Valeur critique de la fonction L adjointe d'une forme modulaire de Hilbert et arithmétique du motif correspondant

Mladen Dimitrov

Université Paris 13 – Institut Galilée
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

pour l'obtention du grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

présentée par

Mladen DIMITROV

VALEUR CRITIQUE DE LA FONCTION L ADJOINTE D'UNE FORME MODULAIRE DE HILBERT ET ARITHMÉTIQUE DU MOTIF CORRESPONDANT

soutenue le 9 octobre 2003 devant un jury constitué de

Michael HARRIS	Université Paris 7	
Abdellah MOKRANE	Université Paris 13	
Jacques TILOUINE	Université Paris 13	Directeur
Jörg WILDESHAUS	Université Paris 13	
Jean-Pierre WINTENBERGER	Université Louis Pasteur	Président

rapporteurs

Guido KINGS	Regensburg Universität
Richard TAYLOR	Harvard University

A mes parents Mariyana et Miroslav

et à ma soeur Nadya

Remerciements

Je voudrais d'abord exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Jacques Tilouine pour m'avoir initié à ces belles mathématiques, donné un sujet de recherche si riche et passionnant, et pour avoir été toujours présent au cours de ces dernières années pour répondre à mes questions. Il reste pour moi un exemple à suivre dans beaucoup de domaines au-delà des mathématiques.

Je voudrais aussi remercier G. Kings et R. Taylor pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et pour toutes leurs remarques sur le texte, ainsi que M. Harris, A. Mokrane, J. Wildeshaus et J.-P. Wintenberger pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance.

J'estime que préparer ma thèse au sein de l'équipe d'Arithmétique et Géométrie Algébrique a été une grande chance pour moi. Je remercie toute l'équipe pour l'accueil qu'elle m'a réservé, et tout particulièrement A. Abbès, D. Barski, Y. Henrio, A. Mokrane, E. Urban, I. Vidal et J. Wildeshaus qui ont toujours été prêts à m'écouter et à m'aider à résoudre mes problèmes.

Le L.A.G.A. a été pour moi un endroit convivial, mais aussi propice au travail de recherche grâce à sa direction et son secrétariat efficaces, sa bibliothèque calme, son réseau informatique qui s'est beaucoup amélioré et, bien-sûr, tous ses membres.

Pendant ma thèse j'ai pu participer à de nombreuses conférences dont je voudrais remercier les organisateurs. Lors de ces rencontres j'ai pu tirer avantage de conversations avec F. Andreatta, C. Breuil, L. Dieulefait, E. Ghate, H. Hida, M. Kisin, L. Illusie, V. Lafforgue, M. Raynaud et J.-P. Wintenberger qui m'ont beaucoup apporté.

Tout au long de ma thèse je n'ai pas cessé de m'instruire en discutant avec des amis mathématiciens tels que Joël Bellaïche, Laurent Berger, David Blottière, Olivier Brinon, Gaëtan Chenevier, Fabio Mainardi, Adriano Marmora, David Mauger, Sandra Rozenzstajn et Alain Troesch. Je les remercie tous de leur patience et de leur bonne volonté, ainsi que Delphine Louis pour la relecture de l'introduction.

Je souhaite également remercier ici mes professeurs pour tout ce qu'ils m'ont enseigné. La liste serait trop longue et je ne citerai que mes professeurs de mathématiques du lycée I. Simeonov, J.-D. Bloch et D. Monasse, qui ont su susciter chez moi une réelle passion pour les mathématiques.

Je voudrais enfin remercier Mme et M. Balkanski, qui ont été ma famille sur Paris durant ces longues années d'études, ma mère Mariyana, mon père Miroslav et ma soeur Nadya qui m'ont toujours beaucoup soutenu.

Table des Matières

Introduction

0.1. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d, d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$ et de différente $\mathfrak{d}$. On note $\widetilde{F}$ la clôture galoisienne de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et J_F l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

On fixe un idéal $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{o}$ et on pose $\Delta = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{d})$. Pour un poids arithmétique $k = \sum_{\tau \in J_F} k_\tau \tau \in \mathbb{Z}[J_F]$ (*cf* Déf.I.2.1), on pose $k_0 = \max\{k_\tau | \tau \in J_F\}$. Enfin, pour tout caractère de Hecke ψ de F de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type $k_0 - 2$ à l'infini, on note $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ l'espace de formes modulaires de Hilbert correspondant (*cf* Déf.I.4.1).

Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ une forme modulaire de Hilbert nouvelle (propre, normalisée et primitive pour l'algèbre de Hecke). Pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$ on note $c(f, \mathfrak{a})$ la valeur propre de l'opérateur de Hecke standard $T_{\mathfrak{a}}$ sur f.

Soit $p \geq 5$ un nombre premier et soit E un corps p-adique assez grand, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$, d'idéal maximal $\mathcal{P}$ et de corps résiduel κ.

0.2. Résultats galoisiens. Le groupe de Galois absolu d'un corps L est noté $\mathcal{G}_L$. Par les travaux de Taylor [**65**] et Blasuis-Rogawski [**2**] on sait associer à f une représentation galoisienne p-adique $\rho : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(E)$ qui est absolument irréductible, totalement impaire, non-ramifiée en dehors de $\mathfrak{n}\,p$ et telle que pour tout premier v de $\mathfrak{o}$, ne divisant pas $\mathfrak{n}\,p$:

$$\mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Frob}_v)) = c(f, v), \quad \mathrm{Det}(\rho(\mathrm{Frob}_v)) = \psi(v)\,\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(v),$$

où Frob_v désigne un Frobenius géométrique en v.

En prenant un $\mathcal{O}$-réseau de E^2, stable par $\mathcal{G}_F$, on définit $\overline{\rho} = \rho \mod \mathcal{P} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$, dont la semi-simplification est indépendante du choix du réseau.

La proposition suivante étend au cas des formes modulaires de Hilbert des résultats de Serre [**61**] et Ribet [**59**] sur les formes modulaires elliptiques (*cf* Prop.IV.2.1, Prop.IV.5.2 et Prop.IV.7.3).

Proposition 0.1. (i) *Pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, on a*

($\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}}$) $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,\mathcal{P}}$ *est absolument irréductible.*

(ii) *Si f n'est pas une série thêta, alors pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, on a*

($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) *il existe une puissance q de p telle que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{Im}(\overline{\rho}) \subset \kappa^\times\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

(iii) *Supposons que f n'est égale à aucune de ses d conjuguées internes tordues par un caractère quadratique, ni à une série thêta. Alors, pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, il existe une puissance q de p, une partition $J_F = \coprod_{i \in I} J_F^i$ et des éléments $\sigma_{i,\tau} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q / \mathbb{F}_p)$, $\tau \in J_F^i$, tels que $(\tau \neq \tau' \Rightarrow \sigma_{i,\tau} \neq \sigma_{i,\tau'})$ et tels que la condition suivante soit satisfaite :*

($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$) $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho} : \mathcal{G}_{\widehat{F}''} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F}$ *se factorise par une surjection* $\mathcal{G}_{\widehat{F}''} \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^I$ *suivie par l'application* $(M_i)_{i \in I} \mapsto (M_i^{\sigma_{i,\tau}})_{i \in I, \tau \in J_F^i}$, *où $\widehat{F}''$ est le compositum de $\widetilde{F}$ et du corps fixe de* $(\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho})^{-1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F})$.

0.3. Résultats cohomologiques. Soit $Y_{/\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]}$ la variété modulaire de Hilbert de niveau $K_1(\mathfrak{n})$ (*cf* II.3.1). On s'intéresse au groupe de cohomologie p-adique $\mathrm{H}^\bullet(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$, où $\mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ désigne le système local de poids $n = \sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 2)\tau \in \mathbb{N}[J_F]$ (*cf* II.9). Par un résultat de Brylinski-Labesse [**4**] le sous-espace $W_f := \bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}} \ker(T_\mathfrak{a} - c(f,\mathfrak{a}))$ de $\mathrm{H}^d(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est isomorphe, comme $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$-module et après semi-simplification, à l'induite tensorielle $\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$. Supposons que :

(I) p ne divise pas $\Delta = \Delta_F \, \mathrm{N}(\mathfrak{n})$,

Alors Y possède des compactifications toroïdales lisses sur $\mathbb{Z}_p$. Pour tout $J \subset J_F$, on pose $|p(J)| = \sum_{\tau\in J}(k_0 - m_\tau - 1) + \sum_{\tau\in J_F\setminus J} m_\tau$, où $m_\tau = (k_0 - k_\tau)/2 \in \mathbb{N}$. En appliquant la méthode de Faltings-Chai [**21**], on obtient

Théorème 0.2. (i) (Thm.III.5.1) *La représentation galoisienne* $\mathrm{H}^j(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ *est cristalline en p, de poids de Hodge-Tate appartenant à l'ensemble* $\{|p(J)|, J \subset J_F \ \ |J| \leq j\}$.

(ii) (Cor.III.7.4) *Les poids de Hodge-Tate de* W_f *sont les entiers* $|p(J)|$, $J \subset J_F$, *comptés avec multiplicité.*

Afin de pouvoir établir une variante modulo p de ce théorème, on a besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante :

(II) $p-1 > \sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 1)$.

L'entier $\sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 1)$ est égal à la différence $|p(J_F)| - |p(\varnothing)|$ entre les deux poids de Hodge-Tate extrêmes de la variété modulaire de Hilbert. On utilise **(I)** et **(II)** pour appliquer la théorie de Fontaine-Laffaille [**23**], ainsi que le Théorème de Comparaison de Faltings modulo p [**20**]. En adaptant au cas modulaire de Hilbert l'approche développée par Mokrane-Polo-Tilouine [**51, 56**] dans le cas modulaire de Siegel, notamment la construction d'un complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand entier, on calcule les poids de Fontaine-Laffaille des groupes de cohomologie étale modulo p, $\mathrm{H}^\bullet(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\kappa))$.

0.4. Résultats arithmétiques. On définit le $\mathcal{O}$-module de cohomologie intérieure $\mathrm{H}^d_!(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'$, comme l'image de $\mathrm{H}^d_c(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))$ dans $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(E))$ et on note $\mathbb{T} = \mathcal{O}[T_\mathfrak{a}, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}]$ l'algèbre de Hecke agissant dessus. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathbb{T}$ correspondant à f et p.

Théorème 0.3. *Supposons* (**I**) *et* (**II**).

(i) (Thm.VI.1.3) *Si on a* (**Irr**$_{\overline{\rho}}$), $d(p-1) > 5\sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 1)$ *et*

(**PM**) *le poids médian* $\frac{|p(J_F)|+|p(\varnothing)|}{2} = \frac{d(k_0-1)}{2}$ *n'appartient pas à* $\{|p(J)|, J \subset J_F\}$,

alors la composante locale de la cohomologie du bord $\mathrm{H}^\bullet_\partial(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$ *s'annule et l'accouplement de Poincaré* $\mathrm{H}^d_!(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'_\mathfrak{m} \times \mathrm{H}^d_!(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'_\mathfrak{m} \to \mathcal{O}$ *est une dualité parfaite.*

(ii) (Thm.VI.2.6) *Si on a* (**LI**$_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$), *alors* $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m} = \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$ *est un* $\mathcal{O}$-*module libre de rang fini et son dual de Pontryagin est isomorphe à* $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(E/\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$.

La démonstration s'appuie sur un argument galoisien de type "global-local". Pour le (i), on utilise le lemme VI.1.1(ii) et un théorème de Pink [**55**] sur la cohomologie étale d'un système local restreint au bord de Y. Pour le (ii), on utilise le lemme VI.2.5 et le calcul des poids de Fontaine-Laffaille de la cohomologie.

Soit $\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$ la fonction L adjointe imprimitive de f, complétée par ses facteurs d'Euler à l'infini et soit $W(f)$ la constante complexe intervenant dans l'équation fonctionnelle de la fonction L standard de f. On note $\Omega_f^\pm \in \mathbb{C}^\times/\mathcal{O}^\times$ les périodes définies par l'isomorphisme d'Eichler-Shimura-Harder (*cf* VI.1.2).

Théorème A (Thm.VI.1.10) *Supposons* **(I)**, $p-1 > \max(1, \frac{5}{d})\sum_{\tau \in J_F}(k_\tau - 1)$, $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$ *et* **(PM)**. *Si* $\mathcal{P}$ *divise* $\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f),1)}{\Omega_f^+\Omega_f^-}$, *alors il existe une autre forme propre et normalisée* $g \in S_k(\mathfrak{n},\chi)$ *telle que* $f \equiv g \pmod{\mathcal{P}}$, *i.e.* $c(f,\mathfrak{a}) \equiv c(g,\mathfrak{a}) \pmod{\mathcal{P}}$, *pour tout idéal* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$.

Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ et $k = (2,..,2)$ ou si F est quadratique, k est parallèle et f est ordinaire en p, alors Ghate [**27**] a obtenu des résultats analogues à ceux du théorème précédent.

La preuve suit de près celle donnée par H. Hida [**31**] dans le cas elliptique ($F = \mathbb{Q}$), et utilise Thm.0.3(i), ainsi qu'une formule de Shimura [**63**] reliant $\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f),1)$ au produit de Petersson de f (*cf* (VI.5)).

Théorème B (Thm.VI.2.7) *Supposons* (**I**), (**II**) *et* $(\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}})$. *Alors*
(i) $\mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{V}_n(\kappa))[\mathfrak{m}] = \mathrm{H}^d(Y,\mathbb{V}_n(\kappa))[\mathfrak{m}]$ *est un* k*-espace vectoriel de dimension* 2^d.
(ii) $\mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m} = \mathrm{H}^d(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$ *est libre de rang* 2^d *sur* $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$.
(iii) $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$ *est Gorenstein.*

Par [**48**] il suffit de démontrer le (i), dont la preuve repose sur le Thm.0.3(ii) et le Principe du q-développement (*cf* II.7.3).

Ce théorème, sous des hypothèses plus faibles, est dû à Mazur [**48**], pour $F = \mathbb{Q}$ et $k = 2$, et à Faltings-Jordan [**22**], pour $F = \mathbb{Q}$. La propriété de Gorenstein a été démontrée par Diamond [**18**] pour F quadratique et $k = (2,2)$, sous les hypothèses **(I)**, **(II)** et $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$. L'approche de Diamond via la cohomologie d'intersection devrait pouvoir se généraliser afin de démontrer que $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$ est Gorenstein, sous les hypothèses **(I)**, **(II)** et $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$ (*cf* Lemme VI.1.1(i) et Rque VI.1.2).

0.5. Résultats explicites. Par un résultat classique de Dickson, l'image dans $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ d'un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}_2(\kappa)$ qui ne satisfait pas $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$, est diédrale, tétraédrale, octaédrale ou icosaédrale. Dans la proposition suivante nous étudions ces cas exceptionnels pour l'image de $\overline{\rho}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$.

Soit $\mathfrak{o}_+^\times$ (resp. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times$) le groupe des unités de $\mathfrak{o}$ qui sont totalement positives (resp. congrues à 1 modulo $\mathfrak{n}$).

Proposition 0.4. *Supposons que* $p \nmid \Delta$ *et* $p > k_0$.

(i) *Si* k *est non-parallèle, et si pour tout* $J \subset J_F$, *il existe une unité* $\epsilon \in \mathfrak{o}_+^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times$, *telle que* p *ne divise pas* $\mathrm{N}_{\widetilde{F}/\mathbb{Q}}\left(\prod_{\tau\in J}\tau(\epsilon)^{k_0-m_\tau-1} - \prod_{\tau\in J_F\setminus J}\tau(\epsilon)^{m_\tau}\right) \neq 0$, *alors on a* $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$.

(ii) *Si* $d(p-1) > 5\sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 1)$, *alors l'image de* $\overline{\rho}$ *dans* $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ *n'est pas diédrale, tétraédrale, octaédrale, ni icosaédrale.*

(iii) *Supposons que :*

(non-CM) *pour toute une extension quadratique CM* K/F, *de discriminant* $\Delta_{K/F}$ *divisant* $\mathfrak{n}$ *et dans laquelle tous les premiers* $\mathfrak{p}$ *de* F *au-dessus de* p *se décomposent, il n'existe pas de caractère de Hecke* φ *de* K *de conducteur divisant* $\mathfrak{n}\,\Delta_{K/F}^{-1}$ *et de type* $(m_\tau, k_0-1-m_\tau)_{\tau\in J_F}$ *à l'infini, et tel que* $\rho \equiv \mathrm{Ind}_K^F\,\varphi \pmod{\mathcal{P}}$.

Alors l'image de $\overline{\rho}$ *dans* $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ *n'est pas diédrale.*

(iv) *Si on a* $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$, *et si* k *n'est pas induit d'un poids d'un sous-corps strict de* F, *alors on a* $(\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}})$.

De cette proposition, on obtient le corollaire suivant des théorèmes A et B :

COROLLAIRE 0.5. *Soit* ϵ *un élément de* $\mathfrak{o}_+^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times$.

(i) *Supposons que* $d=2$ *et* $k=(k_0,k_0-2m_1)$, *avec* $m_1 \neq 0$.

Si $p \nmid \Delta\, \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}((\epsilon^{m_1}-1)(\epsilon^{k_0-m_1-1}-1))$ *et* $p-1>4(k_0-m_1-1)$, *alors on a le théorème A. Si de plus on a la condition* **(non-CM)**, *alors on a aussi le théorème B.*

(ii) *Supposons que* $d=3$, $\mathrm{id}\neq\tau\in J_F$ *et* $k=(k_0,k_0-2m_1,k_0-2m_2)$, *où* $0\leq m_1\leq m_2\neq 0$. *Si* $p\nmid \Delta\, \mathrm{N}_{\widetilde{F}/\mathbb{Q}}((\tau(\epsilon)^{m_1}-\epsilon^{-m_2})(\tau(\epsilon)^{m_1}-\epsilon^{m_2+1-k_0})(\tau(\epsilon)^{m_1+1-k_0}-\epsilon^{m_2})(\tau(\epsilon)^{k_0-m_1-1}-\epsilon^{m_2+1-k_0}))$ *et* $p-1>\frac{5}{3}(3k_0-2m_1-2m_2-3)$, *alors on a le théorème A. Si de plus on a la condition* **(non-CM)**, *alors on a aussi le théorème B.*

0.6. Systèmes de Taylor-Wiles, modularité et formule "à la Bloch-Kato". Dans le cas où ρ est de niveau minimal on sait définir un anneau universel de déformations minimales $\mathcal{R}$ de $\overline{\rho}$, ainsi qu'un groupe de Selmer $\mathrm{Sel}(F,\mathrm{Ad}^0(\rho)\otimes E/\mathcal{O})$. On a une surjection canonique $\mathcal{R}\twoheadrightarrow\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$.

En construisant un système de Taylor-Wiles suivant le formalisme développé par Fujiwara [**25**], on obtient :

Théorème C (Thm.VII.6.2) *Supposons* (**I**), (**II**), ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$) *et que* ρ *est de niveau minimal. Alors* $\mathcal{R}\simeq\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ *et*

$$\left(\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(\rho),1)}{\Omega_f^+\Omega_f^-}\right)=\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Sel}(F,\mathrm{Ad}^0(\rho)\otimes E/\mathcal{O})\right).$$

0.7. Organisation du texte.

Dans le chapitre I on définit différents objets analytiques dont on voudrait étudier les propriétés arithmétiques.

Dans le chapitre II on donne des détails sur les compactifications arithmétiques toroïdales des variétés de Kuga-Sato au-dessus de la variété modulaire de Hilbert en niveau $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$. Ceci permet de prolonger certains fibrés automorphes aux compactifications toroïdales de la variété modulaire de Hilbert.

Les constructions du chapitre II, nous permettent d'appliquer dans le chapitre III la méthode de Faltings-Chai, pour donner la décomposition de Hodge-Tate de la cohomologie étale p-adique de la variété modulaire de Hilbert. On détermine également les poids de Hodge-Tate de la représentation galoisienne associée à une forme modulaire de Hilbert.

Le chapitre IV est consacré à l'étude de l'image de la représentation galoisienne résiduelle associée à une forme modulaire de Hilbert, ainsi que son induite tensorielle.

Dans le chapitre V, on reprend la construction du chapitre III, afin de calculer suivant Mokrane-Polo-Tilouine les poids de Fontaine-Laffaille de la cohomologie étale modulo p de la variété modulaire de Hilbert.

Enfin, les chapitres VI et VII contiennent les démonstrations des principaux résultats arithmétiques.

CHAPITRE I

Variétés et formes modulaires de Hilbert analytiques

Références : [**24**][**34**][**35**][**68**]

1. Sous-groupes de congruence et variétés modulaires de Hilbert.

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré $d = d_F$, d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$, de différente $\mathfrak{d}$ et de discriminant $\Delta_F = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})$. On note $J_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg.}}(F, \mathbb{C})$ l'ensemble de ses plongements (réels).

On se donne un groupe algébrique $D_{/\mathbb{Q}}$, intermédiaire entre $\mathbb{G}_{\mathrm{m}/\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, connexe

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \hookrightarrow D \hookrightarrow \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} .$$

On définit le groupe algébrique $G = G^D_{/\mathbb{Q}}$ (resp. $G^*_{/\mathbb{Q}}$) comme le produit fibré de D (resp. $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$) et de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$ au dessus de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. On a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{SL}_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & G^* \arrow[r, hook] \arrow[d] & G^D \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\nu"] \\
1 \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r, hook] & D \arrow[r, hook] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}},
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par la norme réduite $\nu : \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2 \to \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

Le sous-groupe de Borel standard de G, son radical unipotent et son tore maximal standard sont notés B, U et T, respectivement. On pose $T_1 = T \cap \ker(\nu)$ et on identifie $T_1 \times D$ et T par $(u, \epsilon) \mapsto \begin{pmatrix} u\epsilon & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$. Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R et pour tout groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}$, on note H_R le groupe de ses R-points.

Remarque 1.1. Dans toutes les applications le groupe G^D sera soit G^*, soit $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$. Nous avons préféré de ne pas fixer G^D dès le départ, car G^* intervient dans l'étude géométrique des formes modulaires de Hilbert (le problème de modules de variétés abéliennes de Hilbert associé à G^* est représentable : voir la partie 3), alors que $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$ intervient dans l'étude arithmétique des formes modulaires de Hilbert (les variétés de Shimura associées à $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$ ne sont en général que des espaces de modules grossiers, mais on connaît l'existence de représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Hilbert propres pour $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$). Cette présentation à été inspirée par le paragraphe 3.1 de [**4**] (*cf* [**45**] §.1.1 et §.4.1 pour une discussion sur les avantages et inconvénients de travailler avec G^* ou $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$).

1.1. Le domaine symétrique hermitien $\mathfrak{H}_F$. Soit $(F \otimes \mathbb{R})_+$ (resp. $G^+_{\mathbb{R}}$) la composante neutre de $(F \otimes \mathbb{R})^\times$ (resp. de $G_{\mathbb{R}}$). Le groupe $G^+_{\mathbb{R}}$ agit par homographies sur l'espace $\mathfrak{H}_F = \{z \in F \otimes \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in (F \otimes \mathbb{R})_+\} \cong \mathfrak{H}^{J_F}$, où $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ désigne le demi-plan de Poincaré (l'isomorphisme étant donné par $\xi \otimes z \mapsto (\tau(\xi)z)_{\tau \in J_F}$, pour $\xi \in F$, $z \in \mathbb{C}$). Cette action s'étend en une unique action du groupe $G_{\mathbb{R}}$ sur $\mathfrak{H}_F$ telle que, composante par composante, l'élément $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit par $z_\tau \mapsto -\overline{z_\tau}$.

Posons $\underline{i} = (\sqrt{-1}, ..., \sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}_F$, $K_\infty^+ = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{R}}^+}(\underline{i})$ et $K_\infty = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{R}}}(\underline{i})$. Alors $G_{\mathbb{R}}^+/K_\infty^+ \cong \mathfrak{H}_F$, par $g \mapsto g(\underline{i})$ d'inverse $x + \underline{i}y \mapsto \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} K_\infty^+$.

Via l'inclusion $\mathfrak{H}_F \hookrightarrow \mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{C})$, $z \mapsto \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$, l'action de $G_{\mathbb{R}}^+$ sur $\mathfrak{H}_F$ est compatible avec l'action naturelle de $G_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{C})$.

Les points rationnels $\mathbb{P}^1(F)$ du bord $\mathbb{P}^1(F \otimes \mathbb{R})$ de $\mathfrak{H}_F$ sont appelés les *pointes*. On pose $\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ agit transitivement sur l'ensemble des pointes. On a $B_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{Q}}}(\infty)$ et $\mathbb{P}^1(F) \cong G_{\mathbb{Q}}/B_{\mathbb{Q}}$.

On munit l'espace $\mathfrak{H}_F^* = \mathfrak{H}_F \sqcup \mathbb{P}^1(F)$ de la topologie de Satake, donnée par :

– la topologie usuelle sur $\mathfrak{H}_F$,

– pour toute pointe $\mathcal{C} \in \mathbb{P}^1(F)$, s'écrivant $\mathcal{C} = \gamma\infty$ avec $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$, un système fondamental de voisinages ouverts de $\mathcal{C}$ est donné par les $\{\gamma W_H\}_{H \in \mathbb{R}_+^*}$, où

$$W_H = \{z \in \mathfrak{H}_F \mid \prod_\tau \mathrm{Im}(z_\tau) > H\}.$$

$\mathfrak{H}_F^*$ est séparé (mais pas localement compact!) pour cette topologie (*cf* [**24**] I.2.9).

1.2. Action de $G_{\mathbb{Q}}^+$ sur les $\mathfrak{o}$-réseaux. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ agit à gauche sur F^2, par $\gamma \cdot (\xi, \zeta) = (\xi, \zeta)\gamma^{-1}$, où $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ et $\xi, \zeta \in F$. Soit $G_{\mathbb{Q}}^+$ le sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ formé des éléments dont le déterminant appartient au sous-groupe des éléments totalement positifs $F_+^\times$ de $F^\times$. On note $\mathfrak{o}^\times$ le groupe des unités de $\mathfrak{o}$, et on pose $\mathfrak{o}_+^\times := F_+^\times \cap \mathfrak{o}^\times$.

Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{f}$ de F on pose $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}$. On a un accouplement parfait $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathfrak{f} \times \mathfrak{f}^* \to \mathbb{Z}$.

Nous allons définir des sous-groupes intéressants de $G_{\mathbb{Q}}^+$ en considérant son action sur les $\mathfrak{o}$-réseau de F^2.

Soit L un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2; c'est un $\mathfrak{o}$-module projectif de rang deux, donc il s'écrit, quitte à changer la base de F^2, comme $L = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$, avec $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{f}$ des idéaux fractionnaires de F. Le stabilisateur du réseau $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$ dans $G_{\mathbb{Q}}^+$ est égal à :

$$G^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*) := \{\gamma \in G_{\mathbb{Q}}^+ | \det(\gamma) \in \mathfrak{o}_+^\times\} \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & (\mathfrak{e}\mathfrak{f})^* \\ \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{d} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$$

Lorsque $G = G^*$ (resp. $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$), on écrit $\mathrm{SL}(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$ (resp. $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$), à la place de $G^+(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$. Notons que $\mathfrak{o}_+^\times \cap \mathbb{Q} = \{1\}$, et donc $\mathrm{SL}(\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*)$ est formé d'éléments dont le déterminant vaut 1.

LEMME 1.2. *Dans la* $\mathrm{SL}_2(F)$*-orbite de tout* $\mathfrak{o}$*-réseau* L *de* F^2*, il existe un* $\mathfrak{o}$*-réseau de la forme* $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$*, avec* $\mathfrak{c}$ *un idéal fractionnaire de* F.

Démonstration : Il est clair que la $\mathrm{SL}_2(F)$-orbite de L contient au moins un réseau de la forme $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$. Prenons $a \in \mathfrak{e}$ et $c \in \mathfrak{f}\mathfrak{d}$ satisfaisant $a\,\mathfrak{o} + c\mathfrak{e}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{e}$. Par le théorème de Bezout, il existe alors une matrice unimodulaire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{e} & \mathfrak{f}^* \\ \mathfrak{f}\mathfrak{d} & \mathfrak{e}^{-1} \end{pmatrix}$ et l'image de $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{f}^*$

par cette matrice vaut $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$, avec $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{e}\mathfrak{f}^*$. L'idéal $\mathfrak{c}^*$ vaut $\wedge^2_{\mathfrak{o}} L$ et donc ne dépend pas de la matrice de passage unimodulaire particulière choisie. □

En vertu de ce lemme, nous ne considérerons par la suite que des $\mathfrak{o}$-réseau de la forme $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$, avec $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F.

REMARQUE 1.3. Considérons le cas où $G = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$. Alors l'application $L \mapsto \wedge^2_{\mathfrak{o}} L$ induit un isomorphisme entre les $G^+_{\mathbb{Q}}$-orbites de $\mathfrak{o}$-réseaux L de F^2 et le groupe de classes strictes d'idéaux Cl^+_F. Afin de préserver la symétrie du problème nous devons considérer tous les groupes $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$, lorsque $\mathfrak{c}$ décrit un ensemble de représentants de Cl^+_F. L'approche adélique permet de faire ceci tout naturellement (*cf* §.4.1).

Notons que deux groupes $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ et $\mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}'^*)$ sont conjugués dans $G^+_{\mathbb{Q}}$, si et seulement, si les idéaux $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ appartiennent au même genre (i.e. $\mathfrak{c}' = \xi \mathfrak{e}^2 \mathfrak{c}$, avec $\xi \in F^\times_+$ et $\mathfrak{e}$ idéal de F).

1.3. Sous-groupes de congruence de $G^+_{\mathbb{Q}}$. On fixe dans la suite un idéal fractionnaire $\mathfrak{c}$ et on considère le réseau $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$.

On se donne aussi un idéal $\mathfrak{n} \subsetneq \mathfrak{o}$. Le $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1} L_0/L_0$ est libre de rang 2. Prenons $x_0 \in F$, avec $\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + x_0 \mathfrak{c}\mathfrak{d}$. La multiplication par x_0 induit alors les isomorphismes $\mathfrak{o}/\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}^*/\mathfrak{c}^*\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{c}\mathfrak{d}/\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ ce qui nous permet d'identifier l'image de $\mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}^{-1} L_0/L_0)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})$ par l'application $\begin{pmatrix} a & bx_0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ cx_0 & d \end{pmatrix}$, où $a, b, d \in \mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ et $c \in \mathfrak{c}\mathfrak{d}/\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n}$. Faisons l'hypothèse :

(NT) $\mathfrak{n}$ est premier à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ et $\mathfrak{n}$ ne divise ni 2, ni 3.

Soit $\Gamma^1_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \mathrm{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$, $\Gamma^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \ker(\mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}^{-1} L_0/L_0))$ et $\Gamma^1_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^1_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \;\middle|\; d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}} \right\}$.

La réduction modulo $\mathfrak{n}$ induit un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Gamma^1_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \Gamma^1_0(\mathfrak{c},\mathfrak{n}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \arrow[d] \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \arrow[r, hook] & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})
\end{tikzcd}$$

DÉFINITION 1.4. Un sous-groupe Γ de $G^+_{\mathbb{Q}}$ est appelé *sous-groupe de congruence* si, et seulement si, $\Gamma = G_{\mathbb{Q}} \cap K G^+_\infty$ avec K sous-groupe compact ouvert de G_f (*cf* §.2.4 pour la définition de G_f, ainsi que la fin de §.2.5).

Les groupes $\Gamma^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma^1_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma^1_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \mathrm{SL}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$ sont des sous-groupes de congruence de $G^*_{\mathbb{Q}}$ (en fait ce sont des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2(F)$). De même on définit les groupes les sous-groupes de congruence suivants

$$\Gamma(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \mathrm{GL}^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \subset \mathrm{GL}^+_2(F),$$

$$\Gamma^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset \Gamma^D_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) \subset G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \subset G^+_{\mathbb{Q}},$$

en remplaçant la condition d'unimodularité, avec celle d'avoir son déterminant appartenant à $\mathfrak{o}^\times_+$ (resp. à $\mathfrak{o}^\times_{D+} := D_{\mathbb{Q}} \cap \mathfrak{o}^\times_+$).

LEMME 1.5. *Sous l'hypothèse* **(NT)** *le groupe* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ *est sans torsion.*

Démonstration : Par l'absurde. Supposons qu'il existe un élément de $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ d'ordre premier p. Le déterminant de cet élément est une racine de l'unité totalement positive, donc égale à 1. Cet élément admet comme valeur propre une racine p-ième de l'unité $\zeta_p \neq 1$, ainsi que son inverse ζ_p^{-1}. En prenant sa trace on trouve que ζ_p est quadratique sur F, i.e. $[F(\zeta_p):F]\leq 2$. Par ailleurs, $\zeta_p+\zeta_p^{-1}-2\in\mathfrak{n}$, donc $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$ est une puissance de p. D'après **(NT)** on a alors que F et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ sont linéairement disjoints, d'où $[F(\zeta_p):F]=p-1$. Donc $p=2$ ou $p=3$, ce qui implique, par un calcul facile, que $\mathfrak{n}$ divise 2 ou 3. □

Remarque 1.6. La condition **(NT)** est optimale pour que $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ soit sans torsion. En effet, comme les matrices $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in\Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(2))$ et $\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\in\Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(3))$ sont d'ordre fini, $\mathfrak{n}$ ne peut pas diviser ni 2 ni 3. Par ailleurs, la condition que $\mathfrak{n}$ soit premier à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})$ est aussi nécessaire, comme le montre la matrice d'ordre fini $\begin{pmatrix}1&1\\\frac{\sqrt{5}-5}{2}&\frac{\sqrt{5}-3}{2}\end{pmatrix}$ de $\Gamma_1^1(\mathfrak{d}^{-1},(\sqrt{5}))$ (ici $F=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$). Enfin, la condition que $\mathfrak{n}$ soit premier à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{c})$ est bénigne, car par le théorème d'approximation faible, chaque classe de Cl_F^+ contient des idéaux $\mathfrak{c}$ premiers à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$ (*cf* §.4.1).

Dans toute la suite du texte on suppose que l'hypothèse (NT) est satisfaite, de sorte que $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ soit sans torsion.

1.4. Pointes pour les sous-groupes de congruence. Soit Γ un sous-groupe de congruence. Comme $F^\times\Gamma/F^\times$ est commensurable avec $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{o})$, l'ensemble de ses pointes est aussi $\mathbb{P}^1(F)$ et l'ensembles $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1(F)$ est fini.

Les deux lemmes suivants décrivent les classes d'isomorphisme de $\Gamma_0^\bullet(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$-pointes ($\bullet=\varnothing,D,+$). Ceci sera utilisé dans le paragraphe 3.3, où nous étudions les $\Gamma_1^\bullet(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$-pointes, ainsi que dans la partie II.2. Notons que $\Gamma_0^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})=G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\cap G^+(\mathfrak{o}\oplus(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)$.

Lemme 1.7. *Soient* $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a'\\c'\end{pmatrix}\in F^2-\{0\}$ *et soit* $\mathfrak{f}$ *un idéal fractionnaire de* F.

Si $a\,\mathfrak{o}+c\mathfrak{f}^*=a'\,\mathfrak{o}+c'\mathfrak{f}^*$, *alors il existe* $\gamma\in\mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{f}^*)$ *tel que* $\begin{pmatrix}a'\\c'\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration : Posons $\mathfrak{b}=a\,\mathfrak{o}+c\mathfrak{f}^*$. Il existent $\gamma,\gamma'\in\mathrm{SL}_2(F)\cap\begin{pmatrix}\mathfrak{b}&(\mathfrak{b}\mathfrak{f})^*\\\mathfrak{b}\mathfrak{f}\mathfrak{d}&\mathfrak{b}^{-1}\end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\gamma\infty$ et $\begin{pmatrix}a'\\c'\end{pmatrix}=\gamma'\infty$. Comme $\gamma'\gamma^{-1}\in\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{f}^*)$ on a le lemme. □

Soit $\mathcal{I}_F$ l'ensemble des idéaux fractionnaires et Cl_F le groupe des classes de F.

Lemme 1.8. *On a deux bijections :*

$G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\big(F^2-\{0\}\big)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_F$, $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\mapsto\mathfrak{b}=a\,\mathfrak{o}+c\,\mathfrak{c}^*$, *et*

$G^+(\mathfrak{o}\oplus(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)\backslash\big(F^2-\{0\}\big)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_F$, $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\mapsto\mathfrak{b}'=a\,\mathfrak{o}+c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$,

qui induisent deux bijections d'ensembles finis :

$G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathbb{P}^1(F)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Cl}_F$, *et* $G^+(\mathfrak{o}\oplus(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)\backslash\mathbb{P}^1(F)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Cl}_F$.

Démonstration : Les flèches sont bien définies (voir l'action de $G_{\mathbb{Q}}^+$ sur F^2 définie au début de §.1.2). Le lemme précédent donne l'injectivité. La surjectivité découle du fait que tout idéal dans un corps de nombres peut être engendré par deux de ses éléments. □

1.5. Variétés modulaires de Hilbert analytiques. Étant donné un sous-groupe de congruence Γ on définit *la variété modulaire de Hilbert analytique* $M^{\mathrm{an}} = \Gamma\backslash\mathfrak{H}_F$. La variété M^{an} est lisse, si et seulement, si Γ est sans torsion. En revanche M^{an} n'est jamais compacte.

Les variétés modulaires de Hilbert, dont nous étudierons en détail la géométrie, sont celles correspondant aux sous-groupes de congruence $\Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$.

1.6. Compactification de Satake. L'espace quotient $M^{\mathrm{an}\,*} = \Gamma\backslash\mathfrak{H}_F^*$ est compact pour la topologie de Satake définie dans §.1.1. Il est l'union de M^{an} et d'un nombre fini de points (*cf* [**24**] Chap.I). Il est muni d'une structure de variété analytique complexe normale pour laquelle les pointes sont des points singuliers si $d_F > 1$ (*cf* [**24**] II.4).

Remarque 1.9. Le revêtement $\mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathfrak{H}_F \to \mathrm{GL}^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathfrak{H}_F$ est fini étale de groupe $\mathfrak{o}_+^\times / \mathfrak{o}^{\times 2}$. C'est un 2-groupe qui est non-trivial en général. Par conséquent, le morphisme $\mathrm{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathfrak{H}_F^* \to \mathrm{GL}^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathfrak{H}_F^*$ n'est pas étale en général, car son degré est égal à 1 au-dessus des pointes (*cf* Lemme 1.7).

2. Formes automorphes de Hilbert et opérateurs de Hecke.

2.1. Facteurs automorphes. Pour tout $z \in \mathfrak{H}_F$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in G_{\mathbb{R}}^+$ on pose $j(\gamma,z) = c\cdot z + d \in (F\otimes\mathbb{C})^\times$. D'après l'identité $j(\gamma\gamma',z) = j(\gamma,\gamma'(z))j(\gamma',z)$ on a un 1-cocycle holomorphe $G_{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow (\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\mathfrak{H}_F})^\times$, $\gamma \mapsto (z \mapsto j(\gamma,z)))$. Plus généralement pour tout $J \subset J_F$ on pose $j_J(\gamma,z) = c\cdot z^J + d \in (F\otimes\mathbb{C})^\times$, où $z_\tau^J = \begin{cases} z_\tau, \text{ si } \tau \in J, \\ \overline{z}_\tau, \text{ si } \tau \in J_F\backslash J.\end{cases}$

2.2. Poids. Rappelons que $\mathbb{Z}[J_F]$ s'identifie au groupe des caractères du tore $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ par $k = \sum_{\tau\in J_F} k_\tau\tau \;\mapsto (x \mapsto \prod \tau(x)^{k_\tau})$. Les éléments de $\mathbb{Z}[J_F]$ sont appelés des *poids*. Dans la suite, l'on ne considère que des poids vérifiant la condition d'algébricité de Clozel suivante ([**7**] Sect.1.2.3):

Définition 2.1. Un poids $k \in \mathbb{Z}[J_F]$ est dit *arithmérique* si ses coordonnées k_τ sont supérieures ou égales à 2 et sont de même parité. On pose alors $k_0 = \max\{k_\tau | \tau \in J_F\}$, $m_\tau = \frac{k_0 - k_\tau}{2} \in \mathbb{N}$, $t = \sum_{\tau\in J_F}\tau$, $n_\tau = k_\tau - 2 \geq 0$ et $n_0 = k_0 - 2$. ($n = k - 2t$ et $k + 2m = k_0 t$).

Pour $\mu = \sum\limits_{\tau\in J_F} \mu_\tau\tau \in \mathbb{Z}[J_F]$ et $z = (z_\tau)_{\tau\in J_F} \in \mathbb{C}^{J_F}$ on écrira z^μ à la place de $\prod\limits_{\tau\in J_F} z_\tau^{\mu_\tau}$.

2.3. Formes automorphes pour G. Soit Γ un sous-groupe de congruence de $G_{\mathbb{Q}}^+$ et soit k un poids. Pour toute fonction $g : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}$, pour tout $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}^+$ et pour toute partie J de J_F, on pose

$$(g|_{k,J}\gamma)(z) = \nu(\gamma)^{k+m-t} j_J(\gamma,z)^{-k} g(\gamma z).$$

Définition 2.2. L'espace $G_{k,J}(\Gamma;\mathbb{C})$ des formes automorphes classiques de Hilbert, de poids k, niveau Γ et type à l'infini $J \subset J_F$, est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions $g : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(m1) pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $g|_{k,J}\gamma = g$,

(m2) la fonction $z \mapsto g(z^J)$ est holomorphe sur $\mathfrak{H}_F^*$.

Remarque 2.3. D'après le principe de Koecher, la condition d'holomorphie aux pointes est toujours satisfaite, si F est différent de $\mathbb{Q}$ (*cf* [**24**] Prop.4.9 et son corollaire). Une définition précise de la notion d'holomorphie aux pointes, ainsi qu'une preuve du principe de Koecher sont données dans la partie 3.4, lorsque $\Gamma = \Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$.

On définit l'espace $S_{k,J}(\Gamma;\mathbb{C})$ des formes automorphes de Hilbert cuspidales classiques, comme le sous espace de $G_{k,J}(\Gamma;\mathbb{C})$ formé des fonctions f qui s'annulent en toutes les pointes.

Afin de faciliter l'introduction des opérateurs de Hecke, nous donnerons une autre définition (adélique) des formes automorphes de Hilbert.

2.4. Formes automorphes adéliques pour G. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et soit $G_{\mathbb{A}} = G_f G_{\mathbb{R}}$ la décomposition en le produit des places finies et des places infinies. Tout élément x de $G_{\mathbb{A}}$ se décompose en conséquence en produit de $x_f \in G_f$ et $x_\infty \in G_{\mathbb{R}}$.

Soit K un sous-groupe compact ouvert de G_f.

Définition 2.4. L'espace $G_{k,J}(K;\mathbb{C})$ des formes automorphes adéliques de poids k, niveau K et type à l'infini $J \subset J_F$, est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions $g : G_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(M1) $g(axy) = g(x)$ pour tout $a \in G_{\mathbb{Q}}$, $y \in K$ et $x \in G_{\mathbb{A}}$.

(M2) $g(x\gamma) = \nu(\gamma)^{k+m-t} j_J(\gamma, \underline{i})^{-k} g(x)$ pour tout $\gamma \in K_\infty^+$ et $x \in G_{\mathbb{A}}$.

Soit pour tout $x \in G_f$ la fonction $g_x : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}$, donnée par $z \mapsto \nu(\gamma)^{t-k-m} j_J(\gamma, \underline{i})^k g(x\gamma)$, où $\gamma \in G_\infty^+$ est choisi de manière que $z = \gamma \cdot \underline{i}$. En vertu de (M2) cette fonction ne dépend pas du choix particulier de γ.

(M3) La fonction g_x est holomorphe en z_τ, pour $\tau \in J$, et anti-holomorphe en z_τ, pour $\tau \in J_F \backslash J$ (lorsque $F = \mathbb{Q}$ il faut rajouter la condition d'holomorphie aux pointes).

L'espace $S_{k,J}(K;\mathbb{C})$ des formes automorphes adéliques cuspidales est le sous-espace de $G_{k,J}(K;\mathbb{C})$ contenant les fonctions vérifiant la condition supplémentaire suivante :

(M4) $\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} g(ux)du = 0$, pour tout $x \in G_{\mathbb{A}}$ et toute mesure de Haar additive du.

Le paragraphe suivant compare les espaces de formes automorphes cuspidales adéliques et classiques.

2.5. Lien entre les formes adéliques et classiques.

Lemme 2.5. *La flèche*

$$\nu : G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} / K G_\infty^+ \to D_{\mathbb{Q}} \backslash D_{\mathbb{A}} / \nu(K) D_\infty^+,$$

donnée par la norme réduite, est un isomorphisme.

Démonstration : La flèche est bien définie et surjective. On note $G^1 := \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{SL}_2$. Pour l'injectivité, supposons que l'on ait $x, x' \in G_{\mathbb{A}}$ tels que $\nu(x') \in D_{\mathbb{Q}} \nu(x) \nu(K) D_\infty^+$. Comme $\nu(G_{\mathbb{Q}}) = D_{\mathbb{Q}}$ et $\nu(G_\infty^+) = D_\infty^+$, on peut supposer que $\nu(x') = \nu(x)$, i.e. $x' \in G_{\mathbb{A}}^1 x$. D'après le théorème d'approximation forte pour le groupe algébrique semi-simple G^1 et son sous-groupe ouvert compact $x_f K^1 x_f^{-1}$ (où $K^1 := K \cap G_f^1$), on a $G_{\mathbb{A}}^1 = G_{\mathbb{Q}}^1 x_f K^1 x_f^{-1} G_\infty^1 = G_{\mathbb{Q}}^1 x_f K^1 x_f^{-1} x_\infty G_\infty^1 x_\infty^{-1} = G_{\mathbb{Q}}^1 x K^1 G_\infty^1 x^{-1}$. D'où $x' \in G_{\mathbb{A}}^1 x = G_{\mathbb{Q}}^1 x K^1 G_\infty^1 \subset G_{\mathbb{Q}} x K G_\infty^+$. □

Soient $\eta_i \in D_{\mathbb{A}}$, $1 \leq i \leq h$ des représentants du groupe $D_{\mathbb{A}} / D_{\mathbb{Q}} \nu(K) D_\infty^+$. Par le théorème d'approximation faible on peut supposer que $\eta_i \in D_f$. Posons $t_i = \begin{pmatrix} \eta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et définissons le sous-groupe de congruence $\Gamma^i(K) = G_{\mathbb{Q}} \cap t_i K t_i^{-1} G_\infty^+$ de $G_{\mathbb{Q}}^+$. Alors il est facile de voir que l'isomorphisme $\mathfrak{H}_F \cong G_{\mathbb{R}}^+ / K_\infty^+$ induit un homéomorphisme :

$$\coprod_{i=1}^{h} \Gamma^i(K) \backslash \mathfrak{H}_F \to G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} / K K_\infty^+. \tag{I.1}$$

PROPOSITION 2.6. *En gardant les notations de ce paragraphe les applications*

$$G_{k,J}(K;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{h} G_{k,J}(\Gamma^i(K);\mathbb{C}) \ , \ S_{k,J}(K;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{h} S_{k,J}(\Gamma^i(K);\mathbb{C}), \tag{I.2}$$

données par $f \mapsto (f_{t_i})_{1\leq i\leq h}$ *sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.*

On note $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_l \mathbb{Z}_l$ le complété profini de $\mathbb{Z}$ et on considère les sous-groupes compacts ouverts de G_f suivants :

$$K_0^D(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) | c \in \mathfrak{n} \right\},$$

$$K_1^D(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0(\mathfrak{n}) | d-1 \in \mathfrak{n} \right\},$$

$$K^D(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_1(\mathfrak{n}) | a-1, b \in \mathfrak{n} \right\}.$$

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de F, η l'idèle correspondant à $\mathfrak{c}^*$ et posons $t = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\Gamma_?^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n}) = G_{\mathbb{Q}} \cap tK_?^D(\mathfrak{n})t^{-1}G_\infty^+$ et donc les sous-groupes de $G_{\mathbb{Q}}$ définis dans le paragraphe 1.3 sont bien des sous-groupes de congruence $(? = 0, 1, \varnothing)$.

2.6. Opérateurs de Hecke. Considérons le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[K\backslash G_f/K]$ qui a comme base les doubles classes de K dans G_f. Il est muni d'une structure d'algèbre, où le produit de deux éléments de la base est donné par

$$[KxK]\cdot[KyK] = \sum_i [Kx_iyK],$$

où $[KxK] = \coprod_i Kx_i$ est la décomposition de la classe double en classes à droite. On appelle cette algèbre, *l'algèbre de Hecke abstraite*. En général, elle n'est pas commutative. Elle agit sur $G_{k,J}(K;\mathbb{C})$, en préservant $S_{k,J}(K;\mathbb{C})$, de la manière suivante ($g \in G_{k,J}(K;\mathbb{C})$) :

$$(g|[KxK])(\cdot) = \sum_i g(\cdot x_i).$$

2.7. Produit de Petersson. Soit la mesure sur $\mathfrak{H}_F$ donnée par $d\mu(z) = \prod_{\tau\in J_F} y_\tau^{-2}dx_\tau dy_\tau$. Pour deux formes f et g de $S_{k,J}(\Gamma;\mathbb{C})$ on définit leur produit de Petersson normalisé

$$\langle f,g\rangle = \mu(\Gamma\backslash\mathfrak{H}_F)^{-1}(f,g)_\Gamma, \text{ avec } (f,g)_\Gamma = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}_F} \overline{f(z)}g(z)y^k d\mu(z).$$

On en déduit le produit de Petersson sur $S_{k,J}(K,\mathbb{C})$, via l'isomorphisme (I.2).

3. Variétés abéliennes de Hilbert-Blumenthal et formes de Hilbert.

Dans la suite de ce travail, Γ (resp. Γ^1) désigne le sous-groupe de congruence $\Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ (resp. $\Gamma_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$) et on pose $M^{\rm an} = \Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})\backslash\mathfrak{H}_F$ (resp. $M^{1,\rm an} = \Gamma_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})\backslash\mathfrak{H}_F$).

3.1. Variétés abéliennes de Hilbert-Blumenthal.

Définition 3.1. Une variété abélienne à multiplication réelle par $\mathfrak{o}$ sur un schéma S est la donnée d'un schéma abélien $\pi : A \to S$ de dimension relative d_F et d'une injection $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/S)$.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire. Pour chaque variété abélienne à multiplication réelle A/S, on définit un faisceau en $\mathfrak{o}$-modules sur le gros site étale de S en associant à un S-schéma Y le $\mathfrak{o}$-module $A(Y) \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}$. Ce foncteur est représentable par une variété abélienne à multiplication réelle sur S, notée $A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}$ (*cf* [**14**]); elle est caractérisée par :

$$A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} = \begin{cases} A/A[\mathfrak{c}^{-1}], \text{ si } \mathfrak{c}^{-1} \text{ entier.} \\ (A^t \otimes \mathfrak{c}^{-1})^t, \text{ si } \mathfrak{c} \text{ entier.} \end{cases}$$

La première formule s'obtient en tensorisant par A sur $\mathfrak{o}$ la suite exacte courte $0 \to \mathfrak{o} \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} / \mathfrak{o} \to 0$. La seconde en résulte par dualité.

À partir de $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/S)$ on obtient $\mathfrak{c} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(A, A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c})$. Soit $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$. Soit $\mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t)$ le $\mathfrak{o}$-module des homomorphismes symétriques de A vers A^t et $\mathcal{P}(A) \subset \mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t)$ le cône des polarisations.

Définition 3.2. Une variété abélienne A de Hilbert-Blumenthal (abrégée en VAHB) sur un schéma S est une variété abélienne à multiplication réelle par $\mathfrak{o}$, vérifiant la condition de Deligne-Pappas [**14**] suivante:

(DP) il existe un isomorphisme $\mathfrak{o}$-équivariant $\lambda : A \otimes \mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} A^t$ tel que via λ on a $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_+) \cong (\mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t), \mathcal{P}(A))$.

Un tel isomorphisme λ est appelé une $\mathfrak{c}$-polarisation.

Le groupe $\mathfrak{o}_+^\times$ agit sur l'ensemble des $\mathfrak{c}$-polarisations d'une VAHB A/S.

Définition 3.3. On appelle une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation, une orbite $\overline{\lambda}$ de $\mathfrak{c}$-polarisations sous $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \mathfrak{o}_+^\times \cap D_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 3.4. Si Δ_F est inversible dans S, alors la condition **(DP)** est équivalente à la condition suivante de Rapoport (*cf* [**57**] [**41**])

(R) le faisceau $\underline{\omega} = \pi_* \Omega^1_{A/S}$ est localement libre de rang 1 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$ (pour la topologie de Zariski).

Pour la démonstration *cf* [**14**] Cor.2.9, ainsi que [**28**] Chap.3.5.

Définition 3.5. Une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur une VAHB A/S est la donnée d'un morphisme $\mathfrak{o}$-linéaire injectif de S-schémas en groupes finis $\alpha : (\mathfrak{o} / \mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$, où $(\mathfrak{o} / \mathfrak{n})(1) = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{d}^{-1})[\mathfrak{n}]$ désigne le dual de Cartier du S-schéma constant $\mathfrak{o} / \mathfrak{n}$.

Remarque 3.6. La $\mathfrak{c}$-polarisation λ, combinée avec l'accouplement de Weil $A[\mathfrak{n}] \times A[\mathfrak{n}]^t \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{d}^{-1})[\mathfrak{n}]$, donnent un accouplement $\mathfrak{o}$-équivariant parfait $A[\mathfrak{n}] \times A[\mathfrak{n}] \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*)[\mathfrak{n}]$. Étant donné une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $\alpha : (\mathfrak{o} / \mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$, à l'aide de ce-dernier, on lui associe de manière canonique un morphisme $\mathfrak{o}$-linéaire surjectif de S-schémas en groupes finis $\alpha^* : A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{c}^{-1} / \mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-1}$, appelé le λ-dual de Cartier de α. On a une suite exacte courte :

$$0 \to (\mathfrak{o} / \mathfrak{n})(1) \xrightarrow{\alpha} A[\mathfrak{n}] \xrightarrow{\alpha^*} \mathfrak{c}^{-1} / \mathfrak{n}\mathfrak{c}^{-1} \to 0$$

3.2. Construction analytique de la VAHB universelle sur $M^{1,\mathrm{an}}$. On pose

$$\mathcal{A}^{\mathrm{an}} = \Gamma^1 \backslash (\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})) / \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*,$$

où le groupe produit semi-direct $(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \rtimes \Gamma^1$ (pour $\gamma \cdot (m,n) = (m,n)\gamma^{-1}$) agit à gauche sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$ par :

$$\begin{cases} \gamma(z,v) = (\gamma(z), j(\gamma,z)^{-1} v) \\ (z,v)(m,n) = (z, v + m \cdot z + n) \end{cases} . \tag{I.3}$$

La fibre du point $\Gamma^1 z \in M^{1,\mathrm{an}}$ est la variété abélienne $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}} := (F \otimes \mathbb{C})/L_z$, où $L_z = (\mathfrak{o}\, z \oplus \mathfrak{c}^*)$. La flèche $\iota(\xi) : (z,v) \mapsto (z, \xi v)$ induit une action de $\xi \in \mathfrak{o}$ sur $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$, d'où une injection $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}} / M^{1,\mathrm{an}})$.

Pour tout fibré vectoriel E sur $M^{1,\mathrm{an}}$, soit $E^\vee$ le fibré dual. Il est facile de voir que $\mathrm{Lie}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}} / M^{1,\mathrm{an}}) = \Gamma^1 \backslash (\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C}))$ et $\underline{\omega}_{\mathcal{A}/M} = \mathrm{Lie}(\mathcal{A}^{\mathrm{an}} / M^{1,\mathrm{an}})^\vee$ sont localement libres de rang 1 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M^{1,\mathrm{an}}}$.

Pour tout $\mathfrak{o}$-module L on a un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(L, \mathfrak{d}^{-1})$ et $L^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$, obtenu en composant avec $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$.

On a un isomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire $\wedge^2_{\mathfrak{o}} L_z \cong \mathfrak{c}^*$, venant de l'accouplement parfait $\lambda_z : L_z \times L_z \to F \quad (u,v) \mapsto \frac{uv^c - u^c v}{2i\,\mathrm{Im}(z)}$. L'application $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ \lambda_z$ nous fournit un isomorphisme $L_z \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} \cong L_z^*$, d'où une $\mathfrak{c}$-polarisation $\mathcal{A}_z \otimes \mathfrak{c} \cong \mathcal{A}_z^t$.

Si $\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + y_0\, \mathfrak{c}$, la flèche $M^{1,\mathrm{an}} \times \mathfrak{n}^{-1}\, \mathfrak{d}^{-1} / \mathfrak{d}^{-1} \to (\mathcal{A}^{\mathrm{an}})_{\mathfrak{n}}$, $(z,v) \mapsto (z, y_0 v)$ munit $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

PROPOSITION 3.7. $(\mathcal{A}^{\mathrm{an}}, \iota, \lambda, \alpha)/M^{1,\mathrm{an}}$ *est une VAHB* $\mathfrak{c}$*-polarisée analytique, munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau.*

La flèche $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \to M^{1,\mathrm{an}}$ *est universelle, i.e. pour toute VAHB analytique* A/S *munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et d'une classe de* $\mathfrak{c}$*-polarisation, il existe une unique flèche* $\varphi : S \to M^{1,\mathrm{an}}$ *et un unique isomorphisme de VAHB munie de* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et de classe de* $\mathfrak{c}$*-polarisation* $A \cong \mathcal{A}^{\mathrm{an}} \times_{M^{1,\mathrm{an}}} S$. *En particulier, si* A *est une VAHB complexe munie d'une* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau et d'une classe de* $\mathfrak{c}$*-polarisation, il existe un unique point* $z \in M^{1,\mathrm{an}}$ *et un unique isomorphisme* $A \cong \mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$.

Idée de la démonstration : Il est clair que toute VAHB complexe est isomorphe à une VAHB de la forme $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$ et que les deux VAHB analytiques $\mathcal{A}_z^{\mathrm{an}}$ et $\mathcal{A}_{z'}^{\mathrm{an}}$ sont isomorphes comme VAHB munies de leurs $\mu_{\mathfrak{n}}$-structures de niveau et $\mathfrak{c}$-polarisations si et seulement si $z' \in \Gamma^1 z$.

Soit A/S comme dans l'énoncé. Par ce qui précède, il existe une unique flèche ensembliste $\varphi : S \to M^{1,\mathrm{an}}$ telle que $A \cong \mathcal{A}^{\mathrm{an}} \times_{M^{1,\mathrm{an}}} S$. L'analyticité de φ se vérifie localement, car $\varphi(s) = \int_{\gamma_1} \omega(s) / \int_{\gamma_2} \omega(s)$, où (γ_1, γ_2) est une $\mathfrak{o}$-base locale convenable de l'homologie de A/S et ω est une $F \otimes \mathcal{O}_S$-base locale de $\underline{\omega}$. □

REMARQUE 3.8. 1) Notons qu'en général pour $G \neq G^*$ la variété $M^{\mathrm{an}} = \Gamma \backslash \mathfrak{H}_F$ n'est qu'un espace de modules grossier pour le problème de modules de classes d'isomorphismes de VAHB munies d'une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation (*cf* Déf.3.3) et d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

Comme Γ^1 est un sous-groupe distingué de Γ, le quotient $\mathfrak{o}_{D+}^\times$ agit sur $M^{1,\mathrm{an}}$. Sur les S-points $\epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times$ envoie $(A, \iota, \lambda, \alpha)/S$ sur $(A, \iota, \epsilon\lambda, \alpha)/S$. On a $M^{\mathrm{an}} = \mathfrak{o}_{D+}^\times \backslash M^{1,\mathrm{an}}$.

En fait, le sous-groupe $\mathfrak{o}_{D+}^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2}$ agit trivialement, car la multiplication par $\epsilon \in \mathfrak{o}^\times$ induit un isomorphisme $(A, \iota, \lambda, \alpha) \cong (A, \iota, \epsilon^2\lambda, \epsilon\alpha)$. Donc $M^{1,\mathrm{an}}$ est un revêtement fini étale de M^{an} de groupe $\mathfrak{o}_{D+}^\times / \mathfrak{o}_{D+}^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2}$.

Pour toute VAHB A/S munie d'une classe de $\mathfrak{c}$-polarisation et d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau on a des flèches $S \to M^{1,\mathrm{an}}$ dont les composées avec la projection $M^{1,\mathrm{an}} \to M^{\mathrm{an}}$ coïncident et telles que A/S avec sa classe de $\mathfrak{c}$-polarisation soit le pull-back de $A^{\mathrm{an}}/M^{1,\mathrm{an}}$ munie de la classe de sa $\mathfrak{c}$-polarisation universelle.

2) Lorsque $G = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$, Hida, dans son livre [**30**] IV.4.1.2, a donné une autre description de M^{an} comme espace de modules grossier des VAHB avec classes de $F_+^\times$-polarisation. Dans sa description,

$$M^{\mathrm{an}} = M_1^{\mathrm{an}}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = F_+^\times \backslash \coprod_{\mathfrak{c}'} M_1^1(\mathfrak{c}', \mathfrak{n})^{\mathrm{an}},$$

où $\mathfrak{c}'$ décrit les idéaux de F qui appartiennent à la même classe stricte que $\mathfrak{c}$.

3.3. VAHB analytique de Tate. Soit $\mathcal{C} = \gamma\infty$ une Γ-pointe ($\gamma \in G^*_{\mathbb{Q}}$). On commence par étudier la forme d'un voisinage de $\mathcal{C}$ dans M^{an}, puis on va décrire celle de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$, au-dessus d'un tel voisinage dans $M^{1,\mathrm{an}}$.

1 cas $\mathcal{C} = \infty$. $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty) = \left\{ \begin{pmatrix} u\epsilon & b \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times \;\; b \in \mathfrak{c}^* \right\} = \mathfrak{c}^* \rtimes (\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times)$,

où $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \mathfrak{o}_+^\times \cap D_{\mathbb{Q}}$ et pour tout idéal $\mathfrak{f}$ de F, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{f},1}^\times$ désigne le groupe des unités de $\mathfrak{o}$ congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$.

Soit ϕ l'inclusion naturelle $F \to F \otimes \mathbb{C}$, $x \mapsto x \otimes 1$. On a une suite exacte courte :

$$0 \to \mathfrak{c}^* \xrightarrow{\phi} F \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{q} \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \to 1, \tag{I.4}$$

obtenue par produit tensoriel par $\mathfrak{c}^*$ de $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot}} \mathbb{C}^* \to 1$.

Pour $m \in F$ et $z \in F \otimes \mathbb{C}$, on pose $q_z^m = q(\phi(m)z)$ ($= q(\phi(m)z + \phi(\xi^*))$ pour tout $\xi^* \in \mathfrak{c}^*$). On voit facilement:

Fait : Pour $H > 0$ assez grand, on a $\mathrm{Stab}_\Gamma(W_H) = B_\Gamma := \Gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$.

Le groupe $\mathfrak{o}_\infty^\times := \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times$ agit sur le quotient $D_H = \mathfrak{c}^* \backslash W_H$ par $(u, \epsilon) \cdot (z + \mathfrak{c}^*) = u^2\epsilon z + \mathfrak{c}^*$ (voir l'action définie par (I.3)), et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_F \arrow[d] & W_H \arrow[l, hook'] \arrow[d] & & & \\
M^{\mathrm{an}} & B_\Gamma \backslash W_H \arrow[l, hook'] & D_H = \mathfrak{c}^* \backslash W_H \arrow[l, "\mathrm{mod}\ \mathfrak{o}_\infty^\times"'] \arrow[r, hook] & F \otimes \mathbb{C} / \phi(\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "q", "\sim"'] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* =: S_\infty
\end{tikzcd}$$

On a $M^{\mathrm{an}} \supset B_\Gamma \backslash W_H \cong \mathfrak{o}_\infty^\times \backslash D_H \hookrightarrow \mathfrak{o}_\infty^\times \backslash S_\infty$, où $\mathfrak{o}_\infty^\times$ agit sur S_∞ par $(u, \epsilon) \cdot q_z = q_z^{u^2\epsilon}$.

Le diagramme suivant décrit la structure de la VAHB universelle $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ sur le voisinage $B_{\Gamma^1} \backslash W_H$ de la pointe ∞ dans $M^{1,\mathrm{an}}$:

$$\begin{tikzcd}
B_{\Gamma^1} \backslash (W_H \times F \otimes \mathbb{C}) / \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^* \arrow[d] & \mathfrak{c}^* \backslash (W_H \times F \otimes \mathbb{C}) / \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^* \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*)/q_z^{\mathfrak{o}} \arrow[d] \\
B_{\Gamma^1} \backslash W_H & D_H \arrow[l, "\mathrm{mod}\ \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* =: S_\infty
\end{tikzcd}$$

Commentaire : 1) La notation $q_z^{\mathfrak{o}}$ exprime que $m \in \mathfrak{o}$ agit sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*$ par la formule $(q_z, q_v) \cdot m = (q_z, q_v q_z^m)$.

2) Le groupe $\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times$ agit sur $S_\infty \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^*$ par $u \cdot (q_z, q_v) = (q_z^{u^2}, q_v^u)$.

Définition 3.9. La VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée au dessus de S_∞ ainsi obtenue s'appelle la VAHB analytique de Tate, notée $\mathrm{Tate}_{\mathfrak{c},\mathfrak{o}}(q_z)$. Sa fibre au point $q_z \in S_\infty$ est égale à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{c}^* / q_z^{\mathfrak{o}}$.

<u>2 cas</u> $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \gamma\infty$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{Q}}^*$. $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathcal{C}) = B_{\Gamma,\mathcal{C}} := \Gamma \cap \gamma B_{\mathbb{Q}} \gamma^{-1}$. Un système fondamental de voisinages de la pointe $\mathcal{C}$ est donné par les $B_{\Gamma,\mathcal{C}} \backslash \gamma W_H$. Par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}_F \arrow[r] & M^{\mathrm{an}} = \Gamma\backslash\mathfrak{H}_F \arrow[r, "\sim"] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma\backslash\mathfrak{H}_F & \\
\gamma W_H \arrow[r] \arrow[u, hook] & B_{\Gamma,\mathcal{C}}\backslash\gamma W_H \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}\backslash W_H \arrow[u, hook] & \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}}\backslash W_H, \arrow[l, "\mathrm{pr}(\gamma^{-1}\Gamma\gamma\cap B_{\mathbb{Q}})"']
\end{tikzcd}$$

on se ramène au cas de la pointe ∞, mais pour le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$. Notons que pour tout sous-groupe Γ' de $G_{\mathbb{Q}}$ on a la suite exacte suivante :

$$1 \to \Gamma' \cap U_{\mathbb{Q}} \to \Gamma' \cap B_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{pr}(\Gamma' \cap B_{\mathbb{Q}}) \to 1,$$

où pr : $B_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ est la projection canonique. En appliquant ceci à $\Gamma' = \gamma^{-1}\Gamma\gamma$ on trouve la suite exacte

$$1 \to X^* \to \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap G_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \to 1,$$

avec $X^* = \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} := \mathrm{pr}(\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}})$. Il est important de calculer ces derniers pour pouvoir construire une compactification partielle de la pointe $\mathcal{C}$.

