



HAL
open science

Logique floue en segmentation d'images : seuillage par entropie et structures pyramidales irrégulières

Gilson Braviano

► **To cite this version:**

Gilson Braviano. Logique floue en segmentation d'images : seuillage par entropie et structures pyramidales irrégulières. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1995. Français. NNT: . tel-00005033

HAL Id: tel-00005033

<https://theses.hal.science/tel-00005033>

Submitted on 24 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

- [127] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information Control* 13(8):338–353 1965.
- [128] S. Zucker. Region growing: childhood and adolescence. *Computer Graphics and Image Processing* 5(5):382–399 1976.

- [113] C. A. Shaffer. A formula for computing the number of quadtree node fragments created by a shift. *Pattern Recognition Letters* 7:45–49 1988.
- [114] M. Spann and R. Wilson. A quadtree approach to image segmentation which combines statistical and spatial information. *Pattern Recognition* 18(3/4):257–269 1985.
- [115] S. Tanimoto and A. Klinger. *Structured computer vision*. Academic Press 1980.
- [116] Wenjing Tao and Hans Burkhardt. An effective image thresholding method using a fuzzy compactness measure. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 47–51 Jerusalem Israel October 1994.
- [117] J. C. Tilton. Image segmentation by iterative parallel region growing with applications to data compression and image analysis. In *Frontiers of Massively Parallel Computation* pages 357–360 Fairfax Virginia October 1988.
- [118] J. C. Tilton. Porting an iterative parallel region growing algorithm from the MPP to the MASPAR MP-1. In *Frontiers of Massively Parallel Computation* pages 170–173 Washington D. C. October 1990.
- [119] M. Tuceryan and K. Jain. Texture segmentation using Voronoi polygons. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12(2):211–216 1990.
- [120] L. Vincent. Morphological algorithms. In E. Dougherty editor *Mathematical morphology in image processing* Marcel-Dekker New York september 1992.
- [121] Luc Vincent. Mathematical morphology on graphs. In *SPIE'S Visual Communication and Image Processing* volume 88 pages 95–105 Cambridge MA 1988.
- [122] Luc Vincent. Graphs and mathematical morphology. *Signal Processing* (16):365–388 1989.
- [123] P. Virgili G. Vottero G. Vernazza and S. Dellepiane. A segmentation method for fuzzy boundary detection. In *Proc. of the 6th International Conference on Image Analysis and Processing* pages 60–64 Como Italy september 1991.
- [124] Richard S. Wallace and Takeo Kanade. Finding natural clusters having minimum description length. pages 438–442 april 1990.
- [125] D. Willersinn. *Dual irregular pyramids*. PhD thesis Technische Universität Wien Vienna Austria 1995.
- [126] Xuanli Lisa Xie and Gerardo Beni. A validity measure for fuzzy clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (8):841–847 1991.

- [97] Thierry Pun. A new method for grey-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Signal Processing* (2):223–237 1980.
- [98] Todd Reed, Harry Wechsler, and Michael Werman. Texture segmentation using a diffusion region growing technique. *Pattern Recognition* 23(9):953–960 1990.
- [99] H. Rom and S. Peleg. Image representation using Voronoi tessellation: Adaptive and secure. In *Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 282–285, Ann Arbor, Michigan, June 1988.
- [100] A. Rosenfeld. Fuzzy digital topology. *Information and Control* (40):76–87 1979.
- [101] A. Rosenfeld. The diameter of a fuzzy set. *Fuzzy Sets and Systems* (13):241–246 1984.
- [102] A. Rosenfeld. Distances between fuzzy sets. Technical report 1984.
- [103] A. Rosenfeld. The fuzzy geometry of image subsets. *Pattern Recognition Letters* (2):311–317 1984.
- [104] A. Rosenfeld. *Multiresolution image processing and analysis*. Springer-Verlag Berlin 1984.
- [105] A. Rosenfeld. Distances between fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters* (3):229–233 1985.
- [106] A. Rosenfeld. Some pyramid techniques for image segmentation. In V. Cantoni and S. Levialdi, editors, *Pyramid systems for computer vision*, pages 261–271, Springer-Verlag Berlin 1986.
- [107] A. Rosenfeld and S. Haber. The perimeter of a fuzzy set. *Pattern Recognition* (18):125–130 1985.
- [108] T. Pavlidis, S. Tanimoto. A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing* 4:104–119 1975.
- [109] Michel Sakarovitch. *Optimisation Combinatoire (Graphes et Programmation Linéaire) - Méthodes mathématiques et algorithmiques*. Hermann Paris 1984.
- [110] W. P. Salman and M. S. Solotareff. *Le filtrage numérique*. Eyrolles Paris 1982.
- [111] H. Samet. The quadtree and related hierarchical data structures. *Comput. Surveys* 16:187–260 1984.
- [112] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press London 1982.

