Thèse de doctorat de l'université Paris 6

Spécialité :

Champs, Particules, Matières

présentée par

Sébastien Neukirch

pour obtenir le grade de Docteur de l'université Paris 6

Sujet :

Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard : nombre, forme et localisation

Soutenue le 06 Novembre 1998
devant la commission d'examen composée de

Messieurs	**Freddy DUMORTIER**	*Rapporteur*
	Jaume LLIBRE	*Rapporteur*
	Javier CHAVARRIGA	
	Bernard DERRIDA	
	Miguel SANJUÁN	
	Laurent VÉRON	
	Hector GIACOMINI	*Directeur de thèse*

"Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé seraient présents à ses yeux."

– Pierre-Simon de Laplace – Essai philosophique sur les probabilités –

"Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient alors impossible."

– Jules-Henri Poincaré – Sciences et Méthodes –

Remerciements

Je voudrais remercier tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. C'est eux qui m'ont donné le goût du travail et l'envie de découvrir.

Il y a trois ans, Hector Giacomini a fait le pari de m'accepter en tant qu'étudiant de thèse. J'espère qu'il considère son pari comme réussi. En tout cas, travailler avec lui est un réel plaisir et je souhaite que notre collaboration de s'arrête pas là.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de mathématiques et physique théorique de l'université de Tours qui m'a soutenu financièrement pendant ces trois années. Je remercie ses différents directeurs, Claude Barrabès, Laurent Véron et Peter Forgács, de m'y avoir accueilli.

Freddy Dumortier et Jaume Llibre ont accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse. Javier Chavarriga, Bernard Derrida et Miguel Sanjuán ont eu la gentillesse de faire partie du jury bien que cela implique pour eux un long déplacement.

Amaury Mouchet, par sa disponibilité, m'a rendu bien des services, Mireille Viano m'a apporté son aide logistique pour la préparation du jour J et enfin Guillaume Devanz et Yann Le Du ont lu, relu et corrigé le texte ainsi que les idées.

Table des matières

Introduction générale

Quand Henri Poincaré commença de s'intéresser aux fonctions définies par les équations différentielles, la tendance dans l'étude de ces fonctions était de construire un développement en série autour des points singuliers de ces équations différentielles.

Ce thème avait été introduit par Cauchy qui le premier avait établi deux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions et dont le but était donc de développer les solutions en série autour des points singuliers. Cauchy utilisait en fait l'analyse de la variable complexe. Il pensait les solutions des équations différentielles comme des fonctions définies *implicitement* par ces équations. L'étude des équations différentielles était donc simplement pour lui (comme pour ceux qui l'ont suivit) une branche de la théorie des fonctions.

Briot et Bouquet emboîtèrent le pas à Cauchy, corrigeant son travail, étendant les hypothèses de son théorème d'existence. Eux aussi se concentrèrent sur l'étude *locale* autour des points singuliers.

Plus tard, lorsque Poincaré développait déjà son étude qualitative, Weierstrass énonça un autre théorème d'existence des solutions des équations différentielles. Toujours dans le cadre des fonctions analytiques de la variable complexe, il émit l'idée d'établir des développements différents autour de chaque point singulier du système pour ensuite définir la solution globale (c'est à dire valable sur tout le plan) par prolongement analytique : la solution serait définie par des développements différents suivant que l'on se trouve à proximité de tel ou tel point singulier. On peut noter dans ce travail une première volonté de globaliser l'étude des fonctions solutions des équations différentielles.

Même Jordan, dans son cours de l'école Polytechnique du début du siècle, utilise les fonctions de la variable complexe et le développement en série pour la démonstration d'existence des solutions des équations différentielles. Nulle part n'apparaît la théorie géométrique et qualitative de Poincaré (POINCARÉ, 1880) pourtant établie alors depuis presque vingt ans.

En fait l'analyse du dix-neuvième siècle a été dominée par l'étude des fonctions de la variable complexe. Celles-ci ont même fait de l'ombre aux équations différentielles notera Emile Picard après avoir découvert le travail de Poincaré.

Poincaré lui même, quand il commence à s'intéresser aux équations différentielles, a pour but d'améliorer le travail de ses prédécesseurs Briot et Bouquet sur le développement en série des solutions. Puis, changeant de direction, il introduit trois changements majeurs dans la façon d'étudier les équations différentielles :

- Il décide d'étudier la solution de manière *globale*, c'est à dire sur l'espace des phases dans son ensemble.
- Il abandonne la variable complexe et étudie dès lors des fonctions réelles à variable réelle.
- Il géométrise le problème.

Poincaré comprit le caractère utopique de vouloir calculer une approximation du comportement asymptotique de la solution et décida d'étudier en premier lieu le comportement qualitatif des solutions avant de les calculer de manière numérique. Il justifia même cette orientation en arguant que parfois l'étude qualitative seule suffirait pour comprendre certains problèmes. Le qualitatif lui fit prendre une orientation géométrique et il se mit à étudier les courbes définies par les solutions des équations différentielles plutôt que les fonctions solutions elles mêmes.

Poincaré n'est pas, comme on le croit souvent, le premier à avoir compris l'importance parfois primordiale du qualitatif : STURM (1833) écrivit dans l'introduction de son mémoire : "On ne sait intégrer les équations différentielles linéaires du second ordre que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs maxima ou minima. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquelles se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme ou les sinusoïtés de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration".

L'apport de Poincaré dans l'étude des équations différentielles et le contraste de son travail avec le développement de l'analyse au dix-neuvième siècle sont étudiés dans GILLAIN (1977).

Parmi les objets géométriques que Poincaré introduit dans son étude se trouvent les *arcs ou cycles sans contact*. Ce sont des courbes (fermées) ou des portions de courbes[a] qui ne sont tangentes en aucun point à une trajectoire. C'est a dire que si $F = 0$ est un arc sans contact et si on calcule $\dot{F}$, et bien jamais sur tout $F = 0$, $\dot{F}$ ne sera nul. Autrement dit, $\dot{F}$ reste de signe constant sur toute la courbe $F = 0$. Ces courbes sont en fait des sections transverses (que l'on nommera parfois courbes ou surfaces *semi-perméables*). Poincaré ira même jusqu'à utiliser des familles de cycles sans contact pour montrer que dans la région où existe cette famille, il ne peut y avoir de trajectoire périodique !

Poincaré introduit un système topographique de courbes. Parmi celles-ci sont certaines courbes invariantes de l'espace des phases : les trajectoires de type centre, les cycles limites, les variétés stables et instables des points fixes. Ces courbes particulières divisent l'espace des phases en morceaux juxtaposés, se sont les séparatrices des régions de l'espace des phases. Le portrait de phase à l'intérieur de chacun de ces morceaux est alors équivalent à un portrait de phases simple. Mais la détermintation de toutes les séparatrices d'un système n'est pas chose aisée. Bien que Poincaré ait senti l'importance de telles courbes, c'est bien plus tard qu'une définition rigoureuse des séparatrices ainsi que les conditions exactes pour qu'un portrait de phases soit complètement déterminé furent établis (MARKUS, 1954; NEUMAN, 1975). Ainsi il n'est plus nécessaire d'étudier les solutions asymptotiques qu'à l'intérieur de chacune de ces régions circonscrites par les séparatrices.

Arrivant sur la scène des équations différentielles après Poincaré, Paul Painlevé pris le contre pied de celui-ci. Painlevé voulait tenter une étude globale (comme Poincaré) mais analytique (variable complexe) des équations différentielles. Il rêvait d'une *intégration parfaite* des équations différentielles

---

[a] Attention, ce ne sont pas des solutions des équations !

avec une intégrale uniforme qui permettrait de donner un représentation globale sur $\mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$. Ses idées sont toujours utilisées pour trouver des intégrales du mouvement aux systèmes (Tabor, 1989).

Liapunov (1907) fut le premier mathématicien russe à suivre les traces de Poincaré. Il étudia la stabilité du mouvement. En utilisant une *fonction de force* qu'il note $V(x, y)$, il établi une technique pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre. Grâce à cette technique, on peut tester la stabilité d'une solution asymptotique sans connaître l'expression analytique des solutions. La fonction qu'il a introduite est maintenant appelée *fonction de Liapunov.*

Au vingtième siècle, le mathématicien américain Georges D. Birkhoff repris le flambeau de Poincaré. Il fut le professeur de Edward Lorenz au M.I.T.. Lorenz re-découvrit la sensibilité aux conditions initiales déjà mentionnée par Poincaré (voir citation plus haut). Il simulait, grâce à un ordinateur, un modèle atmosphérique terrestre. Une minute de calcul était nécessaire pour simuler un jour dans le modèle. Au bout de 30 minutes, la machine imprimait les résultats. Lorenz changeait les paramètres de son modèle et relançait le calcul plusieurs fois par jour. Un jour, il arrêta la machine au bout de 15 minutes et imprima les résultats, puis alla prendre un café. De retour, il décida de repartir des résultats imprimés et de faire calculer la machine 15 minutes de plus. Il compara alors les résultats de ce calcul en deux parties avec le résultat du calcul précédent qui avait été exécuté en une seule fois. Les résultats finals étaient complètement différents. Il traça sur papier l'évolution d'une variable en fonction du temps en suivant les données de chacun des deux calculs et s'aperçu que peu de temps après la coupure (à t=15 min), les courbes d'évolution se séparaient et évoluaient de manière indépendante. Il comprit alors que, lors du deuxième calcul (celui en deux parties), quand il avait entré les résultats obtenus au bout de 15 minutes, il n'avait saisi que quelques chiffres après la virgule, pensant que cette petite différence engendrerait une petite différence sur les résultats en fin de calcul. C'était faux : comme l'avait déjà compris Poincaré, une petite erreur sur les conditions initiales peut engendrer dans certains systèmes une différence importante dans les résultats.

La notion de système dynamique sensible aux conditions initiales avait été pressentie dès le dix-neuvième siècle par Saint-Venant et son élève Joseph Boussinesq dans leur étude des solutions d'équations au voisinage de points singuliers. Cette notion de sensibilité aux conditions initiales fut reprise plus tard par Maxwell qui avait été vivement influencé par les écrits de Saint-Venant (Hacking, 1983).

Lorenz (1963) exposa ses découvertes dans un papier maintenant célèbre mais qui au départ passa inaperçu. Presque dix ans plus tard, en 1972, un hydrodynamicien qui avait trouvé par hasard l'article de Lorenz, en donna une copie à James Yorke. Celui-ci compris tout de suite la porté de la découverte de Lorenz et en fit parvenir une copie à Steve Smale. Ce dernier fut stupéfait qu'un tel comportement dans un système dynamique puisse exister. Quelques jours plus tard toute l'université de Berkeley (où travaillait Smale) fut au courant. Depuis le système de Lorenz a été intensément étudié. On a découvert que plusieurs autres systèmes (mécanique, magnétique ...) obéissaient aux mêmes équations de Lorenz. Mais aussi qu'un grand nombre de systèmes dynamiques pouvaient exhiber un comportement chaotique.

La transition vers le chaos dans un système reçoit toujours une attention précise. De quelle façon un système, qui au départ n'a qu'un point d'équilibre asymptotiquement stable, peut exhiber un comportement si compliqué? Pour le système de Lorenz, la *route vers le chaos* est marquée par différentes bifurcations. Certaines sont *locales* et peuvent être étudiées de manière exacte. D'autres, comme la bifurcation homocline, sont *globales* et ne peuvent pour l'instant n'être étudiées que de manière approchée grâce à l'intégration numérique. Il semble que cette bifurcation homocline donne naissance à la complexité dans le système : si par exemple on essaye de suivre les déformations des variétés stable et instable de l'origine, on voit que celles-ci, au départ de forme simple, se rejoignent lors de la bifurcation homocline et que leur forme devient ensuite très compliquée. L'étude de ce qui s'appelle maintenant les explosions homoclines est une part importante de l'étude de la transition vers le chaos (Sparrow, 1982).

Ne pouvant rien dire d'exact sur l'attracteur chaotique du système, les chercheurs ont essayés de trouver des conditions sur les paramètres du système pour lesquelles les trajectoires de l'espace des phases ne pourraient avoir de comportement chaotique. Ils se sont penchés sur l'existence ou non d'intégrales du mouvement. L'existence d'une intégrale du mouvement (pour des valeurs bien précises des paramètres) oblige les trajectoires du système - évoluant normalement dans un espace à 3 dimensions - à évoluer sur une variété de codimension 1, c'est à dire de dimension 2. Le théorème de Bendixson-Poincaré peut alors s'appliquer et montrer ainsi qu'il ne peut pas y avoir de comportement asymptotique autre que l'attraction vers un point d'équilibre, vers un cycle limite ou vers un cycle de séparatrices. Pour les valeurs des paramètres pour lesquelles une intégrale du mouvement existe, il n'y a alors pas de chaos.

Il y a aujourd'hui 6 intégrales du mouvement connues, qui existent évidemment pour des valeurs différentes des 3 paramètres (r, σ et b). De plus ces intégrales n'existent que lorsque des relations précises entre les paramètres sont vérifiées (par exemple $b = 2\sigma$). Si l'on considère donc l'espace des trois paramètres r, σ et b, l'ensemble des points où une intégrale du mouvement existe est de volume nul (en fait une ligne ou une surface ou un point dans cet espace).

Le travail présenté au chapitre I permet d'étendre ces zones de l'espace des paramètres dans lesquelles il n'y a pas de comportement chaotique possible. La méthode utilise la notion géométrique de sections transversales[b] appelées parfois surfaces ou courbes *semi-perméables*. L'existence de certaines familles de telles surfaces empêche l'existence de la trajectoire homocline mentionnée plus haut. On verra au chapitre I que sans trajectoire homocline, il n'y a pas de bifurcation du même nom et sans explosion homocline, il n'y a pas de chaos. Le grand intérêt des sections transversales est qu'elles existent non plus pour des valeurs bien définies des paramètres du système mais pour des *plages* de valeurs (par exemple $b > 2\sigma$).

Un autre résultat intéressant fourni par les sections transversales est que dans certaines conditions, l'existence d'une famille de telles surfaces peut diviser l'espace des phases en plusieurs sous-espaces disjoints, chacun des sous-espaces contenant un point d'équilibre. Il est alors simple de montrer que chaque sous-espace est une partie du bassin d'attraction du point d'équilibre qu'il contient.

Un autre centre d'intérêt dans le système de Lorenz est de connaître une approximation de la dimension fractale de l'attracteur (Doering & Gibbon, 1995*a*). Pour des valeurs des paramètres qui donnent lieu à un attracteur chaotique, il existe plusieurs familles différentes de sections transversales qui entourent cet attracteur et ainsi nous donnent accès au volume maximal que l'attracteur peut occuper. Le calcul des exposants de Liapunov et par là de la dimension de Liapunov de l'attracteur s'en trouve facilité. Car lors de l'intégration numérique nécessaire au calcul des exposants de Liapunov, il n'est besoin de prendre des conditions initiales que à l'intérieur du volume défini plus haut. Mieux encore, en utilisant la définition des exposants de Liapunov et le fait que l'attracteur est enfermé dans un volume dont on connaît exactement les frontières, on peut trouver une majoration de la somme des deux exposants de Liapunov positifs du système et donc de la dimension de Liapunov de l'attracteur (Doering & Gibbon, 1995*b*).

---

[b] Surfaces ou courbes qui ne sont traversées pas le flot que dans une seule direction.

Revenons au titre de la thèse, qu'entend-on par *système dynamique dissipatif* ?

En général par système dynamique, on entend tout système qui évolue au cours du temps. Cette évolution est décrite par des équations différentielles ou des applications. L'étude des systèmes dynamiques traite donc de l'évolution temporelle des systèmes physiques, économiques, chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous jacente qui détermine leurs équations d'évolution. On peut donc étudier, une fois les équations différentielles posées, un système macro-économique, sans pour autant connaître la théorie des marchés efficients de Markowiz.

Par dissipatif, on entend un système mécanique qui subit des frottements. Un tel système voit son énergie mécanique décroître au cours du temps. Ce système se stabilise sur son point d'équilibre stable, toute oscillation décelable cesse au bout d'un certain temps. Mais il est d'autres systèmes dynamiques dissipatifs qui exhibent des oscillations dans leur comportement asymptotique. Pour observer un tel comportement dans un système, il faut compenser le frottement mécanique qui le freine et introduit une perte d'énergie pour les grandes amplitudes en lui insufflant de l'énergie pour les petites amplitudes. Ainsi, si au départ freiné par le frottement classique, le système voit l'amplitude de ses oscillations diminuer, quand celles-ci deviennent faibles, le mécanisme d'apport d'énergie joue et les amplitudes augmentent de nouveau. Il est naturel de penser que le système va se stabiliser dans un mouvement oscillatoire à mi-chemin entre les grandes et les petites amplitudes. Le long de ce mouvement, le système perd autant d'énergie par frottement qu'il n'en gagne par apport externe. Ce mouvement oscillatoire peut être périodique (cycle limite) ou non (attracteur étrange).

Les deux systèmes étudiés dans cette thèse sont des systèmes dissipatifs :

- les cellules de Rayleigh-Bénard (de l'étude desquelles dérivent les équations de Lorenz) ont le comportement type décrit plus haut. Le fluide est visqueux, c'est à dire qu'il perd de l'énergie cinétique par frottement. Ainsi tout mouvement du fluide est amorti et tend à disparaître. Mais dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, le système bénéficie d'un apport d'énergie dû au flux de chaleur que lui transmet la plaque chaude inférieure. Ce flux de chaleur apporte de l'énergie au système, mais aussitôt il dissipe celle-ci en frottements visqueux. Le bilan d'énergie peut donc s'équilibrer et le système se stabiliser dans un mouvement oscillatoire d'amplitude finie. Ce qui est inhabituel est que l'oscillation n'est pas périodique ni même quasi-périodique.

- le système de Liénard et plus particulièrement la triode de van der Pol présentent les mêmes caractéristiques de bilan d'énergie. Le circuit électrique de van der Pol comporte une résistance qui tend à amortir les oscillations du courant électrique. Mais par ailleurs, l'intensité du courant électrique dans la triode peut croître et van der Pol modélisa ceci en permettant, dans son modèle, à la résistance de devenir négative. Ainsi, si le courant est important, la résistance est positive et l'intensité du courant décroît mais si l'intensité du courant devient trop faible la résistance devient négative et le courant re-augmente. Le système se stabilise donc ici aussi dans une oscillation où l'intensité moyenne du courant prendra des valeurs intermédiaires.

Ces deux systèmes sont non-linéaires. En fait, un système qui exhibe une oscillation périodique isolée (cycle limite) quelques soient les conditions initiales ne peut être linéaire. Car si il était linéaire, toute solution $x(t)$ induirait par principe de superposition que la fonction $\alpha\, x(t) (\alpha \in \mathbb{R})$ soit aussi solution. Ainsi il y aurait une bande continue de trajectoires périodiques dans l'espace des phases. Pour avoir des trajectoires périodiques isolées dans l'espace des phases, il faut donc que le système soit non linéaire.

Avec l'avènement de l'ordinateur, on peut s'attaquer à la deuxième partie du plan de Poincaré quant à la résolution des équations différentielles : le calcul numérique. Mais il faut faire attention aux limitations du calcul numérique à l'ordinateur. Si on examine bien le plan de Poincaré, le calcul numérique vient après l'étude qualitative des solutions. Car la précision de l'ordinateur étant limitée et les algorithmes utilisés ne fournissant que des approximations aux solutions sur un certain intervalle de temps borné, l'utilisation de l'ordinateur seul peut induire en erreur : par exemple, l'algorithme d'Euler appliqué à la résolution numérique du système linéaire simple :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

fournit des approximations des trajectoires du type foyer instable alors que les trajectoires réelles du système sont des orbites périodiques non-isolées (centre).

Si par contre dans ce dernier exemple on sait que les trajectoires sont de type centre, l'ordinateur peut nous fournir une approximation assez bonne d'une de ces trajectoires.

Il est d'autres cas ou l'insuffisance de l'étude qualitative ne peut en aucun cas être comblée par le calcul numérique. Dans le cas d'un attracteur présumé chaotique (non périodique), la résolution numérique ne peut affirmer ni infirmer l'hypothèse que la trajectoire de l'attracteur est un cycle limite de période très grande.

L'étude qualitative, surtout dans les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète des fonctions définies implicitement par les équations différentielles. L'étude numérique à l'ordinateur permet en fait d'affiner les résultats qualitatifs. De plus, dans des systèmes sensibles aux conditions initiales la puissance de calcul requise augmente exponentiellement avec la longueur de l'intervalle de temps sur lequel on veut des résultats précis. Le numérique n'apparaît donc que comme solution d'appoint à l'étude qualitative.

Le mathématicien David Hilbert présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques (été 1900), 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le problème numéro 16 est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites qu'un système polynomial plan de degré n puisse avoir. On note H_n ce nombre maximal. DULAC (1923) proposa une démonstration assurant que H_n est fini pour tout n. Dulac avait correctement démontré la finitude du nombre de cycle limite dans tous les cas sauf dans le cas d'une possible accumalation d'une infinité de cycles limites au voisinnage d'un cycle de séparatrices. Une accumulation est-elle possible ? Dulac cru démontrer que non mais son travail comportait une erreur qui fut décelée par ILYASHENKO (1985). La résolution de ce *problème de Dulac* ne vint que quelques années plus tard lorsque ILYASHENKO (1991) et ÉCALLE, MARTINET & MOUSSU (1987) puis ÉCALLE (1992) donnèrent (de façon indépendante) des preuves au théorème de Dulac.

Revenons au problème de Hilbert : la résolution du problème de Dulac permet de montrer que $H_n < \infty$. PETROVSKII & LANDIS (1957) crurent trouver la valeur de H_2 mais ils s'apercurent d'une erreur dans leur propre démonstration (LANDIS & PETROVSKI, 1967) avant que celui-ci ne soit infirmée par un contre-exemple de SHI (1982) dans lequel un système quadratique a 4 cycles limites. Ainsi, si H_n est un nombre fini pour tout n, la seule chose que l'on sache est que $H_2 \geq 4$ et $H_3 \geq 11$ (JIBIN & CHUNFU, 1985; ZOLADEK, 1995). CHRISTOPHER & LLOYD (1995) ont donné une borne inférieure au nombre H_n : $H_n \geq n^2\, Log(n)$.

Le prochain centenaire arrivant, V. I. Arnold a proposé de réitérer l'expérience de Hilbert et a invité plusieurs mathématiciens à dresser une liste de problèmes importants pour le prochain siècle. Steve Smale, à l'occasion du soixantième anniversaire d'Arnold, a exposé 18 problèmes. Son problème numéro

13 est justement le seizième problème de Hilbert. Ici l'accent est mis sur une classe particulière des systèmes plans : le système de Liénard. Car devant la difficulté du problème général, les mathématiciens s'orientent dans deux directions différentes :

- Etudier les systèmes quadratiques et démontrer que $H_2 = 4$.
- Etudier une sous-classe des systèmes plans, par exemple le système de Liénard

De nombreux livres sont consacrés à l'étude des cycles limites. Parmi eux, celui de Yanqian (1986) est un classique. Le système de Liénard

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -G(x) \end{aligned} \tag{1}$$

(où $F(x)$ et $G(x)$ sont des polynômes) s'est révélé être un biais très intéressant pour étudier les cycles limites des systèmes plans, notamment pour montrer l'existence, l'unicité et l'hyperbolicité des dits cycles limites. On note m le degré de $F(x)$, n celui de $G(x)$ et $H(m,n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour le système (1). L'histoire commence avec Liénard (1928), un ingénieur français qui établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour le système portant son nom (pour une revue complète des résultats antérieurs aux années soixante-dix, voir le livre de Sansone & Conti (1964)).

- Le théorème de Liénard établi que si $G(x) = x$ et si $F(x)$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (1) possède un unique cycle limite.
- Rychkov (1975) a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $G(x) = x$ alors (1) n'a au plus que 2 cycles limites.
- Lins, de Melo & Pugh (1977) ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$ alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $E\left(\frac{m-1}{2}\right)$ cycles limites[c].
- Xianwu (1983) a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$
- Coppel (1988) a prouvé que $H(2,2) = 1$
- Dumortier & Li (1996) ont prouvé que $H(2,3) = 1$
- Dumortier & Li (1997) ont prouvé que $H(3,2) = 1$

Zhang (1981) a étendu le résultat de Rychkov (1975) à des fonctions non polynomiales :
Si $G(x) = x$; si $F(x)$ et sa dérivée $f(x)$ sont continues ; si $f(x)$ est paire et a 2 racines positives $a_1 < a_2$ telles que $F(a_1) > 0$ et $F(a_2) < 0$ et si $f(x)$ est strictement croissante pour $x > a_2$, alors le système (1) a au plus 2 cycles limites.

Aujourd'hui, certains chercheurs établissent l'unicité d'un cycle limite dans des classes de systèmes les plus larges possible (Coll, Gasull & Llibre, 1989), d'autres chercheurs essayent de trouver des valeurs minimales à $H(m,n)$ en ne considérant que des cycles limites de petite amplitude qui seraient

---

[c] E(x) est la partie entière du réel x.

crées par bifurcation de Hopf autour d'un point d'équilibre. Ils trouvent ainsi un nombre maximum $\hat{H}(m,n)$ de cycles limites locaux.

Zuppa (1981) puis Blows & Lloyd (1984) ont prouvé que si $G(x) = x$ et si $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}$ alors le système (1) a au plus k cycles limites locaux. Si de plus on choisit les coefficients a_i tels que :

$$\|a_1\| \ll \|a_2\| \ll \ldots \ll \|a_{2k+1}\| \tag{2}$$

$$a_i\, a_{i+1} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2k \tag{3}$$

alors il y a exactement k cycles limites locaux.

Les cycles limites locaux sont actuellement intensément étudiés par Lynch (1997) et Christopher & Lloyd (1998) (ces derniers ont démontré que $\hat{H}(n,m) = \hat{H}(m,n)$). Gasull & Torregrosa (1997) semblent avoir amélioré certains résultats.

Trouver la solution d'une équation différentielle est bien plus compliqué que résoudre le problème algébrique de trouver les racines d'un polynôme. Lorsque Cauchy commence de s'intéresser aux équations différentielles, il essaye d'utiliser l'analyse complexe pour trouver un développement de la solution au voisinage des points singuliers. Plus tard, Poincaré préfère utiliser la géométrie et fonde même la topologie qu'il nomme Analysis situs pour s'aider. Mais le vieux rêve de transformer le problème initial, qui est une équation différentielle, en un problème algébrique existe toujours.

Melnikov (1963) et avant lui Pontrjagin (1934) transforment le problème de savoir combien de cycles limites (ou plus généralement de trajectoires fermées) a un système d'équations différentielles en un problème algébrique qui est de savoir combien de racines strictement positives a une certaine fonction (calculée grâce au système d'équations différentielles). Le problème 'différentiel' est donc transformé en un problème de trouver les racines d'une fonction définie par une intégrale. Dans certains cas, lorsque le système non perturbé est assez simple, cette fonction sera un polynôme.

L'étude des foyers fins (*fine focus*) grâce à une fonction de Liapunov $V(x,y)$ dont la dérivée temporelle s'exprimerait en fonction de la distance au foyer ($\dot{V} = \eta_2\, r^2 + \eta_4\, r^4 + \ldots$) est aussi un essai pour transformer le problème initial en un problème algébrique (les coefficients η_{2p} sont des polynômes dépendants des paramètres du système d'équations différentielles).

Le principal point faible de chacune de ces deux méthodes est que se sont des méthodes perturbatives : la méthode de Melnikov n'est valable que si le système étudié est infiniment proche d'un système Hamiltonien (ou plus généralement d'un système qui a point d'équilibre de type centre) et la méthode des foyers fins ne donne d'information que sur l'existence de cycles limites de petite amplitude.

La méthode introduite au chapitre II est dans la lignée directe des deux méthodes présentée cidessus. Le but de celle-ci est de construire, pour un système de Liénard, un polynôme (à une variable) dont les racines sont directement liées aux cycles limites du système. Mieux encore, la construction du polynôme en question induit un deuxième polynôme à deux variables dont certaines courbes de niveau sont liées aux équations des cycles limites du système. Ainsi le problème de départ : chercher le nombre et la position des trajectoires fermées d'un système d'équations différentielles est remplacé par le problème algébrique suivant : trouver le nombre des racines strictement positives d'un polynôme et les courbes de niveau d'un second. Apparemment cette nouvelle méthode permet ainsi de détecter le moment où deux cycles limites se rejoignent pour disparaître (bifurcation saddle-node), le moment où un cycle limite naît d'un point d'équilibre (bifurcation de Hopf) et aussi le moment où un cycle limite se transforme en un cycle de séparatrices (bifurcations homocline ou hétérocline).

L'intérêt de cette nouvelle méthode par rapport à la méthode de Melnikov est que celle-ci est valable même si le système étudié n'est pas infiniment proche d'un système Hamiltonien. En d'autres termes, la méthode introduite n'est pas perturbative. En revanche elle ne s'applique qu'aux systèmes de Liénard ayant une symétrie centrale.

Cette thèse s'oriente autour de 4 chapitres qui présentent des travaux publiés dans 4 articles :

- L'étude de la localisation et de la forme de l'attracteur de Lorenz. Mais aussi la recherche de valeurs des paramètres pour lesquelles il n'y a pas de chaos. Enfin la détection d'une partie du bassin d'attraction de chacun des deux points d'équilibre C^+ et C^- (Giacomini & Neukirch, 1997*a*).
- La construction d'un algorithme permettant d'avoir accès au nombre des cycles limites du système de Liénard. Mais aussi la détermination d'approximations successives de l'équation de chacun de ces cycles limites (Giacomini & Neukirch, 1997*b*).
- Le raffinement de l'algorithme présenté plus haut en un nouvel algorithme plus puissant et le lien entre ce nouvel algorithme et la méthode de Melnikov (Giacomini & Neukirch, 1998*b*).
- L'utilisation de ces deux algorithmes pour l'étude des bifurcations (de Hopf, saddle-sode, hétérocline) survenant dans le système de Liénard (Giacomini & Neukirch, 1998*a*).

* * *

Chapitre I

Étendue et forme de l'attracteur de Lorenz

Plan du chapitre

– I.1 – Introduction

a) Les rouleaux de Bénard et l'instabilité convective de Rayleigh

Au tournant du siècle plusieurs expérimentateurs commencèrent à s'intéresser aux écoulements turbulents et aux instabilités hydrodynamiques. Parmi eux, un ingénieur français, Bénard, étudie en 1900 la conduction thermique à travers un fluide placé entre une plaque chaude et une plaque froide[1] et met en évidence expérimentalement des instabilités (turbulence) dans le mouvement de ce fluide quand la différence de température devient importante (figure I–2). Il distingue trois phases :

(1) Quand la différence de température est faible, le fluide ne bouge pas.

(2) A partir d'un certain seuil de température, le mouvement du fluide s'organise en cylindres d'axes parallèles aux deux plaques (figure I–1)

(3) Si la différence de température est trop importante, les rouleaux disparaissent et laissent place à un régime turbulent.

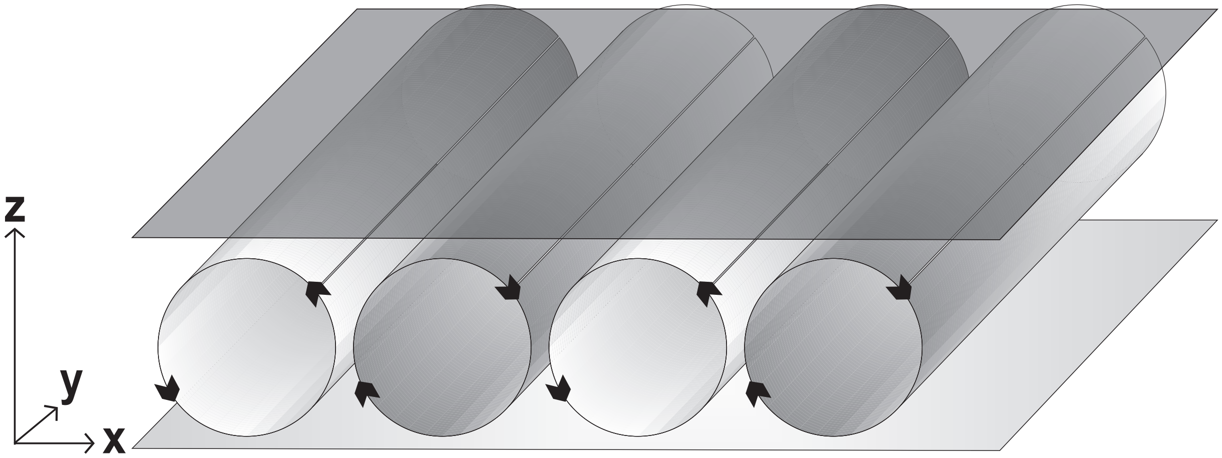

Fig. I–1 – *Organisation en rouleaux cylindriques d'axe de symétrie y*

En 1916, Lord Rayleigh explique les phénomènes mis en évidence par Bénard :
Imaginons un fluide dilatable (de masse volumique $\rho(T)$) soumis à un gradient de température entre sa face inférieure (chaude) et sa face supérieure (froide) (voir figure I–2). Un flux de chaleur traverse ce fluide (d'énergie spécifique $e(T)$ et de capacité spécifique $C(T) = \frac{de}{dT}$) de part en part : il y a conduction thermique à travers celui-ci. De plus, la partie basse du fluide tend à se dilater au contact de la paroi chaude alors que la partie haute du fluide tend à se contracter. La force d'Archimède voudrait alors que le fluide chaud monte et que le fluide froid descende. Mais (si le gradient de température reste faible) la conduction empêche cela : elle fait monter la chaleur avant que les deux parties du fluide (freinée par la viscosité) n'aient eu le temps d'échanger leurs positions respectives (voir (Bergé, Pomeau & Vidal, 1988)). Donc si ΔT est petit, la conduction seule suffit à transporter le flux de chaleur, le fluide reste immobile.

---

[1] Les expériences originelles de Bénard furent réalisées sur une mince couche d'huile de baleine !

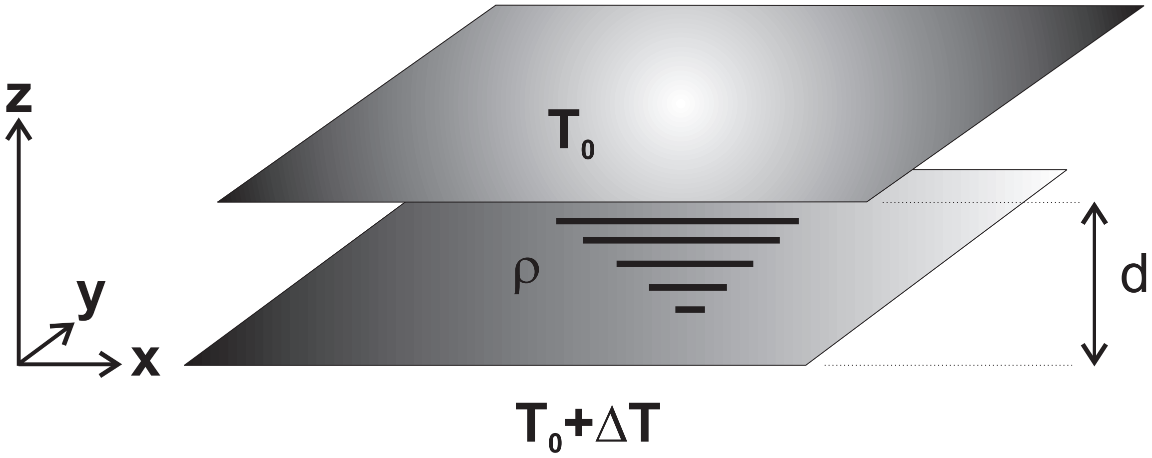

FIG. I–2 – *Un fluide entre deux plaques isothermes*

Si maintenant la différence de température augmente, le régime de conduction sature : la conduction seule ne suffit plus à transporter le flux de chaleur. Il faut un autre phénomène pour transporter cette chaleur excédentaire : la convection. La convection prend naissance quand les perturbations dans le fluide croissent au lieu de s'amortir; ceci correspond à un nombre de Rayleigh supérieur à une valeur critique[2] :

$$R_a = \frac{g\,\beta\,d^3}{\nu\,\kappa_0}\,\Delta T > R_{a_c} \tag{I.1-1}$$

où ν est la viscosité dynamique, β le coefficient de dilatation volumique du fluide, $\kappa_0 = \kappa(T = T_0)$ est relié au coefficient de conduction (k) de la manière suivante : $\kappa(T) = \frac{k(T)}{C(T)\,\rho(T)}$, d est la distance inter-plaques et g l'accélération de la pesanteur.

Le fluide se met en mouvement et transporte ainsi la chaleur : le mouvement peut s'organiser en tourbillons cylindriques ou hexagonaux. Chaque tourbillon transporte sa part de chaleur. Il n'y a pas d'échange de fluide entre les différentes cellules de la figure I–1.

b) Les équations de Boussinesq

Pour modéliser le mouvement du fluide et le transport du flux de chaleur entre les deux plaques horizontales[3] , il faut considérer l'équation de Navier-Stokes et l'équation de la chaleur. Si on fait l'hypothèse que :

$$\epsilon = \beta\,\Delta T \ll 1 \tag{I.1-2}$$

et que le nombre de Boussinesq :

$$B = \frac{g\,d}{C\,\Delta T} < 1 \tag{I.1-3}$$

---

[2] Ce nombre critique dépend de la géométrie du problème. Pour un espace compris entre deux plaques rigides horizontales isothermes, si la plaque inférieure est la plus chaude, ce nombre vaut 1708 (convection peu profonde). Si les deux parois sont libres, on trouve pour la valeur critique $\frac{27}{4}\,\pi^4$.

[3] Il ne peut y avoir de convection que verticalement entre deux plaques horizontales car la convection est basée sur la pesanteur.

alors ces équations prennent la forme des équations de Boussinesq sans profondeur :

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}+\boldsymbol{\nabla}p &= \sigma\,\Delta\boldsymbol{v}+\sigma\,\theta\,\boldsymbol{e_z}\\ \frac{D\theta}{Dt} &= \Delta\theta+R_a\,v_z \\ \boldsymbol{\nabla v} &= 0\end{aligned}\qquad\text{(I.1-4)}$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}+\nabla$ est la dérivée particulaire, $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ le vecteur vitesse et $\theta(x,y,z,t)$ la différence entre le champ de température complet (avec convection) et le champ de température linéaire (sans convection). $\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{\nu}{k}$ est le nombre de Prandtl.

La relation $\boldsymbol{\nabla v}=\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ est correcte bien que ρ dépende de T et donc que le long du déplacement d'une particule de fluide, T change avec t et donc ρ aussi. En fait, si la vitesse reste inférieure à la vitesse de propagation du son, on peut écrire : $\boldsymbol{\nabla v}=0$.

c) Développement en séries de Fourier

Etudions plus particulièrement le système quand il s'organise en rouleaux cylindriques équidistants les uns des autres (voir figure I–3).

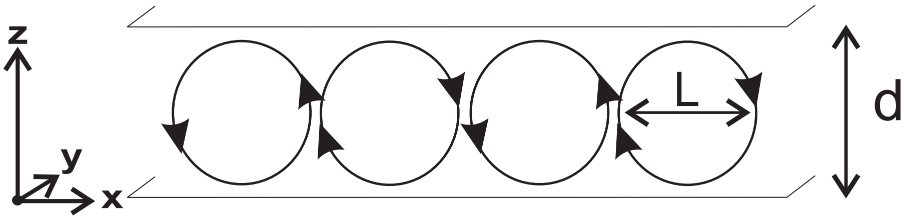

FIG. I–3 – *Organisation spatiale (périodique) du mouvement du fluide. Il n'y a pas de passage de fluide d'un cylindre à l'autre. Le fluide en bas, en contact avec le plan inférieur, s'échauffe, se dilate et devient plus léger que le liquide froid au-dessus de lui. Ce fluide chaud ne peut monter que si le fluide froid descend. Pour que ces deux mouvements puissent avoir lieu, le fluide s'organise spontanément en rouleaux cylindriques.*

Comme l'écoulement dans un rouleau est à symétrie axiale et que $\boldsymbol{\nabla v}=\boldsymbol{0}$, on peut introduire une fonction de courant $\Psi(x,z)$ telle que :

$$v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\qquad\text{(I.1-5)}$$

$$v_z = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\qquad\text{(I.1-6)}$$

On cherche une solution des équations (I.1-4). Pour satisfaire aux conditions aux limites sur les surfaces inférieures et supérieures du fluide et pour prendre en compte la périodicité en x, on développe Ψ et

θ ainsi[4] :

$$\begin{aligned}\Psi_F &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(t)\sin(nqx)\ \sin(m\pi z)\\ \theta_F &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}(t)\cos(nqx)\ \sin(m\pi z) \qquad \text{où } q=\frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned} \tag{I.1-7}$$

Ce développement en série de Fourier de la fonction de courant Ψ et de l'écart de température θ permet de transformer le problème initial d'équations aux dérivées partielles en un problème d'équations différentielles ordinaires : une fois l'ansatz (I.1-7) posé, on réinjecte Ψ_F et θ_F dans les équations (I.1-4) ce qui nous donne des équations différentielles ordinaires pour les modes $A_{nm}(t)$ et $B_{nm}(t)$.

d) Les sept modes de Saltzmann

Saltzman (1962) est convaincu que l'aspect dissipatif du système (le fluide entre les deux plaques) fait que l'on peut se contenter de n'étudier qu'un nombre restreint de modes. Il néglige donc les modes de haute fréquence et ne garde que sept modes dans le développement (I.1-7). Même ainsi, il remarque que parfois les solutions se stabilisent dans une configuration finale où seuls les quelques modes de plus basse fréquence continuent d'osciller, les autres ayant atteint des valeurs fixes.

e) Lorenz et la troncature de Galerkin

Lorenz (1963) se base sur le travail de Saltzmann et décide de garder le plus petit nombre de modes possible, sans toutefois dénaturer le problème. Il avait remarqué que dans certains cas, les solutions des équations de Barry Saltzmann avaient un comportement non périodique. Trois des modes oscillaient de manière *spéciale* alors que les quatre autres avaient atteint des valeurs proches de zéro. Il utilise donc la troncature de Galerkin (Zeytounian, 1991) en ne gardant que le premier mode de Ψ_F. Pour ce qui est de θ_F, il retient les deux premiers modes, ce qui est le minimum nécessaire pour conserver un jeu d'équations non-linéaires :

$$\Psi_F(x,z,t) = A_{11}(t)\sin(q\,x)\ \sin(\pi\,z) \tag{I.1-8}$$

$$\theta_F(x,z,t) = B_{11}(t)\cos(q\,x)\ \sin(\pi z) + B_{02}(t)\sin(2\pi\,z) \tag{I.1-9}$$

L'absence de terme en B_{01} est due aux conditions aux limites du problème.

Si l'on substitue (I.1-8) et (I.1-9) dans la première équation de (I.1-4), on obtient une première équation différentielle pour $A_{11}(t)$:

$$\sigma\dot{A}_{11} + \frac{q}{q^2+\pi^2}\,R_a\,B_{11} + \sigma(q^2+\pi^2)A_{11} = 0 \tag{I.1-10}$$

Si on réinjecte (I.1-8) et (I.1-9) dans la deuxième équation de (I.1-4), on obtient une relation qui contient encore des termes en $\cos(n\,q\,x)$ et $\sin(m\pi\,z)$. La méthode de Galerkin nous dit qu'il faut multiplier la relation obtenue par les termes oscillants des modes que l'on a conservés (à savoir ici par $\cos(q\,x)\,\sin(\pi\,z)$ puis par $\sin(2\pi\,z)$) puis intégrer sur x et sur z entre 0 et 1. Ces deux réductions nous

---

[4] après un changement d'échelle $z' = \frac{z}{d}$, $x' = \frac{x}{d}$, $\lambda = \frac{L}{d}$

fournissent deux autres équations différentielles pour B_{11} et B_{02} :

$$\begin{aligned} \sigma\dot{B}_{11} + \pi q\sigma A_{11}\, B_{02} + \sigma q A_{11} + (q^2+\pi^2)B_{11} &= 0 && \text{(I.1-11)} \\ \sigma\dot{B}_{02} - \frac{1}{2}\sigma\pi q A_{11}\, B_{11} + 4\pi^2 B_{02} &= 0 && \text{(I.1-12)} \end{aligned}$$

Après un changement d'échelle pour chacun des modes et l'introduction de nouveaux paramètres b et r, on obtient les équations de Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \sigma(B-A) \\ \dot{B} &= -A\,C + r\,A - B \\ \dot{C} &= A\,B - b\,C \end{aligned} \qquad \text{(I.1-13)}$$

où

$$r = R_a\,\frac{q^2}{(\pi^2+q^2)^3} = \frac{R_a}{R_{a_c}} \quad \text{et} \quad b = \frac{4\pi^2}{\pi^2+q^2} \qquad \text{(I.1-14)}$$

La variable A correspond au premier mode de circulation convective du fluide : son signe donne le sens de rotation. La variable B correspond au profil horizontal de température à l'intérieur d'une cellule. Enfin, la variable C correspond au profil vertical de température.

Une fois le modèle simplifié établi, il faut vérifier plusieurs points (voir (Bergé, Pomeau & Vidal, 1988)) :

- que la troncature n'a pas introduit de *catastrophes*, c'est à dire que les équations simplifiées n'ont pas de solutions divergentes qui n'existaient pas dans le modèle de départ.
- que le caractère dissipatif du système de départ est conservé dans le système simplifié.

Ces deux points sont étudiés dans la section I.3.b).

Après l'obtention de son modèle, Lorenz décide de l'étudier systématiquement à l'aide de son ordinateur[5]. Il a trois paramètres à sa disposition; il choisit de fixer les valeurs de $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Une telle valeur pour le nombre de Prandtl σ correspond à de l'eau froide comme fluide; la valeur du paramètre géométrique b a été choisie pour minimiser la valeur critique du nombre de Rayleigh R_{a_c}. Car Lorenz veut étudier les différents comportements du système (I.1-13) lorsqu'on augmente r, ce qui correspond à augmenter la différence de température dans l'expérience de Bénard. Il espère ainsi voir la frontière de l'instabilité convective puis la naissance de la turbulence dans le système relativement simple qu'il vient d'introduire. Mais, comme il le fait lui-même remarquer plus tard (Lorenz, 1979), si r est grand, les équations (I.1-13) ne sont plus un modèle réaliste des équations de Boussinesq. Il faut alors considérer les autres modes plus élevés.

Dans la suite du chapitre, on fera référence aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma &= 10 \\ b &= 8/3 \\ r &= 28 \end{aligned} \qquad \text{(I.1-15)}$$

comme les *valeurs canoniques des paramètres.*

---

[5] un Royal McBee, ordinateur à tubes, capable d'effectuer jusqu'à 60 multiplications par seconde !

f) Autres systèmes modélisés par les équations de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \qquad \text{(I.1-16)}$$

f.1) La roue à eau

Quand E. Lorenz décrivit à W. Malkus la dynamique du système qu'il venait de découvrir, ce dernier ne crut pas en sa complexité : la convection, selon lui, devait induire un mouvement plus simple. Quelques années après, ayant compris l'importance du problème, il construisit (en collaboration avec L. Howard) une roue à eau dont les équations du mouvement étaient précisement les équations de Lorenz. La version simple de cette roue à eau est un cerceau vertical qui porte une douzaine de gobelets en papier. Le cerceau peut tourner sur son axe (horizontal). Les gobelets sont troués au fond. On verse de l'eau depuis le sommet par un robinet à débit réglable (voir figure I–4).

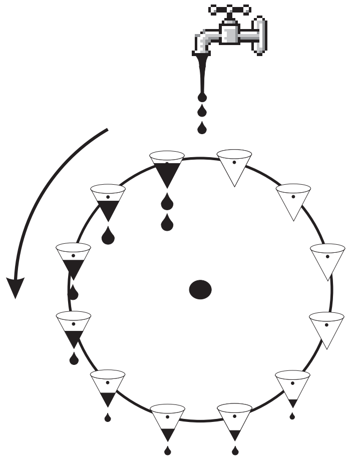

Fig. I–4 – *La roue à eau de W. Malkus. On verse de l'eau dans des gobelets troués par le fond. Le poids de l'eau dans les gobelets déséquilibre la roue et la fait tourner. Le type de mouvement dépend du débit de l'eau dans le robinet.*

Pour trouver les équations du mouvement de la roue, on fait un bilan des moments des forces qui agissent sur elle, en tenant compte des frottements sur l'axe horizontal. On trouve des équations équivalentes aux équations (I.1-16) avec les correspondances suivantes :

Lorenz	Roue à eau
σ	frottement de rotation
r	débit de l'écoulement
b	$= 1$
x	vitesse de rotation
y	répartition de la masse
z	d'eau dans les gobelets

(Voir Strogatz (1994) pour une version détaillée de l'établissement du modèle).

- **Comportement de la roue en fonction du débit :**

- Si le débit est faible, le gobelet du haut se vide plus vite qu'il ne se remplit et donc n'engendrera jamais un moment de force assez grand pour initier la rotation de la roue. Cela correspond au mode *conductivité seule* de l'expérience de Rayleigh-Bénard.

- Si le débit est plus fort, le gobelet du haut va déstabiliser la roue qui commence à tourner, les gobelets se remplissent lors du passage en haut, et se vident pendant le reste du tour. La roue s'installe dans un mouvement régulier, par exemple dans le sens trigonométrique. Cela correspond à la *phase convective* dans l'expérience de Rayleigh-Bénard, lorsque le mouvement du fluide est organisé en rouleaux.

- Si maintenant le débit est assez important pour que les gobelets n'aient pas le temps de se vider en un tour alors le sens de rotation peut s'inverser. Il se peut donc que la roue hésite un certain temps avant de choisir son sens final de rotation. Si le débit dépasse une certaine limite, la roue ne se stabilise jamais ni dans un sens ni dans l'autre : son mouvement est chaotique.

- Pour un débit très grand, la roue retrouve un mouvement périodique. On peut vérifier que pour de grandes valeurs de r, les solutions du système (I.1-16) décrivent un cycle limite (Sparrow, 1982). La roue se stabilise donc dans un mouvement de va-et-vient où elle tourne une fois à droite puis une fois à gauche, indéfiniment.

f.2) Le Laser

Les équations de Maxwell-Bloch pour le laser sont :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \kappa\,(P - E) \\ \dot{P} &= \gamma_1\,(E\,D - P) \\ \dot{D} &= \gamma_2\,(\lambda + 1 - D - \lambda\,E\,P) \end{aligned} \tag{I.1-17}$$

où E est le champ électrique dans la cavité, P la polarisation moyenne et D la population d'atomes excités. En temps normal κ (taux de décroissance du champ électrique) est très petit devant les taux de décroissance de la polarisation (γ_1) et de la population d'atomes excités (γ_2), ce qui fait que la polarisation et l'inversion de population tendent très rapidement vers leur états stables respectifs et que seul le champ E évolue. Le système fini par rejoindre un état stable.

Mais dans le cas général et lorsque le pompage (λ) dépasse une certaine valeur, le système peut devenir chaotique (Haken, 1983). En fait les équations (I.1-17) sont équivalentes aux équations (I.1-16) avec :

$$\begin{aligned} E &= \alpha\,x \\ P &= \alpha\,y \\ D &= r - z \\ \gamma_1 &= \frac{1}{\sigma}\,\kappa \quad , \quad \gamma_2 = \frac{b}{\sigma}\,\kappa \\ \lambda &= r - 1 \\ \alpha &= \sqrt{b\,(r-1)} \end{aligned}$$

On voit donc que le cas γ_1 , $\gamma_2 \gg \kappa$ correspond à σ petit et $b \gg \sigma$. On verra (section I.5) que dans ce cas le système ne peut pas devenir chaotique et qu'il se stabilise sur l'un ou l'autre de ses deux points d'équilibre (comme conjecturé plus haut).

f.3) Et bien d'autres encore

Il existe plusieurs autres systèmes qui sont gouvernés par des équations équivalentes aux équations (I.1-16). Il y a par exemple un modèle de dynamo magnétique proposé par RIKITAKE (1958) pour tenter d'expliquer les renversements erratiques du champ magnétique terrestre. Voir les livres de JACKSON (1992) et SPARROW (1982) page 4 pour une liste plus complète des modèles *Lorenz-like*).

– I.2 – Résumé de la route vers le chaos

Nous allons résumer les événements qui donnent naissance au chaos. Ce qui va suivre est emprunté des livres de STROGATZ (1994), THOMPSON & STEWART (1986) et de SPARROW (1982). L'étude se fait pour $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$. On fait varier r de 0 à $+\infty$.

a) Etude locale

Etudions pour commencer l'existence et la stabilité des points d'équilibre. Il y a 3 points d'équilibre :

(1) L'origine est un point d'équilibre pour toutes les valeurs des paramètres.

(2) Le point C^+ existe seulement si $r \geq 1$.

(3) Le point C^- est son jumeau symétrique ($x_{C^-} = -x_{C^+}$, $y_{C^-} = -y_{C^+}$, $z_{C^-} = z_{C^+}$).

En linéarisant autour de chacun de ces points, on trouve l'équation caractéristique pour les valeurs propres λ du point :

pour $O(0,0,0)$:

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0 \tag{I.2-1}$$

pour C^+ et C^- :

$$\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + b + 1) + \lambda b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0 \tag{I.2-2}$$

L'équation (I.2-1) nous montre que les valeurs propres de $O(0,0,0)$ sont toujours réelles. Plus important, deux des valeurs propres sont toujours négatives, la troisième change de signe en $r = 1$. L'origine est donc un nœud attracteur pour $r < 1$ et un point de type col (donc instable) pour $r > 1$ (pour $r = 1$, O(0,0,0) a une variété de type centre de dimension 2 (GUCKENHEIMER & HOLMES, 1983, page 128).

Les coordonnées des points C^+ et C^- sont :

$$C^+(+\sqrt{b(r-1)}, +\sqrt{b(r-1)}, r - 1) \tag{I.2-3}$$

$$C^-(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r - 1) \tag{I.2-4}$$

r 0	1	∞
λ_1	< 0	< 0
λ_2	< 0	< 0
λ_3	< 0	> 0
Nature	nœud	type col
Stabilité	asymp. stable	instable

TAB. I.1 – *Propriétés du point d'équilibre à l'origine en fonction de r.*

r 0	r_F	$r^\star$	r_H	∞
λ_1	-	< 0	$\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$	$\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$
λ_2	-	< 0	$\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$	$\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$
λ_3	-	< 0	< 0	< 0
Nature	-	nœud	foyer	type col
Stabilité	-	stable	stable	instable

TAB. I.2 – *Propriétés des points d'équilibre $C+$ et $C-$ en fonction de r.*

Ces points naissent lors d'une bifurcation fourche qui a lieu en $r = 1$. Les deux points se séparent de l'origine et lui prennent sa stabilité.

$$\begin{aligned} r_F &= 1 && \text{(I.2-5)} \\ r^\star &= 1,34... && \text{(I.2-6)} \\ r_H &= \sigma\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1} = \frac{470}{9} \simeq 24,74... && \text{(I.2-7)} \end{aligned}$$

$r^\star$ est la valeur de r pour laquelle deux des racines de (I.2-2) deviennent imaginaires. Ceci arrive quand le discriminant de (I.2-2) s'annule et devient positif. $r^\star$ est donc la racine positive ($r > 0$) de : $-221310 + 91470\,r + 54119\,r^2 + 96\,r^3 = 0$.

Les points C^+ et C^- perdent leur stabilité dans une bifurcation de type Hopf sous-critique qui survient en $r = r_H$. Pour $r > r_H$, tous les points d'équilibre sont donc instables. Le système (I.1-16) étant dissipatif, il faut qu'il y ait un autre attracteur dans l'espace des phases.

b) Etude globale

Pour $r < 1$, l'origine est le seul point d'équilibre. Ce point est asymptotiquement stable : toutes les trajectoires de l'espace des phases tendent vers lui. Ce fait est établi grâce à la fonction de Lyapounov :

$$V_L(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2 \tag{I.2-8}$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} V_L \geq 0 \\ \dot{V} < 0 \end{array}\right\} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

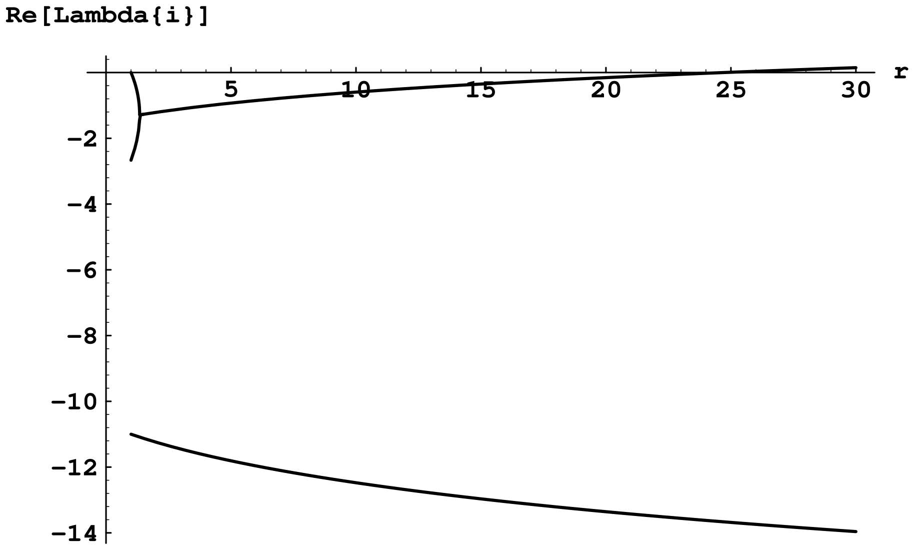

FIG. I–5 – *Parties réelles des trois racines de l'équation (I.2-2). Pour $r = r^\star \simeq 1.34\dots$, deux parties réelles se rejoignent car deux racines deviennent imaginaires conjuguées. Pour des r grands, il reste toujours une partie réelle négative.*

- Pour $r = 1$:

Il y a une variété de type centre que l'on peut calculer par exemple grâce à l'équation du groupe de renormalisation (GOLDENFELD, MARTIN & OONO, 1989; GOLDENFELD, MARTIN, OONO & LIU, 1990; KUNIHIRO, 1996). Les deux points C^+ et C^- naissent et se séparent de l'origine. Nous allons suivre les variétés stables et instables de chacun des 3 points d'équilibre. La variété stable de l'origine est une surface de dimension deux (c'est la continuation du plan défini par les deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres négatives).

