Thèse de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Charles Cochet

pour obtenir le grade de

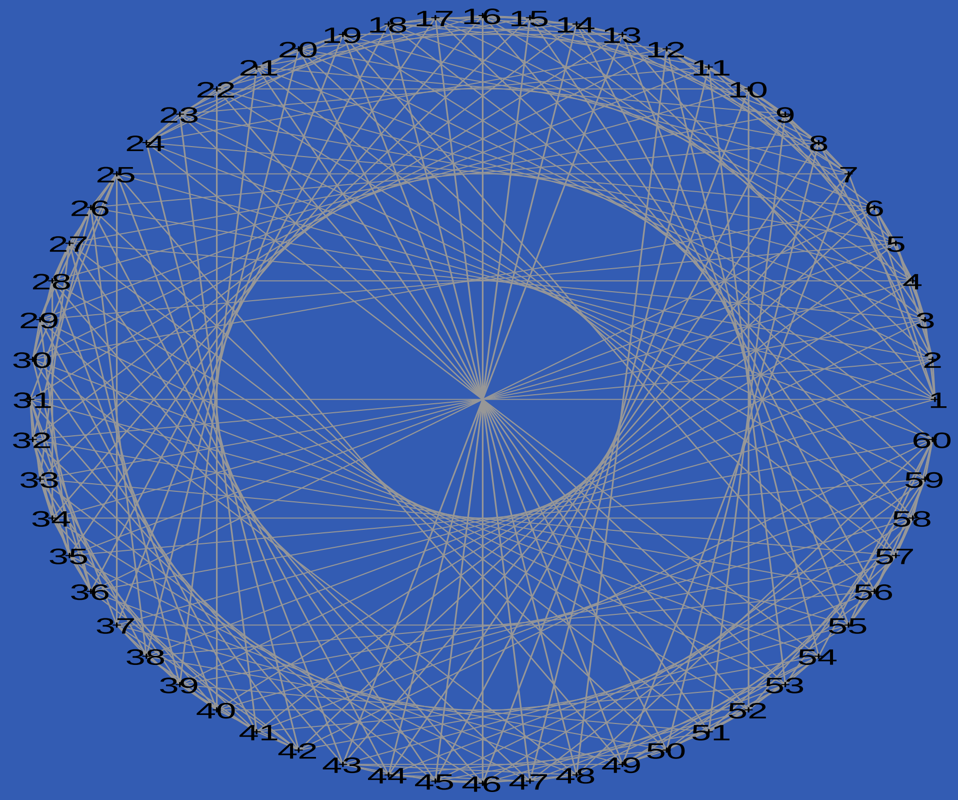
Docteur de l'Université Paris 7

Réduction des graphes de Goresky-Kottwitz-MacPherson ; nombres de Kostka et coefficients de Littlewood-Richardson pour A_r

vendredi 19 décembre 2003

Première partie :

Réduction des graphes de GKM



Plan de la première partie

- Le graphe de GKM (GZ).
- Réduction d'un graphe abstrait (GZ).
- Quantification et réduction commutent (GZ).
- Description des algorithmes (C).
- Les programmes (C).

Variété de GKM

G : tore compact n-dimensionnel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

$\mathbb{Z}_G = \ker(\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G)$ et $\mathbb{Z}_G^* \subset \mathfrak{g}^*$.

M : variété compacte connexe de dimension $2d$ munie de l'action de G telle que

- M^G est fini.
- Structure presque complexe G-invariante.
- Pour tout $p \in M^G$, les poids $\alpha_{p,i} \in \mathbb{Z}_G^*$ sont deux à deux linéairement indépendants.

Graphe de GKM : (Γ, α)

- Sommets : points fixes.

Graphe de GKM : (Γ, α)

- Sommets : points fixes.
- Pour tout p, pour tout i. Soient $\mathfrak{h}_{p,i} = \ker(\alpha_{p,i})$ et $H_{p,i}$.

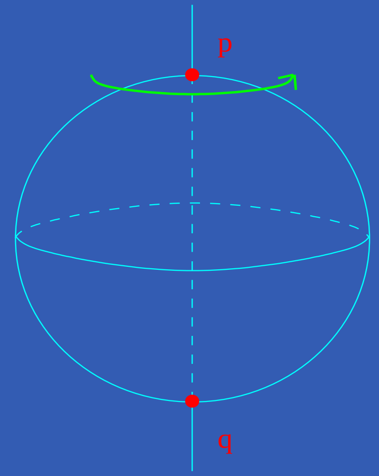
Graphe de GKM : (Γ, α)

- Sommets : points fixes.
- Pour tout p, pour tout i. Soient $\mathfrak{h}_{p,i} = \ker(\alpha_{p,i})$ et $H_{p,i}$.

$$M^{H_{p,i}} \supset E^{p,i} \ni p$$

isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$,

action de G sur $E^{p,i}$: S^1 sur S^2.



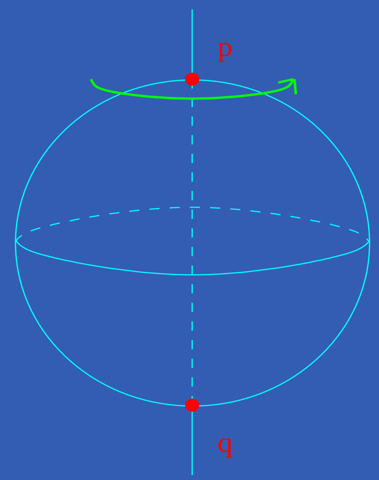
Graphe de GKM : (Γ, α)

- Sommets : points fixes.
- Pour tout p, pour tout i. Soient $\mathfrak{h}_{p,i} = \ker(\alpha_{p,i})$ et $H_{p,i}$.

$$M^{H_{p,i}} \supset E^{p,i} \ni p$$

isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$,

action de G sur $E^{p,i}$: S^1 sur S^2.



- Second point fixe $q = q(p, i)$.
  Arête $e = [p, q]$ avec $\alpha_{p,e} = \alpha_{p,q} = \alpha_{p,i}$.

Exemple : variété des drapeaux

$M := GL(3,\mathbb{C})/B$ soumise à l'action de $(S^1)^3$.

Points fixes :

$$\mathrm{Id}\,B,\ s_1B,\ s_2B,\ s_1s_2B,\ s_2s_1B,\ w_0B = s_1s_2s_1B = s_2s_1s_2B$$

où

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$u(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple : variété des drapeaux

$$\mathrm{Id}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ z_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & -\frac{\overline{z_1}}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0\\ \frac{z_1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}B$$

$$\xrightarrow{z_1\to\infty}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}B=s_1B$$ donc $\mathrm{Id}\overset{1}{\text{———}}s_1$.

Exemple : variété des drapeaux

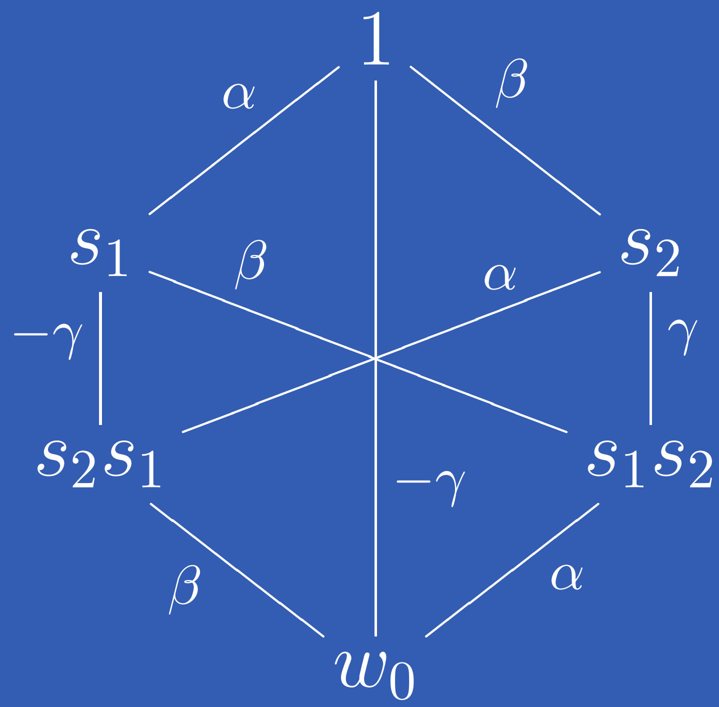
$$\mathrm{Id}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\ z_1&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & -\frac{\overline{z_1}}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0\\ \frac{z_1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}B$$

$$\xrightarrow{z_1\to\infty}\begin{pmatrix}0&-1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}B=s_1B$$ donc $\mathrm{Id}\overset{1}{\text{———}}s_1$.

$$\begin{pmatrix}t_1&0&0\\ 0&t_2&0\\ 0&0&t_3\end{pmatrix}\cdot\mathrm{Id}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\ z_1&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{t_2z_1}{t_1}&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}B$$

donc $\alpha_{\mathrm{Id},s_1}=\theta_2-\theta_1\in\mathbb{Z}_G^*$.

Exemple : variété des drapeaux



$\alpha = \theta_2 - \theta_1$, $\beta = \theta_3 - \theta_2$, $\gamma = \alpha + \beta$ (racines positives).

Propriétés fondamentales (et V-graphe de GKM)

1. $\alpha_{p,q} = -\alpha_{q,p}$.

2. $(p_i)_{1\leq i\leq d} = V(p)$. Alors les α_{p,p_i} sont deux à deux linéairement indépendants (2-indépendance).

3. (p_i)–p–q–(q_i).
   On peut réordonner les q_i de sorte à avoir

$$\alpha_{p,p_i} = \qquad \alpha_{q,q_i} + c_{p,q,i}\alpha_{p,q}$$

   pour des constantes $c_{p,q,i}$.

Propriétés fondamentales (et V-graphe de GKM)

1. $b_{p,q}\alpha_{p,q} = -\alpha_{q,p}$.

2. $(p_i)_{1\leq i\leq d} = V(p)$. Alors les α_{p,p_i} sont deux à deux linéairement indépendants (2-indépendance).

3. (p_i)–p–q–(q_i).
   On peut réordonner les q_i de sorte à avoir

$$\alpha_{p,p_i} = d_{p,q,i}\alpha_{q,q_i} + c_{p,q,i}\alpha_{p,q}$$

   pour des constantes $c_{p,q,i}$ et $d_{p,q,i}$.

V-graphe de GKM.

Cohomologie et K-théorie d'un V-graphe de GKM

$$H(\Gamma,\alpha) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^{2k}(\Gamma,\alpha)$$

où

$$H^{2k}(\Gamma,\alpha) = \left\{ f : S_\Gamma \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}^*)\,;\; f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q} \right\}.$$

Cohomologie et K-théorie d'un V-graphe de GKM

$$H(\Gamma,\alpha) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^{2k}(\Gamma,\alpha)$$

où

$$H^{2k}(\Gamma,\alpha) = \{ f : S_\Gamma \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}^*) \; ; \; f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q} \}.$$

$$R(G) = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j \, e^{2i\pi\lambda_j} \; ; \; m_j \in \mathbb{Z}, \; \lambda_j \in \mathbb{Z}^*_G \right\}.$$

$G_e = \ker(e^{2i\pi\alpha_{p,e}})$, où $e = [p,q]$. Soit $r_e : R(G) \longrightarrow R(G_e)$.

$$K(\Gamma,\alpha) = \{ \Theta : S_\Gamma \longrightarrow R(G) \; ; \; r_e(\Theta(p)) = r_e(\Theta(q)) \}.$$

Cohomologie et K-théorie d'un V-graphe de GKM

$$H(\Gamma,\alpha) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H^{2k}(\Gamma,\alpha)$$

où

$$H^{2k}(\Gamma,\alpha) = \{f : S_\Gamma \longrightarrow S^k(\mathfrak{g}^*)\,;\; f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q}\}.$$

$$R(G) = \left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} m_j\, e^{2i\pi\lambda_j}\;;\; m_j \in \mathbb{Z},\; \lambda_j \in \mathbb{Z}_G^*\right\}.$$

$G_e = \ker(e^{2i\pi\alpha_{p,e}})$, où $e = [p,q]$. Soit $r_e : R(G) \longrightarrow R(G_e)$.

$$K(\Gamma,\alpha) = \{\Theta : S_\Gamma \longrightarrow R(G)\,;\, r_e(\Theta(p)) = r_e(\Theta(q))\}.$$

Alors $H(\Gamma,\alpha) \simeq H_G^*(M)$ et $K(\Gamma,\alpha)\otimes\mathbb{C} \simeq K_G^*(M)\otimes\mathbb{C}$.

Réduction d'un V-graphe selon H : hypothèses

H engendré par ξ.
On suppose que $\alpha_{p,q}(\xi) \neq 0$.

o_ξ : $\qquad p < q \Longleftrightarrow \alpha_{p,q}(\xi) > 0$.

On prend (Γ, α) tel que :

Réduction d'un V-graphe selon H : hypothèses

H engendré par ξ.
On suppose que $\alpha_{p,q}(\xi) \neq 0$.

o_ξ : $\qquad p < q \Longleftrightarrow \alpha_{p,q}(\xi) > 0$.

On prend (Γ, α) tel que :

- 3-indépendant.
- Orientation o_ξ sans cycle.
- $f \in H^2(\Gamma, \alpha)$ telle que $f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q}$ avec $\lambda_{p,q} > 0$ (symplectique).

Réduction d'un V-graphe de GKM : algorithme

On pose $\phi(p) := \langle f(p), \xi \rangle$. Soit c une valeur régulière de ϕ.

