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g'.e_1 \\ \vdots \\ g'.e_{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} g'.e_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{k_{d-1}} g'.e_{d-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{k_1} (g'.e_1)^2 + \dots + \frac{1}{k_{d-1}} (g'.e_{d-1})^2 \end{aligned}$$

Or $R = \max \left\{ \frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_{d-1}} \right\}$, donc

$$\langle g', ((\nu^{-1} \circ g)'(t)) \rangle \leq R(g'.e_1)^2 + \dots + (g'.e_{d-1})^2 ,$$

ce qui prouve que

$$\|(\nu^{-1} \circ g)'(t)\|_H \leq \|g'(t)\| .$$

Et donc finalement

$$\int_0^1 \|(\nu^{-1} \circ g)'(t)\|_H dt \leq \text{dist}_{S^{d-1}}(x, x_1) ,$$

ce qui permet de conclure. □

Si ce résultat n'est pas constructif, puisque l'application de Gauss est difficilement inversible, il permet en revanche d'évaluer à posteriori l'erreur d'approximation commise par un polytope inscrit dans un convexe lisse C . En effet, en évaluant l'hyperplan tangent au convexe en chacun des sommets du polytope, on en déduit un polytope inscrit dans la sphère S^{d-1} . Il n'est alors pas difficile de calculer la distance de Hausdorff de B^{d-1} à cette approximation inscrite. L'erreur d'approximation recherchée est alors majorée par le produit de cette valeur et du maximum des courbures principales sur ∂C .

Chapitre 3

Approximation et décomposition de norme

Si Dieu existe, et si, réellement, Il a créé la terre, alors Il l'a créée selon la géométrie euclidienne, et l'esprit humain ne peut avoir l'idée que de trois dimensions de l'espace.

Feodor Dostoïevski. *Les frères Karamazov*.

Résumé

Ce chapitre commence par un tour d'horizon des différents concepts nécessaires, avec un accent particulier porté sur la dualité et la décomposition de norme. Nous rappelons plusieurs résultats connus auxquels nous ferons appel par la suite. Nous proposons ensuite notre apport personnel, qui commence par une définition de l'approximation de norme, ainsi qu'une définition de la décomposition approchée de norme. Dans un troisième temps, nous étudions deux champs de propriétés pour ces deux notions. Le premier domaine est consacré aux produits cartésiens d'espaces et à leurs normes. Le second fait le lien avec les chapitres précédents en montrant l'interdépendance entre la décomposition approchée de normes et l'approximation des convexes par des polyèdres, ce qui permet finalement d'obtenir diverses propriétés de la décomposition approchée.

Sommaire

3.1	Introduction	61
3.2	Les outils	61
3.2.1	Notations	61
3.2.2	Norme duale	61
3.2.3	Norme définie par dualité	64
	Prérequis	65
	Norme définie par sa boule duale	66
3.2.4	Décomposition de norme	68
3.2.5	Décomposition approchée de norme	70
3.3	Approximation de norme	71
3.3.1	Norme approchée	71
3.3.2	Échantillonnage de la sphère duale	73
3.3.3	Boule unité ou boule duale ?	75
3.4	Norme sur un produit cartésien d'espaces	76
3.4.1	Caractérisation	76
	Norme sur un produit de deux espaces	76
	Norme sur un produit de k espaces	78
3.4.2	Produit cartésien d'approximations de normes	79
	Norme approchée sur un produit de deux espaces	79
	Norme approchée sur un produit de k espaces	82
3.5	Norme approchée et approximation de la boule duale	83
3.5.1	Norme l_2 approchée	83
	Comportement asymptotique	85
3.5.2	Approximation d'une norme quelconque	86
	Comportement asymptotique	89

3.1 Introduction

On se place dans \mathbb{R}^d muni d'une norme φ . On cherche à définir une norme φ_\sim qui soit "proche" de φ .

$$\varphi_\sim(x) \approx \varphi(x)$$

Pour que cette norme soit aisément calculée, ainsi que pour différentes applications, on est amené à la choisir polytopiale, c'est-à-dire de la forme :

$$\varphi_\sim(x) = \max_{v \in \{v_1, \dots, v_k\}} x.v .$$

L'intérêt de cette démarche est de pouvoir substituer cette nouvelle norme à la norme originale et de transformer ainsi des algorithmes exacts mais coûteux en algorithmes approchés mais rapides.

3.2 Les outils

3.2.1 Notations

L'espace courant sera toujours l'espace réel de dimension d , noté \mathbb{R}^d . Il sera muni d'une norme φ .

On notera de deux façons distinctes les produits scalaires :

- $a.b$ le produit scalaire canonique de a et b .
- $\langle a, b \rangle$ un produit scalaire (à priori quelconque) de a et b .

Il existe deux types de normes : euclidiennes (*i.e.* issues d'un produit scalaire) ou non. Par la suite, la norme considérée pourra appartenir à l'un ou l'autre type. Ainsi, les normes seront notées :

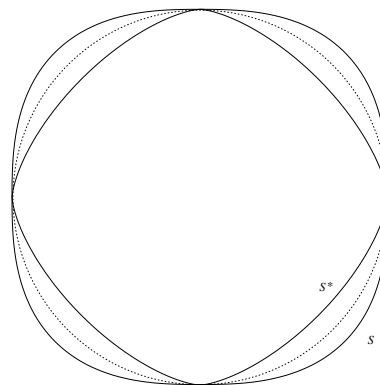
- $l_2(u) = |u|$ pour la norme euclidienne canonique du vecteur u , définie par $|u| = \sqrt{u.u}$.
- $\varphi(u)$ pour une norme (à priori quelconque, éventuellement non-euclidienne) du vecteur u .
- $\varphi_\sim(u)$ pour une norme approchée du vecteur u , telle que $\varphi_\sim(u) \approx \varphi(u)$.

À chacune de ces normes est associée une sphère (resp. une boule) unité, que l'on notera respectivement S^{d-1} , S_φ , S_{φ_\sim} (resp. B^d , B_φ , B_{φ_\sim}). Ces ensembles sont des corps convexes de \mathbb{R}^d .

3.2.2 Norme duale

La dualité dans un espace vectoriel consiste à considérer les formes linéaires de cet espace. Or en dimension finie, toute forme linéaire est caractérisée de

La sphère unité pour la norme l^4 et sa duale dans \mathbb{R}^2



manière unique par un vecteur. Il est donc possible d'identifier \mathbb{R}^d et son dual. On en déduit alors une interprétation de la norme canonique sur le dual en tant que norme sur \mathbb{R}^d .

Définition 3.2.1 (norme duale). A \mathbb{R}^d muni d'une norme φ et d'une sphère unité S_φ , on associe une norme, appelée *norme duale*, définie par

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{x \cdot y}{\varphi(x)}. \quad (3.2.1)$$

La boule unité pour la norme φ , $B_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^d | \varphi(x) \leq 1\}$, a donc pour duale

$$B_\varphi^* = B_{\varphi^*} = \{x \in \mathbb{R}^d | \varphi^*(x) \leq 1\}.$$

Proposition 3.2.2.

$$\begin{aligned} \varphi^*(y) &= \sup_{x \in B_\varphi} \frac{x \cdot y}{\varphi(x)} \\ &= \sup_{x \in S_\varphi} x \cdot y \end{aligned}$$

Preuve :

Il suffit d'écrire

$$\frac{x \cdot y}{\varphi(x)} = \frac{x}{\varphi(x)} \cdot y.$$

□

Par la suite, nous utiliserons souvent la propriété suivante. Ce résultat classique est à mettre en regard avec la propriété bien connue qui affirme que le bidual d'un espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à cet espace. Nous proposons une formulation de ce résultat dans le cadre précis qui nous intéresse ainsi qu'une démonstration géométrique.

Proposition 3.2.3. *La dualité est involutive, c'est-à-dire :*

$$\varphi = (\varphi^*)^*,$$

et donc

$$\varphi(x) = \sup_{y \neq 0} \frac{x \cdot y}{\varphi^*(y)} . \quad (3.2.2)$$

Preuve :

- Notons $\psi(x) = \sup_{y \in B_\varphi^*} \frac{x \cdot y}{\varphi^*(y)}$ la norme biduale de φ .

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{x \cdot y}{\varphi(x)}$$

et donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \varphi^*(y) \geq \frac{x \cdot y}{\varphi(x)} ,$$

d'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad \varphi(x)\varphi^*(y) \geq x \cdot y . \quad (3.2.3)$$

On obtient donc en particulier que

$$\varphi(x) \geq \sup_{y \neq 0} \frac{x \cdot y}{\varphi^*(y)} ,$$

autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) \geq \psi(x)$.

- Pour montrer l'inégalité inverse, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\varphi(x) > \psi(x)$. Alors en posant $x_0 = x/\varphi(x)$, on peut affirmer que :

$$\exists x_0 \in S_\varphi \text{ tel que } 1 = \varphi(x_0) > \psi(x_0) .$$

Soit H un hyperplan d'appui¹ du convexe B_φ en x_0 , et ν un vecteur normal de H tel que $\nu \cdot x_0 > 0$. Si on pose $y_0 = \frac{\nu}{\varphi^*(\nu)}$, alors $\varphi^*(y_0) = 1$, et donc

$$\begin{aligned} \psi(x_0) &= \sup_{u \in S_\varphi^*} x_0 \cdot u \\ &\geq x_0 \cdot y_0 \end{aligned}$$

La convexité de B_φ et le fait qu'en x_0 elle admette un hyperplan d'appui de normale extérieure y_0 entraîne d'après 1.1.10 que

$$\forall u \in B_\varphi, \quad u \cdot y_0 \leq x_0 \cdot y_0 .$$

Or d'après la proposition 3.2.2, $\varphi^*(y_0) = \sup_{u \in S_\varphi} u \cdot y_0$, donc

$$\varphi^*(y_0) \leq \psi(x_0) ,$$

d'où

$$\varphi^*(y_0) < 1 ,$$

¹L'existence d'un hyperplan d'appui en un point du bord d'un convexe quelconque repose sur le théorème de Hahn-Banach. Mais nous sommes ici en dimension finie, sur un convexe compact, donc cette existence est évidente.

ce qui est absurde. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) \leq \psi(x)$, et donc $\varphi = \psi = \varphi^{**}$. \square

On peut déduire de ce résultat l'existence d'un dual pour chaque point de la sphère.

Corollaire 3.2.4. *Soit $u \in S_\varphi$. Alors u admet un dual (en général non-unique) noté u^* , c'est-à-dire un vecteur u^* tel que*

$$\begin{cases} u^* \in S_\varphi^* \\ \varphi(u) = u \cdot u^* \end{cases}$$

On peut donc exprimer φ en fonction de la norme duale, mais aussi en fonction de la sphère duale, ce qui va s'avérer essentiel par la suite. Le corollaire suivant est trivial.

Corollaire 3.2.5.

$$\|x\| = \varphi(x) = \sup_{u^* \in S_\varphi^*} u^* \cdot x$$

L'idée directrice de ce chapitre est alors de considérer une approximation de S_φ^* par un objet \tilde{S}^* , ce qui nous permet de remplacer cette distance par

$$\varphi(x) \approx \max_{\tilde{u} \in \tilde{S}^*} \tilde{u} \cdot x ,$$

\tilde{S}^* doit bien sûr être choisi de manière à faciliter ce calcul de norme approchée. Ce sera donc en général un polytope de sommets $\{s_1, \dots, s_n\}$, ce qui donnera :

$$\varphi(x) \approx \max_{s \in \{s_1, \dots, s_n\}} x \cdot s .$$

Attention, en général, \tilde{S}^* ne définit pas une nouvelle métrique. La condition de symétrie n'est ainsi pas nécessairement vérifiée.

L'approximation d'une norme peut être effectuée par une fonction qui ne soit pas elle-même une norme, mais dans la majorité des situations, on s'attache à construire une véritable norme proche de la norme initiale. En effet, les hypothèses sur l'ensemble \tilde{S}^* pour qu'il décrive une norme ne sont guère restrictives dans la pratique. En particulier, la condition de symétrie est même une simplification puisqu'il suffit de construire alors une moitié de la fonction approchant la norme.

3.2.3 Norme définie par dualité

Pour pouvoir définir une norme à partir de sa boule duale, il faut d'abord introduire quelques prérequis géométriques que l'on trouvera détaillés dans [Berger

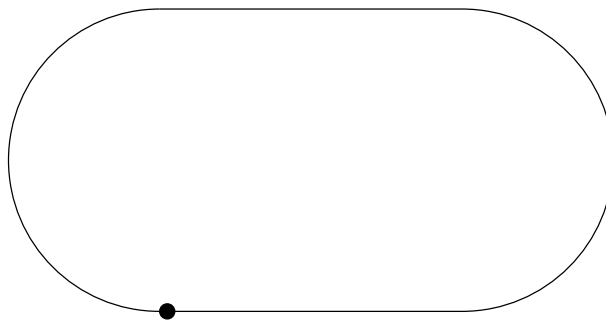


FIG. 3.1 – Point extrême non exposé

1992a].

Prérequis

Définition 3.2.6 (Point exposé). Soit A un convexe. Un point x est dit exposé s'il existe en x un hyperplan d'appui H à A tel que $H \cap A = \{x\}$.

Définition 3.2.7 (Point extrême). Soit A un convexe. Un point x est dit extrême si $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $x_1, x_2 \in A$ implique que $x = x_1 = x_2$.

Proposition 3.2.8. *Tout point exposé est un point extrême.*

Preuve :

Soit x un point exposé et H un hyperplan d'appui en x tel que $H \cap A = \{x\}$. Notons H^+ le demi-espace fermé de frontière H tel que $H^+ \cap A = \{x\}$, et H^- l'autre demi-espace fermé de même frontière. Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors $x_1, x_2 \in H^-$ et $x \in H^+$. Or ces trois points sont alignés, donc $x, x_1, x_2 \in H$. Donc $x = x_1 = x_2$. \square

La réciproque est fautive comme le montre la figure 3.1.

Ces définitions posées, il est désormais possible de présenter le résultat classique, dont on peut trouver la démonstration dans, par exemple, [Berger 1992a] :

Théorème 3.2.9 (Krein et Milman). *Un convexe compact est l'enveloppe de ses points extrêmes.*

On désignera parfois abusivement un corps convexe par son bord, c'est-à-dire par l'ensemble des points admettant un hyperplan support.

Norme définie par sa boule duale

Il est courant de définir des normes dites « de jauges », en ce sens qu'elles sont construites à partir d'un certain corps convexe symétrique C qui devient leur boule unité. Ainsi de manière classique :

$$\varphi : x \mapsto \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda C \}$$

définit une telle norme. Par contre, nous cherchons ici une construction qui repose non sur la boule unité mais sur la boule unité duale.



Théorème 3.2.10. *Soit A un corps convexe symétrique compact. Alors A définit naturellement une norme φ sur \mathbb{R}^d de la façon suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) = \max_{v \in A} v \cdot x ,$$

et de plus A est la boule duale de φ .

Preuve :

• Dans un premier temps, il faut prouver que φ est une norme. A est d'intérieur non vide, donc il contient une boule de rayon non nul :

$$\exists a \in \mathbb{R}^d, \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset A$$

où $B(a, r)$ est la boule centrée en a et de rayon r pour la norme canonique. Alors par symétrie, $B(-a, r) \subset A$ et donc par convexité, $B(0, r) \subset A$. Donc A contient l'origine en son intérieur. De plus, on obtient bien la positivité, puisque le point $\frac{rx}{2|x|}$ appartient à la boule $B(0, r)$ quelque soit x , et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^d, \varphi(x) &\geq \frac{rx}{2|x|} \cdot x \\ &\geq r|x|/2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité permet également de montrer que si $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$, et donc

$$\varphi(x) = 0 \iff x = 0 .$$

De plus, puisque A est compact, le maximum définissant $\varphi(x)$ est atteint pour un point a de A , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists a \in A \text{ tel que } \varphi(\lambda x) = (\lambda x) \cdot a$$

D'où la propriété nécessaire de $\varphi : \varphi(\lambda x) = |\lambda|\varphi(x)$.

Reste enfin à vérifier l'inégalité triangulaire. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) + \varphi(x_2) &= \max_{a_1 \in A} a_1 \cdot x_1 + \max_{a_2 \in A} a_2 \cdot x_2 \\ &\geq \max_{a \in A} (a \cdot x_1 + a \cdot x_2) \\ &\geq \max_{a \in A} a \cdot x_1 + x_2 \\ &\geq \varphi(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Et ainsi φ définit une norme sur \mathbb{R}^d .

• Il faut désormais prouver que A est la boule duale de φ , que l'on notera B_φ^* . Soit $a \in A$, $\varphi^*(a) = \sup_{x \neq 0} \frac{a \cdot x}{\varphi(x)}$. Or par définition $\varphi(x) \geq a \cdot x$, donc $\varphi^*(a) \leq 1$ pour tout $a \in A$. D'où $A \subset B_\varphi^*$.

Soit désormais y un point exposé de B_φ^* . Ainsi B_φ^* admet en y un hyperplan affine support H tel que

$$H \cap B_\varphi^* = \{y\},$$

donc $\varphi^*(y) = 1$, sinon il existerait $r > 0$, tel que $B(y, r) \subset B_\varphi^*$ et H ne serait plus un hyperplan support). De plus

$$\exists x \in S_\varphi \text{ tel que } x \cdot y > 0 \text{ et } x \text{ vecteur normal de } H.$$

Cet élément x vérifie

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 \\ &= \sup_{u \in B_\varphi^*} x \cdot u \\ &= \sup_{a \in A} x \cdot a \end{aligned}$$

Or le fait que H soit hyperplan support de B_φ^* en y de normale extérieure x entraîne

$$1 = \sup_{u \in B_\varphi^*} x \cdot u = x \cdot y.$$

et la compacité de A entraîne

$$\exists a \in A, x \cdot a = 1.$$

Or y est un point exposé, donc il est l'unique élément de B_φ^* réalisant $\max_{u \in B_\varphi^*} x \cdot u$. Puisque $A \subset B_\varphi^*$, alors $a = y$, et donc les points exposés de B_φ^* sont dans A . Or le théorème de Krein et Milman affirme qu'un convexe compact est l'enveloppe de ses points extrémaux, et donc qu'il est l'enveloppe de ses points exposés. Donc $B_\varphi^* \subset A$ puisque les deux ensembles sont convexes et compacts. \square

Ce résultat est fondamental car non seulement il propose une interprétation géométrique d'une norme, mais il affirme également l'unicité de la définition de normes sous cette forme. En effet, si deux corps convexes compacts définissent par dualité la même norme, alors ils sont identiques.

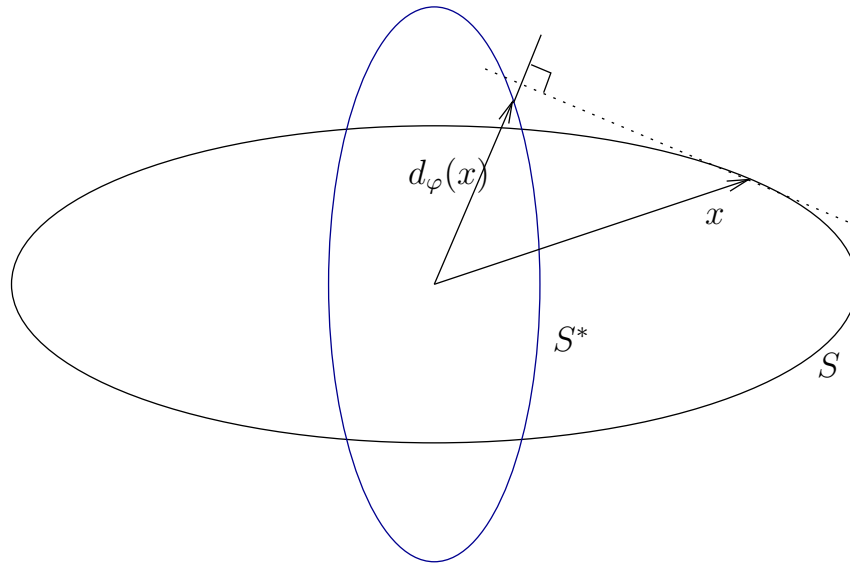


FIG. 3.2 – Décomposition normale d'une norme

3.2.4 Décomposition de norme

Cette section regroupe définitions et propriétés connues des décompositions de normes. On trouvera par exemple dans [Robert 1967] la définition suivante :

Définition 3.2.11. Une *décomposition d'une norme* φ est une application $d_\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui à tout point x associe un élément de \mathbb{R}^d tel que

$$\varphi(x) = d_\varphi(x) \cdot x .$$

Cette décomposition d_φ sera dite *normale* si

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, d_\varphi(x) \in S_\varphi^* .$$

Les décompositions quelconques ne seront pas utilisées ici, il convient donc de s'attacher davantage aux propriétés des décompositions normales.

Proposition 3.2.12. Une décomposition φ est normale si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \forall y \in \mathbb{R}^d \quad d_\varphi(x) \cdot y \leq \varphi(y) .$$

Preuve :

- Si d_φ est une décomposition normale, alors $\varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$, et donc

$$\sup_{y \neq 0} \frac{d_\varphi(x) \cdot y}{\varphi(y)} = 1 ,$$

d'où

$$d_\varphi(x) \cdot y \leq \varphi(y) .$$

- Si $\forall y \in \mathbb{R}^d \quad d_\varphi(x).y \leq \varphi(y)$, alors par définition

$$\varphi^*(d_\varphi(x)) = 1, \text{ i.e. } d_\varphi(x) \in S^* .$$

□

Cette proposition peut également s'interpréter géométriquement, comme on peut le voir sur la figure 3.2 :

Proposition 3.2.13. *Si on note $B_x = \varphi(x)B_\varphi$ la boule centrée sur l'origine et contenant x , alors la décomposition d_φ est normale si et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $d_\varphi(x)$ est normal à un hyperplan d'appui de B_x en x .*

Preuve :

Remarquons d'abord que :

$$y \in B_x \iff \varphi(y) \leq \varphi(x) .$$

Or le fait que pour tout x de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, le vecteur $d_\varphi(x)$ soit normal à un hyperplan d'appui de B_x en x est par définition :

$$\forall y \in B_x : d_\varphi(x).y \leq \varphi(x) . \tag{3.2.4}$$

- Si d_φ est une décomposition normale, alors d'après la proposition précédente,

$$d_\varphi(x).y \leq \varphi(y)$$

Comme $\varphi(y) \leq \varphi(x)$, l'expression (3.2.4) est bien vérifiée.

- Réciproquement, supposons (3.2.4) vérifiée. Soit $u \in B_\varphi$, alors $\varphi(x)u \in B_x$. Par conséquent d'après (3.2.4)

$$\forall u \in B_\varphi : d_\varphi(x).u \leq 1 ,$$

et puisque $d_\varphi(x).x = \varphi(x)$,

$$\varphi^*(d_\varphi(x)) = \max_{u \in B_\varphi} d_\varphi(x).u = 1$$

ce qui prouve que d_φ est normale. □

On peut remarquer que de la proposition 3.2.12 se déduit l'expression suivante :

$$d_\varphi(x).x = \max_{u^* \in B^*} u^*.x .$$

Autrement dit, $d_\varphi(x)$ est un point de la sphère duale qui réalise le maximum dans l'expression $\max_{u^* \in B^*} u^*.x$. Ce point n'est pas toujours unique, mais dans le cas d'une norme lisse, son unicité est par contre garantie :

Proposition 3.2.14. *Si φ est de classe \mathcal{C}^1 alors la décomposition normale est unique et coïncide avec le gradient*

$$d_\varphi = \text{grad } \varphi .$$

Preuve :

L'unicité est une simple conséquence de l'unicité du plan tangent en tout point de S_φ et de l'interprétation géométrique de la proposition précédente. En effet, puisque la différentielle $d\varphi_x$ s'exprime par $d\varphi_x(u) = \text{grad}_x \varphi . u$, alors $\text{grad}_x \varphi$ est visiblement normal à $\{y \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \varphi(y) = \varphi(x)\}$ en x . \square

Pour tout le reste du document, **toute les décompositions seront supposées normales**, c'est-à-dire à valeurs dans la sphère duale S^* .

3.2.5 Décomposition approchée de norme

Avec cette section commence la partie personnelle des résultats de ce chapitre.

Définition 3.2.15. Une ε -décomposition approchée de norme est une application $d_{\varphi,\varepsilon}$ définie sur \mathbb{R}^d telle que

$$\begin{cases} d_{\varphi,\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \text{ est un sous-ensemble fini de } S_\varphi^* \\ d_{\varphi,\varepsilon}(-x) = -d_{\varphi,\varepsilon}(x) , \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ (1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq d_{\varphi,\varepsilon}(x) . x , \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On emploiera abusivement le terme de décomposition approchée pour désigner son image, c'est à dire un échantillonnage de S_φ^* . Cette pratique sera justifiée par le résultat 3.3.4.

Dans cette définition, la première condition n'est en fait que la normalité de la décomposition. La deuxième est la symétrie, sans laquelle $d_{\varphi,\varepsilon}$ ne serait plus rattachée à une norme. Enfin, la dernière expression impose la proximité entre $d_{\varphi,\varepsilon}$ et la décomposition exacte. Par ailleurs, l'approximation se fait toujours par valeurs inférieures :

Proposition 3.2.16. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$d_{\varphi,\varepsilon}(x) . x \leq \varphi(x) .$$

Preuve :

On a $d_{\varphi,\varepsilon}(x) \in S^*$, et, par définition de la norme duale,

$$\forall u \in S^*, \forall v \in \mathbb{R}^d, u.v \leq \varphi(v) .$$

□

L'intérêt de ce type d'applications est, comme nous le verrons plus loin en détail, de permettre de définir une nouvelle norme φ_ε . On souhaiterait ainsi définir une norme approchée par

$$\varphi_\varepsilon(x) = d_{\varphi,\varepsilon}(x).x .$$

Cette définition pose en fait problème, et nous verrons dans la section suivante la construction adoptée.

3.3 Approximation de norme

3.3.1 Norme approchée

Le paragraphe précédent a montré qu'une approximation de la décomposition permettait de construire une nouvelle norme, proche de la norme originelle. Il convient donc d'introduire la notion d'approximation de norme pour plus de précision.

Définition 3.3.1. Une norme φ_ε est une ε -approximation de la norme φ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(x) .$$

Si $(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq \varphi(x)$, on parlera d'approximation inférieure.

Exemple : Soit \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne l_2 , et donc de la sphère unité canonique S^{d-1} . Soit H l'hypercube défini par

$$H = \{(x_1, \dots, x_d) | \forall i, |x_i| \leq 1\} .$$

La norme associée à H , c'est-à-dire la norme dont H est la boule duale unité, est bien sûr la norme infinie l_1 , et un rapide calcul permet de quantifier l'approximation de la norme euclidienne :

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, par définition,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \max_{v \in H} v.x \\ &= \sum_{i=1}^d x_i \end{aligned}$$

Il est immédiat que $\|x\|_1 \geq |x|$. Pour trouver le meilleur coefficient d'approximation de norme, il faut maximiser le rapport $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)}{\varphi(x)} \right|$. En exploitant la semi-linéarité des normes, il suffit de calculer le maximum de ce rapport pour

$x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\varphi(x) = 1$. Si on prend $\varepsilon = \max_{x \in S^{d-1}} |1 - \|x\|_1|$, alors $\varepsilon = \sqrt{d} - 1$. Donc l'hypercube est une $(\sqrt{d} - 1)$ -approximation supérieure de la norme euclidienne.

Proposition 3.3.2. *Toute décomposition approchée d'une norme induit une approximation φ_ε de la norme, de même erreur, et définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_\varepsilon(x) = \max_{u \in \mathbb{R}^d} d_{\varphi, \varepsilon}(u) \cdot x .$$

Preuve :

Cette expression définit bien une norme d'après 3.2.10. Si $d_{\varphi, \varepsilon}$ est une décomposition approchée de φ , alors par hypothèse,

$$(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq d_{\varphi, \varepsilon}(x) \cdot x ,$$

et donc

$$(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) .$$

On obtient l'autre inégalité grâce à la proposition 3.2.16. □

Ainsi la qualité d'approximation de la décomposition va se transmettre au niveau des normes, en ce sens que le taux d'erreur dans l'approximation de φ vérifie :

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)}{\varphi(x)} \right| \leq \varepsilon \tag{3.3.1}$$

On remarquera que dans le cas d'une décomposition approchée, la sphère duale unité de φ_ε est inscrite dans celle de φ , et donc l'approximation est par valeurs inférieures.