- Pour $r > 1$:

Chacun des points C^+ et C^- a une variété stable de dimension 3. Toutes les trajectoires du système tendent vers l'un ou l'autre de ces deux points. Les bassins d'attraction des deux points sont séparés par la variété stable de l'origine. Lorsque r croît, cette surface subit des déformations dont il est difficile de suivre tous les détails (JACKSON, 1992); les bassins d'attraction se déforment de la même façon, et aucune information analytique n'est connue sur ces bassins d'attraction. Intéressons-nous maintenant à la variété instable de l'origine (de dimension 1). Si on choisit une condition initiale très proche de l'origine le long du vecteur propre associé à λ_3 (> 0) et que l'on intégre numériquement les équations (I.1-16), la trajectoire tend très rapidement vers un des deux points C^+ ou C^- : la partie droite de la variété instable de l'origine relie $O(0,0,0)$ au point C^+ (la partie gauche relie $O(0,0,0)$ au point C^-) voir figure I–6. Quand r augmente, la trajectoire sortante à droite de $O(0,0,0)$ fait quelques rotations autour de C^+ (qui est un foyer à partir de $r = r^\star$) avant de se stabiliser sur ce point. Les rayons de ces rotations deviennent de plus en plus grand au fur et à mesure que r croît.

- En $r = r_{ho}$:

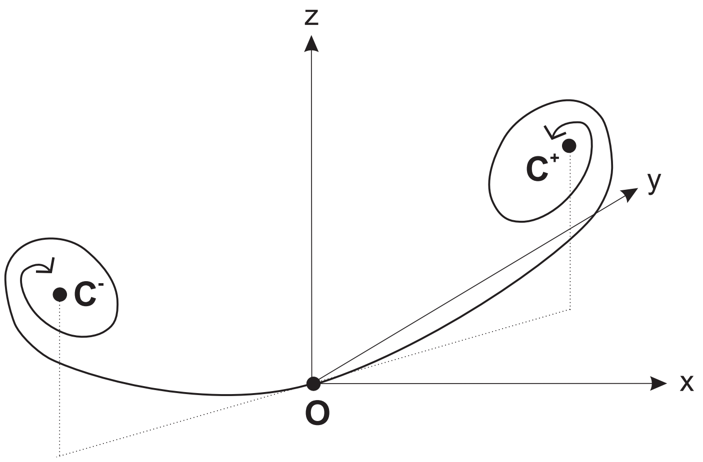

FIG. I–6 – *Variété instable de l'origine avant la bifurcation homoclinique* ($1 < r < r_{ho}$).

Le premier tour est tellement grand qu'il revient sur le point $O(0,0,0)$: c'est une courbe homoclinique (voir figure I–7). La bifurcation homoclinique survient. Les conséquences de cette bifurcation sont très importantes. Elle marque le premier pas vers le comportement chaotique du système.

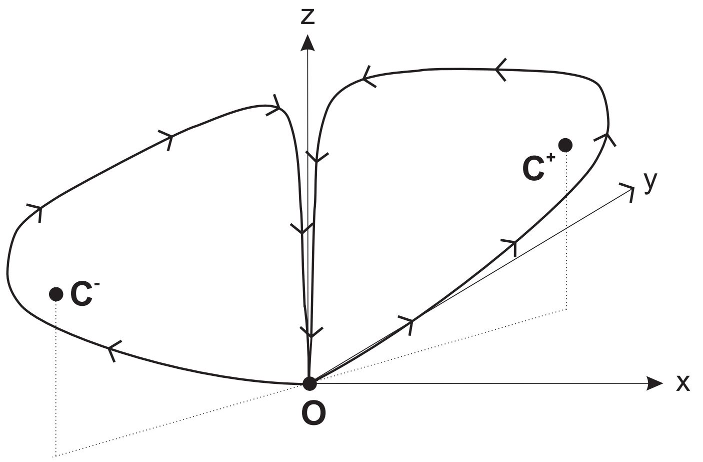

FIG. I–7 – *Trajectoire homoclinique double pour* $r = r_{ho}$. *Les variétés stable et instable de l'origine sont connectées.*

- Pour $r > r_{ho}$:

La trajectoire sortante droite se dirige maintenant de l'autre côté, vers C^-. La double trajectoire homoclinique qui existait pour $r = r_{ho}$ s'est tranformée en deux cycles limites instables, un autour de C^+ noté Γ^+ et l'autre autour de C^- noté Γ^-. Ce sont des cycles limites de type col : ils ont chacun une variété stable de dimension 2 et une variété instable de dimension 2 (voir figure I–8). La variété stable est localement comme un cyclindre : les trajectoires à l'intérieur du cylindre tendent vers le point d'équilibre, celles à l'extérieur s'éloignent du cycle limite et du point d'équilibre.

Revenons à la trajectoire sortante droite : elle se dirige d'abord vers C^+ puis vers C^-, passe à

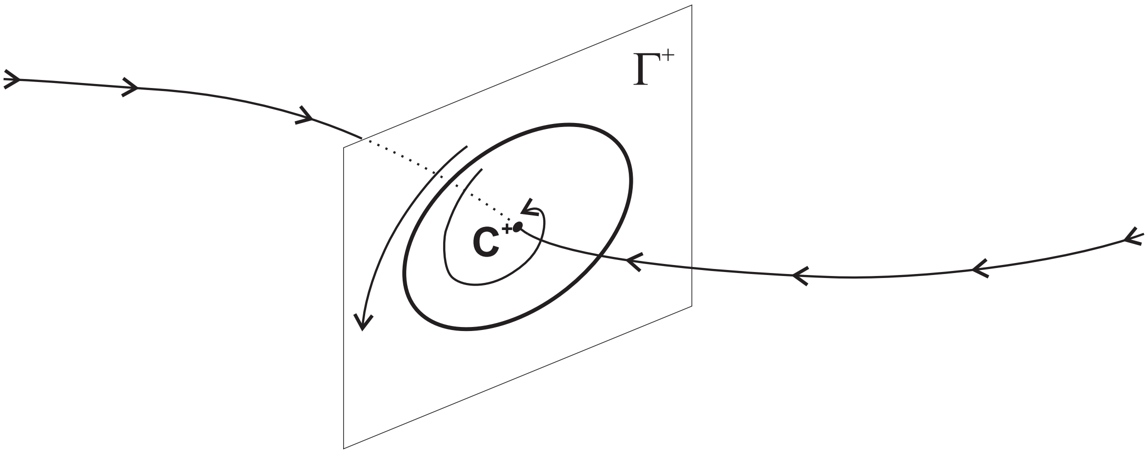

FIG. I–8 – *Cycle limite dans un espace des phases à 3 dimensions. Le cycle a une variété stable à deux dimensions (localement un cylindre) et une variété instable à deux dimensions (localement un plan)*

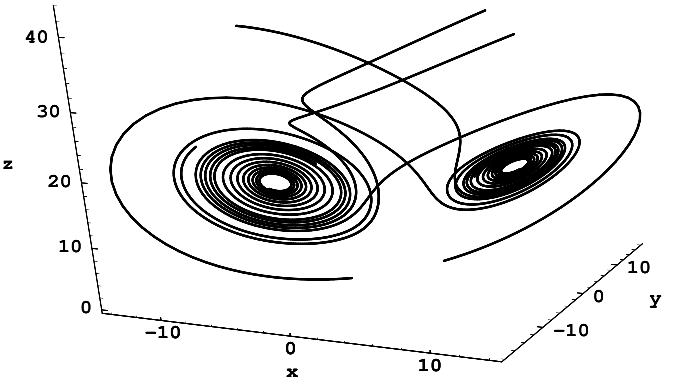

FIG. I–9 – *Portrait de phase après la bifurcation homoclinique. Les points C^+ et C^- sont asymptotiquement stables (5 trajectoires, correspondant à cinq conditions initiales différentes sont montrées).*

l'intérieur du cylindre et se stabilise sur le point. De même, certaines autres trajectoires tombent directement à l'intérieur du cylindre et se stabilisent sur C^- (voir figure I–9). Mais certaines autres trajectoires commencent à l'extérieur du cylindre et donc s'éloignent de Γ^- et de C^-. Elles vont réaliser quelques révolutions de l'autre côté (autour de C^+) puis reviennent autour de C^-, repartent, pour finir par entrer à l'intérieur d'un des deux cylindres et par se stabiliser sur le point d'équilibre qui y est contenu (voir figure I–10).

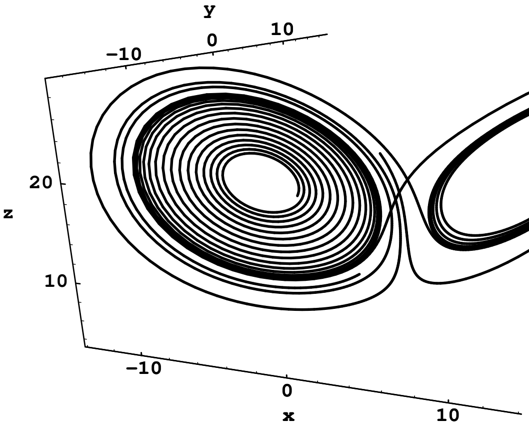

Fig. I–10 – $r = 19$. *La trajectoire erre autour de chacun des deux points d'équilibre avant de se stabiliser sur* C^-

Ce phénoméne d'hésitation avant stabilisation est appelé *chaos transitoire* : si on prend une condition initiale arbitraire, la trajectoire associée va errer un certain temps T_e autour des points C^+ et C^- avant d'en choisir un et de s'y stabiliser. Il est évidemment presque impossible de savoir a priori (c'est à dire étant donnée la condition initiale) sur quel point (C^+ ou C^-) la trajectoire va se stabiliser.

Les cycles se rapprochent des points d'équilibre au fur et à mesure que r augmente ce qui réduit le rayon des cylindres. Les trajectoires ont donc de moins en moins de place pour se stabiliser sur les points C^+ et C^-, elles doivent donc s'y reprendre de plus en plus de fois pour tomber à l'intérieur d'un des deux cylindres : ainsi T_e augmente avec r.

- En $r = r_{he}$:

La trajectoire sortante droite, au lieu de se stabiliser (après quelques circonvolutions) sur le point C^+, tend vers le cycle limite (instable) entourant ce point. C'est une trajectoire hétéroclinique (voir figure I–11). La bifurcation hétéroclinique survient : la variété instable de l'origine est connectée avec chacune des deux variétés stables des cycles limites entourant Γ^+ et Γ^-.

Les trajectoires qui étaient initialement hors des cylindres et se stabilisaient après un temps T_e sur l'un des deux points n'ont plus aucune chance de le faire car elles ne peuvent plus entrer dans les cylindres, ceux-ci étant *fermés* par la variété instable de l'origine. Le chaos n'est plus transitoire, T_e devient infini (Yorke & Yorke, 1979) et ces trajectoires se stabilisent sur un autre attracteur : l'attracteur chaotique. Seules les trajectoires initialement à l'intérieur d'un cylindre se stabilisent sur le point contenu dans celui-ci : C^+ et C^- sont toujours attracteurs. Le système possède donc trois attracteurs concurrents. Les cycles limites entourant les deux points C^+ et C^- rétrécissent et sont maintenant très proches de ces deux points.

- En $r = r_H$:

Chacun des 2 cycles se confond avec chacun des 2 points en lui communiquant son instabilité : c'est

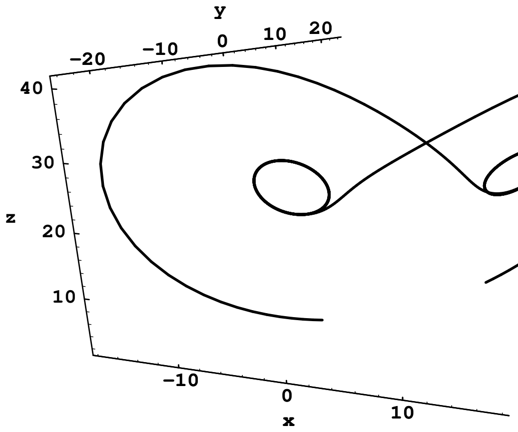

FIG. I–11 – *La variété instable de l'origine est incluse dans la variété stable de chacun des cycles limites de type col.*

la bifurcation sous-critique de Hopf (voir figure I–12).

- Pour $r > r_H$:

Tous les points d'équilibre du système sont instables. Et pourtant, le système étant dissipatif, les trajectoires doivent se contracter vers un attracteur. C'est l'attracteur chaotique. Il pourrait aussi exister simplement des cycles limites et c'est ce qu'il arrive pour des valeurs de r plus grandes (SPARROW, 1982). Il y a d'ailleurs alternance de comportements asymptotiques périodique et chaotique dès $r = 30.1$.

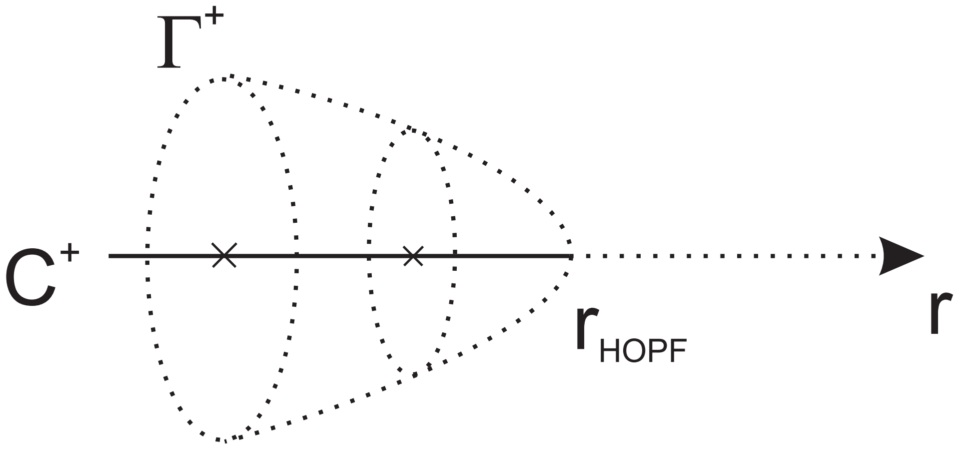

FIG. I–12 – *Bifurcation sous-critique de Hopf en $r = r_H$. Le cycle limite instable rétrécit jusqu'à rencontrer le point fixe auquel il communique son instabilité.*

– I.3 – Remarques

a) Motivation du travail

Les bifurcations : La motivation de J. D. Gibbon quant à l'étude de fonctions de Lyapunov pour le système de Lorenz était de

"*getting a grip on a lower bound on r (in terms of σ and b) for when the homoclinic explosion occurs.*"

En général, l'étude du système (I.1-16) se fait en fixant σ et b puis en faisant varier r (cela correspond à fixer le paramètre géométrique b et le paramètre physique σ et à faire varier la différence de température dans l'expérience de Rayleigh-Bénard). Pour un couple (σ, b) donné, on peut calculer de manière exacte les valeurs de r pour lesquelles les points d'équilibre C^+ et C^- naissent et celles pour lesquelles ces points gagnent ou perdent leur stabilité. De même pour l'origine $O(0, 0, 0)$. Cela revient à étudier la nature et le signe des racines des équations (I.2-1) et (I.2-2). Mais pour ce qui est des différentes bifurcations globales qui peuvent se produire quand on fait varier les paramètres, peu de choses sont connues de manière analytique. Si l'on considère le couple $(\sigma = 10, b = 8/3)$, seule les valeurs de la bifurcation fourche (naissance de C^+ et C^-) et de la bifurcation sous-critique de Hopf (qui sont deux bifurcations locales) sont connues analytiquement.

$$r_F = 1 \quad , \quad r_H = \frac{470}{9} \simeq 24,74 \tag{I.3-1}$$

Les deux autres bifurcations (homoclinique et hétéroclinique) sont des bifurcations globales. Elles surviennent pour des valeurs de r inférieures à r_H mais on ne connaît ces valeurs que de manière approchée (numériquement) :

$$r_{ho} \simeq 13,926 \quad , \quad r_{he} \simeq 24,06 \tag{I.3-2}$$

Il serait donc de grand intérêt de pouvoir déterminer ces valeurs de façon analytique, ou au moins de pouvoir donner des bornes supérieures ou inférieures à r_{ho} et r_{he}. On verra que l'existence de certaines sections transversales[6] empêchent l'existence de la trajectoire homoclinique qui existe lors de la bifurcation de même nom et donc empêche celle-ci de se produire. On aurait voulu trouver de telles surface pour les valeurs canonique des paramètres σ et b et pour des valeurs de r inférieures à r_{ho}. Cela nous aurait alors donné une borne inférieure pour r_{ho}. Malheureusement, ces surfaces (qui empêchent la bifurcation homoclinique) n'existent que pour des couples de valeurs (σ, b) imcompatibles avec les valeurs canoniques $(\sigma = 10,\ b = 8/3)$. De plus, à une exception près, l'existence des sections transversales est établie par des restrictions (des inégalités en fait) sur les paramètres σ et b et non sur r.

b) Etendue de l'attracteur chaotique

Lorenz (1963), après avoir obtenu le jeu de trois équations différentielles ordinaires, vérifie deux points précis :

- Que le caractère dissipatif du système de départ (convection en rouleaux de Bénard)[7] est conservé

---

[6] surfaces qui sont traversées par les trajectoires toujours dans la même direction. Ces surfaces sont en fait semi-perméables pour le flot.

[7] L'énergie fournie au systéme sous forme de chaleur par la plaque inférieure est dissipée sous forme d'énergie cinétique (rouleaux) au lieu d'être restituée à la plaque supérieure.

dans le nouveau système. Le calcul de la divergence du champ de vecteurs donne :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=-(\sigma+b+1)<0 \tag{I.3-3}$$

Si l'on considère un volume $V(t=0)$ de conditions initiales, le théorème du transport montre que :

$$\dot{V}(t)=\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\,dt<0 \tag{I.3-4}$$

Ainsi ce volume ne fait que rétrécir : le flot est contractant. Quand $t\to+\infty$, toutes les trajectoires de l'espace des phases doivent tendre vers une zone de volume nul. Cela peut être un point d'équilibre, un cycle limite, une surface invariante, ou un attracteur de forme plus complexe[8].

Le caractère dissipatif du système empêche l'existence de tores invariants (car alors le volume serait conservé le long des trajectoires) et donc de route vers le chaos via un scénario Ruelle-Takens-Newhouse. De plus, à cause du caractère dissipatif du système, les points d'équilibre ou les orbites fermées ne peuvent être globalement instables (des valeurs propres toutes positives ou des multiplicateurs de Floquet tous positifs) puisque alors le flot serait localement (dans un voisinage du point d'équilibre) à caractère explosif, ce qui est impossible avec une divergence négative.

- Il faut de plus que le modèle soit cohérent avec le problème de départ. Il faut que les solutions du système qu'il vient d'obtenir ne tendent pas vers l'infini car si c'était le cas, cela signifierait qu'un ou plusieurs des modes du développement de Saltzmann diverge (de la même façon qu'on élimine les termes divergents (séculiers) quand on applique la méthode de Linstedt-Poincaré). Pour vérifier ce point, il suffit d'étudier la distance d'un point $M(x(t),y(t),z(t))$ au point $A(0,0,r+\sigma)$ lorsque le point M suit une trajectoire du système. Cette *distance* s'écrit :

$$\begin{aligned} d_{AM}(t) &= x^2+y^2+(z-r-\sigma)^2 && \text{(I.3-5)}\\ \dot{d}_{AM}(t) &= -\sigma x^2-y^2-bz^2+(r+1)bz && \text{(I.3-6)}\end{aligned}$$

On voit que pour un point M très éloigné du point A, la *distance* $d_{AM}(t)$ diminue avec le temps. Les trajectoires ne peuvent donc pas partir à l'infini : la troncature n'a donc pas créé de catastrophes. Cette dernière remarque prouve que l'attracteur chaotique, quand il existe, à une taille finie.

Un point intéressant est d'étudier plus en détail l'étendue dans l'espace des phases de cet attracteur. Plusieurs travaux ont étudié cet aspect : Lorenz et plusieurs autres auteurs (Sparrow, 1982; Strogatz, 1994; Jackson, 1992; Doering & Gibbon, 1995*b*) ont mentionné l'existence d'ellipsoïdes à l'intérieur desquels l'attracteur était confiné :

$$\begin{aligned} E_1 &= x^2+y^2+(z-r-\sigma)^2 \ \text{ avec } \ E_1\le E_{10} && \text{(I.3-7)}\\ E_2 &= rx^2+\sigma y^2+\sigma(z-2r)^2 \ \text{ avec } \ E_2\le E_{20} && \text{(I.3-8)}\end{aligned}$$

Les valeurs de E_{10} et E_{20} dépendent des valeurs des paramètres r,σ,b (voir figure I–23). Trève (1979) a mentionné l'existence d'un cyclindre englobant l'attracteur :

$$\begin{aligned} CY &= y^2+(z-r)^2 \quad \text{avec} \quad CY\le CY_0 && \text{(I.3-9)}\\ CY_0 &= \begin{cases} r^2 & \text{si } b\le 2\\ r^2\frac{b^2}{4(b-1)} & \text{si } b>2\end{cases} && \text{(I.3-10)}\end{aligned}$$

---

[8] Cet attracteur chaotique, quand il existe, a effectivement un volume nul puisque sa dimension est inférieure à celle de l'espace des phases (des simulations numériques donnent $d_L\simeq 2,05$ (Farmer, Ott & Yorke, 1983)).

ainsi que d'un paraboloïde entourant l'attracteur par le bas:

$$P = z - \frac{x^2}{2\sigma} \text{ avec } P \geq 0 \text{ pour } b < 2\sigma \tag{I.3-11}$$

Doering & Gibbon (1995*b*) ont ajouté un cône à cette liste :

$$CO = -rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2 \text{ avec } CO = 0 \text{ pour } \sigma \geq 1 \text{ et } \sigma \geq b \tag{I.3-12}$$

ce qui leur a permis de calculer une borne supérieure exacte pour la dimension de Lyapounov de l'attracteur pour les valeurs canoniques des paramètres[9]. Nous avons retrouvé et généralisé toutes ces surfaces délimitant l'attracteur avec la méthode des sections transversales. D'autres surfaces (voir figure I–22) restreignant l'étendue possible de l'attracteur ont été découvertes, nous permettant par exemple de donner une limite $-33,64 < x < 33,64$ à l'attracteur pour les valeurs canoniques des paramètres.

c) Note sur l'attracteur

Pour certaines valeurs des paramètres (par exemple les valeurs canoniques), les trajectoires semblent converger vers un attracteur spécial. Considérons une trajectoire et son évolution quand $t \to +\infty$:

(1) Cette trajectoire apparemment ne se referme pas. C'est à dire que ce n'est pas une trajectoire périodique[10]. L'attracteur est donc plus qu'une simple courbe de dimension un.

(2) Cette trajectoire semble, à cause du caractère dissipatif (contractant) du système, tendre vers une surface. Mais cela n'est pas possible car si le mouvement final était sur une surface, il ne serait pas si compliqué, les trajectoires ne pourraient se mélanger comme elles le font (voir théorème de Bendixon-Poincaré (Guckenheimer & Holmes, 1983)). Ces trajectoires passent et repassent presque au même endroit une infinité de fois ce qui donne un effet d'épaisseur à l'attracteur. Cet attracteur n'est donc pas contenu dans une surface de dimension deux.

L'attracteur est donc plus *gros* qu'une surface mais ne définit pas un volume à lui tout seul car on a vu plus haut que son volume était nécessairement nul. C'est donc un objet de dimension comprise strictement entre 2 et 3. On peut aussi imaginer comme le fait Sparrow (1982) qu'il n'y a pas d'attracteur chaotique mais en fait une multitude de petits cycles limites attracteurs dont les tailles et les bassins d'attractions seraient plus petits que la précision des ordinateurs. Ainsi, lors de l'intégration numérique, même si $\boldsymbol{x_n}$ (n^{ieme} pas) tombe dans un bassin d'attraction (ou même sur un cycle), le pas d'intégration étant plus grand que le bassin, $\boldsymbol{x_{n+1}}$ sera hors du bassin et la trajectoire numérique s'en éloignera.

---

[9] $d_L < 2 + \frac{3\delta}{3\delta+41} \simeq 2.401$ avec $\delta = \frac{-49+3\sqrt{1201}}{6} \simeq 9.16$

[10] Ce point n'est pas démontré mathématiquement, on ne peut être sûr que l'on n'est pas en présence d'un cycle limite de période extrêmement longue et donc que l'ordinateur n'aurait pas effectué assez de pas d'intégration pour mettre en évidence ce cycle limite. De plus, on ne peut se fier totalement à l'ordinateur à cause des erreurs de calcul sur un temps d'intégration long (et surtout dans un système non-linéraire). Enfin, étant donné que l'ordinateur ne peut traiter des nombres qu'avec une précision limitée, le nombre d'états (x, y, z) disponibles est fini (codage des réels). Ainsi, si on laisse l'ordinateur calculer trop longtemps, la trajectoire *va se répéter* !

– I.4 – Résumé de l'article

L'article qui suit introduit une méthode analytique basée sur l'utilisation des intégrales du mouvement d'un système dissipatif à divergence constante. La méthode est illustrée sur le système de Lorenz mais elle semble applicable à d'autres systèmes à divergence constante.

Cette méthode permet de recueillir de l'information sur l'aspect global de l'attracteur du système, de trouver des plages de valeurs des paramètres pour lesquelles cet attracteur n'existe pas et d'avoir accès à une partie du bassin d'attraction des points d'équilibre du système.

• La méthode est basée sur l'utilisation des intégrales du mouvement. Une intégrale du mouvement est une fonction $I(x, y, z, t)$ telle que $\dot{I} \overset{\text{def}}{=} \frac{dI}{dt} \equiv 0$. Trouver des intégrales du mouvement est un problème difficile, plusieures méthodes et algorithmes existent (Painlevé, 1902; Tabor, 1989; Giacomini, Repetto & Zandron, 1991). Dans un système de dimension 3 comme le système de Lorenz, chacune des intégrales du mouvement existe pour des valeurs *particulières* des paramètres (par exemple pour $b = 2\sigma$). De plus même si il y a 7 intégrales connues, celles-ci n'existent pas en même temps car leurs conditions d'existence (conditions sur les paramètres) sont incompatibles entre elles (une première existe par exemple pour $b = 2\sigma$ et une autre pour $b = 1$ et $\sigma = 1$). Dans l'espace des paramètres, chaque intrégrale du mouvement existe donc sur une surface.

Le but de la méthode présentée ici n'est plus de trouver des fonctions I telles que $\dot{I} \equiv 0$ mais des fonctions $F(x, y, z)$ telles $\dot{F} < 0$ ou $\dot{F} > 0$. Ces fonctions existeraient alors avec la propriété $\dot{F} < 0$ ou $\dot{F} > 0$ pour des plages des paramètres plus importantes que pour les intrégrales du mouvement. Les fonction $F(x, y, z)$ que nous avons trouvées existent en fait pour des *volumes* dans l'espace des paramètres (c'est à dire pour des restrictions du genre :$b > 2\sigma$ et non plus $b = 2\sigma$), ce qui représente une différence qualitative importante par rapport aux domaines de validité des intégrales du mouvement.

C'est a priori un travail plus simple. D'autant plus que l'on s'appuie sur la forme algébrique des intégrales I pour trouver les fonctions F. On utilise en fait une méthode heuristique : on considère une intégrale du mouvement, par exemple $I = (x^2 - bz)e^{bt}$. On cherche alors la fonction $F(x, y, z)$ sous la forme $F(x, z) = a_1\, x^2 + a_2\, z + a_3 = 0$. En fait on s'appuie sur la forme algébrique de l'intégrale pour trouver la fonction $F(x, y, z)$, c'est en ce sens que le travail est plus simple. Il n'en reste pas moins que le calcul des conditions sur les paramètres est parfois long et difficile (voir les annexes).

Les fonctions F ainsi trouvées sont moins restrictives pour le flot que les intégrales du mouvement, mais on peut, grâce à ces fonctions, déterminer des régions de l'espace des phases où le flot est monotone : dans les régions où $\dot{F} < 0$ par exemple, la fonction F doit décroître le long des trajectoires. Autrement dit, le flot doit passer les surfaces de niveau de F dans les sens des F décroissants. Il ne peut revenir sur lui même, les mouvements périodiques, quasi-périodiques, chaotiques sont donc exclus des regions ou $\dot{F}$ est de signe constant. Ces fonctions F sont la généralisation des fonctions de Lyapunov.

• Mais la méthode présentée dans (Giacomini & Neukirch, 1997*a*) introduit une différence sensible par rapport aux fonctions de Lyapunov. Quand on cherche une fonction de Lyapunov, on cherche les régions où $\dot{F}$ est de signe constant.

Ici nous reprenons l'idée du flot traversant les surfaces de niveau dans le sens croissant ou décroissant : dans un tel cas de figure chaque courbe de niveau de F est traversée *dans un seul sens* par le flot : le vecteur normal à la courbe de niveau et le flot ont un produit scalaire de signe constant. L'équation suivante résume cette dernière phrase :

$$\dot{F} = \boldsymbol{\nabla F} \cdot \boldsymbol{Flot} < 0 \text{ ou } > 0$$

Mais ce produit scalaire n'a besoin d'être de signe constant que sur la courbe F, donc le signe de $\dot{F}$ ne doit être étudié que sur la courbe de niveau $F = k$ (avec k constante). Cette dernière restriction élimine une variable (au moins implicitement) dans la fonction $\dot{F}$, ce qui rend l'étude du signe plus aisée et nous a permis de trouver des résultats plus généraux et plus précis que ceux trouvés précédemment avec la méthode *classique* de Lyapunov.

• Si l'on applique la méthode décrite ci-dessus, on trouve par exemple une fonction F (algébrique) dont les surfaces de niveau sont semi-perméables pour des valeurs de k comprises entre k_1 et k_2. On sait ainsi que l'attracteur chaotique ne peut pas être positionné dans cette zone de l'espace des phases. On trouve ainsi des bornes algébriques à l'étendue de l'attracteur chaotique.

• Pour certaines valeurs des paramètres, on a trouvé des sections transversales placées à l'endroit de la trajectoire homoclinique de l'orgine. Pour ces valeurs des paramètres, la bifurcation homoclinique, qui précède la formation de l'attracteur chaotique, ne peut avoir lieu. La géométrie des sections transversales ainsi trouvées empêche la formation de l'attracteur chaotique. Dans cette région de l'espace des paramètres, il n'y a donc pas de chaos.

• Enfin, il est des cas où la géométrie des sections transversales trouvées est telle que l'espace des phases est divisé en trois parties : deux régions libres (sans sections transversales) sont séparées par une région remplie complètement de sections transversales. Un exemple de cette situation est le cas de la figure I–20 où l'espace des phases est divisé en trois parties : la partie du milieu étant remplie de sections transversales. Dans un tel cas, chacun des deux points d'équilibre C^+ et C^- est dans chacune des deux régions libres. Le flot, à cause de la région intermédiaire, ne peut passer d'une région libre à l'autre, toutes les trajectoires d'une région libre convergent donc vers le point d'équilibre présent dans cette région. On connait ainsi une partie du bassin d'attraction de chacun des points d'équilibre C^- et C^+.

Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model

H. Giacomini[11] and S. Neukirch[12]
C.N.R.S. UPRES-A 6083
Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique.
Faculté des Sciences et Techniques.
Parc de Grandmont
Université de Tours
37200 Tours FRANCE

Abstract

In this paper, we consider three-dimensional dynamical systems, as for example the Lorenz model. For these systems, we introduce a method for obtaining families of two-dimensional surfaces such that trajectories cross each surface of the family in the same direction. For obtaining these surfaces, we are guided by the integrals of motion that exist for particular values of the parameters of the system. Nonetheless families of surfaces are obtained for arbitrary values of these parameters. Only a bounded region of the phase space is not filled by these surfaces. The global attractor of the system must be contained in this region. In this way, we obtain information on the shape and location of the global attractor. These results are more restrictive than similar bounds that have been recently found by the method of Lyapunov functions.

Keywords : Lorenz model/ Chaotic Dynamics/ Integrals of motion.

Physics Letters A **227** (1997) 309-318

http://xyz.lanl.gov/chao-dyn/9702016

PACS numbers : 05.45.+b / 02.30.Hq

---

[11] email: giacomini@univ-tours.fr
[12] email: seb@celfi.phys.univ-tours.fr

– I.5 – Letter

The Lorenz equations (I.5-1) are one of the classic models of nonlinear dynamics and chaos. These equations were originally derived in a modal truncation of the Boussinesq equations for thermal convection. They read as follows :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{I.5-1}$$

with $\sigma, b, r \geq 0$. There σ corresponds to the Prandtl number, b is a geometric parameter and r is the Rayleigh number in units of the critical Rayleigh number.

These equations describe a dissipative dynamical system for all values of r, σ and b because the divergence of the flow field is always negative. Hence 3-dimensional volumes in the phase space contract to zero at a uniform exponential rate and the system's attractor is necessarily of dimension less than three. This model has become a classic in the area of nonlinear dynamics. Its importance is not that it quantitatively describes the hydrodynamics motion, but rather that it illustrates how a simple model can produce very rich and varied form of dynamics, depending on the value of a parameter in the equations (Sparrow, 1982).

In this paper, we are interested in the approximated location in the phase space of the global attractor of the system, which contains all dynamics evolving from all initials conditions. The global attractor is the set of points in phase space that can be arrived at from some initial condition at an arbitrary long time in the past. The two fundamental properties of global attractors are (Doering & Gibbon, 1995*b*) :

- it is invariant under the evolution.
- the distance of any solution from it vanishes as $t \to +\infty$.

The last property is simply interpreted thus : if the solution starts initially outside the global attractor, then it is attracted into it as $t \to +\infty$ and once inside it cannot escape. If it starts inside then it stays inside.

The global attractor contains all the asymptotic motion for the dynamical system. It is common to talk of *multiple attractors* for a dynamical system, and each of them may in its own right be considered as the attractor for initial conditions within its own bassin of attraction. The notion of global attractor corresponds to the union of all possible such dynamically invariant attracting sets. In particular, it contains all possible structures such as fixed points, limit cycles etc...

The global attractor of (I.5-1) is contained in an *absorbing ball* in phase space, and we want to obtain analytic estimates about its geometric shape. Moreover, this enables us to find good estimates of its Lyapunov dimension. Estimates which give the shape of the attractor are important as they lead to a good upper bound on the dimension of the Lorenz attractor (Doering & Gibbon, 1995*b*).

Until now, approximate locations of the Lorenz's attractor in the phase space have been obtained by the method of Lyapunov functions (Lorenz, 1963; Sparrow, 1982; Strogatz, 1994; Jackson, 1992; Doering & Gibbon, 1995*b*). Very recently, thanks to this method, it has been shown that the global attractor of the Lorenz equations is contained in a volume bounded by a sphere, a cylinder, the volume between two parabolic sheets, an ellipsoide and a cone (Doering & Gibbon, 1995*b*).

In this paper, we apply a different method for obtaining analytic estimates for the location and shape of the Lorenz attractor. The method is based on the determination of families of 2-dimensional surfaces that are crossed by the trajectories of the system only in one direction. In the region filled by these surfaces, the dynamical behaviour is very simple. The asymptotic *complex behaviour* must be contained in the region of the phase space that is not occupied by these surfaces.

For finding these families of surfaces, we will be guided by the time-dependent integrals of motion that exist for special values of the parameters of the system. Integrals of motion for the Lorenz system have been extensively studied in (Tabor, 1989; Kus, 1983; Tabor & Weiss, 1981). The known integrals of motion are :

(a) $I(x,y,z,t) = (x^2 - 2\sigma z)e^{2\sigma t}$ with $b = 2\sigma$ and σ and r arbitrary.

(b) $I(x,y,z,t) = (y^2 + z^2)e^{2t}$ with $b = 1$, $r = 0$ and σ arbitrary.

(c) $I(x,y,z,t) = (-r\,x^2 + y^2 + z^2)e^{2t}$ with $b = 1$, $\sigma = 1$ and r arbitrary.

(d1) $I(x,y,z,t) = \left(\frac{(2\sigma-1)^2}{\sigma}x^2 + \sigma y^2 - (4\sigma - 2)xy - \frac{1}{4\sigma}x^4 + x^2 z\right) e^{4\sigma t}$ with $b = 6\sigma - 2$, $r = 2\sigma - 1$ and σ arbitrary.

(d2) $I(x,y,z,t) = \left(-rx^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}xy + x^2 z - \frac{3}{4}x^4\right) e^{\frac{4}{3}t}$ with $b = 0$ and $\sigma = \frac{1}{3}$ and r arbitrary.

(e) $I(x,y,z,t) = \left(-rx^2 - y^2 + 2xy + \frac{1}{4}x^4 - x^2 z + 4(r-1)z\right) e^{4t}$ with $b = 4$, $\sigma = 1$ and r arbitrary.

(f) $I_1(x,y,z,t) = \left(y^2 + z^2\right) e^{2t}$ and in the same time $I_2(x,y,z,t) = \left(x^2 - z\right) e^{t}$ with $\sigma = \frac{1}{2}$, $r = 0$, $b = 1$

For each of these integrals we have $\frac{dI}{dt} \equiv 0$[13] .

• Let us consider case **a** and let us define the family of surfaces $x^2 - 2\sigma z = k$, where k is an arbitrary constant. The scalar product between the normal vector $\boldsymbol{N}$ to this surface at a given point and the tangent vector $\boldsymbol{T}$ to the trajectory of the Lorenz system that goes through this point is given by :

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = (2x\boldsymbol{i} - 2\sigma\boldsymbol{k}) \cdot (\sigma(y-x)\boldsymbol{i} + (rx - y - xz)\boldsymbol{j} + (xy - bz)\boldsymbol{k}) = -bk$$

Therefore, for a given surface (i.e. for a given value of k) this scalar product has the same sign for all the points of the surface. Each surface of the family is crossed in the same direction by the flow associated to the system. This direction depends of the sign of the constant k. Hence, for the case $b = 2\sigma$, the 3-d phase space of the Lorenz system is filled by two families of surfaces, the families associated to positive and negative values of k. The scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ is positive (resp. negative) for negative (resp. positive) values of k. It is clear that the surface corresponding to k=0 plays a very special role. All the trajectories of the system are attracted by this surface. On this surface, the scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ is zero. This surface is an invariant manifold of the system, as can be seen in figure I–13.

It is clear that the existence of these families of surfaces gives a lot of information about the dynamics of the system. The behaviour of trajectories is extremely simple in all the phase space with

---

[13] Goriely (1996) has proved that there can be no other *double* integral of motion (like the (f) one). But whether there is other *simple* integral of motion or not is still an open question.

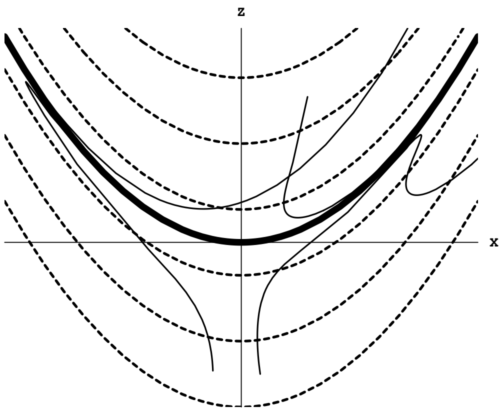

Fig. I–13 – *The family of surfaces $x^2 - 2\sigma z = k$ for the case $b = 2\sigma$. The bolded surface corresponds to $k = 0$ and is the attracting set of the system. Some trajectories of the system are shown.*

the exception of the invariant surface $x^2 - 2\sigma z = 0$. This surface contains the global attractor of the system for the case $b = 2\sigma$. Here, the global attractor is contained in a two-dimensional surface, as for the five other cases **b**, **c**, **d1**, **d2** and **e**, that is when an integral of motion exists.

The family of surfaces derivated above enables us to characterize in a simple way this global attractor. The determination of this family of surfaces follows immediatly from the existence of the integral of motion **a**, when $b = 2\sigma$. Now, the natural question is :

If $b \neq 2\sigma$, is it possible to find similar families of surfaces that the flow crosses in the same direction at each point of the surface? - in the following, we will call this type of surface *semipermeable* -

In this case, we do not have at our disposal an integral of motion, and these surfaces cannot fill the phase space because, in the general case, the global attractor is not contained in a two-dimensional set.

In order to find *semipermeable* surfaces in the general case (when integrals of motion do not exist), we shall procede as follows :

For the case of the integral of motion **a**, we first propose, when $b \neq 2\sigma$, a surface of the same mathematical form as the integral of motion **a**, but with arbitrary coefficients :

$$S = a_1 x^2 + a_2 z + a_3 = 0 \tag{I.5-2}$$

The scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ is now :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} &= 2a_1 x\dot{x} + a_2 \dot{z} \\ &= (2a_1\sigma + a_2)xy - 2a_1\sigma x^2 - a_2 bz \end{aligned} \tag{I.5-3}$$

If we calculate this scalar product on the surface S, for the general case $b \neq 2\sigma$, we obtain :

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S = (2a_1\sigma + a_2)xy + (ba_1 - 2\sigma a_1)x^2 + ba_3 \tag{I.5-4}$$

where we have replaced in (I.5-3) $-a_2 z$ by $a_3 + a_1 x^2$. We now have an expression that depends only on two variables : x and y. The problem of determining the coefficients a_1, a_2 and a_3 in order for this expression to have the same sign for arbitrary values of x and y is considerably simpler than the analogous problem in the three variables x,y and z that must be solved in the method of the Lyapunov functionals.

To keep the same sign in (I.5-4) for arbitrary values of x and y, we must take $a_2 = -2\sigma a_1$. Then we have :

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S = a_1(b - 2\sigma)x^2 + ba_3 \tag{I.5-5}$$

As a_1 must be nonzero, we can take $a_1 = 1$ without loss of generality. We now have two different cases :

i) $b > 2\sigma$, we must take $a_3 > 0$ in order to have a family of semipermeable surfaces. We show this family, as well as some trajectories of the system, in figure I–14.

ii) $b < 2\sigma$, we must take $a_3 < 0$ in order to have a family of semipermeable surfaces. We show this family, as well as some trajectories of the system, in figure I–15.

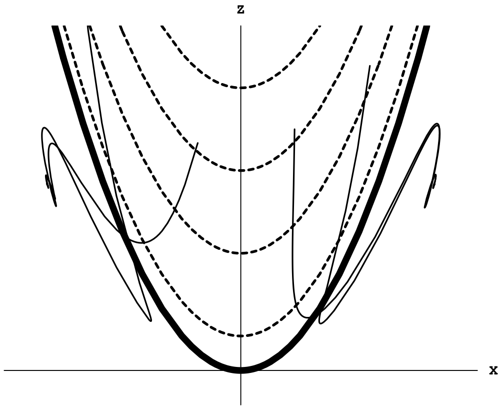

Fig. I–14 – *The family of semipermeable surfaces (I.5-2) for the case $b > 2\sigma$. The bolded surface is the last surface of the family. Some trajectories of the system are also shown. The critical points C+ and C- are below these surfaces.*

As we can see from the mentionned figures, in the region filled by the surfaces the dynamic of the system is very simple. The *complex* behaviour can only occur in the region of phase space that is not occupied by these surfaces. In case ii), the global attractor of the system must be located in the region $2\sigma z > x^2$. For the case i), because of the presence of the semipermeable surfaces, the flow cannot enter the $2\sigma z > x^2$ region upward and hence the homoclinic trajectory cannot exist.

Therefore, motivated by the existence of the first integral **a**, valid in the case $b = 2\sigma$, we have found a family of semipermeable surfaces for arbitrary values of the parameters of the system.

As we shall see, new families of semipermeable surfaces can be found by using the other integrals of motion.

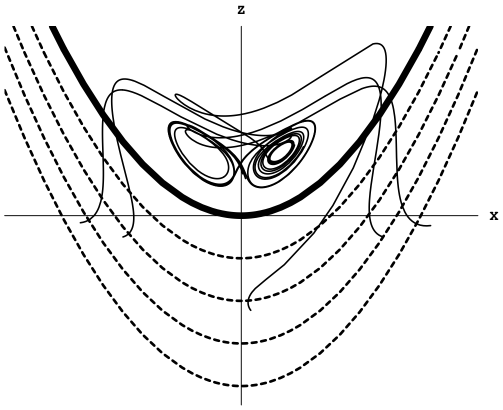

FIG. I–15 – *The family of semipermeable surfaces (I.5-2) for the case $b < 2\sigma$. The bolded surface is the last surface of the family. Some trajectories of the system are also shown. The chaotic attractor is above these surfaces.*

• From the case **b**, we deduce that the surfaces $y^2 + z^2 = k^2$ are semipermeable for arbitrary values of k, when $b = 1$ and $r = 0$. Guided by this result, we propose in the general case a family of surfaces of the form:

$$S = a_1(y - c_1)^2 + a_2(z - c_2)^2 - 1 = 0 \tag{I.5-6}$$

The scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ is given by:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} &= 2((a_2 - a_1)xyz - a_2bz^2 - a_1y^2 + (a_1r - a_2c_2)xy + a_1c_1xz \\ &\quad + a_2c_2bz + a_1c_1y - a_1c_1rx) \end{aligned} \tag{I.5-7}$$

The evaluation of $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ on the surface (I.5-6) becomes far simpler if we take $a_2 = a_1$, $c_1 = 0$ and $c_2 = r$. After this, (I.5-6) and (I.5-7) respectively become:

$$S = a_1(y^2 + (z - r)^2) - 1 = 0 \tag{I.5-8}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = -2a_1(bz^2 + y^2 - rbz) \tag{I.5-9}$$

The scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ calculated on the surface S is given by:

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S = a_1\left((1 - b)z^2 + r(b - 2)z + r^2 - \frac{1}{a_1}\right) \tag{I.5-10}$$

Note that $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S$ is a function of only one variable, as it is the case for expression (I.5-5) for the semipermeable parabolas. In this case, the surface S is not infinite in the y and z directions. In particular, the coordinate z varies in the interval: $r - \frac{1}{\sqrt{a_1}} \leq z \leq r + \frac{1}{\sqrt{a_1}}$. In consequence, the quadratic polynomial (I.5-10) must have the same sign only in this interval and not for arbitrary values of z. This condition determines the possible values of a_1, that can be found by applying the Sturm's theorem (see appendix A). The results are as follows :

$$\begin{aligned} b \leq 2 \quad , \quad & \frac{1}{a_1} \geq r^2 \\ b \geq 2 \quad , \quad & \frac{1}{a_1} \geq \frac{r^2 b^2}{4(b-1)} \end{aligned} \tag{I.5-11}$$

Hence, for arbitrary values of the parameters of the system, we have found a family of semipermeable infinite cylinders. The radius of these cylinders varies between $+\infty$ and the minimal values given in (I.5-11). The behaviour of some orbits with respect to this family of surfaces is shown in figure I–16. The global attractor is contained in the region not occupied by these surfaces.

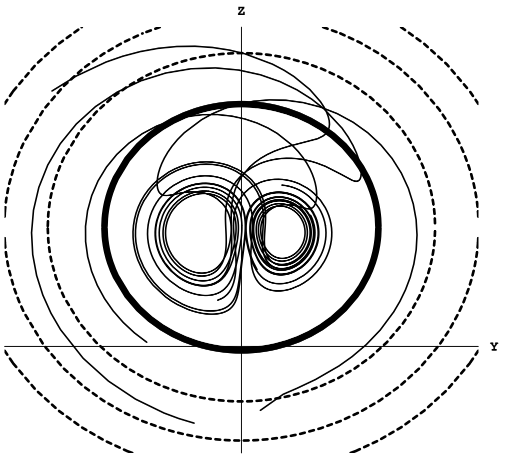

FIG. I–16 – *Chaotic attractor stuck inside semipermeable cylinders of radius* $\frac{1}{a_1}$. *The bolded circle corresponds to the smallest cylinder.*

If we consider the case where $b > 2\sigma$ and $b < 2$, there are semipermeable cylinders existing together with semipermeable parabolas. In this particular case, the equilibrium points C^+ and C^- are inside the last cylinder. This last cylinder is separated in 2 by the parabolas (figure I–17). Once the flow has entered the last cylinder in either of the two shaded regions, it cannot escape it. Then the only possible motion is to tend to the equilibrium point present in the region. Hence we know a part of the attraction basin of C^+ (as well as C^-) :

$$\begin{aligned} y^2 + (z-r)^2 &< r^2 \\ 2\sigma z &< x^2 \end{aligned}$$

with $x > 0$ for C^+ and $x < 0$ for C^-.

• From the integral of motion **c**, we deduce the existence of the family of semipermeable surfaces $z^2 + y^2 - rx^2 - k = 0$, with k arbitrary and $b = 1$, $\sigma = 1$.

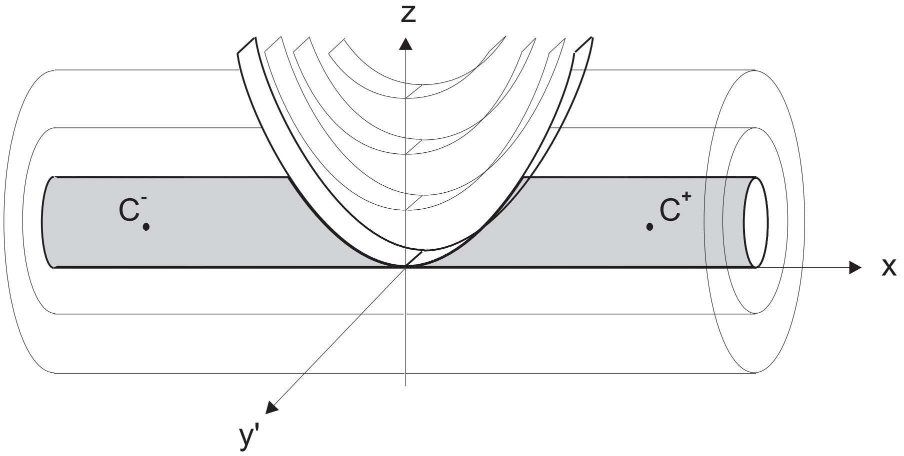

FIG. I–17 – *Semipermeable parabolas and cylinders enclosing the equilibrium points C^+ and C^-. Each free region (shaded in gray) is a part of the basin of attractions of each point C^+, C^-.*

Guided by this result, we propose in the general case the family of surfaces:

$$S = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 - a_4 = 0 \quad \text{, with } \ a_1 < 0 \ a_2 > 0 \ a_3 > 0 \ a_4 \in \mathbb{R}$$

The scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ is given by:

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = 2\left((a_3 - a_2)xyz - a_3bz^2 - a_2y^2 - a_1\sigma x^2 + (a_1\sigma + a_2r)xy\right) \tag{I.5-12}$$

In order to have the same sign for $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}$ on the surface S, we take $a_3 = a_2 = 1$. Then we have:

$$S = a_1x^2 + y^2 + z^2 - a_4 = 0 \quad \text{, with } a_1 < 0 \tag{I.5-13}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T} = 2\left(-(y^2 + bz^2) - a_1\sigma x^2 + (a_1\sigma + r)xy\right) \tag{I.5-14}$$

This expression, calculated on the surface (I.5-13), gives:

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S = 2\left(a_1(b - \sigma)x^2 + (a_1\sigma + r)xy + (b - 1)y^2 - ba_4\right) \tag{I.5-15}$$

On the surface (I.5-13) the variables x and y vary in such a way that the following inequality must be satisfied: $a_1x^2 + y^2 \leq a_4$. Therefore (I.5-15) must have the same sign for all values of x and y that satisfy this inequality. This condition determines the possible values of the coefficient a_1 [14] :

$$\frac{-2\sigma r - (\sigma - 1)^2 - \sqrt{(\sigma - 1)^4 + 4\sigma r(\sigma - 1)^2}}{2\sigma^2} \leq a_1 \leq \frac{-2\sigma r - (\sigma - 1)^2 + \sqrt{(\sigma - 1)^4 + 4\sigma r(\sigma - 1)^2}}{2\sigma^2} \tag{I.5-16}$$

or

$$\frac{2(b-1)(b-\sigma) - \sigma r - 2\sqrt{(b-1)^2(b-\sigma)^2 - \sigma r(b-1)(b-\sigma)}}{\sigma^2} \leq a_1 \leq \frac{2(b-1)(b-\sigma) - \sigma r + 2\sqrt{(b-1)^2(b-\sigma)^2 - \sigma r(b-1)(b-\sigma)}}{\sigma^2} \tag{I.5-17}$$

---

[14] See appendix B for the details of the calculations that lead to inequations (I.5-16) and (I.5-17).

The parameter a_4 is arbitrary, and the condition $a_1 < 0$ restricts the possible values of the parameters b and σ, which are given in figure I–18. The canonical values $r = 28$, $\sigma = 10$ and $b = \frac{8}{3}$ lie in the region II. For parameters σ and b in region II of figure I–18, there are two zones in phase space that are filled with surfaces of the family. The behaviour of some trajectories of the system, in relation to the semipermeable surfaces is shown in figure I–19.

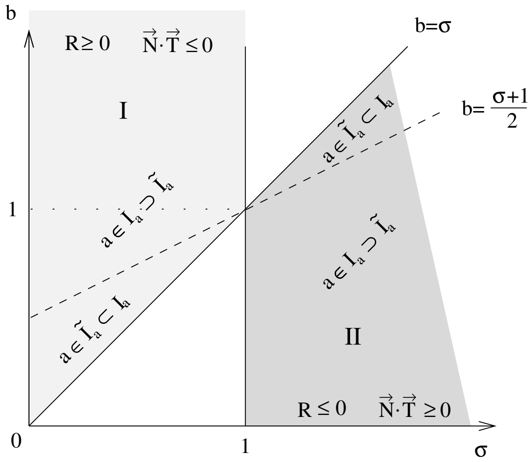

FIG. I–18 – *Parameters σ and b for which surfaces (I.5-13) are semipermeable ($\forall r$). I_a is defined by inequation (I.5-16), $\tilde{I}_a$ is defined by inequation (I.5-17) and $R \equiv a_4$ and $a \equiv a_1$.*

These results are more restrictive (they give a more precise information about the location of the global attractor) than similar results obtained recently in (DOERING & GIBBON, 1995*b*) by employing the method of Lyapunov functions. Therefore, our method can locate more accurately the global attractor of the system in phase space than before.

In region I of figure I–18, the scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S$ has opposite sign with respect to region II and, in phase space, there are two zones that are not filled by the surfaces of the family. These two zones are not connected between them and the critical points C- and C+ are contained in each of the different regions. The behaviour of some trajectories of the flow with respect to the semipermeable surfaces and the position of the critical points C- and C+ are shown in the figure I–20. If one trajectory enters one of the two free regions in the phase space, it cannot exit from it and hence cannot pass in the other one. This restriction on the behaviour of the orbits prevents the possibility of a chaotic behaviour. The trajectories that evolve around one of the critical points cannot go to the other free region for evolving around the other critical point (we make reference to the critical points C- and C+ only). It is clear that the homoclinic bifurcation that precedes the birth of the chaotic behaviour cannot occur in region I of the parameter space.
There is still another result for region I of the parameter space : since the flow, once it has entered one of the two free regions of the phase space, cannot escape from it, it can only go to the critical point C- or C+ lying in this region. So each one of the two free zones in the phase space is a part of the attraction's basin of C- or C+.

• By applying the same method and guided by the form of the integral of motion **d**, we have found a new family of semipermeable surfaces. We do not give here the technical details of the calculations (see appendix D). They are a little more complicated than the calculations involved in the previous cases.

