

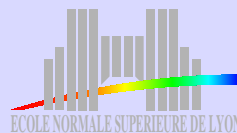
MODÈLES ET OUTILS POUR LES INVARIANCES D'ÉCHELLE BRISÉES :

variations sur la transformation de Lamperti
et contributions aux modèles statistiques de vortex
en turbulence

Pierre BORGNAT

22 novembre 2002

Laboratoire de physique - Équipe Sisyphe (Signaux, Systèmes et Physique)

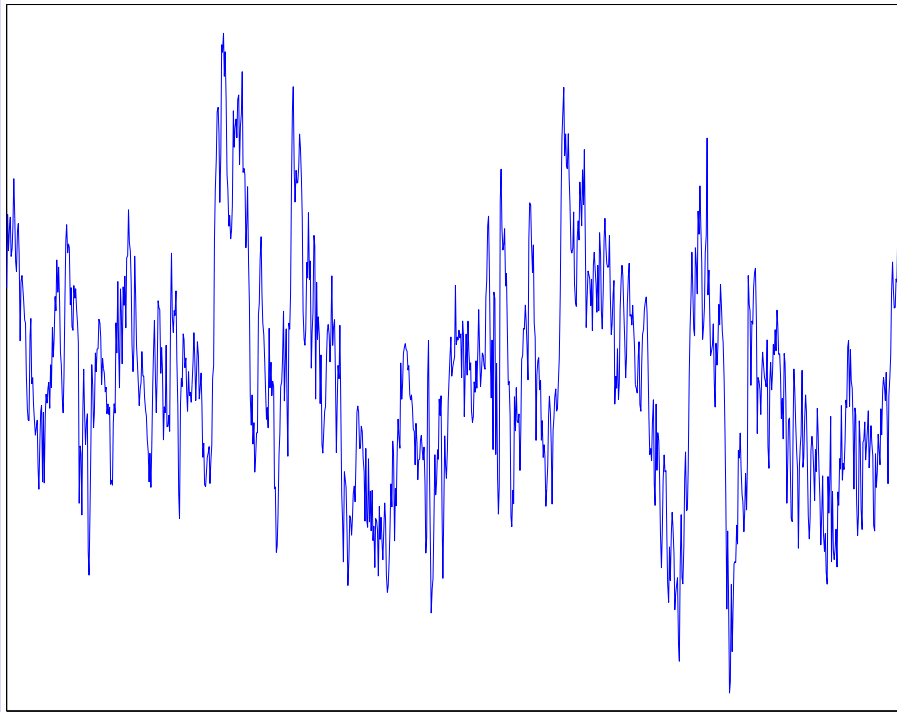


Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

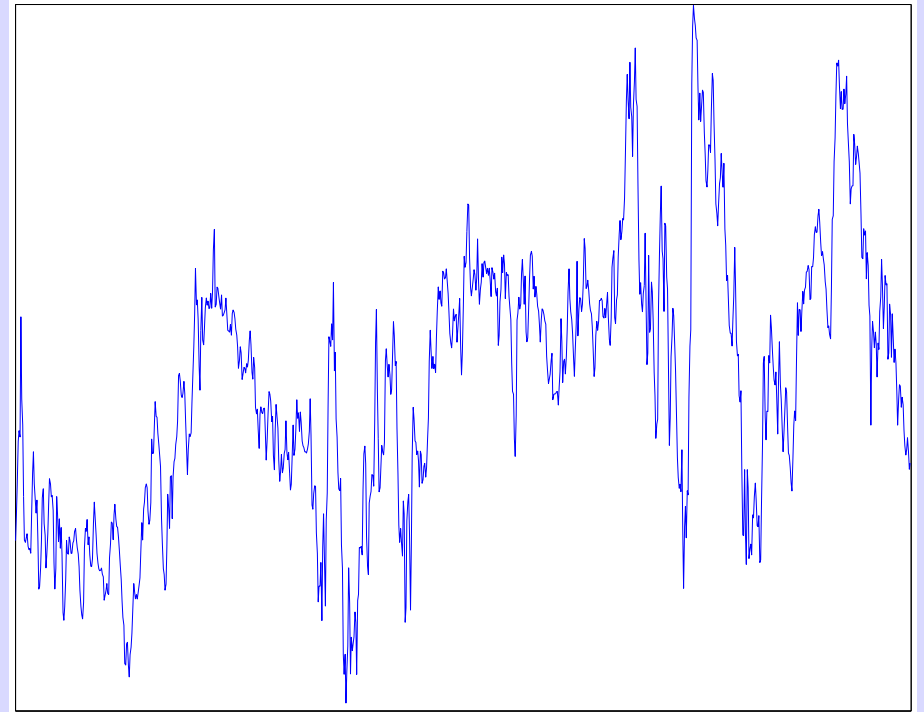
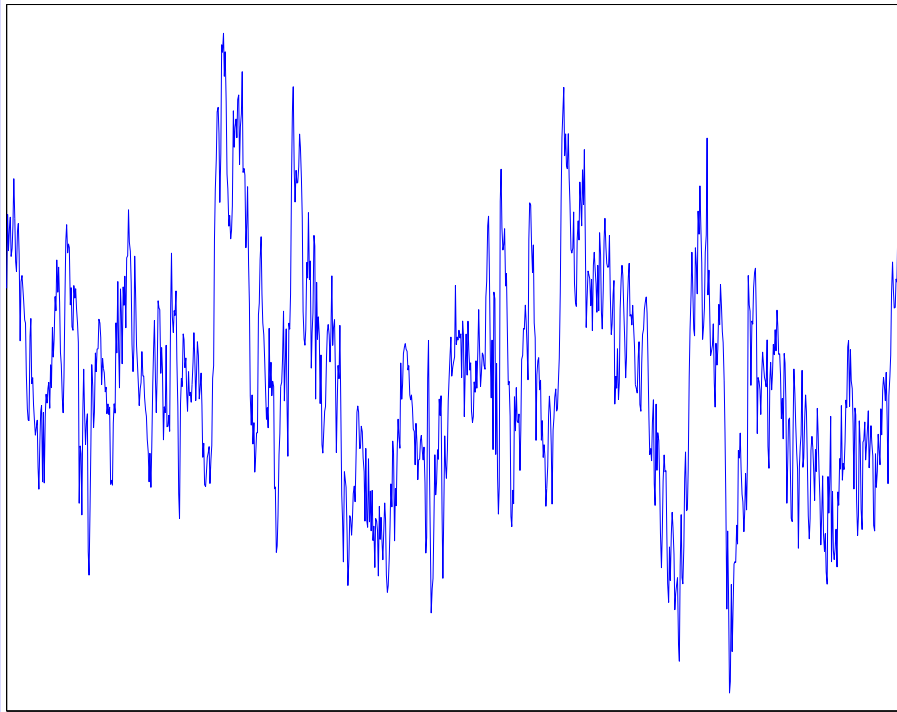
Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence



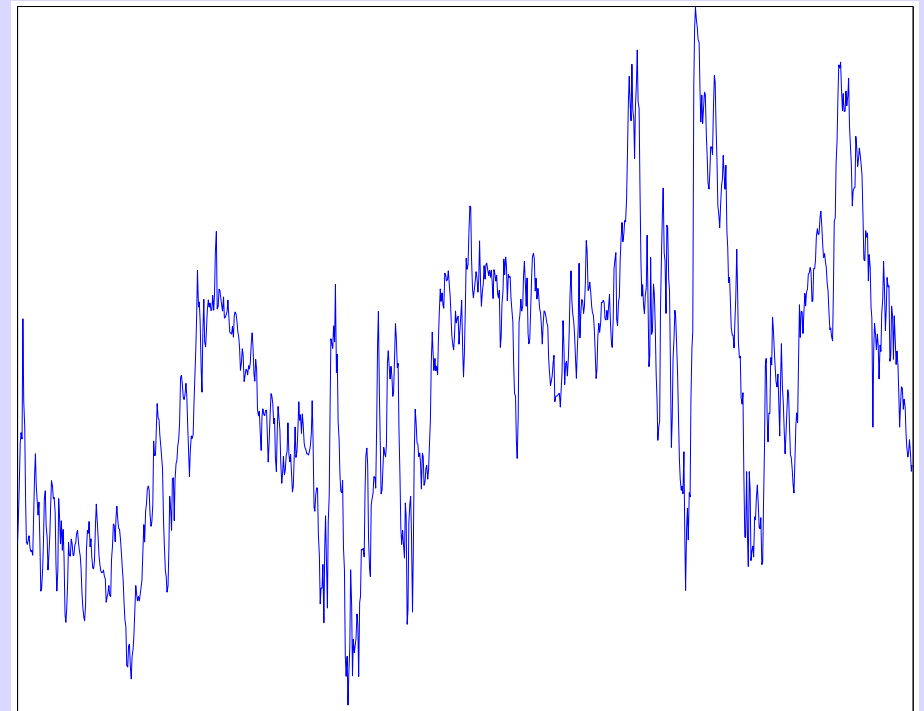
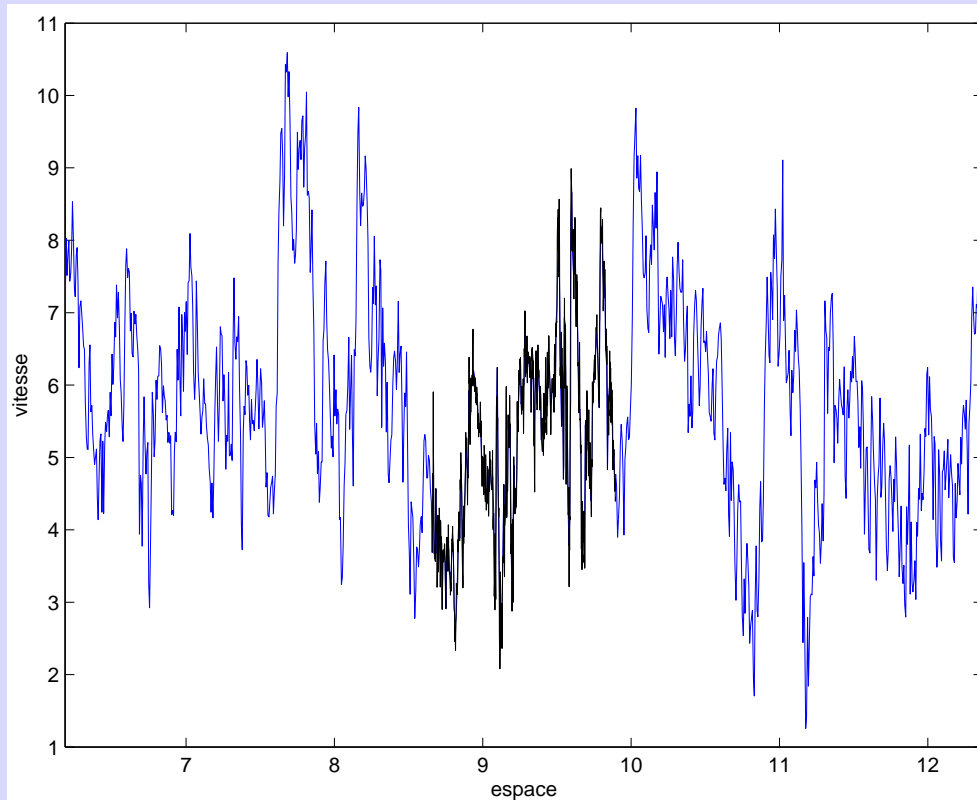
Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence



Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence



Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

→ Le signal à différents zooms se ressemble.

Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

→ Le signal à différents zooms se ressemble.

→ Mais pas simplement : existence de **structures** dans un écoulement de fluide.

Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

→ Le signal à différents zooms se ressemble.

→ Mais pas simplement : existence de **structures** dans un écoulement de fluide.

- Caractériser les propriétés en échelle ...

Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

→ Le signal à différents zooms se ressemble.

→ Mais pas simplement : existence de **structures** dans un écoulement de fluide.

- Caractériser les propriétés en échelle ...

→ ...des zones structurées en turbulence, en particulier les **tourbillons**,

→ ...plus généralement, d'un signal avec une similitude en échelle.

Motivation : turbulence et invariance d'échelle

- Signal de vitesse en turbulence

→ Le signal à différents zooms se ressemble.

→ Mais pas simplement : existence de **structures** dans un écoulement de fluide.

- Caractériser les propriétés en échelle ...

→ ...des zones structurées en turbulence, en particulier les **tourbillons**,

→ ...plus généralement, d'un signal avec une similitude en échelle.

- Outil commun envisagé : analyse en terme d'**échelle** de Mellin.

Invariance d'échelle ; stationnarité

Objectif. Outils et modèles pour l'**auto-similarité** (ou invariance d'échelle).

Invariance d'échelle ; stationnarité

Objectif. Outils et modèles pour l'**auto-similarité** (ou invariance d'échelle).

→ Paradigme largement employé en physique et traitement du signal

(depuis par exemple Mandelbrot \sim 1970).

→ Nécessite de définir les notions sous-jacentes.

Invariance d'échelle ; stationnarité

Objectif. Outils et modèles pour l'**auto-similarité** (ou invariance d'échelle).

→ Paradigme largement employé en physique et traitement du signal

(depuis par exemple Mandelbrot ~ 1970).

→ Nécessite de définir les notions sous-jacentes.

Point de départ. Traitement des signaux **stationnaires**.

Invariance d'échelle ; stationnarité

Objectif. Outils et modèles pour l'**auto-similarité** (ou invariance d'échelle).

→ Paradigme largement employé en physique et traitement du signal

(depuis par exemple Mandelbrot \sim 1970).

→ Nécessite de définir les notions sous-jacentes.

Point de départ. Traitement des signaux **stationnaires**.

Solution explorée.

Relier l'auto-similaire et le stationnaire en utilisant une opération adaptée qui **stationnarise** le signal :

la transformation de Lamperti.

Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. *Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit **stationnaire** si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,*

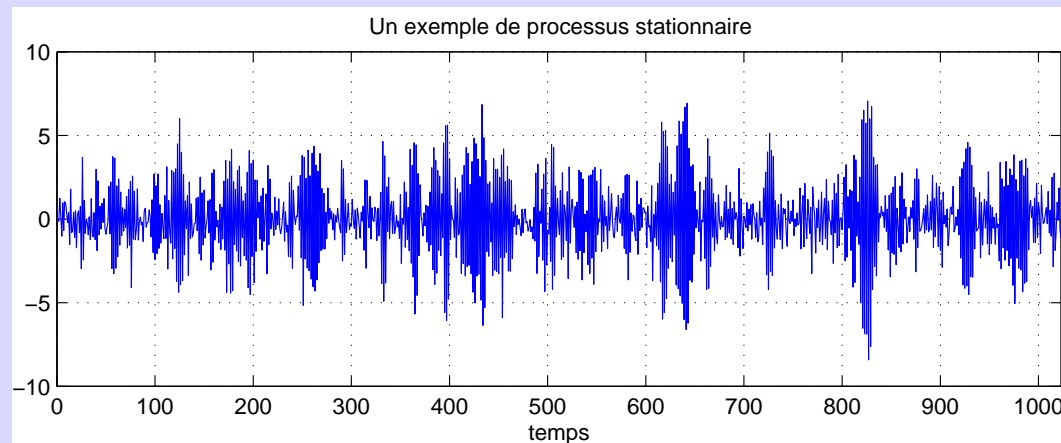
$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit *stationnaire* si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

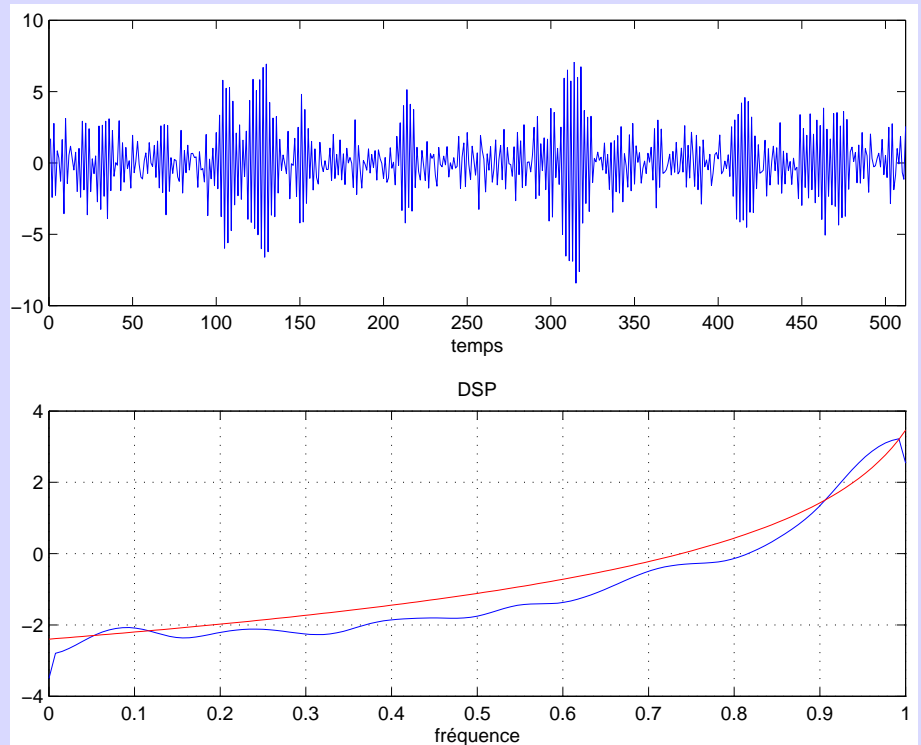
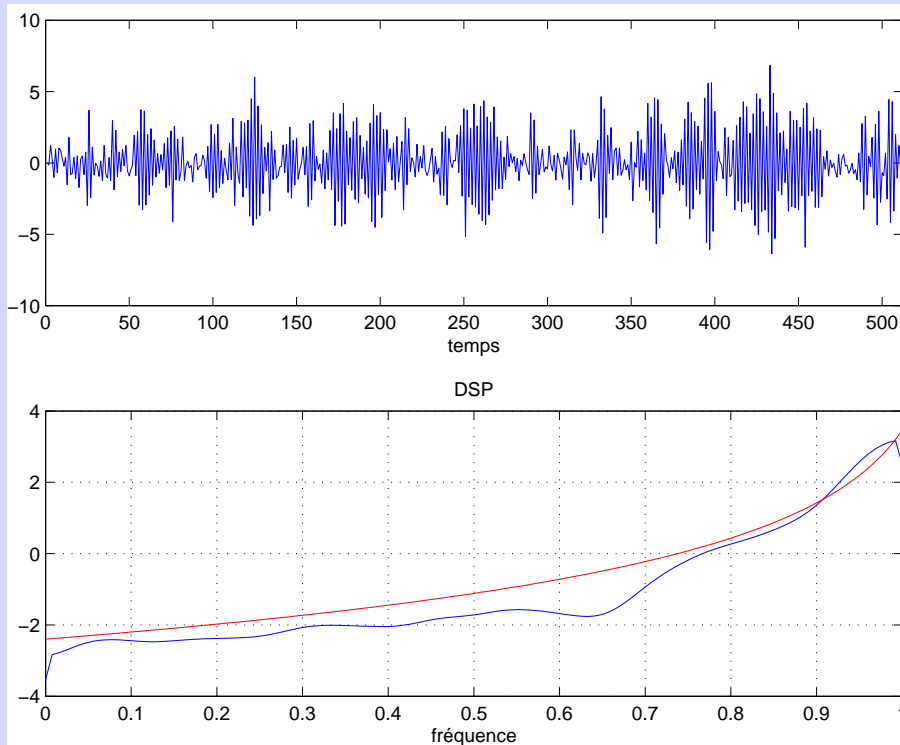


Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit *stationnaire* si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit *stationnaire* si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conséquences. → Covariance stationnaire

$$R_Y(t, s) := \mathbb{E} \left\{ Y(t) \overline{Y(s)} \right\} = \gamma_Y(t - s).$$

Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit *stationnaire* si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conséquences. → Covariance stationnaire

$$R_Y(t, s) := \mathbb{E} \left\{ Y(t) \overline{Y(s)} \right\} = \gamma_Y(t - s).$$

→ Analyse de Fourier

Définition de la stationnarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque instant.

Définition 1. Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit *stationnaire* si pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conséquences. → Covariance stationnaire

$$R_Y(t, s) := \mathbb{E} \left\{ Y(t) \overline{Y(s)} \right\} = \gamma_Y(t - s).$$

→ Analyse de Fourier

$$\begin{cases} \gamma_Y(\tau) = \int e^{i2\pi\nu\tau} dS_Y(\nu) \\ Y(t) = \int e^{i2\pi\nu t} d\tilde{Y}(\nu) \\ \mathbb{E} \left\{ d\tilde{Y}(\nu_1) \overline{d\tilde{Y}(\nu_2)} \right\} = \delta(\nu_1 - \nu_2) dS_Y(\nu_1) d\nu_2 \end{cases}$$

Définition de l'invariance d'échelle

Définition de l'auto-similarité

Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté "*H-ss*") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

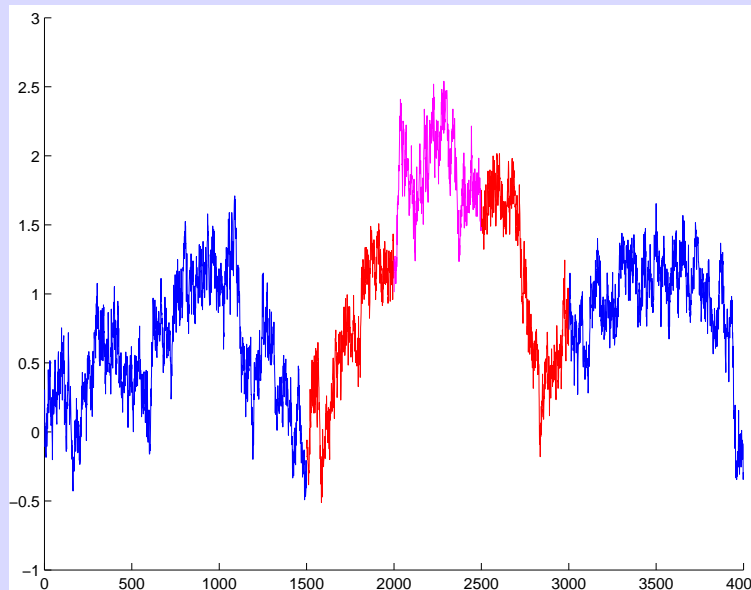
Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté "*H-ss*") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$



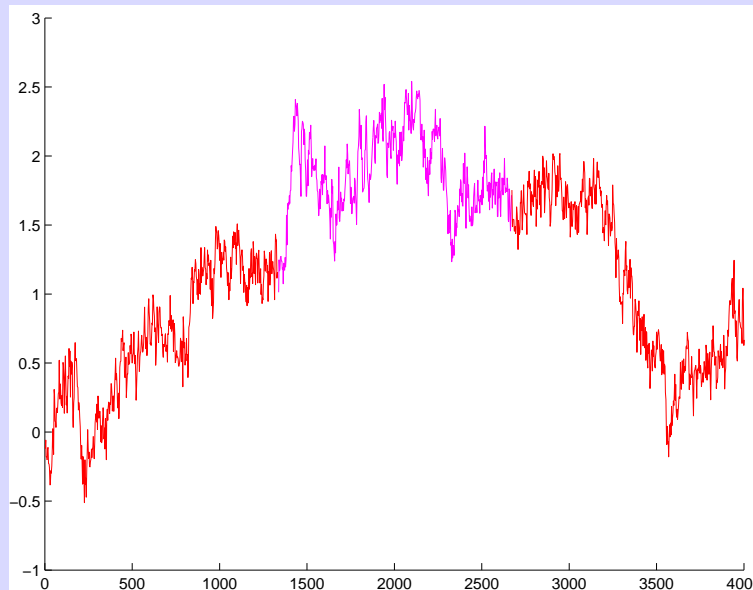
Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté " H -ss") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$



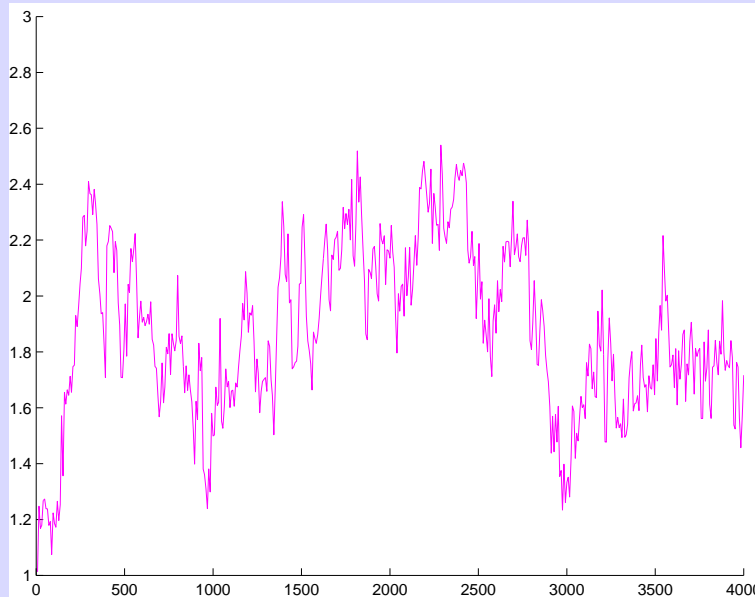
Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté " H -ss") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$



Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté "*H-ss*") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H}X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

Conséquences. ... ?

Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté " H -ss") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

Conséquences. ... ? \rightarrow Stationnarité et auto-similarité sont **incompatibles**

Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté " H -ss") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

Conséquences. ... ? \rightarrow Stationnarité et auto-similarité sont **incompatibles**

\rightarrow Usuellement : introduire une stationnarité ailleurs
(**accroissements** stationnaires, ondelettes, ...)

Définition de l'auto-similarité

Idée. Le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Le signal est invariant par **changement d'échelle** ou **dilatation** $\mathcal{D}_{H,\lambda}$

Définition 2. Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit *auto-similaire* d'indice H (noté "*H-ss*") si pour tout $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

Conséquences. ... ? → Stationnarité et auto-similarité sont **incompatibles**

→ Usuellement : introduire une stationnarité ailleurs
(**accroissements** stationnaires, ondelettes, ...)

→ Démarche proposée ici : **stationnariser** le processus.

Théorème de Lamperti

Définition 3. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti \mathcal{L}_H d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t), \quad t > 0.$$

Théorème de Lamperti

Définition 3. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti \mathcal{L}_H d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t), \quad t > 0.$$

Définition 4. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti **inverse** \mathcal{L}_H^{-1} d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème de Lamperti

Définition 3. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti \mathcal{L}_H d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t), \quad t > 0.$$

Définition 4. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti **inverse** \mathcal{L}_H^{-1} d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1. [Lamperti, 1962]

Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire alors sa transformée de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice H .

Théorème de Lamperti

Définition 3. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti \mathcal{L}_H d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t), \quad t > 0.$$

Définition 4. *Étant donné $H \geq 0$, la transformation de Lamperti **inverse** \mathcal{L}_H^{-1} d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1. [Lamperti, 1962]

Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire alors sa transformée de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice H .

Inversement, si $\{X(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice H , alors sa transformée de Lamperti inverse $\{(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t), t > 0\}$ est stationnaire.

Lecture nouvelle du résultat de Lamperti

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$



$$Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1} X)(t)$$

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$



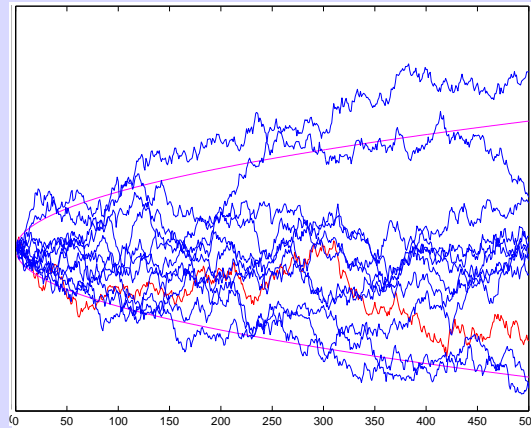
$Y(t) =$
 $(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t)$



Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$



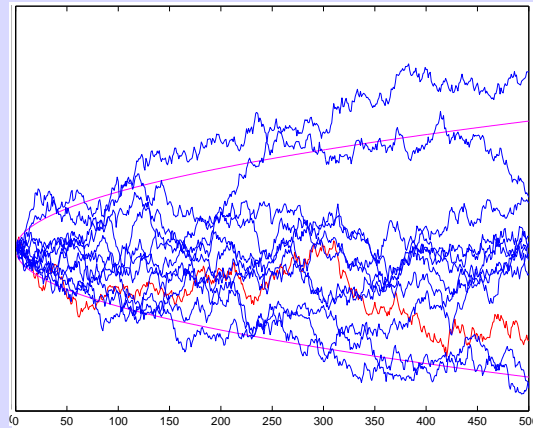
$Y(t) =$
 $(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t)$



Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$



$Y(t) =$
 $(\mathcal{L}_H^{-1} X)(t)$

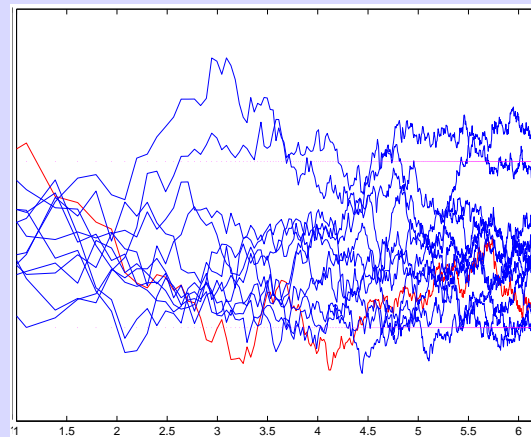
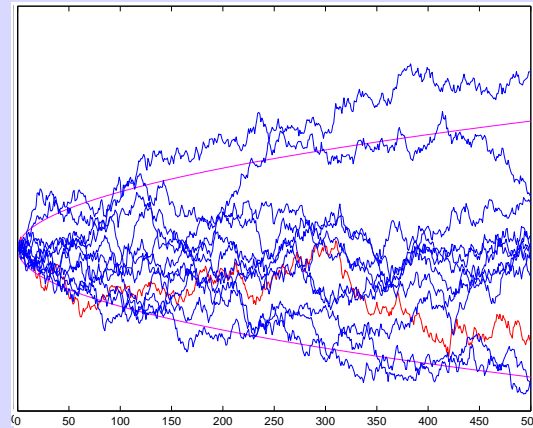


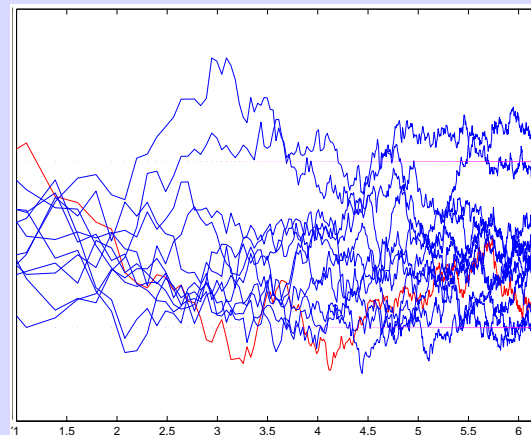
Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$

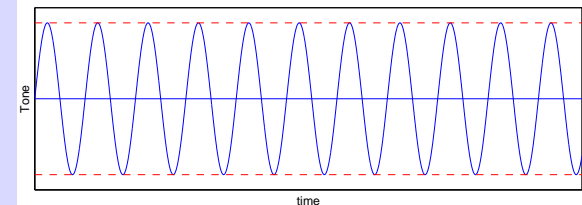
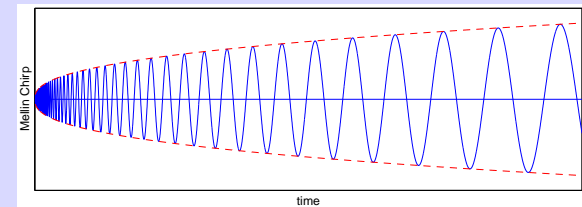


$Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1} X)(t)$



“Chirp” de Mellin

$$t^{H+i2\pi\beta}$$



Sinusoïde $e^{i2\pi\beta t}$

Processus d’Ornstein-Uhlenbeck

Lecture nouvelle du résultat de Lamperti

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**
- les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**
- les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**
 - domaine **connu** (méthodes et modèles de l'analyse des signaux stationnaires, temps-fréquence,...)

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et \mathcal{S}_τ .

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**
 - outils envisagés ici : construits sur la **transformée de Mellin**.
- les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**
 - domaine **connu** (méthodes et modèles de l'analyse des signaux stationnaires, temps-fréquence,...)

La description en transformée de Mellin

- Justifier le formalisme de Mellin.

La description en transformée de Mellin

- Justifier le formalisme de Mellin.

$$(\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = (\mathbf{F}\mathcal{L}_H^{-1}x)(\beta)$$

avec les définitions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{F}y)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \\ (\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = \int_0^{\infty} x(t)t^{-H}t^{-i2\pi\beta-1} dt \end{array} \right.$$

La description en transformée de Mellin

- Justifier le formalisme de Mellin.

$$(\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = (\mathbf{F}\mathcal{L}_H^{-1}x)(\beta)$$

avec les définitions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{F}y)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \\ (\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = \int_0^{\infty} x(t)t^{-H}t^{-i2\pi\beta-1} dt \end{array} \right.$$

- Elle opère une décomposition en **échelle de Mellin** β

La description en transformée de Mellin

- Justifier le formalisme de Mellin.

$$(\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = (\mathbf{F}\mathcal{L}_H^{-1}x)(\beta)$$

avec les définitions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{F}y)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i2\pi\nu t} dt \\ (\mathbf{M}x)(H + i2\pi\beta) = \int_0^{\infty} x(t)t^{-H}t^{-i2\pi\beta-1} dt \end{array} \right.$$

- Elle opère une décomposition en **échelle de Mellin** β

→ **Chirps de Mellin** $t^{H+i2\pi\beta}$ sont les fonctions propres de l'opération de changement d'échelle.

Schéma de réflexion - utiliser \mathcal{L}_H

Schéma de réflexion - utiliser \mathcal{L}_H

Soit une opération (notée \mathbf{T}) sur un processus auto-similaire X .

$$\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \longrightarrow (\mathbf{T}X)$$

Schéma de réflexion - utiliser \mathcal{L}_H

Soit une opération (notée \mathbf{T}) sur un processus auto-similaire X .

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \longrightarrow & (\mathbf{T}X) \\ H\text{-ss} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \\ \text{stationnaire} & & \end{array}$$

Schéma de réflexion - utiliser \mathcal{L}_H

Soit une opération (notée \mathbf{T}) sur un processus auto-similaire X .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} & \longrightarrow & (\mathbf{T}X) \\
 \Downarrow \mathcal{L}_H^{-1} & & \Uparrow \mathcal{L}_H \\
 \begin{array}{c} Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}Y)
 \end{array}$$

Schéma de réflexion - utiliser \mathcal{L}_H

Soit une opération (notée \mathbf{T}) sur un processus auto-similaire X .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} & \xrightarrow{\mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H^{-1} X} & (\mathbf{T}X) \\
 \Downarrow \mathcal{L}_H^{-1} & & \Uparrow \mathcal{L}_H \\
 Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \\
 \text{stationnaire} & &
 \end{array}$$

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$
et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

$$c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t - s)$$

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

$$c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t - s)$$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\Xi_X(\beta) = (\mathbf{M}c_X)(H + i2\pi\beta)$$

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

$$c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t - s)$$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\Xi_X(\beta) = (\mathbf{M}c_X)(H + i2\pi\beta)$$

$$(\mathbf{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

$$c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t - s)$$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\begin{aligned} \Xi_X(\beta) &= (\mathbf{M}c_X)(H + i2\pi\beta) \\ &= \Gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\beta) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

Pour les processus auto-similaires

- Covariances caractérisées en $R_X(t, s) := \mathbb{E} \left\{ X(t) \overline{X(s)} \right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

$$c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(t - s)$$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\begin{aligned} \Xi_X(\beta) &= (\mathbf{M}c_X)(H + i2\pi\beta) \\ &= \Gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\beta) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

- Décomposition (de type Cramér)...

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{H+i2\pi\sigma} d\xi(\sigma)$$

... de processus H -ss : $d\xi(\sigma)$ décorrelés

$$Y(t) = \int e^{i2\pi ft} d\xi(f)$$

...pour un processus stationnaire :
 $d\xi(f)$ décorrelés

$$\mathbb{E} \left\{ d\xi(\beta) \overline{d\xi(\sigma)} \right\} = \Xi_X(\beta) \delta(\beta - \sigma) d\beta d\sigma$$

Filtres covariants en échelle

Définition 5. – Un système **covariant en échelle** \mathcal{G} commute avec toute dilatation

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \quad (\forall \lambda > 0) (\forall H \in \mathbb{R}).$$

Filtres covariants en échelle

Définition 5. – Un système **covariant en échelle** \mathcal{G} commute avec toute dilatation

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \quad (\forall \lambda > 0) \quad (\forall H \in \mathbb{R}).$$

Filtre linéaire covariant – **convolution multiplicative**

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)X(s)ds/s.$$

Propriété principale – **préserve l'auto-similarité.**

filtre LTI \mathcal{H}

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\tau\mathcal{H}$$

$$(\mathcal{H}Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)Y(s)ds$$

...préserve la stationnarité.

Filtres covariants en échelle

Définition 5. – Un système **covariant en échelle** \mathcal{G} commute avec toute dilatation

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \quad (\forall \lambda > 0) (\forall H \in \mathbb{R}).$$

Filtre linéaire covariant – **convolution multiplicative**

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)X(s)ds/s.$$

filtre LTI \mathcal{H}

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\tau\mathcal{H}$$

$$(\mathcal{H}Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)Y(s)ds$$

Propriété principale – **préserve l'auto-similarité.**

...préserve la stationnarité.

Relations de filtrage en échelle. $X(t) = (\mathcal{G}A)(t).$

$$\longrightarrow c_X(\lambda) = \int_0^\infty c_g(\lambda/u)c_A(u)du/u$$

avec la **corrélation de Mellin**

$$c_g(\lambda) := \int_0^\infty g(\lambda u)g(u)u^{-2H}du/u.$$

Représentation en sortie de filtre

Représentation en sortie de filtre

Représentation générale d'un signal H -ss.

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s) dV(s)/s,$$

$dV(t)$ bruit blanc transformé de Lamperti

$$\mathbb{E} \{dV(t)dV(s)\} = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s) dt ds$$

Représentation en sortie de filtre

Représentation générale d'un signal H -ss.

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s) dV(s)/s,$$

$dV(t)$ bruit blanc transformé de Lamperti

$$\mathbb{E} \{dV(t)dV(s)\} = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s) dt ds$$

Corrélation de Mellin pour les processus H -ss.

$$X(t) = \int_0^{\infty} g(t/s) dV(s)/s,$$

implique alors

$$c_X(\lambda) = \sigma^2 \lambda^{-H} \int_0^{\infty} g(\lambda u) g(u) u^{-2H} du/u$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

- Représentation intégrale ($g(u) = u^{H-\alpha}$ si $u > 1$)

$$X_{\alpha,H}(t) = \int_0^t (t/s)^{H-\alpha} dV(s)/s$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

- Représentation intégrale ($g(u) = u^{H-\alpha}$ si $u > 1$)

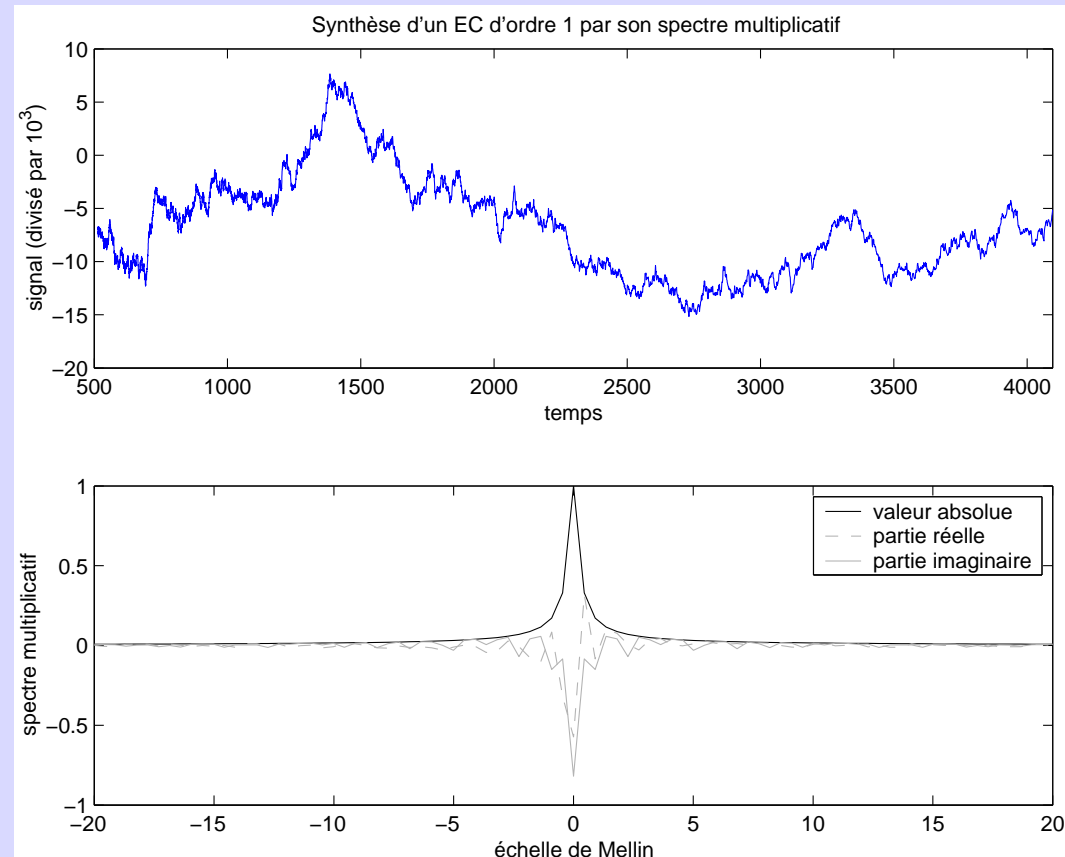
$$X_{\alpha,H}(t) = \int_0^t (t/s)^{H-\alpha} dV(s)/s$$

→ modèle H -ss d'ordre 1, à deux paramètres.

$$R_{X_{\alpha,H}}(t, s) = \sigma^2 (ts)^H \left(\frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \quad \text{si } s > t.$$

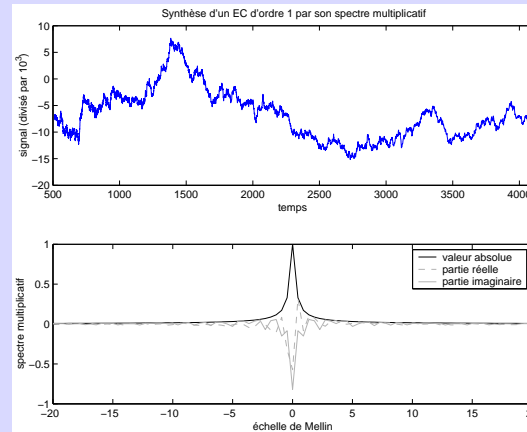
A- Exploitation de \mathcal{L}_H pour H -ss - 4

Exemple du modèle de Noret



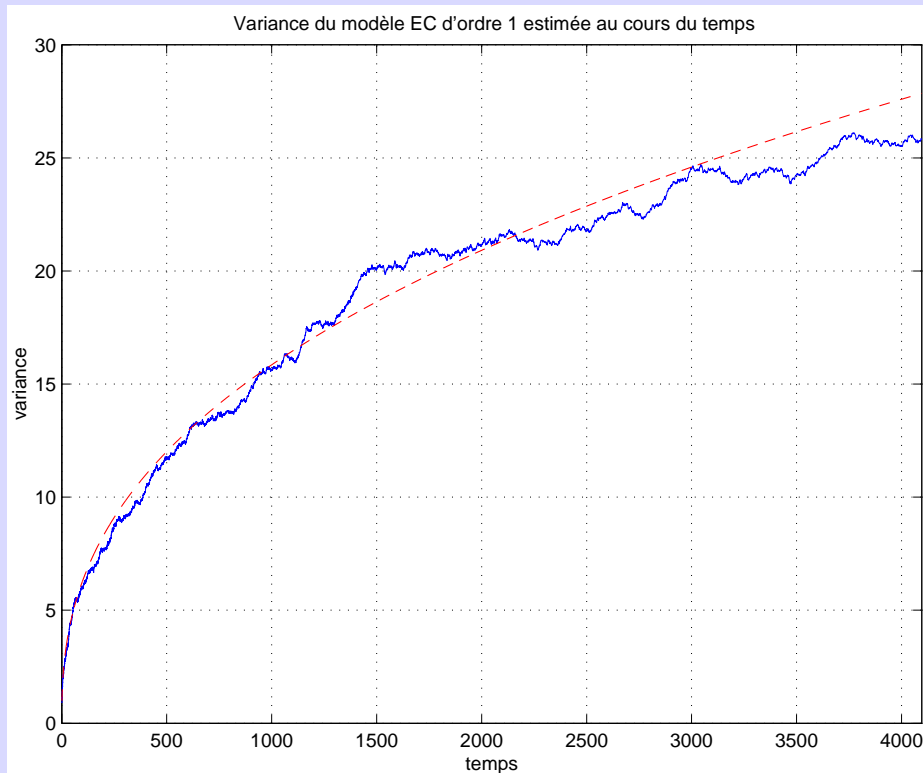
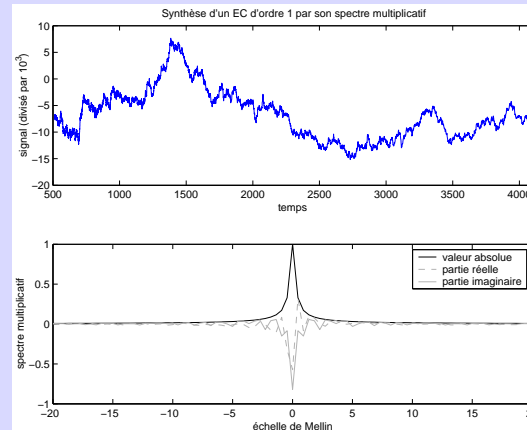
A- Exploitation de \mathcal{L}_H pour H -ss - 4