- [82] A. Montanvert, P. Meer and A. Rosenfeld. Approche pyramidale de la segmentation d'images par agrégation en parallèle de régions. In *Parigraph'90* pages 129–133 Paris April 1990.
- [83] A. Montanvert, P. Meer and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13(4):307–316 April 1991.
- [84] O.J. Morris, M. de J. Lee and A.G. Constantinides. Graph theory for image analysis: an approach based on the shortest spanning tree. In *IEEE Proceedings* pages 146–152 1986.
- [85] A. Murthy and Sankar K. Pal. Fuzzy thresholding: mathematical framework, bound functions and weighted moving average technique. *Pattern Recognition Letters* 11:197–206 1990.
- [86] Akira Nakamura and Kunio Aizawa. Some results concerning connected fuzzy digital pictures. *Pattern Recognition Letters* 12:335–341 1991.
- [87] Nobuyuki Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 9(1):62–66 1979.
- [88] N. R. Pal and S. K. Pal. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition* 26(9):1277–1294 1993.
- [89] Sankar K. Pal. Fuzzy skeletonization of an image. *Pattern Recognition Letters* 10:17–23 1989.
- [90] Sankar K. Pal and Azriel Rosenfeld. Image enhancement and thresholding by optimization of fuzzy compactness. *Pattern Recognition Letters* 7:77–86 1988.
- [91] Sankar K. Pal and Azriel Rosenfeld. A fuzzy medial axis transformation based on fuzzy disks. *Pattern Recognition Letters* 12:585–590 1991.
- [92] T. Pavlidis. *Structural pattern recognition*. Springer Verlag 1977.
- [93] W. Pedricz. Fuzzy sets in pattern recognition: methodology and methods. *Pattern Recognition* 23:121–146 1990.
- [94] J.-G. Postaire. *De l'image à la décision - analyse des images numériques et théorie de la décision*. Dunod Paris 1987.
- [95] J. M. S. Prewitt. *Object enhancement and extraction*. Academic Press In: B. S. Likin and A. Rosenfeld. *Picture processing and psychopictorics* 1970.
- [96] T. Pun. Entropic thresholding: a new approach. *Computer Graphics and Image Processing* 16:210–239 1981.

- [69] Y. Lu and R. C. Jain. Reasoning about edges in scale space. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 14(4):450–468 1992.
- [70] M. Luby. A simple parallel algorithm for the maximal independent set problem. *SIAM Journal of Computing* 15(4):1036–1053 November 1986.
- [71] M. Lybanon, S. M. Lea, and S. M. Himes. Segmentation of diverse image using opening and closing. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 347–351 Jerusalem, Israel, October 1994.
- [72] M. C. Maccarone, M. Tripiciano, and V. Di Gesù. Fuzzy mathematical morphology to analyse astronomical images. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 248–251 La Haye 1992.
- [73] H. Maître, I. Bloch, and M. Sigelle. Spatial entropy: a tool for controlling contextual classification convergence. *IEEE First Int. Conf. on Image Processing* 2:212–216 November 1994.
- [74] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. In *Proceedings of the Royal Society of London* volume 207 pages 181–217 1980.
- [75] Ch. Mathieu, E. Magnin, and C. Baldy-Porcher. Optimal stochastic pyramid: segmentation of MRI data. 1652:14–22 1992.
- [76] P. Meer. Stochastic image pyramids. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 45:269–294 1989.
- [77] P. Meer and S. Connelly. A fast parallel method for synthesis of random patterns. *Pattern Recognition* 22:189–204 1989.
- [78] P. Meer, S. N. Jiang, S. Baugher, and A. Rosenfeld. Robustness of image pyramids under structural perturbations. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 44:307–311 1988.
- [79] A. Montanvert and P. Bertolino. Irregular pyramids for parallel image segmentation. In *Proc. of the 16th ÖAGM Meeting* pages 13–34 Vienna, Austria, May 6-8 1992.
- [80] A. Montanvert, P. Meer, and P. Bertolino. Optimal hierarchical shape analysis in gray level images. In *NATO advanced workshop “Shape in Picture”* volume 126 pages 13–34 Driebergen, The Netherlands, September 7-11 1992. Springer Verlag ed.
- [81] A. Montanvert, P. Meer, and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. Technical Report CS TR 2322 Computer Vision Laboratory, University of Maryland, September 1989.

- [55] A. Kaufmann. *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Masson 1977.
- [56] Alireza Khotanzad and Abdelmajid Bouarfa. Image segmentation by a parallel non-parametric histogram based clustering algorithm. *Pattern Recognition* 23(9):961–973 1990.
- [57] J. Kittler and J. Illingworth. Minimum error thresholding. *Pattern Recognition* 19(1):41–47 1986.
- [58] B. Kosko and S. Isaka. La logique floue. *Pour la science* (191):62–68 1993.
- [59] W. G. Kropatsch. Towards higher decimation ratios. In *Computer Analysis of Images and Patterns* Lecture Notes in Computer Science. Springer 1995.
- [60] W. G. Kropatsch and D. Willersinn. Representing curves in irregular pyramids. In W. G. Kropatsch and H. Bischof editors *Pattern Recognition* pages 333–348 Oldenbourg Austria 1992.
- [61] Walter G. Kropatsch. Curve representation in multiple resolution. *Pattern Recognition Letters* (6):179–184 1987.
- [62] W.G. Kropatsch. Building irregular pyramids by dual graph contraction. Technical Report PRIP-TR-35 Dept. for Pattern Recognition and Image Processing Institute for Automation Technical University of Vienna Austria 1994.
- [63] S.W.C. Lam and H.H.S. Ip. Structural texture segmentation using irregular pyramid. *Pattern Recognition Letters* 15(9):691–698 July 1994.
- [64] Eric Levrat. *Application de la théorie des ensembles flous à l'amélioration et à la segmentation d'images monochromes*. PhD thesis Université Nancy II 1989.
- [65] C. H. Li and C. K. Lee. Minimum cross entropy thresholding. *Pattern Recognition* 26(4):617–625 1993.
- [66] X. Q. Li Z. W. Zhao H. D. Cheng C. M. Huang and R. W. Harris. A fuzzy logic approach to image segmentation. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 337–341 Jerusalem Israel October 1994.
- [67] Y. W. Lim and S. U. Lee. On the color image segmentation algorithm based on the thresholding and the fuzzy c-means techniques. *Pattern Recognition* 23(9):935–952 1990.
- [68] Xiaofan Liu Shaohua Tan V. Srinivasan S. H. Ong and Weixin Xie. Fuzzy pyramid-based invariant object recognition. *Pattern Recognition* 27(5):741–756 1994.