- Sommets de (Γ^c, α^c) : $[p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$.

Réduction d'un V-graphe de GKM : algorithme

On pose $\phi(p) := \langle f(p), \xi \rangle$. Soit c une valeur régulière de ϕ.

- Sommets de (Γ^c, α^c) : $[p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$.
- Pour tout tel $[p, q]$, pour tout voisin p_i de p.
  Graphe engendré par $\alpha_{p,q}$ et α_{p,p_i} : divalent.

Réduction d'un V-graphe de GKM : algorithme

On pose $\phi(p) := \langle f(p), \xi \rangle$. Soit c une valeur régulière de ϕ.

- Sommets de (Γ^c, α^c) : $[p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$.
- Pour tout tel $[p, q]$, pour tout voisin p_i de p.
  Graphe engendré par $\alpha_{p,q}$ et α_{p,p_i} : divalent.
- Unique autre arête $[p', q']$ coupée par c.

Réduction d'un V-graphe de GKM : algorithme

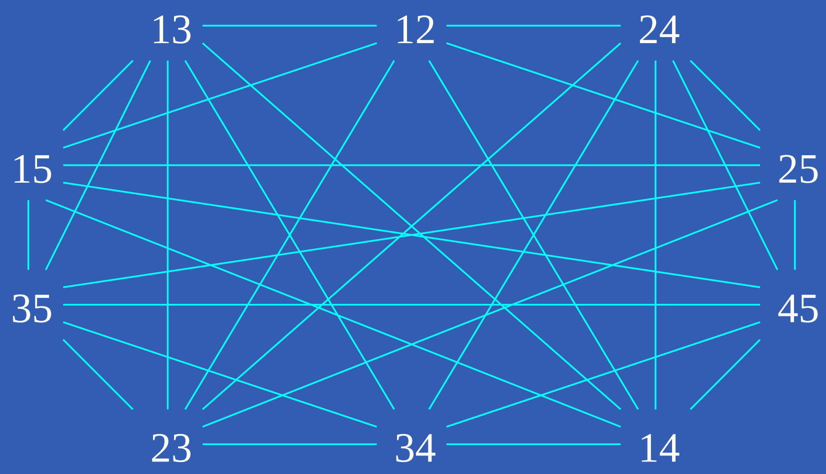
On pose $\phi(p) := \langle f(p), \xi\rangle$. Soit c une valeur régulière de ϕ.

- Sommets de (Γ^c, α^c) : $[p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$.
- Pour tout tel $[p, q]$, pour tout voisin p_i de p.
  Graphe engendré par $\alpha_{p,q}$ et α_{p,p_i} : divalent.
- Unique autre arête $[p', q']$ coupée par c.

$\Longrightarrow$ réduction (Γ^c, α^c) : V-graphe de GKM.

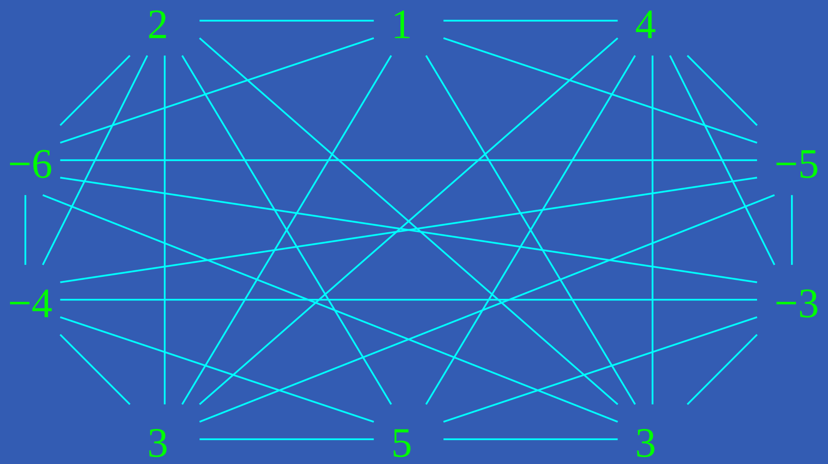
$$\Gamma(M_c) = \Gamma_c(M).$$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0, 1, 2, 3, -6)$, $c = 7/2$



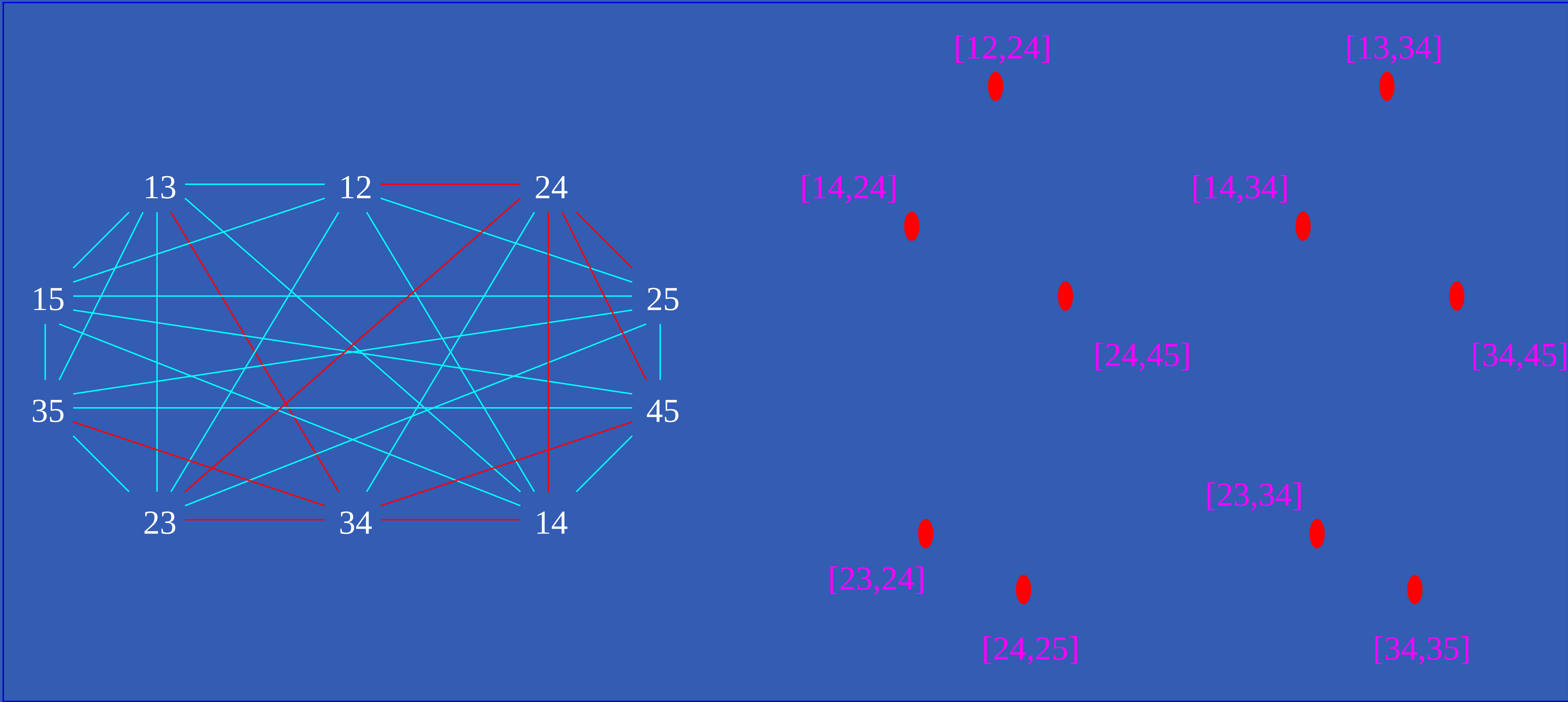
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



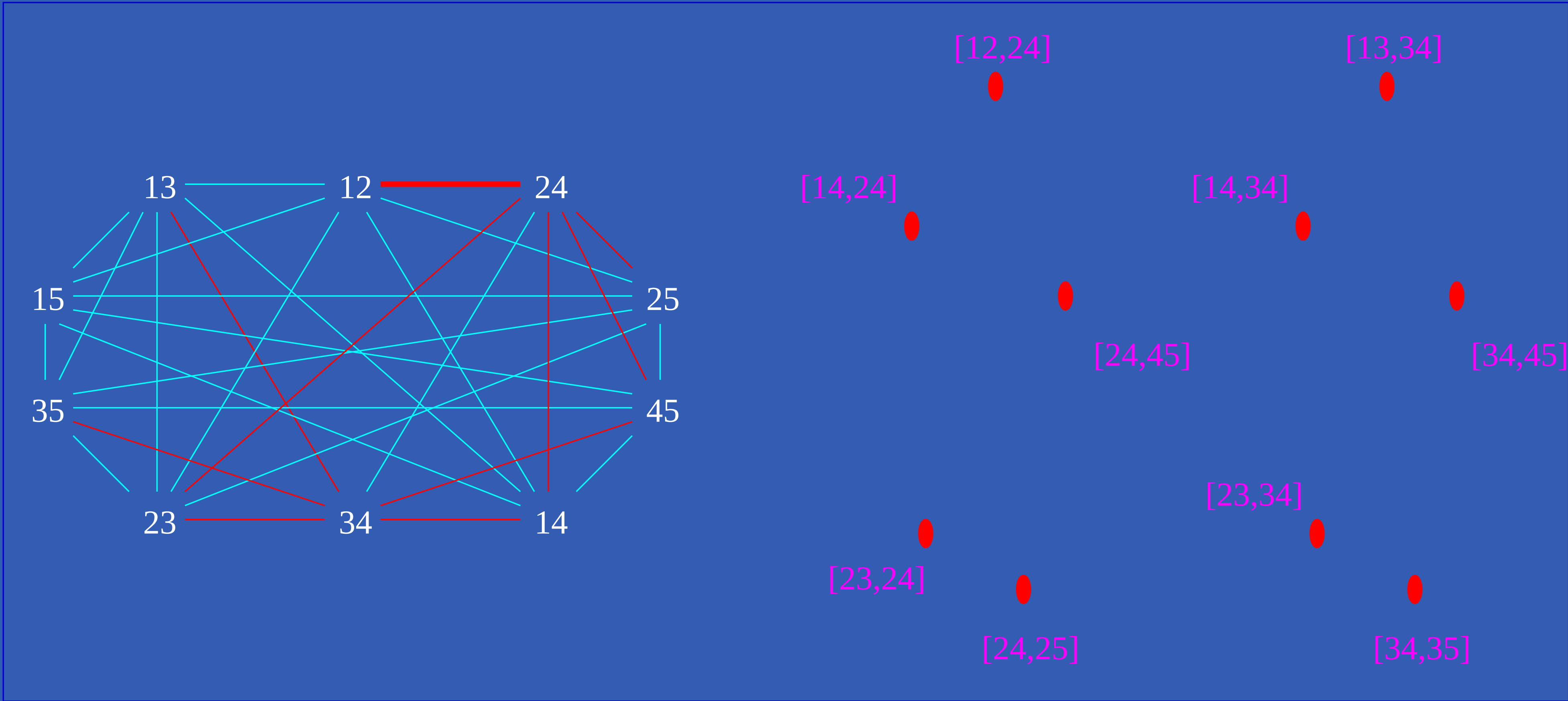
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



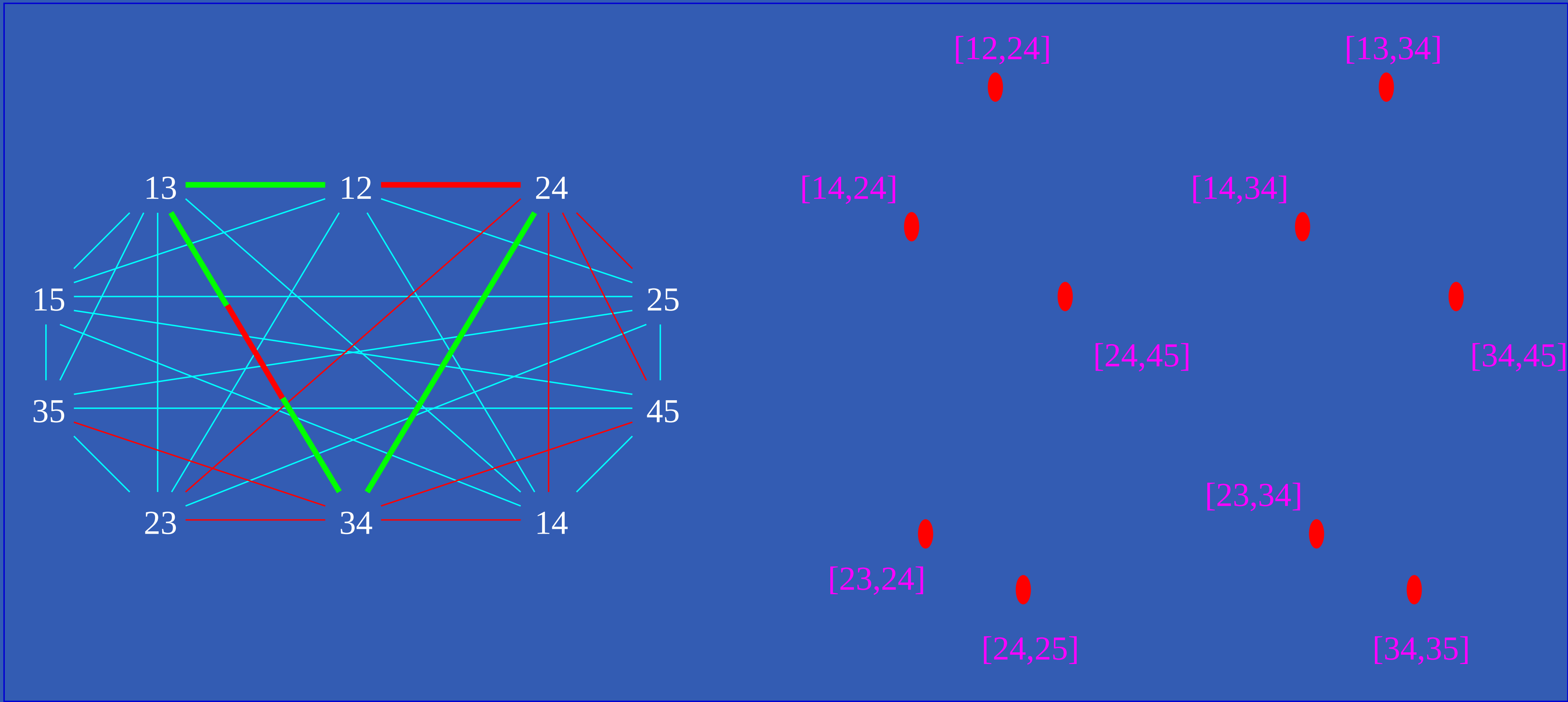
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