Les propriétés géométriques de $B_{\varphi_\varepsilon}^*$ ont une influence sur l'approximation de norme induite.

Proposition 3.3.3. *Soit \tilde{B}^* un ensemble tel que la norme $\tilde{\varphi}$ associée réalise une ε -approximation de la norme φ , alors :*

si $\tilde{B}^ \subset B^*$, $\tilde{\varphi}$ réalise une approximation inférieure de la norme φ ,*

si $\tilde{B}^ \supset B^*$, $\tilde{\varphi}$ réalise une approximation supérieure de la norme φ .*

Preuve :

L'origine appartient aux deux boules unités duales de φ et $\tilde{\varphi}$ que sont B^* et \tilde{B}^* . Si $\tilde{B}^* \subset B^*$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \tilde{u} \in \tilde{B}^*, \exists u \in B^* \text{ tel que } x \cdot \tilde{u} \leq x \cdot u ,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \max_{\tilde{u} \in \tilde{B}^*} x \cdot \tilde{u} \leq \max_{u \in B^*} x \cdot u ,$$

d'où finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

La norme $\tilde{\varphi}$ réalise donc bien une approximation inférieure de φ .

Si $\tilde{B}^* \supset B^*$, le raisonnement est identique. □

3.3.2 Échantillonnage de la sphère duale

Un cas particulier de l'approximation de norme est l'échantillonnage de la sphère duale, c'est-à-dire le choix d'un nombre fini de points de cette sphère. En effet, à un tel échantillonnage est associée une décomposition approchée de norme. Nous proposons donc une nouvelle définition de la décomposition de norme, équivalente à la première.

Définition 3.3.4. Soit $A = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ un ensemble de points de S^* , la sphère duale d'une norme φ . Alors A induit une décomposition approchée de φ par

$$d_{\varphi, \varepsilon}(x) = u_k^* \text{ tel que } u_k^* \cdot x = \max_{1 \leq i \leq n} u_i^* \cdot x .$$

En appliquant 3.3.2, on obtient immédiatement qu'un tel échantillonnage induit une approximation de la norme.

Corollaire 3.3.5. Soit $A = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ un ensemble de points de S^* , la sphère duale d'une norme φ . Alors A induit une approximation approchée inférieure de φ par

$$\varphi_\varepsilon(x) = \max_{1 \leq k \leq n} u_k^* \cdot x .$$

La boule unité de la norme φ_ε ainsi construite est un polytope inscrit dans la boule unité initiale.

Dans ces expressions, l'indice ε qui quantifie la qualité de la décomposition approchée ou de l'approximation de norme dépend de l'échantillonnage. Nous verrons avec le théorème 3.5.5 comment se mesure cette erreur d'approximation.

On peut remarquer que si l'échantillonnage de la sphère unité ne permet pas en général de définir une unique approximation de norme, il en va autrement lorsque la norme est lisse. En effet, la décomposition est alors unique, et donc à chaque échantillon de la sphère correspond un unique échantillon de la sphère duale.

Réciproquement, le résultat suivant est une simple conséquence de la définition d'une décomposition approchée.



Théorème 3.3.6. Soit d_φ une décomposition approchée de la norme φ . Alors

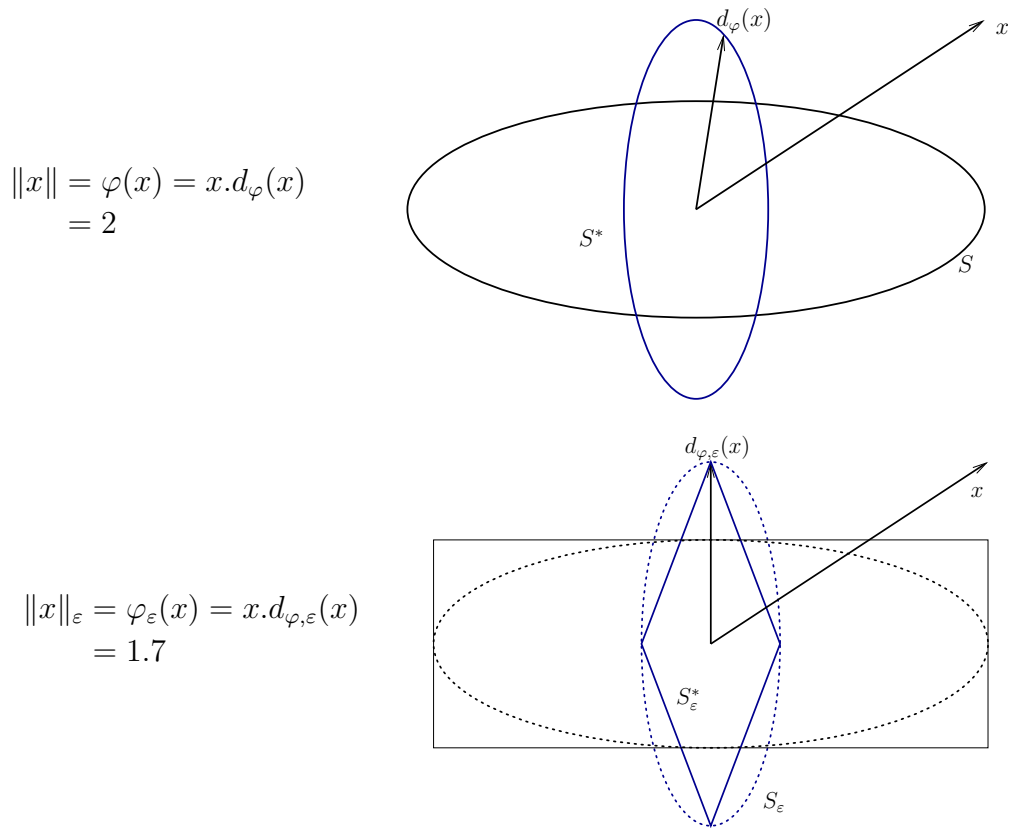


FIG. 3.3 – Échantillonnage de la sphère duale

⚡ l'ensemble des valeurs de d_φ forme un échantillonnage de la boule duale unité.

Par la suite, **on identifie une décomposition approchée à la norme qu'elle induit**. Il est alors possible d'affirmer que l'ensemble des sommets de sa boule duale unité forme l'échantillonnage de B_φ .

Remarque :

Une dernière remarque sur les propriétés de base des décomposition de normes à été abordée en (3.3.1). En effet, le taux d'erreur d'une décomposition approchée est donné par

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)}{\varphi(x)} \right| \leq \varepsilon$$

Dans certains cas (par exemple pour le problème du diamètre traité au chapitre 5), on sera amené à utiliser un taux différent :

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)}{\varphi_\varepsilon(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

Il est visible que les deux expressions sont asymptotiquement équivalentes pour ε tendant vers 0.

3.3.3 Boule unité ou boule duale ?

La démarche d'approximation d'une norme φ proposée ici repose sur un remplacement de la boule unité *duale* B_φ^* . Par exemple, une décomposition de norme approchée sera souvent introduite à partir d'un échantillonnage de B_φ^* . Il est alors légitime de se poser la question de savoir si un échantillonnage de la boule unité B_φ ne permet pas de construire de même une approximation de φ .

En fait, un tel procédé repose sur la notion de jauge. A un corps convexe symétrique \tilde{B} , on associe la nouvelle norme $\tilde{\varphi}$ définie par :

$$\tilde{\varphi}(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda \tilde{B} \right\} .$$

Cette définition pose un problème pratique, à savoir son calcul. Autant la norme définie par dualité se calcule aisément comme un maximum d'un nombre fini de produit scalaire, autant cette recherche d'une borne inférieure s'évalue difficilement. Un deuxième inconvénient est le critère d'approximation de la boule unité. Il est évident que l'erreur commise en remplaçant φ par $\tilde{\varphi}$ est proportionnelle à la distance radiale entre B_φ et \tilde{B} . Cette distance radiale est en fait identique à la distance de Hausdorff dans le cas de la norme canonique, mais s'avère difficilement manipulable pour d'autres normes.

3.4 Norme sur un produit cartésien d'espaces

3.4.1 Caractérisation

Norme sur un produit de deux espaces

Le principe est de décomposer l'espace actuel en produit cartésien de deux espaces de dimensions inférieures. L'approximation de la norme sera alors effectuée à l'aide des approximations des normes du produit. On dispose ainsi de deux espaces normés $(\mathbb{R}^{d_1}, \varphi_1)$, $(\mathbb{R}^{d_2}, \varphi_2)$. On cherche alors à définir une norme sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Pour cela on introduit une application φ :

$$\varphi(x_1, x_2) = \psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$$

où ψ est une norme sur \mathbb{R}^2 . Pour que φ soit effectivement une norme, il faut restreindre le choix de ψ à une norme croissante par rapport à chacune de ses composantes.

Théorème 3.4.1. *Soit $(\mathbb{R}^{d_1}, \varphi_1)$, $(\mathbb{R}^{d_2}, \varphi_2)$ deux espaces normés, et ψ une norme sur \mathbb{R}^2 vérifiant :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \mapsto \psi(\alpha, \beta) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ .$$

$$\forall \beta \in \mathbb{R}_+, \alpha \mapsto \psi(\alpha, \beta) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ .$$

Alors l'application φ définie dans $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, x_2) &\mapsto \psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \end{aligned}$$

est une norme sur \mathbb{R}^d .

Preuve :

Les propriétés de positivité, de proportionnalité, de symétrie et de séparation sont évidentes. Reste à vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\varphi(x + y) = \psi(\varphi_1(x_1 + y_1), \varphi_2(x_2 + y_2)) .$$

En appliquant les conditions de croissance sur ψ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &\leq \psi(\varphi_1(x_1) + \varphi_1(y_1), \varphi_2(x_2) + \varphi_2(y_2)) \\ &\leq \psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) + \psi(\varphi_1(y_1), \varphi_2(y_2)) \\ &\leq \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4.2. *Soit U un corps convexe compact et symétrique de \mathbb{R}^2 et soient A_1 (resp. A_2) un corps convexe compact et symétrique de \mathbb{R}^{d_1} (resp. \mathbb{R}^{d_2}). Alors l'ensemble $Z \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ défini par $Z = \{(u_1 a_1, u_2 a_2); u \in U, a_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, a_2 \in \mathbb{R}^{d_2}\}$ est un corps convexe compact et symétrique de $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.*

Preuve :

Notons $A = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Z est visiblement compact. Puisque U est symétrique d'intérieur non vide,

$$\exists \varepsilon > 0, \quad (\varepsilon, \varepsilon) \in U .$$

Donc $\varepsilon A \subset Z$, et il est alors immédiat que Z est d'intérieur non vide. De plus, la symétrie de U entraîne celle de Z .

Montrons désormais la convexité de Z . Soient $z, z' \in Z$, avec $z = (u_1 a_1, u_2 a_2)$ et $z' = (u'_1 a'_1, u'_2 a'_2)$. En utilisant la symétrie de U , on se restreint au cas où u_1, u_2, u'_1 , et u'_2 sont positifs. Puisque Z est compact, il suffit de prouver que $\frac{z+z'}{2}$ est dans Z . Remarquons que le cas particulier où $u_1 + u'_1$ est nul est trivial car alors $u_1 = u'_1 = 0$, et il en est de même si $u_2 + u'_2$ est nul. En dehors de ces cas particuliers,

$$\begin{aligned} \frac{z+z'}{2} &= \left(\frac{u_1 a_1 + u'_1 a'_1}{2}, \frac{u_2 a_2 + u'_2 a'_2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{u_1 + u'_1}{2} \left(\frac{u_1}{u_1 + u'_1} a_1 + \frac{u'_1}{u_1 + u'_1} a'_1 \right), \frac{u_2 + u'_2}{2} \left(\frac{u_2}{u_2 + u'_2} a_2 + \frac{u'_2}{u_2 + u'_2} a'_2 \right) \right) \end{aligned}$$

Or $\left(\frac{u_1 + u'_1}{2}, \frac{u_2 + u'_2}{2} \right)$ appartient à Z , et en faisant jouer la symétrie de A_1 puis de A_2 , on peut écrire les deux autres de l'expression sous forme de combinaisons convexes d'éléments de A_1 puis de A_2 , ce qui montre que $\frac{z+z'}{2}$ est dans Z . \square

Théorème 3.4.3. *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d telle que les hypothèses du théorème 3.4.1 soient vérifiées. Alors sa boule unité duale est caractérisée par*

$$B_\varphi^* = \{(\alpha y_1, \beta y_2) | (\alpha, \beta) \in B_\psi^*, y_1 \in B_{\varphi_1}^*, y_2 \in B_{\varphi_2}^*\}$$

Preuve :

Puisque les boules unité des différentes normes sont toutes compactes, la borne supérieure caractérisant chaque norme est atteinte :

$$\varphi_i(x_i) = \max_{u_i \in B_{\varphi_i}^*} u_i \cdot x_i$$

$$\psi(\alpha, \beta) = \max_{u \in B_\psi^*} u \cdot (\alpha, \beta)$$

Alors en notant $x = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \\
 &= \max_{u \in B_\psi^*} u \cdot (\max_{u_1 \in B_{\varphi_1}^*} u_1 \cdot x_1, \max_{u_2 \in B_{\varphi_2}^*} u_2 \cdot x_2) \\
 &= \max\{(\max_{u_1 \in B_{\varphi_1}^*} \alpha u_1 \cdot x_1, \max_{u_2 \in B_{\varphi_2}^*} \beta u_2 \cdot x_2); (\alpha, \beta) \in B_\psi^*\} \\
 &= \max\{(\max_{u_1 \in \alpha B_{\varphi_1}^*} u_1 \cdot x_1, \max_{u_2 \in \beta B_{\varphi_2}^*} u_2 \cdot x_2); (\alpha, \beta) \in B_\psi^*\} \\
 &= \max\{(u_1, u_2) \cdot (x_1, x_2); (\alpha, \beta) \in B_\psi^*, u_1 \in \alpha B_{\varphi_1}^*, u_2 \in \beta B_{\varphi_2}^*\} \\
 &= \max_{u^* \in A^*} u \cdot x
 \end{aligned}$$

où $A^* = \{(\alpha u_1, \beta u_2) | (\alpha, \beta) \in B_\psi^*, u_1 \in B_{\varphi_1}^*, u_2 \in B_{\varphi_2}^*\}$. La norme φ est donc bien définie par cet ensemble A^* . Le lemme précédent nous prouve que A^* est un corps convexe compact et symétrique. Il suffit alors d'utiliser le résultat 3.2.10 pour pouvoir identifier A^* et B_φ^* . \square

Norme sur un produit de k espaces

Nous venons de voir comment, à partir d'une norme convenable sur \mathbb{R}^2 , il est possible de "combiner" deux normes sur \mathbb{R}^{d_1} et \mathbb{R}^{d_2} respectivement pour obtenir une norme sur l'espace produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Ce même procédé ne présente aucune difficulté pour s'étendre, à partir d'une norme adéquate sur \mathbb{R}^k , à un produit de k normes.



Théorème 3.4.4. Soit $(\mathbb{R}^{d_1}, \varphi_1), \dots, (\mathbb{R}^{d_k}, \varphi_k)$ k espaces normés, et ψ une norme sur \mathbb{R}^k qui soit croissante par rapport à chacune de ses composantes. Alors l'application φ définie dans $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_k}$ par

$$\begin{aligned}
 \varphi : \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_k} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\
 (x_1, \dots, x_k) &\mapsto \psi(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_k(x_k))
 \end{aligned}$$

est une norme sur \mathbb{R}^d .



Théorème 3.4.5. Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ une norme sur \mathbb{R}^d définie dans le théorème 3.4.4. Alors sa boule unité duale est caractérisée par

$$B_\varphi^* = \{(\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_k y_k) | \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in B_\psi^*, y_i \in B_{\varphi_i}^*, 1 \leq i \leq k\} .$$

3.4.2 Produit cartésien d'approximations de normes

Norme approchée sur un produit de deux espaces

Dans un premier temps, on cherche à construire une approximation de norme à partir de deux normes approchées. Ensuite, la qualité de cette construction sera évaluée tant en terme d'erreur commise dans l'approximation, qu'en terme d'efficacité, où le nombre de ses sommets est le critère déterminant.

Théorème 3.4.6. *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d telle que les hypothèses du théorème 3.4.1 soient vérifiées. Si $\varphi_{i,\varepsilon}$ est une ε -approximation de la norme φ_i , alors*

$$\varphi_\varepsilon = \psi(\varphi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon})$$

est une ε -approximation de la norme φ .

Preuve :

Puisque $\varphi_{i,\varepsilon}$ est une ε -approximation de la norme φ_i ,

$$(1 - \varepsilon)\varphi_i(x_i) \leq \varphi_{i,\varepsilon}(x_i) \leq (1 + \varepsilon)\varphi_i(x_i) \quad (3.4.1)$$

Alors en utilisant les hypothèses de 3.4.1 sur ψ

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x) &= \psi(\varphi_{1,\varepsilon}(x_1), \varphi_{2,\varepsilon}(x_2)) \\ &\leq \psi((1 + \varepsilon)\varphi_1(x_1), (1 + \varepsilon)\varphi_2(x_2)) \\ &\leq (1 + \varepsilon)\psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \\ &\leq (1 + \varepsilon)\varphi(x) \end{aligned}$$

De même, on obtient que

$$(1 - \varepsilon)\psi(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \leq \varphi_\varepsilon(x)$$

Et donc φ_ε est une ε -approximation de la norme φ . □

Théorème 3.4.7 (Produit de normes approchées). *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d telle que les hypothèses du théorème 3.4.1 soient vérifiées. Si $\varphi_{i,\varepsilon_i}$ est une ε_i -approximation de la norme φ_i , et ψ_ε est une ε -approximation de la norme ψ , croissante par rapport à chaque variable, alors*

$$\tilde{\varphi} = \psi_\varepsilon(\varphi_{1,\varepsilon_1}, \varphi_{2,\varepsilon_2})$$

est une approximation de la norme φ d'erreur $\varepsilon + \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} + \varepsilon \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Si φ_1, φ_2 et ψ sont des approximations inférieures, alors $\tilde{\varphi}$ est une $(\varepsilon + \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$ -approximation inférieure.

Preuve :

Notons $\varepsilon_3 = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Puisque $\varphi_{i,\varepsilon_i}$ sont des approximations de φ_i , l'expression (3.4.1) reste valide. En appliquant les conditions de croissance par rapport

à chaque variable de ψ_ε , on obtient similairement à la démonstration précédente,
 $\psi_\varepsilon((1 - \varepsilon_1)\varphi_1(x_1), (1 - \varepsilon_2)\varphi_2(x_2)) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_\varepsilon((1 + \varepsilon_1)\varphi_1(x_1), (1 + \varepsilon_2)\varphi_2(x_2))$
 $(1 - \varepsilon_3)\psi_\varepsilon(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq (1 + \varepsilon_3)\psi_\varepsilon(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$

Et donc

$$(1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 - \varepsilon\varepsilon_3))\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq (1 + (\varepsilon + \varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3))\varphi(x)$$

Comme $1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 - \varepsilon\varepsilon_3) \geq 1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3)$, on en déduit finalement

$$(1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3))\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq (1 + (\varepsilon + \varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3))\varphi(x).$$

Ce qui implique que $\tilde{\varphi}(x)$ est une approximation de la norme φ d'erreur $\varepsilon + \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} + \varepsilon \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Si les approximations de normes sont inférieures, alors

$$(1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 - \varepsilon\varepsilon_3))\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

Or $1 - (\varepsilon + \varepsilon_3 - \varepsilon\varepsilon_3) > 1 - (\varepsilon + \varepsilon_3)$, donc

$$(1 - (\varepsilon + \varepsilon_3))\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$$

D'où le fait que $\tilde{\varphi}$ réalise une approximation inférieure de la norme φ d'erreur $\varepsilon + \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. \square

Un cas particulier de ce théorème sera utile par la suite :

Corollaire 3.4.8. *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d telle que les hypothèses du théorème 3.4.1 soient vérifiées. Si $\varphi_{i,\varepsilon}$ est une ε -approximation de la norme φ_i , et ψ_ε est une ε -approximation de la norme ψ , croissante par rapport à chaque variable, alors*

$$\varphi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(\varphi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon})$$

est une $2\varepsilon(1 + \varepsilon/2)$ -approximation de la norme φ .

Si φ_1, φ_2 et ψ sont des ε -approximations inférieures, alors φ est une 2ε -approximation inférieure.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à des approximations de même erreur. \square

Exemple : Les normes l_p se prêtent bien à une écriture sous forme de produit cartésien. Ainsi, considérons la norme l_3 sur \mathbb{R}^5 , notée l_3^5 .

$$\begin{aligned} l_3^5(x) &= (|x_1|^3 + \dots + |x_5|^3)^{1/3} \\ &= ((|x_1|^3 + |x_2|^3) + (|x_3|^3 + \dots + |x_5|^3))^{1/3} \\ &= l_3^2(l_3^2(x_1, x_2), l_3^3(x_3, x_4, x_5)) \end{aligned}$$

On note $l_3^5 = l_3^2 \otimes_{l_3^2} l_3^3 = l_3^2(l_3^2, l_3^3)$. On a ainsi écrit la norme l_3 de \mathbb{R}^5 en fonction des normes l_3 de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

L'intérêt de cette écriture est de pouvoir approcher l_3^5 en utilisant des approximations de dimensions inférieures. Ainsi, considérons des échantillonnages des boules duales unité de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 pour l_3 auxquels sont associés des approximations inférieures $l_{3,\varepsilon}^2$ et $l_{3,\varepsilon}^3$ des normes l_3^2 et l_3^3 que l'on supposera de même erreur ε . On peut alors construire une approximation de l_3^5 par produit cartésien. Cette nouvelle norme $l_{3,\varepsilon}^2 \otimes_{l_{3,\varepsilon}^2} l_{3,\varepsilon}^3$ sera une 2ε -approximation inférieure de l_3^5 , autrement dit :

$$(1 - 2\varepsilon)l_3^5 \leq l_{3,\varepsilon}^2 \otimes_{l_{3,\varepsilon}^2} l_{3,\varepsilon}^3 \leq l_3^5$$

Une propriété fondamentale de ce produit cartésien de normes est qu'à partir de normes polytopiales, c'est-à-dire de normes dont la boule unité est un polytope, il construit une norme elle aussi polytopiale.



Théorème 3.4.9. *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d telle que les hypothèses du théorème 3.4.1 soient vérifiées. Si $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ sont des normes polytopiales, dont les sommets des boules duales sont respectivement $\tilde{V}_{\varphi_1}, \tilde{V}_{\varphi_2}, \tilde{V}_{\psi}$, alors la boule unité de φ est un polytope et les sommets de la boule duale de φ sont*

$$\tilde{V}_{\varphi} = \{(\alpha x_1, \beta x_2) | (\alpha, \beta) \in \tilde{V}_{\psi}, x_1 \in \tilde{V}_{\varphi_1}, x_2 \in \tilde{V}_{\varphi_2}\}.$$

Preuve :

D'après le théorème 3.4.1,

$$B_{\varphi}^* = \{(\alpha y_1, \beta y_2) | (\alpha, \beta) \in B_{\psi}^*, y_1 \in B_{\varphi_1}^*, y_2 \in B_{\varphi_2}^*\}$$

Il est clair que tout élément de \tilde{V}_{φ} est dans B_{φ}^* , donc il suffit de montrer que tout sommet de B_{φ}^* est dans \tilde{V}_{φ} . Or les sommets de B_{φ}^* sont nécessairement construits à partir d'éléments de $\tilde{V}_{\psi}, \tilde{V}_{\varphi_1}$ et \tilde{V}_{φ_2} , donc ils sont bien dans \tilde{V}_{φ} . \square

Corollaire 3.4.10. *Sous les hypothèses du théorème 3.4.9, la norme résultante peut être évaluée par un maximum fini de produit scalaires canoniques*

$$\varphi(x) = \max_{y \in \tilde{V}_{\varphi}} x \cdot y$$

où $\tilde{V}_{\varphi} = \{(\alpha x_1, \beta x_2) | (\alpha, \beta) \in \tilde{V}_{\psi}, x_1 \in \tilde{V}_{\varphi_1}, x_2 \in \tilde{V}_{\varphi_2}\}$.

Corollaire 3.4.11. *Le produit cartésien de deux approximations polytopiales de normes est une approximation polytopiale de la norme-produit.*

Enfin, un élément essentiel pour pouvoir évaluer l'efficacité d'une approximation de la norme est de connaître le nombre des sommets de sa boule unité.

$\text{\textcircled{Z}}$ **Théorème 3.4.12.** *Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ une norme sur \mathbb{R}^d et φ_ε une ε -approximation polytopiale de φ définie par 3.4.9. Alors le nombre de sommets de V_{φ_ε} est majoré par $\text{card}(\tilde{V}_{\varphi_1}) \text{card}(\tilde{V}_{\varphi_2}) / 2$.*

Preuve :

Il suffit de dénombrer les éléments de

$$\{(\alpha x_1, \beta x_2) \mid (\alpha, \beta) \in \tilde{S}_\psi, x_1 \in \tilde{S}_{\varphi_1}, x_2 \in \tilde{S}_{\varphi_2}\}$$

en utilisant la symétrie de chacun des ensembles. □

En conclusion, regardons le cas particulier des produits cartésiens de décompositions de norme. On rappelle qu'une décomposition approchée de norme définit une unique norme avec laquelle on l'identifie. Une telle décomposition est une approximation inférieure de norme, et il est donc aisé de déduire de 3.4.7 les propriétés de ce produit cartésien.

$\text{\textcircled{Z}}$ **Théorème 3.4.13 (Produit de décompositions approchées).** *Soit φ une norme sur \mathbb{R}^d s'écrivant comme produit cartésien de norme :*

$$\varphi = \psi(\varphi_1, \varphi_2) .$$

$\text{\textcircled{Z}}$ *Si ψ_ε , $\varphi_{1,\varepsilon_1}$, et $\varphi_{2,\varepsilon_2}$ sont des normes découlant de décompositions approchées de respectivement ψ , φ_1 , et φ_2 , alors*

$$\tilde{\varphi} = \psi_\varepsilon(\varphi_{1,\varepsilon_1}, \varphi_{2,\varepsilon_2})$$

$\text{\textcircled{Z}}$ *est une norme associée à une décomposition approchée de φ d'erreur $\varepsilon + \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.*

$\text{\textcircled{Z}}$ *Si $n(\zeta)$ est le nombre de sommets de la boule unité d'une norme ζ , alors*

$$n(\tilde{\varphi}) \leq n(\psi_\varepsilon) n(\varphi_{1,\varepsilon_1}) n(\varphi_{2,\varepsilon_2}) .$$

Preuve :

Ces propriétés découlent immédiatement de 3.4.7 et 3.4.12. □

Norme approchée sur un produit de k espaces

Il va de soi que tous les résultats pour un produit de deux normes peuvent se transposer pour un produit de k normes. Nous proposons ici une transposition des principaux résultats de la section précédente. Les démonstrations, similaires, peuvent aisément se déduire des précédentes.

Théorème 3.4.14. Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ une norme sur \mathbb{R}^d définie par 3.4.4. Si $\varphi_{i,\varepsilon}$ est une ε -approximation de la norme φ_i , alors

$$\varphi_\varepsilon = \psi(\varphi_{1,\varepsilon}, \dots, \varphi_{k,\varepsilon})$$

est une ε -approximation de la norme φ .

Théorème 3.4.15. Soit $\varphi = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ une norme sur \mathbb{R}^d définie par 3.4.1. Soit $\varphi_{i,\varepsilon_i}$ est une ε_i -approximation de la norme φ_i , et ψ_ε est une ε -approximation de la norme ψ , croissante par rapport à chaque variable, et notons $\varepsilon' = \max_{1 \leq i \leq k} \{\varepsilon_i\}$. Alors

$$\varphi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(\varphi_{1,\varepsilon_1}, \dots, \varphi_{k,\varepsilon_k})$$

est une approximation de la norme φ d'erreur $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon'$.