- [41] D. D. Giusto, C. S. Regazzoni and G. Vernazza. Colour image segmentation by a fuzzy data-fusion approach. In *Computer Analysis of Images and Patterns* pages 42–48, 1989.
- [42] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 2th ed. 1985.
- [43] Silviu Guiasu and Radu Theodorescu. *Incertitude et Information*. Les presses de l'université Laval, Québec, 1971.
- [44] Philippe Guillataud and Patrick Hanusse. Semantique des images par analyse dendronique. In *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle* volume 2, pages 577–588, 1993.
- [45] H. Heijmans and L. Vincent. Mathematical morphology in image analysis. In E. Dougherty, editor, *Mathematical morphology in image processing*, Marcel-Dekker, New York, september 1992.
- [46] T.H. Hong and A. Rosenfeld. Compact region extraction using weighted pixel linking in a pyramid. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6(2):222–229, march 1984.
- [47] Ludvik Janos and Azriel Rosenfeld. Some results on fuzzy (digital) convexity. *Pattern Recognition* 15(5):379–382, 1982.
- [48] J.M. Jolion. Analyse d'images : le modèle pyramidal. *Traitement du Signal* 7(1):5–17, 1990.
- [49] J.M. Jolion and A. Montanvert. La pyramide adaptative: construction et utilisation pour l'analyse de scènes 2D. In *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*, pages 197–206, Paris, November 1989.
- [50] J.M. Jolion and A. Montanvert. The adapted pyramid: a framework for 2D image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 55(3):339–348, May 1992.
- [51] J.M. Jolion and A. Rosenfeld. *A pyramid framework for early vision*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [52] R. Kamekura, H. Tashiro, N. Ito, T. Yokoyama and Y. Matsushita. Adopting fuzzy reasoning in edge detection of color image. In *Graz OAGM*, pages 361–369, 1993.
- [53] J. N. Kapur, P. K. Sahoo and A. K. C. Wong. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* (29):273–285, 1985.
- [54] M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos. Active contours models. *International Journal of Computer Vision* (1), 1987.

- [27] J. M. Chassery and M. Melkemi. Diagramme de Voronoï appliqué à la segmentation d'images et à la détection d'événements en imagerie multi-sources. *Traitement du Signal* 8(3):155–164 1991.
- [28] J. M. Chassery and A. Montanvert. A segmentation method in a Voronoi diagram environment. In *6th Scandinavian Conference on Image Analysis* pages 408–415 Oulu Finland June 19-22 1989.
- [29] B. B. Chaudhuri. Concave fuzzy set: a concept complementary to the convex fuzzy set. *Pattern Recognition Letters* (13):103–106 1992.
- [30] K. Cho and P. Meer. Image segmentation from consensus information. Number CE-124 September 1995.
- [31] P. Clermont and S. Cartier. Implementation and evaluation of region growing algorithms on CM2. In *Proc. of the Int. Colloquium on Parallel Image Processing* pages 91–109 Paris France June 17-19 1991.
- [32] G. Coray, A. Noetzel and A. M. Selkow. Order independence in local clustering algorithms. *Computer Graphics and Image Processing* (4):120–132 1975.
- [33] Hariton Costin. On object classification by means of fuzzy sets' theory. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 458–461 La Haye 1992.
- [34] A. de Luca and S. Termini. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control* (20):301–312 1972.
- [35] V. di Gesù and M. C. Maccarone. Features selection and “possibility theory”. *Pattern Recognition* 19(1):63–72 1986.
- [36] J. C. Dunn. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. *Journal of Cybernetics* 3(3):32–57 1974.
- [37] W. D. Fisher. On grouping for maximum homogeneity. *JASA* 53:789–798 1958.
- [38] A. Gagalowicz and O. Monga. Un algorithme de segmentation hiérarchique. In *Actes du 5ème Congrès RFIA, AFCET-INRIA ed.* pages 163–177 Grenoble France November 1985.
- [39] A. Gagalowicz and O. Monga. A new approach for image segmentation. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 265–267 Paris France 1986.
- [40] T. Gevers and V. K. Kajcovski. Image segmentation by directed region subdivision. In *International Conference on Pattern Recognition* pages 342–346 Jerusalem Israel October 1994.