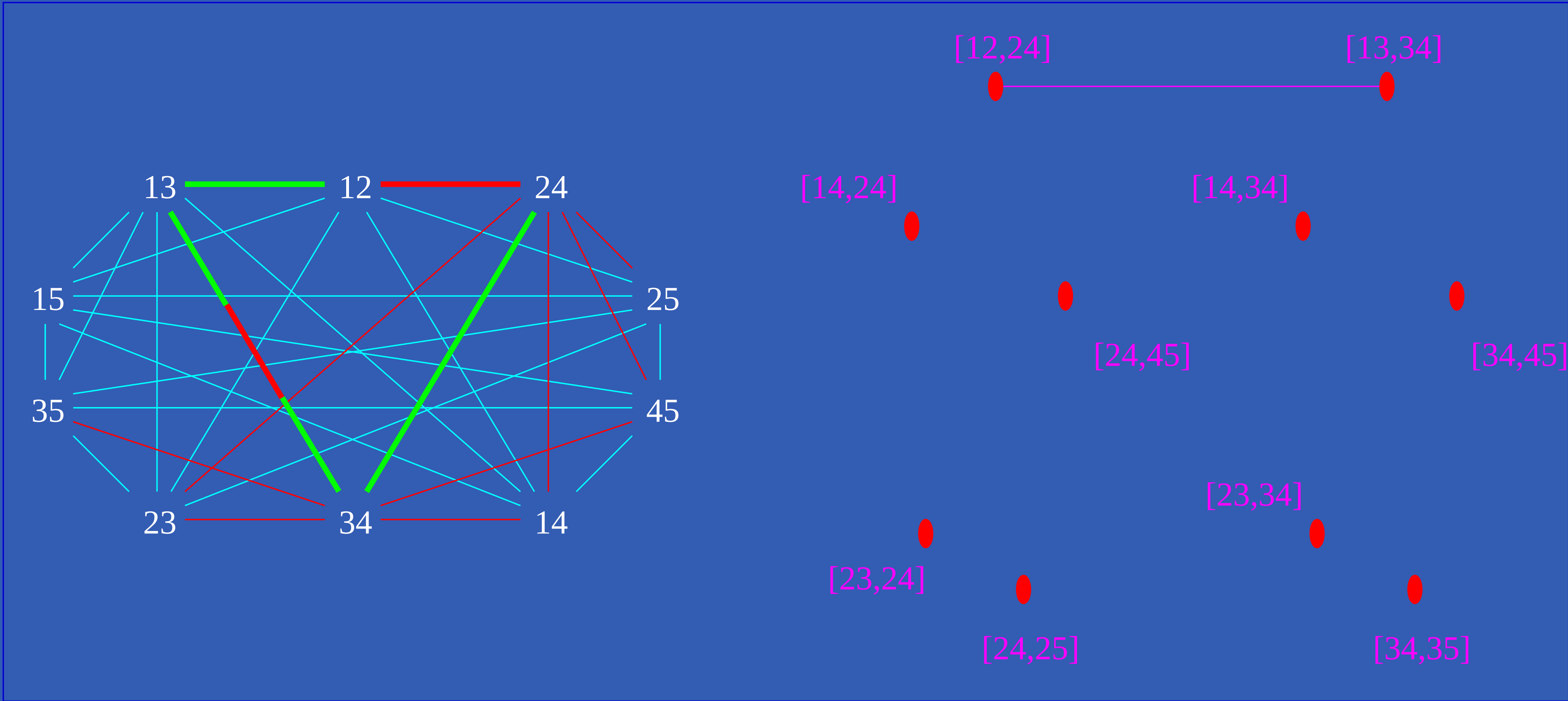
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



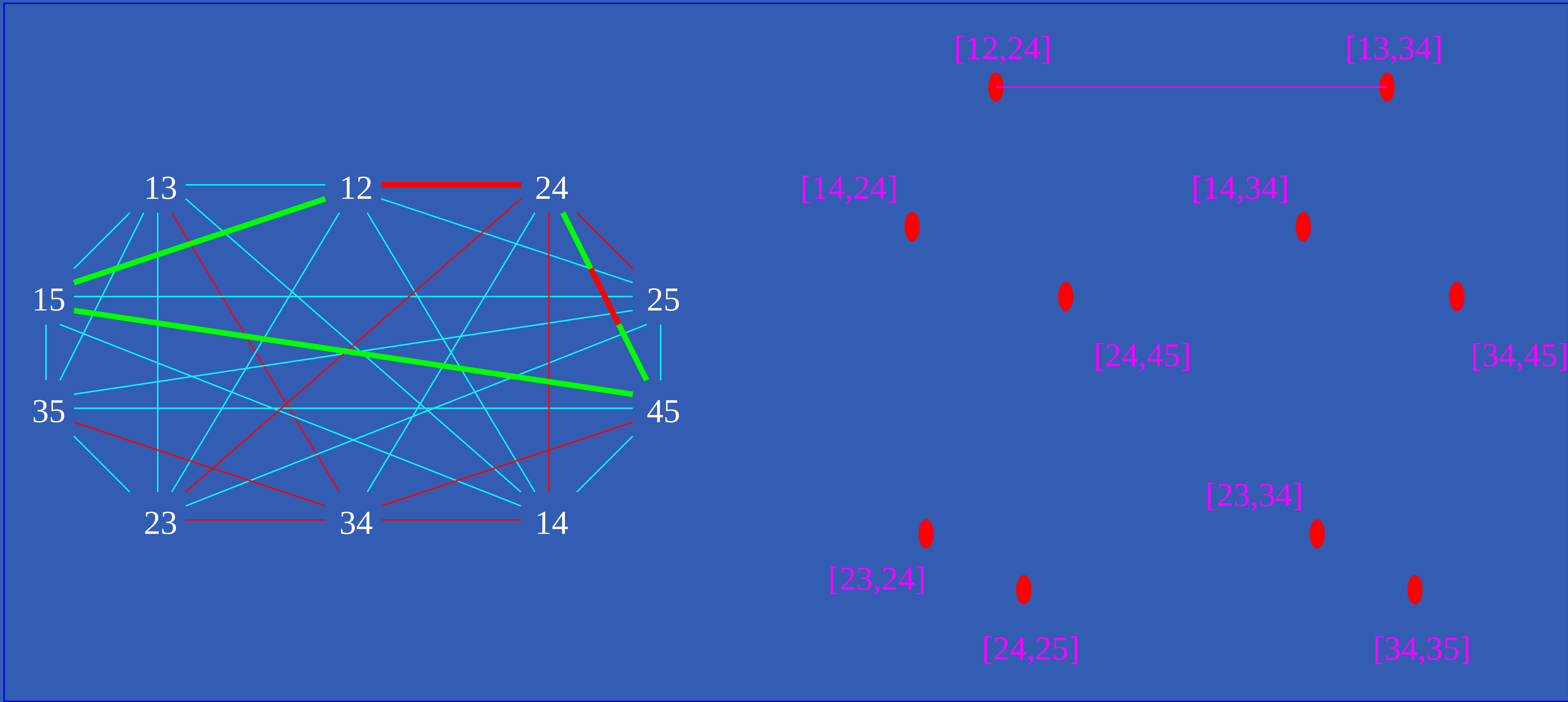
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



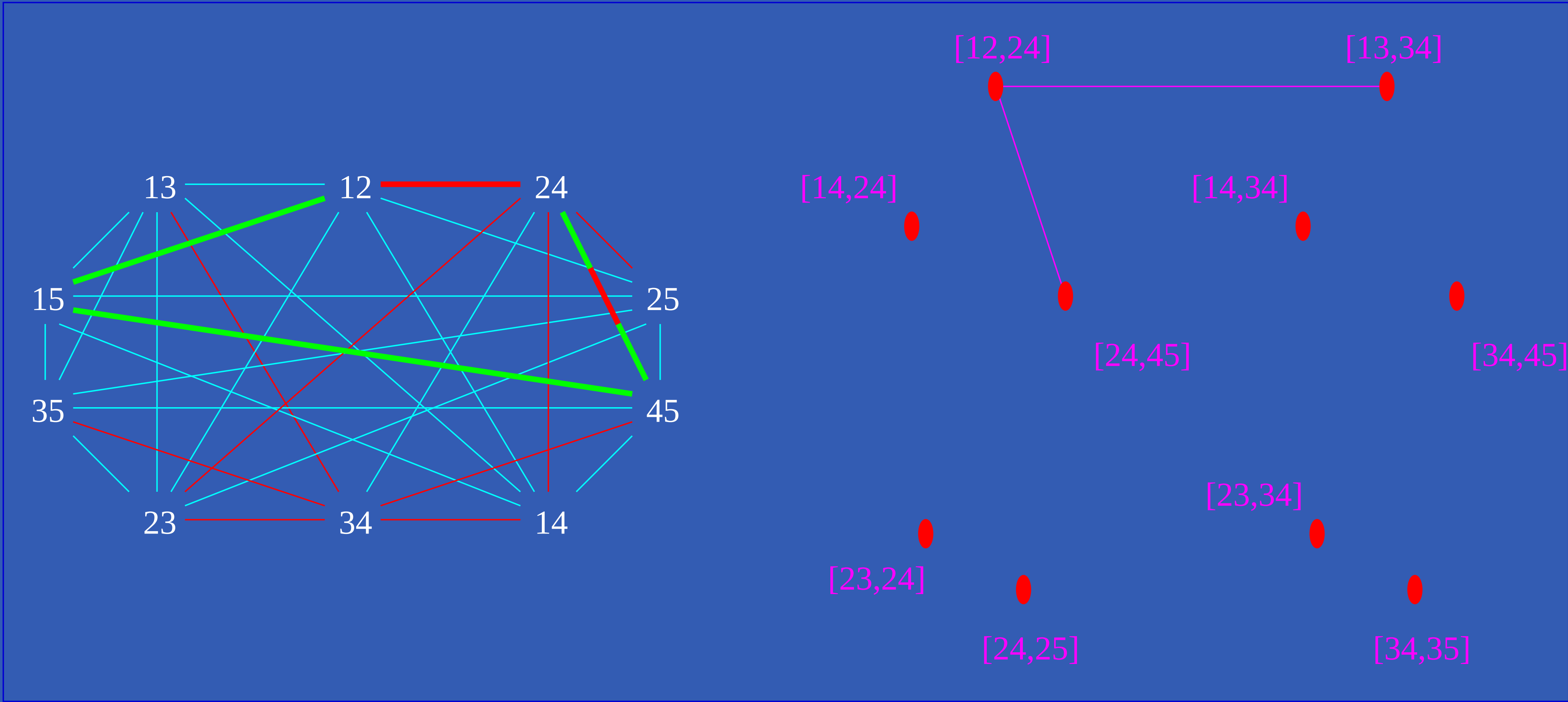
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