Si φ_1, φ_2 et ψ sont des approximations inférieures, alors φ est une $(\varepsilon + \varepsilon')$ -approximation inférieure.

3.5 Norme approchée et approximation de la boule duale

Dans cette dernière section nous mettrons en évidence les liens entre l'approximation des convexes par des polytopes et les approximations polytopiales de normes. Le cas de la norme canonique est traité séparément car le lien entre les deux domaines sus-cités y est plus puissant. Nous abordons ensuite le cas général de ce problème. Nous déduisons ensuite de ces liens certaines propriétés fondamentales du comportement asymptotique de l'approximation polytopiale de normes.

3.5.1 Norme l_2 approchée

Rappelons (voir 1.3) que δ^H désigne la distance de Hausdorff dans \mathbb{R}^d , définie par

$$\delta^H(C, D) = \max\{\sup_{x \in C} d(x, D), \sup_{y \in D} d(C, y)\}$$

où $d(x, D)$ est la distance usuelle du point x au convexe D . On cherche à relier l'approximation d'une norme à l'approximation de sa boule unité pour δ^H . Dans le cas de la norme canonique, ce lien est très fort, puisque les deux problèmes s'avèrent équivalents.



Théorème 3.5.1. Soit \tilde{B} un corps convexe symétrique de \mathbb{R}^d et $\tilde{\varphi}$ la norme associée. On a la propriété :

$$\delta^H(B, \tilde{B}) \leq \varepsilon \iff \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme canonique}$$

Preuve :

On peut caractériser cette distance de Hausdorff en termes de fonctions support. Si l'on note $s_B, s_{\tilde{B}}$ les fonctions support respectives de B et \tilde{B} , alors

$$\delta^H(B, \tilde{B}) = \|s_B - s_{\tilde{B}}\|_\infty .$$

Or pour un convexe A , la fonction support est définie par

$$\forall u \in S^{d-1}, s_A(u) = \max_{a \in A} u.a .$$

Donc, en notant φ la norme canonique, l'hypothèse

$$\delta^H(B, \tilde{B}) \leq \varepsilon$$

est équivalente à

$$\max_{u \in S^{d-1}} \left| \max_{b \in B} u.b - \max_{\tilde{b} \in \tilde{B}} u.\tilde{b} \right| \leq \varepsilon$$

$$\max_{u \in S^{d-1}} |\varphi(u) - \tilde{\varphi}(u)| \leq \varepsilon$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, |\varphi(u) - \tilde{\varphi}(u)| \leq \varepsilon \varphi(u)$$

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, (1 - \varepsilon)\varphi(u) \leq \tilde{\varphi}(u) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(u)$$

Cette dernière expression définit $\tilde{\varphi}$ comme une ε -approximation de la norme canonique φ . L'équivalence est donc prouvée. \square

De ce résultat se déduit aisément une équivalence plus précise :

Corollaire 3.5.2. Soit \tilde{B} un corps convexe symétrique de \mathbb{R}^d et $\tilde{\varphi}$ la norme associée. On a la propriété :

$$\delta^H(B, \tilde{B}) = \varepsilon$$

$$\iff$$

- { La norme $\tilde{\varphi}$ est une ε -approximation de la norme canonique.
- { Si $\varepsilon' < \varepsilon$, alors $\tilde{\varphi}$ n'est pas une ε' -approximation de la norme canonique.

Preuve :

D'après le théorème précédent, si $\delta^H(B, \tilde{B}) = \varepsilon$, alors $\tilde{\varphi}$ est une ε -approximation de la norme φ . De plus, s'il existe $\varepsilon' < \varepsilon$ tel que $\tilde{\varphi}$ soit une ε' -approximation de la norme φ , on aurait alors, toujours d'après le théorème précédent,

$$\delta^H(B, \tilde{B}) \leq \varepsilon' ,$$

et donc $\delta^H(B, \tilde{B}) < \varepsilon$, ce qui est absurde. La première implication est ainsi prouvée.

Pour montrer la réciproque, on raisonne de même. Si $\tilde{\varphi}$ est une ε -approximation de la norme φ , alors $\delta^H(B, \tilde{B}) \leq \varepsilon$. Si de plus $\varepsilon' < \varepsilon$ implique que $\tilde{\varphi}$ n'est pas une ε' -approximation de la norme φ , alors l'expression $\delta^H(B, \tilde{B}) < \varepsilon$ amène immédiatement à une contradiction avec le théorème précédent. \square

Comportement asymptotique

Le paragraphe précédent relie l'approximation de la norme l_2 à celle de la boule unité. Dans le cadre d'une approximation polytopiale de la norme, on est donc amené à mesurer l'erreur d'approximation d'une norme grâce à la distance de Hausdorff entre la boule unité et un certain polytope convexe. Or le théorème 2.1.2 relie, pour une dimension fixée et dans le cas d'un polytope de meilleure approximation, cette distance au nombre de sommets du polytope. Le résultat suivant traduit donc le fait que si on construit une approximation de la norme l_2 à partir d'un polytope de meilleure approximation de B^d , alors nous pouvons donner une relation liant l'erreur d'approximation de l_2 au nombre de sommets de ce polytope.

Proposition 3.5.3. *Soit $\varphi = l_2^d$ la norme euclidienne usuelle. Pour tout polytope Q , notons φ_Q la norme dont la boule duale est le polytope Q . Soit n le plus petit entier tel qu'il existe un polytope P à n sommets tel que φ_P soit une ε -approximation de la norme φ . Alors pour d fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$n \sim \frac{1}{\theta_{d-1}} \left(\frac{1}{4\varepsilon} \right)^{(d-1)/2}.$$

Preuve :

D'après le théorème précédent, on va pouvoir se ramener à un problème d'approximation de convexes pour la distance de Hausdorff. Puisque la sphère unité pour l_2 est lisse, l'approximation des convexes par des polytopes est mesurée par 2.1.2 :

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) \sim \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} \sqrt{\kappa_C(x)} d\sigma(x) \right)^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}}.$$

En substituant les termes connus, on obtient

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) \sim \frac{1}{4} (\theta_{d-1})^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}}.$$

Dans cette expression, l'équivalent de la distance de Hausdorff vaut pour n tendant vers l'infini. Cependant la remarque 1 faisant suite au théorème 2.1.2

nous permet d'en déduire un équivalent pour η tendant vers 0 du nombre n minimal de sommets nécessaire pour que l'erreur d'approximation soit η . Ainsi,

$$n \sim \frac{1}{\theta_{d-1}} \left(\frac{1}{4\eta} \right)^{(d-1)/2} .$$

D'où, sous les conditions de l'énoncé et grâce à 3.5.2,

$$n \sim \frac{1}{\theta_{d-1}} \left(\frac{1}{4\varepsilon} \right)^{(d-1)/2} .$$

□

Un cas particulier est celui de la décomposition de norme. Puisqu'il correspond à un polytope inscrit dans la boule unité, on peut encore déduire du comportement asymptotique de l'approximation des convexes par des polytopes :

Proposition 3.5.4. *Soit $\varphi = l_2^d$ la norme euclidienne usuelle. Pour tout polytope Q , notons φ_Q la norme dont la boule duale est le polytope Q . Soit n le plus petit entier tel qu'il existe un polytope P à n sommets tel que φ_P soit une ε -approximation de la norme φ . Alors pour d fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$n \sim \frac{1}{\theta_{d-1}} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^{(d-1)/2} .$$

Preuve :

La preuve est identique à la précédente, à la différence qu'ici

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) \sim \frac{1}{4} (\theta_{d-1})^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}} .$$

D'où, grâce à 3.5.2,

$$\varepsilon \sim \frac{1}{4} \left(\theta_{d-1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{d-1}} .$$

On en déduit aisément l'expression recherchée. □

3.5.2 Approximation d'une norme quelconque

L'espace \mathbb{R}^d est muni d'une norme φ et d'une boule unité B . On rappelle que comme vu au chapitre 1, δ_φ^H est la distance de Hausdorff mesurée à travers la distance induite par φ , c'est-à-dire :

$$\delta_\varphi^H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d_\varphi(a, B), \sup_{b \in B} d_\varphi(A, b) \right\} .$$



Théorème 3.5.5. Soit \tilde{B}^* un corps convexe de \mathbb{R}^d et $\tilde{\varphi}$ la norme associée. On a la propriété suivante :

$$\delta_{\varphi^*}^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon \iff \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi$$

Preuve :

Raisonnons par équivalences successives à partir de l'hypothèse suivante :

$$\delta_{\varphi^*}^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon ,$$

ce qui peut se reformuler en

$$\max \left\{ \sup_{x \in B^*} d_{\varphi^*}(x, \tilde{B}^*), \sup_{y \in \tilde{B}^*} d_{\varphi^*}(B^*, y) \right\} \leq \varepsilon ,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in B^*, d_{\varphi^*}(x, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall y \in \tilde{B}^*, d_{\varphi^*}(B^*, y) \leq \varepsilon . \quad (3.5.1)$$

Considérons pour l'instant uniquement la première moitié de cette expression :

$$\forall x \in B^*, d_{\varphi^*}(x, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in B^*, \exists \tilde{x} \in \tilde{B}^* : d_{\varphi^*}(x, \tilde{x}) \leq \varepsilon$$

Or, d'après 3.2.3, $\varphi^*(a) = \max_{u \in B_\varphi} a.u$, donc l'expression équivaut à

$$\forall x \in B^*, \exists \tilde{x} \in \tilde{B}^*, \forall u \in B : (x - \tilde{x}).u \leq \varepsilon .$$

Si $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $|v| = 1$, alors $v \in S^{d-1}$ et $\frac{v}{\varphi(v)} \in B$, et l'expression précédente se retranscrit en

$$\max_{x \in B^*} x.u - \max_{\tilde{x} \in \tilde{B}^*} \tilde{x}.u \leq \varepsilon .$$

En réunissant les deux membres de (3.5.1), on obtient : $\forall v \in S^{d-1}$,

$$\left| \max_{b^* \in B^*} v.b^* - \max_{\tilde{b}^* \in \tilde{B}^*} v.\tilde{b}^* \right| \leq \varepsilon \varphi(v) .$$

Autrement dit

$$|\varphi(v) - \tilde{\varphi}(v)| \leq \varepsilon \varphi(v) ,$$

ce qui est équivalent à

$$(1 - \varepsilon)\varphi(v) \leq \tilde{\varphi}(v) \leq (1 + \varepsilon)\varphi(v) ,$$

ce qui correspond au fait que $\tilde{\varphi}$ est une ε -approximation de φ . □

Or l'équivalence des normes en dimension finie permet d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.5.6. Soient φ_1 et φ_2 deux normes sur \mathbb{R}^d et B, \tilde{B} deux corps convexes.

Alors

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tel que } \alpha \delta_{\varphi_1}^H(B, \tilde{B}) \leq \delta_{\varphi_2}^H(B, \tilde{B}) \leq \beta \delta_{\varphi_1}^H(B, \tilde{B}) ,$$

les valeurs optimales étant $\alpha = \inf_{\varphi_1(u)=1} \varphi_2(u)$ et $\beta = \sup_{\varphi_1(u)=1} \varphi_2(u)$.

Preuve :

En dimension finie, les boules fermées sont des compacts et les normes sont des applications continues, donc les valeurs $\alpha = \inf_{\varphi_1(u)=1} \varphi_2(u)$ et $\beta = \sup_{\varphi_1(u)=1} \varphi_2(u)$ sont bien définies. Il est alors immédiat que

$$\alpha \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \beta \varphi_1(x) ,$$

d'où $\forall x \in B$:

$$\alpha d_{\varphi_1}(x, \tilde{B}) \leq d_{\varphi_2}(x, \tilde{B}) \leq \beta d_{\varphi_1}(x, \tilde{B}) ,$$

ce qui donne le résultat voulu à partir de la définition de la distance de Hausdorff

$$\delta_{\varphi}^H(B, \tilde{B}) = \max \left\{ \sup_{x \in B} d_{\varphi}(x, \tilde{B}), \sup_{y \in \tilde{B}} d_{\varphi}(B, y) \right\} .$$

□

De même que pour la norme l_2 , il se déduit de ce résultat une équivalence plus précise :

Corollaire 3.5.7. Soit \tilde{B}^* un corps convexe symétrique de \mathbb{R}^d et $\tilde{\varphi}$ la norme associée. On a l'équivalence :

$$\delta_{\tilde{\varphi}^*}^H(B^*, \tilde{B}^*) = \varepsilon$$

$$\iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme canonique} \\ \text{si } \varepsilon' < \varepsilon, \text{ alors } \tilde{\varphi} \text{ n'est pas une } \varepsilon'\text{-approximation de la norme canonique} \end{array} \right.$$

Preuve :

La démonstration est identique à celle de 3.5.7. □

Par conséquent, une approximation pour la distance de Hausdorff usuelle nous garantit une approximation d'ordre optimale de la norme.

Proposition 3.5.8. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout \tilde{B}^* corps convexe de \mathbb{R}^d , de norme associée $\tilde{\varphi}$:

$$\delta^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \frac{\varepsilon}{\beta} \implies \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi$$

En particulier, $\beta = \max_{u \in S^{d-1}} \varphi^*(u)$ convient et est optimal.

On peut en déduire par exemple le résultat suivant concernant les normes l_p^d :

Corollaire 3.5.9. *Si $p \leq 2$, alors*

$$\delta^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon \implies \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi$$

Si $p > 2$, alors

$$\delta^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq d^{1/p-1/2} \varepsilon \implies \tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi$$

Preuve :

Le dual de l_p est l_q avec $1/p + 1/q = 1$. Donc il suffit de calculer $\beta = \max_{u \in S^{d-1}} l_q(u)$ qui vaut bien évidemment 1 pour $q \geq 2$ et au plus $d^{1/q-1/2}$ sinon. Or $1/q - 1/2 = 1/2 - 1/p$. On a donc dans les deux cas

$$\delta_{\varphi^*}^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon ,$$

et le théorème 3.5.5 donne le résultat. □

De la même façon que pour 3.5.8, on montre le résultat réciproque à l'aide du lemme 3.5.6.

Proposition 3.5.10. *Soit \mathbb{R}^d muni de φ et soit φ_ε une ε -approximation de la norme φ . Alors*

$$\delta^H(B_{\varphi}^*, B_{\varphi_\varepsilon}^*) \leq \varepsilon \max_{u \in S^{d-1}} \varphi^*(u) .$$

Pour l'illustrer, nous ferons encore appel aux normes l_p .

Corollaire 3.5.11. *Si $p \leq 2$, alors*

$$\tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi \implies \delta^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq \varepsilon .$$

Si $p > 2$, alors

$$\tilde{\varphi} \text{ est une } \varepsilon\text{-approximation de la norme } \varphi \implies \delta^H(B^*, \tilde{B}^*) \leq d^{1/p-1/2} \varepsilon .$$

Preuve :

La valeur de $\max_{u \in S^{d-1}} \varphi^*(u) = \max_{u \in S^{d-1}} l_q(u)$ est de 1 pour $p \leq 2$ et au plus $d^{1/p-1/2}$ sinon. Ce qui, à l'aide de 3.5.10, donne le résultat souhaité. □

Comportement asymptotique

De même que pour la norme l_2 , nous utilisons le théorème 2.1.2 pour obtenir des bornes asymptotiques sur la complexité de l'approximation polytopiale de normes.

Proposition 3.5.12. *Soit φ une norme \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^d . Pour tout polytope Q , notons φ_Q la norme dont la boule duale est le polytope Q . Soit n le plus petit entier tel qu'il existe un polytope P à n sommets tel que φ_P soit une ε -approximation de la norme φ . Alors pour d fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$n = \Theta \left(\left(\frac{1}{4\varepsilon} \right)^{(d-1)/2} \right) .$$

Preuve :

D'après le théorème précédent, on se ramène à un problème d'approximation de convexes pour la distance de Hausdorff. Puisque la sphère unité pour φ est lisse, l'approximation des convexes par des polytopes est mesurée par 2.1.2 :

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) \sim \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \int_{\partial C} \sqrt{\kappa_C(x)} d\sigma(x) \right)^{\frac{2}{d-1}} \frac{1}{n^{2/(d-1)}} ,$$

d'où

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) = \Theta \left(\frac{1}{n^{2/(d-1)}} \right) .$$

En faisant appel à la remarque 1 faisant suite au théorème 2.1.2, il vient :

$$n = \Theta \left(\left(\frac{1}{4\varepsilon} \right)^{(d-1)/2} \right) .$$

Or d'après 3.5.5 et 3.5.6, on a

$$\delta^H(B_\varphi, B_{\varphi_P}) = \Theta(\varepsilon) .$$

Ces deux dernières expressions donnent alors le résultat. □

Pour le cas particulier de la décomposition de norme, on peut déduire du comportement asymptotique de l'approximation des convexes par des polytopes :

Théorème 3.5.13. *Soit φ une norme \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^d . Alors il existe φ_ε , une ε -décomposition de φ dont la boule a n sommets. Si n est minimal, alors pour d fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$n = \Theta \left(\frac{1}{\varepsilon^{(d-1)/2}} \right) .$$

En fait, dans le cadre d'une décomposition approchée d'ordre optimal d'une norme lisse, on s'intéressera souvent au terme $\varepsilon n^{\frac{2}{d-1}}$ mesurant la vitesse de convergence de l'approximation. L'objectif de la construction explicite d'une approximation de la norme étant bien sûr de minimiser cette valeur.

Enfin, sachant que de tous les corps convexes, les convexes lisses sont les plus difficiles à approcher par des polytopes (voir 2.1.4), on en déduit sur le même

principe que précédemment une majoration de la complexité d'une approximation polytopiale de norme.

Théorème 3.5.14. *Soit \mathbb{R}^d muni d'une norme φ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une ε -décomposition de la norme dont le nombre de sommets de la boule unité est*

$$n = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{(d-1)/2}}\right)$$

où d est fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$.

Conclusion En conclusion de ce chapitre, il nous paraît important de souligner l'importance du théorème 3.5.13. En effet, de nombreux algorithmes utilisent par exemple des *résolutions approchées par projections* qui font donc implicitement appel à des décompositions de normes. Les bornes de complexité de ces algorithmes comprennent un terme en $O\left(\frac{1}{\varepsilon^{(d-1)/2}}\right)$ sans que l'optimalité de cette majoration soit établie. Le résultat établi ici assure que ce terme est optimal, non seulement pour la distance usuelle (où même la constante de convergence est connue, cf 3.5.4), mais aussi pour toute la famille des normes dont la boule unité est \mathcal{C}^2 . Nous reviendrons plus en détail sur cet aspect en abordant le calcul approché du diamètre au chapitre 5.

Chapitre 4

Apport de la décomposition de normes à l'approximation des convexes

O God, I could be bounded in a nut shell and count myself a king of infinite space, were it not that I have bad dreams.

William Shakespeare. *Hamlet*, II, 2.

Résumé

Nous commençons ce chapitre en donnant une méthode géométrique de construction explicite d'un polytope inscrit approchant une boule de l_p^d , et une majoration de la distance de Hausdorff du polytope à la boule unité est déterminée. Nous proposons ensuite différentes méthodes permettant de construire par récurrence une décomposition approchée de toutes sortes de normes sur \mathbb{R}^d , parmi lesquelles les normes euclidiennes et l_p . Enfin, nous établissons un parallèle entre ces deux types d'approches et en déduisons de nouvelles constructions de polytopes approchant des ellipsoïdes ou des boules l_p .

Sommaire

4.1	Introduction	95
4.2	Construction géométrique de polytopes approximants	95
4.2.1	Polytope approximant une boule de l_2^d	95
	Un algorithme d'ordre optimal	96
4.2.2	Polytope approximant une boule de l_p^d	100
	Un algorithme d'ordre optimal dans \mathbb{R}^d	101
4.2.3	Autres convexes lisses	103
4.3	Construction de décompositions approchées de normes	104
4.3.1	Décomposition approchée de l_2^d	104
4.3.2	Norme l_p^d	108
	Norme l_p dans le plan \mathbb{R}^2	108
	Norme l_p dans \mathbb{R}^d , $d > 2$	110
4.3.3	Normes euclidiennes	111
4.3.4	Normes l_p^d anisotropes	113
4.4	Des décompositions approchées aux polytopes approximants	114
	Boule canonique	114
	Ellipsoïdes	115
	Boules l_p	115

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons des méthodes explicites de construction d'approximations dans \mathbb{R}^d , pour d fixé. Pour certains convexes, comme par exemple la sphère S^{d-1} , nous verrons qu'il est possible de construire géométriquement un polytope approximant. En revanche, la quantification de cette approximation en terme d'erreur de Hausdorff et la généralisation de ces constructions à d'autres corps convexes, parmi lesquels les ellipsoïdes, présentent de grandes difficultés. Pour éviter ces obstacles, nous nous intéresserons à la construction de décompositions approchées de normes. Cette étude est motivé par le fait que les décompositions présentent un intérêt *per se* (voir 5.3 et suivants), mais aussi parce qu'au chapitre précédent nous avons montré qu'une approximation polytopiale d'une norme induisait une approximation polytopiale de la boule duale. De ces constructions de décompositions approchées nous pourrions donc déduire de nouveaux procédés d'obtention de polytopes approximants.

4.2 Construction géométrique de polytopes approximants

Le principe est ici purement géométrique. Pour certains corps convexes, les sections de ces convexes par des hyperplans particuliers sont de type connu. Ainsi une telle section de boule unité usuelle dans \mathbb{R}^d est une aussi boule pour l_2 , de rayon a priori non unitaire, et de dimension $d - 1$. On cherchera donc à placer judicieusement de telles sections dans lesquelles on inscrira un polytope approximant de dimension $d - 1$. L'enveloppe convexe de tous ces $(d - 1)$ -polytopes formera alors un polytope approximant dans \mathbb{R}^d .

Il est par ailleurs évident que savoir construire une approximation polytopiale de la boule unité est équivalent à savoir construire une approximation polytopiale d'une boule quelconque. On ne s'intéressera donc ici qu'à la boule unité de \mathbb{R}^d pour la norme choisie.

4.2.1 Polytope approximant une boule de l_2^d

On rappelle que la sphère (respectivement la boule) unité de \mathbb{R}^d est notée S^{d-1} (respectivement B^d).

Un algorithme d'ordre optimal

Initialisation On commence par construire une approximation polytopiale inscrite P^2 de la boule $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ qui soit symétrique par rapport aux axes. Il est même possible de choisir cette dernière optimale, en ce sens que si on note n_2 le nombre de sommets de P^2 , elle vérifie

$$\delta^H(B^2, P^2) = \delta^H(B^2, \mathcal{P}_{n_2})$$

En fait, on considère simplement un polygone régulier P^2 inscrit dans S^1 . D'après 2.4.1, ce polygone est un polygone de meilleure approximation pour la distance de Hausdorff, donc il minimise l'erreur parmi tous les polygones ayant au plus le même nombre de sommets. Le théorème 2.1.2 nous assure alors que :

$$\delta^H(B^2, P^2) \sim \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n_2^2}.$$

On peut ici calculer explicitement cette distance :

$$\delta^H(B^2, P^2) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n_2}\right),$$

ce qui donne la majoration suivante

$$\delta^H(B^2, P^2) \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n_2^2}. \quad (4.2.1)$$

A titre de simplification, on supposera que le point $(0, 1)$ n'appartient pas à P^2 et que n_2 est pair.

Induction On construit ensuite par récurrence les polytopes $P^{d+1} \in \mathbb{R}^{d+1}$ qui approchent B^{d+1} . Pour cela, on décompose S^d en faisant apparaître S^1 et S^{d-1} (plus précisément, on utilise application surjective de $S^1 \times S^{d-1}$ sur S^d). Soient (y_1, \dots, y_k) les ordonnées des sommets de P^2 , avec $k = n_2/2$. Alors $\{X \in \mathbb{R}^d \mid (X, y_i) \in S^d\}_{i \in \{1 \dots k\}}$ est un ensemble de k sphères $r_i S_i^{d-1}$ de dimension $d-1$ et de rayon $(r_i)_{i \in \{1 \dots k\}}$. On peut donc inscrire un polytope dans chacune grâce à l'hypothèse de récurrence. On obtient alors une approximation polytopiale inscrite de S^d par :

$$P^{d+1} = \text{conv}(r_i P^d + y_i e_{d+1}) \quad (4.2.2)$$

où e_{d+1} est le dernier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{d+1} , et conv désigne l'enveloppe convexe.

Autrement dit, si σ^i est l'ensemble des sommets de P^i , on définit σ^{d+1} par

$$\sigma^{d+1} = \{(x_1, \dots, x_{d+1}) \mid \exists \alpha \in [0, 1] : (\alpha, x_{d+1}) \in \sigma^1 \text{ et } (x_1, \dots, x_d) \in \alpha^2 \sigma^d\}.$$

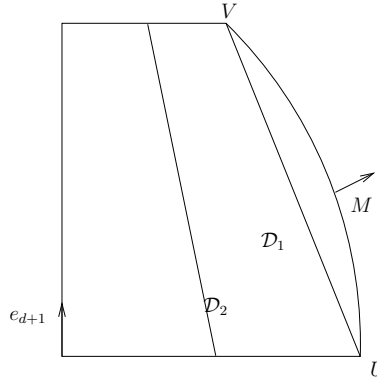


FIG. 4.1 – Vue de coupe de S^d dans le plan Π

Etude de la convergence Le procédé de construction étant désormais posé, nous mesurons sa qualité en évaluant, à l’aide de la distance de Hausdorff, l’erreur d’approximation commise.

Proposition 4.2.1. *Soient P^d un polytope inscrit dans B^d pour $d > 2$, et P^2 un polygone inscrit dans B^2 . Alors, si P^{d+1} est le polytope construit par le procédé ci-dessus :*

$$\delta^H(B^{d+1}, P^{d+1}) \leq \delta^H(B^d, P^d) + \delta^H(B^2, P^2) .$$

Preuve :

Par construction, P^{d+1} est inscrit dans le bord de B^{d+1} , donc

$$P^{d+1} \subset B^{d+1}$$

et donc

$$\delta^H(B^{d+1}, P^{d+1}) = \sup_{M \in B^{d+1}} d(M, P^{d+1}) .$$

Puisque B^{d+1} est compact,

$$\exists M \in B^{d+1} \text{ tel que } \delta^H(B^{d+1}, P^{d+1}) = d(M, P^{d+1}) .$$

Plus précisément, on peut affirmer que M est sur le bord de B^{d+1} , autrement dit $M \in S^d$.

On considère le plan Π contenant M et la normale à S^d en M , passant par l’origine. Soit $y = M \cdot e_{d+1}$ la composante de M selon la direction e_{d+1} (e_{d+1} désignant comme en (4.2.2) le dernier vecteur de la base canonique) et soit $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ l’ensemble des ordonnées de P^2 . Alors Y est aussi l’ensemble des composantes selon e_{d+1} des sommets de P^{d+1} . Donc

$$\exists!(y_i, y_{i+1}) \in Y^2 \text{ tel que } y_i < y < y_{i+1} .$$

Dans le plan Π , posons U et V les points de $\Pi \cap S^d$ dont la composante en e_{d+1} vaut respectivement y_i et y_{i+1} , et dont la distance à M est minimale (voir

figure 4.1). Alors $\Pi \cap S^d$ est un cercle plan de rayon 1, et $[UV]$ est une corde de ce cercle unité, identique à l'un des côtés de P^2 . Notons \mathcal{D}_1 ce segment $[UV]$. Alors

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D}_1) &\leq \sup_{s \in S^1} d(s, P^2) \\ &\leq \delta^H(B^2, P^2) \end{aligned}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D}_1 , et \mathcal{D}_2 le segment $\Pi \cap P^{d+1}$. Alors

$$\begin{aligned} \delta^H(H, P^{d+1}) &= d(H, \mathcal{D}_2) \\ &\leq \max_{N \in \mathcal{D}_1} d(N, \mathcal{D}_2) \\ &\leq \max\{d(U, \mathcal{D}_2), d(V, \mathcal{D}_2)\} \\ &\leq \delta^H(B^d, P^d) \end{aligned}$$

Le passage à la dernière inégalité est dû au fait que l'hyperplan passant par U de normale e_{d+1} s'intersecte avec S^d et P^{d+1} en une image homothétique de S^{d-1} et P^d respectivement. On obtient finalement

$$\begin{aligned} \delta^H(B^{d+1}, P^{d+1}) &= d(M, \mathcal{D}_1) + d(H, \mathcal{D}_2) \\ &\leq \delta^H(B^2, P^2) + \delta^H(B^d, P^d) \end{aligned}$$

□

Ce résultat sera généralement exploité par l'intermédiaire du corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2. *Sous les mêmes conditions que précédemment,*

$$\delta^H(B^{d+1}, P^{d+1}) \leq d\delta^H(B^2, P^2) .$$

Preuve :

D'après le résultat précédent, $\delta^H(B^d, P^d)$ est majorée par une suite arithmétique de raison $\delta^H(B^2, P^2)$. □

Nous avons maintenant réuni les différents éléments permettant de donner le comportement précis de cette construction. Rappelons auparavant que d est fixé, et que n_d tend vers l'infini. Le paramètre est ici n_2 , le nombre de sommets du polygone d'initialisation P_1 , avec la propriété que si n_2 tend vers l'infini, alors n_d aussi.