• Calcul de X^*. $\begin{pmatrix} 1 & \xi^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \iff \begin{pmatrix} 1 + ac\xi^* & a^2\xi^* \\ -c^2\xi^* & 1 - ac\xi^* \end{pmatrix} \in \Gamma \iff$

$\iff \xi^* \in a^{-2}\,\mathfrak{c}^* \cap (ac)^{-1}\,\mathfrak{n} \cap c^{-2}\,\mathfrak{c}^{*-1}\,\mathfrak{n} = (a^2\,\mathfrak{c}^{*-1} + ac\,\mathfrak{n}^{-1} + c^2(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)^{-1} =$

$= \mathfrak{c}^*(a^2\,\mathfrak{o} + ac(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^* + c^2\,\mathfrak{c}^{*2}\,\mathfrak{n}^{-1})^{-1} = \mathfrak{c}^*(a\,\mathfrak{o} + c\,\mathfrak{c}^*)^{-1}(a\,\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*)^{-1}$.

Donc $X^* = \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}} = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*$, avec $\mathfrak{b} = a\,\mathfrak{o} + c\,\mathfrak{c}^*$ et $\mathfrak{b}' = a\,\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$.

D'après le lemme 1.8, la classe de $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ est bien définie.

• Calcul de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$. Posons $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times} := \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \cap T_1$. Alors on a une suite exacte courte

$$1 \to \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times} \to \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \xrightarrow{\nu} \nu(\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}) \to 1,$$

venant de la suite exacte $1 \to T_1 \to T \to D \to 1$. En prenant $\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$, on trouve

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} = \{(u,\epsilon) \in F^{\times} \times \mathfrak{o}_{D+}^{\times} \,|\, \exists \xi^* \in a^{-2}\,\mathfrak{c}^*, u^{-1} - 1 + ac\xi^* \in \mathfrak{n}, u\epsilon - u^{-1} - ac\xi^* \in \frac{a}{c}\,\mathfrak{c}^{*-1}\,\mathfrak{n}\}.$$

Le groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ ne dépend que de la classe de γ dans $\Gamma\backslash G_{\mathbb{Q}}/B_{\mathbb{Q}}$. Un calcul démontre que l'on a $\mathfrak{o}^{\times} \supset \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times} \supset \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times}$. Si l'idéal $\mathfrak{n}$ est sans facteurs carrés, alors $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times}$. Le calcul explicite du groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ dans le cas général, est un corollaire d'une autre description des Γ-pointes qui sera donnée dans la partie II.2.

Le type de la pointe $\mathcal{C}$ est déterminé par : $\begin{cases} \text{l'ideal } X^*, \\ \text{le groupe } \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}, \\ \text{l'action de } \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times} \text{ sur } X^*\backslash W_H. \end{cases}$

REMARQUE 3.10. 1) Le fait de remplacer γ par $\gamma\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix}$, multiplie X^* par a'^{-2} et conjugue l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ sur $X^*\backslash W_H$, par l'isomorphisme $W_H \to W_{\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(a')^2 H}$, $z \mapsto a'^2 z + a'c'$.

2) En général l'inclusion $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$ est stricte, bien que ce soit une égalité pour la pointe ∞. Néanmoins le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_{1,\mathbb{Q}}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{o}^{\times}$.

Pour étudier la VAHB universelle au voisinage de la pointe $\mathcal{C}$, trouvons quel réseau est stable par $\gamma^{-1}\operatorname{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma$. Par le théorème de Bezout on peut prendre

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{b} & (\mathfrak{bc})^* \\ \mathfrak{bcd} & \mathfrak{b}^{-1} \end{pmatrix} \text{ , où } \mathfrak{b} = a\,\mathfrak{o} + c\,\mathfrak{c}^* \text{ et } \mathfrak{a} = \mathfrak{bc}.$$

Comme γ^{-1} transforme $L_0 = \mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$ en $L = \mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$, on a

$$\gamma^{-1}\operatorname{SL}(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma = \operatorname{SL}(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*) = \operatorname{SL}_2(F) \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{b}^{-2}\,\mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{b}^2\,\mathfrak{c}^{*-1} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \arrow[d] & B_{\Gamma^1,\mathcal{C}}\backslash(\gamma W_H \times F\otimes\mathbb{C})/\,\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^* \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}\backslash(W_H \times F\otimes\mathbb{C})/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*. \arrow[d] \\
M^{1,\mathrm{an}} & B_{\Gamma^1,\mathcal{C}}\backslash\gamma W_H \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\sim"] & \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}\backslash W_H
\end{tikzcd}$$

À partir de là, en posant $A^{\mathrm{an}}_{\gamma,H} = \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}\backslash(W_H\times(F\otimes\mathbb{C}))/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$, on a la description de la variété universelle au voisinage de la pointe $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A^{\mathrm{an}}_{\gamma,H} \arrow[d] & X^*\backslash(W_H \times (F\otimes\mathbb{C}))/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^* \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*)/q_z^{\mathfrak{b}} \arrow[d] \\
\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}\backslash W_H & X^*\backslash W_H \arrow[l, "\bmod\ \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^* =: S_{\mathcal{C}}.
\end{tikzcd}$$

Le groupe $\mathfrak{b}$ agit sur le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^* \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*$ par $(q_z, q_v)\cdot\beta = (q_z, q_v q_z^\beta)$. Le groupe $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ agit sur $S_{\mathcal{C}}\times\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*$ par $u\cdot(q_z,q_v) = (q_z^{u^2} q^u_{\xi^*_u}, q_v^u)$, où ξ^*_u est un élément de $(\mathfrak{b}^2\,\mathfrak{c})^*$, bien défini modulo X^*, et tel que $\begin{pmatrix} u & \xi^*_u \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma$. On rappelle que, par définition, pour tout $m\in F$, $z\in F\otimes\mathbb{C}$ on pose $q_z^m = q(\phi(m)z)$ $(= q(\phi(m)z + \phi(\xi^*))$ pour tout $\xi^*\in X^*)$, où $0 \to X^* \xrightarrow{\phi} F\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{q} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{c}^* \to 1$.

Définition 3.11. La VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée au dessus de $S_{\mathcal{C}}$ ainsi obtenue, s'appelle la VAHB analytique de Tate, notée $\mathrm{Tate}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(q_z)$. Sa fibre au point $q_z \in S_{\mathcal{C}}$ est égale à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*/q_z^{\mathfrak{b}}$.

3.4. Formes modulaires de Hilbert de niveau $\Gamma = \Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$. Rappelons que $\mathbb{Z}[J_F]$ s'identifie au groupe des caractères du tore $T_1 = \operatorname{Res}^F_{\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ en envoyant $k = \sum_{\tau\in J_F} k_\tau\tau$ sur le caractère $x\mapsto x^k = \prod_{\tau\in J_F}\tau(x)^{k_\tau}$. Dans la suite on utilise la notation additive pour la loi du groupe des caractères de T_1.

On suppose désormais $F\neq\mathbb{Q}$. Pour tout poids $k = \sum_{\tau\in J_F} k_\tau\tau$, on aurait pu définir l'espace des formes automorphes de Hilbert holomorphes de poids k et niveau Γ comme l'espace des fonctions holomorphes $f : \mathfrak{H}_F \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $\gamma\in\Gamma$, on a :

$$f(\gamma(z)) = \nu(\gamma)^{k/2} j(\gamma,z)^{-k} f(\gamma z).$$

Ce sont les sections du fibré inversible analytique $\underline{\omega}^k$ sur M^{an} donné par le cocycle

$$\Gamma \to \mathcal{O}^\times_{\mathfrak{H}_F},\quad \gamma\mapsto \nu(\gamma)^{-k/2} j(\gamma,z)^k.$$

Cependant, on ne s'intéresse dans la suite de ce texte qu'aux formes qui peuvent intervenir dans la cohomologie de la variété de Hilbert à coefficients dans un système local algébrique (c'est-à-dire donné par une représentation algébrique de G). Ces représentations sont de la forme

$$\bigotimes_{\tau\in J_F}(\operatorname{Sym}^{n_\tau}\otimes\operatorname{Det}^{m_\tau}).$$

Une telle représentation ne définit un système local sur M^{an} que si le centre de Γ agit trivialement. Cette condition équivaut à la condition d'algébricité sur le poids k (*cf* Déf.2.1).

Considérons l'espace $G_k(\mathfrak{c},\mathfrak{n})^{\mathrm{an}} = G_{k,J_F}(\Gamma,\mathbb{C})$ des formes modulaires holomorphes de poids k et groupe de niveau Γ, défini dans la partie 2. Il est isomorphe à l'espace des sections globales du fibré analytique $\underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{-n_0t/2}$ sur M^{an} associé au cocycle $\gamma \mapsto \nu(\gamma)^{-(k+m-t)}j(\gamma,z)^k$ (notons que $(ad)^{-(k+m-t)}d^k = (ad)^{-k/2}d^k(ad)^{-n_0t/2}$).

Remarque 3.12. La torsion par $\underline{\nu}^{-n_0t/2}$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes $\mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}},\underline{\omega}^k) \cong \mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}},\underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{-n_0t/2})$.

Pour chaque $f \in G_k(\mathfrak{c},\mathfrak{n})^{\mathrm{an}}$ on se propose d'expliciter la notion d'holomorphie en une pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty \in \mathbb{P}^1(F)$. La fonction $f_{\mathcal{C}} := f|_k\gamma$ est invariante par le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$ et donc par son sous-groupe de translations $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{Q}} \cong X^*$ (pour le calcul de ce dernier voir le paragraphe précédent). Par conséquent, elle admet un développement en série de Fourier :

$$f_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{\xi \in X} a_\xi e^{2i\pi \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)}. \tag{I.5}$$

La condition d'holomorphie en la pointe $\mathcal{C}$ se lit alors :

$$a_\xi \neq 0 \Rightarrow (\xi \in X_+ \text{ ou } \xi = 0). \tag{I.6}$$

Pour tout $(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$, il existe $\xi^*_{u,\epsilon} \in (\mathfrak{b}^2\,\mathfrak{c})^*$, défini à X^* près, tel que $\begin{pmatrix} u\epsilon & \xi^*_{u,\epsilon} \\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix} \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma$. L'invariance de $f_{\mathcal{C}}$ par le groupe $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$ nous donne pour tout $\xi \in X$ la relation :

$$a_{u^2\epsilon\xi} = \epsilon^{k+m-t}u^k e^{2i\pi \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi^*_{u,\epsilon})} a_\xi. \tag{I.7}$$

Principe du q-développement : Si pour tout ξ on a $a_\xi = 0$, alors $f = 0$.
Principe de Koecher : Si $F \neq \mathbb{Q}$, alors la condition (I.6) est toujours satisfaite. Si k n'est pas parallèle, alors $a_0 = 0$ (pas de séries d'Eisenstein).

D'après (I.7), pour tout $u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_1$ et $\xi \in X$, on a $a_{u^2\xi} = u^k a_\xi$, en particulier $a_0 = u^k a_0$, d'où la deuxième propriété.

Vérifions (I.6) par l'absurde : soient $\xi \in X$ et $\xi^* \in X_+^*$ tels que $a_\xi \neq 0$ et $\langle \xi, \xi^*\rangle < 0$. Alors, on peut choisir $u \in \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap T_1$ de façon que la quantité $\langle u^2\xi, \xi^*\rangle$ soit arbitrairement proche de $-\infty$, ce qui contredit l'holomorphie de f au point $\underline{i}\xi^* \in \mathfrak{H}_F$.

4. Formes modulaires de Hilbert pour GL$_2$.

Dans cette partie nous étudions l'espace des formes modulaires de Hilbert pour $G = \operatorname{Res}^F_{\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_2$ et $K = K_1(\mathfrak{n})$, ainsi que les opérateurs de Hecke agissant dessus. C'est le cadre dans lequel nous nous placerons plus tard quand il s'agira de question arithmétiques et galoisiennes.

4.1. Variétés et formes modulaires de Hilbert en niveau $K_1(\mathfrak{n})$. Soit $\widehat{\mathfrak{o}} = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \mathfrak{o} = \prod_v \mathfrak{o}_v$, où v décrit les places finies de F. On considère les sous-groupes ouverts compacts de G_f suivants :

$$K_0 = K_0(\mathfrak{o}) = \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathfrak{o}}) \ ,\ K_0(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0 | c \in \mathfrak{n} \right\},$$

$$K_1(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_0(\mathfrak{n}) | d - 1 \in \mathfrak{n} \right\}.$$

La variété modulaire de Hilbert adélique de niveau $K_1(\mathfrak{n})$ est définie comme :

$$Y^{\mathrm{an}} = Y_1(\mathfrak{n})^{\mathrm{an}} = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_1(\mathfrak{n})K_\infty^+.$$

Par (I.1) les composantes connexes de Y^{an} sont indexées par le groupe de classes strictes $\mathrm{Cl}_F^+ \simeq \mathbb{A}_F^\times / F^\times \widehat{\mathfrak{o}}^\times F_{\infty+}^\times$ de F. Alors on a

$$Y_1(\mathfrak{n})^{\mathrm{an}} \simeq \coprod_{i=1}^{h^+} M_1(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n})^{\mathrm{an}},$$

où $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{an}} = \Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})\backslash \mathfrak{H}_F$ et où les idéaux $\mathfrak{c}_i$, $1 \leq i \leq h^+$, forment un ensemble de représentants de Cl_F^+.

L'espace des formes modulaires de Hilbert $S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C})$ se décompose, suivant l'action du groupe $K_0(\mathfrak{n})/K_1(\mathfrak{n}) \simeq (\mathfrak{o} / \mathfrak{n})^\times$,

$$S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C}) = \bigoplus_{\psi_0} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi_0), \tag{I.8}$$

où ψ_0 décrit les caractères du groupe $(\mathfrak{o} / \mathfrak{n})^\times$.

Par ailleurs, nous avons vu dans le paragraphe 2.5 une autre décomposition de l'espace $S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C})$: soient η_i des représentants du groupe de classes $\mathbb{A}_F^\times / F^\times \widehat{\mathfrak{o}}^\times F_{\infty+}^\times \simeq \mathrm{Cl}_F^+$, où $\widehat{\mathfrak{o}}^\times = \prod_v \mathfrak{o}_v^\times = \nu(K_1(\mathfrak{n}))$. Alors

$$S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_i S_{k,J}(\Gamma_1(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n}); \mathbb{C}), \tag{I.9}$$

où $\mathfrak{c}_i^*$ est l'idéal de F correspondant à l'idèle η_i.

La construction suivante permet de mettre ensemble les décompositions (I.8) et (I.9), en introduisant un caractère de Hecke ψ de F (le caractère central de f). Fixons un caractère ψ_0 de $(\mathfrak{o} / \mathfrak{n})^\times$. Soit ψ un caractère de Hecke de F, de type à l'infini égal à $-n_0 t$ et dont la restriction à $\widehat{\mathfrak{o}}^\times$ est égale à ψ_0. On voit alors à partir des axiomes (M1) et (M2) que si $f \in S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi_0)$, alors pour tout $x \in G_{\mathbb{A}}$ et pour tout $z \in F^\times \widehat{\mathfrak{o}}^\times F_\infty^\times$, on a $f(zx) = \psi(z)^{-1} f(x)$.

Définition 4.1. Soit ψ un caractère de Hecke de F de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type à l'infini égal à $-n_0 t$. L'espace $S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$ est défini comme le sous-espace de $S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C})$ formé des f satisfaisant $f(zx) = \psi(z)^{-1} f(x)$, pour tout $x \in G_{\mathbb{A}}$ et pour tout $z \in \mathbb{A}_F^\times$. Lorsque $J = J_F$ cet espace sera noté $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$.

Comme les caractères du groupe abélien $\mathbb{A}_F^\times / F^\times \widehat{\mathfrak{o}}^\times F_\infty^\times \simeq \mathrm{Cl}_F$ forment une base des fonctions sur cet ensemble, on a :

$$S_{k,J}(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C}) = \bigoplus_{\psi} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi), \tag{I.10}$$

où ψ décrit les caractères de Hecke de F de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type $-n_0 t$ à l'infini.

4.2. Algèbres de Hecke en niveau $K_0(\mathfrak{n})$ et $K_1(\mathfrak{n})$. Lorsque $K = K_0(\mathfrak{n})$ ou $K_1(\mathfrak{n})$, on va définir une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke abstraite introduite dans le paragraphe 2.6. Soit le semi-groupe :

$$\Delta(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_f \cap \prod_v \mathrm{M}_2(\mathfrak{o}_v) | d_v \in \mathfrak{o}_v^\times, \ \ c_v \in \mathfrak{n}_v \, , \text{ pour tout } v \mid \mathfrak{n} \right\}.$$

Pour $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$ on définit l'opérateur de Hecke abstrait $T_\mathfrak{a}$ comme la somme finie des classes doubles $[KxK]$ contenues dans l'ensemble $\{x \in \Delta(\mathfrak{n}) | \nu(x)\, \mathfrak{o} = \mathfrak{a}\}$. De même, pour un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$ premier à $\mathfrak{n}$, on définit l'opérateur de Hecke $S_\mathfrak{a}$ par la classe double pour K contenant l'idèle correspondant à l'idéal $\mathfrak{a}$ (vu comme matrice scalaire).

Pour une place finie v, on a $S_v = K \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix} K$ si $v \nmid \mathfrak{n}$, et $T_v = K \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$.

Alors, l'algèbre de Hecke abstraite engendrée par les $T_\mathfrak{a}$, pour $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{o}$ et les $S_\mathfrak{a}$, pour $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{o}$ premier à $\mathfrak{n}$, est isomorphe à l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en les variables T_v, pour v premier et les variables S_v, pour v premier ne divisant pas $\mathfrak{n}$.

D'après le paragraphe 2.6 on peut faire agir $T_\mathfrak{a}$ et $S_\mathfrak{a}$ sur $S_k(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C})$ et il est facile de voir que cette action préserve la décomposition (I.10).

Lorsque v divise $\mathfrak{n}$ on note parfois aussi U_v, à la place de T_v.

Soit $\mathbb{T}_\mathbb{C} = \mathbb{T}_k(\mathfrak{n}, \psi; \mathbb{C})$, la sous-algèbre de $\mathrm{End}_\mathbb{C}(S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi))$ engendrée par les opérateurs S_v pour $v \nmid \mathfrak{n}$ et T_v pour tout v (nous verrons plus tard dans le paragraphe 4.5 que $\mathbb{T}_\mathbb{C}$ ne dépend pas de J). L'algèbre $\mathbb{T}_\mathbb{C}$ est commutative, mais elle n'est pas semi-simple en général. Cependant, si $v \nmid \mathfrak{n}$, les opérateurs S_v et T_v sont des endomorphismes normaux pour le produit scalaire de Petersson, défini dans le paragraphe 2.7. La sous-algèbre $\mathbb{T}_\mathbb{C}^0 \subset \mathbb{T}_\mathbb{C}$ engendrée par ces-derniers est donc semi-simple, en d'autres termes $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ admet une base formée de vecteurs propres pour $\mathbb{T}_\mathbb{C}^0$.

Une forme $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ est dite *propre*, si elle est vecteur propre pour $\mathbb{T}_\mathbb{C}$. On note alors $\theta_f : \mathbb{T}_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ le caractère associé, de façon qu'on ait $T_\mathfrak{a} f = \theta_f(T_\mathfrak{a}) f$. Une forme propre f est dite *normalisée* si $\theta_f(T_\mathfrak{o}) = 1$. Le Théorème de Multiplicité Un Faible dit que deux formes propres et normalisées de $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ qui ont les mêmes valeurs propres coïncident. Il résulte du principe de q-développement et des relations entre coefficients et valeurs propres (*cf* le lemme ci-dessous).

Soit $f \in S_k(K_1(\mathfrak{n}); \mathbb{C})$. D'après (I.9) on peut associer à f une famille de formes $f_i \in S_k(\Gamma_1(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n}); \mathbb{C})$, où les $\mathfrak{c}_i$ sont des représentants du groupe de classes strictes Cl_F^+ de F.

Chaque forme f_i est déterminée par son q-développement en la pointe ∞ de $M_1(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n})^{\mathrm{an}}$. Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ on pose $c(f, \mathfrak{a}) = \xi^m a_\xi(f_i)$, où $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}_i\, \xi$, avec $\xi \in F_+^\times$. D'après le (I.7), pour tout $\epsilon \in \mathfrak{o}_+^\times$, on a $a_{\epsilon\xi} = \epsilon^{k+m-t} a_\xi$ et donc la définition de $c(f, \mathfrak{a})$ ne dépend pas du choix particulier de ξ (ni du choix particulier des idéaux $\mathfrak{c}_i$; voir [**30**] IV.4.2.9.).

LEMME 4.2. ([**34**] Prop.4.1, [**30**] (4.64)) *Si $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ est propre et normalisée, alors ses valeurs propres $\theta_f(T_\mathfrak{a})$ sont égales à ses coefficients de Fourier $c(f, \mathfrak{a})$.*

4.3. Formes modulaires ordinaires. Lorsque le poids k n'est pas parallèle, il faut modifier légèrement la définition des opérateurs de Hecke. On pose $T_{0,v} = \varpi_v^{-m} T_v$ et $S_{0,v} = \varpi_v^{-2m} T_v$ (*cf* [**34**] Sect.3 ; nous nous placerons toujours sur un anneau p-adiques assez grand $\mathcal{O}$ qui satisfait les hypothèses mentionnées dans cette référence).

L'intérêt des opérateurs $T_{0,v}$ et $S_{0,v}$ apparaîtra quand nous étudierons l'algèbre de Hecke à coefficients dans $\mathcal{O}$, parce qu'ils préservent de manière optimale les structures entières sur les formes modulaires de Hilbert et sur la cohomologie.

DÉFINITION 4.3. Une forme modulaire de Hilbert propre et normalisée f est dite *ordinaire en p* si ses valeurs propres pour les opérateurs $T_{0,\mathfrak{p}}$ sont des unités p-adiques, pour tout $\mathfrak{p}$ divisant p,.

4.4. Formes modulaires primitives. Pour tout $\mathfrak{n}_1$ divisant $\mathfrak{n}$ et divisible par le conducteur de ψ, et pour tout $\mathfrak{n}_2$ divisant $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1^{-1}$ on considère l'application linéaire

$$S_k(\mathfrak{n}_1, \psi) \to S_k(\mathfrak{n}, \psi), \quad g \mapsto g|\,\mathfrak{n}_2,$$

où $g|\,\mathfrak{n}_2$ est déterminée par la relation $c(g|\,\mathfrak{n}_2, \mathfrak{a}) = c(g, \mathfrak{a}\,\mathfrak{n}_2^{-1})$.

On définit le sous-espace $S_k^{\mathrm{old}}(\mathfrak{n}, \psi)$ de $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ comme le sous-espace vectoriel engendré par les images de toutes ces applications linéaires. Cet espace est stable par les opérateurs de Hecke en dehors de $\mathfrak{n}$. L'espace $S_k^{\mathrm{new}}(\mathfrak{n}, \psi)$ des formes *nouvelles* ou *primitive* est défini comme l'orthogonal pour le produit de Petersson de $S_k^{\mathrm{old}}(\mathfrak{n}, \psi)$ dans $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$. Puisque les opérateurs de Hecke en dehors de $\mathfrak{n}$ sont normaux pour le produit de Petersson, la décomposition en somme directe $S_k(\mathfrak{n}, \psi) = S_k^{\mathrm{new}}(\mathfrak{n}, \psi) \oplus S_k^{\mathrm{old}}(\mathfrak{n}, \psi)$ est stable par $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^0$. Le Théorème de Multiplicité Un Fort, dû à Miyake pour les formes de Hilbert, dit que si une forme $f \in S_k^{\mathrm{new}}(\mathfrak{n}, \psi)$ est propre pour $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^0$, alors elle est propre pour $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$.

On sait par [**34**] Thm.5.2 que l'accouplement $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \times S_k(\mathfrak{n}, \psi) \to \mathbb{C}$, $(T, g) \mapsto c(g|T, \mathfrak{o})$ est une dualité parfaite.

4.5. Groupe de Weyl. Puisque $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$, on a $K_\infty = (F \otimes \mathbb{R})^\times \mathrm{O}_2(F \otimes \mathbb{R})$ et $K_\infty^+ = (F \otimes \mathbb{R})^\times \mathrm{SO}_2(F \otimes \mathbb{R})$. On identifie $\{\pm 1\}^{J_F}$ et le groupe de Weyl K_∞ / K_∞^+ de G, en envoyant pour toute partie J de J_F l'élément $\epsilon_J = (-1_J, 1_{J_F \setminus J})$ sur $c_J K_\infty^+$, où pour tout $\tau \in J_F$, $\mathrm{Det}(c_{J,\tau}) < 0$ si et seulement si $\tau \in J$. Notons que $\mathrm{card}(J) = \mathrm{long}(\epsilon_J)$.

Le groupe de Weyl agit sur l'espace des formes modulaires de Hilbert. En effet, pour toute partie J de J_F la double classe $[K c_J K]$ envoie bijectivement $S_k(K; \mathbb{C})$ sur $S_{k, J_F \setminus J}(K; \mathbb{C})$. Cette action commute à l'action des opérateurs de Hecke.

On pose $f_J = \epsilon_{J_F \setminus J} \cdot f$.

5. Isomorphisme d'Eichler-Shimura-Harder.

Dans toute cette partie $G = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathrm{GL}_2$. L'isomorphisme d'Eichler-Shimura-Harder permet de relier l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des formes de Hilbert cuspidales avec celle sur la cohomologie cuspidale de la variété de Hilbert.

On rappelle que $\mathcal{O}$ désigne un anneau p-adique assez grand. Pour toute $\mathcal{O}$-algèbre R, $V_n(R)$ désigne le R-module des polynômes en les variables $(X_\tau, Y_\tau)_{\tau \in J_F}$ qui sont homogènes de degré n_τ en chaque couple de variables (X_τ, Y_τ). On a un accouplement (parfait si $n_0!$ est inversible dans R) :

(I.11) $$\langle \quad , \quad \rangle : V_n(R) \times V_n(R) \to R, \text{ défini par}$$

$$\left\langle \sum_{0 \le j \le n} a_j X^{n-j} Y^j, \sum_{0 \le j \le n} b_j X^{n-j} Y^j \right\rangle = \sum_{0 \le j \le n} (-1)^j a_j b_{n-j} \binom{n}{j} \text{ ,où } \binom{n}{j} = \prod_{\tau \in J_F} \binom{n_\tau}{j_\tau}.$$

La matrice Θ_n de cet accouplement dans la base canonique de $V_n(R)$ est caractérisée par la propriété suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{bmatrix}^{n_\tau} \right)^t \Theta_n \left(\begin{bmatrix} z_\tau \\ t_\tau \end{bmatrix}^{n_\tau} \right) = \prod_\tau \begin{vmatrix} x_\tau & z_\tau \\ y_\tau & t_\tau \end{vmatrix}^{n_\tau}$$

On munit le R-module $V_n(R)$ d'une action de $(M_2(\mathcal{O})\cap \mathrm{GL}_2(E))^{J_F}$ donnée par

$$\gamma\cdot P((X_\tau,Y_\tau)_{\tau\in J_F})=\nu(\gamma)^m P((\det(\gamma)\gamma^{-1})^t(X_\tau,Y_\tau)_{\tau\in J_F}).$$

Le R-module $V_n(R)$ réalise la représentation $V_n=\bigotimes_\tau(\mathrm{Sym}^{n_\tau}\otimes \mathrm{Det}^{m_\tau})$ du groupe algébrique G. Comme le poids $n+2m=n_0t$ est parallèle, le groupe $\mathfrak{o}_+^\times$ agit trivialement.

On note $\mathbb{V}_n^{\mathrm{an}}(R)$ le faisceau des sections continues (donc localement constantes) de

$$G(\mathbb{Q})\backslash(G(\mathbb{A})\times V_n(R))/K_1(\mathfrak{n})K_\infty^+\to G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_1(\mathfrak{n})K_\infty^+=Y^{\mathrm{an}}.$$

Remarque 5.1. Considérons le revêtement universel $\mathfrak{H}_F\to M^{\mathrm{an}}$. Il est bien connu, que l'on a une équivalence de catégories entre les représentations V de Γ sur des L-vectoriels de dimension finie, qui sont triviales sur le centre, et les systèmes locaux en L-vectoriels $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$ sur M^{an}, qui a un tel K-vectoriel de dimension finie V associe le faisceau des sections continues de $\Gamma\backslash(\mathfrak{H}_F\times V)\to M^{\mathrm{an}}$ (V étant muni de la topologie discrète).

Pour tout $y\in\Delta(\mathfrak{n})$ l'application $[y]:G(\mathbb{A})\times V_n(R)\to G(\mathbb{A})\times V_n(R)$, $(x,v)\mapsto(xy,y_p\cdot v)$ induit une action de l'opérateur de Hecke $[K_1(\mathfrak{n})yK_1(\mathfrak{n})]$ sur la cohomologie $\mathrm{H}^\bullet(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))$ qui préserve la cohomologie cuspidale $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{cusp}}(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))$.

Par les travaux de Harder [**29**], on sait qu'en degré médian la cohomologie cuspidale $\mathrm{H}^d_{\mathrm{cusp}}(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))$ coïncide avec la cohomologie parabolique $\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))$, dès que $n\neq 0$.

L'accouplement (I.11) donne un accouplement de Poincaré

$$\langle\ \ ,\ \ \rangle:\mathrm{H}^d(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))\times\mathrm{H}^d_c(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))\to R.$$

Soit η l'idèle correspondant à l'idéal $\mathfrak{n}$ et notons $\iota=\begin{pmatrix}0&1\\-\eta&0\end{pmatrix}$ l'involution d'Atkin-Lehner. On tord l'accouplement de Poincaré en posant $[x,y]=\langle x,\iota y\rangle$ et on obtient ainsi un accouplement

$$[\ \ ,\ \ ]:\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))\times\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R))\to R, \tag{I.12}$$

qui est Hecke équivariant, c'est à dire pour tout opérateur T de Hecke on a $[Tx,y]=[x,Ty]$.

Pour $J\subset J_F$ on pose $dz^J=\bigwedge_{\tau\in J}dz_\tau\wedge\bigwedge_{\tau\in J_F\backslash J}d\overline{z}_\tau$ et

$$\eta_n^J(z)=\prod_{\tau\in J}\eta_{n_\tau}(z_\tau)\prod_{\tau\in J_F\backslash J}\eta_{n_\tau}(\overline{z}_\tau)\ ,\text{ où }\eta_{n_\tau}(z_\tau)=\sum_{j=0}^{n_\tau}(-z_\tau)^jX^{n_\tau-j}Y^j.$$

Pour $g\in S_{k,J}(\mathfrak{n},\psi)$, on pose $\delta(g)=g(z)\eta_n^J(z)dz^J$.

Théorème 5.2. (Hida, [**35**]) *Si $n\neq 0$, l'application δ induit un isomorphisme Hecke équivariant :*

$$\delta:\bigoplus_\psi\bigoplus_{J\subset J_F}S_{k,J}(\mathfrak{n},\psi)\cong\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}},\mathbb{V}_n(R)), \tag{I.13}$$

où ψ décrit tous les caractères de Hecke de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type $-n_0t$ à l'infini.

Notons que $\mathrm{GL}_2(F\otimes\mathbb{R})/(F\otimes\mathbb{R})^\times\cdot\mathrm{O}_2(F\otimes\mathbb{R})\cong\mathfrak{H}_F$. Par cette identification on a $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot z=-\overline{z}$. Le groupe de Weyl $\{\pm1\}^{J_F}$ (*cf* §.4.5) agit donc sur $(M^{\mathrm{an}},\mathbb{V}^{\mathrm{an}})$ de la manière suivante : si $J\subset J_F$ et $z=(z_J,z_{J_F\backslash J})\in\mathfrak{H}_F$, alors $\epsilon_J\cdot(z,v)=((-\overline{z}_J,z_{J_F\backslash J}),v)$. Cette action induit une action du groupe de Weyl sur la cohomologie.

Pour tout $J \subset J_F$ notons $\widehat{\epsilon}_J : \{\pm 1\}^{J_F} \to \{\pm 1\}$ l'unique caractère qui envoie $\epsilon_\tau = (-1_\tau, 1^\tau)$ sur 1, si $\tau \in J$, et sur -1 si $\tau \in J_F \backslash J$. La projection de $S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$, via l'isomorphisme (I.14), sur la $(\psi, \widehat{\epsilon}_J)$-partie de la cohomologie induit un isomorphisme

$$\delta_J : S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi) \cong \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(R))[\psi, \widehat{\epsilon}_J]. \tag{I.14}$$

Nous donnons ici aussi une version sur $\mathbb{R}$, analogue à l'isomorphisme d'Eichler-Shimura classique (*cf* [**31**]). Il ne sera pas utilisé dans la suite. Fixons une place infinie τ_0 de F.

Corollaire 5.3. *Si $n \neq 0$, l'application* $\mathrm{Re}(\delta)$ *induit un isomorphisme Hecke équivariant:*

$$\mathrm{Re}(\delta) : \bigoplus_{\psi} \bigoplus_{\tau_0 \in J \subset J_F} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi) \cong \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(R)),$$

où ψ décrit tous les caractères de Hecke de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type $-n_0 t$ à l'infini.

Démonstration : Tout élément de $\underset{J \subset J_F}{\oplus} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$ peut s'écrire sous la forme $f + \overline{g}$ avec $f, g \in \underset{\tau_0 \in J \subset J_F}{\oplus} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$. Or pour tout $f \in \underset{J \subset J_F}{\oplus} S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$ on a $\mathrm{Re}(\delta(\overline{f})) = \mathrm{Re}(\overline{\delta(f)}) = \mathrm{Re}(\delta(f))$ et donc l'application $\mathrm{Re}(\delta)$ est surjective par le théorème précédent. D'où l'isomorphisme par comparaison de dimensions. □

6. Compactifications toroïdales analytiques.

Références : [**1**][**44**].

On a vu qu'en ajoutant à M^{an} un nombre fini de points (les Γ-pointes) on obtient un espace analytique $M^{\mathrm{an}\,*}$, compact pour la topologie de Satake. L'espace $M^{\mathrm{an}\,*}$ est aussi appelé compactification minimale et il n'est jamais lisse lorsque $d_F > 1$, comme le montre un argument de topologie (*cf* [**24**]).

Un voisinage typique de la pointe ∞ dans M^{an} est de la forme $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash q(D_H) \subset \mathfrak{o}_\infty^\times \backslash \mathbb{C}^{\times d}$. On aurait pu tenter de compactifier cette pointe en considérant l'adhérence de $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash q(D_H)$ dans $\mathfrak{o}_\infty^\times \backslash \mathbb{C}^d$. Le problème est que si $d_F > 1$ le quotient de $\mathbb{C}^d$ par un groupe abélien, ayant des points fixes isolés, n'est jamais lisse (*cf* [**24**] p.30).

Il est important de disposer de compactifications lisses de M^{an} avec diviseurs à croisements normaux à l'infini (*i.e.* au-dessus des pointes). Par exemple, pour pouvoir donner une décomposition de Hodge de la cohomologie singulière de M^{an}, on doit introduire des faisceaux cohérents à singularités logarithmiques à l'infini. Pour obtenir une compactification lisse de M^{an}, on utilise la théorie des immersions toroïdales, s'inspirant du fait qu'au voisinage d'une pointe, M^{an} ressemble au quotient d'un tore par l'action d'un groupe.

6.1. Immersions toriques. Dans ce paragraphe on adopte les notations suivantes :

k corps algébriquement clos.

$S \cong \mathbb{G}_m^d$ tore algébrique sur k.

$X = \mathrm{Hom}(S, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \cong \mathbb{Z}^d$ groupe des caractères de S. Pour $\xi \in X$ on notera q^ξ le caractère correspondant.

$X^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, S) \cong \mathbb{Z}^d$ groupe des cocaractères de S. Pour $\xi^* \in X^*$ on notera λ_{ξ^*} le cocaractère correspondant.

On a un accouplement parfait $\langle \ , \ \rangle : X \times X^* \to \mathbb{Z}$.

Pour tout anneau commutatif R et tout monoïde Q, on notera $R[q^\xi; \xi \in Q]$ la R-algèbre du monoïde.

On a $S = \mathrm{Spec}\,\big(k[q^\xi; \xi \in X]\big)$ et $S = \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^*$.

REMARQUE 6.1. Si $k = \mathbb{C}$ on peut identifier $\mathbb{C}\,/\,\mathbb{Z}$ et $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ par l'application $e^{2i\pi\cdot}$ et on a
(i) $X^* \cong \pi_1^{\mathrm{top}}(S)$.
(ii) $X^*_\mathbb{C} = X^* \otimes \mathbb{C}$ revêtement universel de S.
(iii) $S \cong X^*_\mathbb{C}/X^* = S_c \times iX^*_\mathbb{R}$, où $S_c \cong X^*_\mathbb{R}/X^*$ est le sous-groupe compact maximal de S. On appelle ord : $S \to X^*_\mathbb{R}$ l'application déduite de la projection sur $iX^*_\mathbb{R}$.

DÉFINITION 6.2. Une immersion torique normale (affine) de S, est une immersion ouverte de S dans une variété (=schéma intègre de type fini, séparé sur k) normale (affine) munie d'une action de S qui étend l'action de S sur lui-même.

Dans la suite, on ne considérera que des cônes polyédraux rationnels convexes de $X^*_\mathbb{R}$, ouverts dans l'espace vectoriel qu'ils engendrent et stricts (i.e. qui ne contiennent pas de droite); on abrégera ces propriétés en parlant de cônes p.r.c.o.s. Un tel cône σ est dit *lisse*, si $\overline{\sigma} \cap X^*$ est engendré par une partie d'une base de X^*.

THÉORÈME 6.3. ([**44**] Chap.I, Théorème 1') *La correspondance :*

$$\sigma \mapsto S_\sigma := \mathrm{Spec}\ k[q^\xi; \xi \in X \cap \check{\sigma}]$$

donne une bijection entre l'ensemble des cônes p.r.c.o.s. de $X^*_\mathbb{R}$ *et l'ensemble des immersions toriques normales affines de* S*. De plus* S_σ *est lisse, si et seulement si, le cône* σ *est lisse.*

EXEMPLE 6.4. Voici trois exemples d'immersions torique pour $S = {\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2$:
• $\overline{\sigma_1} = (1,0)\,\mathbb{R}_+ + (0,1)\,\mathbb{R}_+$, donne ${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1,Z_2]) \cong \mathbb{A}^2$.
• $\overline{\sigma_2} = (1,0)\,\mathbb{R}_+$, donne ${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1,Z_2,Z_2^{-1}]) \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{G}_\mathrm{m}$.
• $\overline{\sigma_3} = (1,1)\,\mathbb{R}_+ + (1,-1)\,\mathbb{R}_+$, donne
${\mathbb{G}_\mathrm{m}}^2 \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[Z_1Z_2, Z_1, Z_1Z_2^{-1}]) \cong \mathrm{Spec}(k[Z_1,Z_2,Z_3]/(Z_1Z_3 - Z_2^2))$.

PROPOSITION 6.5. ([**44**] Chap.I, Théorème 3) *Soient* S_{σ_1} *et* S_{σ_2} *deux immersions toriques normales affines de* S*. Alors, il existe un morphisme* S*-équivariant* $S_{\sigma_1} \to S_{\sigma_2}$*, si et seulement si* $\sigma_1 \subset \overline{\sigma_2}$*.*

On veut maintenant décrire le bord de S_σ : il est stratifié en orbites sous S de points à l'infini obtenus comme des limites "$\lim_{t\to 0} \lambda_{\xi^*}(t)$", pour $\xi^* \in X^* \cap \overline{\sigma}$. De manière rigoureuse, pour tout $\xi^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$, on définit le point $\lambda_{\xi^*}(0) \in S_\sigma$, par :

$$\forall \xi \in X \cap \check{\sigma},\ \ q^\xi(\lambda_{\xi^*}(0)) = \begin{cases} 1, \text{ si } \langle \xi, \xi^* \rangle = 0 \\ 0, \text{ si } \langle \xi, \xi^* \rangle > 0 \end{cases} .$$

THÉORÈME 6.6. ([**44**] Chap.I, Théorème 2)
(a) *Soient* $\xi_1^*, \xi_2^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$*. Alors* $\lambda_{\xi_1^*}(0) = \lambda_{\xi_2^*}(0)$*, si et seulement si* ξ_1^* *et* ξ_2^* *appartiennent à l'intérieur d'une même face de* σ*.*
(b) *Chaque* S*-orbite de* S_σ *contient un unique point du type* $\lambda_{\xi^*}(0)$*,* $\xi^* \in \overline{\sigma} \cap X^*$*.*
(c) *On a une bijection entre les faces de* σ *et les* S*-orbites de* S_σ*,* $\tau \mapsto o(\tau)$*.*
(d) $\tau_1 \subset \overline{\tau_2}$ *si et seulement si* $o(\tau_2) \subset \overline{o(\tau_1)}$*.*
(e) $\dim(\tau) + \dim(o(\tau)) = d$*.*

Soit une face τ de σ. On a $o(\tau) = \mathrm{Spec}\left(k[q^\xi; \xi \in X \cap \tau^\perp]\right)$ et $\overline{o(\tau)} = \coprod_{\tau \subset \overline{\tau'}} o(\tau')$. La strate $o(\tau)$ est fermée dans S_τ (donnée par l'idéal engendré par les q^ξ tels que $\langle \xi, \xi^* \rangle > 0$ pour tout ξ^* à l'intérieur de τ) et S_τ est ouverte dans S_σ. De plus les strates de S_σ contenues dans S_τ sont les strates de S_τ.

DÉFINITION 6.7. Un *éventail* dans $X^*_{\mathbb{R}}$ (= décomposition rationnelle partielle en cônes polyédraux fortement convexes), est la donnée d'un ensemble Σ de cônes p.r.c.o.s. de $X^*_{\mathbb{R}}$ deux à deux disjoints, tel que pour tout $\sigma \in \Sigma$ et pour toute face τ de σ, $\tau \in \Sigma$. L'éventail est dit lisse si tout les cônes qu'il contient sont lisses.

Tout éventail peut être raffiné en un éventail lisse, par subdivision des cônes. D'après la proposition 6.5, étant donné un éventail Σ, on peut recoller les S_{σ_i}, $i = 1, 2$, le long des S_τ, τ désignant l'intérieur de $\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2$, et ainsi obtenir un schéma séparé, normal, intègre, *localement* de type fini sur k, noté S_Σ ou $S_{\{\sigma\}}$. Si Σ est fini, S_Σ est une variété.

THÉORÈME 6.8. ([**44**] Chap.I, Théorème 6)
(a) *L'application $\Sigma \mapsto S_\Sigma$ donne une bijection entre les éventails de $X^*_{\mathbb{R}}$ et les immersions toriques normales de S.*
(b) *L'application $\sigma \mapsto S_\sigma$ donne une bijection entre les faces σ et les ouverts affines S-invariants de S_Σ.*
(c) *L'application $\sigma \mapsto O^\sigma :=$ l'unique orbite fermée de S_σ, est une bijection entre les faces σ et les S-orbites de S_Σ. De plus $\tau \subset \overline{\sigma}$, si et seulement si, $O^\sigma \subset \overline{O^\tau}$.*

PROPOSITION 6.9. ([**44**] Chap.I, Théorèmes 7 et 8) *Soient S_Σ et $S_{\Sigma'}$ deux immersions toriques normales de S. Alors, il existe un morphisme S-équivariant $S_\Sigma \to S_{\Sigma'}$, si et seulement si, $\Sigma \subset \Sigma'$. De plus la flèche $S_\Sigma \to S_{\Sigma'}$ est propre, si et seulement si, $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} \sigma$.*

REMARQUE 6.10. Si k est un anneau (en particulier si $k = \mathbb{Z}$) la construction qui à Σ associe S_Σ reste inchangée. En revanche, on n'obtient pas toutes les immersions toriques de cette manière-là.

6.2. Carte locale pour une pointe de M^{an}. Soit une Γ-pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty$. On a vu dans le paragraphe 3.3 qu'un système de voisinages de $\mathcal{C}$ dans M^{an} est donné, pour $H > 0$, par les $B_{\Gamma,\mathcal{C}} \backslash \gamma W_H \cong \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \backslash D_{\gamma,H}$, où $D_{\gamma,H} = \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap U_{\mathbb{R}} \backslash W_H = X^* \backslash W_H$ et où l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ sur $D_{\gamma,H}$ est donnée par $(u, \epsilon) \cdot z = \phi(u^2\epsilon)z + \phi(u\xi^*_{u,\epsilon})$ (*cf* §.3.3).

Notons qu'avec les notations de la remarque 6.1, on a $X^*_{\mathbb{R}} = F \otimes \mathbb{R}$, $S_{\mathcal{C}} \underset{q}{\overset{\sim}{\leftarrow}} \phi(X^*) \backslash F \otimes \mathbb{C}$, $S_{\mathcal{C},c} \underset{q}{\overset{\sim}{\leftarrow}} F \otimes \mathbb{R} / \phi(X^*)$ et $\mathrm{ord} : \phi(X^*) \backslash F \otimes \mathbb{C} \to F \otimes \mathbb{R}$ est l'application “partie imaginaire”. On a aussi $X^* \backslash \mathfrak{H}_F = \mathrm{ord}^{-1}((F \otimes \mathbb{R})_+)$ et $X^* \backslash W_H = \mathrm{ord}^{-1}\{y \in (F \otimes \mathbb{R})_+ \mid \prod_\tau y_\tau > H\}$.

L'exponentielle donne une injection $q : D_{\gamma,H} \hookrightarrow S_{\mathcal{C}}$ et l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ s'étend en une action sur le tore complexe $S_{\mathcal{C}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^*$ par $(u, \epsilon) \cdot q_z = q_z^{u^2\epsilon} q^u_{\xi^*_{u,\epsilon}}$.

L'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ sur $S_{\mathcal{C}}$ tout entier, n'est pas libre (l'élément unité de $S_{\mathcal{C}}$ reste fixe). Un autre problème est posé par le sous-groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^\times = \{(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \,|\, \epsilon = u^{-2}\}$ de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$.

LEMME 6.11. (i) *Le groupe $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^\times$ agit trivialement sur $S_{\mathcal{C}}$.*
(ii) *Sous l'hypothèse* **(NT)** *$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times / \mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^\times$ agit librement et discontinuement sur $q(D_{\gamma,H})$.*

Démonstration : Un calcul direct montre que si $\epsilon = u^{-2}$, alors $\xi^*_{u,\epsilon} \in X^*$, d'où le (i). Le (ii) découle du fait que sous l'hypothèse **(NT)** on a $-1 \notin \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$. □

On veut ajouter à $S_{\mathcal{C}}$ une frontière analytique $\mathcal{E}$ de façon que l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times / \mathfrak{o}_{\mathcal{C},Z}^\times$ sur $S_{\mathcal{C}}$ se prolonge en une action libre et discontinue sur $\mathcal{E}$. Le quotient par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ de l'adhérence $\overline{q(D_{\gamma,H})}$ de $q(D_{\gamma,H})$ dans $S_{\mathcal{C}} \cup \mathcal{E}$ sera la carte locale pour la compactification de la pointe $\mathcal{C}$.

Pour ce faire on considère un éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de $X^*_{\mathbb{R}+} = \{0\} \cup (F \otimes \mathbb{R})_+$ qui est complet (i.e. tel que $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = X^*_{\mathbb{R}+}$), stable pour l'action de $\mathfrak{o}^\times$ et qui contient un nombre fini d'éléments modulo cette action. L'existence d'une telle décomposition découle du théorème des unités de Dirichlet ($\mathfrak{o}^{\times 2} \cong \mathbb{Z}^{d-1}$). En effet, il suffit de décomposer en cellules

$$\phi(X^*) \cap \{y \in X^*_{\mathbb{R}+} \mid \prod_\tau y_\tau = \min_{\xi^* \in X^* \backslash \{0\}} \mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\xi^*)\} \xleftarrow[\exp]{\sim} \mathbb{Z}^{d-1}$$

et prendre chaque cellule comme base d'un cône. Quitte à raffiner notre décomposition (en subdivisant un cône et subdivisant les autres cônes de manière $\mathfrak{o}^\times$- équivariante) on peut supposer $\Sigma^{\mathcal{C}}$ lisse.

Soit $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ l'immersion torique correspondante, avec action équivariante de $\mathfrak{o}^\times$. Soit $\mathcal{E} = S_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \backslash S_{\mathcal{C}}$. Soit $\overline{q(D_{\gamma,H})}$ l'adhérence de $q(D_{\gamma,H})$ dans $S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$. On voit aisément

Proposition 6.12. (i) *On a* $\overline{q(D_{\gamma,H})} = q(D_{\gamma,H}) \cup \mathcal{E}$.

(ii) *Le groupe* $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},Z}$ *agit trivialement sur* $\overline{q(D_{\gamma,H})}$. *Le groupe* $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} / \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},Z}$ *agit librement et discontinument sur* $\overline{q(D_{\gamma,H})}$.

L'espace analytique $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \backslash \overline{q(D_{\gamma,H})}$ est la carte de la pointe $\mathcal{C}$. Pour compactifier la pointe $\mathcal{C}$ on recolle M^{an} et $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \backslash \overline{q(D_{\gamma,H})}$ le long de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \backslash D_{\gamma,H}$.

6.3. Recollement et compactification analytique. Soit $\overline{M^{\mathrm{an}}} = M^{\mathrm{an}}_\Sigma$ la variété analytique complexe obtenue, par la construction du paragraphe précédent, en recollant à M^{an} les cartes locales pour toutes les Γ-pointes. Dans la suite nous écrirons juste $\overline{M^{\mathrm{an}}}$, bien que tout dépend des éventails $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$.

Proposition 6.13. $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ *est une variété analytique complexe propre et lisse, contenant* M^{an} *comme sous-variété ouverte dense. On a un morphisme de variétés analytiques* $\pi : \overline{M^{\mathrm{an}}} \to M^{\mathrm{an}\,*}$ *qui est un isomorphisme au dessus de* M^{an}.

Démonstration : Pour démontrer la propreté de $\overline{M^{\mathrm{an}}}$ on utilise le critère de compacité séquentielle. Soit une suite de points $z_j \in \overline{M^{\mathrm{an}}}$. Comme M^{an} est ouvert dense dans $\overline{M^{\mathrm{an}}}$, il suffit de considérer le cas où $z_j \in M^{\mathrm{an}}$ (argument d'extraction diagonale). Puisque l'on sait déjà que $M^{\mathrm{an}\,*}$ est compact, on peut supposer que la suite $\pi(z_j)$ converge vers une pointe $\mathcal{C}$ de $M^{\mathrm{an}\,*}$. Dans ce cas, pour j assez grand, z_j appartient à $D_{\gamma,H}$. Comme $\Sigma^{\mathcal{C}}$ possède un nombre fini de cônes modulo l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$, on peut supposer qu'il existe un cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, tel que pour tout j, $q(z_j)$ appartient à $S_{\mathcal{C},\sigma}$.

Montrons alors qu'il existe une suite extraite de la suite $q(z_j)$ qui converge vers un point de $S_{\mathcal{C},\sigma}$. Considérons la suite $y_j = \mathrm{ord}(q(z_j)) \in \sigma$. On a $y_{j,\tau} > 0$ et $\lim_{j\to\infty} \prod_\tau y_{j,\tau} = \infty$. Si l'on décompose les y_j dans une base de σ, on trouve aisément qu'au moins une coordonnée tend vers $+\infty$. D'après la description de la topologie de $S_{\mathcal{C},\sigma}$, donnée dans [**1**], il est clair que l'on peut extraire de $q(z_j)$ une sous-suite convergente dans $S_{\mathcal{C},\sigma}$. $\square$

CHAPITRE II

Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert pour $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$

On garde les notations du début du chapitre I. Posons $\Delta = \mathrm{N}(\mathfrak{d}\mathfrak{n})$. Sous l'hypothèse **(NT)** de I.1.3, le groupe de congruences $\Gamma = \Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ est sans torsion et le problème de modules correspondant admet un espace grossier $M = M_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ qui est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma lisse en dehors de Δ. En outre, lorsque $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ le problème est représentable par un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma $M^1 = M_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$, lisse en dehors de Δ, et une VAHB universelle $\pi : \mathcal{A} \to M^1$ (*cf* §.3.1 pour la définition précise des espaces de modules).

Nous décrivons dans ce chapitre les compactifications arithmétiques toroïdales et minimale de la variété modulaire de Hilbert M, ainsi que les compactifications toroïdales des variétés de Kuga-Sato $\mathcal{A}^s$ (=produit fibré s-fois de $\mathcal{A}$ au-dessus de M^1).

Les principales références pour les compactifications de M sont les articles [**57**] de M. Rapoport et [**6**] de C.-L. Chai, où les compactifications toroïdales et minimale sont construites en niveau $\Gamma^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$, dans le cas où $\mathfrak{n}$ est un entier naturel. Par ailleurs, M. Rapoport explique comment on peut obtenir une compactification partielle de $M_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ aux pointes non-ramifiées. La contribution principale de ce chapitre est qu'il fournit les cartes locales servant à compactifier les pointes ramifiées. Une application immédiate est le "principe du q-développement" en ces pointes ramifiées.

Contrairement au cas analytique, la construction de la compactification minimale arithmétique utilise les compactifications toroïdales arithmétiques. Afin de construire ces dernières nous aurons à faire (en suivant [**57**]) plusieurs étapes préparatoires :

– rappel de la construction générale de variétés semi-abéliennes, donnée par D. Mumford dans le cas totalement dégénéré [**53**],

– étude de la notion de $(R,\mathfrak{n})$-pointe, qui est l'analogue algébrique de la Γ-pointe,

– construction des cartes locales pour les compactifications toroïdales arithmétiques,

– énoncé d'un résultat d'algébrisation de Rapoport et du théorème d'uniformisation des variétés abéliennes de Raynaud.

La référence pour les compactifications des variétés de Kuga-Sato est le livre de Faltings et Chai [**21**]. Les compactifications des variétés de Kuga-Sato au-dessus des compactifications toroïdales de la variété modulaire de Hilbert nous permettront d'étendre certains fibrés automorphes de M^1 à $\overline{M^1}$. Les fibrés ainsi construits descendent à M et $\overline{M}$. Dans le chapitre III nous verrons une application concernant la décomposition de Hodge-Tate de la cohomologie de ces fibrés.

1. Construction de VAHB dégénérantes.

1.1. La construction de Mumford. Soit R un anneau excellent, intégralement clos, noethérien, complet pour la topologie I-adique, pour un idéal radiciel $I = \sqrt{I}$. Soit K le corps des fractions de R. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$, η son point générique et $S_0 = \mathrm{Spec}(R/I)$ le sous-schéma fermé défini par I.

Définition 1.1. Un S-schéma en groupes commutatif, lisse et de type fini G est dit semi-abélien, si ses fibres géométriques sont des extensions d'une variété abélienne par un tore.

Considérons le tore déployé $\widetilde{G} = \mathbb{G}_m^r \times S$ de rang r sur S. Soit $\mathfrak{b}$ un sous-groupe discret polarisable de $\widetilde{G}(K)$. L'objet de cette section est d'esquisser la construction d'un schéma semi-abélien G/S, comme "quotient" de $\widetilde{G}$ par $\mathfrak{b}$. La stratégie est la suivante :

(i) Construire une "compactification" $\widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$ telle que l'action de $\mathfrak{b}$ s'étende à $\widetilde{P}$ et que $\mathfrak{b}$ agisse librement et discontinument sur $\widetilde{P} \underset{S}{\times} S_0$ (pour la topologie de Zariski).

(ii) Suivre les flèches du diagramme :
$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"] & \widetilde{P} & \widetilde{\mathfrak{P}} \arrow[l, "\text{complétion}"'] \arrow[d, "\text{quotient formel par } \mathfrak{b}"'] \\ G \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"] & P & \mathfrak{P} \arrow[l, "\text{algébrisation}"] \end{tikzcd}$$

(iii) Enfin, montrer que G est semi-abélien sur S, indépendant du choix de $\widetilde{P}$, que G_η est abélien, et que $G_0 = \widetilde{G}_0 = \mathbb{G}_m^r \times S_0$.

Périodes et polarisation. Soit $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}^r$ le groupe des caractères de $\widetilde{G}$. Pour $\alpha \in \mathfrak{a}$, notons $\mathfrak{X}^\alpha \in \Gamma(\widetilde{G}, \mathcal{O}_{\widetilde{G}})$ le caractère associé. Alors de manière canonique :
$$\widetilde{G} = \mathrm{Spec}(R[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}])$$

Définition 1.2. Un ensemble de *périodes* est un sous-groupe $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}(K)$ isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.

Définition 1.3. Une *polarisation* pour $\mathfrak{b}$ est un homomorphisme $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ tel que :
(i) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta') = \mathfrak{X}^{\phi(\beta')}(\beta)$, pour tout $\beta, \beta' \in \mathfrak{b}$,
(ii) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta) \in I$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}\backslash\{0\}$.

Lemme 1.4. *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, il existe $n \geq 1$ avec $\mathfrak{X}^{n\phi(\beta)+\alpha}(\beta) \in R$ pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$.*

Modèles relativement complets. Étant donné un ensemble de périodes $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}(K)$ muni d'une polarisation ϕ, Mumford donne la

Définition 1.5. Un *modèle relativement complet* de $\widetilde{G}$, par rapport à $(\mathfrak{b}, \phi)$, est la donné des éléments suivants :
(a) Un schéma intègre $\widetilde{P}$, localement de type fini sur R,
(b) Une immersion ouverte $i : \widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$,
(c) Un faisceau inversible $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{P}$,
(d) Une action du tore $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$, notée $S_g : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $S_g^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}$,
(e) Une action de $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$, notée $T_\beta : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $T_\beta^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$,
satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) Il existe un ouvert $\widetilde{G}$-invariant $U \subset \widetilde{P}$ de type fini sur S et tel que $\widetilde{P} = \cup_{\beta \in \mathfrak{b}} T_\beta(U)$.

(ii) Pour toute valuation v sur le corps des fonctions rationnelles sur $\widetilde{G}$ qui est positive sur R, on a : v a du centre sur $\widetilde{P} \iff$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, il existe $\beta \in \mathfrak{b}$ avec $v(\mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha) \geq 0$.

(iii) Les actions de $\widetilde{G}$ et $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{P}$ prolongent leurs actions par translation sur $\widetilde{G}_\eta$.

(iv) Les actions de $\widetilde{G}$ et $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ vérifient la condition de compatibilité suivante : $S_g^* T_\beta^* = \mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(g) T_\beta^* S_g^*$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$ et tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}$.

(v) $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{P}$, au sens que les compléments des lieux des zéros des sections globales $\Gamma(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$, $n \geq 1$, forment une base de la topologie de Zariski de $\widetilde{P}$.

Définition 1.6. Une *étoile* Σ est un sous-ensemble fini de $\mathfrak{a}$ tel que $0 \in \Sigma$, $\Sigma = -\Sigma$ et Σ contient une base de $\mathfrak{a}$.

Soit l'anneau gradué : $\mathcal{R} = \sum_{k=0}^{\infty} K[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}] \cdot \theta^k$.

On définit une action du groupe $\mathfrak{b}$ sur $\mathcal{R}$ par : $\begin{cases} T_\beta^*(c) = c, \text{ pour } c \in K, \\ T_\beta^*(\mathfrak{X}^\alpha) = \mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha, \text{ pour } \alpha \in \mathfrak{a}, \\ T_\beta^*(\theta) = \mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta)\mathfrak{X}^{2\phi(\beta)}\theta. \end{cases}$

Définition 1.7. Soit Σ une étoile de $\mathfrak{a}$; on note $R_{\phi,\Sigma}$ le sous anneau de $\mathcal{R}$ engendré sur R par les éléments $T_\beta^*(\mathfrak{X}^\alpha\theta)$ pour $\beta \in \mathfrak{b}$ et $\alpha \in \Sigma$, i.e. :

$$R_{\phi,\Sigma} = R[\mathfrak{X}^{\phi(\beta)+\alpha}(\beta)\mathfrak{X}^{2\phi(\beta)+\alpha}\theta]_{\beta \in \mathfrak{b}, \alpha \in \Sigma}.$$

D'après le lemme 1.4 on peut supposer, quitte à remplacer ϕ par $n\phi$, que $R_{\phi,\Sigma} \subset R[\mathfrak{X}^\alpha\theta]_{\alpha \in \mathfrak{a}}$.

On montre alors que $\mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$ est un modèle relativement complet pour $\widetilde{G}$. Comme $R_{\phi,\Sigma}$ est un anneau gradué engendré par ses éléments de degré 1, $\mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$ est muni d'un faisceau très ample inversible canonique, qui est le $\mathcal{O}(1)$.

On obtient ainsi le :

Théorème 1.8. *(Mumford* [**53**]*) Soit $\widetilde{G}$ un tore déployé sur S, $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}(K)$ un groupe de périodes et $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ une polarisation. Alors, pour toute étoile Σ de $\mathfrak{a}$, quitte à remplacer ϕ par $n\phi$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$), $\widetilde{P} = \mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$, muni de son faisceau canonique $\mathcal{O}(1)$, est un modèle relativement complet pour $\widetilde{G}$ sur S, par rapport à $(\mathfrak{b}, 2\phi)$.*

On remarque que $\widetilde{G}_\eta = \widetilde{P}_\eta$.

La construction du quotient procède en deux temps : Mumford forme d'abord le quotient $\mathfrak{P}$ du complété formel de $\widetilde{P}$ le long du bord, par $\mathfrak{b}$. Ce quotient est un schéma formel propre et de type fini, donc s'algébrise en un schéma propre de type fini noté P.

Considérons l'ouvert $\bigcup_{\beta \in \mathfrak{b}} T_\beta(\widetilde{G}) \subset \widetilde{P}$. Soit $\widetilde{B} = \widetilde{P} - \bigcup_{\beta \in \mathfrak{b}} T_\beta(\widetilde{G})$ le sous-schéma réduit, et $\mathfrak{b}$ le quotient par $\mathfrak{b}$ de son complété formel. C'est la complétion formelle d'un sous-schéma réduit $B \subset P$. Posons $G = P \backslash B$. Par construction les complétions I-adiques de G et $\widetilde{G}$ sont canoniquement isomorphes.

Théorème 1.9. *(Mumford* [**53**]*)Le schéma G/S est semi-abélien, G_η est une variété abélienne et G_0 est un tore déployé de rang r. Le schéma G/S ne dépend que du tore $\widetilde{G}$ et du groupe de périodes $\mathfrak{b}$, et il est indépendant de la fonction de polarisation ϕ et du modèle relativement complet $\widetilde{P}$. La construction de G/S est fonctorielle en $\widetilde{G}/S$ et en $\mathfrak{b}$.*

1.2. Construction de VAHB dégénérantes. On applique la construction de Mumford pour construire des variétés abéliennes de Hilbert-Blumenthal dégénérantes (*cf* I.3.1).

Soit X un idéal fractionnaire de F, muni de sa positivité $X_+ = X \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

L'anneau de base $\overline{S}_\sigma$. Soit $R = \mathbb{Z}[q^\xi; \xi \in X]$.

Soit $S = \mathrm{Spec}(R) = \mathbb{G}_m \otimes X^*$ le tore sur $\mathbb{Z}$ de groupe de caractères X.

Soit Σ un éventail lisse complet de $X^*_{\mathbb{R}+}$ et soit $S \hookrightarrow S_\Sigma$, l'immersion torique associée. On rappelle qu'elle est obtenue en recollant, pour $\sigma \in \Sigma$, les immersions toriques affines $S \hookrightarrow S_\sigma = \mathrm{Spec}\, R_\sigma$, où $R_\sigma = \mathbb{Z}[q^\xi; \xi \in X \cap \check{\sigma}]$. Soit $S_\sigma^\wedge$ le complété de S_σ le long de $S_\sigma^\infty := S_\sigma \backslash S$ et $S_\Sigma^\wedge$ le complété de S_Σ le long de $S_\Sigma^\infty := S_\Sigma \backslash S$.

Pour écrire les choses plus explicitement, donnons nous une base $\xi_1^*,..,\xi_r^*$ de σ que l'on complète en une base $\xi_1^*,..,\xi_d^*$ de X^*. Soit $\xi_1,..,\xi_d$ la base duale de X et posons $Z_i = q^{\xi_i}$. Alors $R_\sigma = \mathbb{Z}[Z_1,..,Z_r, Z_{r+1}^\pm Z_d^\pm]$ et S_σ^∞ est le diviseur à croisements normaux de S_σ défini par l'équation $Z_1...Z_r = 0$.

On a $S_\sigma^\wedge = \mathrm{Spf}(R_\sigma^\wedge)$, où $R_\sigma^\wedge$ est le complété de R_σ en l'idéal principal radiciel $(Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_r)$.

Pour décrire ce complété, on décompose tout $\underline{n} = (n_1,..,n_d) \in \mathbb{Z}^d$ en $(\underline{n}', \underline{n}'') \in \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^{d-r}$. Disons qu'une série de Laurent formelle $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} Z_1^{n_1}...Z_d^{n_d}$ à coefficients $c_{\underline{n}} \in \mathbb{Z}$ est $(Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_r)$-entière si

(i) pour tout $\underline{n}''$, $c_{\underline{n}',\underline{n}''} = 0$, si $\underline{n}' \notin \mathbb{N}^r$,

(ii) pour tout $H \geq 1$ on a $c_{\underline{n}',\underline{n}''} = 0$, pour presque tout $(\underline{n}', \underline{n}'') \notin [H, \infty[^r \times \mathbb{Z}^{d-r}$.

Le complété $R_\sigma^\wedge$ s'identifie alors à l'ensemble des séries $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} Z_1^{n_1}...Z_d^{n_d}$ qui sont $(Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_r)$-entières. C'est un anneau normal.

On voit ainsi que $R_\sigma^\wedge$ est aussi le complété de R_σ par rapport à la topologie suivante

$$q^{\xi_i} \to 0 \iff \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi_i \xi^*) \to +\infty, \ \forall \xi^* \in \sigma. \tag{II.1}$$

L'anneau de base sur lequel nous effectuons la construction de Mumford est ici $R_\sigma^\wedge$. Soit $\overline{S}_\sigma = \mathrm{Spec}(R_\sigma^\wedge)$ et posons $\overline{S}_\sigma^0 = S \underset{S_\sigma}{\times} \overline{S}_\sigma = \mathrm{Spec}(R_\sigma^\wedge \otimes_{R_\sigma} R)$. C'est l'ouvert de $\overline{S}_\sigma$ obtenu en rendant inversible q^ξ pour tout élément ξ de $X \cap \check{\sigma}^0$ (où $\check{\sigma}^0$ désigne l'intérieur du cône $\check{\sigma}$). Soit $\overline{S}_{\sigma 0} := \overline{S}_\sigma \backslash \overline{S}_\sigma^0$ muni de la structure réduite. Si $\sigma' \subset \sigma$, on a une flèche $\overline{S}_{\sigma'} \to \overline{S}_\sigma$.