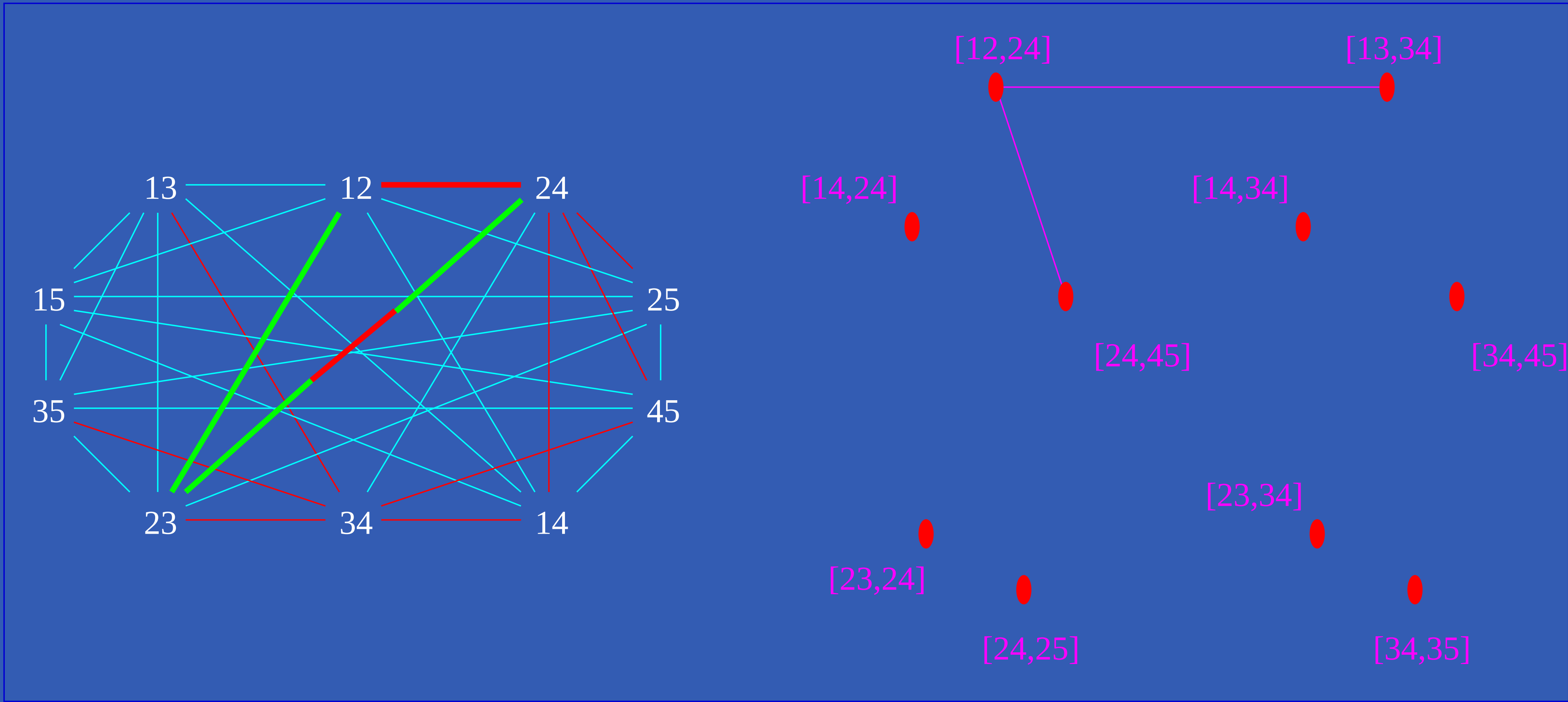
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



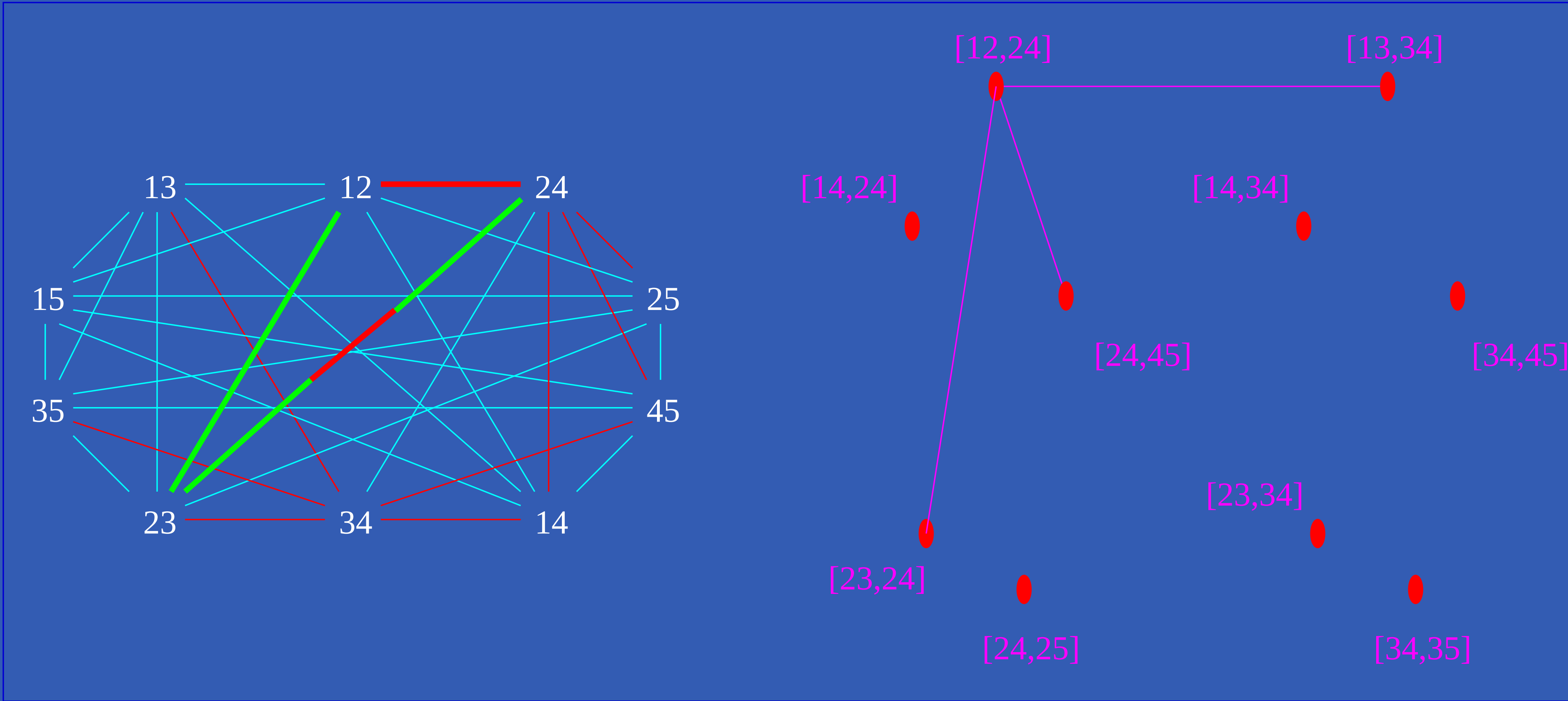
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



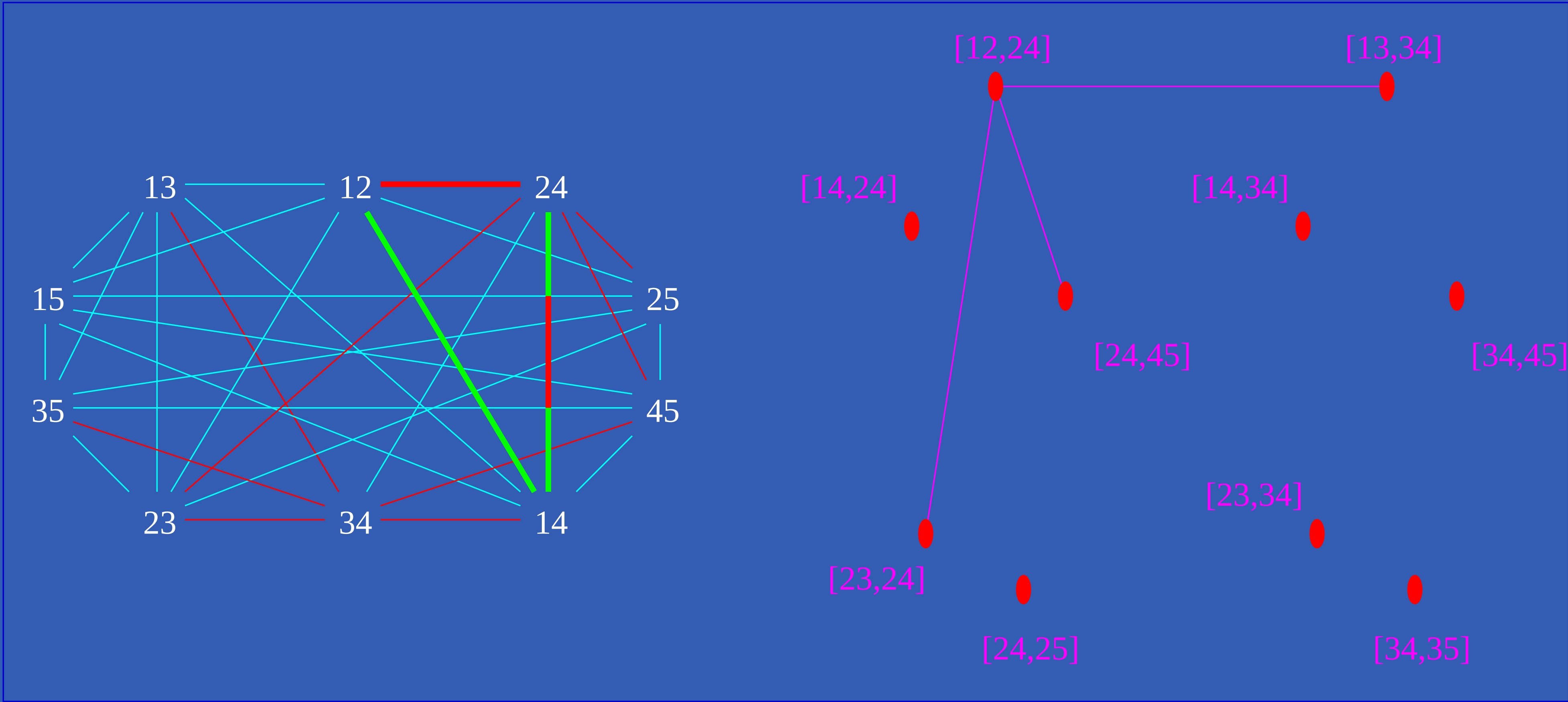
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



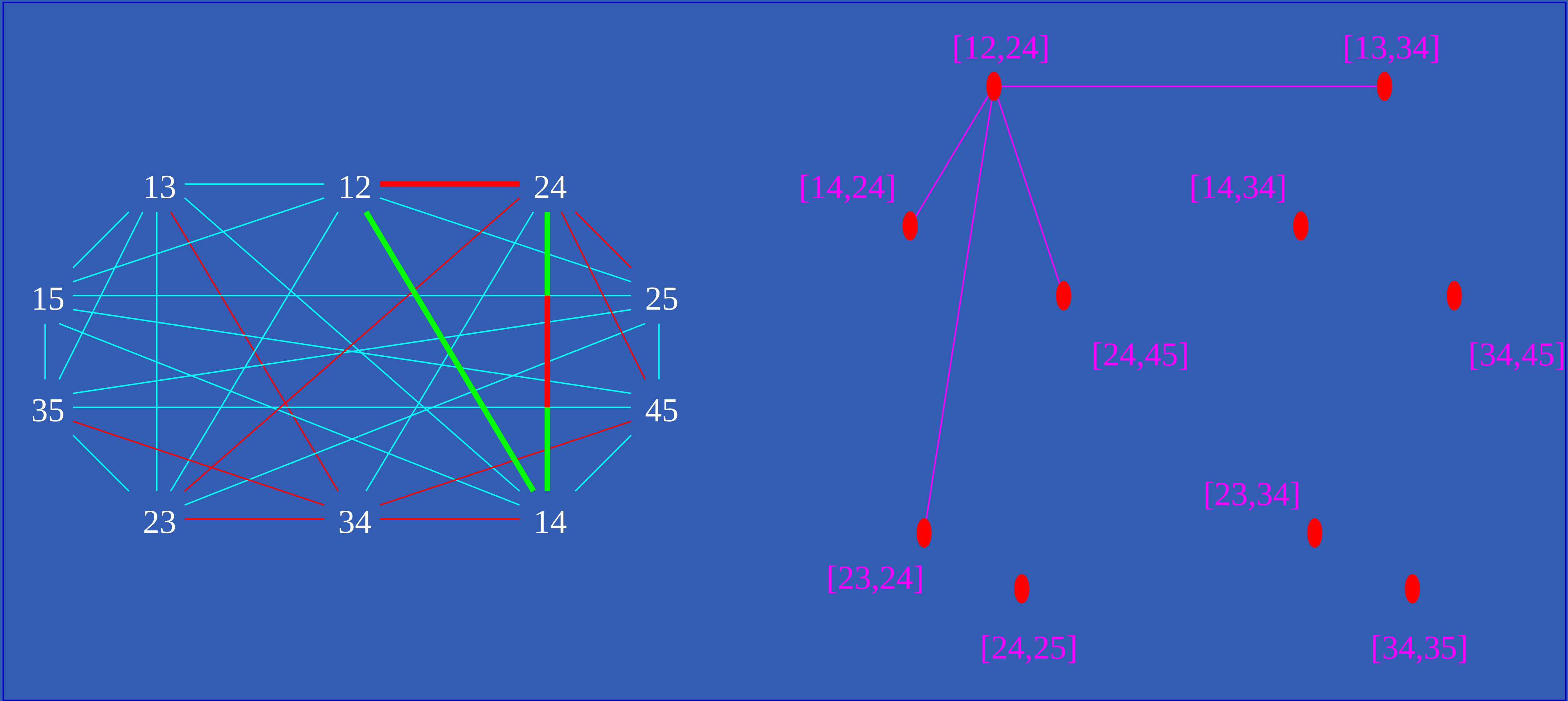
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