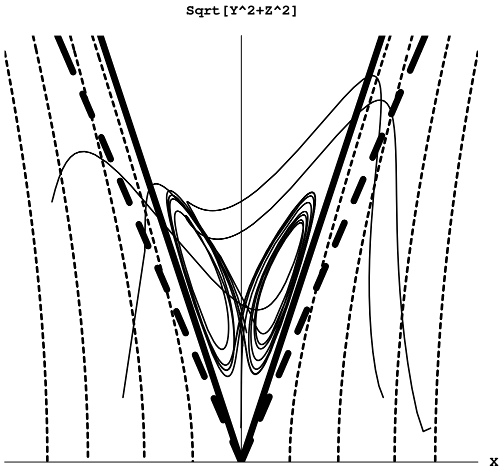

FIG. I–19 – *Lorenz attractor squeezed between semipermeable hyperboloids (I.5-13). The bolded lines are the last repelling cones* ($R = 0$)*. The thick dashed line is the former bound obtained by Doering & al. (*DOERING & GIBBON, 1995*b). The parameters* σ *and* b *are in region II of figure I–18.*

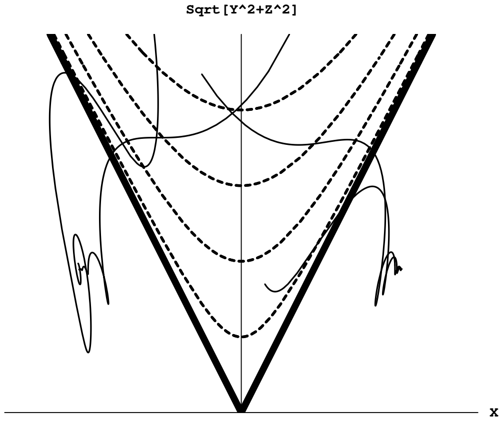

FIG. I–20 – *Critical points C- and C+ separated by semipermeable surfaces (I.5-13). The left (resp. right) zone is a part of the bassin of attraction of C- (resp. C+). The parameters* σ *and* b *are in region I.*

The results are as follows. The family of surfaces : $S = c_1 + c_2x^2 - \frac{1}{4\sigma}x^4 + (2\sigma - b)xy + \sigma y^2 + x^2z = 0$ are semipermeable in the two following cases :

i) $b < 6\sigma - 2$, $r < 2\sigma - 1$, $c_1 \geq 0$ and $c_2 \in I_{c_2}$, where I_{c_2} is the intervalle defined by the two real roots of the quadratic polynomial in c_2 : $4\sigma^2c_2^2 + 4\sigma(b + 2\sigma - b\sigma + 2r\sigma - 6\sigma^2)c_2 + b^2 - 4b\sigma - 6b^2\sigma - 4br\sigma - 4b^2r\sigma + 4\sigma^2 + 24b\sigma^2 + 9b^2\sigma^2 + 8r\sigma^2 + 20br\sigma^2 + 4r^2\sigma^2 - 24\sigma^3 - 36b\sigma^3 - 24r\sigma^3 + 36\sigma^4$. In this case, the sign of the scalar product $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S$ is positive. The canonical values of the Lorenz's parameters do not satisfy the above two inequalities between r, b and σ.

ii) $b > 6\sigma - 2$, $r > 2\sigma - 1$, $c_1 = 0$ and $c_2 \in I_{c_2}$.
In this case, the sign of $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{T}/S$ is negative. This family of surfaces divides the phase space in three regions. Only one of them is filled by the surfaces of the family. The two free regions are disconnected and the critical points C+ and C- are located in different regions. Here, as in one of the cases analysed above, the homoclinic bifurcation, and hence the chaotic behaviour, is not possible. The critical points C+ and C- are stable and each of the two free regions is part of the basin of attraction of each critical point.

• Finally, guided by the form of the first integral **e**, we have found another family of semipermeable surfaces. Let us consider the family of surfaces :

$$S = c_1 + \frac{2 - 3b + b^2 - c_2 + 2\sigma - b\sigma - 2r\sigma}{2\sigma}x^2 - \frac{1}{4\sigma}x^4 + (2 - b)xy + \sigma y^2 + (c_2 + x^2)z = 0 \qquad \text{(I.5-18)}$$

These surfaces are semipermeable in four different cases (see appendix E) :

(α) $b > 2(\sigma + 1)$, $\sigma < 1$, $c_1c_2 \leq 0$, $c_1 < \frac{(c_2+k_3)(c_2k_2+b^2k_3)}{64(\sigma-1)\sigma(\sigma+1)}$;
here the flow is crosssing the surfaces downward.

(β) $b > 2(\sigma + 1)$, $\sigma < 1$, $c_1c_2 \leq 0$, $c_2 > \frac{-bk_3}{b-4\sigma+4}$, $c_1 < \frac{2-3b+b^2-c_2+2\sigma-b\sigma-2r\sigma}{2\sigma}$;
here the flow is crossing the surfaces downward too.

(γ) $b < 2(\sigma + 1)$, $\sigma > 1$, $c_1c_2 \geq 0$, $c_1 > \frac{(c_2+k_3)(c_2k_2+b^2k_3)}{64(\sigma-1)\sigma(\sigma+1)}$;
here the flow is crossing the surfaces upward.

(δ) $b < 2(\sigma + 1)$, $\sigma > 1$, $c_1c_2 \geq 0$, $(b - 4\sigma + 4)c_2 < -bk_3$
$c_1 > \frac{2-3b+b^2-c_2+2\sigma-b\sigma-2r\sigma}{2\sigma}$;
here the flow is crossing the surfaces upward too.

The quantities k_2 and k_3 are given by : $k_2 = b^2 + 8b(\sigma - 1) + 16(1 - \sigma^2)$ and $k_3 = 2b - b^2 - 4\sigma + 2b\sigma + 4r\sigma$.

If $c_2 > 0$, each surface of the family is connected; if $c_2 < 0$, all the surfaces are disconnected : they are divided in three parts.

In case α, if we take $r > \frac{1}{4\sigma}(b - 2)(b - 2\sigma)$, $c_2 \in [-b^2\frac{k_3}{k_2}; - k_3] < 0$ and then $c_1 > 0$, we then have disconnected semipermeable surfaces and the critical points are under the surfaces and separated by them. This is another configuration where we know a part of the basin of attraction of each critical point and where the homoclinic trajectory cannot exists (see figure I–21).

The case γ gives us information about the space extension of the chaotic attractor ($r = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$). In this case, when $c_2 < 0$ and $c_1 \geq 0$, the surfaces are disconnected and the flow crosses them

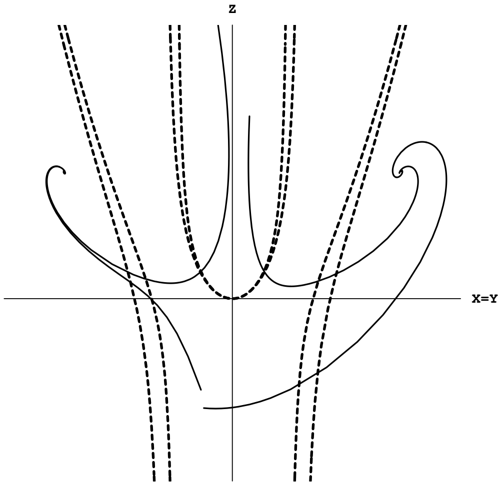

FIG. I–21 – *Critical points separated by semipermeable surfaces of type (I.5-18) in case* α. *The far left (resp. right) zone is a part of the bassin of attraction of C- (resp. C+).*

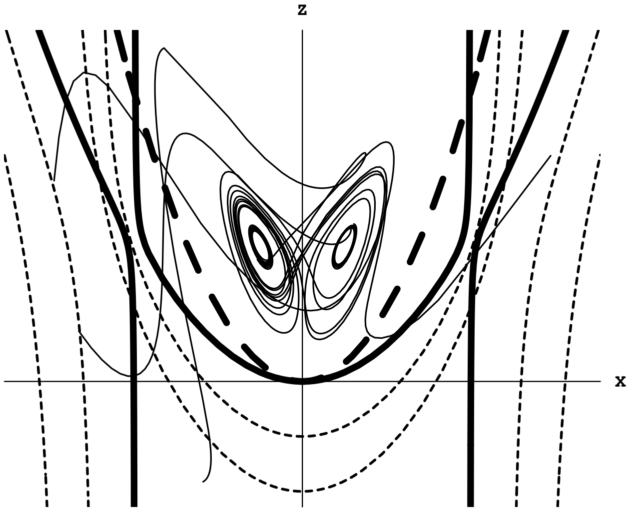

FIG. I–22 – *Lorenz attractor enclosed by semipermeable surfaces of type (I.5-18) in case* γ. *The form of these surfaces for* $x^2 < -c_2$ *is a sink, what we cannot see in the figure, which is a projection. The bolded curve is given by the equality in expression (I.5-19). The thick dashed curved is the last parabola.*

upward (see figure I–22). The uppermost surface (for $c_1 = 0$ and $c_2 = -k_3$) is an additional bound for the Lorenz attractor. Hence it lies entirely in the zone of the phase space where:

$$z \geq -\frac{\frac{2-3b+b^2-c_2+2\sigma-b\sigma-2r\sigma}{2\sigma}x^2 - \frac{1}{4\sigma}x^4 + (2-b)xy + \sigma y^2}{x^2 - k_3} \tag{I.5-19}$$

(for Lorenz's canonical values $k_3 = 1131.56$).
The existence of the two asymptots in $x^2 = k_3$ enables us to define a global bounding in x for the attractor: $-\sqrt{k_3} < x < +\sqrt{k_3}$.

• We have also found several semipermeable families of ellipsoids. In fact, we have generalised results given in (Sparrow, 1982; Jackson, 1992; Doering & Gibbon, 1995*b*). Surfaces like

$$S = \frac{c_3 - r}{\sigma}x^2 + y^2 + (z - c_3)^2 = R \tag{I.5-20}$$

are semipermeable for the following cases:

- if $c_3 > r$ for arbitrary σ, b, r and for values of R as in figure I–23. The interest of having one free parameter (here c_3) in addition to R is that we may lower the ellipsoids in phase space with c_3 and so restrict more tightly the region in which the chaotic attractor lies (with considering the envelope of all the smallest (with R minimum) ellipsoids when c_3 varies in $]r; +\infty[$). These results contain known results about ellipsoids and several new ones.

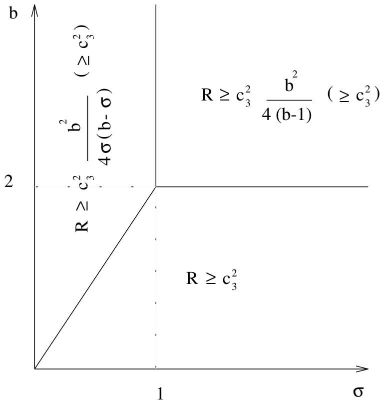

Fig. I–23 – *Parameters for which surfaces (I.5-20) with $c_3 > r$ are semipermeable.*

- if $c_3 = r$ then S is the cylinder which we have studied above.
- if $c_3 < r$ then S is an hyperboloid of revolution. The revolution axis is $\{z = c_3, y = 0\}$. This surface is semipermeable for $b < \sigma$ and $\sigma > 1$ (a case which includes Lorenz's canonical values) and $R \leq \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)}{c_3}^2$ For this case the scalar product is positive $\forall\ \{x, y\} \in S$. The flow crosses the last surface $\frac{c_3-r}{\sigma}x^2 + y^2 + (z - c_3)^2 = \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)}{c_3}^2$ outwards. This new information sharpens the bounding frontiers of the attractor as we can see in figure I–24.

• Sparrow (1982) has conjectured that all trajectories of the Lorenz system eventually enter and remain in the region $z \geq 0$ for all parameters values r, σ and b (note that the plane $z = 0$ is not semipermeable) and proved this conjecture for the case $b \leq \sigma + 1$ by means of Lyapunov functions.

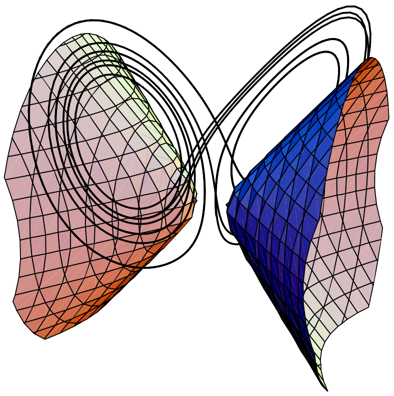

FIG. I–24 – *Lorenz's attractor and a semipermeable surface of the family (I.5-20). When we consider all the surfaces of the family, stronger bounds on the location of the attractor are obtained.*

The existence of semipermeable parabolas $z = \frac{x^2}{2\sigma} + a_0$ for $a_0 < 0$ and $b < 2\sigma$ also proves the conjecture, but for different values of parameters σ and b. Indeed, in this case the flow is crossing all the parabolas upward. It doesn't mean that the $z = 0$ plane itself is semipermeable, but the flow has to end up with crossing upward the last parabola $z = \frac{x^2}{2\sigma}$. The parabolas are in fact driving the flow to the phase space zone where $z > \frac{x^2}{2\sigma} \geq 0$.

The cylinders family: $y^2 + (z - r)^2 = R$ with $R \geq r^2$ and $b \leq 2$ also drives the flow inside the *smallest* cylinder ($R = r^2$) which lies in the $z \geq 0$ phase region.

The surfaces (I.5-18), in case γ, tell us also that the flow eventually crosses the uppermost surface (given by the equality in (I.5-19)) upward. This surface lies entirely in the $z \geq 0$ half space (for $x^2 < -c_2$). The results of this work expand the region of the parameter space for which the flow eventually enters the zone of phase space with $z > 0$. This region is shown shaded in figure I–25.

FIG. I–25 – *Range of parameters σ and b for which the flow eventually enters the phase space zone $z > 0$ ($\forall r$)*

- In conclusion, inspired by the integrals of motion that exist for particular values of the parameters

b, σ and r, we were able to find several families of surfaces, all crossed in the same direction by the flow associated to the system.

From these results, we have deduced a rich quantity of information about the geometrical location of the global attractor of the system. This information is more restrictive than similar results that had been found by the method of Lyapunov functions. When compared to the Lyapunov technique, we see that the fundamental advantage of this new method is that one now has to study functions with one less variable.

Moreover, we have obtained information about the spread of the basin of attraction of the critical points C- and C+ when they are stable. We have also determined regions of the parameter space where the chaotic behaviour is not possible.

It is clear that the method used in this paper can be applied to other 3-d dissipative dynamical systems that the Lorenz one. We have chosen the latter because of its great importance in the study of chaotic dynamics.

– Annexe A –

On étudie la semi-perméabilité des surfaces :

$$S = y^2 + (z - r)^2 = A \quad \text{avec} \quad A > 0 \tag{I.A-1}$$

On veut savoir si

$$P(z) = (1 - b)z^2 + r(b - 2)z + r^2 - A \tag{I.A-2}$$

change de signe pour $z \in [z^- \; ; \; z^+] = I$ où $z_+ = r + \sqrt{A}$ et $z_- = r - \sqrt{A}$. On va donc répondre tout au long de cet annexe à la question suivante :

$P(z)$ est-il de signe constant dans I?

On cherche en fait les valeurs possibles de A en fonction de b et de r. On cherche donc à éliminer les cas où une ou deux racines seraient dans I. On a quatre cas différents :

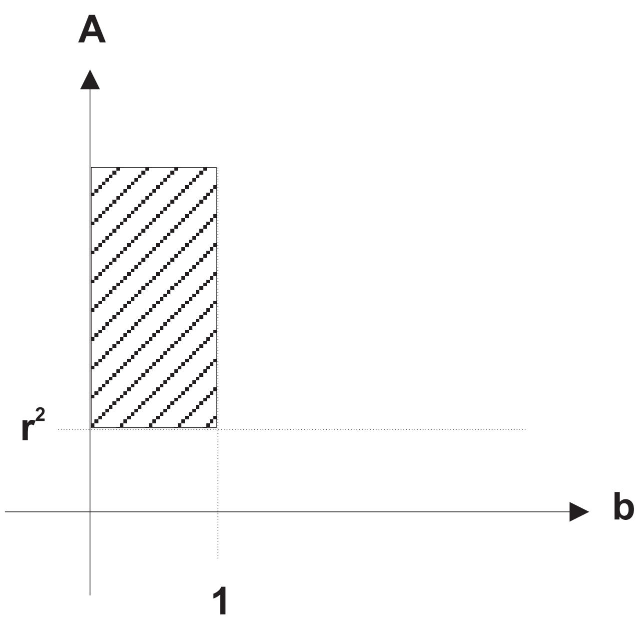

FIG. I–26 – *Premier cas où $P(z)$ est de signe constant dans I.*

(1) si $b < 1$ et $A > r^2$

z	$-\infty$	z_-	z_+	$+\infty$
$P(z)$	$+$	$-$	$-$	$+$

On voit dans le tableau que dans ce cas les deux racines sont extérieures à I. La réponse ici est donc **Oui**. Le domaine des valeurs possible de A est grisé sur la figure(I–26).

(2) si $b < 1$ et $A < r^2$

z	$-\infty$	z_-	z_+	$+\infty$
$P(z)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Ici, une racine est dans I. La réponse est **Non**.

(3) si $b > 1$ et $A < r^2$

z	$-\infty$	z_-	z_+	$+\infty$
$P(z)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Ici aussi il y a une racine dans I. La réponse est donc : **Non**.

(4) si $b > 1$ et $A > r^2$

z	$-\infty$	z_-	z_+	$+\infty$
$P(z)$	$-$	$-$	$-$	$-$

Deux sous-cas sont possibles :

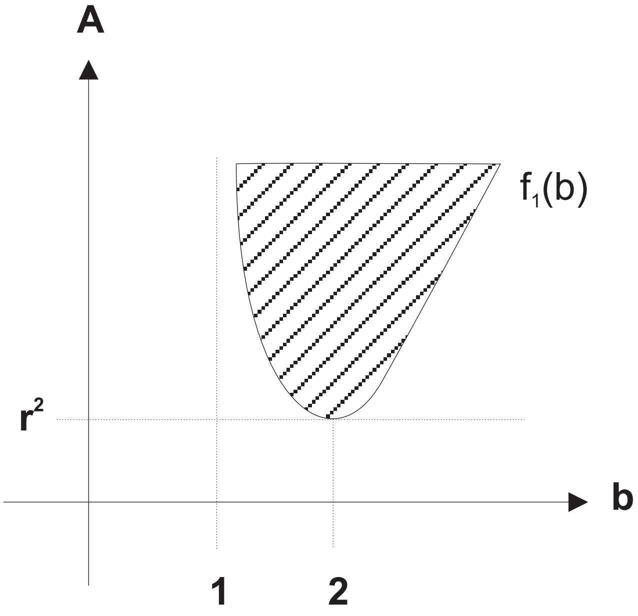

Fig. I–27 – *Autre cas où $P(z)$ est de signe constant sur I.*

- Le discriminant de $P(z)$, $\Delta_z = r^2b^2 - 4A(b-1)$ est négatif. $P(z)$ n'a alors pas de racines. La réponse est **Oui**. Le domaine des valeurs possible pour A est $A > r^2\frac{b^2}{4(b-1)} = f_1(b)$, il est grisé sur la figure I–27.
- Le discriminant est positif, il y a donc deux racines. Ces racines peuvent être n'importe où. Il faut donc une étude plus détaillée dans ce dernier cas. On utilise le théorème de Sturm : Le nombre de racines comprises entre les deux valeurs de $z = z_+$ et $z = z_-$ est égal à la différence du nombre de changement de signe dans les deux suites :

$$P(z_+),\ P^{'}(z_+),\ -\Delta_z \qquad \text{(I.A-3)}$$
$$P(z_-),\ P^{'}(z_-),\ -\Delta_z \qquad \text{(I.A-4)}$$

Etudions les cas possibles :

z	z_-	z_+
$P(z)$	$-$	$-$
$P^{'}(z)$	$\pm$	$\pm$
$-\Delta_z$	$-$	$-$

Il peut y avoir zéro ou deux changements de signe pour chaque suite. Pour pouvoir répondre **Oui** à la question, il faut avoir le même nombre de changements de signe pour chaque suite, c'est à dire que $P^{'}(z_-)$ et $P^{'}(z_+)$ aient le même signe. Il faut donc que $P^{'}(z_-)P^{'}(z^+) > 0$ ce qui équivault à $A < r^2\frac{b^2}{4(b-1)^2} = f_2(b)$. Sur la figure (I–28) est grisé le domaine des valeurs possibles pour A dans ce cas : $b > 1$, $A > r^2$ et $A < r^2\frac{b^2}{4(b-1)^2} = f_2(b)$.

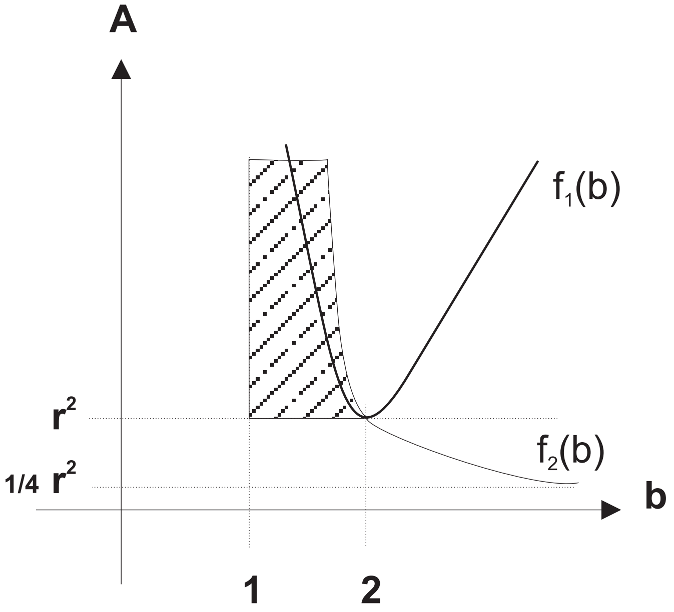

FIG. I–28 – *Autre cas où $P(z)$ est de signe constant sur I.*

Pour trouver le domaine entier des valeurs possibles de A on considère l'union des parties grisées dans les trois figures (I–26), (I–27), (I–28). Note : $f_2(b) \geq f_1(b)$ pour $b \in]1; 2]$.

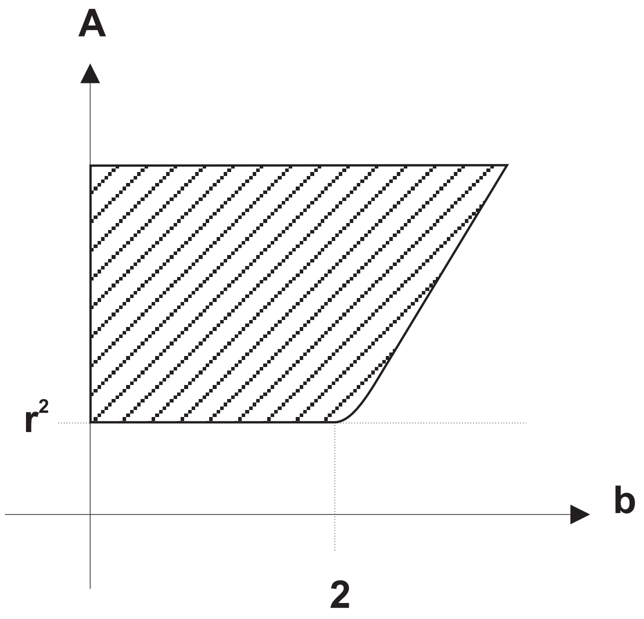

FIG. I–29 – *Résumé des cas où $P(z)$ est de signe constant sur I.*

– Annexe B –

On cherche ici sous quelles conditions les surfaces

$$S = ax^2 + y^2 + z^2 - R = 0 \quad \text{avec} \quad a < 0 \tag{I.B-1}$$

sont semi-perméables. On veut donc que le produit scalaire calculé sur la surface :

$$PS(x, y) = 2\left[a(b - \sigma)x^2 + (a\sigma + r)xy + (b - 1)y^2 - bR)\right] \tag{I.B-2}$$

soit de signe constant sur toute cette surface, c'est à dire pour

$$ax^2 + y^2 \leq R \tag{I.B-3}$$

(cette équation représente l'ombre de $S = 0$ sur le plan (x, y) (voir figure I–30).

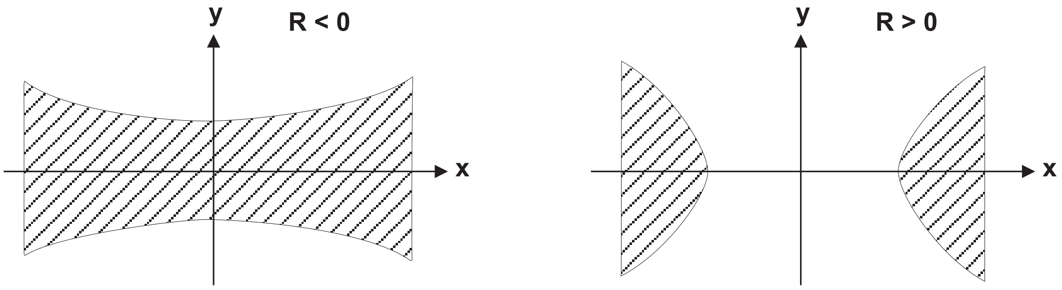

FIG. I–30 – *Ombre de l'hyperboloïde (I.B-1) sur le plan $z = 0$*

Il faut donc qu'aucun morceau de la courbe $PS = 0$ ne soit inclus dans $ax^2 + y^2 \leq R$. Pour cela, il faut que :

(A) La courbe $PS = 0$ ne coupe pas $ax^2 + y^2 = R$ (voir figure I–31),

(B) et que la courbe $PS = 0$ ne soit pas complètement incluse dans $ax^2 + y^2 \leq R$ (voir figure I–32).

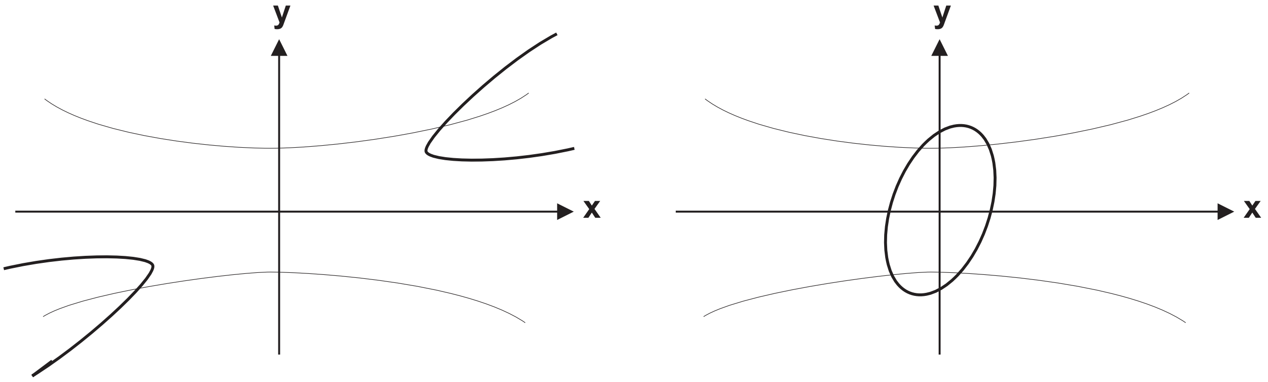

FIG. I–31 – *Deux exemples où la courbe $PS = 0$ (en traits gras) coupe $ax^2 + y^2 = R$ (en traits fins)*

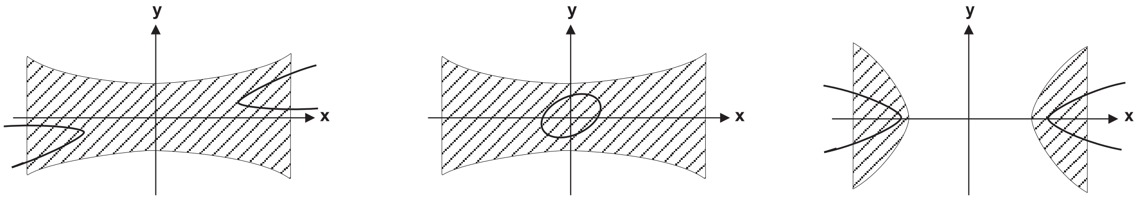

FIG. I–32 – *Exemples où la courbe $PS = 0$ (en traits gras) est incluse dans (I.B-3) (zone hachurée).*

Pour ce qui est du point (A), il suffit de s'assurer que les polynômes $PS(x, y)$ et $ax^2 + y^2 - R$ ne sont pas nuls en même temps, c'est à dire que le résultant de ces deux polynômes n'est pas nul.

$$\begin{aligned} \text{Résultant}[PS,\ ax^2 + y^2 - R;\ y] &= R^2 - R(\sigma^2 a^2 + 2a(1 + \sigma(r-1)) + r^2)x^2 + \\ & \quad a(\sigma^2 a^2 + a(\sigma^2 + 2\sigma(r-1) + 1) + r^2)x^4 \end{aligned} \tag{I.B-4}$$

Il faut donc que ce polynôme bi-carré en x n'ait aucune racine réelle. Posons $u = x^2$ et calculons son discriminant :

$$\Delta_u = R^2(r + a\sigma)^2 \left((a\sigma + r)^2 - 4a\sigma\right) \tag{I.B-5}$$

Ce discriminant est toujours positif ! La seule façon d'empêcher l'existence de racines réelles en x est d'avoir des racines négatives en u. La condition nécessaire et suffisante pour que les 2 racines en u soient négatives est que les trois coefficients en x^0, x^2, x^4 de (I.B-4) soient de même signe. Comme R^2 est positif, il faut que les coefficients en x^2 et x^4 soient positifs aussi, c'est à dire que :

$$\begin{aligned} R\,P_1(a) &= R\left((r + a\sigma)^2 + 2a(1-\sigma)\right) \leq 0 && \text{(I.B-6)} \\ P_2(a) &= (\sigma a + r)^2 + a(\sigma - 1)^2 \leq 0 && \text{(I.B-7)} \end{aligned}$$

On calcule les discriminants de $P_1(a)$ et $P_2(a)$:

$$\begin{aligned} \Delta_{P_1} &= 4(1-\sigma)\left((2r-1)\sigma+1\right) && \text{(I.B-8)} \\ \Delta_{P_2} &= (\sigma-1)^2\left((\sigma-1)^2+r\sigma\right) && \text{(I.B-9)} \end{aligned}$$

Si l'on ne considère que des $r > 1$, Δ_{P_1} est du signe de $(1-\sigma)$. Δ_{P_2} quant à lui est toujours positif et les racines de P_2 sont toujours négatives. Il y a donc deux possiblités pour que le résultant soit positif $\forall x$:

(i) si $\sigma > 1$ alors $P_1(a)$ n'a pas de racines en a et est donc positif $\forall\, a$. Il faut $R < 0$ pour que $R\,P_1$ soit bien négatif. $P_2(a)$ sera négatif pour $a \in I_a$. I_a étant l'intervalle entre les deux racines (négatives) de $P_2(a)$.

(ii) si $\sigma < 1$ alors $P_1(a)$ a deux racines (négatives). Pour P_2, la condition reste la même : P_2 sera négatif si $a \in I_a$. Or si on calcule $P_2 - P_1$ on trouve :

$$P_2 - P_1 = a(\sigma+1)(\sigma-1) \qquad \text{(I.B-10)}$$

Donc pour $a \in I_a$, $P_1(a) < 0$. Il faut donc que R soit positif (voir figure I–33).

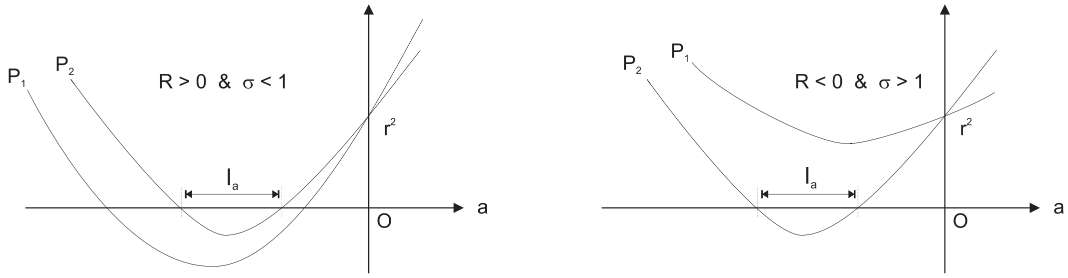

FIG. I–33 – *Configuration de $P_1(a)$ et $P_2(a)$ en fonction de σ et R*

La figure I–34 résume les cas où le résultant (I.B-4) est strictement positif pour tout x.

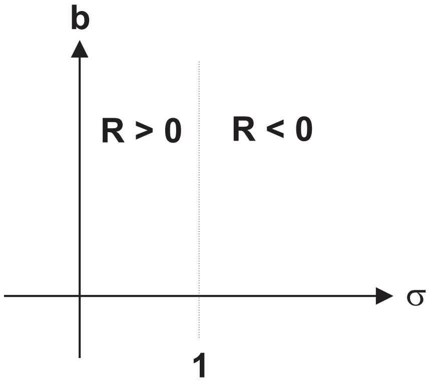

FIG. I–34 – *Valeurs de R possibles pour que le résultant (I.B-4) soit strictement positif pour tout x.*

Pour ce qui est du point (B), *lorsque le résultant est positif*, il faut vérifier en plus que la courbe $PS(x,y) = 0$ n'est pas complètement incluse dans $ax^2 + y^2 \leq R$. Car dans ce cas, la surface (I.B-1) ne serait pas semi-perméable. Le polynôme PS étant de degré 2 en x et en y, il se peut donc qu'il y ait des ellipses ou des hyperboles incluses dans (I.B-3). Il est important de noter que ces coniques sont centrées en $O(0,0)$ ce qui implique que les dessins (I–32) sont les seuls cas gênants possibles.

Pour ce qui est des ellipses : La présence d'une ellipse à l'intérieur de (I.B-3) quand $R > 0$ est à proscrire (voir figure I–32). Pour que (I.B-2) soit une ellipse, il faut que les coefficients en y^2 et en x^2 soient de même signe que bR (coefficient constant). Il faut donc que $b > 1$ et $b < \sigma$ et d'autre part, comme ici $R > 0$, il faut que $\sigma < 1$ (pour que le résultant soit positif). Or les trois conditions :

$$b > 1, \quad b < \sigma, \quad \sigma < 1 \tag{I.B-11}$$

sont incompatibles. On ne peut donc pas avoir d'ellipses internes dans le cas $R > 0$.

Pour ce qui est des hyperboles, leur présence est à étudier pour les deux cas ($R > 0$ et $R < 0$). Pour que (I.B-2) soit une hyperbole réelle il faut et suffit que :

$$\Delta_{PS} = (\sigma a + r)^2 - 4a(b-1)(b-\sigma) > 0 \tag{I.B-12}$$

On va donc étudier l'existence des hyperboles et leur positions par rapport à (I.B-3) dans le plan (b, σ). On note $\Pi = (b-1)(b-\sigma)$, et $\hat{I}_a$ l'intervalle entre les racines de Δ_{PS} quand elles existent. On voit sur la figure I–35 que Δ_{PS} peut être positif pour $a \in I_a$.

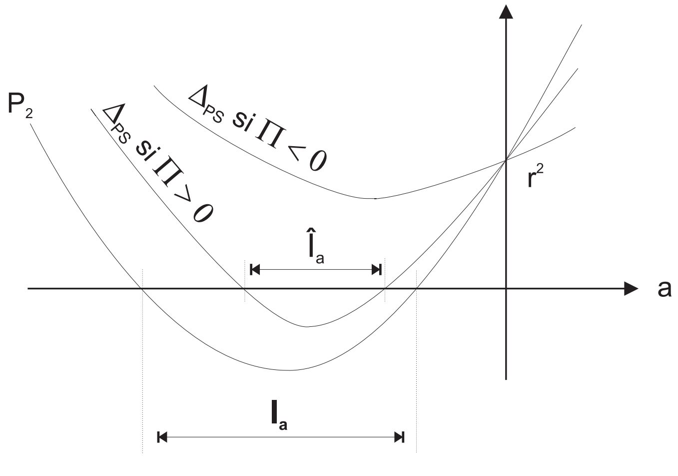

FIG. I–35 – *Configurations de $P_2(a)$ et de Δ_{PS} suivant le signe de* Π.

Etudions maintenant la position relative de ces hyperboles et de la courbe (I.B-13) via leurs asymptotes. Il suffit d'étudier la position des asymptotes car étant donné que les hyperboles ne peuvent pas couper la courbe :

$$ax^2 + y^2 = R \tag{I.B-13}$$

ou bien les deux asymptotes sont complètement dedans ou bien elles sont complètement hors de (I.B-3). Les équations des asymptotes sont :

$$y = \frac{-(a\sigma + r)x \pm \sqrt{\Delta_{PS}}}{2(b-1)} \tag{I.B-14}$$

On remarque que les asymptotes ont des pentes de même signe si et seulement si $\Pi < 0$. Pour connaître la configuration des hyperboles, il faut étudier les signes de :

$$(1 - b)R \tag{I.B-15}$$

$$(b - \sigma)R \tag{I.B-16}$$

Si (I.B-15) est positif alors c'est qu'il y a un intervalle en x qui n'est pas atteint par les branches de l'hyperbole : l'hyperbole a un *trou* en x. Si (I.B-16) est positif alors il y a un intervalle en y qui n'est pas atteint par les branches de l'hyperbole : il y a un *trou* en y. On peut maintenant tracer la figure I–36.

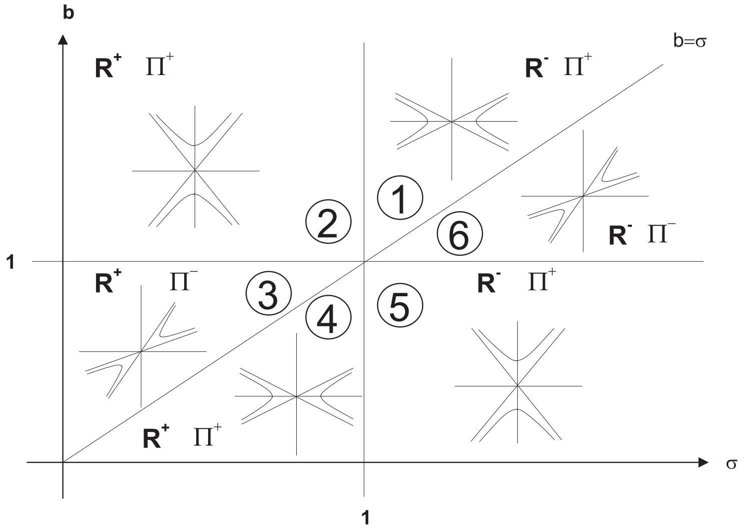

FIG. I–36 – *Configuration des hyperboles en fonction de b et σ*

Pour la zone 4, on voit facilement que les hyperboles (I.B-2) sont incluses dans la zone (I.B-3). Cette zone 4 du dessin est donc à retirer des cas de semi-perméabilité. Pour la zone 1, a priori les hyperboles peuvent être totalement en dehors ou totalement en dedans de (I.B-3). Mais le calcul d'un seul point de l'hyperbole peut nous donner la réponse. Choisissons un point simple : M_0 tel que $y_{M_0} = 0$. Un calcul direct montre que $ax^2_{M_0} + y^2_{M_0} < R$ donc que les hyperboles sont dans ce cas toutes incluses dans (I.B-3). Cette zone 1 du dessin est donc aussi à retirer des cas de semi-perméabilité. Pour la zone 2, le même type de calcul montre que dans cette zone les hyperboles sont extérieures à (I.B-3) et donc que les surfaces (I.B-1) sont semi-perméables pour $a \in I_a$. Tout comme pour la zone 5 où la configuration des hyperboles montre clairement qu'elles ne peuvent être comprises dans (I.B-3). Pour les zones 3 et 6, il faut étudier les pentes des deux asymptotes des hyperboles et les comparer avec les asymptotes de (I.B-13) (on note ces dernières A_{Ombre}).

$$A_{Ombre} = \pm\sqrt{-a}x \tag{I.B-17}$$

En fait, étant donné que, encore une fois, les deux asymptotes des hyperboles sont ou bien toutes deux dans (I.B-3) ou bien toutes deux en dehors, et que ces deux asymptotes ont des pentes de même signe, on peut donc plus simplement comparer les pentes d'une droite comprise entre les deux asymptotes et la pente de A_{Ombre}. On choisit, pour simplicité, la droite :

$$A_{Int} : y = -\frac{r + a\sigma}{2(b-1)}x \tag{I.B-18}$$

(voir figure I–37).

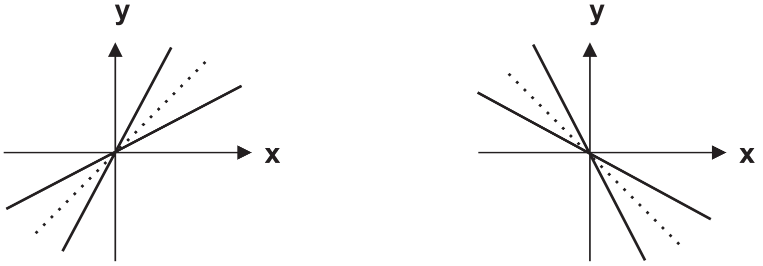

Fig. I–37 – *En pointillé la droite (I.B-18) et en trait plein les deux asymptotes (I.B-14)*

On ne garde que les cas où la valeur absolue de la pente de A_{Ombre} est inférieure à la valeur absolue de la pente de A_{Int} :

$$\frac{(r + a\sigma)^2}{4(b-1)^2} > -a$$

ce qui est équivalent à :

$$P_3 = (r + a\sigma)^2 + 4a(b-1)^2 > 0 \tag{I.B-19}$$

Etudions dans le cas présent ($\Pi < 0$, $a \in I_a$) les configurations possibles des fonctions $P_2(a)$, $\Delta_{PS}(a)$, $P_3(a)$.

$$\begin{aligned} \Delta_{PS} - P_2 &= -a(1 + \sigma - 2b)^2 < 0 && \text{(I.B-20)} \\ P_3 - \Delta_{PS} &= 4a(b-1)(2b - (\sigma + 1)) && \text{(I.B-21)} \\ P_2 - P_3 &= -a(2b - (3 - \sigma))(2b - (\sigma + 1)) && \text{(I.B-22)} \end{aligned}$$

La figure I–38 donne les configurations en fonction de σ et b.

Il s'agit ici d'étudier le signe de $P_3(a)$ lorsque $\Delta_{PS} > 0$ ce qui arrive quand $a \in I_a \setminus \hat{I_a}$[15].

- lorsque $P_3 > \Delta_{PS} > P_2$, $\Delta_{PS} > 0 \Rightarrow P_3 > 0$ donc les hyperboles sont extérieures à (I.B-3) sans restriction supplémentaire.
- lorsque $\Delta_{PS} > P_2 > P_3$, P_3 est négatif dans tout I_a donc a fortiori quand $a \in I_a \setminus \hat{I_a}$. Il faut donc retirer ces cas. La semi-perméabilité est donc assurée pour : $a \in I_a \setminus [I_a \setminus \hat{I_a}] = \hat{I_a}$[16].

La figure(I–39) résume les cas possibles de semi-perméabilité des surfaces (I.B-1). L'intervalle I_a correspond à l'inégalité (I.5-16) et l'intervalle $\hat{I_a}$ correspond à l'inégalité (I.5-17).

---

[15] Pour deux ensembles A et B, $A \setminus B$ est la partie de A qui n'appartient pas à B.

[16] ceci ne vaut que parceque $\hat{I_a} \subset I_a$ (figure I–35)

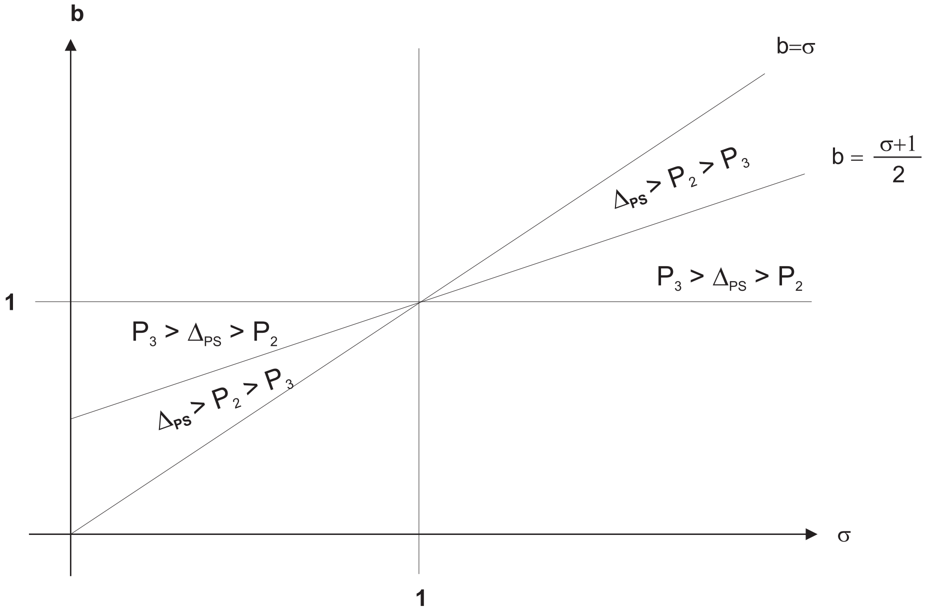

FIG. I–38 – *Relation d'ordre entre les différents polynômes (I.B-6), (I.B-7) et (I.B-12)*

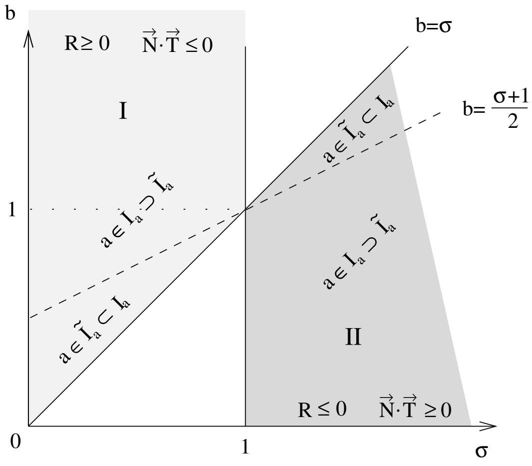

FIG. I–39 – *Intervalles possibles pour a pour que les surfaces (I.B-1) soient semi-perméables* ($\tilde{I}_a \equiv \hat{I}_a$).

– Annexe C –

On étudie ici la semi-perméablité des surfaces :

$$E = \frac{c_3 - r}{\sigma} x^2 + y^2 + (z - c_3)^2 = \frac{1}{a_2} = R \tag{I.C-1}$$

a) Quand *E* est un ellipsoïde

Dans un premier temps, on va n'étudier que des ellipsoïdes : $a_2 > 0$ et $c_3 > r$ ($c_3 = r$ est le cylindre que l'on étudie dans l'annexe A). On calcule le produit scalaire sur la surface :

$$PS/E = (a_2 c_3^2 - 1)\sigma + a_2(\sigma - 1)y^2 + a_2(\sigma - b)z^2 + a_2 c_3 (b - 2\sigma) z \tag{I.C-2}$$

Cette fonction à deux variables doit être de signe constant pour y et z à l'intérieur du disque :

$$y^2 + (z - c_3)^2 \leq R \tag{I.C-3}$$

qui représente l'ombre de l'ellipsoïde sur le plan $x = 0$. On considère d'abord z comme un paramètre. Le polynôme (I.C-2) est alors pair et de degré 2 en y. Pour qu'il soit de signe constant sur $y^2 < y_0^2 = R - (z - c_3)^2$, il faut simplement que

$$T_1(z) = PS/E(y^2 = R - (z - c_3)^2, z) \tag{I.C-4}$$

soit du même signe que

$$T_2(z) = PS/E(y = 0, z) \tag{I.C-5}$$

Car il est impossible que PS/E change de signe deux fois à l'intérieur de $y \in [0; +y_0]$. Ceci est impossible car cela impliquerait un autre double changement de signe dans $y \in [0; -y_0]$ et donc l'existence de quatre racines pour ce polynôme de degré deux.

On trouve les conditions pour que $T_1(z)$ et $T_2(z)$ soient de signe constant sur $z \in I_z$ ($I_z = [z_-; z_+]$ où $z_\pm = c_3 \pm 1/\sqrt{a_2}$) en utilisant le théorème de Sturm.

a.1) Pour $T_1(z)$

z	z_-	z_+
T_1	$b(c_3\sqrt{a_2} - 1)$	$-b(c_3\sqrt{a_2} + 1)$
$T_1^{'}$	$(2\sqrt{R}(b-1) - bc_3)$	$-(2\sqrt{R}(b-1) + bc_3)$
$\Delta_z(1-b)$	$(1-b)(c_3^2 a_2 b^2 + 4(1-b))$	

On voit que si on veut n'étudier que des ellipsoïdes, $c_3 > r$. Or $r \geq 0$ donc c_3 doit être positif. Ainsi $T_1(z_+)$ est obligatoirement négatif. Ce qui nous oblige donc à ne considérer que les cas où $T_1(z_-) < 0$, ce qui impose la condition suivante :

$$c_3\sqrt{a_2} \leq 1 \tag{I.C-6}$$

Il y a deux configurations possibles dans lesquelles $T_1(z)$ est de signe constant sur I_z.

z	z_-	z_+
T_1	$-$	$-$
$T_1^{'}$	$\pm$	$\pm$
$\Delta_z(1-b)$	$+$	

z	z_-	z_+
T_1	$-$	$-$
$T_1^{'}$	$-$	$-$
$\Delta_z(1-b)$	$-$	

(Une configuration avec $T_1^{'}(z-) > 0$ et $T_1^{'}(z+) > 0$ est interdite par la restriction $c_3 > 0$).

- Etudions la première configuration :

Sous quelles conditions $\Delta_z(1-b) > 0$?

· si $b < 1$, Δ_z est positif sans aucune restriction de plus que $R \geq c_3^2$

· si $b > 1$, Δ_z est négatif pour $R \geq c_3^2 \frac{b^2}{4(b-1)}$.

Les cas où $T_1(z)$ est de signe constant sur I_z sont hachurés sur la figure I–40.

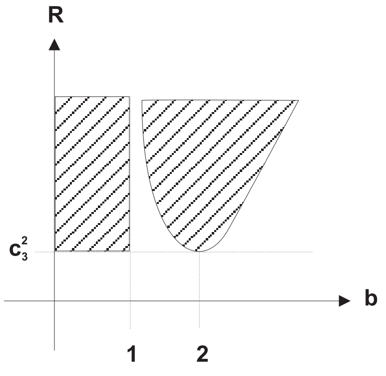

FIG. I–40 – 1^{ere} *configuration où $T_1(z)$ est de signe constant pour des valeurs de R et de b dans les domaines hachurés.*

- Pour la deuxième configuration :

– si $b < 1$, Δ_z doit être négatif, ce qui est impossible dans ce cas.

– si $b > 1$, Δ_z est positif pour $R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4(b-1)}$. $T_1^{'}(z+)$ est clairement négatif dans ce cas. $T_1^{'}(z-)$ est négatif pour $R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4(b-1)^2}$. En tenant compte de la condition (I.C-6) les cas où T_1 est de signe constant sur I_z sont hachurés sur la figure I–41.

Si l'on regroupe les deux configurations, les cas où $T_1(z)$ est de signe constant (négatif) sur I_z sont hachurés sur la figure I–42.

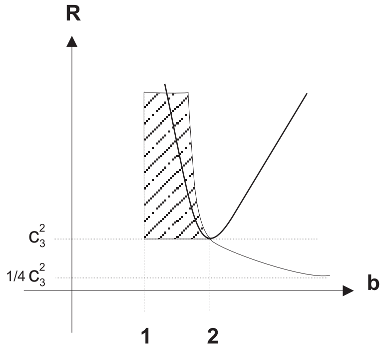

FIG. I–41 – 2^{eme} *configuration où* $T_1(z)$ *est de signe constant pour des valeurs de* R *et de* b *dans les domaines hachurés.*

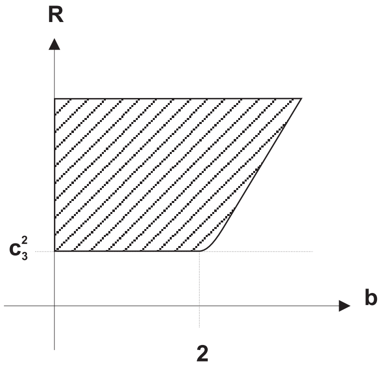

FIG. I–42 – *Regroupement des deux configurations.* $T_1(z)$ *est de signe constant sur* I_z *pour des valeurs de* R *et de* b *dans les domaines hachurés.*

a.2) Pour $T_2(z)$

Il y a deux configurations possibles où $T_2(z)$ est de signe constant sur I_z :

z	z_-		z_+
T_2	$-$		$-$
$T_2^{'}$	$\pm$		$\pm$
$\Delta_z(\sigma - b)$		$+$	

z	z_-		z_+
T_2	$-$		$-$
$T_2^{'}$	$-$		$-$
$\Delta_z(\sigma - b)$		$-$	

- 1^{ere} configuration :

Les mêmes remarques que pour T_1 impliquent que $T_2(z_+)$ doit être négatif et donc que $T_2(z_-)$ doit l'être aussi. Ce qui oblige ici aussi $R \geq {c_3}^2$ (inégalité (I.C-6)). Le signe de $T_2^{'}(z)$ n'importe pas dans cette configuration puisque quel qu'il soit, le nombre de changements de signe de chaque côté sera de 1. Il y a deux possibilités pour avoir $\Delta_z(\sigma - b) > 0$:

· $\sigma > b$ alors $\Delta_z > 0$, sans restriction.

· $\sigma < b$ alors $\Delta_z < 0$ si $R \geq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)}$ (on note cette condition C_1).

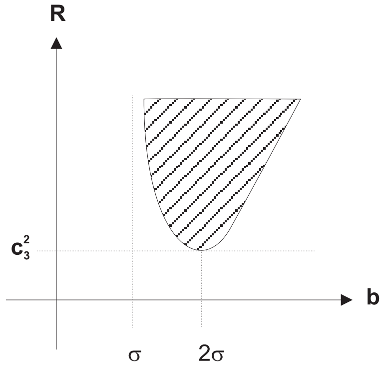

FIG. I–43 – *Valeurs de R pour lesquelles la condition C_1 est remplie.*

- 2^{eme} configuration :

Ici $T_2^{'}(z)$ ne peut être positif ni en $z = z_+$ ni en $z = z_-$ (cela est dû au fait que c_3 doit être positif). $\Delta_z(\sigma - b) < 0$ si :

· $\sigma > b$ et $\Delta_z > 0$, ce qui est impossible.

· $\sigma < b$ alors $\Delta_z < 0$ pour $R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)}$ (on note cette condition C_2).

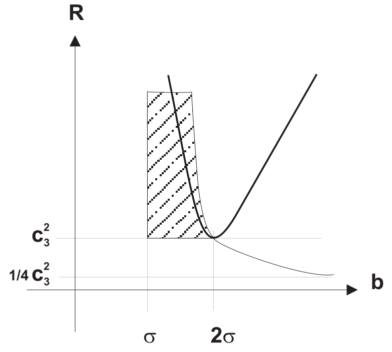

FIG. I–44 – *Valeurs de R pour lesquelles la condition C_3 est remplie.*

Dans ce dernier cas, la condition $T_2^{'}(z_-) < 0$ impose $R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4(b-\sigma)^2}$ (on note cette condition C_3). Donc pour $\sigma < b$, il faut regrouper trois conditions :

$$C_1 \ : \ R \geq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)} \quad C_2 \ : \ R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)} \quad C_3 \ : \ R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4(b-\sigma)^2}$$

$T_2(z)$ sera de signe constant (négatif) pour : $C_1 \cup (C_2 \cap C_3) = (C_1 \cup C_2) \cap (C_1 \cup C_3)$. Or $(C_1 \cup C_2) \equiv \forall R$, on ne cherche donc que $(C_1 \cup C_3)$. La condition C_1 est remplie pour des valeurs de R dans la zone hachurée de la figure I–43 et la condition C_3 est remplie pour des valeurs de R dans la zone hachurée de la figure I–44. Il suffit de prendre la réunion des zones hachurées (voir figure I–45). Si l'on intègre le cas $\sigma > b$, on obtient sur la figure I–46 les conditions pour lesquelles $T_2(z)$ est de signe constant (négatif) pour $z \in I_z$.