Le tore $\widetilde{G}$. Soit $\mathfrak{a}$ ($=P^*$ dans les notations de Rapoport [**57**]) un idéal de notre corps de nombres totalement réel F et soit $\widetilde{G} := (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*) \times \overline{S}_\sigma$ le $\overline{S}_\sigma$-tore de groupe des caractères $\mathfrak{a}$. Explicitement : $\widetilde{G} = \mathrm{Spec}\,(R_\sigma^\wedge[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}])$.

L'ensemble des périodes $\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{b}$ ($=N$ dans les notations de Rapoport [**57**]) un idéal fractionnaire de F, tel que

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{c} \ \text{ et } \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset X$$

Pour chaque $\beta \in \mathfrak{b}$ on définit un $\overline{S}_\sigma^0$-point de $\widetilde{G}$, par le morphisme

$$R_\sigma^\wedge[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}] \to R_\sigma^\wedge \otimes_{R_\sigma} R, \ \ \mathfrak{X}^\alpha \mapsto q^{\alpha\beta}.$$

Ceci définit un homomorphisme $\mathfrak{o}$-équivariant de $\overline{S}_\sigma^0$-schémas en groupes $q : \mathfrak{b} \to \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^* = \widetilde{G}$, (où $\mathfrak{b}$ désigne le schéma en groupes constant).

La polarisation ϕ. Se donner une polarisation $\mathfrak{o}$-linéaire $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ (*cf* Déf.1.3) revient à se donner un élément $[\phi] \in \mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

La construction de Mumford donne alors un schéma semi-abélien G_σ sur $\overline{S}_\sigma$.

Propriétés du schéma semi-abélien G_σ.

– La restriction de G_σ à $\overline{S}_\sigma^0$ est une VAHB, notée G_σ^0.

– Tout élément $[\phi] \in \mathfrak{c}$ donne une flèche naturelle $\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^* \to \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{b}^*$, d'où, par fonctorialité de la construction, une flèche ϕ de la variété abélienne $G_\sigma^0 = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*)/q(\mathfrak{b})$ vers sa duale $(G_\sigma^0)^t = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{b}^*)/q(\mathfrak{a})$. Si $[\phi] \in \mathfrak{c}_+$ c'est une polarisation.

– Par le lemme du serpent, appliqué à la multiplication par $\mathfrak{n}$ dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*$, on trouve la $\mathfrak{n}$-torsion de G_σ^0 (qui est le sous-schéma en groupes réduit, intersection des noyaux des multiplications par les éléments de $\mathfrak{n}$) au milieu de la suite exacte :

$$1 \to (\mathfrak{a}\,/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to (G_\sigma^0)[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{b}\,/\,\mathfrak{b} \to 0 \tag{II.2}$$

– La restriction de G_σ à $\overline{S}_{\sigma 0}$ est égale au tore $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*) \times \overline{S}_{\sigma 0}$.

– La construction est fonctorielle en les $\sigma \in \Sigma$ et compatible avec l'action de $\mathfrak{o}^\times$, i.e. pour tout $\sigma' \subset \sigma$ et pour tout $u \in \mathfrak{o}^\times$ on a des diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd} G_{\sigma'} \arrow[r] \arrow[d] & G_\sigma \arrow[d] \\ \overline{S}_{\sigma'} \arrow[r] & \overline{S}_\sigma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\sigma \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G_{u^2\sigma} \arrow[d] \\ \overline{S}_\sigma \arrow[r, "\sim"] & \overline{S}_{u^2\sigma} \end{tikzcd}$$

2. R-pointes et $(R,\mathfrak{n})$-pointes.

Cette partie étudie la combinatoire des pointes d'une variété modulaire de Hilbert-Blumenthal en niveau $\Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ et servira à la construction de cartes locales pour des compactifications toroïdales. Cette étude a été déjà effectuée par Rapoport en niveau $\Gamma^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ et en niveau $\Gamma_1^1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ pour une pointe non-ramifiée, lorsque $\mathfrak{n}$ est un entier naturel (*cf* [**57**]). Par ailleurs, lorsque $F = \mathbb{Q}$, l'étude est faite par Deligne et Rapoport [**15**], en niveau $\Gamma(\mathfrak{n})$, et par Katz et Mazur [**42**] en général.

Fixons un idéal fractionnaire $\mathfrak{c}$, muni de sa positivité naturelle $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

Les objets combinatoires considérés dans cette partie sont inspirés par les structures de niveau des VAHB : une VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée complexe admet une uniformisation de la forme $F \otimes \mathbb{C}\,/L$, où L est un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2 tel que $\wedge_{\mathfrak{o}}^2 L = \mathfrak{c}^*$. Or, un tel réseau s'écrit $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$, avec $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires de F tels que $\mathfrak{a}^*\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^*$. La $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur une telle VAHB est donnée alors par un homomorphisme injectif de $\mathfrak{o}$-modules $\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}\,/\,\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\,L/L$. Or tout $\mathfrak{o}$-module projectif de rang 2 est isomorphe à un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2. La définition suivante est une variante de celle donnée par Rapoport dans le cas $D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$:

Définition 2.1. Une R-pointe $\mathcal{C}$ (resp. une classe d'isomorphisme de R-pointes) est une classe d'équivalence de sextuplets $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},L,i,j,\lambda)$, où

(i) $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux fractionnaires de F tels que $\mathfrak{a}^*\,\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^*$,

(ii) L est un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2 tel que l'on a une suite exacte $\mathfrak{o}$-modules

$$0 \to \mathfrak{a}^* \xrightarrow{i} L \xrightarrow{j} \mathfrak{b} \to 0,$$

(iii) $\lambda : \wedge_{\mathfrak{o}}^2 L \to \mathfrak{c}^*$ est un isomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire (polarisation),

pour la relation d'équivalence suivante : $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},L,i,j,\lambda)$ et $(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',L',i',j',\lambda')$ sont équivalents, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ (resp. $\mathfrak{a} = \xi\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} = \xi\mathfrak{b}'$ avec $\xi \in F$) et s'il existe un diagramme commutatif de $\mathfrak{o}$-modules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}^* \arrow[r, "i"] \arrow[d] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}'^* \arrow[r, "i'"] & L' \arrow[r, "j'"] & \mathfrak{b}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes et tel que l'isomorphisme $\wedge_{\mathfrak{o}}^2 L \cong \wedge_{\mathfrak{o}}^2 L'$ (déduit de $L \cong L'$) induise, via λ et λ', un automorphisme de $\mathfrak{c}^*$, donné par un élément de $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \mathfrak{o}_+^\times \cap D_{\mathbb{Q}}$.

L'application qui à une R-pointe $\mathcal{C} = (\mathfrak{a},\mathfrak{b},L,i,j,\lambda)$ associe l'idéal $\mathfrak{b}$ est une bijection entre l'ensemble des R-pointes et l'ensemble $\mathcal{I}_F$ des idéaux fractionnaires de F. En effet, par (i) la donnée de $\mathfrak{b}$ détermine $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, et deux suites exactes courtes (ii), correspondant au même idéal $\mathfrak{b}$, sont équivalentes, car toutes les deux sont scindées (il est facile de voir que l'on peut choisir un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-réseaux qui respecte la polarisation).

La notion d'isomorphisme de R-pointes correspond alors à celle d'homothétie des idéaux. On obtient par passage au quotient un isomorphisme entre les classes d'isomorphisme de R-pointes et le groupe Cl_F des classes d'idéaux de F.

Une R-pointe est déterminée par son $\mathfrak{o}$-réseau $L \subset F^2$ (en effet, la donnée d'un tel réseau détermine les idéaux $\mathfrak{a}^* := L \cap (\{0\} \times F)$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}$, et donc la suite exacte (ii), à équivalence près). Le groupe $G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}} := \{\gamma \in G_{\mathbb{Q}} | \nu(\gamma) \in \mathfrak{o}^{\times}\}$ agit transitivement sur ces réseaux. Le stabilisateur du réseau $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ dans $G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}$ est égal à $G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$. De plus, deux réseaux L et L' donnent la même R-pointe $\mathcal{C}$, si et seulement s'ils sont dans la même $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}$-orbite. Le diagramme commutatif suivant, traduit la correspondance entre les R-pointes et les pointes classiques dans $\mathbb{P}^1(F)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_F \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & R\text{-pointes} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\backslash G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}/G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash F^2 - \{0\}/\,\mathfrak{o}^{\times} \arrow[d] \\
\mathrm{Cl}_F \arrow[r, "\sim"] & R\text{-pointes/isom.} \arrow[r, "\sim"] & B_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{Q}}/G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "\sim"] & G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathbb{P}^1(F),
\end{tikzcd}$$

où pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}$ la double classe $B_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$ s'envoie d'une part sur $G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma\infty$ et d'autre part sur l'idéal $\mathfrak{b} = a\,\mathfrak{o} + c\,\mathfrak{c}^*$ (*cf* le lemme I.1.8).

Définition 2.2. (i) Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ (resp. une classe d'isomorphisme de $(R,\mathfrak{n})$-pointes) est la donnée d'une classe d'équivalence de paires formées d'un sextuplet $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},L,i,j,\lambda)$ (comme dans la définition 2.1) et d'un morphisme injectif de $\mathfrak{o}$-modules

$$\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}\,/\,\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\,L/L,$$

pour la relation d'équivalence suivante :

$\mathcal{C}$ est équivalent à $\mathcal{C}'$, s'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-modules $L \cong L'$ induisant une égalité (resp. un isomorphisme) des R-pointes sous-jacentes et dont la réduction modulo $\mathfrak{n}$ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}^{-1}\,L/L \arrow[rr, "\sim"] & & \mathfrak{n}^{-1}\,L'/L'. \\
& \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}\,/\,\mathfrak{d}^{-1} \arrow[ul, hook, "\alpha"] \arrow[ur, hook, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}$$

On associe à $\mathcal{C}$ l'idéal fractionnaire $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}'\,/\,\mathfrak{b} = j(\mathrm{Im}(\alpha))$.

(ii) Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe est dite *non-ramifiée* lorsque la flèche $\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}\,/\,\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\,L/L$ se factorise par la flèche naturelle $\mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{a}^*\,/\,\mathfrak{a}^* \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\,L/L$ (ou si de manière équivalente $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$).

(iii) Soit une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ et soit n l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\,\mathfrak{b}$. Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}'$ est dite appartenir à la même $(R,\mathfrak{n})$-*composante* que $\mathcal{C}$ (resp. à une $(R,\mathfrak{n})$-composante isomorphe), s'il existe $\overline{a} \in (\mathbb{Z}\,/n)^{\times}$ et un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-modules $L \cong L'$ induisant une égalité (resp. un isomorphisme) des R-pointes sous-jacentes et dont la réduction ψ modulo $\mathfrak{n}$ fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}^{-1}\,L/L \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & \mathfrak{n}^{-1}\,L/L \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & \mathfrak{n}^{-1}\,L'/L', \\
& \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1}\,/\,\mathfrak{d}^{-1} \arrow[ul, hook, "\alpha"] \arrow[ur, hook, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche φ est un automorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire de $\mathfrak{n}^{-1} L/L$, induisant l'identité sur $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^* / \mathfrak{a}^*$ et la multiplication par $\overline{a}$ sur $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b} / \mathfrak{b}$.

Soit y_0 tel que $\mathfrak{o} = \mathfrak{n} + y_0\,\mathfrak{c}$. On munit la R-pointe $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ de la structure de niveau $\alpha_0 : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} / \mathfrak{d}^{-1} \xrightarrow{\cdot y_0} \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{c}^* / \mathfrak{c}^* \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1} L_0/L_0$. Le groupe $G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}$ agit transitivement sur ces réseaux munis de structures de niveau et le stabilisateur de (L_0, α_0) est Γ. De plus, deux réseaux L et L' donnent la même R-pointe $\mathcal{C}$, si et seulement s'ils sont dans la même $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}$-orbite. D'où le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (R,\mathfrak{n})\text{−pointes} & \xrightarrow{\ \sim\ } & T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\backslash G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}/\Gamma. \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R,\mathfrak{n})\text{−pointes/isom.} & \xrightarrow{\ \sim\ } & B_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{Q}}/\Gamma \end{array}$$

Proposition 2.3. *Soit une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, donnée par $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}\Gamma$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}$. Alors,*
(i) *L'idéal $\mathfrak{b}$, correspondant à la R-pointe sous-jacente à $\mathcal{C}$ est donné par $a\,\mathfrak{o} + c\,\mathfrak{c}^*$ et sa classe ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la pointe $\mathcal{C}$.*

Quitte à changer γ, en le multipliant par un élément de $U_{\mathbb{Q}}$, ce qui ne change pas sa classe double, on suppose que $\gamma \in G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}} \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{b} & (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^* \\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} & \mathfrak{b}^{-1} \end{pmatrix}$. Sous cette hypothèse, l'on a

(ii) *La structure de niveau de $\mathcal{C}$ est donnée par $\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} / \mathfrak{d}^{-1} \xrightarrow{(y_0c, y_0d)} \mathfrak{n}^{-1} L/L$, où $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$, avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.*
(iii) *L'idéal $\mathfrak{b}'$ de la définition 2.2(i) est contenu dans $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}$ et sa classe ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la pointe $\mathcal{C}$. De plus $\mathfrak{b}' = a\,\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$. La pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, si et seulement si, $c \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.*
(iv) *Le groupe d'automorphismes de la $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ est égal à $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$. La suite exacte $1 \to U \to B \to T \to 1$, donne une suite exacte :*

$$0 \to X^* \to \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} \to 1,$$

où $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} = \{(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}^{\times} \times \mathfrak{o}^{\times}_{D+} \ \mid\ u - 1 \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1},\ \ u\epsilon - 1 \in \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\}$. En particulier, on a $\mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C},1} = \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} \cap T_1 = \mathfrak{o}^{\times}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1} \cap \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}} = \{u \in \mathfrak{o}^{\times} \,|u \in (1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}) \cap (1 + \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})\}$.
(v) *L'ensemble des $(R, \mathfrak{n})$-pointes est fibré au-dessus de $\mathcal{I}_F$. La fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $(G^+(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*) \cap T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}})\backslash G^+(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$, où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$. Elle s'identifie avec l'ensemble :*

$$(\mathfrak{n}^{-1} L/L)_{\mathrm{prim}}\Big/\Big\{ \begin{pmatrix} u^{-1}\epsilon^{-1} & \xi^* \\ 0 & u \end{pmatrix} \Big| u \in \mathfrak{o}^{\times}, \epsilon \in \mathfrak{o}^{\times}_{D+}, \xi^* \in (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^* \Big\},$$

où $(\mathfrak{n}^{-1} L/L)_{\mathrm{prim}}$ désigne l'ensemble des vecteurs primitifs du $\mathfrak{o} / \mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1} L/L$, et son cardinal est égal à $\displaystyle\sum_{\mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}} \#(\mathfrak{o} / \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})^{\times} \#(\mathfrak{o} / \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})^{\times} / [(\mathfrak{o}^{\times} \times \mathfrak{o}^{\times}_{D+}) : \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}}]$.
(vi) *L'ensemble des $(R, \mathfrak{n})$-composantes est fibré au-dessus de $\mathcal{I}_F$. La fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ s'identifie avec l'ensemble :*

$$(\mathfrak{n}^{-1} L/L)_{\mathrm{prim}}\Big/\Big\{ \begin{pmatrix} \overline{a}u^{-1}\epsilon^{-1} & \xi^* \\ 0 & u \end{pmatrix} \Big| u \in \mathfrak{o}^{\times}, \epsilon \in \mathfrak{o}^{\times}_{D+}, \overline{a} \in (\mathbb{Z} / n)^{\times}, \xi^* \in (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^* \Big\}$$

et son cardinal est égal à $\sum_{\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}\supset\mathfrak{b}'\supset\mathfrak{b}} \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})^\times \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})^\times/\#(\mathbb{Z}/n)^\times[(\mathfrak{o}^\times\times\mathfrak{o}^\times_{D+}):\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}]$, *où n est égal à l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$ et*

$$\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} = \{(u,\epsilon)\in\mathfrak{o}^\times\times\mathfrak{o}^\times_{D+} \quad | \quad u-1\in\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}, \quad u\epsilon\in(\mathbb{Z}/n)^\times+\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\},$$
$$\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1} = \{u\in\mathfrak{o}^\times \quad | \quad u\in(1+\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})\cap((\mathbb{Z}/n)^\times+\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})\}.$$

Démonstration : (i) La R-pointe sous-jacente à $\mathcal{C}$ correspond à la classe double $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$ et donc à la $G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$-pointe $\gamma\infty = \begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$. Par le diagramme qui précède la définition 2.2 la R-pointe $\mathcal{C}$ correspond à l'idéal $\mathfrak{b}=a\,\mathfrak{o}+c\,\mathfrak{c}^*$.

(ii)(iii) La structure de niveau α de L est obtenue en faisant agir γ^{-1} sur la structure de niveau α_0 de L_0. Or, par le choix que nous avons fait de γ, on a $L_0\gamma=\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*=L$ et donc $\alpha:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\xrightarrow{(cy_0,dy_0)}\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}L/L$. La pointe est donc non-ramifiée si, et seulement, si $cy_0\,\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}\subset\mathfrak{b}$, i.e. $c\in\mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$. Enfin $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}+cy_0\,\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{n}^{-1}=a\,\mathfrak{o}+c\,\mathfrak{c}^*+c\,\mathfrak{c}^*\,\mathfrak{n}^{-1}=a\,\mathfrak{o}+c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$. L'indépendance des classes de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ découle du lemme I.1.8.

(iv) Pour le calcul du groupe d'automorphismes $\gamma^{-1}\Gamma\gamma\cap B_{\mathbb{Q}}$ de la $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, on remarque qu'il est formé de matrices $\begin{pmatrix}u\epsilon & \xi^*_{u,\epsilon}\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}$, avec $u\in\mathfrak{o}^\times$, $\epsilon\in\mathfrak{o}^\times_{D+}$, $\xi^*\in(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*$ (c'est la forme générale d'un automorphisme de la R-pointe sous-jacente) qui respecte en plus la structure de niveau α. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases}(u^{-1}\epsilon^{-1}-1)c\in\mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\\ (u^{-1}-1)d-\epsilon^{-1}\xi^*_{u,\epsilon}c\in\mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}^*=\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1}\end{cases}. \tag{II.3}$$

En posant $u=\epsilon=1$, l'on retrouve que X^* est formé des $\xi^*\in c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1}\cap(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*=(\mathfrak{c}\mathfrak{b})^*((c(\mathfrak{c}\mathfrak{n}^*)^{-1}\cap\mathfrak{b}^{-1})=(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*$, i.e. $X=\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$.

Pour le calcul de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$, l'on remarque que la première condition de (II.3) équivaut à $u\epsilon-1\in c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{b}(c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^{*-1}\cap\mathfrak{b}^{-1})=\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$. La deuxième condition équivaut à $u-1\in d^{-1}(\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1}+c(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*)=(d\,\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$. Par ailleurs $u-1\in\mathfrak{o}\subset c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}=(c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$. Comme $(d\,\mathfrak{b})^{-1}\cap(c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1}=(d\,\mathfrak{b}+c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1}=\mathfrak{o}$, par le choix de γ, on en déduit que la deuxième condition de (II.3) équivaut à $u-1\in\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$.

Notons que pour tout $u\in\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$, l'élément $\xi^*_{u,\epsilon}$ appartient à

$$c^{-1}(\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1}+d(\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\cap\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}))\subset(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*+d\,\mathfrak{b}((\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*\cap(\mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{b}'^2)^*)\subset(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*+(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*\cap(\mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{b}'^2)^*,$$

et ce dernier est un idéal inclus (parfois strictement!) dans $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*$. Voir le paragraphe 7.5 pour une application de ce calcul.

(v)(vi) Comme γ transforme $\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$ en $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$ et $\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma=G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)$, la fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $(G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)\cap T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}})\backslash G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$, L'ensemble $G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$ s'identifie avec celui des vecteurs primitifs du $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1}L/L$. Le calcul du cardinal de la fibre se fait en analysant la condition sous laquelle deux vecteurs primitifs correspondent à la même (R,n)-pointe. La démonstration du (vi) est tout a fait analogue.

Comme par définition $n\,\mathfrak{o}\subset\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\subset\mathfrak{o}$, l'ensemble $(\mathbb{Z}/n)^\times+\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$ est bien une réunion de classes de $\mathfrak{o}$, modulo l'idéal entier $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$. Notons que $[\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}:\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}]$ divise $\#(\mathbb{Z}/n)^\times$ est le quotient représente le nombre de (R,n)-pointes dans la (R,n)-composante $\overline{\mathcal{C}}$. □

On rappelle que pour tout idéal $\mathfrak{f}\subset\mathfrak{o}$ on note $\mathfrak{o}^\times_{\mathfrak{f},1}$ le sous-groupe de $\mathfrak{o}^\times$ formé des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$.

Exemple 2.4. On pose $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ (polarisation principale) et $G = G^*$. Alors $\mathfrak{o}_{D+}^\times = \{1\}$.
(i) Si $F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{n} = p\mathbb{Z}$, avec p un nombre premier, on a $p-1$ $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au dessus de la R-pointe ∞ $(\mathfrak{b} = \mathbb{Z})$, dont
– $\varphi(p)/2$ non-ramifiées, avec $\mathfrak{b}' = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \{1\}$. Chacune de ces pointes est seul dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.
– $\varphi(p)/2$ ramifiées, avec $\mathfrak{b}' = p^{-1}\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \{\pm 1\} \supset \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \{1\}$, contenus dans une seule $(R, \mathfrak{n})$-composante.
(ii) Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^2$, avec $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ de degré résiduel 1 ($\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p$, avec p un nombre premier), on a 3 types de $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au dessus de la R-pointe ∞ $(\mathfrak{b} = \mathfrak{o})$:
– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}$, on a $n = 1$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2,1}^\times$, et donc on a $\varphi(p^2)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2,1}^\times]$ pointes non-ramifiées, chacune seule dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.
– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-1}$, on a $n = p$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times$, et donc on a $\varphi(p)^2/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times]$ pointes peu ramifiées, partagées par groupes de $\varphi(p)$, en $\varphi(p)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times]$ $(R, \mathfrak{n})$-composantes.
– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-2}$, on a $n = p^2$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}^\times$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2,1}^\times$, et donc on a $\varphi(p^2)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2,1}^\times]$ pointes très ramifiées, contenus dans une seule $(R, \mathfrak{n})$-composante.
(iii) Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ de degré résiduel 2 ($\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p^2$, avec p un nombre premier), on a 2 types de $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au dessus de la R-pointe ∞ $(\mathfrak{b} = \mathfrak{o})$:
– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}$, on a $n = 1$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times$, et donc on a $(p^2-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times]$ pointes non-ramifiées, chacune seule dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.
– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-1}$, on a $n = p$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times$ $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \{u \in \mathfrak{o}^\times \,|u^p - u \in \mathfrak{p}\}$, et on a $(p^2-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times]$ pointes peu ramifiées, partagées par groupes de $\varphi(p)/[\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p},1}^\times]$, en $(p+1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times]$ $(R, \mathfrak{n})$-composantes.

3. Cartes locales pour les variétés modulaires de Hilbert arithmétiques.

3.1. Variétés modulaires de Hilbert arithmétiques. Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de F, muni de sa positivité naturelle $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$. Posons $\Delta = \mathrm{N}(\mathfrak{d}\mathfrak{n}) = \Delta_F \, \mathrm{N}(\mathfrak{n})$.

Avec les notations du paragraphe I.3.1 on a un foncteur contravariant $\underline{\mathcal{M}}^1$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}$) de la catégorie des $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schémas vers celle des ensembles, qui à un schéma S associe l'ensemble des quadruplets $(A, \iota, \lambda, \alpha)/S$ (resp. $(A, \iota, \overline{\lambda}, \alpha)/S$) modulo isomorphisme, où (A, ι) est une VAHB de dimension relative d, λ est une $\mathfrak{c}$-polarisation (resp. $\overline{\lambda}$ est un classe de $\mathfrak{c}$-polarisations; voir Déf. I.3.3) sur A et $\alpha : (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ est une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau.

Théorème 3.1. [**54**] *Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}^1$ est représentable par un schéma quasi-projectif $M^1 = M_1^1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ muni d'un quadruplet universel $(\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)$. Le schéma M^1 est lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. De plus $M^1(\mathbb{C}) \cong M^{1,\mathrm{an}}$ et donc M^1 est géométriquement connexe.*

Soit $\pi : \mathcal{A} \to M^1$ la projection canonique. On pose $\underline{\omega} = \underline{\omega}_{\mathcal{A}/M^1} = \pi_* \Omega^1_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}/M^1) = R^1\pi_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/M^1}$. Au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ on a localement pour la topologie de Zariski $\underline{\omega} \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M^1}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \cong L_0 \otimes \mathcal{O}_{M^1}$, où $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$.

Corollaire 3.2. *Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}$ admet un schéma de modules grossier $M = M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ quasi-projectif et lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$. Le schéma M est le quotient de M^1 par le groupe fini $\mathfrak{o}_{D+}^\times / (\mathfrak{o}_{D+}^\times \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2})$ qui agit proprement et librement par*

$$[\epsilon] : (\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)/S \mapsto (\mathcal{A}, \iota, \epsilon\lambda, \alpha)/S.$$

Il est important de noter pour la suite que les automorphismes $[\epsilon]$ de M^1 définis dans le corollaire se prolongent en une action du groupe $\mathfrak{o}_{D+}^{\times}/(\mathfrak{o}_{D+}^{\times}\cap\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2})$ sur les fibrés $\underline{\omega}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$. L'action sur $\underline{\omega}$ est donnée par la formule $s\mapsto\epsilon^{-1/2}[\epsilon]^*s$, où s est une section de $\underline{\omega}$. L'action sur $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ vient de celle sur le complexe $R\pi_*\Omega^{\bullet}_{\mathcal{A}/M^1}$. Ces action sont définis sur l'anneau des entiers $\mathfrak{o}'$ du corps de nombres $F'=\mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon},\epsilon\in\mathfrak{o}_{D+}^{\times})$.

Par quotient, on peut définir des fibrés encore notés $\underline{\omega}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ sur $M\times\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$. Posons $M'=M\times\mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])$. On a encore localement pour la topologie de Zariski $\underline{\omega}\cong\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}$ et $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}\cong L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}$, où $L_0=\mathfrak{o}\otimes\mathfrak{c}^*$.

Pour chaque $\mu\in\mathfrak{c}_+$, on note $\mathcal{L}_\mu$ le faisceau inversible ample sur $\mathcal{A}$ obtenu comme image inverse du fibré de Poincaré sur $\mathcal{A}\times\mathcal{A}^t$ par le morphisme $(\mathrm{id}_{\mathcal{A}},\lambda\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\otimes\mu))$.

On pose $Y=Y_1(\mathfrak{n})=\coprod_{i=1}^{h^+}M_1(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{n})$ et $Y^1=Y_1^1(\mathfrak{n})=\coprod_{i=1}^{h^+}M_1^1(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{n})$, où les idéaux $\mathfrak{c}_i$, $1\leq i\leq h^+$ forment un ensemble de représentants de Cl_F^+.

3.2. Construction des cartes locales. Le but de ce paragraphe est de munir les VAHB construites dans le paragraphe 1.2 de différentes $\mu_{\mathfrak{n}}$-structures de niveau, et ainsi fournir les cartes locales servant à compactifier la variété modulaire de Hilbert M.

A chaque $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$, on peut associer par la Déf.2.2 et la Prop.2.3 des idéaux $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ et $X=\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, un entier n égal à l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$, des groupes d'unités $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}},1}^{\times}$ et des sous-groupe $H_{\mathcal{C}}=\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, $H_{\mathcal{C},1}=\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}},1}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$ du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ (ces objets sont *a priori* associés à une $(R,\mathfrak{n})$-pointe, mais sont constants au sein d'une $(R,\mathfrak{n})$-composante).

Soit une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ et considérons le tore $S=S_{\mathcal{C}}=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes X^*$. Soit $\Sigma^{\mathcal{C}}$ un éventail complet de $X^*_{\mathbb{R}+}$. Soit $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$. La construction de la partie précédente, appliquée à $(X,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, nous donne alors un schéma semi-abélien $G_\sigma/\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et dont la restriction à $G_\sigma^0/\overline{S}_\sigma^0$ est une VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée.

En appliquant une deuxième fois la construction de la partie précédente, cette fois à $(X,\mathfrak{a},\mathfrak{b}')$, on obtient un schéma semi-abélien $G'_\sigma/\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et dont la restriction $G'^0_\sigma/\overline{S}_\sigma^0$ est une VAHB $\mathfrak{c}'=\mathfrak{a}\mathfrak{b}'^{-1}$-polarisée. Par fonctorialité on a une flèche $G_\sigma\to G'_\sigma$, dont la restriction $G_\sigma^0\to G'^0_\sigma$ est une isogénie, on déduit la suite exacte :

$$0\to\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}\xrightarrow{q}G_\sigma^0[\mathfrak{n}]\to G'^0_\sigma[\mathfrak{n}]\to 1. \tag{II.4}$$

Considérons d'abord le cas où $\mathcal{C}$ est non-ramifiée. On a alors $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}'$ et donc $X=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. La variété abélienne G_σ^0 associée à une $(R,\mathfrak{n})$-composante non-ramifiée est naturellement munie d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1)\cong(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1)\hookrightarrow(G_\sigma^0)[\mathfrak{n}]$, où la première flèche vient de l'isomorphisme $\alpha:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\cong\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$ et la deuxième du (II.2).

Passons maintenant au cas où $\mathcal{C}$ est ramifiée. Afin de munir G_σ^0 d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau, on doit :
- choisir un relèvement de $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$ dans $\mathrm{Im}(\alpha)$ (appelé *uniformisation* de $\mathcal{C}$),
- se placer dans ce cas au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$, où $\zeta_{\mathcal{C}}$ désigne une racine de l'unité d'ordre égal à l'exposant n du groupe abélien $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.

Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{b}^*/\mathfrak{b}'^*\cong(\mathfrak{b}'/\mathfrak{b})(1)$, d'où une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur G_σ^0 :

$$(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1)\hookrightarrow(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1)\times(\mathfrak{b}^*/\mathfrak{b}'^*)(1)\cong(\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1)\times\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}\overset{(II.2)(II.4)}{\hookrightarrow}(G_\sigma^0)[\mathfrak{n}],$$

où la première inclusion vient de la flèche $\alpha:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*\times\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.

Proposition 3.3. (i) *Pour toute* $(R,\mathfrak{n})$*-composante uniformisée* $\mathcal{C}$ *et pour tout cône* $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ *la construction ci-dessus donne un carré cartésien :*

$$\begin{array}{ccll} G^0_\sigma \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]) & \to & \mathcal{A} & \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \overline{S}^0_\sigma \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]) & \to & M^1 & \to M \end{array}.$$

(ii) *Changer l'uniformisation de la pointe* $\mathcal{C}$ *revient à se donner un* $x \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*/(\mathfrak{a}\mathfrak{b}')^* = \operatorname{Hom}(\mathfrak{b}'/\,\mathfrak{b}, \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{a}^*\,/\,\mathfrak{a}^*)$ *et correspond à l'automorphisme de* $\overline{S}^0_\sigma \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ *qui envoie* q^ξ *sur* $\zeta_{\mathcal{C}}^{n\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi x)} q^\xi$ $(\xi \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}')$*.*

(iii) *Soient* $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *deux* $(R,\mathfrak{n})$*-composantes uniformisées et soient deux cônes* $\sigma_i \subset X^*_{i,\mathbb{R}}$*,* $i = 1,2$*. Supposons qu'il existe*

– *un isomorphisme de* $(R,\mathfrak{n})$*-composantes* $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_2$ *(d'où* $\xi \in F^\times$ *tel que* $\mathfrak{a}^*_2 = \xi\,\mathfrak{a}^*_1$*,* $\mathfrak{b}_2 = \xi^{-1}\,\mathfrak{b}_1$ *et* $X^*_2 = \xi^2 X^*_1$*) induisant sur* $\mathfrak{c}^*$ *(via les polarisations* λ *et* λ'*), la multiplication par un élément* $\epsilon \in \mathfrak{o}^\times_{D+}$*,*

– *des éléments* $(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}_1} = \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}_2}$ *et un élément* $h \in H_{\mathcal{C}}$*, tels que* $\sigma_2 = u^2\epsilon\xi^2\sigma_1$ *et* $\zeta_{\mathcal{C}_2} = \zeta^h_{\mathcal{C}_1}$*.*

Alors, on a un isomorphisme $\overline{S}^0_{\sigma_1} \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}_1}]) \cong \overline{S}^0_{\sigma_2} \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}_2}])$ *qui complète les deux flèches* $\overline{S}^0_{\sigma_i} \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}_i}]) \to M$ *(*$i = 1,2$*) du* (i) *en un triangle commutatif.*

Le (i) et (ii) découlent de ce qui précède. Le (iii) utilise la fonctorialité de la construction de G^0_σ en σ et sa compatibilité avec l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ (*cf* §.1.2 et Prop.2.3(iv)).

Avant de décrire la construction des compactifications toroïdales arithmétiques, on doit la préparer. C'est l'objet des deux parties suivantes.

4. Un théorème de descente formelle de Rapoport.

La construction d'une compactification toroïdale peut être vue comme l'ajout d'un bord à M. On a un schéma formel de type fini candidat pour ce bord, à savoir l'analogue algébrique de :

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} = \coprod_{\text{pointes } \mathcal{C}/\sim} \left(\mathbb{C}^\times \otimes (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*\right)^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \Big/ \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$$

Le but de cette partie est de donner un critère abstrait, trouvé par Rapoport [**57**], pour résoudre le problème de "Descente Formelle", en l'occurrence, le problème d'existence et unicité du schéma recollement Y d'un ouvert Y^0 et d'un schéma formel $\mathfrak{X}$: $Y^0 \hookrightarrow Y \leftarrow \mathfrak{X}$. Il repose en partie sur un critère d'immersion ouverte de Rapoport dont on rappellera l'énoncé.

Le problème de Descente Formelle sera en fait d'abord posé dans la catégorie des espaces algébriques. On verra dans la partie 6 que les conditions d'application du critère sont satisfaites dans notre cas.

Dans cette partie V désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K et de corps résiduel k. S désigne un V-schéma.

Soit Aff $/S$ la catégorie des S-schémas affines, munie de la topologie étale. Un faisceau d'ensembles sur Aff $/S$ s'appelle un S-espace. Pour tout S-schéma X, on note $\underline{X}$ le S-espace associé.

DÉFINITION 4.1. Une relation d'équivalence étale sur un S-schéma U_1 est donnée par une immersion fermée quasi-compacte $U_2 \to U_1 \times_S U_1$ de S-schémas dont les deux projections sont étales et qui définit une relation d'équivalence : pour tout $Y \in \mathrm{Aff}/S$, $U_2(Y) \to U_1(Y) \times_{S(Y)} U_1(Y)$ est une relation d'équivalence.

Un S-*espace algébrique* est un S-espace qui est quotient d'un schéma U_1, appelé un atlas étale, par une relation d'équivalence étale.

L'ensemble Alg/S des S-espaces algébriques muni des flèches de S-espaces forme une catégorie.

On définit de même pour un schéma formel $S^\wedge$ la catégorie des $S^\wedge$-espaces algébriques formels, notée $\mathrm{Form}/S^\wedge$.

DÉFINITION 4.2. Soit $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme dans $\mathrm{Form}/S^\wedge$. On dit que f est un *éclatement admissible* de $\mathfrak{X}$ si f est un éclatement $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ dans $\mathrm{Form}/S^\wedge$, par rapport à un idéal qui contient une puissance de l'idéal de définition de $\mathfrak{X}$.

La catégorie des espaces rigides Rig/S est la catégorie localisée de Form/S, par rapport aux éclatements admissibles.

DÉFINITION 4.3. Un *épaississement* de (K, V) est un couple $(R, R^{(0)})$ tel que :

– R est un anneau local artinien de corps résiduel K. On note R_V l'image réciproque de V dans R.

– $R^{(0)} \subset R_V \subset R$ est un sous-anneau noethérien tel que le morphisme $R^{(0)} \to V$ soit surjectif et la localisation de $R^{(0)}$ au point générique de V soit égale à R (c'est à dire R est le localisé de $R^{(0)}$ en $J = \ker(R^{(0)} \to V)$).

Soit $\widetilde{\pi}$ un élément de $R^{(0)}$ qui se projette sur une uniformisante de V. Pour tout $i \geq 1$ on pose $R^{(i)} = R^{(0)}\left[\frac{J}{\widetilde{\pi}^i}\right]$. Alors $R^{(0)} \subset R^{(1)} \subset ... \subset R_V$ et $\cup_i R^{(i)} = R_V$.

On a $\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K) = \mathrm{Spf}(V)_{\mathrm{rig}}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(R) := \mathrm{Spf}(R^{(0)})_{\mathrm{rig}}$ $(= \mathrm{Spf}(R^{(i)})_{\mathrm{rig}})$, car $\mathrm{Spf}(R^{(i)})$ est obtenu par éclatement (admissible) de $\mathrm{Spf}(R^{(0)})$, par rapport à l'idéal $(\widetilde{\pi}^i) + J$ (car J est nilpotent).

EXEMPLE 4.4. Soit l'anneau local artinien $R = K[t]/(t^2)$. Le sous-anneau $R_V = V + K \cdot t$ n'est pas noethérien. Considérons le sous-anneau noethérien $R^{(0)} = V[t]/(t^2)$. Alors $(R, R^{(0)})$ est un épaississement de (K, V). On a $R^{(i)} = V + V \cdot \frac{t}{\pi^i}$ et donc $\cup_i R^{(i)} = R_V$.

A toute flèche $f_{\mathrm{rig}} : \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}}$ on peut associer un modèle formel $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, défini à éclatement admissible près.

DÉFINITION 4.5. f_{rig} est une *immersion ouverte*, s'il existe un modèle formel f qui est une immersion ouverte.

M. Rapoport a démontré le critère d'immersion ouverte suivant, qui est utilisé pour démontrer le résultat de recollement abstrait qu'on a en vue.

THÉORÈME 4.6. *(Théorème 3.15 dans* [**57**]*)* f_{rig} *est une immersion ouverte, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i)$_{\mathrm{rig}}$ *Pour tout corps K, discrètement valué, l'application suivante est injective*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K), \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{f_{\mathrm{rig}*}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K), \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}}).$$

(ii)$_{\mathrm{rig}}$ *Pour tout épaississement $(R, R^{(0)})$ de (K, V) on peut compléter de façon unique le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\ \mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}} \end{tikzcd}$$

Remarque 4.7. L'anneau V étant principal, il n'admet pas d'éclatements admissibles. La condition $(\mathrm{i})_{\mathrm{rig}}$ peut s'écrire donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spf}(V),\mathfrak{X}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Spf}(V),\mathfrak{Y})$, alors que le diagramme dans la condition $(\mathrm{ii})_{\mathrm{rig}}$ devient (pour i assez grand) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spf}(V) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spf}(R^{(0)}) & \mathrm{Spf}(R^{(i)}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

Soit S un schéma affine, de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind excellent (pour les applications aux compactifications toroïdales, il suffit de prendre S de type fini sur $\mathbb{Z}$).

Soit A un anneau noethérien complet pour la topologie I-adique, définie par un idéal $I \subset A$. Soit $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A)$ le schéma formel affine correspondant. Posons $\overline{U} = \mathrm{Spec}(A)$, $\overline{U}_0 = \mathrm{Spec}(A/I)$=l'*âme* de $\mathfrak{U}$ et $\overline{U}^0 = \overline{U}\backslash\overline{U}_0$.

Lemme 4.8. *(EGA III.5) Soit Y un espace algébrique de type fini sur S et $Y_0 \subset Y$ un sous-espace fermé. On suppose que $\overline{U} = \mathrm{Spec}(A)$ est un S-schéma et on se donne un S-morphisme formel adique $\mathfrak{f} : \mathfrak{U} \to Y|_{Y_0}$.*

Alors, il existe un unique morphisme $f : \overline{U} \to Y$ dont le complété formel est $\mathfrak{f}$.

Définition 4.9. Un morphisme $g^0 : \mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}^0$ sera dit *permis*, s'il vient (via le lemme 4.8) d'un morphisme formel de type fini $\mathfrak{g} : \mathrm{Spf}(V) \to \mathfrak{U}$.

Plus généralement (si $\overline{U}$ est un S-schéma), un morphisme $f^0 : \overline{U}^0 \to Y^0$ dans un espace algébrique de type fini sur S sera dit *permis*, s'il existe une immersion ouverte de Y^0 dans un S-espace algébrique propre Y, telle que : pour tout morphisme permis $\mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}^0$, l'unique extension à $\mathrm{Spec}(V)$ du morphisme composé $\mathrm{Spec}(K) \to Y$, envoie le point spécial dans $Y\backslash Y^0$.

Un morphisme f^0, provenant par restriction d'un morphisme $f : U \to Y$, est permis, s'il existe un morphisme formel $\mathfrak{f} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{Y} = Y|_{Y_0}$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d] & \mathfrak{Y} \arrow[d] \\ \overline{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \overline{U}^0 \arrow[r, "f^0"] & Y^0 \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, un morphisme est permis s'il "envoie le bord sur le bord".

Définition 4.10. Soit $\mathfrak{X}$ un S-espace algébrique formel, séparé et de type fini. Un *découpage* de $\mathfrak{X}$ est la donnée de :

– Un atlas affine $\mathfrak{U}_2 = \mathrm{Spf}(A_2) \rightrightarrows \mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_1) \to \mathfrak{X}$.

– Un espace algébrique Y^0 de type fini sur S, tel que les deux composés suivants soient égaux : $\overline{U}_2^0 \rightrightarrows \overline{U}_1^0 \xrightarrow{f^0} Y^0$, où $\overline{U}_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ et $\overline{U}_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ et les flèches $\overline{U}_2 \rightrightarrows \overline{U}_1$ viennent, via le lemme 4.8, des flèches $\mathfrak{U}_2 \rightrightarrows \mathfrak{U}_1$.

Le découpage est dit *effectif*, s'il existe un S-espace algébrique de type fini Y, une immersion ouverte $j : Y^0 \hookrightarrow Y$ et un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}$, où $\mathfrak{Y}$ est le complété formel de Y le long de $Y\backslash Y^0$, tels que le morphisme $f : \overline{U}_1 \to Y$, venant (via le lemme 4.8) du morphisme $\mathfrak{f} : \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}$, induise $f^0 : \overline{U}_1^0 \to Y^0$ sur $\overline{U}_1^0 \subset \overline{U}_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U}_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathfrak{U}_1 \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d] & \mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y} \arrow[d] \\ \overline{U}_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \overline{U}_1 \arrow[r, "f"] & Y \\ \overline{U}_2^0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, hook] & \overline{U}_1^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[u, hook] & Y^0 \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 4.11. *(Théorème 3.5 de* [**57**]*) Soit un découpage. On suppose :*

– $\overline{U}_1^0$ est schématiquement dense dans $\overline{U}_1$ (i.e. $\mathcal{O}_{\overline{U}_1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{U}_1^0}$).

– Y^0 est compactifiable (i.e. il existe une S-immersion ouverte $Y^0 \hookrightarrow Y^*$ avec Y^* propre sur S).

– Le morphisme $f^0 : \overline{U}_1^0 \to Y^0$ est permis.

– Pour tout anneau de valuation discrète complet V, de corps des fractions K :

(i′)$_{\mathrm{rig}}$ *la suite $\overline{U}_2^0(K)_{\mathrm{permis}} \rightrightarrows \overline{U}_1^0(K)_{\mathrm{permis}} \to Y^0(K)_{\mathrm{permis}}$ est exacte.*

(ii′)$_{\mathrm{rig}}$ *pour tout épaississement $(R, R^{(0)})$ de (K, V) on peut compléter de façon unique le diagramme commutatif suivant :*
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "\mathrm{permis}"] \arrow[d] & \overline{U}_1^0 \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[r, "\mathrm{permis}"] \arrow[ur, dashed] & Y^0 \end{tikzcd}.$$

Alors le découpage est effectif.

5. Théorème d'uniformisation de Raynaud pour les VAHB.

Pour pouvoir vérifier les conditions (i′)$_{\mathrm{rig}}$ et (ii′)$_{\mathrm{rig}}$ ci-dessus dans la situation où l'ouvert Y^0 est l'espace de modules M^1 et le schéma formel $\mathfrak{X}$ est celui donné par les cartes locales de la proposition 3.3, on a besoin de la construction suivante (donnée par Raynaud dans [**58**] et reprise par Rapoport dans le cas d'une VAHB [**57**]). Il est à noter qu'on a besoin de cette construction non seulement sur un corps mais aussi sur un épaississement artinien, auquel cas l'argument donné par Raynaud reste valable.

Soit V un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions K, et soit $(R, R^{(0)})$ un épaississement de (K, V).

DÉFINITION 5.1. Une variété abélienne A sur R (resp. sur K) est dite à réduction semi-stable (déployée) s'il existe un schéma en groupes lisse sur $R^{(i)}$, pour un certain $i \geq 0$, (resp. sur V), prolongeant A et dont la fibre spéciale est une extension d'une variété abélienne par un tore (déployé).

Pour des raisons de dimension, si une VAHB sur R (ou sur K) est à mauvaise réduction semi-stable déployée, alors la fibre spéciale est un tore déployé. Dans ce cas la description rigide-analytique de Raynaud devient :

THÉORÈME 5.2. (Raynaud) *Soit A une VAHB sur R (ou sur K) à mauvaise réduction semi-stable déployée. Alors :*

$$A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}} / \, \mathfrak{b}_{\mathrm{rig}},$$

où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de F. De plus :

– On a une suite exacte $0 \to (\mathfrak{a} / \mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{b} / \mathfrak{b} \to 0$

– *La forme bilinéaire* $(,): \mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\to \mathrm{Val}(\mathrm{K})\cong\mathbb{Z}\quad (\alpha,\beta)\mapsto \mathrm{val}(\mathfrak{X}^\alpha(\beta))$ *vérifie* $(a\alpha,\beta)=(\alpha,a\beta)$ *pour tout* $a\in\mathfrak{o}$, *et donc défini un unique élément* $\xi^*\in(\mathfrak{ab})^*$, *à* $\mathbb{Q}_+^*$ *près et à l'action de* $\mathfrak{o}^{\times 2}$ *près.*

– *Le cône positif des polarisations sur* A, $\mathcal{P}(A)_+\subset\mathcal{P}(A)=\mathfrak{ab}^{-1}$ *est obtenu comme produit de l'unique positivité sur* $\mathfrak{ab}$ *pour laquelle* $\xi^*>0$ *et de la positivité naturelle sur* $\mathfrak{b}^{-2}$.

6. Compactifications toroïdales arithmétiques.

6.1. Construction des compactifications toroïdales.

Définition 6.1. Un *éventail* Γ*-admissible* $\Sigma=(\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est la donnée pour chaque $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ d'un éventail complet $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de $X^*_{\mathbb{R}+}$, stable par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ et contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action, de sorte que les données soient compatibles aux isomorphismes de $(R,\mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}'$.

Voici l'analogue du résultat principal de l'article [**57**] dans le cas de groupe de niveau $\Gamma=\Gamma_1^D(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$ (on rappelle que Γ est sans torsion d'après le lemme I.1.5).

Théorème 6.2. *Soit* $\Sigma=\{\Sigma^{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C}}$ *un éventail* Γ*-admissible.*

(i) *Il existe une immersion ouverte* $j: M^1\hookrightarrow M^1_\Sigma$ *de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$*-schémas et un isomorphisme de schémas formels*

$$\varphi:\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim}\left(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}\right)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C},1}})\xrightarrow{\sim} M^{1\wedge}_\Sigma,$$

(où $M^{1\wedge}_\Sigma$ *est le complété formel de* M^1_Σ *le long de sa partie à l'infini), tels que pour toute* $(R,\mathfrak{n})$*-composante* $\mathcal{C}$ *et pour tout* $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$ *on a la propriété suivante: l'image réciproque de la VAHB universelle sur* M^1 *par le morphisme* $\overline{S}_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])\to M^1_\Sigma$ *(déduit par le lemme 4.8 du morphisme formel* $S^\wedge_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])\to M^{1\wedge}_\Sigma$ *construit à l'aide de* φ*), soit la VAHB* $\mathfrak{c}$*-polarisée avec* $\mu_{\mathfrak{n}}$*-structure de niveau* $G^0_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ *sur* $\overline{S}^0_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ *construite dans la proposition 3.3(i). Le couple* (j,φ) *est unique, à unique isomorphisme près.*

(ii) Il existe une immersion ouverte $j: M\hookrightarrow M_\Sigma$ *de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$*-schémas et un isomorphisme de schémas formels*

$$\varphi:\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim}\left(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}\right)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})\xrightarrow{\sim} M^{\wedge}_\Sigma.$$

Démonstration : (i) Il y a un nombre fini de $(R,\mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}$ modulo isomorphisme.

Soit $\{\sigma_i^{\mathcal{C}}\}$ un ensemble fini de représentants des cônes de l'éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$, modulo l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$. Considérons le schéma formel affine $\mathfrak{U}_1:=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\coprod_i S^\wedge_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_{\mathcal{C}}][\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$. Il est de type fini sur $\mathbb{Z}$ et muni d'un morphisme étale ("immersions toroïdales" et quotient étale par le groupe $H_{\mathcal{C},1}$) dans $\mathfrak{X}:=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\left(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}\right)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_{\mathcal{C}}][\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]^{H_{\mathcal{C},1}})$.

Posons $\overline{U}_1=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\coprod_i\overline{S}_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_{\mathcal{C}}][\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$.

D'après la proposition 3.3(i) on a un morphisme $f^0:\overline{U}^0_1\to M^1$, qui est permis, car toute variété abélienne obtenue comme image réciproque, par un morphisme permis $\mathrm{Spec}(K)\to\overline{S}^0_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_{\mathcal{C}}][\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$, de la variété abélienne $G^0_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ est à mauvaise réduction d'après la partie 1.2.

Posons $\mathfrak{U}_2 := \mathfrak{U}_1 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_2)$ et $\overline{U}_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$. Les deux flèches composées $\overline{U}_2^0 \rightrightarrows \overline{U}_1^0 \to M^1$ sont égales par compatibilité de la construction de Mumford avec les inclusions $\sigma' \subset \sigma$, avec l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$ et avec l'action de $H_{\mathcal{C},1}$ (appliquer la proposition 3.3(iii) dans le cas $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$).

Vérifions la condition $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$ du théorème 4.11 :

Soient $g_1^0, g_2^0 : \mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_1^0$ deux morphismes permis avec $f^0 \circ g_1^0 = f^0 \circ g_2^0$.

Chaque morphisme g_j^0 se factorise par un certain $\overline{S}_{\sigma_j}^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}_j}])$, où σ_j désigne un des $\sigma_i^{\mathcal{C}_j}$ et détermine ainsi :
−une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}_j$ (à laquelle sont attachés des objets $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$, $\mathfrak{b}'_j$, X_j, α_j),
−une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}^{(j)} \in K$, d'ordre l'exposant n_j du groupe $\mathfrak{b}'_j / \mathfrak{b}_j$,
−un cône σ_j de $\Sigma^{\mathcal{C}_j}$ et un morphisme $\psi_j : R_{\sigma_j}^\wedge \to V$, d'où un élément $\xi_j^* \in \sigma_j \cap X_j^*$, déterminé par la propriété suivante : pour tout $\xi \in \check{\sigma}_j \cap X_j$ on a $\mathrm{val}(\psi_j(q^\xi)) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi\xi_j^*)$.

Le morphisme permis $f^0 \circ g_j^0$ fournit une VAHB A sur K munie d'une $\mathfrak{c}$-polarisation et $\mu_\mathfrak{n}$-structure de niveau, à mauvaise réduction semi-stable déployée.

L'uniformisation de Raynaud-Tate pour la VAHB A, décrite dans la partie 5 nous donne alors :
− deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{c} = \mathcal{P}(A) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ et tels que $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}} / \mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ (ceci nous donne une R-pointe $\mathcal{C}$, bien définie modulo isomorphisme). Comme la construction de Mumford et celle de Raynaud sont inverses l'une à l'autre (i.e. le 1-motif associé par Raynaud à la VAHB sur K construite par Mumford est le 1-motif du départ), les R-pointes sous-jacentes de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont isomorphes à $\mathcal{C}$.
− une suite exacte : $0 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$. Ainsi, la $\mu_\mathfrak{n}$-structure de niveau sur A détermine-t-elle bien une une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ au-dessus de la R-pointe $\mathcal{C}$ et une racine de l'unité $\zeta_\mathcal{C}$. De nouveau par compatibilité de la construction de Mumford et celle de Raynaud on déduit que $\zeta_{\mathcal{C}_1}$ et $\zeta_{\mathcal{C}_2}$ sont conjuguées sous $H_{\mathcal{C},1}$ et que les $(R,\mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont isomorphes, et donc égales, car elles vivent dans une classe de représentants modulo isomorphisme.
− un élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_+^*$ bien défini modulo $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$. Un dernière fois par compatibilité des constructions de Mumford et de Raynaud, on trouve que $\xi_1^* \in \sigma_1$ et $\xi_2^* \in \sigma_2$ sont dans la même $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$-orbite. Par conséquent $\xi_1^* = \xi_2^*$ et, par exemple $\sigma_1 \subset \sigma_2$.

On en déduit qu'il existe un morphisme permis $h^0 : \mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_2^0$ tel que $g_1^0 = p_1^0 \circ h^0$ et $g_2^0 = p_2^0 \circ h^0$, ce qui termine la vérification du $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$.

Vérifions la condition $(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$ du théorème 4.11 :

Les morphismes permis $\mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_1^0$ et $\mathrm{Spec}(R) \to M^1$ nous donnent deux VAHB A/K et A'/R à mauvaise réduction, avec $A \cong A' \times_R K$. De plus, comme dans la vérification de $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$, A/K est obtenue par image réciproque de la VAHB associé par Mumford à des donnés combinatoires $\mathcal{C} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, X, \alpha), \zeta_\mathcal{C}, \xi^* \in X^*$.

Par la théorie de Raynaud-Tate A et A' admettent des uniformisation rigides analytiques $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}} / \mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ (compatibilité entre la construction de Mumford et celle de Raynaud) et $A'_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}'^*)_{\mathrm{rig}} / \mathfrak{b}'_{\mathrm{rig}}$. Comme $A_{\mathrm{rig}} = A'_{\mathrm{rig}} \times_R K$, on en déduit qu'on peut prendre $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\zeta_\mathcal{C} = \zeta_{\mathcal{C}'}$ et $\xi^* = \xi'^*$, d'où le $(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème 4.11 qui nous donne le couple cherché (j, φ), dont on admet l'unicité.

(ii) Comme $\Sigma^{\mathcal{C}}$ est stable par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ (et non-seulement par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$), le groupe fini $\mathfrak{o}_{D+}^{\times}/(\mathfrak{o}_{D+}^{\times}\cap\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2})$ du revêtement galoisien étale $M^1 \to M$ agit proprement et librement sur M^1_{Σ} et la construction du (i) passe au quotient. La flèche $M^1_{\Sigma} \to M_{\Sigma}$ est encore étale. $\square$

Remarque 6.3. Soit $\Sigma = (\Sigma^{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{b}\in\mathcal{I}_F}$, où pour tout idéal $\mathfrak{b}$, $\Sigma^{\mathfrak{b}}$ est un éventail $\mathfrak{o}^{\times}$-admissible de $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*_+$. On aurait pu tenter de définir M_{Σ} comme la normalisation de la compactification de Rapoport de l'espace de modules $M(\mathfrak{c})_{\Sigma}$ dans M. Le problème est que le schéma M_{Σ} ainsi défini n'est jamais lisse. En effet, pour compactifier chaque $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ qui est au-dessus de la R-pointe correspondant à $\mathfrak{b}$ on utilise le même éventail $\Sigma^{\mathfrak{b}}$. Or, si $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1} \neq n\,\mathfrak{o}$ ($n \in \mathbb{Z}$), $\Sigma^{\mathfrak{b}}$ ne peut pas être un éventail lisse pour $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*_+$ et $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*_+$ simultanément.

6.2. Propriétés des compactifications toroïdales. Dans la suite, pour alléger les notations, nous écrirons $\overline{M}$ à la place de M_{Σ}, en gardant en tête la dépendance du système d'éventails Σ.

Corollaire 6.4. *Localement pour la topologie étale sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$, *$j$ est isomorphe à $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_{\sigma}$ pour un certain couple $\mathcal{C}$, $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$.*
En particulier, pour tout cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}\backslash\{0\}$, et tout corps algébriquement clos k de caractéristique p ne divisant pas $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$, *l'ensemble des k-points de la strate $M(\sigma)$ de $\overline{M}$ s'identifie à celui des k-points de la strate fermée $S(\sigma)$ de l'immersion torique affine $S \hookrightarrow S_{\sigma}$.*

Ceci résulte du fait que $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ opère librement sur l'ensemble des strates non-ouvertes de $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$, et donc localement pour la topologie étale $S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$ (et donc $\overline{M}^{\wedge}$) est isomorphe à $S^{\wedge}_{\sigma}$, pour un certain $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$.

Corollaire 6.5. *Quitte à raffiner l'éventail Σ on obtient un schéma $\overline{M}$ lisse sur* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$.

Proposition 6.6. *Il existe un unique schéma en groupes semi-abélien $\overline{\pi} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ qui prolonge la VAHB universelle $\pi : \mathcal{A} \to M^1$. Ce schéma en groupes est muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et c'est un tore au-dessus de $\overline{M^1}\backslash M^1$.*

Démonstration : L'unicité est montrée dans un cadre beaucoup plus général dans le chapitre I du livre de Chai et Faltings [**21**]. Pour l'existence on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \arrow[rr, dashed] \arrow[dd] & & \mathfrak{G} \arrow[dd, dashed] & \\
G^0_{\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_{\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur, dashed] \arrow[dd] & & \\
& M^1 \arrow[rr] & & \overline{M^1} & \overline{M^1}^{\wedge} \arrow[l] \\
\overline{S}^0_{\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overline{S}_{\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] & & S^{\wedge}_{\sigma}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Théorème 6.7. *Le schéma $\overline{M}$ est propre sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$.

Démonstration : Il suffit de vérifier la propreté de $\overline{M^1}$. L'idée, comme dans [**57**], est d'appliquer le critère valuatif de propreté tel qu'il est énoncé dans [**13**] (*cf* Thm.4.19 et le commentaire qui suit).

Soit V un anneau de valuation discrète de corps de fractions K. Comme M^1 est ouvert et dense dans $\overline{M^1}$, il suffit de vérifier que tout morphisme $g^0 : \mathrm{Spec}(K) \to M^1$,

s'étend en un morphisme $g : \mathrm{Spec}(V) \to \overline{M^1}$. Supposons que g^0 ne s'étend pas déjà en un morphisme $g : \mathrm{Spec}(V) \to M^1$. La VAHB A/K donnée par f^0 est donc à mauvaise réduction (*cf* Deligne-Pappas [**14**]). Quitte à remplacer K par une extension finie et V par sa normalisation, on peut supposer que A/K est à mauvaise réduction semi-stable. Nous sommes alors en mesure d'appliquer à A/K la théorie de géométrie rigide de Raynaud, qui nous fournit (*cf* §.5) :
– deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{c} = \mathcal{P}(A) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ et tels que $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}} / \mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ (ceci définit une R-pointe).
– une suite exacte $0 \to (\mathfrak{a}\,/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{b}\,/\,\mathfrak{b} \to 0$. La $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $(\mathfrak{o}\,/\,\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ définit alors une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ au-dessus de la R-pointe définie précédemment (à laquelle on peut associer un idéal $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$) et une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}$ d'ordre l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'\,/\,\mathfrak{b}$.
– un élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*_+$ (bien défini modulo l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$), venant de la forme bilinéaire $\mathfrak{o}$-équivariante $(\,,\,) : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathrm{Val(K)} \cong \mathbb{Z} \quad (\alpha,\beta) \mapsto \mathrm{val}(\mathfrak{X}^\alpha(\beta))$.

Un translaté de ξ^* par le groupe $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ appartient à un certain cône $\sigma_i^{\mathcal{C}} \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, parmi les cônes choisis dans la démonstration du théorème. Le morphisme g^0 se factorise alors par la carte locale $\overline{S}^0_{\sigma_i^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]) \to M^1$. Le morphisme composé $g : \mathrm{Spec}(V) \to \overline{S}_{\sigma_i^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]) \to \overline{M^1}$ étend le morphisme g^0. □

6.3. Irréductibilité du schéma $M \otimes \mathbb{F}_p$ ($p \not| \Delta$).

THÉORÈME 6.8. *Le schéma M est géométriquement irréductible sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$.*

Démonstration : On suit [**21**] IV.5.10 : la fibre générique de M est géométriquement connexe par la description transcendante de M^{an} et le principe GAGA; il en est de même pour la fibre générique d'une compactification toroïdale $\overline{M}$. Soit $\phi : \overline{M} \to S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$ le morphisme structural. Ce morphisme est lisse donc plat. Il est propre donc $\phi_*\,\mathcal{O}_{\overline{M}}$ est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-module de type fini. Par platitude, ce module est libre de rang r. En passant à la fibre générique, on voit que $r = 1$ parce que cette fibre est connexe (et propre). Le Théorème de Connexité de Zariski montre que la condition $\phi_*\,\mathcal{O}_{\overline{M}} = \mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ entraîne la connexité des fibres $\overline{M} \otimes \mathbb{F}_p$ ($p \not|\Delta$). La lissité de $\overline{M} \otimes \mathbb{F}_p$ entraîne alors l'irréductibilité géométrique de $M \otimes \mathbb{F}_p$. □

7. Formes de Hilbert et compactification minimale arithmétiques.

On suppose dans cette partie que $d = d_F > 1$ ($F \neq \mathbb{Q}$). Nous savons qu'une forme modulaire de Hilbert classique (sur $\mathbb{C}$) est uniquement déterminée par son q-développement en une pointe $\mathcal{C}$, que la condition d'holomorphie à l'infini est automatiquement satisfaite (Principe de Koecher) et qu'il n'y a pas de séries d'Eisenstein en poids non-parallèle.

Le but de cette partie est de décrire, en suivant [**57**], les propriétés du q-développement d'une forme de Hilbert arithmétique. C'est le point de départ dans [**6**] pour la construction de la compactification minimale arithmétique de M.

A partir de maintenant on se place au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$.

7.1. Formes modulaires de Hilbert arithmétiques. Le schéma $T_{1/\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ admet un modèle sur $\mathbb{Z}$, à savoir $T_1 = \mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. Notons que T_1 n'est un tore que sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta_F}]$ comme le suggère l'exemple suivant

EXEMPLE 7.1. Soit $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, avec $D \equiv 3 \pmod 4$ sans facteurs carrés. Alors $T_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X,Y][\frac{1}{X^2-DY^2}])$ et pour $p > 2$ premier on a : $T_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p^\times$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$; $T_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_{p^2}^\times$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$; $T_1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^\times \times \mathbb{F}_p$, si $\left(\frac{D}{p}\right) = 0$.

Pour tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma Y, on pose $Y' = Y \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])$, où $\mathfrak{o}'$ désigne l'anneau des entiers de $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times)$. On a introduit dans le paragraphe 3.1 le $\mathfrak{o}$-fibré inversible $\underline{\omega}$ sur M'. Considérons le faisceau $\underline{\mathfrak{M}}' = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}, \underline{\omega})$. C'est un T_1'-torseur Zariski sur M'.

Comme T_1' est affine sur M', le faisceau $\underline{\mathfrak{M}}'$ est représentable par un schéma $\pi' : \mathfrak{M}' \to M'$ (*cf* [**50**] III.4 Théorème 4.3). En particulier on a un isomorphisme

$$T_1' \underset{M'}{\times} \mathfrak{M}' \cong \mathfrak{M}' \underset{M'}{\times} \mathfrak{M}' \ , \ (t,x) \mapsto (tx, x).$$

Le T_1'-torseur $\mathfrak{M}'$ est géométriquement irréductible sur M'.

REMARQUE 7.2. Sur le schéma de modules fin M^1, le schéma correspondant $\mathfrak{M}^1$ représente le foncteur $\underline{\mathfrak{M}}^1 : \mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]\text{-Sch} \to \mathrm{Ens}$, qui à un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma S associe l'ensemble des quintuplets $(A, \iota, \lambda, \alpha, \omega)$ modulo isomorphisme, où $(A, \iota, \lambda, \alpha)$ est une VAHB, comme dans le paragraphe 3.1, et où ω est un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-fibrés inversibles $\omega : \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S \cong \underline{\omega}_{A/S}$.

Pour la définition de l'espace des formes modulaires de Hilbert, nous suivons de près le paragraphe 6.8 de [**57**], rédigé par P. Deligne.

Soit $k \in \mathbb{Z}[J_F] = X(T_1)$ un poids (*cf* I.2.2) et soit F' désormais un corps de nombres, contenant $\mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times)$ ainsi que les valeurs du caractère $k : F^\times \to \mathbb{C}^\times$.

On peut prendre, par exemple, $F' = \mathbb{Q}(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times)$ et $k = k_0 t$ (poids parallèle), ou bien $F' = \widetilde{F}(\sqrt{\epsilon}, \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times)$ et $k \in \mathbb{Z}[J_F]$ poids quelconque.

Soit $\mathfrak{o}'$ l'anneau des entiers de F'. Le morphisme de groupes algébriques $k : \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^{F'} \mathbb{G}_\mathrm{m}$, se prolonge en un morphisme $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{o}} \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{o}'} \mathbb{G}_\mathrm{m}$, qui équivaut (par la formule d'adjonction) à un morphisme de groupes algébriques sur $\mathfrak{o}'$, $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}}^{\mathfrak{o}} \mathbb{G}_\mathrm{m} \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}') \to \mathbb{G}_\mathrm{m} \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}')$, noté encore k.

Le tore déployé T_1' agit sur $\pi'_* \mathcal{O}_{\mathfrak{M}'}$. La composante $(-k)$-isotypique $(\pi'_* \mathcal{O}_{\mathfrak{M}'})[-k]$ est un faisceau inversible sur M', noté $\underline{\omega}^k$.

DÉFINITION 7.3. 1) Soit R une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}, \sqrt{\epsilon}; \epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times]$-algèbre. On définit l'espace des formes modulaire de Hilbert de niveau Γ et à coefficients dans R comme

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{M} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}).$$

2) Soit R une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre. Une forme modulaire de Hilbert arithmétique de poids k, de niveau Γ et à coefficients dans R, est une section globale de $\underline{\omega}^k$ sur $M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R)$. On note $G_k(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}} := \mathrm{H}^0(M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^k)$ l'espace de ces formes modulaire de Hilbert.