- [13] M. BisterΓJ. CornelisΓand A. Rosenfeld. A critical view of pyramid segmentation algorithms. *Pattern Recognition Letters*Γ11(9):605–617ΓSeptember 1990.
- [14] A. Blake and A. Zisserman. *Visual reconstruction*. MIT PressΓCambridgeΓMAΓ1987.
- [15] R. P. Blanford and S. L. Tanimoto. Bright-spot detection in pyramids. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*Γ43:133–149Γ1988.
- [16] Isabelle Bloch. Connexité floue et morphologie mathématique. Technical Report 92 D 001ΓTELECOMΓParisΓ1992.
- [17] Isabelle Bloch and Henri Maître. Ensembles flous et morphologie mathématique. Technical Report 92 D 007ΓTELECOMΓParisΓ1992.
- [18] Isabelle Bloch and Henri Maître. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition*Γ28(9):1341–1387Γ1995.
- [19] Nozha BoujemaaΓGeorges StamonΓand André Gagalowicz. Modélisation floue pour la segmentation d'images. In *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*Γpages 163–173ΓParisΓFranceΓ1994.
- [20] C.E. Buckley. Split-and-merge image segmentation based on Delaunay triangulation. In *Lectures notes in computer science, 333, International Workshop Computational Geometry, Warzburg*ΓMarch 1988.
- [21] P.J. Burt. Fast filter transforms for image processing. *Computer Graphics and Image Processing*Γ16:20–51Γ1981.
- [22] P.J. Burt and E.H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Transactions on Communications*ΓCOM-31:532–540Γ1983.
- [23] H. CaillolΓA. HillionΓand W. Pieczynski. Segmentation contextuelle non supervisée d'images utilisant une modélisation statistique floue. In *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle*Γpages 145–151ΓParisΓFranceΓ1994.
- [24] V. Cantomi and S. Levialdi. *Pyramidal systems for computer vision*. Springer-VerlagΓBerlinΓ1986.
- [25] T. ChampionΓT. ForveilleΓand V. Lattuati. Segmentation d'images monochromes par classification floue. In *C.Q.V.A.*Γpages 73–82ΓLe CreusotΓJune 17-19 1993.
- [26] F. ChantemargueΓM. PopovicΓR. CanalsΓand P. Bonton. Parallelization of the merging step of the region segmentation method. In *7th Scandinavian Conference on Image Analysis*Γpages 993–940ΓAalborgΓDenmarkΓAugust 13-16 1991.

Bibliographie

- [1] N. Ahuja and B. An. Image representation using Voronoi tessellation. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* (29):286–295 (1985).
- [2] Abdel Belaïd and Yolande Belaïd. *Reconnaissance des formes - Méthodes et applications*. Inter Editions (Paris) (1992).
- [3] Claude Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod (3th ed. 1983).
- [4] F. Bergholm. Edge focusing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 9(6):726–741 (1987).
- [5] P. Bertolino. Structure pyramidale irrégulière pour la segmentation d'images en niveaux de gris. Mémoire d'ingénieur C.N.A.M. (Conservatoire National des Arts et Métiers (Grenoble) (Décembre 1992).
- [6] P. Bertolino. Contribution des pyramides irrégulières en segmentation d'images multirésolution. Master's thesis (INPG (Grenoble) (1995).
- [7] J.R. Beveridge (J. Griffith (R. Kohler (A. Hanson (and E. Riseman. Segmenting images using localized histograms and region merging. *International Journal of Computer Vision* 29(2):311–347 (1989).
- [8] J. C. Bezdek. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Plenum Press (New York) (1981).
- [9] Dinabandhu Bhandari (Nikhil R. Pal (and D. Dutta Majumder. Fuzzy divergence (probability measure of fuzzy events and image thresholding. *Pattern Recognition Letters* (13):857–867 (1992).
- [10] C. G. Bhattacharya. A simple method of resolution of a distribution into gaussian components. *Biometrics* (23):115–135 (1967).
- [11] Horst Bischof and Walter G. Kropatsch. Fuzzy curve pyramid. In *International Conference on Pattern Recognition* (pages 505–509) (Jerusalem (Israel) (October 1994).
- [12] M. Bister. A critical view on pyramid segmentation algorithms. Technical Report IRIS-TR-0006 (Vrije Universiteit Brussel (Informatics and Electronics Lab. (1989).

qui force les sommets flous dont un des pères devient flou à choisir leur père définitif. Des stratégies ont été créées pour éviter la formation de régions déconnectées dans la pyramide floue.

Toutes les procédures restent parallélisables et l'ordre d'évaluation des éléments des graphes représentant les plusieurs niveaux de la pyramide n'a pas d'importance.

Par rapport à la pyramide irrégulière stochastique nous avons remarqué que la pyramide floue traite plus aisément les images texturées. La réduction de l'influence du bruit se fait grâce à la possibilité qu'a un sommet de repousser la décision d'attachement définitif. Les entités allongées sont mieux détectées mais il n'a pas d'amélioration significative lorsque les images testées sont bien contrastées.

Il existe encore plusieurs points d'intérêt concernant la pyramide irrégulière floue qui méritent d'être étudiés plus attentivement comme par exemple : l'exploitation des critères autres que les niveaux de gris (surface texture ...) la mise à jour de voisinages l'automatisation du choix des paramètres de "fuzzification" et de "défuzzification" ainsi que l'extension des mesures classiques au cas flou (surface périmètre compacité ...).

Nous remarquons que comme toute pyramide de graphe la pyramide floue a des difficultés à traiter les informations de contour. Une coopération région/contour pour la détection de frontières floues semble être l'un des points les plus importants à développer.

Le processus de post-segmentation fondé sur l'accumulation de résultats des pyramides des graphes est adapté à la pyramide floue ; l'intégration d'une procédure de multi-résolution plus riche avec l'apport de l'accumulation de résultats des pyramides floues peut aussi être prometteuse.

Nous pouvons encore citer la possibilité de la généralisation au cas 3D ainsi que l'exploitation avec l'existant (coopérations avec des techniques de seuillage dans le but de déterminer automatiquement le seuil global ou de fournir des informations de contours par exemple).

