

Annexe F : Formulations des milieux élastique et poreux

1. L'approche élastique

La méthode des éléments finis est basée sur la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement d'un corps qui se déforme ou se déplace sous l'influence de contraintes externes. Cette déformation, ainsi que les contraintes qu'elle engendre à l'intérieur du matériau, vont permettre de calculer le mouvement résultant du corps étudié. Dans cette partie, nous allons nous placer dans le cas d'un modèle élastique. Notons tout de suite que les équations décrites au début de cette partie restent valables quelque soit le type de matériau. Une description plus complète est donnée dans divers ouvrages comme ceux de Zienkiewicz [Zienkiewicz et Taylor, 1994] ou de Touzot [Touzot, Daht, 1984].

Les matériaux élastiques sont les matériaux les plus simples et les plus utilisés, que ce soit dans l'industrie (par exemple dans la conception des avions) ou dans la recherche (par exemple dans la modélisation éléments finis des os). Sous une contrainte, un corps élastique se déforme. La particularité des matériaux élastiques fait que, lorsque cette contrainte cesse, le corps reprend sa forme initiale. Ceci est valable que la contrainte soit une compression ou une extension du corps étudié. La déformation d'une structure élastique est donc réversible. Un corps parfaitement élastique restitue totalement l'énergie fournie.

a. Déformation du corps élastique

Considérons un corps S , dans l'espace, et sa frontière L . Ce corps passe de sa position de repos à sa position déformée sous l'action de la déformation Φ (Figure F.1). En tous points X du corps, on peut représenter de manière équivalente la déformation par le champ de déplacements $U(X)$ qu'elle induit :

$$\Phi(X) = X + U(X) \quad (F.1)$$

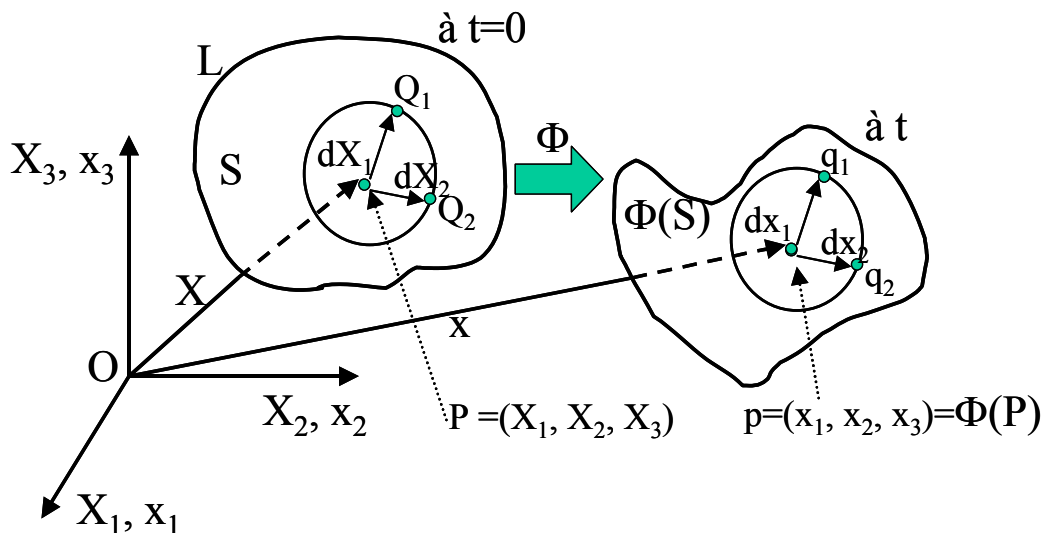


Figure F.1 – Application d'une déformation Φ à un corps S et à ses points P . (X_1, X_2, X_3) sont les coordonnées Lagrangiennes (avant la déformation) et (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées Eulériennes (après la déformation).