REMARQUE 7.4. 1) Le faisceau $\underline{\omega}^t$ ($t = \sum_{\tau \in J_F} \tau$) n'est autre que le faisceau $\wedge^d \underline{\omega} = \det(\underline{\omega})$ sur M, et $\underline{\omega}^{kt}$ - sa puissance k-ième. Les formes modulaires de Hilbert de poids parallèle $k \geq 1$, s'écrivent donc $G_{kt}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{geom}} = \mathrm{H}^0(M, (\wedge^d \underline{\omega})^{\otimes k})$.
2) Le torseur $\mathfrak{M}$ n'est pas trivial, car sinon pour tout $k \geq 1$ $(\wedge^d \underline{\omega})^{\otimes k}$ serait le fibré trivial sur M, et à fortiori sur M^{an}. Or, par le principe de Koecher $\mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}}) =$

$\mathrm{H}^0(\overline{M^{\mathrm{an}}}, \mathcal{O}_{\overline{M^{\mathrm{an}}}}) = \mathbb{C}$, ce qui contredirait l'existence de formes modulaires de Hilbert cuspidales non-nulles en poids kt.
3) Si $F' \supset F^{\mathrm{gal}}$, on a $T_1' := T_1 \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]) \cong \mathbb{G}_m^{J_F} \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])$ et par le théorème de diagonalisabilité des tores [**39**], on a :

$$\pi'_* \mathcal{O}_{\mathfrak{M}'} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}[J_F]} \underline{\omega}^k \ , \quad \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}', \mathcal{O}_{\mathfrak{M}'}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}[J_F]} \mathrm{H}^0(M', \underline{\omega}^k).$$

L'action de $\mathfrak{o}^\times$ sur le fibré inversible $\underline{\omega}^k$ se fait par $-k$.

Par ailleurs, l'action de $\mathfrak{o}$ permet de décomposer $\underline{\omega}' = \mathrm{Lie}(\mathcal{A}'/M')^\vee \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}$ en somme directe de fibrés inversibles $\underline{\omega}^\tau$ sur M', indexés par les différents plongements τ de $\mathfrak{o}$ dans $\mathfrak{o}'$. On a $\underline{\omega}^k = \otimes_\tau (\underline{\omega}^\tau)^{\otimes k_\tau}$.
4) Si R est une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre, avec $F' \supset F^{\mathrm{gal}}$, on a :

$$G(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}[J_F]} G_k(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}}.$$

7.2. Principe de Koecher. Soit $\overline{\pi} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ le schéma semi-abélien au-dessus d'une compactification toroïdale $\overline{M^1}$ de M^1, comme dans la partie précédente. Le faisceau $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} := \overline{e}^* \Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$, où $\overline{e} : \overline{M^1} \to \mathfrak{G}$ désigne la section unité, prolonge le faisceau $\underline{\omega}_{\mathcal{A}/M^1}$. En outre $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ coïncide avec le faisceau $(\overline{\pi}_* \Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})^{\mathfrak{G}}$ des $\mathfrak{G}$-invariants de $\overline{\pi}_* \Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$. En passant aux cartes formelles, on voit comme dans [**57**], qu'au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, le faisceau $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ est un $\mathfrak{o}$-fibré inversible. De plus, d'après le paragraphe 3.1, il descend en un $\mathfrak{o}$-fibré inversible sur $\overline{M}'$, noté $\underline{\omega}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}[J_F]$, on peut ainsi prolonger le fibré inversible $\underline{\omega}^k$ sur $\overline{M}'$. D'après le paragraphe 1.2 pour toute $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$, tout cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ et pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre R on a $\underline{\omega}|_{S_\sigma^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)} = \mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S_\sigma^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)}$, d'où :

$$\underline{\omega}^k|_{S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)} = (\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge} \otimes R)^{-k} = (\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}'[\tfrac{1}{\Delta}])^{-k} \otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]} (\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge} \otimes R)^{-k} \tag{II.5}$$

Par conséquent $\mathrm{H}^0(S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)/\,\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times, \underline{\omega}^k) = \mathfrak{a}^{(k)} \otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]} R_{\mathcal{C}}^{(k)}(R)$, où $\mathfrak{a}^{(k)} = (\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])^{-k}$ est un $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-module inversible et

$$R_{\mathcal{C}}^{(k)}(R) := \left\{ \sum_{\xi \in X_+ \cup \{0\}} a_\xi q^\xi \middle| a_\xi \in R, \ \ a_{u^2 \epsilon \xi} = \epsilon^{k/2} u^k \zeta_{\mathcal{C}}^{n \, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi^*_{u,\epsilon})} a_\xi, \ \ \forall (u, \epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times \right\}.$$

Notons que $\xi u \xi_u^* \in \mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$ est bien défini modulo $\mathfrak{d}^{-1}$, et donc $n \, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi_u^*) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on rappelle que $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$ et n est l'ordre de $\zeta_{\mathcal{C}}$).

On a $R_{\mathcal{C}}^{(k)}(R) = \mathrm{H}^0\left(S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge \times \mathrm{Spec}(R), (\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge} \otimes R)^{-k}\right)^{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times}$.

Le diagramme suivant montre comment l'anneau $R_{\mathcal{C}}^{(k)}(R)$ se situe par rapport aux différents anneaux déjà considérés dans le paragraphe 1.2 :

$$\begin{tikzcd}
 & R[q^\xi]_{\xi \in X_+ \cup \{0\}} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & R_\sigma \otimes R = R[q^\xi]_{\xi \in X \cap \check{\sigma}} \arrow[d, hook] \\
R_{\mathcal{C}}^{(k)}(R) \arrow[r, hook] & \mathbb{R}[[q^\xi]]_{\xi \in X_+ \cup \{0\}} \arrow[r, hook] & R_\sigma^\wedge \otimes R
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME 7.5. *(Principe de Koecher* [**57**] *4.9) Soit R une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre et soit $\overline{M}$ une compactification toroïdale de M (on rappelle que $d > 1$). Alors*

$$\mathrm{H}^0\left(M \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^k\right) = \mathrm{H}^0\left(\overline{M} \times \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^k\right)$$

Démonstration : Le problème est local et il suffit de le vérifier après complétion, le long d'une $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$. D'après la trivialisation (II.5) du fibré inversible $\underline{\omega}^k$, il s'agit de voir que les sections globales méromorphes $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$-équivariantes du faisceau $(\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}} \otimes R)^{-k}$ sur $S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R)$ appartiennent à $R^{(k)}_{\mathcal{C}}(R)$. Soit $f = \sum_{\xi \in X} a_\xi q^\xi$ une telle section. Supposons que $a_{\xi_0} \neq 0$ avec ξ_0 non totalement positif. Il existe donc $\xi_0^* \in X^*_{\mathbb{R}+}$ avec $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi_0\xi_0^*)$ strictement négatif. Comme $F \neq \mathbb{Q}$, on peut choisir des unités $u \in \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C},1}$ de manière à rendre la quantité $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u^2\xi_0\xi_0^*)$ arbitrairement proche de $-\infty$. Soit σ un cône polyédral de $\Sigma^{\mathcal{C}}$ contenant ξ_0^*. Par définition de $S^{\wedge}_{\sigma}$, on voit que f n'est pas méromorphe sur $S^{\wedge}_{\sigma}$, ce qui est absurde. Donc $f \in R^{(k)}_{\mathcal{C}}(R)$. □

7.3. q-développement. Le paragraphe précédent montre que l'on peut associer à une $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$ et à une forme modulaire de Hilbert f de poids k, niveau Γ, et à coefficients dans une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre R, un élément :

$$f_{\mathcal{C}} \in \mathfrak{a}^{(k)} \otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]} R^{(k)}_{\mathcal{C}}(R).$$

DÉFINITION 7.6. L'élément $f_{\mathcal{C}}$ est appelé le q-développement de la forme f en la $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}$ l'application $f \mapsto f_{\mathcal{C}}$.

Le principe du q-développement s'énonce alors :

PROPOSITION 7.7. *Soient k un poids, $\mathcal{C}$ une $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée et R une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre (contenant les valeurs de k). Alors*

(i) *l'application $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}$ est injective,*

(ii) *pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre $R' \supset R$ et pour tout $f \in G_k(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R')$ on a*

$$\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}(f) \in \mathfrak{a}^{(k)} \otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]} R^{(k)}_{\mathcal{C}}(R) \Longrightarrow f \in G_k(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R),$$

(iii) *s'il existe $f \in G_k(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ tel que le terme constant a_0 de $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}(f)$ ne soit pas nul, alors $\epsilon^{k/2}u^k - 1$ est un diviseur de zéro dans R, pour tout élément $(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration : Comme dans le cas analytique, le (iii) découle du fait que pour tout $(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}}$ on a $a_0 = \epsilon^{k/2}u^k a_0$.

L'énoncé (ii) dans le cas de l'anneau nul $R = 0$ redonne (i). Les deux énoncés résultent du suivant: soit R un groupe abélien; l'application $f \mapsto f_{\mathcal{C}}$:

$$\mathrm{H}^0(\overline{M}', \underline{\omega}^k \otimes R) \to \mathfrak{a}^{(k)} \otimes R[[q^\xi; \xi \in X_+ \cup \{0\}]]$$

est injective (on utilise le principe de Koecher pour passer à $\overline{M}'$).

Par commutation des deux membres aux limites inductives, on se ramène aisément au cas $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$. Par l'irréductibilité géométrique de $\mathfrak{M}^1$ sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, une section globale s de $\underline{\omega}^k$ sur $\overline{M^1} \otimes \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$ est nulle, si et seulement si son pull-back à la complétion de $\overline{M^1} \otimes \mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z}$ le long d'un diviseur est nul. Il suffit donc de voir que le pull-back de s à $S^{\wedge}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}}$ soit nul c'est-à-dire que $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}(s)$ soit nul. □

Remarque 7.8. 1) L'application $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ somme des $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},k}$

$$G(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}[J_F]} G_k(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R) \to R\otimes\mathbb{Z}[[q^\xi;\xi\in X_+\cup\{0\}]]$$

n'est pas injective en général comme le montre l'exemple de $F=\mathbb{Q}$, $R=\mathbb{F}_p$, $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: le noyau de $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} G_k(\mathfrak{c},\mathfrak{n};\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p[[q]]$$

est l'idéal engendré par $E_{p-1}-1$.

2) Pour F totalement réel quelconque, le noyau de la flèche $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}\otimes\mathbb{F}_p$ à été calculée par Goren (*cf* [**28**] Chap.5, Cor.4.5).

3) En fait, si R est une $\mathbb{Z}$-algèbre sans torsion, $\mathrm{ev}_{\mathcal{C}}$ est injective grâce au théorème de Dedekind d'indépendance linéaire des caractères distincts.

7.4. Compactification minimale.

La compactification minimale est la contrepartie arithmétique de la compactification de Satake sur $\mathbb{C}$. Contrairement au cas complexe, dans le cas arithmétique, la construction de la compactification minimale utilise les compactifications toroïdales. Voici l'analogue en niveau Γ de l'énoncé donné par C.-L. Chai dans [**6**].

Théorème 7.9.

(i) *Il existe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que le faisceau $\underline{\omega}^{k_0t}_{\mathcal{A}/M^1}$, soit engendré par ses sections globales sur $\overline{M^1}$.*

(ii) *Le morphisme canonique $\pi:\overline{M^1}\to M^{1*}:=\mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}\left(\oplus_{k\geq 0}\mathrm{H}^0(\overline{M^1},\underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})\right)$, est surjectif. Le $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma M^{1*} est indépendant du choix de Σ (on rappelle que $\overline{M^1}=M^1_\Sigma$).*

(iii) *L'anneau gradué $\oplus_{k\geq 0}\mathrm{H}^0(\overline{M^1},\underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ et M^{1*} est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma projectif, normal, de type fini. Le groupe $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+}\cap\mathfrak{o}^{\times 2}_{\mathfrak{n}})$ du revêtement fini étale $\overline{M^1}\to\overline{M}$ agit sur M^{1*} et le quotient est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma projectif, normal, de type fini M^*, muni d'un morphisme surjectif $\pi:\overline{M}\to M^*$.*

(iv) *$\pi|_M$ induit un isomorphisme sur un ouvert dense de M^*, noté encore M. $M^*\backslash M$ est fini et étale sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ et en fait isomorphe à :*

$$\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim}\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}}).$$

Les composantes connexes de $M^*\backslash M$ sont appelées les pointes de M. Cependant celles-ci ne sont des points fermés que pour les $(R,\mathfrak{n})$-composantes non-ramifiées.

(v) *L'image réciproque $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ de chaque pointe $\mathcal{C}$ de M, est une composante connexe de $\overline{M}\backslash M$. La complétion formelle de $\overline{M}$ le long de l'image réciproque d'une composante $\pi^{-1}(\mathcal{C})$, est canoniquement isomorphe à $(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}})\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})$. En particulier, la complétion formelle de $\overline{M}$ le long de l'image réciproque $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ d'une $(R,\mathfrak{n})$-composante non-ramifiée $\mathcal{C}$, est canoniquement isomorphe à*

$$(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/(\mathfrak{o}^\times_{\mathfrak{n}}\times\mathfrak{o}^\times_{D+}))\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]).$$

(vi) *Pour tout $\kappa\in\mathbb{Z}[J_F]$ le faisceau $\underline{\omega}^\kappa$ s'étend en un faisceau inversible sur M^* si et seulement si κ est parallèle.*

Démonstration : Nous suivons la méthode de C.-L. Chai [**6**]. D'après [**52**] Chap.IX Thm.2.1 (*cf* aussi [**21**] Chap.V Prop.2.1), il existe $k_0 \geq 1$ tel que le faisceau inversible $\underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}$ soit engendré par ses sections globales sur $\overline{M^1}$. Ceci nous fournit un morphisme

$$\overline{M^1} \to \mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}\left(\mathrm{Sym}^\bullet \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1})\right).$$

Soit $B^\bullet$ la normalisation de $\mathrm{Sym}^\bullet \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0 t}_{\mathcal{A}/M^1})$ dans $\underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0 t}_{\mathcal{A}/M^1})$. Le morphisme associé $\pi : \overline{M^1} \to \mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}(B^\bullet)$ est birationnel, surjectif et satisfait $\pi^*\mathcal{O}(1) = \underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}$. Le Théorème de Connexité de Zariski implique alors que les fibres de π sont connexes. D'après [**21**] Chap.V Prop.2.2, la partie abélienne est constante dans chaque fibre géométrique de π, et par conséquent les fibres géométriques de π sont
– soit des points géométriques de M^1,
– soit des composantes géométriques connexes de $\overline{M^1}\backslash M^1$.

Comme pour tout $k \geq 1$, $\pi^*\mathcal{O}(k) = \underline{\omega}^{k_0 kt}_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}$ est engendré par ses sections globales sur $\overline{M^1}$, on obtient $\mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Proj}(B^\bullet), \mathcal{O}(k))$. Par conséquent $B^\bullet = \underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0 t}_{\mathcal{A}/M^1})$ et c'est une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-algèbre de type fini. Or, l'algèbre $\underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})$ est entière sur $\underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0 t}_{\mathcal{A}/M^1})$, engendrée par les éléments de degré plus petit que k_0. Il en résulte que $\underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$, et que $M^{1*} := \mathrm{Proj}(\underset{k\geq 0}{\oplus} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})) = \mathrm{Proj}(B^\bullet)$. Par le principe de Koecher, le schéma M^{1*} est indépendant du choix particulier de la compactification toroïdale $\overline{M^1}$ de M^1. Le groupe $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+} \cap \mathfrak{o}^{\times 2}_{\mathfrak{n}})$ agit sur M^{1*} et on définit M^* comme le quotient. Notons qu'en général $M^{1*} \to M^*$ n'est pas étale, car les pointes peuvent avoir des stabilisateurs non-triviaux.

On a donc (i),(ii),(iii) et la première partie de (iv). Le calcul de la complétion formelle de $\overline{M}$, le long de l'image réciproque d'une composante connexe de $M^*\backslash M$ découle du Théorème des Fonctions Formelles de Grothendieck.

Enfin, examinons à quelle condition $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ descend en un fibré inversible sur M^{1*}. Comme $(\pi_* \underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})|_{M^1} = \underline{\omega}^\kappa_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\mathrm{codim}(M^{1*}\backslash M^1) \geq 2$, le faisceau $\pi_* \underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ est cohérent. Il est inversible si et seulement si $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ peut être trivialisé sur $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1} \times \mathrm{Spec}(R)$. D'après (II.5) le pull-back de $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ à $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R)$ est canoniquement trivial et $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ agit sur ce pull-back à travers κ, d'où (vi). □

7.5. Exemples de q-développements en une pointe ramifiée. Nous nous proposons de décrire explicitement dans le cas particulier de l'exemple 2.4(ii)(iii) les anneaux $R^{(\kappa)}_{\mathcal{C}}(R)$ contenant les q-développements des formes modulaires de Hilbert de poids κ et niveau Γ. Rappelons que $\mathfrak{o}'$ désigne les entiers d'un corps de nombres contenant les valeurs du caractère κ. On suppose que $\mathrm{Cl}_F = \{1\}$.

Plaçons nous dans le cas (ii). Le bord $M^{1*}\backslash M^1$ s'écrit alors

$$\coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{non-ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\right]\right) \coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{peu ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_p\right]\right) \coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{très ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{p^2}\right]^{\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^\times_{\mathfrak{p}^2}}\right)$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{o}_+}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times\right\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est peu ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta},\zeta_p]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa \zeta_p^{p\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)}a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\right\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est très ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta},\zeta_{p^2}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-2}}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa \zeta_{p^2}^{p^2\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)}a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times\right\}.$$

En fait, d'après la démonstration de la Prop.2.3(iv), on a $\xi_u^*\in\mathfrak{p}^2\mathfrak{d}^{-1}$ et donc $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)\in\mathbb{Z}$ (alors qu'à priori il appartient juste à $p^{-2}\,\mathbb{Z}$!). On en déduit que

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-2}}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times\right\},$$

ce qui est compatible avec le fait que ζ_{p^2} n'appartient pas au corps de définition de la pointe $\mathcal{C}$, qui est $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})^{\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times}$ (notons que $-1\in\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times$).

Plaçons nous dans le cas (iii). Le bord $M^{1*}\backslash M^1$ s'écrit alors

$$\coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{non-ramifiés}/\sim}}\mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\right]\right)\coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{ramifiés}/\sim}}\mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_p\right]^{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times}\right).$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{o}_+}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\right\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta},\zeta_p]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa \zeta_p^{p\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)}a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\right\}.$$

En fait, d'après la démonstration de la Prop.2.3(iv), on a $\xi_u^*\in\mathfrak{p}\mathfrak{d}^{-1}$ et donc $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)\in\mathbb{Z}$ (alors qu'à priori il appartient juste à $p^{-1}\,\mathbb{Z}$!). On en déduit que

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)=\left\{\sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}}a_\xi q^\xi | a_\xi\in R,\;\; a_{u^2\xi}=u^\kappa a_\xi,\;\;\forall u\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times\right\},$$

ce qui est compatible avec $\zeta_p\notin\mathbb{Q}(\zeta_p)^{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times}=$ corps de définition $\mathcal{C}$ (on a $-1\in\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$).

8. Compactifications toroïdales des variétés de Kuga-Sato.

Dans toute cette partie, on se limite au cas du groupe de niveau $\Gamma^1 = \Gamma^1_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, ($D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$), de sorte qu'il y a une VAHB analytique universelle $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \to M^{1,\mathrm{an}}$.

8.1. Compactifications toroïdales des variétés analytiques de Kuga-Sato. La variété analytique de Kuga-Sato $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ est définie comme le produit fibré s-fois de $\mathcal{A}^{\mathrm{an}}$ au-dessus de $M^{1,\mathrm{an}}$. Soit $\overline{M^{1,\mathrm{an}}}$ une compactification toroïdale de $M^{1,\mathrm{an}}$, comme dans la partie I.6. On note de même $\mathfrak{G}^s$ le produit fibré s-fois de $\mathfrak{G}$ par lui-même au-dessus de $\overline{M^{1,\mathrm{an}}}$. On veut compactifier $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ en une variété analytique lisse $\overline{\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}}$, qui est projective au-dessus de $\overline{M^{1,\mathrm{an}}}$, et telle que l'action par translation de $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$ sur elle-même se prolonge en une action de $\mathfrak{G}^s$ sur $\overline{\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}}$. Le caractère naturel de ce prolongement sera détaillé dans l'énoncé du théorème 8.4 plus bas.

Nous procéderons en effectuant des compactifications partielles de chaque pointe à l'aide d'immersions toroïdales, puis en recollant ces dernières on obtiendra la compactification cherchée.

Si on pose $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}_{\gamma,H} = \gamma^{-1}\Gamma^1\gamma \cap B_{\mathbb{R}} \backslash (W_H \times (F \otimes \mathbb{C})^s)/(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)^s$, la description de la VAHB au voisinage de la pointe $\mathcal{C} = \gamma\infty$, faite dans le paragraphe I.3.3, donne :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}_{\gamma,H} \arrow[d] & X^*\backslash (W_H \times (F \otimes \mathbb{C})^s)/(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)^s \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)^s)/\, \mathfrak{b}^s \arrow[d] \\
\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma \cap B_{\mathbb{R}} \backslash W_H & X^*\backslash W_H = D_{\gamma,H} \arrow[l, "\bmod\ \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}"'] \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* =: S_{\mathcal{C}}
\end{tikzcd} ,$$

où on rappelle que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ et $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$.

Le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ (produit semi-direct donné par $(\beta_1, .., \beta_s; u) \cdot (\beta'_1, .., \beta'_s; u') = (\beta_1 + \beta'_1 u^{-1}, .., \beta_s + \beta'_s u^{-1}; uu')$) agit à gauche sur $X^*_+ \times (\mathfrak{a}^*)^s$, ainsi que sur $(F \otimes \mathbb{R})_+ \times (F \otimes \mathbb{R})^s$, par :

$$(\beta_1, .., \beta_s; u) \cdot (q; l_1, ..., l_s) = (u^2 q, ul_1 + u^2 q\beta_1, ..., ul_s + u^2 q\beta_s)$$

Notons que cette action est bien définie, car $X^*\,\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^*$.

On aimerait ajouter à $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)^s$ une frontière analytique $\mathcal{F}$ au dessus de la frontière analytique $\mathcal{E}$ de $S_{\mathcal{C}}$ et sur laquelle $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ agit discontinument et de manière compatible avec l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ sur $\mathcal{E}$. Le quotient par $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ de l'adhérence de $q(D_{\gamma,H}) \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)^s$ dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes X^* \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)^s \cup \mathcal{F}$ serait alors la compactification partielle de la pointe $\mathcal{C}$ (*cf* I.6).

Le problème se traduit en le problème combinatoire suivant :

Soit un éventail complet Σ de $X^*_{\mathbb{R}+} = \{0\} \cup \mathbb{R}^{*J_F}_+$, stable pour l'action de $\mathfrak{o}^\times_+$ et qui contient un nombre fini d'éléments modulo cette action. Trouver un éventail complet $\widetilde{\Sigma}$ de $X^*_{\mathbb{R}+} \times (\mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}})^s$ stable pour l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times_+$, contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action et tel que la projection de chaque $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}$ sur $X^*_{\mathbb{R}+}$ soit un des $\sigma \in \Sigma$.

Soit ξ^*_0 un élément de X^*_+ de norme minimale. Soit $\varepsilon_1, .., \varepsilon_{d-1}$ une base de $\mathfrak{o}^{\times 2}$ et posons $\Pi = \{\prod_{i \in I} \varepsilon_i \mid I \subset \{1, .., d-1\}\}$. Alors l'ensemble Σ des intérieures des $\bigcap_{u \in U} \mathbb{R}_+ \operatorname{Conv}_{\varepsilon \in \Pi}(u\varepsilon\xi^*_0)$, avec U décrivant les sous-ensembles finis de $\mathfrak{o}^{\times 2}$, est un éventail complet de $X^*_{\mathbb{R}+}$, stable pour l'action de $\mathfrak{o}^\times_+$ et contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action.

Soit $e^{(1)},..,e^{(d)}$ une base de $\mathfrak{b}$ et posons $\Pi' = \{\sum_{i\in I} e^{(i)} \mid I \subset \{1,..,d\}\}$. Considérons l'ensemble $\widetilde{\Sigma}''$ des cônes fermés suivants :

$$\mathbb{R}_+ \operatorname{Conv}_{\varepsilon\in\Pi; e_1,..,e_s\in\Pi'} \Big((u^2\varepsilon^2\xi_0^*; (\beta_1+e_1)u\varepsilon^2, .., (\beta_s+e_s)u\varepsilon^2) \Big),$$

avec $\beta = (u;\beta_1,..,\beta_s)$ décrivant $(\mathfrak{o}^\times/\{\pm 1\}) \times \mathfrak{b}^s$.

Il ne suffit pas de prendre les intérieurs des intersections finies de tels cônes pour obtenir l'éventail cherché $\widetilde{\Sigma}$, car *l'intersection de deux cônes de* $\widetilde{\Sigma}''$ *n'est pas forcément une face de chacun.* Cependant, on n'en est pas loin, car une face donnée d'un cône de $\widetilde{\Sigma}''$ ne rencontre qu'un nombre fini parmi les autres cônes. De ce fait :

1) si on découpe un des cônes de $\widetilde{\Sigma}''$ (en prenant par exemple un point rationnel à l'intérieur, bien que cela ne soit pas forcément nécessaire) de façon que les autres cônes intersectent les nouveaux cônes ainsi obtenus en des faces de ces derniers, et

2) si on découpe les autres cônes en conséquence, en translatant le découpage 1) par le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$,

alors on obtiendra un nouvel ensemble de cônes fermés $\widetilde{\Sigma}'$ qui sera plus fin que $\widetilde{\Sigma}''$ et dans lequel l'intersection de deux cônes sera une face de chacun.

L'ensemble $\widetilde{\Sigma}$ des intérieurs des intersections finies de cônes de $\widetilde{\Sigma}'$ sera alors un éventail complet de $X^*_{\mathbb{R}+} \times (\mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}})^s$ stable pour l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$, contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action et tel que la projection de chaque $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}$ sur $(F\otimes\mathbb{R})_+$ soit un des $\sigma \in \Sigma$. Quitte à raffiner $\widetilde{\Sigma}$, on pourra le supposer lisse.

Par même méthode que dans la partie I.6 on obtient alors la compactification lisse cherchée de $\mathcal{A}^{\mathrm{an},s}$. L'énoncé précis sera donné plus tard dans cette partie, dans le cas arithmétique (le cas analytique en découle par les arguments habituels).

8.2. Compactifications arithmétiques des variétés de Kuga-Sato. On rappelle que dans cette partie, on se limite au cas du schéma de modules fin M^1, de sorte qu'il existe une VAHB universelle $\mathcal{A} \to M^1$.

Soit Σ un éventail Γ-admissible et $M^1 \hookrightarrow \overline{M^1} = M^1_\Sigma \hookleftarrow \overline{M^1}\backslash M^1$ la compactification toroïdale construite dans la partie 6, avec $\overline{M^1}\backslash M^1$ diviseur à croisements normaux.

Pour chaque entier $s \geq 1$ on définit la variété de Kuga-Sato $\mathcal{A}^s = \mathcal{A} \underset{M^1}{\times} ... \underset{M^1}{\times} \mathcal{A}$ (s-fois), qui est munie d'un morphisme projectif lisse $\pi_s : \mathcal{A}^s \to M^1$. Le but est de construire (en s'inspirant de [**21**]) des compactifications toroïdales $\mathcal{A}^s \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}^s} = \mathcal{A}^s_{\widetilde{\Sigma}} \hookleftarrow \overline{\mathcal{A}^s}\backslash\mathcal{A}^s$, avec $\overline{\mathcal{A}^s}\backslash\mathcal{A}^s$ diviseur à croisements normaux relatif, au dessus de la compactification toroïdale $\overline{M^1}$ de M^1. En d'autres termes on veut obtenir un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^s \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_s"] & \overline{\mathcal{A}^s} \arrow[d, "\overline{\pi_s}"] & \overline{\mathcal{A}^s}\backslash\mathcal{A}^s \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
M^1 \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \overline{M^1} \arrow[d] & \overline{M^1}\backslash M^1 \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]) &
\end{tikzcd},$$

avec $\overline{\pi_s}$ semi-stable et projectif.

L'importance de l'existence d'une variété $\overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M^1}$ pour chaque valeur de l'entier s apparaîtra clairement dans le chapitre III. Pour démontrer le théorème de dégénérescence de la suite spectrale BGG duale vers de Rham, on doit en effet recourir, suivant [**21**], VI.5.5, au théorème de Deligne de dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour $\overline{\pi_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M^1}$.

L'éventail considéré dans la partie précédente pour la compactification analytique ne peut pas être réutilisé ici, car la méthode de [**21**] utilise des éventails munis d'une fonction de polarisation. On utilise la décomposition de Voronoi-Delaunay, qui est naturellement munie d'une fonction de polarisation (*cf* aussi [**47**]).

8.3. Données de dégénérescence.

Définition 8.1. Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{o}$ tels que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{c}$. Des données de dégénérescence, pour la variété de Kuga-Sato consistent en :
– (polarisation) des morphismes $\mathfrak{o}$-linéaires $\phi_i : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$, $1 \leq i \leq s$.
– (flèche tautologique) une forme bilinéaire $b : \mathfrak{b} \times \mathfrak{a} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tout $m \in \mathfrak{o}$, $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $\beta \in \mathfrak{b}$ on ait $b(m\beta, \alpha) = b(\beta, m\alpha)$ et telle pour tout $1 \leq i \leq s$ l'application $b(\cdot, \phi_i(\cdot))$ soit une forme bilinéaire définie positive sur $\mathfrak{b}$.

Soit une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, donnée par un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2, une suite exacte de $\mathfrak{o}$-modules projectifs $0 \to \mathfrak{a}^* \to L \to \mathfrak{b} \to 0$ et d'une application $\mathfrak{o}$-linéaire injective $\alpha : \mathfrak{n}^{-1}\,\mathfrak{d}^{-1} / \mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\,L/L$. On associe à $\mathcal{C}$ l'idéal $X = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (*cf* Prop.2.3). À chaque $\xi^* \in X_+^*$ et $\mu_i \in \mathfrak{c}_+$, $1 \leq i \leq s$, on peut associer des données de dégénérescence $\phi_i = \phi_{\mu_i}$ et $b = b_{\xi^*}$ définies par :
pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{b}$ et $1 \leq i \leq s$ $\quad \phi_i(\beta) = \mu_i\beta$ et $b(\beta, \alpha) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi^*\alpha\beta)$.

On pose $C_+ = X_+^*$ et $\widetilde{C}_+ = C_+ \times (\mathfrak{a}^*)^s$.

Le groupe $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$ agit à gauche sur $\widetilde{C}_+$ (de même que dans (3.2) le groupe $(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \rtimes \Gamma^1$ agit sur $\mathfrak{H}_F \times (F \otimes \mathbb{C})$) par

$$\begin{cases} u \cdot (q; l_1, .., l_s) = (u^2 q; ul_1, .., ul_s) \\ (\beta_1, .., \beta_s) \cdot (q; l_1, .., l_s) = (q; l_1 + \beta_1 q, .., l_s + \beta_s q) \end{cases} .$$

8.4. Fonctions de polarisation. Le but est de construire :
• Un éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de $C_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{o}^\times$-admissible.
• Un éventail $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ de $\widetilde{C}_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-admissible et tel que pour tout $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, il existe $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ tel que $\mathrm{pr}_1(\widetilde{\sigma}) \subset \sigma$. Si de plus cette inclusion est une égalité l'éventail sera dit *équidimensionnel*.
• Une *fonction de support* sur $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, i.e. une fonction $\varphi : \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+} \to \mathbb{Q}$ qui est continue, convexe, entière sur $X^* \times (\mathfrak{a}^*)^s$ linéaire sur chaque $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ (donc linéaire par morceaux), $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-invariante et telle que pour tout $\lambda \geq 0$ $\varphi(\lambda \cdot) = \lambda\varphi(\cdot)$.

Si de plus φ est strictement convexe au-dessus de chaque $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ (i.e. pour tout $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$, il existe $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\widetilde{l}^* \in X \times \mathfrak{a}^s$ tels que $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{l} = (q, l) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma,\ n\varphi(\widetilde{l}) = \langle \widetilde{l}^*, \widetilde{l} \rangle\}$, alors φ est appelée une *fonction de polarisation*.

8.5. Décomposition de Voronoi-Delaunay. Fixons une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, ainsi que des $\mu_i \in \mathfrak{c}_+$, $1 \leq i \leq s$. On a ainsi des polarisations $\phi_i = \phi_{\mu_i}$, $1 \leq i \leq s$.

Pour tout choix de $\beta = (\beta_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathfrak{b}^s$, on définit une fonction :

$$\chi_\beta : \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+} \to \mathbb{Q}\ ,\ (q, l_1, .., l_s) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq s} b_q(\beta_i, \phi_i(\beta_i)) + 2l_i(\phi_i(\beta_i)).$$

L'application χ_β est la composée de

$$(q, l_1, .., l_s) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq s} q\mu_i\beta_i^2 + 2l_i\mu_i\beta_i$$

avec l'application trace $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : F \to \mathbb{Q}$.

Pour tout $\widetilde{l} = (q, l = (l_1, .., l_s)) \in \widetilde{C}_{\mathbb{Q}+}$ on pose

$$\varphi(\widetilde{l}) = \min_{\beta \in \mathfrak{b}^s} \chi_\beta(\widetilde{l}),$$

L'application φ est 1-*tordue*, au sens de [**21**], car pour tout $\beta \in \mathfrak{b}^s$ on a

$$\varphi(\beta \cdot (q,l)) = \min_{\beta' \in \mathfrak{b}^s} \chi_{\beta'}(q, l + q\beta) = \min_{\beta' \in \mathfrak{b}^s} \chi_{\beta+\beta'}(q,l) - \chi_\beta(q,l) = \varphi(\widetilde{l}) - \chi_\beta(\widetilde{l})$$

Pour $\sigma \in \Sigma$ fixé et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^s$ un sous-ensemble fini on définit :

$$\widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}} = \{\widetilde{l} = (q,l) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma, \ \forall \beta \in \mathfrak{b} \ \ \chi_\beta(\widetilde{l}) = \varphi(\widetilde{l})\}.$$

Proposition 8.2. *L'éventail* $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}}\}$ *est un éventail complet* $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times -$ *admissible, équidimensionnel de* $\widetilde{C}_+$ *et* φ *est une fonction de polarisation* 1*-tordue. Il existe une subdivision lisse de* $\widetilde{\Sigma}$*, muni d'une polarisation* k*-tordue, pour un certain* $k \geq 1$.

On se propose de calculer l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$ sur l'éventail $\widetilde{\Sigma}$.

Pour $\beta \in \mathfrak{b}^s$ on a $\chi_\beta(q,l) = \varphi(q,l)$, si et seulement si pour tout , $e \in \mathfrak{b}^s$ on a $\chi_{\beta+e}(q,l) - \chi_\beta(q,l) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta+e))\mu) \geq 0$. On en déduit

$$\widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}} = \{(q,l) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma, \ \forall \beta \in \mathfrak{b}, \ \forall e \in \mathfrak{b}^s \ \ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta+e))\mu) \geq 0\}.$$

Pour tout $u \in \mathfrak{o}^\times$ on a $u \cdot \widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}} =$
$= \{(u^2q, ul) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma, \forall \beta \in \mathfrak{b}, \forall e \in \mathfrak{b}^s \ \ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta+e))\mu) \geq 0\} =$
$\{(u^2q, ul) \in \widetilde{C}_+ | u^2 q \in u^2\sigma, \forall \beta, \forall e \, \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u^{-1}e(2ul + u^2q(2u^{-1}\beta + u^{-1}e))\mu) \geq 0\}$
$= \widetilde{\sigma}_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{b}}$.

Si $y \in \mathfrak{b}^s$ on a $y \cdot \widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}} =$
$= \{(q, l + qy) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma, \forall \beta \in \mathfrak{b}, \forall e \in \mathfrak{b}^s \ \ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2l + q(2\beta+e))\mu) \geq 0\}$
$= \{(q, l - 2qy) \in \widetilde{C}_+ | q \in \sigma, \forall \beta, \forall e \ \ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e(2(l+qy) + q(2(\beta - y) + e))\mu) \geq 0\}$
$= \widetilde{\sigma}_{\sigma, \mathfrak{b} - y}$.

Le diagramme suivant décrit l'action de $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$ sur l'éventail $\widetilde{\Sigma}$.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}} \arrow[r, "\cdot u"] \arrow[d, "\cdot y"] & \widetilde{\sigma}_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{b}} \arrow[d, "\cdot yu^{-1} = u \cdot y"] \\
\widetilde{\sigma}_{\sigma,\mathfrak{b}-y} \arrow[r, "\cdot u"] & \widetilde{\sigma}_{u^2\sigma, u^{-1}\mathfrak{b} - u^{-1}y}
\end{tikzcd}$$

8.6. Modèles relativement complets faibles. On introduit la notion de *modèles relativement complets faibles polarisés* dans le cas totalement dégénéré qui nous intéresse (*cf* [**21**] VI.1.7, ainsi que la partie 1.1).

Soit R un anneau excellent, intégralement clos, noethérien, complet pour la topologie I-adique, pour un idéal radiciel $I = \sqrt{I}$. Soit K le corps des fractions de R. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$, η son point générique et $S_0 = \mathrm{Spec}(R/I)$ le sous-schéma fermé défini par I.

Considérons le tore déployé $\widetilde{G} = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*)^s \times S = \mathrm{Spec}(R[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}^s])$ sur S. Un ensemble de périodes $\mathfrak{b}^s \subset \widetilde{G}(K)$ équivaut à la donnée d'une application bilinéaire non-dégénérée $\mathfrak{b}^s \times \mathfrak{a}^s \to K^\times$, $(\beta, \alpha) \mapsto \mathfrak{X}^\alpha(\beta)$. Une polarisation ϕ sur l'ensemble des périodes $\mathfrak{b}^s$ est la donnée d'un homomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire $\phi : \mathfrak{b}^s \to \mathfrak{a}^s$, tel que :

(i) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta') = \mathfrak{X}^{\phi(\beta')}(\beta)$, pour tout $\beta, \beta' \in \mathfrak{b}^s$,

(ii) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta) \in I$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}^s \setminus \{0\}$.

DÉFINITION 8.3. Un *modèle relativement complet faible polarisé* de $\widetilde{G}$, par rapport à $(\mathfrak{b}^s, \phi)$, est la donnée des éléments suivants :

(a) Un schéma intègre $\widetilde{P}$, localement de type fini sur R, dont la fibre générique est isomorphe à $\widetilde{G}_\eta$,

(b) Un faisceau inversible $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{P}$,

(c) Une action du tore $\widetilde{G}$ sur $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$, étendant l'action par translation sur la fibre générique et son faisceau structural. On note cette action $S_g : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$, $S_g^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}$,

(d) Une action de $\mathfrak{b}^s$ sur $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$, notée $T_\beta : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $T_\beta^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, étendant l'action de $\mathfrak{b}^s$ sur $\widetilde{G}_\eta$ par translation (via $\mathfrak{b}^s \subset \widetilde{G}(K)$).

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Il existe un ouvert $\widetilde{G}$-invariant $U \subset \widetilde{P}$ de type fini sur S et tel que $\widetilde{P} = \cup_{\beta \in \mathfrak{b}^s} T_\beta(U)$.

(ii) $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{P}$, au sens que les compléments des lieux des zéros des sections globales $\mathrm{H}^0(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$, $n \geq 1$, forment une base de la topologie de Zariski de $\widetilde{P}$.

(iii) Pour toute valuation v sur le corps des fonctions rationnelles sur $\widetilde{G}$, qui est positive sur R, on a :
v a du centre sur $\widetilde{P} \iff$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}^s$, il existe $\beta \in \mathfrak{b}^s$ avec $v(\mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha) \geq 0$.

L'intérêt des modèles relativement complets faibles polarisés $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$ est qu'en suivant les flèches du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{P} & \widetilde{\mathfrak{P}} \arrow[l, "\text{complétion}"'] \arrow[d, "\text{quotient formel par } \mathfrak{b}^s"'] \\ P & \mathfrak{P} \arrow[l, "\text{algébrisation}"] \end{tikzcd}$$

l'on peut construire "le quotient" $(P, \mathcal{L})$ de $(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}})$ par le groupe des périodes $\mathfrak{b}^s$. Nous allons utiliser cette construction dans le théorème suivant.

8.7. Énoncé et démonstration du théorème. Soient $\mu_i \in \mathfrak{c}_+$, $1 \leq i \leq s$. Soit $\mathcal{A}^s = \mathcal{A} \times_{M^1} \ldots \times_{M^1} \mathcal{A}$. Soit $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ un éventail complet et lisse de $C_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{o}^\times$-admissible et soit $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ éventail complet et lisse de $\widetilde{C}_{\mathbb{R}+}$ qui est $\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times$-admissible, équidimensionnel au-dessus de Σ et muni d'une fonction de polarisation k-tordue φ.

THÉORÈME 8.4. *Il existe un* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$*-schéma* $\overline{\mathcal{A}^s} = \mathcal{A}^s_{\widetilde{\Sigma}}$ *propre (et même projectif) sur* $\overline{M^1} = M^1_\Sigma$*, muni d'un faisceau inversible ample* $\mathcal{L}$ *tel que:*

(i) $\overline{\mathcal{A}^s}|_{M^1} = \mathcal{A}^s$ *est la variété de Kuga-Sato universelle au dessus de* M^1 *et* $\mathcal{L}|_{\mathcal{A}^s}$ *s'identifie avec la puissance tensorielle k-ième du faisceau inversible ample* $\otimes_i \mathrm{pr}_i^* \mathcal{L}_{\mu_i}$*, où pour* $1 \leq i \leq s$*,* $\mathrm{pr}_i : \mathcal{A}^s \to \mathcal{A}$ *désigne la i-ième projection et* $\mathcal{L}_{\mu_i}$ *désigne le faisceau ample inversible canonique sur* $\mathcal{A}$*, obtenu par pull-back du faisceau de Poincaré par le morphisme* $(\mathrm{id}_A, \lambda \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu_i))$*.*

(ii) $\overline{\mathcal{A}^s}$ *possède une stratification naturelle paramétrée par* $\widetilde{\Sigma}/(\mathfrak{b}^s \rtimes \mathfrak{o}^\times)$*.*

(iii) *Le schéma* $\overline{\mathcal{A}^s}$ *est lisse sur* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ *et* $\overline{\mathcal{A}^s} \backslash \mathcal{A}^s$ *est un diviseur à croisements normaux relatif sur* $\overline{M^1}$*. Le morphisme* $\overline{\pi_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M^1}$ *est semi-stable.*

Supposons que pour tout $\sigma \in \Sigma$*, il existe* $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}$ *tel que* $\sigma \times \{0\} = \widetilde{\sigma}$*. Alors :*

(iv) *Le schéma semi-abélien* $\mathfrak{G}^s$ *est contenu comme ouvert dense dans* $\overline{\mathcal{A}^s}$ *et la restriction de* $\mathcal{L}$ *à* $\mathfrak{G}^s$ *coïncide, comme dans le* (i) *avec la puissance tensorielle k-ième du faisceau inversible ample canonique* $\otimes_i \mathrm{pr}_i^* \mathcal{L}_{\mu_i}$*. De plus* $\mathfrak{G}^s \to \overline{M^1}$ *agit sur* $\overline{\mathcal{A}^s}$ *en prolongeant l'action de* $\mathcal{A}^s$ *sur lui-même par translation.*

(v) *Le faisceau* $\Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ *est isomorphe à* $\overline{\pi_s}^*(\underline{\omega}^{\oplus s}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})$.

(vi) *Pour tout couple d'entiers* $a,b\geq 0$, *on a des isomorphismes canoniques*

$$R^a\overline{\pi_s}_*\left(\bigwedge^b\Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)\right)\cong\bigwedge^a(\underline{\omega}^\vee_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\otimes_{\mathfrak{o}}\mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1})^{\oplus s}\otimes\bigwedge^b\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}{}^{\oplus s}$$

REMARQUE 8.5. La canonicité des isomorphismes de (vi) montre en particulier que les faisceaux $R^a\overline{\pi_s}_*\bigwedge^b\Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$ sont :

(i) indépendants du choix de la compactification toroïdale de $\mathcal{A}^s$ choisie,

(ii) munis d'une action naturelle de $\mathfrak{G}^s$ et de $\mathfrak{o}$,

(iii) libres sur $\mathcal{O}_{\overline{M^1}}\otimes\mathfrak{o}$.

Démonstration : On construit $P=\overline{\mathcal{A}^s}$ en suivant les étapes de [**21**] VI.1 :

Pour chaque $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ la projection de $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ sur $\Sigma^{\mathcal{C}}$ nous donne un morphisme d'immersions toroïdales (*cf* I.6.1) :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S}_{\mathcal{C}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}} \arrow[d] \\ S_{\mathcal{C}} \arrow[r, hook] & S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}, \end{tikzcd}$$

où $S_{\mathcal{C}}$ (resp. $\widetilde{S}_{\mathcal{C}}$) désigne le tore déployé de groupe des caractères X (resp. $X\times\mathfrak{a}^s$). Le morphisme $\widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}}\to S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ est équivariant pour l'action des tores $\widetilde{S}_{\mathcal{C}}\to S_{\mathcal{C}}$ et pour l'action des groupes $\mathfrak{b}^s\rtimes\mathfrak{o}^\times\to\mathfrak{o}^\times$.

Il est crucial de noter alors que :

– la fonction de polarisation $\varphi:\widetilde{C}_+\to\mathbb{Z}$ induit un faisceau inversible relativement ample $\mathcal{L}$ sur $S_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}}$ (*cf* [**44**]).

– le fait que φ est k-tordue nous donne, pour tout $\beta\in\mathfrak{b}^s$ et tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}^s=(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\otimes\mathfrak{a}^*)^s$ la relation

$$S_g^*T_\beta^*=\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(a)^{2k}T_\beta^*S_g^*,$$

qui est similaire à celle qui est imposée en plus pour les modèles relativement complets définis dans la partie 1.1.

– pour tout $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$ le pull-back de $(\widetilde{S}_{\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}},\mathcal{L})$ par le morphisme $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}\to S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ est un modèle relativement complet faible polarisé du tore $\widetilde{G}^s\times\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}$, relativement à $(\mathfrak{b}^s,(\phi_{\mu_i})_{1\leq i\leq s})$.

Ainsi, par le résultat principal sur ces modèles [**21**] VI.1.10, on obtient un schéma propre P_σ sur $\overline{S}_{\mathcal{C},\sigma}[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}]$, prolongeant le pull-back $\mathcal{A}^s_\sigma$ de la variété de Kuga-Sato universelle à $\overline{S}^0_{\mathcal{C},\sigma}[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}]$, et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}_\sigma$ sur P_σ, prolongeant le faisceau inversible ample canonique $\otimes_i\mathrm{pr}_i^*\mathcal{L}_{\mu_i}$ de $\mathcal{A}^s_\sigma$.

Par compatibilité des immersions toriques, comme dans [**21**] IV.3 p.104, on obtient un schéma propre

$$g_{\mathcal{C}}:P_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\to S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}],$$

appelé le "*bon modèle formel compact*" en la pointe $\mathcal{C}$, et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$ sur $P_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$. Le couple $(P_{\Sigma^{\mathcal{C}}},\mathcal{L}_{\Sigma^{\mathcal{C}}})$ descend à $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\,\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})$.

On peut alors algébriser et recoller ces schémas, ainsi que les faisceaux inversibles amples, pour obtenir un morphisme $\overline{\pi}:P\to\overline{M^1}$ et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur P, de sorte que :

1) $\overline{\pi}$ est projectif sur $\overline{M^1}$,

2) on a canoniquement $P|_{M^1}\cong\mathcal{A}^s$,

3) le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ agit sur P en prolongeant l'action par translation de $\mathcal{A}^s$ sur lui-même au-dessus de M^1,

4) si pour tout $\mathcal{C}$, $\widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ contient les $\sigma \times \{0\}$ pour tout $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, le schéma $\mathfrak{G}^s$ est muni d'une immersion ouverte $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow P$ d'image dense dans P, et le faisceau $j^*\mathcal{L}$ coïncide avec le faisceau ample canonique sur $\mathfrak{G}^s$ associé à $(\mu_1, \dots, \mu_s)$, via la $\mathfrak{c}$-polarisation canonique sur le schéma semi-abélien $\mathfrak{G}^s$ prolongeant celle de $\mathcal{A}^s$.

5) Pour tout cône $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{\Sigma}^{\mathcal{C}}$ et $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, avec $\mathrm{pr}_1(\widetilde{\sigma}) = \sigma$, la complétion formelle de $P \to \overline{M^1}$ le long de la $\widetilde{\sigma}$-strate (au-dessus de la σ-strate de $\overline{M^1}$) s'identifie, localement pour la topologie étale, au morphisme d'immersion toriques

$$\widetilde{S}_{\mathcal{C},\widetilde{\sigma}} \to S_{\mathcal{C},\sigma}.$$

Remarque 8.6. 1) Le qualificatif "faible" fait référence au fait que la construction de P à partir de $\widetilde{G}$, bien que du type de celle de Mumford (complétion, quotient par les périodes, puis algébrisation), ne suppose pas que le schéma $\widetilde{P}$ associé au tore déployé $\widetilde{G}$ contienne ce tore, (on a encore cependant $\widetilde{G}_\eta = \widetilde{P}_\eta$).

2) $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow P$ n'est pas une immersion toroïdale au-dessus de $\overline{M^1}$.

On pose $\overline{\mathcal{A}^s} = P$. Il reste à vérifier les énoncés (v) et (vi) du théorème. A partir de $j : \mathfrak{G}^s \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}^s}$, on obtient $j^* : \Omega^1_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \to \Omega^1_{\mathfrak{G}^s/\overline{M^1}}$ qui induit un isomorphisme sur $\overline{\pi_s}^* e^*\Omega^1_{\mathfrak{G}^s/\overline{M^1}} = \overline{\pi_s}^*(\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}{}^{\oplus s})$, d'où le (v).

Le (vi) se déduit à partir du (v) et du cup-produit, on a

$$\bigwedge^a R^1\overline{\pi_s}_*\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}^s}}\right) \to R^a\overline{\pi_s}_*(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}^s}}).$$

Pour montrer que cette flèche est un isomorphisme on se ramène d'abord par complétion aux bons modèles formels compacts (*cf* [**21**] VI.1.11), qui permettent de remplacer le morphisme $\overline{\pi_s} : \overline{\mathcal{A}^s} \to \overline{M^1}$ par les morphismes d'immersions toriques

$$g : \widetilde{S}_{\mathcal{C},\widetilde{\sigma}} \to S_{\mathcal{C},\sigma}.$$

On exploite alors l'action de $\widetilde{G}$ sur $R^a g_*(\mathcal{O}_{\widetilde{S}_{\mathcal{C},\widetilde{\sigma}}})$ qui permet de calculer la cohomologie des immersions toriques comme au bas de la page 208 de [**21**]. $\square$

Les points (v) et (vi) du théorème précédent sont en partie conséquence du fait plus général suivant que le complexe $R\overline{\pi}_*\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ (voir le lemme VI.3.4 de [**21**] qui se transpose sans changement à notre cas). On en déduit en particulier que le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ au-dessus de $\overline{M^1}$ et qu'il est muni d'une action de $\mathfrak{o}$. En fait, si on pose $j_M : M^1 \hookrightarrow \overline{M^1}$, alors $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ s'identifie au sous-faisceau de $j_{M*}\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{A}/M^1)$ des sections $\mathfrak{G}$-invariantes de $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{G}/\overline{M^1})$.

La suite spectrale de Hodge vers de Rham logarithmique fournit une suite exacte courte

$$0 \to \overline{\pi}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} \to R^1\overline{\pi}_*\,\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \to 0$$

qui est, elle-aussi, indépendante de $\overline{\mathcal{A}}$. La filtration de Hodge sur $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ est donc indépendante de $\overline{\mathcal{A}}$. On a la première partie de la

Proposition 8.7. *Étant donné un Γ-éventail complet Σ de C_+, le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ ne dépend pas du choix de la compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}$ au-dessus de $\overline{M^1}$; il en est de même pour sa* *filtration de Hodge et pour sa connexion logarithmique prolongeant la connexion de Gauss-Manin. Il est muni d'une action naturelle de $\mathfrak{G}$ et de $\mathfrak{o}$. La connexion de Gauss-Manin logarithmique est compatible avec la flèche de Kodaira-Spencer*

$$\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \to (\underline{\omega}^{\vee}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}) \otimes \Omega_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty).$$

Démonstration : On démontre que la connexion de Gauss-Manin possède un prolongement indépendant de $\overline{\mathcal{A}}$ et que ce prolongement est unique. Pour une compactification donnée $\overline{\mathcal{A}}$, on peut définir la connexion de Gauss-Manin logarithmique (*cf* [**40**], ainsi que la section 2 de [**43**] dans le cas non-logarithmique) comme suit.

Posons $\mathrm{Fil}^i\,\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty) = \mathrm{Im}(\overline{\pi}^*\Omega^i_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)\otimes\Omega^{\bullet-i}_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$ et considérons la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Fil}^1 / \mathrm{Fil}^2 \to \mathrm{Fil}^0 / \mathrm{Fil}^2 \to \mathrm{Fil}^0 / \mathrm{Fil}^1 \to 0 \tag{II.6}$$

La connexion de Gauss-Manin s'identifie alors au morphisme connectant

$$R^1\overline{\pi}_*\,\mathrm{gr}^0 \to R^2\overline{\pi}_*\,\mathrm{gr}^1\,.$$

Si l'on pose $\mathrm{Fil}^i_{\mathfrak{G}} = \mathrm{Fil}^i\,\Omega^\bullet_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty) = \mathrm{Im}(\overline{\pi}^*\Omega^i_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)\otimes\Omega^{\bullet-i}_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \to \Omega^\bullet_{\mathfrak{G}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$, où le dlog ∞ n'est relatif qu'aux pôles le long du diviseur vertical $\overline{\pi}^*\infty$ de $\mathfrak{G}$, on peut identifier (II.6) à la sous-suite (exacte) des $\mathfrak{G}$-invariants de

$$0 \to \mathrm{Fil}^1_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^2_{\mathfrak{G}} \to \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^2_{\mathfrak{G}} \to \mathrm{Fil}^0_{\mathfrak{G}} / \mathrm{Fil}^1_{\mathfrak{G}} \to 0,$$

qui ne dépend pas de $\overline{\mathcal{A}}$. Encore une fois, ceci résulte de ce que la connexion de Gauss-Manin sur $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}$-invariante; elle se prolonge donc localement de façon unique via l'identification $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{G}/\overline{M^1})^{\mathfrak{G}}$. □

9. Construction de fibrés automorphes sur la variété modulaire de Hilbert.

Les formes modulaires de Hilbert classiques peuvent être vues comme des sections globales de certains fibrés de formes différentielles holomorphes sur M^{an}. Dans cette partie nous donnons des constructions de fibrés automorphes sur M. Ces derniers peuvent servir pour redéfinir et étudier les formes modulaires de Hilbert arithmétiques, que nous avons déjà introduit dans le paragraphe 7.1.

Soit un poids algébrique k et $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.1. On notera V_n la représentation algébrique de G donnée par

$$V_n = \bigotimes_{\tau\in J_F} \mathrm{Sym}^{n_\tau} \otimes \mathrm{Det}^{m_\tau}\,. \tag{II.7}$$

Dans le cadre arithmétique le revêtement universel $\mathfrak{H}_F \to M^{\mathrm{an}}$ est remplacé par le torseur $\mathfrak{M}' \xrightarrow{T_1'} M'$ du paragraphe 7.1. On a un foncteur de la catégorie des représentations algébriques du $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes T_1', vers celle des fibrés décomposables en fibrés inversibles sur M', qui à W_1 associe le produit contracté $\mathfrak{M}' \overset{T_1'}{\times} W_1 =: \mathcal{W}_1$, défini comme le quotient par la relation d'équivalence $(mt, w) \sim (m, tw)$ pour $m \in \mathfrak{M}'$, $t \in T_1'$ et $w \in W_1$.

Remarque 9.1. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}[J_F] = X(T_1)$, notons $W_{1,k}$ la $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation de T_1' associée à k. On a $\mathcal{W}_{1,k} = \underline{\omega}^{-k}$. On peut ainsi redéfinir $G_k(\mathfrak{c},\mathfrak{n})^{\mathrm{geom}}$ comme $\mathrm{H}^0(M', \mathcal{W}^1_{-k})$.

• On suppose que D a un modèle entier sur $\mathbb{Z}$ (c'est le cas pour $D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ ou $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$). Rappelons que le $\mathfrak{o}$-fibré projectif de rang deux $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = R^1\pi_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}'/M'}$ est muni d'un accouplement parfait symplectique $\mathfrak{o}$-linéaire associé au choix d'un représentant λ de la classe de $\mathfrak{c}$-polarisations universelle $\overline{\lambda} = \mathfrak{o}^\times_{D+} \cdot\lambda$. On définit alors le D'-torseur

$$\mathfrak{M}'_{D'} = \mathrm{Isom}^{D'}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$$

au-dessus de M', dont les S-points sont ceux de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ induisant via λ un élément de $D'(\mathcal{O}_S)$ dans $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_S)^\times$.

• On choisit pour modèle entier du tore maximal standard T de B le schéma en groupes $T = T_1 \times D$. On en déduit un modèle entier de B dont T est tore maximal standard via $(u,\epsilon)\in T \mapsto \begin{pmatrix} u\cdot\epsilon & 0 \\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}$. On va définir un B'-torseur $\mathfrak{M}'_{B'} \xrightarrow{B'} M'$ à l'aide du $\mathfrak{o}$-fibré $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$ muni de la filtration de Hodge

$$0 \to \underline{\omega} \to \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \to \underline{\omega}\otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1} \to 0.$$

Soit $L_0 = \mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$. On munit $L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}$ de la filtration canonique à deux crans associée à B' : $0 \subset \mathfrak{c}^*\otimes\mathcal{O}_{M'} \subset L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}$. On définit alors $\mathfrak{M}'_{B'}$ comme le produit fibré de $\mathrm{Isom}^{\mathrm{fil}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{Isom}^{D'}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$ au-dessus de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})$. C'est un B'-torseur sur M'.

Il définit un foncteur $cf_{B'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes B' vers celle des fibrés sur M' qui sont des extensions successives de fibrés inversibles. Il est donné par le produit contracté : $V \mapsto \mathcal{V} := \mathfrak{M}'_{B'} \overset{B'}{\times} V$, (c'est-à-dire le quotient par la relation $(\widetilde{m}b, v)\sim(\widetilde{m}, bv)$, pour $\widetilde{m}\in\mathfrak{M}'_{B'}$, $b\in B'$ et $v\in V$).

Définition 9.2. On note $\mathcal{V}_n$ le fibré filtré sur M' image de V_n par $cf_{B'}$.

• Si W est une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation du tore T' (sur un $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-module libre de type fini) on peut la voir comme une représentation de B', en faisant agir le radical unipotent U' trivialement. Le foncteur $cf_{B'}$ associe à W un fibré $\mathcal{W}$ décomposable en somme directe de fibrés inversibles.

On pourrait également construire $\mathcal{W}$ à l'aide du T'-torseur $\mathfrak{M}'\times_{M'}\mathfrak{M}'_{D'}$.

Définition 9.3. Soient $n, m\in\mathbb{Z}[J_F]$ et $c\in\mathbb{Z}$ tels que $n + 2m = ct$. Soit $W_{n,c}$ la représentation irréductible de T', donnée par le caractère

$$(u,\epsilon)\in T'_1\times D'\mapsto u^n\epsilon^m.$$

On note $\mathcal{W}_{n,c}$ le fibré inversible sur M' image de $W_{n,c}$ par le foncteur $cf_{B'}$.

• Considérons le modèle entier de G sur $\mathbb{Z}$ donné par $\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\mathrm{GL}_2\times_{\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}} D$.

On introduit pour finir un G'-torseur $\mathfrak{M}'_{G'}\xrightarrow{G'} M'$ à l'aide de $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} = R^1\pi_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}'/M'}$ muni de sa connexion de Gauss-Manin qui est intégrable. Plus précisément, on munit $L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}$ de la connexion plate $\mathrm{Id}\otimes d$ et on pose

$$\mathfrak{M}'_{G'} = \mathrm{Isom}^{D'}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{M'}}(L_0\otimes\mathcal{O}_{M'}, \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}).$$

Il définit un foncteur $cf_{G'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes G' vers celle des fibrés sur M' munis d'une connexion intégrable. Il est donné par le produit contracté : $V \mapsto \mathcal{V}^\nabla := \mathfrak{M}'_G \overset{G'}{\times} V$, (c'est-à-dire le quotient par la relation $(\widetilde{m}g, v)\sim(\widetilde{m}, gv)$, pour $\widetilde{m}\in\mathfrak{M}'_G$, $g\in G'$ et $v\in V$).

Définition 9.4. On note $\mathcal{V}_n^\nabla$ le fibré à connexion sur M' image de V_n par $cf_{G'}$.

• Enfin, on peut construire de faisceaux à l'aide de la tour promodulaire $\widetilde{M_\mathbb{Q}} \to M_\mathbb{Q}$, où $\widetilde{M_\mathbb{Q}} = \operatorname{limproj}_{r\geq 1} M(\mathfrak{c},\mathfrak{n}\,r)_\mathbb{Q}$. On a une suite exacte

$$1 \to \pi_1^{\mathrm{geom}}(M_\mathbb{Q},x)^{\mathrm{mod}} \to \pi_1(M_\mathbb{Q},x)^{\mathrm{mod}} = \mathrm{Gal}(\widetilde{M_\mathbb{Q}}/M_\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}\,/\,\mathbb{Q}) \to 1.$$

De plus, le groupe $\pi_1(M_\mathbb{Q},x)^{\mathrm{mod}}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathfrak{o}})$; la projection sur la p-composante fournit un morphisme continu canonique

$$\pi_1(M_\mathbb{Q},x)^{\mathrm{mod}} \to \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p).$$

On a donc un foncteur de la catégorie des représentations algébriques de G, vers celle des faisceaux lisses sur $M_\mathbb{Q}$. Ce foncteur associe à la représentation V le faisceau $\mathbb{V}$ des sections continues du "revêtement" $\pi_1(M_\mathbb{Q},x)^{\mathrm{mod}}\backslash(\widetilde{M_\mathbb{Q}}\times V) \to M_\mathbb{Q}$.

Définition 9.5. On note $\mathbb{V}_n$ le faisceau lisse sur $M_\mathbb{Q}$ associé à V_n.

Pour une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation algébrique V de G, on peut comparer $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$ (*cf* Rque.I.5.1), $\mathbb{V}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^\nabla$ comme suit

Proposition 9.6. *1) Sur M', on a $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\nabla$ et*
2) Sur M^{an}, on a $\mathcal{V}\otimes_{\mathcal{O}_M}\mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}} \cong \mathbb{V}^{\mathrm{an}}\otimes\mathcal{O}_{M^{\mathrm{an}}}$ et $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}\otimes\mathbb{Z}_p \cong (\mathbb{V})^{\mathrm{an}}$.

Pour la démonstration de ce résultat, voir [**51**] Sect.5.2.2, lemme 9.

10. Prolongements des fibrés automorphes aux compactifications toroïdales.

Dans cette partie nous verrons l'une des grandes qualités des compactifications toroïdales, qui est que les fibrés automorphes, considérés dans la partie précédente, se prolongent à celles-ci. On rappelle que dans cette partie tous les schémas sont au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$.

10.1. Prolongement du fibré $\underline{\omega}$. Fixons un éventail Γ-admissible Σ et une compactification toroïdale $\overline{M^1} = M^1_\Sigma$, comme dans la partie 6. Rappelons que l'on a un schéma semi-abélien $\overline{\pi} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ et un $\mathfrak{o}$-fibré inversible $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} = \overline{e}^*\Omega_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ sur $\overline{M^1}$, où $\overline{e} : \overline{M^1} \to \mathfrak{G}$ désigne la section unité. De plus le fibré $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ descend en un $\mathfrak{o}$-fibré inversible sur $\overline{M}'$, prolongeant le $\mathfrak{o}$-fibré inversible $\underline{\omega}$ sur M', et que l'on note encore $\underline{\omega}$ (*cf* §.7.2). On a ainsi un T_1'-torseur de Zariski sur $\overline{M}'$, prolongeant le T_1'-torseur $\mathfrak{M}'$ sur M' :

$$\overline{\mathfrak{M}}' = \mathrm{Isom}_{\overline{M}'}(\mathcal{O}_{\overline{M}'}\otimes\mathfrak{o},\underline{\omega}).$$

À l'aide du torseur $\overline{\mathfrak{M}}'$ on obtient un foncteur allant de la catégorie des représentations algébriques du $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes T_1' vers celle des fibrés décomposables en fibrés inversibles sur $\overline{M}'$, qui à W_1 associe le produit contracté $\overline{\mathfrak{M}}' \overset{T_1'}{\times} W_1 =: \overline{\mathcal{W}}_1$. Le fibré $\overline{\mathcal{W}}_1$ prolonge à $\overline{M}'$ le fibré $\mathcal{W}_1$ de la partie précédente.

Si W_{st} est la représentation standard de T_1' (c'est-à-dire $\mathfrak{o}\otimes\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$ avec action de $\mathfrak{o}^\times$), on a $\overline{\mathcal{W}}_{\mathrm{st}} = \underline{\omega}^\vee$. Pour tout caractère k, vu comme $\mathfrak{o}'$-représentation de T_1', on obtient le prolongement canonique de $\underline{\omega}^k = \mathcal{W}_{1,-k}$ à $\overline{M}$, comme $\overline{\mathfrak{M}}' \overset{T_1'}{\times} \mathfrak{o}'(-k)$. Pour alléger les notations, on note encore $\underline{\omega}^k$ le prolongement canonique de $\underline{\omega}^k$ à $\overline{M}$.

10.2. Prolongement du fibré $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}$. Fixons un éventail admissible principalement polarisé $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\phi})$ pour $\mathcal{A}$ au-dessus de l'éventail admissible Σ pour M^1. Par le théorème 8.4 on a un morphisme de compactifications toroïdales $\overline{\pi} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{M^1}$ prolongeant $\pi : \mathcal{A} \to M^1$.

Dans ce qui suit, on posera pour abréger $\Omega^{\bullet}_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) = \Omega^{\bullet}_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}})$ et $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = R^1\overline{\pi}_*\Omega^{\bullet}_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty)$. Ce dernier faisceau est localement libre de rang 2 sur $\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M^1}}$. En outre, il est muni d'une filtration à deux crans donnée par la suite spectrale de Hodge vers de Rham :

$$0 \to \overline{\pi}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \to \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} \to R^1\overline{\pi}_*\,\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \to 0$$

Par le théorème 8.4(vi), on a des isomorphismes canoniques de faisceaux

$$\overline{\pi}_*\Omega_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty) \cong \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\ ,\ \text{et}\ R^1\overline{\pi}_*\,\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{A}}} \cong \underline{\omega}^{\vee}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}.$$

La filtration de $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ se réécrit donc

$$\mathrm{Fil}^0\ \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}\ ,\ \mathrm{Fil}^1\ \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}\ \text{et}\ \mathrm{gr}^0\ \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} = \underline{\omega}^{\vee}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} \otimes \mathfrak{c}\mathfrak{d}^{-1}.$$

Comme dans le paragraphe 3.1 le fibré $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ descend en un fibré sur $\overline{M}'$ jouissant aux mêmes propriétés et que l'on note de la même manière.