Théorème 4.2.3. *Si P^2 est une approximation d'ordre optimal de B^2 , alors la construction par récurrence proposée est d'ordre optimal dans \mathbb{R}^d , c'est-à-dire qu'à d fixé et pour n_d tendant vers l'infini :*

$$\delta^H(B^d, P^d) = \Theta \left(n_d^{-\frac{2}{d-1}} \right)$$

où $n_d = \text{card}(\sigma^d)$ est le nombre de sommets de P^d .

On a de plus la relation

$$\delta^H(B^d, P^d) \leq (d-1)\pi^2 2^{2/d-3} n_d^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Preuve :

Il faut d'abord évaluer le nombre de sommets de P^d . Puisqu'à la moitié des sommets de P^2 est associé un polytope homothétique à P^{d-1} , on a :

$$n_d = n_{d-1} n_2 / 2 .$$

On obtient alors immédiatement

$$n_d = 2^{1-d} (n_2)^d ,$$

d'où

$$(n_d)^{\frac{2}{d}} = 2^{2/d-2} n_2^2 . \tag{4.2.3}$$

Il nous faut donc montrer que $n_2^2 \delta^H(B^d, P^d)$ est majoré par une expression indépendante de n_2 . La proposition 4.2.2 nous assure donc que

$$\delta^H(B^d, P^d) \leq (d-1) \delta^H(B^2, P^2) .$$

La condition d'optimalité de P_2 vue en 4.2.1 donne alors :

$$\delta^H(B^d, P^d) \leq \frac{(d-1)\pi^2}{2} \frac{1}{n_2^2} .$$

Et il ne reste qu'à obtenir la majoration souhaitée à l'aide de 4.2.3.

$$\delta^H(B^d, P^d) \leq (d-1)\pi^2 2^{2/d-3} n_d^{-\frac{2}{d-1}} . \tag{4.2.4}$$

Quant à l'optimalité, le théorème 2.1.2 implique que

$$\delta^H(B^d, \mathcal{P}_n) = \Theta \left(n^{-2/(d-1)} \right) ,$$

donc cette expression associée à 4.2.4 entraîne que la borne trouvée est une majoration d'ordre optimale, et donc donne aussi l'ordre de convergence :

$$\delta^H(B^d, P^d) = \Theta \left(n_d^{-\frac{2}{d-1}} \right) .$$

□

L'efficacité de ce procédé peut donc se mesurer ainsi :

Théorème 4.2.4. *Sous les mêmes conditions, la construction proposée mène*

à un polytope $P \subset \mathbb{R}^d$ inscrit dans S^{d-1} à n sommets avec

$$n = 2^{d-2} (n_2)^{d-1}$$

et

$$\delta^H(P, B^{d-1}) \leq (d-1) \pi^2 2^{\frac{2}{d-1}-3} \frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}} .$$

Preuve :

C'est une simple reformulation du théorème 4.2.3. □

En combinant les deux expressions de ce théorème, on obtient

$$\delta^H(P, B^d) \leq \frac{(d-1) \pi^2}{2} \frac{1}{n_2^2}$$

Donc si on cherche à construire dans \mathbb{R}^d un polytope P inscrit dans B^d tel que $\delta^H(P, B^d) \leq \varepsilon$, il suffit d'appliquer le procédé récurrent avec pour condition initiale :

$$n_2 \geq \frac{(d-1) \pi^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} .$$

A titre de comparaison, le comportement optimal pour une approximation inscrite en dimension d est d'après 2.1.2 :

$$\delta^H(B^d, \mathcal{P}_n) \sim \frac{1}{2} (\theta_{d-1})^{2/(d-1)} n^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Ainsi, pour $B^3 \subset \mathbb{R}^3$, la borne sur l'erreur d'approximation par ce procédé est d'après 4.2.3 de

$$\delta^H(B^3, P^3) \leq 4.93 \frac{1}{n}$$

pour un optimum d'environ

$$\delta^H(B^3, \mathcal{P}_n) \sim 2.92 \frac{1}{n} .$$

Il est visible que dans \mathbb{R}^3 la majoration obtenue pour cette méthode récurrente est assez proche de la borne théorique optimale pour pouvoir être utilisable en pratique.

4.2.2 Polytope approximant une boule de l_p^d

Rappelons qu'une norme l_p sur \mathbb{R}^d s'écrit sous la forme :

$$\|x\|^p = \sum_{k=1}^d |x_k|^p$$

et sa boule duale est la boule unité pour la norme l^q où

$$1/p + 1/q = 1 .$$

La section qui précède ayant établi une méthode permettant d'approcher la boule unité de l_2^d , nous allons généraliser ceci à l_p^d .

Un algorithme d'ordre optimal dans \mathbb{R}^d

On procède par récurrence sur la dimension, pour $d > 2$.

Initialisation On suppose donnée une approximation polygonale inscrite P_d^2 de la boule unité l_p dans \mathbb{R}^d . A titre de simplification, on supposera que le point $(0, 1)$ n'appartient pas à P^2 et que le nombre de sommets n_2 de P_d^2 est pair. Pour l'obtention d'un tel polygone approximant, se reporter à 4.4. Certes, il n'est pas difficile de donner un polygone à n sommets d'ordre optimal, *i.e.* tel que

$$\delta^H(B_{l_p^2}, P^2) = \Theta\left(\frac{1}{n}\right)$$

puisque d'après 2.4.11 il suffit d'échantillonner un paramétrage "convenable" de $S_{l_p^2}$. Par contre, il s'avère extrêmement difficile et calculatoire de mesurer précisément cette distance de Hausdorff.

Induction On construit ensuite par récurrence les polytopes $P^{d+1} \in \mathbb{R}^{d+1}$ qui approchent B^{d+1} . Pour cela, on écrit $X \in \mathbb{R}^{d+1}$ sous la forme

$$X = (x_1, X_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d .$$

On peut alors décrire la boule unité pour l_p

$$X = (x_1, X_2) \in B_p^d \iff |x_1|^p + \|X_2\|^p \leq 1 ,$$

donc

$$B_p^{d+1} = \{(x_1, X_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d | \exists \alpha \in [0, 1], (x_1, \alpha) \in B_p^1 \text{ et } X_2 \in \alpha^p B_p^d\} .$$

Convergence Le résultat suivant est l'analogie de celui concernant la boule l_2 .

Proposition 4.2.5. *Pour une telle construction, en posant $\beta_d = \max\{1, \max_{x \in S^{d-1}} l_p^d(x)^p\}$, alors*

$$\delta^H(P^{d+1}, B_{l_p^{d+1}}) \leq \delta^H(P^d, B_{l_p^d}) + \beta_d \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) .$$

Preuve :

Le raisonnement est identique à celui effectué pour la norme canonique. L'existence du point M réalisant le maximum de la distance de Hausdorff entre les deux convexes est toujours valable. On construit de même le plan Π et la droite \mathcal{D}_1 d'extrémités U et V . Notons (τ, e_{d+1}) une base orthonormée de Π . Alors

$$S_{l_p^{d+1}} = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^{d+1} |x_i|^p = 1 \right\}$$

$$\Pi = \{u\tau + ve_{d+1} \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

Regardons l'intersection $\Pi \cap S_{l_p^{d+1}}$ dans le repère (τ, e_{d+1}) : ce sont les points (u, v) tels que

$$\sum_{i=1}^d |\tau_i|^p |u|^p + |v|^p = 1 ,$$

autrement dit

$$l_p(\tau)^p |u|^p + |v|^p = 1 .$$

Remarquons que la dernière composante de τ est nulle. Il peut donc être considéré comme un vecteur de \mathbb{R}^d . Posons alors $\beta_d = \max\{1, \max_{x \in S^{d-1}} l_p^d(x)^p\}$. Puisque $l_p(\tau)^p \leq \beta_d$, il est clair que

$$d(M, \mathcal{D}_1) \leq \beta_d \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) .$$

Or comme pour la norme euclidienne usuelle, $d(H, P^{d+1}) \leq \delta^H(P^d, B_{l_p^d})$. Donc

$$\delta^H(P^{d+1}, B_{l_p^{d+1}}) \leq \delta^H(P^d, B_{l_p^d}) + \beta_d \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) .$$

□

La qualité de cette construction dépend bien évidemment de son initialisation. Pour un polygone initial P^2 ayant n_2 sommets, la qualité de l'approximation est donnée par $\delta^H(B_p^2, P^2)n_2^2$, où n_2^2 désigne bien sûr le carré de n_2 . En supposant connue une majoration $\alpha \geq \delta^H(B_p^2, P^2)n_2^2$, il est alors possible de majorer l'erreur de cette construction par récurrence :



Théorème 4.2.6. *Une telle construction est d'ordre optimal. Plus précisément, dans \mathbb{R}^{d+1} , en notant n le nombre de sommets obtenus et α la constante d'initialisation décrite ci-dessus, alors :*

si $p \geq 2$,

$$\delta^H(B_p^d, P^d) \leq \frac{\alpha}{4} (d-1)^{2+p/2} \frac{1}{2^{2/(d-1)}} n^{-\frac{2}{d-1}} ;$$

si $p < 2$,

$$\delta^H(B_p^d, P^d) \leq \frac{\alpha}{4} (d-1) \frac{1}{2^{2/(d-1)}} n^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Preuve :

Si $p < 2$, alors $\forall k > 1, \beta_k = 1$. Donc

$$\delta^H(P^{d+1}, B_{l_p^{d+1}}) \leq \delta^H(P^d, B_{l_p^d}) + \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) .$$

On déduit de cette suite arithmétique la majoration suivante

$$\begin{aligned} \delta^H(B_p^d, P^d) &\leq (d-1)\delta^H(P^2, B_{l_p^2}) \\ &\leq (d-1)\alpha/n_2^2 \end{aligned}$$

Et il ne reste qu'à utiliser le fait que $n = 2^{2-d}n_2^{d-1}$ pour conclure.

Si $p \geq 2$, alors $\forall k > 1$,

$$\beta_k = \sum_{i=1}^d k^{p/2} = k^{1+p/2} .$$

Il est donc possible d'obtenir la majoration

$$\left(1 + \sum_{k=2}^{d-1} \beta_k\right) \leq (d-1)^{2+p/2} .$$

Or d'après 4.2.5, l'erreur est majorée par

$$\delta^H(B_p^d, P^d) \leq \left(1 + \sum_{k=2}^{d-1} \beta_k\right) \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) ,$$

et donc

$$\delta^H(B_p^d, P^d) \leq (d-1)^{2+p/2} \delta^H(P^2, B_{l_p^2}) .$$

Et de même que précédemment, on conclut grâce à l'inégalité

$$\delta^H(B_p^2, P^2) \leq \alpha/n_2^2$$

et le fait que $n = 2^{2-d}n_2^{d-1}$. □

4.2.3 Autres convexes lisses

De telles constructions géométriques se généralisent difficilement. Certes, il est possible d'appliquer ce même principe de récurrence au ellipsoïdes de \mathbb{R}^d , par exemple. Mais l'étude de l'erreur d'approximation dans ce cas s'avère particulièrement ardue. Il va de soi que cette étude naïve (en ce sens qu'elle ne fait appel qu'aux bases de la géométrie) doit en fait se limiter au cas de boules l_p^d , et qu'en dehors de cette situation, d'autres outils sont nécessaires. Les décompositions de normes en sont un.

4.3 Construction de décompositions approchées de normes

Pour obtenir des décompositions approchées de normes, nous nous baserons essentiellement sur le produit cartésien de normes. Nous établirons ainsi des méthodes de construction par récurrence de décompositions approchées pour différentes normes de \mathbb{R}^d . Le principe commun à ces méthodes est, étant donné φ sur \mathbb{R}^d , de l'écrire sous la forme

$$\varphi = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

où ψ est une norme sur \mathbb{R}^k , et φ_i un ensemble de normes sur \mathbb{R}^{d_i} avec $\sum_{i=1}^k d_i = d$. Il sera donc souvent fait appel au théorème 3.4.13 qui affirme qu'en ce cas, si $\varphi_{i,\varepsilon}$, ψ_ε sont des ε -décompositions de φ_i , ψ , alors

$$\varphi_{2\varepsilon} = \psi_\varepsilon(\varphi_{1,\varepsilon}, \dots, \varphi_{k,\varepsilon})$$

est une décomposition approchée de φ d'erreur 2ε .

4.3.1 Décomposition approchée de l_2^d

La norme canonique de \mathbb{R}^d peut être considérée comme un produit de normes canoniques sur des sous-espaces, ce qui permet de construire par récurrence une norme polytopiale approchée. Cependant, pour $d > 2$, l'écriture de \mathbb{R}^d sous forme de produits cartésiens n'est certes pas unique, et se pose donc la question d'une stratégie optimale pour la récurrence. On ne travaillera dans cette partie qu'avec des décompositions de normes (qui correspondent en fait à un échantillonnage de la boule unité d'après 3.3.6).

Initialisation On supposera par la suite qu'une décomposition de la norme usuelle de \mathbb{R}^2 est donnée, avec une boule duale ayant n_2 sommets et une erreur d'approximation de ε_2 . Cette norme a par exemple pour boule unité un polygone régulier à n_2 sommets inscrit dans le cercle unité, ce qui d'après 2.4.1 et 3.5.2 est optimal. Et comme vu précédemment en 4.2.1, la valeur de ε_2 est majorée par

$$\varepsilon_2 \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n_2^2}. \quad (4.3.1)$$

Nous présentons maintenant différentes méthodes de construction par récurrence d'une décomposition de l_2^d , toutes basées sur cette même initialisation. De même que précédemment, d est fixé, et n_2 varie. Donc lorsque n_2 tend vers l'infini, alors n_d aussi.

Méthode 1 Si on pose $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, alors on obtient le même procédé que pour l'approximation directe par des polytopes, c'est-à-dire une récurrence reposant sur une incrémentation unitaire de la dimension. On écrit donc le produit cartésien de normes suivant :

$$l_2^{d+1} = l_2^d \otimes_{l_2^1} l_2^1 .$$

Pour construire une décomposition approchée de l_2^{d+1} , nous allons donc partir de décompositions approchées de l_2^d et l_2^1 . On remarquera que l_2^1 est déjà une norme polytopiale de boule duale le segment $[-1, 1]$. Pour pouvoir amorcer ce processus, il nous suffit donc de connaître une décomposition de l_2 dans \mathbb{R}^2 . A chaque étape, on peut grâce à 3.4.12 calculer le nombre de sommets de la décomposition construite :

$$n_{d+1} \leq n_d n_2 / 2 ,$$

ce qui assure le comportement suivant :

$$n_d \leq 2^{2-d} n_2^{d-1} . \quad (4.3.2)$$

L'erreur d'approximation est majorée à chaque étape grâce au théorème 3.4.13. On peut donc poser

$$\begin{aligned} \varepsilon_{d+1} &= \varepsilon_2 + \max\{\varepsilon_d, \varepsilon_2\} \\ &= \varepsilon_d + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

On en déduit une évaluation de l'erreur en dimension d :

$$\varepsilon_d = (d-1)\varepsilon_2 . \quad (4.3.3)$$

Nous avons donc construit une décomposition approchée de la norme canonique de \mathbb{R}^d , d'erreur au plus $(d-1)\varepsilon_2$ et ayant au plus $2^{2-d} n_2^{d-1}$ sommets.

Pour vérifier que cette méthode est d'ordre optimal, il faut vérifier la relation

$$\varepsilon_d = O\left(n_d^{-\frac{2}{d-1}}\right) .$$

Or d'après (4.3.2),

$$n_d^{-\frac{2}{d-1}} \leq 2^{2/(d-1)-2} \frac{1}{n_2^2} .$$

On obtient donc une majoration de la convergence ne dépendant que de la dimension d :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d n_d^{\frac{2}{d-1}} &\leq (d-1) 2^{2/(d-1)-2} \varepsilon_2 n_2^2 \\ &\leq (d-1) \pi^2 2^{2/(d-1)-3} \end{aligned}$$

et donc l'ordre est bien optimal. En fait, on peut constater que ce procédé construit le même polytope que la méthode directe présentée en 4.2.1. De plus la même borne d'erreur apparaît, même si celle-ci est supérieure à la réalité. L'utilisation de décompositions de normes rend par contre le procédé plus simple à étudier et plus générique, comme nous le verrons plus loin.

Méthode 2 En dehors de cette démarche naïve, une autre possibilité naturelle est de chercher à minimiser autant que possible le nombre de produits cartésiens par \mathbb{R}^1 . On procède alors ainsi

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{2d+1} &= \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^1 \\ \mathbb{R}^{2d+2} &= \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Par exemple, on écrira

$$\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) .$$

Ainsi

$$\begin{cases} l_2^{2d+1} &= l_2^d \otimes_{l_2^2} l_2^1 \\ l_2^{2d+2} &= l_2^d \otimes_{l_2^2} l_2^2 \end{cases}$$

On obtient alors une construction dans laquelle les produits cartésiens par l_p^1 sont moins fréquents.

$$\begin{cases} n_{2d+1} &= n_{2d}n_2/2 \\ n_{2d+2} &= n_{2d}n_2^2/2 \end{cases} \text{ pour } d \geq 1$$

d'où

$$\begin{cases} n_{2d} &= n_2^{2d-1}/2^{d-1} \\ n_{2d+1} &= n_2^{2d}/2^d \end{cases}$$

et donc

$$n_d = 2^{-\lceil (d-1)/2 \rceil} n_2^{d-1} .$$

Par comparaison avec la méthode précédente, on a par exemple $n_6 = n_2^5/8$ au lieu de $n_6 = n_2^5/16$.

Si le nombre de sommets est donc plus élevé, on peut cependant espérer que l'erreur ε_d soit plus faible. Si on utilise le théorème 3.4.13.

$$\begin{cases} \varepsilon_{2d+1} &= \varepsilon_2 + \max\{\varepsilon_{2d}, \varepsilon_1\} = \varepsilon_2 + \varepsilon_{2d} \\ \varepsilon_{2d+2} &= \varepsilon_2 + \max\{\varepsilon_{2d}, \varepsilon_2\} = \varepsilon_2 + \varepsilon_{2d} \end{cases}$$

et donc

$$\varepsilon_d = \lceil d/2 \rceil \varepsilon_2 ,$$

ce qui, pour un même polygone initial correspond donc à une erreur asymptotiquement deux fois moindre que pour la première méthode.

Pour évaluer l'efficacité, on utilise la majoration :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d n_d^{\frac{2}{d-1}} &\leq \lceil d/2 \rceil 2^{\frac{2\lceil (d-1)/2 \rceil}{d-1}} \varepsilon_2 n_2^2 \\ &\leq \lceil d/2 \rceil \pi^2 2^{\frac{2\lceil (d-1)/2 \rceil}{d-1} - 1} \\ &\leq \lceil d/2 \rceil \pi^2 2^{\frac{1}{d-1}} \end{aligned}$$

On constate cependant que cette méthode est moins efficace que la méthode 1. Asymptotiquement (pour d grand), sa qualité est même quatre fois plus faible.

Méthode 3 L'idée est ici d'établir des produits cartésiens de deux approximations de même erreur. Pour ceci, il faut écrire \mathbb{R}^d comme un produit cartésien équilibré (autrement dit écrire \mathbb{R}^d comme produit cartésien de deux espaces de dimensions aussi proches que possibles), et itérer jusqu'à aboutir à une série de produits d'espaces connus (en fait, \mathbb{R}^1 et \mathbb{R}^2). Par exemple, on écrira

$$\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1) .$$

De manière générale, on écrit l'espace courant sous la forme

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{\lfloor d/2 \rfloor} \times \mathbb{R}^{\lceil d/2 \rceil} .$$

Ainsi

$$\begin{cases} l_2^{2d} = l_2^d \otimes_{l_2^2} l_2^d \\ l_2^{2d+1} = l_2^d \otimes_{l_2^2} l_2^{d+1} \end{cases}$$

et par conséquent $n_3 = n_2^2/2$ et

$$n_d = n_{\lfloor d/2 \rfloor}^2 n_{\lceil d/2 \rceil} n_2/2 \text{ pour } d > 3 .$$

Un calcul fastidieux nous amène à

$$n_d \leq n_2^{d-1} / 2^{\lfloor d/2 \rfloor} .$$

De même, l'expression définissant l'erreur d'approximation

$$\varepsilon_d = \varepsilon_{\lfloor d/2 \rfloor} + \varepsilon_2$$

nous conduit après simplification à

$$\varepsilon_d = \lceil \log_2 d \rceil \varepsilon_2 .$$

La qualité de cette construction est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d n_d^{\frac{2}{d-1}} &\leq \lceil \log_2 d \rceil 2^{\frac{2\lfloor d/2 \rfloor}{d-1}} \varepsilon_2 n_2^2 \\ &\leq \frac{\lceil \log_2 d \rceil \pi^2}{2} 2^{2\lfloor d/2 \rfloor / (d-1)} \\ &\leq \frac{\lceil \log_2 d \rceil \pi^2}{4} \end{aligned}$$

Cette méthode s'avère donc bien plus efficace que les précédentes lorsque d est grand. Plus précisément, elle est plus performante à partir de $d = 4$.

Nous avons donc montré :



Théorème 4.3.1. *Une telle construction par récurrence produit une approximation polytopiale de la norme l_2^d de \mathbb{R}^d à n sommets, et dont l'erreur ε vérifie :*

$$\varepsilon \leq \lceil \log_2 d \rceil 2^{\frac{2\lfloor d/2 \rfloor}{d-1}} \varepsilon_2 n_2^2 \frac{1}{n^{\frac{2}{d-1}}}$$

où ε_2 et n_2 sont des constantes dépendant de l'initialisation du processus.

4.3.2 Norme l_p^d

Norme l_p dans le plan \mathbb{R}^2

On cherche à construire une décomposition approchée de la norme, *i.e.* à trouver un échantillonnage S_ε de $S_{l_p}^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists v \in S_\varepsilon \text{ tel que } x.v \geq (1 - \varepsilon)l_p(x) . \quad (4.3.4)$$

Or le “cercle” unité peut se paramétrer ainsi :

$$\begin{aligned} S_{l_p} &= \{(x_1, x_2) | x_1^p + x_2^p = 1\} \\ &= \{(\pm \cos^{2/p} \theta, \pm \sin^{2/p} \theta); \theta \in [0, \pi/2[\} \end{aligned}$$

Le paramètre θ sera par la suite toujours dans l'intervalle $[0, \pi/2[$. L'intérêt de cette paramétrisation est que le dual d'un point s'y exprime simplement. En effet, si $x = \begin{pmatrix} \cos^{2/p} \theta \\ \sin^{2/p} \theta \end{pmatrix}$ est un élément de S_{l_p} , son dual x^* est caractérisé par :

$$\begin{cases} x^* \in S_{l_q} = S_{l_p}^* \\ x.x^* = 1 \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} \cos^{2/p} \theta \\ \sin^{2/p} \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos^{2/q} \theta \\ \sin^{2/q} \theta \end{pmatrix} \right\rangle &= (\cos \theta)^{2/p+2/q} + (\sin \theta)^{2/p+2/q} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $x^* = \begin{pmatrix} \cos^{2/q} \theta \\ \sin^{2/q} \theta \end{pmatrix}$. Or chercher une décomposition approchée d'une norme revient à associer à chaque x de la boule unité un élément de la boule unité duale qui soit proche du dual de x . Donc à élément $x = \begin{pmatrix} \cos^{2/p} \theta \\ \sin^{2/p} \theta \end{pmatrix}$, il faudra lui associer $\begin{pmatrix} \cos^{2/q}(\theta + h) \\ \sin^{2/q}(\theta + h) \end{pmatrix}$ avec h proche de 0. Donc cette paramétrisation est particulièrement adaptée au problème que nous nous posons.

Par ailleurs, en constatant qu'une boule de l_p^2 admet les deux axes du repère comme axes de symétrie (autrement dit que $l_p^2(\pm x_1, \pm x_2) = l_p^2(x_1, x_2)$), il est clair qu'il suffit d'échantillonner le quart supérieur droit de S_{l_p} pour construire ensuite un échantillonnage complet de S_{l_p} , et donc une décomposition approchée de l_p^2 .

La condition nécessaire (4.3.4) s'écrit en un point x du quadrant supérieur droit

$$\cos^{2/p} \theta \cos^{2/q} \eta + \sin^{2/p} \theta \sin^{2/q} \eta \geq (1 - \varepsilon) .$$

Posons

$$f(\theta, \eta) = \cos^{2/p} \theta \cos^{2/q} \eta + \sin^{2/p} \theta \sin^{2/q} \eta . \quad (4.3.5)$$

Décomposition approchée asymptotique Notons $h = \eta - \theta$.

$$\begin{aligned} f(\theta, \eta) &= \left(\frac{\cos \theta}{\cos \eta} \right)^{2/p} \cos^2 \eta + \left(\frac{\sin \theta}{\sin \eta} \right)^{2/p} \sin^2 \eta \\ &= (1 + h \tan \eta - h^2/2)^{2/p} \cos^2 \eta + (1 - h \cot \eta - h^2/2)^{2/p} \sin^2 \eta + o(h^{2/p}) \\ &= (1 - h^2/p) \cos^2 \eta + (1 - h^2/p) \sin^2 \eta + o(h^{2/p}) \\ &= 1 - h^2/p + o(h^{2/p}) \end{aligned}$$

Donc

$$f(\theta, \eta) \geq (1 - \varepsilon) \iff h^2/p + o(h^{2/p}) \leq (1 - \varepsilon) ,$$

c'est-à-dire

$$(\theta - \eta)^2 + o((\theta - \eta)^{2/p}) \leq p\varepsilon .$$

Ainsi une décomposition approchée de l_p^2 asymptotiquement optimale peut être construite à partir d'une grille sur $[0, 2\pi]$ de pas $\sqrt{p\varepsilon}$. Cependant, nous n'avons ici aucune majoration réelle de l'erreur : pour un nombre donné de sommets de l'approximation, aucune évaluation de l'erreur d'approximation de l_p^2 n'est connue. Nous allons désormais chercher à en obtenir une.

Décomposition approchée d'ordre optimal La construction explicite d'un polygone approchant de manière optimale (ou du moins d'ordre optimal) la boule unité d'une norme l_p est bien plus difficile que pour une norme euclidienne. On propose ici une construction d'ordre non optimal, mais dont l'erreur d'approximation est connue.