Exemple du modèle de Noret



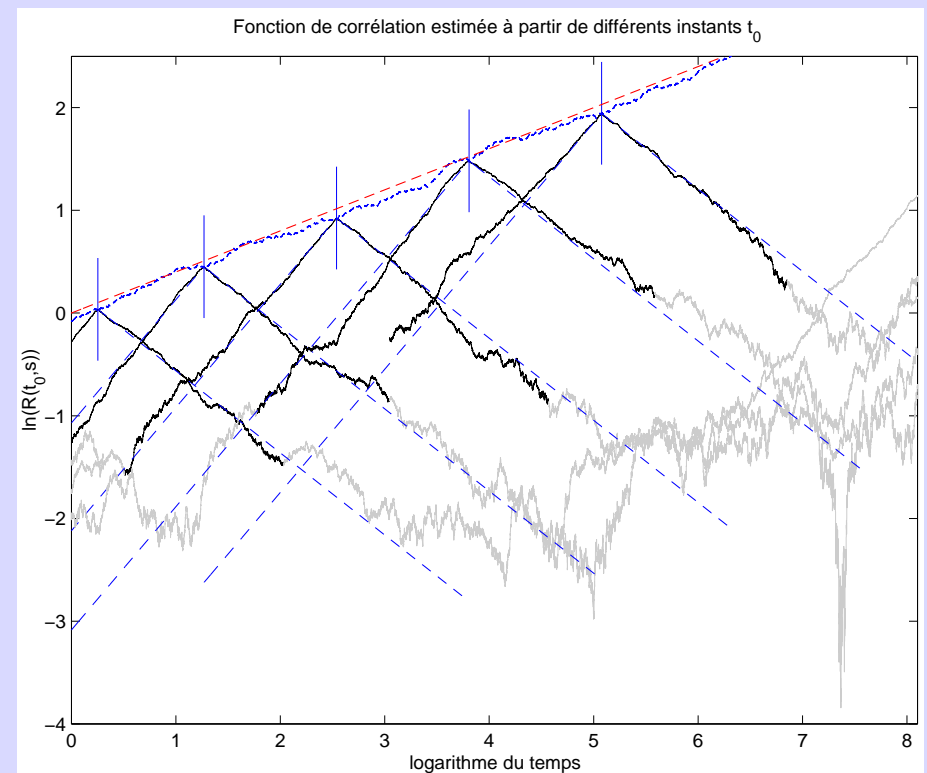
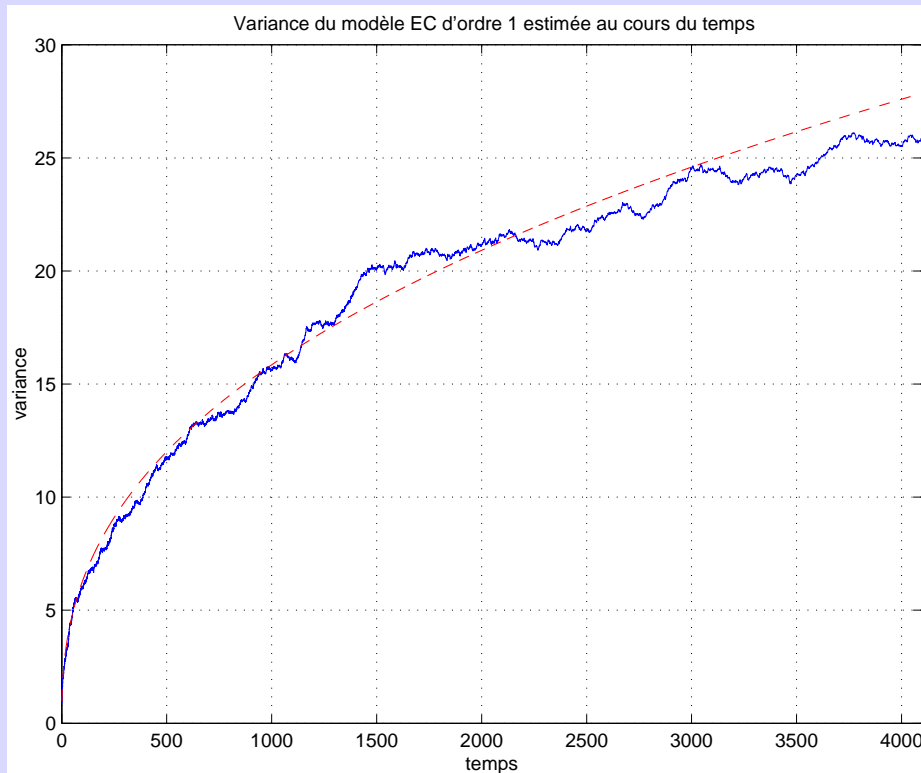
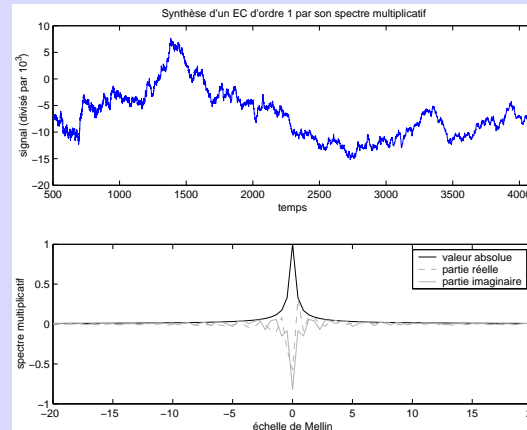
A- Exploitation de \mathcal{L}_H pour H -ss - 4

Exemple du modèle de Noret



A- Exploitation de \mathcal{L}_H pour H -ss - 4

Exemple du modèle de Noret



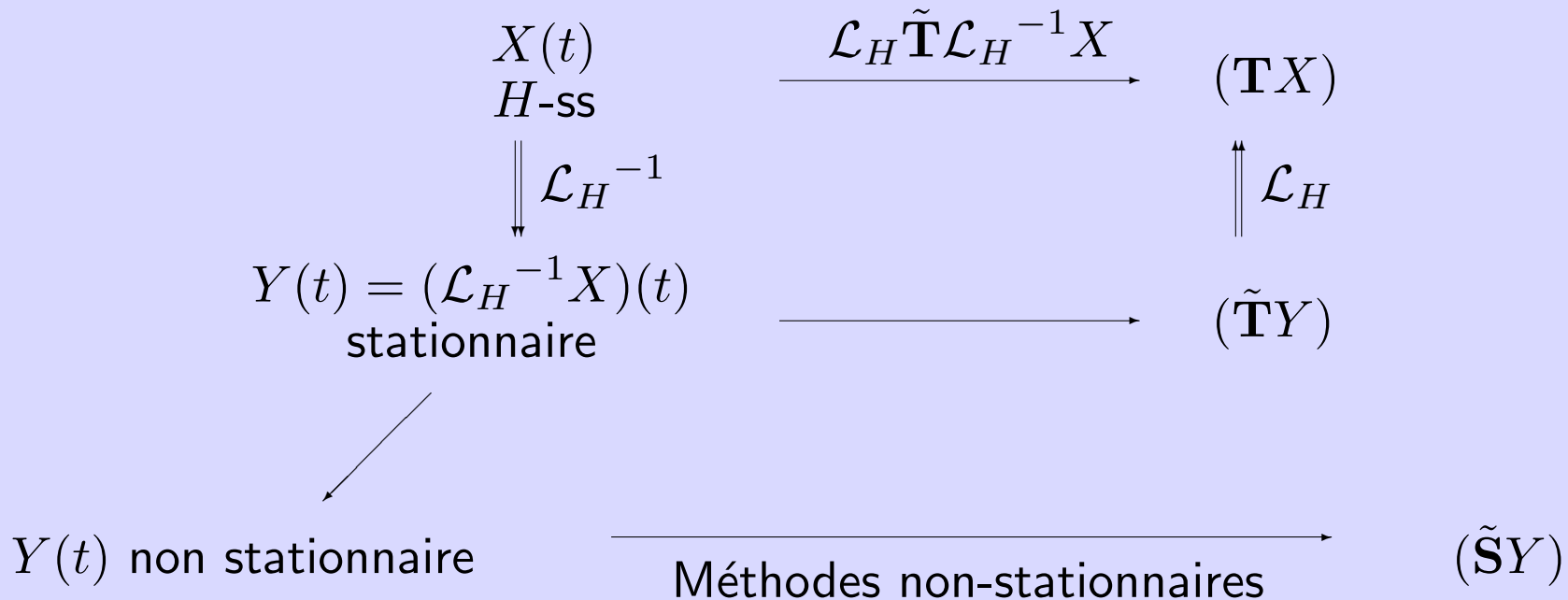
Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H^{-1} X} & (\mathbf{T}X) \\ \begin{array}{c} H\text{-ss} \\ \Downarrow \mathcal{L}_H^{-1} \end{array} & & \Uparrow \mathcal{L}_H \\ Y(t) = (\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \\ \text{stationnaire} & & \end{array}$$

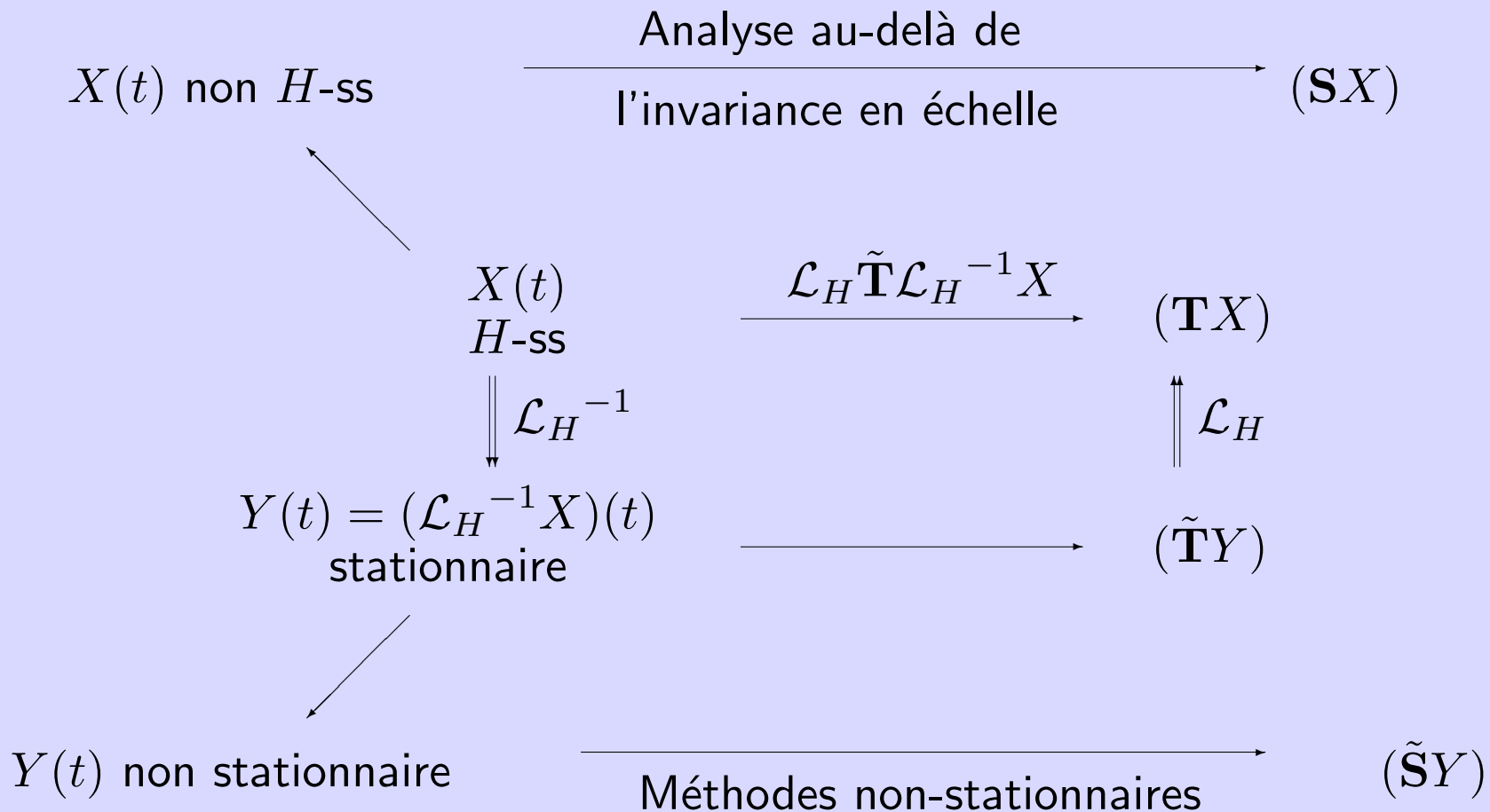
Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion



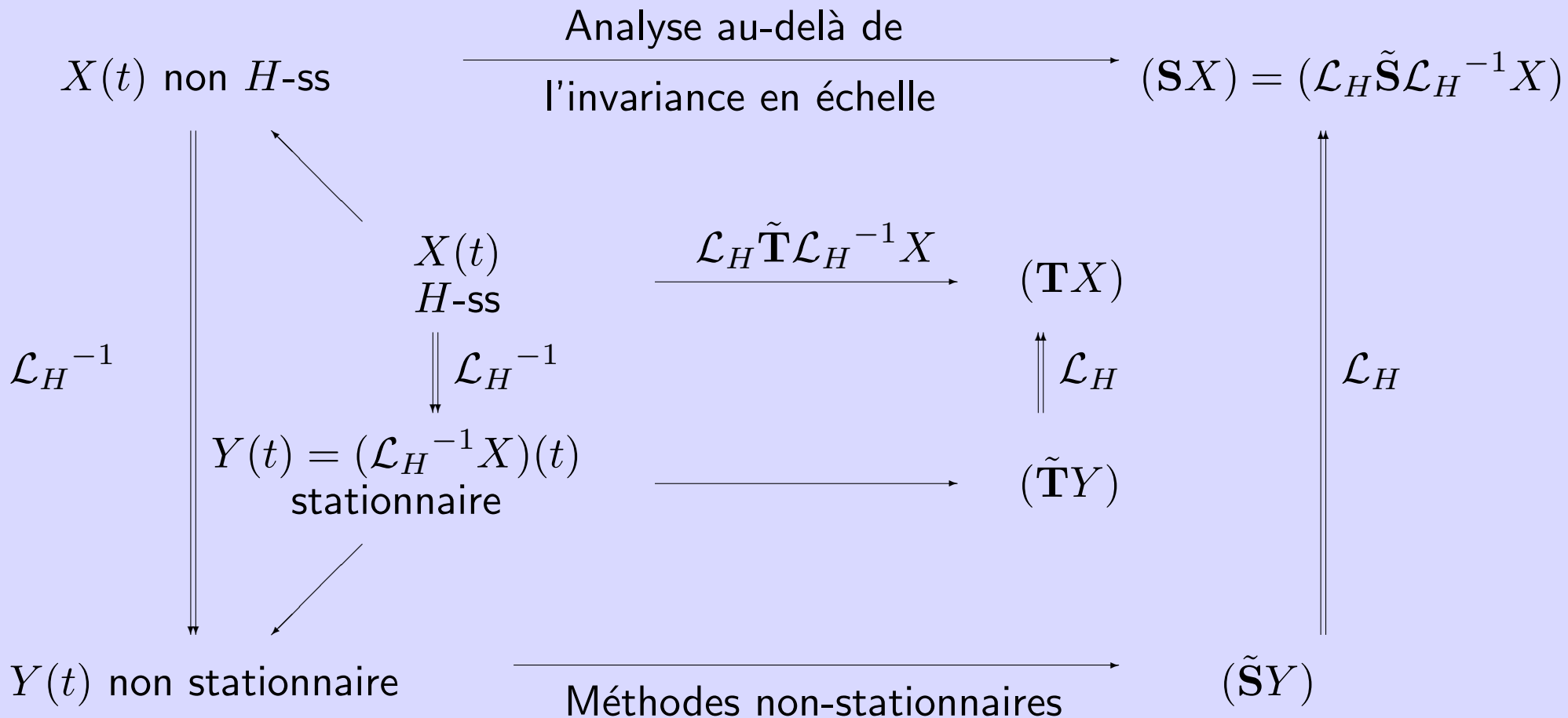
Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion



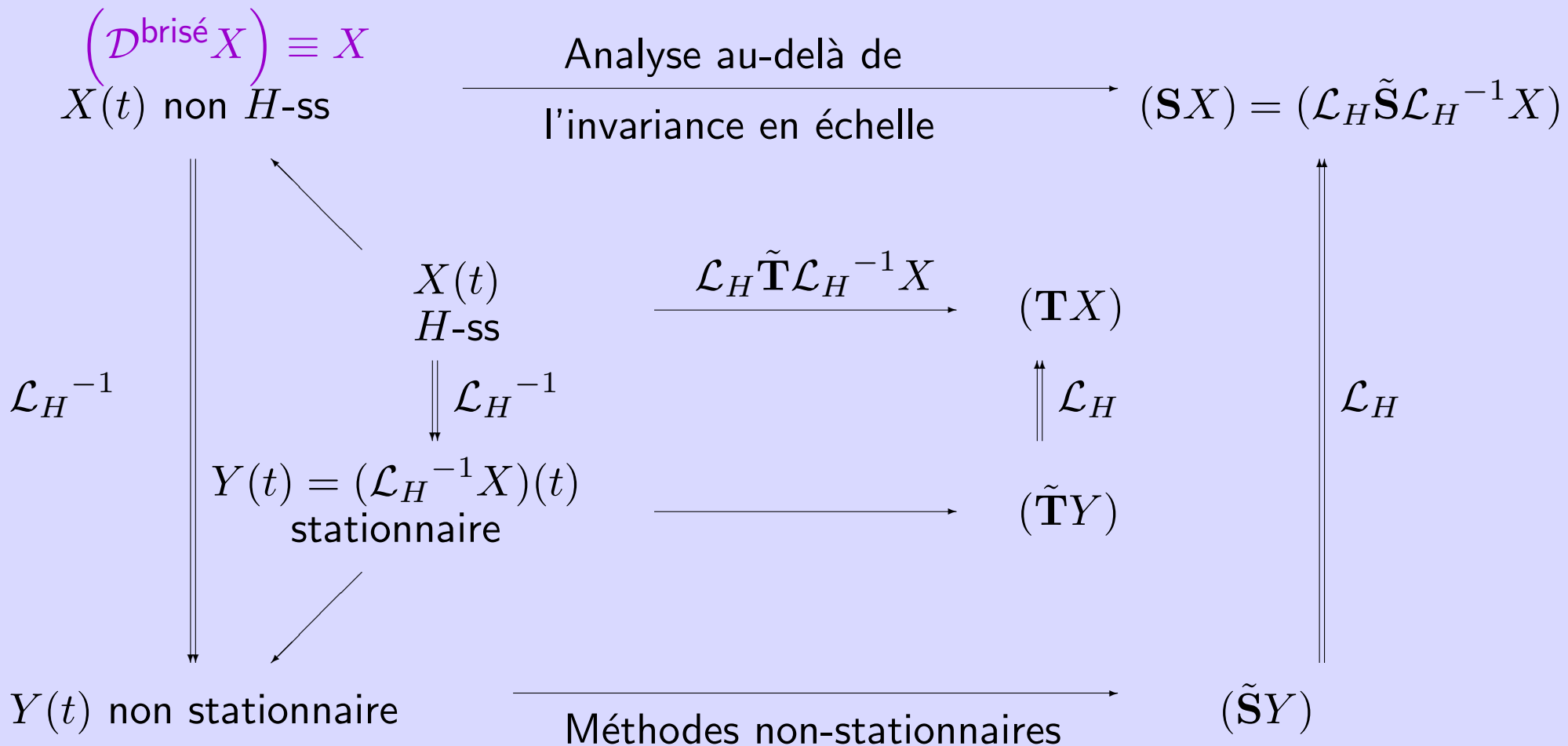
Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion



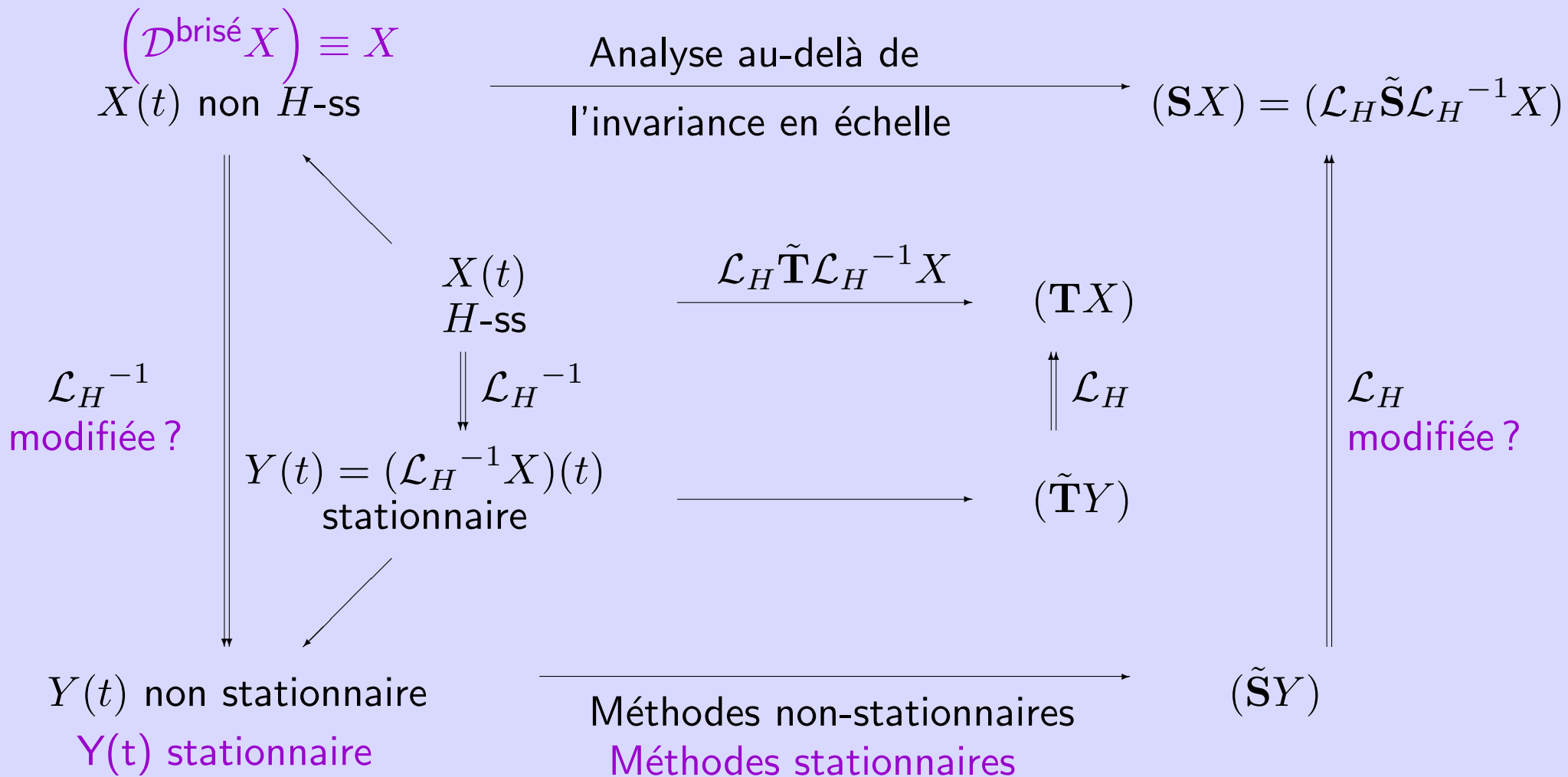
Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion



Au-delà de l'invariance en échelle complète

Élargir le schéma de réflexion



B- Briser l'invariance en échelle

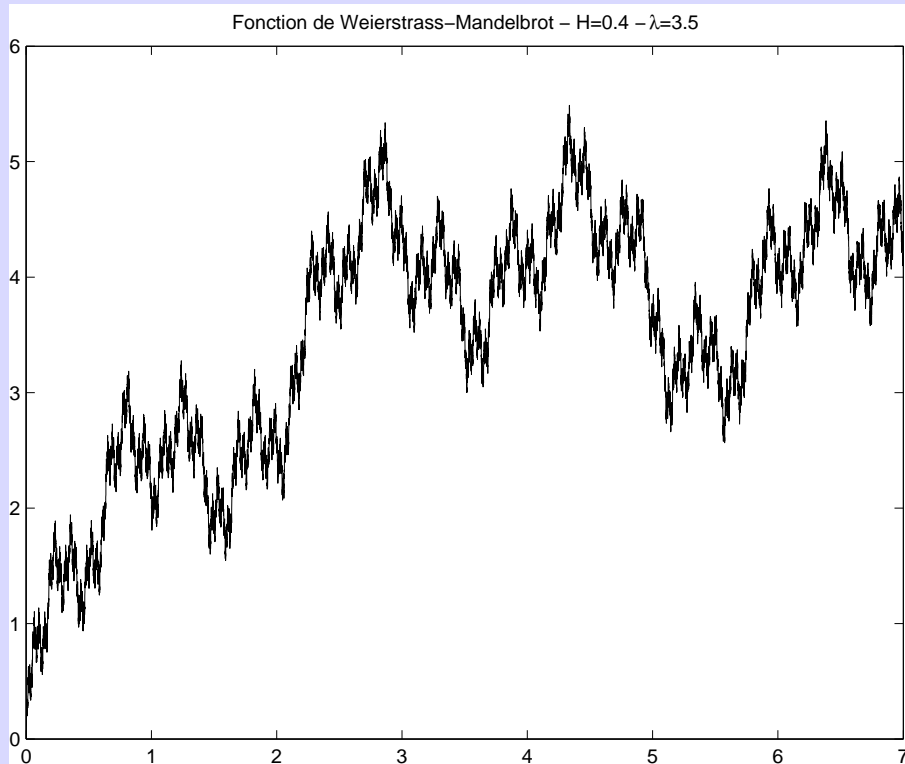
B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

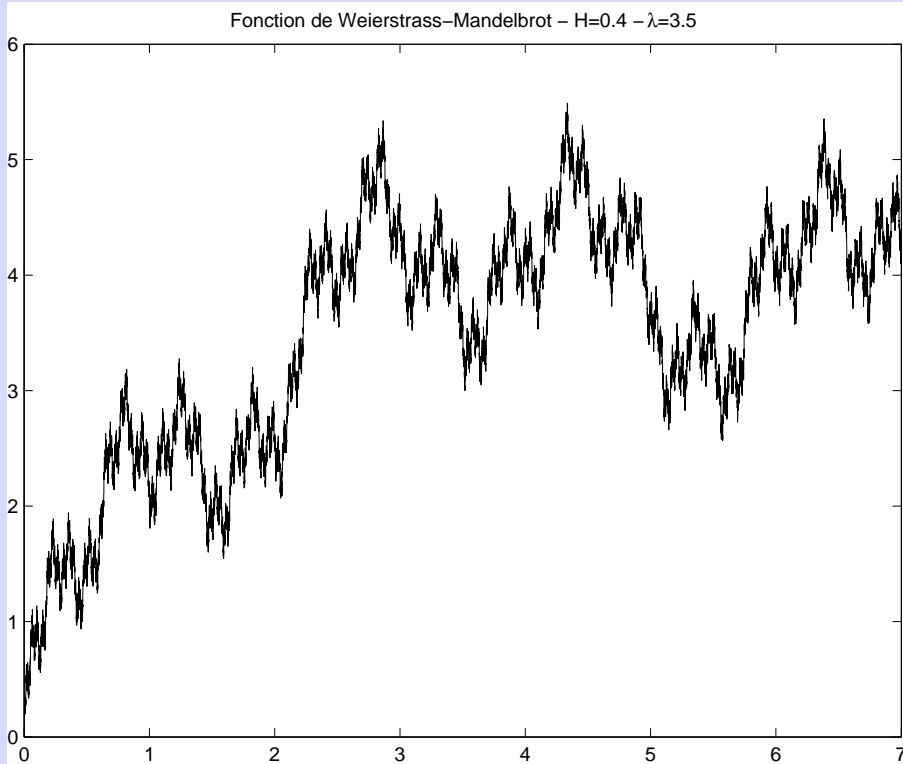
Fonction de Weierstrass-Mandelbrot



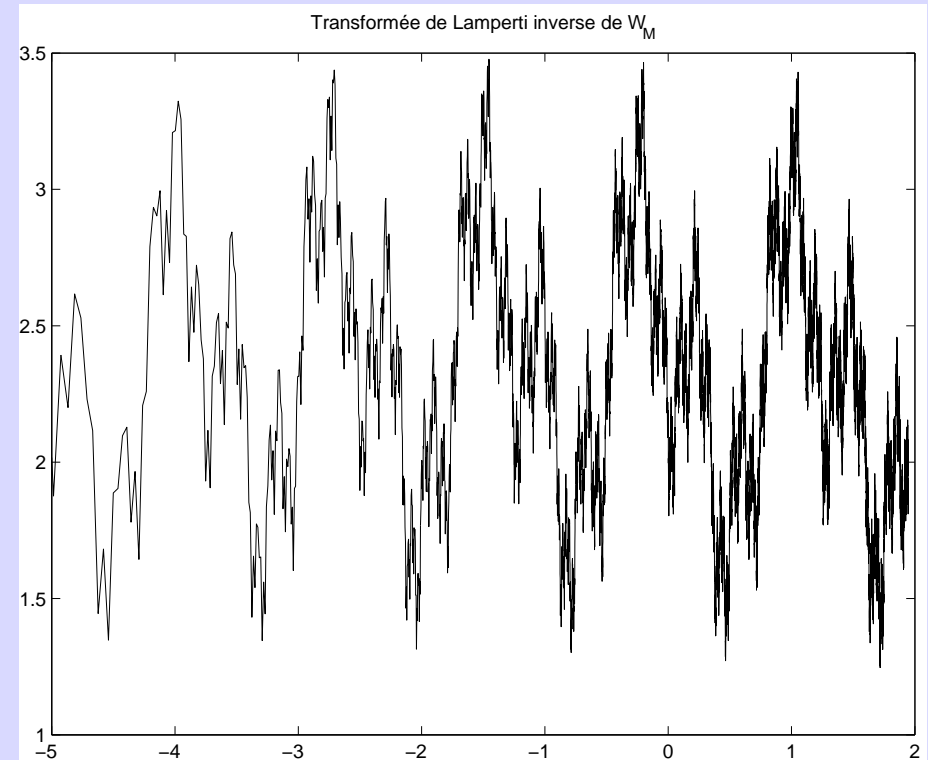
B- Briser l'invariance en échelle

- **B-** Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ **ou** $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot



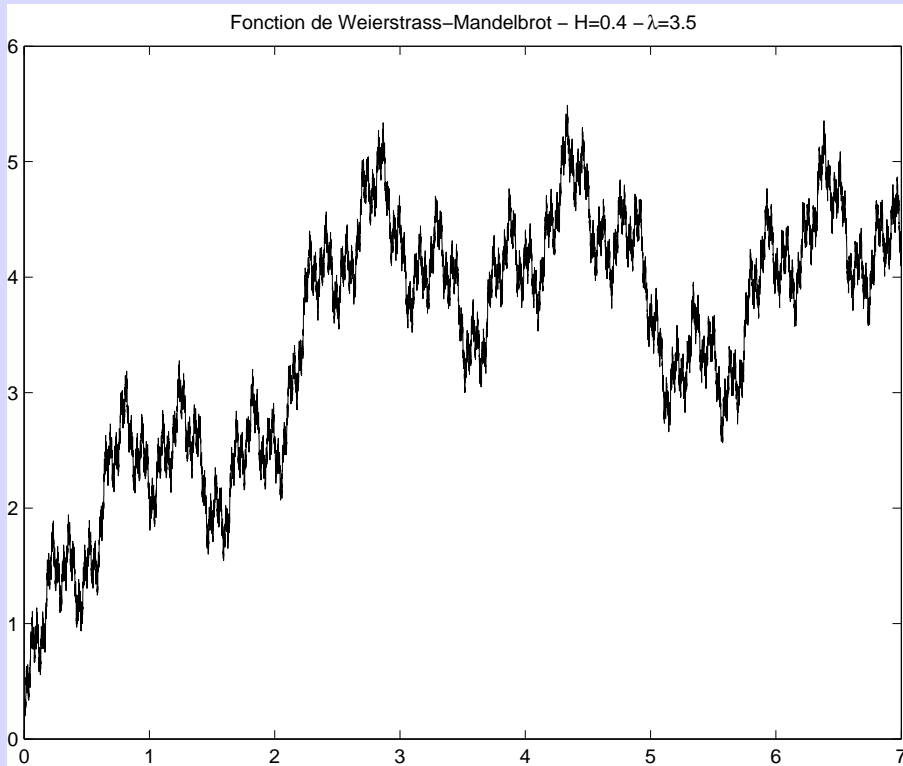
Fonction délampertisée



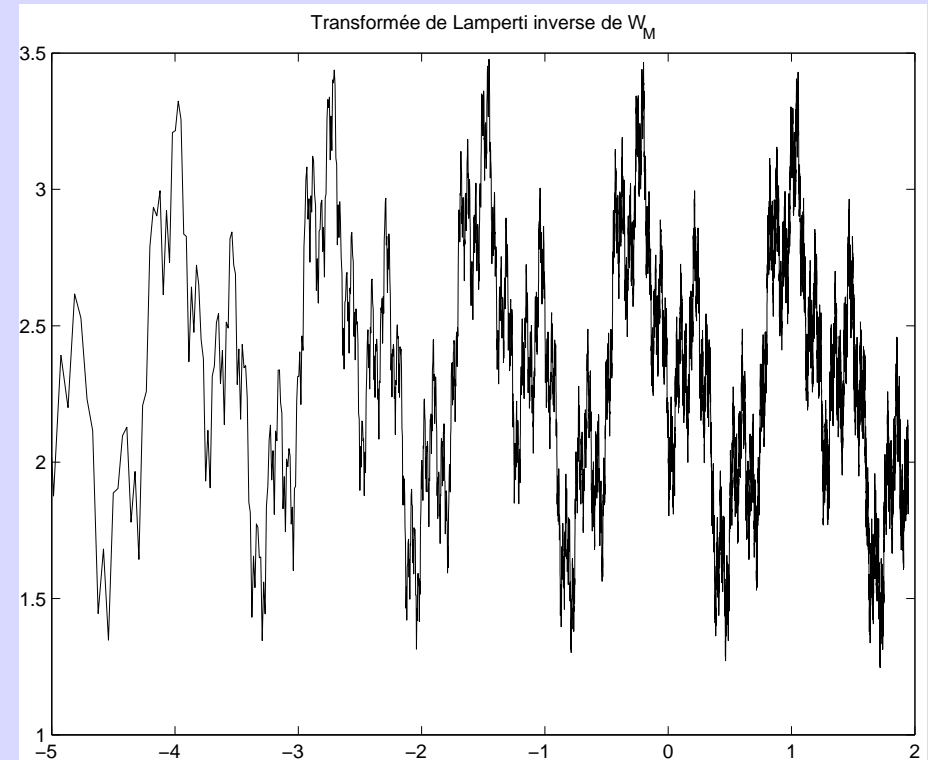
B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot



Fonction délampertisée

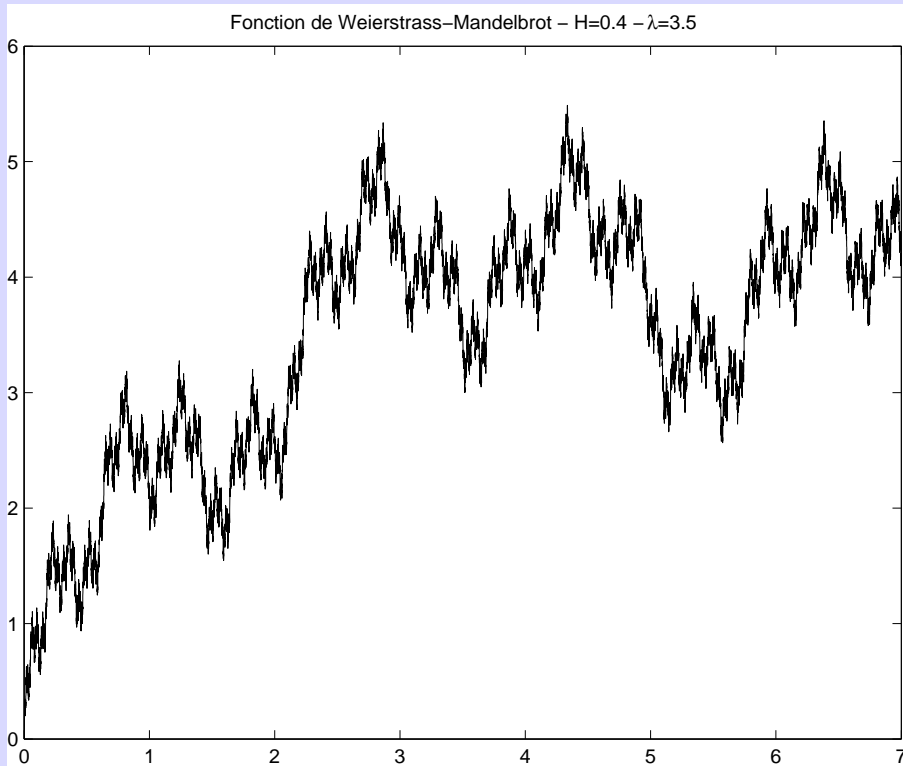


periodicité en échelle

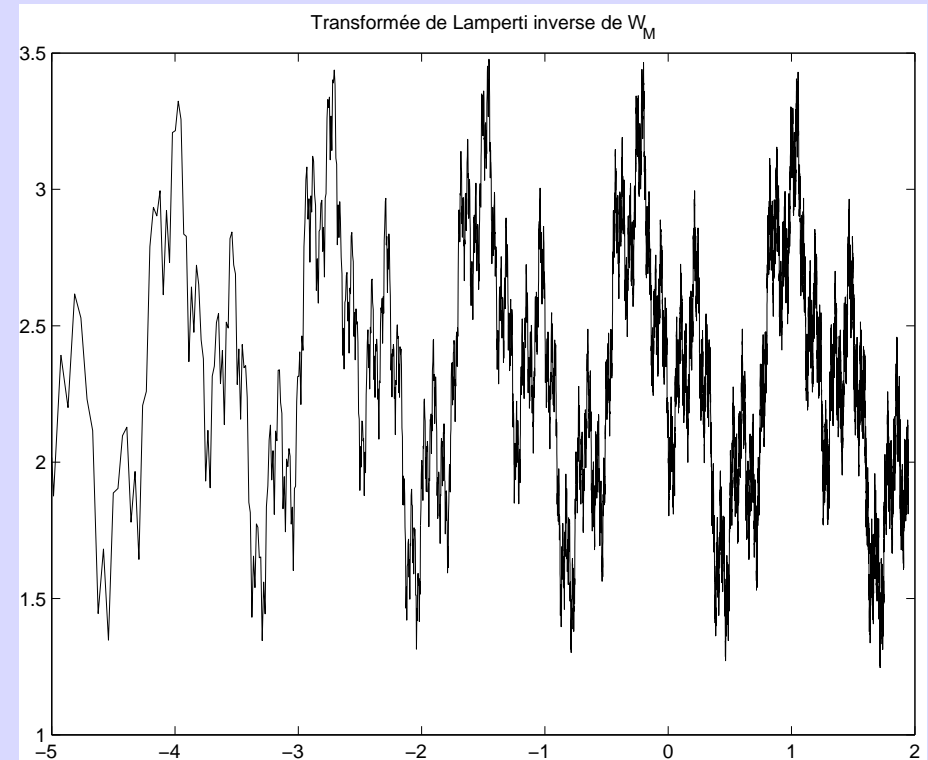
B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot



Fonction délampertisée

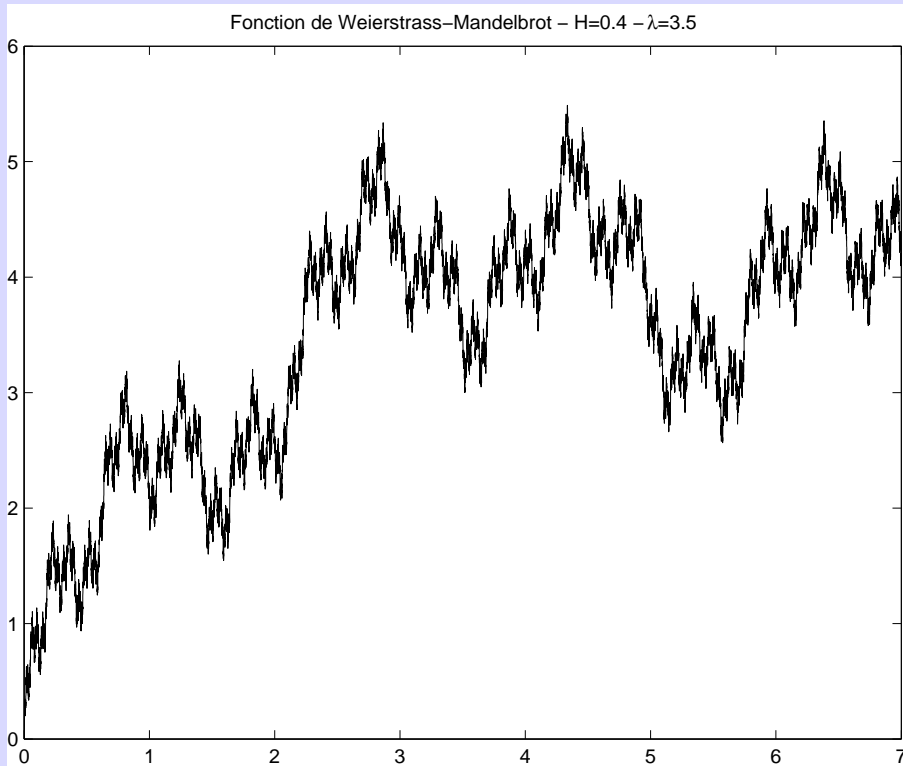


periodicité en échelle $\xrightarrow{\mathcal{L}_H^{-1}}$ periodicité en temps

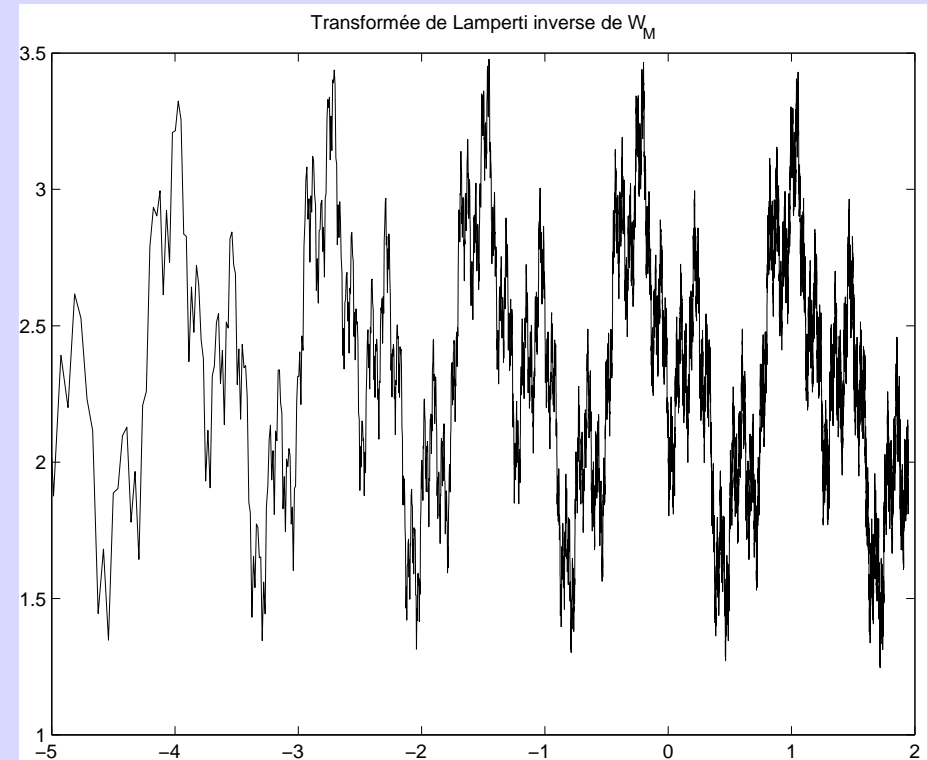
B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot



Fonction délampertisée



periodicité en échelle $\xrightarrow{\mathcal{L}_H^{-1}}$ periodicité en temps
Invariance d'échelle discrète **Cyclostationnarité**

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ **ou** $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

→ Développement : **DSI** étudiée comme image de la **cyclostationnarité**

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

→ Développement : **DSI** étudiée comme image de la **cyclostationnarité**

- B- Brisure complète : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \neq X$ à chaque instant

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

→ Développement : **DSI** étudiée comme image de la **cyclostationnarité**

- B- Brisure complète : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \neq X$ à chaque instant

Enjeu = décrire l'évolution en échelle et en temps des propriétés.

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ **ou** $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

→ Développement : **DSI** étudiée comme image de la **cyclostationnarité**

- B- Brisure complète : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \neq X$ à chaque instant

Enjeu = décrire l'évolution en échelle et en temps des propriétés.

→ Outils généraux de type **temps-échelle** de Mellin.
Exemple : Spectre Wigner invariant en échelle.

B- Briser l'invariance en échelle

- B- Brisure partielle : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \cong X$ ou $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \equiv X$ pour *certaines* dilatations

→ Développement : **DSI** étudiée comme image de la **cyclostationnarité**

- B- Brisure complète : $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X) \neq X$ à chaque instant

Enjeu = décrire l'évolution en échelle et en temps des propriétés.