On définit le D'-torseur

$$\overline{\mathfrak{M}}_{D'} = \mathrm{Isom}^{D'}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$$

au-dessus de $\overline{M}'$, dont les S-points sont ceux de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$ induisant via λ un élément de $D'(\mathcal{O}_S)$ dans $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_S)^\times$.

On définit le B'-torseur $\overline{\mathfrak{M}}_{B'} \xrightarrow{B'} \overline{M}'$ comme le produit fibré de $\mathrm{Isom}^{\mathrm{fil}}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}((\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'})^2, \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$ et de $\overline{\mathfrak{M}}_{D'}$ au-dessus de $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}, \wedge^2_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$.

Il définit un foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{B'}$ de la catégorie des représentations algébriques du $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-schéma en groupes B' vers celle des fibrés sur $\overline{M}'$ qui sont des extensions successives de fibrés inversibles. Le foncteur est donné par $V \quad\mapsto\quad \overline{\mathcal{V}} := \overline{\mathfrak{M}}_{B'} \overset{\mathcal{B}'}{\times} V$.

Si $V_{st} = \mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]^2$ est la représentation standard de B', on a $\overline{\mathcal{V}}_{st} = \overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$.

DÉFINITION 10.1. Pour tout poids algébrique k et $n, m \in \mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.1, on note $\overline{\mathcal{V}}_n$ et $\overline{\mathcal{W}}_{n,c}$ les prolongements à $\overline{M}$ construits à l'aide de $\overline{\mathcal{F}}_{B'}$ des fibrés $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{W}_{n,c}$ des définitions 9.2 et 9.3.

REMARQUE 10.2. 1) Pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-représentation algébrique V de B', le fibré $\overline{\mathcal{V}}$ est le prolongement de Mumford de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire que son pull-back à toute carte locale donnée par une immersion torique $S_{\mathcal{C}} \overset{j}{\hookrightarrow} S_{\mathcal{C},\sigma^{\mathcal{C}}_{\alpha}}$ est engendré par les sections $S_{\mathcal{C}}$-invariantes de $j_*\mathcal{V}$. En effet, c'est vrai pour $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ par la proposition 8.7 et donc pour tout les fibrés obtenus par pléthysme à partir de $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$. Ceci implique par exemple, que pour tout un poids algébrique k et $m, n \in \mathbb{Z}[J_F]$, comme dans la définitions 2.1, le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{B'}$ fournit sur $\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{Q}_p$) le prolongement de Mumford de $\mathrm{Sym}^n\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \otimes (\wedge^2\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})^{\otimes m}$ et de $\underline{\omega}^k$.

2) Rappelons que sur une clôture galoisienne $\widetilde{F}$ de F, on a en posant

$$\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR},\tau,\widetilde{F}} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}} \otimes_{F,\tau} \widetilde{F}, \quad \underline{\omega}^{\tau} = \underline{\omega} \otimes_{F,\tau} \widetilde{F},$$

$$\mathrm{Sym}^n\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR},\widetilde{F}} = \bigotimes_\tau \mathrm{Sym}^{n_\tau}\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR},\tau,\widetilde{F}}\,,\ \text{et}\ \underline{\omega}^k = \bigotimes_\tau \mathrm{Sym}^{k_\tau}_{\widetilde{F}}\,\underline{\omega}^\tau$$

3) Soit p premier ne divisant pas Δ. Le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{B'}$ ne donne le prolongement de Mumford des faisceaux $R^s\pi_*\Omega^\bullet_{\mathcal{A}/M^1}$ sur $\overline{M^1}\otimes\mathbb{Z}_p$ que lorsque $s<p$. En effet, pour tout $s<p$, Illusie [**37**] a démontré que $R^s\overline{\pi}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$ est libre sur $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M^1}})$. Il en résulte que le foncteur $\overline{\mathcal{F}}_{B'}$ fournit le prolongement de Mumford de $M'\otimes\mathbb{Z}_p$ à $\overline{M}'\otimes\mathbb{Z}_p$ des faisceaux $\mathrm{Sym}^n\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}\otimes(\wedge^2\,\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}})^{\otimes m}$ lorsque $p-1>\sum_\tau(n_\tau+1)$.

10.3. Prolongement des fibrés à connexions. En utilisant la connexion de Gauss-Manin sur $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$, on définit un G'-torseur de Zariski :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{G'} = \mathrm{Isom}_{\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'}}(L_0\otimes\mathcal{O}_{\overline{M}'},\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}})$$

On définit ainsi un foncteur de la catégorie des représentations algébriques de G sur $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$ vers celle des fibrés sur $\overline{M}'$ munis d'une connexion à singularités logarithmique intégrable et dont la réduction modulo p est quasi-nilpotente en chaque $p\nmid\Delta$ (*cf* [**51**] Sect.5.2).

Définition 10.3. Pour tout poids algébrique k et $n,m\in\mathbb{Z}[J_F]$ comme dans la définition 2.1, on note $\overline{\mathcal{V}}^\nabla_n$ le prolongement à $\overline{M}'$ du fibré $\mathcal{V}^\nabla_n$ de la définition 9.4.

Remarque 10.4. L'utilisation du torseur $\mathfrak{M}_\nabla$ défini ici aurait simplifié substantiellement la présentation de la partie 5.2 de [**51**] en rendant la partie 5.2.3 inutile. Voici la méthode alternative :

Harris a construit des fibrés sur $\overline{M}_{\mathbb{Q}_p}$ compatibles avec celles que nous venons de construire sur $M_{\mathbb{Z}_p}$, au dessus de $M_{\mathbb{Q}_p}$. Le fibré $\mathcal{V}_\mathcal{O}$ se prolonge en un fibré $\widetilde{\mathcal{V}}_\mathcal{O}$ sur $\widetilde{M}_{\mathbb{Z}_p} := M_{\mathbb{Z}_p}\times_{M_{\mathbb{Q}_p}}\overline{M}_{\mathbb{Q}_p}$. Le complémentaire de l'image de l'inclusion $j:\widetilde{M}_{\mathbb{Z}_p}\hookrightarrow\overline{M}_{\mathbb{Z}_p}$ est de codimension au moins deux, et par conséquent $\overline{\mathcal{V}}_\mathcal{O} := j_*\widetilde{\mathcal{V}}_\mathcal{O}$ est un faisceau cohérent. Les faisceau $\overline{\mathcal{V}}$ (resp. $\overline{\mathcal{W}}$) ainsi construits sont localement libres, car la construction est fonctorielle, et pour la représentation standard trouve $\overline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$ (resp. $\mathrm{Lie}(\mathfrak{G}/\overline{M})$) qui le sont.

CHAPITRE III

Cohomologie p-adique des variétés modulaires de Hilbert

Le but de ce chapitre est le calcul des poids de Hodge-Tate de la cohomologie p-adique de la variété modulaire de Hilbert $\mathrm{H}^\bullet(M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$, ainsi que ceux des représentations galoisiennes associées aux formes modulaire de Hilbert. Partout dans ce chapitre nous faisons l'hypothèse suivante sur le premier p :

(I) p **ne divise pas** $\Delta = \Delta_F\,\mathrm{N}(\mathfrak{n})$.

Sous cette hypothèse la variété modulaire de Hilbert a bonne réduction en p, possède des compactifications lisses sur $\mathbb{Z}_p$, et les représentations galoisiennes p-adiques que nous considérons sont cristallines.

1. Cohomologie l-adique et de Betti des variétés modulaires de Hilbert.

On a le résultat de pureté suivant sur la cohomologie l-adique des variétés modulaires de Hilbert. Posons $s = \sum_\tau (n_\tau + 2m_\tau) = dn_0$.

Proposition 1.1. *Soit* $W_f = \bigcap_{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}} \ker(T_\mathfrak{a} - c(f,\mathfrak{a}))$ *le sous-espace de* $\mathrm{H}^d(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l))$, *associé à une forme modulaire de Hilbert propre* $f \in S_k(\mathfrak{n},\psi)$. *Alors* W_f *est pur de poids* $d+s$, *c'est-à-dire pour tout premier* p *ne divisant pas* $l\Delta$ *les valeurs propres du Frobenius géométrique* Frob_p *sont des nombres de Weil de valeur absolue* $p^{\frac{d+s}{2}}$.

Démonstration : Comme f est cuspidale $W_f \subset \mathrm{H}^d_!(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l))$. On rappelle que $Y_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est union disjointe de composantes connexes $M_{\overline{\mathbb{Q}}} = M_1(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{n})_{\overline{\mathbb{Q}}}$, où les $\mathfrak{c}_i$ forment un ensemble de représentants de Cl_F^+. Posons $M^1 = M_1^1(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{n})$. Pour $* = \varnothing, c$ on a

$$\mathrm{H}^0(\mathfrak{o}_+^\times/\mathfrak{o}_\mathfrak{n}^{\times 2}, \mathrm{H}^d_*(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l))) = \mathrm{H}^d_*(M_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l)),$$

et donc il suffit de démontrer que $\mathrm{H}^d_!(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l))$ est pur de poids $d(k_0-1)$. Nous utilisons la méthode de Deligne [**9**]. Soit $\pi : \mathcal{A} \to M^1$ la VAHB universelle. Le faisceau $\mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ correspond à la représentation $\otimes_{\tau\in J_F} \mathrm{Sym}^{n_\tau} \otimes \mathrm{Det}^{m_\tau}$ du groupe G^* et peut donc être découpé à l'intérieur de $(R^1\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_l)^{\otimes s}$. Soit $\pi_s : \mathcal{A}^s \to M^1$ la variété de Kuga-Sato. Par la formule de Kunneth, on a

$$\mathrm{H}^d_!(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, (R^1\pi_*\overline{\mathbb{Q}}_l)^{\otimes s}) \subset \mathrm{H}^d_!(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, R^s\pi_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_l) \subset \mathrm{H}^{d+s}_!(\mathcal{A}^s_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \subset \mathrm{H}^{d+s}(\overline{\mathcal{A}^s_{\overline{\mathbb{Q}}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l),$$

où l'inclusion du milieu vient de la dégénérescence des deux suites spectrales de Leray $E^{i,j}_{2*} = \mathrm{H}^i_*(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, R^j\pi_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_l) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_*(\mathcal{A}^s_{\overline{\mathbb{Q}}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ pour $* = \varnothing, c$ (*cf* [**9**]). La proposition découle alors des conjectures de Weil sur les valeurs propres des endomorphismes de Frobenius, démontrées par Déligne [**11**]. $\square$

Nous allons décrire maintenant un phénomène transcendant, dont on cherche à établir une version p-adique :

Soit V une $\mathbb{Q}$-représentation de G, de système local sur M^{an} associé $\mathbb{V}^{\mathrm{an}}$ (*cf* Rque.I.5.1). On peut prendre, par exemple, $V = V_n$.

La cohomologie de Betti en degré médian $\mathrm{H}^d(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}(\mathbb{C}))$ admet l'action du groupe de Weyl (*cf* I.5), ainsi que celle de la conjugaison complexe c sur les coefficients. On a une décomposition en espaces propres :

$$\mathrm{H}^d(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}(\mathbb{C})) = \bigoplus_{J\subset J_F} \mathrm{H}^J(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}(\mathbb{C})),$$

où, en notant χ_J la fonction caractéristique du sous-ensemble J de J_F, on a

$$\mathrm{H}^J(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}(\mathbb{C})) = \{x \mid (\epsilon_\tau \otimes c)(x) = -(-1)^{\chi_J(\tau)} x\}$$

Cette décomposition est plus fine que la décomposition donnée par la filtration bête, car pour tout entier i, $0 \leq i \leq d$, on a

$$\mathrm{gr}^i_{\text{bête}} \mathrm{H}^d(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}(\mathbb{C}))) = \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \mathrm{H}^J(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}^{\mathrm{an}}).$$

EXEMPLE 1.2. Si $F = \mathbb{Q}$ et $V = \mathbb{Q}$, la décomposition de Hodge de $\mathrm{H}^1(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ en $\mathrm{H}^{J_\mathbb{Q}}(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{1,0} \cong \mathrm{H}^0(M^{\mathrm{an}\,*}, \Omega_{M^{\mathrm{an}}}(\mathrm{dlog}\,\infty))$ et $\mathrm{H}^{\varnothing}(M^{\mathrm{an}\,*}, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{0,1} \cong \mathrm{H}^1(M^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_M^{\mathrm{an}})$, où $M^{\mathrm{an}\,*}$ désigne la compactification toroïdale, qui coïncide ici avec la compactification minimale. On voit facilement par l'isomorphisme d'Eichler-Shimura que la partie Eisenstein du H^1 est concentrée dans le $\mathrm{H}^{1,0}$.

2. Représentations p-adiques et poids de Hodge-Tate.

Soit K un corps local de caractéristique 0 de corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$. Soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et K_0 le corps des fractions de $W(k)$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et notons $\mathcal{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On note σ le Frobenius sur k, $W(k)$ et K_0. Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (corps des coefficients).

2.1. Représentations p-adiques.

DÉFINITION 2.1. Une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$ est la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire et continue de $\mathcal{G}_K$. On note $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_K)$ la catégorie abélienne des représentations p-adique de $\mathcal{G}_K$.

On note $\mathrm{Rep}_E(\mathcal{G}_K)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_K)$ formée des E-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action E-linéaire et continue de $\mathcal{G}_K$.

On dispose de plusieurs sous-catégories intéressantes de $\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_K)$, comme celle des représentations cristallines $\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$, des représentations semi-stables $\mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(\mathcal{G}_K)$, des représentations de de Rham $\mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_K)$ et des représentations de Hodge-Tate $\mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(\mathcal{G}_K)$,

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{G}_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(\mathcal{G}_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{st}}(\mathcal{G}_K) \supset \mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K).$$

2.2. Poids de Hodge-Tate. Soit C le complété p-adique de la clôture algébrique $\overline{K}$ de K. L'action de $\mathcal{G}_K$ sur $\overline{K}$ se prolonge par continuité de manière unique à C. Soit $B_{\mathrm{HT}} = \oplus_i C(i)$, où l'action de $\mathcal{G}_K$ sur $C(i)$ est tordue par la puissance i-ième du caractère cyclotomique.

DÉFINITION 2.2. Soit $V \in \mathrm{Rep}(\mathcal{G}_K)$. Alors, $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{HT}}(\mathcal{G}_K)$, si et seulement, si $\dim_K(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{HT}})^{\mathcal{G}_K} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Dans ce cas, on dit que i est poids de Hodge-Tate de V, si $V_i = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(i))^{\mathcal{G}_K} \neq 0$ et on appelle $h^i = \dim_K V_i$ sa multiplicité.

On a une égalité de $\mathcal{G}_K$-modules $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C = \oplus_i V_i \otimes_K C(-i)$.

Si $V \in \mathrm{Rep}_E(\mathcal{G}_K)$, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $V_i = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(i))^{\mathcal{G}_K}$ est muni d'une structure naturelle de $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module. En général il n'est pas libre. On a une égalité de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = \prod_j L_j$, où les L_j sont des corps munis d'injections $\sigma : E \hookrightarrow L_j$, $\tau : K \hookrightarrow L_j$.

$$\text{On a } (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(i))^{\mathcal{G}_K} \underset{E\otimes K}{\otimes} L_j = (V \otimes_E C(i))^{\mathcal{G}_{L_j}}.$$

Il y a une autre manière d'indéxer les poids de Hodge-Tate qui semble plus adaptée au cas modulaire. Fixons un plongement de E dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit V une représentation de Hodge-Tate de $\mathcal{G}_K$ qui est à coefficients dans E. En posant $V_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = V \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_p$ on dispose ainsi d'une représentation $\mathcal{G}_K \to \mathrm{GL}(V_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$.

Définition 2.3. Pour tout $\tau : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ on pose $h_{\tau,i} = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(V_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \otimes_{\tau,K} C(i))^{\mathcal{G}_K}$. L'entier $h_{\tau,i}$ est appelé la multiplicité de i comme poids de Hodge-Tate de V. Pour tout τ, on a $\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_{\tau,i} = \dim_E V$.

Exemple 2.4. Supposons que $E = \mathbb{Q}_p$. Alors $V_i = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(i))^{\mathcal{G}_K}$ est un K-espace vectoriel. Définissons le i-ième nombre de Hodge-Tate comme $h^i = \dim_K(V_i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Si l'on change l'action de $\mathcal{G}_K$ sur C par un automorphisme $g \mapsto \tau^{-1} g \tau$, avec $\tau \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, alors l'on envoie V_i sur V_i^τ par $v \otimes a \mapsto v \otimes \tau(a)$, ce qui ne change pas h^i (car le caractère cyclotomique est invariant par $g \mapsto \tau^{-1} g \tau$).

2.3. Modules filtrés. Nous sommes plus particulièrement intéressés aux représentations p-adiques cristallines, qui sont l'analogue p-adique des représentations l-adiques non-ramifiées. La théorie de Fontaine établit une équivalence de catégorie entre $\mathrm{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ et une certaine sous-catégorie MF_K^a, de la catégorie MF_K définie ci-dessous.

Définition 2.5. (i) Un ϕ-module filtré sur K est la donné d'un K_0-espace vectoriel D de dimension finie, muni d'une application bijective $\phi : D \to D$ additive σ-linéaire et d'une filtration $\mathrm{Fil}^i D$ de $D_K = D \otimes_{K_0} K$ qui est décroissante ($\mathrm{Fil}^i D \supset \mathrm{Fil}^{i+1} D$), exhaustive ($\cup \mathrm{Fil}^i D = D_K$) et séparée ($\cap \mathrm{Fil}^i D = 0$). On note MF_K la catégorie additive des modules de Dieudonné filtrés sur K.

(ii)Un ϕ-module filtré D est dit faiblement admissible, s'il possède un W-réseau M telle que $\sum p^{-i}\phi(\mathrm{Fil}^i D \cap M) = M$. Un tel réseau M est appelé réseau fortement divisible (ou adapté) de D. Les modules de Dieudonné filtrés faiblement admissibles forment une sous-catégorie pleine de MF_K, noté MF_K^f.

A un objet $D \in \mathrm{MF}_K$ on peut associer des polygones de Hodge et de Newton et la notion de faible admissibilité s'exprime en une inégalité entre ceux-ci.

Il était connu que admissible implique faiblement admissible et récemment Colmez et Fontaine ont démontré la réciproque (leur résultat est dans un cadre plus général que le notre, car il traite aussi le cas semi-stable).

Lorsque K est une extension finie non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et lorsque les poids de la représentation p-adique sont entre 0 et $p-1$, l'équivalence entre admissible et faiblement admissible a été déjà démontrée par Fontaine et Laffaille [**23**] :

Théorème 2.6. [**23**] *Supposons que $K = K_0$. Soit $D \in \mathrm{MF}_K^f$ tel qu'il existe un entier j avec $D_K^j = D_K$ et $D_K^{j+p} = 0$. Alors $D \in \mathrm{MF}_K^a$.*

3. Le complexe de Berstein-Gelfand-Gelfand sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

L'objectif de cette partie est de préparer le calcul des poids de Hodge-Tate de la représentation cristalline $\mathrm{H}^\bullet(M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ (*cf* Thm.5.1). L'existance d'une structure rationnelle sous-jacente, via des plongements $\overline{\mathbb{Q}}_p \hookleftarrow \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, va nous permettre de relier la décomposition de Hodge-Tate de $\mathrm{H}^d(M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$, à la décomposition de nature transcendante décrite dans la partie 1. Nous suivons l'article [**19**] de Faltings et le livre de Faltings-Chai [**21**] qui traite le cas modulaire de Siegel.

Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{u}$ les algèbres de Lie de G, B, T et U, respectivement. On a une décomposition canonique $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}^-$, où $\mathfrak{u}^-$ est l'algèbres de Lie de l'unipotent inférieur. Soient $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{b})$ les algèbres de Lie enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}$.

Dans cette partie tous les objets sont sur un corps de caractéristique 0, qui déploie G (comme $\widetilde{F}$, E, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ou $\mathbb{C}$).

Le but est d'écrire une résolution de V_n par des modules du type:

$$0 \leftarrow V_n \leftarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} K_n^\bullet,$$

où les K_n^i sont des $\mathfrak{b}$-modules semi-simples de dimension finie, avec des composantes simples explicites.

On commence par le cas $n = 0$. Si on pose $K_0^i = \wedge^i(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b})$ on obtient la *bar-résolution* de V_0. Notons que $\wedge^i(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b})$ est un $\mathfrak{b}$-module sur lequel $\mathfrak{u}$ agit trivialement, donc $K_0^i = \oplus W_\mu$, où les poids μ qui interviennent sont ceux qui s'écrivent comme somme de i racines négatives distinctes. En tensorisant cette résolution avec V_n on obtient le complexe de Koszul :

$$0 \leftarrow V_n \leftarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \left(\wedge^i(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}\right), \tag{III.1}$$

qui est une résolution de V_n, mais donnée par des $\mathfrak{b}$-modules $\wedge^i(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}$ qui ne sont pas semi-simples en général.

On va définir le complexe BGG comme un sous-complexe facteur direct du complexe de Koszul, découpé à l'aide de l'action du centre $U(\mathfrak{g})^G$ de $U(\mathfrak{g})$.

Soit χ_μ le caractère de $U(\mathfrak{g})^G$ correspondant au poids μ. Il est bien connu que

Lemme 3.1. *On a $\chi_\mu = \chi_n$, si et seulement s'il existe $J \subset J_F$ tel que $\mu = \epsilon_J(n+t) - t$.*

On en déduit que la χ_0-partie de la bar-résolution de V_0 est égale à :

$$0 \leftarrow V_0 \leftarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} C^\bullet \text{ , avec } C^i = \bigoplus_{J \subset J_F, |J| = i} W_{\epsilon_J(t) - t},$$

qui est encore une résolution de V_0, puisqu'elle est facteur direct d'une résolution.

Remarque 3.2. On a $C^i = K_0^i$, i.e. K_0^i coïncide avec sa χ_0 partie (ceci est particulier à notre groupe G).

En prenant la χ_n-partie de la bar résolution (III.1) de V_n on obtient le complexe :

$$0 \leftarrow V_n \leftarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} K_n^\bullet, \text{ avec } K_n^i = \bigoplus_{J \subset J_F, |J| = i} W_{\epsilon_J(n+t) - t}, \tag{III.2}$$

qui est encore une résolution de V_n, comme facteur direct d'une résolution. C'est la résolution cherchée. On l'appelle le complexe BGG.

4. Cohomologie de De Rham logarithmique.

4.1. Connexions et cohomologie de De Rham. Soit $\phi : X \to S$ un morphisme lisse de schémas et soit $\mathcal{V}$ un faisceau quasi-cohérent sur X.

Une connexion est un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules $\nabla : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \Omega^1_{X/S}$ tel que pour toute section g de $\mathcal{O}_X$ et pour toute section v de $\mathcal{V}$, on a $\nabla(gv) = v \otimes dg + g\nabla(v)$.

On en obtient pour tout $i \geq 0$ des morphismes de faisceaux $\nabla^i : \mathcal{V} \otimes \Omega^i_{X/S} \to \mathcal{V} \otimes \Omega^{i+1}_{X/S}$ et on a la propriété

$$\nabla^{i+1} \circ \nabla^i(v \otimes w) = w \wedge \nabla^1 \circ \nabla^0(v).$$

La connexion ∇ est dite intégrable si $\nabla^1 \circ \nabla^0 = 0$. Alors, on dispose du complexe de De Rham

$$0 \to \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_{X/S}.$$

Les faisceaux de cohomologie de De Rham de X sont définis comme

$$\mathcal{H}^j_{\mathrm{dR}}(X/S, \mathcal{V}) = R^j\phi_*(\mathcal{V} \otimes \Omega^\bullet_{X/S}).$$

Si $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, on a une équivalence de catégories entre celle des fibrés sur X à connexion intégrable, et celle des systèmes locaux sur X. Elle est réalisée par $(\mathcal{V}, \nabla) \mapsto \ker(\nabla)$, d'inverse $\mathbb{V} \mapsto (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{V}, \nabla)$ (où la connexion est donnée par $\nabla(g \otimes v) = dg \otimes v$).

4.2. Cohomologie de De Rham logarithmique. Soit $\phi : \overline{X} \to S$ un morphisme propre et lisse et soit $X \subset \overline{X}$ un ouvert dense, dont le complémentaire $D := \overline{X} \backslash X$ est un diviseur de Cartier sur S à croisements normaux, et à composantes irréductibles lisses.

Soit $\overline{\mathcal{V}}$ un faisceau quasi-cohérent sur $\overline{X}$. On suppose qu'il est muni d'une connexion intégrable ∇, à pôles logarithmiques le long de D, c'est-à-dire d'un morphisme $\nabla : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \Omega^1_{\overline{X}/S}(\mathrm{dlog}(D))$

Les faisceaux de cohomologie de De Rham logarithmique sont définis comme

$$\mathcal{H}^j_{\text{dR-log}}(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{V}}) = R^j\phi_*(\overline{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \Omega^\bullet_{\overline{X}/S}(\mathrm{dlog}(D))).$$

On pose $\Omega_{\overline{X}/S}(-\,\mathrm{dlog}(D)) = \Omega_{\overline{X}/S}(\mathrm{dlog}(D)) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \mathcal{I}(D)$, où $\mathcal{I}(D)$ le faisceau d'idéaux définissant D. On définit les faisceaux de cohomologie de De Rham logarithmique à support compact comme

$$\mathcal{H}^j_{\text{dR-log},c}(\overline{X}/S, \overline{\mathcal{V}}) = R^j\phi_*(\overline{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \Omega^\bullet_{\overline{X}/S}(-\,\mathrm{dlog}(D))).$$

4.3. Connexion de Gauss-Manin. Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme propre et lisse de S-schémas. Alors, d'après Katz et Oda [**43**] le faisceau cohérent $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(Y/X) := R^i\pi_*\Omega^\bullet_{Y/X}$ est muni d'une connexion intégrable, celle de Gauss-Manin.

On dispose aussi d'une version logarithmique de ce résultat : Soit $\overline{X}$ un S-schéma lisse, $X \subset \overline{X}$ une S-immersion ouverte et $D = \overline{X} \backslash X$ un diviseur à croisements normaux. Soit $\overline{Y}$ un S-schéma lisse et $\pi : \overline{Y} \to \overline{X}$ un morphisme propre de S-schémas qui est lisse au-dessus de X et tel que $E := \overline{Y} \times_{\overline{X}} D$ est un diviseur relatif à croisements normaux. Alors le complexe de De Rham relatif à pôles logarithmiques est défini comme

$$\Omega^\bullet_{\overline{Y}/\overline{X}}(\mathrm{dlog}(E/D)) = \Omega^\bullet_{\overline{Y}/S}(\mathrm{dlog}(E))/\pi^*\Omega^\bullet_{\overline{X}/S}(\mathrm{dlog}(D)).$$

Le le faisceau cohérent $\mathcal{H}^1_{\text{dR-log}}(\overline{Y}/\overline{X}) := R^i\pi_*\Omega^\bullet_{\overline{Y}/\overline{X}}(\mathrm{dlog}(E/D))$ est encore muni d'une connexion intégrable de Gauss-Manin.

5. Décomposition de Hodge-Tate de $\mathrm{H}^\bullet(M_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$.

Dans cette partie, nous ne considérons que la filtration de Hodge et son gradué associé. C'est à dire que la filtration par le poids dont les gradués sont purs est ici ignorée : les gradués que nous faisons apparaître sont encore munis d'une filtration par le poids.

Soit p un nombre premier et V_n la $\mathbb{Q}_p$-représentation algébrique de G définie dans (II.7). D'après les parties II.9 et II.10 on peut lui associer un faisceau lisse $\mathbb{V}_n$ sur $M^1 \otimes \mathbb{Q}$ et des fibrés $\overline{\mathcal{V}}_n$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}_n^\nabla$) sur $\overline{M^1} \otimes \mathbb{Q}_p$ qui sont filtrés (resp. à connexion à singularités logarithmiques intégrable et quasi-nilpotente).

La démonstration de la dégénérescence des suites spectrales des Th.5.5 et 6.2 du Chapitre VI de [**21**] dont les termes E_1 sont donnés en termes du complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand (dualisé et faisceautisé) s'adapte au cas de la variété de Hilbert. Il est important de noter que c'est la démonstration de ce théorème qui requiert l'utilisation des compactifications toroïdales de toutes les puissances de la variété de Kuga-Sato et non seulement de la puissance première. En effet, par un théorème de Deligne [**10**] Sect. 3.2, la suite spectrale de Hodge vers de Rham

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \mathrm{H}^j(\overline{\mathcal{A}^s}, \Omega^i_{\overline{\mathcal{A}^s}}(\mathrm{dlog}\ \infty)) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{\mathcal{A}^s})$$

dégénère en E_1. On en déduit comme dans [**21**] p.234 la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1}, \mathrm{gr}^i(R^s\pi_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{M^1}, R^s\pi_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}),$$

où la filtration est obtenue en faisant le produit tensoriel des deux filtrations de Hodge sur le complexe $R^s\pi_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty) \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$. En prenant $s = n_0 d$, le fibré $\overline{\mathcal{V}}_n$ est par pléthysme (*cf* [**51**] Appendice II) un facteur direct de $(R^1\pi_*\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))^{\otimes s}$ qui, par la formule de Künneth, est lui-même un facteur direct de $R^s\pi_{s*}\Omega^\bullet_{\overline{\mathcal{A}^s}/\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$. On en déduit la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \mathrm{H}^{i+j}(\overline{M^1}, \mathrm{gr}^i(\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{M^1}, \overline{\mathcal{V}}_n).$$

Par le Théorème de Comparaison de Faltings [**20**], la $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$-représentation $\mathrm{H}^\bullet(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ est de de Rham et pour toute compactification toroïdale $\overline{\pi} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{M^1}$ de $\pi : \mathcal{A} \to M^1$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^\bullet(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)) \otimes B_{\mathrm{dR}} \cong \mathcal{H}^\bullet_{\text{dR-log}}(\overline{M^1_{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathcal{V}}_n) \otimes B_{\mathrm{dR}}.$$

Alternativement, on aurait pu utiliser le Théorème de Comparaison de Tsuji pour la cohomologie étale p-adique de la variété de Kuga-Sato $\mathcal{A}^s$ à coefficients constants.

Les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{H}^\bullet(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ sont donc donnés par les sauts de la filtration de Hodge sur $\mathrm{H}^\bullet(\overline{M^1_{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty))$ venant de la suite spectrale ci-dessus. Nous allons calculer ces derniers comme dans [**21**] Th.5.5 ou [**51**] à l'aide d'un sous-complexe facteur direct de $\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\ \infty)$, appelé le complexe BGG dual. Avant d'énoncé le théorème nous allons introduire quelques notations.

Pour tout $J \subset J_F$ on pose $p(J) = \sum_{\tau \in J}(k_0 - m_\tau - 1)\tau + \sum_{\tau \in J_F \setminus J} m_\tau \tau$ et pour tout $a = \sum_{\tau \in J_F} a_\tau \tau \in \mathbb{Z}[J_F]$, on pose $|a| = \sum_{\tau \in J_F} a_\tau \in \mathbb{Z}$.

Le complexe BGG dual pour les fibrés est défini comme :

$$\overline{\mathcal{K}}_n^i = \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}.$$

Notons que d'après [**21**] Prop.VI.5.1, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})} W_1^\vee), U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{b})} W_2^\vee) \to \mathrm{Op.Diff.}(\overline{\mathcal{W}}_2, \overline{\mathcal{W}}_1), \tag{III.3}$$

ce qui munit $\overline{\mathcal{K}}_n^\bullet$ d'une structure de complexe, d'après (III.2).

Soit $H = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_\tau\right)_{\tau\in J_F} \in (\mathfrak{gl}_2)^{J_F}$. On a $-(\epsilon_J(n+t)-t, n_0)(H) = |p(J)|$; en effet le caractère de T correspondant à $(n;n_0)$ est donné par la formule $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto a^{(n_0t+n)/2}d^{(n_0t-n)/2}$. Ainsi pour tout $\tau\in J_F$ on a

$$-(\epsilon_\tau(n_\tau+1)-1;n_0)(H) = \begin{cases} \frac{n_0-n_\tau}{2} = m_\tau, \text{ si } \epsilon_\tau = 1(\iff \tau\in J_F\backslash J), \\ \frac{n_0+n_\tau+2}{2} = k_0-m_\tau-1, \text{ si } \epsilon_\tau=-1(\iff \tau\in J). \end{cases}$$

La filtration sur $\overline{\mathcal{K}}_n^\bullet$ est donnée par $\mathrm{Fil}^i\,\overline{\mathcal{K}}_n^\bullet = \bigoplus_{J\subset J_F, |p(J)|\geq i} \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}$.

Comme l'image du complexe de Koszul (III.1) par le foncteur contravariant $W\mapsto \overline{\mathcal{W}}^\vee$ est égale au complexe de de Rham, et comme le complexe BGG est un facteur direct (filtré) du complexe de Koszul, on obtient le :

Théorème 5.1. (i) *On a un quasi-isomorphisme de complexes filtrés*

$$\overline{\mathcal{K}}_n^\bullet \hookrightarrow \overline{\mathcal{V}}_n\otimes\Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\,\infty).$$

(ii) *La suite spectrale donnée par la filtration de Hodge*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{J\subset J_F, |p(J)|=i} \mathrm{H}^{i+j-|J|}(\overline{M^1_{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{M^1_{\mathbb{Q}_p}}, \overline{\mathcal{V}}_n)$$

dégénère en E_1.

(iii) *Pour tout entier j, $0\leq j\leq d$, les poids de Hodge-Tate de la représentation p-adique $\mathrm{H}^j(M^1_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$ appartiennent à l'ensemble $\{|p(J)|\ ,\ |J|\leq j\}$.*

6. Action des opérateurs de Hecke sur la cohomologie.

Nous allons réaliser les opérateurs de Hecke standards $T_\mathfrak{a}$ comme des correspondances sur la variété modulaire de Hilbert Y^1. Nous remercions M. Kisin de nous avoir montré que la définition usuelle des opérateurs de Hecke sur Y s'étend à Y^1 (*cf* [**46**]§1.9-1.11). Notons que l'action des opérateurs de Hecke sur les formes automorphes pour G^* n'est pas facile à écrire comme dans le paragraphe I.2.6, car la double classe de l'opérateur de Hecke $T_\mathfrak{a}$ n'appartient pas à $G^*(\mathbb{A}_f)$ en général.

Rappelons que $Y_1^1(\mathfrak{n}) = \coprod_{i=1}^{h^+} M_1^1(\mathfrak{c}_i,\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{c}_1,..,\mathfrak{c}_{h^+}$ sont des représentants de Cl_F^+.

Supposons que $\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}_j$ ont la même classe dans Cl_F^+. Considérons le foncteur contravariant $\underline{\mathcal{M}}^1_\mathfrak{a}$ de la catégorie des $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schémas vers la catégorie des ensembles, qui à un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de quintuplets $(A,\lambda,\alpha,C,\beta)$ où $(A,\lambda,\alpha)/S$ est une VAHB $\mathfrak{c}_i$-polarisée avec $\mu_\mathfrak{n}$-structure de niveau, où C est une sous-schéma fermé de $A[\mathfrak{a}]$ stable par $\mathfrak{o}$, disjoint de $\alpha(\mathbb{G}_\mathrm{m}\otimes\mathfrak{d}^{-1})$ et localement isomorphe au S-schéma en groupes constant $\mathfrak{o}\,/\,\mathfrak{a}$, et où β est une $\mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^{\times 2}$-orbite d'isomorphismes $(\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{a}, (\mathfrak{c}_i\,\mathfrak{a})_+) \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{c}_j, \mathfrak{c}_{j+})$.

Nous avons une projection $\underline{\mathcal{M}}^1_{\mathfrak{a}} \to \underline{\mathcal{M}}^1$, $(A, \lambda, \alpha, C, \beta) \mapsto (A, \lambda, \alpha)$ qui est relativement représentable par $\pi_1 : M^1_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n}) \to M^1_1(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n})$. Nous avons aussi une projection $\pi_2 : M^1_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n}) \to M^1_1(\mathfrak{c}_j, \mathfrak{n})$, venant de $(A, \lambda, \alpha, C, \beta) \mapsto (A/C, \lambda', \alpha')$, où α' est la composée de α et de $A \to A/C$, et où λ' est une $\mathfrak{c}_j$-polarisation sur A/C (définie via λ et β).

Posons $Y^1_{\mathfrak{a}} = \coprod_{i=1}^{h^+} M^1_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{c}_i, \mathfrak{n})$. Comme $\mathfrak{c}_i \mapsto \mathfrak{c}_j \simeq \mathfrak{c}_i\, \mathfrak{a}$ définit une permutation de Cl^+_F, on obtient deux projections finies $\pi_1, \pi_2 : Y^1_{\mathfrak{a}} \to Y^1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{A}_{\mathfrak{a}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{a}}"] & \mathcal{A} \arrow[d, "\pi"] \\
Y^1 & Y^1_{\mathfrak{a}} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & Y^1
\end{tikzcd}$$

D'ici on obtient $\pi_2^*\underline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}} \to \pi_1^*\underline{\mathcal{H}}^1_{\mathrm{dR}}$. Par conséquent, pour toute représentation algébrique V de G, on a $\pi_2^*\,\mathcal{V}^\nabla \to \pi_1^*\,\mathcal{V}^\nabla$. En composant ce morphisme par π_{1*} et en prenant la trace, on obtient $\mathcal{V}^\nabla \to \pi_{1*}\pi_2^*\,\mathcal{V}^\nabla \to \pi_{1*}\pi_1^*\,\mathcal{V}^\nabla \to \mathcal{V}^\nabla$, d'où une action de $T_{\mathfrak{a}}$ sur $\mathrm{H}^\bullet(Y^1, \mathcal{V}^\nabla)$.

De même, on obtient $\pi_2^*\underline{\omega} \to \pi_1^*\underline{\omega}$ and $\pi_2^*\underline{\nu} \to \pi_1^*\underline{\nu}$. Par conséquent, pour toute représentation algébrique W de T, on a $\pi_2^*\,\mathcal{W} \to \pi_1^*\,\mathcal{W}$. Pour que l'action de $T_{\mathfrak{a}}$ sur les formes modulaires de Hilbert soit celle définie dans la partie I.4.1, nous devons modifier légèrement la dernière flèche : on décompose $\mathcal{W}$ comme $(\mathcal{W}\,\underline{\omega}^{-2t})\underline{\omega}^{2t}$ et on définit $\pi_{2*}(\mathcal{W}\,\underline{\omega}^{-2t}) \to \pi_{1*}(\mathcal{W}\,\underline{\omega}^{-2t})$ comme ci-dessus et $\pi_{2*}\underline{\omega}^{2t} \to \pi_{1*}\underline{\omega}^{2t}$ en utilisant l'isomorphisme de Kodaira-Spencer $\Omega^1_{Y^1} \simeq \underline{\omega}^2 \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{d}\,\mathfrak{c}^{-1}$(*cf* [**46**]§1.11). Ainsi, obtient-on $\mathcal{W} \to \pi_{1*}\pi_2^*\,\mathcal{W} \to \pi_{1*}\pi_1^*\,\mathcal{W} \to \mathcal{W}$, et une action de $T_{\mathfrak{a}}$ sur $\mathrm{H}^\bullet(Y^1, \mathcal{W})$.

En particulier, on obtient une action de $T_{\mathfrak{a}}$ sur l'espace des formes modulaires de Hilbert géométriques pour G^*, $\mathrm{H}^0(Y^1, \underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{-(k+m-t)})$. Comme il a été observé dans [**46**]1.11.8, cette action est donnée par la projection

$$\tfrac{1}{[\mathfrak{o}_+^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times]} \textstyle\sum_{[\epsilon] \in \mathfrak{o}_+^\times / \mathfrak{o}_{\mathfrak{n},1}^\times} [\epsilon]\cdot : \mathrm{H}^0(Y^1, \underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{-(k+m-t)}) \to \mathrm{H}^0(Y, \underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{-(k+m-t)}),$$

suivie par l'opérateur de Hecke usuel sur l'espace des formes modulaires de Hilbert pour GL_2 (*cf* I.2.6 et I.4.2).

7. Poids de Hodge-Tate de $\otimes\,\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\rho$ dans le cas cristallin.

Nous allons d'abord introduire la notion d'induite tensorielle. Soit L un corps et V_0 un L-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\rho_0 : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}(V_0)$ une représentation. L'induite (additive) $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\rho_0$ de F à $\mathbb{Q}$ de ρ est le L-espace vectoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_F}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, V_0) := \{\phi_0 : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \to V_0 \mid \forall h \in \mathcal{G}_F \;\;, g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \;\; \phi_0(gh) = \rho(h^{-1})(\phi_0(g))\},$$

avec action à gauche de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ donnée par : pour tout $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$, $\phi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_F}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, V_0)$ et $x \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$, $g \cdot \phi_0(x) = \phi_0(g^{-1}x)$.

Si on se donne une décomposition $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} = \coprod\limits_{\tau \in J_F} \widetilde{\tau}\,\mathcal{G}_F$, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_F}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, V_0)$ s'identifie à $\bigoplus\limits_\tau V_\tau$ (où V_τ est isomorphe à V_0), par l'isomorphisme $\varphi \mapsto \bigoplus\limits_\tau \varphi(\widetilde{\tau})$. Alors l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sur $\bigoplus\limits_\tau V_\tau$ est donnée par :

$$(\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\rho_0)(g)((v_\tau)_\tau) = (\rho_0(\widetilde{\tau}^{-1} g \widetilde{\tau}_g)(v_{\tau_g}))_\tau,$$

où $g^{-1}\widetilde{\tau} \in \widetilde{\tau}_g\,\mathcal{G}_F$. En effet $(\phi_0(\widetilde{\tau}))_\tau \overset{g}{\mapsto} (\phi_0(g^{-1}\widetilde{\tau}))_\tau = (\rho_0(\widetilde{\tau}^{-1} g \widetilde{\tau}_g)(\phi(\widetilde{\tau}_g)))_\tau$.

Avec les mêmes notations on définit également, en suivant Yoshida [**73**], l'induite tensorielle $\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(\underset{\tau}{\otimes} V_\tau)$ par :

$$(\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho)(g)(\underset{\tau}{\otimes} v_\tau) = \underset{\tau}{\otimes} \rho(\widetilde{\tau}^{-1} g \widetilde{\tau}_g)(v_{\tau_g}).$$

Remarque 7.1. Pour tout $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ l'application $\tau \mapsto \tau_g$ est une permutation de J_F qui est triviale si et seulement si $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$. Donc, pour $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, on a $(\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho)(g) = \underset{\tau}{\otimes} \rho(\widetilde{\tau}^{-1} g \widetilde{\tau})$.

De plus pour tout $g, g' \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ on a $(\tau_g)_{g'} = \tau_{gg'}$.

Définition 7.2. Soit $\tau \in J_F$ et $g \in S_{k,J}(\mathfrak{n}, \chi)/F$ une forme modulaire de Hilbert. Le *conjugué interne* g_τ de g par $\tau \in J_F$, est l'unique élément $g_\tau \in S_{k^\tau, J^\tau}(\tau(\mathfrak{n}), \psi_\tau)/\tau(F)$ tel que $c(g_\tau, \mathfrak{a}) = c(g, \tau(\mathfrak{a}))$, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$, où $k^\tau = \sum_{\tau'} k_{\tau\tau'} \tau'$ et $\psi_\tau(\mathfrak{a}) = \psi(\tau(\mathfrak{a}))$.

Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ une forme de Hilbert cuspidale pour GL_2 propre pour tous les opérateurs de Hecke. Soit ρ la représentation de $\mathcal{G}_F$ associée à f et à un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

D'après la remarque précédente, pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, on a $(\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho)(g) = \underset{\tau}{\otimes} \rho_{f_\tau}(g)$.

La notion d'induite tensorielle apparaît naturellement dans le travail de Brylinski et Labesse [**4**] qui étudient la représentation l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sur le sous-espace $W_f = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}} \ker(T_{\mathfrak{a}} - c(f, \mathfrak{a}))$ de $\mathrm{H}^d(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p))$.

Théorème 7.3. (Brylinski-Labesse) Les restriction à $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$ des deux $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$-représentations W_f et $\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$ ont le même polynôme caractéristique.

Cette formulation du théorème de Brylinski et Labesse se trouve dans Taylor [**65**]. Pour s'y ramener, on note que par Čebotarev l'ensemble de Frob_λ, avec λ idéal premier totalement décomposé de F, est dense dans $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, et que pour un tel idéal λ on a

$$(\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho)(\mathrm{Frob}_\lambda) = \underset{\tau}{\otimes} \rho(\mathrm{Frob}_{\lambda^{\widetilde{\tau}}}) = \underset{\tau}{\otimes} \rho(\mathrm{Frob}_{\mathrm{N}_{\widetilde{F}/F}(\lambda^{\widetilde{\tau}})}),$$

Or, quand τ décrit J_F, $\widetilde{\tau}$ décrit $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} / \mathcal{G}_F$ et donc $N_{\widetilde{F}/F}(\lambda^{\widetilde{\tau}})$ décrit les idéaux premiers de F au-dessus de $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\lambda)$. $\square$

Le théorème 5.1 admet le corollaire suivant.

Corollaire 7.4. (i) *La suite spectrale donnée par la filtration de Hodge*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{J \subset J_F, |p(J)| = i} \mathrm{H}^{i+j-|J|}(\overline{M}, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t, n_0}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{M}, \overline{\mathcal{V}}_n)$$

est Hecke équivariante et dégénère en E_1.

(ii) *Les poids de Hodge-Tate de* W_f *sont les entiers* $|p(J)|$, $J \subset J_F$, *comptés avec multiplicité.*

Démonstration : (i) En prenant les invariants de la filtration de Hodge de $\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M^1}}(\mathrm{dlog}\, \infty)$ par le groupe de Galois du revêtement étale $\overline{M^1} \to \overline{M}$, on obtient une filtration sur le complexe $\overline{\mathcal{V}}_n \otimes \Omega^\bullet_{\overline{M}}(\mathrm{dlog}\, \infty)$ sur $\overline{M}$, appelée encore filtration de Hodge. De même, on définit le complexe BGG sur $\overline{M}$ en prenant les invariants du complexe BGG sur $\overline{M^1}$. La suite spectrale associée est donnée par invariants de la suite spectrale du Théorème 5.1(ii) et on obtient ainsi sa dégénérescence en E_1.

Afin de voir la Hecke équivariance, on procède comme suit. L'opérateur de Hecke $T_{\mathfrak{a}}$ s'étend à $\overline{Y^1}$. Une façon de le faire est de prendre la clôture schématique de $T_{\mathfrak{a}} \subset Y^1 \times Y^1$ dans $\overline{Y^1} \times \overline{Y^1}$. Une autre manière, plus fonctorielle est de considérer une compactification toroïdale $\overline{Y^1_{\mathfrak{a}}}$ de $Y^1_{\mathfrak{a}}$ au-dessus de la compactification toroïdale $\overline{Y^1}$ de Y^1. Dans les deux cas on obtient une action de $T_{\mathfrak{a}}$ sur $\mathrm{H}^{\bullet}(\overline{Y^1}, \overline{\mathcal{W}})$ et sur $\mathrm{H}^{\bullet}(\overline{Y^1}, \overline{\mathcal{V}^{\nabla}})$. Il n'est pas vrai en général que les opérateurs de Hecke ainsi définis commutent. Néanmoins, ils commutent sur la partie droite de Thm.5.1(ii) qui est indépendant de la compactification toroïdale particulière, en vertu du Théorème de Comparaison de Faltings. Puisque la suite spectrale de Thm.5.1(ii) dégénère en E_1, ils commutent aussi sur la partie gauche.

(ii) On a $\overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0} = \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\nu}^{p(J)}$.

Il résulte du théorème 5.1 (comme dans [**21**] Th.5.5 et [**51**] Sect.2.3) que les sauts de la filtration de Hodge figurent parmi les $|p(J)|$, $J \subset J_F$. De plus,

$$\mathrm{gr}^{|p(J)|}\, \mathcal{H}^d_{\mathrm{dR\text{-}log}}(\overline{M}, \overline{\mathcal{V}}_n) = \mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\nu}^{p(J)}).$$

Il suffit de voir que le $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel $(\mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\nu}^{p(J)}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p)[f]$ est de dimension 1, pour tout $J \subset J_F$.

Grâce à l'existence d'une structure $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle du complexe BGG sous-jacent aux complexes BGG sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et sur $\overline{\mathbb{C}}$, en prenant un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ dans $\mathbb{C}$, on a un isomorphisme Hecke-équivariant

$$\mathrm{H}^{d-|J|}(\overline{M}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \underline{\omega}^{-\epsilon_J(n+t)+t} \otimes \underline{\nu}^{p(J)}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C} = \mathrm{H}^J(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathbb{C})).$$

Or, par l'isomorphisme d'Eichler-Shimura-Harder la f-partie $\mathrm{H}^J(M^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathbb{C}))[f]$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, pour tout $J \subset J_F$ (*cf* (I.14)). □

Remarque 7.5. 1) Le motif W_f est pur de poids dn_0. L'ensemble de ses poids de Hodge-Tate est stable par la symétrie $h \mapsto dn_0 - h$, correspondant au passage au complémentaire $|p(J)| \mapsto |p(J_F \backslash J)|$. Cette symétrie est induite par la dualité de Poincaré $W_f \times W_f \to \mathbb{Q}(-dn_0)$.

2) Si F est un corps quadratique et f une forme de Hilbert cuspidale propre de poids k sur F. En notant τ le plongement non-trivial de F, on voit que les sauts de la filtration de Hodge de W_f sont $m_\tau, k_0 - m_\tau - 1, k_0 + m_\tau - 1, 2k_0 - m_\tau - 2$.

8. Poids de Hodge-Tate de ρ dans le cas cristallin.

8.1. Représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Hilbert. Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ une forme modulaire de Hilbert nouvelle (propre, normalisée et primitive) de niveau $\mathfrak{n}$, poids k et caractère central ψ (*cf* I.4.1).

Les résultats de Taylor [**65**] et Blasius-Rogawski [**2**], basés sur les travaux de Shimura, Eichler, Deligne, Ohta, Rogawski et Tunnell, ont permis d'associer à f un système compatible de représentations galoisiennes $\mathcal{P}$-adiques. Plus précisément, pour tout plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, correspondant à un premier $\mathcal{P}$, il existe une représentation galoisienne continue $\rho = \rho_{f,\mathcal{P}} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qui est non-ramifiée en dehors de $p\mathfrak{n}$ et telle que pour tout idéal premier v de F ne divisant pas $p\mathfrak{n}$:

$$\text{(III.4)} \qquad \mathrm{Tr}(\rho(\mathrm{Frob}_v)) = c(f,v), \;\; \mathrm{Det}(\rho(\mathrm{Frob}_v)) = \psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{1-k_0},$$

où Frob_v désigne un Frobenius géométrique, qui est l'inverse d'un Frobenius arithmétique. La raison de prendre cette convention est qu'ainsi les poids de Hodge-Tate de ρ seront des entiers positifs.

La représentation ρ est absolument irréductible (*cf* [**66**] Prop.3.1) et donc elle est déterminée par (III.4). Elle est impaire, c'est-à-dire que les images des d classes de conjugaisons complexes de $\mathcal{G}_F$ possèdent chacune les deux valeurs propres 1 et -1.

Les travaux de Langlands, Deligne, Carayol, Wiles et Taylor ont établi la compatibilité de la correspondance globale et de la correspondance locale de Langlands pour ρ en les premiers v de F ne divisant pas p. La restriction de ρ aux groupes de décomposition D_v est donc déterminée, à Frob_v-semi-simplification près, par la représentation du groupe de Weil W_{F_v} attachée (par la correspondance de Langlands locale) à la composante locale $\pi_{f,v}$ de la représentation automorphe π_f associée à f.

Nous nous sommes intéressés à la restriction de ρ aux groupes de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$, en les premiers $\mathfrak{p}$ divisant p (ces représentations galoisiennes locales devraient fournir des informations très riches sur la représentation galoisienne globale ρ, d'après la conjecture de Fontaine et Mazur). On s'attend à ce que la représentation galoisienne locale $\rho_{f|D_{\mathfrak{p}}}$ soit de de Rham et, lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas $\mathfrak{n}$, qu'elle soit même cristalline. La difficulté pour démontrer ceci et que l'on ne connaît pas une construction géométrique naturelle de ces représentations galoisiennes dans le cas général (ce qui nous permettrait d'appliquer le Théorème de comparaison de Faltings [**20**] ou Tsuji). Lorsque d est impair, ou lorsque d est pair, mais qu'il existe au moins une place finie de F en laquelle la représentations automorphe π_f associée à f est spéciale ou supercuspidale, la correspondance de Jacquet-Langlands [**38**] pour GL_2 fournit une telle construction géométrique via une courbe de Shimura quaternionique [**5**]. Dans les autres cas, Breuil [**3**] a démontré que si $p > k_0$ et $\mathfrak{p}$ ne divise pas Δ, alors la représentation galoisienne construite par Taylor à l'aide de congruences est cristalline en $\mathfrak{p}$, avec des poids de Hodge-Tate compris entre 0 et $k_0 - 1$.

Enfin, lorsque $n \neq 0$ Blasius et Rogawski [**2**] ont construit le motif associé à une forme modulaire de Hilbert (sur des extensions quadratiques de F) et ainsi démontré que $\rho_{f|D_{\mathfrak{p}}}$ est de De Rham pour tout p, et cristalline pour p assez grand. Taylor a traité le cas manquant $k = 2t$ [**66**].

8.2. Poids de Hodge-Tate de ρ dans le cas ordinaire. Notre but est de décrire la restriction ρ au groupe de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$, lorsque $\mathfrak{p}$ divise p. Dans ce paragraphe nous décrivons un résultat de Wiles [**70**] et Hida [**33**] sur la restriction de ρ aux groupes de décomposition en p dans le cas ordinaire. Fixons quelques notations qui seront aussi utilisées dans la suite :

On rappelle que $p \geq 5$ est non-ramifié dans F. Pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de F divisant p notons $f_{\mathfrak{p}} = [F_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p]$ le degré résiduel correspondant. Notons que p est aussi non-ramifié dans la clôture galoisienne $\widetilde{F}$ de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

Fixons un plongement ι de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Ceci revient au choix d'un système compatible de places au-dessus de p dans chaque corps de nombres. À un tel choix de places on associe la partition $J_F = \coprod_{\mathfrak{p}} J_{F,\mathfrak{p}}$ donnée par :

$$\tau \in J_{F,\mathfrak{p}} \iff \tau(\mathfrak{p}) \text{ est la place choisie de } \tau(F)$$

$$\iff \iota \circ \tau \text{ est continu pour la topologie } \mathfrak{p}\text{-adique sur } F.$$

Le plongement ι nous permet d'identifier J_F avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-\mathrm{alg.}}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. On voit que $J_{F,\mathfrak{p}}$ est constitué par les $\tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ qui se factorisent par le plongement canonique de F dans $F_{\mathfrak{p}}$. Ceci nous permet d'identifier $J_{F,\mathfrak{p}}$ avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p-\mathrm{alg.}}(F_{\mathfrak{p}}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ et par consequent $J_{F,\mathfrak{p}}$ possède $f_{\mathfrak{p}}$ éléments.

REMARQUE 8.1. Si F est galoisien et si $\mathfrak{p}_1$ est la place de F fixée via ι, alors $J_{F,\mathfrak{p}_1}$ est le sous-groupe de décomposition de $\mathcal{G}(F/\mathbb{Q})$ en $\mathfrak{p}_1$ et $J_{F,\mathfrak{p}} = \{\tau \in \mathcal{G}(F/\mathbb{Q}) \mid \tau(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1\}$.

D'après un théorème de Wiles [**70**] si k est parallèle, et de Hida [**33**] en général, si f est (quasi)-ordinaire en p (au sens automorphe : voir la définition I.4.3), alors ρ_f est (quasi)-ordinaire au sens de la :

DÉFINITION 8.2. On dit que la forme f est (quasi)-ordinaire en p, au sens galoisien, si elle satisfait la condition **(ORD)** suivante :

$$\rho_{f|I_{\mathfrak{p}_i}} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_i & * \\ 0 & \delta_i \end{pmatrix},$$

où δ_i la composée de la flèche de la théorie de corps de classes local $I_{\mathfrak{p}_i} \to \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}_i}}^\times$ et de la flèche $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}_i}}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \quad x \mapsto \prod_{\tau \in J_{F,i}} \tau(x)^{-m_\tau}$, et où ε_i est obtenu de la même manière que δ_i en remplaçant m_τ par $k_0 - m_\tau - 1$.

8.3. Poids de Hodge-Tate de ρ dans le cas cristallin.

PROPOSITION 8.3. *Supposons que $p > k_0$ et que p ne divise pas Δ. Alors $\rho = \rho_{f,\mathcal{P}}$ est cristalline en tout $\mathfrak{p}$ divisant p, de poids de Hodge-Tate $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$.*

Démonstration : Supposons d'abord que $n \neq 0$. Soit K une extension quadratique CM de F dans laquelle tout premier $\mathfrak{p}$ de F (divisant p) se décompose $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^c$. Blasius et Rogawski [**2**] ont construit un motif pur sur K de poids de Hodge $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_F}$ et dont la réalisation $\mathcal{P}$-adique est isomorphe à la restriction de ρ à $\mathcal{G}_M$. Ceci démontre que $\rho_{D_\mathfrak{p}}$ est de De Rham, et même cristalline pour p assez grand (en dehors de places de mauvaise réduction du motif). Par ailleurs, par Breuil [**3**]on sait que $\rho_{D_\mathfrak{p}}$ est cristalline pour $p > k_0$ et p ne divisant pas Δ.

Par le Théorème de Comparaison de Faltings, les poids de Hodge de ce motif, corresponderaient naturellement (via un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$) à ses $\mathfrak{p}$-poids de Hodge-Tate, qui ne sont d'autres que les $\mathfrak{p}$-poids de Hodge-Tate de ρ.

Reste à traiter le cas où $n = 0$. La méthode qui suit s'applique plus généralement en tout poids parallèle k. Par le corollaire 7.4 les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$ sont donnés par les 2^d nombres suivants :

$$|p(J)| = \sum_{\tau \in J}(k_0 - m_\tau - 1) + \sum_{\tau \in J_F \setminus J} m_\tau \ , \ J \subset J_F.$$

Ceci nous donne les poids de Hodge-Tate de ρ à permutation près (et sans ambiguïté lorsque k est parallèle), en vertu du lemme qui suit

LEMME 8.4. *Soient a et b deux entiers naturels et soient $(a_\tau)_{\tau \in J_F}$ (resp. $(b_\tau)_{\tau \in J_F}$) des entiers naturels satisfaisant $2a_\tau < a$ (resp. $2b_\tau < b$), pour tout $\tau \in J_F$. Supposons que l'on a une égalité d'ensembles pondérés*

$$\left\{ \sum_{\tau \in J} a_\tau + \sum_{\tau \in J_F \setminus J} (a - a_\tau) \ , \ J \subset J_F \right\} = \left\{ \sum_{\tau \in J} b_\tau + \sum_{\tau \in J_F \setminus J} (b - b_\tau) \ , \ J \subset J_F \right\}$$

Alors $a = b$ et on a une égalité d'ensembles pondérés $\{a_\tau \ , \ \tau \in J_F\} = \{b_\tau \ , \ \tau \in J_F\}$.

CHAPITRE IV

Représentations galoisiennes résiduelles

Dans tout ce chapitre on suppose que $p > k_0$ et p ne divise pas Δ. On note pr la projection canonique de $\mathrm{GL}_2(\kappa)$ sur $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$.

Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ une forme modulaire de Hilbert nouvelle (propre, normalisée et primitive) de niveau $\mathfrak{n}$, poids k et caractère central ψ (*cf* I.4.1). Il lui est associé un système strictement compatible de représentations $\mathcal{P}$-adiques $\rho = \rho_{f,\mathcal{P}} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(E)$, où E désigne le complété $\mathcal{P}$-adique d'un corps de nombres assez grand. Comme le groupe de Galois $\mathcal{G}_F$ est compact et ρ est continue, il existe un $\mathcal{O}$-réseau de E^2, qui est stable par ρ. La représentation galoisienne résiduelle $\overline{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$ est alors obtenue en réduisant ρ modulo $\mathcal{P}$. Lorsque $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, le lemme de Schur implique que le réseau stable ci-dessus est unique à homothétie près et donc la représentation $\overline{\rho}$ est bien définie. En général seule la semi-simplifiée de $\overline{\rho}$ est bien définie.

Le but de ce chapitre est l'étude des images des représentations galoisiennes $\overline{\rho}$ et $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \overline{\rho}$. Nous utilisons les mêmes méthodes que Serre [**61**] et Ribet [**59**], mais nous employons des outils différents. Notamment, nous utilisons de manière essentielle l'action des groupes d'inertie en les premiers $\mathfrak{p}$ divisant p. Cette action est contrôlée en déterminant les poids de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho}$ (*cf* Prop.1.5). Nous nous attacheons à traîter le cas cristallin (*i.e.* p ne divise pas Δ). La même approche reste valable dans le cas ordinaire, non-cristallin, bien que ceci nécessite une étude plus minitueuse lorsque p est ramifié dans F. En effet, dans le cas ordinaire, la restriction de ρ aux groupes de décomposition en p est réductible, et on connaît l'action de l'inertie sur le gradué associé.

Si le poids k est non-parallèle ($k \neq k_0 t$), nous vérifions ($\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}}$) sous l'hypothèse que p ne divise pas un entier qui explicite ne dépendant que des unités de $\mathfrak{o}$. De plus, lorsque f n'est pas une série thêta, nous donnons des conditions suffisantes explicites pour ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$).

Enfin, si k est non-induit, nous démontrons que ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) entraîne ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$). Notons que cette dernière condition interdit que f soit congrue à une de ses conjuguées internes tordue par un caractère quadratique, et en particulier, f ne peut pas provenir par changement de base d'un sous-corps de F.

1. Poids de Fontaine-Laffaille de $\overline{\rho}$.

1.1. Représentations cristallines modulo p. Soit K un corps local de caractéristique 0 de corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$. Soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et K_0 le corps des fractions de $W(k)$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et notons $\mathcal{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On note σ le Frobenius sur k, $W(k)$ et K_0.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (corps des coefficients). Nous nous intéressons à des représentations cristallines entières et mod p. Fontaine et Laffaille [**23**] ont introduit

Définition 1.1. (i) Un F-module filtré sur $W(k)$ est la donnée
- d'un $W(k)$-module M,

• d'une d'une filtration par des sous-$W(k)$-modules $\mathrm{Fil}^i M$ qui est décroissante, exhaustive et séparée,

• des applications σ-linéaires $\varphi_i : \mathrm{Fil}^i M \to M$ vérifiant $\varphi_i|_{\mathrm{Fil}^{i+1} M} = p\varphi_{i+1}$.

On note MF_W la catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire additive des F-modules filtrés sur $W(k)$.

(ii) On définit deux sous-catégories abéliennes pleines $\mathrm{MF}_{W,lf} \subset \mathrm{MF}_{W,tf} \subset \mathrm{MF}_W$, telles que pour $M \in \mathrm{MF}_W$, on a

$$M \in \mathrm{MF}_{W,tf} \iff \begin{cases} M \text{ est de type fini sur } W(k), \\ \mathrm{Fil}^i M \text{ sont des facteurs directes dans } M, \\ \sum \varphi_i(\mathrm{Fil}^i M) = M. \end{cases} ,$$

$$M \in \mathrm{MF}_{W,lf} \iff \begin{cases} M \text{ est de longueur finie sur } W(k), \\ \sum \varphi_i(\mathrm{Fil}^i M) = M. \end{cases} .$$

Remarque 1.2. Soit M un réseau fortement divisible pour $D \in \mathrm{MF}_K^f$. Alors, en posant $\mathrm{Fil}^i M = \mathrm{Fil}^i D \cap M$ et $\varphi_i = \phi/p^i$, on a $M \in \mathrm{MF}_{W,tf}$. De plus M est un $W(k)$-module libre de type fini et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $M/p^r M \in \mathrm{MF}_{W,lf}$.

1.2. L'inertie modérée. Pour la définition des caractères fondamentaux de niveau de l'inertie modérée nous nous référons à l'article [**61**] de Serre. Cependant, afin d'avoir de poids de Hodge-Tate positifs, nous adoptons le convention géometrique qui est l'opposée de celle adoptée par Serre.

Toute représentation $\bmod p$ de $\mathcal{G}_K$ qui est semi-simple est modérément ramifiée. Sa restriction à l'inertie devient (après extension des scalaires) somme de caractères modérés.

1.3. Théorie de Fontaine-Laffaille et un théorème de Wintenberger. La théorie de Fontaine-Laffaille [**23**] permet de construire des représentations cristallines à partir de F-modules filtrés de longueur finie sur $W(k)$. Plus précisément l'on a un foncteur contravariant

$$V_{\mathrm{cris}} : \mathrm{MF}_{W,tf} \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G}_K),$$

qui jouit aux propriétés suivantes :

• la restriction à $\mathrm{MF}_{W,lf}^{[0,p-1[}$ est exacte et pleinement fidèle,

• si $M \in \mathrm{MF}_{W,lf}^{[0,p-1[}$, alors $\mathrm{long}_W M = \mathrm{long}_{\mathbb{Z}_p} V_{\mathrm{cris}}(M)$

• si $M \in \mathrm{MF}_{W,tf}^{[0,p-1[}$ et M est libre sur $W(k)$, alors $V_{\mathrm{cris}}(M)$ est libre sur $\mathbb{Z}_p$ et $\mathrm{rang}_W M = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}_p} V_{\mathrm{cris}}(M)$.

Soit X le groupe abélien des application périodiques $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Le résultat de [**72**] de Wintenberger permet de décomposer tout F-module filtré M de type fini sur $W(k)$ en somme de composantes isotypiques indexées par X, $M = \bigoplus_{\xi \in X} M_\xi$.

1.4. Poids de Hodge-Tate et poids modérés. Le but de ce paragraphe est d'expliquer le lien entre les poids de Hodge-Tate d'une représentation cristalline et les caractères par lesquels agit l'inertie modérée sur la semi-simplification de sa réduction $\bmod p$. Nous avons trouvé cette formulation dans [**72**], où est noté que dans notre cas ($e = 1$ et poids de Hodge-Tate compris entre 0 et $p - 1$), le résultat cherché est un corollaire de la théorie de Fontaine-Laffaille. Comme ce résultat est important pour notre travail, nous avons décidé d'en refaire la démonstration.