Il est vrai que malgré les progrès faits ces dernières années dans le domaine de l'analyse d'images nous ne sommes pas encore arrivés à mettre au point une technique de segmentation adaptée à tous les types d'images. Dans ce travail un pas de plus a été fait dans une direction qui pourra peut être apporter une solution à ce genre de problème.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Dans ce travail nous avons étudié l'introduction de la logique floue dans les processus de segmentation d'images. Des techniques de premier et de deuxième ordres ont été présentées et appliquées à plusieurs images. Les techniques de premier ordre ont été abordées au chapitre 3. Lors de la présentation de ce chapitre nous avons fait un survol des méthodes classiques traditionnelles et nous les avons comparées avec des techniques utilisant la logique floue.

Deux méthodes fondées sur l'entropie floue ont été développées. Une coopération entre ces méthodes et l'entropie adaptée classique a été proposée pour la segmentation d'images cytologiques. Cette coopération s'avère robuste au bruit et fournit de meilleurs résultats pour les images cytologiques que toute autre technique de premier ou deuxième ordre présentée dans ce travail.

L'étude des propriétés des mesures proposées ainsi que leurs généralisations pour k classes nous semble être un sujet d'extrême intérêt.

Dans le chapitre 4 nous avons présenté les méthodes de segmentation de deuxième ordre utilisant la notion de pyramide. Les pyramides irrégulières ont été étudiées et leur support théorique fondé sur la théorie de graphes a été formalisé.

L'introduction d'un facteur d'incertitude dans le processus de segmentation fondé sur la pyramide de graphes a été proposée au chapitre 5. Cela se fait à l'aide des sommets flous qui peuvent retarder leur choix d'un père. Ces sommets resteront donc attachés à tous leurs pères potentiels jusqu'à ce qu'ils puissent décider définitivement de leur affectation. Ce type d'attachement donne naissance aux fausses adjacences dans le graphe représentant chaque niveau de la pyramide. Ces adjacences non réelles sont réalisées par les arêtes floues qui à leur tour permettent que dans les zones les plus homogènes de l'image le taux de fusion soit supérieur à celui des zones d'homogénéité inférieure.

Les possibilités de mesurer l'homogénéité des fusions obtenues au moyen des arêtes floues sont nombreuses. On a présenté deux manières de réaliser cette tâche fondées sur la variance et sur la somme des différences des niveaux de gris. Il serait intéressant de prendre en compte la surface des régions lors de la détermination de l'homogénéité associée à chaque arête floue.

La propagation de l'incertitude dans la pyramide est contrôlable grâce à la règle

Procédure 12 *Itération k'*

1. *POUR TOUT* sommet F flou *FAIRE*

Choix de $P_{\text{prov}}(F)$;

SI (le seuil s_{defuzz} est satisfait ou F est le sommet le plus âgé d'une chaîne floue ou c'est la dernière itération) ALORS

$P(F) = P_{\text{prov}}(F)$;

SINON

$\text{age_flou}[F] = \text{age_flou}[F] + 1$;

FIN SI

2. *Éliminer les voisins flous des sommets flous (procédure 1)*;

3. *POUR TOUT* sommet F flou *FAIRE*

SI (F reste flou) ALORS

$\text{age_flou}[F] = \text{age_flou}[F] + 1$;

mettre à jour $P(F)$;

SINON

F est marqué pour mourir;

Éliminer la clique floue engendrée par F (procédure 6);

Transformer en arêtes réelles celles entre $P(F)$ et les autres pères de F (procédure 8);

Transmettre les attributs de F au père choisi (équations 5.34 à 5.36);

F est marqué pour mourir;

FIN SI

4. *Recalculer les attributs des sommets (voir section 5.10)*;

5. *Reconstruction des cliques engendrées par les sommets flous et les nouveaux flous*;

6. *Refaire les graphes d'adjacence et de similarité (voir section 5.10)*;

Procédure 11 *Itération k - Continuation*

3. *POUR TOUT* sommet F flou FAIRE

Enlever les attributs transmis aux pères (équations 5.25 à 5.27);

SI ($|flux[F]| > 0$) ALORS

choix d'un flux par F ;

$P(F) = S$ tel que le flux choisi va vers S ;

POUR TOUT sommet $VM \in P(F)$ qui vient de mourir FAIRE

SI ($P_prov(VM) = P(F)$) ALORS

$P(VM) = P_prov(VM)$;

VM est marqué pour mourir;

SINON

$P_prov(VM) = NULL$;

VM est marqué pour devenir flou;

FIN SI

F est marqué pour mourir;

Éliminer la clique floue engendrée par F (procédure 6);

Transformer en arêtes réelles celles entre $P(F)$ et les autres pères de F (procédure 8);

Transmettre les attributs de F au père choisi (équations 5.31 à 5.33);

SINON

Faire la mise à jour de $P(F)$;

FIN SI

4. *Chaque* sommet VM tel que $P_prov(VM) = P(VM)$ passe ses attributs à son père (équations 5.37 à 5.39);

5. *Reconstruction des cliques floues par les sommets flous et les nouveaux flous;*

6. *Recalculer les attributs des survivants (voir section 5.10);*

7. *Refaire les graphes d'adjacence et de similarité (voir section 5.10);*

8. *Les sommets marqués deviennent flous ou morts selon leurs marques;*

Procédure 9 *Mise à jour du voisinage des pères d'un sommet F qui reste flou*

POUR chaque $P(P_i(F)) \neq P(P_j(F))$ *FAIRE*

créer l'arête $\wp(P(P_i(F)), F, P(P_j(F)))$;