Proposition 4.3.2. *Soient $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 2\pi]^n$ une suite croissante d'angles tels que $\theta_{i+1} - \theta_i \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\varepsilon$. Alors $\{(\pm \cos^{2/p} \theta_i, \pm \sin^{2/p} \theta_i) | 1 \leq i \leq n\}$ est une ε -approximation de la norme l_p .*

Preuve :

Puisque $\theta > \eta$, alors $\sin \theta > \sin \eta$ et $\cos \eta > \cos \theta$, et donc

$$\begin{aligned} f(\theta, \eta) &\geq \cos^{2/p+2/q} \theta + \sin^{2/p+2/q} \eta \\ &\geq \cos^2 \theta + \sin^2 \eta \\ &\geq \cos^2(\eta + h) + \sin^2 \eta \\ &\geq 1 - \sin^2(h) \cos(2\eta) - \sin(2h) \sin(2\eta)/2 \\ &\geq 1 - \sin h - \sin^2(h) \end{aligned}$$

Donc une condition suffisante est :

$$\sin h + \sin^2(h) \leq \varepsilon .$$

En utilisant la symétrie de la situation, supposons que $h > 0$. Puisque $\sin(h) \leq h$, alors

$$h + h^2 \leq \varepsilon \implies f(\theta, \theta + h) \geq 1 - \varepsilon .$$

Il est aisé de vérifier que cette condition est réalisée pour

$$h \leq \frac{1 + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} \varepsilon .$$

En majorant (sans serrer) ε par 1, il vient la condition suffisante :

$$h \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \varepsilon .$$

□

L'obtention d'une décomposition optimale reste un problème ouvert. Rappelons cependant que d'après 2.4.11, tout échantillonnage régulier d'une paramétrisation "convenable" (en fait, à dérivée bornée) du bord d'une boule l_q^2 fournit un polygone approximant d'ordre optimal. Or on sait grâce à 3.5.8 que pour la norme induite par ce polygone, l'erreur d'approximation de la norme l_p est identique. Donc la difficulté n'est pas tant de trouver une décomposition d'ordre optimal que de donner explicitement une majoration de cette erreur d'approximation.

Norme l_p dans \mathbb{R}^d , $d > 2$

De manière évidente, la norme l_p peut être obtenue par produit cartésien. En effet, en notant $l_p(\cdot)$ cette norme,

$$x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad l_p(x_1, x_2) = l_p(l_p(x_1), l_p(x_2)) .$$

Donc les raisonnements effectués pour l'approximation de la norme canonique sont également valables ici, et les résultats restent identiques sur l'approximation de la norme l_p dans \mathbb{R}^d . En particulier, la méthode 3 vue plus haut s'adapte. Rappelons que l'idée est d'écrire :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{2d+1} &= \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^1 \\ \mathbb{R}^{2d+2} &= \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

De même que pour la norme l_2 , on obtient une majoration du nombre de sommets dans \mathbb{R}^d :

$$n_d \leq n_2^{d-1} / 2^{\lceil d/2 \rceil} ,$$

et l'erreur d'approximation de la norme :

$$\varepsilon_d = \lceil \log_2 d \rceil \varepsilon_2 .$$

La qualité de cette décomposition approchée est donnée par $\varepsilon_d n_d^{\frac{2}{d-1}}$. Le problème est ici que l'initialisation, c'est-à-dire la décomposition de l_p^2 présente des difficultés, comme le montre le passage qui lui est consacré. Donc l'initialisation de cette méthode peut raisonnablement espérer reposer sur une décomposition approchée vérifiant :

$$\varepsilon_2 \leq \alpha \frac{1}{n_2^2} .$$

Le terme α étant cependant difficilement calculable à priori.

Dans ces conditions, la qualité est majorable :

$$\begin{aligned} \varepsilon_d n_d^{\frac{2}{d-1}} &\leq \alpha \lceil \log_2 d \rceil 2^{\frac{2\lceil d/2 \rceil}{d-1}} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} \lceil \log_2 d \rceil \end{aligned}$$

On peut donc construire une décomposition approchée de la norme l_p^d à partir d'une décomposition de l_p^2 .

4.3.3 Normes euclidiennes

Ces normes sont aussi appelées ellipsoïdales car leur boule unité est un ellipsoïde de \mathbb{R}^d . Dans une base bien orientée de l'espace une telle norme s'écrit :

$$\|x\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq d} \alpha_i |x_i|^2$$

où les α_i sont des réels strictement positifs.

Autrement dit, à un ellipsoïde est donc associée une norme donnée par

$$\|x\|^2 = x^T A x$$

où A est une matrice symétrique définie positive.

Or il existe une matrice L telle que

$$A = L^T L,$$

cette matrice pouvant être obtenue par exemple par une décomposition de Cholesky. Dans ce cas,

$$\|x\|^2 = x^T L^T L x = |Lx|^2$$

et donc

$$\|x\| = |Lx| .$$

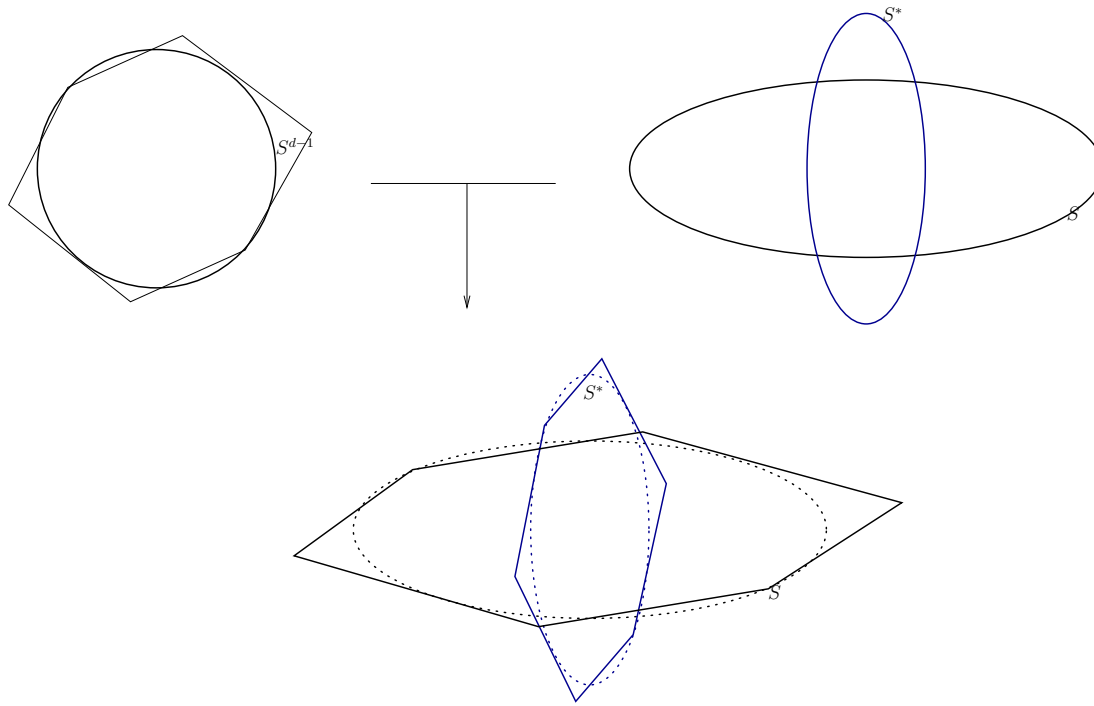


FIG. 4.2 – D’une approximation canonique à euclidienne

Si φ désigne une norme définie par $\varphi(x) = |Lx| = l_2(Lx)$, alors

$$x \in S_\varphi \iff Lx \in S^{d-1} .$$

Théorème 4.3.3. *Si la norme $\tilde{\varphi}$ associée au convexe \tilde{B}^* réalise une ε -approximation pour la norme canonique l_2 , alors la norme associée au convexe $L^T \tilde{B}^*$ réalise une ε -approximation pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$ définie ci-dessus.*

Preuve :

La norme approchée s’évalue par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \max_{\tilde{v} \in L^T \tilde{B}^*} \tilde{v} \cdot x \\ &= \max_{v \in \tilde{B}^*} L^T v \cdot x \\ &= \max_{v \in \tilde{B}^*} v \cdot Lx \end{aligned}$$

Or par hypothèse,

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \frac{|y|}{1 + \varepsilon} \leq \tilde{\varphi}(y) = \max_{v \in \tilde{B}^*} v \cdot y \leq |y| ,$$

donc

$$\frac{|Lx|}{1 + \varepsilon} \leq \tilde{\varphi}(x) \leq |Lx|$$

$$\frac{\|x\|}{1 + \varepsilon} \leq \tilde{\varphi}(x) \leq \|x\|$$

□

On peut de plus constater que si \tilde{B} est un échantillonnage de la boule unité canonique S^{d-1} , alors $L^T \tilde{B}$ est un échantillonnage de la boule unité duale. Autrement dit, la transformation de matrice L^T d'un polytope approchant la boule canonique donne un polytope approchant la boule euclidienne avec la même erreur. On peut donc, à partir d'une décomposition approchée de la norme canonique, construire aisément une décomposition approchée d'une norme euclidienne quelconque, ce qui donne le résultat suivant :

⚡ **Théorème 4.3.4.** *Soit φ une norme euclidienne et L l'application linéaire telle que $\varphi(x) = |Lx|$. Si φ_ε est une ε -décomposition de l_2 , de sommets $\{v_i\}_{i \in I}$ alors la norme $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ associée aux sommets $\{L^T v_i\}_{i \in I}$ est une ε -décomposition de φ .*

4.3.4 Normes l_p^d anisotropes

Au paragraphe précédent est défini une méthode permettant de transformer une ε -décomposition de la norme l_p^d en une ε -décomposition d'une norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Ce principe peut s'étendre aux normes l_p^d et aux normes anisotropes associées. Tout d'abord, rappelons que si φ est une norme l_p anisotrope, elle s'écrit dans une certaine base de \mathbb{R}^d sous la forme :

$$\varphi(x) = \left(\sum_{1 \leq i \leq d} \alpha_i |x|^p \right)^{1/p}$$

avec $\alpha_i > 0$ et $p \geq 1$.

De même que précédemment, il existe une application linéaire $L = \text{Diag}(\alpha_i^{1/p})$ telle que $\varphi(x) = l_p(Lx)$. Il est ainsi possible de formuler la proposition :

⚡ **Théorème 4.3.5.** *Soit φ une norme l_p^d anisotrope, et soit L l'application linéaire telle que $\varphi(x) = l_p(Lx)$. Si φ_ε est une ε -décomposition de l_p^d , de sommets $\{v_i\}_{i \in I}$ alors la norme $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ associée aux sommets $\{L^T v_i\}_{i \in I}$ est une ε -décomposition de φ .*

Preuve :

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) &= \max_{v \in \{L^T v_i\}_{i \in I}} v \cdot x \\ &= \max_{v \in \{v_i\}_{i \in I}} L^T v \cdot x \\ &= \max_{v \in \{v_i\}_{i \in I}} v \cdot Lx \\ &= \varphi_\varepsilon(Lx)\end{aligned}$$

Or

$$(1 - \varepsilon)l_p(Lx) \leq \varphi_\varepsilon(Lx) \leq l_p(Lx) ,$$

donc

$$(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) \leq \varphi(x) ,$$

ce qui caractérise le fait que $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ est une ε -décomposition de la norme φ . \square

4.4 Des décompositions approchées aux polytopes approximants

Pour conclure ce chapitre, nous appliquerons les constructions de décompositions approchées au problème de l'approximation polytopiales des convexes lisses. Pour cela, nous ferons appel au théorème 3.5.10. Grâce à celui-ci, à chaque décomposition approchée est associé un polytope (sa boule duale) qui est une approximation pour la distance de Hausdorff de la boule duale de la norme initiale. Au passage, remarquons que les décompositions sont identifiées à l'ensemble des sommets de leur boule duale, et que si leur manipulation est plus simple que celle d'un polytope, les décompositions ne donnent aucune information sur la combinatoire de leur boule duale.

Pour simplifier, la boule duale unité de la décomposition de norme sera notée P_n .

Boule canonique

Pour cette norme l_2 , le théorème 3.5.1 nous assure que si φ_ε est une ε -décomposition, alors $\delta^H(B^{d-1}, B_{\varphi_\varepsilon}^*) \leq \varepsilon$. Des trois méthodes proposées pour construire une décomposition approchée de l_2 , la troisième est la plus efficace. Celle-ci induit donc une approximation polytopiale de B^{d-1} .

Si la décomposition de norme est obtenue par la méthode 3, alors

$$\delta^H(B^{d-1}, P_n) \leq \frac{[\log_2 d] \pi^2}{4} n_d^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Si on compare avec la borne obtenue par la méthode naïve, on constate que cette dernière méthode est asymptotiquement (par rapport à la dimension) quatre fois plus précise à nombre de sommets égal.

Ellipsoïdes

Pour un ellipsoïde E de \mathbb{R}^d , en combinant l'approximation de la boule l_2 par la méthode 3 avec le théorème 4.3.4, nous pouvons construire une ε -décomposition φ_ε à n sommets de la norme φ dont il est la boule duale unité. Il suffit pour cela de connaître la matrice A telle que

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^T A x = 1\} .$$

Cette décomposition vérifie :

$$\varepsilon \leq \frac{\lceil \log_2 d \rceil \pi^2}{4} n^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Pour en déduire la distance de Hausdorff entre l'ellipsoïde et l'enveloppe convexe des sommets de la décomposition, il suffit d'après 3.5.10 de mesurer

$$\max_{u \in S^{d-1}} \varphi^*(u) .$$

Il est clair que ce nombre vaut $1/a$ où a est le demi-petit axe de l'ellipsoïde B_φ^* . Autrement dit, ce nombre est le demi-grand axe de l'ellipsoïde B_φ . En appliquant 3.5.10, le polytope P_n vérifie :

$$\delta^H(E, P_n) \leq a \frac{\lceil \log_2 d \rceil \pi^2}{4} n^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Boules l_p

L'obtention d'une approximation polytopiale d'une boule l_p est liée à une décomposition de la norme duale l_q . On suppose donnée une ε_2 -décomposition à n_2 sommets d'ordre optimal de la norme l_q dans le plan (voir la section consacrée à ce problème) :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \varepsilon_2 \leq \alpha \frac{1}{n_2^2} .$$

Il est possible de construire comme vu plus haut une décomposition de la norme l_q d'erreur

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha}{2} \lceil \log_2 d \rceil n_d^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Il suffit alors d'appliquer 3.5.11 pour s'apercevoir que si $q \leq 2$ (*i. e.* $p \geq 2$), alors

$$\delta^H(B_{l_p^d}, P_n) \leq \frac{\alpha}{2} \lceil \log_2 d \rceil n_d^{-\frac{2}{d-1}} ,$$

et si $q > 2$ (i.e. $p > 2$),

$$\delta^H(B_{l_p^d}, P_n) \leq d^{1/p-1/2} \alpha \lceil d/2 \rceil 2^{\frac{1}{d-1}} n_d^{-\frac{2}{d-1}} .$$

Ces bornes sont bien meilleures que celles obtenue par la construction directe d'un polyèdre inscrit.

En conclusion, le formalisme des décompositions de normes permet de construire par récurrence des polyèdres approchant les boules unité des normes construites par produits cartésiens. En particulier, toutes les boules l_p^d ainsi que les ellipsoïdes peuvent être ainsi approchés, et la distance de Hausdorff du polyèdre à ce corps convexe majorée explicitement.

Chapitre 5

Applications des normes approchées en géométrie algorithmique

Pour arriver à la perfection, il faut commencer par ne pas comprendre beaucoup de choses. Celui qui saisit trop vite comprend sans doute mal.

Feodor Dostoïevski. *L'idiot*.

Résumé

Dans un premier temps nous présentons quelques résultats expérimentaux, à savoir la comparaison de différentes méthodes de construction explicite d'une approximation polyédrique de S^2 , ainsi que plusieurs méthodes d'approximation polygonales des convexes plan. Nous étudions ensuite l'application des décompositions de normes à deux thèmes classiques de la géométrie algorithmique. Tout d'abord nous utilisons cet outil pour étudier des approximations des diagrammes de Voronoï pour une norme quelconque. Enfin, en utilisant le formalisme des plongements peu déformants, nous montrons que par une décomposition approchée il est possible de calculer une approximation du diamètre de n points dans un cadre plus général que celui de la littérature dédiée à ce sujet.

Sommaire

5.1	Expérimentation : Polyèdre approchant la sphère de \mathbb{R}^3	119
5.1.1	Borne Optimale	119
5.1.2	Lien entre longueur des arêtes d'un simplexe C et distance de Hausdorff	119
5.1.3	Projection stéréographique	120
5.1.4	Subdivision canonique selon θ, φ	121
5.1.5	Subdivision optimisée selon θ, φ	122
5.1.6	Subdivision de l'icosaèdre	124
5.1.7	comparaison des 4 méthodes	127
5.2	Expérimentation : Polygone approchant un convexe plan	127
5.2.1	Description du problème	128
5.2.2	Construction à erreur fixée	129
	Connaissant la courbure (i.e. s, s', s'')	129
	Connaissant s et s'	129
5.2.3	Construction à nombre de sommets fixés	132
	Connaissant la courbure	133
	Connaissant s et s'	135
5.2.4	Comparaison expérimentale	136
5.2.5	Influence du polygone initial	137
	Comportement par sauts	137
	Optimalité du polygone de meilleure approx comme polygone initial?	137
5.2.6	Améliorations possibles	138
	Insertions multiples pour équilibrer l'erreur	138
	Adaptation à la décomposition en facteurs premiers	139
5.3	Décomposition de norme et diagramme de Voronoï	140
5.3.1	Préliminaires	140
5.3.2	Approximation du diagramme de Voronoï	141
5.4	Plongement peu déformant	143
5.5	Diamètre approché	145

5.1 Expérimentation : Polyèdre approchant la sphère de \mathbb{R}^3

Le théorème 2.1.2 prouve que pour δ^H les sphères sont, parmi les convexes de même aire, les plus difficiles à approcher asymptotiquement par \mathcal{P}_n . On comparera dans cette partie différentes constructions explicites de polyèdres approximant la sphère pour la métrique de Hausdorff.

Pour une approche moins explicite mais asymptotiquement plus performante, on pourra se reporter à [Hardin and Sloane 1993], ainsi qu'à [Dantzer 1986]. En effet, l'approximation de la boule unité de \mathbb{R}^3 par des polytopes ayant un grand nombre de sommets est généralement orienté vers une approche non-explicite : les sommets du polytope inscrit sont souvent obtenus en tant que limite d'un processus dynamique ou comme solution d'un problème d'optimisation linéaire. Remarquons également que la majorité des travaux concernent le problème de "packing points on the sphere", c'est-à-dire le problème de Tammes, en raison de ses nombreuses applications de ce dernier [Saff and Kuijlaars 1997], tandis que nous nous intéressons à un problème de "covering" à priori non équivalent (voir 2.3). Nous ne nous inscrivons pas donc dans cette approche, mais dans une optique de construction directe et déterministe d'un polytope approximant, menant à comportement asymptotique proche de l'optimal.

On notera de manière générale ε (resp. ε_n) la distance de Hausdorff entre la boule unité B^3 et son polyèdre approximant (respectivement pour n sommets).

5.1.1 Borne Optimale

D'après 2.1.2, et sachant que $\theta_2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, $\kappa_2 = \pi$, l'approximation optimale de S^2 vérifie :

$$\boxed{\delta^H(S^2, \mathcal{P}_n^i) \sim \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{S^2} \sqrt{\kappa} d\sigma \right) \frac{1}{n} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{1}{n}} \quad (5.1.1)$$

5.1.2 Lien entre longueur des arêtes d'un simplexe C et distance de Hausdorff

Ce lemme sera exploité par les différentes méthodes qui suivent.

Supposons que toute face de C est un triangle plan dont les sommets sont sur S^2

et dont tous les angles sont aigus. Alors la définition de la distance de Hausdorff par les fonctions support donne immédiatement que $\delta^H(C, S^2)$ est la plus grande hauteur des calottes sphériques que délimitent les faces de C . Cette hauteur passe par le centre du cercle circonscrit au triangle \mathcal{T} , et, si $r_{\mathcal{T}}$ est le rayon de ce cercle circonscrit, la hauteur vaut $1 - \sqrt{1 - r_{\mathcal{T}}^2}$. Or $r_{\mathcal{T}} = \frac{\text{côté de } \mathcal{T}}{\sin(\text{angle opposé})}$, donc $\frac{1}{2}l \leq r_{\mathcal{T}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}l$, où l est la longueur du plus grand côté de \mathcal{T} . Donc

$$\varepsilon = \sup_{\mathcal{T} \text{ face de } C} \left(1 - \sqrt{1 - r_{\mathcal{T}}^2} \right) \leq 1 - \sqrt{1 - L^2/6}$$

où L est la longueur de la plus grande arête de C . Finalement, pour L assez petit :

$$\varepsilon \leq L^2/6 \tag{5.1.2}$$

avec égalité si la face où L est atteint est équilatérale.

5.1.3 Projection stéréographique

Cette méthode repose sur la projection de centre S le pôle Sud de S^2 des sommets d'un pavage du disque unité. On place alors par réflexion sur (Oxy) les points de l'hémisphère australe de S^2 . L'enveloppe convexe de ces points donne un polyèdre inscrit dans la sphère unité.

Dans le cas présent, on pave le plan avec des triangles équilatéraux de côté c et on intersecte ce pavage avec le disque unité. Après projection stéréographique, on obtient donc un polytope inscrit dans la calotte nord de S^2 et dont toutes les faces sont presque équilatérales, puisque la projection stéréographique conserve les angles.

Soit n le nombre de points placés dans le disque unité et soit $k \in \mathbb{N}$ la partie entière du nombre de côtés de triangles formant un rayon. Alors la longueur du côté d'un triangle plan peut être encadrée par :

$$1/(k + 1) < c \leq 1/k$$

Or

$$1 + 3k(k + 1) \leq n \leq 1 + 3(k + 1)(k + 2) ,$$

d'où

$$c \sim \frac{2}{3\sqrt{1 - 4(7 - n)/27} - 1} \sim \sqrt{\frac{3}{n}} .$$

La longueur maximale d'un côté projeté sur S^2 est donc équivalente à $2\sqrt{\frac{3}{n}}$ car la projection stéréographique dilate les longueurs d'au plus 2 (cette borne étant atteinte à l'origine).

Comme le nombre de points double presque après réflexion sur (Oxy) (les points sur l'équateur sont leur propre symétrique), on obtient grâce à (5.1.2) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &\sim 2 \left(2\sqrt{\frac{3}{n}} \right)^2 \frac{1}{6} \\ \varepsilon_n &\sim 4 \frac{1}{n}\end{aligned}\tag{5.1.3}$$

Cette expression est ici optimale puisque les triangles proches du pôle Nord tendent quand $c \rightarrow 0$ vers des triangles équilatéraux.

Remarque : La projection verticale ne produit pas, à la différence de la projection stéréographique, un résultat d'ordre asymptotique optimal. En effet, pour un maillage identique du disque unité, la longueur maximale des côtés du polyèdre inscrit est équivalent à $\sqrt{2}\sqrt[4]{3/n}$, et donc l'erreur est de

$$\varepsilon_n \sim \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

5.1.4 Subdivision canonique selon θ, φ

On se place en coordonnées sphériques où θ représente l'angle dans le plan horizontal et φ l'angle mesuré verticalement, et on trace une grille de pas π/k sur l'espace $[-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ des paramètres de S^2 . On reporte ensuite les sommets de cette grille sur la sphère, avant d'en calculer l'enveloppe convexe pour obtenir un polyèdre convexe à faces triangulaires isocèles au pôle et trapézoïdales ailleurs ayant $n = 2k(k+1) + 2$ sommets, et

$$L = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2k}\right) + o(1/k)$$

pour longueur maximale de diagonale de face.

Or pour $L \rightarrow 0$, les angles des faces tendent vers $\pi/2$, donc le centre du cercle circonscrit à une face quelconque tend vers le milieu de la diagonale de cette face. On a :

$$\varepsilon_n \sim 1 - \sqrt{1 - (L/2)^2} \sim L^2/8,$$

or $L \sim \sqrt{2}\pi/k$ et $2k^2 \sim n$, donc :

$$\varepsilon_n \sim \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{n}.\tag{5.1.4}$$

5.1.5 Subdivision optimisée selon θ, φ

Le principe en est identique à celui de la méthode précédente, à ceci près que le pas de la grille n'est plus constant ; on cherche à placer sur la sphère unité $2k_1$ méridiens et k_2 parallèles de manière optimale. On cherche donc à déterminer les deux fonctions déformant la grille de pas fixe $(1/k_1, 1/k_2)$:

$$\theta_{k_1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi, \pi]$$

$$\varphi_{k_2} : [-1/2, 1/2] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

Notons $\mathcal{F}_{i,j}$ la face de sommets

$$\begin{aligned} & (\theta_{k_1}(i/k_1), \varphi_{k_2}(j/k_2)) & ; & (\theta_{k_1}((i+1)/k_1), \varphi_{k_2}(j/k_2)) ; \\ & (\theta_{k_1}((i+1)/k_1), \varphi_{k_2}((j+1)/k_2)) & ; & (\theta_{k_1}(i/k_1), \varphi_{k_2}((j+1)/k_2)) \end{aligned}$$

Sa diagonale vérifie d'après Pythagore :

$$\begin{aligned} & \left[2 \sin \left(\frac{1}{2} \left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j+1}{k_2} \right) - \varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) \right) \right]^2 + \\ & \left[\left(\theta_{k_1} \left(\frac{i+1}{k_1} \right) - \theta_{k_1} \left(\frac{i}{k_1} \right) \right) \cos \left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) \right]^2 \sim \text{Diagonale}(\mathcal{F}_{i,j}) \end{aligned}$$

Pour que l'erreur d'approximation soit minimale, on veut minimiser le maximum par rapport à i et j de $\text{Diagonale}(\mathcal{F}_{i,j})$, ce qui revient à chercher θ_{k_1} et φ_{k_2} tels que la diagonale soit indépendante de la face considérée. Un argument de symétrie implique alors que φ_{k_2} est impaire et que $\forall k_1, \forall x \in [-1/2, 1/2]$: $\theta_{k_1}(x) = \pi x$. Donc :

$$4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j+1}{k_2} \right) - \varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) \right) + \frac{\pi^2}{k_1^2} \cos^2 \left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) \sim f(k_1, k_2)$$

$$\left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j+1}{k_2} \right) - \varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) - \frac{\pi^2}{k_1^2} \sin^2 \left(\varphi_{k_2} \left(\frac{j}{k_2} \right) \right) \sim f(k_1, k_2) - \frac{\pi^2}{k_1^2}$$

En posant $x \in [0, 1/2]$ et $j = \lfloor k_2 x \rfloor$, alors pour $k_1, k_2 \rightarrow +\infty$ et φ la limite de φ_{k_2} :

$$\varphi'(x)^2 = \frac{k_2^2}{k_1^2} \pi^2 \sin^2(\varphi(x)) + \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} \left(k_2^2 f(k_1, k_2) - \frac{k_2^2}{k_1^2} \pi^2 \right) . \quad (5.1.5)$$

Supposons désormais que $\frac{k_2}{k_1}$ converge vers une limite $\alpha > 0$. A cette condition très naturelle s'ajoutent les conditions aux limites de φ , c'est-à-dire que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1/2) = \pi/2$. On en déduit avec (5.1.5) que

$$\varphi'(0)^2 = \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} \left(k_2^2 f(k_1, k_2) - (\alpha \pi)^2 \right) ,$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$\varphi'(x)^2 = \alpha^2 \pi^2 \sin^2(\varphi(x)) + \varphi'(0)^2 . \quad (5.1.6)$$

Afin de déterminer la constante α , on calcule l'erreur pour un nombre de points $n \sim 2k_1k_2$:

$$\varepsilon_n \sim f(k_1, k_2)/8 \sim \frac{1}{4}(\alpha\pi^2 + \frac{1}{\alpha}\varphi'(0)^2) \frac{1}{n} .$$

Donc $n\varepsilon_n$ est minimal pour $\alpha = \frac{\varphi'(0)}{\pi}$. Sachant que φ est positive, strictement croissante sur $[0, 1/2]$, l'équation différentielle (5.1.6) devient alors :

$$\varphi' = \varphi'(0)\sqrt{1 + \sin^2 \varphi} \quad \text{avec } \varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(1/2) = \pi/2 \quad (5.1.7)$$

Avec pour erreur associée :

$$\varepsilon_n = \frac{\pi}{4}\varphi'(0) \frac{1}{n} . \quad (5.1.8)$$

Résoudre (5.1.7) revient cependant à calculer une intégrale elliptique $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2 \varphi}}$, donc on ne peut espérer obtenir qu'une solution approchée.