Φ est la transformation qui fait passer des variables Lagrangiennes, c'est-à-dire pour lesquelles le solide est dans au repos (non déformé), aux coordonnées Eulériennes, pour lesquelles le solide est déformé. On a donc :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Phi(X) = \begin{bmatrix} \Phi(X_1) \\ \Phi(X_2) \\ \Phi(X_3) \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

Afin de quantifier la déformation d'un élément de volume du corps, on définit un tenseur gradient de déformation F , qui se traduit pour chaque point X de S par une matrice 3x3 qui dépend du gradient de la déformée $\nabla\Phi$:

$$F = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial X} \quad (\text{F.3})$$

Pour tout vecteur \vec{X} , on a :

$$F(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial X_1}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_1}{\partial X_2}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_1}{\partial X_3}(\vec{X}) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial X_1}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial X_2}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_2}{\partial X_3}(\vec{X}) \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial X_1}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial X_2}(\vec{X}) & \frac{\partial\Phi_3}{\partial X_3}(\vec{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

En notant dX_1 et dX_2 (respectivement dx_1 et dx_2) les vecteurs élémentaires (Figure F.1) définissant un volume élémentaire autour de P (respectivement p), on peut alors écrire :

$$dx_1 = F dX_1 \text{ et } dx_2 = F dX_2 \quad (\text{F.5})$$

F apparaît donc comme un tenseur mesurant la déformation entre les vecteurs dX_1 et dx_1 (respectivement dX_2 et dx_2).

Comme autre mesure de la déformation (on parle de «strain» en anglais, par opposition au «deformation gradient tensor F »), la différence entre les produits scalaires des deux vecteurs élémentaires dX_1 et dX_2 (transformés en dx_1 et dx_2) est proposée. Cette mesure tient compte à la fois du changement de longueur (étirement ou raccourcissement) et du changement d'angle entre les vecteurs. En posant :

$$C = \nabla\Phi^T \nabla\Phi \quad (\text{F.6})$$

on a :

$$dx_1 \cdot dx_2 = dX_1 \cdot C dX_2 \quad (\text{F.7})$$

où C est le tenseur de dilatation de Cauchy-Green.

De plus, en posant :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - I)$$

où I est la matrice identité, on a :

$$\frac{1}{2}(dx_1 \cdot dx_2 - dX_1 \cdot dX_2) = dX_1 \cdot \varepsilon dX_2 \quad (\text{F.8})$$

où ε est le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

Si la transformation Φ est rigide (i.e. une translation et une rotation), on a alors :

$$C = I \text{ et } \varepsilon = 0.$$

Le tenseur de Green-Lagrange ε apparaît donc comme une bonne mesure de la déformation propre du corps élastique (sans prise en compte des translations et des rotations).

En notant \vec{U} le champ de déplacement, la déformation du vecteur \vec{X} s'écrit alors :

$$\bar{\Phi}(\bar{X}) = \bar{X} + \bar{U}(\bar{X}) \quad (\text{F.9})$$

et on peut alors écrire :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \nabla \mathbf{U}) \quad (\text{F.10})$$

Dans le cas où la déformation est faible (inférieure à 10 %), le second ordre du tenseur de déformation E peut être négligé. On parle alors d'élasticité en «petites déformations» (ou élasticité linéaire), par opposition aux «grandes déformations» (équation (F.10)). Les petites déformations ne considèrent alors que la partie linéaire du tenseur de déformation :

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}^T + \nabla \mathbf{U}) \quad (\text{F.11})$$

b. Contraintes à l'intérieur du corps élastique

La déformation du domaine du corps S peut résulter de l'application de deux types de forces :

- Les forces volumiques, \mathbf{f} , appliquées sur une partie ou sur la totalité du domaine. L'exemple le plus simple est la force de gravité.
- Les forces surfaciques, \mathbf{g} , appliquées sur la partie libre L_1 de la frontière du domaine, le reste L_0 de la frontière étant contraint en déplacement. Ce sont par exemple des forces de pression ou de contact.