FIN POUR

Procédure 10 *Itération k - Première partie*

1. *POUR TOUT* sommet F flou *FAIRE*

$|flux[F]| = 0$;

$somme_flux[F] = 0$;

$max_flux[F] = 0$;

2. *POUR TOUT* sommet VM qui vient de mourir *FAIRE*

Choisir $P_prov(VM)$;

SI (le seuil s_{fuzz} n'est pas satisfait) *ALORS*

$P_prov(VM) = NULL$;

VM est marqué pour devenir flou;

SINON

SI (le lien entre VM et $P_prov(VM)$ utilise un sommet flou F) *ALORS*

$|flux[F]| = |flux[F]| + 1$;

SI ($\mu_{\mathcal{A}}[\wp(VM, F, P_prov(VM))] > max_flux[F]$) *ALORS*

$max_flux[F] = \mu_{\mathcal{A}}[\wp(VM, F, P_prov(VM))]$;

FIN SI

SINON

$P(VM) = P_prov(VM)$;

VM est marqué pour mourir;

FIN SI

FIN SI

Aller à la procédure 11 (page 160).

Procédure 7 *Évaluation du voisinage de chaque sommet VM*

POUR chaque élément de $\Gamma(VM)$ *FAIRE*

SI (cet élément est un sommet survivant $S \neq P(VM)$) *ALORS*

SI ($\mu_{\mathcal{A}}(VM, S) = 1$) *ALORS*

SI ($S \notin \Gamma(P(VM))$ ou $\mu_{\mathcal{A}}(S, P(VM)) < 1$) *ALORS*

créer l'arête réelle $(P(VM), S)$;

FIN SI

SINON

SI ($\mu_{\mathcal{A}}(VM, S) < 1$ et F réalisant le lien reste flou) *ALORS*

créer l'arête floue $\wp(P(VM), F, S)$;

FIN SI

FIN SI

SINON

SI (cet élément est un sommet VM' et $P(VM') \neq P(VM)$) *ALORS*

SI ($\mu_{\mathcal{A}}(VM, VM') = 1$) *ALORS*

créer l'arête réelle $(P(VM), P(VM'))$;

FIN SI

SINON

SI ($\mu_{\mathcal{A}}(VM, VM') < 1$ et F réalisant le lien reste flou) *ALORS*

créer l'arête floue $\wp(P(VM), F, P(VM'))$;

FIN SI

FIN SI

FIN SI

FIN POUR

Procédure 8 *Mise à jour du voisinage des pères d'un sommet flou F qui a décidé*

POUR chaque $P(P_i(F))$ tel que $P(P_i(F)) \neq P(F)$ *FAIRE*

créer l'arête $(P(P_i(F)), P(F))$;

FIN POUR

La baisse de résolution dans les zones les plus homogènes est plus rapide que dans les autres zones. Cela s'explique par le fait que dans ces zones il y a beaucoup plus de sommets flous ce qui entraîne des fusions multiples générées par les flux privilégiés par les sommets flous.

Les graphes flous ne sont pas forcément planaires mais ils sont simples car seule l'arête la plus forte entre deux sommets quelconques survit. Les autres sont éliminées. De toute façon les graphes traités dans les pyramides floues ou non sont toujours finis.

Un sommet flou F peut choisir un autre flou F' comme père. Une situation classique qui oblige cela est celle où tous les pères du sommet F deviennent flous. Or dans la deuxième partie de l'itération le sommet F sera obligé de prendre sa décision car il est forcément le plus âgé d'une ou plusieurs chaînes floues. Les attributs des sommets flous changent au fur et à mesure que la pyramide est construite.

La convergence de la pyramide floue est assurée par le fait que les ensembles de survivants décroissent à chaque itération. Lorsque tous les sommets flous sont obligés de décider le nombre de sommets baisse on est donc obligé de terminer dans le pire cas avec un seul sommet survivant. Le nombre d'itérations dans une pyramide floue est du même ordre que celui de la pyramide irrégulière.

5.15 Commentaires

Le critère qui oblige la prise de décision définitive du sommet flou le plus âgé d'une chaîne floue est en fait un critère de contrôle naturel qui empêche la propagation de l'incertitude dans la pyramide floue. Il est aussi possible de forcer un sommet flou à choisir un père lorsqu'il arrive à un certain âge. Ce deuxième facteur de contrôle est moins naturel que le premier. Une troisième idée peut être utilisée : lorsqu'un sommet flou atteint un certain âge s'il ne peut pas choisir son père il se transforme en un sommet survivant. Cette stratégie ne serait qu'une "correction" du critère de choix des survivants. Finalement une autre manière de contrôler l'incertitude dans la pyramide floue vient de l'obligation du choix d'un père par les sommets flous lors du dernier niveau.

Lorsqu'un sommet flou F favorise un flux vers un survivant S il est nécessaire de réaliser les liens du type $\varphi(VM, F, S)$ tels que $P_{prov}(VM) = S$ et de transformer les sommets VM' liés au survivant S' au moyen de $\varphi(VM', F, S')$ tels que $P_{prov}(VM') = S, S \neq S'$ en sommets flous. Il est possible de considérer ce type de situation autrement. Chaque sommet VM' qui choisit un père non favorisé par le flux aurait la possibilité de s'attacher à son voisin survivant placé en deuxième position de similarité. Pour cela chaque sommet choisit son père provisoire et son père remplaçant. Ce deuxième peut devenir le père définitif si le premier n'est pas favorisé par le flux du sommet flou et si l'attachement entre VM' et $P_{remp}(VM')$ peut se réaliser sans problèmes.