→ Outils généraux de type **temps-échelle** de Mellin.
Exemple : Spectre Wigner invariant en échelle.

- C- Brisure de l'opérateur de changement d'échelle.

$$\left(\mathcal{D}^{\text{brisé}}X\right) \equiv X$$

Que faire ?

C- Brisure des dilatations en échelle

C- Brisure des dilatations en échelle

- Auto-similarité locale en temps

C- Brisure des dilatations en échelle

- **Auto-similarité locale en temps**
- **Invariance en échelle et taille finie**

C- Brisure des dilatations en échelle

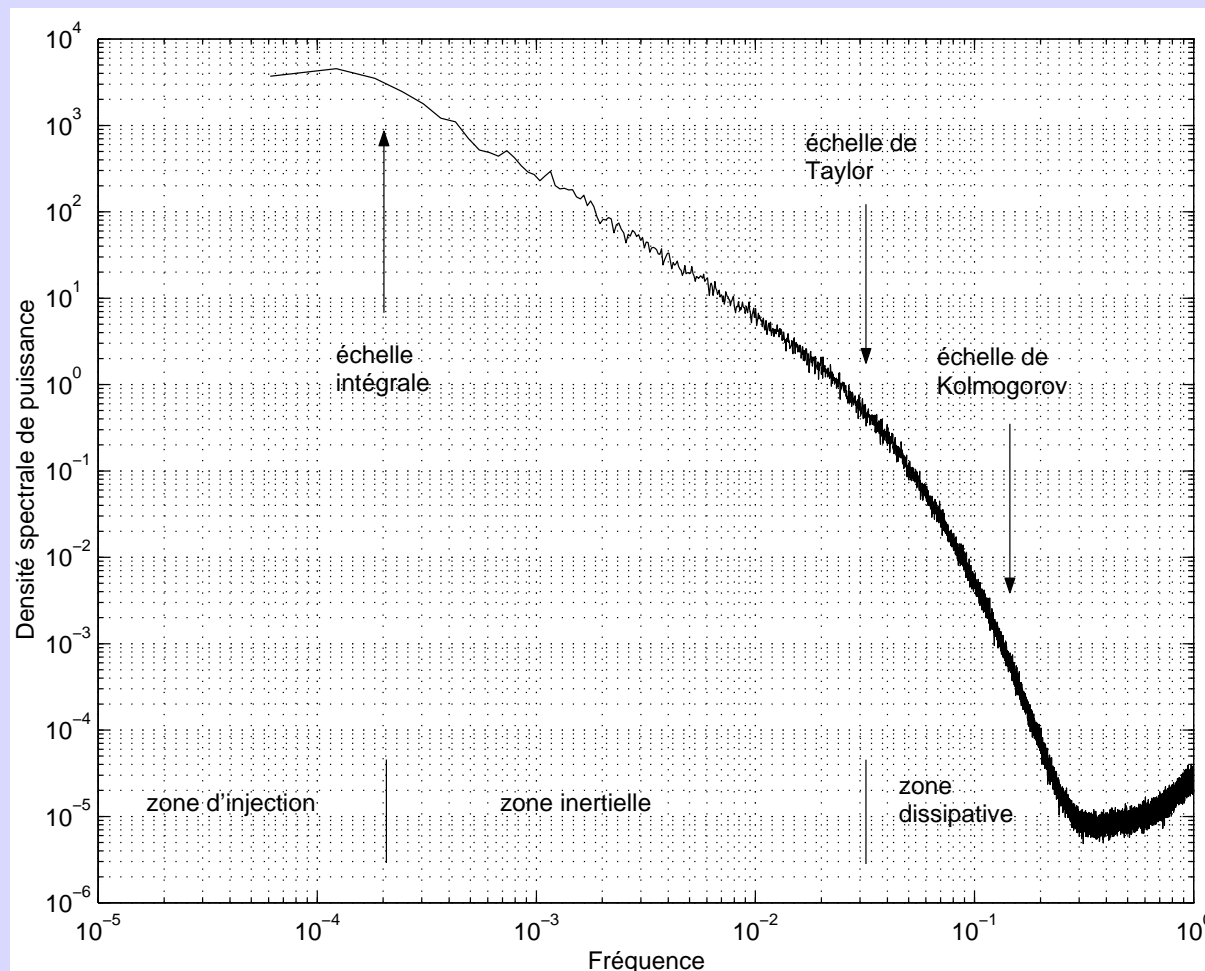
- Auto-similarité locale en temps
- Invariance en échelle et taille finie

→ Bornes sur les zones où des lois / invariances d'échelle peuvent tenir.

C- Brisure des dilatations en échelle

- Auto-similarité locale en temps
- Invariance en échelle et taille finie

→ Bornes sur les zones où des lois / invariances d'échelle peuvent tenir.



C- Brisure des dilatations en échelle

- Auto-similarité locale en temps
- Invariance en échelle et taille finie

→ Bornes sur les zones où des lois / invariances d'échelle peuvent tenir.

→ i) limites extérieures au modèle de description en échelle.

C- Brisure des dilatations en échelle

- **Auto-similarité locale en temps**
- **Invariance en échelle et taille finie**

→ Bornes sur les zones où des lois / invariances d'échelle peuvent tenir.

→ i) limites extérieures au modèle de description en échelle.

→ ii) limites internes aux modèles : bornes à inclure dans les dilatations

C- Brisure des dilatations en échelle

- Auto-similarité locale en temps
- Invariance en échelle et taille finie

→ Bornes sur les zones où des lois / invariances d'échelle peuvent tenir.

→ i) limites extérieures au modèle de description en échelle.

→ ii) limites internes aux modèles : bornes à inclure dans les dilatations

Idée développée par Nottale (relativité d'échelle, 1992),
puis Dubrulle et Graner (1996).

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.
- Dilatation usuelle est alors représentée par

$$(\mathcal{D}_{H, e^\mu} U_X)(s) = U_X(s + \mu) - H\mu$$

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.
- Dilatation usuelle est alors représentée par

$$(\mathcal{D}_{H,e^\mu} U_X)(s) = U_X(s + \mu) - H\mu$$

- Effet de taille finie : pris en compte en “limitant” l'échelle à l'intervalle $]s_-, s_+[$

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.
- Dilatation usuelle est alors représentée par

$$(\mathcal{D}_{H, e^\mu} U_X)(s) = U_X(s + \mu) - H\mu$$

- Effet de taille finie : pris en compte en “limitant” l'échelle à l'intervalle $]s_-, s_+[$

→ loi de composition sur un intervalle fini

$$s_1 \odot s_2 := \frac{s_1 + s_2 - s_1 s_2 (1/s_- + 1/s_+)}{1 - s_1 s_2 / s_- s_+}$$

Loi de composition de Lorentz

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.
- Dilatation usuelle est alors représentée par

$$(\mathcal{D}_{H, e^\mu} U_X)(s) = U_X(s + \mu) - H\mu$$

- Effet de taille finie : pris en compte en “limitant” l'échelle à l'intervalle $]s_-, s_+[$

→ loi de composition sur un intervalle fini

$$s_1 \odot s_2 := \frac{s_1 + s_2 - s_1 s_2 (1/s_- + 1/s_+)}{1 - s_1 s_2 / s_- s_+}$$

Loi de composition de Lorentz

→ Introduire le morphisme de groupe S_{\odot}^{-1} entre $(]s_-, s_+[, \odot)$ et $(\mathbb{R}, +)$

Formalisme pour les échelles bornées

- Le champ $X(t)$ est représenté par $U_X(s) = \ln \frac{X(t_0 e^s)}{X_0}$ où $s = \ln \frac{t}{t_0}$.
- Dilatation usuelle est alors représentée par

$$(\mathcal{D}_{H, e^\mu} U_X)(s) = U_X(s + \mu) - H\mu$$

- Effet de taille finie : pris en compte en “limitant” l'échelle à l'intervalle $]s_-, s_+[$

→ loi de composition sur un intervalle fini

$$s_1 \odot s_2 := \frac{s_1 + s_2 - s_1 s_2 (1/s_- + 1/s_+)}{1 - s_1 s_2 / s_- s_+}$$

Loi de composition de Lorentz

→ Introduire le morphisme de groupe S_{\odot}^{-1} entre $]s_-, s_+[$, \odot) et $(\mathbb{R}, +)$
 et S_{\otimes}^{-1} entre $]U_-, U_+[$, \otimes) et $(\mathbb{R}, +)$

C- Brisure des dilatations en échelle

Formalisme pour les échelles bornées

- L'opérateur de dilatation devient

$$(\mathcal{D}_{H,\mu}^{f_s} U_X)(s) = U_X(s \odot \mu) \otimes g(\mu)$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Formalisme pour les échelles bornées

- L'opérateur de dilatation devient

$$(\mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} U_X)(s) = U_X(s \odot \mu) \otimes g(\mu)$$

$$'' \otimes g(\mu) \sim -H\mu''$$

$$'' s \odot \mu \sim s + \mu''$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Formalisme pour les échelles bornées

- L'opérateur de dilatation devient

$$(\mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} U_X)(s) = U_X(s \odot \mu) \otimes g(\mu) \quad \begin{aligned} \text{"} \otimes g(\mu) &\sim -H\mu'' \\ \text{"} s \odot \mu &\sim s + \mu'' \end{aligned}$$

Stationnarisation pour les invariances avec taille finie

C- Brisure des dilatations en échelle

Formalisme pour les échelles bornées

- L'opérateur de dilatation devient

$$(\mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} U_X)(s) = U_X(s \odot \mu) \otimes g(\mu) \quad \begin{array}{l} \text{"} \otimes g(\mu) \sim -H\mu'' \\ \text{"} s \odot \mu \sim s + \mu'' \end{array}$$

Stationnarisation pour les invariances avec taille finie

- On construit la transformation qui préserve la correspondance

$$\left(\mathcal{L}_H^{fs}\right)^{-1} \mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} \mathcal{L}_H^{fs} = \mathcal{S}_{S_{\odot}^{-1}(\mu)}$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Formalisme pour les échelles bornées

- L'opérateur de dilatation devient

$$(\mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} U_X)(s) = U_X(s \odot \mu) \otimes g(\mu) \quad \begin{array}{l} \text{"} \otimes g(\mu) \sim -H\mu \text{"} \\ \text{"} s \odot \mu \sim s + \mu \text{"} \end{array}$$

Stationnarisation pour les invariances avec taille finie

- On construit la transformation qui préserve la correspondance

$$\left(\mathcal{L}_H^{fs}\right)^{-1} \mathcal{D}_{H,\mu}^{fs} \mathcal{L}_H^{fs} = \mathcal{S}_{S_{\odot}^{-1}(\mu)}$$

avec $(\mathcal{L}_H^{fs} Y)(t) = \exp S_{\otimes} \{ \ln Y(S_{\odot}^{-1}(\ln t)) + H S_{\odot}^{-1}(\ln t) \}$

au lieu de $(\mathcal{L}_H Y)(t) = \exp \{ \ln Y(\ln t) + H \ln t \}$

C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Fonctions invariantes d'échelle au sens de \mathcal{D}^{fs}

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s) = U^{fsi}(s)$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Fonctions invariantes d'échelle au sens de \mathcal{D}^{fs}

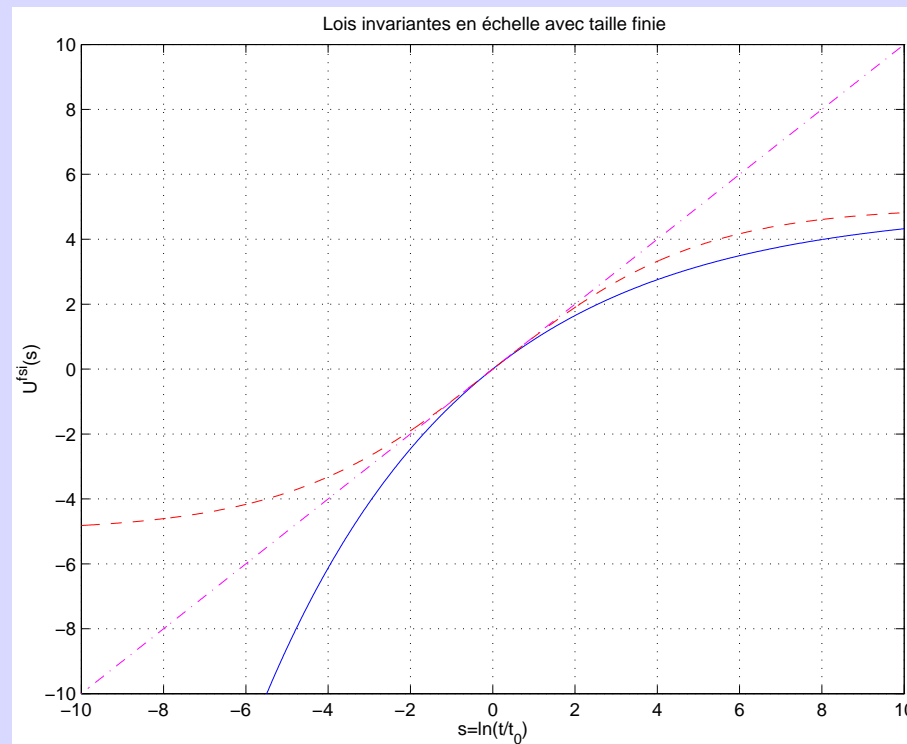
$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s) = U^{fsi}(s) = U^{fsi}(0) \otimes \frac{-g(s)}{1 - g(s)(1/U_+ + 1/U_-)}$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Fonctions invariantes d'échelle au sens de \mathcal{D}^{fs}

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s) = U^{fsi}(s) = U^{fsi}(0) \otimes \frac{-g(s)}{1 - g(s)(1/U_+ + 1/U_-)}$$



C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Fonctions invariantes d'échelle au sens de \mathcal{D}^{fs}

$$(\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s) = U^{fsi}(s) = U^{fsi}(0) \otimes \frac{-g(s)}{1 - g(s)(1/U_+ + 1/U_-)}$$

- Processus auto-similaires à invariance bornée

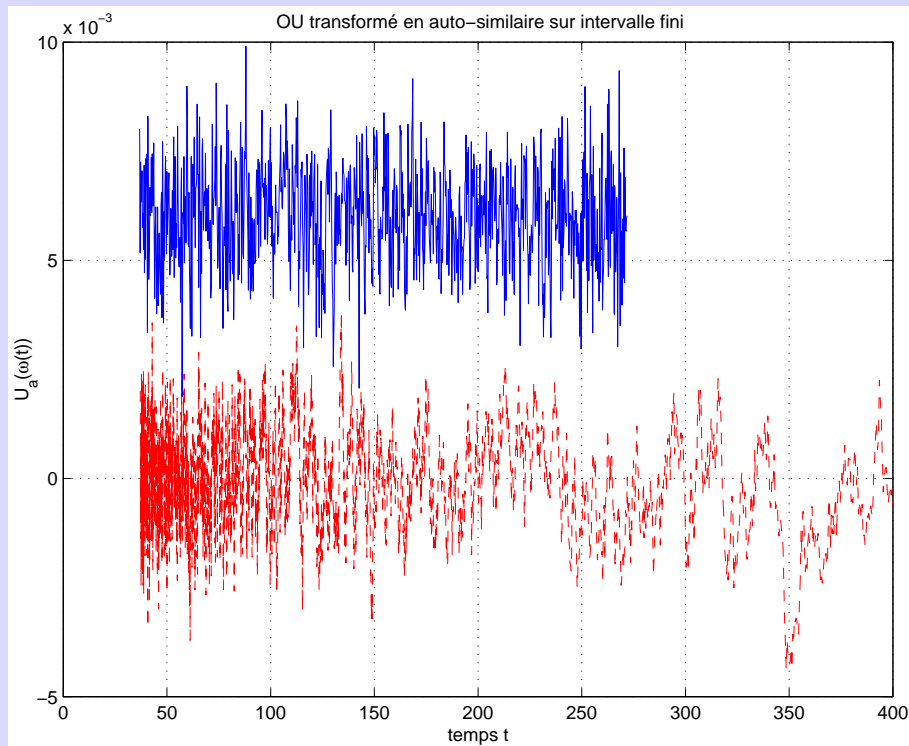
$$U^{fsi}(s) \stackrel{d}{=} (\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s)$$

C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Processus auto-similaires à invariance bornée

$$U^{fsi}(s) \stackrel{d}{=} (\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s)$$

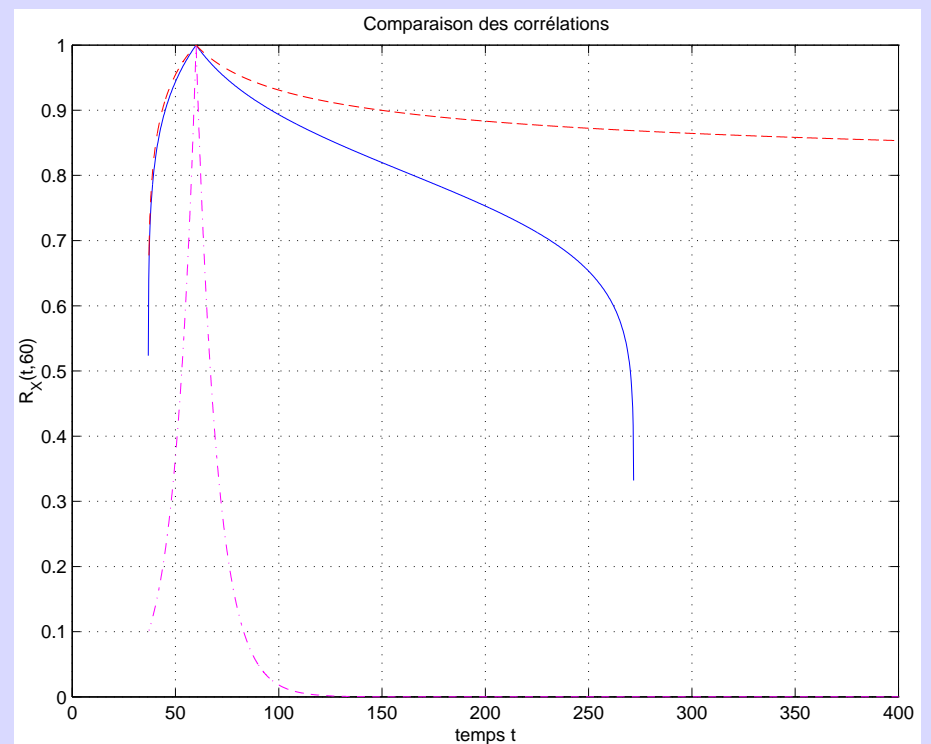
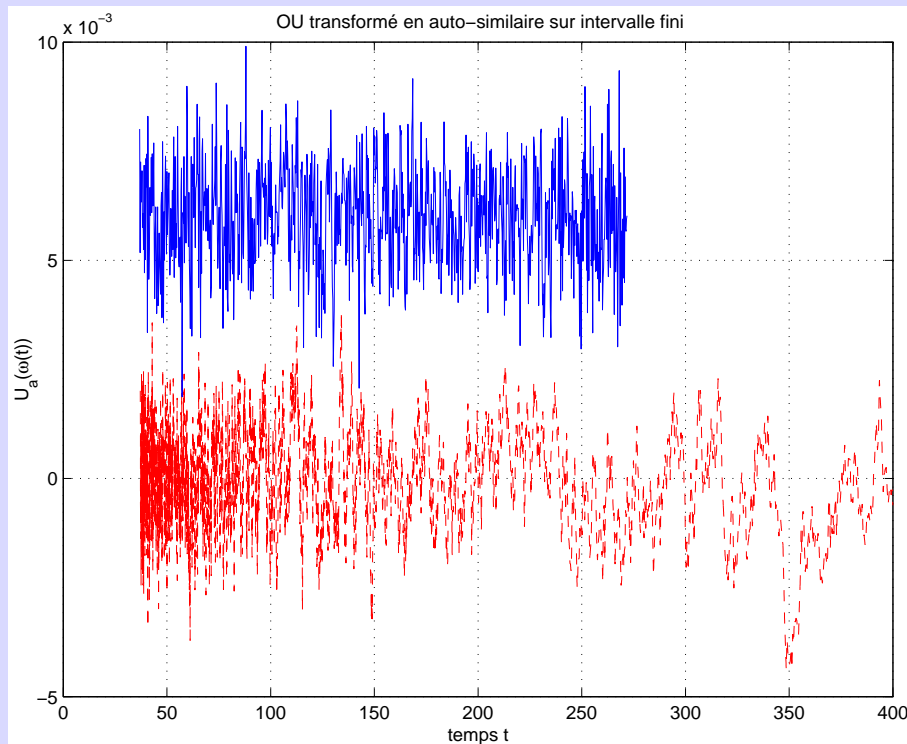


C- Brisure des dilatations en échelle

Auto-similarité avec taille finie

- Processus auto-similaires à invariance bornée

$$U^{fsi}(s) \stackrel{d}{=} (\mathcal{D}_{g,\mu}^{fs} U^{fsi})(s)$$



Introduction à la turbulence

Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes.

$$D_t \vec{v} = \partial_t \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{terme non-linéaire}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme visqueux}}$$

Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes.

$$D_t \vec{v} = \partial_t \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{terme non-linéaire}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme visqueux}}$$

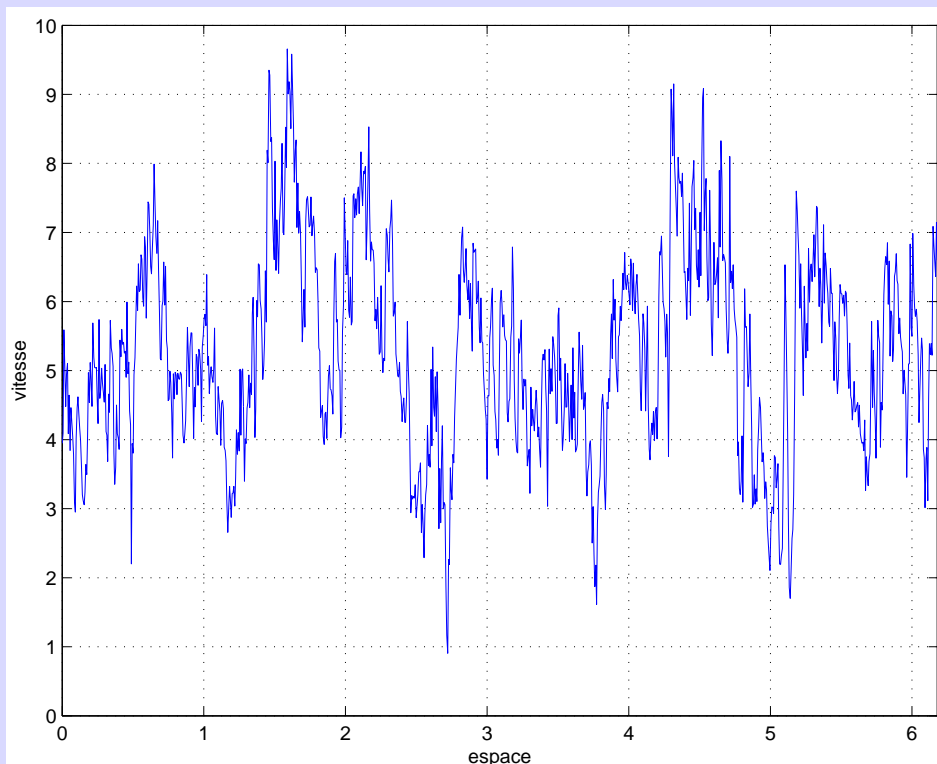
$$\text{Re} = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu}$$

Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes.

$$D_t \vec{v} = \partial_t \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{terme non-linéaire}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme visqueux}}$$

$$Re = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

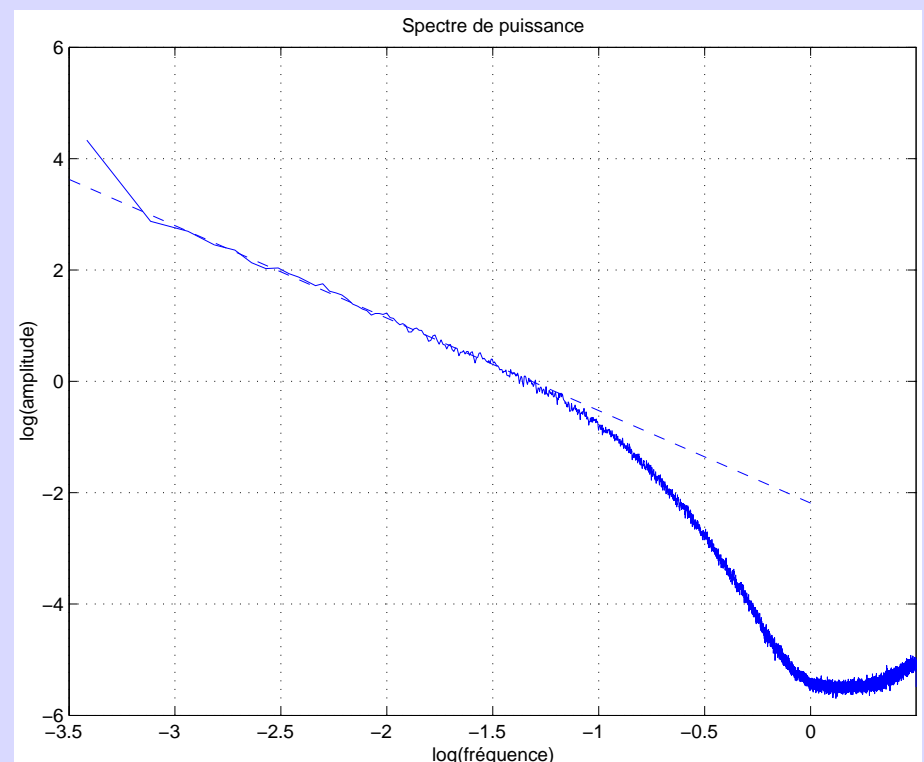
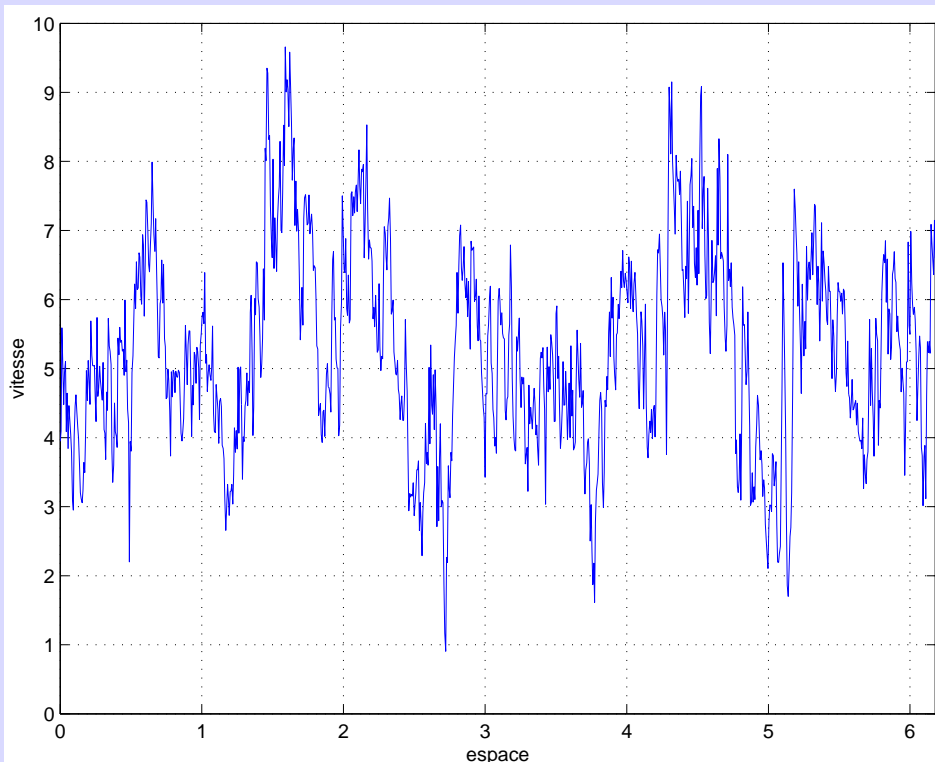


Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes.

$$D_t \vec{v} = \partial_t \vec{v} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{terme non-linéaire}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme visqueux}}$$

$$Re = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$



Théorie de Kolmogorov (1941)

Pour les accroissements de vitesse : $\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{l} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r})$.

- Hypothèse centrale : **Auto-similarité** dans la zone inertielle

Théorie de Kolmogorov (1941)

Pour les accroissements de vitesse : $\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{l} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r})$.

- Hypothèse centrale : **Auto-similarité** dans la zone inertielle, $H = \frac{1}{3}$

$$\delta\vec{v}(\lambda\vec{l}, \vec{r}) \stackrel{d}{=} \lambda^H \delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}).$$

Théorie de Kolmogorov (1941)

Pour les accroissements de vitesse : $\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{l} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r})$.

- Hypothèse centrale : **Auto-similarité** dans la zone inertielle, $H = \frac{1}{3}$

$$\delta\vec{v}(\lambda\vec{l}, \vec{r}) \stackrel{d}{=} \lambda^H \delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}).$$

- Conséquence : **spectre** attendu,

$$E(k) \sim \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}.$$

Théorie de Kolmogorov (1941)

Pour les accroissements de vitesse : $\delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{l} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{r})$.

- Hypothèse centrale : **Auto-similarité** dans la zone inertielle, $H = \frac{1}{3}$

$$\delta\vec{v}(\lambda\vec{l}, \vec{r}) \stackrel{d}{=} \lambda^H \delta\vec{v}(\vec{l}, \vec{r}).$$

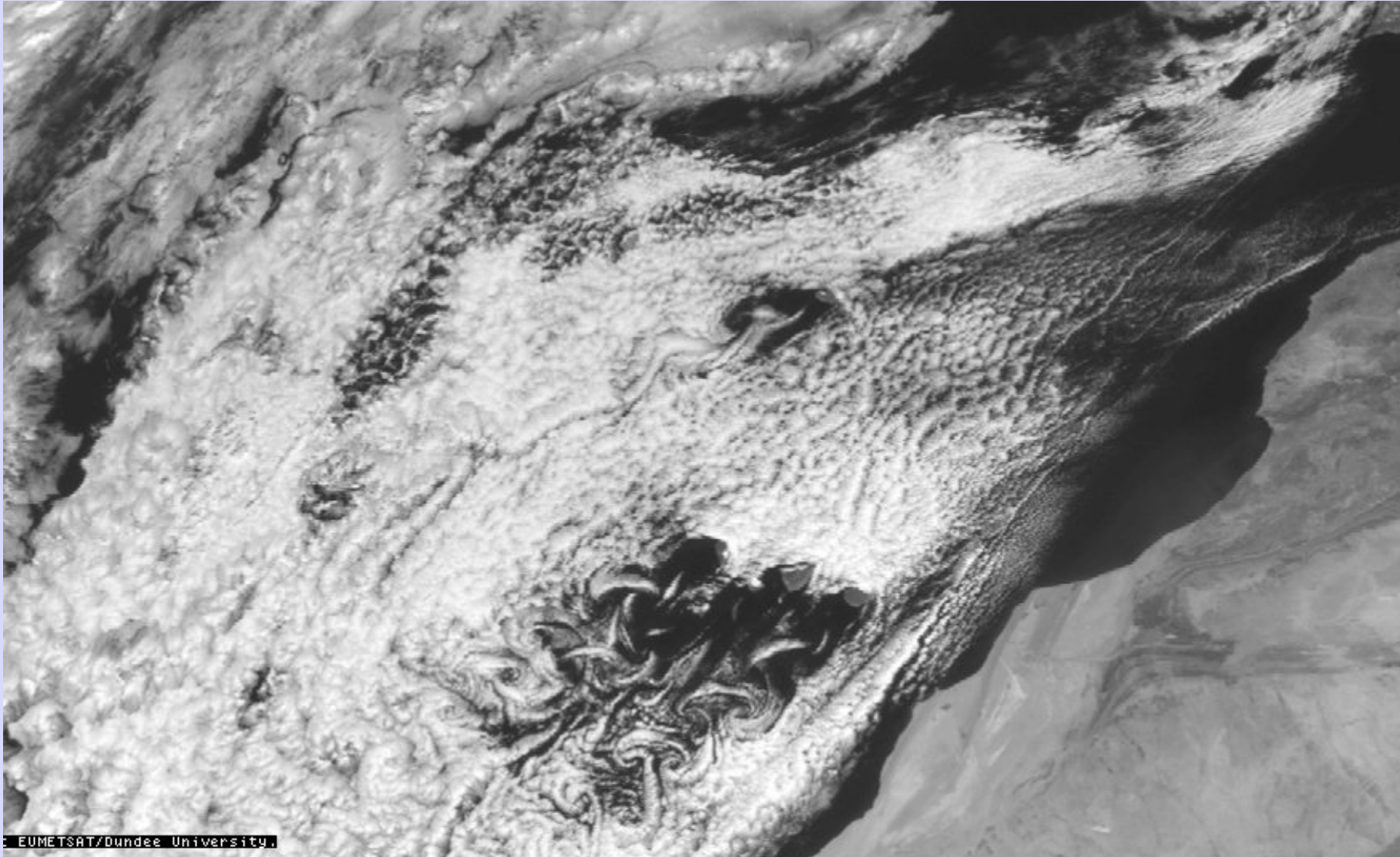
- Conséquence : **spectre** attendu,

$$E(k) \sim \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}.$$

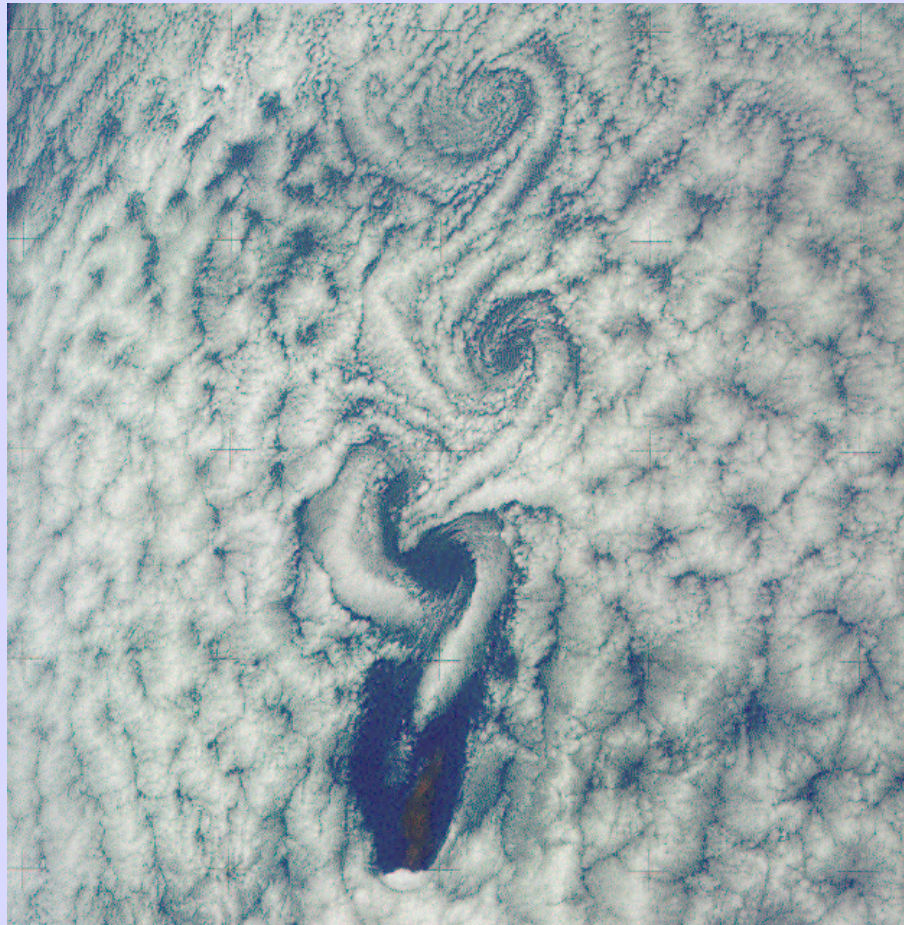
- H -ss **ou** spectre en $k^{-5/3}$
→ nécessitent une structure **singulière** de la vitesse au cours du temps.

Géométrie des écoulements et tourbillons

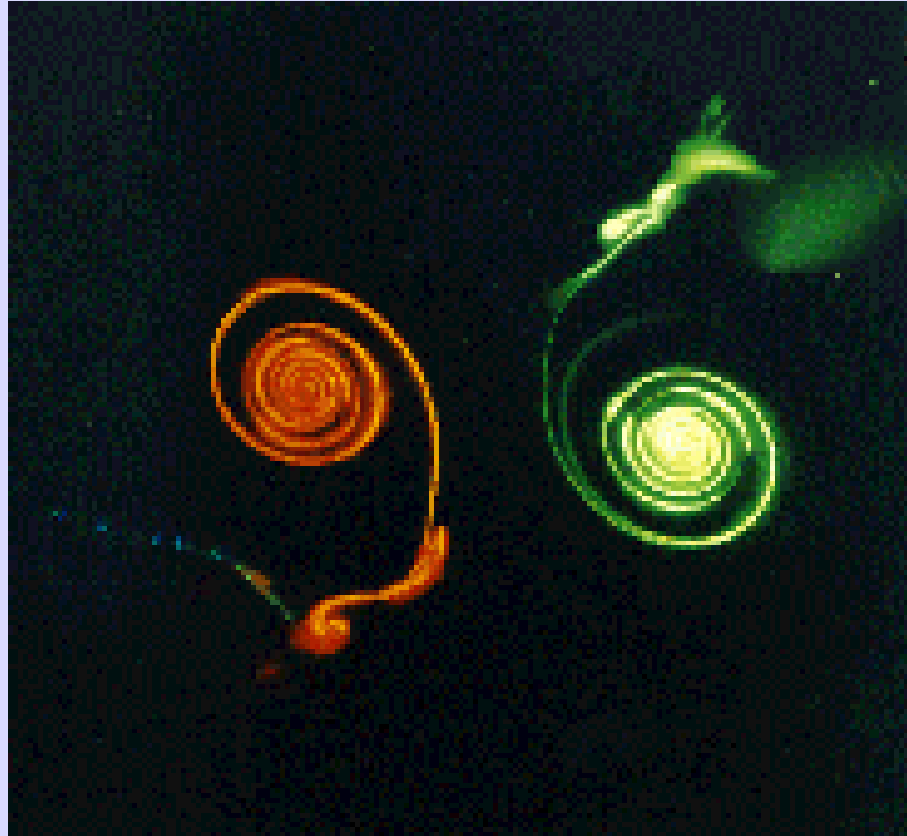
Géométrie des écoulements et tourbillons



Géométrie des écoulements et tourbillons

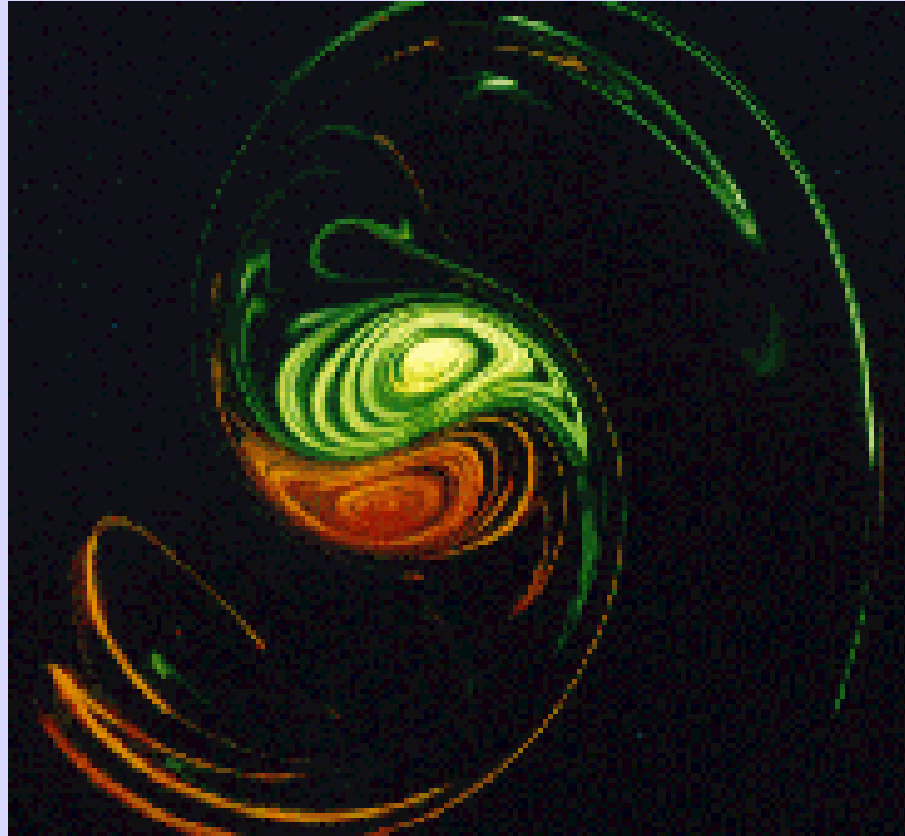


Géométrie des écoulements et tourbillons



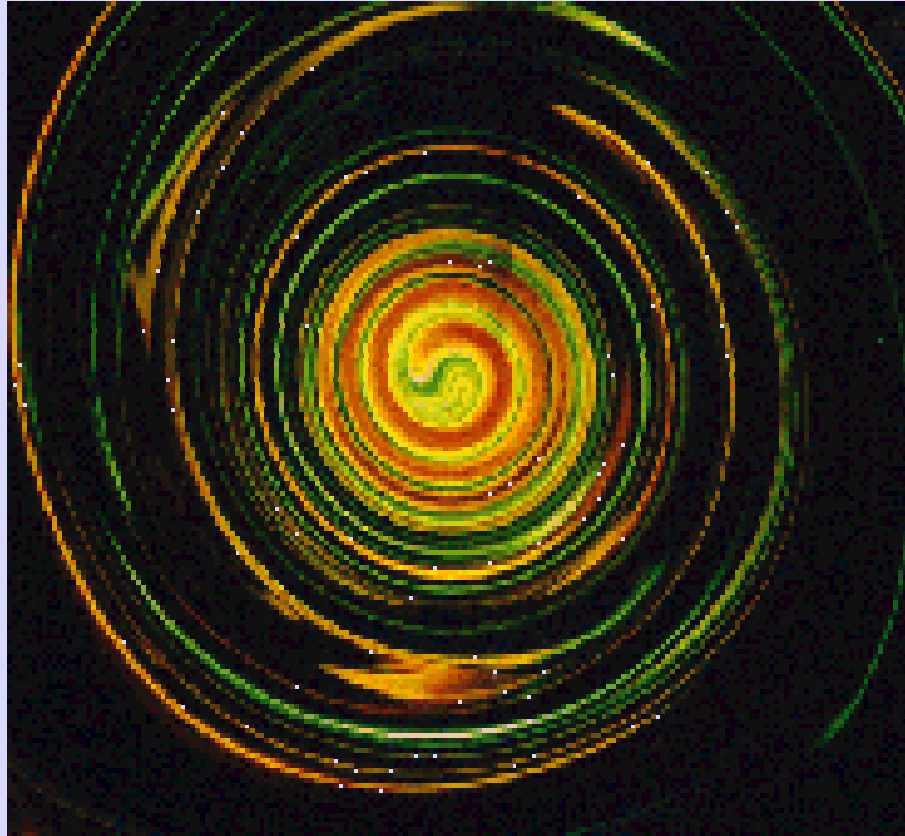
Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



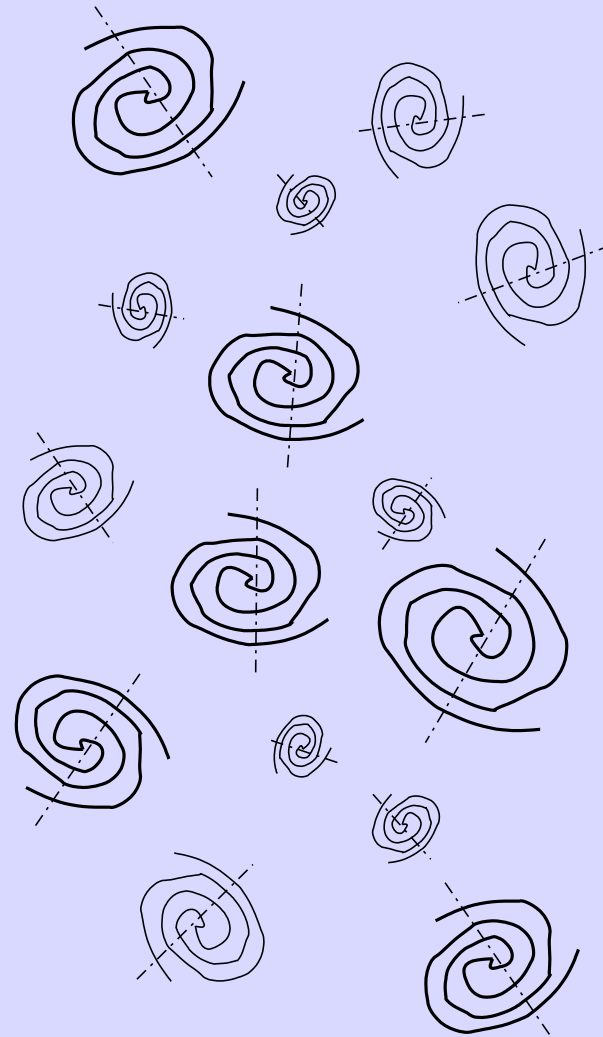
Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Modèle des vortex de Lundgren (1982)

Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Modèle des vortex de Lundgren (1982)

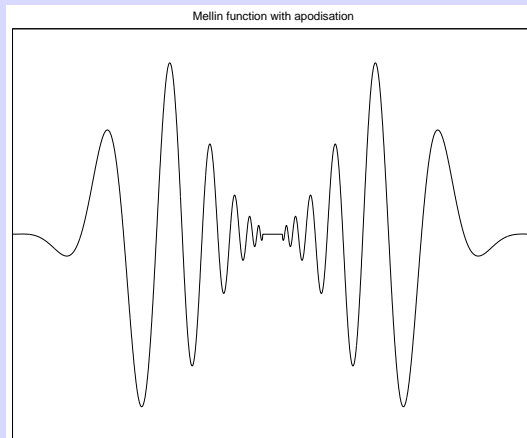
- Études de singularités géométriques oscillantes.

Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Modèle des vortex de Lundgren (1982)

- Études de singularités géométriques oscillantes. $|t - t_0|^h g \left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right)$

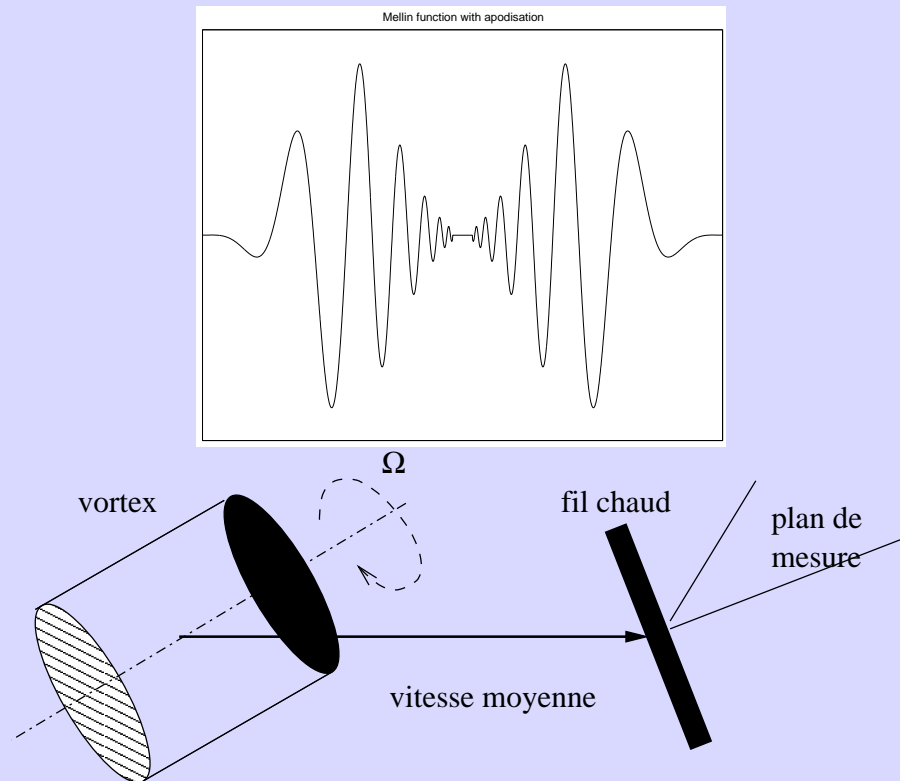


Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Modèle des vortex de Lundgren (1982)

- Études de singularités géométriques oscillantes. $|t - t_0|^{hg} \left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right)$

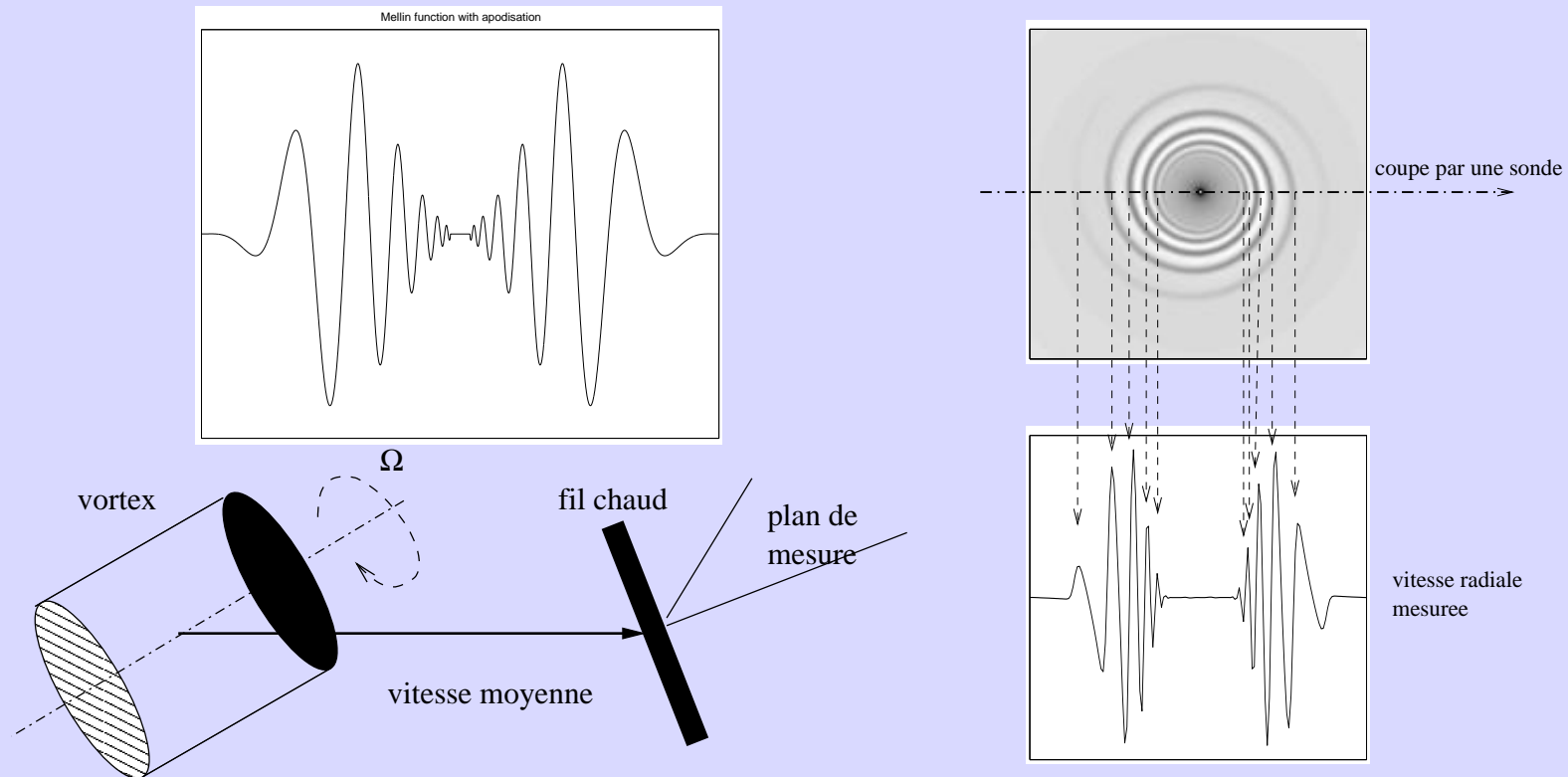


Caractérisation des objets ?

- Plonger dans les modèles de vortex.

Modèle des vortex de Lundgren (1982)

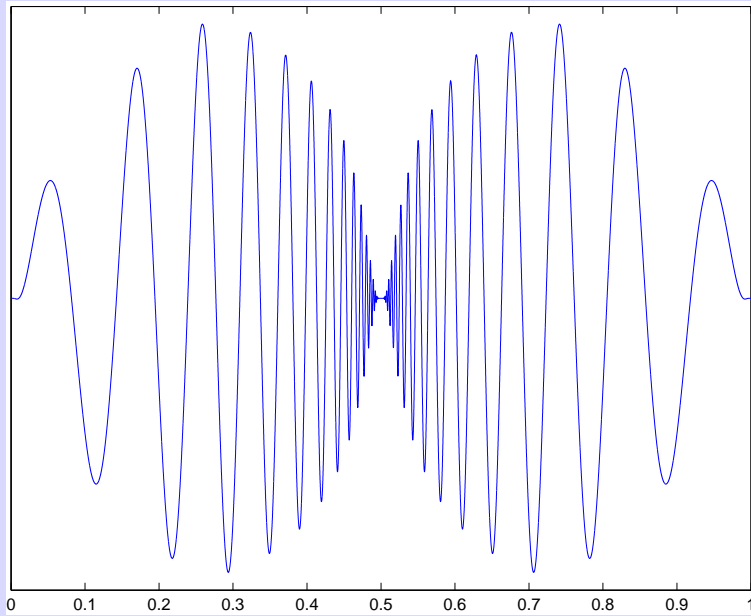
- Études de singularités géométriques oscillantes. $|t - t_0|^h g \left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right)$



Géométries et statistiques

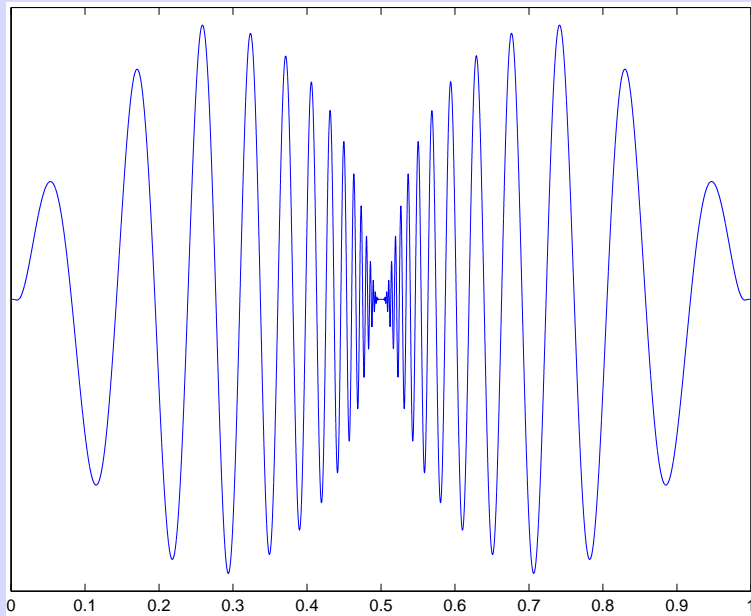
Géométries et statistiques

Singularité oscillante / **Géométrie**

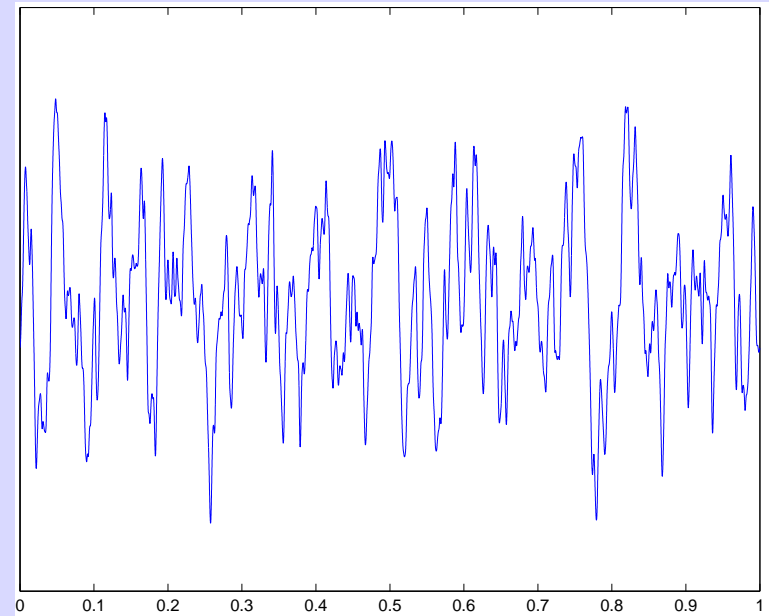


Géométries et statistiques

Singularité oscillante / **Géométrie**

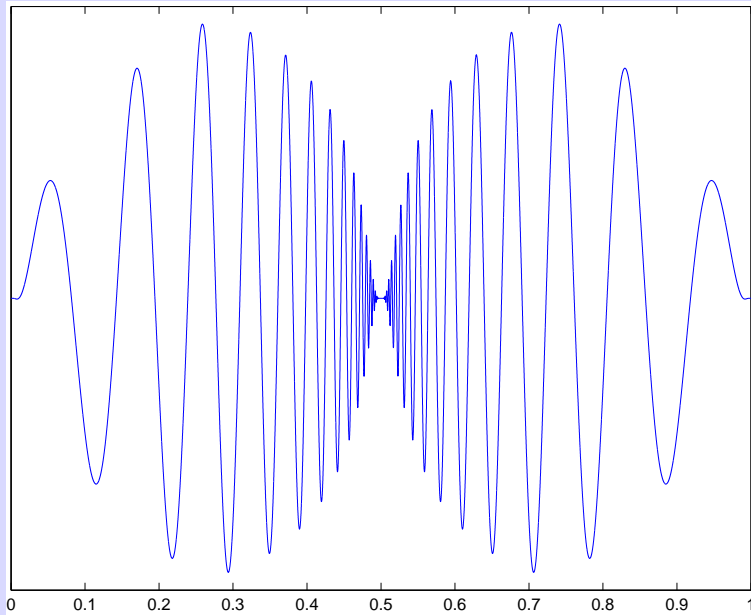


Signal aléatoire / **Statistique**

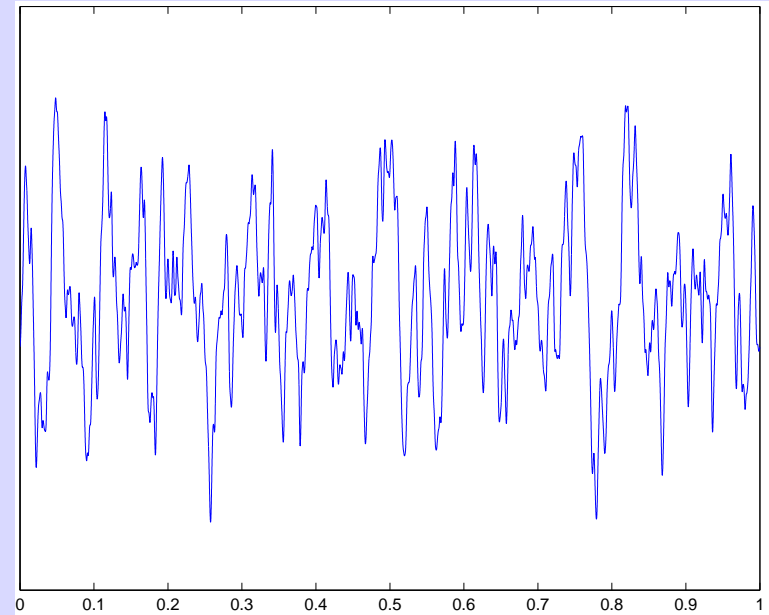


Géométries et statistiques

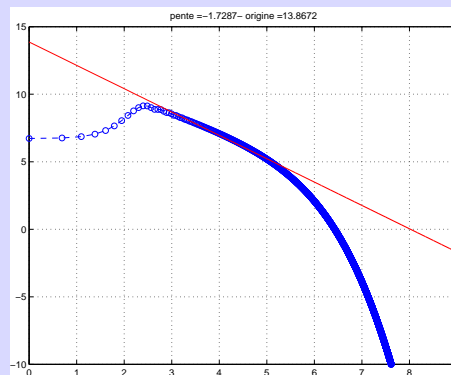
Singularité oscillante / **Géométrie**



Signal aléatoire / **Statistique**

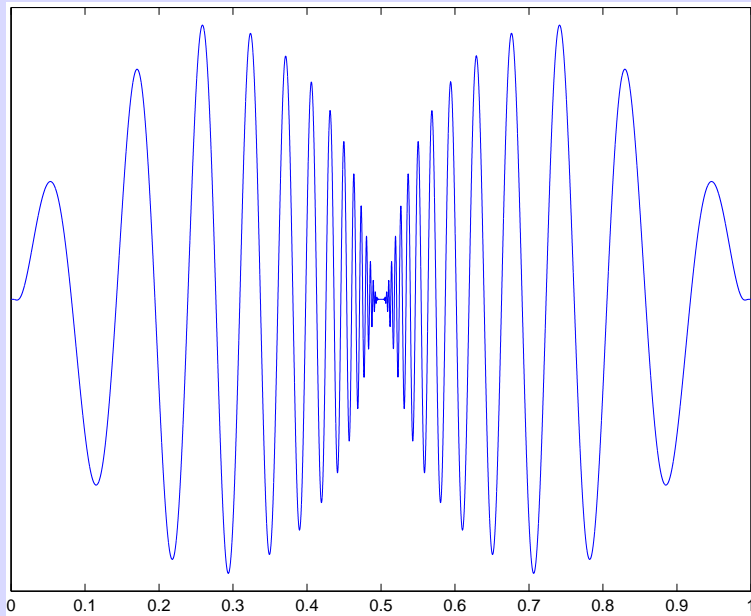


Même spectre en loi de puissance (ici proche de $k^{-5/3}$)

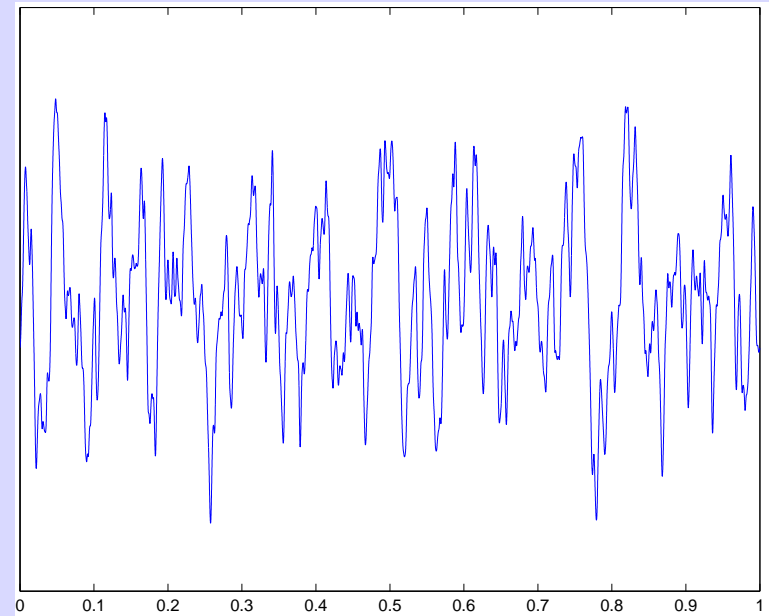


Géométries et statistiques

Singularité oscillante / **Géométrie**



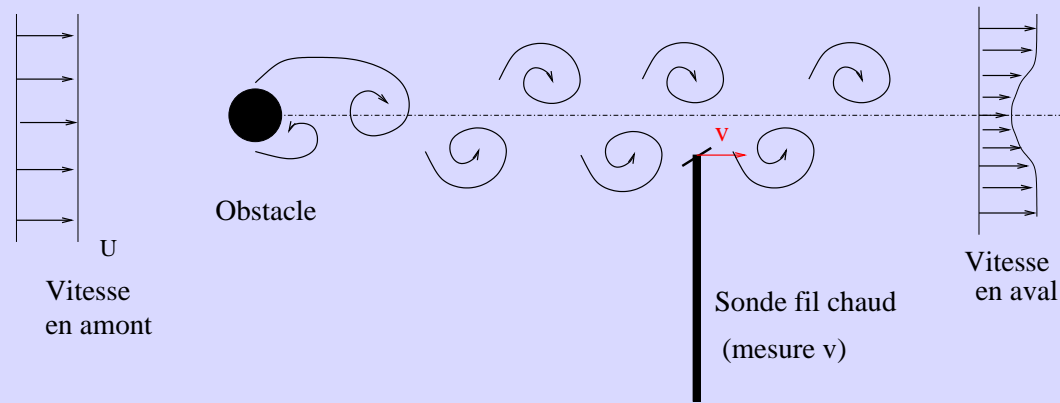
Signal aléatoire / **Statistique**



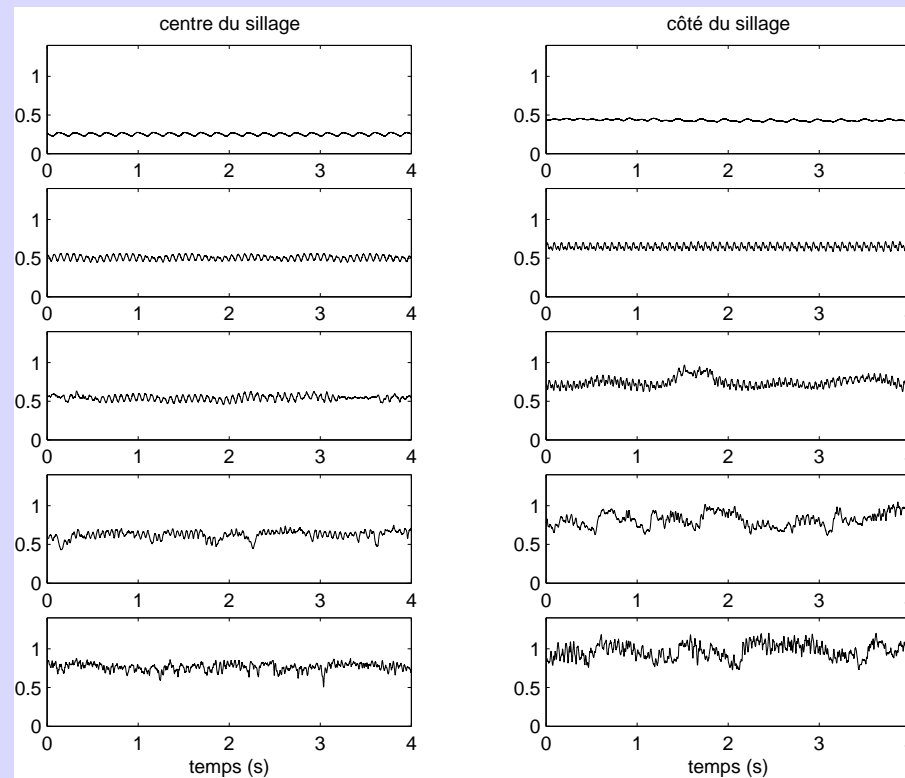
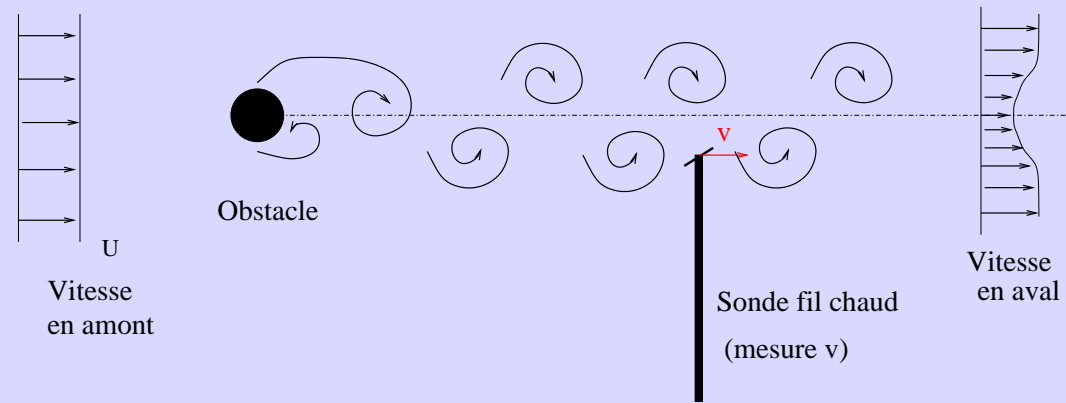
- Intérêt des vortex de Lundgren

Collection statistique d'objets organisés \Rightarrow spectre en $k^{-5/3}$.