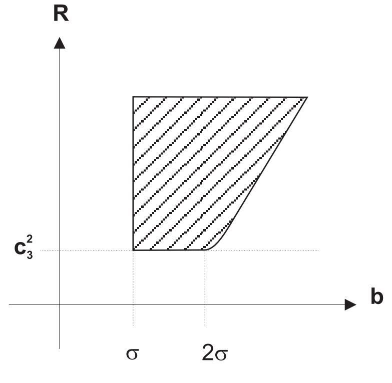

FIG. I–45 – *Réunion des deux conditions C_1 et C_3*

a.3) Résumé ellipsoïdes

Si l'on réunit maintenant les conditions sur T_1 et les conditions sur T_2 , on obtient les conditions pour lesquelles les surfaces (I.C-1) sont semi-perméables. Comme les conditions sont des bornes inférieures pour R et que l'on doit prendre l'intersection des conditions, il faut prendre pour chaque

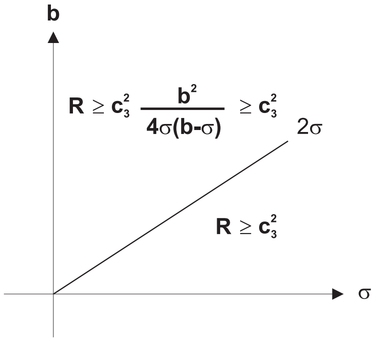

FIG. I–46 – *Valeurs de R pour lesquelles $T_2(z)$ est de signe constant en fonction des valeurs de σ et de b.*

couple (σ, b) les bornes les plus grandes. Si l'on remarque que

$$\frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)} > \frac{b^2}{4(b-1)} \Leftrightarrow \sigma < 1(\text{ quand } b \geq 2 \text{ et } b \geq 2\sigma) \tag{I.C-7}$$

et que

$$\frac{b^2}{4(b-1)} > 1 \quad \text{quand} \quad b \geq 2 \tag{I.C-8}$$

alors on obtient la figure I–47

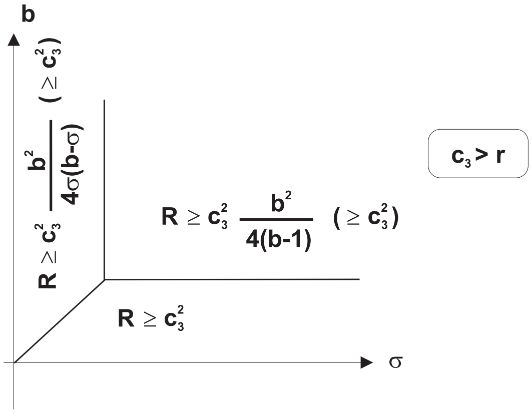

FIG. I–47 – *Valeurs de R pour lesquelles les ellipsoïdes (I.C-1) sont semi-perméables.*

b) Quand E est un hyperboloïde de révolution

Etudions maintenant le cas où on permet à la surface (I.C-1) d'être autre chose qu'un ellipsoïde, c'est à dire où $c_3 < r$ et $a_2 \in \mathbb{R}^*$ Les surfaces sont alors des hyperboloïdes de révolution. Nous ne considérerons que le cas où $R < 0$ par simplicité. L'hyperboloïde est alors composé de deux calottes disjointes. L'ombre portée par ces deux nappes sur le plan $x = 0$ est $y^2 + (z - c_3)^2 > R$ ce qui correspond au plan entier. Le signe de (I.C-2) doit donc être constant sur $\mathbb{R}^2$. Considérons d'abord PS/E comme un polynôme en y et calculons son discriminant :

$$\Delta_y = (1-\sigma)P(z) \tag{I.C-9}$$

où $P(z) = ((\sigma - b)z^2 + zc_3(b-2\sigma) + ({c_3}^2 - R))$. Il faut que ce discriminant ne change pas de signe pour $z \in \mathbb{R}$. Calculons donc le discriminant de $P(z)$:

$$\Delta_z = b^2{c_3}^2 + 4\sigma R(\sigma - b) \tag{I.C-10}$$

Δ_z doit être négatif. Deux cas se présentent :

- $\sigma > 1$, alors $P(z)$ doit être positif donc $\sigma > b$. La condition $\Delta_z < 0$ implique $R \leq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)}$.
- $\sigma < 1$, alors $P(z)$ doit être négatif donc $\sigma < b$. La condition $\Delta_z < 0$ implique $R \geq {c_3}^2 \frac{b^2}{4\sigma(b-\sigma)} > 0$ ce qui n'est pas possible ici car on ne considère que des $R < 0$

En résumé, les conditions pour lesquelles les hyperboles (I.C-1) sont deux nappes semi-perméables sont mises en évidence dans la figure I–48.

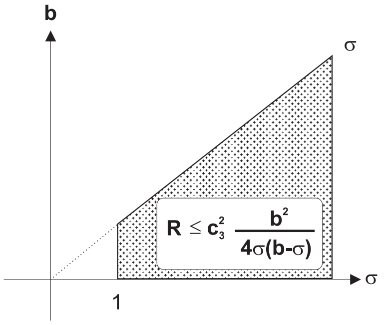

FIG. I–48 – *Valeurs de R pour lesquelles les hyperboloïdes (I.C-1) ($R \leq 0$) sont semi-perméables.*

– Annexe D –

We are trying here to get the conditions for the surfaces:

$$\Gamma = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4 + c_4xy + c_5y^2 + x^2z = 0 \tag{I.D-1}$$

to be semipermeable.

We then calculate the scalar product and place us on the surface via:

$$z = -\frac{c_1 + c_2x^2 + c_3x^4 + c_4xy + c_5y^2}{x^2}$$

When $x \to \pm\infty$, $z \to \pm\infty$ (thanks to the x^2 term)
When $y \to \pm\infty$, $z \to \pm\infty$ (thanks to the y^2 term)
When $x \to 0$, $z \sim -\frac{c_1+c_5y^2}{x^2}$
Since we want this last limit to be unique $\forall y$, we will only consider cases where c_1 and c_5 have the same sign (and since the study of the scalar product will lead us to fix $c_5 = \sigma$, we restrict to $c_1 \geq 0$).

The scalar product on the surface is $\check{PS} = \frac{P_6(x,y)}{x^2}$ where

$$P_6(x,y) = A_{20}x^2 + A_{40}x^4 + A_{60}x^6 + A_{11}xy + A_{31}x^3y + A_{51}x^5y + A_{22}x^2y^2 + A_{13}xy^3$$

To be able to study the sign of this polynomial with discriminant like methods, we first eliminate the terms with a too low degree in x (by fixing $c_5 = \sigma$ which eliminates A_{11} and A_{13}) to allow us to factor P_6 with x^2. Then we calculate the discriminant of $P_6(x,y)$ with regard to y, which we note $\Delta_y(x)$ (this discriminant is a x polynomial). Fixing $c_3 = -\frac{1}{4\sigma}$ eliminates the A_{51} term in $P_6(x,y)$ and hence lower the degree of its discriminant to $deg = 4$.

We note c_4^1 and c_4^2 the roots of $P_2(c_4) = c_4^2 + 2c_4(b - 1 + \sigma) + b^2 + 2b(\sigma - 1) - 4r\sigma$.

$$\begin{array}{cc}
I_{c_4} = [1 - \frac{b}{2} - \sigma;\ 2\sigma - b] & \tilde{I}_{c_4} = [2\sigma - b;\ 1 - \frac{b}{2} - \sigma] \\
I^*_{c_4} = [c_4^2;\ 2\sigma - b] & \tilde{I}^*_{c_4} = [2\sigma - b;\ c_4^2] \\
\tilde{r} = 2\sigma - 1 & r^* = \frac{2\sigma-\sigma^2-1+b^2/4}{4\sigma}
\end{array}$$

I_{c_2} is the interval between the two roots of the x^2 term of $\Delta_y(x)$, and $G(c_4, c_2)$ is the discriminant with regard to x of $\Delta_y(x)$.

Surfaces like:

$$\Gamma = c_1 + c_2x^2 - \frac{1}{4\sigma}x^4 + c_4xy + \sigma y^2 + x^2z = 0 \tag{I.D-2}$$

happen to be half permeable in two main cases:

$b < 6\sigma - 2$		$b > 6\sigma - 2$	
$\check{PS} > 0\ \forall x, y \in \Gamma$		$\check{PS} < 0\ \forall x, y \in \Gamma$	
$c_1 \geq 0$	$c_1 \geq G(c_4, c_2) > 0$	$c_1 \leq 0$	$c_1 \leq G(c_4, c_2) < 0$
$c_2 \in I_{c_2}(c_4)$	$\forall c_2$	$c_2 \in I_{c_2}(c_4)$	$\forall c_2$
see figure I–49	$c_4 \in I_{c_4}\ \forall r, \sigma, b$	see figure I–49	$c_4 \in \tilde{I}_{c_4}\ \forall r, \sigma, b$

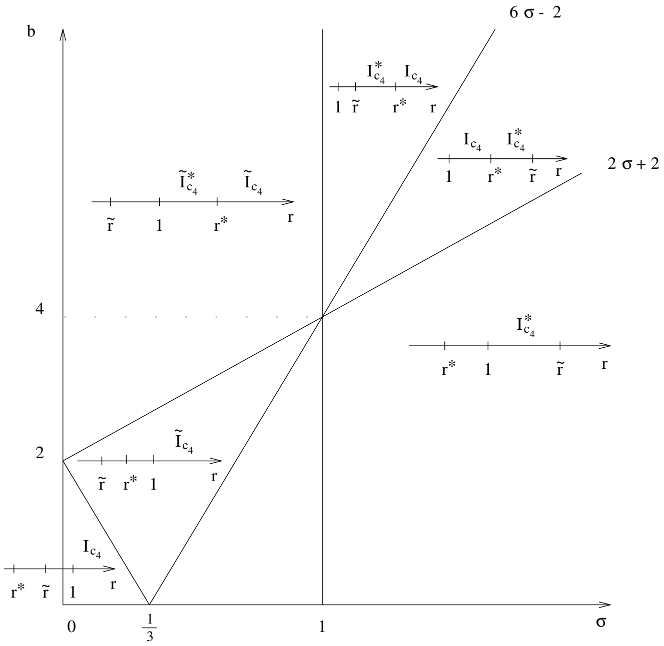

Fig. I–49 – *Variation domain of c_4, depending on r, σ and b, for which surfaces (I.D-2) are semipermeable*

– Annexe E –

On veut étudier ici sous quelles conditions les surfaces :

$$LR = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4 + c_4xy + c_5y^2 + (c_6 + x^2)z = 0 \tag{I.E-1}$$

sont semi-perméables. On calcule le produit scalaire sur la surface via :

$$z_{LR} = -\frac{c_1 + c_2x^2 + c_3x^4 + c_4xy + c_5y^2}{x^2 + c_6} \tag{I.E-2}$$

et on trouve que :

$$PS/LR(x,y) = \frac{P_6(x,y)}{2\sigma(x^2 + c_6)} \tag{I.E-3}$$

où

$$\begin{aligned} P_6(x,y) &= B_{00} + B_{20}x^2 + B_{40}x^4 + B_{60}x^6 + B_{11}xy + B_{31}x^3y + B_{51}x^5y + \\ &\quad B_{02}y^2 + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 \end{aligned} \tag{I.E-4}$$

Remarque : On veut que le flot ne traverse les surfaces (I.E-1) que dans un seul sens. La condition nécessaire et suffisante est que $P_6(x,y)$ soit de signe constant sur toute la surface, *même quand* c_6 *est négatif à savoir quand le dénominateur de* PS *change de signe.* Admettons que $P_6(x,y)$ soit de signe constant sur toute la surface. Lorsque le dénominateur de $PS(x,y)$ change de signe (en $x^2 = -c_6$), $PS(x,y)$ change de signe aussi, *mais* la composante z du gradient de (I.E-1) change aussi de signe en $x^2 = -c_6$! Ce double changement en $x^2 = -c_6$ fait que le flot, lui, traverse la surface dans le même sens pour tout (x,y).

Il faut donc étudier le signe de $P_6(x,y)$ sur la surface (I.E-2) donc pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On doit donc annuler le terme B_{13} en fixant $c_5 = \sigma$. A ce stade, on choisit de mettre $P_6(x,y)$ sous la forme : $B_{00}+g(x,y)x^2$, puis d'obliger $g(x,y)$ à être du même signe que B_{00}. Cette condition n'est pas nécessaire mais elle est suffisante. On annule ainsi le terme B_{02} en fixant $c_4 = 2 - b$, B_{11} en fixant $c_2 = (2 - 3b + b^2 - c_6 + 2\sigma - b\sigma - 2r\sigma)/(2\sigma)$. On a alors :

$$P_6(x,y) = 2\sigma c_1 c_6 + x^2 g(x,y)$$

avec

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 4c_1\sigma(\sigma+1) + {c_6}^2(1 - b + \sigma)(2b - b^2 - 4\sigma + 2b\sigma + 4r\sigma) + \\ &\quad x^4(\frac{1}{2}(8 - 12b + 4b^2 - c_6(4 + b - 4\sigma) + 8\sigma - 4b\sigma - 4br\sigma)) + \\ &\quad xy(2(b-2)(b - 2\sigma - 2)\sigma) + x^3yB_{51} + y^2(2\sigma^2(2 - b + 2\sigma)) \end{aligned} \tag{I.E-5}$$

Le terme B_{51} est éliminé pour que le discriminant de $g(x,y)$ par rapport à y n'ait pas un degré trop élevé en x. Il ne reste plus que c_1 et c_6 comme paramètres libres.

L'équation de (I.E-1) devient :

$$\begin{aligned} LR &= c_1 + \frac{2 - 3b + b^2 - c_6 + 2\sigma - b\sigma - 2r\sigma}{2\sigma}x^2 - \frac{1}{4\sigma}x^4 + (2-b)xy + \sigma y^2 + (c_6 + x^2)z \\ &= 0 \end{aligned} \tag{I.E-6}$$

Etudions maintenant les conditions pour que $g(x,y)$ soit de signe constant sur $\mathbb{R}^2$: $g(x,y)$ est un polynôme de degré deux en y. Il faut et il suffit donc que son discriminant (par rapport à y que l'on note Δ_y) soit négatif. Δ_y est un polynôme bi-carré de degré quatre en x. Il y a deux possibilités pour que celui-ci soit négatif pour tout x :

(i) son propre discriminant (par rapport à $u = x^2$ noté Δ_u) est négatif

(ii) ses trois coefficients en x^0, x^2, x^4 sont de même signe (négatifs).

$$\begin{aligned}\Delta_y \;=\;& 4\sigma^2(2+2\sigma-b)\big(2(1-\sigma)x^4 + (c_6(b-4\sigma+4)+bk_3)x^2 + \\ & {c_6}^2(b-2\sigma) - 4c_1\sigma(\sigma+1) - c_6(1-b+\sigma)k_3\big)\end{aligned} \tag{I.E-7}$$

$$\Delta_u = 64\sigma c_1(1-\sigma)(\sigma+1) + (c_6+k_3)(c_6k_2+b^2k_3) \tag{I.E-8}$$

avec :

$$k_3 \;=\; 2b - b^2 - 4\sigma + 2b\sigma + 4r\sigma \tag{I.E-9}$$

$$k_2 \;=\; b^2 + 8b(\sigma-1) + 16(1-\sigma^2) \tag{I.E-10}$$

On voit que Δ_u est linéaire en c_1 est que la condition (i) sera remplie pour c_1 inférieur ou supérieur à une certaine fonction de c_6. Deux cas de figure se présentent :

(a) $g(x,y) < 0$ et $c_1c_6 < 0$ donc $b > 2\sigma+2$ et $\sigma < 1$ et là

  (a_1) $\Delta_u < 0 \Leftrightarrow c_1 < f_{c_1}(c_6)$
  ou bien

  (a_2) $(b-4\sigma+4)c_6 > -b\,k_3$ (coeff. en $x^2 > 0$) et $c_1 < f_2(c_6)$ (coeff. en $x^0 > 0$)

(b) $g(x,y) > 0$ et $c_1c_6 > 0$ donc $b < 2\sigma+2$ et $\sigma < 1$ et là

  (b_1) $\Delta_u < 0 \Leftrightarrow c_1 > f_{c_1}(c_6)$
  ou bien

  (b_2) $(b-4\sigma+4)c_6 < -b\,k_3$ (coef. en $x^2 < 0$) et $c_1 > f_2(c_6)$ (coef. en $x^0 < 0$)

où :

$$f_1(c_6) \;=\; \frac{(c_2+k_3)(c_2k_2+b^2k_3)}{64(\sigma-1)\sigma(\sigma+1)} \tag{I.E-11}$$

$$f_2(c_6) \;=\; \frac{2-3b+b^2-c_2+2\sigma-b\sigma-2r\sigma}{2\sigma} \tag{I.E-12}$$

Remarque sur le signe de c_6 :
Si $c_6 > 0$, les surfaces (I.E-1) sont en un seul morceau. Elles ont une forme en selle. Si par contre $c_6 < 0$ alors il y a deux divergences en $x^2 = -c_6$, ce qui divise la surface en trois morceaux. Les trois morceaux divisent l'espace des phases en quatre sous-espaces distincts. Regardons de plus près les divergences en $x^2 = -c_6$. $z_{LR}(x = \sqrt{c_6}, y)$ est un polynôme de degré deux en y. Pour que l'asymptote en $x \to \sqrt{c_6}^-$ soit $z \to +\infty$ pour tout y, il faut et il suffit que ce polynôme ait un discriminant négatif : $\Delta_6 = -\left(4c_1\sigma + c_6(c_6+k_3)\right) < 0$ ce qui impose une condition supplémentaire sur c_1. Si le

comportement de l'asymptote n'est pas le même pour tout y, alors les trois morceaux se *déchirent* pour former des surfaces qui ne sont plus semi-perméables.

Résultats : La conjonction de toutes les conditions nous donne deux configurations où les points C^+ et C^- sont séparés par des sections transversales.

(1) Quand le flot tranverse les surfaces vers le bas ($b > 2\sigma{+}2$ et $\sigma < 1$) et que les surfaces sont divisées en trois morceaux ($c_6 < 0$) et que le comportement en $x^2 = -c_6$ est régulier : $c_1 \in [0\,;\, f_1(c_6)]$ $r > \frac{1}{4\sigma}(b-2)(b-2\sigma)$ $c_6 \in [-b^2\frac{k_3}{k_2}\,;\, -k_3] < 0$ les points sont séparés par les surfaces et sont chacun dans un sous-espace qui est une partie de leur bassin d'attraction (figure I–21).

(2) Quand le flot traverse les surfaces vers le haut ($b < 2\sigma{+}2$ et $\sigma > 1$) et que les surfaces sont divisées en trois morceaux ($c_6 < 0$) et que le comportement en $x^2 = -c_6$ est régulier : $c_1 \in [f_1(c_6)\,;\, 0]$ $c_6 \in [-b^2\frac{k_3}{k_2}\,;\, -k_3] < 0$. Si on considère la partie des surfaces pour $x^2 < -c_6$, cette partie est en forme de cuvette dont les bords sont dressés vers le haut. Le flot entre donc à l'intérieur de ces cuvettes où sont C^+ et C^-. Si on considère en même temps les paraboles semi-perméables pour $b > 2\sigma$, ces paraboles sont au dessus des points C^+ et C^-. Ces derniers sont donc bloqués dans l'espace entre la cuvette la plus haute ($c_1 = 0$) et la parabole la plus basse ($z = \frac{x^2}{2\sigma}$). Chacun des deux sous-epaces ainsi définis est une partie d'un des deux bassins d'attraction des points C^+ et C^-.

– Annexe F –

On cherche ici pour quelles valeurs de a positif et de R positif les ellipses :

$$V(x,y,z) = a\,x^2 + y^2 + z^2 - R = 0 \tag{I.F-1}$$

sont semi-perméables. Le produit scalaire exprimé sur l'ellipse vaut :

$$PS/V(x,y) = -b\,R + a(b-\sigma)\,x^2 + (r + a\,\sigma)\,xy + (b-1)\,y^2 \tag{I.F-2}$$

Il faut donc que (I.F-2) soient de signe constant pour tout $(x,y) \in V(x,y,z,)$. Le terme en xy dans (I.F-2) nous empêche d'utiliser le théorème de Sturm. On cherche plutôt les conditions pour lesquelles le résultant :

$$Resultant[ax^2 + y^2 - R, PS/V; y] \tag{I.F-3}$$

est strictement positif ou strictement négatif. Les deux courbes (l'ombre de (I.F-1) sur le plan $z = 0$ et (I.F-2)) seront alors sans intersection. On trouve :

$$\forall R, 0 < a < \frac{4}{\sigma}, r \in [0, r_{max}(a)] \text{ où } r_{max} = \sqrt{a\sigma(2 - \sqrt{a\sigma})} \tag{I.F-4}$$

On peut vérifier que ces conditions empêchent les cas oû la courbe (I.F-2) serait complètement incluse dans l'ombre de (I.F-1) sur le plan $z = 0$. Les conditions (I.F-4) assurent donc que les ellipses (I.F-1) sont semi-perméables.

Ainsi, on a des ellipses semi-perméables quelque soit leur *rayon*. Ces ellipses sont donc des fonctions de Lyapounov qui assurent la stabilité asymptotique de l'origine. Le maximum de la fonction $r_{max}(a)$ est 1 en $a = \frac{1}{\sigma}$. On retrouve donc le résultat (I.2-8).

Bibliographie

Bergé P., Pomeau Y. & Vidal C. (1988): *L'ordre dans le chaos*, vol. 33 of *Enseignement des Sciences*. Paris: Hermann.

Doering C.R. & Gibbon J.D. (1995): "On the shape and dimension of the Lorenz attractor", *Dynamics ans Stability of Systems*, **10**(3), pp. 255–268.

Farmer J.D., Ott E. & Yorke J.A. (1983): "The dimension of chaotic attractors", *Physica D*, **7**, pp. 153–180.

Giacomini H. & Neukirch S. (1997): "Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model", *Physics Letters A*, **227**, pp. 309–318.

Giacomini H.J., Repetto C.E. & Zandron O.P. (1991): "Integrals of motion for three-dimensional non-Hamiltonian dynamical systems", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**, pp. 4567–4574.

Goldenfeld N., Martin O. & Oono Y. (1989): *J. Sci. Comp.***4**, p. 4.

Goldenfeld N., Martin O., Oono Y. & Liu F. (1990): *Phys. Rev. Lett.***64**, p. 1361.

Goriely A. (1996): "Integrability, Partial Integrability and Nonintegrability for Systems of Ordinary Differential Equations", *J. Math. Phys*, **37**, pp. 1871–1893.

Guckenheimer J. & Holmes P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, vol. 42 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag, isbn 0-387-90819-6.

Haken H. (1983): *Synergetics*. Berlin: Springer.

Jackson E.A. (1992): *Perspectives of nonlinear dynamics*. Cambridge, NY: Cambridge university Press, 2nd edition.

Kunihiro T. (1996): "The Renormalization-Group Method applied to asymptotic analysis of vector fields", *LANL : hep-th/9609045*.

Kus M. (1983): *Journal of Physics A : Math. Gen.***16**, p. L689.

Lorenz E. (1963): "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmospheric Sci.*, **20**, pp. 130–141.

Lorenz E. (1979): "On the prevalence of aperiodicity in simple systems", in *Global Analysis*, ed. by Grmela M. & Marsden J.E. New York: Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., pp. 53–75.

Painlevé P. (1902): *Acta Math.***25**, pp. 1–85.

Rikitake T. (1958): "Oscillations of a system of disk dynamos.", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, p. 89.

Saltzman B. (1962): "Finite amplitude free convection as an initial value problem", *J. Atmospheric Sci.*, **19**, pp. 329–341.

Sparrow C. (1982): *The Lorenz equations*, vol. 41 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag.

STROGATZ S.H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*, The Advanced Book Program. Reading, MA: Addison-Wesley.

TABOR M. (1989): *Chaos and integrability in nonlinear dynamics : An Introduction*, Interscience. New York: John Wiley & Sons Inc.

TABOR M. & WEISS J. (1981): "Analytic structure of the Lorenz system", *Phys. Rev. A (3)*, **24**, p. 2157.

THOMPSON J.M.T. & STEWART H.B. (1986): *Nonlinear dynamics and chaos.* New York: John Wiley & Sons Inc.

TRÈVE Y. (1979): "Boxing the Lorenz attractor", unpublished.

YORKE E.D. & YORKE J.A. (1979): "Metastable chaos : Transotion to sustained chaotic behavior in the Lorenz model", *J. Statist. Phys.*, **21**, p. 263.

ZEYTOUNIAN R.K. (1991): *Mécanique des fluides fondamentale*, vol. m 4 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin: Springer-Verlag.

* * *

Chapitre II

Nombre de cycles limites pour le système de Liénard

Plan du chapitre

– II.1 – Introduction

"Some instances of typical relaxation oscillations are: the aeolian harp, a pneumatic hammer, the scratching noise of a knife on a plate, the waving of a flag in the wind, the humming noise sometimes made by a water-tap, the squeaking of a door, ... the tetrode multivibrator, the periodic sparks obtained from a Wimshurst machine, ... the intermittent discharge of a condenser through a neon tube, the periodic re-occurrence of epidemics and of economical crises, the periodic density of an even number of species of animals living together, and the one species serving as food for the other, the sleeping of flowers, the periodic re-occurrence of showers behind a depression, the shivering from cold, menstruation, and, finally, the beating of the hart."
–B. van der Pol & J. van der Mark –

a) Historique

Nous allons étudier dans ce chapitre des équations différentielles du deuxième ordre.

$$y'' = F(y', y) \quad \text{où} \quad y = y(x) \quad \text{et} \quad ' \equiv \frac{d}{dx} \tag{II.1-1}$$

Ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre. L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système est :

$$\dot{x} = P(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{II.1-2}$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui, transformé en un système du type (II.1-2), admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \epsilon \left(\frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \frac{dy}{dt} \right) + y = 0 \tag{II.1-3}$$

établie par RAYLEIGH (1945) [1] et qui modélise les oscillations d'une corde de violon.

- Dans les années vingt, Balthasar van der Pol, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (VAN DER POL, 1922). A cette époque là, les oscilloscopes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{II.1-4}$$

On voit que si on dérive l'équation (II.1-3) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (II.1-4). Ces deux équations sont donc équivalentes.

Quelques années plus tard VAN DER POL (1927*b*) étudiait le même circuit électrique mais en régime sinusoïdal forcé. Lorsqu'il variait la fréquence du courant, il entendait dans son combiné la tonalité changer par à-coups (le circuit se stabilisait donc sur la fréquence externe). Mais de temps à autre il remarquait quelque chose d'étrange, un comportement inexplicablement irrégulier : "on entend souvent au téléphone un bruit irrégulier avant que la fréquence ne saute à la valeur immédiatement

---

[1] L'édition originelle date de 1877 mais la référence citée ici est un re-édition de Dover.

inférieure" (van der Pol, 1927*a*). Son tube à vide devait vraisemblablement traverser une période de chaos transitoire avant de se synchroniser sur la fréquence externe.

Plus tard, en Angleterre, Mary Lucy Cartwright et John E. Littlewood poursuivront les travaux de B. van der Pol sur les oscillateurs forcés.

- Liénard (1928), un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation (II.1-4) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{II.1-5}$$

Liénard a transformé l'équation (II.1-5) en un système de deux équations du premier ordre en posant $\frac{dx}{dt} = z$:

$$\frac{dx}{dt} = z \quad , \quad \frac{dz}{dt} = -x - f(x)z \tag{II.1-6}$$

En fait dans l'énoncé de son théorème, Liénard utilise un autre système, équivalent à (II.1-6), obtenu en posant $z = y - F(x)$, où $F(x) = \int_0^x f(\tau)d\tau$:

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x \tag{II.1-7}$$

Le plan (x, y) est alors appelé *le plan de Liénard.* L'équation (II.1-5) est appelée *l'équation de Liénard* et on se réfèrera au système (II.1-7) comme au *système de Liénard.*

Le théorème de Liénard établi que si $F(x)$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (II.1-7) possède un unique cycle limite.

Liénard a aussi donné une façon de connaître la direction du flot pour un point A du plan (x, y) :

(1) Tracer la droite parallèle à l'axe des y qui passe par A. Cette droite coupe la courbe $y = F(x)$ en B.

(2) Tracer la droite parallèle à l'axe des x qui passe par B. Cette droite coupe l'axe des y en C.

(3) Le flot en A est perpendiculaire à la droite (AC) (voir figure II–1).

- Levinson & Smith (1942) ont suggéré de généraliser le système (II.1-7) :

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -G(x) \tag{II.1-8}$$

qui se met sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + G(x) = 0 \tag{II.1-9}$$

et qui est connu sous le nom de *système de Liénard généralisé.*

- Le problème fondamental lié au système (II.1-8) est le nombre de solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément. Imaginons que le système (II.1-8) décrit le mouvement d'un oscillateur. Si ce système a un cycle limite globalement attracteur alors l'oscillateur

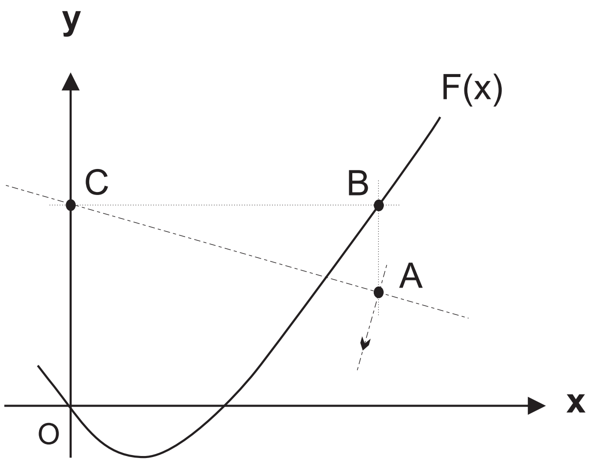

FIG. II–1 – *Construction graphique de la direction du flot en un point A du plan de Liénard.*

va évoluer, après un régime transitoire, selon un mouvement périodique. Le point important est que la période de ce mouvement sera la même quelle que soit la condition initiale ![2]

On voit donc que la présence d'un cycle limite peut être une propriété importante d'un système surtout si ce système est une horloge !

b) Résultats importants

On ne considère par la suite que le cas où $F(x)$ et $G(x)$ sont des polynômes. On note m le degré de $F(x)$, n celui de $G(x)$ et $H(m, n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour (II.1-8). Depuis le théorème de Liénard, plusieurs résultats importants ont été publiés :

- RYCHKOV (1975) a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $G(x) = x$ alors (II.1-8) n'a au plus que 2 cycles limites.
- LINS, DE MELO & PUGH (1977) ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$ alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $E\left(\frac{m-1}{2}\right)$ cycles limites[3].
- XIANWU (1983) a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$
- COPPEL (1988) a prouvé que $H(2, 2) = 1$
- DUMORTIER & LI (1996) ont prouvé que $H(2, 3) = 1$
- DUMORTIER & LI (1997) ont prouvé que $H(3, 2) = 1$

ZHANG (1981) a étendu le résultat de RYCHKOV (1975) à des fonctions non polynomiales :
Si $G(x) = x$; si $F(x)$ et sa dérivée $f(x)$ sont continues ; si $f(x)$ est paire et a 2 racines positives $a_1 < a_2$ telles que $F(a_1) > 0$ et $F(a_2) < 0$ et si $f(x)$ est strictement croissante pour $x > a_2$, alors le système

---

[2] c'est la période du cycle limite.

[3] E(x) est la partie entière du réel x

(II.1-8) a au plus 2 cycles limites.

D'autres chercheurs essayent de trouver des valeurs minimales à $H(m,n)$ en ne considérant que des cycles limites de petite amplitude qui seraient crées par bifurcation de Hopf autour d'un point d'équilibre. Ils trouvent ainsi un nombre maximum $\hat{H}(m,n)$ de cycles limites locaux.

Zuppa (1981) et Blows & Lloyd (1984) ont prouvé que si $G(x) = x$ et si $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}$ alors le système (II.1-8) a au plus k cycles limites locaux. Si de plus on choisit les coefficients a_i tels que :

$$\|a_1\| \ll \|a_2\| \ll \ldots \ll \|a_{2k+1}\| \qquad \text{(II.1-10)}$$

$$a_i \, a_{i+1} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2k \qquad \text{(II.1-11)}$$

alors il y a exactement k cycles limites locaux.

Les cycles limites locaux sont actuellement intensément étudiés par Lynch (1997) qui rempli petit à petit la table II.1. Christopher & Lloyd (1998) ont démontré que cette table était symétrique ($\hat{H}(n,m) = \hat{H}(m,n)$). Gasull & Torregrosa (1997) semblent avoir amélioré les résultats de la table II.1.

50	↑	↑	38*														
49	24	33	38														
48	24	32	36*														
⋮	⋮	⋮	⋮														
13	6	9	10*														
12	6	8	10														
11	5	7	8*														
10	5	7	8*														
9	4	6	8	9													
8	4	5	6*	9													
7	3	5	6	8													
6	3	4	6	7													
5	2	3	4	6	6												
4	2	3	4	4	6	7	8	9	9								
3	1	2	2	4	4	6	6	6*	8	8*	8*	10	10*	...	36*	38	38*
2	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	...	32	33	→
1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	...	24	24	→
$\overset{\uparrow}{m}$ $n \rightarrow$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**...**	**48**	**49**	**50**

Tab. II.1 – *Nombre maximum de cycles limites locaux qui peuvent exister pour les systèmes (II.1-7) en fonction du degré m de $F(x)$ et du degré n de $G(x)$.*

Pour finir, on trouve page 241 du livre de Perko (1996) le résultat suivant :
Pour $\epsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (II.1-8) avec $G(x) = x$ et $F(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}$ a au plus k cycles limites ; de plus pour $\epsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système a exactement k cycles limites qui tendent asymptotiquement quand $\epsilon \to 0$ vers des cercles de rayon r_j, centrés sur l'origine

si et seulement si l'équation polynomiale de degré k :

$$\frac{a_1}{2}+\frac{3a_3}{8}\rho+\frac{5a_5}{16}\rho^2+\frac{35a_7}{128}\rho^3+\ldots+\left(\begin{array}{c}2k+2\\ k+1\end{array}\right)\frac{a_{2k+1}}{2^{2k+2}}\rho^k=0 \qquad \text{(II.1-12)}$$

admet k racines réelles positives.

Les cycles limites dont il est question ici ne sont plus des cycles limites locaux, mais par contre le résultat n'est valable que si $\epsilon \to 0$.

Kryloff & Bogoliuboff (1937) ont adapté une méthode introduite par van der Pol (1927*b*), pour étudier l'amplitude et la période des cycles limites quand $\epsilon \to 0$. Cette méthode, connue maintenant sous le nom de *méthode de la moyenne*, est présenté au chapitre III.

Pour des grandes valeurs de ϵ, le système (II.1-7) modélise un oscillateur de relaxation (Levi, 1981). Les cycles limites ont alors une forme spéciale qui épouse les formes de la courbe $y = F(x)$(voir figure II–2). Quand $\epsilon \to \infty$, chaque cycle limite englobe un extremum de $F(x)$. On peut ainsi connaître de façon exacte les valeurs maximales en x (que l'on note x_Γ) et en y (que l'on note y_Γ) du cycle limite. Pour l'exemple de la figure II–2, les extrema de $F(x)$ sont en $x = \pm 1$ donc $y_\Gamma = F(1) = \frac{2}{3}$. x_Γ est l'autre racine de l'équation $F(x) = \frac{2}{3}$ c'est à dire $x_\Gamma = 2$.

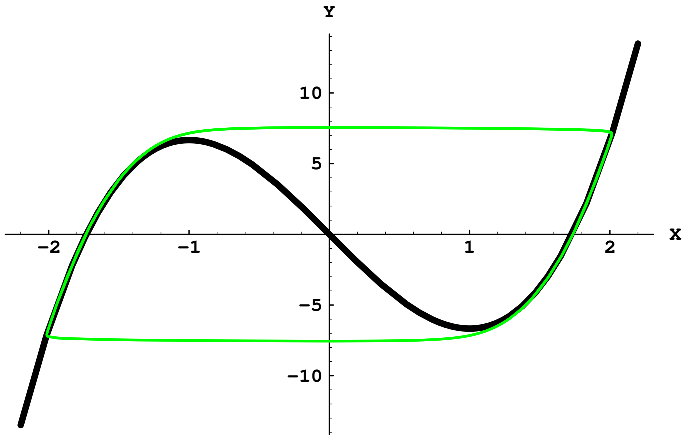

Fig. II–2 – *Cycle limite du système (II.1-4) avec $\epsilon \to \infty$.*

Dans le cas général, où ϵ n'est ni grand ni petit, les valeurs de x_Γ et y_Γ ne sont pas connues analytiquement car les cycles limites du système (II.1-7) ont en général une équation non-algébrique.

Le travail présenté dans le paragraphe suivant a déjà été publié (Giacomini & Neukirch, 1997*b*). L'article n'est pas retranscrit tel quel, mais la présentation ci-après s'en inspire grandement.

– II.2 – Présentation de l'algorithme

On ne considèrera que les cas où $F(x)$ et $G(x)$ sont des polynômes impairs (donc $F(0) = G(0) = 0$).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x)\\ \dot{y} &= -G(x)\end{aligned} \qquad \text{(II.2-1)}$$

a) Intégrale du mouvement

Une façon importante de trouver de l'information pour le système (II.2-1) est de trouver une intégrale du mouvement[4] : une fonction $I(x,y)$ ($\in C^1$) telle que $\dot{I} \equiv 0$ (mais qui ne soit pas une constante simple : $I(x,y) \neq C$). Les trajectoires de (II.2-1) sont alors les courbes de niveau de $I(x,y)$ (voir figure II–3).

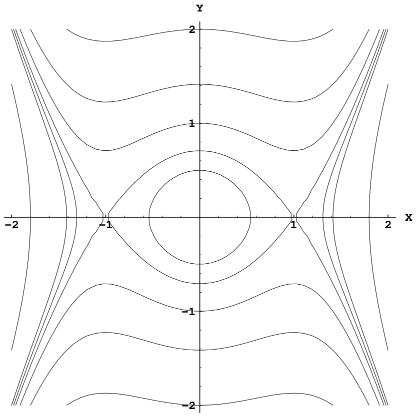

FIG. II–3 – *Portrait de phase du système (II.2-1) avec* $F(x) \equiv 0$ *et* $G(x) = x - x^3$*. Les trajectoires sont les courbes de niveau de l'intégrale du mouvement* $I(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$.

Dans la partie du plan où l'intégrale du mouvement (non triviale) existe, il ne peut y avoir d'attracteur d'aucune sorte (point d'équilibre de type nœud, foyer, cycle limite...)[5].

Imaginons un instant qu'il y ait un attracteur, un point d'équilibre N de type nœud par exemple (voir figure II–4). En N, l'intégrale du mouvement vaut $I(x_N, y_N) = I_N$. Comme tout attracteur, ce point a un bassin d'attraction. Considérons maintenant une trajectoire du bassin d'attraction : $I(x,y)$ doit être constante le long de cette trajectoire ; donc pour connaître la valeur de $I(x,y)$ sur cette trajectoire, il suffit d'en connaître la valeur sur un point de cette trajectoire ; or cette trajectoire en $t \to +\infty$ tend vers N donc $I(x,y) = I_N$ sur toute la trajectoire ! Ainsi comme toutes les trajectoires du bassin d'attraction tendent vers N, elles ont toutes la même valeur pour $I(x,y)$ que lui : $I(x,y) = I_N$ est donc constante sur tout le bassin d'attraction. C'est donc une constante d'intégration triviale.

Trouver une intégrale du mouvement pour un système est un travail compliqué et la présence de cette intégrale restreint énormément les comportements possibles du système. Mais en général, un système n'a pas d'intégrale du mouvement univaluée. Pour cette raison, nous allons essayer de trouver des fonctions ayant une propriété moins forte que $\dot{I} \equiv 0$.

Au chapitre I, on a restreint la propriété $\dot{I} \equiv 0$ en étudiant des fonctions $I(x,y)$ telles que $\dot{I} \leq 0$ ou $\dot{I} \geq 0$. Ici on va chercher des fonctions H telles que $\dot{H} = f_1(x)$ ou $\dot{H} = f_2(y)$. Est-il possible,

---

[4] Attention, ici on ne considère plus que des intégrales du mouvement qui ne dépendent pas explicitement du temps.

[5] Pour avoir un attracteur, il faudrait soit que l'intégrale soit multivaluée, soit qu'elle dépende explicitement du temps

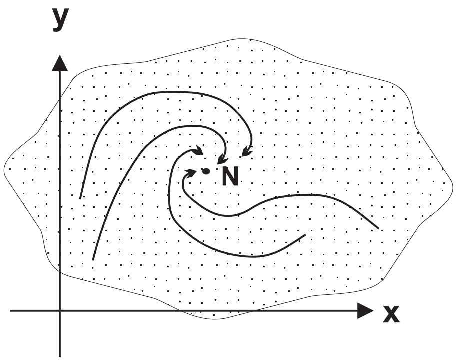

Fig. II–4 – *Nœud et son bassin d'attraction. S'il y a une intégrale du mouvement $I(x,y)$ dans un voisinage $v(N)$ du point, elle est nécessairement constante dans ce voisinage : $I(x,y) = I_N \; \forall (x,y) \in v(N)$.*

pour le système (II.2-1) de trouver $H(x,y)$ telle que $\dot{H} \equiv f(x)$?[6]

b) Algorithme sur un exemple simple

Pour se convaincre de la possibilité de trouver $H(x,y)$ telle que $\dot{H} = f(x)$, il suffit d'effectuer le calcul : on propose une fonction $H_n(x,y)$ de la forme :

$$H_n(x,y) = y^n g_{n,n}(x) + y^{n-1} g_{n-1,n}(x) + y^{n-2} g_{n-2,n}(x) + \ldots + y g_{1,n}(x) + g_{0,n}(x) \qquad \text{(II.2-2)}$$

Nous avons à notre disposition $n+1$ fonctions libres $g_{j,n}(x)$ et c'est grâce à ces fonctions que l'on va faire en sorte que $\dot{H}_n$ ne soit fonction que de la variable x. Le calcul dans le cas général est présenté dans l'annexe A. Prenons ici un exemple simple :

$$\begin{aligned} F(x) &= \epsilon(\frac{x^3}{3} - x) \\ G(x) &= x \end{aligned} \qquad \text{(II.2-3)}$$

et calculons la forme de

$$H_4(x,y) = g_{4,4}(x) y^4 + g_{3,4}(x) y^3 + g_{2,4}(x) y^2 + g_{1,4}(x) y + g_{0,4}(x)$$

---

[6] Cherkas (1977) avait déjà répondu par l'affirmative à cette question. Le travail présenté ici est indépendant du sien, c'est d'ailleurs A. Gasull qui nous a appris l'existence de l'article de Cherkas.

$$\begin{aligned}
\dot{H}_4(x,y) &= (y - F(x))\,\frac{\partial H_4}{\partial x} - x\frac{\partial H_4}{\partial y} && \text{(II.2-4)}\\
\dot{H}_4(x,y) &= g'_{4,4}(x)y^5 + \\
&\left(g'_{3,4}(x) - F(x)g'_{4,4}(x)\right) y^4 + \\
&\left(g'_{2,4}(x) - F(x)g'_{3,4}(x) - 4xg_{4,4}(x)\right) y^3 + \\
&\left(g'_{1,4}(x) - F(x)g'_{2,4}(x) - 3xg_{3,4}(x)\right) y^2 + \\
&\left(g'_{0,4}(x) - F(x)g'_{1,4}(x) - 2xg_{2,4}(x)\right) y + \\
&-F(x)g'_{0,4}(x) - xg_{1,4}(x)
\end{aligned}$$

donc pour éliminer le terme en y^5, on pose $g_{4,4}(x) = C_{4,4} = 1$. Le terme en y^4 devient

$$\dot{H}_4(x,y) = g'_{3,4}(x)y^4 + y^3 \dots \qquad \text{(II.2-5)}$$

que l'on élimine en posant $g_{3,4}(x) = C_{3,4} = 0$ (le choix des constantes d'intégration est discuté en annexe B). Le terme en y^3 devient :

$$\dot{H}_4(x,y) = \left(-g'_{2,4}(x) + 4x\right) y^3 + y^2 \dots \qquad \text{(II.2-6)}$$

que l'on élimine en posant $g_{2,4}(x) = 2x^2 + C_{2,4} = 2x^2$. Le terme en y^2 devient :

$$\dot{H}_4(x,y) = \left(-4\epsilon x(-x + \frac{x^3}{3}) + g'_{1,4}(x)\right) y^2 + y \dots \qquad \text{(II.2-7)}$$

que l'on élimine en posant $g_{1,4}(x) = -\frac{4}{3}\epsilon x^3 + \frac{4}{15}\epsilon x^5 + C_{1,4}$ (on choisit $C_{1,4} = 0$). Le terme en y est alors :

$$\dot{H}_4(x,y) = \left(-4x^3 - 4\epsilon^2 x^3 + \frac{8}{3}\epsilon^2 x^5 - \frac{4}{9}\epsilon^2 x^7 + g'_{0,4}(x)\right) y + \dots \qquad \text{(II.2-8)}$$

que l'on annule en posant $g_{0,4}(x) = (1+\epsilon^2)x^4 - \frac{4}{9}\epsilon^2 x^6 + \epsilon^2\frac{x^8}{18} + C_{0,4}$ (on choisit $C_{0,4} = 0$). Ainsi il n'y a plus de terme en y dans $\dot{H}_4$:

$$\dot{H}_4(x,y) = \frac{16}{3}\epsilon x^4 + 4\epsilon^3 x^4 - \frac{8}{5}\epsilon x^6 - 4\epsilon^3 x^6 + \frac{4}{3}\epsilon^3 x^8 - \frac{4}{27}\epsilon^3 x^{10} \qquad \text{(II.2-9)}$$

Maintenant que l'on connaît les fonctions $g_{j,n}(x)$, on peut écrire la forme explicite de $H_4(x,y)$:

$$H_4(x,y) = (1+\epsilon^2)x^4 - \frac{4}{9}\epsilon^2 x^6 + \epsilon^2\frac{x^8}{18} - \left(\frac{4}{3}\epsilon x^3 - \frac{4}{15}\epsilon x^5\right) y + 2x^2y^2 + y^4 \qquad \text{(II.2-10)}$$

On note :

$$R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{H}_n(x,y) \qquad \text{(II.2-11)}$$

Ce calcul s'automatise facilement et ne prend que quelques secondes à l'ordinateur (voir Annexe A). L'algorithme est aussi valable lorsque $F(x)$ et $G(x)$ n'ont pas de parité définie, mais alors les résultats sont plus flous. Si on prend $n = 2$, on trouve de manière générale :

$$\begin{aligned}
H_2(x,y) &= y^2 + 2\int_0^x G(u)\,du\\
R_2(x) &= -2\,G(x)\,F(x)
\end{aligned}$$

On voit que si les fonctions $G(x)$ et $F(x)$ sont impaires, alors le polynôme $R_2(x)$ sera pair. Il en est de même pour tous les autres polynômes $R_n(x)$ [7] . Chaque polynôme $R_n(x)$ a une racine d'ordre n en $x = 0$. On note $x_{i,n}$ les racines strictement positives de R_n. Leurs symétriques strictement négatives seront notées $x_{-i,n}$ (avec la propriété $x_{-i,n} = -x_{i,n}$ puisque $R_n(x)$ est pair).

La figure II–5 représente la fonction $R_4(x)$ tandis que la figure II–6 représente plusieurs courbes de niveau de $H_4(x, y)$ ainsi que les droites $x = \pm x_{1,4}$.

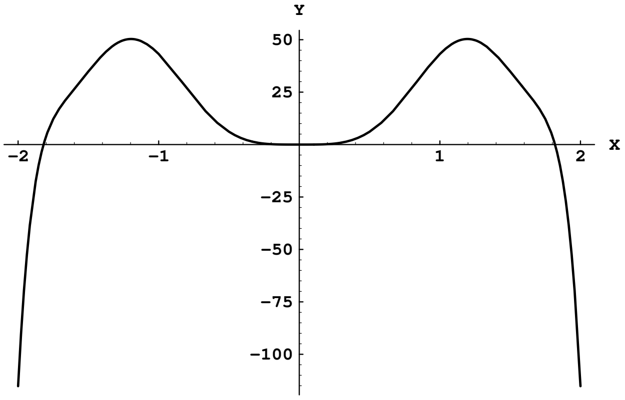

FIG. II–5 – *Tracé de $R_4(x)$ (équation (II.2-9)). La fonction est paire. Il y a une racine de multiplicité 4 en zéro et deux racines simples en $x = x_{1,4}$ et en $x = x_{-1,4}$.*

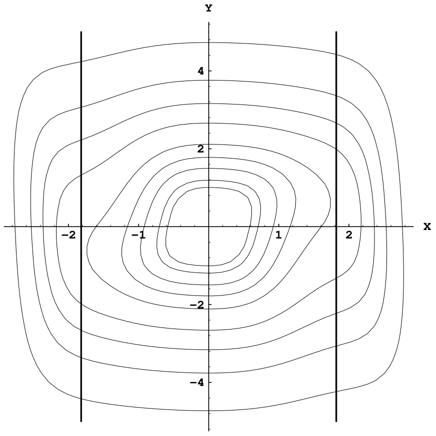

FIG. II–6 – *Les courbes fermées sont les courbes de niveau de $H_4(x, y)$ et les droites verticales sont les droites $x = x_{1,4}$ et $x = x_{-1,4}$.*

---

[7] avec n pair ! Les polynômes avec n impair présentent un changement de signe en $x = 0$ et sont donc inutilisables dans le cadre de cette méthode. On ne considèrera par la suite que des n pairs.

c) Lien entre les racines de $R_n(x)$ et les trajectoires périodiques

On voit sur la figure II–6 que les courbes de niveau qui sont à l'intérieur de la première bande $x = \pm x_{1,4}$ sont semi-perméables. En effet, pour ces courbes $H_n = k$, $R_n = \dot{H}_n = \boldsymbol{\nabla} H_n \cdot \boldsymbol{\mathit{Flot}} > 0$[8] donc le flot ne traverse les courbes $H_n(x, y) = k$ que dans le sens sortant. Les trajectoires périodiques, si il y en a, doivent être extérieures à la plus grande courbe de niveau semi-perméable, c'est à dire la plus grande qui soit complètement contenue dans la bande $x = \pm x_{1,4}$. Lorsque le système possède un ou plusieurs cycles limites, on voit que l'on dispose ainsi d'une borne inférieure à l'étendue du plus petit cycle limite. En particulier, la racine $x = x_{1,4}$ nous fourni une *borne inférieure* à l'amplitude[9] du plus petit cycle limite de (II.2-1).

Une autre façon de voir que chaque cycle doit englober au moins la première bande $x_{-1,n} \leq x \leq x_{1,n}$ est d'intégrer l'égalité $R_n = \dot{H}_n$ le long d'un cycle limite :

$$\begin{aligned} \int_0^T R_n\left(x(t)\right) dt &= \int_0^T \dot{H}_n\left(x(t), y(t)\right) dt \\ &= H_n\left(x(T), y(T)\right) - H_n\left(x(0), y(0)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où T est la période du cycle limite. Par conséquent, le long de tout cycle limite :

$$\int_0^T R_n\left(x(t)\right) dt = 0. \tag{II.2-12}$$

Il faut donc que $R_n(x)$ change de signe au moins une fois le long de chaque cycle. On voit donc que si un seul des polynômes $R_n(x)$ ne change pas de signe (c'est à dire n'a aucune racine réelle de multiplicité impaire) alors le système (II.2-1) n'a pas de cycle limite.

De plus, chaque racine $x_{1,n}$ (à chaque ordre) est une borne inférieure exacte de l'amplitude du plus petit cycle du système (II.2-1)[10].

Considérons l'exemple (II.2-3) avec $\epsilon = 3$. Le théorème de Liénard montre que ce système possède un seul cycle limite (dont l'amplitude varie avec ϵ). Pour tous les rangs n calculés (jusqu'à $n = 120$), il n'y a qu'une seule racine réelle strictement positive. On voit dans la table II.2 que les racines $x_{1,n}$ sont toutes inférieures à l'amplitude du cycle limite (calculée numériquement). De plus, et c'est là le résultat important, il semble que :

$$x_{1,n} \to x_\Gamma \quad \text{quand} \quad n \to \infty \tag{II.2-13}$$

Une remarque importante : Dans le raisonnement précédent et dans le calcul des racines $x_{1,n}$, ϵ joue un rôle important, à savoir que les racines dépendent de ϵ et donc que l'on ne trouvera pas les mêmes bornes inférieures au cycle pour $\epsilon = 1$ et pour $\epsilon = 10$. La méthode présentée ici permet de considérer n'importe quelle valeur de ϵ, et pas seulement des petites valeurs (limite perturbative) où des grandes valeurs (limite de relaxation). Autrement dit cette méthode *n'est pas perturbative*, au contraire, on retrouve les résultats des méthodes perturbatives (Melnikov, ...) avec $H_n(\epsilon \to 0)$ et $R_n(\epsilon \to 0)$ et ceux

---

[8] Le champ de vecteurs sera noté ***Flot*** dans toute la suite.

[9] L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite

[10] on suppose ici que les racines $x_{1,n}$ sont de multiplicité impaire, c'est à dire que $R_n(x)$ change de signe en $x_{1,n}$.

n	2	4	6	8	10	20	30	100	120	x_Γ
$x_{1,n}$	1.732	1.819	1.863	1.891	1.909	1.955	1.974	2.006	2.008	2.023

TAB. II.2 – *Valeurs des racines $x_{1,n}$ des polynômes $R_n(x)$ pour le système (II.2-3) avec $\epsilon = 3$. x_Γ est l'amplitude du cycle calculée via intégration numérique. On voit que les valeurs des racines s'approchent de x_Γ quand n augmente. De plus, il n'y a qu'une seule racine strictement positive et il n'y a qu'un seul cycle limite.*

de la limite de relaxation avec les polynômes $H_n(\epsilon \to \infty)$ et $R_n(\epsilon \to \infty)$.

Comment trouver, pour un rang n donné, la dernière courbe semi-perméable? C'est à dire comme trouver $k_n^\star$ tel que $H_n(x, y) = k_n^\star$ soit la dernière courbe semi-perméable?

Cette courbe est tangente à la droite $x = x_{1,n}$, on cherche donc y et k tels que

$$\begin{aligned} H_n(x_{1,n}, y) &= k \\ \frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{1,n}, y) &= 0 \end{aligned}$$

et on note $y_{1,n}$ et $k_n^\star$ les solutions de ce système de 2 équations à 2 inconnues qui se résout numériquement à l'ordinateur. La table II.3 contient les valeurs trouvées pour le système (II.2-3) avec $\epsilon = 3$.

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y_{1,n}$	0	0.56	0.88	1.09	1.23	1.34	1.43	1.50	1.56	1.61
$k_n^\star$	3	22.1	188.1	1699	$1.58\ 10^4$	$1.50\ 10^5$	$1.45\ 10^6$	$1.41\ 10^7$	$1.37\ 10^8$	$1.35\ 10^9$

TAB. II.3 – *Valeurs de $k_n^\star$ pour le système (II.2-3) avec $\epsilon = 3$.*

Mais comme on l'a vu plus haut, la borne en x n'est pas la seule borne inférieure au premier cycle limite qui nous est fournie par les polynômes $H_n(x, y)$. Le plus petit cycle doit être extérieur à la dernière courbe semi-perméable, ce qui donne par exemple aussi une borne inférieure au y maximum sur ce cycle (que l'on note y_Γ) : les cycles limites du système (II.2-1) ont leur y maximal en $x = 0$ (puisque $G(0) = 0$) et d'autre part, les courbes $H_n(x, y)$ ont leur y maximum (que l'on note $y_{max,n}$) en $x = 0$ (voir annexe A). Pour connaître ce $y_{max,n}$, il suffit de faire $x = 0$ dans $H_n(x, y)$:

$$H_n(x = 0, y_{max,n}) = k_n^\star \qquad \text{(II.2-14)}$$

$$\text{donc } y_{max,n}^n = k_n^\star \qquad \text{(II.2-15)}$$

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	y_Γ
$y_{max,n}$	$\sqrt{3}$	2.17	2.40	2.53	2.63	2.70	2.75	2.797	2.83	2.86	3.17

TAB. II.4 – *Valeurs de $y_{max,n} = (k_n^\star)^{1/n}$ pour le système (II.2-3) avec $\epsilon = 3$. Les valeurs semblent s'approcher de la valeur numérique y_Γ.*

L'équation (II.2-15) nous permet de comprendre pourquoi dans certains cas la suite des valeurs $k_n^\star$ tend vers zéro alors que dans certains autres cas cette suite de valeurs tend vers $+\infty$. En fait, si l'on admet que $y_{max,n} \to y_\Gamma$, on voit que si $y_\Gamma < 1$ alors $k_n^\star \to 0$, et si $y_\Gamma > 1$ alors $k_n^\star \to +\infty$

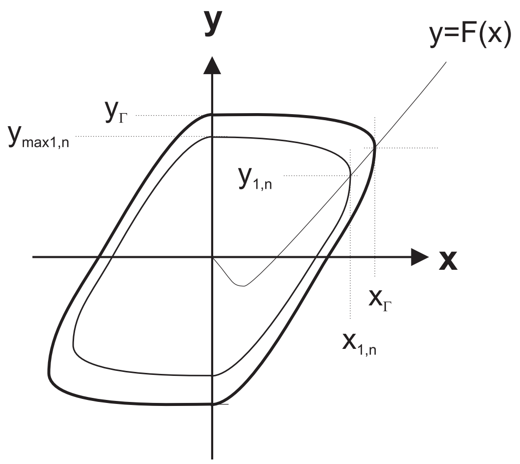

FIG. II–7 – *Le cycle limite (courbe extérieure) avec ses points extremum et l'approximation algébrique.*

d) Plus qu'une borne inférieure

On a vu que les courbes $H_n(x, y) = k_n^\star$ étaient des bornes inférieures pour le plus petit cycle limite. En prenant des points particuliers de ces courbes ($x = 0, y = y_{max,n}$) et ($x = x_{1,n}, y = y_{1,n}$) (voir figure II–7) on s'aperçoit qu'en plus d'être des bornes inférieures ces points tendent vers les points correspondant sur le cycle quand $n \to \infty$. En fait, chaque courbe $H_n(x, y) = k_n^\star$ dans sa globalité est une approximation algébrique du cycle limite de (II.2-3), comme le montre la figure II–8. Plus encore : au fur et à mesure que n augmente, ces approximations se font de plus en plus fines (comparer la figure II–8 à la figure II–9).