Les changements apportés par l'introduction des sommets et arêtes flous dans la pyramide irrégulière n'empêchent pas que des procédures de post-segmentation (consensus, taille minimale des régions etc.) soient utilisées après la fin de l'algorithme. Cela est dû au fait qu'à l'apex de la pyramide floue tous les sommets flous disparaissent ainsi que les arêtes flous. Nous pouvons d'une certaine façon considérer que ce qui vient après la "dernière itération" est déjà une procédure de post-segmentation puisque les changements apportés par les itérations supplémentaires ne sont que locaux.

L'existence de sommets flous entraîne la création de frontières floues entre les régions. Cela parce que les frontières entre les pères des sommets flous ne sont pas bien définies. Pour cette raison lorsqu'on utilise une coopération du type "régions/contours" qui évolue parallèlement avec le graphe d'adjacence entre les régions il est nécessaire de considérer aussi les arêtes floues. Cela se traduit par l'utilisation d'un élément de contour $\mu_{\mathcal{A}}(A, B) \times \alpha$ dans la pyramide floue à la place de α dans la pyramide irrégulière classique.

À chaque fois que l'on parcourt la liste des voisins d'un sommet A il ne suffit pas de vérifier si un sommet B fait partie de cette liste. Il est nécessaire de vérifier quel est le type de lien entre A et B . Pour cela nous devons vérifier si l'arête (A, B) est réelle ou floue ; si elle est floue normalement il est important de connaître le sommet flou qui est responsable du lien entre A et B . La structure de voisinage de la pyramide irrégulière floue est donc plus complexe que celle de la pyramide irrégulière classique.

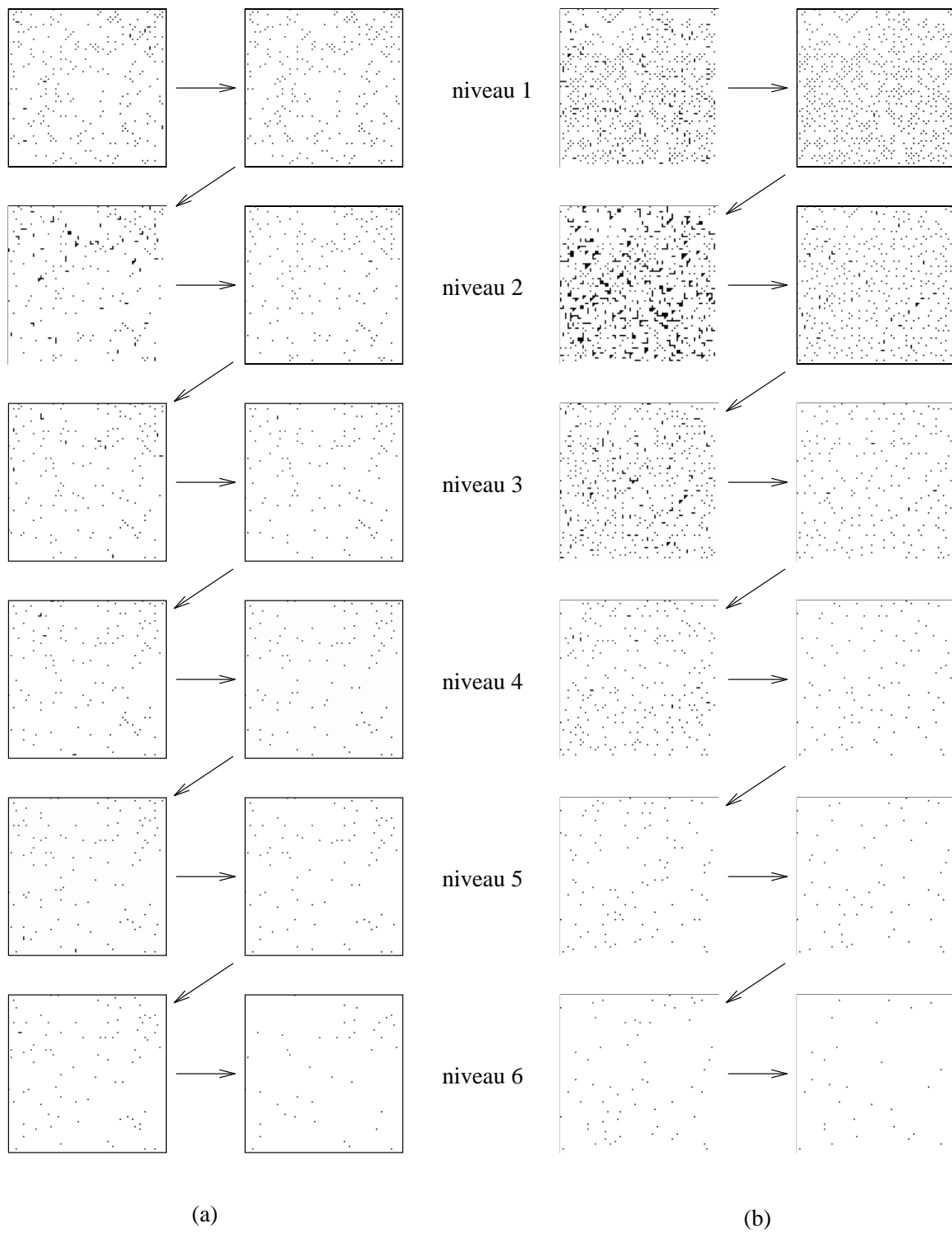


FIG. 5.32 - Les sommets flous des 7 premiers niveaux de deux pyramides floues Γ construites avec un seuil global égal à 33Γ mais n'ayant pas les mêmes seuils de "fuzzyfication" et "defuzzification".

s_{defuzz} en prenant en compte les zones homogènes et hétérogènes dans l'image. Cela permettrait de mieux contrôler l'incertitude dans la pyramide.