Pour obtenir cette solution approchée, on détermine dans un premier temps un encadrement de φ , avant de chercher à préciser les valeurs optimales de $\varphi'(0)$, pour finalement considérer une fonction de forme préétablie vérifiant ces paramètres.

On majore $\sin^2(\varphi(x))$ par $\varphi(x)^2$ dans l'expression (5.1.7) :

$$\begin{aligned} \varphi'(x)^2 &\leq \varphi'(0)^2(\varphi(x)^2 + 1) \\ \int_0^t \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \varphi(x)^2}} dx &\leq \varphi'(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(t) \leq sh(\varphi'(0)t) . \quad (5.1.9)$$

De même, on majore $\sin^2(\varphi(x))$ par 1 dans l'expression (5.1.7) en utilisant que $\varphi'(1) = \sqrt{2}\varphi'(0)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &\leq \varphi'(0)\sqrt{2} \\ \int_t^{1/2} \varphi'(x) &\leq \varphi'(0)\sqrt{2}(1/2 - t) \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(t) \geq \pi/2 + \sqrt{2}\varphi'(0)(t - 1/2) . \quad (5.1.10)$$

Puisque φ est strictement croissante, il est nécessaire pour que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1/2) = \pi/2$ que la droite passant par l'origine de pente $\varphi'(0)$ passe "au-dessous" du point $(1/2, \pi/2)$, et donc :

$$\varphi'(0) < \pi .$$

De même, la droite passant par $(1/2, \pi/2)$ de pente $\varphi'(1) = \sqrt{2}\varphi'(0)$ doit passer "au-dessus" de l'origine :

$$\varphi'(0) > \pi/\sqrt{2} .$$

On remarquera par ailleurs que dans le cadre de la subdivision canonique, $\theta(x) = \varphi(x) = \pi x$, et donc cette méthode n'est pas le meilleur 'découpage' selon θ, φ . Plus précisément, il faut que cette droite n'intersecte pas la fonction majorante donnée en (5.1.9), et donc que :

$$\varphi'(0) \geq 2.57 .$$

On cherche désormais une fonction vérifiant (5.1.9) et (5.1.10) sous la forme $\varphi(x) = Ax^k + Bx$ avec $k > 1$. Alors $B = \varphi'(0)$. On traduit ensuite les conditions $\varphi(1/2) = \pi/2$ et $\varphi'(1/2) = \sqrt{2}\varphi'(0)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{A}{2^{k-1}} + B &= \pi & \text{et} & & \frac{kA}{2^{k-1}} + B &= \sqrt{2} B \\ k &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi/B - 1} & \text{et} & & A &= (\pi - B)2^{k-1} \end{aligned}$$

Reste désormais à minimiser l'erreur :

$$\inf_B \sup_{x \in [0, 1/2]} (B^{-1}(kAx^{k-1} + B)^2 + B \cos^2(Ax^k + B))$$

Pour $B \approx 2.8$, on obtient le minimum :

$$\varepsilon_n \approx 4.216 \frac{1}{n} .$$

5.1.6 Subdivision de l'icosaèdre

L'idée est d'inscrire un icosaèdre régulier dans la sphère unité, de projeter le milieu de chaque arête sur S^2 , et d'itérer le processus pour ces arêtes nouvellement créées.

Dans un premier temps, on calcule le nombre de sommets du polyèdre d'approximation afin de pouvoir par la suite exprimer l'erreur ε_n . Notons s_k, a_k, f_k les nombres de sommets, respectivement d'arêtes, de faces, à l'étape k . Il apparaît alors que :

$$s_{k+1} = s_k + a_k \quad \text{et} \quad f_{k+1} = 4f_k .$$

En combinant cette expression avec l'équation d'Euler $s_k - a_k + f_k = 2$, on a :

$$s_{k+1} = 2s_k + 4^k f_0 - 2 .$$

Or l'icosaèdre vérifie $s_0 = 12, a_0 = 30, f_0 = 20$, donc :

$$s_k = 10 \times 4^k + 2^{k+1} . \tag{5.1.11}$$

Pour obtenir une évaluation de l'erreur d'approximation, on désire également calculer la valeur de l'angle maximal à l'étape k . Pour cela, on considère un triangle (ABC) dont les sommets A, B , et C sont sur S^2 , et où I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [AC]$. On note I', J', K' les projetés radiaux sur S^2 de I, J, K respectivement.

Pour pouvoir utiliser (5.1.2), il faut que les angles de toutes les faces à chaque étape soient aigus. On suppose donc que tous les angles de (ABC) sont aigus, et on rappelle que dans le plan les angles sont égaux 2 à 2 comme présenté sur la figure 5.1.6. Comme les angles de la forme $\widehat{AI'K'}$ vérifient $\widehat{AI'K'} \leq \widehat{AIK}$, il suffit de montrer que les angles de la forme $\widehat{K'J'I'}$ vérifient $\widehat{K'J'I'} \leq \widehat{KJI}$. Puisque les angles de (ABC) sont aigus, le centre du cercle circonscrit à (ABC) est dans (IJK) . Donc la projection radiale 'rapproche' I et K de A , et donc

$$\widehat{K'J'I'} < \widehat{I'AK'}$$

Or $\widehat{K'JI'} > \widehat{K'J'I'}$, d'où

$$\widehat{K'JI'} < \widehat{I'AK'}$$

Donc l'angle maximum après subdivision est en A, B ou C . Comme tous les sommets sont de valence 6 sauf les sommets de l'icosaèdre qui sont de valence 5, et que le maximum des angles est une fonction croissante de l'étape k , on a :

$$\max \{ \text{angles des faces de la subdivision} \} < 2\pi/5$$

Un résultat de [Colin de Verdière and Marin 1990] prouve que cette subdivision est optimale pour le critère de la minimisation du plus grand angle des faces.

On désire ensuite majorer la longueur des côtés, et on pose ξ l'angle au centre $\xi = \widehat{IOJ} = \widehat{I'OJ'}$. Alors

$$\cos \xi = \frac{8 - AB^2 - BC^2 - AC^2}{8\sqrt{1 - AB^2/4}\sqrt{1 - BC^2/4}}$$

Donc

$$I'J' = 2 \sin(\xi/2) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \xi}$$

$$I'J' = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{8 - AB^2 - BC^2 - AC^2}{8\sqrt{1 - AB^2/4}\sqrt{1 - BC^2/4}}}$$

Or si $L = \max\{AB, BC, AC\}$,

$$I'J' \leq \frac{L}{2\sqrt{1 - L^2/4}} \tag{5.1.12}$$

avec égalité si le triangle est équilatéral. De même, on obtient

$$AJ' \leq \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - L^2/4}}. \quad (5.1.13)$$

Donc si L_k est le maximum des longueurs des côtés des triangles de l'icosaèdre subdivisé à l'étape k , alors

$$L_{k+1} \leq \max \left\{ \frac{L}{2\sqrt{1 - L^2/4}}, \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - L^2/4}} \right\}$$

$$L_{k+1} \leq \frac{L}{2\sqrt{1 - L^2/4}}$$

Si L_k est atteint sur un triangle équilatéral, alors d'après (5.1.12), L_{k+1} aussi, et (5.1.14) est une égalité. Or à l'étape 0 les faces sont des triangles équilatéraux, donc

$$L_{k+1} = \frac{L}{2\sqrt{1 - L^2/4}}. \quad (5.1.14)$$

Soient α_k, β_k tels que :

$$L_{k+1} = \frac{1 + \alpha_k}{2} L_k = \frac{\beta_k}{2} L_k.$$

Or il existe $\lambda > 0$ tel que $\beta_i = (1 - L_i/4)^{-1/2} \leq 1 + \lambda L_i^2$, donc

$$\alpha_i \leq \lambda L_i^2 \leq \lambda \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{1 + \alpha_j}{2} \right)^2 L_0^2.$$

Or il est visible que $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0, puisque plus les arêtes sont petites, plus L_{k+1}/L_k est proche de 1/2. Donc

$$\alpha_i \leq (\alpha_0/2)^{2i} \lambda L_0^2.$$

Comme $(\alpha_0/2)^2 < 1$, $\sum_i \alpha_i$ converge. Or $\sum_i \alpha_i \sim \sum_i \ln(1 + \alpha_i) \sim \ln(\prod_i \beta_i)$. Donc $\prod_i \beta_i$ converge. En rappelant que $L_k = (\prod_{i=0}^{k-1} \beta_i) L_0 / 2^k$, on obtient par (5.1.2)

$$\varepsilon_n \sim (n L_k^2 / 6) \frac{1}{n}.$$

Donc, grâce à (5.1.11) :

$$\varepsilon_n \sim 5 \frac{(L_0 \prod_i \beta_i)^2}{3} \frac{1}{n} \approx 2.92 \frac{1}{n}. \quad (5.1.15)$$

5.1.7 comparaison des 4 méthodes

Méthode	Majoration de ε_n
Borne optimale	$2.42 n^{-1}$
Projection stéréographique	$4 n^{-1}$
Subdivision canonique en θ, φ	$4.93 n^{-1}$
Subdivision optimisée en θ, φ	$4.22 n^{-1}$
Subdivision de l'icosaèdre	$2.92 n^{-1}$

La méthode de subdivision canonique en θ, φ correspond à la méthode naïve présentée au chapitre 4 pour approcher une boule B^{d-1} . Certes, des quatre méthodes proposées, elle obtient le plus mauvais résultat. Mais les autres procédés peuvent difficilement se généraliser aux dimensions supérieures. En revanche, la subdivision de l'icosaèdre peut par exemple être intégrée dans la méthode de construction d'une décomposition de norme vue au chapitre précédent. La décomposition proposée se ramenait à écrire \mathbb{R}^d en termes de produits cartésiens de \mathbb{R}^1 et \mathbb{R}^2 . La connaissance d'une bonne approximation polytopiale de S^2 , et donc d'une bonne approximation de l_2^3 nous permet désormais de chercher à écrire \mathbb{R}^d en termes de produits cartésiens de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , ce qui permet d'améliorer la qualité de la décomposition approchée de l_2^d .

Remarque : Tous les polyèdres obtenus par ces méthodes sont inscrits dans S^2 , alors que 2.1.1 prouve qu'un polyèdre quelconque peut approcher la sphère deux fois mieux asymptotiquement. En fait, si on applique à P inscrit dans S^2 , d'erreur ε , une dilatation de rapport λ , on obtient \bar{P} d'erreur $\bar{\varepsilon} = \max\{\lambda - 1, 1 - \lambda(1 - \varepsilon)\}$. La nouvelle erreur est donc minimale pour un rapport d'homothétie $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon}$ et vaut alors

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \sim \varepsilon/2 .$$

5.2 Expérimentation : Polygone approchant un convexe plan

C désignera l'objet convexe strict de classe \mathcal{C}^2 que l'on souhaite approcher au sens de la distance de Hausdorff δ^H par une suite de polygones P_n . On notera également \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes inscrits dans C à n sommets.

5.2.1 Description du problème

La première étude poussée de l'approximation des objets convexes plans lisses par des polygones a fait l'objet de l'article [McClure and Vitale 1975] qui établit les liens entre un polygone de meilleure approximation asymptotique et la courbure le long de l'objet convexe.

Chercher un polygone d'approximation peut se présenter sous deux formes :

1. Se donner une erreur ε et chercher $P \in \mathcal{P}$ tel que P ait un nombre de sommets optimal.
2. Se donner un nombre de sommets n et chercher $P \in \mathcal{P}_n$ optimal, au sens où $\delta^H(P, C)$ est asymptotiquement minimal.

Remarque : On ne recherche pas les polygones de meilleure approximation, la présente étude étant axée sur une approche asymptotique. Ainsi le polygone P ne sera pas en lui même optimal, au contraire du procédé de construction de P pour n grand ou ε petit. De plus, on se limitera aux processus explicites et déterministes. A contrario, pour n fixé, [Kenderov and Kirov 1993] utilisent la pseudo-convergence d'un système ad hoc pour déterminer l'initialisation de leur algorithme de construction d'un algorithme à erreur équilibrée (donc asymptotiquement idéal).

Ces deux approches sont indépendantes. On pourrait en effet imaginer, connaissant n , de calculer l'erreur optimale associée. Mais ces éléments étant reliés par l'expression

$$\frac{1}{8} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2 ,$$

il est alors nécessaire de calculer l'intégrale de la racine de la courbure le long du bord de l'objet, ce qui n'est pas très réaliste. On séparera donc les deux problèmes.

Une autre distinction s'opère au niveau des données disponibles. Que l'objet soit décrit par une paramétrisation de son bord ou par sa fonction support, en chaque point sont définies la position, la tangente, et la courbure. Ainsi pour une fonction support s , la connaissance de $s(\theta)$ et $s'(\theta)$ permet de localiser le sommet de C correspondant et sa tangente alors que $s(\theta)$ seul ne donne que la droite tangente. Par contre, dans le cas d'une paramétrisation γ , connaître $\gamma(t)$ ne donne pas la tangente, mais la position.

Remarque : Si on considère un objet convexe décrit par la fonction support de son bord, la construction à *nombre de sommets fixés* peut être assimilée au *line geometric probing*. En effet, cette construction repose sur le choix d'une direction θ_{n+1} à partir des valeurs de $\theta_i, s(\theta_i), \dots$ précédemment obtenues. Géométriquement, ce processus correspond au choix d'une direction de la normale à l'objet qui renvoie la droite tangente à C ayant cette normale, comme le dé-

crit [Lindenbaum and Bruckstein 1994]. On peut également se représenter que l'on sonde par une droite "arrivant de l'infini" selon une direction donnée. Plus récemment, la thèse [Li 1994] a proposé, pour des corps convexes dont la courbure minorée, des algorithmes de probing en donnant une relation entre l'erreur d'approximation et le nombre de sondages.

5.2.2 Construction à erreur fixée

Construire un tel polygone repose sur une démarche simple mais efficace : on parcourt le bord de C en insérant un sommet de P de manière à ce que l'erreur sur l'arête construite avoisine le ε donné. Pour cela, il faut néanmoins être capable d'évaluer la position du sommet suivant.

Connaissant la courbure (i.e. s, s', s'')

Les deux premières méthodes sont une application directe de [McClure and Vitale 1975]. Pour un convexe décrit par sa fonction support, ils ont montré que l'erreur locale d'approximation du segment $p(\theta_1)p(\theta_2)$ pour la distance de Hausdorff s'écrit :

$$e(\theta_1, \theta_2) \sim \frac{1}{8} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r(\theta)} d\theta \right)^2 \quad (5.2.1)$$

$$\sim \frac{1}{8} r(\theta_1) (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (5.2.2)$$

où $r(\theta_1)$ désigne le rayon de courbure en $p(\theta_1)$. On en déduit immédiatement un algorithme plaçant θ_{n+1} à partir de θ_n grâce à (5.2.2), et un autre utilisant (5.2.1) dans le même but. Tous deux sont bien sûr asymptotiquement optimaux, mais celui reposant sur un calcul d'intégral est inutilisable pour des cas réels, sans pour autant s'avérer plus performants sur les exemples testés.

Connaissant s et s'

Méthode de la valeur moyenne Cette méthode est étudiée par [Johnson and Vogt 1980] dans le cadre de l'approximation pour δ^S , la métrique différence symétrique. Nous nous proposons d'évaluer son efficacité pour la distance de Hausdorff. La méthode est caractérisée par le fait que si p_{i-1}, p_i, p_{i+1} sont trois sommets consécutifs du polygone d'approximation, alors la tangente à C en p_i est parallèle à la droite passant par p_{i-1}, p_{i+1} . Ceci permet, p_{i-1} et p_i étant connus, de construire le point p_{i+1}

On aura tout d'abord besoin du résultat suivant :

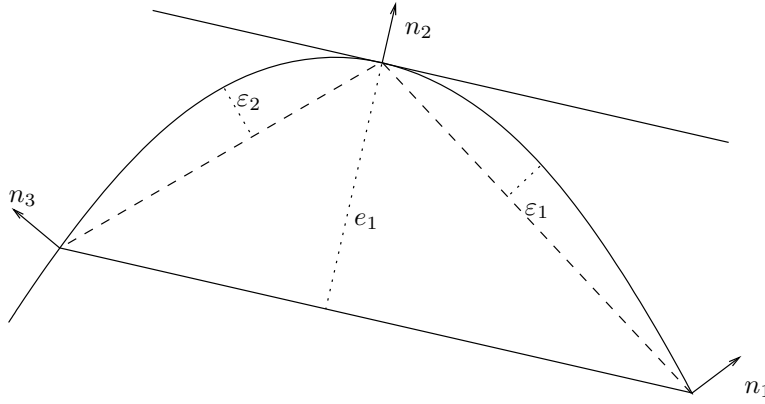


FIG. 5.1 – Subdivision du polygone inscrit

Lemme 5.2.1. *On note $(p_i)_{i=1,2}$ le point de C de normale unitaire $n_i = n_{\theta_i}$, et r_i la courbure au point p_i , etc. . . (Voir figure 5.1). Enfin, n'_i désignera le vecteur $n_{\theta_i+\pi/2}$. Si s est de classe \mathcal{C}^3 , alors*

$$p_2 = p_1 + \left[r_1(\theta_2 - \theta_1) + \frac{s_1 + s_1^{(3)}}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 \right] n'_1 - \frac{r_1}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 n_1 + o((\theta_2 - \theta_1)^2) .$$

Si s est de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$\langle p_2 - p_1, n_1 \rangle = -\frac{r_1}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + o((\theta_2 - \theta_1)^2) .$$

Preuve. Le point p_i s'écrit en terme de fonction support

$$p_i = s_i n_i + s'_i n'_i ,$$

d'où la formule de Lagrange à l'ordre 1, en exploitant le fait que $n''_1 = -n_1$:

$$p_2 = p_1 + (s_1 + s''_1)(\theta_2 - \theta_1)n'_1 + o((\theta_2 - \theta_1)) .$$

De même à l'ordre 2,

$$p_2 = p_1 + \left[(s_1 + s''_1)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{s_1 + s_1^{(3)}}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 \right] n'_1 - \frac{s_1 + s''_1}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 n_1 + o((\theta_2 - \theta_1)^2) .$$

Or le rayon de courbure est défini par $r = s + s''$, ce qui aboutit au résultat. \square

Théorème 5.2.2. *Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{P}_n vérifiant tous la propriété de la valeur moyenne. Alors P_n est une approximation asymptotiquement optimale, i.e. pour $n \rightarrow \infty$*

$$\delta^H(C, P_n) \sim \delta^H(C, \mathcal{P}_n) .$$

Preuve. En reprenant les notations de la figure 5.1, on peut écrire à l'aide du lemme précédent la distance e_1 sous la forme :

$$\begin{aligned} e_1 &= \langle p_2 - p_1, n_2 \rangle \\ &= \frac{r_2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + o((\theta_2 - \theta_1)^2) \end{aligned}$$

Mais de plus,

$$\begin{aligned} e_1 &= \langle p_2 - p_3, n_2 \rangle \\ &= \frac{r_2}{2}(\theta_2 - \theta_3)^2 + o((\theta_2 - \theta_3)^2) \end{aligned}$$

Or un résultat de [McClure and Vitale 1975] prouve que $\varepsilon_1 \sim \frac{r_2}{8}(\theta_2 - \theta_1)^2$ et $\varepsilon_2 \sim \frac{r_2}{8}(\theta_2 - \theta_3)^2$. Donc l'erreur d'approximation ε_i est équivalente sur toutes les faces du polygone P_n , ce qui est une condition suffisante pour que $\delta^H(C, P_n) \sim \delta^H(C, \mathcal{P}_n)$. \square

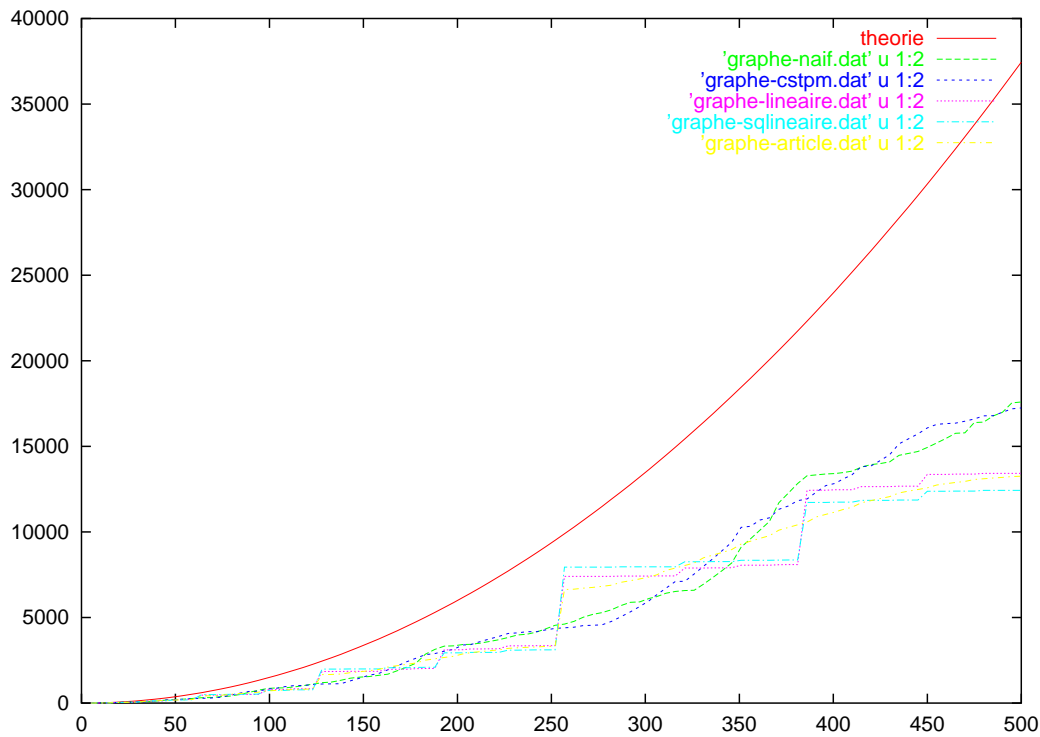


FIG. 5.2 – Comparaison des différentes méthodes sur une parabole pour obtenir une erreur donnée

On remarquera cependant au regard de la figure 5.2 que cette méthode ne donne pas de très bons résultats comparée à d'autres procédés. Nous évoquerons plus en détails cette comparaison en 5.2.4.

5.2.3 Construction à nombre de sommets fixés

On part d'un polygone initial arbitrairement construit. L'influence de ce polygone n'est cependant pas négligeable et sera étudié par la suite.

Dans une première étape, on recherche la face du polygone d'approximation où l'erreur est maximale, afin d'y faire diminuer l'erreur d'approximation. Plusieurs possibilités s'offrent pour évaluer l'erreur associée à une face :

1. En utilisant s uniquement, on ne peut obtenir qu'une majoration grossière.
2. En utilisant s et sa dérivée s' , on peut la calculer explicitement au prix de quelques calculs.
3. En utilisant s et la courbure k , on peut en donner aisément une approximation au premier ordre.

Une fois cette face localisée, on la subdivise donc afin que l'erreur d'approximation diminue localement. Se pose alors le problème du choix de ce nouveau sommet. Un premier résultat nous assure que pour un grande variété de techniques d'insertion l'erreur tendra bien vers 0.

Le théorème suivant utilisera ce lemme qui lie l'angle formé par les normales et l'approximation.

Lemme 5.2.3. *Notons ε la distance d'une corde au bord du convexe, l la longueur de cette corde, et $\Delta\theta$ l'angle entre les normales aux extrémités de la corde. Si $\Delta\theta < \pi/2$, alors*

$$\varepsilon \leq \frac{l}{2} \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Preuve. Plaçons nous dans le triangle formé par la corde et les deux tangentes. Le bord du convexe est bien évidemment à l'intérieur de ce triangle, et donc sa hauteur est supérieur à ε . Si on note ABC ce triangle, avec $BC = l$, alors \hat{A} vaut $\pi - \theta$. Remarquons tout d'abord que pour l et \hat{A} fixé, la hauteur est de longueur maximale si ABC est isocèle en A . Or la hauteur vaut en ce cas $\frac{l}{2} \cotan\left(\frac{\pi - \Delta\theta}{2}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \frac{l}{2} \cotan\left(\frac{\pi - \Delta\theta}{2}\right) \\ &\leq \frac{l}{2} \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

□

Théorème 5.2.4. *Soit $P_k \in \mathcal{P}_k^i$ que l'on identifie à $(\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_k^{(k)})$, la liste ordonnée des angles des normales aux sommets. A chaque sommet, on associe l'erreur $\varepsilon_i^{(k)} = \varepsilon(\theta_i, \theta_{i+1})$ sur la face qui suit, et on note i_{\max} un indice tel que*

$\varepsilon_{i_{\max}}^{(k)} = \max_{i=1\dots k} \varepsilon_i^{(k)}$. Enfin, soit $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ une fonction continue telle que $\alpha(\cdot, y)$ et $\alpha(x, \cdot)$ soient 2π -périodiques.

A partir d'un polygone P_n , on construit le polygone P_{n+1} de sommets

$$\alpha(\theta_{i_{\max}}^{(k)}, \theta_{i_{\max}+1}^{(k)})\theta_{i_{\max}}^{(k)} + (1 - \alpha(\theta_{i_{\max}}^{(k)}, \theta_{i_{\max}+1}^{(k)}))\theta_{i_{\max}+1}^{(k)} .$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^H(P_n, C) = 0 .$$

Preuve. Pour simplifier, on notera par la suite θ_{12} pour $\alpha(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)})$.

La fonction α étant continue sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, elle atteint ses bornes que l'on appellera α_m et α_M . On a bien sûr $0 < \alpha_m \leq \alpha_M < 1$. Donc pour le polygone P_{k+1} l'angle maximal entre deux sommets se majore par :

$$\Delta\theta_M^{(k+1)} \leq \max\{\alpha_M \Delta\theta_M^{(k)}, (1 - \alpha_m) \Delta\theta_M^{(k)}\}$$

On en déduit immédiatement que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta\theta_M^{(k)} = 0$. Or le lemme précédent induit que $\delta^H(P_n, C) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(C) \tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$, donc P_n converge bien vers C . \square

On va désormais s'attacher à comparer plusieurs méthodes convergentes d'approximation. Soit θ_{12} un point d'insertion asymptotiquement optimale. Ce dernier vérifie

$$\int_{\theta_1}^{\theta_{12}} \sqrt{r(\theta)} d\theta \sim \int_{\theta_{12}}^{\theta_2} \sqrt{r(\theta)} d\theta . \tag{5.2.3}$$

Les différents paragraphes suivants exploiteront cette même relation sous différentes formes pour en tirer des procédés de construction d'approximants.