Soit V une représentation p-adique cristalline de poids de Hodge-Tate compris entre 0 et $p-1$ ($V \in \mathrm{Rep}^{[0,p-1[}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$). On lui associe $D = D_{\mathrm{cris}}(V) \in \mathrm{MF}^f_K$. La multiplicité de $i \in \mathbb{Z}$ comme poids de Hodge-Tate de V est égale à $h^i = \dim_K(\mathrm{Fil}^i D) - \dim_K(\mathrm{Fil}^{i+1} D)$.

Soit $M \in \mathrm{MF}^{[0,p-1[}_{W,tf}$ correspondant à un $W(k)$-réseau adapté de D. Par le théorème de Wintenberger on a deux graduations sur M :

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i, \;\; M = \bigoplus_{\xi \in X} M_\xi.$$

En posant $D_i = M_i \otimes_W K_0$ et $D_\xi = M_\xi \otimes_W K_0$, on a $h^i = \dim D_i$ et

$$D_i = \bigoplus_{\xi \in X, \xi(0)=i} D_\xi.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $M/p^r M \in \mathrm{MF}^{[0,p-1[}_{W,lf}$. Posons $L_n = V_{\mathrm{cris}}(M/p^r M)$ et $L = \varprojlim L_n$. Alors L est un réseau de V et $L/pL = L_1$ par construction.

On a $M/pM = \oplus_{\xi \in X} M_\xi/pM_\xi$. Or M_ξ/pM_ξ est un multiple d'un objet simple de $\mathrm{MF}^{[0,p-1[}_{W,lf}$ et $V_{\mathrm{cris}}(M_\xi/pM_\xi)$ est égal au même multiple du caractère modéré $\theta(\xi)$. On en déduit que les caractères modérés intervenant dans L/pL correspondent exactement aux ξ intervenant dans M. Par Brauer-Nesbitt la semi-simplification de L/pL ne dépend pas du réseau stable particulier choisi.

Proposition 1.3. *Soit $V \in \mathrm{Rep}^{[0,p-1[}_{\mathrm{cris},\mathbb{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ de poids de Hodge-Tate $i_1, ..., i_r$ (comptés avec multiplicités). Soit L un réseau stable de V et considérons l'action de l'inertie modérée sur $(L/pL)^{\mathrm{ss}} = \oplus \overline{L}_j$. L'action de l'inertie modérée sur $\overline{L}_j$ est donné par un certain caractère modéré de niveau $h^j = \dim_{\mathbb{F}_p} \overline{L}_j$, et on note $i^j_1, .., i^j_{h^j}$ ces coordonnés dans la base formée par les caractères fondamentaux de niveau h^j ($r = \sum h^j$). Alors les ensembles pondérés $\{i_1, ..., i_r\}$ et $\{i^j_k \mid 1 \le k \le h^j\}$ coïncident.*

Le résultat reste valable pour $V \in \mathrm{Rep}^{[0,p-1[}_{\mathrm{cris},E}(\mathcal{G}_K)$, avec E extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (*cf* Déf.III.2.3).

1.5. Poids modérés de $\overline{\rho}$. Comme corollaire des paragraphes précédents et du calcul des poids de Hodge-Tate de ρ dans la partie III.8.3, on obtient

Corollaire 1.4. *Supposons que $p > k_0$ et p ne divise pas Δ. Alors, la représentation $\overline{\rho}$ est cristalline(=Fontaine-Laffaille) en tout $\mathfrak{p}$ divisant p avec poids donnés par les $2f_{\mathfrak{p}}$ entiers $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$.*

Démonstration : On considère les réseaux stables $\mathcal{P}^2 \subset \mathcal{O}^2$ dans la représentation cristalline ρ. La semi-simplifiée de $\overline{\rho}$ est égale au quotient de ces deux réseaux, c'est donc une représentation cristalline modulo p (comme sous-quotient d'une représentation cristalline p-adique).

Ses poids de Hodge-Tate sont déterminés par le module filtré de Fontaine-Laffaille, qui est quotient des modules filtrés de Fontaine-Laffaille associés aux deux réseaux (par exactitude du foncteur de Fontaine-Laffaille). Or ces deux derniers sont inclus l'un dans l'autre et les filtrations sont compatibles. Les gradués du quotient ont la bonne dimension, d'après l'hypothèse $p > k_0$. $\square$

COROLLAIRE 1.5. *Soit $\mathfrak{p}$ un premiers de F au-dessus de p et soit un plongement ι : $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ Alors, on a*

$$\overline{\rho}_{f|I_\mathfrak{p}} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_\mathfrak{p} & * \\ 0 & \delta_\mathfrak{p} \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon_\mathfrak{p}, \delta_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ sont deux caractères modérés de niveau $\#J_{F,\mathfrak{p}}$, dont le produit est égal à la puissance $(1-k_0)$-ième du caractère cyclotomique modulo p et dont l'union des ensemble pondéré des poids de Fontaine-Laffaille est donné par $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$.

2. Relèvement de caractères et critère d'irréductibilité pour $\overline{\rho}$.

PROPOSITION 2.1. (i) *Pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, on a* $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$, *i.e.* $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,\mathcal{P}}$ *est absolument irréductible.*

(ii) *Supposons que k est non-parallèle. Si pour tout $J \subset J_F$, il existe $\epsilon \in \mathfrak{o}_+^\times$, $\epsilon - 1 \in \mathfrak{n}$, tel que p ne divise pas l'entier non-nul* $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\epsilon^{p(J)}-1)$, *alors on a* $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$.

REMARQUE 2.2. Dans le cas où k est parallèle, on pourrait essayer de généraliser l'approche de Faltings-Jordan [**22**], afin de démontrer $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$ sous l'hypothèse que p ne divise pas les termes constants des séries d'Eisenstein de poids k, *i.e.* la valeur en $1 - k_0$ des fonctions L de certains caractères de Hecke de F.

Proof : Comme $\overline{\rho}$ est impaire, si elle est irréductible, alors elle est absolument irréductible. Supposons que $\overline{\rho}$ est réductible :

$$\overline{\rho}^{\mathrm{s.s.}} = \varphi_{\mathrm{gal}} \oplus \varphi'_{\mathrm{gal}}.$$

Les caractères $\varphi_{\mathrm{gal}}, \varphi'_{\mathrm{gal}} : \mathcal{G}_F \to \kappa^\times$ sont non-ramifiés en dehors de $\mathfrak{n}p$ et leur produit vaut le caractère central $\overline{\psi}\omega$ de $\overline{\rho}$ (ψ est un Hecke caractère de Hecke de type $-n_0t$ à l'infini). Notons $\widehat{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{n},1}^\times$ le sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{o}}^\times$ des éléments $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$. Alors $\widehat{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{n},1}^\times$ est le produit de sa p-partie $\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times$ et de sa hors-de-p-partie, notée $\widehat{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{n},1}^{\times(p)}$.

Par la théorie de corps de classe globale, le groupe de Galois de l'extension abélienne, $\mathfrak{n}$-ramifiée (resp. $\mathfrak{n}p^\infty$-ramifiée) maximale de F est isomorphe à $\mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}}^+ = \mathbb{A}_F^\times / F^\times \widehat{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{n},1}^\times D(\mathbb{R})_+$ (resp. $\mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}p^\infty}^+ := \varprojlim \mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}p^r}^+ = \mathbb{A}_F^\times / \overline{F^\times \widehat{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{n},1}^{\times(p)} D(\mathbb{R})_+}$). Nous adoptons la convention dans laquelle le Frobenius géométrique est envoyé sur une uniformisante. On a la suite exacte suivante

$$1 \to (\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times)/\overline{\{\epsilon \in \mathfrak{o}_+^\times \,|\, \epsilon - 1 \in \mathfrak{n}\}} \to \mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}p^\infty}^+ \to \mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}}^+ \to 1. \tag{IV.1}$$

Par Cor.1.5, pour tout $\mathfrak{p} \mid p$, $\varphi_{\mathrm{gal}} \oplus \varphi'_{\mathrm{gal}}$ est cristalline en $\mathfrak{p}$ de poids $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$.

Par (IV.1) pour tout $\epsilon \in \mathfrak{o}_+^\times$, $\epsilon - 1 \in \mathfrak{n}$, nous avons l'égalité suivante dans κ :

$$1 = \varphi_{\mathrm{gal}}(\epsilon) = \prod_{\mathfrak{p}|p} \varphi_{\mathrm{gal},\mathfrak{p}}(\epsilon) = \prod_{\mathfrak{p}|p} \prod_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}} \tau(\epsilon)^{m_\tau \text{ or } (k_0 - m_\tau - 1)} = \epsilon^{p(J)},$$

pour un certain $J \subset J_F$. Par l'hypothèse $p > k_0$, si k est non-parallèle, alors pour tout $J \subset J_F$ on a $\epsilon^{p(J)} \neq 1$. On a déja démontré (ii), ainsi que (i) losrque k est non-parallèle.

Supposons maintenant que $k = k_0t$ est parallèle. Les mêmes arguments de théorie de corps de classe, donnent alors que la restriction à $\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^\times$ du caractère φ_{gal} (resp. φ'_{gal}) : $\mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}p^\infty}^+ \to \kappa^\times$ est triviale (resp. donnée par la puissance $(1 - k_0)$-ème de la norme). Par le lemme suivant, il existe un caractère unique $\widetilde{\varphi}_{\mathrm{gal}}$ (resp. $\widetilde{\varphi}'_{\mathrm{gal}}$) : $\mathrm{Cl}_{F,\mathfrak{n}p^\infty}^+ \to \mathcal{O}^\times$ relevant

$\varphi_{\rm gal}$ (resp. $\varphi'_{\rm gal}$) et dont la restriction à $\prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est triviale (resp. donnée par la puissance $(1-k_0)$-ème de la norme).

Lemme 2.3. *Soit P un groupe abélien et soit Q un sous-groupe tel que le groupe quotient P/Q soit fini. Soit $\varphi_P : P \to \kappa^\times$ et $\widetilde{\varphi_Q} : Q \to \mathcal{O}^\times$ deux caractères tels que $\widetilde{\varphi_Q} \mod p = \varphi_P|_Q$. Alors, il existe un unique caractère $\widetilde{\varphi_P} : P \to \mathcal{O}^\times$, dont la restriction à Q vaut $\widetilde{\varphi_Q}$ et tel que $\widetilde{\varphi_P} \mod p = \varphi_P$.*

On fixe des plongements de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et dans $\mathbb{C}$. Pour $x \in \mathbb{A}_F^\times$, on pose $\varphi(x) := \widetilde{\varphi}_{\rm gal}(x)$ et $\varphi'(x) := \widetilde{\varphi}'_{\rm gal}(x) x_p^{-k} x_\infty^k$. Alors φ (resp. φ') est un caractère de Hecke de F, de conducteur divisant $\mathfrak{n}$ et de type 0(resp. $(1-k_0)t$) à l'infini. Notons qu'il n'existent qu'un nombre fini de tels φ et φ'.

Supposons maintenant, que pour une infinité de premiers $\mathcal{P}$, $\overline{\rho}$ est réductible. Alors, il existe des caractères de Hecke φ et φ', comme ci-dessus, tels que pour une infinité de premiers $\mathcal{P}$, on a $\overline{\rho}^{\text{ s.s.}} = \varphi \oplus \varphi' \pmod{\mathcal{P}}$. On en déduit que pour tout premier v de F, ne divisant pas $\mathfrak{n}$, on a la congruence $c(f,v) \equiv \varphi(\varpi_v) + \varphi'(\varpi_v) \pmod{\mathcal{P}}$ modulo une infinité de premiers $\mathcal{P}$. Par conséquent $c(f,v) = \varphi(\varpi_v) + \varphi'(\varpi_v)$. Par le Théorème de Densité de Cebotarev, on obtient $\rho^{\text{s.s.}} = \varphi \oplus \varphi'$, ce qui contredit l'irréductibilité absolue de ρ (*cf* Taylor [**66**]). □

3. Le cas exceptionnel.

Le but de cette partie est d'identifier les premiers p pour lesquels l'image de la composée $\overline{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\kappa) \stackrel{\rm pr}{\to} \mathrm{PGL}_2(\kappa)$ est isomorphe à A_4, S_4 ou A_5. Nous proposerons deux méthodes qui exploitent toutes les deux le fait que tout élément de $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ est d'ordre au plus 5.

La première méthode est celle de [**59**]. Pour tout idéal premier v de F ne divisant pas $p\mathfrak{n}$, qui est au-dessus d'un nombre premier totalement décomposé dans F on pose

$$A_f(v) := a(f,v)^2[a(f,v)^2 - \psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{k_0-1}][a(f,v)^2 - 2\psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{k_0-1}]\cdot$$
$$\cdot[a(f,v)^2 - 4\psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{k_0-1}][a(f,v)^4 - 3a(f,v)^2\psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{k_0-1} + \psi(v)\,\mathrm{N}(v)^{2k_0-2}].$$

Si l'image de $\mathrm{pr} \circ \overline{\rho}_{f,\mathcal{P}}$ est isomorphe à A_4, S_4 ou A_5, alors $A_f(v) \in \mathcal{P}$. Cette méthode n'est pas effective, car on ne peut pas produire en général un v tel que $A_f(v) \neq 0$. Néanmoins elle est assez facile à mettre en marche sur des exemples.

La deuxième méthode utilise le comportement de $\overline{\rho}$ en p. Par le Cor.1.5, pour tout $\tau \in J_F$, il existe des $\epsilon_\tau \in \{\pm 1\}$, tels que pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ et pour tout générateur x de $\mathbb{F}_{p^{f_\mathfrak{p}}}^\times$ l'élément

$$\prod_{\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^{f_\mathfrak{p}}}/\mathbb{F}_p)} \tau(x)^{\epsilon_\tau(k_\tau - 1)} \in \mathbb{F}_{p^{f_\mathfrak{p}}}^\times$$

appartient à $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(I_\mathfrak{p}))$ et il est donc d'ordre au plus 5 (dans le cas **(ORD)** on peut même supposer $\epsilon_\tau = 1$, pour tout $\tau \in J_F$). Si $J_{F,\mathfrak{p}} = \{\tau_1, ..., \tau_{f_\mathfrak{p}}\}$, alors on trouve que l'élément

$$\epsilon_{\tau_1}(k_{\tau_1} - 1) + \epsilon_{\tau_2} p(k_{\tau_2} - 1) + ... + \epsilon_{\tau_{f_\mathfrak{p}}} p^{f_\mathfrak{p}-1}(k_{\tau_{f_\mathfrak{p}}} - 1)$$

est d'ordre au plus 5 dans $\mathbb{Z}/(p^{f_\mathfrak{p}} - 1)$, et donc

$$5((k_{\tau_1} - 1) + p(k_{\tau_2} - 1) + ... + p^{f_\mathfrak{p}-1}(k_{\tau_{f_\mathfrak{p}}} - 1)) \geq p^{f_\mathfrak{p}} - 1.$$

Si on replace le générateur x successivement par $x^p, x^{p^2}, ..., x^{p^{f_\mathfrak{p}-1}}$ et on somme les inégalité ainsi obtenues, on trouve : $5(1 + p + ... + p^{f_\mathfrak{p}-1})(\sum_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}} (k_\tau - 1)) \geq f_\mathfrak{p}(p^{f_\mathfrak{p}} - 1)$.

Pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ on a donc $5(\sum_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}} (k_\tau - 1)) \geq f_{\mathfrak{p}}(p-1)$ et donc $5(\sum_{\tau \in J_F} (k_\tau - 1)) \geq d(p-1)$.

On en déduit que $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ ne peut pas être isomorphe à A_4, S_4 ou A_5, si

$$d(p-1) > 5(\sum_{\tau \in J_F} (k_\tau - 1)).$$

Notons que cette hypothèse découle de **(II)** dès que $d \geq 5$. De plus, si $d = 2$ et $k = (2,4)$ l'hypothèse **(II)** est satisfaite pour $p \geq 7$, et si $d = 3$ et $k = (2,2,4)$ l'hypothèse **(II)** est satisfaite pour $p \geq 11$.

4. Le cas diédral.

On étudie dans cette partie le cas où l'image de la composée $\overline{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\kappa) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathrm{PGL}_2(\kappa)$ isomorphe au groupe diédral D_{2n}, pour un certain entier $n \geq 3$, qui est premier à p. Soit C_n le sous-groupe cyclique d'ordre n de D_{2n}. Comme $\mathrm{pr}^{-1}(C_n)$ est commutatif, formé d'éléments semi-simples (p ne divise pas n), il est contenu dans un tore de $GL_2(\kappa)$ et on peut donc le diagonaliser. Alors $\mathrm{pr}^{-1}(D_{2n} \backslash C_n)$ est contenu dans le normalisateur de ce tore et, par conséquent, il est représenté par des matrices anti-diagonales.

Soit $\varepsilon : D_{2n} \to \{\pm 1\}$ la signature et soit K le corps fixe de $\ker(\varepsilon \circ \mathrm{pr} \circ \overline{\rho})$. Le corps K est une extension quadratique de F, qui non-ramifiée hors de $\mathfrak{n}$. Comme restriction de $\overline{\rho}$ à $\mathcal{G}_K$ est abélienne nous allons pouvoir appliquer la théorie du corps de classes.

Soit c l'élément non-trivial du groupe de Galois $\mathcal{G}(K/F)$. Comme $\overline{\rho}$ est absolument irréductible, mais $\overline{\rho}_{f|\mathcal{G}_K}$ ne l'est pas, il existe un caractère $\varphi_{\mathrm{gal}} : \mathcal{G}_K \to \overline{\mathbb{F}}_p$ différent de son conjugué φ_{gal}^c et tel que $\overline{\rho}_{f|\mathcal{G}_K} = \varphi_{\mathrm{gal}} \oplus \varphi_{\mathrm{gal}}^c$.

LEMME 4.1. *Soit $\mathfrak{p}$ un premier de F divisant p. Supposons que $p \neq 2k_\tau - 1$, pour tout $\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}$. Alors*

(i) le corps K est non-ramifié en $\mathfrak{p}$,

(ii) le premier $\mathfrak{p}$ de F se décompose dans K comme $\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}^c$, et les poids de Fontaine-Laffaille de φ_{gal} en $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}^c$) sont donnés par $(p_\tau)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$ (resp. $(q_\tau)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$), où $\{p_\tau, q_\tau\} = \{m_\tau, k_0 - m_\tau - 1\}$ tout $\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}$.

Démonstration : (i) Si K/F était ramifiée en $\mathfrak{p}$, alors $\overline{\rho}(I_{\mathfrak{p}})$ contiendrait au moins une matrice anti-diagonale et les vecteurs de la base ne seront donc pas propres pour tout le groupe $\overline{\rho}(I_{\mathfrak{p}})$. Or, le groupe $\overline{\rho}(I_{\mathfrak{p}})$ est trigonalisable et admet dont au moins un vecteur propre commun. Par conséquent, les éléments de $\mathrm{pr} \circ \overline{\rho}(I_{\mathfrak{p}})$ seraient d'ordre ≤ 2. En utilisant le calcul de §3 et le fait que $p > k_0$, on déduit que pour tout $\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}$ on a $2(k_\tau - 1) = p - 1$. Contradiction.

(ii) Par Cor.1.5 $\varphi_{\mathrm{gal}} \oplus \varphi_{\mathrm{gal}}^c$ est cristalline en $\mathfrak{P}$ de poids $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}}$. Comme $(\varphi_{\mathrm{gal}} \varphi_{\mathrm{gal}}^c)_{|I_{\mathfrak{P}}} = \omega_{|I_{\mathfrak{P}}}^{1-k_0}$, l'action de c échange les poids m_τ et $k_0 - m_\tau - 1$, et donc $\mathfrak{p}$ se décompose dans l'extension quadratique. $\square$

Soit $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de K, et soit $\widehat{\mathfrak{O}}$ sa complétion profinie. Notons $\widehat{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{n},1}^{\times}$ le sous-groupe de $\widehat{\mathfrak{O}}^{\times}$ formé des éléments $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$. Alors $\widehat{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{n},1}^{\times}$ est le produit de p-partie $\prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^{\times}$ et sa hors-de-p-partie, notée par $\widehat{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{n},1}^{\times(p)}$.

Par la théorie de corps de classes global, le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale $\mathfrak{n}$-ramifiée (resp. $\mathfrak{n}\,p^\infty$-ramifiée) de K est isomorphe à $\mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}} := \mathbb{A}_K^{\times} / K^{\times} \widehat{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{n},1}^{\times} K_\infty^{\times}$

(resp. $\mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}p^\infty} := \mathbb{A}_K^\times / \overline{K^\times \widehat{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{n},1}^{\times(p)} K_\infty^\times}$). On a une suite exacte :

$$1 \to (\prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times)/\overline{\{\epsilon \in \mathfrak{O}^\times \,|\epsilon - 1 \in \mathfrak{n}\}} \to \mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}p^\infty} \to \mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}} \to 1 \tag{IV.2}$$

PROPOSITION 4.2. (i) *Supposons que pour tout* $\tau \in J_F$, $p \neq 2k_\tau - 1$ *et que* $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ *est dihédral. Alors, il existe*

−une extension quadratique CM K/F, de discriminant $\Delta_{K/F}$ divisant $\mathfrak{n}$ et dans laquelle tous les premiers $\mathfrak{p}$ de F au-dessus de p se décomposent, et

−un caractère de Hecke φ de K de conducteur divisant $\mathfrak{n}\,\Delta_{K/F}^{-1}$ et de type $(m_\tau, k_0-1-m_\tau)_{\tau\in J_F}$ à l'infini, et tel que

$$\rho \equiv \mathrm{Ind}_K^F \varphi \pmod{\mathcal{P}}.$$

(ii) *Supposons que f n'est pas une série thêta. Alors pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, le groupe* $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ *n'est pas dihédral.*

REMARQUE 4.3. Les premiers p pour lesquels la congruence $\rho \equiv \mathrm{Ind}_K^F \varphi \pmod{\mathcal{P}}$ puisse apparaître devraient être contrôlés par la valeur spéciale de la fonction L du caractère de Hecke φ/φ^c (dans le cas elliptique ceci a été démontré par Hida [**31**] et Ribet [**60**]; voir aussi Thms A et B).

Proof : (i) Par (IV.2) et le lemme ci-dessus, on a $\varphi_{\mathrm{gal}} : \mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}p^\infty} \to \kappa^\times$ dont la restriction à $\prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ est donnée par le caractère algébrique de poids $(m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau\in J_F}$. Notons que ce caractère est trivial sur $\mathfrak{O}^\times$.

Par le lemme 2.3, il existe un relèvement $\widetilde{\varphi}_{\mathrm{gal}} : \mathrm{Cl}_{K,\mathfrak{n}p^\infty} \to \mathcal{O}^\times$, dont la restriction à $\prod_{\mathfrak{P}|p} \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}^\times$ est encore donnée le caractère algébrique de poids $\widetilde{k} = (m_\tau, k_0 - m_\tau - 1)_{\tau\in J_F}$ (et qui est donc triviale sur $\mathfrak{O}^\times$).

On fixe des plongements de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et dans $\mathbb{C}$, et on pose $\varphi(x) := \widetilde{\varphi}_{\mathrm{gal}}(x) x_p^{-\widetilde{k}} x_\infty^{\widetilde{k}}$. Alors φ est le caractère de Hecke de K cherché.

(ii) Il existe un nombre fini de caractères de Hecke φ comme ci-dessus. Par conséquent, si $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ est dihédrale pour une infinités de premiers $\mathcal{P}$, alors on pourrait trouver φ comme ci-dessus et tel que la congruence $\rho \equiv \mathrm{Ind}_K^F \varphi \pmod{\mathcal{P}}$ arrive pour une infinités de premiers $\mathcal{P}$. Donc, ceci serait une égalité et f serait égale à la série thêta associée à φ. □

5. Étude de l'image de $\overline{\rho}$.

THÉORÈME 5.1. (Dickson) (i) *Tout sous-groupe irréductible de* $\mathrm{PSL}_2(\kappa)$ *d'ordre multiple de p est conjugué dans* $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ *à* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ *ou* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, *où q est une puissance de p.*

(ii) *Tout sous-groupe irréductible de* $\mathrm{PSL}_2(\kappa)$ *d'ordre premier à p est soit dihédral, soit isomorphe à A_4, S_4 ou A_5.*

Comme application de ce théorème, et de Prop.2.1, Prop.4.2 et §3, on obtient

PROPOSITION 5.2. *Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi)$ une forme nouvelle, qui n'est pas une série thêta. Alors, pour tout premier $\mathcal{P}$ en dehors d'un ensemble fini, l'image de la représentation $\mathcal{P}$-adique $\overline{\rho}$ associée à f est grosse, c'est-à-dire que l'on a la condition suivante*

($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) *il existe une puissance q de p telle que* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{Im}(\overline{\rho}) \subset \kappa^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Cette proposition généralise au cas des formes modulaires de Hilbert, des résultats de Serre [**61**] et Ribet [**59**] concernant respectivement le cas d'une courbe elliptique et celui d'une forme modulaire classique.

Soit $\widehat{F}$ le compositum de $\widetilde{F}$ est du sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ fixé par le groupe de Galois $\ker(\overline{\psi}\omega)$. Notons que si le caractère central ψ de f est trivial ou quadratique, on a $\widehat{F} = \widetilde{F}$.

L'extension $\widehat{F}/F$ est galoisienne et non-ramifiée en p, car le caractère central ψ de f est de conducteur premier à p. En d'autres termes $\mathcal{G}_{\widehat{F}}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_F$ contenant le sous-groupe d'inertie I_p.

On pose $\mathcal{D} = \mathrm{Det}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}))(\mathbb{F}_p^\times)^{1-k_0}$.

Proposition 5.3. *Supposons* $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$. *Alors, il existe une puissance q de p telle que*
ou bien $\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^{\mathcal{D}} := \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \mathrm{Det}(\gamma) \in \mathcal{D}\}$
ou bien $\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}) = (\mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}} := \{\gamma \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \mid \mathrm{Det}(\gamma) \in \mathcal{D}\}$

Démonstration : On montre d'abord que $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}))$ est irréductible d'ordre multiple de p. D'après $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$, le groupe $\mathrm{pr}(\mathrm{Im}(\overline{\rho}))$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$. Le groupe $\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$ est un sous-groupe distingué non-trivial de $\mathrm{pr}(\mathrm{Im}(\overline{\rho}))$ (puisqu'il contient $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(I_p))$ et $p > k_0$; voir Cor.1.5). Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ est un groupe simple d'indice 2 dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, on déduit

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})) \subset \mathrm{pr}(\mathrm{Im}(\overline{\rho})) \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q).$$

Lemme 5.4. *Soit H un groupe de centre Z et soit* $\mathrm{pr} : H \to H/Z$ *la projection canonique. Soient P et Q deux sous-groupes de H tels que* $\mathrm{pr}(P) \supset \mathrm{pr}(Q)$. *Si de plus Q n'a pas de quotients abéliens non-triviaux* $(C = C^{\mathrm{der}})$, *alors $P \supset Q$.*

(on a $BZ \supset CZ$ et donc $B \supset B^{\mathrm{der}} = (BZ)^{\mathrm{der}} \supset (CZ)^{\mathrm{der}} = C^{\mathrm{der}} = C$.)

Il découle de ce lemme que $\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}) \supset \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$, et donc

$$(\kappa^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}} \supset \overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}) \supset (\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}.$$

Puisque $[(\kappa^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}} : (\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}] \leq 2$ on a la proposition. □

Soit $y \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ tel que $y^2 \in \mathbb{F}_q$. Alors $(\mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^{\mathcal{D}} \amalg (y\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}$ et donc $\mathrm{Tr}((\mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}) = \mathbb{F}_q \cup y\,\mathbb{F}_q$. Par conséquent, la $\mathbb{F}_p$-algèbre engendrée par les traces des éléments de $(\mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}$ est égale à $\mathbb{F}_{q^2}$, alors que $\mathrm{pr}((\mathbb{F}_{q^2}^\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))^{\mathcal{D}}) \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$.

6. Étude de l'image de $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\overline{\rho}$.

Dans toute cette partie on suppose $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$.

6.1. La condition $(\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}})$. D'après de la proposition 5.2, il existe alors une puissance q de p, telle que $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$. Considérons la représentation $\mathrm{pr}(\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\overline{\rho}) : \mathcal{G}_{\widehat{F}} \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F}$.

Tout automorphisme de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ (resp. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$) est la composée de la conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ et d'un automorphisme de Galois de $\mathbb{F}_q$. Par un lemme de [**59**] dû a Serre, il existe une partition $J_F = \coprod_{i\in I} J_F^i$, et pour tout $i \in I$ et $\tau \in J_F^i$ il existe un élément $\sigma_{i,\tau} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ tel que

$$\mathrm{pr}(\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^I)) \subset \mathrm{pr}(\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})) \subset \mathrm{pr}(\phi(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^I)),$$

$$\text{où}\quad \phi = (\phi^i)_{i\in I} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^I \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F} \text{ est donné par }\quad \phi^i(M_i) = (M_i^{\sigma_{i,\tau}})_{\tau\in J_F^i}.$$

En gardant ces notations, on introduit la condition suivante sur l'image de $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\overline{\rho}$:

$(\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}})$ On a $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$ et $\forall\ i \in I$, $\forall\ \tau, \tau' \in J_F^i$ $(\tau \neq \tau' \Rightarrow \sigma_{i,\tau} \neq \sigma_{i,\tau'})$.

Nous avons maintenant besoin d'introduire une hypothèse de généricité sur le poids k.

6.2. La notion de poids non-induit.

DÉFINITION 6.1. On dit que le poids $k \in \mathbb{Z}[J_F]$ est *non-induit*, s'il n'existe pas de sous-corps strict F' de F et de poids $k' \in \mathbb{Z}[J_{F'}]$ tel que pour tout $\tau \in J_F$, $k_\tau = k'_{\tau|_{F'}}$.

Posons $\widetilde{k} = \sum_{\widetilde{\tau}\in J_{\widetilde{F}}} k_{\widetilde{\tau}}\widetilde{\tau} \in \mathbb{Z}[J_{\widetilde{F}}]$, où pour tout $\widetilde{\tau} \in J_{\widetilde{F}}$ on pose $k_{\widetilde{\tau}} = k_{\widetilde{\tau}|_F}$.

On peut aussi définir $\widetilde{k}$ ainsi : $J_{\widetilde{F}}$ s'identifie au groupe $\mathcal{G}(\widetilde{F}/\mathbb{Q})$, alors que J_F s'identifie à l'ensemble des classes à gauche $\mathcal{G}(\widetilde{F}/\mathbb{Q})/\mathcal{G}(\widetilde{F}/F)$. Via ces deux identifications l'application $\widetilde{k} : J_{\widetilde{F}} \to \mathbb{Z}$ est la composée de la projection canonique $J_{\widetilde{F}} \to J_F$, suivie de $k : J_F \to \mathbb{Z}$.

Le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur $\mathbb{Z}[J_{\widetilde{F}}]$ par $\widetilde{k} = \sum_{\widetilde{\tau}\in J_{\widetilde{F}}} k_{\widetilde{\tau}}\widetilde{\tau} \mapsto \widetilde{k}^{\widetilde{\tau}'} = \sum_{\widetilde{\tau}\in J_{\widetilde{F}}} k_{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}'}\widetilde{\tau}$. On a

LEMME 6.2. *$k\in\mathbb{Z}[J_F]$ est non-induit, si et seulement si, $\mathcal{G}_F = \{\widetilde{\tau}' \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \mid \widetilde{k} = \widetilde{k}^{\widetilde{\tau}'}\}$.*

REMARQUE 6.3. (i) Un élément $\tau' \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit à gauche sur J_F (resp. sur $\mathbb{Z}[J_F]$) par $\tau \mapsto \tau'\tau$ (resp. par $k = \sum_\tau k_\tau \mapsto \tau'k = \sum_\tau k_{\tau'^{-1}\tau}\tau$). Shimura définit le sous-corps Φ_k de $\widetilde{F}$ comme le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ fixé par le groupe de Galois $\{\tau' \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}\,|\tau'k = k\}$. Il est clair que pour $\widetilde{\tau} \in \mathcal{G}(\widetilde{F}/\mathbb{Q})$, on a $\widetilde{\tau} \in \mathcal{G}(\widetilde{F}/\Phi_k) \iff \forall \widetilde{\tau}' \in \mathcal{G}(\widetilde{F}/\mathbb{Q})\ k_{\widetilde{\tau}'} = k_{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}'}$.

Il semble que le fait que k soit non-induit, ne puisse pas s'exprimer en général en termes de Φ_k. Par exemple, lorsque F est galoisien ($F = \widetilde{F}$) :

– k est non-induit si et seulement si k n'est pas trivial sur les classes à droite de $\mathcal{G}(F/\mathbb{Q})$ modulo un sous-groupe non-trivial, alors que

– la condition $\Phi_k = F$ revient à dire que k n'est pas trivial sur les classes à gauche de $\mathcal{G}(F/\mathbb{Q})$ modulo un sous-groupe non-trivial.

(ii) Si k est non-induit, alors il est en particulier non-parallèle. Si le degré d du corps F est un nombre premier, ces deux conditions sont équivalentes.

PROPOSITION 6.4. *Supposons que k est non-induit et que pour tout $\tau \neq \tau' \in J_F$ on a $p \neq k_\tau + k_{\tau'} - 1$. Alors ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) implique ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$).*

Démonstration : Soient $\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ tels que pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widehat{F}}$ on a $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\widetilde{\tau}_1^{-1} g \widetilde{\tau}_1)) = \mathrm{pr}(\overline{\rho}(\widetilde{\tau}_2^{-1} g \widetilde{\tau}_2))$. Il s'agit alors de prouver que $\widetilde{\tau}_1^{-1}\widetilde{\tau}_2 \in \mathcal{G}_F$. On pose $\overline{\rho}_i(g) = \overline{\rho}(\widetilde{\tau}_i^{-1} g \widetilde{\tau}_i)$ ($i = 1, 2$).

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\widehat{F}$ au-desus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de F divisant p. On note h'_i (resp. h_i) le degré résidue de $\mathfrak{P}^{\widetilde{\tau}_i}$ (resp. $\mathfrak{p}^{\tau_i}$), $i = 1, 2$. Par Cor.1.5 on a $\overline{\rho}_i|_{I_{\mathfrak{P}}}^{\mathrm{s.s.}} = \varepsilon_i \oplus \delta_i$, où ε_i (resp. δ_i) $I_{\mathfrak{P}} \to I_{\mathfrak{P}^{\widetilde{\tau}_i}} \to \mathbb{F}^\times_{p^{h'_i}} \to \mathbb{F}^\times_{p^{h_i}} \to \kappa^\times$ est la composée de la conjugaison par $\widetilde{\tau}_i$, de la projection sur l'inertie moderée, de la norme, et du caractère $x \mapsto \prod_{\tau\in J_{F,\mathfrak{p}^{\tau_i}}} \tau(x)^{p_\tau}$ (resp. $x \mapsto \prod_{\tau\in J_{F,\mathfrak{p}^{\tau_i}}} \tau(x)^{q_\tau}$), où $\{p_\tau, q_\tau\} = \{m_\tau, k_0 - 1 - m_\tau\}$. Dans le cas (ORD) on peut même supposer que pour tout $\tau \in J_F$, on a $p_\tau = m_\tau$ et $q_\tau = k_0 - 1 - m_\tau$.

Notons que $\varepsilon_1\delta_1 = \varepsilon_2\delta_2 = \omega^{1-k_0}$. Puisque $I_{\mathfrak{P}} \subset \mathcal{G}_{\widehat{F}}$ et $\mathrm{pr}\circ\overline{\rho}_1 = \mathrm{pr}\circ\overline{\rho}_2$ sur $\mathcal{G}_{\widehat{F}}$, on peut supposer que $\varepsilon_1/\delta_1 = \varepsilon_2/\delta_2$. En variant $\mathfrak{P}$ on en déduit que pour tout $\widetilde{\tau} \in J_{\widetilde{F}}$, $\widetilde{k}_{\widetilde{\tau}} = \widetilde{k}_{\widetilde{\tau}\widetilde{\tau}_1^{-1}\widetilde{\tau}_2}$ (on utilise ici que $p > k_0$ ainsi que $p \neq k_\tau + k_{\tau'} - 1$). Comme k est non-induit, on déduit de le lemme 6.2 que $\widetilde{\tau}_1^{-1}\widetilde{\tau}_2 \in \mathcal{G}_F$. □

6.3. L'image de $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}$ est grosse. Les résultats de ce paragraphe joueront un rôle important dans le chapitre VI. Posons

$$H(\mathbb{F}_q) = \left(\prod_{i\in I} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\right)^{\mathcal{D}} := \left\{ (M_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \,\middle|\, \exists\delta \in \mathcal{D},\ \forall i,\ \mathrm{Det}(M_i) = \delta \right\}.$$

LEMME 6.5. *Soit* $\delta : \mathbb{F}_{p^h}^\times \to \mathbb{F}_{p^h}^\times$ *le morphisme de groupes donné par* $x \mapsto \prod_{\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^h}/\mathbb{F}_p)} \tau(x)^{a_\tau}$. *On suppose que pour tout* $\tau \in \mathcal{G}(\mathbb{F}_{p^h}/\mathbb{F}_p)$, $2a_\tau < p-1$ *et* $\mathrm{Im}(\delta^2) \subset \mathbb{F}_q^\times$ $(q = p^l)$. *Alors* $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{F}_q^\times$.

Démonstration : Puisque $\mathbb{F}_{p^l} \cap \mathbb{F}_{p^h} = \mathbb{F}_{p^{(l,h)}}$ on peut supposer que h est multiple de l, disons $h = rl$. Il s'agit alors de prouver l'assertion suivante :

$$\text{Si } a = \sum_{i=0}^{f-1} a_i p^i, \text{ avec } 0 \le a_i < \frac{p-1}{2}, \text{ alors } (q^r - 1 | 2a(q-1) \Rightarrow q^r - 1 | a(q-1)).$$

Supposons que $1 + p^l + ... + p^{(r-1)l}$ divise $2a = \sum_{i=0}^{rl-1} 2a_i p^i$. Comme $0 \le a_i < \frac{p-1}{2}$, ceci implique que le quotient vaut le nombre pair $\sum_{i=0}^{l-1} 2a_i p^i$, d'où le lemme. □

LEMME 6.6. *Supposons que* $p > 2k_0$. *Alors,*

(i) *pour tout* $\mathfrak{p}$ *divisant* p, $\overline{\rho}(I_\mathfrak{p})$ *est contenu dans un sous-groupe de Borel de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, *ou bien dans un tore non-deployé de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$, *le second cas ne pouvant pas se produire si* f *est ordinaire en* p,

(ii) $\mathrm{Ind}_F^\mathbb{Q} \overline{\rho}(I_p) \subset \phi(H(\mathbb{F}_q))$,

(iii) $\phi(H(\mathbb{F}_q)) \subset \mathrm{Ind}_F^\mathbb{Q} \overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$.

Démonstration : (i) Posons $h := |J_{F,\mathfrak{p}}|$. Par Cor.1.5 on a $\overline{\rho}|_{I_\mathfrak{p}}^{\text{s.s.}} = \varepsilon_\mathfrak{p} \oplus \delta_\mathfrak{p}$, où $\varepsilon_\mathfrak{p}$ (resp. $\delta_\mathfrak{p}$) $I_\mathfrak{p} \to \kappa^\times$ est la composée de la projection sur l'inertie modérée de niveau h, $I_\mathfrak{p} \to \mathbb{F}_{p^h}^\times$ et du caractère $\varepsilon : x \mapsto \prod_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}} \tau(x)^{p_\tau}$ (resp. $\delta : x \mapsto \prod_{\tau \in J_{F,\mathfrak{p}}} \tau(x)^{q_\tau}$), avec $\{p_\tau, q_\tau\} = \{m_\tau, k_0 - 1 - m_\tau\}$.

Soit x_h un générateur de $\mathbb{F}_{p^h}^\times$. Comme les traces des éléments de $\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$ appartiennent à $F_q \coprod y\mathbb{F}_q$, on a $(\varepsilon(x_h) + \delta(x_h))^2 \in \mathbb{F}_q$ et donc $\varepsilon(x_h)^2 + \delta(x_h)^2 \in \mathbb{F}_q$.

Si $\varepsilon(x_h)^2, \delta(x_h)^2 \in \mathbb{F}_q^\times$ et $p > 2k_0$, il découle du lemme 6.5 que $\varepsilon(x_h), \delta(x_h) \in \mathbb{F}_q^\times$. Par conséquent $I_\mathfrak{p}$ fixe une droite $\mathbb{F}_q$-rationnelle, et $\overline{\rho}(I_\mathfrak{p})$ donc contenu dans un sous-groupe de Borel de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Sinon $\varepsilon(x_h)^2$ et $\delta(x_h)^2$ sont conjugués par l'élément non-trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$, et donc $\varepsilon(x_h)^2 = \delta(x_h)^{2q}$. Puisque $p > 2k_0$, on a $\varepsilon(x_h) = \delta(x_h)^q$ et donc $\varepsilon(x_h) + \delta(x_h)^q \in \mathbb{F}_q^\times$. Par conséquent $\mathrm{Tr}(\overline{\rho}(I_\mathfrak{p})) \subset \mathbb{F}_q$, et donc $\overline{\rho}(I_\mathfrak{p}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Dans ce cas $\overline{\rho}(I_\mathfrak{p})$ est contenu is contained dans un tore non-deployé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

Si f est ordinaire en p, alors pour tout τ, $p_\tau = m_\tau < k_0 - m_\tau - 1 = q_\tau$ et donc $\varepsilon(x_h)^2 \neq \delta(x_h)^{2q}$.

(ii) La condition du déterminant $^{\mathcal{D}}$ étant satisfaite, nous devons juste vérifier que : pour tout $i \in I$ et $\tau, \tau' \in J_F^i$ le caractère

$$I_p \to \{\pm 1\} \ , g \mapsto (\overline{\rho}(\widetilde{\sigma}_{i,\tau}^{-1} g \widetilde{\sigma}_{i,\tau}))^{-1} (\overline{\rho}(\widetilde{\sigma}_{i,\tau'}^{-1} g \widetilde{\sigma}_{i,\tau'}))$$

est trivial. Ceci découle de $p > 2k_0$, comme dans la preuve de Prop.6.4.

(iii) On a vu au début de cette partie que $\mathrm{pr}(\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^I)) \subset \mathrm{pr}(\mathrm{Ind}_F^\mathbb{Q} \overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}))$. Par le lemme 5.4, on en déduit que $\phi(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)^I) \subset \mathrm{Ind}_F^\mathbb{Q} \overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$.

Comme $\phi(H(\mathbb{F}_q)) = \phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)^I)\, \mathrm{Ind}_F^\mathbb{Q} \overline{\rho}(I_p)$, on a l'assertion. □

7. Congruences entre conjugués internes.

Les résultats de cette partie ne seront pas utilisés dans la suite.

La proposition suivante généralise un résultat de Ribet [**59**] sur les familles de formes modulaires classiques, au cas de la famille de conjugués internes d'une forme modulaire de Hilbert.

PROPOSITION 7.1. *Supposons* ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) *et que* k *est non-induit. Supposons de plus que* $p > 2k_0$ *est totalement décomposé dans* F*. Alors,*

$$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F})^{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}}) \subset (\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})^{J_F})^{\mathcal{D}}\ ,\ \textit{où}\ \mathcal{D} = \mathbb{F}_p^{\times 2}\,.$$

REMARQUE 7.2. L'hypothèse que k est non-induit exclut le cas où f proviendrait par changement de base d'un sous-corps strict de F. L'hypothèse que p est totalement décomposé dans F exclut le cas, où un conjugué interne de f soit congru à un conjugué externe de f. Ces deux hypothèses supplémentaires visent donc à exclure des phénomènes qui ne se produisent pas dans le cas classique ($F = \mathbb{Q}$).

PROPOSITION 7.3. *Supposons que* f *n'est pas une série thêta, et que la condition* ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$) *n'est pas satisfaite pour une infinité de premiers* $\mathcal{P}$*. Alors il existe* $\tau \in J_F$*,* $\tau \neq \mathrm{id}$ *et un caractère de Hecke d'ordre fini* ε *de* $\widetilde{F}$ *de conducteur divisant* $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$*, tels que pour tout premier* $v \nmid \mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$ *de* F *totalement décomposé dans* $\widetilde{F}$*, on a* $c(f_\tau, v) = \varepsilon(v)c(f, v)$*.*

Démonstration : Comme f n'est pas une série thêta, la condition ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) est vérifiée pour tout premier $\mathcal{P}$, en dehors d'un ensemble fini (*cf* Prop.5.2). Prenons un tel $\mathcal{P}$ et supposons que ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$) n'est pas vérifiée. Alors, il existe $\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ tels que $\tau := \widetilde{\tau}_2^{-1}\widetilde{\tau}_1|_F \neq \mathrm{id}$ et pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widehat{F}}$, on a $\mathrm{pr}\,\overline{\rho}(\widetilde{\tau}_2^{-1}g\widetilde{\tau}_1) = \mathrm{pr}\,\overline{\rho}(\widetilde{\tau}_2^{-1}g\widetilde{\tau}_2)$. Comme ($\mathbf{LI}_{\overline{\rho}}$) est vérifiée et $\mathcal{G}_{\widehat{F}}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, la relation ci-dessus reste vraie pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$. par conséquent, il existe un caractère $\varepsilon_{\mathrm{gal}} : \mathcal{G}_{\widetilde{F}} \to \kappa^\times$, tel que pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, $\overline{\rho}_{f_\tau}(g) = \varepsilon_{\mathrm{gal}}(g)\overline{\rho}_f(g)$. Supposons que $p > 2k_0$. Alors le même argument que dans la démonstration de Prop.6.4 prouve que $\varepsilon_{\mathrm{gal}}$ est non-ramifié en les premiers divisant p. Par le lemme 2.3 $\varepsilon_{\mathrm{gal}}$ peut être relevé en un caractère de Hecke d'ordre fini ε de $\widetilde{F}$ de conducteur divisant $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$. En prenant le déterminant, on trouve $\overline{\psi_\tau} = \varepsilon_{\mathrm{gal}}^2\overline{\psi}$, et il y a donc un nombre fini de tels ε.

Pour tout premier $v \nmid \mathfrak{n}\,p$ de F totalement décomposé dans $\widetilde{F}$, on a $c(f_\tau, v) \equiv \varepsilon(v)c(f, v)$ (mod $\mathcal{P}$). Si ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$) n'est pas vérifiée pour une infinité de premiers $\mathcal{P}$, alors la dernière congruence se transformerait en égalité. □

COROLLAIRE 7.4. *Supposons que* F *est galoisien de degré impair, et que le caractère central* ψ *de* f *est trivial* ($F = \widehat{F}$)*. Supposons de plus que* f *n'est pas une série thêta et que pour une infinité de premiers* $\mathcal{P}$ ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\overline{\rho}}$) *n'est pas vérifiée. Alors, il existe un sous-corps* $F' \subsetneq F$ *et une forme modulaire de Hilbert* f' *sur* F'*, dont est le changement de base à* F *tordu par un caractère quadratique de conducteur divisant* $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$ *soit égal à* f*.*

Démonstration : Comme dans la preuve de Prop.7.3 il existe un caractère quadratique ε de F de conducteur divisant $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})$ et $\mathrm{id} \neq \tau \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ tel que $\rho_{f_\tau} = \varepsilon_{\mathrm{gal}}\rho$. Soit $F' \subset F$ (resp. $F_i \supset F$) le corps fixe de τ (resp. de $\ker(\varepsilon_{\tau^i})$). Par hypothèse F/F' est une extension cyclique de degré *impair* h. Soit $F'' = \prod_{i=1}^h F_i$. Alors

$$\mathrm{Gal}(F''/F') = \{(u_1, .., u_h) \in \{\pm 1\}^h \ \mid\ \prod_{i=1}^h u_i = 1\} \rtimes \{\tau^i \ \mid\ 0 \leq i \leq h-1\},$$

où τ agit sur $(u_1,..,u_h)$ par permutation circulaire. Si $h = 3$ le groupe $\mathrm{Gal}(F''/F')$ est isomorphe à A_4.

La représentation $\rho|_{\mathcal{G}_{F''}}$ est invariante par $\mathrm{Gal}(F''/F')$, mais le Théorème de Descente Cyclique de Langlangs ne s'applique pas directement, car $\mathrm{Gal}(F''/F')$ est d'ordre pair. Considérons le caractère quadratique $\delta = \varepsilon \cdot \varepsilon_{\tau^2} \cdot .. \cdot \varepsilon_{\tau^{h-1}}$. Alors la $\mathcal{G}_F$-représentation $\delta_{\mathrm{gal}}\rho$ est invariante par $\mathrm{Gal}(F/F')$ et donc s'étend en une représentation de $\mathcal{G}_{F'}$. En appliquant le Théorème de Descente Cyclique de Langlangs à $\delta \otimes f$ on obtient f' comme voulu. $\square$

CHAPITRE V

Cohomologie modulo p des variétés modulaires de Hilbert

Le but de ce chapitre est de d'établir une version modulo p des résultats du chapitre III sous les deux hypothèses suivantes : **(I)** p ne divise pas $\Delta = \Delta_F \,\mathrm{N}(\mathfrak{n})$,

(II) $p-1 > \sum_{\tau \in J_F}(k_\tau - 1) = |n| + d$ (le poids est p-petit).

Sous l'hypothèse **(I)** la variété modulaire de Hilbert a bonne réduction en p et possède des compactifications lisses sur $\mathbb{Z}_p$, et les représentations galoisiennes p-adiques que nous considérons sont cristallines.

L'entier $|n| + d$ est égal à la longueur de la filtration de Hodge-Tate sur la cohomologie de la variété modulaire de Hilbert. L'hypothèse **(II)** est donc nécessaire pour appliquer la théorie de Fontaine-Laffaille [**23**], ainsi que le Théorème de Comparaison de Faltings[**20**].

1. Le complexe BGG sur $\mathcal{O}$.

Le but de cette partie est de donner une version entière sur $\mathcal{O}$ des résultats du chapitre III, notamment du théorème III.5.1.

Tous les objets considérés sont sur $\mathcal{O}$. Ainsi pour alléger les notations on écrira G resp. $\mathfrak{g}$, à la place de $G_{\mathcal{O}} = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})^{J_F}$ resp. $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}} = \mathfrak{gl}_2(\mathcal{O})^{J_F}$, etc.

1.1. Le complexe de Koszul. Le complexe de Koszul du G-module trivial $\mathcal{O}$ est le complexe

$$... \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^2_{\mathcal{O}}\mathfrak{g} \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{O} \to 0$$

Comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}^-$, $\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}$ est un $\mathcal{O}[\mathfrak{b}]$-facteur direct dans $\mathfrak{g}$, on a un morphisme de B-modules $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^\bullet_{\mathcal{O}}\mathfrak{g} \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} \wedge^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b})$. On en déduit un autre complexe

$$U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} \wedge^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \to \mathcal{O} \to 0,$$

noté $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$.

Plus généralement pour tout $\mathcal{O}$-module libre V muni d'une action de $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$, on considère le complexe $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}) \otimes V$, muni de l'action diagonale de $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$. Or, pour tout $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})$-module W, qui est aussi un $\mathcal{O}$-module libre, on a un isomorphisme canonique de $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$-modules

$$\left(U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} W\right) \otimes V \cong U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} (W \otimes V|_{\mathfrak{b}}),$$

d'où un autre complexe

$$U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} (\wedge^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V|_{\mathfrak{b}}) \to V \to 0,$$

noté $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, V)$. Dans le cas où $V = V_n$ on le note $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$.

1.2. Modules de Verma. Pour tout poids $\mu \in \mathbb{Z}[J_F]$, on définit un $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$-module $V_{\mathcal{O}}(\mu) := U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} W_\mu$. On l'appelle le *module de Verma* de poids μ.

LEMME 1.1. *Soit W un B-module, libre de rang fini sur $\mathcal{O}$ de poids plus petits de $(p-1)t$. Alors, il existe filtration par des B-modules $0 = W_0 \subset W_1 \subset ... \subset W_r = W$ telle que pour tout i, $W_i/W_{i+1} \cong W_{\mu_i}$, avec $\mu_i \in \mathbb{Z}[J_F]$. De plus, les W_{μ_i} ,$1 \leq i \leq r$ sont les facteurs irréductibles du T-module W.*

En particulier, si U agit trivialement sur W, alors $W \cong \oplus_{i=1}^r W_{\mu_i}$.

Démonstration : Soit μ_1 le poids maximal de W (pour la relation d'ordre partielle donnée par les racines positives de G) et soit $v \in W$ un vecteur $\mathcal{O}$-primitif de poids μ_1. Soit W' le $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})$-module engendré par v. Alors $W' \cong W_{\mu_1}$ et $W' \otimes \mathbb{F}_q$ est irréductible, car $\mu_1 < (p-1)t$ et N est libre de rang 1. Comme W est libre sur $\mathcal{O}$ on a une suite exacte de B-modules

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}(W/W', \mathbb{F}_q) \to W' \otimes \mathbb{F}_q \xrightarrow{\phi} W \otimes \mathbb{F}_q\,.$$

Comme $W' \otimes \mathbb{F}_q$ est irréductible et v est primitif, la flèche ϕ est injective. On en déduit que $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}(W/W', \mathbb{F}_q) = 0$, donc W/W' est libre sur $\mathcal{O}$, ce qui nous donne le lemme par récurrence. □

LEMME 1.2. *Le module $S^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$ admet une filtration finie par des $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$-modules de quotient successifs de la forme $V_{\mathcal{O}}(\mu)$, $\mu \in \Omega^i(n)$, où $\Omega^i(n)$ désigne l'ensemble des poids du $\mathfrak{t}$-module $\wedge^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}$.*

Démonstration : Les poids de $\wedge^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}$ sont plus petits que $(p-1)t$. Par le lemme précédent, il existe une filtration $0 = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_r = \wedge^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}$ de quotients successifs $W_{\mu^i_j}$, avec μ^i_j décrivant l'ensemble $\Omega^i(n)$ des poids de $\wedge^i_E(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \otimes V_n(E)|_{\mathfrak{b}}$. Comme de plus $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$ est un $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})$-module libre, le foncteur $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{b})} \bullet$ est exact, d'où le lemme. □

1.3. Caractères centraux. Soit $\delta : U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{t})$ la projection venant de la décomposition de Poincaré-Birkoff-Witt $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) = U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{t}) \oplus (\mathfrak{u}^- U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) + U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})\mathfrak{u})$. On en déduit par restriction aux invariants pour l'action adjointe la flèche $\theta : U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})^G \to U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{t})$.

Notons que $U_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathfrak{t})$ s'identifie avec l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{t}, \overline{\mathbb{F}}_p) \cong \overline{\mathbb{F}}_p[J_F]$, qui est une algèbre de polynômes de Laurent et le groupe de Weyl de G agit dessus par $(\epsilon_J \cdot P)(\mu) = P(\epsilon_J(\mu + t) - t)$. Le résultat suivant est un analogue du théorème de Harish-Chandra:

THÉORÈME 1.3. (Jantzen [**39**]) *$\theta_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ induit un isomorphisme $U_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathfrak{g})^G \to U_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathfrak{t})^{\{\pm\}^{J_F}}$.*

Pour $\mu \in \mathbb{Z}[J_F]$ et tout $\mathcal{O}$-algèbre R, on note $d\mu_R : \mathfrak{t}_R \to R$ le caractère correspondant et $\chi_{\mu,R} = d\mu_R \circ \theta_R$ la composée $U_R(\mathfrak{g})^G \to U_R(\mathfrak{t}) \to R$. Cette définition est compatible aux morphismes de $\mathcal{O}$-algèbres.

Si V est un $U_R(\mathfrak{g})$-module engendré par un vecteur v de poids μ, qui est annulé par $\mathfrak{u}$, alors $U_R(\mathfrak{g})^G$ agit sur V par $\chi_{\mu,R}$.

Posons $\chi_{\mu,p} = \chi_{\mu,\mathcal{O}}$ et $\overline{\chi}_{\mu,p} = \chi_{\mu,\overline{\mathbb{F}}_p}$.

COROLLAIRE 1.4. *Pour tout $\mu \in \mathbb{Z}[J_F]$, si $\overline{\chi}_{n,p} = \overline{\chi}_{\mu,p}$, alors il existe $J \subset J_F$ tel que $\mu - (\epsilon_J(n+t) - t) \in p\,\mathbb{Z}[J_F]$. En particulier, si en plus μ est plus petit que $(p-1)t$, alors $\mu = \epsilon_J(n+t) - t$.*

PROPOSITION 1.5. *Soit $\mu \in \Omega^i(n)$ (cf le lemme 1.2). Alors $\overline{\chi}_{n,p} = \overline{\chi}_{\mu,p}$, si et seulement s'il existe $J \subset J_F$ contenant i éléments et tel que $\mu = \epsilon_J(n+t) - t$.*

Démonstration : D'après le corollaire, il ne reste qu'à vérifier pour $J \subset J_F$ on a $\epsilon_J(n+t) - t \in \Omega^i(n)$, si et seulement si, J contient i éléments. D'après le lemme 1.2, il s'agit de prouver que $W_{\epsilon_J(n+t)-t}(E)$ apparaît (avec multiplicité un) dans $\wedge^i_E(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \otimes V_n(E)|_{\mathfrak{t}}$ si et seulement si J contient i éléments. Les poids de $\wedge^i_E(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \otimes V_n(E)|_{\mathfrak{t}}$ sont de la forme $\epsilon_{J'}(t) - t + \nu$, où $J' \subset J_F$ contient i éléments et ν est un poids de $V_n(E)$. Si $\epsilon_J(n+t) - t = \epsilon_{J'}(t) - t + \nu$ on aurait $n = \epsilon_J(\nu) + \epsilon_J(\epsilon_{J'}(t)) - t$. Or, n est le poids maximal de $V_n(E)$, donc n domine ν, et par conséquent $J = J'$. $\square$

1.4. Décomposition par rapport aux caractères centraux. D'après le lemme 1.2 $S^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$ admet une filtration finie par des $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$-modules de quotient successifs de la forme $V_{\mathcal{O}}(\mu)$, $\mu \in \Omega^i(n)$. Donc $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$ est annulé par une puissance de l'idéal $I := \prod_{\mu \in \Omega^\bullet(n)} \ker(\chi_{\mu,p})$ de l'anneau commutatif $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})^G$. Nous verrons comme conséquence de la proposition 1.5, qu'en fait I lui-même annule $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$.

LEMME 1.6. *Soit $P_1, .., P_r$ des idéaux d'un anneau commutatif R. On suppose que $P_1..P_r = 0$ et que pour tout $i \neq j$ $P_i + P_j = R$. Alors tout R-module W s'écrit $W = \oplus_i W^{P_i}$, avec $W^{P_i} = \{m \in W | P_i m = 0\}$.*

Les $pR + \ker(\chi_{\mu,p}) = \ker(\overline{\chi}_{\mu,p})$, $\mu \in \Omega^\bullet(n)$, sont les idéaux maximaux de R. Soient $\overline{\chi}_1 = \overline{\chi}_{n,p}$, $\overline{\chi}_2$,...,$\overline{\chi}_r$ des représentants des caractères $\overline{\chi}_{\mu,p}$, $\mu \in \Omega^\bullet(n)$. Posons $P_i = \prod_{\overline{\chi}_{\mu,p} = \overline{\chi}_i} \ker(\chi_{\mu,p})$. En appliquant ce lemme on obtient une décomposition du complexe

$$S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n) = \oplus_{i=1}^r S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)^{P_i}$$

en somme de facteurs directes, car les différentielles sont $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$-équivariantes.

Notons par ailleurs que $V_{\mathcal{O}}(\mu)_{\overline{\chi}_{n,p}} = V_{\mathcal{O}}(\mu)$, si $\overline{\chi}_{\mu,p} = \overline{\chi}_{n,p}$, et $V_{\mathcal{O}}(\mu)_{\overline{\chi}_{n,p}} = 0$, sinon.

D'ici et de la proposition 1.5 on obtient le :

THÉORÈME 1.7. *Le complexe $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)_{\overline{\chi}_{n,p}}$ est un facteur direct dans $S^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)$ et $S^0_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)_{\overline{\chi}_{n,p}} = V_n$. Pour tout $i \geq 1$, $S^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, n)_{\overline{\chi}_{n,p}}$ admet une filtration dont les quotients successifs sont les $V_{\mathcal{O}}(\mu)$, avec $\mu \in \Omega^i(n)$, $\overline{\chi}_{\mu,p} = \overline{\chi}_{n,p}$. Précisément les quotients successifs de la filtration sont données par les $V_{\mathcal{O}}(\epsilon_J(n+t) - t)$, où J décrit les sous-ensembles à i éléments de J_F (avec multiplicité un).*

1.5. Le complexe BGG pour les algèbres des distributions. Soit $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G)$ la $\mathcal{O}$-algèbre des distributions sur G. Pour tout G-module V, libre sur $\mathcal{O}$, on définit le complexe

$$0 \leftarrow V \leftarrow \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(B)} (\wedge^\bullet_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \otimes V|_{\mathfrak{b}}),$$

noté $\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G, B, V)$. Dans le cas où $V = V_n$ on note ce complexe $\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G, B, n)$.

REMARQUE 1.8. Le complexe $\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G, B, V)$ n'est pas exact. Il le deviendra après application du foncteur de linéarisation de Grothendieck au fibré associé.

Comme dans la partie précédente on définit pour tout $\mu \in \mathbb{Z}[J_F]$ le module de Verma $\mathcal{V}(\mu) = \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(B)} W_\mu$. On rappelle que $\Omega^i(n)$ est l'ensemble des $\mu \in \mathbb{Z}[J_F]$ tels que W_μ est un sous-quotient irréductible de $\wedge^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \otimes V_n|_{\mathfrak{b}}$. Le lemme 1.2 devient :

LEMME 1.9. *Le module $\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G, B, n)$ admet une filtration finie par des $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G)$-modules de quotients successifs $\mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\mu)$, avec $\mu \in \Omega^i(n)$.*

Comme $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G) \subset U_E(\mathfrak{g})$, le centre $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})^G$ de $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})$ est contenu dans le centre de $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G)$.

Dans la partie précédente on a défini les caractères centraux $\chi_{\mu,p} = \chi_{\mu,\mathcal{O}}$ et $\overline{\chi}_{\mu,p} = \chi_{\mu,\overline{\mathbb{F}}_p}$.

Si W est un $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G)$-module engendré par un vecteur v de poids μ, annulé par $\mathfrak{u}$, alors $U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})^G$ agit sur W par le caractère $\chi_{\mu,p}$. Posons $I = \prod_{\mu\in\Omega^\bullet(n)} \ker(\chi_{\mu,p})$. D'après le lemme précédent le $\mathcal{O}$-module fini $\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G,B,n)$ est aussi un module sur $R := U_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})^G/I$. Soient $\overline{\chi}_1 = \overline{\chi}_{n,p}, \overline{\chi}_2, ...\overline{\chi}_r$ les différents homomorphismes d'algèbres de R dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Posons pour $1 \leq j \leq r$:

$$\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G,B,n)_{\overline{\chi}_j} = \left\{ x \in \mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G,B,n) | \left(\prod_{\mu\in\Omega^\bullet(n), \overline{\chi}_{\mu,p}=\overline{\chi}_j} \ker(\chi_{\mu,p}) \right) x = 0 \right\}.$$

De la même manière que dans 1.4 on obtient la décomposition

$$\mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G,B,n) = \oplus_{j=1}^r \mathcal{S}^\bullet_{\mathcal{O}}(G,B,n)_{\overline{\chi}_j}. \tag{V.1}$$

Le théorème principal que l'on veut prouver est le :

Théorème 1.10. *On a* $\mathcal{S}^i_{\mathcal{O}}(G,B,n)_{\overline{\chi}_{n,p}} \cong \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\epsilon_J(n+t)-t)$.

Démonstration : Traitons d'abord le cas $n = 0$.

Comme $\mathfrak{u}$ est abélien, U agit trivialement sur $\wedge^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b})$ et donc d'après le lemme 1.2

$$\wedge^i_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}/\,\mathfrak{b}) \cong \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} W_{\epsilon_J(t)-t}.$$

Comme $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G)$ est libre sur $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(B)$ on obtient :

$$\mathcal{S}^i_{\mathcal{O}}(G,B,0) = \mathcal{S}^i_{\mathcal{O}}(G,B,0)_{\overline{\chi}_{0,p}} \cong \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\epsilon_J(t)-t).$$

Passons maintenant au cas général. On déduit du cas précédent la décomposition

$$\mathcal{S}^i_{\mathcal{O}}(G,B,n) \cong \bigoplus_{J\subset J_F, |J|=i} \mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(B)} \left(W_{\epsilon_J(t)-t} \otimes V_n \right).$$

En vertu du (V.1) le théorème découle du lemme suivant, qui lui-même est une conséquence directe de la preuve de la proposition 1.5.

Lemme 1.11. *On a* $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(G) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathcal{O}}(B)} \left(W_{\epsilon_J(t)-t} \otimes V_n \right)\right)_{\overline{\chi}_{n,p}} \cong \mathcal{V}_{\mathcal{O}}(\epsilon_J(n+t)-t)$.

2. Complexe BGG pour les cristaux.

2.1. Cohomologie cristalline logarithmique et foncteur de linéarisation. Notre référence est [**51**]Sect.4.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on pose $S_r = \mathrm{Spec}((\mathcal{O}\,/p^{r+1}))$, et pour tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma X, on pose $X_r = X \times S_r$.

On a une équivalence de catégories entre la catégorie des cristaux sur $(\overline{X}_0/S_r)^{\mathrm{cris}}_{\log}$ et la catégorie des $\mathcal{O}_{\overline{X}_r} \otimes \mathfrak{o}$-modules $\mathcal{M}$ qui sont localement libres et munis d'une connexion à pôles logarithmiques, intégrable, quasi-unipotente $\nabla : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}_r}} \Omega_{\overline{X}_r/S_r}(\mathrm{dlog}(D)))$.

On a un foncteur L, dit de linéarisation, de la catégorie des faisceaux en $\mathcal{O}_{\overline{X}_r}$-modules vers la catégorie des cristaux sur $(\overline{X}_0/S_r)^{\mathrm{cris}}_{\log}$.

Le lemme de Poincaré log-cristallin, dit que le complexe

$$0 \to \overline{\mathcal{V}}_r \to \mathrm{L}(\overline{\mathcal{V}}_r \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}_r}} \Omega^\bullet_{\overline{X}_r/S_r}(\mathrm{dlog}\,\infty)) \tag{V.2}$$

est une résolution.

2.2. Complexe BGG dual pour les fibrés. Soient W_1 et W_2 deux B-modules de poids plus petits que $(p-1)t$. Posons $\overline{\mathcal{W}}_i = \mathcal{F}_B(W_i)$, $i = 1, 2$ (*cf* §5). Par [**51**]§5.2.4 on a un morphisme

$$\text{(V.3)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}_\mathcal{O}(G)}(\mathcal{U}_\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathcal{U}_\mathcal{O}(B)} W_1), \mathcal{U}_\mathcal{O}(G) \otimes_{\mathcal{U}_\mathcal{O}(B)} W_2) \to \mathrm{Op.Diff.}(\overline{\mathcal{W}}_{2,r}, \overline{\mathcal{W}}_{1,r}),$$

qui devient un isomorphisme après tensorisant avec E (*cf* (III.3)).