Le théorème de Cauchy fait l'hypothèse suivante : il existe un tenseur \mathbf{T} tel que, en tout élément de surface dA , de normale \bar{n} :

$$\mathbf{T} \cdot \bar{n} \, dA = \bar{\mathbf{g}} \, dA \quad (\text{F.12})$$

De plus, selon la loi fondamentale de la dynamique :

$$\sum \bar{\mathbf{F}} = \rho \cdot \ddot{\mathbf{U}} \quad (\text{F.13})$$

où ρ est la densité de masse. L'équation (F.13) conduit à l'équation de l'équilibre local du milieu :

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{f} + \text{div} \mathbf{T} \quad (\text{F.14})$$

où ρ est la densité de masse et \mathbf{f} est la densité de force volumique. $\text{div} \mathbf{T}$ correspond aux forces volumiques internes résultant des forces surfaciques, par application du théorème de Gauss :

Selon le théorème de Gauss :

$$\iint_L \mathbf{T} \bar{n} \, dA = \iiint_{x_1, x_2, x_3} \text{div} \mathbf{T} \, dS = \left[\begin{array}{c} \iint g_1 \, dA \\ \iint g_2 \, dA \\ \iint g_3 \, dA \end{array} \right] \quad (\text{F.15})$$

$$\text{avec } \text{div}T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (\text{F.16})$$

Comme T est exprimé dans un référentiel Eulérien, on lui préfère parfois le second tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff Σ introduit dans la plupart des ouvrages sur la méthode des éléments finis (par exemple [Zienkiewicz et Taylor, 1994]).

c. Loi de comportement du milieu

Depuis le début de cette partie, nous avons vu, d'une part, comment quantifier une déformation (équations (F.2), (F.4) et (F.5)) et, d'autre part, comment le tenseur de contrainte gouverne les équations du mouvement (équation (F.7)). Il ne reste donc plus qu'à décrire la relation liant les contraintes et les déformations pour établir le comportement biomécanique du matériau étudié. Cette relation est la loi de comportement du matériau traduite par l'équation constitutive du milieu. Dans le cas de l'élasticité linéaire, on suppose qu'il existe un tenseur d'élasticité C tel que :

$$[T] = [C][\varepsilon] \quad (\text{F.17})$$

C est un tenseur caractérisé par 81 coefficients et qui a été représenté par la fonction h dans le Chapitre 6.

Afin de rendre plus facile la résolution des problèmes basés sur la mécanique des milieux continus, il est intéressant de réduire le nombre d'inconnues de ce tenseur. Par exemple, on peut supposer que $[C]$ est symétrique (lorsque T et ε le sont), on passe alors à 36 coefficients indépendants.

Dans le cas d'un matériau isotrope et linéaire (propriétés d'élasticité identiques dans toutes les directions), on a uniquement deux coefficients indépendants (loi de Hooke). Les propriétés d'élasticité sont donc totalement définies à l'aide de ce couple de coefficients : soit les coefficients de Lamé, soit le module de Young et le coefficient de Poisson. Ces couples sont reliés entre eux par les formules :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{F.18})$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et E est le module de Young et ν , le coefficient de Poisson.

Le module de Young, E , caractérise la raideur du matériau, tandis que le coefficient de Poisson, ν , représente sa déformation transverse en fonction de la déformation appliquée (qu'on appelle aussi compressibilité) et qui vaut entre -1 et $0,5$ [Germain et Muller, 1995]. Un matériau avec un coefficient de Poisson proche de $0,5$ est quasi-incompressible.

Dans le cas général de l'élasticité non linéaire, on ne sait pas trouver la relation entre déformation et contrainte. On peut alors faire l'hypothèse de l'hyperélasticité. Un matériau est hyperélastique s'il existe une fonction d'énergie potentielle telle que le tenseur de contraintes dérive de cette énergie :

$$\Sigma = \nabla \Phi^{-1} T = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \quad (\text{F.19})$$

On définira alors l'énergie totale de déformation sur tout le domaine S à partir de l'énergie potentielle :

$$E_p = \int_s W dX \quad (\text{F.20})$$

Pour les matériaux isotropes et homogènes, la fonction d'énergie potentielle W est complètement caractérisée par les invariants principaux du tenseur de déformation de Cauchy-Green C . Ces invariants, l_i , sont les coefficients du polynôme caractéristique $\det(C - \lambda I)$ et s'écrivent en fonction de C et du tenseur de déformation de Green ε :

$$\begin{cases} l_1 = \text{tr} C = 3 + 2 \text{tr} \varepsilon \\ l_2 = \frac{1}{2} ((\text{tr} C)^2 - \text{tr}(C^2)) = 3 + 4 \text{tr} \varepsilon + 2((\text{tr} \varepsilon)^2 - \text{tr}(\varepsilon^2)) \\ l_3 = |C| = |2\varepsilon + I| \end{cases} \quad (\text{F.21})$$