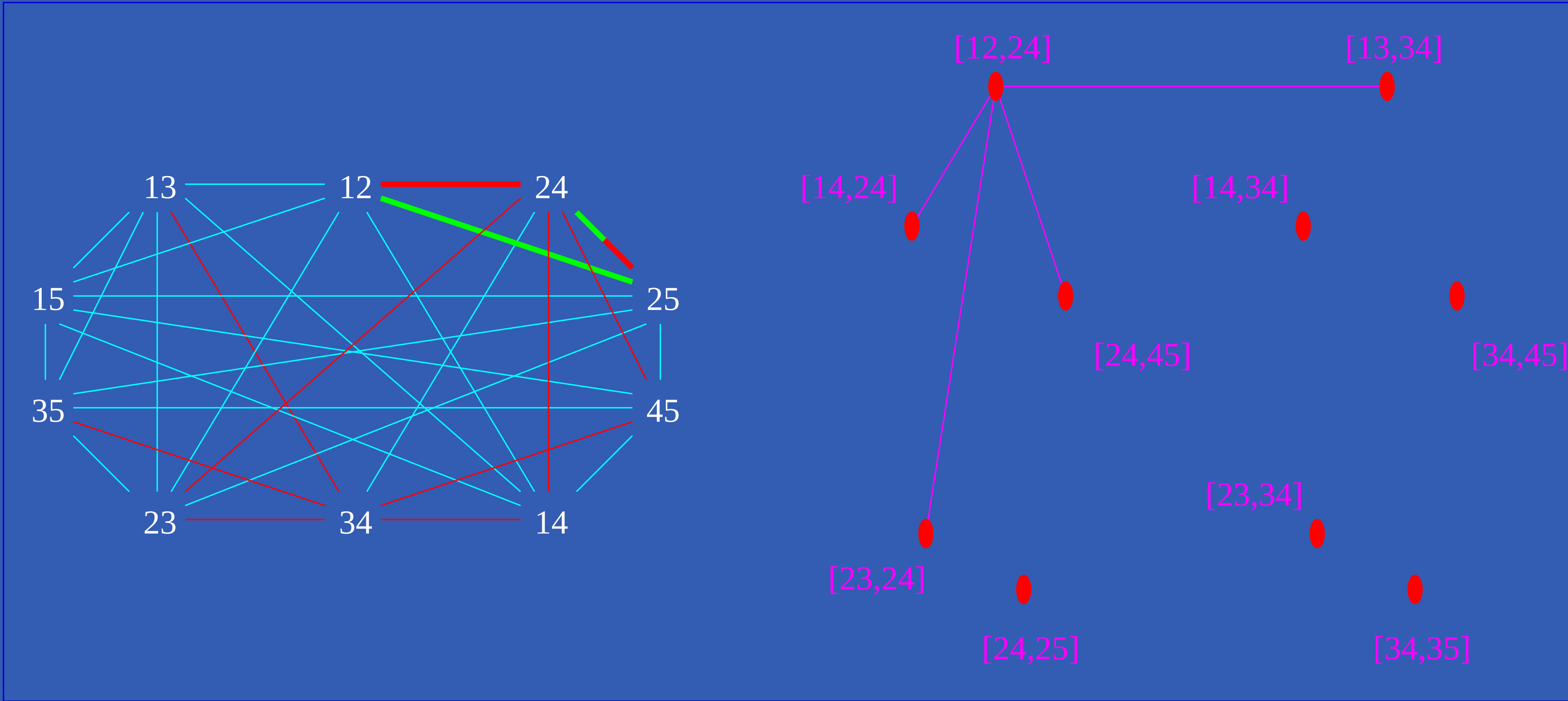
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



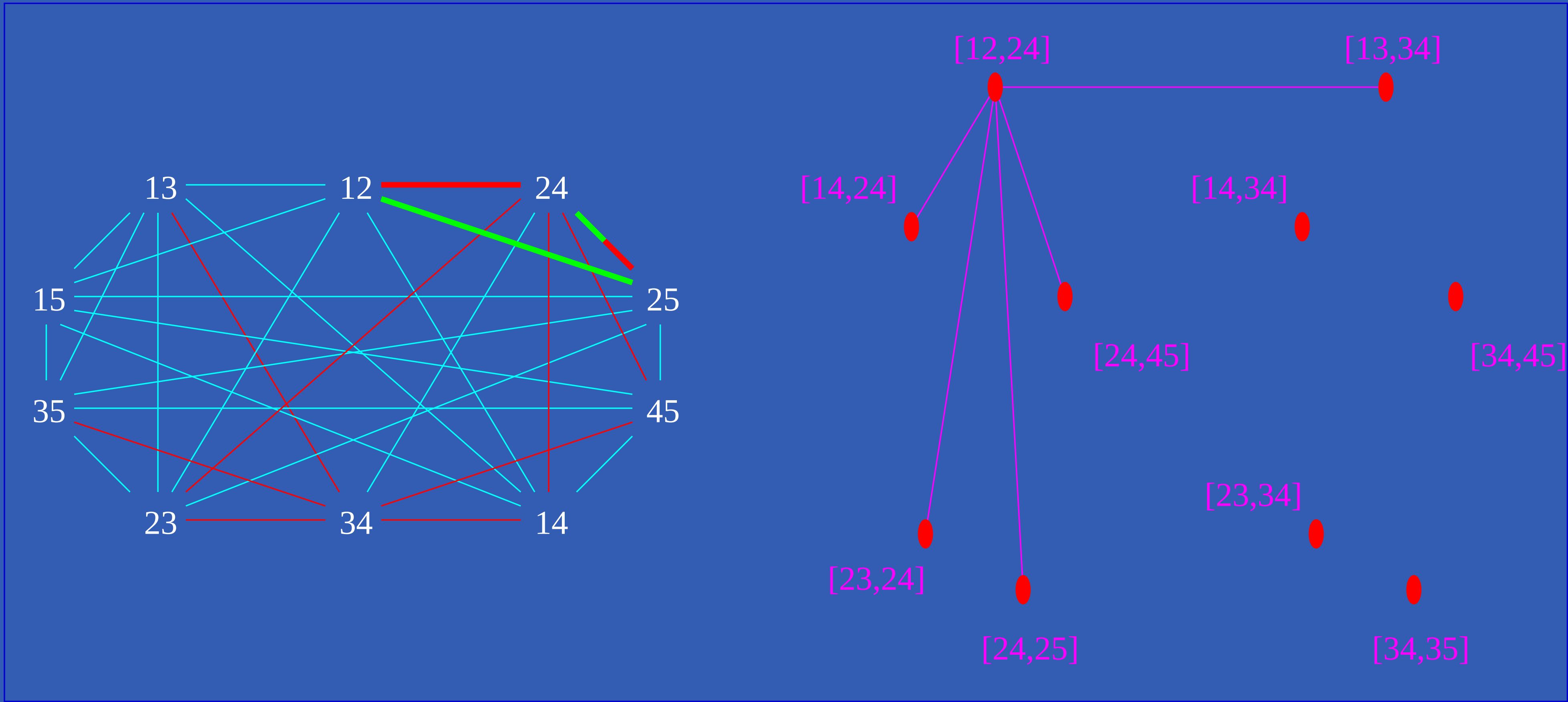
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



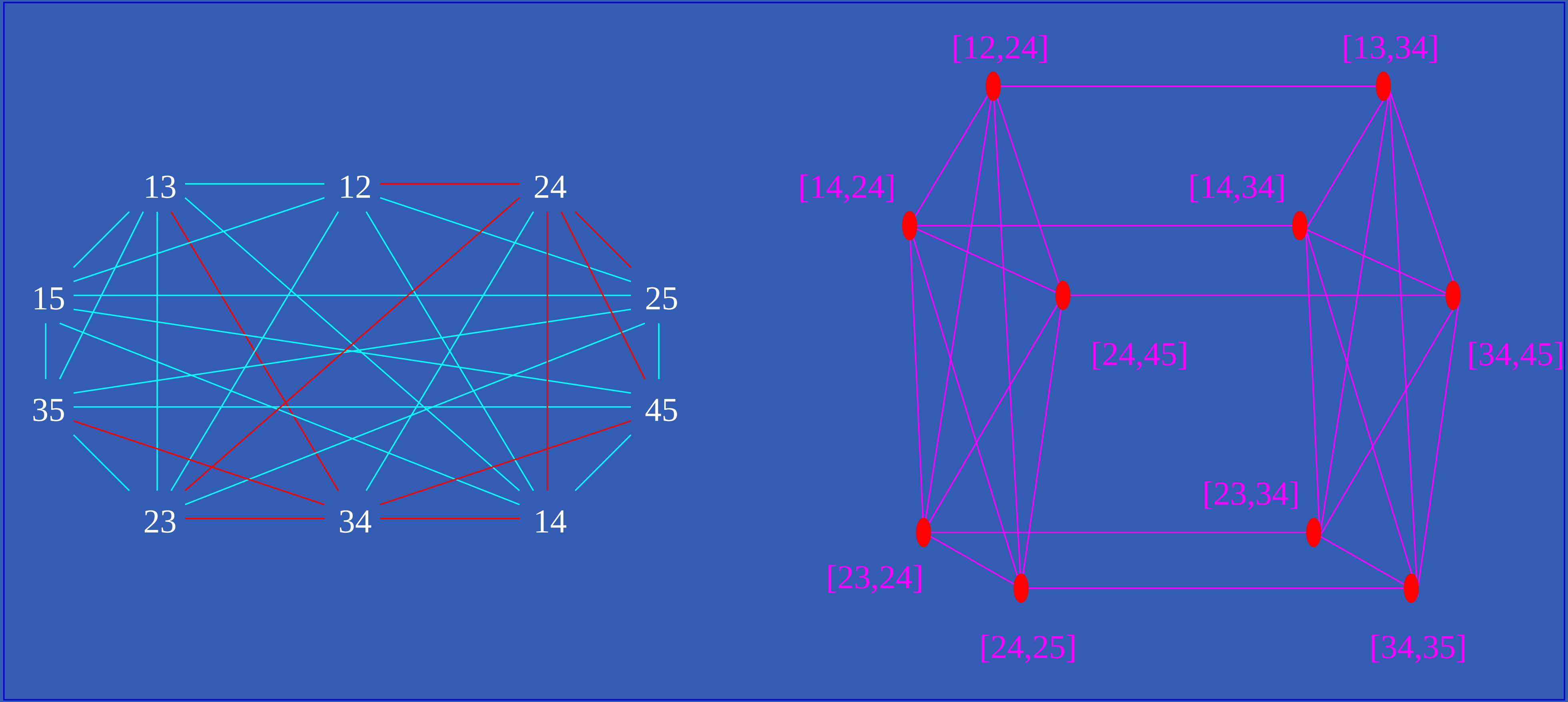
Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0, 1, 2, 3, -6)$, $c = 7/2$



Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

$G_{2,5}(\mathbb{C})$, $\xi = (0,1,2,3,-6)$, $c = 7/2$



Sur l'arête $[i_1 i_2, j_1 j_2]$: vecteur $\theta_{i_1} + \theta_{i_2} - \theta_{j_1} - \theta_{j_2}$

Caractère invariant, caractère réduit

$\Theta \in K(\Gamma, \alpha)$ de la forme $\Theta(p) = e^{2i\pi f(p)}$.

$$\chi(\Theta) := \sum_{p \in S_\Gamma} \frac{\Theta(p)}{\prod_{q \in V(p)} (1 - e^{2i\pi \alpha_{p,q}})} \in R(G).$$

$$\Longrightarrow \quad \chi(\Theta)^H \in R(G/H).$$

Caractère invariant, caractère réduit

$\Theta \in K(\Gamma, \alpha)$ de la forme $\Theta(p) = e^{2i\pi f(p)}$.

$$\chi(\Theta) := \sum_{p \in S_\Gamma} \frac{\Theta(p)}{\prod_{q \in V(p)} (1 - e^{2i\pi\alpha_{p,q}})} \in R(G).$$

$$\Longrightarrow \quad \chi(\Theta)^H \in R(G/H).$$

$$\chi_c(\Theta) :=$$

$$\sum_{[p,q] \in \Gamma_c} \frac{1}{|\alpha_{p,q}(\xi)|} \sum_{\zeta^{\alpha_{p,q}(\xi)}=1} \frac{\zeta^{\langle f(p),\xi\rangle} e^{2i\pi\left(f(p) - \frac{\langle f(p),\xi\rangle}{\alpha_{p,q}(\xi)}\alpha_{p,q}\right)}}{\prod_{r \in V(p)\setminus\{q\}} \left(1 - \zeta^{\alpha_{p,r}(\xi)} e^{2i\pi\left(\alpha_{p,r} - \frac{\alpha_{p,r}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)}\alpha_{p,q}\right)}\right)}$$

$$\in R(G/H).$$

Lien entre caractère invariant et caractère réduit

$f \in H^2(\Gamma, \alpha)$ avec :

- $f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q}$ ($\lambda_{p,q} > 0$).
- $f(p) \in \mathbb{Z}_G^*$.

Soit $\Theta(p) = e^{2i\pi f(p)}$.

Lien entre caractère invariant et caractère réduit

$f \in H^2(\Gamma, \alpha)$ avec :

- $f(p) - f(q) = \lambda_{p,q}\alpha_{p,q}$ ($\lambda_{p,q} > 0$).
- $f(p) \in \mathbb{Z}_G^*$.

Soit $\Theta(p) = e^{2i\pi f(p)}$.

$$\chi_{c=0}(\Theta) = \chi(\Theta)^H.$$

Points délicats

- Matrice d’adjacence généralisée.
- Ré-écriture des procédures.
- Rang de trois vecteurs, parallélisme de deux vecteurs.
- Racines de l’unité (caractère réduit).

Présent et avenir

- Réduction : variété de dimension 42, avec 1746 sommets.
- Caractère invariant : variété de dimension 8, avec 20 points fixes.

Présent et avenir

- Réduction : variété de dimension 42, avec 1746 sommets.
- Caractère invariant : variété de dimension 8, avec 20 points fixes.
- Variétés des drapeaux.

Présent et avenir

- Réduction : variété de dimension 42, avec 1746 sommets.
- Caractère invariant : variété de dimension 8, avec 20 points fixes.