Connaissant la courbure

r constant par morceaux On considère comme approximation que le rayon de courbure est constant par morceaux, avec une discontinuité au point correspondant à θ_{12} . Plus précisément, on écrit $r(\theta) = r(\theta_1) + o(\theta - \theta_1)$ au voisinage de θ_1 , et $r(\theta) = r(\theta_2) + o(\theta - \theta_2)$ au voisinage de θ_2 . Alors la condition 5.2.3 s'écrit :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_{12}} \sqrt{r(\theta_1)} d\theta \sim \int_{\theta_{12}}^{\theta_2} \sqrt{r(\theta_2)} d\theta ,$$

et on en déduit aisément que

$$\theta_{12} = \frac{\sqrt{r_1}\theta_2 + \sqrt{r_2}\theta_1}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} .$$

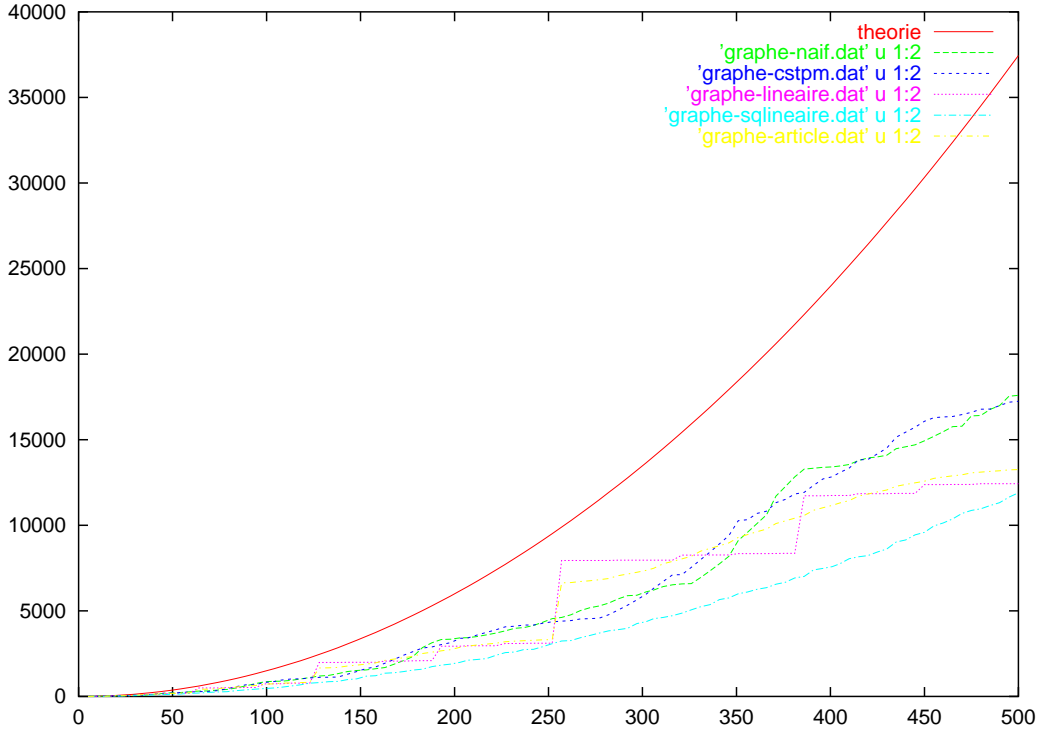


FIG. 5.3 – Comparaison des différentes méthodes à courbure donnée sur une ellipse pour obtenir un nombre de sommets fixé

r linéaire On considère comme approximation du rayon de courbure que celui-ci est linéaire entre θ_1 et θ_2 . Ici, en notant $r_i = r(\theta_i)$ et $\delta = \frac{r_2 - r_1}{\theta_2 - \theta_1}$ le coefficient directeur de r , on a l'expression

$$\begin{aligned} r(\theta) &= r_1 + \delta(\theta - \theta_1) \\ &= r_2 + \delta(\theta - \theta_2) \end{aligned}$$

Puisqu'on se place au niveau asymptotique, la condition 5.2.3 peut se traduire par

$$\int_{\theta_1}^{\theta_{12}} \sqrt{r_1} \left(1 + \frac{\delta(\theta - \theta_1)}{2r_1}\right) d\theta = \int_{\theta_{12}}^{\theta_1} \sqrt{r_2} \left(1 + \frac{\delta(\theta_2 - \theta)}{2r_2}\right) d\theta$$

$$\begin{aligned} \iff & \delta(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})\theta_{12}^2 \\ & + 2(2\sqrt{r_1}r_2 + 2\sqrt{r_2}r_1 - \sqrt{r_1}\delta\theta_2 - \sqrt{r_2}\delta\theta_1)\theta_{12} \\ & + \delta(\sqrt{r_1}\theta_2^2 + \sqrt{r_2}\theta_1^2) - 4\sqrt{r_1r_2}(\sqrt{r_1}\theta_1 + \sqrt{r_2}\theta_2) \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

d'où une l'expression de θ_{12} particulièrement longue, mais néanmoins exploitable.

\sqrt{r} linéaire On considère comme approximation du rayon de courbure que sa racine est linéaire entre θ_1 et θ_2 . Autrement dit, on interpole linéairement la

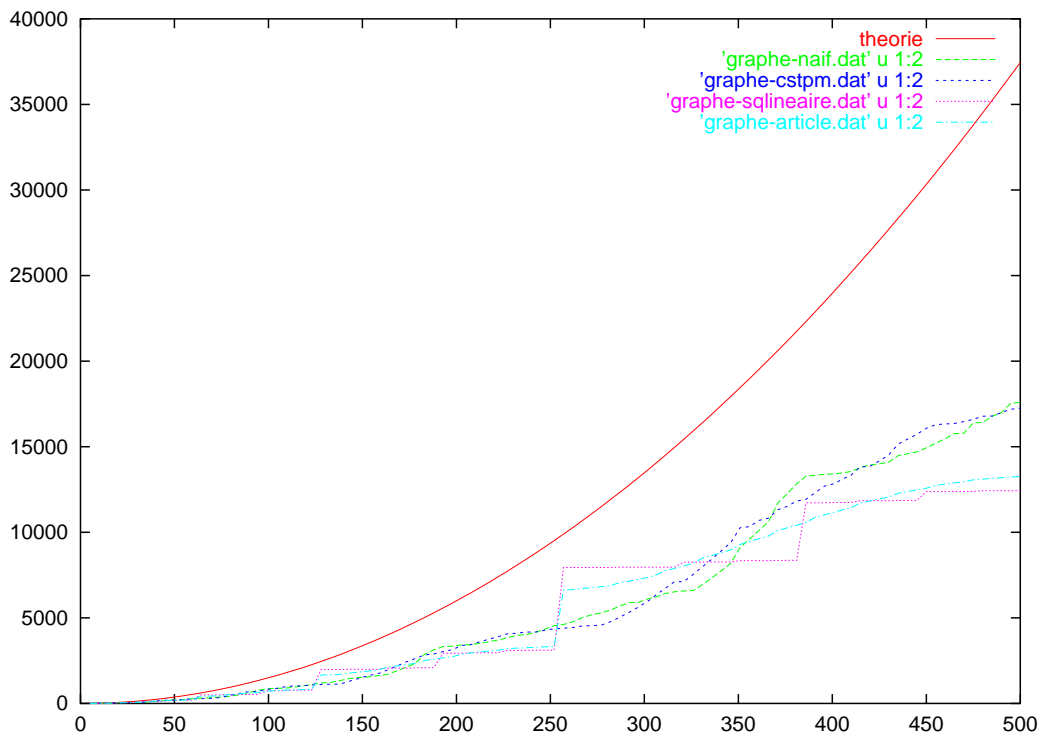


FIG. 5.4 – Comparaison des différentes méthodes à courbure donnée sur une parabole pour obtenir un nombre de sommets fixé

métrique riemannienne entre 2 points. Alors le rayon de courbure s'écrit :

$$r(\theta) = \left(\sqrt{r_1} + \frac{\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1) \right)^2$$

En notant $\delta = \frac{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}}{\theta_2 - \theta_1}$, l'expression 5.2.3 s'écrit :

$$\delta \theta_{12}^2 + (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} - \delta(t_1 + t_2))\theta_{12} + \theta_1(\delta\theta_1/2 - \sqrt{r_1}) + \theta_2(\delta\theta_2/2 - \sqrt{r_2}) = 0 ,$$

d'où

$$\theta_{12} = \frac{\sqrt{r_2}\theta_1 - \sqrt{r_1}\theta_2}{(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1})} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{r_1 + r_2}}{2\delta} ,$$

et en notant

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})/2 - \sqrt{(r_1 + r_2)}/2}{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}} ,$$

alors on a :

$$\theta_{12} = \alpha\theta_1 + (1 - \alpha)\theta_2 .$$

Connaissant s et s'

r constant On écrit le rayon de courbure sous la forme $r(\theta) = r(\theta_1) + o(\theta - \theta_1)$. Alors la condition 5.2.3 implique que

$$\theta_{12} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} .$$

Pour cette technique de probing, [Lindenbaum and Bruckstein 1994], puis [Richardson 1997] ont établi une majoration de l'erreur $\delta^H(P_n, C)$ en fonction de la longueur du bord de C . Cette borne est bien sûr très éloigné du comportement optimal puisque l'erreur est donnée asymptotiquement par (5.2.1), et que pour le probing du cercle, la méthode peut produire des polygones optimaux. Par contre elle assure que l'ordre de convergence est maximal.

Point réalisant l'erreur Cette méthode a été proposée par [Johnson and Vogt 1980] pour construire une approximation au sens de la métrique différence symétrique δ^S . Si p_1, p_2, p_3 sont trois points successifs de la courbe convexe, le critère choisi est que, p_1 et p_3 étant fixés, p_2 détermine un triangle d'aire maximale parmi tous les triangles de sommets (p_1, p_2, p) où $p \in p_1p_3$.

Ce point p_2 est alors caractérisé par le fait qu'il admet une droite support parallèle à la droite $L(p_1, p_3)$. Incidemment, ce point réalise donc la distance de Hausdorff sur l'arc p_1p_3 , ce qui en fait un excellent candidat pour l'insertion d'un sommet.

Sa mise en pratique est relativement aisée puisqu'il suffit de calculer le vecteur associé à l'arête orientée choisie pour l'insertion du point, de calculer son angle ξ dans le repère fixe, et de sonder selon la direction $\xi - \pi/2$.

5.2.4 Comparaison expérimentale

Au vu des expérimentations (voir figures 5.3 et 5.4), on constate expérimentalement que la méthode naïve, c'est-à-dire d'insertion du point milieu, et la méthode supposant r constant par morceaux (désignée par "cstpm" sur les figures) sont les plus efficaces. En effet, les courbes représentent l'inverse de la distance de Hausdorff en fonction du nombre de sommets, et ces deux méthodes présentes les graphes les plus proche de l'optimal théorique (désigné par "théorie"). La méthode reposant sur une approximation linéaire de la courbure (désignée par "linéaire" sur les figures), tout comme celle proposée par [Johnson and Vogt 1980] (désignée par "article") ont tendance à présenter des palliers pour certains nombre de sommets, et à ne présenter une bonne approximation que pour un nombre de sommets légèrement supérieur à celui de ces palliers. Ce comportement sera abordé au paragraphe suivant. Par ailleurs, les figures choisies ici illustrent le comportement de l'approximation de coniques, l'expérimentation n'ayant été menée que sur de telles courbes ainsi que des courbes à paramétrisation polynomiale. Dans les deux cas, le comportement est similaire.

5.2.5 Influence du polygone initial

Comportement par sauts

La convergence asymptotique des polygones construits vers C est par nature irrégulière. En effet la distance de Hausdorff est définie comme le maximum des erreurs locales. Par conséquent, si P_n est un polygone d'approximation optimale que l'on affine par l'une des méthodes ci-dessus, on gardera

$$\delta^H(P_n, C) = \dots = \delta^H(P_{2n-1}, C)$$

puisque l'erreur est alors équilibrée. Mais $\delta^H(P_{2n}, C) < \delta^H(P_{2n-1}, C)$, le premier terme tendant à valoir le quart du second. Aussi le graphe de l'erreur présente des discontinuités très marquées. Si l'erreur est initialement équitabement répartie, les principaux sauts sont espacés selon une progression géométrique de raison 2 qui correspond à la phase de raffinement de toutes les faces précédentes. La hauteur de ces sauts suit asymptotiquement une progression géométrique de raison 4.

Par contre, si le polygone P_n que l'on affine admet une erreur très irrégulièrement répartie, alors ces discontinuités n'apparaîtront pas nécessairement en P_{2n-1} . En fait, le comportement de l'erreur est alors difficilement prévisible. Il est possible d'aboutir à un polygone P_{n+k} qui soit par contre optimal et donc à un graphe de l'erreur discontinu. Par contre, il se peut également qu'aucune discontinuité n'apparaisse.

Optimalité du polygone de meilleure approx comme polygone initial ?

Pour un processus qui affinerait le polygone P_n de façon optimale et non asymptotiquement optimale, un polygone initial de meilleure approximation permet de construire ensuite des polygones P_{n2^k} d'erreur équilibrée. Par exemple, si l'approximation d'un cercle est initialisée avec un diamètre, on obtiendra des polygones P_{2^k} de meilleure approximation.

Si le graphe de l'erreur ne présente pas de discontinuité, c'est que l'algorithme ne passe pas par un polygone d'erreur équilibrée. Or cette condition est nécessaire (mais non suffisante) pour obtenir une meilleure approximation. Donc la "qualité" des polygones construits est plutôt faible. Au contraire, les sauts correspondent aux polygones d'erreur équilibrée et donc, a priori, à de meilleurs résultats.

5.2.6 Améliorations possibles

Insertions multiples pour équilibrer l'erreur

L'insertion d'un point permet asymptotiquement de diviser l'erreur locale par 4. On se propose d'insérer simultanément m points pour diviser l'erreur locale par $(m+1)^2$. Pour cela on part d'un polygone initial P_k , et à chaque face on associe l'erreur d'approximation. Dans le but d'équilibrer l'erreur, on choisit d'insérer, sur la face d'erreur ε_{\max} maximale, m points tel que $(m+1)^2 - \varepsilon_{\max}/\varepsilon_{\min}$ soit minimal.

Certaines méthodes se prêtent aisément à une insertion multiple, comme celles basées sur une approximation de r (constant, . . .), d'autres comme celle du point réalisant l'erreur n'y sont pas adaptées.

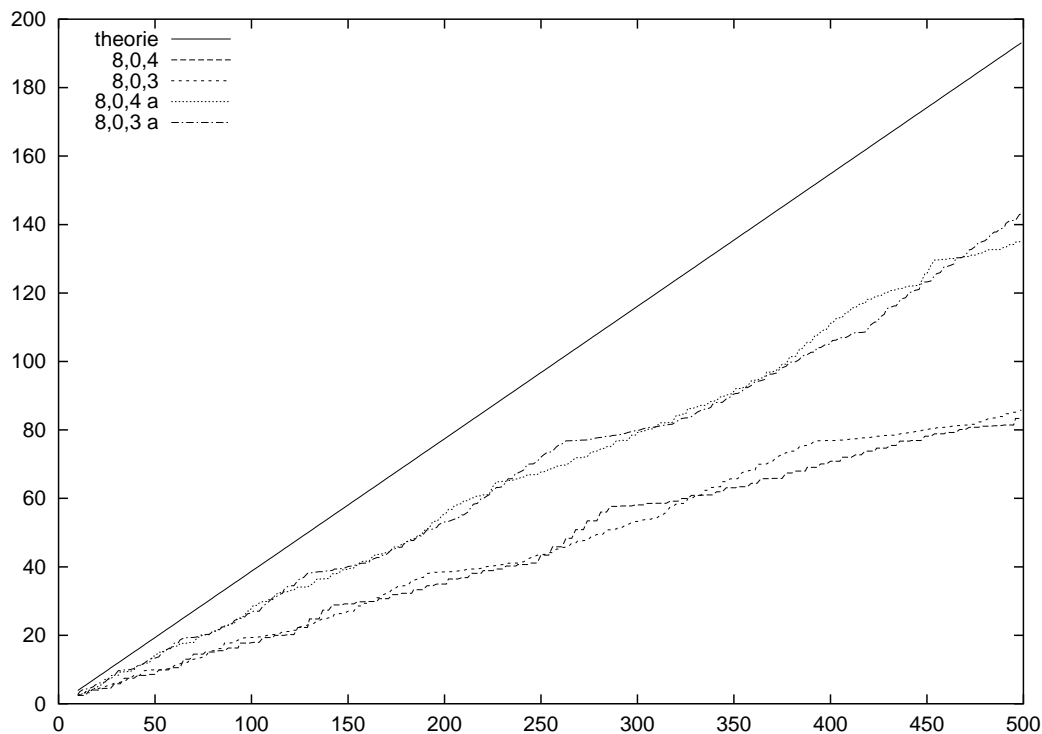


FIG. 5.5 – Comparaison entre une méthode naïve simple et sa variante adaptative sur une ellipse

Commentaire des figures 5.5 et 5.6 Les figures 5.5 et 5.6 correspondent aux deux premières méthodes décrites ici (celle d'insertion du point milieu et celle supposant r constant par morceaux), mais sous leur forme adaptative. Dans chaque cas, on a utilisé deux polygones initiaux distincts. Les figures représentent en ordonnée la qualité de l'approximation pour un nombre de sommets donné en abscisse. On observe la nette supériorité des méthodes adaptatives

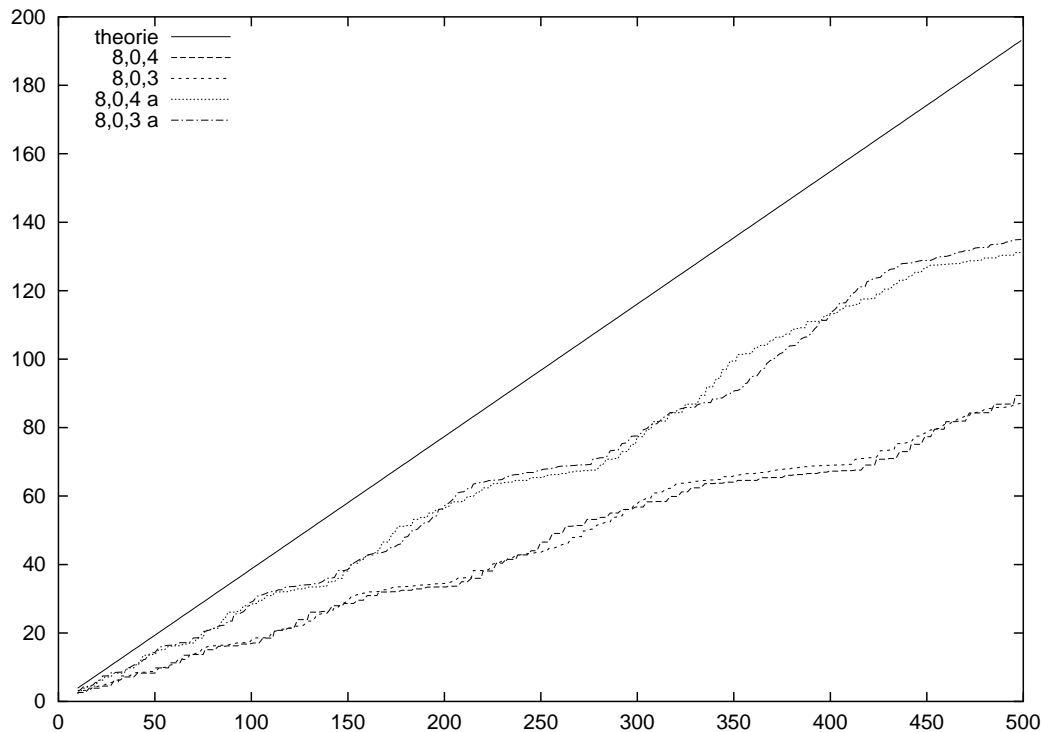


FIG. 5.6 – Comparaison entre une méthode de type 2 et sa variante adaptative sur une ellipse

quelque soit le polygone initial.

Adaptation à la décomposition en facteurs premiers

La méthode habituelle, non adaptative, permet au mieux d'obtenir de bons polygones pour $N = n2^k$, voire $N = nm^k$ avec des insertions multiples. Si l'on cherche à construire, par exemple, un polygone à 60 sommets à partir d'un polygone initial à 2 sommets, on peut envisager d'utiliser la décomposition en facteurs premiers de 60 pour subdiviser chaque face en 2 puis 3 puis 5.

Cette méthode est plus simple à mettre en place puisqu'elle ne suppose pas de connaissance de l'erreur sur chaque face. Elle présente cependant deux sérieux inconvénients :

- Le polygone initial doit être à erreur relativement équilibrée
 - L'insertion de point doit subdiviser chaque face en faces d'erreurs proches
- De telles conditions entraînent que le polygone initial doit être proche d'un polygone optimal et avec un nombre de sommets d'autant plus élevé que la courbure du convexe varie. L'application de cette méthode est donc délicate et inefficace.

5.3 Décomposition de norme et diagramme de Voronoï

Nous nous proposons ici de regarder la transformation subie par un diagramme de Voronoï lors du remplacement de la norme par une décomposition approchée. En dimension supérieure à 2, ces diagrammes pour des normes polytopiales sont souvent mieux connus que leurs équivalents pour des normes lisses. Ainsi, [Icking and Ha 2001] présente des résultats sur la complexité de ces objets en dimension 3, et [Boissonnat et al. 1998] s'intéresse aux plus grandes dimensions.

5.3.1 Préliminaires

Sachant que des livres entiers sont consacrés au diagrammes de Voronoï, le survol rapide qui suit a pour seule prétention de poser les notations, voire de rafraîchir des connaissances déjà acquises. Parmi les nombreux ouvrages qui abordent ce thème, [Boissonnat and Yvinec 1995; Preparata and Shamos 1985b] et plus récemment [Aurenhammer and Klein 2000].

L'espace \mathbb{R}^d est muni d'une norme φ quelconque avec pour boule unité B_φ . Soit $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble de n points de \mathbb{R}^d . Ces points seront appelés *sites*. Ces points sont supposés en position générale, *i. e.*

Définition 5.3.1. Des sites sont en *position générale* s'il n'existe pas de placement de la sphère S_φ dont l'image passe par $d + 2$ sites.

On rappelle qu'un placement est la composition d'une homothétie et d'une translation. Par exemple, pour la norme l_2^2 , cette propriété interdit que quatre sites soient cocycliques. Cette hypothèse est nécessaire pour éviter les situations dégénérées pour lesquelles la complexité peut être très élevée, et le diagramme de Voronoï changer de dimension.

Définition 5.3.2. Pour chaque site s_i de \mathcal{S} , on définit sa *cellule de Voronoï* $\text{Cell}_\varphi(s_i)$ comme étant l'ensemble des points de \mathbb{R}^d qui sont plus proches de s_i que de tout autre site de \mathcal{S} , c'est à dire

$$\text{Cell}_\varphi(s_i) = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \varphi(p - s_i) \leq \varphi(p - s_j), \forall s_j \in \mathcal{S}\}$$

La *diagramme de Voronoï* de \mathcal{S} pour la distance associée à la norme φ est la décomposition de \mathbb{R}^d en cellules de Voronoï. Il sera noté $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$.

Si pour la norme l_2 une cellule de Voronoï est clairement convexe, de manière générale, elle est un d -polyèdre étoilé non-convexe comme on s'en aperçoit sur la figure 5.7. Le diagramme de Voronoï peut être perçu comme l'union des frontières des cellules de Voronoï.

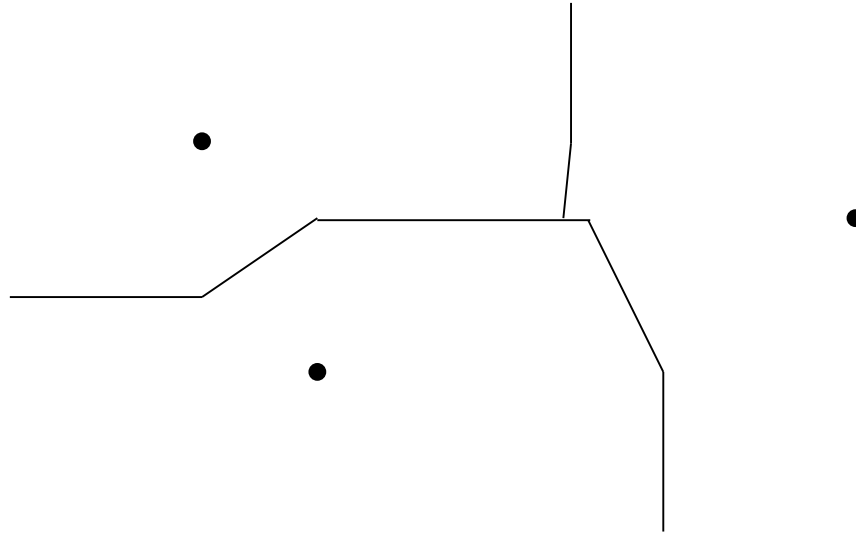


FIG. 5.7 – Diagramme de Voronoï pour la norme l_1

Plus précisément, pour $1 \leq k \leq d + 1$, considérons le lieu des points p tels que p est équidistant de k sites et strictement plus proche de ces k sites que des $n - k$ autres. Ce lieu est un ensemble de dimension $d + 1 - k$, linéaire par morceaux. Le diagramme de Voronoï est l'union de ces ensembles. Pour $k = d + 1$, on obtient ainsi un ensemble fini, noté V_φ , de points appelés *sommets* du diagramme. Cette définition peut s'exprimer différemment :

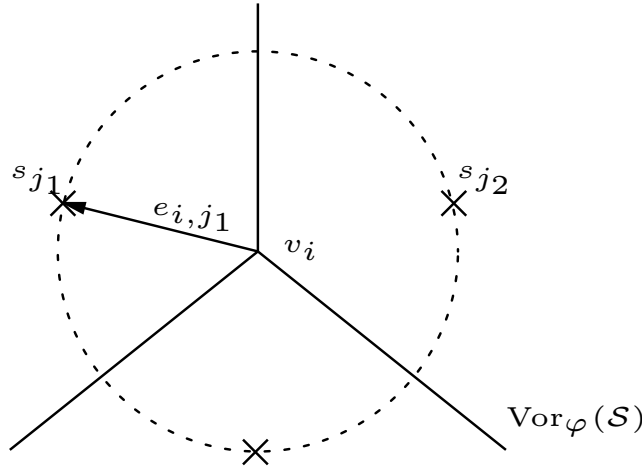
Définition 5.3.3. Soit \mathcal{S} un ensemble de sites en position générale. Un point est dit *sommet* du diagramme de Voronoï de \mathcal{S} s'il est équidistant des $d + 1$ sites les plus proches.

Par ailleurs, la condition de position générale implique qu'un sommet ne peut être équidistant de $d + 2$ sites.

La complexité d'un diagramme de Voronoï est le nombre de ses faces de toute dimension. Remarquons cependant que grâce à la condition de position générale des sites, chaque sommet de $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$ est incident à un nombre constant de faces de dimension quelconque (par exemple, $d + 1$ faces de dimension $d - 1$). Or toute face de $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$ contient au moins un sommet. Il s'ensuit que la complexité d'un diagramme est proportionnelle au nombre de ses sommets. Par la suite, nous imposerons toujours une condition de position générale des sites pour pouvoir borner la complexité en bornant le nombre de sommets de $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$.

5.3.2 Approximation du diagramme de Voronoï

Il est évident que si pour une suite d'approximation de normes $\varphi_{\varepsilon(n)}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$, chaque cellule $\text{Cell}_{\varphi_{\varepsilon(n)}}(s_i)$ va converger point par point vers


 FIG. 5.8 – Directions d'échantillonnage dans \mathbb{R}^2

la cellule originale $\text{Cell}_\varphi(s_i)$. Le diagramme de Voronoï approché $\text{Vor}_{\varphi_\varepsilon(n)}(\mathcal{S})$ converge donc simplement vers le diagramme initial. Malheureusement, cette convergence ponctuelle ne suffit pas à assurer la convergence combinatoire. Nous conjecturons cependant que cette convergence combinatoire est réalisée, tout au moins pour un grand nombre de situations. À défaut de pouvoir prouver cette conjecture, nous pouvons tout de même établir un lien combinatoire entre le diagramme de Voronoï et certaines de ses approximations.

Théorème 5.3.4. *Sous les conditions précédentes, il existe φ_ε une décomposition approchée de la norme φ telle que tout sommet de $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$ soit un sommet de $\text{Vor}_{\varphi_\varepsilon}(\mathcal{S})$.*

Preuve :

Notons m le nombre de sommets de $\text{Vor}_\varphi(\mathcal{S})$. Puisque les sites sont en position générale, $\forall 1 \leq i \leq m, \exists \{j_1, \dots, j_{d+1}\} \subset \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\begin{cases} \varphi(v_i - s_{j_1}) = \dots = \varphi(v_i - s_{j_{d+1}}) \\ \varphi(v_i - s_j) > \varphi(v_i - s_{j_1}) \quad \forall j \notin \{j_1, \dots, j_{d+1}\} \end{cases}$$

Pour simplifier les expressions, posons $\lambda_i = \varphi(v_i - s_{j_1})$ et considérons les vecteurs

$$e_{i,k} = \frac{1}{\lambda_i}(v_i - s_{j_k}) .$$

La figure 5.8 illustre la situation dans \mathbb{R}^2 . Ces vecteurs forment un ensemble d'au plus $m(d+1)$ vecteurs de S_φ . Or d'après le théorème 3.2.4 chacun d'entre eux admet un dual (non-nécessairement unique), c'est-à-dire un élément $e_{i,k}^*$ de S_φ^* tel que $e_{i,k} \cdot e_{i,k}^* = 1$. Alors on pose

$$E = \{e_{i,k}^* ; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq d+1\} .$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \leq 1 - \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq d+1} \frac{\lambda_i}{\varphi(v_i - s_j)}. \quad (5.3.1)$$

On construit ensuite une ε -décomposition approchée φ_ε contenant E . Pour cela, il suffit de prendre une ε -décomposition approchée quelconque dont l'existence est assurée par 3.5.13 et de la compléter par E .