A l'aide de ces invariants, on peut exprimer la fonction d'énergie potentielle pour un matériau hyperélastique quelconque comme une somme infinie de la forme :

$$W = \sum_{r,s,t=0}^{\infty} L_{rst} (l_1 - 3)^r (l_2 - 3)^s (l_3 - 1)^t \quad \text{avec } L_{000} = 0 \quad (\text{F.22})$$

Il est intéressant de noter que le troisième invariant mesure la variation locale du volume. Pour des matériaux incompressibles, ce terme vaut 1. La donnée de l'ensemble des constantes L_{rst} permet de définir un modèle de comportement et donc un modèle de matériau hyperélastique.

Il existe plusieurs modèles de matériaux hyperélastiques, comme par exemple : celui de Saint Venant-Kirchhoff (Néo-Hooke) ou celui de Mooney-Rivlin.

En utilisant les expressions des invariants principaux en fonction de E (équation (F.21)), on obtient la formulation de l'énergie potentielle élastique du matériau de Saint Venant-Kirchhoff :

$$W = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \varepsilon)^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon)^2 \quad (\text{F.23})$$

L'équation (F.23) est l'équation de Néo-Hooke.

Il est à noter que ce matériau est physiquement linéaire puisque la relation entre contraintes et déformations est linéaire :

$$\Sigma = \frac{\partial W}{\partial E} = \lambda (\text{tr} \varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (\text{F.24})$$

Par contre, la relation non-linéaire entre ε et ∇U conduit à une non linéarité géométrique (élasticité en grandes déformations).

Les équations (F.23) et (F.24) permettent de caractériser le comportement biomécanique d'un matériau élastique obéissant au modèle de Kirchhoff.

En remplaçant le tenseur ε par sa version linéarisée (équation (F.11)) dans l'équation de l'énergie potentielle élastique (équation (F.23)), on obtient la loi de Hooke :

$$W^l = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \varepsilon_i)^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon_i)^2 \quad (\text{F.26})$$

Remarques :

- en utilisant les composantes de déformation introduites dans l'équation (F.11) et les définitions des opérateurs gradient, divergence et rotationnel, on peut exprimer l'énergie W^1 en fonction du champ de déplacements par :

$$W^1 = \frac{\lambda}{2} (\text{div} \mathbf{U})^2 + \mu \|\nabla \mathbf{U}\|^2 - \frac{\mu}{2} \|\text{rot} \mathbf{U}\|^2 \quad (\text{F.27})$$

- Les propriétés des opérateurs présents dans l'équation (F.27) permettent d'obtenir l'équation aux dérivées partielles (EDP) gouvernant les déformations linéaires élastiques dans le cas statique :

$$\mu \Delta \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla (\text{div} \mathbf{U}) + \mathbf{f} = 0 \quad (\text{F.28})$$

où \mathbf{f} est le champ de forces volumiques externes appliquées au domaine. L'équation (F.28) est l'équation de comportement pour les matériaux élastiques en statique, aussi appelée équation de Navier.

Les solutions analytiques des problèmes d'élasticité linéaire sont difficiles à obtenir, à part dans des cas très particulier. C'est pour cela que la méthode des éléments finis (présentée dans le Chapitre 3) est souvent utilisée afin de discrétiser la structure étudiée.

Quelque soit le type de matériau, la théorie de la mécanique des milieux continus ne change pas. Seules les inconnues et l'équation du comportement diffèrent.