- Variétés des drapeaux.
- Amélioration du calcul des racines de l'unité.

Présent et avenir

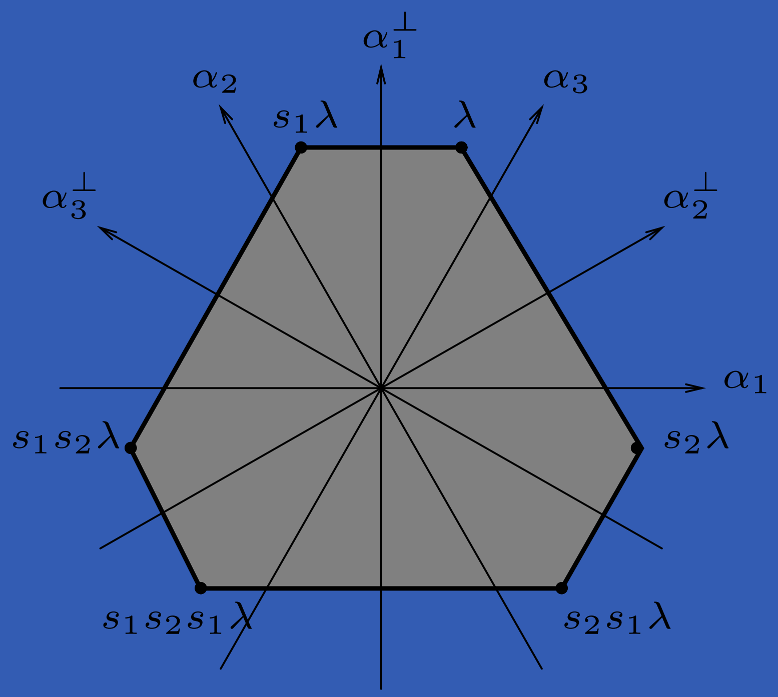
- Réduction : variété de dimension 42, avec 1746 sommets.
- Caractère invariant : variété de dimension 8, avec 20 points fixes.

- Variétés des drapeaux.
- Amélioration du calcul des racines de l'unité.
- Réduction par un tore H de dimension supérieure.

Seconde partie :

Nombres de Kostka

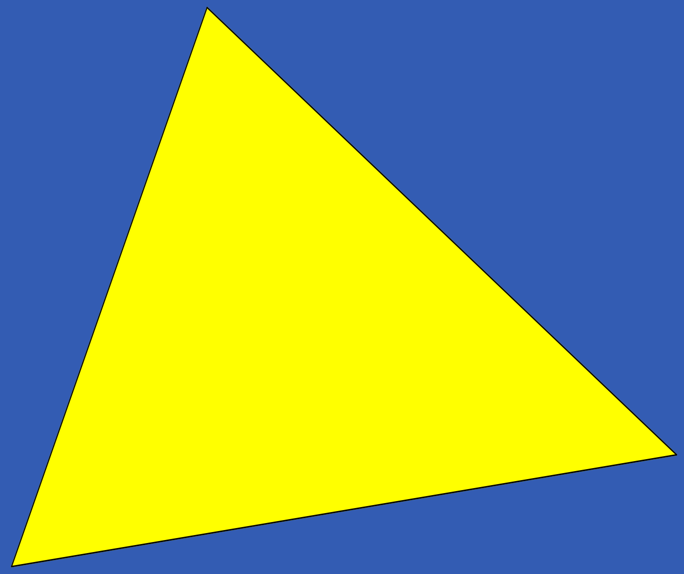
et coefficients de Littlewood-Richardson



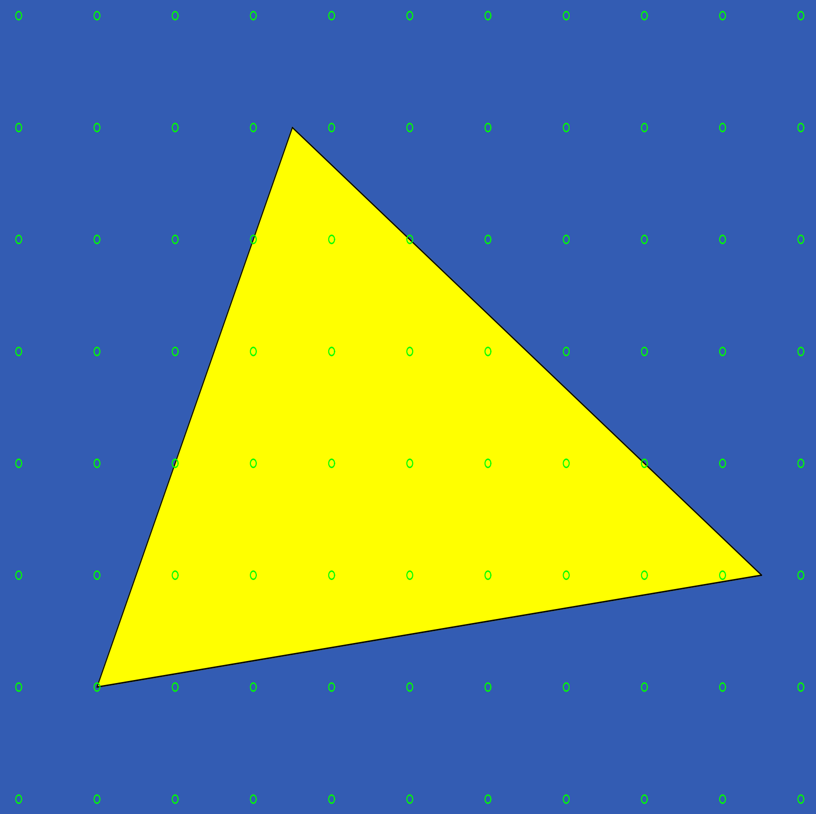
Plan de la seconde partie

- Fonction de partition vectorielle.
- Application en théorie des représentations.
- Formules utilisées dans le programme.
- Description des algorithmes.
- Utilisation du programme.

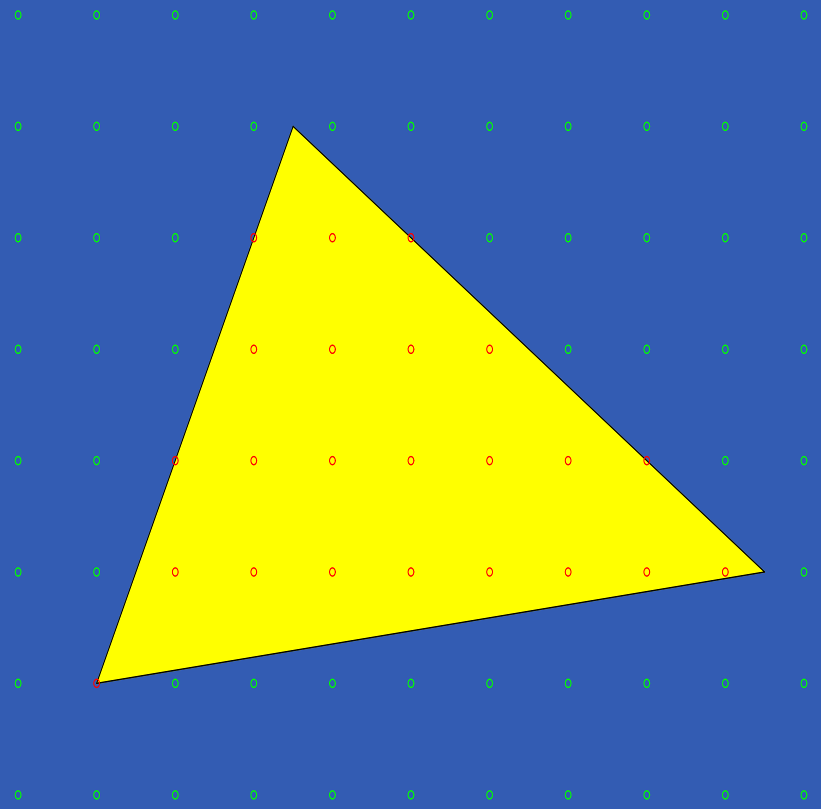
Points entiers dans les polytopes



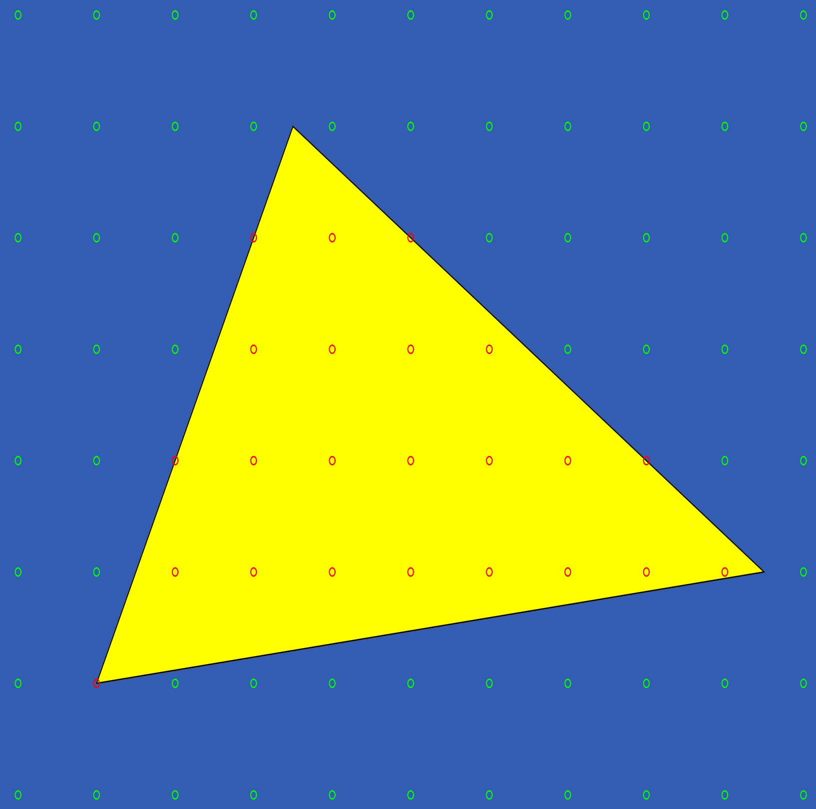
Points entiers dans les polytopes



Points entiers dans les polytopes



Points entiers dans les polytopes



Formule de Pick :

$$\sharp P \cap \mathbb{Z}^2 = \mathrm{aire}(P) + \frac{1}{2} \cdot \sharp(\partial P \cap \mathbb{Z}^2) + 1.$$

Polytope et fonction de partition vectorielle

$\Phi \in M_{r,N}(\mathbb{Z})$; colonnes $\phi_1, \ldots, \phi_N$; $a \in \mathbb{R}^r$.

$$P(\Phi, a) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N \,;\, \sum_{i=1}^{N} x_i\, \phi_i = a \right\}.$$

Polytope et fonction de partition vectorielle

$\Phi \in M_{r,N}(\mathbb{Z})$; colonnes $\phi_1, \ldots, \phi_N$; $a \in \mathbb{R}^r$.

$$P(\Phi, a) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N \,;\, \sum_{i=1}^{N} x_i\, \phi_i = a \right\}.$$

On suppose que :

- a est dans le cône $C(\Phi)$.
- Φ est de rang maximal.
- $\ker(\Phi) \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$.

Polytope et fonction de partition vectorielle

$\Phi \in M_{r,N}(\mathbb{Z})$; colonnes $\phi_1, \ldots, \phi_N$; $a \in \mathbb{R}^r$.

$$P(\Phi, a) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N \,;\, \sum_{i=1}^{N} x_i \, \phi_i = a \right\}.$$

On suppose que :

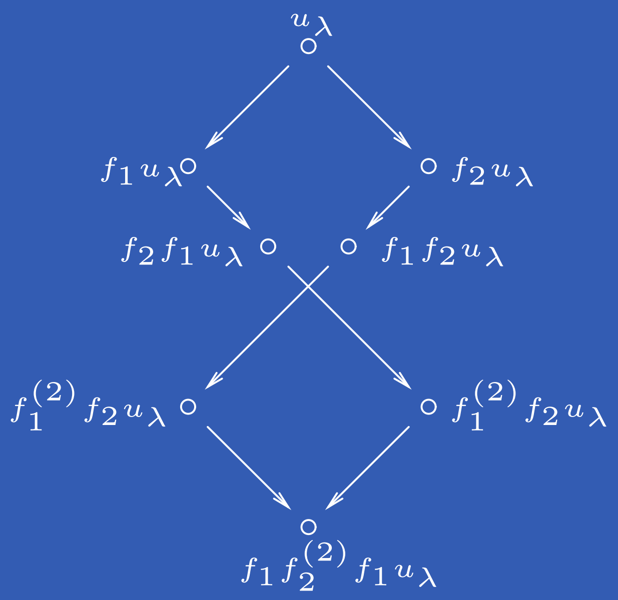
- a est dans le cône $C(\Phi)$.
- Φ est de rang maximal.
- $\ker(\Phi) \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$.