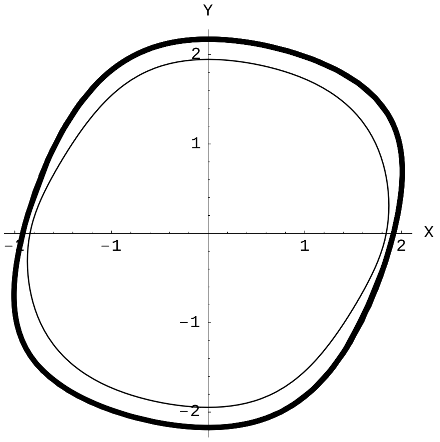

FIG. II–8 – *Le cycle limite de van der Pol (courbe extérieure) et l'approximation algébrique $H_6(x, y) = k_6^\star$ pour $\epsilon = 1$.*

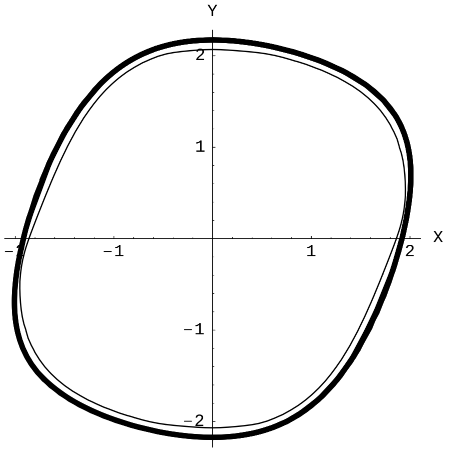

FIG. II–9 – *Le cycle limite de van der Pol (courbe extérieure) et l'approximation algébrique* $H_{18}(x,y) = k^{\star}_{18}$ *pour* $\epsilon = 1$.

Remarque : le cycle du système (II.2-3) est attracteur et

$$\frac{dR_n}{dx}(x = x_{1,n}) < 0. \tag{II.2-16}$$

On a donc une information sur la stabilité du cycle limite.

La question naturelle qui vient à l'esprit est :
Quand le système a plusieurs cycles limites, qu'en est-il des autres racines des polynômes $R_n(x)$ *?*

e) Quelques exemples

- Prenons par exemple :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{4}{5}x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{25}x^5 \\ G(x) &= x \end{aligned} \tag{II.2-17}$$

Le changement de variable ($x = \alpha\, u$; $y = \alpha\, v$) avec $\alpha^4 = \frac{5}{2}$ transforme ce système en un système de la forme (IV.2-11) avec $\nu = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \simeq 2,63 > 2.5$ et $\epsilon = \frac{4}{5}$, ce système a donc 2 cycles limites (voir (RYCHKOV, 1975)). On vrifie facilement, par intégration numérique du système (II.2-17), qu'il y a deux cycles limites.

Si l'on calcule $H_n(x,y)$ et $R_n(x)$ jusqu'a l'ordre $n = 16$, les polynômes $R_n(x)$ ont tous exactement deux racines positives de multiplicité 1. Il est fortement probable que r_n (le nombre de racines positives simples à l'ordre n) sera égal à 2 pour tout n pair.

Pour chaque valeur de n, on détermine les deux valeurs $k^{\star}_{1,n}$ et $k^{\star}_{2,n}$ pour lesquelles les courbes de niveau $H_n(x,y) = k^{\star}_{1,n}$ et $H_n(x,y) = k^{\star}_{2,n}$ sont tangentes aux droites $x = x_{1,n}$ et $x = x_{2,n}$ respectivement.

On voit dans la table II.5 que non seulement la première racine $x_{1,n}$ tend vers l'amplitude du premier cycle, mais que en plus, la deuxième racine $x_{2,n}$ tend vers l'amplitude du deuxième cycle !

n	$x_{1,n}$	$k^\star_{1,n}$	$x_{2,n}$	$k^\star_{2,n}$
2	0.852	0.726	1.854	3.439
4	0.905	0.711	1.885	14.5
6	0.931	0.739	1.905	67.59
8	0.945	0.784	1.920	334
10	0.955	0.840	1.931	1712
12	0.962	0.903	1.938	8973
14	0.967	0.974	1.945	47741
16	0.971	1.052	1.950	254400
x_Γ	1.0034	-	1.9992	-

TAB. II.5 – *Pour chaque valeur de n, on affiche pour le système (II.2-17) les deux racines positives de* $R_n(x)$ *et les valeurs* $k^\star_{1,n}$ *et* $k^\star_{2,n}$*, avec en comparaison les amplitudes* x_Γ *calculées par intégration numérique.*

De même, les courbes de niveau $H_n(x,y) = k^\star_{1,n}$ et $H_n(x,y) = k^\star_{2,n}$ fournissent des approximations (qui s'améliorent quand n augmente) au plus petit et au plus grand des deux cycles respectivement (voir figures II–10 et II–11)

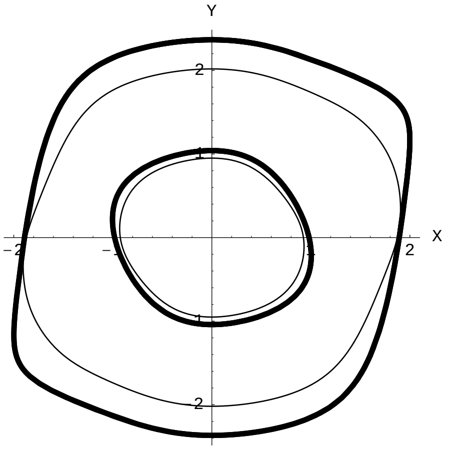

FIG. II–10 – *Les deux cycles limites du système (II.2-17) en trait gras et leurs approximations algébriques en trait fin* $H_6(x,y) = k^\star_{1,6}$ *et* $H_6(x,y) = k^\star_{2,6}$

Remarque : comme pour le système (II.2-3), la stabilité de chaque cycle limite semble être donnée par la valeur de la dérivée de $R_n(x)$ en $x = x_{i,n}$: le premier cycle est instable et $\frac{dR_n}{dx}(x = x_{1,n}) > 0$ et le deuxième cycle est stable et $\frac{dR_n}{dx}(x = x_{2,n}) < 0$

On a vu que nécessairement $x_{1,n}$ était inférieure à $x_{1,\Gamma}$ et on voit dans cet exemple que $x_{2,n} < x_{2,\Gamma}$. Le fait que $x_{1,n} \leq x_{1,\Gamma}$ est peut être établi grâce aux courbes de niveau $H_n(x,y)$ qui sont semi-perméables jusqu'à la première racine $x_{1,n}$ (figure II–6). Mais, à cause des droites $x = \pm x_{1,n}$, les courbes de niveau $H_n(x,y) = k$ pour $k > k^\star_{1,n}$ ne sont plus semi-perméables et donc on peut se poser la question suivante : les racines de $R_n(x)$ sont elles chacune une borne inférieure de chacun des cycles limites du système ? Nous allons voir que, même si cela semble être vrai quand pour n suffisamment

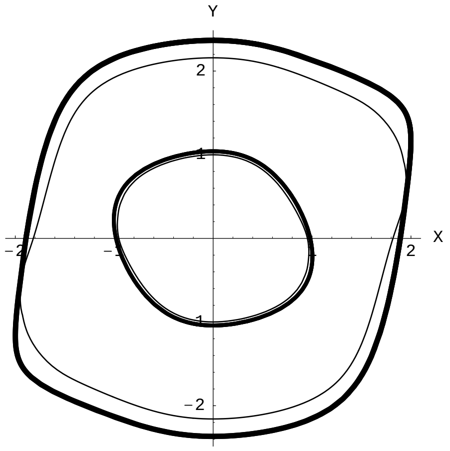

Fig. II–11 – *Les deux cycles limites du système (II.2-17) en trait gras et leurs approximations algébriques en trait fin* $H_{14}(x,y) = k^\star_{1,14}$ *et* $H_{14}(x,y) = k^\star_{2,14}$

grand, ce n'est pas toujours vrai à tous les rangs

- Considérons le système :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^5 - \frac{531}{250}x^3 + x \\ G(x) &= x \end{aligned} \qquad \text{(II.2-18)}$$

Ce système possède deux cycles limites proches l'un de l'autre. Cette exemple est choisit volontairement proche d'une bifurcation saddle-node : pour une valeur du coefficient en x^3 de $F(x)$ assez proche de $\frac{531}{250}$, les deux cycles limites se superposent pour ne former qu'un seul cycle semi-stable.

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$
2	0.839314	1.19145
4	0.915028	1.17992
6	0.954849	1.17527
8	0.979477	1.17328
10	0.996123	1.17255
12	1.00804	1.17247
14	1.01694	1.17275
16	1.02379	1.17321
18	1.0292	1.17376
20	1.03357	1.17436
22	1.03716	1.17496
30	1.04668	1.17723
x_Γ	1.0703	1.19109

Tab. II.6 – *Valeurs des racines des polynômes* $R_n(x)$ *pour le système (II.2-18)*

Tous les polynômes $R_n(x)$ calculés pour ce système ont deux racines strictement positives de multiplicité 1. Cela s'accorde avec le fait que ce système à deux cycles limites de multiplicité 1. On voit dans le tableau II.6 que la deuxième racine $x_{2,n}$ n'est pas inférieure à $x_{2,\Gamma}$ pour $n < 4$. On voit par contre que lorsque n croît, la relation d'ordre $x_{i,n} \leq x_{i,\Gamma}$ est de nouveau respectée. On peut remarquer aussi dans cet exemple que, bien que la première racine $x_{1,n}$ ne fasse que croître avec n, il n'en est pas de même pour la deuxième racine : $x_{2,n}$ commence par décroître puis, à partir d'un certain rang ($n = 14$), croît vers $x_{2,\Gamma}$.

- Un exemple où la suite r_n décroît.

Choisissons un exemple avec un polynôme $F(x)$ de degré 7 :

$$\begin{aligned} F(x) &= x(x^2 - 1.6^2)(x^2 - 4)(x^2 - 9) \\ G(x) &= x \end{aligned} \tag{II.2-19}$$

Ici aussi, la valeur de la deuxième racine $x_{2,n}$ diminue avec n. Cette deuxième racine se rapproche de la première et au rang $n = 6$, ces deux racines ont disparues (voir table II.7). Il ne reste alors que $x_{3,n}$. Le présence d'une seule racine à partir du rang 6, suggère l'existence d'un seul cycle, ce que l'on vérifie numériquement.

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	$x_{3,n}$
2	1.6	2	3
4	1.670	1.944	3.008
6			3.020
8			3.030
10			3.038
x_Γ			3.097

TAB. II.7 – *Deux des racines disparaissent pour $n = 6$*

En résumé on voit que si deux racines s'approchent lorsque n croît il se peut :

- que les deux racines s'annihilent mutuellement et qu'il n'y ait aucun cycle limite décrit par ces racines (c'est le cas du système (II.2-19))
- qu'à partir d'un certain rang, les racines s'éloignent de nouveau et qu'elles existent à tous les rangs supérieurs, chacune de ces deux racines correspondant à un cycle.

f) En résumé

Si l'on regroupe les résultats obtenus jusque ici, on voit que : chaque changement de signe de $R_n(x)$ où plutôt chaque racine positive de multiplicité impaire semble être liée à la présence d'un cycle limite. Mais l'exemple du système (II.2-19) nous montre que ceci n'est vrai qu'à partir d'un certain rang. Si l'on étudie maintenant le nombre de racines positives de multiplicité impaire en fonction du rang n, on a une suite de valeurs r_n ($r_2 = 3$, $r_4 = 3$, $r_6 = 1$, $r_8 = 1$, $r_{10} = 1$ etc. (pour le système (II.2-19))). Les exemples étudiés jusqu'à maintenant semblent nous montrer que la suite r_n est soit constante soit décroissante. Cette constatation nous avait poussés à faire très tôt (trop tôt) la conjecture suivante :

Conjecture 1 (Giacomini & Neukirch) *Soit L le nombre de cycles limites du système (II.2-1) avec $G(x) = x$ et $F(x)$ un polynôme impair. Soit r_n le nombre de racines (strictement positives et de multiplicité impaire) de R_n (n pair). Alors :*

- $L \leq r_n \; \forall n$ *pair*
- *si* $n' > n$ *alors* $r_n - r_{n'} = 2p$ *avec* p *entier*

Peu de temps après la publication de cette conjecture, LLIBRE, PIZARRO & PONCE (1998) ont donnés deux contre-exemples à la conjecture 1. Voici le premier :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{63}x^9 - \frac{3}{35}x^7 + \frac{1199}{8000}x^5 - \frac{83}{800}x^3 + \frac{297}{12800}x \\ G(x) &= x \end{aligned} \tag{II.2-20}$$

On vérifie numériquement que ce système a 4 cycles limites. On voit dans la table II.8 que la suite r_n croît !

n	2	4	6	8	10	12	14	30
r_n	2	2	2	2	4	4	4	4

TAB. II.8 – *Suite du nombre des racines positives simples des polynômes $R_n(x)$ pour le système (II.2-20). On voit que la suite croît au contraire de ce qui est annoncé dans la conjecture 1.*

LLIBRE, PIZARRO & PONCE (1998) ont donc formulé une nouvelle conjecture :

Conjecture 2 (Llibre, Pizarro & Ponce (1998)) *Soit L le nombre de cycles limites du système (II.2-1) avec $G(x) = x$ et $F(x)$ un polynôme impair. Soit r_n le nombre de racines strictement positives de multiplicité impaire de R_n (n pair). Alors il existe un rang n_0 tel que $L = r_n \; \forall n \geq n_0$.*

Cette nouvelle conjecture n'empêche pas la suite r_n d'osciller autour de la valeur L, elle annonce simplement que, à partir d'un certain rang, tous les polynômes R_n auront L racines.

D'autre part, on verra au chapitre IV que pour des polynômes $F(x)$ de degré 5, les suites r_n sont tout le temps décroissantes.

Il semble qu'avec la version améliorée de l'algorithme (voir chapitre III), les nouvelles suites r_n soient toutes décroissantes. Ici la prudence s'impose, une investigation plus profonde des diagrammes de bifurcation est nécessaire.

Enfin, le point le plus important paraît être que cette méthode donne accés au nombre de cycles limites, à leurs localisations dans l'espace des phases et à leurs multiplicités : le nombre, la valeur, la multiplicité des racines strictement positives de $R_n(x)$ quand $n \to \infty$ donne le nombre, l'amplitude et la multiplicité de chaque cycle limite du système (II.2-1).

— II.3 — Remarques supplémentaires

On a vu que l'on pouvait toujours donner une borne inférieure exacte à l'amplitude du plus petit cycle limite du système (II.2-1) et ce quel que soit le nombre de cycles dans le système. Plusieurs auteurs ont établi des bornes supérieures pour ce plus petit cycle limite. ALSHOLM (1992) a prouvé que le cycle limite du système (II.2-3) avait une amplitude $x_\Gamma(\epsilon) < 2.8025$. Puis ODANI (1996) a amélioré cette borne à 2.5425 puis 2.3439. Ces valeurs sont valables pour tout ϵ.

Si maintenant on s'intéresse non plus aux polynômes $R_n(x)$ mais aux polynômes $g_{1,n}(x)$, on remarque que ceux-ci ont le même nombre de racines strictement positives que les premiers, mais que ces racines sont toujours supérieures aux racines des polynômes $R_n(x)$. En fait, il semble que les racines des polynômes $g_{1,n}(x)$ fournissent des bornes supérieures aux amplitudes de chacun des cycles limites du système (II.2-1). Dans la table II.9, on peut voir que les bornes supérieures données par les polynômes $g_{1,n}(x)$ sont plus fines que les bornes supérieures établies précedement. Les autres polynômes $g_{j,n}(x)$ (avec $j = 3, 5, \dots, n-3$) fournissent aussi des bornes supérieures mais moins précises que lorsque $j = 1$.

n	$x_{1,n}$	xg_{1_n}
2	1.73205	
4	1.81901	2.23607
6	1.86313	2.16174
8	1.8906	2.12799
10	1.90957	2.10861
20	1.95568	2.07062
30	1.97456	2.05748
40	1.98498	2.05055
x_Γ	2.0233	

TAB. II.9 – *Valeurs des racines des polynômes $R_n(x, \epsilon = 3)$ et $g_{1,n}(x, \epsilon = 3)$ pour le système (II.2-3). La valeur x_Γ, calculée par intégration numérique est comprise entre les deux suites.*

Les exemples donnés comme applications sont tous des exemples avec $G(x) = x$. On va voir ici dans quelle mesure on peut considérer des polynômes $G(x)$ plus généraux.

a) Changement de variable

Si $G(x)$ n'a pas d'autre racine que $x = 0$ et est du signe de x :

$$x\,G(x) > 0 \text{ et } G(0) = 0 \tag{II.3-1}$$

alors le changement de variables suivant :

$$u = sgn(x)\sqrt{2v(x)} \quad \text{où} \quad v(x) = \int_0^x G(s)ds \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{G(x)}{u} \tag{II.3-2}$$

change le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -G(x) \end{aligned}$$

en :

$$\begin{aligned} u' &= y - F\left(x(u)\right) \\ y' &= -u \quad \text{où } ' \equiv \frac{d}{d\tau} \end{aligned}$$

Le principal inconvénient de ce changement de variable est que il est parfois difficile et souvent impossible d'écrire explicitement le polynôme F en fonction de la nouvelle variable u. Si $G(x) = ax + bx^3$, il nous faut exprimer l'ancienne variable x en fonction de la nouvelle variable u :

$$u^2 = 2(ax + bx^3)$$

à savoir résoudre une équation algébrique de degré 3. $F(u)$ ne sera alors pas un polynôme, et peut prendre une forme très compliquée. Et si $G(x)$ est de degré supérieur où égal à 5, alors on ne peut même plus écrire $x(u)$ sont forme de fonction rationnelle des coefficients de $G(x)$!

b) Si $G(x)$ n'a pas de racine non nulle

On va voir que si $G(x)$ répond au critère (II.3-1), alors l'algorithme fourni toujours les bonnes informations. Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} F(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^3 + x \\ G(x) &= x + 2x^3 \end{aligned} \tag{II.3-3}$$

On vérifie numériquement que ce système a deux cycles limites. Les polynômes $R_n(x)$ ont tous 2 racines positives de multiplicité 1. La présence du terme en x^3 dans $G(x)$ n'altère en rien les résultats de l'algorithme.

n	2	4	6	8	10	20	x_Γ
$x_{1,n}$	0.707	0.748	0.7671	0.777	0.7841	0.798	0.813
$x_{2,n}$	1.414	1.439	1.454	1.463	1.470	1.486	1.507

TAB. II.10 – *Valeurs des racines de $R_n(x)$ pour le système (II.3-3)*

c) Lorsque $G(x)$ a une racine non nulle

Etudions maintenant un cas où le polynôme $G(x)$ à des racines non nulles, mais reste impair :

$$\begin{aligned} F(x) &= \epsilon(ax + cx^3) \\ G(x) &= x - x^3 \end{aligned} \tag{II.3-4}$$

Ce système a trois points d'équilibre : un foyer $O(0,0)$ et deux points de selle $S_1(-1, \epsilon(a+c))$, $S_2(1, -\epsilon(a+c))$ (voir figure II–12).

BLOWS & PERKO (1994) ont étudié ce système, lorsque ϵ est petit, avec la méthode de Melnikov[11] et ils ont montré l'existence, quand $\epsilon \to 0$, d'un cycle limite pour certaines valeurs de a et de c.

On peut voir le système (II.3-4) comme la perturbation d'un centre non-linéaire. Dans ce cas la fonction de Melnikov contient des fonctions elliptiques et n'est pas aussi simple à calculer ni à étudier que lorsque le centre perturbé est linéaire (lorsque $G(x) = x$). Nous allons voir que, dans ce type

---

[11] Une importante partie de la seconde édition de (PERKO, 1996) est dédiée à la méthode de Melnikov

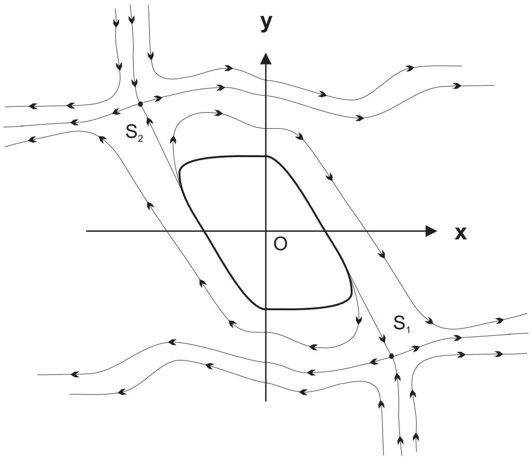

FIG. II–12 – *Portrait de phase du système (II.3-4) avec* $\epsilon = 1$, $a = 1/2$, $c = -2$, *il y a un foyer stable en* $O(0,0)$, *deux points de selle en* $S_1(-1, \frac{3}{2})$ *et* $S_2(1, -\frac{3}{2})$ *et un cycle limite.*

de situation, les polynômes $H_n(x,y)$ et $R_n(x)$ peuvent être une solution alternative à la méthode de Melnikov car ils sont, eux, toujours faciles à calculer. *De plus, encore une fois, les résultats obtenus avec les polynômes* $H_n(x,y)$ *et* $R_n(x)$ *seront valables pour tout* ϵ *ce qui n'est pas vrai pour la méthode de Melnikov.*

On choisit $a = \frac{1}{2}$, $c = -2$, $\epsilon = 1$. On trouve un unique cycle limite par intégration numérique. Si maintenant on calcule les polynômes $H_n(x,y)$ et $R_n(x)$ jusqu'à l'ordre $n = 20$, on remarque que les polynômes ont tous 2 racines positives. Une des deux racines est liée au cycle limite (voir table II.11) et l'autre racine vaut $x_{2,n} = 1$ pour tout n. Cette deuxième racine est liée aux deux points d'équilibre S_1 et S_2.

n	$x_{1,n}$	$k_n^\star$
2	0.5	0.22
4	0.527	0.06
6	0.542	$1.6\,10^{-2}$
8	0.550	$4.9\,10^{-3}$
10	0.556	$1.4\,10^{-3}$
12	0.560	$4.3\,10^{-4}$
14	0.563	$1.3\,10^{-4}$
16	0.566	$3.9\,10^{-5}$
18	0.567	$1.2\,10^{-5}$
20	0.569	$3.5\,10^{-6}$
x_Γ	0.586	-

TAB. II.11 – *Racines de* $R_n(x)$ *pour le système (II.3-4) avec* $\epsilon = 1$, $c = -2$, $a = 1/2$. *La deuxième racine vaut* $x_{2,n} = 1$ *pour tout* n. *Elle correspond au points d'équilibre de type selle en* $(x = \pm 1, y = \mp\frac{3}{2})$.

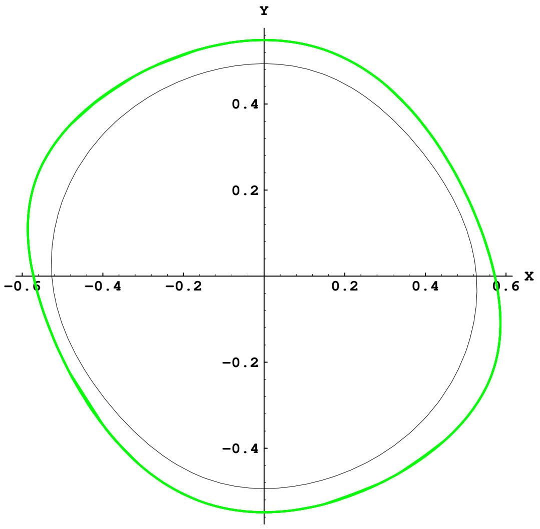

FIG. II–13 – *Cycle limite (courbe extérieure) du système (II.3-4) (avec* $\epsilon = 1$*,* $c = -2$*,* $a = 1/2$*), et son approximation algébrique* $H_4(x, y) = k_4^\star$

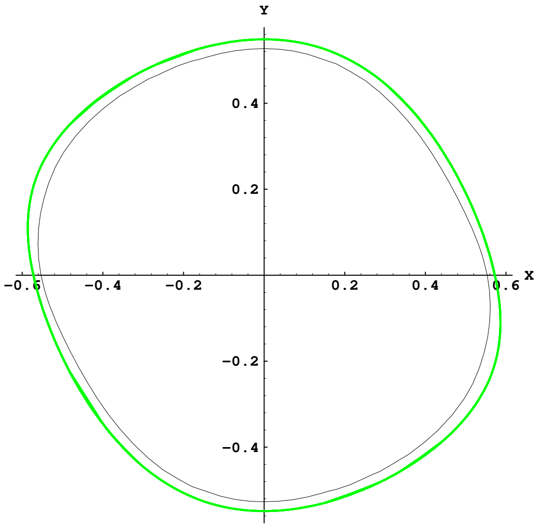

FIG. II–14 – *Cycle limite (courbe extérieure) du système (II.3-4) (avec* $\epsilon = 1$*,* $c = -2$*,* $a = 1/2$*), et son approximation algébrique* $H_{20}(x, y) = k_{20}^\star$

Les points d'équilibre $E(x_e, y_e)$ sont tels que

$$\begin{aligned} y_e &= F(x_e) \qquad \text{(II.3-5)} \\ \text{et } G(x_e) &= 0 \qquad \text{(II.3-6)} \end{aligned}$$

On voit que leurs abscisses sont les racines de $G(x)$. La relation (II.A-7) nous montre par ailleurs que les polynômes $R_n(x)$ ont toujours les racines de $G(x)$ comme racines. On comprend donc pourquoi, pour le système (II.3-4), il existe une racine $x_{2,n} = 1$ pour tout n. Ainsi, si l'on fait abstraction de la racine $x_{2,n} = 1$ qui est incontournable, le nombre de racines donne toujours le nombre de cycles du système et l'on voit sur les figures II–13 et II–14 que les courbes $H_n = k_n^\star$ approchent le cycle limite.

d) Exemple avec un cycle limite algébrique

On a vu que les polynômes $H_n(x, y) = k_n$ représentaient une approximation de l'équation des cycles limites du système (II.2-1). Il semble même que lorsque $n \to \infty$, la courbe $H_n(x, y) = k_n$ et le cycle soit confondus. Il faut remarquer ici que les polynômes $H_n(x, y)$ ne sont pas construits comme le développement d'une fonction analytique autour d'un point d'équilibre (comme la réciproque du facteur intégrant voir (Giacomini & Viano, 1995; Giacomini, Llibre & Viano, 1996)) :

$$H_{n+2} \neq H_n + y^{n+1} g_{n+1,n+2} + y^{n+2} g_{n+2,n+2} \qquad \text{(II.3-7)}$$

tout simplement car :

$$g_{j,n} \neq g_{j,n+2} \qquad \text{(II.3-8)}$$

Odani (1995) a prouvé que le cycle limite du système (II.2-3) n'est pas algébrique. Les polynômes $H_n(x, y)$ tendent donc dans ce cas vers une fonction transcendante.

Mais il y a d'autres exemples où l'équation du cycle limite du système (II.2-1) est algébrique. Celui qui suit est du à Wilson (1964) :

$$\begin{aligned} F(x) &= a(-x + \frac{x^3}{3}) \\ G(x) &= x + \frac{a^2 x^3 (-4 + x^2)}{16} \end{aligned} \qquad \text{(II.3-9)}$$

Ce système admet :

$$f(x, y, a) = -4 + x^2 + \frac{a^2 x^6}{144} - \frac{a x^3 y}{6} + y^2 = 0 \qquad \text{(II.3-10)}$$

comme unique cycle limite si $a^2 \leq 4$. Les polynômes $R_n(x)$ ont tous une unique racine positive et les courbes $H_n(x, y) = k_n^\star$ approchent la courbe d'équation $f(x, y, a) = 0$ (voir figure II–15 et II–16).

Mais les polynômes $H_n(x, y)$ n'ont pas la même structure que $f(x, y, a)$ (pour $n > 2$, $H_n(x, y)$ n'a pas de terme en y^2 ni en x^2). Or nous prétendons que $H_n(x, y) - k_n^\star$ quand $n \to \infty$ décrit le cycle de façon exacte. Il faut donc que $H_n(x, y) - k_n^\star$ se factorise sous la forme :

$$\lim_{n \to \infty} H_n(x, y) - k_n^\star = f(x, y, a)\, W(x, y) \qquad \text{(II.3-11)}$$

avec $W(x, y) \neq 0$ sur le tout plan.

Malheureusement, il est difficile de trouver la trace de cette factorisation quand n est fini.

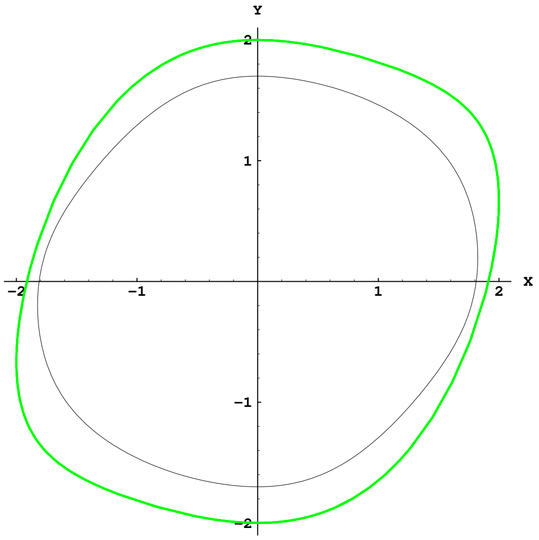

Fig. II–15 – *Le cycle limite algébrique du système (II.3-9) avec* $a = 1$ *et son approximation (algébrique)* $H_6(x, y) = k_6^\star$.

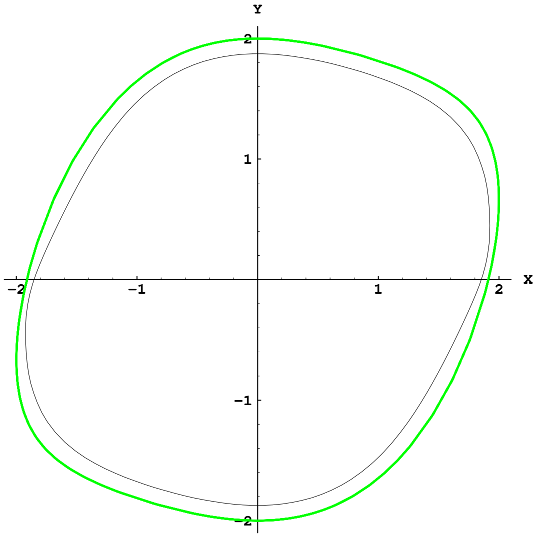

Fig. II–16 – *Le cycle limite algébrique du système (II.3-9) avec* $a = 1$ *et son approximation (algébrique)* $H_{12}(x, y) = k_{12}^\star$.

e) Un exemple non-symétrique

Nous avons étudier jusqu'à maintenant que des systèmes avec des polynômes $F(x)$ et $G(x)$ impairs, ce qui confère une symétrie centrale (de centre $O(0,0)$) à l'espace des phases. Cette propriété semble nécessaire au bon fonctionnement de la méthode. Nous allons voir pourquoi :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (-x^3 + x^2 + x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \qquad \text{(II.3-12)}$$

Lins, de Melo & Pugh (1977) ont montré que ce type de système avait un unique cycle limite. Le fait que le polynôme $F(x)$ ne soit pas impair n'empêche en rien de calculer les polynômes $R_n(x)$ et $H_n(x,y)$ et de suivre l'algorithme comme il a été décrit plus haut. Dans ce cas aussi nous prendront toutes les constantes d'intégration nulles (même si dans ce cas il n'y a plus aucune justification à agir ainsi). Les polynômes $R_n(x)$ ne sont plus pairs. Et les polynômes $H_n(x,y)$ n'ont plus la symétrie $(x,y) \to (-x,-y)$. On voit dans la table II.12 qu'il y a une racine simple strictement négative et une racine simple strictement positive. Ces deux racines n'ont pas la même valeur absolue. Il en est de même pour les valeurs de x_Γ^+ et x_Γ^- (l'amplitude maximale positive et négative du cycle limite). On voit dans la table II.12 que les valeurs des racines $x_{\pm 1,n}$ ne tendent pas vers $x_\Gamma\pm$. Enfin si l'on calcule les valeurs de $k^\star_{-1,n}$ et de $k^\star_{+1,n}$ et que l'on trace les courbes de niveau $H_n(x,y) = k^\star_{\pm 1,n}$, on remarque que ces courbes de niveau ne décrivent pas entièrement le cycle limite mais que chacune d'elle décrit *une partie* du cycle limite (figure II–17). On voit donc que, dans le cas non-symétrique, même si l'algorithme permet de trouver un polynôme $R_n(x)$ ne dépendant que d'une seule variable,

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	$x_\Gamma\pm$
$x_{1,n}$	1.62	1.69	1.73	1.76	1.77	1.78	1.79	1.80	1.81	1.81	1.46
$x_{-1,n}$	-0.62	-0.65	-0.67	-0.68	-0.69	-0.69	-0.69	-0.70	-0.70	-0.704	-1.13

Tab. II.12 – *Valeurs des racines strictement positives et négatives des polynômes $R_n(x)$ pour le système (II.3-12)*

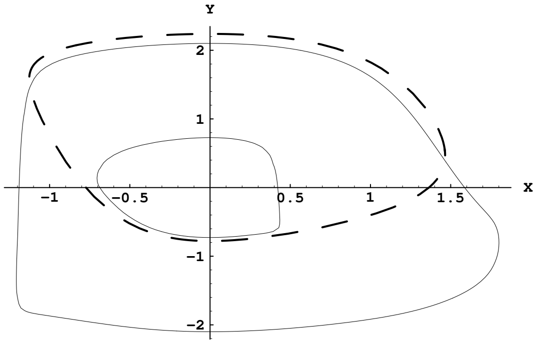

Fig. II–17 – *La courbe en pointillé est le cycle limite unique du système (II.3-12) et en trait continu ses approximations algébriques.*

la méthode ne fonctionne pas correctement, à savoir que les racines de $R_n(x)$ et les courbes de niveau de $H_n(x,y)$ ne décrivent pas le cycle limite. Un choix judicieux des constantes d'intégration est à envisager.

f) Une façon de tester la convergence

Considérons le système (II.2-3) qui a un unique cycle limite. On a vu que, selon toute vraisemblance, les courbes $H_n(x,y) = k_n^\star$ tendent vers le cycle limite quand $n \to \infty$. Or, si l'on veut que la courbe $H_\infty(x,y) = k_\infty^\star$ soit confondue avec le cycle limite, il faut que le gradient de cette courbe soit perpendiculaire au flot en tout point du cycle limite :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} H_n \cdot \boldsymbol{Flot} &\equiv 0 \quad \forall(x,y) \in \Gamma \text{ quand } n \to \infty && \text{(II.3-13)} \\ \text{donc } R_n(x) &\equiv 0 \quad \text{pour } -x_\Gamma < x < x_\Gamma \text{ quand } n \to \infty && \text{(II.3-14)} \end{aligned}$$

Il nous faut donc étudier les coefficients des polynômes $R_n(x)$ au fur et à mesure que n croît. Mais, comme on remarque dans la table II.3 que les valeurs de $k_n^\star$ tendent vers l'infini quand $n \to \infty$, plutôt que d'étudier les polynômes $R_n(x)$ directement, on préfère étudier les courbes $\frac{H_n(x,y)}{k_n^\star} = 1$ et donc les polynômes $\frac{R_n(x)}{k_n^\star}$.

n	x^2	x^4	x^6	x^8	x^{10}	x^{12}	x^{14}	x^{16}	x^{18}	x^{20}	x^{22}
2	0.67	-0.22									
4		0.76	-0.45	0.11	-0.012						
6			0.7	-0.61	0.24	-0.053	0.007	-0.0004			
8				0.59	- 0.67	0.36	- 0.11	0.024	- 0.0034	0.00031	- 1.4 10^{-5}

TAB. II.13 – *Coefficients des polynômes* $\frac{R_n(x)}{k_n^\star}$ *pour le système (II.2-3) avec* $\epsilon = 1$.

On remarque qu'à chaque ordre, le coefficient du monôme de plus grande puissance décroît avec n et devient petit devant 1. Mais cela ne suffit pas, il faudrait que tous les coefficients tendent vers zéro uniformément. Pour ce qui est du comportement proche de $x = 0$, on remarque sur la figure II–18 que les courbes $y = R_n(x)$ sont de plus en plus aplaties à l'origine. Cela est du au fait que les polynômes ont une racine d'ordre n en $x = 0$. Par contre, les courbes ont leur maximum de plus en plus haut. Ce maximum est toujours placé avant la racine $x_{1,n}$ et il approche de cette racine quand n augmente. Il est donc *possible* que les courbes $y = R_n(x)$ tendent vers une fonction plate qui aurait un pic infini en $x = x_{1,\infty} = x_\Gamma$. Si tel était le cas, la propriété (II.3-14) serait vraie pour $x < x_\Gamma$. Il faudrait donc que en $x_{1,\infty} = x_\Gamma$, la courbe $H_\infty = k_\infty^\star$ ait aussi son gradient perpendiculaire au flot, ce qui est vérifié car $k_n^\star$ est choisi justement pour que $H_n(x,y)$ ait une tangente verticale en $x = x_{1,n}$ et le cycle lui même a une tangente verticale en x_Γ (voir figure II–7).

g) Courbes de niveau de $H_n(x,y)$

Un point important de l'algorithme est de savoir si les courbes de niveau de $H_n(x,y)$ sont toutes fermées. Ce point est important pour deux raisons :

- Comme l'on conjecture que les courbes $H_n(x,y) = k_n^\star$ approchent les cycles de (II.2-1) au fur et à mesure que n augmente, cela sous tend l'hypothèse que ces courbes sont fermées !

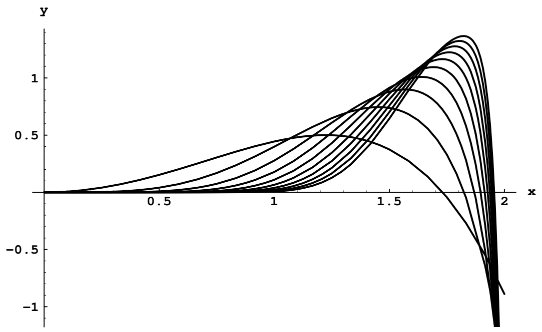

FIG. II–18 – *Courbes* $y = \frac{R_n}{k_n}$ *pour* $2 \leq n \leq 20$ *pour le système (II.2-3) avec* $\epsilon = 1$. *La courbe avec* $n = 20$ *est celle qui a son maximum le plus haut.*

- Dans la bande à l'intérieur de la première racine de $R_n(x)$ si les courbes de niveau sont fermées alors $H_n(x, y)$ est une fonction de Lyapunov, ce qui prouve la stabilité (ou l'instabilité) asymptotique de l'origine (globale si $R_n(x)$ n'a pas de changement de signe).

Sans être une démonstration, le raisonnement suivant nous laisse croire que les courbes de niveau de H_n sont toutes fermées :

Considérons $H_n(x, y)$ comme un Hamiltonien et étudions son flot associé. Les courbes de niveau de $H_n(x, y)$ sont donc les trajectoires du système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H_n}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H_n}{\partial x} \end{aligned} \qquad \text{(II.3-15)}$$

Etudions les points d'équilibre de ce système (II.3-15). Ce sont les points pour lesquels :

$$\frac{\partial H_n}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_n}{\partial x} = 0$$

donc ce sont les points pour lesquels (si $G(x) = x$) :

$$R_n(x) = (y - F(x))\,\frac{\partial H_n}{\partial x} - x\frac{\partial H_n}{\partial y} = 0 \qquad \text{(II.3-16)}$$

Or $R_n(x)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = x_{i,n}$.

- Si on remplace $x = 0$ dans $\frac{\partial H_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial H_n}{\partial y}$, on trouve respectivement 0 et $n\, y^{n-1}$. Un premier point fixe du système (II.3-15) est donc $O(0, 0)$.
- En $x = x_{i,n}$, on montre dans l'annexe A que $\frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{i,n}, y)$ s'annule pour $y = F(x_{i,n})$. Par contre le polynôme $\frac{\partial H_n}{\partial x}(x_{i,n}, y)$ ne s'annule pas en $y = F(x_{i,n})$. En fait, il semble que ce polynôme n'ait pas de racines réelles en y. Par exemple, pour le système (II.2-3), $\frac{\partial H_4}{\partial x}(x_{1,4}, y_{1,4}) \simeq 31$.

Le système (II.3-15) a donc un seul point d'équilibre en $0(0,0)$. Il est facile de voir qu'en ce point le jacobien est la matrice nulle. La partie de plus bas degré de $H_n(x,y)$ est un polynôme homogène de degré n qui, une fois transformé en un polynôme à une variable, semble être un polynôme pair strictement croissant. Les courbes de niveau de $H_n(x,y)$ sont donc fermées autour de l'origine. On a donc à faire à un centre local. Comme il n'y a pas d'autres points d'équilibre, c'est un centre global. Les trajectoires de (II.3-15), qui sont aussi les courbes de niveau de $H_n(x,y)$, sont donc fermées sur tout le plan.

– Annexe A –

Etudions l'algorithme pas à pas : On propose d'abord une fonction à deux variables x et y :

$$H_n(x,y) = y^n g_{n,n}(x) + y^{n-1} g_{n-1,n}(x) + y^{n-2} g_{n-2,n}(x) + \ldots + y g_{1,n}(x) + g_{0,n}(x) \qquad \text{(II.A-1)}$$

Il s'agit de calculer $\dot{H}_n(x,y)$ et de faire en sorte que cette fonction ne dépende que de la variable x. On ne considère ici que des polynômes $F(x)$ et $G(x)$ impairs.

$$H_n(x,y) = \sum_{i=0}^{i=n} y^1\, g_{i,n}(x)$$

$$\dot{H}_n = (y - F(x))\, \frac{\partial H_n}{\partial x} - G(x)\, \frac{\partial H_n}{\partial y} \qquad \text{(II.A-2)}$$

$$\dot{H}_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n} y^{i+1}\, g'_{i,n}(x) - F(x) \sum_{i=0}^{n} y^1\, g'_{i,n}(x) - G(x) \sum_{i=1}^{n} i\, y^{i-1}\, g_{i,n}(x)$$

si on regroupe maintenant les puissances de y ensembles :

$$\begin{aligned} \dot{H}_n(x,y) \quad = \quad & -F(x) g'_{0,n} - G(x) g_{1,n} + \sum_{i=1}^{n-1} y^1 \left(g'_{i-1,n} - F(x) g'_{i,n} - (i+1)\, G(x)\, g_{i+1,n} \right) \\ & + y^n \left(g'_{n-1,n} - F(x) g'_{n,n} \right) + y^{n+1} g'_{n,n} \qquad \text{(II.A-3)} \end{aligned}$$

On veut annuler tout les coefficients des termes en y^1, on commence par le terme de plus haut degré :

$$g'_{n,n}(x) = 0 \quad \text{donc} \quad g_{n,n}(x) = C_{n,n}$$

ici le fait de prendre $C_{n,n} = 1$ n'enlève rien à la généralité du problème, c'est exactement comme si l'on divisait $H_n(x,y)$ par $C_{n,n}$. Ainsi le terme en y^n dans (II.A-3) devient :

$$y^n g'_{n-1,n}(x)$$

on l'annule en faisant $g_{n-1,n}(x) = C_{n-1,n} = 0$. La constante d'intégration est choisie nulle, comme le seront toutes les autres constantes à venir[12] : $C_{i,n} = 0$ si $0 \leq i < n$. Une fois que l'on a trouvé les deux premiers polynômes $g_{n,n}(x)$ et $g_{n-1,n}(x)$ on peut utiliser la formule de récurrence :

$$g'_{i,n}(x) = g'_{i+1,n}(x)\, F(x) + (i+2)\, g_{i+2,n}(x)\, G(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n-2 \qquad \text{(II.A-4)}$$

qui est obtenue en posant $i \rightarrow i+1$ dans le coefficient du terme en y^1 dans $\dot{H}_n$ (équation (II.A-3)). Quand on a calculé tout les $g_{i,n}(x)$, on a accès au reste :

$$R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \dot{H}_n = -F(x)\, g'_{0,n}(x) - G(x)\, g_{1,n}(x) \qquad \text{(II.A-5)}$$

Ainsi le polynôme $R_n(x)$ ne dépend pas de la variable y, on peut donc utiliser des raccourcis pour le calculer : dans la formule (II.A-2) on peut choisir y comme l'on veut sans changer $R_n(x)$.

---

[12] Le choix des constantes d'intégration est discuté en annexe B.

Si l'on choisit de faire $y = 0$ dans (II.A-2), on trouve :

$$R_n(x) = -F(x)\frac{\partial H_n}{\partial x}(x, y = 0) - G(x)\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y = 0) \tag{II.A-6}$$

or :

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = y^{n-2}\, g'_{n-2,n} + y^{n-3}\, g'_{n-3,n} + \ldots + g'_{0,n}$$

donc :

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x, y = 0) = g'_{0,n}(x)$$

de même

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y = 0) = g_{1,n}(x)$$

ainsi on retrouve la formule (II.A-5).

Si l'on choisit de faire $y = F(x)$ dans (II.A-2), on trouve :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -G(x)\,\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y = F(x)) \\ \text{donc } R_n(x) &= -G(x)\,\big(g_{1,n} + 2\,g_{2,n}\,F(x) + \ldots + i\,g_{i,n}\,F^{i-1}(x) + \ldots + n\,g_{n,n}\,F^{n-1}(x)\big) \end{aligned} \tag{II.A-7}$$

- **Propriétés de R_n**

Si le degré de $F(x)$ est m et le degré de $G(x)$ est p alors le degrés de R_n est supérieur ou égal à $(n-1)m + p$.

Les polynômes $g_{i,n}$ ont la parité de i[13] . On peut comprendre ce fait par récurrence : $g_{n,n} = 1$ est pair et $g_{n-1,n} = 0$ est impair. Maintenant utilisons la formule de récurrence (II.A-4) : pour i pair, $g_{i+1,n}$ est impair et donc sa dérivée est paire. Le polynôme $F(x)$ est impair et donc le produit $g'_{i+1,n}\,F$ est impair. $g_{i+2,n}(x)$ est pair et $G(x)$ est impair donc le produit $g_{i+2,n}\,G$ est impair. Ainsi $g'_{i,n}$ est impair et donc sa primitive sera paire. Le même type de raisonnement implique que les polynômes $g_{i,n}$ sont impairs pour i impair.

Maintenant que l'on connaît la parité des polynômes $g_{i,n}$, il est facile d'en déduire d'aprés l'équation (II.A-7) que les polynômes $R_n(x)$ sont pairs.

On peut aussi démontrer par récurrence que les polynômes $g_{i,n}(x)$ ont une racine de multiplicité $n - i$ en $x = 0$ pour $2 \leq i \leq n$. Au rang 2, le calcul direct nous donne : $g_{n-2,n}(x) = \frac{n}{2}\,x^2$. Au rang 3 : $g'_{n-3,n}(x) = nx\,F(x)$. Or $F(x)$ a une racine de multiplicité 1 en $x = 0$, donc $g'_{n-3,n}(x)$ a une racine de multiplicité 2 et sa primitive, puisque que l'on choisit de prendre la constante d'intégration nulle, aura une racine de multiplicité 3. Maintenant si on considère la formule de récurrence (II.A-4) : $g'_{i+1,n}$ est de multiplicité $n - i - 2$. Multiplié par $F(x)$ cela nous donne un polynôme de multiplicité $n - i - 1$. $g_{i+2,n}$ est de multiplicité $n - i - 2$ et multiplié par $G(x)$ on obtient une multiplicité $n - i - 1$. Ainsi d'après (II.A-4) $g'_{i,n}$, qui est l'addition de deux polynômes de multiplicité $n - i - 1$, est donc de multiplicité $n - i - 1$. Sa primitive, $g_{i,n}(x)$, est donc de multiplicité $n - i$ en zéro.

La formule (II.A-7) montre maintenant clairement que $R_n(x)$ a une racine de multipicité n en $x = 0$.

---

[13] seulement si les constantes $C_{i,n}$ sont prises nulles pour i impair.

On note $x_{i,n}$ les racines strictement positives, elles ont chacune leur symétrique $x_{-i,n} = -x_{i,n}$. Pour chaque racine $x_{i,n}$, on calcule la valeur $k^\star_{i,n}$ telle que la courbe de niveau $H_n(x,y) = k^\star_{i,n}$ est tangente à la droite $x = x_{i,n}$:

$$\begin{aligned} H_n(x_{i,n}, y) &= k^\star_{i,n} \\ \frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{i,n}, y) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.A-8)}$$

Les 2 inconnues du système (II.A-8) sont y et $k^\star_{i,n}$. On trouve y avec la deuxième équation. Ensuite, il suffit de réinjecter ce y dans la première équation pour trouver $k^\star_{i,n}$. Regardons de plus près la deuxième équation du système (II.A-8). C'est une équation en y de degré $n-1$. Quelles en sont les racines ? En $x = x_{i,n}$ on a :

$$R_n(x_{i,n}) = (y - F(x_{i,n}))\,\frac{\partial H_n}{\partial x}(x_{i,n}, y) - G(x_{i,n})\,\frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{i,n}, y) = 0$$

On peut voir $R_n(x_{i,n})$ comme la différence de deux polynômes en y :

$$R_n(x_{i,n}) = P_1(y) - P_2(y) = 0$$

Comme $R_n(x)$ ne dépend pas de y, cette différence est nulle pour tout y donc : $P_1(y) = P_2(y)$ $\forall y$ ainsi :

$$(y - F(x_{i,n}))\,\frac{\partial H_n}{\partial x}(x_{i,n}, y) = G(x_{i,n})\,\frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{i,n}, y) \quad \forall y$$

donc le polynôme $\frac{\partial H_n}{\partial y}(x_{i,n}, y)$ a une racine en $y = F(x_{i,n})$ que l'on note $y_{i,n}$. Y-a-t'il d'autres racines réelles en y ? Autrement dit le polynôme $\frac{\partial H_n}{\partial x}(x_{i,n}, y)$ a t'il des racines réelles en y ? La question est ouverte. Dans tous les exemples que nous avons considérés la réponse était non. La deuxième équation du système (II.A-8) n'a donc qu'une solution réelle en $y = y_{i,n} = F(x_{i,n})$, ce qui revient à dire qu'il n'y a qu'une seule courbe de niveau de $H_n(x,y)$ qui est tangente à la droite $x = x_{i,n}$. On note $M_{i,n}$ le point de coordonnées $(x_{i,n}, y_{i,n})$.

Les points $M_{i,n}$ sont les points pour lesquels x est maximum sur les courbes de niveau $H_n(x,y) = k^\star_{i,n}$. De plus ils sont tous sur la courbe $y = F(x)$. Ceci est en accord avec le fait que le point de x maximum sur chaque cycle limite est obligatoirement sur la courbe $y = F(x)$ puisque $\dot{x} = 0$ pour $y = F(x)$.

Les cycles limites ont leur y maximum en $x = 0$ ($\dot{y} = 0$ en $G(x) = 0$ or $G(0) = 0$). Il en est de même des courbes de niveau de $H_n(x,y)$ car :

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x = 0, y) = y^{n-2}\,g'_{n-2,n}(0) + y^{n-3}\,g'_{n-3,n}(0) + \ldots + g'_{0,n}(0) = 0$$

car $g_{i,n}(x = 0) = 0$.

Voici le code Mathematica utilisé pour calculer les polynômes $H_n(x,y)$ et $R_n(x)$ ainsi que les racines $x_{i,n}$ et les valeurs $y_{i,n}$ et $k^\star_{i,n}$:

```
{F=ep*(x^3/3-x)/.ep->1,G=x}
```

```
{F=8/10*x-4/3*x^3+32/100*x^5,G=x}

{F=x^9/63-3/35*x^7+1199/8000*x^5-83/800*x^3+297/12800*x,G=x}

Clear[g,x0,y0,k,nbr,H,R];{p=y-Expand[F],q=-G}

ordreinitial=2;ordrefinal=10;
Do[
ordre=compteur*2;
Print["ordre ", ordre];
temp=Sum[y^(i)*g[ordre][i][x],{i,0,ordre}];
g[ordre][ordre][x_]=1;
g[ordre][ordre-1][x_]=0;
Do[
j=ordre-2-jj;
g[ordre][j][x_]=Integrate[D[g[ordre][j+1][x],x]*F+(j+2)*g[ordre][j+2][x]*G,x];
Print[jj],
{jj,0,ordre-2}];
R[ordre]=-g[ordre][1][x]*G-D[g[ordre][0][x],x]*F;
H[ordre]=Expand[temp],
{compteur,ordreinitial/2,ordrefinal/2}]

ordreinitial=2;ordrefinal=10;
Do[
ordre=compteur*2;
Print["ordre ", ordre];
nombreracine=0;
racines=NSolve[R[ordre]==0,x,WorkingPrecision->25];
Do[
If[Im[racines[[j,1,2]]]==0 && Re[racines[[j,1,2]]]>0,
nombreracine=nombreracine+1;Print[racines[[j,1,2]]];x0[ordre][nombreracine]=
racines[[j,1,2]]],
{j,1,Exponent[R[ordre],x]}];
nbr[ordre]=nombreracine,
{compteur,ordreinitial/2,ordrefinal/2}]

ordreinitial=2;ordrefinal=10;
Do[
ordre=compteur*2;
Print["ordre" ordre];
Do[
temp2=NSolve[(D[H[ordre],y]/.x->x0[ordre][i1])==0,y,
WorkingPrecision->20];
Do[
If[Im[temp2[[i2,1,2]]]==0,y0[ordre][i1]=temp2[[i2,1,2]]],
```

```
{i2,1,Exponent[H[ordre],y]-1}];
k[ordre][i1]=H[ordre]/.{x->x0[ordre][i1],y->y0[ordre][i1]};
Print[y0[ordre][i1]," & ",k[ordre][i1]],
{i1,1,nbr[ordre]}],
{compteur,ordreinitial/2,ordrefinal/2}]

ordreinitial=2;ordrefinal=10;
tableau={{n,x0,y0,k}};
Do[
ordre=i1*2;
Do[
temp3=Append[tableau,
{ordre,N[x0[ordre][i2],4],N[y0[ordre][i2],4],N[k[ordre][i2],4]}];
tableau=temp3,
{i2,1,nbr[ordre]}],
{i1,ordreinitial/2,ordrefinal/2}];
tableau//MatrixForm
```

– Annexe B –

Le choix des constantes d'intégration: A chaque étape, lors de l'intégration des fonctions $g'_{j,n}(x)$, on a une liberté quant au choix des constantes d'intégration. Celles-ci sont toutes choisies nulles (sauf la première). Pour respecter la symétrie du système (II.2-1) :

$$(x, y) \to (-x, -y) \tag{II.B-1}$$

il faut que:

$$H_n(x, y) = H_n(-x, -y) \tag{II.B-2}$$

Cette symétrie (II.B-2) est importante car certaines courbes de niveau de H_n sont des approximations des cycles limites de (II.2-1) qui sont eux-mêmes symétriques par rapport à $O(0, 0)$. On doit retrouver la symétrie (II.B-2) dans chaque composante de $H_n(x, y)$: chaque $y^i\, g_{i,n}(x)$ doit avoir la symétrie (II.B-1), il faut donc que les polynômes $g_{2p+1}(x)$ soient impairs en x. A priori, on ne connaît pas leur parité mais pour qu'ils aient une chance d'être impairs, il est nécessaire que $g_{2p+1}(x = 0) = C_{2p+1,n} = 0$. De même, la symétrie (II.B-2) nécessite que les polynômes $g_{2p}(x)$ soient pairs en x mais cette fois ci cela n'implique rien sur les constantes $C_{2p,n}$.

La constante $C_{0,n}$, dont le seul effet est de baisser ou de monter uniformément les courbes de niveau, est prise nulle.

On voit donc que la symétrie (II.B-2) oblige tous les $C_{j,n}$ avec j impair a être nuls mais il reste tous les constantes $C_{2k,n}$ avec $0 < k < \frac{n}{2}$ entier. On va voir que garder ces constantes non nulles n'apporte rien au problème : Si l'on note R_n et H_n les polynômes que l'on obtient en annulant systématiquement toutes les constantes d'intégration et $\hat{R_n}$ et $\hat{H_n}$ ceux obtenus en gardant les constantes $C_{2k,n}$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \hat{H_n} &= H_n + C_{n-2,n}\, H_{n-2} + C_{n-4}\, H_{n-4} + \ldots + C_{2,n}\, H_2 && \text{(II.B-3)} \\ \hat{R_n} &= R_n + C_{n-2,n}\, R_{n-2} + C_{n-4}\, R_{n-4} + \ldots + C_{2,n}\, R_2 && \text{(II.B-4)} \\ & && \text{(II.B-5)} \end{aligned}$$

Nous avons vérifié sur plusieurs exemples que les résultats donnés avec des valeurs variées de constantes étaient moins intéressants que les résultats obtenus avec $C_{2k,n} = 0$. Ce dernier fait est étonnant car il y a un grand nombre de constantes. Autrement dit, H_n et R_n donnent de meilleurs résultats que $\hat{H_n}$ et $\hat{R_n}$ et c'est pour cette raison que nous choisissons $C_{2k,n} = 0$.