2. L'approche biphasique des milieux poroélastiques

La première approche décrivant les milieux poreux à été faite par pour les milieux géologiques (les sols en particulier). La déformation d'un milieu poreux saturé de fluide a d'abord été présentée par Terzaghi [Terzaghi *et al.*, 1948] pour un problème à une dimension et étendue à trois dimensions par Biot [Biot, 1941]. Elle consiste à moyennner les équations du comportement des deux matériaux composant le milieu poreux : celle pour le solide et celle pour le fluide. Cette formulation décrit les deux milieux séparément avant de moyennner leurs équations de comportement (voir notamment [Quintard *et al.*, 2001] ou [Almeida *et al.*, 1997]). Dans ce cadre d'hypothèses, la phase fluide est considérée comme un milieu homogène et uniforme.

Dans cette formulation, la modélisation des milieux poroélastiques est basée sur la mécanique des milieux continus et en particulier sur la théorie des mélanges, c'est-à-dire les matériaux ayant plusieurs constituants. Physiquement, un mélange est une superposition de milieux continus qui occupent le même domaine S dans un espace à trois dimensions à un temps t donné. Chaque composant du mélange, à l'instant t , est dans une configuration B^α donnée (pour le $\alpha^{\text{ième}}$ composant du milieu) dont le domaine est S^α et la frontière est L^α . Chaque constituant suit un mouvement indépendant et a une configuration de référence B_0^α arbitraire. Entre chaque composant, il peut y avoir des transferts que ce soit au niveau de la masse, des mouvements, des moments angulaires et de l'énergie.

Un matériau poroélastique est, en l'occurrence, un mélange entre deux phases : un matériau élastique et un matériau fluide, c'est donc un milieu biphasique. Dans le cas des matériaux poroélastiques, le milieu biphasique est un mélange composé d'une matrice solide poreuse saturée avec un fluide. Dans certains cas, et en particulier pour les tissus mous biologiques, les constituants de ce matériau sont supposés immiscibles (i.e. ils ne peuvent pas

être mélangés de façon homogène et stable, comme c'est le cas pour l'eau et l'huile) ce qui empêche les échanges de volume et de masse, intrinsèquement incompressibles et chimiquement inactifs. De plus, on suppose classiquement qu'un matériau poroélastique est isotherme et a une température constante au cours du temps, pour éviter les échanges de température entre phases et simplifier l'équilibre énergétique. L'équilibre des masses pour les constituants du matériau peut alors être exprimée par :

$$\phi^s + \phi^f = 1 \quad (\text{F.29})$$

$$\text{div}(\phi^s v^s + \phi^f v^f) = 0 \quad (\text{F.30})$$

Les paramètres ϕ^s et ϕ^f sont les fractions de volume des composants solide et fluide, respectivement appelées solidité et porosité du mélange. Par ailleurs, v^s et v^f sont les vitesses des phases solide et fluide. L'équation (F.29) indique que le mélange est saturé : le fluide remplit tous les pores du solide. L'équation (F.30), elle, est l'équation de continuité pour un milieu biphasique [Holmes, 1986]. Dans la mesure où la densité doit rester constante pour la phase solide, puisqu'elle est supposée incompressible, on a :

$$\phi^s = \frac{\phi_0^s}{\det J(D^s)} \text{ et } \phi^f = 1 - \frac{\phi_0^s}{\det J(D^s)} \text{ avec } D^s = \nabla_{X^s} x = \frac{\partial x}{\partial X^s} \quad (\text{F.31})$$

où l'indice 0 concerne la configuration de référence, $\det J(D^s)$ représente le déterminant du jacobien de la déformation et D^s est le gradient de déformation qui montre que les modifications dans chaque fraction de volume sont complètement déterminées par la déformation de la phase solide. Concrètement, $\det J(D^s)$ représente la variation de la densité de la phase solide.

Du fait de la relativement faible perméabilité des tissus mous biologiques hydratés, qui sont en général saturés de fluide, les termes d'inertie et les forces externes sont souvent négligées par rapport aux contributions des mouvements des tissus (ou les forces de frottements diffus) pour les fréquences et les taux de déformation qui apparaissent physiologiquement [Bowen, 1980]. Pour cette raison, les équations du mouvement en régime quasi statique deviennent :

$$\text{div} C^s + \pi^s = 0 \text{ et } \text{div} C^f + \pi^f = 0 \quad (\text{F.32})$$