On applique la construction du paragraphe précédent à la compactification toroïdale de la variété modulaire de Hilbert $\overline{M}'$ et le fibré vectoriel $\overline{\mathcal{V}}_n$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a un homomorphisme injectif de complexes de fibrés vectoriels sur $\overline{M}'_r$

$$\text{(V.4)} \qquad \mathcal{K}_n^\bullet := \underset{J \subset J_F}{\oplus} \overline{\mathcal{W}}(\epsilon_J(n+t)-t)_r \hookrightarrow \overline{\mathcal{V}}_n \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{M}'_r}} \Omega^\bullet_{\overline{M}'_r/S_r}(\mathrm{dlog}\,\infty).$$

Proposition 2.1. (V.4) *est un homomorphisme injectif strict de complexes filtrés.*

Il découle de cette proposition que $\mathrm{L}(\mathcal{K}_n^\bullet)$ est un facteur direct de $\mathrm{L}(\overline{\mathcal{V}}_n \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{M}'_r}} \Omega^\bullet_{\overline{M}'_r/S_r}(\mathrm{dlog}\,\infty))$. Ce-dernier est exacte par le lemme de Poincaré cristallin. Par conséquent $\mathrm{L}(\mathcal{K}_n^\bullet)$ est également exacte. Comme le foncteur L est exact, on en déduit des isomorphismes filtrés $\mathcal{H}^j_{\text{dR-log}}(\overline{M}'_r, \overline{\mathcal{V}}_n) \cong \mathcal{H}^j(\overline{M}'_r, \mathcal{K}_n^\bullet)$.

Théorème 2.2. *La suite spectrale de Hodge vers de Rham*

$$\mathrm{E}_1^{i,j} = \bigoplus_{J \subset J_F, |p(J)|=i} \mathrm{H}^{i+j-|J|}(\overline{M}'_r, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t,n_0}) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}_{\text{dR-log}}(\overline{M}'_r, \overline{\mathcal{V}}_n)$$

dégénère en E_1 *:*

$$\text{(V.5)} \qquad \mathrm{gr}^i\, \mathcal{H}^r_{\text{dR-log}}(\overline{M}'_r, \overline{\mathcal{V}}_n) = \bigoplus_{J \subset J_F, |J| \leq r, |p(J)|=i} \mathrm{H}^{r-|J|}(\overline{M}'_r, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_J(n+t)-t}).$$

Démonstration : On procède comme dans la démonstration du Thm.5.1(ii), une fois que l'on a Prop.2.1. Comme dans [**51**]II.4, pour la dégénérescence en E_1 on utilise un théorème d'Illusie [**37**], à la place du théorème de Deligne sur $\mathbb{C}$ utilisé dans la démonstration du Thm.5.1(ii). □

Remarque 2.3. (i) Par les arguments de Cor.III.7.4(i) il est facile de voir que la décomposition (V.5) est Hecke équivariante, sauf pour les opérateurs $T_\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p}$ divisant p. Lorsque p est totalement décomposé dans F, on pourrait utilisé un résultat de Wedhorn [**69**] (généralisant les relations de congruence d'Eichler-Shimura), afin d'écrire $T_\mathfrak{p}$ comme somme de correspondances auxquelles la méthode de [**22**] s'applique. Malheureusement cette approche n'est pas disponible lorsque p n'est pas totalement décomposé dans F.

Dans la preuve du Thm.VI.2.7, nous allons démontrer la $T_\mathfrak{p}$-équivariance par une autre méthode, après localisation partielle (en dehors de p).

(ii) La commutativité des opérateurs de Hecke agissant sur (V.5) se démontre comme dans Cor.III.7.4(i). Le dernier morceau de la filtration de Hodge-Tate $\mathrm{H}^0(\overline{Y}, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_{J_F}(n+t)-t,n_0})$ est indépendant de la compactification toroïdale d'après le Principe de Koecher (7.2), ce qui nous donne une deuxième preuve de la commutativité des opérateurs de Hecke sur celui-ci.

CHAPITRE VI

Applications arithmétiques

Comme application de l'étude galoisienne du Chap.IV et du calcul des poids de Fontaine-Laffaille de la cohomologie de la variété modulaire de Hilbert du Chap.V, nous obtenons

• la nullité de certaines composantes locales de la cohomologie du bord à coefficients entiers p-adiques et comme corollaire le Théorème A.

• la nullité de certaines composantes locales de la cohomologie non-médiane à coefficients entiers p-adiques.

• la liberté (de rang $= 2^d$) de la cohomologie médiane à coefficients entiers p-adiques sur certaines composantes locales de l'algèbre de Hecke et la propriété d'être Gorenstein de ces dernières (Théorème B).

1. Cohomologie du bord localisée et critère de congruences.

Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \chi)$ une forme modulaire de Hilbert, propre, normalisée et primitive pour les opérateurs de Hecke (*cf* I.4.1 et I.6).

Soit $\mathcal{P}$ une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus d'un nombre premier p. Soit E la complétion en $\mathcal{P}$ d'un corps de nombres assez grand, et soit $\mathcal{O}$ son anneau des entiers (assez grand veut dire qu'il contient les coefficients de Fourier des formes propres et normalisées de $S_k(\mathfrak{n}, \chi)$).

Une forme $g \in S_k(\mathfrak{n}, \chi)$, propre et normalisée pour les opérateurs de Hecke, est dite *congrue* à f modulo $\mathcal{P}$, si leurs valeurs propres respectives pour les opérateurs de Hecke (ou, de manière équivalente, si leurs coefficients de Fourier respectifs) sont congrues modulo $\mathcal{P}$.

Un premier $\mathcal{P} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ est dit *premier de congruence* pour f s'il existe une forme $g \in S_k(\mathfrak{n}, \chi)$, distincte de f, propre et normalisée pour les opérateurs de Hecke, et qui est congrue à f modulo $\mathcal{P}$.

On s'attend à ce que, comme dans le cas des formes modulaires elliptiques ($d = 1$) traité par Hida [**31, 32**] et Ribet [**60**], ces premiers de congruence soient contrôlés par la valeur en 1 de la fonction L adjointe de f, divisée par une certaine période provenant de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. De tels résultats ont été obtenus par E. Ghate [**27**] en niveau 1, lorsque $k = 2t$, ou bien lorsque k parallèle, F quadratique et f ordinaire en p.

En suivant [**31**], [**27**] et en utilisant notre résultat d'annulation de certaines composantes locales de la cohomologie du bord nous obtenons un nouveau résultat dans cette direction (*cf* Théorème A).

1.1. Annulation de certaines composantes locales de la cohomologie du bord. On introduit la condition suivante :

(PM) le poids médian $\frac{|p(J_F)|+|p(\varnothing)|}{2} = \frac{d(k_0-1)}{2}$ n'appartient pas à $\{|p(J)|, J \subset J_F\}$.

Notons que **(PM)** est toujours satisfaite si le poids motivique $d(k_0 - 1)$ est impair, ou si $d = 2$ et k est non-parallèle.

LEMME 1.1. *Soit ρ_0 une représentation continue de $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$ sur un κ-espace vectoriel de dimension finie W. Supposons que pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$, le polynôme caractéristique de $(\otimes \operatorname{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \overline{\rho})(g)$ annule $\rho_0(g)$. Alors*

(i) *sous* **(I)**, **(II)** *et* $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$, *pour tout* $h \in \mathbb{Z}$, *les poids* h *et* $d(k_0-1)-h$ *(pour l'action de l'inertie modérée en* p*) interviennent avec la même multiplicité dans tout sous-quotient* $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$*-irréductible de* ρ_0.

(ii) *sous* **(I)**, $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$, **(PM)** *et* $p-1 > \max(1, \frac{5}{d}) \sum_{\tau\in J_F}(k_\tau - 1)$, *tout sous-quotient* $\mathcal{G}_{\widetilde{F}}$*-irréductible de* ρ_0 *contient au moins deux poids différents (pour l'action de l'inertie modérée en* p*).*

Démonstration : On peut supposer que ρ_0 est irréductible.

(i) D'après le lemme IV.6.6, on a $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(I_p) \subset \phi(H(\mathbb{F}_q)) \subset \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$. Soit T' le tore de $H(\mathbb{F}_q)$ contenant l'image de l'inertie modérée en p, et soit N' le normalisateur de T' dans $H(\mathbb{F}_q)$. L'image par ϕ de $N'/T' \cong \{\pm 1\}^I$ est le sous-groupe du groupe de Weyl $N/T = \{\pm1\}^{J_F}$ de G, formé des éléments qui sont constants sur la partition $J_F = \coprod_{i\in I} J_F^i$. En particulier l'élément de longueur maximale ϵ_{J_F} appartient toujours à $\phi(N'/T')$.

Soit $x \in W$ un vecteur propre pour l'action de T'. Par la condition d'annulation, il existe $J_x \subset J_F$ tel que l'inertie modérée en p agit sur x par le poids $|p(J_x)|$.

Soit $g_{J_F} \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$ tel que $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(g_{J_F}) = \epsilon_{J_F} \mod T'$. Alors $\rho_0(g_{J_F})(x)$ est de poids $|p(J_x\Delta J_F)| = d(k_0-1) - |p(J_x)|$. Par conséquent pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\rho_0(g_{J_F})$ établit une bijection entre les espaces propres pour l'inertie modérée en p correspondant aux poids h et $d(k_0-1)-h$.

(ii) Sous $(\mathbf{LI}_{\overline{\rho}})$ l'assertion est une conséquence de (i) et de **(PM)**. Sinon par la Prop.IV.5.2 le groupe $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_F))$ est diédral. Puisque $\widetilde{F}$ est totalement réel, $\mathrm{pr}(\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widetilde{F}}))$ est aussi diédral (*cf* §IV.4).

Soit N le normalisateur du tore standard T de G. Posons $N' = \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widetilde{F}}) \subset N(\kappa)$ et $T' = N' \cap T(\kappa)$. Alors N'/T' est un sous-groupe du groupe de Weyl $\{\pm1\}^{J_F} = N/T$ de G.

D'après IV.§4, la représentation $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}$ est modérément ramifiée en p et l'image de I_p est contenue dans T'.

Soit $x \in W$ un vecteur propre pour l'action de T'. Par la condition d'annulation, il existe $J_x \subset J_F$ tel que l'inertie modérée en p agit sur x par le poids $|p(J_x)|$.

Pour tout élément $\epsilon_J \in N'/T'$, $(J \subset J_F)$, soit $g_J \in \mathcal{G}_{\widetilde{F}}$ tel que $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(g_J) = \epsilon_J \mod T'$. On voit alors comme dans (i) que $\rho_0(g_J)(x)$ est de poids $|p(J_x\Delta J)|$. Il reste à démontrer que les $|p(J_x\Delta J)|$ ne sont pas tous égaux lorsque ϵ_J décrit les éléments de N'/T'. Observons que pour tout $\tau \in J_F$, la projection $N'/T' \to \{\pm1\}$ sur la τ-ième composante est un homomorphisme surjectif. Ceci découle du fait que le groupe $\mathrm{pr}(\overline{\rho}_{f_\tau}(\mathcal{G}_{\widetilde{F}}))$ est aussi diédral. Par conséquent, on a :

$$\sum_{\epsilon_J \in N'/T'} |p(J_x\Delta J)| = |N'/T'|\frac{d(k_0-1)}{2}.$$

D'ici et de l'hypothèse **(PM)**, on obtient l'assertion voulue. □

Remarque 1.2. Le (i) du lemme précédent généralise le lemme clé de [**18**], de $d=2$ à d quelconque. Ce lemme est faux si $d \geq 3$ sous les seules hypothèses **(I)**, **(II)** et $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$. En effet, considérons l'exemple suivant pour $d=3$: soit L une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe A_4 et dont le sous-corps cubique F fixé par le groupe de Klein est totalement réel; soit K une extension quadratique de F dans L et soit f une série thêta de poids $(2,2,2)$ associée à un caractère de Hecke de K; alors l'induite tensorielle $\otimes\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\rho$ possède deux sous-quotients irréductibles de dimension 4 et poids de Hodge-Tate $(0,2,2,2)$ et $(1,1,1,3)$.

Soit $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ la sous-algèbre engendrée sur $\mathcal{O}$ par les opérateurs de Hecke en dehors d'un ensemble fini de places contenant $\mathfrak{n}p$. On pose $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}'$.

Théorème 1.3. *Supposons* **(I)**, $(\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}})$, **(PM)** *et* $p-1>\max(1,\frac{5}{d})\sum_{\tau\in J_F}(k_\tau-1)$. *Alors*

(i) *la* $\mathfrak{m}'$*-torsion de la cohomologie du bord* $\mathrm{H}^\bullet_\partial(Y,\mathbb{V}_n)(\kappa)[\mathfrak{m}']$ *s'annule,*

(ii) *L'accouplement de Poincaré* $\mathrm{H}^d_!(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'_{\mathfrak{m}'}\times\mathrm{H}^d_!(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'_{\mathfrak{m}'}\to\mathcal{O}$ *est une dualité parfaite de* $\mathcal{O}$*-modules libres de rang fini (la notation* $()'$ *signifie que l'on a quotienté par la torsion),*

(iii) $\mathrm{H}^\bullet(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}=\mathrm{H}^\bullet_c(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}=\mathrm{H}^\bullet_!(Y,\mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}$.

Démonstration : (i) Considérons la compactification minimale $Y_{\overline{\mathbb{Q}}}\overset{j}{\hookrightarrow}Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}}\overset{i}{\hookleftarrow}\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Les correspondances de Hecke s'étendent à $Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Par le théorème de comparaison entre la cohomologie de Betti et la cohomologie étale on a un isomorphisme Hecke équivariant de suites longues :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathrm{H}^r_c(Y,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^r(Y,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^r_\partial(Y,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \Vert & & \Vert & & \Vert & \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{H}^r(Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},j_!\,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^r(Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},j_*\,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^r(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*Rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa)) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Considérons le $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$-module $W^r_\partial=\mathrm{H}^r(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*Rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))$. Il s'agit de démontrer que $W^r_\partial[\mathfrak{m}']=0$.

Par le lemme 1.1 on a que tout sous-quotient $\mathcal{G}_{\widehat{F}}$-irréductible de $W^r_\partial[\mathfrak{m}']$ possède au moins deux poids différents pour l'action de l'inertie modérée en p (la condition d'annulation découle des relations de congruence [**69**] et du théorème de densité de Cebotarev : en effet les Frobenius d'un ensemble cofini de premiers totalement décomposés dans F engendre $\mathcal{G}_{\widehat{F}}$).

Pour avoir le (i), il suffit donc de démontrer que tout sous-quotient $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$-irréductible de W^r_∂ est pur (=contient un seul poids pour l'action de l'inertie modérée en p). Puisque $\partial M^*_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est dimension zéro, la suite spectrale $\mathrm{H}^\bullet(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*R^\bullet j_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))\Rightarrow\mathrm{H}^\bullet(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*Rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))$ donne $W^r_\partial=\mathrm{H}^0(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*R^rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))$.

Comme $\mathrm{H}^0(\partial Y^*_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*R^rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))$ est un sous-quotient de $\mathrm{H}^0(\partial Y^{1,*}_{\overline{\mathbb{Q}}},i^*R^rj_*\,\mathbb{V}_n(\kappa))$ il suffit de démontrer que tout sous-quotient $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$-irréductible de ce-dernier est pur.

Ce sera fait, à l'aide d'un théorème de Pink et d'une variante modulo p d'un résultat de Kostant. Nous avons dû passer de Y à Y^1, car le théorème de Pink ne s'applique pas au groupe G, alors qu'il s'applique au groupe G^*.

Considérons la décomposition $T=D_l\times D_h$, $\begin{pmatrix}u\epsilon & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Par [**55**] Thm.5.3.1, la restriction du faisceau étale $i^*R^rj_*\,\mathbb{V}_n(\mathbb{F}_p)$ à la pointe $\mathcal{C}=\gamma\infty$ de $Y^{1,*}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, est obtenu comme image réciproque par le foncteur de Pink du $\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap B/\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap D_lU$-module

$$\bigoplus_{a+b=r}\mathrm{H}^a(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap D_l,\mathrm{H}^b(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap U,\mathbb{V}_n(\mathbb{F}_p))).$$

Sous l'hypothèse **(II)**, une variante modulo p d'un théorème de Kostant (*cf* [**56**]) donne un isomorphisme de T-modules $\mathrm{H}^b(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap U,\mathbb{V}_n(\mathbb{F}_p))=\bigoplus_{|J|=b}W_{\epsilon_J(n+t)-t}$. En décomposant $W_{\epsilon_J(n+t)-t}=W_{\epsilon_J(n+t)-t,l}\otimes W_{\epsilon_J(n+t)-t,h}$ suivant $T=D_l\times D_h$, on obtient

$$\mathrm{H}^a(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap D_l,\mathrm{H}^b(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap U,\mathbb{V}_n(\mathbb{F}_p)))=\bigoplus_{|J|=b}\mathrm{H}^a(\gamma^{-1}\Gamma^1\gamma\cap D_l,W_{\epsilon_J(n+t)-t,l})\otimes W_{\epsilon_J(n+t)-t,h},$$

où l'action galoisienne se fait uniquement sur le second facteur.

$\mathrm{H}^0(\partial M^*_{\overline{\mathbb{Q}}}, i^* R^r j_* \mathbb{V}_n(\mathbb{F}_p))$ est une somme directe des sous-espaces $\mathrm{H}^0(\mathcal{C}, W_{\epsilon_J(n+t)-t,h}(\mathbb{F}_p))$, $|J| \leq r$, chacun d'eux ne contenant qu'un seul poids, à savoir $|p(J)|$.

(ii) Comme la dualité de Poincaré est parfaite sur E, il s'agit de démontrer que la flèche naturelle $\mathrm{H}^d(\mathcal{O})/\,\mathrm{H}^d_!(\mathcal{O}) \to \mathrm{H}^d(E)/\,\mathrm{H}^d_!(E)$ devient injective après localisation en $\mathfrak{m}'$. Pour cela, il suffit de voir que $\mathrm{H}^d_\partial(\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'} := H^d(\partial M, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}$ est sans torsion, ou encore que $\mathrm{H}^{d-1}_\partial(E/\,\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'} = 0$. Par (i) et le lemme de Nakayama on a $\mathrm{H}^{d-1}_\partial(\kappa)_{\mathfrak{m}'} = 0$. Le résultat voulu découle alors de la surjectivité de $\mathrm{H}^{d-1}_\partial(\kappa)_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{d-1}_\partial(E/\mathcal{O})_{\mathfrak{m}}[\varpi]$, où ϖ est une uniformisante de $\mathcal{O}$.

(iii) Il s'agit de démontrer que l'on a $\mathrm{H}^\bullet_\partial(\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'} = 0$, ce qui découle de $H^\bullet_\partial(\kappa)_{\mathfrak{m}'} = 0$. $\square$

1.2. Définition des périodes $\Omega_f^\pm$. Rappelons que pour tout $J \subset J_F$ on pose $f_J := \epsilon_{J_F \backslash J} \cdot f \in S_{k,J}(\mathfrak{n}, \psi)$ et que f et f_J ont les mêmes valeurs propres pour les opérateurs de Hecke.

En prenant le sous-espace $\bigcap\limits_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}} \ker(T_\mathfrak{a} - c(f, \mathfrak{a}))$ de (I.14) on obtient

$$\delta_J : \mathbb{C}\, f_J \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathbb{C}))[\widehat{\epsilon}_J, f].$$

Fixons un plongement de $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'$ s'identifie avec l'image de l'application $\mathrm{H}^d_c(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O})) \to \mathrm{H}^d(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathbb{C}))$. Comme $\mathcal{O}$ est principal, le $\mathcal{O}$-module sans torsion $L_{f,J} := \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'[\widehat{\epsilon}_J, f]$ est libre de rang 1. Fixons en une base $\eta(f, J)$.

Définition 1.4. Pour tout $J \subset J_F$ on définit la période $\Omega(f, J) = \frac{\delta_J(f_J)}{\eta(f,J)} \in \mathbb{C}^\times /\mathcal{O}^\times$. On fixe $J_0 \subset J_F$ et on pose $\Omega_f^+ = \Omega(f, J_0)$ et $\Omega_f^- = \Omega(f, J_F \backslash J_0)$.

Remarque 1.5. Les périodes $\Omega_f^\pm$ diffèrent de celles initialement introduits par Hida dans [**31**]. Les périodes de Hida mettent ensemble tous les conjuguées (externes!) de f. Cette définition légèrement différente est motivée par le critère de congruences que nous voulons démontrer (Théorème A). Nous n'avons su démontrer l'autodualité (sous l'accouplement de Poincaré tordu) que pour certaines composantes locales de la cohomologie entière en degré médian $\mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'$. Comme, en général, f et ses conjuguées externes n'appartiennent pas à la même composante locale, nous sommes obligés de les séparer pour la définition de la période.

1.3. Calcul d'un discriminant. Le but de ce paragraphe est le calcul du discriminant $\mathrm{disc}(L_f)$ du $\mathcal{O}$-réseau $L_f := \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'[f] = \oplus_{J \subset J_F} L_{f,J}$, par rapport à l'accouplement de Poincaré tordu $[\ ,\ ]$.

On a $\mathrm{disc}(L_f) = \mathrm{Det}(([\eta(f,J), \eta(f,J')])_{J,J' \subset J_F})$.

Par [**27**] (41), pour tout $\tau \in J_F$ et $x, y \in \mathrm{H}^d_!(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathbb{C}))$ on a $[\epsilon_\tau \cdot x, y] = -[x, \epsilon_\tau \cdot y]$.

Le plongement $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{C}$ que nous avons fixé auparavant détermine un plongement $\tau_0 : F \hookrightarrow \mathbb{C}$. On a

$$\mathrm{disc}(L_f) = \prod_{\tau_0 \in J \subset J_F} \begin{vmatrix} 0 & [\eta(f,J), \eta(f, J_F \backslash J)] \\ [\eta(f, J_F \backslash J), \eta(f,J)] & 0 \end{vmatrix} = \prod_{\tau_0 \in J \subset J_F} -\left(\frac{[\delta_J(f), \delta_{J_F \backslash J}(f)]}{\Omega(f,J)\Omega(f, J_F \backslash J)}\right)^2$$

On a $[\delta_J(f), \delta_{J_F \backslash J}(f)] = 2^d \langle \epsilon_{J_F} \delta(f), \iota \cdot \delta(f) \rangle = 2^d W(f) \langle \epsilon_{J_F} \delta(f), \delta(f^c) \rangle = 2^d W(f)(f,f)_\mathfrak{n}$, où f^c désigne le conjugué complexe (externe) de f, ι est l'involution d'Atkin-Lehner et $W(f)$ est la constante complexe de l'équation fonctionnelle de la fonction L standard de

f. D'où l'égalité suivante dans $E^\times/\mathcal{O}^\times$ (E désigne le corps des fractions de $\mathcal{O}$) :

$$\text{(VI.1)} \qquad \operatorname{disc}(L_{f,J_F} \oplus L_{f,\varnothing}) = \left(\frac{W(f)(f,f)_{\mathfrak{n}}}{\Omega_f^+\Omega_f^-}\right)^2.$$

1.4. Formule de Shimura pour $L(\mathrm{Ad}^0(f),1)$. Soit $f \in S_k(\mathfrak{n},\psi)$ propre, normalisée et primitive pour les opérateurs de Hecke. Pour v idéal premier de F on définit α_v et β_v par (on rappelle que ψ est un caractère de Hecke de type n_0t à l'infini)

$$\alpha_v+\beta_v = c(f,v), \quad \alpha_v\beta_v = \begin{cases} \psi(v)\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v) & \text{, si } v \nmid \mathfrak{n}, \\ 0 & \text{, si } v \mid \mathfrak{n}. \end{cases}$$

On définit la fonction L adjointe naïve de f par le produit eulérien :

(VI.2)
$$L^0(\mathrm{Ad}^0(f),s) = \prod_{v\nmid\mathfrak{n}} \left[(1-\alpha_v\beta_v^{-1}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s})(1-\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s})(1-\beta_v\alpha_v^{-1}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s})\right]^{-1}.$$

On obtient $L^0(\mathrm{Ad}^0(f),s) = L^0(\mathrm{Sym}^2(f)\otimes\overline{\psi}, s+k_0-1)$, avec $L^0(\mathrm{Sym}^2(f),\overline{\psi},s) =$

$$= \prod_{v\nmid\mathfrak{n}} \left[\left(1-{\alpha_v}^2\overline{\psi(v)}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\left(1-\alpha_v\beta_v\overline{\psi(v)}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\left(1-{\beta_v}^2\overline{\psi(v)}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\right]^{-1}$$

désigne la fonction L naïve associée au carré symétrique de à f tordu par le caractère $\overline{\psi}$.

On note f^c la conjuguée complexe de f. On introduit une version tordue de la fonction L associée au produit tensoriel de f et f^c (*cf* [**62**]) :

$$D(f,f^c,s) = L(f\otimes f^c,s)\prod_v \left(1-\alpha_v\beta_v\overline{\alpha_v\beta_v}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-2s}\right), \text{ où } L(f\otimes f^c,s) =$$

$$= \prod_v \left[\left(1-\alpha_v\overline{\alpha_v}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\left(1-\alpha_v\overline{\beta_v}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\left(1-\beta_v\overline{\alpha_v}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\left(1-\beta_v\overline{\beta_v}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s}\right)\right]^{-1}$$

ainsi que sa variante naïve $D^0(f,f^c,s)$ obtenue en enlevant les facteurs pour $v|\,\mathfrak{n}$.

En utilisant que pour tout $v\nmid\mathfrak{n}$, $\overline{c(f,v)} = \overline{\psi(v)}c(f,v)$ on obtient

$$\text{(VI.3)} \quad \zeta_F^0(2s)D^0(f,f^c,s+k_0-1) = \zeta_F^0(s)L^0(\mathrm{Sym}^2(f)\otimes\overline{\psi},s+k_0-1) = \zeta_F^0(s)L^0(\mathrm{Ad}^0(f),s).$$

L'intérêt de passer par $D(f,f^c,s)$ pour étudier $L^0(\mathrm{Ad}^0(f),s)$ est que nous disposons de la formule suivante, démontrée par Shimura (le fait que la fonction $D(f,f^c,s)$ définie par le produit eulérien ci-dessus coïncide avec la série $\sum_{\mathfrak{a}} c(f,\mathfrak{a})c(f^c,\mathfrak{a})\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$ étudiée par Shimura dans [**63**], est vérifié dans [**36**] lemme 7.2) :

Théorème 1.6. (Shimura [**63**] Prop. 4.13) Soit $f \in S_k(\mathfrak{n},\psi)$ propre, normalisée et primitive pour les opérateurs de Hecke. Alors

$$\mathrm{Res}_{s=1}\, D(f,f^c,s+k_0-1) = 2^{d-1}(4\pi)^{|k|}\prod_{\tau\in J_F}\Gamma(k_\tau)^{-1}R_F[\mathfrak{o}_+^\times:\mathfrak{o}^{\times 2}]\langle f,f\rangle.$$

Rappelons que $\langle f,f\rangle = \mu(\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})\backslash\mathfrak{H}_F)^{-1}(f,f)_{\mathfrak{n}}$ et que d'après [**63**] (2.31) on a

$$\mu(\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})\backslash\mathfrak{H}_F) = 2\pi^{-d}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})^{3/2}\zeta_F(2)[\mathfrak{o}_+^\times:\mathfrak{o}^{\times 2}]^{-1}\,\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})\prod_{v|\mathfrak{n}}(1+\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-1}).$$

On en déduit la formule :

$$\text{(VI.4)} \qquad \zeta_F^0(2)\,\mathrm{Res}_{s=1}\, D(f,f^c,s+k_0-1) = \frac{(4\pi)^{|k|}\pi^d\,\mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta_F^0(s)}{2\Delta h_F\prod_{\tau\in J_F}\Gamma(k_\tau)}(f,f)_{\mathfrak{n}}.$$

On définit la fonction L adjointe imprimitive $L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$ en complétant la fonction L adjointe naïve $L^0(\mathrm{Ad}^0(f), s)$, définie dans (VI.2), de façon à avoir la relation

$$L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)D^0(f, f^c, s+k_0-1) = L^0(\mathrm{Ad}^0(f), s)D(f, f^c, s+k_0-1).$$

Un calcul explicite de [**36**] (7.7) donne $L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s) = L^0(\mathrm{Ad}^0(f), s)\prod_{v|\,\mathfrak{n}} L_v^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$, où pour $v|\,\mathfrak{n}$

$$L_v^*(\mathrm{Ad}^0(f), s) = \begin{cases} 1-\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s} & \text{, si } f \text{ est série principale et minimale en } v, \\ 1-\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(v)^{-s-1} & \text{, si } f \text{ est spéciale et minimale en } v, \\ 1 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

En suivant Deligne [**12**] on associe à $L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$ le facteur d'Euler suivant

$$\Gamma(\mathrm{Ad}^0(f), s) = \prod_{\tau \in J_F} \pi^{-(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2)(2\pi)^{s+k_\tau-1}\Gamma(s+k_\tau-1) \text{ et on pose}$$

$$\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f), s) = \Gamma(\mathrm{Ad}^0(f), s)L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$$

À partir de (VI.3) et (VI.4) on trouve alors

$$\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f), 1) = \frac{2^{|k|-1}}{\Delta h_F}(f, f)_{\mathfrak{n}}. \tag{VI.5}$$

Remarque 1.7. Nous avons vu dans le chapitre III que l'on peut associer à f une représentation ρ du groupe de Galois absolu $\mathcal{G}_F$ de F, à valeurs dans GL_2. On peut alors considérer la représentation adjointe $\mathrm{Ad}^0(\rho)$ de $\mathcal{G}_F$ sur les matrices 2×2 de trace nulle (donc à valeurs dans GL_3) et lui associer sa fonction L, notée $L(\mathrm{Ad}^0(\rho), s)$. Par la compatibilité entre la correspondance de Langlands locale et globale, établie dans notre cas par Carayol, $L(\mathrm{Ad}^0(\rho), s)$ coïncide avec la fonction L adjointe de la représentation automorphe associée de f. Néanmoins elle peut différer de $L^*(\mathrm{Ad}^0(f), s)$ en les places v divisant $\mathfrak{n}$ (*cf* [**36**] (7.3c))

1.5. Construction de congruences.

Lemme 1.8. *Soient V_1 et V_2 deux E-espaces vectoriels de dimension finie et soit L un $\mathcal{O}$-réseau de $V = V_1 \oplus V_2$. Pour $j = 1, 2$, posons $L_j = L \cap V_j$ et notons L^j l'image de la projection de L sur V_j. Alors :*

(i) *$L_j \subset L^j$ sont des réseaux de V_j et L_j est un facteur direct dans L,*

(ii) *On a des isomorphismes canoniques de $\mathcal{O}$-modules finis :*

$$L^1/L_1 \xleftarrow{\sim} L/L_1 \oplus L_2 \xrightarrow{\sim} L^2/L_2 \tag{VI.6}$$

Ce $\mathcal{O}$-module, noté $C_0(L; V_1, V_2)$, est appelé module de congruence.

La proposition suivante se trouve dans Deligne-Serre [**16**] Lemme 6.11 et nous servira pour la construction de congruences :

Proposition 1.9. *Gardons les notations du lemme 1.8. Soit $\mathcal{T}$ une algèbre commutative d'endomorphismes de V, préservant le réseau L, ainsi que la décomposition en somme directe $V_1 \oplus V_2$. Notons $\mathcal{T}_j$ l'image de $\mathcal{T}$ dans End(V_j), $j = 1, 2$.*

Supposons que le module de congruence $C_0(L; V_1, V_2)$ n'est pas nul, ce qui revient à dire que $\{\mathcal{P}\} = \mathrm{Ass}(C_0(L; V_1, V_2)) = \mathrm{Supp}(C_0(L; V_1, V_2))$.

Soit $\mathfrak{m}_1$ un idéal maximal de $\mathcal{T}_1$, de corps résiduel κ_1, tel que $L^1/L_1 \otimes_{\mathcal{T}_1} \kappa_1 \neq 0$ et notons $\overline{\theta_1} : \mathcal{T}_1 \to \kappa_1$ le caractère correspondant.

Alors il existe un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}'$ d'idéal maximal $\mathcal{P}'$ (avec $\mathcal{P}'\cap\mathcal{O} = \mathcal{P}$), de corps résiduel $\kappa' \supset \kappa_1$ et de corps des fractions E' (extension finie de E) et un caractère $\theta_2 : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{O}'$ tel que pour tout $T \in \mathcal{T}$ on a $\overline{\theta_1}(T) \equiv \theta_2(T) \pmod{\mathcal{P}'}$.

Démonstration : Notons π_j la projection de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}_j$, $j = 1, 2$. Alors $\mathfrak{m} = \pi_1^{-1}(\mathfrak{m}_1)$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}$ de corps résiduel κ_1. Posons $\mathfrak{m}_2 = p_2(\mathfrak{m})$.

Puisque l'isomorphisme (VI.6) du lemme 1.8 est $\mathcal{T}$-équivariant, on obtient

$$(L^1/L_1) \otimes_{\mathcal{T}_1} (\mathcal{T}_1 / \mathfrak{m}_1) \cong (L/(L_1 \oplus L_2)) \otimes_{\mathcal{T}} (\mathcal{T} / \mathfrak{m}) \cong (L^2/L_2) \otimes_{\mathcal{T}_2} (\mathcal{T}_2 / \mathfrak{m}_2)$$

Par hypothèse $(L^1/L_1) \otimes_{\mathcal{T}_1} (\mathcal{T}_1 / \mathfrak{m}_1) \neq 0$. Donc $\mathfrak{m}_2$ est un idéal maximal de $\mathcal{T}_2$ de corps résiduel κ_1 et le caractère correspondant $\overline{\theta_2} : \mathcal{T}_2 \to \kappa_1$ fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{T}_1 \arrow[dr, "\overline{\theta_1}"] & \\ \mathcal{T} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \kappa_1 \\ & \mathcal{T}_2 \arrow[ur, "\overline{\theta_2}"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{T}_2$ est une $\mathcal{O}$-algèbre finie et plate, il existe un idéal premier $\mathcal{P}_2$, contenu dans $\mathfrak{m}_2$ et tel que $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{O} = 0$. La réduction modulo $\mathcal{P}_2$ donne le caractère voulu θ_2 de $\mathcal{T}_2$. $\square$

THÉORÈME 1.10. (Théorème A) *Soient f et p vérifiant* **(I)**, **($\mathbf{Irr}_{\overline{\rho}}$)**, **(PM)** *et $p - 1 > \max(1, \frac{5}{d}) \sum_{\tau \in J_F}(k_\tau - 1)$.*

Si $\mathcal{P}$ divise $\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f),1)}{\Omega_f^+\Omega_f^-}$, alors $\mathcal{P}$ est un premier de congruence pour f, en d'autres termes il existe une autre forme propre et normalisée $g \in S_k(\mathfrak{n}, \chi)$ telle que $f \equiv g \pmod{\mathcal{P}}$.

Démonstration : L'idée est de réaliser $\mathcal{P}$ comme idéal premier associé à un $\mathcal{O}$-module de congruence non-nul, afin de pouvoir appliquer la Prop.1.9.

On pose $L = \mathrm{H}_!^d(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'_{\mathfrak{m}}[\pm\widehat{\epsilon}_{J_0}, \psi] \subset V = \mathrm{H}_!^d(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(E))_{\mathfrak{m}}[\pm\widehat{\epsilon}_{J_0}, \psi]$.

Soit $V_1 = \mathrm{H}_!^d(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{V}_n(E))[\pm\widehat{\epsilon}_{J_0}, f]$ (avec les notations de §1.2 on a $L_1 = L \cap V_1 = L_{f,J_0} \oplus L_{f,J_F \backslash J_0}$).

Par la formule (VI.1) la forme bilinéaire $[\ ,\ ]$ est non-dégénérée sur V_1. Soit V_2 l'orthogonal de V_1 dans V.

Par (VI.5) et (VI.1) et par l'hypothèse faite sur $\mathcal{P}$, on a $0 \neq \mathrm{disc}(L_1) \in \mathcal{P}$. Par Thm.1.3(ii) le $\mathcal{O}$-réseau L est autodual pour l'accouplement tordu de Poincaré et donc $\mathrm{disc}(L_1) = [L^1 : L_1]$. Le module de congruence $C_0(L; V_1, V_2)$ est donc non-nul et $\mathcal{P}$ appartient à son support. Par la Prop.1.9 et la dualité entre $\mathbb{T}(\mathbb{C})$ et $S_k(\mathfrak{n}, \psi)$, on obtient une autre forme propre et normalisée $g \in S_k(\mathfrak{n}, \chi)$ telle que $f \equiv g \pmod{\mathcal{P}}$. Donc $\mathcal{P}$ est un premier de congruence pour f. $\square$

2. La cohomologie sur certaines composantes locales de l'algèbre de Hecke.

2.1. La théorie des représentations modulaires de SL_2. Les représentations algébriques irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont données par les puissances symétriques de la représentation standard. D'autre part, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ admet $q + 4$ représentations irréductibles sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans ces deux cas on a également le théorème de complète réductibilité (*cf* [**26**]).

On considère dans ce chapitre les représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie (représentations dites *modulaires*). Nous n'avons plus de théorème de complète réductibilité dans ce cas : en effet, l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ sur les polynômes homogènes de degré p de $\mathbb{F}_p[X, Y]$, laisse stable le sous-espace $\mathbb{F}_p X^p \oplus \mathbb{F}_p Y^p$, mais ne laisse stable aucun de ses supplémentaires.

Néanmoins, on peut encore classifier les représentations irréductibles. Soit $q = p^r$ une puissance du premier p et $\mathcal{G}(\mathbb{F}_q\,/\,\mathbb{F}_p) = \{\theta_1, .., \theta_r\}$ le groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$.

THÉORÈME 2.1. (Brauer-Nesbitt, Steinberg [**64**]) *Le groupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ *admet* q *représentations irréductibles sur un* $\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel de dimension finie, à savoir les* $\otimes_{j=1}^r (\mathrm{Sym}^{a_j})^{\theta_j}$*, où* $0 \leq a_j \leq p-1$.

COROLLAIRE 2.2. *Pour tout ensemble fini* I *le groupe* $\prod_{i\in I} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ *admet* $q^{|I|}$ *représentations irréductibles sur un* $\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel de dimension finie, à savoir les* $\otimes_{i\in I}\left(\otimes_{j=1}^r (\mathrm{Sym}^{a_{i,j}})^{\theta_j}\right)$*, où* $0 \leq a_{i,j} \leq p-1$.

On trouve le lemme suivant dans l'article [**49**] de Mazur :

LEMME 2.3. *Soit* Φ *un groupe et soit* ρ_0 *une représentation de* Φ *sur un* $\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel de dimension finie* W*. Soit* $\rho : \Phi \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *une représentation absolument irréductible tel que pour tout* $g \in \Phi$ *le polynôme caractéristique de* $\rho(g)$ *annule* $\rho_0(g)$*. Alors, on a* $\rho_0^{\mathrm{s.s.}} = \rho \oplus .. \oplus \rho$ *et en particulier* $\rho \Subset \rho_0$.

L´énoncé correspondant pour un autre groupe que GL_2 est faux en général. Voici un contre-exemple pour GL_3 : $\rho = \mathrm{Sym}^2 : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ et $\rho_0 = \mathrm{Det} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_q)$. Néanmoins, nous avons une généralisation pour le groupe particulier

$$H(\mathbb{F}_q) = \left(\prod_{i\in I} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\right)^{\mathcal{D}} := \left\{ (M_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \middle|\ \exists \delta \in \mathcal{D},\ \forall i,\ \mathrm{Det}(M_i) = \delta \right\},$$

et sa représentation

$$\rho_1 = \bigotimes_{i\in I, \tau\in J_F^i} \mathrm{St}_i^{\sigma_{i,\tau}} : H(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{GL}_{2^d}(\mathbb{F}_q)\ ,\ (M_i)_{i\in I} \mapsto \bigotimes_{i\in I, \tau\in J_F^i} M_i^{\sigma_{i,\tau}},$$

où $(J_F^i)_{i\in I}$ est une partition de J_F telle que pour tout $i \in I$, les éléments $(\sigma_{i,\tau})_{\tau\in J_F^i}$ sont deux à deux distincts de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q\,/\,\mathbb{F}_p)$ ($\mathrm{St} = \mathrm{Sym}^1$ désigne la représentation standard de degré 2 de SL_2).

LEMME 2.4. *Soit* ρ_0 *une représentation de* $H(\mathbb{F}_q)$ *sur un* $\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel de dimension finie* W*, telle que pour tout* $g \in H(\mathbb{F}_q)$ *le polynôme caractéristique de* $\rho_1(g)$ *annule* $\rho_0(g)$*. Alors* $\rho_0^{\mathrm{s.s.}} = \rho_1 \oplus .. \oplus \rho_1$ *(i.e. tout sous-quotient irréductible de* ρ_0 *est isomorphe à* ρ_1*).*

Démonstration : On peut supposer que ρ_0 est absolument irréductible. Considérons la suite exacte

$$1 \to H_1(\mathbb{F}_q) = \prod_{i\in I} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \to H(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{\nu} \mathcal{D} \to 1.$$

Par le Cor.2.2, tout sous-quotient irréductible de $\rho_{0|H_1(\mathbb{F}_q)}$ est de la forme

$$\otimes_{i\in I}\left(\otimes_{j=1}^r (\mathrm{Sym}_i^{a_{i,j}})^{\sigma_j}\right), \text{ avec } 0 \leq a_{i,j} \leq p-1.$$

Le sous-espace des vecteurs de plus haut poids de la représentation $\rho_{0|H_1(\mathbb{F}_q)}$ est stable par le tore standard de $H(\mathbb{F}_q)$, et donc contient un vecteur propre x pour l'action de ce tore. Puisque ρ_0 est irréductible, elle est engendrée par x, et donc ρ_0 est isomorphe à $\otimes_{i\in I}\left(\otimes_{j=1}^r (\mathrm{Sym}_i^{a_{i,j}})^{\sigma_j}\right)$ tordu par une certaine puissance du caractère ν (en particulier on trouve que $\rho_{0|H_1(\mathbb{F}_q)}$ est aussi irréductible).

Comme le polynôme caractéristique de ρ_1 annule ρ_0, l'ensemble des poids de ρ_0 est un sous-ensemble des poids de ρ_1. On en déduit facilement que $\rho_0 = \rho_1$. $\square$

D'après IV.§6.6, l'hypothèse ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$) implique que $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}(\mathcal{G}_{\widehat{F}})$ contient l'image de $\phi = (\phi^i)_{i\in I} : H(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)^{J_F}$.

Soit $\widehat{F}'$ le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ fixe par $\overline{\rho}^{-1}(\phi(H(\mathbb{F}_q)))$.

Lemme 2.5. (Lemme clé) *Soit ρ_0 une représentation continue de $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$ sur un κ-espace vectoriel de dimension finie W. Supposons ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$) et que pour tout $g \in \mathcal{G}_{\widehat{F}'}$ le polynôme caractéristique de $(\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho})(g)$ annule $\rho_0(g)$. Alors tout sous-quotient $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$-irréductible de ρ_0 est isomorphe à $\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}$.*

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où ρ_0 est irréductible. L'idée est de démontrer que l'action de $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$ sur W se fait à travers le groupe $H(\mathbb{F}_q)$ et d'appliquer le lemme 2.4.

Posons $\overline{\rho}' = (\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho})_{|\mathcal{G}_{\widehat{F}'}}$. Par l'hypothèse d'annulation, le groupe $\rho_0(\ker(\overline{\rho}'))$ est un p-groupe unipotent et donc $W^{\ker(\overline{\rho}')} \neq 0$. De plus, $W^{\ker(\overline{\rho}')}$ est stable par $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$.

Comme W est irréductible, on obtient $W^{\ker(\overline{\rho}')} = W$ et donc l'action de $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$ sur W se fait à travers $H(\mathbb{F}_q)$. On obtient ainsi un homomorphisme ρ_0' faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}"] & \mathrm{GL}_{2^d}(\kappa) \\
\mathcal{G}_{\widetilde{F}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\,\overline{\rho}"] & \mathrm{GL}_2(\kappa)^{J_F} \arrow[u, "\otimes"'] \\
\mathcal{G}_{\widehat{F}'} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\phi^{-1}\circ\overline{\rho}'"] \arrow[d, "\rho_0"'] & H(\mathbb{F}_q) \arrow[u, hook, "\phi"'] \arrow[uu, bend right=60, "\rho_1"'] \arrow[dl, dashed, "\rho_0'"'] \\
\mathrm{GL}(W) &
\end{tikzcd}$$

Le polynôme caractéristique de ρ_1 annule la représentation ρ_0'. Par le lemme 2.4 tout sous-quotient $H(\mathbb{F}_q)$-irréductible de W est isomorphe à ρ_1, c'est-à-dire $W^{\mathrm{s.s.}} \simeq \oplus\rho_1$ comme $H(\mathbb{F}_q)$-modules. Comme l'action de $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$ sur les deux côtés se fait à travers $H(\mathbb{F}_q)$, on a gagné. $\square$

2.2. Cohomologie localisée de la variété de Hilbert. Soit $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$ la sous-algèbre engendrée sur $\mathcal{O}$ par les opérateurs de Hecke en dehors d'un ensemble fini de places contenant $\mathfrak{n}\,p$. On pose $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathbb{T}'$.

Théorème 2.6. *Supposons que f and p vérifient* ($\mathbf{I}$), ($\mathbf{II}$) *et* ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$). *Alors*
(i) $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\kappa))_{\mathfrak{m}'} = \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\kappa))_{\mathfrak{m}'}$,
(ii) $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'} = \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}$ *est un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini et* $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(E/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}$ $= \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(E/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'}$ *est un $\mathcal{O}$-module divisible de corang fini.*
(iii) *L'accouplement* $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'} \times \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(E/\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}'} \to \mathcal{O}$ *est une dualité parfaite de Pontryagin.*

Démonstration :
(i) Par Thm.V.2.2(i) l'entier $|p(J)|$ n'est pas un poids de $\mathrm{H}^r(\kappa)$, si $r < d$. Wedhorn [**69**] a généralisé les relations d'Eichler-Shimura au cas modulaire de Hilbert pour les premiers

totalement décomposés dans F. Par le théorème de densité de Cebotarev, les hypothèses du lemme clé 2.5 sont alors satisfaites. On en déduit que $\mathrm{H}^r(\kappa)[\mathfrak{m}'] = 0$, et donc $\mathrm{H}^r(\kappa)_{\mathfrak{m}'} = 0$ par le lemme de Nakayama. Le cas $r > d$ s'en déduit en utilisant la dualité Poincaré.

(ii)(iii) Par la suite exacte longue de cohomologie

$$... \to \mathrm{H}^{r-1}(\kappa) \longrightarrow \mathrm{H}^r(\mathcal{O}) \xrightarrow{\varpi} \mathrm{H}^r(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^r(\kappa) \to ...,$$

et par la nullité de $\mathrm{H}^r(\kappa)_{\mathfrak{m}'}$, lorsque $r \neq d$, on déduit que la multiplication par ϖ est un endomorphisme surjectif de $\mathrm{H}^r(\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'}$, d'où la nullité de ce dernier pour $r \neq d$.

De même, par la suite exacte longue

$$... \to \mathrm{H}^r(\varpi^{-1}\,\mathcal{O}\,/\,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^r(E/\mathcal{O}) \xrightarrow{\varpi} \mathrm{H}^r(E/\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^{r+1}(\varpi^{-1}\,\mathcal{O}\,/\,\mathcal{O}) \to ...,$$

on déduit une surjection $\mathrm{H}^r(\kappa)_{\mathfrak{m}'} \to \mathrm{H}^r(E/\,\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'}[\varpi]$ pour tout $r \neq d$. Comme $\mathrm{H}^r(E/\,\mathcal{O})_{\mathfrak{m}'}$ est un $\mathcal{O}$-module de torsion, il est nul (pour $n \neq d$).

La localisation en $\mathfrak{m}'$ de la suite exacte longue de $\mathcal{O}$-modules :

$$... \to \mathrm{H}^{r-1}(E/\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^r(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{H}^r(E) \longrightarrow \mathrm{H}^r(E/\mathcal{O}) \to ...,$$

est concentrée en les trois termes correspondants à $r = d$, d'où l'assertion sur la liberté. □

2.3. Sur la propriété de Gorenstein de l'algèbre de Hecke.

THÉORÈME 2.7. (Théorème B) *Soient f et p vérifiant* (**I**), (**II**) *et* ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$). *Alors*
(i) $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\kappa))[\mathfrak{m}] = \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\kappa))[\mathfrak{m}]$ *est un k-espace vectoriel de dimension 2^d.*
(ii) $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}} = \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}}$ *est libre de rang 2^d sur $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$.*
(iii) $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ *est Gorenstein.*

Démonstration : Dans cette démonstration on pose $W = \mathrm{H}^d(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{V}_n(\kappa))_{\mathfrak{m}}$. En utilisant un niveau auxiliaire comme dans [**18**], on peut supposer que la condition **(NT)** de I.§.1.3 est satisfaite.

(i) D'après le Lemme clé 2.5 et les relations d'Eichler-Shimura (démontrées pour notre groupe $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ en les premiers p qui sont totalement décomposés dans F; voir [**69**]) on a un isomorphisme de $\mathcal{G}_{\widehat{F}'}$-modules

$$W[\mathfrak{m}]^{\mathrm{s.s.}} = (\otimes\overline{\rho})^{\oplus r}.$$

Il est important de noter que $I_p \subset \mathcal{G}_{\widehat{F}'}$. Par le Thm.III.7.3 on a $r \geq 1$. Afin de démontrer que $r = 1$ on considère la restriction de ces représentations à I_p. La multiplicité du poids maximal $|p(J_F)|$ dans la partie droite vaut r, d'après le Thm.III.7.3, le Cor.III.7.4(ii) et la théorie de Fontaine-Laffaille.

D'autre part, par le Thm.V.2.2, la multiplicité de $|p(J_F)|$ dans la partie gauche est égale à la dimension du κ-espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\overline{Y} \otimes \kappa, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_{J_F}(n+t)-t,n_0})[\mathfrak{m}]$: en effet, par la remarque V.2.3 il suffit de vérifier la $T_{\mathfrak{p}}$-équivariance de la $\mathfrak{m}'$-localisation de la limite projective sur r de (V.5); or, par le Thm.2.6(ii) il s'agit de vérifier la $T_{\mathfrak{p}}$-équivariance d'un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules *libres*; il suffit donc de le vérifier après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, auquel cas c'est une conséquence du Théorème de Multiplicité Un Fort (p est premier au niveau $\mathfrak{n}$). Nous avons emprunté cette astuce à Diamond ([**18**] preuve de Prop.1).

Il nous reste de vérifier que $\dim_k \mathrm{H}^0(\overline{Y}\otimes\kappa, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_{J_F}(n+t)-t,n_0})[\mathfrak{m}] = 1$. On a $\overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_{J_F}(n+t)-t,n_0} = \underline{\omega}^k \otimes \underline{\nu}^{n_0/2}$. Il s'agit de voir que deux formes modulaires de Hilbert normalisée de poids k, niveau $K_1(\mathfrak{n})$ et à coefficients dans $\kappa = \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}\,/\,\mathfrak{m}$ qui ont les mêmes valeurs propres pour tout les opérateurs de Hecke sont égales. On doit prendre soin d'observer que les opérateurs de Hecke permutent les composantes connexes $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ la variété de Shimura $Y = Y_1(\mathfrak{n})$ (l'idéal $\mathfrak{c}$ décrit un ensemble de représentants de Cl^+_F). On conclut, en utilisant les relations de Hecke entre coefficients de Fourier et valeurs propres pour les opérateurs de Hecke et le principe du q-développement (*cf* II.7.3) en la pointe à l'∞ de chaque composante connexe $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$.

Notons que même si l'on ne dispose pas de la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, on obtient par les mêmes arguments que $r \leq 1$ (au lieu de $r = 1$), car on a toujours $\mathrm{H}^0(\overline{Y} \otimes \kappa, \overline{\mathcal{W}}_{\epsilon_{J_F}(n+t)-t,n_0})[\mathfrak{m}] \supset \mathrm{gr}^{|p(J_F)|}\,\mathcal{H}^d_{\text{dR-log}}(\overline{Y} \otimes \kappa, \overline{\mathcal{V}}_n)[\mathfrak{m}]$. Or $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$ est non-nul puisque $\mathrm{H}^\bullet(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m} \otimes \mathbb{Q}$ est libre de rang 2^d sur $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$, et donc $r = 1$.

(ii)(iii) L'argument donné par Mazur dans le cas des formes modulaires elliptiques reste inchangé.

Par le Thm.A l'accouplement de Poincaré tordu $W \times W \to \kappa$ nous donne un isomorphisme $W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_\mathfrak{m}}(W, \kappa)$, et donc $W \otimes_{\mathbb{T}_\mathfrak{m}} \kappa = W/\,\mathfrak{m}\,W \cong \mathrm{Hom}(W[\mathfrak{m}], \kappa)$. D'ici et du (i), on trouve

$$\dim_\kappa(W \otimes_{\mathbb{T}_\mathfrak{m}} k) = \dim_\kappa(W[\mathfrak{m}]) = 2^d.$$

Le (ii) découle alors du lemme suivant

Lemme 2.8. *Soit $\mathcal{T}$ une $\mathcal{O}$-algèbre locale sans torsion (i.e. $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T} \otimes_\mathcal{O} E$) d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel κ.*

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{T}$-module de type fini tel que $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{O} E$ soit libre de rang r sur $\mathcal{T} \otimes_\mathcal{O} E$. Supposons de plus que $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{T} \kappa$ est un κ-espace vectoriel de dimension r. Alors $\mathcal{M}$ est libre de rang r sur $\mathcal{T}$.

Démonstration : Puisque $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{T} \kappa$ est de dimension r, par le lemme de Nakayama il existe un homomorphisme surjectif de $\mathcal{T}$-modules $\mathcal{T}^r \twoheadrightarrow \mathcal{M}$. Son noyau $\mathcal{I}$ est un $\mathcal{O}$-module sans torsion et on a une suite exacte de $\mathcal{O}$-modules :

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{T}^r \to \mathcal{M} \to 0.$$

En tensorisant cette suite exacte avec $\otimes_\mathcal{O} E$ (ou, ce qui revient au même, avec $\otimes_\mathcal{T} (\mathcal{T} \otimes_\mathcal{O} E)$) on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I} \otimes_\mathcal{O} E \to (\mathcal{T} \otimes_\mathcal{O} E)^r \to \mathcal{M} \otimes_\mathcal{O} E \to 0.$$

En comparant les dimension sur E on obtient $\mathcal{I} \otimes_\mathcal{O} E = 0$ et donc $\mathcal{I} = 0$, comme ce dernier est sans torsion.

Enfin, le (iii) découle du (ii) et du fait que par le Thm.A, l'accouplement de Poincaré tordu (I.12) identifie le $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$-module $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m} = \mathrm{H}^d_c(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))_\mathfrak{m}$ avec son $\mathcal{O}$-dual. $\square$

CHAPITRE VII

Modularité des déformations minimales de $\overline{\rho}$.

1. Introduction et stratégie de la preuve.

On rappelle que $p \geq 5$ est un nombre premier et E est un corps p-adique assez grand, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$, d'uniformisante ϖ, d'idéal maximal $\mathcal{P}$, et de corps résiduel κ. On considère la représentation galoisienne résiduelle $\overline{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$ associée à une forme modulaire nouvelle de Hilbert f.

Le but de ce chapitre est de démontrer que sous un certain nombre d'hypothèses toute déformation minimale de $\overline{\rho}$ est aussi modulaire.

La méthode suivie est celle des systèmes de Taylor-Wiles. Plus précisément on considère certains ensembles finis Q de places de F de sorte que pour tout $\mathfrak{q} \in Q$ on a :
• $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod{p}$,
• $\overline{\rho}$ est non-ramifié en $\mathfrak{q}$ et $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}})$ admet deux valeurs propres distincts dans κ.

On pose $\Delta_Q = \prod_{\mathfrak{q}\in Q} \Delta_{\mathfrak{q}}$, où $\Delta_{\mathfrak{q}}$ désigne le p-Sylow de $(\mathfrak{o}/\mathfrak{q})^{\times}$ et $I_Q = (\delta_{\mathfrak{q}} - 1; \mathfrak{q} \in Q)$ est l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ (ici $\delta_{\mathfrak{q}}$ désigne un générateur de $\Delta_{\mathfrak{q}}$).

Pour chaque ensemble fini Q comme ci-dessus, on introduit un problème de déformation $\mathcal{F}_Q$ de $\overline{\rho}$, qui est pro-représentable par une $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre locale noethérienne complète $\mathcal{R}_Q$ munie d'un isomorphisme canonique $\mathcal{R}_Q/I_Q\mathcal{R}_Q \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} := \mathcal{R}_{\varnothing}$.

Par ailleurs, du côté géométrique, pour chaque Q on considère un $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}_Q$, muni d'une action fidèle d'une algèbre de Hecke locale $\mathcal{T}_Q$. Le module $\mathcal{M}_Q$ est obtenu en localisant la cohomologie médiane à coefficients dans $\mathcal{O}$ d'une variété modulaire de Hilbert, en l'idéal maximal de $\mathcal{T}_Q$. Le bon choix des conditions locales du problème de déformation $\mathcal{F}_Q$, le fait qu'on peut associer des représentation galoisiennes aux formes modulaires de Hilbert (qui satisfont ces propriétés locales) et la méthode des pseudo-représentations donne une flèche surjective : $\mathcal{R}_Q \twoheadrightarrow \mathcal{T}_Q$.

Par ailleurs, le module $\mathcal{M}_Q$ possède naturellement une action de Δ_Q, via les opérateurs diamants, et cette action est aussi celle venant de la composée $\mathcal{R}_Q \twoheadrightarrow \mathcal{T}_Q \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}_Q)$ et de la structure de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre sur $\mathcal{R}_Q$.

Les techniques d'algèbre commutative, inventées par Wiles [**71**] et Taylor-Wiles[**67**] (sous la forme axiomatisée par Fujiwara [**25**] et Diamond [**17**]), nous permettent alors d'affirmer que $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$, ce qui démontre la modularité des déformations minimales de $\overline{\rho}$.

Le critère numérique de Wiles devrait permettre alors de monter le niveau et démontrer que $\mathcal{R}_{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\Sigma}$, pour tout Σ. C'est essentiellement connu pour les formes modulaires de Hilbert provenant d'une algèbre de quaternions, par un résultat de Fujiwara [**25**].

2. Déformation de représentations galoisiennes.

2.1. Quelques notations. Pour une place finie v de F on note $\mathcal{G}_v$ le groupe de Galois local $\mathcal{G}_{F_v}$, I_v son sous-groupe d'inertie et Frob_v un élément de Frobenius.

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de Galois (pour les applications $\mathcal{G}$ sera le groupe de Galois (Σ-ramifié) d'un corps de nombres, d'un corps p-adique ou d'un corps fini).

Étant donnés deux $\mathcal{G}$-modules N_1 et N_2 on considère le $\mathcal{G}$-module $\mathrm{Hom}(N_1, N_2)$, où $g \in \mathcal{G}$ agit sur $h \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ par : $g \cdot h(x) = g(h(g^{-1}(x)))$. En particulier, étant donné un $\mathcal{G}$-module fini N, on définit son dual de Cartier $N^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(N, \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}))$, où n désigne l'exposant du groupe abélien N.

Enfin, si N est un vectoriel muni d'une action linéaire de $\mathcal{G}$, $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{GL}(N)$, alors on note $\mathrm{Ad}(\rho_0)$ (resp. $\mathrm{Ad}^0(\rho_0)$) la représentation de $\mathcal{G}$ sur $\mathrm{End}(N)$ (resp. sur l'espace des matrices de trace nulle $\mathrm{End}^0(N_1)$).

2.2. Classification des déformations locales. Soit une place finie v de F, ne divisant pas p. On se propose à faire une classification des représentation $\overline{\rho}_v : \mathcal{G}_v \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$.

Cas 0 : $\overline{\rho}_v$ est absolument irréductible. La classification de Dickson des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\kappa)$ et le fait que le groupe $\mathcal{G}_v$ est résoluble, impliquent que l'image de $\overline{\rho}_v$ dans $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ est isomorphe à un certain groupe diédral D_{2n} (sauf peut-être dans le cas où v divise 2, auquel cas cette image peut être aussi isomorphe à A_4 ou S_4). Dans le cas diédral, on a $\overline{\rho}_v = \mathrm{Ind}_{\mathcal{G}_{F'}}^{\mathcal{G}_v} \overline{\varphi}$, où F' est une extension quadratique de F_v et $\overline{\varphi} : \mathcal{G}_{F'} \to \kappa^\times$ est un caractère qui ne se prolonge pas à $\mathcal{G}_v$. En particulier, aucun des twists de $\overline{\rho}_v$ n'admet de partie non-triviale fixée par I_v. On distinguera (suivant Fujiwara [**25**]) deux sous-cas :

Cas 0_E , si on est dans le cas diédral et F' est l'extension quadratique non-ramifiée de F_v. Alors $\overline{\rho}_v(I_v)$ est abélienne et comme de plus I_v est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_v$, l'image I_v dans $\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ est isomorphe au groupe cyclique C_n. Décomposons $C_n = C_{n_v} \times C_{n^v}$ en produit de sa v-partie et sa partie première à v. Alors l'image de l'inertie sauvage tombe dans C_{n_v}, alors que la relation de conjugaison du Frobenius sur l'inertie modérée nous donne la congruence $\mathrm{N}(v) \equiv -1 \pmod{n^v}$.

Cas 0_{NE} , sinon.

Cas 1&2 : $\overline{\rho}_v$ est absolument réductible. Il existe, quitte à étendre κ, un caractère $\overline{\mu} : \mathcal{G}_v \to \kappa^\times$, tel que $(\overline{\rho}_v \otimes \overline{\mu}^{-1})^{I_v} \neq 0$. On distinguera les trois sous-cas suivants (la terminologie vient de la classification des représentations admissibles de Langlands) :

Cas 1_{PR} : $\overline{\rho}_v = \overline{\mu} \oplus \overline{\mu}'$ avec $\overline{\mu}/\overline{\mu}'$ ramifié (principale),
Cas 1_{SP} : $\dim(\overline{\rho}_v \otimes \overline{\mu}^{-1})^{I_v} = 1$ et $\overline{\rho}_v^{ss} = \overline{\mu} \oplus \overline{\mu}$ (spéciale),
Cas 2_{PR} : $\overline{\rho}_v \otimes \overline{\mu}^{-1}$ est non-ramifié.

Soit $\varphi : \mathcal{G}_v \to \mathcal{O}^\times$ un relèvement de $\det(\overline{\rho}_v) : \mathcal{G}_v \to \kappa^\times$. Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre locale noethérienne complète de corps résiduel κ. On ne considère que des déformations de $\overline{\rho}_v$ dont le déterminant vaut ψ.

DÉFINITION 2.1. Supposons que p est inversible dans $\mathfrak{o}_v$. Une déformation $\widetilde{\rho} : \mathcal{G}_v \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}_v$ est dite finie, si :

- dans le cas 0_E, on a $\widetilde{\rho}|_{I_v} = \varphi \oplus \varphi'$, où φ désigne le relèvement de Teichmüller de $\overline{\varphi}$ et φ' son twist de Frobenius,
- dans les cas 1_{PR} et 1_{SP}, on a $\dim(\widetilde{\rho} \otimes \mu^{-1})^{I_v} = 1$,
- dans le cas 2_{PR}, on a $\widetilde{\rho} \otimes \mu^{-1}$ est non-ramifié,

où μ désigne le relèvement de Teichmüller de $\overline{\mu}$.

On note $\mathcal{F}_{\overline{\rho}_v, f}$ (resp. $\mathcal{F}_{\overline{\rho}_v}$) le foncteur des déformations de $\overline{\rho}_v$ qui sont finies (resp. quelconques).

Lorsque la place v divise p, on réfère à [**25**] 2.6 pour la notion de déformation finie (ou cristalline) de $\overline{\rho}_v$.

2.3. Cohomologie galoisienne locales. Nous commençons par quelques généralités

THÉORÈME 2.2. (Dualité locale de Tate)
Soit v une place finie de F et soit N un $\mathcal{G}_v$-module fini. Alors :
(a) *Les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(F_v, N)$ sont finis pour tout i et nuls pour $i > 2$.*
(b) *Pour $i = 0, 1, 2$ le cup produit, donne un accouplement parfait de groupes finis (dualité de Pontryagin) :*

$$\mathrm{H}^i(F_v, N) \times \mathrm{H}^{2-i}(F_v, N^*) \to \mathrm{H}^2(F_v, \mu(\overline{\mathbb{Q}})) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

Lorsque $i = 1$, les sous-groupes $\mathrm{H}^1_f(F_v, N)$ et $\mathrm{H}^1_f(F_v, N^*)$ sont des annulateurs respectifs pour cet accouplement.
(c) *(formule de caractéristique d'Euler locale)*

$$\frac{\#\,\mathrm{H}^1(F_v, N)}{\#\,\mathrm{H}^0(F_v, N)\#\,\mathrm{H}^2(F_v, N)} = \mathrm{N}(v)^{\mathrm{val}_v(\# N)}.$$

REMARQUE 2.3. Le (b) du théorème reste valable lorsque $v|\infty$, à condition de remplacer $\mathrm{H}^0(F_v, N)$, par $\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v, N) = \mathrm{H}^0(F_v, N)/(1 + c_v)N$.

DÉFINITION 2.4. Pour tout $\mathcal{G}_v$-module fini N on pose $\mathrm{H}^1_f(F_v, N) := \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_v/I_v, N^{I_v})$ (classes finies).

On a la suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \to \mathrm{H}^1_f(F_v, N) \to \mathrm{H}^1(F_v, N) \to \mathrm{H}^1(I_v, N)^{G_v/I_v} \to 0.$$

La suite exacte $0 \to \mathrm{H}^0(F_v, N) \to N^{I_v} \xrightarrow{\mathrm{Fr}_v - 1} N^{I_v} \to \mathrm{H}^1_f(F_v, N) \to 0$, donne le :

LEMME 2.5. $\#\,\mathrm{H}^1_f(F_v, N) = \#\,\mathrm{H}^0(F_v, N)$

La proposition suivante nous permet d'employer des techniques de cohomologie galoisienne dans l'étude des foncteurs de déformations.

PROPOSITION 2.6. (Fujiwara [**25**]) *L'espace tangent $\mathcal{F}_{\overline{\rho}_v}(\kappa[\varepsilon])$ (resp. $\mathcal{F}_{\overline{\rho}_v, f}(\kappa[\varepsilon])$) est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v)$ (resp. $\mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v)$).*

LEMME 2.7. *Supposons que v ne divise pas $2p$. Alors :*
- dans le cas 0_{NE}, on a $\mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = 0$, et
- dans le cas 0_E, on a $\mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = 0$ et $\dim \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = 1$.

Démonstration : D'après le lemme précédent on a $\#\,\mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = \#\,\mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v)$.