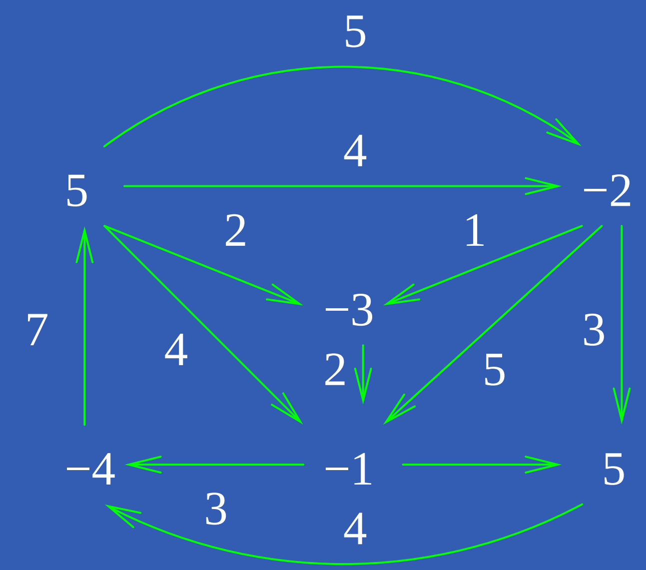
$$k(\Phi, a) = |P(\Phi, a) \cap \mathbb{N}^N| \quad (a \in \mathbb{Z}^r).$$

Omniprésence dans les mathématiques

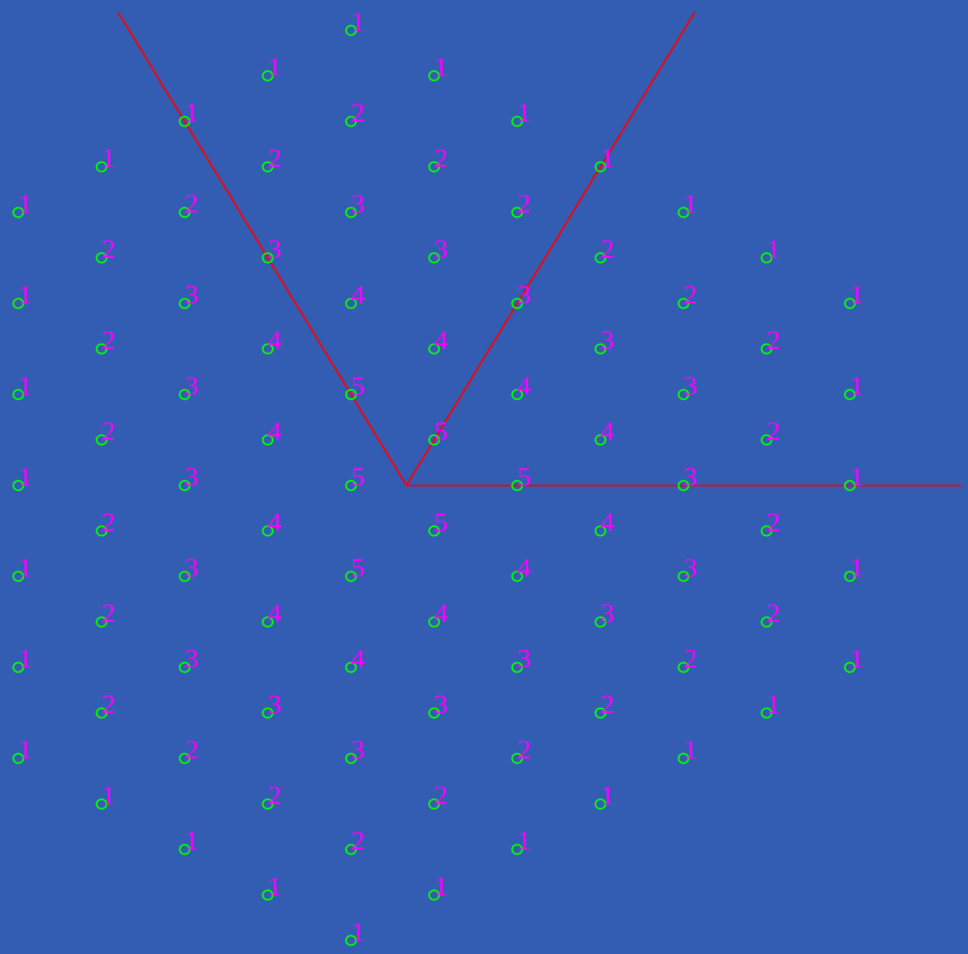
$$\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 8 & 19 \\ 5 & 4 & 10 & 19 \\ 7 & 11 & 1 & 19 \\ \hline 19 & 19 & 19 & \end{array}$$

Recrutement 2004	CR2	CR1	DR2	DR1
Total	213	91	170	2
maths	11	0	4	1
biomolécules	8	4	9	0
génome	6	4	6	0
sociologie	3	1	2	0
plasmas	5	3	4	0

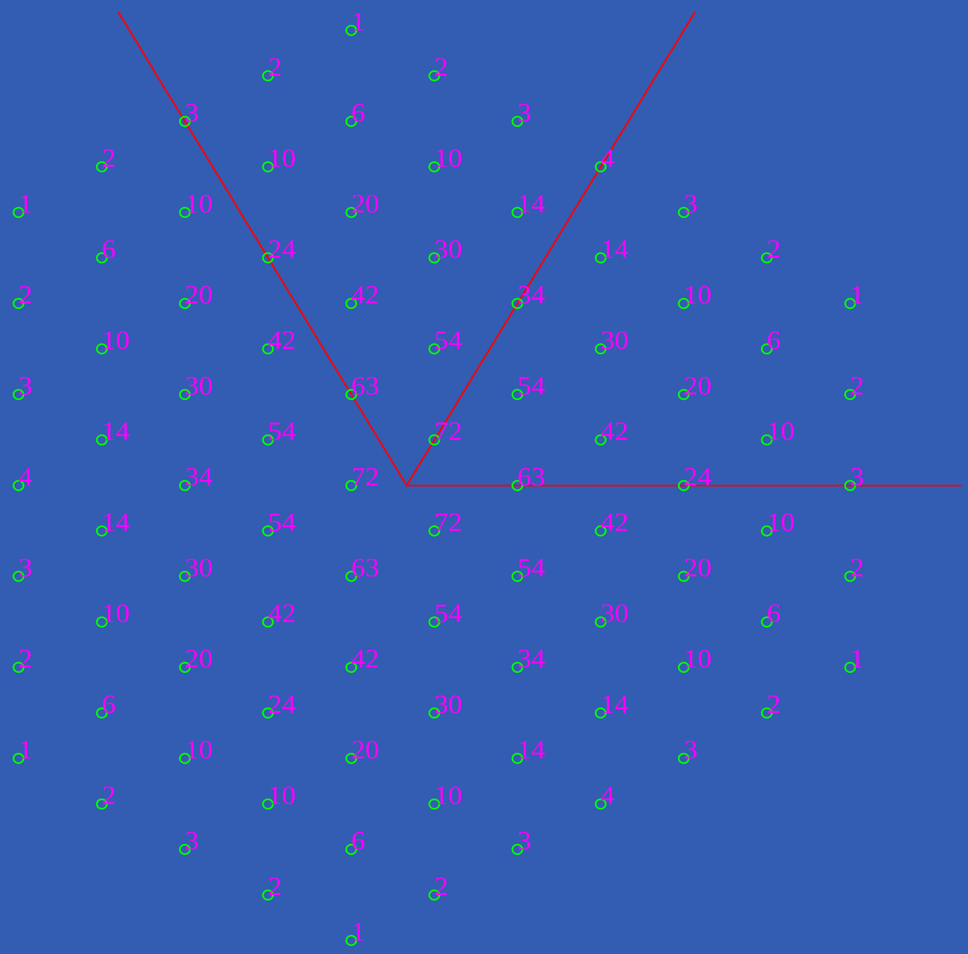




Théorie des représentations



Multiplicité des poids



Coeffi cients du produit tensoriel

Notations de théorie des représentations

Groupe de Lie semi-simple complexe G de rang r, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Sous-groupe de Cartan H, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Groupe de Weyl $W = W(G, H)$ de G pour H.

Notations de théorie des représentations

Groupe de Lie semi-simple complexe G de rang r, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
Sous-groupe de Cartan H, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.
Groupe de Weyl $W = W(G, H)$ de G pour H.

Système de racines positives Δ^+.
Réseau des racines : $\mathbb{Z}[\Delta^+]$.
Réseau des poids : $\mathbb{Z}^*_G$.

Notations de théorie des représentations

Groupe de Lie semi-simple complexe G de rang r, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
Sous-groupe de Cartan H, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.
Groupe de Weyl $W = W(G, H)$ de G pour H.

Système de racines positives Δ^+.
Réseau des racines : $\mathbb{Z}[\Delta^+]$.
Réseau des poids : $\mathbb{Z}^*_G$.

Caractère d'une représentation V : $\mathrm{ch}(V) = \sum_\mu \dim(V_\mu)e^\mu$.
Représentation de $\mathfrak{g}$ irréductible de dimension fi nie et
de plus haut poids λ (ou poids dominant) : $V(\lambda)$.

Le problème des multiplicités

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \sum_{\mu} c_{\lambda}^{\mu} e^{\mu}.$$

($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$: nombres de Kostka.)

Le problème des multiplicités

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \sum_{\mu} c_{\lambda}^{\mu}\, e^{\mu}.$$

($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$: nombres de Kostka.)

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \sum_{\nu} c_{\lambda\,\mu}^{\;\nu}\, V(\nu).$$

(Coefficients de Littlewood-Richardson ou de Clebsch-Gordan.)

Les formules de Kostant et de Steinberg

$k_{\mathfrak{g}}(\beta)$: nombre de façons d'écrire β comme combinaison linéaire à coeffi cients entiers positifs des racines positives de $\mathfrak{g}$.

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})} = \sum_{\beta} k_{\mathfrak{g}}(\beta)\ e^{-\beta}.$$

Les formules de Kostant et de Steinberg

$k_{\mathfrak{g}}(\beta)$: nombre de façons d'écrire β comme combinaison linéaire à coeffi cients entiers positifs des racines positives de $\mathfrak{g}$.

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})} = \sum_{\beta} k_{\mathfrak{g}}(\beta)\, e^{-\beta}.$$

Kostant : λ poids dominant, μ poids. Alors :

$$c_\lambda^\mu = \sum_{w\in \mathrm{Val}(\lambda,\mu)} (-1)^{\varepsilon(w)}\, k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)-(\mu+\rho)).$$

Les formules de Kostant et de Steinberg

$k_{\mathfrak{g}}(\beta)$: nombre de façons d'écrire β comme combinaison linéaire à coeffi cients entiers positifs des racines positives de $\mathfrak{g}$.

$$\frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})} = \sum_{\beta} k_{\mathfrak{g}}(\beta)\, e^{-\beta}.$$

Kostant : λ poids dominant, μ poids. Alors :

$$c_\lambda^\mu = \sum_{w\in\mathrm{Val}(\lambda,\mu)} (-1)^{\varepsilon(w)}\, k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)-(\mu+\rho)).$$

Steinberg : λ, μ, ν poids dominants de $\mathfrak{g}$. Alors :

$$c_{\lambda\ \mu}^{\ \nu} = \sum_{(w,w')\in\mathrm{Val}(\lambda,\mu,\nu)} (-1)^{\varepsilon(w)+\varepsilon(w')} \times k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)+w'(\mu+\rho)-(\nu+2\rho)).$$

Polynomialité des coefficients dans le cas de A_r

Nombres de Kostka c_λ^μ :

$\mathbb{N} \ni t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ est polynomiale
(Kirillov-Reshetikin 1986).

Coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\ \mu}^{\ \nu}$:

$\mathbb{N} \ni t \mapsto c_{t\lambda\ t\mu}^{\ t\nu}$ est polynomiale
(Derksen–Jerzy 2002, Rassart 2003).

Méthodes d'attaque de $k(\Phi, a)$

- Algorithme de Barvinok (1994), implémenté par LATTE (DeLoera-Hemmecke-Tauzer-Yoshida, 2003).

Méthodes d'attaque de $k(\Phi, a)$

- Algorithme de Barvinok (1994), implémenté par LATTE (DeLoera-Hemmecke-Tauzer-Yoshida, 2003).
- Inversion de la formule de Laplace : Baldoni-Vergne (2001), Baldoni-DeLoera-Vergne (2003).

La remarque fondamentale

Soit $z \in \mathbb{R}^r$ tel que $\langle C(\Phi), z\rangle \geq 0$. Alors :

$$\int_{C(\Phi)} v(\Phi, a) e^{-\langle a,z\rangle} da = \frac{1}{\prod_{\phi\in\Phi} \langle \phi, z\rangle},$$

$$\sum_{a\in C(\Phi)\cap\mathbb{Z}^r} k(\Phi, a) e^{-\langle a,z\rangle} = \frac{1}{\prod_{\phi\in\Phi} (1 - e^{-\langle \phi,z\rangle})}.$$

Les colonnes de Φ sont les racines positives :

$$A_r^+ = \{(e_i - e_j)\,;\, 1 \leq i < j \leq r+1\}.$$

$$\Longrightarrow \quad k_{\mathfrak{sl}_{r+1}}(a) = k(\Phi, a).$$

$$\Phi(A_3^+) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les espaces R_{A_r} et S_{A_r}, le résidu itéré

$$E_r = \mathrm{Vect}(\{e_i - e_j\}) \subset V = \mathbb{R}^{r+1}.$$

$$\mathbb{R}^r \ni a = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \longmapsto \mathbf{a} = a_1e_1 + \cdots + a_re_r - (\textstyle\sum_{i=1}^r a_i)e_{r+1} \in V.$$

Les espaces R_{A_r} et S_{A_r}, le résidu itéré

$$E_r = \mathrm{Vect}(\{e_i - e_j\}) \subset V = \mathbb{R}^{r+1}.$$

$$\mathbb{R}^r \ni a = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \longmapsto \mathbf{a} = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r - (\textstyle\sum_{i=1}^r a_i) e_{r+1} \in V.$$

R_{A_r} : fractions à pôles sur les hyperplans $\{z_i = z_j\}$ $(1 \leq i \neq j \leq r)$ et $\{z_r = 0\}$.