Bibliographie

ALSHOLM P. (1992): "Existence of limit cycles for generalized Liénard equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **171**, p. 242.

BLOWS T.R. & LLOYD N.G. (1984): "The number of small amplitude limit cycles of Liénard equations", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **95**, pp. 751–758.

BLOWS T.R. & PERKO L. (1994): "Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems", *Siam Review*, **36**(3), pp. 341–376.

CHERKAS L.A. (1977): "Estimation of the number of limit cycles of autonomous systems", *Differential Equations*, **13**, p. 529.

CHRISTOPHER C. & LLOYD N.G. (1998): "Small-amplitude limit cycles in Liénard systems", *Nonlinear differential equations and applications*, to appear.

COPPEL W.C. (1988): "Some quadratic systems with at most one limit cycle", in *Dynamics Reported 2*. New York: Wiley, pp. 61–68.

DUMORTIER F. & LI C. (1996): "On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations", *Nonlinearity*, **9**, pp. 1489–1500.

DUMORTIER F. & LI C. (1997): "Quadratic Liénard equations with quadratic damping", *J. Differential Equations*, **139**, pp. 41–59.

GASULL A. & TORREGROSA J. (1997): "Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity", *Prepublicacions U.A.B.*, **27**.

GIACOMINI H., LLIBRE J. & VIANO M. (1996): "On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles", *Nonlinearity*, **9**(2), pp. 501–516.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1997): "Number of limit cycles of the Liénard equation", *Phys. Rev. E*, **56**(4), pp. 3809–3813.

GIACOMINI H.J. & VIANO M. (1995): "Determination of limit cycles for 2-D dynamical systems", *Phys. Rev. E*, **52**, pp. 222–228.

KRYLOFF N.M. & BOGOLIUBOFF N.N. (1937): *Introduction à la mécanique non-linéaire : les méthodes approchées et asymptotiques.*, vol. 1-2 of *Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec.* Paris: Chaire de Phys. Math. Annales.

LEVI M. (1981): "Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **32**.

LEVINSON N. & SMITH D. (1942): "A general equation for relaxation oscillations", *Duke Math. Journal*, **9**, p. 382.

LIÉNARD A. (1928): "Etude des oscillations entretenues", *Rev. Gen. d'électricité*, **XXIII**, p. 901.

LINS A., DE MELO W. & PUGH C.C. (1977): "On Linard's equation", in *Geometry and Topology 597*, ed. by Palis J. & do Carmo M. Berlin: Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., pp. 335–357.

LLIBRE J., PIZARRO L. & PONCE E. (1998): “Comment on : ’Number of limit cycles of the Liénard equation” ’, *Phys. Rev. E*, **58**(3).

LYNCH S. (1997): “Liénard systems and the second part of Hilbert’s sixteenth problem”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **30**(3), pp. 1395–1403.

ODANI K. (1995): “The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic”, *J. Differential Equations*, **115**(1), pp. 146–152.

ODANI K. (1996): “Existence of exactly N periodic solutions for Liénard systems”, *Funkcialaj Ekvacioj (Japana Matematika Societo)*, **39**, p. 217.

PERKO L.M. (1996): *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics.* New York: Spring-Verlag, second edition.

RAYLEIGH J. (1945): *The Theory of Sound.* New York: Dover.

RYCHKOV G.S. (1975): “The maximal number of limit cycles of the system $\dot{y} = -x$, $\dot{x} = y - (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5)$ is equal to two”, *Differential Equations*, **11**, p. 301.

VAN DER POL B. (1922): “On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom”, *London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag.*, **43**(6), pp. 700–719.

VAN DER POL B. (1927*a*): *Nature***120**, pp. 363–364.

VAN DER POL B. (1927*b*): “Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance”, *London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag.*, **3**, p. 65.

WILSON J.C. (1964): “Algebraic solutions of Liénard equations”, *Contrib. Differential Equations*, **3**, pp. 1–20.

XIANWU Z. (1983): “Remarks on the uniqueness of limit cycles”, *Kexue Tongbao*, **28**, pp. 452–455.

ZHANG Z. (1981): “On the existence of exactly two limit cycles for the Liénard equation”, *Acta Math. Sinica*, **24**, pp. 710–716.

ZUPPA C. (1981): “Order of cyclicity of the singular point of Liénard polynomial vector fields”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **12**(2), pp. 105–111.

* * *

Chapitre III

Amélioration de l'algorithme

Plan du chapitre

– III.1 – Introduction

Quand un système d'équations différentielles

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n) \tag{III.1-1}$$

est linéaire, c'est à dire quand la partie droite de l'équation (III.1-1) est linéaire par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots , x_n$: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, on peut écrire les solutions du système grâce à l'exponentielle de la matrice A :

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) \quad \text{où} \quad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

Mais quand $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ n'est pas linéaire par rapport à $\boldsymbol{x}$, on ne peut écrire les solutions sous forme générique. Pour pouvoir travailler de manière analytique, il faut utiliser des méthodes perturbatives. Les non-linéarités de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sont alors contrôlées par un petit paramètre (noté ϵ en général) :

- Si $\epsilon = 0$, le système est linéaire.
- Quand $\epsilon \neq 0$ mais suffisamment petit, on peut utiliser des méthodes pour écrire la forme approchée des solutions du système alors faiblement non-linéaire.
- Quand ϵ est grand, un changement de variable ou une re-écriture du système permet de considérer le paramètre $\frac{1}{\epsilon}$ et d'appliquer ensuite les méthodes perturbatives pour $\frac{1}{\epsilon} \to 0$.

La méthode introduite par Kryloff & Bogoliuboff (1937) permet de trouver le premier ordre de la solution d'équations différentielles faiblement non-linéaires telle qu'un oscillateur linéaire perturbé par une force extérieure. Cette méthode est connue sous le nom de méthode de la moyenne. Elle s'applique aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = \epsilon f(x,t) \tag{III.1-2}$$

où $\epsilon \ll 1$ et $f(x,t)$ est de période T pour la variable t.
La méthode sépare $f(x,t)$ en deux parties, sa partie moyenne et sa partie oscillante :

$$f(x,t) = \bar{f}(x) + \tilde{f}(x,t) \quad \text{où} \quad \bar{f}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x,t)dt \tag{III.1-3}$$

L'idée est de résoudre, dans un premier temps, l'équation (III.1-2) comme si le membre de droite ne comportait que la partie moyenne $\bar{f}(x)$. On trouve une solution que l'on note $y(t)$. Une fois cette première solution trouvée, on suppose que la solution au premier ordre de l'équation (III.1-2) entière s'écrit :

$$x(t) = y(t) + \epsilon Y(y,t) \tag{III.1-4}$$

On trouve alors $Y(y,t)$ en remplaçant (III.1-4) dans (III.1-2) et en identifiant les différents ordres en ϵ.

Le théorème de la moyenne assure alors que (Verhulst, 1991) :

- La solution approchée (III.1-4) reste proche de la solution exacte de (III.1-2) sur un temps d'échelle $\frac{1}{\epsilon}$.

- Si la solution $y(t)$ a un point d'équilibre hyperbolique alors la solution de (III.1-2) a une orbite périodique hyperbolique[1].
- Si une solution $y(t)$ est sur une variété (stable ou instable) du point d'équilibre hyperbolique alors la solution $x(t)$ correspondante évolue sur la variété (de même stabilité) de l'orbite périodique correspondante.

La méthode de Kryloff & Bogoliuboff (1937) est en fait inspirée d'une méthode introduite par van der Pol (1927*b*) pour étudier la réponse en fréquence de son tube à vide :

$$\ddot{x} + \epsilon_1(x^2 - 1)\dot{x} + x = \epsilon_2 A \cos(wt)$$

Si ϵ_1 et ϵ_2 sont très petits devant 1, on pose $\epsilon = \epsilon_1$ et $\epsilon_2\, A = \epsilon\, B$. Le système devient :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = \epsilon B \cos(wt) \tag{III.1-5}$$

Lorsque $\epsilon = 0$, le système est un simple oscillateur linéaire :

$$\ddot{x} + x = 0$$

qui oscille à la fréquence $w_0 = 1$. On décide d'étudier la réponse en fréquence de cet oscillateur lorsqu'il est modélisé par l'équation (III.1-5) et que w est très proche de la fréquence propre de l'oscillateur :$w = w_0 + O(\epsilon)$. On va voir que dans ce cas, on peut transformer l'équation (III.1-5) en un système de deux équations différentielles ayant chacune la forme (III.1-2). On commence par transformer l'équation (III.1-5) en un système de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon(\frac{x^3}{3} - x) \\ \dot{y} &= -x + \epsilon B \cos(wt) \end{aligned}$$

Etant donné que l'oscillateur, de fréquence propre w_0, est forcé par une fréquence $w \simeq w_0$, il doit avoir une réponse proche de w. La partie intéressante de l'étude est donc la différence d'oscillation entre la réponse de l'oscillateur et une oscillation de fréquence w. On effectue donc le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\frac{1}{w}\sin(wt) \\ -\sin(wt) & -\frac{1}{w}\cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{III.1-6}$$

On obtient le système :

$$\dot{u} = -\epsilon\left(\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\cos(wt) + \left(\frac{w^2-1}{w}\right) x \sin(wt) + \frac{B}{w}\sin(wt)\cos(wt)\right) \tag{III.1-7}$$

$$\dot{v} = \epsilon\left(\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\sin(wt) - \left(\frac{w^2-1}{w}\right) x \sin(wt) + \frac{B}{w}\cos^2(wt)\right) \tag{III.1-8}$$

Si l'on remplace x par $u \cos(wt) - v \sin(wt)$, le système prend la forme de deux équations du type (III.1-2) :

$$\dot{u} = \epsilon\, f_1(u, v, t) \tag{III.1-9}$$

$$\dot{v} = \epsilon\, f_2(u, v, t) \tag{III.1-10}$$

---

[1] Dans certains cas, cette orbite périodique est un simple point d'équilibre.

On peut maintenant prendre la moyenne, sur une période $T = \frac{2\pi}{w}$, des parties droites des deux équations (III.1-9) et (III.1-10). Ceci conduit au système :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\epsilon}{2}\left(u - \alpha v - \frac{u}{4}(u^2+v^2)\right) \\ \dot{v} &= \frac{\epsilon}{2}\left(\alpha u + v - \frac{v}{4}(u^2+v^2) - \frac{B}{2w}\right) \qquad \text{où } \alpha = \frac{1-w^2}{\epsilon\, w} \end{aligned} \tag{III.1-11}$$

Ce dernier système est un système autonome d'ordre 2 dont on peut étudier les bifurcations (Holmes & Rand, 1978).

Lorsque le système n'est pas forcé ($B = 0$), l'équation (III.1-5) devient :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{III.1-12}$$

On peut ici aussi trouver et résoudre le système moyenné associé. On prend $w = 1$ dans la transformation (III.1-6), on moyenne de la même façon les équations en u et v et on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\epsilon}{2} u \left(1 - \frac{1}{4}(u^2+v^2)\right) \\ \dot{v} &= \frac{\epsilon}{2} v \left(1 - \frac{1}{4}(u^2+v^2)\right) \end{aligned} \tag{III.1-13}$$

Ce dernier système peut aussi être obtenu en faisant $w = 1$ donc $\alpha = 0$ et $B = 0$ dans (III.1-11). Si on étudie le portrait de phase du système (III.1-13), on voit qu'il y a un cercle de points fixes attracteurs. Si on utilise le théorème de la moyenne, on en déduit que quand $\epsilon \to 0$, le système (III.1-12) a une orbite périodique stable dont l'équation tend vers $x^2 + y^2 = 4$ (voir figure III–1).

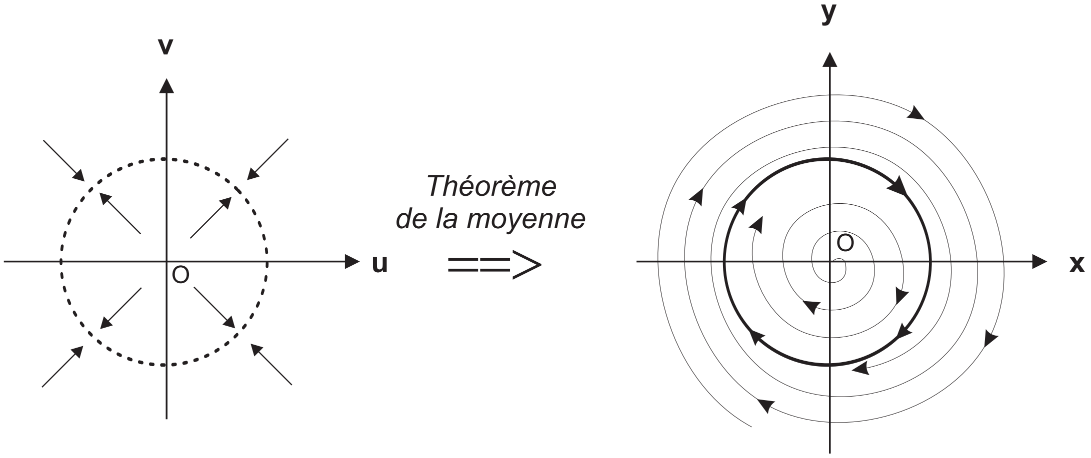

Fig. III–1 – *La présence du cercle de point fixes attracteurs pour le système (III.1-13) (à gauche) implique l'existence d'une orbite périodique asymptotiquement stable pour le système (III.1-12) (à droite)*

– III.2 – La théorie de Melnikov

La méthode de MELNIKOV (1963) est dans la lignée des méthodes perturbatives. VAN DER POL (1927*b*) introduisit la méthode de la moyenne pour étudier l'effet de perturbations dépendantes du temps sur l'oscillateur linéaire.

$$\ddot{x} + w_0\, x = \epsilon\, f(x, \dot{x}, t)$$

L'oscillateur linéaire est l'exemple le plus simple d'un système hamiltonien intégrable. La méthode de MELNIKOV (1963) permet d'étudier l'effet de perturbations sur des systèmes hamiltoniens intégrables plus généraux :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \epsilon\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{où } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } \epsilon \ll 1, \tag{III.2-1}$$

où $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est le champ de vecteur déduit du hamiltonien $H(\boldsymbol{x})$ d'un système physique à n dimension d'espace. La méthode a d'abord été introduite pour étudier les perturbations des orbites homoclines dans des systèmes avec $n = 1$.

a) Conservation des trajectoires homoclines sous l'effet d'une perturbation

Prenons comme exemple le système (III.2-1) où $\boldsymbol{f} = (y, x - x^3)^T$ et $\boldsymbol{g}(x,t) = (0, \alpha\, y + \beta x^2 y)^T$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \epsilon(\alpha\, y + \beta x^2 y) \end{aligned} \tag{III.2-2}$$

• Lorsque $\epsilon = 0$, le système (III.2-2) est hamiltonien, les trajectoires sont les courbes de niveau de :

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \tag{III.2-3}$$

Le système a alors trois points d'équilibres, un point de selle S_0 à l'origine et deux centres en $C_0(1,0)$ et $D_0(-1,0)$. On voit sur la figure III–2 qu'il y a deux orbites homoclines Γ_0^+ et Γ_0^- qui correspondent aux solutions : $\gamma_0^{\pm}(t) = \pm(\sqrt{2} sech(t), -\sqrt{2} sech(t)\, tanh(t))^T$.

• Lorsque $0 < \epsilon \ll 1$, le point de selle S_0 perdure sous l'effet de la perturbation. Comme c'est un point d'équilibre hyperbolique, il ne change pas de nature. Le système perturbé a donc un point de selle S_ϵ à l'origine[2]. Les points C_0 et D_0, qui étaient des centres, donc des points d'équilibre non-hyperboliques voient leur nature transformée sous l'effet de la perturbation. De fait, le système perturbé a deux foyers $C_\epsilon(1,0)$ et $D_\epsilon(-1,0)$. Les trajectoires homoclines n'ont pas non plus la propriété d'hyperbolicité. Ces trajectoires sont donc a priori brisées par la perturbation. On voit sur la figure III–3 que si l'on choisit $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, les variétés stable et instable de S_ϵ sont disjointes. Mais qu'en est il pour d'autres valeurs du couple (α, β) ?

La méthode de Melnikov nous permet de savoir ce qu'il advient effectivement de ces orbites homoclines quand $\epsilon \neq 0$ mais reste suffisamment petit. Il *suffit* de calculer :

$$M(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}\,(\gamma_0(t)) \wedge \boldsymbol{g}\,(\gamma_0(t), \alpha, \beta)\, dt \tag{III.2-4}$$

---

[2] Dans cet exemple les coordonnées des points d'équilibre ne changent pas sous l'effet de la perturbation, ce qui n'est pas vrai pour toute perturbation.

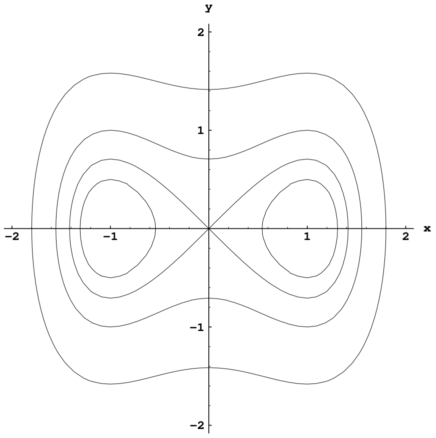

FIG. III–2 – *Courbes de niveau du hamiltonien (III.2-3), L'origine est un point de selle et les points (1,0) et (-1,0) sont des centres.*

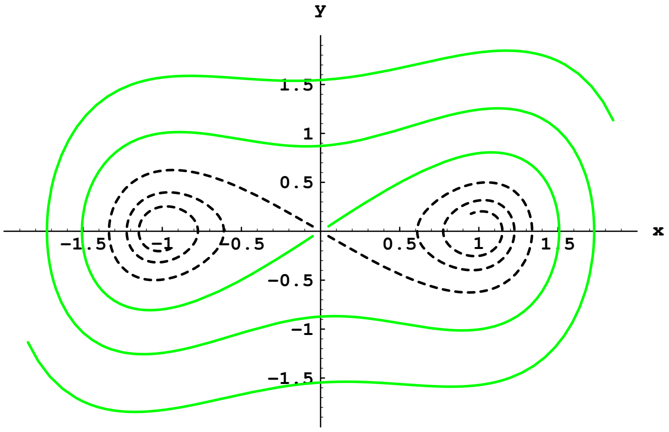

FIG. III–3 – *Portrait de phase du système (III.2-2) avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\epsilon = 1/10$. Les variétés stable et instable du point de selle sont ouvertes.*

La valeur de $M(\alpha, \beta)$ mesure la séparation des variétés stable et instable du point de selle $S\epsilon$. Si pour un certain couple (α, β) cette valeur s'annule, alors ces variétés se rejoignent et forment des courbes homoclines pour $\epsilon \neq 0$. Mais le calcul de $M(\alpha, \beta)$ n'est pas toujours aisé. Ici nous avons choisi un exemple connu où le calcul peut se faire explicitement (Perko, 1996) :

$$M(\alpha, \beta) = \frac{4}{3}\alpha + \frac{16}{15}\beta \qquad \text{(III.2-5)}$$

On voit donc que lorsque ϵ est suffisamment petit, si $\beta = -\frac{5}{4}\alpha$ alors les orbites homoclines $\Gamma_0^{\pm}$ survivent à la perturbation et le système perturbé à deux orbites homoclines $\Gamma_\epsilon^{\pm}$ (voir figure III–4).

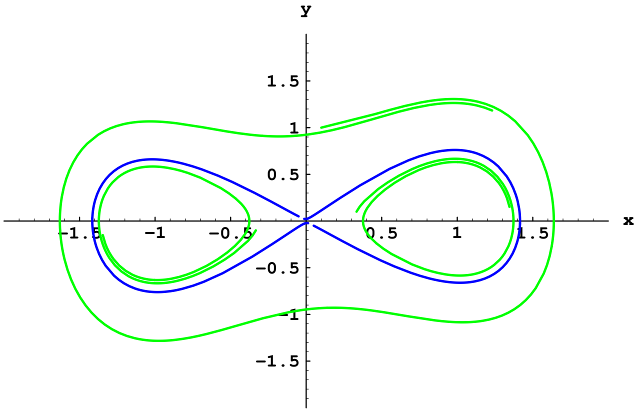

Fig. III–4 – *Portrait de phase du système (III.2-2) avec $\alpha = 1$, $\beta = -5/4$ et $\epsilon = 1/5$. Les variétés stable et instable de l'origine ne forment qu'un seule trajectoire homocline.*

b) Perturbation du centre linéaire

Nous allons considérer un cas où la perturbation est indépendante du temps : $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ et où le hamiltonien perturbé est le centre linéaire : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$. Si on choisit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, le système (III.2-1) devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.2-6)}$$

On reconnaît ici le système de Liénard. Pour $\epsilon = 0$, il n'y a pas de trajectoire homocline mais seulement des trajectoires périodiques de type centre.

La perturbation introduite transforme le centre du système linéaire en un foyer et transforme occasionnellement certaines trajectoires périodiques du centre en cycles limites; la méthode de Melnikov permet de savoir quelles sont ces trajectoires.

Prenons par exemple la perturbation $F(x) = x^5 - 3x^3 + x$ et calculons la fonction de Melnikov associée à la courbe de niveau $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = h$. On détecte les courbes de niveau qui, sous l'effet de la perturbation, se transforment en cycles limites en cherchant $h_0/M(h_0) = 0$. Les équations des cycles limites ainsi détectés sont, quand $\epsilon \to 0$: $\frac{1}{2}\,(x^2+y^2) = h_0$.

$$\begin{aligned} M(h) &= \int_0^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}(t)} \\ &= \int_0^T x\,F(x)|_{x=a\cos(t)} \end{aligned} \tag{III.2-7}$$

où $T = 2\pi$, $a = \sqrt{2h}$ et $\boldsymbol{\gamma}(t) = a \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Les racines positives de $M(a(h))$ correspondent aux rayons des cercles cycles limites qui existent pour $\epsilon \to 0$. Ceci nous rappelle la propriété des polynômes $R_n(x)$ dont les racines positives sont des approximation des amplitudes des cycles limites. De plus l'intégrande de (III.2-7) est égale à $-\frac{1}{2}\,R_2(x)$! On voit donc que si on prend le polynôme $R_2(x)$, que l'on remplace x par $a\ \cos(t)$ et que on l'intègre entre 0 et 2π on trouve la fonction de Melnikov. Il suffit donc de moyenner $R_2(x)$ pour trouver $M(a)$. Mais que trouve t'on si on moyenne les autres polynômes $R_n(x)$?

On note :

$$\hat{R}_n(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} R_n(x = a\ \cos(t))dt \tag{III.2-8}$$

Si on utilise la formule :

$$\int_0^{2\pi} cos^{2(j+1)}(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2(j+1) \\ j+1 \end{pmatrix} \frac{2\pi}{2^{2(j+1)}}, \tag{III.2-9}$$

on voit que $\hat{R}_n(a)$ peut se calculer facilement :

$$\hat{R}_n(a) = 2\pi\,R_n(x^j \to a^j\,c_j) \tag{III.2-10}$$

o :

$$c_j = \frac{(2(j+1))!}{4^{j+1}\,(j+1)!\,(j+1)!} \tag{III.2-11}$$

D'autre part, on voit facilement que chaque polynôme $\hat{R}_n(a)$ a la structure suivante :

$$\hat{R}_n(a,\epsilon) = -\epsilon\,n\,a^{n-2}M(a) + \epsilon^3\hat{R}_{n,3}(a) + \ldots + \epsilon^{n-1}\hat{R}_{n,n-1}(a) \tag{III.2-12}$$

On remarque qu'il n'y a que des termes de puissance impaires en ϵ dans la formule précédente et que le premier terme en ϵ de chaque polynôme $\hat{R}_n$ correspond à la fonction de Melnikov. Cela donne une preuve que lorsque $\epsilon \to 0$ le nombre, la multiplicité et le lieu des racines positives de $\hat{R}_n(a)$ est directement relié au nombre, à la multiplicité et à l'étendue de chaque cycle limite de (III.2-6).

Mais les polynômes $\hat{R}_n(a)$ ont une partie supplémentaire en ϵ^3, ϵ^5, $\ldots$, ϵ^{n-1} ce qui vient étayer l'hypothèse que nous avons toujours soutenue : *même quand ϵ est grand*, les racines des polynômes $R_n(x)$ et a fortiori des polynômes $\hat{R}_n(a)$ sont liées de la même façon aux cycles limites de (III.2-6).

On remarque ici que Sanjuán (1998) avait remarqué le lien entre $\int_0^{2\pi} R_2(a\cos(t))dt$ et la fonction de Melnikov mais sans pousser l'étude plus avant.

– III.3 – Comparaison entre $\hat{R}_n(a)$ et $R_n(x)$

Nous allons comparer les résultats donnés par les – nouveaux – polynômes $\hat{R}_n(a)$ avec ceux donnés par les – anciens – polynômes $R_n(x)$. On appelle dans ce qui suit *méthode classique*, l'algorithme menant aux polynômes $R_n(x)$ et *méthode améliorée* celle qui mène aux polynômes $\hat{R}_n(a)$ (les résultats présentés ici on été publiés dans (Giacomini & Neukirch, 1998*b*)). .

a) Différence quantitative

On choisit pour commencer un système bien connu :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{III.3-1}$$

On vérifie par intégration numérique que, pour $\epsilon = 3$, l'amplitude du cycle limite vaut $x_\Gamma \simeq 2.023$. Dans la table III.1, on remarque que les racines a_n des polynômes $\hat{R}_n(a)$ sont à chaque ordre supérieurs aux racines x_n des polynômes $R_n(x)$ et surtout que ces racines a_n fournissent de meilleures approximations à x_Γ que les racines x_n. Comme pour les polynômes $R_n(x)$, les polynômes $\hat{R}_n(a)$ calculés pour ce système n'ont qu'une seule racine strictement positive (du moins à tous les rangs calculés). On voit donc que si l'on considère les polynômes moyennés $\hat{R}_n(a)$, on obtient une convergence beaucoup plus rapide qu'avec les polynômes classiques $R_n(x)$. La valeur de x_Γ est supérieure à 2 et on voit que les racines a_n sont toutes supérieures ou égales à 2, alors qu'il faut atteindre l'ordre $n = 72$ pour que la racine de $R_n(x)$ dépasse 2 ($x_{72} = 2.00023262$)!

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	x_Γ
x_n	1.732	1.819	1.863	1.890	1.909	1.923	1.934	1.943	1.950	1.955	2.023
a_n	2	2	2.003	2.006	2.008	2.010	2.011	2.012	2.013	2.014	

Tab. III.1 – *Valeurs des racines x_n des polynômes $R_n(x)$ et des racines a_n des polynômes $\hat{R}_n(a)$ pour le système (III.3-1) avec $\epsilon = 3$. Ces valeurs tendent vers l'amplitude x_Γ du cycle limite du système.*

b) Un autre exemple

On vérifie facilement que la méthode améliorée produit de meilleurs résultats aussi dans les cas où il y a deux cycles limites. On détecte, par intégration numérique, que le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (x^5 - 3x^3 + x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{III.3-2}$$

a deux cycles limites d'amplitude $x_{\Gamma,1} \simeq 0.724$ et $x_{\Gamma,2} \simeq 1.746$. On voit dans le tableau III.2 que les racines des polynômes moyennés convergent plus vite vers chacune des valeurs des amplitudes des cycles. Tous les polynômes $\hat{R}_n(a)$ calculés pour ce système ont deux racines strictement positives.

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	$x_{\Gamma,i}$
$x_{n,1}$	0.618	0.654	0.672	0.682	0.689	0.694	0.698	0.701	0.703	0.705	0.724
$x_{n,2}$	1.618	1.648	1.668	1.681	1.690	1.696	1.702	1.706	1.710	1.712	1.746
$a_{n,1}$	0.721	0.721	0.722	0.722	0.723	0.723	0.723	0.723	0.723	0.723	
$a_{n,2}$	1.755	1.744	1.741	1.741	1.741	1.741	1.741	1.742	1.742	1.742	

TAB. III.2 – *Valeurs des racines des polynômes $R_n(x)$ et $\hat{R}_n(a)$ pour le système (III.3-2) et en comparaison les valeurs $x_{\Gamma,i}$ calculées par intégration numérique.*

c) Différence qualitative

On va voir qu'il n'y a pas qu'une différence quantitative entre les deux méthodes. Un point intéressant pour le système (III.3-1) est de savoir de quelle façon l'amplitude x_{max} du cycle varie avec ϵ. Les méthodes perturbatives classiques montrent que :

$$\lim_{\epsilon \to \infty} x_\Gamma(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} x_\Gamma(\epsilon) = 2$$

Si l'on considère les polynômes $R_n(x,\epsilon)$ et $\hat{R}_n(a,\epsilon)$, étant donné que leurs racines donnent des approximations de $x_\Gamma(\epsilon)$, il suffit de tracer les courbes $R_n(x,\epsilon) = 0$ et $\hat{R}_n(a,\epsilon) = 0$ dans le plan (ϵ, x) pour obtenir une approximation de la dépendance de x_Γ avec ϵ. On voit sur la figure III–5 que bien que les asymptotes de la courbe $x_\Gamma(\epsilon)$ en $\epsilon = 0$ et en $\epsilon \to \infty$ soient $x = 2$, les courbes $R_n(x,\epsilon) = 0$ n'ont pas ce comportement. Cela ne veut pas dire que les racines des polynômes R_n ne convergent pas vers la valeur de l'amplitude du cycle. Pour chaque valeur de ϵ, il semble qu'il existe un rang N_0 tel que x_{N_0} est aussi près que l'on veut de $x_\Gamma(\epsilon)$. On est donc apparemment en présence d'une convergence simple plutôt qu'uniforme.

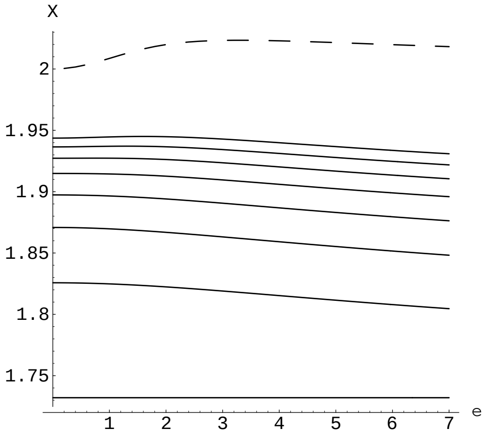

FIG. III–5 – *Courbes $R_n(x,\epsilon) = 0$ de $n = 2$ (droite $x = \sqrt{3}$) à $n = 16$ (la plus haute des courbes en trait plein). La courbe en pointillé est calculée par intégration numérique des équations (III.3-1).*

Considérons la courbe pour un certain ϵ_0. On a vu au chapitre II qu'il ne pouvait y avoir de trajectoire périodique d'aucune sorte dans la partie du plan où les polynômes $R_n(x)$ restent de signe constant. Cela oblige donc $x_\Gamma(\epsilon_0)$ à être supérieur à $x_n(\epsilon_0)$ pour tout n et prouve que chacune des

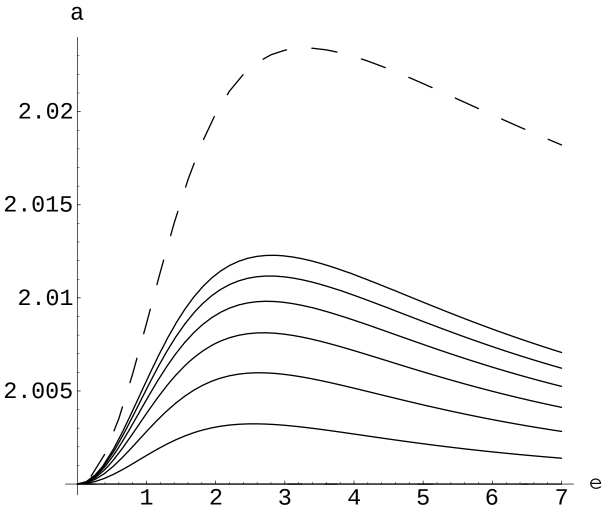

FIG. III–6 – *Courbes $\hat{R}_n(a,\epsilon) = 0$ pour $n = 2$ à $n = 16$. La courbe en pointillé est calculée par intégration numérique des équations (III.3-1). L'axe horizontal est $a = 2$.*

courbes $R_n(x,\epsilon) = 0$ représente une borne inférieure exacte à la fonction $x_\Gamma(\epsilon)$. De plus, pour le système (III.3-1), chaque courbe $R_n(x,\epsilon) = 0$ est plus proche de $x_\Gamma(\epsilon)$ que la précédente $R_{n-2}(x,\epsilon) = 0$.

Si on considère la méthode améliorée, on voit que les courbes $\hat{R}_n(a,\epsilon) = 0$ ont toutes la bonne configuration asymptotique en $\epsilon = 0$ et en $\epsilon \to \infty$ (voir figure III–6). Il suffit pour s'en convaincre d'étudier les monômes de plus grande et plus petites puissance en ϵ dans les polynômes $\hat{R}_n(x,\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_2(a,\epsilon) &= \left(a^2 - \frac{a^4}{4}\right)\epsilon \\
\hat{R}_4(a,\epsilon) &= \left(2a^4 - \frac{a^6}{2}\right)\epsilon + \left(\frac{3}{2}a^4 - \frac{5}{4}a^6 + \frac{35}{96}a^8 - \frac{7}{192}a^{10}\right)\epsilon^3 \\
\hat{R}_6(a,\epsilon) &= \left(3a^6 - \frac{3}{4}a^8\right)\epsilon + \left(\frac{111}{16}a^6 - \frac{2141}{384}a^8 + \frac{3969}{2560}a^{10} - \frac{4529}{30720}a^{12}\right)\epsilon^3 + \\
&\left(\frac{15}{8}a^6 - \frac{175}{64}a^8 + \frac{105}{64}a^{10} - \frac{385}{768}a^{12} + \frac{715}{9216}a^{14} - \frac{715}{147456}a^{16}\right)\epsilon^5
\end{aligned}$$

On trouve à chaque ordre que le coefficient en ϵ ainsi que le coefficient en ϵ^{n-1} s'annulent pour $a = 2$ et on vérifie facilement à l'ordinateur que c'est à chaque fois leur seule racine réelle positive. On remarque d'ailleurs que le coefficient en ϵ est à chaque ordre proportionnel à $\hat{R}_2(a,\epsilon)$:

$$\hat{R}_n(a,\epsilon) = \frac{n}{2}a^{n-2}\hat{R}_2(a,\epsilon) + \epsilon^3(\dots) + \dots + \epsilon^{n-1}(\dots) \qquad \text{(III.3-3)}$$

Cette dernière formule est à relier à la formule (III.2-12).

Un autre exemple où la méthode améliorée se révèle supérieure qualitativement à la méthode classique est le système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - (x^5 - \frac{2095}{1000}x^3 + x) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned} \qquad \text{(III.3-4)}$$

qui est très proche d'une bifurcation saddle-node (voir chapitre IV). Ce système n'a pas de cycles limites, mais pour une valeur du coefficient de x^3 dans $F(x)$ légèrement supérieure à 2.095, ce système a un cycle limite double. Pour des valeurs encore supérieures, il y a deux cycles limites hyperboliques. Si on calcule les polynômes $R_n(x)$ pour le système (III.3-4), on remarque qu'ils ont deux racines jusqu'à l'ordre $n = 8$ (table III.3). Par contre l'absence de racines à l'ordre 10 indique de façon rigoureuse qu'il n'y a pas de cycle limite[3]. Autrement dit les polynômes R_n pour $2 \leq n \leq 8$ *se trompent.*

n	2	4	6	8	10
$x_{n,1}$	0.858	0.944	0.996	1.035	-
$x_{n,2}$	1.166	1.143	1.127	1.110	-

TAB. III.3 – *Valeurs des racines des polynômes $R_n(x)$ pour le système (III.3-4).*

Si maintenant on calcule les polynômes moyennés, aucuns d'entre eux n'a de racine ! C'est à dire que la méthode améliorée nous suggère dès l'ordre $n = 2$ que le système n'a pas de cycle.

On va voir dans l'exemple suivant que la suite $\hat{r}_n$ des racines strictement positives des polynômes $\hat{R}_n(a)$ peut très bien être décroissante avec n :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - 8\left(x^5 - \sqrt{\frac{48}{10}}\,x^3 + x\right) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned} \qquad \text{(III.3-5)}$$

On vérifie numériquement que ce système n'a pas de cycle limite. On est relativement proche de la bifurcation saddle-node mentionné plus haut, ainsi les polynômes $\hat{R}_n(a)$ ont du mal à reflété l'absence de cycle limite. Néanmoins à partir de $n = 16$, les polynômes $\hat{R}_n(a)$ n'ont plus de racine strictement positive.

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$a_{n,1}$	0.978	1.003	1.041	1.059	1.076	1.091	1.110	-	-
$a_{n,2}$	1.293	1.288	1.280	1.266	1.241	1.210	1.177	-	-

TAB. III.4 – *Valeurs des racines des polynômes $\hat{R}_n(a)$ pour le système (III.3-5). A partir de $n = 16$, les polynômes n'ont plus de racine strictement positive, ce qui suggère l'absence de cycle limite.*

---

[3] l'absence de racine pour R_{10} indique que ce polynôme est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et donc qu'il ne peut y avoir de trajectoire périodique (voir chapitre II).

d) Contre-exemples à la conjecture 1

On a vu au chapitre II que la conjecture 1, qui prédisait que la suite r_n du nombre de racines positives de multiplicité impaire était décroissante avec n, était réfutée par deux contre-exemples. Etant donné que la méthode améliorée apporte une différence qualitative à l'algorithme, il est intéressant de voir si la conjecture 1, appliquée cette fois-ci non pas aux polynômes R_n mais aux polynômes $\hat{R}_n$, est toujours réfutée par les contre-exemples donnés.

Pour le premier contre-exemple, qui est doté de 4 cycles limites :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \left(\frac{1}{63}x^9 - \frac{3}{35}x^7 + \frac{1199}{8000}x^5 - \frac{83}{800}x^3 + \frac{297}{12800}x\right) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{III.3-6}$$

la suite r_n croît mais la suite $\hat{r}_n$ reste constante (voir table III.5). Il en est de même pour le deuxième contre-exemple[4] pour lequel la suite $\hat{r}_n$ est aussi en accord avec la conjecture 1. Il semble donc que cette conjecture soit plus robuste lorsqu'elle est appliquée aux polynômes $\hat{R}_n(a)$. Nous n'avons pas trouvé d'exemple avec une suite $\hat{r}_n$ décroissante.

n	2	4	6	8	10	12	14	30
r_n	2	2	2	2	4	4	4	4
$\hat{r}_n$	4	4	4	4	4	4	4	4

TAB. III.5 – *Suites du nombre des racines positives simples des polynômes $R_n(x)$ et $\hat{R}_n(a)$ pour le système (III.3-6). On voit que si la suite r_n croît, la suite $\hat{r}_n$ au contraire reste constante, ce qui est en accord avec la conjecture 1.*

— III.4 — L'application de premier retour et la fonction de déplacement

La fonction de déplacement est reliée directement à l'application de premier retour introduite par POINCARÉ (1880). L'application de premier retour est définie en liaison avec une trajectoire périodique dans un espace des phases de dimension n. Ici nous en feront la présentation et l'utilisation pour $n = 2$.

a) L'application de premier retour

Pour connaître la stabilité d'une solution périodique $\boldsymbol{\gamma}(t)$, on défini une courbe transverse Σ qui coupe la trajectoire Γ en H. Si la courbe Σ a deux intersections avec Γ, il suffit de rétrécir Σ pour qu'il n'y ait plus que H comme intersection (figure III–7). Pour que l'application de premier retour soit définie correctement, il faut de plus que Σ n'ait pas de point de tangence avec le flot. Si on choisit un point A sur Σ et que l'on suit la trajectoire partant de A, celle-ci recoupe Σ en B (voir figure III–8). On défini alors l'application de premier retour ainsi :

$$P(A) = B \tag{III.4-1}$$

---

[4] $F(x) = \frac{1}{63}x^9 - \frac{3}{70}x^7 + \frac{307}{8000}x^5 - \frac{579}{48000}x^3 + \frac{11}{16000}x$

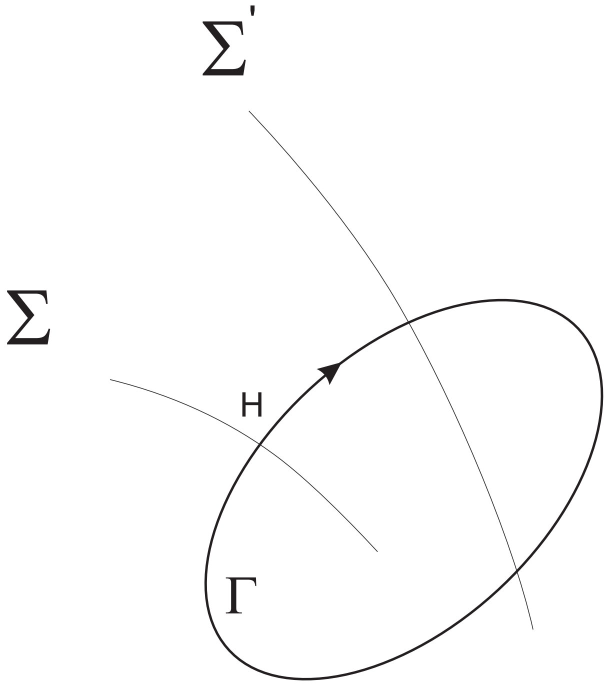

FIG. III–7 – *Trajectoire périodique* Γ *et deux choix pour la courbe transverse. Le choix de la courbe* Σ *est retenu car il n'a qu'une seule intersection avec* Γ*.*

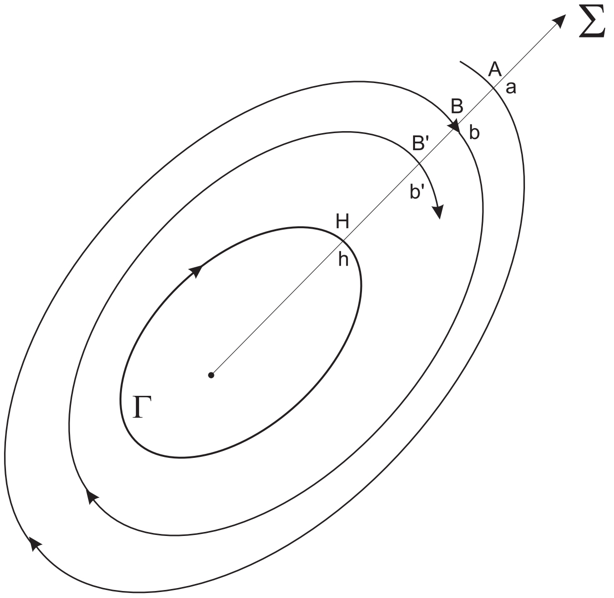

FIG. III–8 – *Trajectoire périodique* Γ *et la demi-droite orientée* Σ *comme courbe transverse.*

On voit que comme le point H appartient à une orbite périodique, $P(H) = H$. Si l'orbite périodique est attractrice, alors la suite $A, P(A), P(P(A)), \dots, P^N(A)$ converge vers H. De même, le temps $T(A) = t(A \to B)$ n'est pas égal à la période de l'orbite périodique mais $T^N(A) = t(P^N(A) \to P(P^N(A)))$ tend vers la période T de l'orbite périodique. On voit donc que la présence d'une orbite périodique est associée à un point fixe H de l'application de premier retour P. De plus, la stabilité de l'orbite est associée à la valeur de la dérivé de P calculée sur le point fixe H : pour simplifier, on choisit pour Σ une demi-droite orientée comme sur la figure III–8. L'abscisse des points A, B, B', H est notée a, b, b', h. Si l'on considère la trajectoire qui passe par B, un tour plus tard on la retrouve en B'. Comme B' est plus proche de H que ne l'est B, on voit que la trajectoire périodique Γ est attractrice. Ceci est traduit par l'inégalité :

$$b' - h < b - h \tag{III.4-2}$$

Si maintenant on choisit un point B très proche de H :

$$b = h + \epsilon \ \text{ avec } 0 < \epsilon \ll 1 \tag{III.4-3}$$

l'inégalité (III.4-2) devient :

$$b' - h < h + \epsilon - h = \epsilon$$

En divisant par ϵ et en remplaçant b'=P(b) :

$$\frac{P(b) - h}{\epsilon} < 1$$

Finalement en utilisant (III.4-3) on trouve :

$$\frac{P(h+\epsilon) - P(h)}{\epsilon} < 1$$

On voit ainsi que la trajectoire Γ est attractrice si la dérivé de P en H est inférieure à 1 :

$$P'(h) < 1 \tag{III.4-4}$$

b) La fonction de déplacement

Imaginons maintenant un point d'équilibre E entouré de plusieurs cycles limites contenus les uns dans les autres. On défini la transverse Σ comme une demi-droite d'origine E, coupant chaque cycle en un seul point. On oriente cette demi-droite vers l'extérieur et on utilise la coordonnée α pour repérer les points sur Σ. Pour chaque cycle limite, on défini l'application de premier retour $P(\alpha)$.

Par exemple, sur la figure III–9, le cycle limite Γ_1 correspond au point fixe α_1 pour $P(\alpha)$ c'est à dire que $P(\alpha_1) = \alpha_1$. Si maintenant on défini une fonction qui à chaque point de Σ d'abscisse α associe la valeur $D(\alpha) = P(\alpha) - \alpha$, on voit que les cycles limites correspondant au zéros de la fonction D que l'on appelle *fonction de déplacement*.

Considérons l'exemple de la figure III–10 : il y a 3 cycles limites entourant le point d'équilibre E. Chacune des racines de la fonction de déplacement correspond à un des cycles limites, c'est à dire que les cycles limites coupent la demi-droite Σ aux points A_1, A_2, A_3 d'abscisses $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que

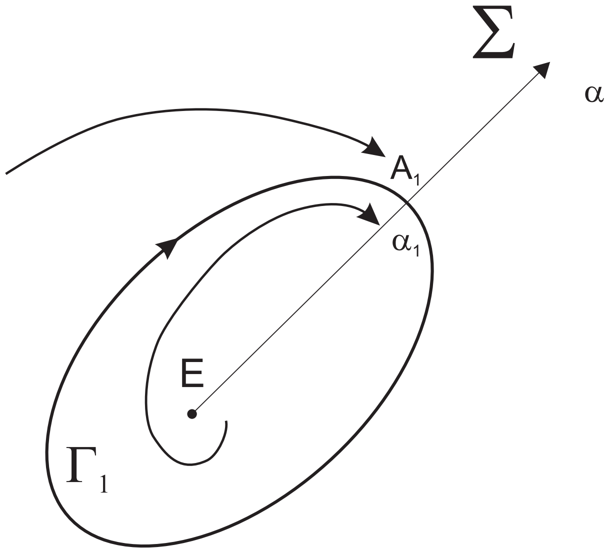

FIG. III–9 – *Le cycle limite* Γ_1 *est attracteur. La demi-droite* Σ *d'origine* E *est orientée vers l'extérieur. On a alors* $P(\alpha_1) = \alpha_1$ *et* $P'(\alpha_1) < 1$.

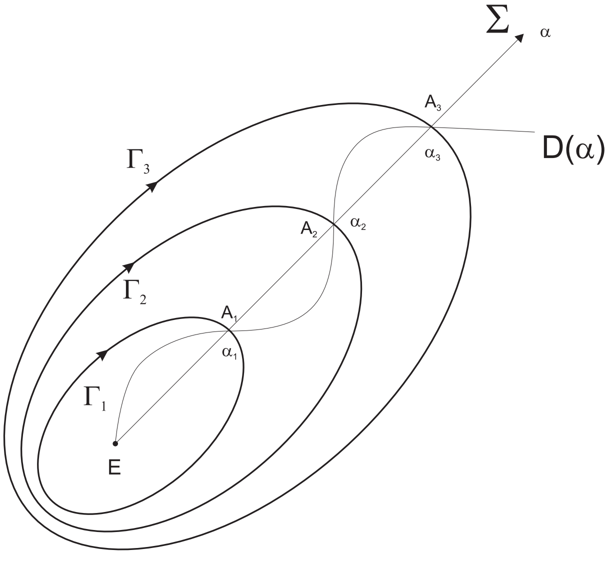

FIG. III–10 – *Système avec 3 cycles limites. La fonction de déplacement* $D(\alpha)$ *s'annule pour chacun de ces cycles. Les cycles sont de stabilité alternée tout comme le signe de* $D'(\alpha)$ *aux points* α_i.

$D(\alpha_i)=0$. Cette propriété est à rapprocher de la propriété équivalente pour les racines des polynômes $R_n(x)$ et $\hat{R}_n(a)$.

La dérivé de la fonction de déplacement est :

$$D'(\alpha)=P'(\alpha)-1 \tag{III.4-5}$$

L'équation (III.4-4) nous montre que la fonction de déplacement aura une dérivé positive aux points où les cycles limites sont instables et une dérivé négative aux points où les cycles limites sont stables. Cette propriété est à rapprocher de la propriété équivalente mise a jour pour les polynômes R_n au chapitre II dans l'équation (II.2-16).

– III.5 – Comparaison du développement en ϵ de $D(\alpha,\epsilon)$ et des polynômes $\hat{R}_n(a,\epsilon)$

On a vu au paragraphe III.2 que les polynômes $\hat{R}_n(a)$ étaient reliés à la fonction de Melnikov $M(a)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\hat{R}_n(a) &= \epsilon\hat{R}_{n,1}(a)+\epsilon^3\hat{R}_{n,3}(a)+\ldots\epsilon^{n-1}\hat{R}_{n,n-1}(a)\\ \text{avec } \hat{R}_{n,1}(a) &= -na^{n-2}M(a)\end{aligned} \tag{III.5-1}$$

Mais si le premier terme en ϵ dans les polynômes $\hat{R}_n(a)$ est toujours la fonction de Melnikov, qu'en est-il des autres termes, à quoi correspondent-ils ?

Nous allons maintenant calculer pour un système de type (III.2-6) la fonction de déplacement en la développant en puissances successives de ϵ. Pour cela, on effectue le changement de variable $y\to y-F(x)$ (avec $F'(x)=f(x)$) sur le système (III.2-6). On se place en fait dans le plan normal, dans lequel le système de Liénard s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\epsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}0\\ -y\,f(x)\end{pmatrix} \tag{III.5-2}$$

Le changement de variable n'affecte pas la variable x donc les polynômes $R_n(x)$ ainsi que les polynômes $\hat{R}_n(a)$ sont les mêmes pour les deux systèmes (III.2-6) et (III.5-2). Le développement de $D(r,\epsilon)$ est par contre plus aisé pour le système (III.5-2).

La demi-droite Σ choisie ici est le demi axe des x positifs. Et nous allons donc étudier la fonction $P(x)$ qui au point A_1 de coordonnées $(x,y=0)$ associe le point A_2 (un tour plus tard) de coordonnées $(P(x),y=0)$.

Lorsque $\epsilon=0$, les trajectoires sont des cercles d'équation $x^2+y^2=r^2$. Ainsi $P(x)=x$ et donc $D(x)=0$ pour tout $x>0$.

a) Développement de $D(\alpha,\epsilon)$ en puissances de ϵ

On suppose maintenant que ϵ reste petit et on développe l'équation des trajectoires en puissance de ϵ. Pour cela on transforme le système (III.5-2) en utilisant les coordonnées polaires :

$$\left\{\begin{array}{l}x=r\,cos(\theta)\\ y=r\,sin(\theta)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}r\,\dot{r}=x\,\dot{x}+y\,\dot{y}\\ r^2\dot{\theta}=x\,\dot{y}-y\dot{x}\end{array}\right. \tag{III.5-3}$$

Le système (III.5-2) devient:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\epsilon\, r\, sin^2(\theta)\, f(r,\theta) && \text{(III.5-4)} \\ \dot{\theta} &= -1 - \epsilon\, cos(\theta)\, sin(\theta)\, f(r,\theta) && \text{(III.5-5)} \end{aligned}$$

où $f(r,\theta) = f(x = r\cos(\theta))$. Si l'on divise (III.5-4) par (III.5-5) :

$$r'(\theta) \overset{\text{def}}{=} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon\, r\, sin^2(\theta)\, f(r,\theta)}{1 + \epsilon\, cos(\theta)\, sin(\theta)\, f(r,\theta)} \qquad \text{(III.5-6)}$$

On prend donc un premier point sur le demi axe des x positifs: $x_0 = r_0 \cos(\theta = 0) = r_0$, et on propose une solution $r(\theta) = r_0 + \epsilon r_1(\theta)$ (avec $r_1(0) = 0$) que l'on injecte dans l'équation (III.5-6). En ne considérant que les termes en ϵ, on trouve une équation différentielle simple pour $r_1(\theta)$:

$$r_1'(\theta) = r_0\, sin^2(\theta)\, f(r_0,\theta) \qquad \text{(III.5-7)}$$

la solution de (III.5-6) à l'ordre 1 en ϵ est alors:

$$r(\theta, r_0) = r_0 + \epsilon \int_0^\theta r_0\, sin^2(\phi)\, f(r_0,\phi) d\phi + O(\epsilon^2) \qquad \text{(III.5-8)}$$

Une fois la solution connue, l'application de premier retour et la fonction de déplacement sont simples à calculer :

$$\begin{aligned} P(r_0) &= r(\theta = 2\pi, r_0) \\ D(r_0) &= P(r_0) - r_0 = \int_0^{2\pi} r_0\, sin^2(\theta)\, f(r_0,\theta) d\theta + O(\epsilon^2) && \text{(III.5-9)} \end{aligned}$$

On reconnait ici la fonction de Melnikov calculée pour le système (III.5-2) avec $\boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{g} = -y^2 f(x)$. On retrouve en fait la formule générale qui lie la fonction de Melnikov au premier terme de la fonction de déplacement :

$$D(r,\epsilon) = -\epsilon \frac{M(r)}{|\boldsymbol{f}(H)|} + \epsilon^2 d_2(r) + \epsilon^3 d_3(r) + \ldots \qquad \text{(III.5-10)}$$

si H est le point d'abscisse r sur la demi-droite Σ. Ici $|\boldsymbol{f}(H)| = r$. Le développement est valable même pour de grands r à condition que ϵ reste suffisamment petit. On défini :

$$D_j(r,\epsilon) = \sum_{i=0}^{i=j} d_i(r,\epsilon) \qquad \text{(III.5-11)}$$

b) Coefficients des termes en ϵ^j dans les polynômes $\hat{R}_n(a,\epsilon)$

Comme le premier ordre en ϵ dans les polynômes $\hat{R}_n(a)$ donne pour chaque n la fonction de Melnikov, c'est à dire le premier ordre de la fonction de déplacement, on est tenté de comparer les autres termes des polynômes $\hat{R}_n(a)$ avec les ordres supérieurs de $D(r,\epsilon)$.

Mais on remarque tout de suite qu'il manque des termes dans les polynômes $\hat{R}_n(a,\epsilon)$ car le développement de $D(r,\epsilon)$ se fait a priori selon toutes les puissances de ϵ alors que les polynômes $\hat{R}_n(a,\epsilon)$ ne contiennent que des puissances impaires en ϵ.

n	a^0	a^2	a^4	a^6
2	0	0	0	0
4	1.5	-1.25	0.36458	-0.036458
6	6.9375	-5.5755	1.5504	-0.14743
8	18.778	-14.823	4.018	-0.37124
10	39.488	-30.84	8.2291	-0.74634
12	71.535	-55.478	14.646	-1.3112
14	117.39	-90.587	23.731	-2.1044
16	179.51	-138.02	35.946	-3.1644
18	260.37	-199.62	51.755	-4.5297
20	362.44	-277.24	71.619	-6.239
22	488.19	-372.74	96.001	-8.3307
24	640.07	-487.96	125.36	-10.843
26	820.56	-624.75	160.17	-13.816
28	1032.1	-784.97	200.88	-17.286
30	1277.2	-970.46	247.97	-21.293

TAB. III.6 – *Coefficients des polynômes* $\frac{\hat{R}_{n,3}(a)}{a^n}$ *apparaissant dans le développement (III.5-1) pour le système (III.3-1)*

n	a^0	a^2	a^4	a^6	a^8	a^{10}
2	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
6	1.875	-2.7344	1.6406	-0.5013	0.077582	-0.0048489
8	14.75	-20.59	11.787	-3.436	0.50794	-0.030374
10	61.079	-83.194	46.319	-13.115	1.8823	-0.1093
12	182.73	-245.03	133.94	-37.177	5.2268	-0.2972
14	447.09	-593.02	319.96	-87.54	12.121	-0.67841
16	953.12	-1254.2	670.12	-181.35	24.817	-1.372
18	1837.5	-2403.2	1274.4	-341.94	46.358	-2.5376
20	3280.6	-4270.1	2250.8	-599.78	80.698	-4.3817
22	5512.7	-7147.6	3749.3	-993.4	132.82	-7.1631
24	8820.1	-11399.	5955.2	-1570.4	208.85	-11.199
26	13551.	-17466.	9093.5	-2388.3	316.2	-16.871
28	20122.	-25876.	13433.	-3515.7	463.64	-24.633
30	29023.	-37250.	19287.	-5032.9	661.46	-35.011

TAB. III.7 – *Coefficients des polynômes* $\frac{\hat{R}_{n,5}(a)}{a^n}$ *apparaissant dans le développement (III.5-1) pour le système (III.3-1)*

D'autre part, si on veut que les termes $\hat{R}_{n,j}(a)$ du développement (III.2-12) convergent vers les termes $d_j(r)$ il faut qu'ils se stabilisent quand n croît, ce qui ne semble pas être le cas.