Montrons que si $\overline{\rho}_v$ absolument irréductible, alors $\#\,\mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = 0$. En effet, un élément de $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v$ qui reste fixe par $\mathcal{G}_v$ est un scalaire d'après le lemme de Schur, et comme sa trace est nulle, il est lui-même nul.

D'après le théorème 2.2,

$$\dim \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) + \dim \mathrm{H}^2(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) = \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v(1)).$$

Il reste à voir que $\dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v(1))$ vaut 0 (resp. 1) dans le cas 0_{NE} (resp. 0_E).

Supposons qu'il existe un élément non-nul de $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v$ sur lequel $\mathcal{G}_v$ agit par le caractère cyclotomique modulo p, noté ω. Le lemme de Schur implique que $\rho_v|_{\mathcal{G}_{F_v(\zeta_p)}}$ est réductible. Par ailleurs, on avait $\overline{\rho}_v = \mathrm{Ind}_{\mathcal{G}_{F'_v}}^{\mathcal{G}_v}\,\overline{\varphi}_v$, où F'_v est une extension quadratique de F_v et $\overline{\varphi}_v : \mathcal{G}_{F'_v} \to \kappa^\times$ est un caractère qui ne se prolonge pas à $\mathcal{G}_v$. Donc F'_v est l'extension quadratique non-ramifiée de F_v (car $v \nmid p$) et donc le degré de $F_v(\zeta_p)$ sur F_v est pair. Notons $\overline{\varphi}'_v$ le twist de Frobenius de $\overline{\varphi}_v$ (par hypothèse $\overline{\varphi}'_v \neq \overline{\varphi}_v$). En prenant une base où $\overline{\rho}_v$ est diédral et la base correspondante e_1, e_2, e_3 de $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v$, on a

$$\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v|_{\mathcal{G}_{F'_v}} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_v/\overline{\varphi}'_v & & \\ & \overline{\varphi}'_v/\overline{\varphi}_v & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v|_{\mathcal{G}_v \setminus \mathcal{G}_{F'_v}} = \begin{pmatrix} & \overline{\varphi}_v(\sigma\cdot)/\overline{\varphi}'_v(\sigma\cdot) & \\ \overline{\varphi}'_v(\sigma\cdot)/\overline{\varphi}_v(\sigma\cdot) & & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

où σ est l'élément non-trivial de $\mathcal{G}(F'_v/F_v)$.

Montrons que la seule droite de $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v$ sur laquelle $\mathcal{G}_v$ puisse agir par ω est ke_3.

S'il existaient d'autres droites fixes, on aurait $\overline{\varphi}'_v/\overline{\varphi}_v = \overline{\varphi}_v/\overline{\varphi}'_v$, d'où un caractère non-trivial $\varepsilon : \mathcal{G}_{F'_v} \to \{\pm 1\}$ tel que pour chaque $g \in \mathcal{G}_{F'_v}$, $\overline{\varphi}_v(g) = \varepsilon(g)\overline{\varphi}_v(\sigma g \sigma^{-1})$. Dans ce cas $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v$ est complètement réductible, somme de trois caractères quadratiques distincts $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ et $\overline{\varphi}_3$. Par conséquence seul le troisième est non-ramifié et peut donc être le caractère cyclotomique.

Au total, si on suppose que $\dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v(1)) \geq 1$, alors on trouve que $F'_v = F_v(\zeta_p)$ est l'extension quadratique non-ramifiée de F_v et que $\dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v(1)) = 1$. Nous sommes donc dans le cas 0_E (de plus, dans ce cas on a forcément $\mathrm{N}(v) \equiv -1 \pmod p$). □

LEMME 2.8. (Fujiwara [**25**]2.7.14) *Si $v \mid p$, alors* $\dim \mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}_v) \leq [F_v : \mathbb{Q}_p] + \dim \mathrm{H}^0(F_v, M_f)$.

2.4. Déformations globales. Soit Σ un ensemble de places finies de F et soit $\overline{\rho} : \mathcal{G}_\Sigma \to \mathrm{GL}_2(\kappa)$ une représentation absolument irréductible qui est quasi-ordinaire et plate en les places v divisant p.

DÉFINITION 2.9. Des données de déformation $\mathcal{D}$ consistent en la donnée :

– pour chaque place v divisant p, de la condition d'être finie en v,

– pour chaque place v, ne divisant pas p, d'une condition parmi “finie” ou “quelconque” en v, de manière que la condition “quelconque” n'apparaisse qu'un nombre fini de fois.

Si la condition “quelconque” n'apparaît pas du tout alors les données de déformation $\mathcal{D}$ sont dites minimales.

On considère le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{\rho},\mathcal{D}}$ des déformations de $\overline{\rho}$ à déterminant fixé ψ et de type $\mathcal{D}$. On note $\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}_{\mathcal{D}} : \mathcal{G}_{\Sigma_\mathcal{D}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{R}^{\mathrm{univ}}_{\mathcal{D}})$ la déformation universelle associée, où $\Sigma_\mathcal{D}$ est l'union de Σ et des places où la condition de déformation est “quelconque”.

3. Construction des anneaux $\mathcal{R}_Q$.

3.1. Hypothèses. Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème VI.2.7. On suppose en plus la condition de minimalité suivante :

($\mathbf{Min}_\rho$) $\rho = \rho_{f,\mathcal{P}}$ est une déformation minimale de $\overline{\rho}$.

Soit Q un ensemble fini de places finies de F, tel que pour tout $\mathfrak{q} \in Q$ les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod p$,
- $\overline{\rho}$ est non-ramifié en $\mathfrak{q}$ et $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})$ admet deux valeurs propres distincts $\alpha_\mathfrak{q} \neq \beta_\mathfrak{q}$ appartenant à κ.

3.2. Un foncteur de déformation “spécial”. Soit $\mathcal{AL}_\mathcal{O}$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres artiniennes locales corps résiduel κ. Considérons le foncteur $\mathcal{F}_Q : \mathcal{AL}_\mathcal{O} \to \mathcal{ENS}$, qui à une $\mathcal{O}$-algèbre artinienne locale A associe les classes d'équivalence stricte de relèvements $\widetilde{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}$ qui sont non-ramifiés en dehors de $p\,\mathfrak{n}\,Q$, cristallins en p de même poids de Hodge-Tate que ρ, finis hors de Q et de déterminant égal à $\psi = \mathrm{Det}(\rho)$.

Le fait de prendre des classes de relèvements modulo équivalence stricte nous assure que $\mathcal{F}_Q(\kappa)$ est un singleton, ce qui est une des hypothèses du critère de pro-représentabilité de Grothendieck. En utilisant le critère de Schlessinger, on obtient la pro-représentabilité de $\mathcal{F}_Q$ par un anneau local noethérien complet $\mathcal{R}_Q$ et un relèvement universel $\rho_Q^{\mathrm{univ}} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{R}_Q)$. L'anneau $\mathcal{R}_Q$ est appelé l'anneau de déformation universel pour ce problème de déformation.

Lorsque l'ensemble Q est vide, on note $\mathcal{R}$ et ρ^{univ} l'anneau universel et la déformation associés. On a une flèche canonique surjective $\mathcal{R}_Q \twoheadrightarrow \mathcal{R}$.

3.3. Structure de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre sur $\mathcal{R}_Q$. Notons $\Delta_Q = \prod_{\mathfrak{q}\in Q} \Delta_{\mathfrak{q}}$, où $\Delta_{\mathfrak{q}}$ désigne le p-Sylow de $(\mathfrak{o}/\mathfrak{q})^\times$, et $I_Q = (\delta_{\mathfrak{q}} - 1; \mathfrak{q} \in Q)$ l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$, où $\delta_{\mathfrak{q}}$ désigne un générateur de $\Delta_{\mathfrak{q}}$.

Le but est de démontrer que sous les hypothèses faites sur Q, l'anneau $\mathcal{R}_Q$ est une $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre et $\mathcal{R}_Q / I_Q \mathcal{R}_Q \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

Soit $\mathfrak{q} \in Q$ et considérons la restriction au groupe de décomposition en $\mathfrak{q}$, d'une déformation de type Q, $\widetilde{\rho} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(A)$ de $\overline{\rho}$. D'après les hypothèses faites sur Q on a $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) \sim \begin{pmatrix} \alpha_{\mathfrak{q}} & 0 \\ 0 & \beta_{\mathfrak{q}} \end{pmatrix}$. Un calcul direct démontre alors qu'il existe deux caractères $\phi_{\mathfrak{q}}, \phi'_{\mathfrak{q}} : D_{\mathfrak{q}} \to A^\times$, dont les restrictions à l'inertie sont inverses l'un de l'autre et tels que $\widetilde{\rho}|_{D_{\mathfrak{q}}} \sim \begin{pmatrix} \phi_{\mathfrak{q}} & 0 \\ 0 & \phi'_{\mathfrak{q}} \end{pmatrix}$. Par la théorie de corps de classe locale, le caractère $\phi_{\mathfrak{q}} : I_{\mathfrak{q}} \to A^\times$ se factorise par $\mathfrak{o}_{\mathfrak{q}}^\times$, et donc par son plus grand pro-p-quotient qui est $\Delta_{\mathfrak{q}}$ (car $\overline{\phi}_{\mathfrak{q}}$ est trivial sur $I_{\mathfrak{q}}$ et donc son image tombe dans $1 + \mathfrak{m}_A$ qui est un pro-p-groupe). Ainsi, obtient-on un morphisme de groupes $\Delta_Q \to \mathcal{R}_Q^\times$ qui nous donne un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres canonique $\mathcal{O}[\Delta_Q] \to \mathcal{R}_Q$. On a canoniquement $\mathcal{R}_Q / I_Q \mathcal{R}_Q \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ car une déformation de type Q est de type $\varnothing$, si et seulement si, elle est non-ramifiée en tout $\mathfrak{q} \in Q$.

Le nombre de générateurs de $\mathcal{R}_Q$ comme $\mathcal{O}$-algèbre locale noethérienne complète est donné la dimension sur κ de l'espace tangent du foncteur $\mathcal{F}_Q$:

$$\mathcal{F}_Q(\kappa[\varepsilon]) \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}_Q} / \mathfrak{M}_{\mathcal{R}_Q}^2, \kappa)$$

Afin de pouvoir contrôler ce nombre à l'aide de calculs de cohomologie galoisienne, nous allons introduire des groupes de Selmer.

3.4. Groupes de Selmer et calculs de cohomologie galoisienne.

Définition 3.1. Soit M un $\mathcal{G}_F$-module fini discret. Une famille de conditions locales $\mathcal{L} = \{L_v\}_v$ est la donnée pour chaque place v de F d'un sous-groupe L_v de $\mathrm{H}^1(F_v, M)$ tel que pour presque tout v on a $L_v = \mathrm{H}^1_f(F_v, M)$. On associe à $\mathcal{L}$ le groupe de Selmer

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(F, M) := \{x \in \mathrm{H}^1(F, M) \mid \forall v \ \mathrm{res}_v(x) \in L_v\}.$$

Proposition 3.2. (Fujiwara [**25**]) *Soit $\mathcal{D}$ des données de déformation et soit le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{\rho},\mathcal{D}}$ des déformations de $\overline{\rho}$ à déterminant fixé ψ et de type $\mathcal{D}$. L'espace tangent $\mathcal{F}_{\overline{\rho},\mathcal{D}}(\kappa[\varepsilon]) = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{univ}}} / (\mathfrak{M}^2_{\mathcal{R}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{univ}}}, \mathcal{P}), \kappa)$ est canoniquement isomorphe à*

$$\mathrm{H}^1_{\mathcal{D}}(F, \mathrm{Ad}^0 \overline{\rho}) = \ker \left(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{Ad}^0 \overline{\rho}) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, \mathrm{Ad}^0 \overline{\rho})/L_v \right),$$

où $L_v = \mathcal{F}_{\overline{\rho}_v,\mathcal{D}_v}(\kappa[\varepsilon])$ est l'espace tangent du foncteur des déformations de type $\mathcal{D}_v$ de $\overline{\rho}_v := \overline{\rho}|_{\mathcal{G}_v}$.

D'après la proposition 3.2 l'espace tangent du foncteur $\mathcal{F}_Q$ est canoniquement isomorphe au groupe de Selmer $\mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho})$, correspondant aux conditions locales $\mathcal{L} = \mathcal{L}_Q$ suivantes :

– quelconque en les places $\mathfrak{q} \in Q$,

– finie aux autres places.

Ainsi, a-t-on relié le nombre de générateurs topologiques de $\mathcal{R}_Q$ sur $\mathcal{O}$ au cardinal au groupe de Selmer $\mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho})$.

Le théorème suivant permet de contrôler la taille d'un groupe de Selmer :

THÉORÈME 3.3. (Wiles [**71**]) *Soit M un $\mathcal{G}_F$-module fini et $\mathcal{L} = \{L_v\}_v$ une famille de conditions locales pour M. Alors $\mathcal{L}^* = \{L_v^\perp\}_v$ est une famille de conditions locales pour M^*, les groupes de Selmer $\#\,\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(F, M)$ et $\#\,\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^*}(F, M^*)$ sont finis et on a la formule :*

$$\frac{\#\,\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(F, M)}{\#\,\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^*}(F, M^*)} = \frac{\#\,\mathrm{H}^0(F, M)}{\#\,\mathrm{H}^0(F, M^*)} \prod_v \frac{\#L_v}{\#\,\mathrm{H}^0(F_v, M)}.$$

Démonstration : Le fait que $\mathcal{L}^*$ est une famille de conditions locales pour M^* découle du théorème 2.2(b).

Soit Σ un ensemble de places contenant les places à l'infini, les places divisant l'exposant de M et les places où M ou $\mathcal{L}$ est ramifié. La suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(F, M) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to \oplus_{v\in\Sigma}\, \mathrm{H}^1(F_v, M)/L_v,$$

donne la finitude du groupe de Selmer (puisque $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)$ est fini). En passant au dual de Pontryagin et en utilisant la dualité de Tate locale pour identifier L_v et $\left(\mathrm{H}^1(F_v, M^*)/L_v^\perp\right)^\vee$:

$$\oplus_{v\in\Sigma} L_v \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M^*)^\vee \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^*}(F, M^*)^\vee \to 0$$

On a la suite exacte de Poitou-Tate :

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to P^0(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)^\vee \to$$

$$\to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to P^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M^*)^\vee \to$$

$$\to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to P^2(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M^*)^\vee \to 0,$$

où $P^i(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \subset \prod_v \mathrm{H}^i(F_v, M)$ est le produit restreint aux classes non-ramifiées hors de Σ, avec la convention de prendre le $\widehat{\mathrm{H}}^0$ pour les places archimédiennes. On en déduit la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M) \to \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{H}^0(F_v, M) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)^\vee \to$$

$$\to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}}(F, M) \to \oplus_{v\in\Sigma} L_v \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M^*)^\vee \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}^*}(F, M^*)^\vee \to 0.$$

Le théorème découle alors de la formule de caractéristique d'Euler-Poincaré globale :

$$\frac{\#\,\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)}{\#\,\mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)\#\,\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{F,\Sigma}, M)} = \prod_{v|\infty} \#(1 + c_v)M^*. \qquad \square$$

Avant de nous pencher sur le contrôle du nombre de générateurs dans notre problème de déformation spécial, expliquons brièvement l'idée générale. Étant données deux familles de conditions locales $\mathcal{L}_1 = \{L_{1,v}\}_v$ et $\mathcal{L}_2 = \{L_{2,v}\}_v$, avec $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$ (i.e. pour tout v, $L_{1,v} \subset L_{2,v}$), on a deux suites exactes :

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1}(F, M) \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_2}(F, M) \to \oplus_{v\in\Sigma} L_{2,v}/L_{1,v} \text{ , et}$$

$$0 \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_2^*}(F, M^*) \to \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1^*}(F, M^*) \to \oplus_{v\in\Sigma} L_{1,v}^\perp/L_{2,v}^\perp.$$

Afin d'étudier $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1}(F, M)$ on fixe $\mathcal{L}_1$ et commence à faire grossir $\mathcal{L}_2$, pas à pas. D'après la deuxième suite exacte, à chaque pas $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_2^*}(F, M^*)$ diminue et finit par s'annuler. Ceci nous permet de contrôler $\dim \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1^*}(F, M^*)$. Par ailleurs, si on a bien choisi les conditions locales $\mathcal{L}_1$, le théorème de Wiles nous permet de contrôler la différence $\dim \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1}(F, M) - \dim \mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1^*}(F, M^*)$, d'où le contrôle voulu de $\mathrm{H}^1_{\mathcal{L}_1}(F, M)$.

3.5. Contrôle du nombre de générateurs de $\mathcal{R}_Q$. On applique ce qui précède lorsque $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_\varnothing$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_Q$ et $M = \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}$. Notons que l'application trace donne un isomorphisme canonique $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}^* \cong \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)$.

LEMME 3.4. *On a*
(a) $\mathrm{H}^0(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) = \mathrm{H}^0(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) = 0$,
(b) $\dim \mathrm{H}^1_\varnothing(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) \leq \mathrm{H}^1_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$.
(c) $\dim \mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) \leq \mathrm{H}^1_{Q^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) + \#Q$.

Démonstration : (a) Sinon, il y aurait un vecteur non-nul $x \in \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}$ sur lequel $\mathcal{G}_F$ agit par 1 ou par ω. Comme x est de trace nulle et $\overline{\rho}|_{\mathcal{G}_{F(\zeta_p)}}$ est absolument irréductible, le lemme de Schur implique que x n'est pas un scalaire.

(b) Par le théorème 3.3 on a $\dim \mathrm{H}^1_\varnothing(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \mathrm{H}^1_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) =$

$$= \sum_{v\in\Sigma_f} (\dim L_v - \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho})) - \sum_{v\in J_F} \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) =$$

$$= \sum_{v|p} (\dim \mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho})) - d,$$

car pour v non-archimédienne et ne divisant pas p, la condition de déformation est “finie” et pour v archimédienne $\overline{\rho}_v$ est impaire.

D'après le lemme 2.8 $\dim \mathrm{H}^1_f(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \dim \mathrm{H}^0(F_v, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) = [F_v : \mathbb{Q}_p]$, d'où le (b).

(c) Toujours d'après le théorème 3.3 on a $\dim \mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \mathrm{H}^1_{Q^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) = \dim \mathrm{H}^1_\varnothing(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \mathrm{H}^1_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) + \sum_{\mathfrak{q}\in Q} \dim \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho})$. Comme $\dim \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) - \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) = \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$ il suffit de montrer que $\dim \mathrm{H}^0(\mathcal{G}_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) = 1$, ce qui est clair car les valeurs propres du Frobenius sur $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)$ sont données par $\mathrm{N}(\mathfrak{q})$, $\mathrm{N}(\mathfrak{q})\alpha_\mathfrak{q}\beta_\mathfrak{q}^{-1}$, $\mathrm{N}(\mathfrak{q})\beta_\mathfrak{q}\alpha_\mathfrak{q}^{-1}$ et $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod p$, alors que $\alpha_\mathfrak{q} \neq \beta_\mathfrak{q}$. □

Enfin, il nous reste à démontrer qu'on peut trouver un entier $r \geq 1$, tel que pour tout entier $m \geq 1$, il existe un ensemble $Q = Q_m$, formé de r places finies de F congrues à 1 modulo p^m, et tel que $\dim \mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) \leq r$.

L'entier $r := \dim \mathrm{H}^0_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$ convient d'après le lemme suivant :

LEMME 3.5. *Soit un entier $m \geq 1$. Pour chaque élément non-nul $[x]$ de $\mathrm{H}^0_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$, il existe une place $\mathfrak{q}$ satisfaisant :*

- $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod{p^m}$,

• $\overline{\rho}$ *est non-ramifié en* $\mathfrak{q}$ *et* $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{q})$ *admet deux valeurs propres distincts* $\alpha_\mathfrak{q} \neq \beta_\mathfrak{q}$ *appartenant à* κ.

• $\mathrm{res}_\mathfrak{q}([x])$ *est un élément non-nul de* $\mathrm{H}^1_f(F_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$.

En effet, si $\mathfrak{q}_1$,..,$\mathfrak{q}_r$ sont les places associées à une base $[x_1]$,..,$[x_r]$ de $\mathrm{H}^1_{\varnothing^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$, et si on pose $Q_m = \{\mathfrak{q}_1, .., \mathfrak{q}_r\}$, alors on aura $\mathrm{H}^1_{Q^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) \xrightarrow{\sim} \oplus_{\mathfrak{q}\in Q}\,\mathrm{H}^1_f(F_\mathfrak{q}, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))$, d'où $\mathrm{H}^1_{Q^*}(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) = 0$ et donc $\dim \mathrm{H}^1_Q(F, \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}) \leq \#Q$, d'après le lemme 3.4.

Démonstration du lemme : D'après le théorème de densité de Cebotarev, il suffit de trouver un élément $\sigma \in \mathcal{G}_F$ tel que

(1) $\sigma|_{F(\zeta_{p^m})} = 1$,

(2) $\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})(\sigma)$ admet une valeur propre différente de 1,

(3) $x(\sigma) \notin (\sigma - 1)\,\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)$.

Soit $K/F(\zeta_{p^m})$ l'extension qui trivialise $\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})$. Démontrons que le cocycle $x|_{\mathcal{G}_K}$ n'est pas trivial. Comme x n'est pas trivial, il suffit de voir que $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}(K/F), \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) = 0$. La suite d'inflation-restriction donne :

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}(F(\zeta_{p^m})/F), \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))^{\mathcal{G}(K/F(\zeta_{p^m}))} \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}(K/F), \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)) \to$$

$$\to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}(K/F(\zeta_{p^m})), \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))^{\mathcal{G}(F(\zeta_{p^m})/F)} \to 0.$$

Puisque $\overline{\rho}|_{\mathcal{G}_{F(\zeta_{p^m})}}$ est absolument irréductible, on a $\mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1)^{\mathcal{G}(K/F(\zeta_{p^m}))} = 0$.

On a aussi $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}(K/F(\zeta_{p^m})), \mathrm{Ad}^0\,\overline{\rho}(1))^{\mathcal{G}(F(\zeta_{p^m})/F)} = 0$ (on traite d'abord le cas $m = 1$).

Soit $\sigma_0 \in \mathcal{G}(K/F(\zeta_{p^m}))$ satisfaisant (2) (et (1)). Comme $x|_{\mathcal{G}_K}$ n'est pas trivial, on peut choisir un relèvement σ de σ_0 qui vérifie (3), ce qui prouve le lemme. □

4. Modules de cohomologie localisée.

Prenons un ensemble Q de places de F, comme dans l'introduction et soit $(\mathfrak{o}/\,\mathfrak{q})^\times = \Delta_\mathfrak{q} \times (\mathfrak{o}/\,\mathfrak{q})^{\times(p)}$ sa décomposition en p-partie et hors-de-p-partie.

Posons $K = K_1(\mathfrak{n})$, $K_{0,Q} = K \cap K_0(Q)$ et

$$K_Q = \left\{\gamma \in K_{0,Q} |\text{ pour } \forall \mathfrak{q} \in Q\ ,\ \exists u \in (\mathfrak{o}/\mathfrak{q})^{\times(p)}\ \ \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & u \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{q}}\right\}.$$

On note Y (resp. $Y_{0,Q}$ et Y_Q) les modèles entiers des variétés de Shimura de niveau K (resp. $K_{0,Q}$ et K_Q), dont les composantes connexes sont les $M_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ (resp. $M_0(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}\,Q)$ et $M(\Gamma_Q)$), $\mathfrak{c}$ décrivant un ensemble de représentants de Cl^+_F. Alors Y_Q est un revêtement étale galoisien de $Y_{0,Q}$ de groupe Δ_Q.

Soit $\mathfrak{m}' := (\varpi, T_v - c(f, v); v \nmid \mathfrak{n})$ l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke semi-simple $\mathbb{T}' = \mathcal{O}[T_v; v \nmid p\,\mathfrak{n}] \subset \mathrm{End}_\mathcal{O}(\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(E))[\epsilon, \psi])$, correspondant à la forme nouvelle f, et posons $\mathcal{T} = \mathbb{T}'_{\mathfrak{m}'}$. Comme $\mathfrak{m}' = \mathbb{T}' \cap \mathfrak{m}$, on en déduit une flèche $\mathcal{T} \to \mathbb{T}_\mathfrak{m}$.

Posons $\mathcal{M} := \mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))[\epsilon, \psi]_{\mathfrak{m}'}$. Par le Thm VI.2.6, $\mathcal{M}$ est libre sur $\mathcal{O}$.

Remarque 4.1. Par le théorème VI.2.7, on sait déjà que $\mathrm{H}^d(Y, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))[\epsilon, \psi]_\mathfrak{m}$ est libre de rang 1 sur $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$. Nous allons démontrer par une autre méthode (qui utilise l'hypothèse supplémentaire ($\mathbf{Min}_\rho$)) que $\mathcal{M}$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{T}$. Comme corollaire on obtiendra la liberté de $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$, ainsi que l'égalité de $\mathcal{T}$ et $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$.

Soit l'idéal maximal $\mathfrak{m}'_{0,Q} := (\varpi, T_v - c(f, v), U_\mathfrak{q} - \alpha_\mathfrak{q}; v \nmid \mathfrak{n}\,Q, \mathfrak{q} \in Q)$ de $\mathbb{T}'_{0,Q} = \mathcal{O}[T_v, U_\mathfrak{q}; v \nmid \mathfrak{n}\,Q, \mathfrak{q} \in Q] \subset \mathrm{End}_\mathcal{O}(\mathrm{H}^d(Y_{0,Q}, \mathbb{V}_n(E))[\epsilon, \psi])$ et posons $\mathcal{T}_{0,Q} := (\mathbb{T}'_{0,Q})_{\mathfrak{m}'_{0,Q}}$.

Alors $\mathcal{M}_{0,Q} := \mathrm{H}^d(Y_{0,Q}, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]_{\mathfrak{m}'_{0,Q}}$ est un $\mathcal{T}_{0,Q}$-module, libre sur $\mathcal{O}$.

LEMME 4.2. *La flèche $\mathcal{T}_{0,Q} \to \mathcal{T}$ qui envoie T_v sur T_v, pour $v \nmid \mathfrak{n}Qp$, et $U_\mathfrak{q}$ sur l'unique racine $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q}$du binôme $X^2 - T_\mathfrak{q}X + S_\mathfrak{q}\mathrm{N}(\mathfrak{q})^{k_0-1}$ au dessus de $\overline{\alpha}_\mathfrak{q}$, pour $\mathfrak{q} \in Q$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes. En particulier, $\mathfrak{m}'_{0,Q}$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}'_{0,Q}$.*

De plus, $\mathcal{M}_{0,Q}$ et $\mathcal{M}$ sont isomorphes comme $\mathcal{T}$-modules.

Démonstration : On procède par récurrence sur $\#Q$ et on peut ainsi supposer que $Q = \{\mathfrak{q}\}$ est un singleton.

Comme $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}$) est libre sur $\mathcal{O}$, l'algèbre $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}_{0,\mathfrak{q}}$) est aussi la $\mathcal{O}$-algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke, énumérés ci-dessus, agissant sur $\mathcal{M}\otimes\mathbb{C} \cong S_k(K)_\mathfrak{m}$ (resp. sur $\mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}\otimes\mathbb{C} \cong S_k(K_{0,\mathfrak{q}})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}}$).

Une forme propre intervenant dans $S_k(K_{0,\mathfrak{q}})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}}$ est forcément $\mathfrak{q}$-ancienne, car

– elle ne peut pas être une série principale ramifiée en $\mathfrak{q}$, ayant un $\mathfrak{q}$-Nebentypus trivial,

– elle ne peut pas être spéciale en $\mathfrak{q}$, car $\alpha_\mathfrak{q} \neq \beta_\mathfrak{q} \pmod{\varpi}$ et $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod{\varpi}$.

Par conséquent, l'inclusion $S_k(K)^2 \subset S_k(K_{0,\mathfrak{q}})$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2|_k \begin{pmatrix} \varpi_\mathfrak{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ induit un isomorphisme Hecke équivariant

$$(S_k(K)^2)_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}} \simeq S_k(K_{0,\mathfrak{q}})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}}.$$

L'action de $U_\mathfrak{q}$ sur $S_k(K)^2$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} T_\mathfrak{q} & \mathrm{N}(\mathfrak{q}) \\ -S_\mathfrak{q}\mathrm{N}(\mathfrak{q})^{k_0-2} & 0 \end{pmatrix}$ qui a deux valeurs propres distinctes dans $\mathcal{T}$. Ainsi, on a un isomorphisme Hecke équivariant

$$S_k(K)_\mathfrak{m} \simeq (S_k(K)^2)_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}},$$

où l'action de $U_\mathfrak{q}$ sur la partie droite correspond à l'action de l'unique $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q} \in \mathcal{T}$ relèvant $\overline{\alpha}_\mathfrak{q}$, sur la partie gauche. On a donc un isomorphisme $\mathcal{T}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{T}_{0,\mathfrak{q}}(\mathbb{C})$-équivariant :

$$\phi\otimes\mathbb{C} : \mathcal{M}\otimes\mathbb{C} = S_k(K)_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} S_k(K_{0,\mathfrak{q}})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}} = \mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}\otimes\mathbb{C},$$

où $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}$ est donné par $\phi(x) = x - (\beta_\mathfrak{q}\cdot x)| \begin{pmatrix} \varpi_\mathfrak{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\beta_\mathfrak{q}$ désigne l'unique élément de $\mathcal{T}$ au-dessus de $\overline{\beta_\mathfrak{q}}$.

On en déduit que la flèche de $\mathcal{T}_{0,\mathfrak{q}}$ dans $\mathcal{T}$, qui envoie T_v sur T_v pour $v \nmid \mathfrak{n}Qp$ et $U_\mathfrak{q}$ sur l'unique racine $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q}$ du binôme $X^2 - T_\mathfrak{q}X + S_\mathfrak{q}\mathrm{N}(\mathfrak{q})^{k_0-1}$ au dessus de $\overline{\alpha}_\mathfrak{q}$, est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes.

Reste à voir que ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules. Pour ce faire, notons que

• la flèche $j : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}^{\oplus 2})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}}$, $x \mapsto x|(U_\mathfrak{q} - \widetilde{\beta}_\mathfrak{q}) := U_\mathfrak{q}(x, 0) - (\widetilde{\beta}_\mathfrak{q}x, 0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}$-modules. Ceci découle du fait que le polynôme caractéristique de $U_\mathfrak{q}$ agissant sur le $\mathcal{T}$-module $\mathcal{T}^{\oplus 2}$ est donné par $X^2 - T_\mathfrak{q}X + S_\mathfrak{q}\mathrm{N}(\mathfrak{q})^{k_0-1} = (X - \widetilde{\alpha}_\mathfrak{q})(X - \widetilde{\beta}_\mathfrak{q})$ avec $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q}, \widetilde{\beta}_\mathfrak{q} \in \mathcal{T}$ et $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q} - \widetilde{\beta}_\mathfrak{q} \in \mathcal{T}^\times$. Par conséquent le $\mathcal{T}$-module $\mathcal{M}^{\oplus 2}$ se décompose, suivant l'action de $U_\mathfrak{q}$, en somme directe de deux $\mathcal{T}$-modules (la $\widetilde{\alpha}_\mathfrak{q}$-partie et la $\widetilde{\beta}_\mathfrak{q}$-partie) et le premier est bien donné par $j(\mathcal{M}) = (\mathcal{M}^{\oplus 2})_{\mathfrak{m}'_{0,\mathfrak{q}}}$.

• la flèche $h : \mathcal{M}^{\oplus 2} \to \mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2|_k \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est injective, à conoyau libre sur $\mathcal{O}$. En effet, comme dans Fujiwara [**25**], la matrice de la composée de h avec son dual de

Poincaré (par VI.1.3 $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_{0,\mathfrak{q}}$ sont autoduaux) est donnée par $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{N}(\mathfrak{q}) & S_{\mathfrak{q}}^{-1}T_{\mathfrak{q}} \\ T_{\mathfrak{q}} & 1+\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \end{pmatrix}$. Comme $T_{\mathfrak{q}}^2-(1+\mathrm{N}(\mathfrak{q}))^2 S_{\mathfrak{q}}$ est inversible dans $\mathcal{T}$, on a l'assertion. □

Soit $\mathfrak{m}'_Q := (\varpi, T_v - c(f,v), U_{\mathfrak{q}}-\alpha_{\mathfrak{q}}, \delta_{\mathfrak{q}}-1; v\nmid \mathfrak{n}Q, \mathfrak{q}\in Q) \subset \mathbb{T}'_Q = \mathcal{O}[T_v, U_{\mathfrak{q}}, \delta_{\mathfrak{q}}; v\nmid \mathfrak{n}Q, \mathfrak{q}\in Q] \subset \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{H}^d(Y_Q, \mathbb{V}_n(E))[\epsilon,\psi])$ et posons $\mathcal{T}_Q = (\mathbb{T}'_Q)_{\mathfrak{m}'_Q}$.

Alors $\mathcal{M}_Q := \mathrm{H}^d(Y_Q, \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]_{\mathfrak{m}'_Q}$ est un $\mathcal{T}_Q$-module, libre sur $\mathcal{O}$, d'après le Théorème de la partie précédente.

Proposition 4.3. (a) *$\mathcal{T}_Q$ est une $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre et $\mathcal{T}_Q/I_Q\mathcal{T}_Q \cong \mathcal{T}_{0,Q} \cong \mathcal{T}$.*

(b) *$\mathcal{M}_Q$ est un module libre sur $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ de rang fini α indépendant de Q. De plus, $\mathcal{M}_Q/I_Q\mathcal{M}_Q \cong \mathcal{M}_{0,Q} \cong \mathcal{M}$, comme $\mathcal{T}_{0,Q} \cong \mathcal{T}$-modules.*

Démonstration : (a) Comme $\mathcal{M}_{0,Q}$ et $\mathcal{M}_Q$ sont libres sur $\mathcal{O}$ l'inclusion $\mathcal{M}_{0,Q}\otimes\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_Q\otimes\mathbb{C}$ donne un morphisme surjectif $\mathcal{T}_Q \to \mathcal{T}_{0,Q}$ qui envoie $\delta_{\mathfrak{q}} \mapsto 1$ pour $\mathfrak{q}\in Q$. On a donc une surjection $\mathcal{T}_Q/I_Q\mathcal{T}_Q \twoheadrightarrow \mathcal{T}_{0,Q}$. Comme c'est un isomorphisme sur $\mathbb{C}$, on déduit que c'est un isomorphisme.

(b) Supposons que $\mathcal{O}$ soit assez grand pour contenir les valeurs de tous les caractères de Δ_Q. On a que $\mathcal{M}_Q$ est libre sur $\mathcal{O}[\Delta_Q]$, si et seulement si pour tout caractère $\phi : \Delta_Q \to \mathcal{O}^\times$, le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}_Q/I_{Q,\phi}\mathcal{M}_Q$ est libre, où $I_{Q,\phi} = (\delta_{\mathfrak{q}} - \phi(\mathfrak{q}), \mathfrak{q}\in Q) \subset \mathcal{O}[\Delta_Q]$. Par le lemme 2.8 qui est une application du lemme de Nakayama, il suffit de voir que $\mathcal{M}_Q\otimes\mathbb{C}$ est libre sur $\mathbb{C}[\Delta_Q]$ et $\mathcal{M}_Q/I_Q\mathcal{M}_Q$ est libre sur $\mathcal{O}$. Par le Thm.VI.2.6, le dual de Pontryagin de $\mathcal{M}_Q/I_Q\mathcal{M}_Q$ est donné par $\mathrm{H}^d(Y_Q, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]^{\Delta_Q}_{\mathfrak{m}_Q}$.

La suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{H}^i(\Delta_Q, \mathrm{H}^j(Y_Q, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(Y_{0,Q}, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi],$$

localisée en $\mathfrak{m}'_{0,Q}$, dégénère en E_2, car elle est concentrée en $j=d$ (*cf* Thm.VI.2.6). Donc

$$\mathrm{H}^d(Y_Q, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]^{\Delta_Q}_{\mathfrak{m}_Q} = \mathrm{H}^d(Y_{0,Q}, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]_{\mathfrak{m}'_{0,Q}} = \mathrm{H}^d(Y, V_n(E/\mathcal{O}))[\epsilon,\psi]_{\mathfrak{m}}.$$

Comme ce dernier est divisible, on déduit que $\mathcal{M}_Q/I_Q\mathcal{M}_Q$ est libre sur $\mathcal{O}$.

Reste à voir que $\mathcal{M}_Q\otimes\mathbb{C}$ est libre sur $\mathbb{C}[\Delta_Q]$. □

Proposition 4.4. *On a une surjection canonique $f_Q : \mathcal{R}_Q \to \mathcal{T}_Q$. L'action de Δ_Q sur $\mathcal{T}_Q$ obtenue via f_Q est celle des opérateurs diamant.*

Démonstration : On a une inclusion $\mathcal{T}_Q \subset \prod \mathcal{O}_g$, où g parcours l'ensemble des formes propres normalisées de $S_k(K_Q)$ congrues à f (hors de $\mathfrak{n}pQ$). La méthode des pseudo-représentations de Wiles permet alors de construire, par recollement, une représentation galoisienne $\rho_Q^{\mathrm{mod}} : \mathcal{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{T}_Q)$. Il s'agit de vérifier que ρ_Q^{mod} est un point de $\mathcal{F}_Q(\mathcal{T}_Q)$. Il est clair que ρ_Q^{mod} est non-ramifiée hors de $\mathfrak{n}pQ$, de déterminant égal à celui de ρ (éventuelement après torsion par un caractère d'ordre fini; on utilise que p impair, pour extraire une racine du déterminant) et qu'elle est cristalline en p des mêmes poids de Hodge-Tate que f (et ordinaire si f l'est).

Reste à voir que pour chaque place v divisant $\mathfrak{n}$, ρ_Q^{mod} est une déformation finie de $\overline{\rho}_v$. C'est toujours vrai dans le cas 0_{NE}. Dans les autres cas, c'est un corollaire de la correspondance de Langlands locale, démontrée par Carayol pour les formes modulaires de Hilbert.

Enfin l'action de Δ_Q sur $\mathcal{T}_Q$ obtenue via f_Q est celle des opérateurs diamant, d'après Carayol (cas d'une série principale peu-ramifiée). □

5. Systèmes de Taylor-Wiles, d'après Fujiwara.

Définition 5.1. Soit $\mathcal{Q}$ une famille d'ensembles finis de de places de F. Un système de Taylor-Wiles pour $\mathcal{Q}$ est la donné de $\{\mathcal{R}, (\mathcal{R}_Q, \mathcal{M}_Q)_{Q\in\mathcal{Q}}\}$ tels que :

(STW1) pour tout $\mathfrak{q} \in Q$ $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod p$ et $\mathcal{R}_Q$ est une $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-algèbre locale complète, où $\Delta_Q = \prod_{\mathfrak{q}\in Q} \Delta_\mathfrak{q}$ et $\Delta_\mathfrak{q}$ désigne le p-Sylow de $(\mathfrak{o}\,/\,\mathfrak{q})^\times$.

Notons $I_Q = (\delta_\mathfrak{q} - 1; \mathfrak{q} \in Q)$ l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$, où $\delta_\mathfrak{q}$ désigne un générateur de $\Delta_\mathfrak{q}$.

(STW2) $\mathcal{R}$ est une $\mathcal{O}$-algèbre locale complète et $\mathcal{R}_Q\,/I_Q\,\mathcal{R}_Q \cong \mathcal{R}$ en tant que $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes.

(STW3) $\mathcal{M}_Q$ est un $\mathcal{R}_Q$-module, qui est libre de rang α sur $\mathcal{O}[\Delta_Q]$ ($\alpha \geq 1$ est fixé et indépendant de m).

Dans la suite nous utiliserons exclusivement des familles $\mathcal{Q} = \{Q_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ et nous noterons $\mathcal{R}_m, \mathcal{M}_m, \ldots$ à la place de $\mathcal{R}_{Q_m}, \mathcal{M}_{Q_m}, \ldots$ pour alléger les notations.

Théorème 5.2. *Soit un système de Taylor-Wiles* $\{\mathcal{R}, (\mathcal{R}_m, \mathcal{M}_m)_{m\in\mathbb{N}}\}$. *Supposons que*

(TW1) *pour tout* $\mathfrak{q} \in Q_m$ $\mathrm{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \pmod{p^m}$,

(TW2) *pour tout* m, *on a* $r = \#Q_m$,

(TW3) $\mathcal{R}_m$ *est engendré par* $\leq r$ *éléments comme* $\mathcal{O}$-*algèbre locale complète.*

(TW4) *le noyau de la flèche composée* $f_m : \mathcal{R} \cong \mathcal{R}_m\,/I_m\,\mathcal{R}_m \to \mathrm{End}_\mathcal{O}(\mathcal{M}_m\,/I_m\,\mathcal{M}_m)$ *est indépendant de* m. *On note* $\mathcal{T}$ *l'image de* f_m.

Alors $\mathcal{R}$ *est plat sur* $\mathcal{O}$ *et il est une intersection complète relative de dimension* 0. *En particulier,* $\mathcal{R}$ *est libre de rang fini sur* $\mathcal{O}$. *De plus, pour tout* m, *la surjection* $f_m : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{T}$ *est un isomorphisme.*

Si on a de plus la condition suivante :

(TW5) *pour tout* m, $\mathcal{M}_m\,/I_m\,\mathcal{M}_m$ *est isomorphe au même* $\mathcal{R}$-*module* $\mathcal{M}$, *alors* $\mathcal{M}$ *est libre sur* $\mathcal{R}$.

Démonstration : Fixons pour tout m un isomorphisme $\alpha_m : \{1,..,r\} \xrightarrow{\sim} Q_m$. Posons :

$$I_{n,m} = \{p^n, \delta_\mathfrak{q}^{p^n} - 1 \mid \mathfrak{q} \in Q_m\} \subset \mathcal{O}[\Delta_m], \text{ pour } m \geq n.$$

D'après (TW1), $\delta_\mathfrak{q}$ est d'ordre exactement p^n dans $\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m}$, d'où

$$\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[S_1,..,S_r]/(p^n, (1+S_1)^{p^n} - 1,..,(1+S_r)^{p^n} - 1) =: \mathbb{S}_n \qquad \delta_{\alpha_m(i)} \mapsto 1 + S_i.$$

Fixons un isomorphisme de $\mathcal{O}[\Delta_m]$-modules $\beta_m : \mathcal{M}_m \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}[\Delta_m])^\alpha$ et une surjection de $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes $\gamma_m : \mathcal{O}[[T_1,..,T_r]] \longrightarrow \mathcal{R}_m$. Soit

$$\mathcal{R}_{n,m} = \mathrm{Im}\left(\mathcal{R}_m\,/I_{n,m}\,\mathcal{R}_m \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m}}(\mathcal{M}_m\,/I_{n,m}\,\mathcal{M}_m)\right).$$

D'après (STW3) $\mathcal{M}_m\,/I_{n,m}\,\mathcal{M}_m$ est un $\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m}$-module libre de rang α et de plus $\mathcal{R}_m\,/I_{n,m}\,\mathcal{R}_m$ est une $\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m}$-algèbre, donc $\mathcal{O}[\Delta_m]/I_{n,m} \hookrightarrow \mathcal{R}_{n,m}$.

Pour chaque $m \geq n$ on dispose ainsi de triplets formés de :

(1) Un anneau fini $\mathcal{R}_{n,m}$, avec $\iota : \mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathcal{R}_{n,m} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{S}_n} \mathbb{S}_n^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}_n^{\alpha^2}$,

(2) r générateurs $f_1,..,f_r$ ($f_i = \gamma_m(T_i)$) de $\mathcal{R}_{n,m}$, appartenant à l'idéal maximal de la $\mathcal{O}$-algèbre,

(3) un quotient $\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m} = \mathcal{R}_{n,m}\,/(\iota(S_i), 1 \leq i \leq r)$.

A n fixé, il y a un nombre fini de tels triplets, modulo isomorphisme. Par un procédé d'extraction diagonale on peut donc trouver une suite strictement croissante d'entiers $m(n) \geq n$ tels que : pour tout n le triplet pour $(n-1, m(n))$ soit isomorphe à celui pour $(n-1, m(n-1))$. Ainsi, obtient-on un système projectif $(\mathcal{R}_{n,m}; f_1, .., f_r; \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m})$, alors qu'à priori il n'y avait aucun lien entre les différents ensembles Q_m. La flèche de transition est donnée par la flèche naturelle $\mod p^{n-1}$ $\mathcal{R}_{n,m(n)} \to \mathcal{R}_{n-1,m(n)}$, suivie de la flèche d'isomorphisme $\mathcal{R}_{n-1,m(n)} \to \mathcal{R}_{n-1,m(n-1)}$, venant de l'argument des tiroires.

Posons $J_n := \ker(\mathcal{R}_{m(n)} \to \mathcal{R}_{n,m(n)}) \supset I_{n,m(n)}$, $P := \varprojlim \mathcal{R}_{n,m(n)} = \varprojlim \mathcal{R}_{m(n)} / J_n$ et $\widetilde{\mathcal{R}} := \varprojlim \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m(n)}$.

Par (2) on a une surjection $\mathcal{O}[[T_1, .., T_r]] \to P$ (car les générateurs f_i forment un système projectif). D'après (1) on a $\varprojlim \mathbb{S}_n = \mathcal{O}[[S_1, .., S_r]] \hookrightarrow P \hookrightarrow \mathcal{O}[[S_1, .., S_r]]^{\alpha^2}$. et donc P est un $\mathcal{O}[[S_1, .., S_r]]$-module fini. Sa dimension de Krull est donc $r+1$ et la flèche $\mathcal{O}[[T_1, .., T_r]] \xrightarrow{\sim} P$ est donc un isomorphisme.

Le diagramme suivant met ensemble les différents anneaux présents déjà (ici m=m(n))

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}_m & \longrightarrow & \mathcal{R}_m / I_{n,m} & \longrightarrow & \mathcal{R}_{n,m} = \mathcal{R}_m / J_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_m / I_m \mathcal{R}_m & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m} = \mathcal{R} / \widetilde{J}_n \mathcal{R}. \end{array}$$

D'après (3) on a une suite exacte $(\mathcal{R}_{n,m(n)})^r \to (\mathcal{R}_{n,m(n)}) \to \widetilde{\mathcal{R}}_{n,m}$ $(0, .., 1, .., 0) \mapsto \delta_{\alpha_m(i)} - 1 = \iota(S_i) \mapsto 0$ et en passant à la limite on obtient une suite exacte $P^r \to P \to \widetilde{\mathcal{R}}$ et donc $\widetilde{\mathcal{R}} \cong \mathcal{O}[[T_1, .., T_r]]/\iota(S_1, .., S_r)$.

Montrons que $\widetilde{\mathcal{R}}$ est une intersection complète sur $\mathcal{O}$. Puisque P est régulier, P est plat sur $\mathbb{S}_\infty = \mathcal{O}[[S_1, .., S_r]]$, donc $\widetilde{\mathcal{R}} = P/\iota(S_1, .., S_r)$ est fini et plat sur $\mathcal{O}$, et donc $\dim(\widetilde{\mathcal{R}}) \leq 1$. Par ailleurs, $I = \ker(P \to \widetilde{\mathcal{R}})$ est engendré par r éléments, donc $\mathrm{ht}(I) \leq r$. Puisque P est caténaire, on déduit que $\dim(\widetilde{\mathcal{R}}) = 1$. Donc r est le nombre minimal de générateurs de I est $\widetilde{\mathcal{R}}$ est une intersection complète sur $\mathcal{O}$ admettant la présentation $0 \to I \to P \to \widetilde{\mathcal{R}} \to 0$.

On établit alors que (*cf* [**25**]) la flèche $\mathcal{R} \to \mathcal{T}$ se factorise par $\widetilde{\mathcal{R}}$, puis que $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$, et enfin que sous (TW5) le module $\mathcal{M}$ est libre sur $\mathcal{R}$. □

6. Démonstration du théorème C.

6.1. Une divisibilité du type "critère de Kummer". Supposons que ρ est de niveau minimal ou que $\mathfrak{n}$ est sans facteurs carrés.

On peut alors définir l'anneau de déformations universel $\mathcal{R}$ de $\overline{\rho}$, ainsi que le groupe de Selmer $\mathrm{Sel}(F, \mathrm{Ad}^0(\rho) \otimes E/\mathcal{O})$. Le Théorème A du chapitre VI admet le corollaire suivant

COROLLAIRE 6.1. *Supposons* (**I**), (**II**), $(\mathrm{Irr}_{\overline{\rho}})$ *et* (PM). *Alors*

$$(*) \qquad \left(\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f), 1)}{\Omega_f^+ \Omega_f^-}\right) \supset \mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Sel}(F, \mathrm{Ad}^0(\rho) \otimes E/\mathcal{O})\right).$$

Démonstration : On utilise le formalisme des modules de congruence de [**8**] Chap.4.

On note C_0^{coh} le $\mathcal{O}$-module de congruence associé au réseau $\mathrm{H}_!^d(Y_1(\mathfrak{n}), \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))'[\pm\widehat{\epsilon}_\varnothing, \psi]_{\mathfrak{m}}$ (voir la démonstration du théorème A). Par le théorème des diviseurs élémentaires, il existe deux idéaux $\eta_1 \subset \eta_2 \subset \mathcal{O}$ tels que $C_0^{\mathrm{coh}} \cong \mathcal{O}/\eta_1 \times \mathcal{O}/\eta_2$. Par la formule de Shimura on a

$$\left(\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f), 1)}{\Omega_f^+ \Omega_f^-}\right)^2 \supset \eta_1 \eta_2.$$

Par ailleurs, considérons le $\mathcal{O}$-module de congruence C_0^{arith}, associé à la composante locale $\mathcal{T}$ de l'algèbre de Hecke et le morphisme $\theta_f : \mathcal{T} \to \mathcal{O}$. On a $C_0^{\mathrm{arith}} \cong \mathcal{O}/\eta$, où $\eta \subset \mathcal{O}$ est l'image par θ_f du noyau la deuxième projection de $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$. En fait, on a aussi $C_0^{\mathrm{arith}} \cong \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{T}} \mathcal{T}'$ et donc C_0^{arith} annule C_0^{coh}. Donc $\eta \subset \eta_1 \subset \eta_2$ et en particulier

$$\eta_1\eta_2 \supset \eta^2.$$

Enfin, la flèche surjective $\mathcal{R} \to \mathcal{T}$ donne

$$\#(\mathcal{O}/\eta) \leq \#(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}/\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^2) = \#(\mathrm{Sel}(F, \mathrm{Ad}^0(\rho) \otimes E/\mathcal{O})).$$

□

6.2. $\mathcal{R} = \mathcal{T}$ et finitude du groupe de Selmer, dans le cas minimal. Les résultats de ce chapitre nous permettent de démontrer la réciproque de $(*)$ dans le cas minimal.

THÉORÈME 6.2. (Théorème C) *Supposons* (**I**)*,* (**II**)*,* ($\mathbf{LI}_{\mathrm{Ind}\,\overline{\rho}}$) *et que ρ est de niveau minimal* ($\mathbf{Min}_\rho$)*. Alors on a un isomorphisme $\mathcal{R} \cong \mathcal{T}$ d'algèbres qui sont intersections complètes sur $\mathcal{O}$ et*

$$\left(\frac{W(f)\Lambda^*(\mathrm{Ad}^0(f),1)}{\Omega_f^+\Omega_f^-}\right) = \mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{Sel}(F, \mathrm{Ad}^0(\rho) \otimes E/\mathcal{O})\right).$$

Démonstration : L'isomorphisme $\mathcal{R} = \mathcal{T}$ découle du théorème de Fujiwara sur les systèmes de Taylor-Wiles de la partie précédente, au vu des résultats de ce chapitre.

D'après le théorème B (ou bien encore d'après le théorème de Fujiwara), on a que $\mathrm{H}_!^d(Y_1(\mathfrak{n}), \mathbb{V}_n(\mathcal{O}))[\pm\widehat{\epsilon}_\varnothing, \psi]_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang 2 sur $\mathcal{T}$. Donc, avec les notations du corollaire 6.1, on a $\eta = \eta_1 = \eta_2$. Enfin, comme $\mathcal{R} = \mathcal{T}$ est une intersection complète sur $\mathcal{O}$, on a $\#(\mathcal{O}/\eta) = \#(\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}/\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^2)$ (*cf* [**8**] Cor.4.15), d'où l'assertion. □

Liste des notations.

A ... VAHB I.3.1.
a_ξ ... coefficients de Fourier I.3.4.
$\mathcal{A}$ ... VAHB universelle I.3.2.
A^t ... VAHB duale I.3.1.
$\mathfrak{a}$ ... idéal de $\mathfrak{o}$ I.4.2.
B ... sous-groupe de Borel de G I.1.
$\mathfrak{b}$ ... algèbre de Lie de B III.3.
$\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ ... idéaux I.1.4.
$\mathcal{C}$ ... pointe I.1.1.
$\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_+$ ... idéal de polarisation I.1.3.
$\mathfrak{c}^*$ ... I.1.2.
Cl_F ... groupe de classes de F I.1.4.
Cl_F^+ ... groupe de classes strictes de F I.4.1.
$c(f, \mathfrak{a})$ ... valeurs propres I.4.2.
$d = d_F$ ... degré de F I.1.
D ... groupe algébrique I.1.
D_H ... I.3.3.
$D_\mathfrak{p}$ ... sous-groupe de décomposition III.8.2.
$\mathfrak{d}$ ... différente de F I.1.
$\mathcal{D}$ ... IV.5.
E ... corps p-adique assez grand §0.1.
f forme modulaire de Hilbert nouvelle §0.1.
F ... corps de nombres totalement réel I.1.
$\widetilde{F}$ ... clôture galoisienne de F I.1.
$\mathfrak{g}$ ... algèbre de Lie de G III.3.
$\widehat{F}$ ... IV.5.
$\mathcal{F}_D, \mathcal{F}_B, \mathcal{F}_G$ ... foncteurs II.9
G ... groupe algébrique I.1.
G^* ... $G \times_D \mathbb{G}_\mathrm{m}$ I.1.
$G_\mathbb{R}^+$ ... I.1.1.
g_J ... conjugué par le groupe de Weyl I.4.5.
g_τ ... conjugué interne III.7.
$\mathcal{G}_L$ ... groupe de Galois de L §0.1.
$\mathfrak{G}$ ... schéma semi-abélien II.6.2.
$H(\mathbb{F}_q)$ ... IV.6.3.
$\mathfrak{H}_F, \mathfrak{H}$ ... domain symétrique I.1.1.
h^+ ... nombre de classes strictes I.4.1.
$\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1, \mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1$ ... III.4.
$\underline{i}$ ... I.1.1.
$I_\mathfrak{p}$ ... sous-groupe d'inertie III.8.2.
J ... sous-ensemble de J_F I.2.3.
J_F ... ensemble des places infinies de F I.1.
J_F^i ... IV.6.1.
$J_{F,\mathfrak{p}}$ ... III.8.2.
$k = n + 2t$ ... poids arithmétique I.2.1.
k_0, n_0 ... entiers I.2.1.
K ... corps CM IV.4.
K_∞, K_∞^+ ... I.1.1.
$K_\bullet^\bullet(\mathfrak{n})$ ... I.2.5.
$K_n^\bullet$ ... complexe BGG III.3.
$\mathcal{K}_n^\bullet$ ... complexe BGG de fibrés III.5.
L ... corps §.0.2
L_0 ... réseau I.1.3.
$m = (k_0 t - k)/2$ ... I.2.1.
M, M^1 ... variété modulaire de Hilbert connexe I.1.5. II.3.1
$\mathcal{M}$ ... VII.4.
$\overline{M}, \overline{M^1}$ ... compactification toroïdale II.6.1.
M^*, M^{1*} compactif. minimale I.1.6. II.7.4.
$\mathfrak{m}$ ... idéal maximal de $\mathbb{T}$ §.0.4
n ... poids de G I.2.1.
N ... normalisateur de T dans G VI.1.1.
$\mathfrak{n}$ ... idéal de niveau I.1.3.
$\mathcal{O}$ ... anneau des entiers de E §0.1.
$\mathfrak{o}$ ... anneau des entiers de F I.1.
$\mathfrak{o}_+^\times$ ... groupe d'unités I.1.2.
$\mathfrak{o}_{D+}^\times$ ... groupe d'unités I.1.3.

Références

[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y. Tai, Lie groups. History, frontiers and applications. Vol. IV : Smooth compactification of locally symmetric varieties, Math Sci Press, 1975.

[2] D. Blasius and J. Rogawski, *Motives for Hilbert Modular Forms*, Invent. Math., 114 (1993), pp. 55–87.

[3] C. Breuil, *Une remarque sur les représentations locales p-adiques et les congruences entre formes modulaires de Hilbert*, Bull. Soc. Math. France, 127 (1999), pp. 459–472.

[4] J.-L. Brylinski and J.-P. Labesse, *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 17 (1984), pp. 361–412.

[5] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 19 (1986).

[6] C.-L. Chai, *Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli space*, Ann. of Math., 131 (1990), pp. 541–554.

[7] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, in Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, vol. I, Academic Press, 1990, pp. 77–159.

[8] H. Darmon, F. Diamond, and R. Taylor, *Fermat's last theorem*, Current developments in mathematics, Internat. Press, Cambridge, 1995.

[9] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, in Séminaire Bourbaki, exposé 355, vol. 179 of LNM, Springer-Verlag, 1971.

[10] ———, *Théorie de Hodge, II*, Publ. Math. IHES, 40 (1971), pp. 5–58.

[11] ———, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. IHES, 43 (1974), pp. 273–307.

[12] ———, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, in Proceedings of Symposia of Pure Mathematics, vol. 33, 1979, pp. 313–346.

[13] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. IHES, 36 (1969), pp. 75–109.

[14] P. Deligne and G. Pappas, *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*, Compositio Math., 90 (1994), pp. 59–79.

[15] P. Deligne and M. Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, in Modular functions of one variable II, vol. 349 of Lecture Notes in Mathematics, 1972, pp. 143–316.

[16] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup., 7 (1974), pp. 507–530.

[17] F. Diamond, *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one*, Invent. Math., 128 (1997), pp. 379–391.

[18] ———, *On the Hecke action on the cohomology of Hilbert-Blumenthal surfaces*, Contemporary Math., 210 (1998), pp. 71–83.

[19] G. Faltings, *On the cohomology of locally symmetric hermitian spaces*, in Séminaire d'algèbre, vol. 1029 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1983, pp. 349–366.

[20] ———, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, in Algebraic analysis, geometry, and number theory, J. H. U. Press, ed., 1989, pp. 25–80.

[21] G. Faltings and C.-L. Chai, Degeneration of Abelian Varieties, Springer-Verlag, 1990.

[22] G. Faltings and B. Jordan, *Crystalline cohomology and* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$, Israel J. Math., 90 (1995), pp. 1–66.

[23] J.-M. Fontaine and G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 15 (1982), pp. 547–608.

[24] E. Freitag, Hilbert Modular Forms, Springer-Verlag, 1990.

[25] K. Fujiwara, *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case.* preprint, juin 1999.

[26] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, a first course, Springer, 1996.

[27] E. Ghate, *Adjoint L-values and primes of congruence for Hilbert modular forms*, Compositio Math., 132 (2002), pp. 243–281.

[28] E. Goren, Lectures on Hilbert modular varieties and modular forms, American Mathematical Society, 2002.

[29] G. Harder, *Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case* GL_2, Invent. Math., 89 (1987), pp. 37–118.

[30] H. Hida, p-adic automorphic forms on Shimura varieties. to appear.

[31] ———, *Congruences of cusp forms and special values of their zeta functions*, Invent. Math., 63 (1981), pp. 225–261.

[32] ———, *On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values their zeta functions*, Invent. Math., 64 (1981), pp. 221–262.

[33] ———, *Nearly ordinary Hecke algebras and Galois representations of several variables*, in Algebraic analysis, geometry and number theory, Proceedings of the JAMI Inaugural Conference, 1988, pp. 115–134.

[34] ———, *On p-adic Hecke algebras for* GL_2 *over totally real fields*, Ann. Math., 128 (1988), pp. 295–384.

[35] ———, *On the critical values of L-functions of* GL_2 *and* $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$, Duke Math. J., 74 (1994), pp. 431–529.

[36] H. Hida and J. Tilouine, *Anti-cyclotomic Katz p-adic L-functions and congruence modules*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 26 (1993), pp. 189–259.

[37] L. Illusie, *Réduction semi-stable et décomposition de complexes de de Rham à coefficients.*, Duke Math. J., 60 (1990), pp. 139–185.

[38] H. Jacquet and R.-P. Langlands, Automorphic Forms on GL(2), vol. 114 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1970.

[39] J. Jantzen, Representations of algebraic groups, Academic Press, 1987.

[40] N. Katz, *Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration)*, Invent. Math., 18 (1972), pp. 1–118.

[41] ———, *p-Adic L-functions for CM fields*, Invent. Math., 49 (1978), pp. 199–279.

[42] N. Katz and B. Mazur, Arithmetic moduli of elliptic curves, vol. 108 of Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, 1985.

[43] N. Katz and T. Oda, *On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters*, J. Math. Kyoto Univ., 8-2 (1968), pp. 199–213.

[44] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, vol. 339 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.

[45] G. Kings, *Higher regulators, Hilbert modular surfaces, and special values of L-functions*, Duke Math. J., 92 (1998), pp. 61–127.

[46] M. Kisin and K. Lai, *Overconvergent Hilbert modular forms*. preprint.

[47] K. Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing*, Duke Math. J., 95 (1998), pp. 161–212.

[48] B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 47 (1977), pp. 33–186.

[49] ———, *Deforming Galois Representations*, in Galois Groups over $\mathbb{Q}$, vol. 16 of MSRI Publications, Springer-Verlag, 1989, pp. 385–437.

[50] J. Milne, Étale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

[51] A. Mokrane and J. Tilouine, *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications,* in Cohomology of Siegel Varieties, Astérisque, 280 (2002), pp. 1–95.

[52] L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, 129 (1985).

[53] D. Mumford, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Math., 24 (1972), pp. 239–272.

[54] D. Mumford and J. Fogarty, Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, 1982.

[55] R. Pink, *On l-adic sheaves on Shimura varieties and their higher images in the Baily-Borel compactification*, Math. Ann., 292 (1992), pp. 197–240.

[56] P. Polo and J. Tilouine, *Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *for representations with p-small weights*, Astérisque, 280 (2002), pp. 97–135.

[57] M. Rapoport, *Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compositio Math., 36 (1978), pp. 255–335.

[58] M. Raynaud, *Variétés abéliennes et géométrie rigide*, Actes du Congrès Intern. Math, 1 (1970), pp. 473–477.

[59] K. Ribet, *On l-adic representations attached to modular forms*, Invent. Math., 28 (1975), pp. 245–275.
[60] ———, *Mod p Hecke operators and congruences between modular forms*, Invent. Math., 71 (1983), pp. 193–205.
[61] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math., 15 (1972), pp. 259–331.
[62] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure and Appl. Math., 29 (1976), pp. 783–804.
[63] ———, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J., 45 (1978), pp. 637–679.
[64] R. Steinberg, *Representations of algebraic groups*, Nagoya Math. J., 22 (1963), pp. 33–56.
[65] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math., 98 (1989), pp. 265–280.
[66] ———, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms II*, in Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), J. Coates and S.-T. Yau, eds., International Press, 1997, pp. 185–191.
[67] R. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 553–572.
[68] G. van der Geer, Hilbert Modular Surfaces, Springer-Verlag, 1990.
[69] T. Wedhorn, *Congruence relations on some shimura varieties*, J. Reine Angew. Math., 524 (2000), pp. 43–71.
[70] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math., 94 (1988), pp. 529–573.
[71] ———, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 443–551.
[72] J.-P. Wintenberger, *Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux*, Ann. of Math., 119 (1984), pp. 511–548.
[73] H. Yoshida, *On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms*, Duke Math. J., 74 (1994), pp. 121–191.

LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13
99, avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse
France
e-mail : dimitrov@math.univ-paris13.fr

RÉSUMÉ. Le but de cette thèse est de généraliser un certain nombre de résultats arithmétiques connus pour les formes modulaires elliptiques au cas des formes modulaires de Hilbert. Parmi ces résultats citons le contrôle de l'image de la représentation galoisienne résiduelle [Serre, Ribet], le critère de congruence de Hida, ainsi que la liberté de la cohomologie entière de la variété modulaire de Hilbert sur certaines composantes locales de l'algèbre de Hecke et la propriété de Gorenstein de celles-ci [Mazur, Faltings-Jordan]. Dans le cas de *niveau minimal* ceci permet de relier la p-partie "algébrique" de la valeur en 1 de la fonction L adjointe d'une forme modulaire de Hilbert nouvelle au cardinal du groupe de Selmer correspondant.

L'approche des propriétés arithmétiques des formes modulaires de Hilbert se fait à travers leurs représentations galoisiennes modulo p et l'outil principal est l'action de l'inertie en p. Cette action est contrôlée par le calcul des poids de Hodge-Tate (resp. de Fontaine-Laffaille) de la cohomologie p-adique (resp. modulo p) de la variété modulaire de Hilbert. La partie cohomologique de ce travail repose sur la construction des compactifications toroïdales arithmétiques de la variété abélienne de Hilbert-Blumenthal universelle (et de ses produits fibrés), au-dessus des compactifications toroïdales arithmétiques de la variété modulaire de Hilbert en niveau $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$.

MOTS CLÉS : Formes modulaires de Hilbert; Congruences; Représentations galoisiennes; Poids de Hodge-Tate; Cohomologie entière des variétés modulaires de Hilbert; Fonction L adjointe; Compactifications toroïdales.

ABSTRACT. The aim of this thesis is to extend some arithmetic results on elliptic modular forms to the case of Hilbert modular forms. Among these results let us mention the control of the image of the Galois representation modulo p [Serre, Ribet], Hida's congruence criterion, and the freeness of the integral cohomology of the Hilbert modular variety over certain local components of the Hecke algebra and the Gorenstein property of these local algebras [Mazur, Faltings-Jordan]. As an application we relate, in the *minimal level* case, the "algebraic" p-part of the adjoint L function of a Hilbert modular newform evaluated at 1 to the cardinality of the corresponding Selmer group.

We study the arithmetic of the Hilbert modular forms by studying their modulo p Galois representations and our main tool is the action of the inertia groups at p. In order to control this action, we compute the Hodge-Tate (resp. Fontaine-Laffaille) weights of the p-adic (resp. modulo p) étale cohomology of the Hilbert modular variety. The cohomological part of our paper builds upon the construction of the arithmetic toroidal compactifications of the universal Hilbert-Blumenthal abelian variety (and of its fiber products) over the arithmetic toroidal compactifications of the Hilbert modular variety of level $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$.

KEYWORDS : Hilbert modular forms; Congruences; Galois representations; Hodge-Tate weights; Integral cohomology of Hilbert modular varieties; Adjoint L function; Toroidal compactifications.

2000 Mathematics Subject Classification : 11F33, 11F41, 11F67, 11F80, 11G18, 14F05, 14F30, 14F40.