S_{A_r} : fractions dont une base est l'ensemble des

$$f_w(z_1, \ldots, z_r) = w \cdot \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \cdots (z_{r-1} - z_r) z_r} \qquad (w \in \Sigma_r).$$

Les espaces R_{A_r} et S_{A_r}, le résidu itéré

$$E_r = \mathrm{Vect}(\{e_i - e_j\}) \subset V = \mathbb{R}^{r+1}.$$

$$\mathbb{R}^r \ni a = (a_1, a_2, \dots, a_r) \longmapsto \mathbf{a} = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r - (\textstyle\sum_{i=1}^r a_i) e_{r+1} \in V.$$

R_{A_r} : fractions à pôles sur les hyperplans $\{z_i = z_j\}$ $(1 \leq i \neq j \leq r)$ et $\{z_r = 0\}$.

S_{A_r} : fractions dont une base est l'ensemble des

$$f_w(z_1, \dots, z_r) = w \cdot \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \cdots (z_{r-1} - z_r) z_r} \qquad (w \in \Sigma_r).$$

Pour $\sigma \in \Sigma_r$, le résidu itéré :

$$\mathrm{IRes}^{\sigma}_{z=0} f = \mathrm{Res}_{z_{\sigma(1)}=0} \cdots \mathrm{Res}_{z_{\sigma(r-1)}=0} \mathrm{Res}_{z_{\sigma(r)}=0} f(z_1, z_2, \dots, z_r).$$

$(\mathrm{IRes}^{\sigma}_{z=0})_{\sigma \in \Sigma_r}$ base de $S^*_{A_r}$ duale de la base $(f_w)_{w \in \Sigma_r}$.

Permutations spéciales pour un vecteur $\mathbf{a}$

Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{r+1}$ régulier :
les $w \in \Sigma_r$ telles que

$$\begin{array}{rl}
\text{si } a_{w(1)} \geq 0 & \text{alors } w(1) < w(2) \\
& \text{sinon } w(1) > w(2), \\
\text{si } a_{w(1)} + a_{w(2)} \geq 0 & \text{alors } w(2) < w(3) \\
& \text{sinon } w(2) > w(3), \\
& \vdots \\
\text{si } a_{w(1)} + \cdots + a_{w(r-1)} \geq 0 & \text{alors } w(r-1) < w(r) \\
& \text{sinon } w(r-1) > w(r).
\end{array}$$

On note $\mathrm{Sp}(\mathbf{a})$ leur ensemble.
Si a_i est positif pour $i = 1, \ldots, r$, alors $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) = \{\mathrm{id}\}$.

Théorème de Baldoni-DeLoera-Vergne (2003)

Soit

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i \right) e_{r+1} \in \mathbb{Z}^{r+1} \cap C(A_r^+).$$

Théorème de Baldoni-DeLoera-Vergne (2003)

Soit

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right) e_{r+1} \in \mathbb{Z}^{r+1} \cap C(A_r^+).$$

Alors $k(A_r^+, \mathbf{a})$ est égal à :

$$\sum_{w \in Sp(\mathbf{a}')} (-1)^{n(w)} \, \mathrm{IRes}_{z=0}^{w} \left(\frac{\prod_{i=1}^{r} (1+z_i)^{a_i + r - i}}{\left(\prod_{i=1}^{r} z_i\right) \prod_{1 \le i < j \le r} (z_i - z_j)} \right).$$

$$\mathbf{a}' = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{si } \mathbf{a} \text{ est régulier,} \\ \mathbf{a} + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} e_i - r e_{r+1}\right), \quad \varepsilon = \dfrac{1}{2r}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Points délicats

$$c_\lambda^\mu = \sum_{w \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu)} (-1)^{\varepsilon(w)}\, k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)-(\mu+\rho)).$$

$$c_{\lambda\,\mu}^{\;\nu} = \sum_{(w,w')\in \mathrm{Val}(\lambda,\mu,\nu)} (-1)^{\varepsilon(w)+\varepsilon(w')} \times \quad k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)+w'(\mu+\rho)-(\nu+2\rho)).$$

où $k(\mathfrak{g},\mathbf{a})$ est égal à

$$\sum_{w\in Sp(\mathbf{a}')} (-1)^{n(w)}\, \mathrm{IRes}^{w}_{z=0}\left(\frac{\prod_{i=1}^{r}(1+z_i)^{a_i+r-i}}{(\prod_{i=1}^{r} z_i)\prod_{1\le i<j\le r}(z_i-z_j)}\right).$$

Points délicats

$$c_\lambda^\mu = \sum_{w \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu)} (-1)^{\varepsilon(w)}\, k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)-(\mu+\rho)).$$

$$c_{\lambda\,\mu}^{\ \nu} = \sum_{(w,w') \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu,\nu)} (-1)^{\varepsilon(w)+\varepsilon(w')}$$

$$\times \quad k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho)+w'(\mu+\rho)-(\nu+2\rho)).$$

où $k(\mathfrak{g},\mathrm{a})$ est égal à

$$\sum_{w \in Sp(\mathbf{a}')} (-1)^{n(w)}\, \mathrm{IRes}^{w}_{z=0}\left(\frac{\prod_{i=1}^{r}(1+z_i)^{a_i+r-i}}{(\prod_{i=1}^{r} z_i)\prod_{1\le i<j\le r}(z_i-z_j)}\right).$$

Points délicats

$$c_\lambda^\mu = \sum_{w \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu)} (-1)^{\varepsilon(w)} \, k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)).$$

$$c_{\lambda\ \mu}^{\ \nu} = \sum_{(w,w') \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu,\nu)} (-1)^{\varepsilon(w)+\varepsilon(w')} \times \quad k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda+\rho) + w'(\mu+\rho) - (\nu+2\rho)).$$

où $k(\mathfrak{g}, \mathbf{a})$ est égal à

$$\sum_{w \in Sp(\mathbf{a}')} (-1)^{n(w)} \mathrm{IRes}_{z=0}^{w} \left(\frac{\prod_{i=1}^{r} (1+z_i)^{a_i+r-i}}{\left(\prod_{i=1}^{r} z_i\right) \prod_{1\leq i<j\leq r} (z_i - z_j)} \right).$$

Détermination des permutations

$w \in \mathrm{Val}(\lambda, \mu)$ si $\sum_{j=1}^{i} (\lambda + \rho)_{w(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} (\mu + \rho)_j$.

Détermination des permutations

$w \in \mathrm{Val}(\lambda, \mu)$ si $\sum_{j=1}^{i} (\lambda + \rho)_{w(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} (\mu + \rho)_j$.

$$w(1) = 1 : u_1 \geq v_1$$

$$w(1) = 2 : u_2 < v_1$$

$$w(1) = 3 : u_3 \geq v_1$$

Détermination des permutations

$w \in \mathrm{Val}(\lambda,\mu)$ si $\sum_{j=1}^{i}(\lambda+\rho)_{w(j)} \geq \sum_{j=1}^{i}(\mu+\rho)_j$.

$$
\begin{array}{lcl}
 & & w(2)=2 : u_1+u_2 < v_1+v_2 \\
w(1)=1 : u_1 \geq v_1 & \begin{array}{c}\nearrow\\ \rightarrow \\ \searrow\end{array} & w(2)=3 : u_1+u_3 \geq v_1+v_2 \\
 & & w(2)=4 : u_1+u_4 < v_1+v_2
\end{array}
$$

$$w(1)=2 : u_2 < v_1$$

$$
\begin{array}{lcl}
 & & w(2)=1 : u_3+u_1 \geq v_1+v_2 \\
w(1)=3 : u_3 \geq v_1 & \begin{array}{c}\nearrow\\ \rightarrow \\ \searrow\end{array} & w(2)=2 : u_3+u_2 < v_1+v_2 \\
 & & w(2)=4 : u_3+u_4 \geq v_1+v_2
\end{array}
$$

Détermination des permutations

$w \in \mathrm{Val}(\lambda, \mu)$ si $\sum_{j=1}^{i} (\lambda + \rho)_{w(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} (\mu + \rho)_j$.

$w(1) = 1 : u_1 \geq v_1$

- $w(2) = 2 : u_1 + u_2 < v_1 + v_2$
- $w(2) = 3 : u_1 + u_3 \geq v_1 + v_2$
- $w(2) = 4 : u_1 + u_4 < v_1 + v_2$

$w(1) = 2 : u_2 < v_1$

$w(1) = 3 : u_3 \geq v_1$

- $w(2) = 1 : u_3 + u_1 \geq v_1 + v_2$
- $w(2) = 2 : u_3 + u_2 < v_1 + v_2$
- $w(2) = 4 : u_3 + u_4 \geq v_1 + v_2$

Calcul des résidus itérés

$$\mathrm{IRes}^{w}_{z=0}\left(\frac{\prod(1+z_i)^{a_i+r-i}}{\left(\prod z_i\right)\prod(z_i-z_j)}\right).$$

Calcul des résidus itérés

$$\mathrm{IRes}_{z=0}^{w}\left(\frac{\prod(1+z_i)^{a_i+r-i}}{\left(\prod z_i\right)\prod(z_i-z_j)}\right).$$

- Introduire la partie en $z_{w(r)}$.
- Effectuer le développement de Taylor.
- Récupérer le coefficient en $z_{w(r)}^{-1}$.
- Recommencer avec $z_{w(r-1)}, \ldots, z_{w(1)}$.

Calcul des résidus itérés

$$\mathrm{IRes}^{w}_{z=0}\left(\frac{\prod(1+z_i)^{a_i+r-i}}{\left(\prod z_i\right)\prod(z_i-z_j)}\right).$$

- Introduire la partie en $z_{w(r)}$.
- Effectuer le développement de Taylor.
- Récupérer le coefficient en $z_{w(r)}^{-1}$.
- Recommencer avec $z_{w(r-1)}, \dots, z_{w(1)}$.

$\longrightarrow$ ne pas utiliser `residue`.
$\longrightarrow$ astuces empiriques !

Le programme `multiplicites.mws`

- Simple d'emploi et d'installation.
- $c_\lambda^\mu\,(A_8)$, $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}\,(A_8)$, $c_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\mu}\,(A_6)$, $t \mapsto c_{t\lambda}{}^{t\nu}{}_{t\mu}\,(A_6)$.
- Très efficace lorsque λ, μ, ν possèdent d'énormes coefficients ($\geq 10^9$).

Avenir

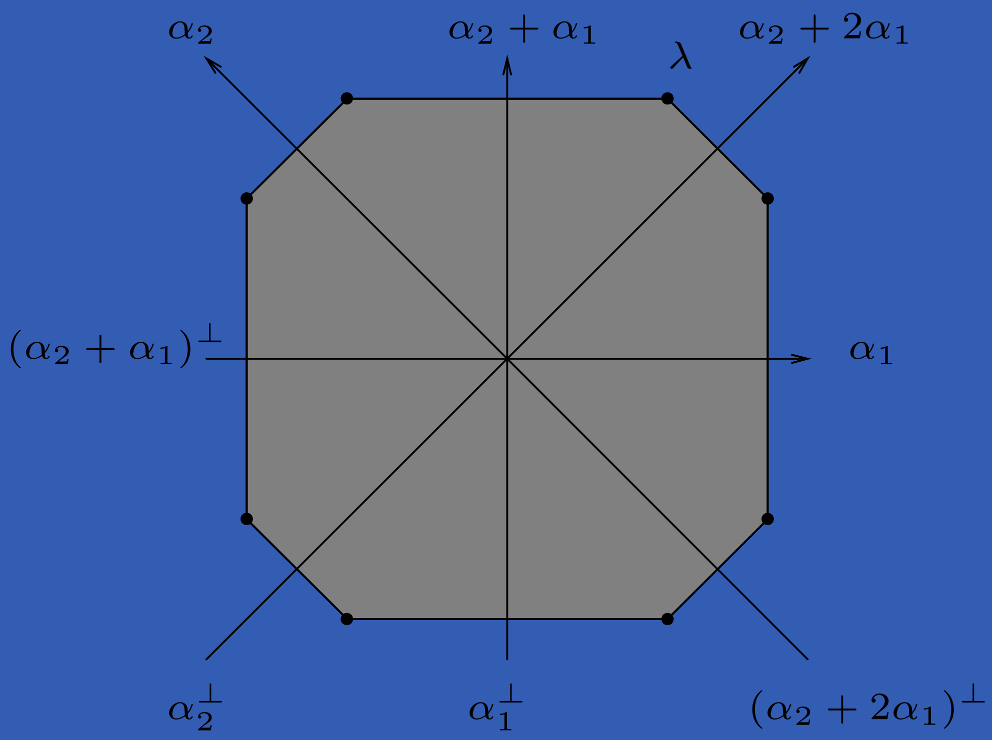
- Multiplicité de $V(\mu)$ dans $V(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V(\lambda_n)$.
- Traduction en OBJECTIVE CAML en passe d'être terminée.

Avenir

- Multiplicité de $V(\mu)$ dans $V(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V(\lambda_n)$.
- Traduction en OBJECTIVE CAML en passe d'être terminée.
- Volume des polytopes.

Avenir

- Multiplicité de $V(\mu)$ dans $V(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V(\lambda_n)$.
- Traduction en OBJECTIVE CAML en passe d'être terminée.
- Volume des polytopes.
- Pour les autres algèbres de Lie semi-simples ?



Sommaire