Prenons par exemple le système (III.3-1) et calculons les termes du développement (III.5-1). On a reporté dans les tables III.6 et III.7 les termes $\frac{\hat{R}_{n,j}(a)}{a^n}$ avec $j = 3$ et $j = 5$ respectivement.

On voit dans ces deux tables que les coefficients en a^k des termes $\hat{R}_{n,3}(a)$ et $\hat{R}_{n,5}(a)$ ne convergent pas vers des valeurs fixes et donc a fortiori pas vers les coefficients $d_j(r)$ de la fonction de déplacement.

Mais, bizarrement, si au lieu d'étudier les termes $\frac{\hat{R}_{n,j}(a)}{a^n}$, on étudie les termes $\frac{\hat{R}_{n,j}(a)}{a^n\, n^j}$ alors on remarque que les coefficients de ces termes tendent eux vers des valeurs fixes. Les résultats sont donnés dans les tables III.8 et III.9.

n	a^0	a^2	a^4	a^6
2	0	0	0	0
4	0.023437	-0.019531	0.0056966	-0.00056966
6	0.032118	-0.025813	0.0071777	-0.00068254
8	0.036675	-0.02895	0.0078476	-0.00072508
10	0.039488	-0.03084	0.0082291	-0.00074634
12	0.041398	-0.032105	0.0084756	-0.00075881
14	0.042779	-0.033013	0.0086482	-0.00076691
16	0.043826	-0.033696	0.0087759	-0.00077255
18	0.044646	-0.034228	0.0088743	-0.0007767
20	0.045305	-0.034655	0.0089524	-0.00077987
22	0.045848	-0.035005	0.0090159	-0.00078237
24	0.046301	-0.035298	0.0090686	-0.00078439
26	0.046687	-0.035546	0.0091131	-0.00078605
28	0.047018	-0.035758	0.0091511	-0.00078744
30	0.047305	-0.035943	0.0091839	-0.00078863

TAB. III.8 – *Coefficients des polynômes* $\rho_{3,n}(a) = \frac{\hat{R}_{n,3}(a)}{a^n\, n^3}$ *apparaissant dans le développement (III.5-1) pour le système (III.3-1)*

On peut donc écrire :

$$\hat{R}_n(a) = a^n \Big(\epsilon\, n \rho_1(a) + (\epsilon\, n)^3 \rho_{3,n}(a) + \ldots + (\epsilon\, n)^{(2p+1)} \rho_{2p+1,n}(a) + \ldots + (\epsilon\, n)^{n-1} \rho_{n-1,n}(a)\Big) \tag{III.5-12}$$

avec $p \in [1\,;\,\frac{n}{2} - 1]$ et :

$$\rho_{2p+1,n} \to \rho_{2p+1} \text{ pour } p \geq 1 \text{ et } n \to \infty \tag{III.5-13}$$

où la structure des polynômes $\rho_j(a)$ est :

$$\rho_1(a) = \frac{d_1(a)}{a} = -\frac{M(a)}{a^2} \tag{III.5-14}$$

$$\text{et } \rho_{(2p+1)}(a) = c_{2p+1,0} + c_{2p+1,2}\, a^2 + \ldots + c_{2p+1,4p+2}\, a^{4p+2} \tag{III.5-15}$$

Les coefficients $c_{2p+1,m,n}(m \in [0, 2(2p+1)]\,,\; n \in [2, 30])$ avec $p = 1$ et $p = 2$ sont reportés dans les cases des tables III.8 et III.9 respectivement. Ces fonctions $\rho_{2p+1}(a)$ pourraient mener à la fonction identiquement nulle recherchée au chapitre II.

n	a^0	a^2	a^4	a^6	a^8	a^{10}
2	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
6	0.0002411	-0.0003516	0.000211	-0.00006447	9.977 $10^{-}6$	-6.236 $10^{-}7$
8	0.0004501	-0.0006283	0.0003597	-0.0001049	0.0000155	-9.269 $10^{-}7$
10	0.0006108	-0.0008319	0.0004632	-0.0001311	0.00001882	-1.093 $10^{-}6$
12	0.0007344	-0.0009847	0.0005383	-0.0001494	0.00002101	-1.194 $10^{-}6$
14	0.0008313	-0.001103	0.0005949	-0.0001628	0.00002254	-1.261 $10^{-}6$
16	0.000909	-0.001196	0.0006391	-0.000173	0.00002367	-1.308 $10^{-}6$
18	0.0009724	-0.001272	0.0006744	-0.000181	0.00002453	-1.343 $10^{-}6$
20	0.001025	-0.001334	0.0007034	-0.0001874	0.00002522	-1.369 $10^{-}6$
22	0.00107	-0.001387	0.0007275	-0.0001928	0.00002577	-1.39 $10^{-}6$
24	0.001108	-0.001432	0.0007479	-0.0001972	0.00002623	-1.406 $10^{-}6$
26	0.001141	-0.00147	0.0007654	-0.000201	0.00002661	-1.42 $10^{-}6$
28	0.001169	-0.001504	0.0007805	-0.0002043	0.00002694	-1.431 $10^{-}6$
30	0.001194	-0.001533	0.0007937	-0.0002071	0.00002722	-1.441 $10^{-}6$

TAB. III.9 – *Coefficients des polynômes* $\rho_{5,n}(a) = \frac{\hat{R}_{n,5}(a)}{a^n\, n^5}$ *apparaissant dans le développement (III.5-1) pour le système (III.3-1)*

c) Etude graphique

Ainsi il apparaît que les polynômes $\hat{R}_n(a, \epsilon)$ et $D(r, \epsilon)$ sont structurellement différents. Nous allons donc comparer le développement de la fonction de déplacement avec la suite des polynômes $\hat{R}_n(a, \epsilon)$. On calcule donc, grâce à la méthode indiquée plus haut, la fonction de déplacement jusqu'à l'ordre 6 en ϵ pour le système (III.5-2) avec $f(x) = x^2 - 1$. La feuille de calcul Mathematica est donnée en annexe. On a tracé sur la figure (III–11) la courbe $D_6(r, \epsilon) = 0$. Pour de faibles valeurs de ϵ, cette courbe n'a qu'une seule branche qui correspond au cycle limite unique du système. Mais lorsque ϵ dépasse une certaine valeur, plusieurs autres branches apparaissent, qui correspondent à des racines parasites de valeurs inférieures à 2. Cela est explicable par le fait que le développement en puissance de ϵ de $D(r, \epsilon)$ n'est valable que pour ϵ *suffisamment petit.*

Si maintenant on compare cette courbe à la courbe $\hat{R}_6(a, \epsilon) = 0$, nous remarquons deux différences importantes (figure III–12) :

- La courbe $\hat{R}_6(a, \epsilon) = 0$ n'a qu'une seule et unique branche pour tout ϵ. Le polynôme $\hat{R}_6(a, \epsilon)$ n'a donc qu'une seule racine positive pour tout ϵ, ce qui est en accord avec l'unicité du cycle limite du système (III.3-1).

- La courbe a le bon comportement asymptotique en $\epsilon \to 0$ et en $\epsilon \to +\infty$, ce qui n'est pas le cas des différents ordres du développement de $D(r, \epsilon)$ qui tous divergent lorsque $\epsilon \to +\infty$.

On comprend maintenant la différence entre le développement de $D(r, \epsilon)$ et les polynômes $\hat{R}_n(a, \epsilon)$: le premier est perturbatif c'est à dire qu'il n'est valable que pour de petits ϵ alors que les seconds sont valables pour tout ϵ : l'algorithme classique et l'algorithme amélioré *ne sont pas des méthodes perturbatives.*

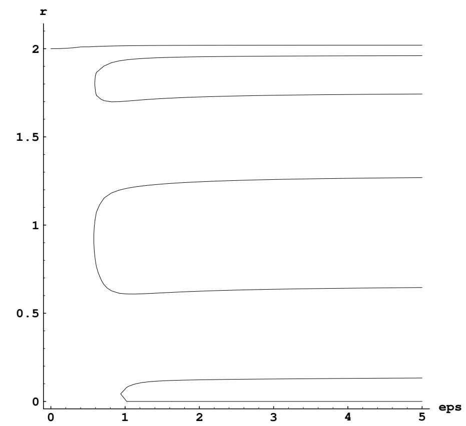

FIG. III–11 – *Courbe* $D_6(r,\epsilon) = 0$ *pour le système (III.3-1). Pour* ϵ *supérieur à une certaine valeur, il apparaît des branches parasites qui ne correspondent à aucun cycle limite. En fait, seule la branche supérieure correspond au cycle limite.*

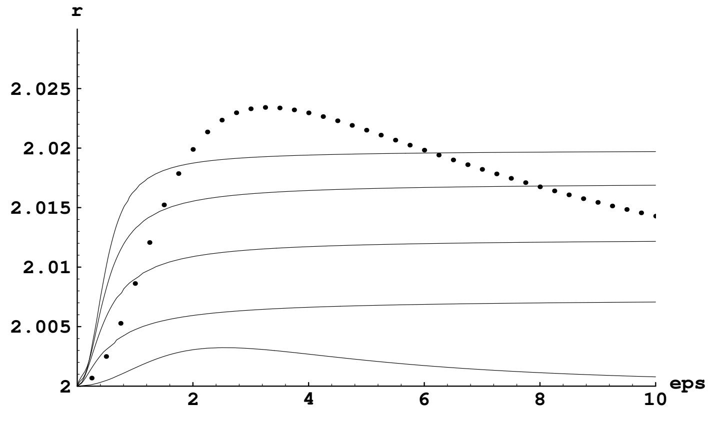

FIG. III–12 – *La courbe en pointillé est construite à l'aide d'intégrations numériques. La courbe la plus basse est* $\hat{R}_6(a,\epsilon) = 0$*. Les autres courbes sont* $D_j(r,\epsilon) = 0$ *avec* $j = 3$ *pour la plus basse et* $j = 6$ *pour la plus haute. L'axe horizontal étant* $r = 2$*, on ne voit pas ici les branches parasites des courbes* $D_j(r,\epsilon) = 0$*.*

– III.6 – Annexes

• Voila le code à exécuter pour calculer les polynômes $\hat{R}_n(a)$. Attention, il faut avoir préalablement exécuté le code qui calcule les polynômes $R_n(x)$. La dernière ligne est là pour vérifier que la transformation $R_n(x) \to \hat{R}_n(a)$ est complète :

```
ordre=20

Do[hj=jk*2;
fauxcos[hj]=Expand[Expand[(a*Cos[t])^hj],Trig->True]/.Cos[_ t]->0/.Sin[_ t]->0,
{jk,1,Exponent[R[ordre],x]/2}]

Reduction=Table[x^(jk*2)->fauxcos[jk*2],{jk,1,Exponent[R[ordre],x]/2}];

Do[h=jk*2;HatR[h]=2*Pi*Expand[R[h]]/.Reduction,{jk,1,ordre/2}]

Exponent[HatR[ordre],x]
```

• Voici le code qui permet de calculer le développement à l'ordre 6 de la fonction de déplacement pour le système (III.5-2) avec $f = (x^2 - 1)$:

```
Clear[C1,c1,R,rp,rp3,rp4,r,zero,coe,r0,r1,r2,r3,r4,r5,a,b,c,d,e]

ordre = 6

rp = ((Sin[phi])^2*eps*r*(1 - r^2*Cos[phi]^2))/
(-1 + Sin[phi]*Cos[phi]*eps*(1 - r^2*Cos[phi]^2))

r = R0 + Sum[eps^ik*R[ik][phi], {ik, 1, ordre}]

zero=Expand[Normal[Series[D[r, phi] - rp,{eps,0,ordre}]],Trig->True]

Do[coe = Coefficient[zero, eps, ik];
temp=Solve[coe==0,(R[ik])'[phi]][[1,1,2]];
R[ik][phi_] = Integrate[temp,phi], {ik, 1, ordre}]

Deplacement = Collect[Simplify[(r /. phi -> 2*Pi) - (r /. phi -> 0)], eps]
```

Bibliographie

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1998): "Improving a method for the study of limit cycles of the Liénard equation", *Phys. Rev. E*, **57**(6), pp. 6573–6576.

HOLMES P. & RAND D. (1978): "Bifurcations of the forced van der Pol oscillator", *Quart. Appl. Math.*, **35**, pp. 495–509.

KRYLOFF N.M. & BOGOLIUBOFF N.N. (1937): *Introduction à la mécanique non-linéaire : les méthodes approchées et asymptotiques.*, vol. 1-2 of *Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec.* Paris: Chaire de Phys. Math. Annales.

MELNIKOV V.K. (1963): "On the stability of the center for time periodic perturbations", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**, pp. 1–57.

PERKO L.M. (1996): *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics*. New York: Spring-Verlag, second edition.

POINCARÉ H. (1880): *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, vol. I–VI of *Œuvre I.* Paris: Gauthier-Villar.

SANJUÁN M.A.F. (1998): "Liénard systems, limit cycles and Melnikov theory", *Phys. Rev. E*, **57**(1), pp. 57–61.

VAN DER POL B. (1927): "Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance", *London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag.*, **3**, p. 65.

VERHULST F. (1991): *Nonlinear differential equations and dynamical systems.* Berlin: Springer-Verlag, second edition.

Chapitre IV

Bifurcations des trajectoires périodiques

Plan du chapitre

– IV.1 – Introduction

a) Points et diagrammes de bifurcation

Pour comprendre les bifurcations qui peuvent survenir pour les cycles limites du système de Liénard, nous allons d'abord revenir sur les bifurcations qui existent pour les points d'équilibre.

Le terme de bifurcation a été introduit par Poincaré pour décrire les transformations (en nombre et en genre) des points d'équilibre d'une famille de systèmes, obtenue en faisant varier un paramètre.

Une bifurcation survient quand une variation infinitésimale d'un paramètre du système introduit une transformation qualitative du portrait de phase de ce système. Un ouvrage de référence sur les bifurcation des systèmes plan est le livre de ANDRONOV, LEONTOVICH, GORDON & MAIER (1971). Considérons le système :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{IV.1-1}$$

et son point d'équilibre E dont la coordonnée $\boldsymbol{x}_E$ va dépendre de la valeur de $\boldsymbol{\mu}$: $\boldsymbol{x}_E(\boldsymbol{\mu})$. Si la nature du point d'équilibre subit un changement soudain lorsque $\boldsymbol{\mu}$ varie légèrement autour de $\boldsymbol{\mu}_0$, on dit que le système subit une *bifurcation.*

Cette définition implique que le point d'équilibre E lorsque $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ n'est pas un point d'équilibre hyperbolique car sinon une faible perturbation du système (IV.1-1) ne changerait pas la nature de ce point.

On défini les *valeurs de bifurcation* de $\boldsymbol{\mu}$ comme étant les valeurs telles que (IV.1-1) n'est pas structurellement stable. Ce sont les valeurs telles que $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$[1] , calculée au point d'équilibre E, a une valeur propre nulle. Si $n = 1$ et $m = 1$, on trouve ces valeurs de bifurcation en résolvant le système :

$$\begin{aligned} f(x,\mu) &= 0 && \text{(IV.1-2)} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) &= 0 && \text{(IV.1-3)} \end{aligned}$$

L'équation (IV.1-2), qui permet de trouver les coordonnées des points d'équilibre, défini alors une courbe dans le plan (x, μ) : le *diagramme de bifurcation.* Lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu) \neq 0$, on a une ou plusieurs branches de points d'équilibre qui se rejoignent ou se coupent aux points où (IV.1-3) est vérifiée. On appelle ces points, les *points de bifurcation.* Leurs coordonnées sont solutions des équations (IV.1-2) et (IV.1-3). Ces définitions sont illustrées sur la figure IV–1, qui représente le diagramme de bifurcation du système :

$$f(\mu, x) = x^3 - \mu\, x + 1 \tag{IV.1-4}$$

qui a différents comportements possibles :

- pour des valeurs de μ inférieures à la valeur de bifurcation μ_0, le système n'a qu'un point d'équilibre B.
- lorsque $\mu = \mu_0$, le système a en plus du point B, un point d'équilibre non-hyperbolique $A(x_A^0)$.
- quand $\mu > \mu_0$, le système a 3 points d'équilibre : A_1, A_2, B.

---

[1] $D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$ est le jacobien du champ de vecteur $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: $(D_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

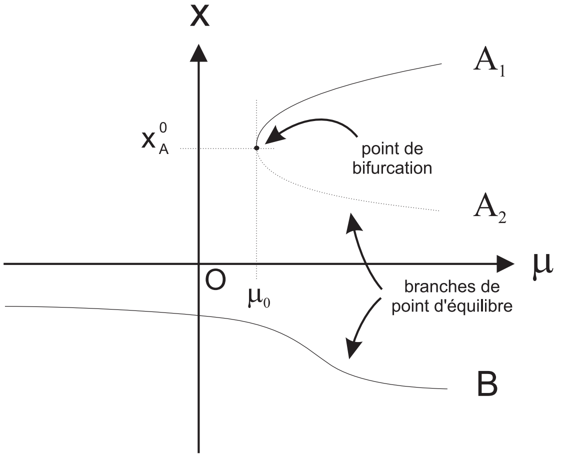

FIG. IV–1 – *Diagramme de bifurcation pour le système (IV.1-4).*

Si l'on oublie maintenant la coordonnée du ou des points d'équilibre, on peut tracer la *courbe de bifurcation* dans l'espace des paramètres. Pour l'exemple (IV.1-4), l'espace des paramètres est une simple droite (l'axe μ). On reporte les différents comportements possibles du système en fonction des valeurs des paramètres (voir figure IV–2).

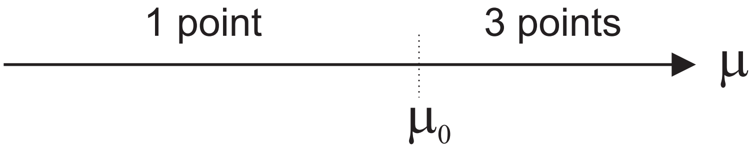

FIG. IV–2 – *Courbe de bifurcation (ici le point μ_0) dans l'espace des paramètres (ici l'axe μ).*

b) Codimension d'un point de bifurcation

Dans un espace de dimension n, la codimension d'une sous-variété de dimension m est $n - m$. La codimension a la propriété d'additivité : si deux sous-variétés de dimension m_1 et m_2 se croisent, elle le font en général dans une variété de dimension[2] : $m_1 + m_2 - n$. Ainsi la codimension de l'intersection sera $n - (m_1 + m_2 - n) = 2n - m_1 - m_2$. C'est la somme des codimensions des deux variétés de départ :$(n - m_1) + (n - m_2) = 2n - m_1 - m_2$. Ainsi la codimension de l'intersection de deux variétés est la somme des codimensions des deux variétés.

Imaginons maintenant un système à deux paramètres α et β. Supposons qu'une première courbe de bifurcation dans l'espace des paramètres $C_1(\alpha, \beta) = 0$ sépare deux régions où l'état asymptotique du système est différent. Admettons qu'une étude plus détaillée du système montre qu'une autre courbe de bifurcation $C_2(\alpha, \beta) = 0$ existe. Le système a donc 4 états asymptotiques différents (voir figure IV–3). Les états asymptotiques peuvent être constitués de un ou plusieurs points d'équilibre, de trajectoires périodiques, ou de cycles de séparatrices.

---

[2] Par exemple si deux sphères ($m_1 = m_2 = 2$) se croisent dans l'espace $n = 3$, leur intersection est en général un cercle de dimension $2 + 2 - 3 = 1$. Le terme 'en général' veut dire que les sphères se croisent tranversalement.

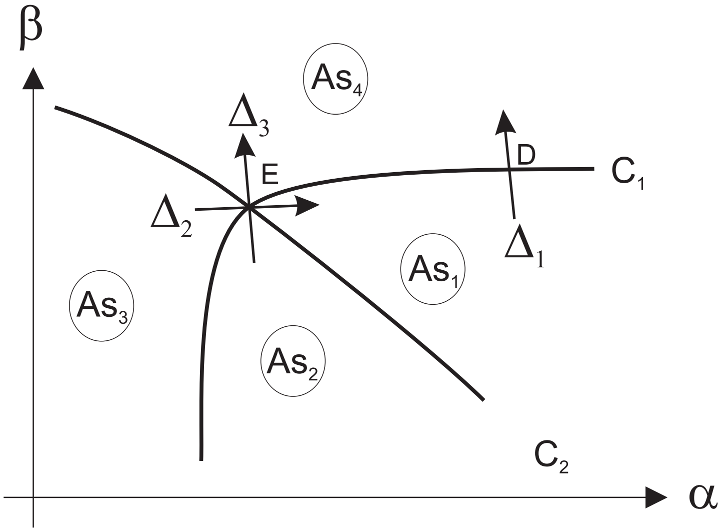

FIG. IV–3 – *Deux courbes de bifurcation dans l'espace des paramètres de dimension 2. La codimension du point E est 2 alors que celle du point D est 1.*

La codimension d'un point de bifurcation est le nombre de directions qu'il faut pour passer par tous les états possibles du système autour de ce point dans l'espace des paramètres. Prenons par exemple un point D sur la courbe C_1. On voit ici qu'il suffit d'un vecteur transversal à la courbe C_1; ce vecteur défini une direction. Si le système est originellement dans la zone de comportement asymptotique 1 et que l'on suit la direction Δ_1 (dans le sens du vecteur), le système traverse la courbe C_1 et entre dans la zone de comportement asymptotique 4. Ainsi un seul vecteur permet de voyager dans toutes les zones différentes autour du point D. Ce point est donc de codimension 1. Cela vient du fait que la courbe C_1 est elle-même de codimension 1 dans le plan (α, β). De même, la courbe C_2 est de codimension 1 dans le plan (α, β). Alors l'intersection de ces deux courbes sera de codimension 2 dans le plan (α, β). Cette intersection est le point E. Quelle sera la codimension de ce point de bifurcation E? C'est le nombre de directions (non-colinéaires) qu'il faut pour passer par tous les états possibles du système autour du point E dans le plan (α, β). On voit que si l'on utilise qu'une seule direction Δ_2, on ne peut voyager que de la zone As_3 vers la zone As_1. Pour pouvoir décrire tous les états asymptotiques du système autour du point de bifurcation E, il est nécessaire d'utiliser une deuxième direction Δ_2. Le point E est donc un point de bifurcation de codimension 2.

c) Classification des bifurcations des points d'équilibre

• Bifurcation saddle-node

Son nom vient du fait que lors de cette bifurcation pour un système où $n = 2$, un point de selle (saddle) et un nœud (node) se rejoignent et disparaissent.

Pour $n = 1$, imaginons la fonction $f(x, \boldsymbol{\mu})$ la plus simple pour avoir une bifurcation. Il faut que pour une certaine valeur des paramètres, le système satisfasse les équations (IV.1-2) et (IV.1-3). On voit donc qu'un système linéaire :

$$\dot{x} = f(x, a, b) = a + bx \qquad \text{(IV.1-5)}$$

ne peut pas convenir puisque $f'(x) = b \quad \forall x$. Il nous faut donc ajouter un terme quadratique à f :

$$\dot{x} = f(x,a,b,c) = a + bx + cx^2 \tag{IV.1-6}$$

Les branches d'équilibre ont donc pour équation :

$$x_E = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \tag{IV.1-7}$$

La solution des équations (IV.1-2) et (IV.1-3) est ($x_E^0 = -\frac{b}{2c}, b^2 = 4ac$). On transforme le système (IV.1-6) en changeant x en $\frac{x}{c} - \frac{b}{2c}$ et en posant $\mu = \frac{b^2}{4} - ac$. On obtient :

$$\dot{x} = -\mu + x^2 \tag{IV.1-8}$$

Le système (IV.1-8) est la forme normale de la bifurcation saddle-node (voir (CHOWS & LI, 1994)). On voit que sur le point de bifurcation $(x,\mu) = (x^0,\mu_0) = (0,0)$, on a :

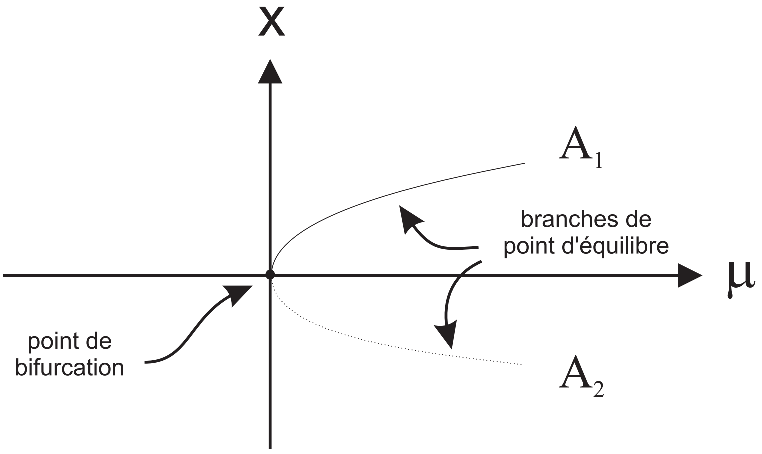

FIG. IV–4 – *Diagramme de la bifurcation saddle-node du système (IV.1-8).*

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^0,\mu_0) \neq 0 \tag{IV.1-9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^0,\mu_0) \neq 0 \tag{IV.1-10}$$

La condition (IV.1-9) indique qu'il n'y a pas de dégénérescence en μ et la condition (IV.1-10) indique que c'est le terme en x^2 qui domine dans $f(x,\mu)$.

Nous allons voir que toutes les autres bifurcations de codimension 1 d'un point d'équilibre non-hyperbolique (avec une valeur propre nulle) ne sont que des perturbations de la bifurcation saddle-node.

- **Bifurcation transcritique**

Etudions maintenant un cas où la condition (IV.1-9) n'est plus remplie. Il suffit pour cela d'étudier un champ de vecteur $f(x,\mu)$ tel que $f(0,\mu) = 0 \quad \forall \mu$. On change la restriction (IV.1-9) en demandant que seule la dérivée croisée soit non nulle :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \mu}(x^0,\mu_0) \neq 0 \tag{IV.1-11}$$

La fonction $f(x,\mu)$ la plus simple que l'on puisse écrire et qui satisfasse les restrictions (IV.1-3), (IV.1-10) et (IV.1-11) est :

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu\, x - x^2 \tag{IV.1-12}$$

dont le diagramme de bifurcation est représenté sur le figure IV–5. Comme lors de la bifurcation saddle-node, les deux points d'équilibre s'approchent dans l'espace des phases lorsque le paramètre tend vers sa valeur de bifurcation. Mais à la différence de la bifurcation saddle-node, les points ne disparaissent pas après leur rencontre : ils se croisent et échangent leur stabilité.

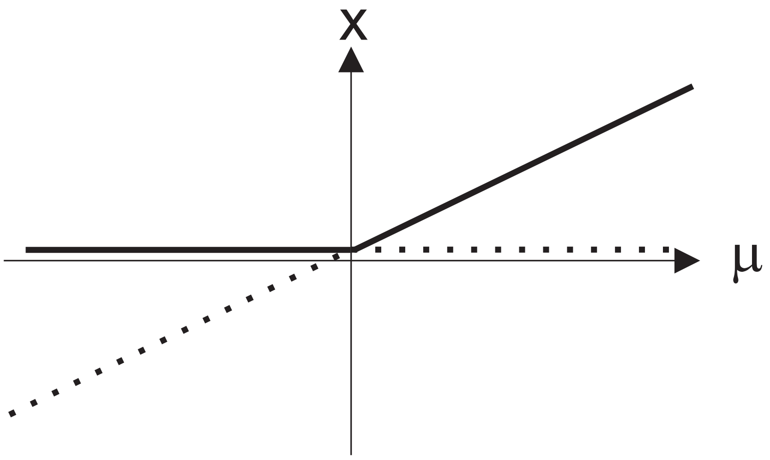

FIG. IV–5 – *Diagramme de la bifurcation transcritique du système (IV.1-12).*

Pour illustrer le fait que la bifurcation transcritique est un cas limite de la bifurcation saddle-node, nous allons étudier le diagramme de bifurcation du système :

$$\dot{x} = f(x,\mu) = \mu\, x - x^2 - \epsilon \quad (\epsilon > 0) \tag{IV.1-13}$$

Ce système a deux points de bifurcation symétriques $(x^0, \mu_0) = \pm(\sqrt{\epsilon}, 2\sqrt{\epsilon})$. Vérifions si la condition (IV.1-9) est remplie :

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(x^0, \mu_0) = x^0 = \sqrt{\epsilon} \tag{IV.1-14}$$

Tant que $\epsilon > 0$, les deux points sont des points de bifurcation saddle-node. Pour tracer le diagramme de bifurcation (figure IV–6), il suffit d'étudier la fonction :

$$\mu = \frac{x^2 + \epsilon}{x} \tag{IV.1-15}$$

On voit sur la figure IV–6 que lorsque $\epsilon \to 0$, les deux bifurcations saddle-node se rejoignent pour ne former plus qu'une seule bifurcation transcritique telle que sur la figure IV–5.

- **Bifurcation fourche**

Etudions maintenant le cas où ni la condition (IV.1-9) ni la condition (IV.1-10) ne sont remplies. Ceci est le cas lorsque la fonction f est impaire en x. L'anti-parité implique la présence d'un point

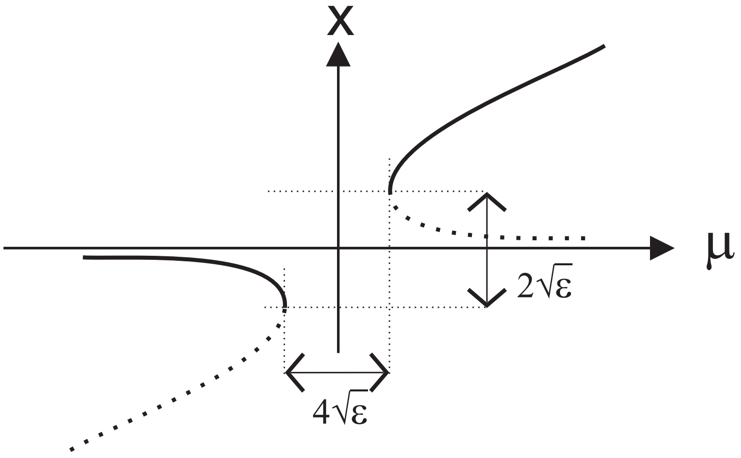

FIG. IV–6 – *Une double bifurcation saddle-node qui tend vers une bifurcation transcritique quand* $\epsilon \to 0$.

d'équilibre en $x = 0 \quad \forall \mu$ et empêche les deux conditions d'être remplies. La forme normale d'un système qui subit une bifurcation fourche est :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu\, x - x^3 \tag{IV.1-16}$$

Le diagramme de bifurcation est tracé sur la figure IV–7. Ce diagramme ressemble à celui de la bifurcation saddle-node auquel on aurait ajouté un point d'équilibre présent constamment en $x = 0$.

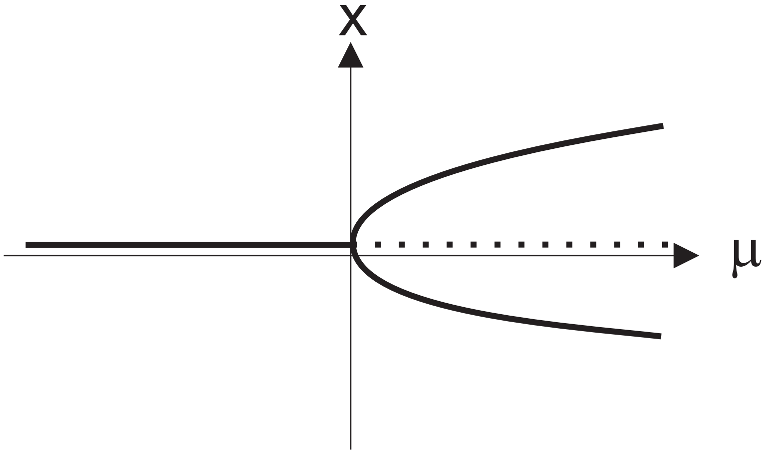

FIG. IV–7 – *Diagramme de la bifurcation fourche du système (IV.1-16).*

Encore une fois, cette bifurcation est un cas limite de la bifurcation saddle-node. Perturbons légèrement le système (IV.1-16) :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu\, x - x^3 - \epsilon \quad (\epsilon > 0) \tag{IV.1-17}$$

Le diagramme de bifurcation de ce système est tracé sur la figure IV–8. Les coordonnées du point

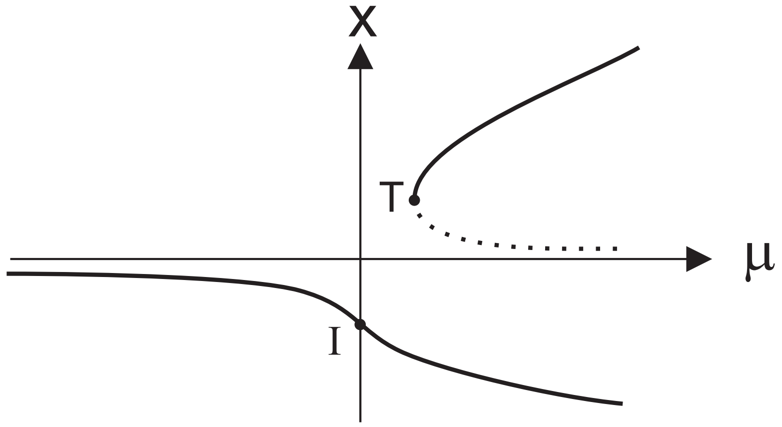

Fig. IV–8 – *Diagramme de bifurcation du système (IV.1-17). Les points T et I se rejoignent quand $\epsilon \to 0$.*

d'inflexion sont $I(0, -\epsilon^{\frac{1}{3}})$ et celles du minimum sont $T\left(3\,\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. Calculons les conditions (IV.1-9) et (IV.1-10) sur le point T :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_T &= x_T \neq 0 \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_T &= -6\,x_T \neq 0 \end{aligned}$$

Ces deux conditions sont remplies tant que $\epsilon \neq 0$. T est donc un point de bifurcation saddle-node tant que $\epsilon \neq 0$. Quand $\epsilon \to 0$, les deux points T et I se rejoignent et le diagramme IV–8 devient alors le diagramme IV–7.

- **Bifurcation de Hopf**

Cette bifurcation, qui fait intervenir en plus du point d'équilibre, un cycle limite, n'existe que pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux. Nous nous placerons dans ce qui suit dans le cas d'un système plan.

Un autre cas où un point d'équilibre E peut être non-hyperbolique est que ce point soit un centre, ou au moins un centre linéaire. Par centre linéaire, on sous-entend que la partie linéaire du champ de vecteur a deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées. Si pour une valeur μ_0 du paramètre de bifurcation, le système a un tel point d'équilibre, on étudie ce qui se passe pour des valeurs légèrement supérieures et inférieures à μ_0.

Imaginons que pour des valeurs légèrement inférieures à μ_0, le jacobien ait toujours des valeurs propres imaginaires mais avec une partie réelle non-nulle négative :

$$\mu < \mu_0 \to \lambda_\pm(\mu) = a \pm iw \text{ avec } a < 0 \qquad \text{(IV.1-18)}$$

le point d'équilibre E est alors un foyer stable. L'espace des phases autour de E est représenté sur la figure IV–9 où on voit que les trajectoires tendent toutes vers le point E. On peut donc tracer une courbe fermée qui sera semi-perméable entrante (courbe C sur la figure IV–9).

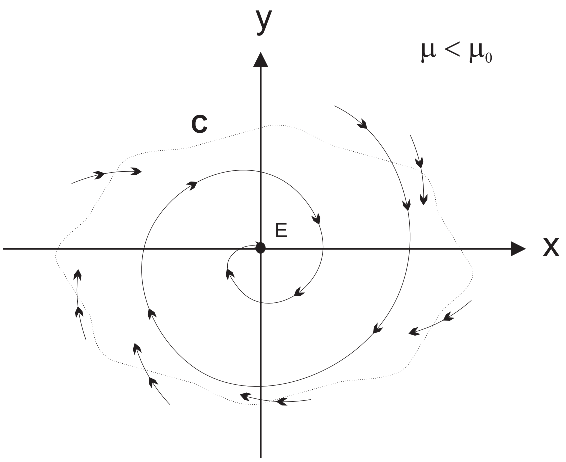

FIG. IV–9 – *Topologie de l'espace des phases autour d'un foyer stable.*

Si, de plus, lorsque μ passe par la valeur μ_0 les valeurs propres voient leur partie réelle changer de signe, c'est à dire que pour

$$\mu > \mu_0 \rightarrow \lambda_{\pm}(\mu) = a \pm iw \text{ avec } a > 0 \qquad \text{(IV.1-19)}$$

alors le foyer est maintenant instable. Le portrait de phase ressemble maintenant à la figure IV–10

Donc lorsque μ varie autour de la valeur μ_0, la stabilité du point d'équilibre E est inversée. Mais ce changement de comportement n'est valable que pour le point E, à savoir que le reste de l'espace des phases n'est pas changé de manière radicale par la variation de μ. La courbe C est toujours semi-perméable entrante : les trajectoires de grande amplitude entrent à l'intérieur de C sans plus en sortir. Mais en même temps les trajectoires autour de E s'enroulent en spirales sortantes, c'est à dire qu'elles

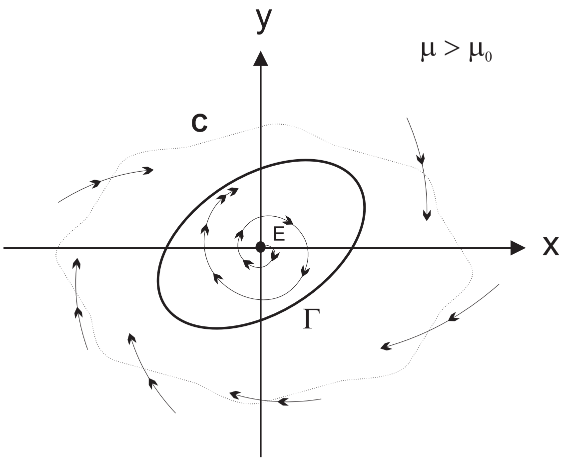

FIG. IV–10 – *Topologie de l'espace des phases après la bifurcation de Hopf, cycle limite stable autour d'un foyer instable.*

s'éloignent du point E. Toutes ces trajectoires semblent se diriger vers un attracteur. Ce ne peut pas être un point d'équilibre, E étant le seul dans cette région de l'espace des phases. C'est en fait un cycle limite stable autour duquel les trajectoires de grande et de petite amplitude viennent s'enrouler lorsque $t \to \infty$.

Les conditions pour avoir une telle bifurcation ont été énoncée par HOPF (1942) :

- $D_x f(x^0, \mu_0)$ a une paire de valeurs propres imaginaires pures
- $\frac{d}{d\mu} Re(\lambda(\mu))_{|\mu=\mu_0} \neq 0$

La figure IV–11 représente le diagramme de bifurcation de la forme normale d'un système qui subit une bifurcation de Hopf :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - (x^2 + y^2)) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - (x^2 + y^2)) \end{aligned} \tag{IV.1-20}$$

qui se met sous la forme[3] :

$$\dot{r} = f(r, \mu) = r(\mu - r^2) \tag{IV.1-21}$$

$$\dot{\theta} = 1 \tag{IV.1-22}$$

Pour tracer le diagramme de bifurcation IV–11, on considère les points zéros de f dans (IV.1-21) (qui est découplée de l'équation (IV.1-22)).

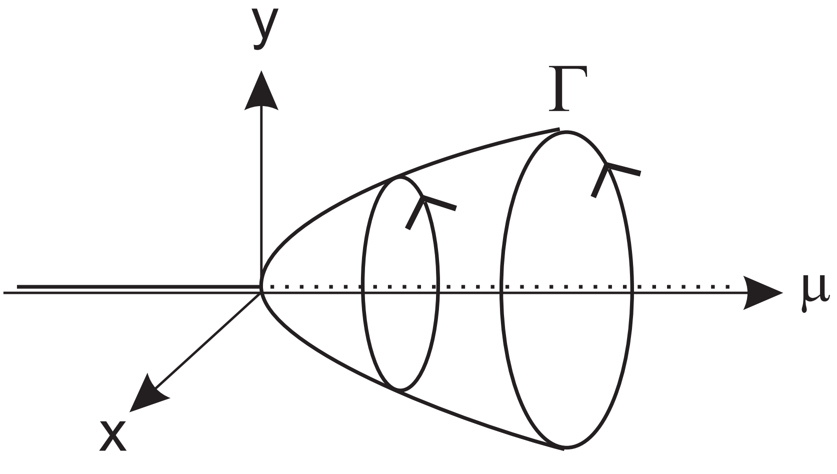

FIG. IV–11 – *Diagramme de la bifurcation de Hopf du système (IV.1-20).*

d) Bifurcation de codimension 1 des cycles limites dans les systèmes plans

Les bifurcations d'une orbite périodique peuvent être détectées par les bifurcations que subit l'application de premier retour associée à l'orbite périodique. Il faut donc étudier les bifurcations possibles d'un point fixe non-hyperbolique d'une application discrète. Il y a en fait trois cas dans lesquels un point fixe n'est pas hyperbolique :

- le point fixe a une valeur propre égale à 1 : ce cas est complètement analogue aux cas où un point d'équilibre d'un système continu subit une bifurcation liée à une valeur propre nulle. Pour tracer

---

[3] grâce à un changement de variable $x = r\cos(\theta)$,$y = r\sin(\theta)$

les diagrammes de bifurcation, il faut faire le lien entre le point fixe de l'application de premier retour et l'amplitude du cycle limite pour le système continu. Il existe ainsi des bifurcations saddle-node, transcritique et fourche pour les cycles limites. Dans le cas d'une bifurcation fourche par exemple, le système a un cycle limite stable qui se transforme en cycle limite instable en donnant naissance à deux cycles limites stable supplémentaires (un de plus grande et un de plus petite amplitude).

- le point fixe a une valeur propre égale à -1. Cette bifurcation n'existe que pour des système d'ordre 3 au moins.
- le point fixe à deux valeurs propres imaginaires conjuguées de module 1. Ici aussi, cette bifurcation n'existe que pour des système d'ordre 3 au moins.

Voici un exemple de bifurcation saddle-node pour deux cycles limites.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r,\mu) = r(\mu - (r-3)^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \tag{IV.1-23}$$

L'équation en $\dot{r}$ étant découplée de l'équation en $\dot{\theta}$, les zéros de f nous donnent les rayons des cycles limites du système. Il suffit donc pour tracer le diagramme de bifurcation de tracer la courbe $f = 0$.

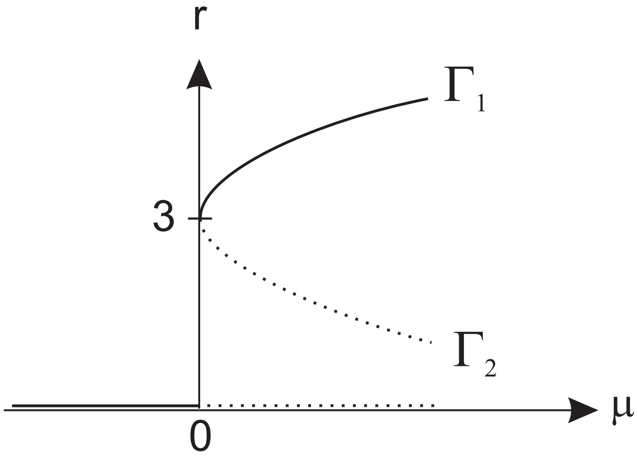

Fig. IV–12 – *Diagramme de bifurcation pour les cycles limites du système (IV.1-23).*

– IV.2 – Résultant et bifurcation saddle-node des cycles limites

a) Lieu, nombre, multiplicité

Nous avons introduit au chapitre II un algorithme qui, pour les systèmes de Liénard :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x,\boldsymbol{\mu}) \\ \dot{y} &= -G(x) \end{aligned} \tag{IV.2-1}$$

(avec F et G deux polynômes impairs), construit une suite de polynômes $R_n(x,\boldsymbol{\mu})$ (n pair) dont les racines strictement positives de ces polynômes sont reliées aux cycles limites de (IV.2-1) de la façon suivante lorsque n est grand :

- Chaque racine positive correspond à un cycle limite.
- La valeur de cette racine correspond à l'amplitude du cycle limite
- La multiplicité de la racine est liée à la multiplicité du cycle limite

Le dernier point va nous permettre d'étudier les bifurcations des cycles limites de (IV.2-1) grâce aux polynômes $R_n(x,\boldsymbol{\mu})$.

De plus, nous avons montré au chapitre III, que lorsque $G(x) = -x$, on peut calculer une autre suite de polynômes $\hat{R}_n(a,\boldsymbol{\mu})$ qui fournit les mêmes informations sur les cycles (i.e. les trois points évoqués ci-dessus) mais de manière plus précise encore. C'est d'ailleurs cette deuxième suite que nous allons utiliser à chaque fois que ce sera possible (i.e. lorsque $G(x) = x$) (les résultats présentés ici on été publiés dans (Giacomini & Neukirch, 1998*a*)).

Nous allons illustrer ceci sur le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (x^5 - \frac{\sqrt{5}}{3}(1+\lambda)x^3 + \lambda\, x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \qquad \text{(IV.2-2)}$$

qui a été étudié par Lloyd (1987) et Perko (1992). Le théorème de Liénard assure que pour $\lambda < 0$, ce système a un unique cycle limite. Le théorème de Rychkov montre que ce système a deux cycles limites si $0 < \lambda < \left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{29}}{4}\right)^2 \simeq 0.1094$ ou si $\lambda > \left(\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{29}}{4}\right)^2 \simeq 9.1406$. L'étude de la divergence ($= -F'(x)$) du champ de vecteur nous révèle qu'il n'y a pas de cycle si $\frac{1}{5} < \lambda < 5$. On ne sait donc pas ce qu'il se passe entre 0.1094 et $\frac{1}{5}$ et entre 5 et 9.1406. D'autre part le système a, pour tout λ, un point d'équilibre à l'origine. On a tracé sur la figure IV–13 le diagramme de bifurcation –calculé via intégration numérique– des cycles limites. La courbe tracée donne l'amplitude du ou des cycles limites en fonction de λ.

- Quand λ est négatif le point d'équilibre $O(0,0)$ est un foyer instable. Il est entouré d'un unique cycle limite stable (Γ_1) dont l'amplitude décroît au fur et à mesure que λ croit et s'approche de zéro.
- Lorsque λ passe la valeur $\lambda = 0$, le point d'équilibre change de stabilité : une bifurcation de Hopf se produit, un cycle limite instable (Γ_2) entoure maintenant l'origine devenue foyer stable. Ainsi le système a deux cycles limites de stabilité opposées.
- Pour $\lambda > 0$, le cycle limite Γ_2 voit son amplitude augmenter avec λ. L'amplitude du cycle extérieur Γ_1 continue de décroître avec λ. Les deux cycles vont donc nécessairement se rencontrer.
- Pour $\lambda = \lambda_1$, les deux cycles se rencontrent et disparaissent. C'est une bifurcation saddle-node de cycles limites.
- Pour $\lambda = \lambda_2$, une autre bifurcation saddle-node a lieu, les deux cycles Γ_1 et Γ_2 renaissent. Ces cycles existent $\forall\, \lambda > \lambda_2$.

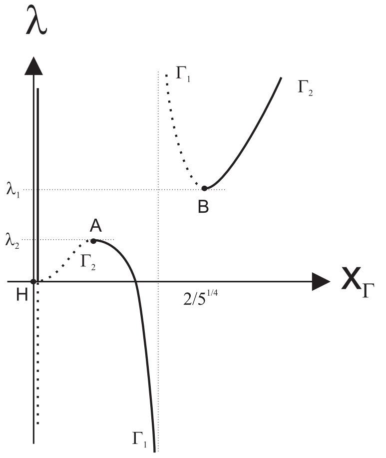

FIG. IV–13 – *Diagramme de bifurcation des points d'équilibre et des cycles limites du système (IV.2-2). La droite $x = 0$ représente le point d'équilibre à l'origine. Les courbes en pointillé indiquent le caractère instable de la solution asymptotique (cycle limite ou point d'équilibre), alors que les courbes en traits pleins indiquent la stabilité.*

Etudions maintenant ce même système, mais avec les polynômes $R_n(x,\lambda)$. Etant donné que les racines positives de ces polynômes donnent accès à une approximation de l'amplitude de chaque cycle limite, il suffit pour avoir une approximation du diagramme de la figure IV–13 de tracer $R_n(x,\lambda) = 0$ dans le demi-plan $(x > 0, \lambda)$. En fait, comme

$$R_2(x,\lambda) = -2\,x\,F(x,\lambda), \tag{IV.2-3}$$

en première approximation il suffit de tracer $F(x,\lambda) = 0$ pour avoir une approximation du diagramme de bifurcation du système (IV.2-2) ! En fait, dans l'équation $-2\,x\,F(x,\lambda) = 0$, $x = 0$ caractérise l'existence du point d'équilibre à l'origine pour tout λ et la courbe $F(x,\lambda) = 0$ seulement suffit pour avoir la forme du diagramme de bifurcation. Cette courbe peut se mettre sous la forme explicite :

$$\lambda = x^2\,\frac{3\,x^2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}\,x^2 - 3} \tag{IV.2-4}$$

Elle est tracée sur la figure IV–14. On voit sur cette figure que dans la bande $\frac{1}{5} < \lambda < 5$, le polynôme F (donc le polynôme $R_2(x)$) n'a pas de racines. Ceci prévient l'existence de cycle limite. On a tracé sur la figure IV–15 les courbes $R_n(x,\lambda) = 0$. Ces courbes représentent une approximation à la courbe (IV.2-2) d'autant fine que n est grand. A chaque ordre, l'intervalle de valeurs de λ pour lesquelles le polynôme $R_n(x,\lambda)$ n'a pas de racines s'agrandi. Dans cette bande, on sait de manière rigoureuse qu'il n'y a pas de cycle limite.

L'utilisation des courbes $R_n(x,\lambda) = 0$ et $\hat{R}_n(a,\lambda) = 0$ avec $n > 2$ fourni de meilleures approximations au diagramme IV–13 même si les équations ne se mettent plus sous forme explicite comme (IV.2-4).

Dans le dernier exemple, il est intéressant de pouvoir calculer une approximation numérique des valeurs de λ_1 et λ_2. Si l'on considère la troisième assertion faite plus haut qui lie la multiplicité des racines des polynômes R_n à la multiplicité des cycles limites, on voit que pour trouver une approximation des valeurs de λ_1 et λ_2, valeurs pour lesquelles le système a un cycle limite non-hyperbolique

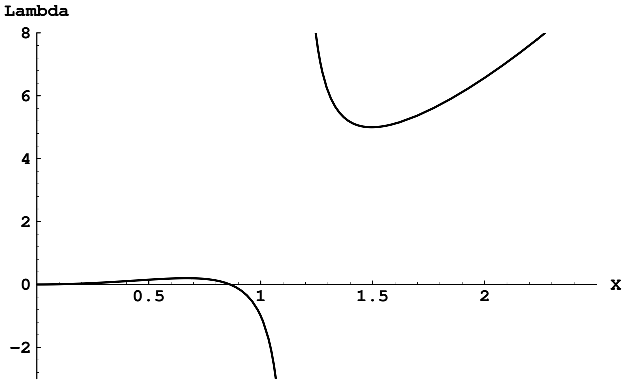

Fig. IV–14 – *Approximation de la courbe de la figure IV–13 grâce à l'équation (IV.2-4).*

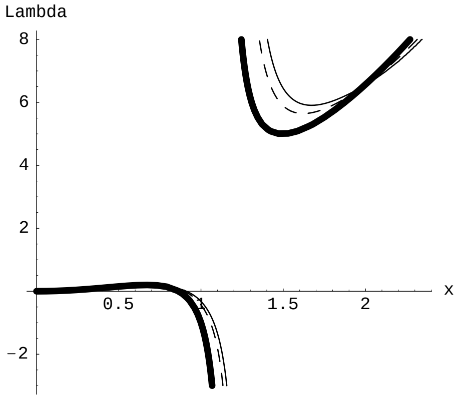

Fig. IV–15 – *Approximation de la courbe de la figure IV–13 grâce aux équations* $R_n(x, \lambda) = 0$ *(*$n = 2$ *(gras),*$n = 6$ *(pointillé),* $n = 10$ *(continu)).*

(double), il suffit de chercher quelles sont les valeurs de λ telles que les polynômes $\hat{R}_n(a,\lambda)$ ont des racines doubles. Cela revient à chercher les valeurs de λ pour lesquelles les courbes $\hat{R}_n(a,\lambda) = 0$ ont un extremum. Il suffit pour cela de résoudre le système :

$$\begin{aligned} \hat{R}_n(a,\lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{R}_n}{\partial a}(a,\lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{IV.2-5}$$

Ce système d'équations est à rapprocher du système d'équations (IV.1-2, IV.1-3) employé pour déterminer les valeurs de bifurcation saddle-node pour un point d'équilibre.

Dans la table IV.1 sont consignées les approximations des coordonnées des points de bifurcation A et B.

n	2	4	6	8	10	20	30	numérique
$a_{A,n}$	0.7238	0.7238	0.7238	0.7238	0.7238	0.7238	0.7238	$0.70 < x_{\Gamma,1} < 0.74$
$\lambda_{A,n}$	0.17157	0.17155	0.17155	0.17154	0.17154	0.17154	0.17154	< 0.1712
$a_{B,n}$	1.74	1.76	1.80	1.81	1.82	1.83	1.84	$1.80 < x_{\Gamma,2} < 2.08$
$\lambda_{B,n}$	5.83	5.98	6.24	6.31	6.35	6.45	6.48	< 6.575

TAB. IV.1 – *Approximation, grâce aux équations (IV.2-5), des coordonnées de points de bifurcation A et B du diagramme IV–13 pour le système (IV.2-2).*

b) Courbe de bifurcation pour le système de Rychkov

On choisit maintenant d'étudier le système le plus général avec un polynôme $F(x)$ impair et de degré 5 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon\,(a_5 x^5 + a_3 x^3 + a_1 x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{IV.2-6}$$

On peut réduire le nombre de paramètres à 2 grâce à un changement de variable. Mais on ne peut effectuer ce changement de variable que si le coefficient en x^5 de $F(x)$, c'est à dire le terme $\epsilon\, a_5$, est positif. Si ce terme est négatif, un changement de variable préalable est nécessaire :

$$x \to -x \quad \text{et} \quad t \to -t \tag{IV.2-7}$$

Le système IV.2-6 devient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon\,((-a_5)x^5 - a_3 x^3 - a_1 x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

En re-écrivant les coefficients $a'_i = -a_i$ on voit que maintenant le coefficient en x^5 du nouveau système est positif : $\epsilon\, a'_5 = -\epsilon\, a_5 > 0$.

Il suffit maintenant d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha^4\,\epsilon\,a_5 = 1 \tag{IV.2-8}$$

Le système (IV.2-6) devient :

$$\begin{aligned} \dot u &= v - \left(u^5 + \sqrt{\frac{\epsilon}{a_5}} a_3\, u^3 + \epsilon a_1\, u\right) \\ \dot v &= -u \end{aligned} \tag{IV.2-9}$$

On voit donc que l'étude de ce système ne nécessite que 2 paramètres indépendants. On pose $\mu = -\sqrt{\frac{\epsilon}{a_5}}\, a_3$, $\delta = a_1\epsilon$, $x = u$ et $y = v$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot x &= y - (x^5 - \mu x^3 + \delta x) \\ \dot y &= -x \end{aligned} \tag{IV.2-10}$$

La courbe de bifurcation est tracée sur la partie gauche de la figure IV–16 Les différents états asymptotiques du système sont :

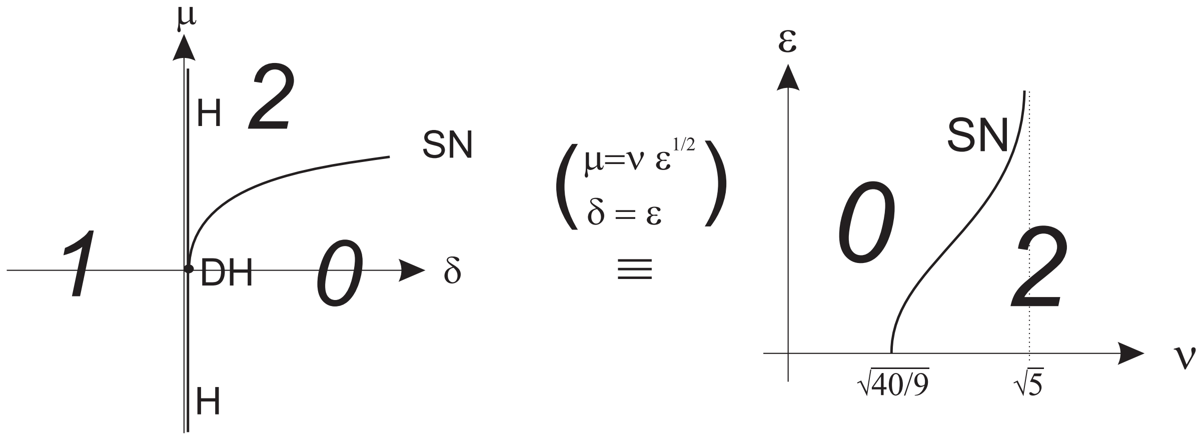

FIG. IV–16 – *A gauche la courbe de bifurcation pour le système (IV.2-10). Le point* $DH(0,0)$ *est de co-dimension 2 (Double Hopf). A droite la courbe de bifurcation pour le système (IV.2-11). Le nombre de cycles limites est donné dans chaque région. Les courbes notée H sont les courbes de bifurcation de Hopf. Celles notées SN sont les courbes de bifurcation Saddle-Node. La valeur* $\sqrt{\frac{40}{9}}$ *est obtenue avec la méthode de Melnikov et* $\sqrt{5}$ *est obtenue avec la limite de relaxation.*

- Pour $\delta < 0$, la fonction $F(x)$ a une seule racine positive. Le théorème de Liénard assure que le système a un unique cycle limite.
- Pour $\delta > 0$ et $\mu < 0$, la divergence $(= -F'(x))$ du champ de vecteur est de signe constant. Le critère de Bendixson assure donc qu'il n'y a pas de cycle limite dans le plan de phase.