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $(1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq \varphi(x)$. Par conséquent, $\forall 1 \leq i \leq m$,

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(v_i - s_{j_1}) = \dots = \varphi_\varepsilon(v_i - s_{j_{d+1}}) = \lambda_i \\ \varphi_\varepsilon(v_i - s_j) \geq (1 - \varepsilon)\varphi(v_i - s_j) \quad \forall j \notin \{j_1, \dots, j_{d+1}\} \end{cases}$$

Comme la condition (5.3.1) impose que $\frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{\varphi(v_i - s_j)}{\lambda_i}$, alors

$$(1 - \varepsilon)\varphi(v_i - s_j) > \lambda_i,$$

d'où $\forall j \notin \{j_1, \dots, j_{d+1}\}$,

$$\varphi_\varepsilon(v_i - s_j) > \lambda_i.$$

Donc v_i est un sommet de $\text{Vor}_{\varphi_\varepsilon}(\mathcal{S})$, et donc finalement

$$V_\varphi \subset V_\varphi^*.$$

□

5.4 Plongement peu déformant

Les plongements peu déformants (*low-distortion embeddings*) sont d'abord apparus pour traiter de problèmes d'optimisation en théorie des graphes. Dans les années 90, ils se sont également imposés comme un outil particulièrement efficace pour la création et l'étude d'algorithmes portant sur toutes sortes de problèmes basés sur des espaces métriques, et où une solution approchée s'avère satisfaisante (cf le tour d'horizon de [Indyk 2001]). Le domaine où cette notion a le plus apporté est certainement la *réduction de dimension* avec comme exemple marquant les progrès réalisés sur la recherche du plus proche voisin (*N.N.S.* Nearest Neighbour Search). Cependant l'utilisation que nous ferons ici de cette notion ne rentre pas directement dans le cadre de la réduction de dimension.

Commençons par définir le plongement peu déformant que nous manipulerons uniquement entre espaces normés et non dans le cadre plus général des espaces métriques.

Définition 5.4.1 (Plongement peu déformant). On appelle *plongement peu déformant* d'espaces normés une application $f : (\mathbb{R}^d, \varphi) \rightarrow (\mathbb{R}^{d'}, \varphi')$ telle que

$$\frac{1}{c} \varphi(x - y) \leq \varphi'(f(x) - f(y)) \leq \varphi(x - y)$$

où le paramètre c sera appelé *distorsion* du plongement.

Le lien avec l'approximation de norme est particulièrement évident : toute approximation de norme peut être vue comme un plongement peu déformant.



Théorème 5.4.2. Soit φ_ε une décomposition de la norme φ sur \mathbb{R}^d . Alors l'application

$$\begin{aligned} \tau : (\mathbb{R}^d, \varphi) &\rightarrow (\mathbb{R}^d, \varphi_\varepsilon) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est un plongement peu déformant de (\mathbb{R}^d, φ) dans $(\mathbb{R}^d, \varphi_\varepsilon)$, de distorsion $c = \frac{1}{1-\varepsilon}$.

Preuve :

Il suffit de se ramener à la définition d'une décomposition de norme. En effet, φ_ε vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (1 - \varepsilon)\varphi(x) \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq \varphi(x).$$

Au regard de la définition ci-dessus, cette expression caractérise un plongement de distorsion $1/c = 1 - \varepsilon$. □

Un exemple étudié plus précisément dans [Gabow et al. 1984] nous permet de plonger l_1 dans l_∞ . On rappelle que l_p^d est la norme définie sur \mathbb{R}^d par $l_p^d(x) = (|x_1|^p + \dots + |x^d|^p)^{1/p}$. Considérons désormais l'application $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{2^d}$, avec $d' = 2^d$, définie de la manière suivante : soit $\{e_i\} = \{-1, 1\}^d$ l'ensemble des sommets de la boule unité pour l_1^d , alors pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\pi(x) = (x \cdot e_1, \dots, x \cdot e_{2^d}).$$

Autrement dit, chaque composante de $\pi(x)$ est le produit scalaire de x avec un vecteur de $\{-1, 1\}^d$. Il est visible que π est linéaire, mais sa propriété essentielle est que π est un plongement peu déformant de (\mathbb{R}^d, l_1) dans $(\mathbb{R}^{2^d}, l_\infty)$ de distorsion nulle. Ce résultat se généralise pour une norme polytopiale.

Lemme 5.4.3. Soit \mathbb{R}^d muni d'une norme polytopiale φ . Soient v_1^*, \dots, v_k^* les sommets de la boule duale.

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}^d, \varphi) &\rightarrow (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \\ \pi(x) &\mapsto (x \cdot v_1^*, \dots, x \cdot v_k^*) \end{aligned}$$

est un plongement non déformant, c'est-à-dire de distorsion nulle.

Preuve :

Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, montrons que $\|\pi(x) - \pi(y)\|_\infty = \varphi(x - y)$. Par linéarité, $\pi(x) - \pi(y) = \pi(x - y)$. Donc il suffit de prouver que $\|\pi(x)\|_\infty = \varphi(x)$. Pour cela, on se ramène à la définition d'une norme par sa boule duale vue en 3.2.10 :

$$\varphi(x) = \max_{v \in B_\varphi^*} x.v .$$

Comme $\|\pi(x)\|_\infty = \max\{x.v_1^*, \dots, x.v_k^*\}$, il vient alors immédiatement que $\|\pi(x)\|_\infty \leq \varphi(x)$. Enfin, puisque B_φ^* est un corps convexe, $\max_{v \in B_\varphi^*} x.v$ ne peut être réalisé qu'en un des sommets de B_φ^* , et donc $\|\pi(x)\|_\infty \geq \varphi(x)$. \square

Ce résultat permet alors de construire aisément des plongements dans l_∞ en composant l'approximation de norme τ avec ce plongement π . Le théorème suivant est ainsi une combinaison immédiate de ce lemme et du résultat précédent.



Théorème 5.4.4. Soit φ_ε une approximation de la norme φ sur \mathbb{R}^d et v_1^*, \dots, v_k^* les sommets de la boule duale $B_{\varphi_\varepsilon}^*$. Alors l'application $f = \pi \circ \tau$

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^d, \varphi) &\rightarrow (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \\ f(x) &\mapsto (x.v_1^*, \dots, x.v_k^*) \end{aligned}$$

est un plongement peu déformant de (\mathbb{R}^d, φ) dans $(\mathbb{R}^{2^d}, l_\infty)$, de distorsion $c = \frac{1}{1-\varepsilon}$.

On peut en déduire que pour toute distorsion, tout espace normé peut être plongé dans $l_\infty^{d'}$.



Théorème 5.4.5. Soit (\mathbb{R}^d, φ) un espace normé et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un plongement peu déformant de distorsion $c = \frac{1}{1-\varepsilon}$ de (\mathbb{R}^d, φ) dans $(\mathbb{R}^{d'}, l_\infty^{d'})$ avec pour $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$d' = O(1/\varepsilon^{\frac{d-1}{2}}) .$$

Preuve :

C'est une simple conséquence du résultat précédent et de la borne sur la complexité de l'approximation des normes de 3.5.14. \square

5.5 Diamètre approché

Il est à noter que la décomposition de norme peut s'appliquer à bien d'autres problèmes géométriques tels que les calculs approchés de largeur, de cylindre

englobant, etc. Nous avons donc choisi le calcul du diamètre comme le plus emblématique.

Le problème du diamètre est d'énoncé parmi les plus simples de la Géométrie Algorithmique :

Étant donné un ensemble fini A de points de (\mathbb{R}^d, φ) , calculer la distance maximale pour φ entre deux points de A .

Il est prouvé depuis plus d'une décennie [Preparata and Shamos 1985a] que ce calcul nécessite $\Omega(n \log n)$ opérations. L'algorithme naïf qui consiste à comparer les distances entre toutes les paires de points n'est donc pas satisfaisant. En dimension 2, il est aisé de résoudre ce problème en temps $O(n \log n)$, ce qui est optimal. En dimension 3, l'optimalité est beaucoup plus difficile à atteindre, mais [Ramos 2000] a finalement proposé un algorithme 3D en $O(n \log n)$. Cependant, il est à noter que la méthode proposée repose sur des objets particulièrement complexes à manipuler et n'a à ce jour pas été implémentée.

Dans un pareil contexte, il est naturel que la recherche d'une solution approchée pour le calcul du diamètre ait fait l'objet de nombreux travaux récemment [Agarwal et al. 1992; Malandain and Boissonnat 2002; Barequet and Har-Peled 2001; Har-Peled 2001; Chan 2002]. Ce problème peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donné un ensemble fini A de points de (\mathbb{R}^d, φ) de diamètre $\Delta(A)$, et soit $\varepsilon > 0$ donné, trouver $\tilde{\Delta}(A)$ tel que

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \Delta(A) \leq \tilde{\Delta}(A) \leq \Delta(A) .$$

Deux procédés sont souvent à la base des différents algorithmes proposés, avec de nombreuses variantes et combinaisons :

Projection sur une grille : On décompose la boîte englobante de A en $\lceil 1/\varepsilon \rceil^d$ boîtes semblables, on "nettoie" cette grille pour n'en garder que certaines cellules, puis on calcule le diamètre de cet ensemble de cellules.

Le temps d'exécution pour l'application naïve de ce genre d'algorithme est de $O(n + \frac{1}{\varepsilon^{2(d-1)}})$.

Projection selon certaines directions : On choisit des directions de sorte que la sphère S^{d-1} soit recouverte par des calottes de rayon $\sqrt{2}\varepsilon$ centrées sur ces directions. On projette alors orthogonalement l'ensemble A sur les différentes droites ainsi déterminées. Il ne reste ensuite qu'à prendre le maximum des diamètres de ces ensembles de dimension 1.

Le temps d'exécution pour l'application naïve de ce genre d'algorithme est de $O(\frac{n}{\varepsilon^{(d-1)/2}})$.

L'approche que nous proposons s'inscrit dans ce dernier cas. Elle ne propose pas d'amélioration pratique quant à la rapidité de cette technique. Son intérêt est, grâce aux outils que nous avons précédemment introduits, de pouvoir traiter du calcul du diamètre en dimension quelconque et dans des espaces munis d'une

norme quelconque. En effet, le diamètre exact pour une norme approchée est également un diamètre approché pour la norme initiale. Cette formulation nous permet donc de transformer le problème de calcul approché d'un diamètre en :

Étant donné un ensemble fini A de points de \mathbb{R}^d de diamètre $\Delta(A)$, ainsi que $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Un prétraitement permet de construire $\varphi_{\varepsilon'}$, une ε' -approximation polytopiale de la norme avec pour nombre de sommets $k = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2(d-1)}}\right)$. Calculer alors le diamètre de A pour $\varphi_{\varepsilon'}$.

Plongement dans l_∞^d Ce procédé a été utilisé par [Agarwal et al. 1992] pour approcher le diamètre dans l_1^d et l_2^d . Nous nous proposons ici de nous placer dans un espace normé (\mathbb{R}^d, φ) quelconque. Toute approximation de norme induit un plongement peu déformant dans l_∞^d d'après le théorème 5.4.4. Il reste à effectuer le calcul d'un diamètre dans l_∞^d , ce qui s'avère extrêmement aisé.

⚡ **Théorème 5.5.1.** *Soit φ une norme de classe \mathcal{C}^2 et soit $\varphi_{\varepsilon'}$ une approximation polytopiale de la norme φ sur \mathbb{R}^d avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, et soient v_1^*, \dots, v_k^* les sommets de la boule duale $B_{\varphi_{\varepsilon'}}^*$. Alors un diamètre approché peut être calculé en $O(ndk)$.*

Preuve :

On cherche à calculer $\Delta_{\varphi_{\varepsilon'}}(A)$ le diamètre pour $\varphi_{\varepsilon'}$ de l'ensemble A . Notons π le plongement non déformant défini en 5.4.3. Il nous permet de remplacer $\varphi_{\varepsilon'}$ par l_∞^k en un temps $O(ndk)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi_{\varepsilon'}}(A) &= \max_{x,y \in A} \varphi_{\varepsilon'}(x - y) \\ &= \max_{x,y \in A} l_\infty^k(\pi(x) - \pi(y)) && \text{(en appliquant } \pi) \\ &= \max_{x,y \in A} \max_{1 \leq i \leq k} |\pi(x)_i - \pi(y)_i| \\ &= \max_{x,y \in A} \left(\max_{1 \leq i \leq k} \pi(x)_i - \min_{1 \leq i \leq k} \pi(y)_i \right) \end{aligned}$$

Donc le diamètre dans l_∞^k se calcule en $O(nk)$, ce qui donne un temps de calcul total de $O(ndk)$. □

Il est à remarquer que puisque cette méthode appelée *Projection selon certaines directions* repose implicitement sur un échantillonnage de la boule duale, son efficacité est indissociable de celle de la décomposition de norme.

Sachant avec 3.5.14 que le nombre de sommets d'une approximation polytopiale de la norme est en $O\left(\frac{1}{\varepsilon^{(d-1)/2}}\right)$, on en déduit immédiatement une borne pour les normes quelconques, même non-lisses :

Corollaire 5.5.2. *Soit A un ensemble fini de points de (\mathbb{R}^d, φ) et $\varepsilon > 0$. Si une approximation de la norme φ est connue, un diamètre approché peut être calculé en temps $O\left(\frac{n}{\varepsilon^{(d-1)/2}}\right)$.*

La construction de décompositions approchées vue au chapitre précédent permet ainsi de proposer un algorithme de calcul du diamètre approché, pour une norme l_p , d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^d en temps $O\left(\frac{n}{\varepsilon^{(d-1)/2}}\right)$. Par ailleurs, il est à souligner que notre approche est non seulement plus générale, mais aussi complète. Enfin, rappelons que la décomposition de norme permet certes de proposer un calcul approché du diamètre, mais que le même procédé peut être appliqué à d'autres problèmes similaires tels que enveloppe convexe, largeur, plus petit cylindre englobant, anneau de largeur minimale, etc.

Perspectives

Pour lui, la science est un sport ; résoudre un problème, comprendre un phénomène revient à établir un record sportif. L'essentiel étant de ne pas se faire doubler.

Vassili Grossman. *Vie et destin.*

Comme souvent, le chemin parcouru paraît infime devant l'immensité des possibles. Pour prolonger cette thèse, nous envisageons plusieurs voies. Tout d'abord, l'incapacité à donner une décomposition approchée optimale d'une boule l_p dans le plan est particulièrement frustrante. Non seulement, le problème paraît accessible au premier abord, mais de plus la construction de décompositions approchées en dimensions supérieures repose sur la qualité de cette initialisation dans le plan. Même si de nombreuses difficultés techniques sont présentes, à terme elles devraient pouvoir être surmontées.

Une deuxième direction pour un prolongement direct serait une implémentation de la décomposition de différentes normes en dimension d . Le chapitre 4 fournit les constructions nécessaires, et il serait ainsi possible d'établir une bibliothèque logicielle proposant toute une gamme de calculs approchés pour la géométrie algorithmique. En effet, une fois la décomposition approchée connue, l'implémentation de fonctions évaluant le diamètre, l'enveloppe convexe, le cylindre minimal englobant, etc. ne présente guère de difficulté.

Si certaines applications des décompositions de normes ont d'ailleurs été étudiées au chapitre 5, ce domaine est loin d'être épuisé. Il serait ainsi intéressant de regarder l'utilité de cet outil pour des problèmes légèrement différents, comme le fameux *Nearest Neighbor Search*. Plus spécifiquement, une question intéressante est de savoir si la convergence d'approximations de norme vers une norme fixée entraîne la convergence des diagrammes de Voronoï associés à ces métriques. Pour des situations non-dégénérées, la réponse semble positive dans le plan, mais pas en dimension 3. Mais une étude complète de la stabilité combinatoire du graphe de Voronoï pour une faible perturbation de la norme reste à effectuer.

Enfin, la perspective la plus intéressante est dans la généralisation des dé-

compositions de normes aux espaces grassmanniens. En effet, une décomposition approchée correspond au choix de certaines directions de l'espace. Or il est possible de décomposer l'espace non seulement en droites, mais en espaces vectoriels de toute dimension [J. H. Conway and Sloane 1996]. Les espaces grassmanniens sont justement les ensembles de sous-espaces vectoriels d'une dimension fixée. Les applications semblent prometteuses, puisque [Chan 2002] a constaté qu'en projetant des points donnés sur des hyperplans et non sur des droites, le calcul approché du diamètre pour la norme canonique était accéléré. Cette extension des décompositions permettrait sans doute de déterminer la dimension optimale pour ces projections, et ce pour des normes non nécessairement euclidiennes.

Bibliographie

- P. K. Agarwal, J. Matoušek, and S. Suri. Farthest neighbors, maximum spanning trees, and related problems in higher dimensions. *Comput. Geom. : Theory & Appl.*, 4 :189–201, 1992.
- B. Aronov, S. Har-Peled, M. Sharir, and P.K. Agarwal. Exact and approximation algorithms for the minimum width annuli and shells. *Discrete and Computational Geometry*, 24 :687–705, 2000.
- F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J. Sack and G. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry, Chapter V*, pages 201–290. Elsevier Science Publishing, 2000. [SFB Report F003-092, TU Graz, Austria, 1996].
- Barequet and Har-Peled. Efficiently approximating the minimum-volume bounding box of a point set in three dimensions. *ALGORITHMS : Journal of Algorithms*, 38, 2001.
- Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, 1992a.
- Marcel Berger. Les placements de cercles. *Pour la Science (French Scientific American)*, 176, 1992b.
- Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Géométrie Différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces*. P.U.F., 1987.
- Sergueï Bespamyatnikh. An efficient algorithm for the three-dimensional diameter problem. In *SODA : ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (A Conference on Theoretical and Experimental Analysis of Discrete Algorithms)*, 1998.
- J.-D. Boissonnat, M. Sharir, B. Tagansky, and M. Yvinec. Voronoi diagrams in higher dimensions under certain polyhedra distance functions. *Discrete Comput. Geom.*, 14 :485–519, 1998.
- Jean-Daniel Boissonnat and Mariette Yvinec. *Géométrie algorithmique*. Ediscience international, 1995.

- H. Borouchaki and P. L. George. Maillage de surfaces paramétriques. Technical Report 2938, INRIA, 1996.
- Károly Böröczky. Approximation of general smooth convex bodies. *Advances in Mathematics*, 153 :325–341, 2000.
- Manfredo P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- Manfredo P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1993.
- T. M. Chan. Approximating the diameter, width, smallest enclosing cylinder, and minimum width annulus. *International Journal of Comput. Geom. and Appl.*, 12(1 and 2) :65–85, 2002.
- Hao Chen and Jonathan Bishop. Delaunay triangulation for curved surfaces. In *6th International Meshing Roundtable*, pages 115–127, 1997.
- L. Paul Chew, Klara Kedem, Micha Sharir, Boaz Tagansky, and Emo Welzl. Voronoi diagrams of lines in 3-space under polyhedral convex distance functions. In *Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 197–204. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. ISBN 0-89871-349-8.
- Y. Colin de Verdière. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Inventiones Mathematicae*, 104 :665–669, 1991.
- Y. Colin de Verdière and A. Marin. Triangulations presque équilatérales des surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 32 :199–207, 1990.
- HSM Coxeter, L. Few, and CA Rogers. Covering space with equal spheres. *Mathematika*, 6 :147–157, 1947.
- L. Dantzer. Finite points-sets on s^2 with minimum distance as large as possible. *Discrete Mathematics*, 60 :3–66, 1986.
- Harold N. Gabow, Jon Louis Bentley, and Robert E. Tarjan. Scaling and related techniques for geometry problems. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 135–143, New York, 1984. ACM Press.
- P. M. Gruber. Approximation of convex bodies. In *Convexity and its applications*, pages 131–162. Birkhäuser, Basel, 1983.
- P. M. Gruber. Aspects of approximation of convex bodies. In *Handbook of convex geometry*, pages 319–345. Elsevier Science Publishers B.V., 1993a.

- P. M. Gruber. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies. i. *Forum Math.*, 5(3) :281–297, 1993b.
- P. M. Gruber. The space of convex bodies. In *Handbook of convex geometry*, pages 301–318. Elsevier Science Publishers B.V., 1993c.
- P. M. Gruber. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies. iv. *Forum Math.*, 10(6) :665–686, 1998.
- P. M. Gruber and P. Kenderov. Approximation of convex bodies by polytopes. In *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, volume 31, pages 195–225, 1982.
- Thomas C. Hales. Sphere packings I. *Discrete Comput. Geom.*, 17 :1–51, 1997a.
- Thomas C. Hales. Sphere packings, II. *Discrete and Computational Geometry*, 18 :135–149, 1997b.
- S. Har-Peled and K.R. Varadarajan. Approximate shape fitting via linearization. In *Proc. 42nd Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, pages 66–73, 2001.
- Sariel Har-Peled. *Geometric Approximation Algorithms and Randomized Algorithms for Planar Arrangements*. PhD thesis, Tel-Aviv University, 1999.
- Sariel Har-Peled. A practical approach for computing the diameter of a point set. In *Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry*, pages 177–186. ACM Press, 2001.
- R. H. Hardin and N. J. A. Sloane. A new approach to the construction of optimal designs. Technical Report 93–47, DIMACS, 1993.
- Christian Icking and Lihong Ha. A tight bound for the complexity of voroni diagrams under polyhedral convex distance functions in 3d. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 316–321. ACM Press, 2001. ISBN 1-58113-349-9.
- P. Indyk. On approximate nearest neighbors in non-Euclidean spaces. In IEEE, editor, *39th Annual Symposium on Foundations of Computer Science : proceedings : November 8–11, 1998, Palo Alto, California*, pages 148–155, 1109 Spring Street, Suite 300, Silver Spring, MD 20910, USA, 1998. IEEE Computer Society Press.
- P. Indyk. Algorithmic applications of low-distortion geometric embeddings. In IEEE, editor, *42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science : proceedings : October 14–17, 2001, Las Vegas, Nevada, USA*, pages 10–33, 1109 Spring Street, Suite 300, Silver Spring, MD 20910, USA, 2001. IEEE Computer Society Press.

- Piotr Indyk and Rajeev Motwani. Approximate nearest neighbors : Towards removing the curse of dimensionality. In *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC-98)*, pages 604–613, New York, May 23–26 1998. ACM Press. ISBN 0-89791-962-9.
- R. H. Hardin J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Packing lines, planes, etc. : Packing in grassmanian spaces. *Experimental Mathematics*, 5 :139–159, 1996.
- Harold H. Johnson and Andrew Vogt. A geometric method for approximating convex arcs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(2) :317–325, April 1980.
- P. Kenderov and N. Kirov. A dynamical system approach to the polygonal approximation of plane convex compacts. *Journal of Approximation Theory*, 74(1) :1–15, 1993.
- Yamada Atsushi Kenji Shimada and Ito Takayuki. Anisotropic triangular meshing of parametric surfaces via close packing of ellipsoidal bubbles. In *6th International Meshing Roundtable*, pages 375–390. Sandia National Laboratories, 1997.
- E. Kushilevitz, R. Ostrovsky, and Y. Rabani. Efficient search for approximate nearest neighbor in high dimensional spaces. In *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC-98)*, pages 614–623, New York, May 23–26 1998. ACM Press. ISBN 0-89791-962-9.
- B. Lacolle. Maximisation globale de la norme euclidienne sur un compact : résolution approchée par utilisation des problèmes projetés. *R.A.I.R.O. Numerical Analysis*, 13(2) :101–117, 1979.
- G. Leibon and D. Letscher. Delaunay triangulations and voronoï diagrams for riemannian manifolds. In *Computational Geometry 2000 Hong Kong China*, pages 341–349, 2000.
- Kaiyun Li. *Algorithmes géométriques pour la reconstruction de formes*. Thèse de doctorat en sciences, université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1994.
- M. Lindenbaum and A.M. Bruckstein. Blind approximation of planar convex sets. In *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, volume 10 of 4, pages 517–529, Aug 1994.
- M. Ludwig. Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes. *Mathematika*, 46 :103–125, 1999.
- Grégoire Malandain and Jean-Daniel Boissonnat. Computing the diameter of a point set. *Internat. J. Comput. Geom. Appl.*, 12(6) :489–510, 2002.

- D. E. McClure and R. A. Vitale. Polygonal approximation of plane convex bodies. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 51 :326–358, 1975.
- J. O'Rourke. Computational geometry column 31. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 7(4) :379–382, 1997a.
- Joseph O'Rourke. Computational geometry column 31. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 1997b.
- F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry : An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985a.
- Franco P. Preparata and Michael I. Shamos. *Computational geometry : an introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., 1985b. ISBN 0-387-96131-3.
- Edgar A. Ramos. Deterministic algorithms for 3-D diameter and some 2-D lower envelopes. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Computational Geometry (SCG-00)*, pages 290–299, N. Y., June 12–14 2000. ACM Press.
- Thomas Richardson. Approximation of planar convex sets from hyperplane probes. *Discrete and Computational Geometry*, 18, 1997.
- François Robert. Calcul du rapport maximal de deux normes sur \mathbb{R}^n . *R.I.R.O.*, 5 :97–115, 1967.
- E.B. Saff and A.B.J. Kuijlaars. Distributing many points on a sphere. *Math. Intelligencer*, 19(1) :5–11, 1997.
- R. Schneider. Polyhedral approximation of smooth convex bodies. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 128 :470–474, 1996.
- R. Schneider and J. A. Wieacker. Approximation of convex bodies by polytopes. *Bulletin of London Mathematical Society*, 13 :149–156, 1981.
- G. C. Shephard. Approximation problems for convex polyhedra. *Mathematika*, 11 :9–18, 1964.
- G. C. Shephard and R. J. Webster. Metrics for sets of convex bodies. *Mathematika*, 12 :73–88, 1965.
- Steven S. Skiena. *Geometric Probing*. PhD thesis, University of Illinois, 1988.
- Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 2nd edition, 1979. In 5 volumes.
- L. Fejes Toth. Approximation by polygons and polyhedra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 :431–438, 1948.
- F. A. Valentine. *Convex Sets*. McGraw-Hill, New-York, 1964.

Approximation de convexes par des polytopes et décomposition approchée de normes

Résumé

L'approximation des convexes lisses par des polytopes pour la distance de Hausdorff a connu de nombreux résultats théoriques grâce à l'apport de la géométrie riemannienne. Nous rappelons ces résultats portant principalement sur le comportement asymptotique et montrons leur utilité pour certains cas pratiques. Puis nous établissons notre résultat principal, à savoir que ce problème d'approximation d'un convexe est, en un sens bien précis, équivalent à celui de l'approximation d'une norme par une autre. Nous établissons ensuite les propriétés d'un produit d'approximations de normes, ce qui nous permet de construire par récurrence sur la dimension des polytopes approchant certains convexes lisses, ainsi que des approximations optimales de normes, en particulier L_p . Enfin nous montrons différentes applications à la géométrie algorithmique, en particulier comment une approximation de norme permet de transformer un algorithme de résolution exacte en un algorithme de résolution approchée mais moins coûteux.

Approximation of convex bodies by polytopes and approximated norm decomposition

Abstract

Approximating smooth convex by polytopes with respect to Hausdorff metric is a field where numerous results were recently obtained thanks to the riemannian geometry. We first recall these results, essentially focused on the asymptotic behaviour, and show their utility for some special cases. We then prove our main result stating that approximating a convex is somewhat equivalent to approximating a norm. We establish several properties of the product of norm approximations, so that we can construct, by recurrence over the dimension, good approximating polytopes for specific convexes, as well as optimal approximating norms for some norms like the L_p ones. We finish by showing some applications in the field of computational geometry. An approximation of the norm can for instance transform an exact algorithm into a faster algorithm that gives an approximate solution.