Ébauche du problème sur une allée de von Kármán



Ébauche du problème sur une allée de von Kármán



Description statistique à base d'objets

- Reformulation de la solution de **Lundgren** dans un formalisme de **Mellin**.

Équation pour la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

Description statistique à base d'objets

- Reformulation de la solution de **Lundgren** dans un formalisme de **Mellin**.

Équation pour la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

$$\partial_t \omega_2 + \frac{1}{r} (\partial_\theta \psi_2 \partial_r \omega_2 - \partial_r \psi_2 \partial_\theta \omega_2) = \nu \Delta \omega_2.$$

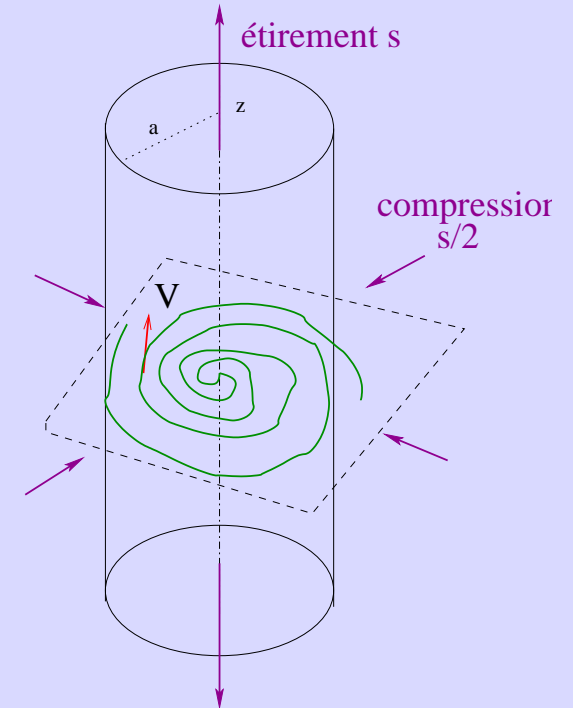
Description statistique à base d'objets

- Reformulation de la solution de **Lundgren** dans un formalisme de **Mellin**.

Équation pour la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

$$\partial_t \omega_2 + \frac{1}{r} (\partial_\theta \psi_2 \partial_r \omega_2 - \partial_r \psi_2 \partial_\theta \omega_2) = \nu \Delta \omega_2.$$



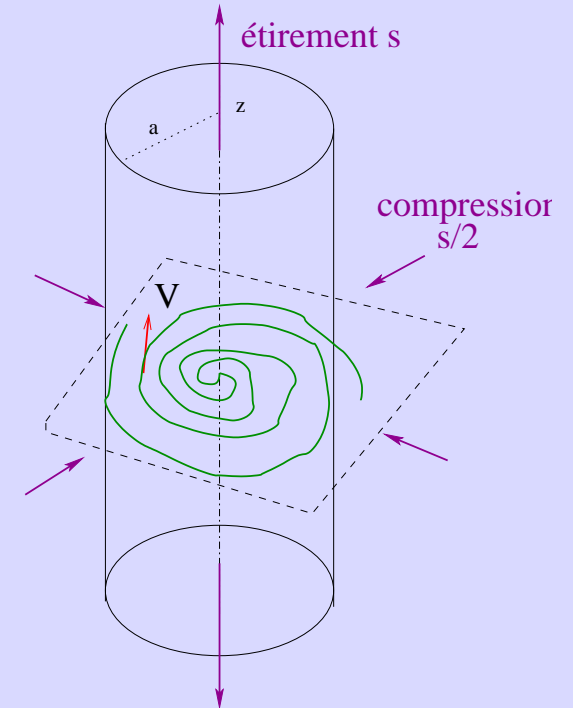
Description statistique à base d'objets

- Reformulation de la solution de **Lundgren** dans un formalisme de **Mellin**.

Équation pour la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

$$\partial_t \omega_2 + \frac{1}{r} (\partial_\theta \psi_2 \partial_r \omega_2 - \partial_r \psi_2 \partial_\theta \omega_2) = \nu \Delta \omega_2.$$



$$\begin{cases} \omega_2(r, \theta; t) = \sum_n \int d\beta Z_n(\beta, t) r^{i2\pi\beta} e^{in\theta} \\ \psi_2(r, \theta; t) = \sum_n \int d\beta Y_n(\beta, t) r^{2+i2\pi\beta} e^{in\theta}. \end{cases}$$

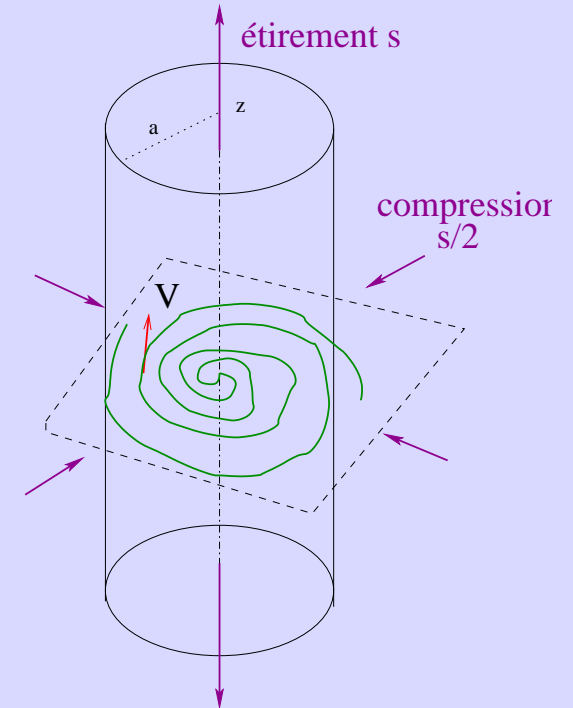
Description statistique à base d'objets

- Reformulation de la solution de **Lundgren** dans un formalisme de **Mellin**.

Équation pour la vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$D_t \vec{\omega} = \partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}$$

$$\partial_t \omega_2 + \frac{1}{r} (\partial_\theta \psi_2 \partial_r \omega_2 - \partial_r \psi_2 \partial_\theta \omega_2) = \nu \Delta \omega_2.$$



$$\begin{cases} \omega_2(r, \theta; t) = \sum_n \int d\beta Z_n(\beta, t) r^{i2\pi\beta} e^{in\theta} \\ \psi_2(r, \theta; t) = \sum_n \int d\beta Y_n(\beta, t) r^{2+i2\pi\beta} e^{in\theta}. \end{cases}$$

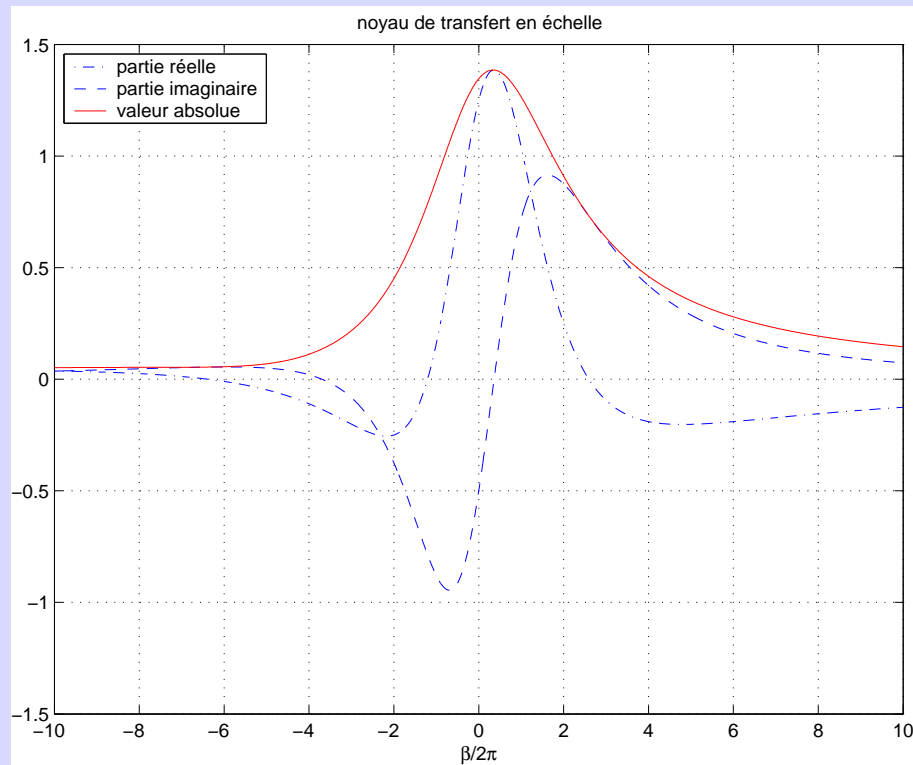
→ Équations d'évolutions pour $Z_n(\beta, t)$ et Y_n .

- **Transfert en échelle**

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.

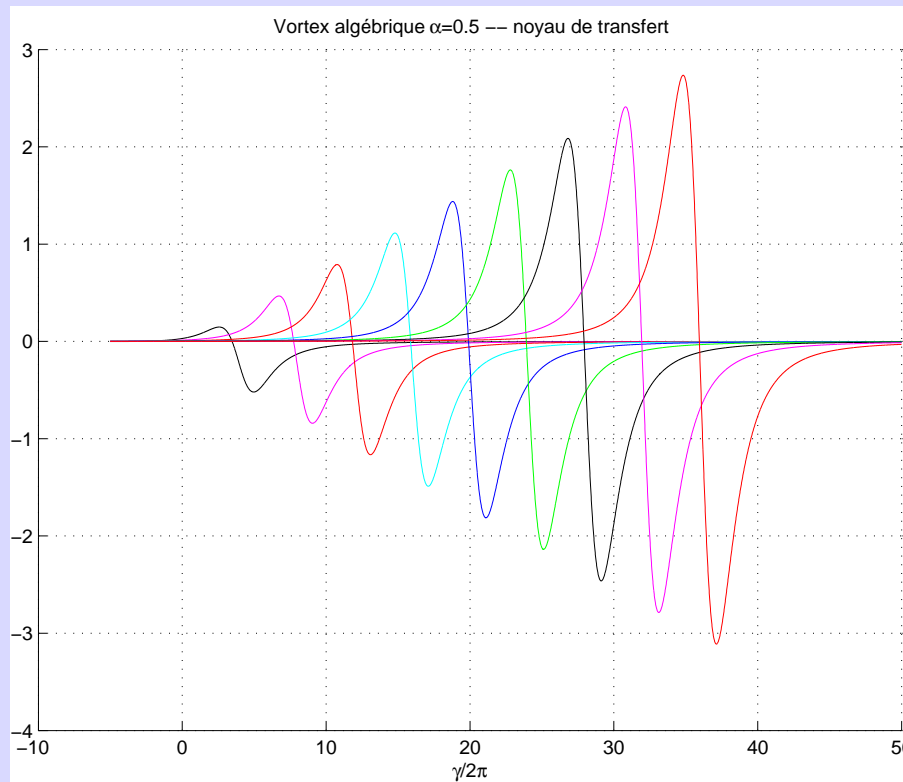
- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



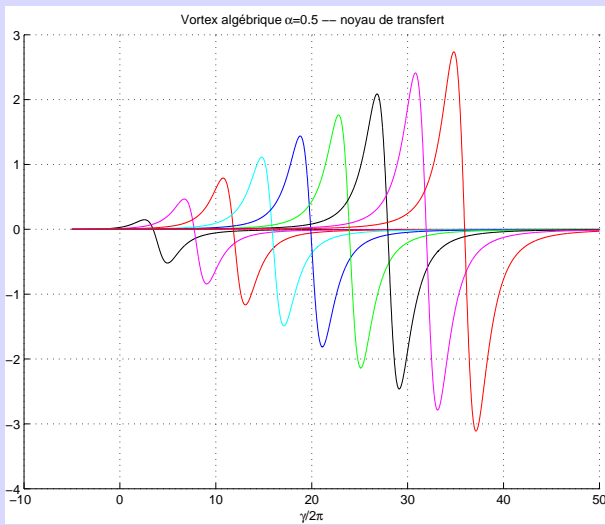
- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



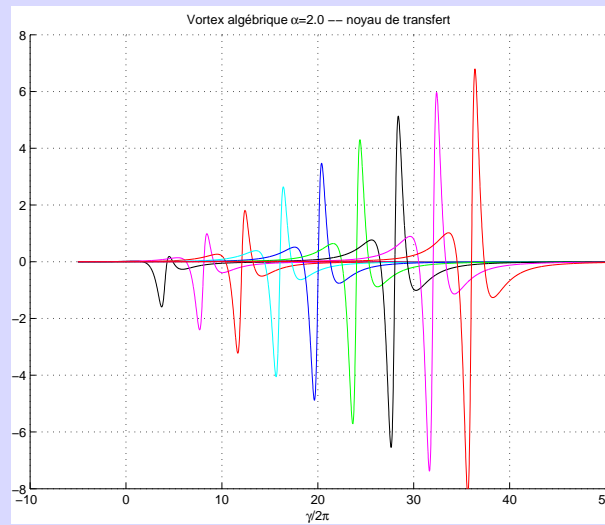
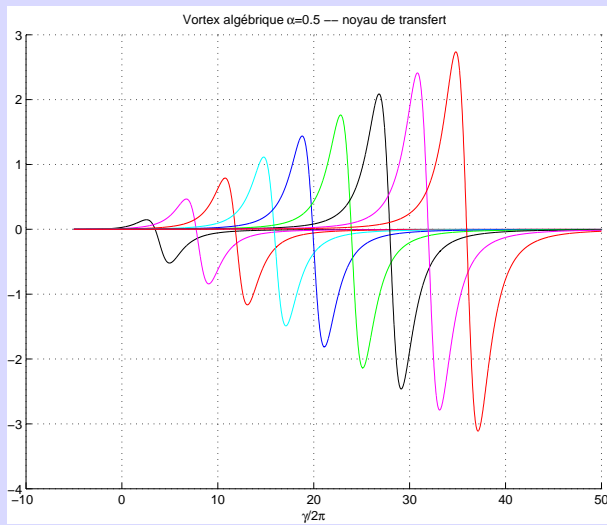
- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



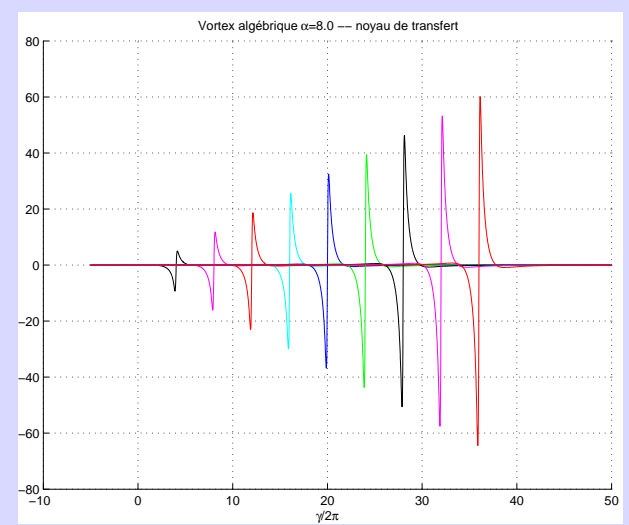
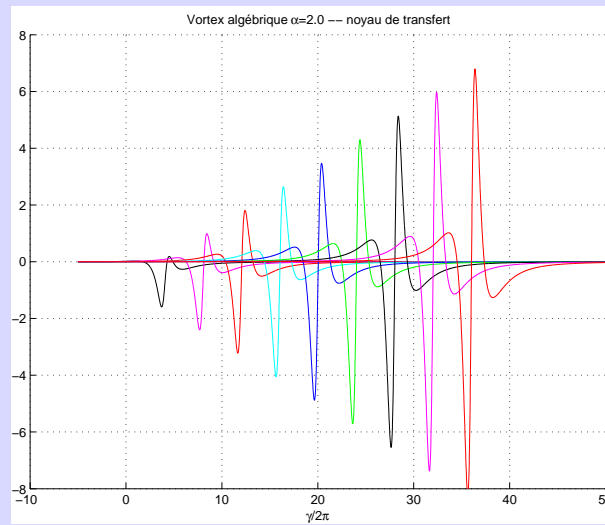
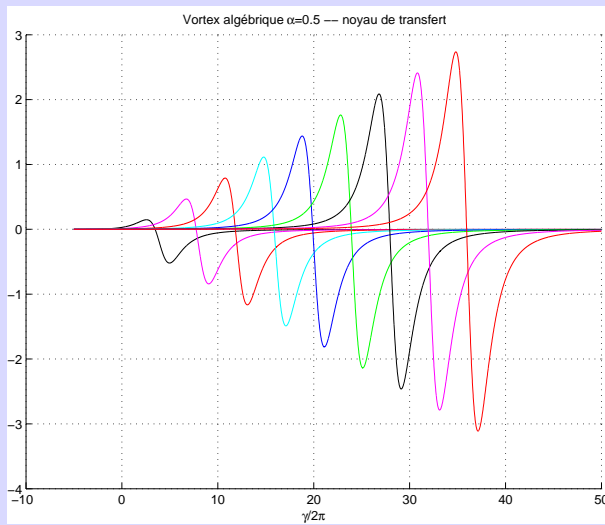
- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



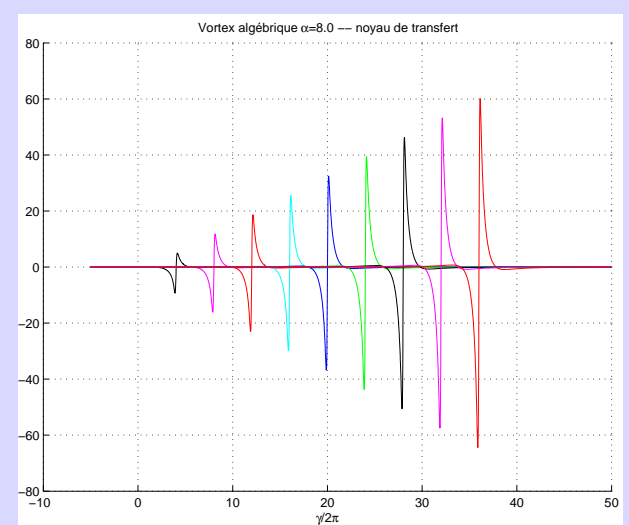
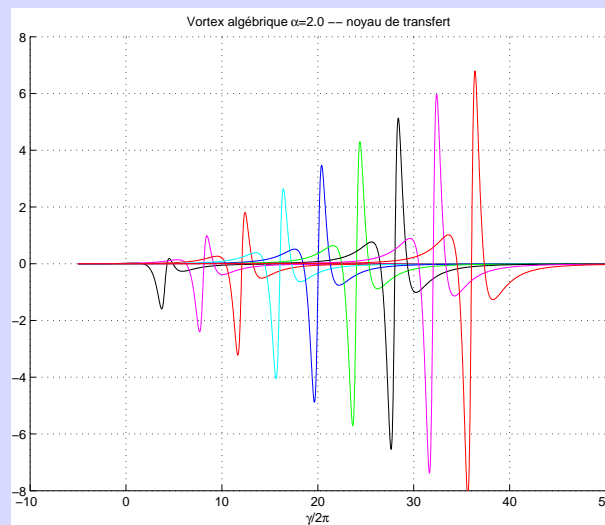
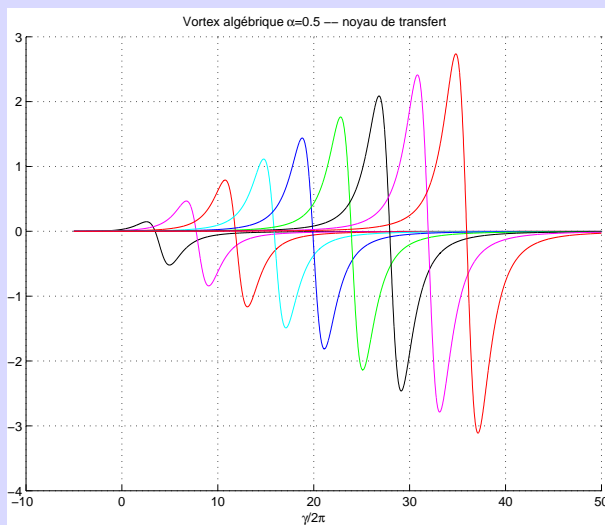
- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



- Transfert en échelle

De la forme $\frac{\partial}{\partial t} Z_n(\beta, t) \sim$ convolution de $Z_n(\gamma, t)$ par un noyau de transfert.



→ Décrit les bonnes propriétés de **migration en échelle** des vortex.

Limitations de l'approche

Différents problèmes compliquent l'exploitation pour les expériences ce formalisme.

- Manque de caractérisation précise des objets seuls.
→ C'est une **classe** de solutions.

Limitations de l'approche

Différents problèmes compliquent l'exploitation pour les expériences ce formalisme.

- Manque de caractérisation précise des objets seuls.
→ C'est une **classe** de solutions.

- Éléments irréductibles de la solution ?
→ Migration au cours du temps vers les petites échelles.

Limitations de l'approche

Différents problèmes compliquent l'exploitation pour les expériences ce formalisme.

- Manque de caractérisation précise des objets seuls.
→ C'est une **classe** de solutions.

- Éléments irréductibles de la solution ?
→ Migration au cours du temps vers les petites échelles.

- Tentatives d'utiliser des représentations mixtes (temps-fréquence ou échelle)
→ Ecueils pour séparer des objets complexes mélangés...

Conclusion et Perspectives

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

→ Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

→ Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l’analyse de l’auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l’analyse de l’auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.
 - traitement des images (2D !) auto-similaires.

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

- Chercher la signature de la géométrie dans de nouvelles expériences.

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l’analyse de l’auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

- Chercher la signature de la géométrie dans de nouvelles expériences.

- Réflexions sur les **invariances d’échelle brisées en physique**.

- Invariance d’échelle discrète

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l’analyse de l’auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

- Chercher la signature de la géométrie dans de nouvelles expériences.

- Réflexions sur les **invariances d’échelle brisées en physique**.

- Invariance d’échelle discrète : croissance, fracture,

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l’analyse de l’auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

- Chercher la signature de la géométrie dans de nouvelles expériences.

- Réflexions sur les **invariances d’échelle brisées en physique**.

- Invariance d’échelle discrète : croissance, fracture, **turbulence**.

Conclusion et Perspectives

- Outils “à la Lamperti - Mellin”

- Constituent une approche **pratique** pour l'analyse de l'auto-similarité (estimateurs, modèles paramétriques, temps discret et traitement numérique).

- Développements possibles

- systématiser les transformées “à la Lamperti” pour les brisures de symétries générales.

- traitement des images (2D !) auto-similaires.

- Perspectives en **turbulence** ?

- Faiblesse prédictive des théories à vortex pour la vitesse.

- Chercher la signature de la géométrie dans de nouvelles expériences.

- Réflexions sur les **invariances d'échelle brisées en physique**.

- Invariance d'échelle discrète : croissance, fracture, **turbulence**.

- Auto-similarité de taille finie : phénomènes critiques.