- Pour $\delta > 0$ et $\mu > 0$, on détecte via intégration numérique 0 ou 2 cycles limites suivant que l'on se place en dessous ou au dessus de la courbe de bifurcation $B_{SN}(\mu, \delta) = 0$ (que l'on ne connaît pas de manière exacte).

Plusieurs auteurs ont étudié ce système mais écrit sous la forme :

$$F(x) = \epsilon(x^5 - \nu x^3 + x) \quad \text{avec } \epsilon, \nu > 0 \tag{IV.2-11}$$

Ce dernier système est équivalent à (IV.2-10) avec :

$$\delta = \epsilon \text{ et } \mu = \nu\sqrt{\epsilon} \tag{IV.2-12}$$

Rychkov (1975) a montré que ce système peut avoir au plus 2 cycles limites et qu'il y a effectivement deux cycles limites $\forall\, \epsilon > 0$ si $\nu > 2.5$. Ce résultat a été amélioré par Alsholm (1992) qui a donné une valeur de la borne ν plus basse : $\nu > 2.3178$. Finalement Odani (1996) a donné une valeur encore inférieure de la borne ν : $\nu > \sqrt{5}$. Cette dernière valeur est la valeur minimale que l'on puisse donner $\forall \epsilon$ (voir figure IV–16). Si par contre on ne considère que certaines valeurs de ϵ, il peut y avoir deux cycles limites pour des valeurs de ν inférieures à $\sqrt{5}$, ce que l'on voit sur la figure IV–16

c) Approximation algébrique

On veut maintenant calculer une approximation algébrique de la courbe de bifurcation de la figure IV–16. Celle-ci peut être obtenue en cherchant les valeurs de μ et δ telles que les polynômes $\hat{R}_n(a, \mu, \delta)$ ont une racine double (racine qui correspond alors à l'existence du cycle limite double non-hyperbolique lors d'une bifurcation saddle-node). On essaye donc de résoudre le système algébrique :

$$\begin{aligned} \hat{R}_n(a, \mu, \delta) &= 0 \\ \frac{\partial \hat{R}_n}{\partial a}(a, \mu, \delta) &= 0 \end{aligned}$$

La solution est une courbe $\hat{B}_n(\mu, \delta) = 0$ dans le plan (δ, μ). L'équation de la courbe est obtenue en calculant le résultant des deux polynômes $\hat{R}_n(a, \mu, \delta)$ et $\frac{\partial \hat{R}_n}{\partial a}(a, \mu, \delta)$. Pour $n = 2$, on obtient :

$$\hat{B}_2(\mu, \delta) = \big(160\,\delta\,(40\delta - 9\mu^2)\big)^2 = (\hat{B}_{2,H}\,\hat{B}_{2,SN})^2 \text{ avec } \hat{B}_{2,H} = 160\,\delta \text{ et } \hat{B}_{2,SN} = 40\delta - 9\mu^2$$

$$\hat{B}_4(\mu, \delta) = \delta^2\,(4 + 3\delta)^2\,\hat{B}^2_{4,SN}(\mu, \delta) \tag{IV.2-13}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{4,SN} = \; & 60915712000000000\,\delta + 201118494720000000\,\delta^3 + 264462336547200000\,\delta^5 + \\
& 177572893509792000\,\delta^7 + 65451141737435520\,\delta^9 + 13384470332581920\,\delta^{11} + \\
& 1424985989036940\,\delta^{13} + 61648987951485\,\delta^{15} - 13706035200000000\mu^2 - \\
& 154782321408000000\,\delta^2\mu^2 - 303000638212800000\,\delta^4\mu^2 - 254591978129596800\,\delta^6\mu^2 - \\
& 110360749699851552\,\delta^8\mu^2 - 25355205803371752\,\delta^{10}\mu^2 - 2905547522982984\,\delta^{12}\mu^2 - \\
& 129460241599326\,\delta^{14}\mu^2 + 39557419387200000\,\delta\mu^4 + 143967694186008000\,\delta^3\mu^4 + \\
& 161563646039523120\,\delta^5\mu^4 + 83740051613806272\,\delta^7\mu^4 + 21704950573356528\,\delta^9\mu^4 + \\
& 2660650868380788\,\delta^{11}\mu^4 + 121271052154185\,\delta^{13}\mu^4 - 3353984136360000\mu^6 - \\
& 35413860846038400\,\delta^2\mu^6 - 59144510246846976\,\delta^4\mu^6 - 37635114788844336\,\delta^6\mu^6 - \\
& 11043994193712828\,\delta^8\mu^6 - 1436092464288636\,\delta^{10}\mu^6 - 66495707450361\,\delta^{12}\mu^6 + \\
& 4487922007493760\,\delta\mu^8 + 13557902164396992\,\delta^3\mu^8 + 11100019880825568\,\delta^5\mu^8 + \\
& 3689724881639952\,\delta^7\mu^8 + 503459322433416\,\delta^9\mu^8 + 23515576062336\,\delta^{11}\mu^8 - \\
& 232774362893952\mu^{10} - 1952539561341792\,\delta^2\mu^{10} - 2248695385302528\,\delta^4\mu^{10} - \\
& 841256733062808\,\delta^6\mu^{10} - 118859863334580\,\delta^8\mu^{10} - 5561006059800\,\delta^{10}\mu^{10} + \\
& 163541692058976\,\delta\mu^{12} + 317311451911440\,\delta^3\mu^{12} + 131123812928976\,\delta^5\mu^{12} + \\
& 18890698498056\,\delta^7\mu^{12} + 879234693624\,\delta^9\mu^{12} - 6118866702144\mu^{14} - \\
& 30601925794944\,\delta^2\mu^{14} - 13484120966820\,\delta^4\mu^{14} - 1948075883712\,\delta^6\mu^{14} - \\
& 89605414080\,\delta^8\mu^{14} + 1858597350624\,\delta\mu^{16} + 829865985480\,\delta^3\mu^{16} + \\
& 118210219344\,\delta^5\mu^{16} + 5340253779\,\delta^7\mu^{16} - 54442233216\mu^{18} - \\
& 23251370436\,\delta^2\mu^{18} - 3213604044\,\delta^4\mu^{18} - 141776649\,\delta^6\mu^{18} \qquad \text{(IV.2-14)}
\end{aligned}$$

En fait chaque fonction $\hat{B}_n(\mu,\delta)$ est de la forme :

$$\hat{B}_n(\mu,\delta) = \hat{B}^2_{n,H}(\delta)\,\hat{B}^2_{n,SN}(\mu,\delta) \qquad \text{(IV.2-15)}$$

$$\text{avec } \hat{B}_{n,H}(\delta) = \delta^j \qquad \text{(IV.2-16)}$$

C'est à dire que les fonctions $\hat{B}_n$ contiennent à la fois la bifurcation de Hopf qui a lieu en $\delta = 0$ et la bifurcation saddle-node qui a lieu dans le quadrant (μ,δ) positifs. A chaque rang n pair, les courbes $\hat{B}_{n,H} = 0$ et $\hat{B}_{n,SN} = 0$ divisent le plan (μ,δ) en trois régions (voir figure IV–17) :

- Région$_{1,n}$: $\delta < 0$, les polynômes $\hat{R}_n(a,\mu,\delta)$ ont tous une seule racine positive.
- Région$_{2,n}$: $\delta > 0$ et $\hat{B}_n(\mu,\delta) < 0$ (au dessus de la courbe $\hat{B}_n(\mu,\delta) = 0$) le polynôme $\hat{R}_n(a,\mu,\delta)$ a deux racines positives.
- Région$_{3,n}$: $\delta > 0$ et $\hat{B}_n(\mu,\delta) > 0$ (en dessous de la courbe $\hat{B}_n(\mu,\delta) = 0$) le polynôme $\hat{R}_n(a,\mu,\delta)$ n'a pas de racine autre que $a = 0$.

Les courbes $\hat{B}_{n,SN}(\mu,\delta) = 0$ sont très proches de la courbe calculée numériquement. Si maintenant on considère les polynômes $R_n(x,\mu,\delta)$, on peut calculer de la même façon des approximations $B_{n,SN} = 0$ de la courbe de bifurcation $B_{SN} = 0$. Ces approximations sont moins bonnes que les précédentes mais elles permettent un résultat rigoureux : en dessous des courbes $B_{n,SN} = 0$, il n'y pas de cycles limite[4] . Chaque courbe $B_{n,SN}(\mu,\delta) = 0$ est donc une approximation inférieure exacte à la courbe

---

[4] car dans ce cas les polynômes $R_n(x,\mu,\delta)$ n'ont pas de racines non-nulles (voir chapitre II).

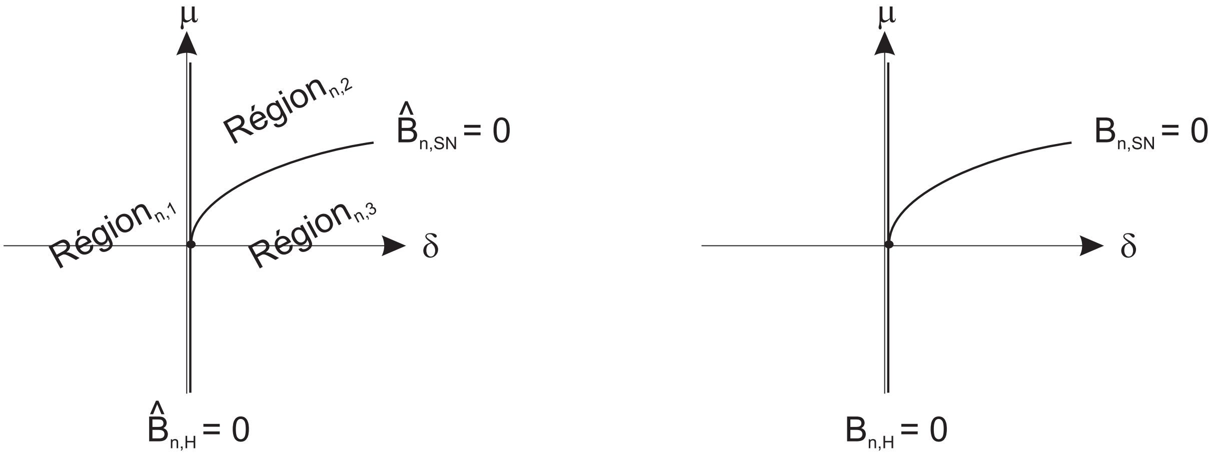

FIG. IV–17 – *Plan (μ, δ) divisé en 3 régions par les courbes $B_{n,H}(\delta) = 0$ et $B_{n,SN}(\mu, \delta) = 0$. A chaque région correspond un comportement asymptotique du système (IV.2-10) différent.*

$B_{SN}(\mu, \delta) = 0$. De plus chaque courbe $B_{n,SN} = 0$ est au dessus de la précédente $B_{n-2,SN} = 0$. Les approximations sont donc de plus en plus proche de la courbe réelle (voir figure IV–18).

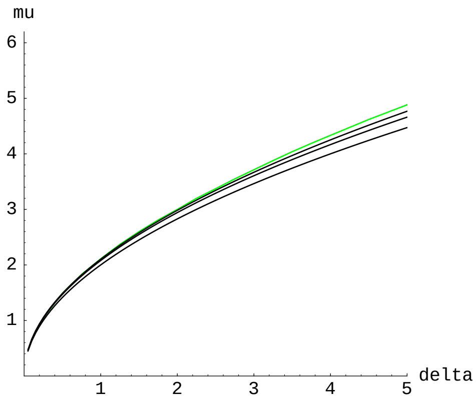

FIG. IV–18 – *Approximations algébriques $B_{n,SN}$ $(n = 2, 4, 6)$ et en pointillé courbe de bifurcation saddle-node calculée via intégration numérique. Le tracé des courbes $\hat{B}_{n,SN}$ est encore plus proche de la courbe en pointillé mais la différence n'est sensible que pour des valeurs de δ plus grandes.*

Pour tester le fiabilité des approximations algébriques que nous donne la méthode présentée ici, nous allons calculer analytiquement les asymptotes $(\mu, \delta) \to (0, 0)$ et $(\mu, \delta) \to (+\infty, +\infty)$ de $B_{SN}(\mu, \delta)$ et les comparer aux résultats donnés par les approximations $B_{n,SN}(\mu, \delta) = 0$. Pour cela nous allons utiliser le système IV.2-11 obtenu avec le changement de variable IV.2-12. Ce changement de variable nous montre que quand $\epsilon \to 0$, $(\mu, \delta) \to (0, 0)$ et quand $\epsilon \to +\infty$, $(\mu, \delta) \to (+\infty, +\infty)$.

Quand $\epsilon \to 0$, on peut utiliser la méthode de Melnikov pour détecter la présence des cycles limites du système (IV.2-11).

$$M(F) = -\int_0^{2\pi} x\,F(x)|_{x=r\cos(\theta)} d\theta \qquad \text{(IV.2-17)}$$

$$= -\frac{2\pi}{16} r^2(5r^4 - 6\nu r^2 + 8) \qquad \text{(IV.2-18)}$$

Quand $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, les cycles limites sont presque des cercles. Il y autant de cycles limites que de racines positives dans $M(F)$. Les rayons des cercles sont égaux à ces racines. Ici $M(F)$ est une fonction paire en r et ne peut avoir que 2 racines strictement positives différentes. On cherche donc la valeur de ν qui rend ces deux racines confondues. C'est la valeur qui annule le discriminant :

$$\Delta = 36\nu_{SN}^2 - 160 = 0 \Rightarrow \nu_{SN} = \sqrt{\frac{40}{9}} \qquad \text{(IV.2-19)}$$

Ainsi en utilisant le changement de variable (IV.2-12) on montre que la courbe de bifurcation $B_{SN}(\mu,\delta) = 0$ est de la forme $\mu^2 = \frac{40}{9}\delta$ dans un voisinage de l'origine $(\mu,\delta) = (0,0)$.

Quand $\epsilon \to \infty$, le système présente des oscillations de relaxation. Les deux cycles limites, quand ils existent, ont une forme particulière (voir figure IV–19). Les cycles limites suivent les extrema de la fonction $F(x)$. Ainsi lorsque ces extrema ont la même amplitude (en valeur absolue), les cycles limites se rejoignent et disparaissent dans une bifurcation saddle-node. Nous allons donc calculer la valeur de ν qui égalise l'amplitude des deux extrema d'abscisse positive : $x_A = \sqrt{\frac{3\nu-\sqrt{-20+9\nu^2}}{10}}$ $x_B = \sqrt{\frac{3\nu+\sqrt{-20+9\nu^2}}{10}}$. On cherche donc la valeur de ν telle que $F(x_A) = -F(x_B)$. On trouve facilement $\nu = \sqrt{5}$. Ainsi en utilisant le changement de variable (IV.2-12) on montre que la courbe de bifurcation $B_{SN}(\mu,\delta)$ est de la forme $\mu^2 = 5\,\delta$ pour de très grandes valeurs de μ et δ.

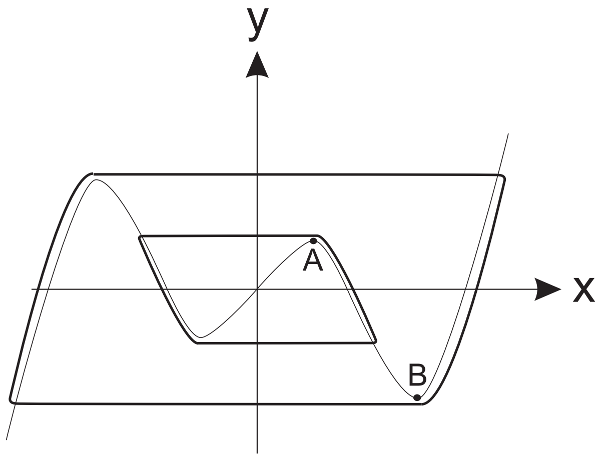

Fig. IV–19 – *Forme des cycles limites du système (IV.2-11) quand $\epsilon \to \infty$. Les cycles limites ne peuvent couper la courbe $y = F(x)$ que dans un seul sens car celle-ci est semi-perméable.*

On va vérifier que l'équation de $B_{4,SN}(\mu,\delta) = 0$ redonne ces valeurs. Dans un voisinage de l'origine $(\mu,\delta) = (0,0)$, on ne garde dans $B_{4,SN}$ que les termes de plus bas degré en μ^2 et δ :

$$B_{4,SN} \simeq 60915712\,10^9\,\delta - 137060352\,10^8\mu^2 = 15228928\,10^8(40\delta - 9\mu^2) \qquad \text{(IV.2-20)}$$

On trouve le même résultat aux rang n supérieurs. Seul le coefficient entier ($15228928\,10^8$) change. En $(\mu,\delta) \to (+\infty,+\infty)$, on s'attend (voir figure IV–20) à ce que les courbes $B_{n,SN}(\mu,\delta)$ aient des asymptotes de la forme $\mu^2 = \alpha_n\,\delta$ avec $\alpha_n \to 5$ quand $n \to \infty$. Pour trouver α_4, on remplace μ^2 par $\alpha\,\delta$ dans $B_{4,SN}(\mu,\delta)$. On obtient un polynôme dont on prend le coefficient de la plus grande puissance en δ. Ce coefficient est un polynôme en α qui n'a qu'une seule racine réelle $\alpha_4 = 4.68441$. Si on fait le même calcul à l'ordre 6, on trouve $\alpha_6 = 4.7751$.

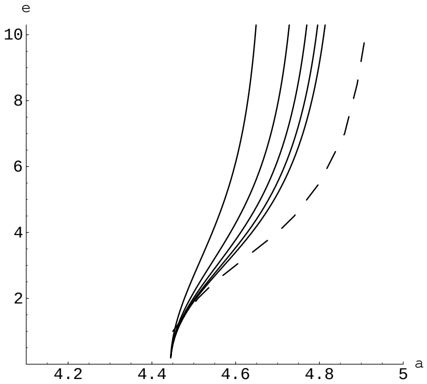

FIG. IV–20 – *En pointillé, la courbe de bifurcation du système (IV.2-11) calculée via intégration numérique et ses approximations algébriques* $\hat{B}_{n,SN}(\nu,\epsilon) = 0$ *(*$n = 4,6,8,10,12$*).* ϵ *en ordonnée et* ν *en abscisse.*

Maintenant que l'on connaît la forme de la courbe de bifurcation du système (IV.2-10), on peut retrouver facilement l'aspect qualitatif du diagramme de bifurcation du système (IV.2-2) si l'on remarque que ce deuxième système est une sous-classe du premier :

$$\mu = \frac{\sqrt{5}}{3}(1+\lambda) \text{ et } \delta = \lambda \qquad \text{(IV.2-21)}$$

Pour comprendre les différents états asymptotique du système (IV.2-2) quand λ varie de $-\infty \to +\infty$. il suffit de tracer la droite :

$$\mu = \frac{\sqrt{5}}{3}(1+\delta) \qquad \text{(IV.2-22)}$$

dans le plan (μ,δ) et d'en étudier les intersections avec la courbe de bifurcation de la figure IV–16. On voit sur la figure IV–21 que la droite (IV.2-22) a 3 intersections avec la courbe de bifurcation. Commeçons notre description pour $\lambda \ll -1$. La droite est dans la région 1 du plan (δ,μ)[5] , il n'y a donc qu'un seul cycle limite. Quand λ croit, on s'approche de l'axe $\delta = 0$. Quand la droite coupe cet axe, le système subit une bifurcation de Hopf. Un deuxième cycle est créé autour de l'origine. On entre dans la région 2 du plan (δ,μ), le système a deux cycles limites. Puis la droite IV–21 coupe une deuxième fois la courbe de bifurcation et entre dans la région 3 du plan. Les deux cycles s'annihilent dans une bifurcation saddle-node, il n'y a plus de cycle limite. Les deux cycles re-apparaissent lorsque

---

[5] les numéros des régions sont ceux de la figure IV–17.

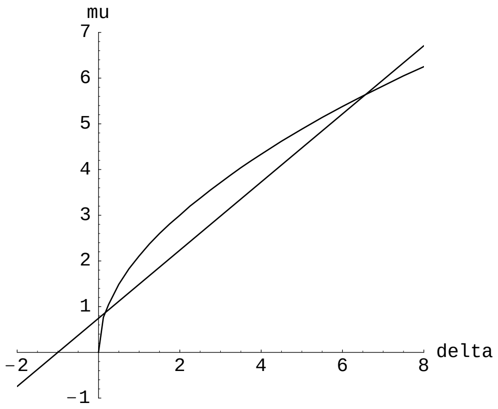

FIG. IV–21 – *Courbe de bifurcation du système (IV.2-10) et droite (IV.2-22). L'axe vertical fait partie du diagramme de bifurcation.*

la droite coupe une troisième fois la courbe de bifurcation. Ces deux cycles limites existent dès lors pour toutes les valeurs de λ supérieures.

On peut d'ailleurs, en utilisant la relation $\delta = \lambda$, retrouver les valeurs de la table IV.1 en considérant les intersections de la droite (IV.2-22) avec les différentes courbes $\hat{B}_{n,SN} = 0$.

d) Bifurcation de Hopf de codimension 3

Les résultats fournis par les polynômes $R_n(x)$ pour la bifurcation de Hopf dégénérée du système (IV.1-1) avec $G(x) = x$ et un polynôme $F(x)$ de degré cinq nous engagent à essayer de trouver la surface de bifurcation du système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - (x^7 + a\,x^5 + b\,x^3 + c\,x) \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{IV.2-23}$$

en utilisant la même méthode.

Ce système présente une bifurcation de Hopf dégénérée en $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ dont la forme normale est :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r\,(r^6 + \mu_2\,r^4 + \mu_1\,r^2 + \mu_0) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \tag{IV.2-24}$$

Cette bifurcation est étudiée dans (BROER, DUMORTIER, VAN STRIEN & TAKENS, 1991, page 217) et (TAKENS, 1973) pour $r \ll 1$. On peut y voir la surface de bifurcation qui délimite dans l'espace des paramètres (μ_0, μ_1, μ_2) les zones où le système (IV.2-24) a 0,1,2 ou 3 cycles limites de petites amplitudes.

On verra plus loin dans ce chapitre que l'étude du système (IV.2-24) avec $r \ll 1$ est équivalente à l'étude du système (IV.2-23) avec $c \ll b \ll a \ll 1$.

On peut donc une fois que l'on a tracé l'approximation de la surface de bifurcation grâce aux polynômes $R_n(x,a,b,c)$ et $\hat{R}_n(\alpha,a,b,c)$[6], comparer la limite $(a,b,c)\to(0,0,0)$ de ces approximations avec le résultat de Broer, Dumortier, van Strien & Takens (1991).

On calcule donc les polynômes $B_n(a,b,c)$ et $\hat{B}_n(a,b,c)$ de la même façon que d'habitude et on étudie les valeurs de (a,b,c) pour lesquelles $B_n(a,b,c)=0$ et $\hat{B}_n(a,b,c)=0$. On peut alors en déduire les zones de l'espace des paramètres pour lesquelles les polynômes $R_n(x,a,b,c)$ et $\hat{R}_n(\alpha,a,b,c)$ ont 0,1,2 ou 3 racines positives. Ces zones sont des approximation des zones de l'espace des paramètres où le système (IV.2-23) a 0,1,2 ou 3 cycles limites.

L'aspect qualitatif des surfaces $B_n(a,b,c)=0$, $\hat{B}_n(a,b,c)=0$ et de la figure 7.20 de (Broer, Dumortier, van Strien & Takens, 1991, page 218) est le même. On retrouve bien que la forme des surfaces $B_n(a,b,c)=0$, $\hat{B}_n(a,b,c)=0$ lorsque $(a,b,c)\to(0,0,0)$ est la forme de la surface de la figure 7.20. Mais grâce aux surfaces $B_n(a,b,c)=0$, $\hat{B}_n(a,b,c)=0$ on a accès *en plus* à la forme de la surface de bifurcation *pour toutes les valeurs* de (a,b,c) ce qui correspond à des valeurs de r arbitraires dans le système (IV.2-24). C'est à dire qu'en plus de connaître les paramètres pour lesquels survient la bifurcation de Hopf dégénérée, on connait les valeurs des paramètres pour lesquelles surviennent les bifurcations saddle-node, transcritique, et fourche du système (IV.2-24).

On peut de toute façon conclure que la forme de la surface de bifurcation du système (IV.2-23) est qualitativement celle de la surface représentée sur la figure 7.20 de (Broer, Dumortier, van Strien & Takens, 1991, page 218)

— IV.3 — Lien entre la méthode de Melnikov et la bifurcation de Hopf

Le point $O(0,0)$ dans le plan (μ,δ) est un point de bifurcation de codimension 2. En effet ce point est à l'intersection de deux courbes de bifurcation de codimension 1 : la droite de Hopf $\delta=0$ et la courbe $B_{SN}(\mu,\delta)=0$. Que se passe t'il quand on passe par ce point en suivant un chemin tangent aux deux courbes de bifurcation ? Le système subit alors une bifurcation de type nouveau de celles décrites plus haut. Prenons par exemple la famille de systèmes :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v-(u^5-\mu u^3+\frac{\mu^2}{9}u) \\ \dot{v} &= -u, \end{aligned} \qquad \text{(IV.3-1)}$$

et faisons varier le paramètre μ autour de $\mu=0$. On voit sur la figure IV–22 que le système IV.3-1 n'aura pas de cycles limites lorsque $\mu<0$ et deux cycles limites lorsque $\mu>0$.

Mais pour s'assurer que la bifurcation décrite ici est vraiment une bifurcation de Hopf, il faut que les deux cycles qui existent quand $0<\mu\ll 1$ soient de faible amplitude. Nous allons utiliser le changement de variable (IV.2-8) à l'envers. Le système (IV.3-1) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y-\epsilon(x^5-3x^3+x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \qquad \text{(IV.3-2)}$$

---

[6] $x=\alpha\cos t$

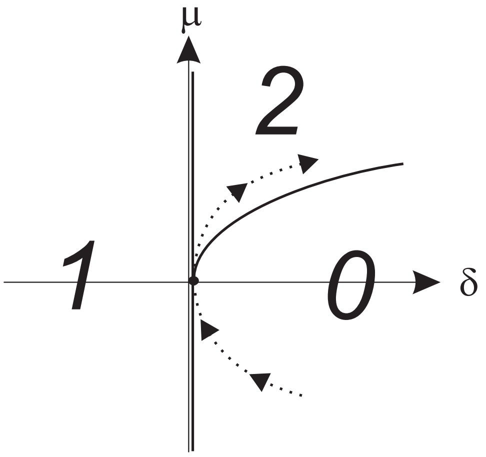

FIG. IV–22 – *Courbe de bifurcation du système (IV.2-10) et, en pointillé, courbe* $9\,\delta = \mu^2$*, tangente à la droite* $\delta = 0$ *et à la courbe* $B_{SN}(\mu, \delta) = 0$.

avec $\epsilon = \frac{\mu^2}{10}$. Or quand $\mu \to 0$, $\epsilon \to 0$ et donc on peut utiliser la méthode de Melnikov pour savoir si il existe des cycles limites et quelle est leur amplitude. Calculons la fonction de Melnikov pour le système (IV.3-2) :

$$M(F) = -\frac{2\pi}{16} r^2 (5r^4 - 18r^2 + 8) \tag{IV.3-3}$$

Les racines positives de $M(F)$ sont :

$$r_1 = \sqrt{\frac{9 - \sqrt{41}}{5}} \simeq 0.72 \text{ et } r_2 = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{41}}{5}} \simeq 1.76 \tag{IV.3-4}$$

Quand $\epsilon > 0$ est suffisamment petit, le système (IV.3-2) a donc deux cycles limites qui tendent vers des cercles de rayon 0.72 et 1.76 quand $\epsilon \to 0$. Donc le système (IV.3-1) a deux cycles limites lorsque $\mu > 0$ est suffisamment petit. Quand $\mu \to 0^+$, ces cycles sont des cercles dans le plan (u, v) de rayon (d'après la formule (IV.2-8)) :

$$R_1 = \sqrt{u^2 + v^2} = \epsilon^{1/4} \sqrt{x^2 + y^2} = \epsilon^{1/4} r_1$$

$$R_2 = \sqrt{u^2 + v^2} = \epsilon^{1/4} \sqrt{x^2 + y^2} = \epsilon^{1/4} r_2$$

donc quand $\epsilon \to 0$ ces rayons tendent vers 0 !

Ainsi lorsque $\mu < 0$, le système (IV.3-1) n'a pas de cycles limites et lorsque $\mu > 0$ est infiniment petit, ce système a deux cycles limites d'amplitude infiniment petites. On a donc bien à faire à une bifurcation de Hopf de codimension 2.

Un point intéressant à noter est que le changement de variable introduit ici montre qu'il est possible de retrouver les conditions pour avoir une bifurcation double Hopf en utilisant simplement la méthode de Melnikov !

Cette dernière remarque permet de donner des conditions plus fines à l'existence de cycles limites de faible amplitude dans un système de Liénard avec $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}$ et $G(x) = x$. Le théorème de Zuppa (1981) (voir chapitre II) établi que si on choisit des coefficients a_i tels que :

$$\|a_1\| \ll \|a_2\| \ll \ldots \ll \|a_{2k+1}\| \tag{IV.3-5}$$

$$a_i\, a_{i+1} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2k \tag{IV.3-6}$$

alors il y a exactement k cycles limites de petite amplitude.

On va tenter d'améliorer ce résultat en donnant des relations d'ordre plus fines entres les coefficients a_i. On part du système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon(b_{2k+1} x^{2k+1} + b_{2k-1} x^{2k-1} + \ldots + b_3 x^3 + b_1 x) \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \tag{IV.3-7}$$

auquel on applique le changement de variable utilisé précédemment avec $\alpha^{2k}\epsilon = 1$ $(x = \alpha\, u; y = \alpha\, v)$. On obtient ainsi le système :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v - (b_{2k+1}\, u^{2k+1} + \epsilon^{1/k} b_{2k-1}\, u^{2k-1} + \epsilon^{2/k} b_{2k-3}\, u^{2k-3} + \ldots + \epsilon^{k-1/k} b_3\, u^3 + \epsilon b_1\, u) \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \tag{IV.3-8}$$

On note :

$$c_i \overset{\text{def}}{=} b_i\, \epsilon^{\frac{2k-i+1}{2k}} \tag{IV.3-9}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v - (c_{2k+1}\, u^{2k+1} + c_{2k-1}\, u^{2k-1} + c_{2k-3}\, u^{2k-3} + \ldots + c_3\, u^3 + c_1\, u) \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \tag{IV.3-10}$$

Quand $\epsilon \to 0$, la définition (IV.3-9) montre que les coefficients c_i du système (IV.3-10) sont ordonnés comme les coefficients a_i dans la relation (IV.3-5). Quand $\epsilon \to 0$, on peut étudier, grâce à la méthode de Melnikov, les conditions pour que le système (IV.3-7) ait k cycles limites. Le changement d'échelle $u = \alpha^{-1}\, x = \epsilon^{\frac{1}{2k}}\, x$ impose que les cycles limites de (IV.3-7) correspondront à des cycles limites de petite amplitude pour le système (IV.3-10). La méthode de Melnikov fournit des conditions (du type inégalités) sur les coefficients b_i pour qu'il y ait k cycles limites, on peut retranscrire sur les coefficients c_i (grâce à (IV.3-9)) et ainsi améliorer les conditions (IV.3-5) et (IV.3-6).

On va illustrer ceci dans le cas où $k = 2$. La méthode de Melnikov appliquée au système (IV.3-7) assure que celui ci a deux cycles limites si :

$$b_1 b_5 > 0 \tag{IV.3-11}$$

$$-b_3 b_5 > 0 \tag{IV.3-12}$$

$$9b_3^2 - 40 b_1 b_5 > 0 \tag{IV.3-13}$$

(ce sont les conditions pour que le polynôme de Melnikov ait deux racines strictement positives). Les deux premières conditions sur les coefficients b_i impliquent que les coefficients c_i doivent être de signe alternés. On retrouve donc la condition (IV.3-6). En utilisant la définition des coefficients c_i, on trouve que :

$$\epsilon(9b_3^2 - 40b_1\, b_5) = 9c_3^2 - 40c_1\, c_5$$

On voit donc que la condition (IV.3-13) re-écrite sur les coefficients c_i assure qu'il suffit que :

$$|c_1| < \frac{9}{40}\frac{c_3^2}{|c_5|}$$

pour que le système (IV.3-7) ait deux cycles limites (d'amplitudes finies) et donc par là que le système (IV.3-10) ait deux cycles limites de petites amplitudes. La condition (IV.3-5), pour $k = 2$, peut donc être affinée de la manière suivante :

$$|c_1| < \frac{9}{40}\frac{c_3^2}{|c_5|} \text{ et } |c_3| \ll |c_5| \tag{IV.3-14}$$

Cette inégalité sur c_1 est compatible avec $|c_1| \ll |c_3|$ car :

$$\frac{9}{40}\frac{c_3^2}{c_5} = \left(\frac{9}{40}\frac{c_3}{c_5}\right) c_3 \ll c_3 \tag{IV.3-15}$$

Quand $k = 3$, la fonction de Melnikov calculée pour le système (IV.3-7) est égale à :

$$M(F) = -\pi r^2 (\frac{35}{32}\, b_7\, r^6 + \frac{5}{4}\, b_5\, r^4 + \frac{3}{2}\, b_3\, r^2 + 2\, b_1) \tag{IV.3-16}$$

Prenons le cas où $b_7 > 0$. L'étude de M(F) comme un polynôme bi-cube nous donne les conditions pour avoir 3 racines réelles positives en r^2 :

$$\text{si } b_7 > 0 \quad \text{alors} \quad b_5 < 0, b_3 > 0 \text{ et } b_1 < 0 \tag{IV.3-17}$$

$$D \quad = \quad -180\, b_5^2\, b_3^2 + 800\, b_5^3\, b_1 + 756\, b_3^3\, b_7 - 3780\, b_5\, b_3\, b_1\, b_7 + 6615\, b_1^2\, b_7^2 < 0 \tag{IV.3-18}$$

On transforme ces conditions sur les coefficients b_i en conditions sur les coefficients c_i en utilisant la formule (IV.3-9) avec $k = 3$. On trouve :

$$c_7 > 0,\ c_5 < 0 \text{ et } c_3 > 0 \text{ et } c_1 < 0 \tag{IV.3-19}$$

$$D = \epsilon^2(-180\, c_5^2\, c_3^2 + 800\, c_5^3\, c_1 + 756\, c_3^3\, c_7 - 3780\, c_5\, c_3\, c_1\, c_7 + 6615\, c_1^2\, c_7^2) < 0 \tag{IV.3-20}$$

On retrouve une fois de plus l'alternance des signes des coefficients c_i. La définition (IV.3-9) assure, comme mentionné plus haut, que :

$$|c_1| \ll |c_3| \ll |c_5| \ll |c_7|$$

Cette dernière inéquation sur D considérée avec des valeurs de c_5, c_3, c_1 infiniment petites (quand $\epsilon \to 0$) peut être re-écrite sous la forme :

$$c_3 \quad < \quad \frac{20}{63}\frac{c_5^2}{c_7} \tag{IV.3-21}$$

$$|c_1| \quad < \quad \frac{2}{21}\frac{|c_5|}{c_7}\, c_3 \tag{IV.3-22}$$

Etant donné que $\frac{|c_5|}{c_7} \ll 1$, l'inégalité (IV.3-21) implique que :

$$c_3 < \left(\frac{20}{63}\frac{|c_5|}{c_7}\right)|c_5| \ll |c_5| \tag{IV.3-23}$$

De même l'inégalité (IV.3-22) implique que :

$$|c_1| < \left(\frac{2}{21}\frac{|c_5|}{c_7}\right)c_3 \ll c_3 \tag{IV.3-24}$$

On retrouve donc bien les conditions (IV.3-5). Mais on peut affiner ces conditions ainsi :

$$|c_1| < \frac{2}{21}\frac{|c_5|}{c_7}c_3 \tag{IV.3-25}$$

$$c_3 < \frac{20}{63}\frac{|c_5|}{c_7}|c_5| \tag{IV.3-26}$$

$$|c_5| \ll c_7 \tag{IV.3-27}$$

Si les coefficients c_i respectent ces inégalités, alors le système (IV.3-10) aura 3 cycles limites de faibles amplitudes.

– IV.4 – Bifurcation hétérocline lorsque $G(x)$ a des racines non nulles

On a vu au chapitre II que le système :

$$\begin{aligned} F(x) &= \epsilon(ax + cx^3) \\ G(x) &= x - x^3, \end{aligned} \tag{IV.4-1}$$

a comme points d'équilibre un foyer à l'origine et deux points de selle en $(x = \pm 1, y_S)$. Sous certaines conditions, le foyer à l'origine est entouré d'un cycle limite. Quand $\epsilon = 1$, ce système est invariant sous la transformation :

$$a \to -a,\ c \to -c,\ x \to -x,\ t \to -t \tag{IV.4-2}$$

Si $a < 0$ et $c < 0$, le système n'a pas de cycle limite, le foyer est instable. Lorsque a passe par zéro et devient positif, le foyer change de stabilité et un cycle limite nait autour de l'origine : c'est une bifurcation de Hopf. Le cycle grandit lorsque a croît et lorsque a atteint une certaine valeur $a_{HL}(c)$ le cycle touche les deux points de selle en $x = \pm 1$ et se transforme en courbe hétérocline. Pour $a > a_{HL}(c)$ il n'y a plus ni cycle limite ni courbe hétérocline. Commençons par tracer la courbe de bifurcation $a_{HL}(c)$ dans le plan (a, c) en utilisant l'intégration numérique. On voit sur la figure IV–23 qu'il y a une bifurcation de Hopf en $a = 0$ et une bifurcation hétérocline en $a = a_{HL}(c)$.

Nous allons maintenant essayer de trouver une approximation de la courbe $a_{HL}(c)$ en utilisant les polynômes $R_n(x, a, c)$. On ne pas utiliser ici la méthode améliorée car les trajectoires lorsque $F(x) \equiv 0$ (ou $\epsilon = 0$) ne sont pas de simple cercles. Blows & Perko (1994) ont calculé la fonction de Melnikov pour ce système et ont ainsi trouvé la pente à l'origine de la courbe $a = a_{HL}(c)$. Pour détecter la bifurcation hétérocline avec les polynômes $R_n(x, a, c)$, il suffit de trouver les valeurs de a et de c telles que le polynôme $R_n(x, a, c)$ a une racine en $x = 1$. Mais tous les polynômes ont une racine en

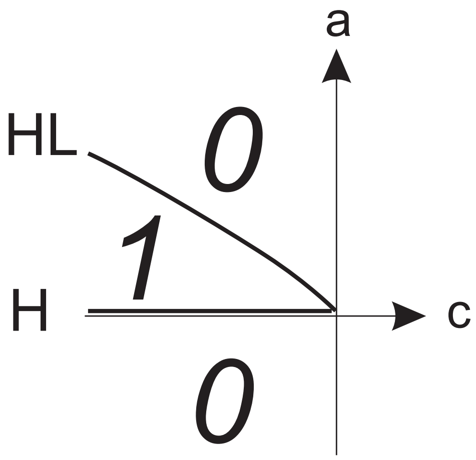

Fig. IV–23 – *Courbes de bifurcation du système (II.3-4). La droite $a = 0$ est la courbe où se produit la bifurcation de Hopf et la courbe HL est la courbe où se produit la bifurcation hétérocline.*

$x = \pm 1\ \forall (a, c)$ qui est due au fait que $G(x)$ s'annule en $x = \pm 1$. Les polynômes $R_n(x, a, c)$ s'écrivent donc :

$$R_n(x, a, c) = (x + 1)\,(x - 1)\,S_n(x, a, c) \tag{IV.4-3}$$

On détectera donc la transformation du cycle limite en trajectoire hétérocline en cherchant les valeurs de a et c telles que $S_n(x = 1, a, c) = 0$. L'approximation à l'ordre n de la courbe $a = a_{HL}(c)$ est donc simplement $S_n(x = 1, a, c) = 0$. On voit sur la figure IV–24 la comparaison entre l'approximation numérique de $a = a_{HL}(c)$ et les courbes $S_n(x = 1, a, c) = 0$ qui sont placées au dessus de la courbe numérique. Pour les mêmes raisons que précédemment, chaque courbe $S_n(x = 1, a, c) = 0$ est une borne supérieure exacte de $a = a_{HL}(c)$ et elle est placée en dessous de la précédente $S_{n-2}(x = 1, a, c) = 0$ sur la figure IV–24.

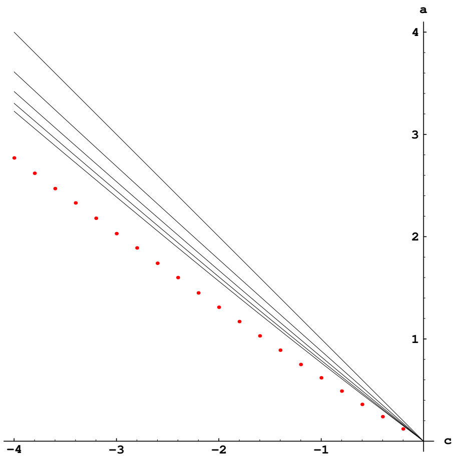

Fig. IV–24 – *Approximation à la courbe de bifurcation du système (IV.4-1). En pointillé, l'approximation calculée via intégration numérique. En trait plein, les courbes $S_n(x = 1, a, c) = 0$ avec $n = 2, 4, 6, 8, 10$ ($n = 2$ est la courbe la plus haute).*

Bibliographie

ALSHOLM P. (1992): “Existence of limit cycles for generalized Liénard equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **171**, p. 242.

ANDRONOV A.A., LEONTOVICH E.A., GORDON I.I. & MAIER A.G. (1971): *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel program of scientific translations. Jerusalem.

BLOWS T.R. & PERKO L. (1994): “Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems”, *Siam Review*, **36**(3), pp. 341–376.

BROER H.W., DUMORTIER F., VAN STRIEN S.J. & TAKENS F. (1991): *Structures in Dynamics*, vol. 2 of *Studies in mathematical physics.* Amsterdam: North-Holland.

CHOWS S. & LI C. (1994): *Normal forms and bifurcation of planar vector fields.* Cambridge University Press.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1998): “Algebraic approximations to bifurcation curves of limit cycles for the Liénard equation”, *Physics Letters A*, **244**, pp. 53–58.

HOPF E. (1942): “Abzweigung einer periodischen Lősung von einer stationăren Lősung eines differential-systems”, *Ber. Math.-Phys. Kl. Săchs Acad. Wiss. Leipzip*, **94**, pp. 1–22.

LLOYD N.G. (1987): “Liénard systems with several limit cycles”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **102**, p. 565.

ODANI K. (1996): “Existence of exactly N periodic solutions for Liénard systems”, *Funkcialaj Ekvacioj (Japana Matematika Societo)*, **39**, p. 217.

PERKO L.M. (1992): “Bifurcation of limit cycles : Geometric theory”, *Proc. AMS*, **114**, p. 225.

RYCHKOV G.S. (1975): “The maximal number of limit cycles of the system $\dot{y} = -x$, $\dot{x} = y - (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5)$ is equal to two”, *Differential Equations*, **11**, p. 301.

TAKENS F. (1973): “Unfolding of certain singularities of vector fields : generalized Hopf bifurcations”, *J. Differential Equations*, **14**, pp. 476–493.

ZUPPA C. (1981): “Order of cyclicity of the singular point of Liénard polynomial vector fields”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **12**(2), pp. 105–111.

◆

Bibliographie

Alsholm P. (1992): "Existence of limit cycles for generalized Liénard equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **171**, p. 242.

Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I. & Maier A.G. (1971): *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*, Israel program of scientific translations. Jerusalem.

Bergé P., Pomeau Y. & Vidal C. (1988): *L'ordre dans le chaos*, vol. 33 of *Enseignement des Sciences.* Paris: Hermann.

Blows T.R. & Lloyd N.G. (1984): "The number of small amplitude limit cycles of Liénard equations", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **95**, pp. 751–758.

Blows T.R. & Perko L. (1994): "Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems", *Siam Review*, **36**(3), pp. 341–376.

Broer H.W., Dumortier F., van Strien S.J. & Takens F. (1991): *Structures in Dynamics*, vol. 2 of *Studies in mathematical physics.* Amsterdam: North-Holland.

Cherkas L.A. (1977): "Estimation of the number of limit cycles of autonomous systems", *Differential Equations*, **13**, p. 529.

Chows S. & Li C. (1994): *Normal forms and bifurcation of planar vector fields.* Cambridge University Press.

Christopher C. & Lloyd N.G. (1995): "Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **450**, pp. 219–224.

Christopher C. & Lloyd N.G. (1998): "Small-amplitude limit cycles in Liénard systems", *Nonlinear differential equations and applications*, to appear.

Coll B., Gasull A. & Llibre J. (1989): "Uniqueness of limit cycles for a class of Liénard systems with applications", *Journal of Math. Analysis and Applications*, **141**, pp. 442–450.

Coppel W.C. (1988): "Some quadratic systems with at most one limit cycle", in *Dynamics Reported 2.* New York: Wiley, pp. 61–68.

Doering C.R. & Gibbon J.D. (1995*a*): *Applied analysis of the Navier-Stokes Equations.* Cambridge, NY: Cambridge university Press.

Doering C.R. & Gibbon J.D. (1995*b*): "On the shape and dimension of the Lorenz attractor", *Dynamics ans Stability of Systems*, **10**(3), pp. 255–268.

DULAC H. (1923): “Sur les cycles limites”, *Bull. Soc. Math. France*, **51**, pp. 45–188.

DUMORTIER F. & LI C. (1996): “On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations”, *Nonlinearity*, **9**, pp. 1489–1500.

DUMORTIER F. & LI C. (1997): “Quadratic Liénard equations with quadratic damping”, *J. Differential Equations*, **139**, pp. 41–59.

ÉCALLE J. (1992): *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac.* Paris, France: Hermann.

ÉCALLE J., MARTINET J. & MOUSSU R. (1987): “Non-accumulation des cycles limites”, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.*, **304**, pp. 375–377.

FARMER J.D., OTT E. & YORKE J.A. (1983): “The dimension of chaotic attractors”, *Physica D*, **7**, pp. 153–180.

GASULL A. & TORREGROSA J. (1997): “Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity”, *Prepublicacions U.A.B.*, **27**.

GIACOMINI H., LLIBRE J. & VIANO M. (1996): “On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles”, *Nonlinearity*, **9**(2), pp. 501–516.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1997*a*): “Integrals of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model”, *Physics Letters A*, **227**, pp. 309–318.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1997*b*): “Number of limit cycles of the Liénard equation”, *Phys. Rev. E*, **56**(4), pp. 3809–3813.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1998*a*): “Algebraic approximations to bifurcation curves of limit cycles for the Liénard equation”, *Physics Letters A*, **244**, pp. 53–58.

GIACOMINI H. & NEUKIRCH S. (1998*b*): “Improving a method for the study of limit cycles of the Liénard equation”, *Phys. Rev. E*, **57**(6), pp. 6573–6576.

GIACOMINI H.J., REPETTO C.E. & ZANDRON O.P. (1991): “Integrals of motion for three-dimensional non-Hamiltonian dynamical systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**, pp. 4567–4574.

GIACOMINI H.J. & VIANO M. (1995): “Determination of limit cycles for 2-D dynamical systems”, *Phys. Rev. E*, **52**, pp. 222–228.

GILLAIN C. (1977): “La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l’histoire de l’Analyse”, Ph.D. thesis, Université Paris I., Paris, (in french).

GOLDENFELD N., MARTIN O. & OONO Y. (1989): *J. Sci. Comp.***4**, p. 4.

GOLDENFELD N., MARTIN O., OONO Y. & LIU F. (1990): *Phys. Rev. Lett.***64**, p. 1361.

GORIELY A. (1996): “Integrability, Partial Integrability and Nonintegrability for Systems of Ordinary Differential Equations”, *J. Math. Phys*, **37**, pp. 1871–1893.

GUCKENHEIMER J. & HOLMES P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, vol. 42 of *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag, ISBN 0-387-90819-6.

HACKING I. (1983): "Nineteenth century cracks in the concept of determinism", *Journal of the History of Ideas*, pp. 455–475.

HAKEN H. (1983): *Synergetics*. Berlin: Springer.

HOLMES P. & RAND D. (1978): "Bifurcations of the forced van der Pol oscillator", *Quart. Appl. Math.*, **35**, pp. 495–509.

HOPF E. (1942): "Abzweigung einer periodischen Lősung von einer stationăren Lősung eines differential-systems", *Ber. Math.-Phys. Kl. Săchs Acad. Wiss. Leipzip*, **94**, pp. 1–22.

ILYASHENKO Y. (1985): "Dulac's memoir 'On limit cycles' and related problems of the local theory of differential equations.", *Russian Math. Surveys VHO*, pp. 1–49.

ILYASHENKO Y. (1991): *Finiteness theorems for limit cycles*. Providence, RI: American Math. Society.

JACKSON E.A. (1992): *Perspectives of nonlinear dynamics*. Cambridge, NY: Cambridge university Press, 2nd edition.

JIBIN L. & CHUNFU L. (1985): "Global bifurcation of planar disturbed Hamiltonian systems and distributions of limit cycles of cubic systems", *Acta Math. Sinica*, **28**, pp. 509–521.

KRYLOFF N.M. & BOGOLIUBOFF N.N. (1937): *Introduction à la mécanique non-linéaire : les méthodes approchées et asymptotiques.*, vol. 1-2 of *Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec.* Paris: Chaire de Phys. Math. Annales.

KUNIHIRO T. (1996): "The Renormalization-Group Method applied to asymptotic analysis of vector fields", *LANL : hep-th/9609045.*

KUS M. (1983): *Journal of Physics A : Math. Gen.***16**, p. L689.

LANDIS E. & PETROVSKI I. (1967): "Letter to the editor", *Math. Sb.*, **73**, p. 160.

LEVI M. (1981): "Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **32**.

LEVINSON N. & SMITH D. (1942): "A general equation for relaxation oscillations", *Duke Math. Journal*, **9**, p. 382.

LIAPUNOV A. (1907): "Problème général de la stabilité du mouvement", *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, **9**, pp. 203–475.

LIÉNARD A. (1928): "Etude des oscillations entretenues", *Rev. Gen. d'électricité*, **XXIII**, p. 901.

LINS A., DE MELO W. & PUGH C.C. (1977): "On Linard's equation", in *Geometry and Topology 597*, ed. by Palis J. & do Carmo M. Berlin: Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., pp. 335–357.

LLIBRE J., PIZARRO L. & PONCE E. (1998): "Comment on : 'Number of limit cycles of the Liénard equation"', *Phys. Rev. E*, **58**(3).

Lloyd N.G. (1987): “Liénard systems with several limit cycles”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **102**, p. 565.

Lorenz E. (1963): “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmospheric Sci.*, **20**, pp. 130–141.

Lorenz E. (1979): “On the prevalence of aperiodicity in simple systems”, in *Global Analysis*, ed. by Grmela M. & Marsden J.E. New York: Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., pp. 53–75.

Lynch S. (1997): “Liénard systems and the second part of Hilbert’s sixteenth problem”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **30**(3), pp. 1395–1403.

Markus L. (1954): “Global structure of ordinary differential equations in the plane”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76**, pp. 127–148.

Melnikov V.K. (1963): “On the stability of the center for time periodic perturbations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**, pp. 1–57.

Neuman D. (1975): “Classification of continuous flows on 2-manifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **48**, pp. 73–81.

Odani K. (1995): “The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic”, *J. Differential Equations*, **115**(1), pp. 146–152.

Odani K. (1996): “Existence of exactly N periodic solutions for Liénard systems”, *Funkcialaj Ekvacioj (Japana Matematika Societo)*, **39**, p. 217.

Painlevé P. (1902): *Acta Math.***25**, pp. 1–85.

Perko L.M. (1992): “Bifurcation of limit cycles : Geometric theory”, *Proc. AMS*, **114**, p. 225.

Perko L.M. (1996): *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics.* New York: Spring-Verlag, second edition.

Petrovskii I.G. & Landis E.M. (1957): “On the number of limit cycle of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$ where P and Q are polynomials”, *Math. Sb. N.S.*, **43**, pp. 149–168.

Poincaré H. (1880): *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, vol. I–VI of *Œuvre I.* Paris: Gauthier-Villar.

Pontrjagin L.S. (1934): “Uber Autoschwingungssysteme, die den hamiltonshen nahe liegen”, *Physikalische Zeitschrift der Sonjetunion*, **6**(1–2), pp. 25–28.

Rayleigh J. (1945): *The Theory of Sound.* New York: Dover.

Rikitake T. (1958): “Oscillations of a system of disk dynamos.”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**, p. 89.

Rychkov G.S. (1975): “The maximal number of limit cycles of the system $\dot{y} = -x$, $\dot{x} = y - (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5)$ is equal to two”, *Differential Equations*, **11**, p. 301.

Saltzman B. (1962): “Finite amplitude free convection as an initial value problem”, *J. Atmospheric Sci.*, **19**, pp. 329–341.

Sanjuán M.A.F. (1998): "Liénard systems, limit cycles and Melnikov theory", *Phys. Rev. E*, **57**(1), pp. 57–61.

Sansone G. & Conti R. (1964): *Nonlinear differential equations.* New York, NY.

Shi S. (1982): "On limit cycles of plane quadratic systems", *Sci. Sinica*, **25**, pp. 41–50.

Sparrow C. (1982): *The Lorenz equations*, vol. 41 of *Applied Mathematical Sciences.* New York: Springer-Verlag.

Strogatz S.H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*, The Advanced Book Program. Reading, MA: Addison-Wesley.

Sturm C. (1833): *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre.*

Tabor M. (1989): *Chaos and integrability in nonlinear dynamics : An Introduction*, Interscience. New York: John Wiley & Sons Inc.

Tabor M. & Weiss J. (1981): "Analytic structure of the Lorenz system", *Phys. Rev. A (3)*, **24**, p. 2157.

Takens F. (1973): "Unfolding of certain singularities of vector fields : generalized Hopf bifurcations", *J. Differential Equations*, **14**, pp. 476–493.

Thompson J.M.T. & Stewart H.B. (1986): *Nonlinear dynamics and chaos.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Trève Y. (1979): "Boxing the Lorenz attractor", unpublished.

van der Pol B. (1922): "On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom", *London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag.*, **43**(6), pp. 700–719.

van der Pol B. (1927*a*): *Nature***120**, pp. 363–364.

van der Pol B. (1927*b*): "Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance", *London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag.*, **3**, p. 65.

Verhulst F. (1991): *Nonlinear differential equations and dynamical systems.* Berlin: Springer-Verlag, second edition.

Wilson J.C. (1964): "Algebraic solutions of Liénard equations", *Contrib. Differential Equations*, **3**, pp. 1–20.

Xianwu Z. (1983): "Remarks on the uniqueness of limit cycles", *Kexue Tongbao*, **28**, pp. 452–455.

Yanqian Y. (1986): *Theory of limit cycles*, vol. 66 of *Translations of Math. monographs.* Providence, RI: AMS.

Yorke E.D. & Yorke J.A. (1979): "Metastable chaos : Transotion to sustained chaotic behavior in the Lorenz model", *J. Statist. Phys.*, **21**, p. 263.

Zeytounian R.K. (1991): *Mécanique des fluides fondamentale*, vol. m 4 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin: Springer-Verlag.

ZHANG Z. (1981): “On the existence of exactly two limit cycles for the Liénard equation”, *Acta Math. Sinica*, **24**, pp. 710–716.

ZOLADEK H. (1995): “Eleven small limit cycles in a cubic vector field”, *Nonlinearity*, **8**, pp. 843–860.

ZUPPA C. (1981): “Order of cyclicity of the singular point of Liénard polynomial vector fields”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **12**(2), pp. 105–111.