où, pour les phases solide ou fluide, C est le tenseur de déformation de Cauchy et π est l'échange de mouvement dans le milieu, entre chaque phase. Concrètement, π est la quantité de mouvement transmise à l'autre phase. A partir de l'équation du mouvement pour les mélanges et de l'inégalité entropique [Bowen, 1980], on obtient :

$$\pi^s = -\pi^f = p \nabla \phi^s + \zeta (v^f - v^s) \quad (\text{F.33})$$

où ζ est un coefficient représentant les frottements diffus par le biais d'un tenseur du second ordre qui mesure la friction du fluide à travers la matrice solide. Ce sont ces frottements qui donnent aux tissus leurs propriétés viscoélastiques. En se basant sur cette équation, on se rend compte qu'il peut y avoir un transfert de mouvement d'une phase à l'autre, seulement si les phases ont une vitesse différente l'une de l'autre et/ou si la phase solide subit un mouvement.

Les équations du comportement peuvent alors être écrites sous la forme :

$$\sigma^s = -\phi^s p T_{Id} + \sigma_E^s \quad \text{avec } \sigma_E^s = 2\rho^s D^s \frac{\partial \hat{\Psi}^s}{\partial C^s} D^{s^T} \quad (\text{F.34})$$

$$\text{et } \sigma^f = -\phi^f p T_{Id} \quad (\text{F.35})$$

où $\hat{\Psi}^s$ est la fonction d'énergie libre de Helmholtz pour la phase solide, C^s est le tenseur de déformation de Cauchy-Green et T_{Id} est le tenseur identité.

Le tenseur de Cauchy de contrainte globale du milieu poroélastique est donc donné en ajoutant les contraintes pour les phases solide et fluide :

$$\sigma^{tot} = \sigma^s + \sigma^f = -pT_{Id} + \sigma_E^s \quad (F.36)$$

Il est intéressant de noter que ce tenseur de contrainte de Cauchy a deux contributions : (1) la contrainte de Cauchy élastique σ_E^s (aussi appelée contrainte effective) qui est complètement déterminée par la déformation et (2) une contrainte hydrostatique qui dépend de la pression, p . La pression, aussi appelée pression poreuse, contribue aux contraintes des phases solide et fluide selon les proportions de chacune (dépendantes de σ^s et σ^f) et est déterminée à l'équilibre. Pour la phase solide, la pression joue un rôle dans le calcul de la contrainte solide. Néanmoins, cette influence est relativement petite par rapport à la contrainte élastique de la plupart des matériaux, ce qui est le cas pour les tissus mous biologiques.

Dans la formulation éléments finis, le second tenseur de Piola-Kirchhoff est très utilisé :

$$\Sigma_E^s = \det J(D^s) D^s^{-1} \sigma_E^s D^s \quad (F.37)$$

La valeur de σ_E^s , issue de l'équation (F.36), introduite dans (F.37) conduit à :

$$\Sigma_E^s = 2\rho_0^s \frac{\partial \hat{\Psi}^s}{\partial C^s} \quad \text{et} \quad \sigma_E^s = \frac{1}{\det J(D^s)} D^s S_E^s D^s \quad (F.38)$$

En introduisant les équations (F.35) et (F.33) dans l'équation du mouvement linéaire pour la phase fluide (équation (F.32)), et en notant, à partir de l'équation (F.29), que $\nabla \phi^f = -\nabla \phi^s$, on obtient :

$$\nabla p = -\frac{1}{\phi^f} \zeta (v^f - v^s) \quad (F.39)$$

Si ζ est inversible, on peut alors écrire :

$$K \nabla p = -\phi^f (v^f - v^s) \quad (F.40)$$

où $K = \phi^{f^2} \zeta^{-1}$ est le tenseur de perméabilité intrinsèque.

L'équation (F.40) est la loi de Darcy. Une version légèrement différente de la perméabilité est donnée dans Biot [Biot, 1972]. Cette loi gouverne le flux du fluide à l'intérieur de la matrice solide et montre bien que ce flux est dépendant du gradient de pression. Le cas où la matrice solide est composée par un matériau hyperélastique est développé dans Almeida [Almeida *et al.*, 1997]. Dans ce même article, différentes formulations éléments finis sont présentées pour les milieux biphasiques.