La répartition des sommets flous dans l'image

Les sommets flous ne sont pas uniformément répartis sur l'image et cela se voit bien dans la figure 5.32. Cela veut dire qu'il y a des zones où ces sommets disparaissent rapidement et que dans d'autres zones ils ont du mal à choisir un père définitif. La distribution (et aussi la quantité) des sommets flous dans l'image dépend alors de l'homogénéité dans l'image.

Le paramètre t_{max}

Un facteur qui nous semble intéressant à considérer est la surface des sommets flous. Lorsque l'attribut surface associé à un sommet flou est de taille importante ce sommet peut empêcher la localisation des entités allongées dans l'image. Il nous a donc paru important de limiter la naissance des sommets flous dont la surface dépasse t_{max} . Pour les images bien contrastées nous pouvons utiliser $t_{max} = 500$ sans problème en revanche pour les images texturées cette valeur doit être réduite. L'influence de cette contrainte peut être remarquée dans la figure 5.32 à partir du passage entre le 4^e et le 5^e niveau (très peu de sommets deviennent flous).

Le temps de calcul

L'utilisation des attributs des sommets flous pour calculer les attributs de leurs pères (comme la surface et le niveau de gris par exemple) introduit des calculs plus lourds dans la pyramide car les nouvelles valeurs des niveaux de gris et des surfaces ne sont plus des nombres entiers. Cela en revanche est très important car la région floue représentée "un peu" par chacun de ces pères est prise en considération et exerce une influence sur les fusions.

La mise à jour des adjacences réalisée à partir des mises à jour des cliques floues à chaque niveau de la pyramide floue augmente considérablement le temps de calcul de l'algorithme par rapport à la pyramide irrégulière stochastique.

Les paramètres s_{fuzz} et s_{defuzz} qui contrôlent le nombre de sommets flous dans la pyramide ont un lien direct avec le temps utilisé pour la convergence du processus. Cela veut dire que plus on doit traiter de sommets flous plus l'algorithme est lent.

Nous pouvons dire qu'en moyenne la pyramide irrégulière floue prend une fois et demi le temps de calcul d'une pyramide irrégulière stochastique pour arriver à l'apex.

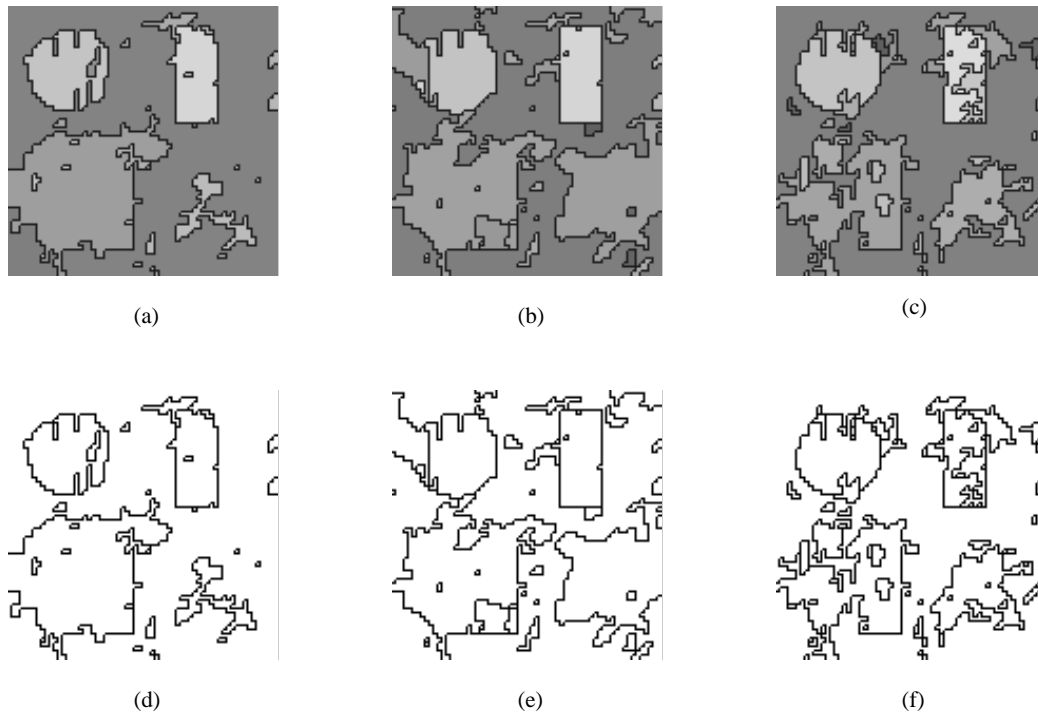


FIG. 5.31 - Segmentations sur l'image-test 8Γ contenant (a et d) 27 régions Γ (b et e) 39 régions et (c et f) 70 régions.

5.14.2 L'influence des paramètres

Les seuils de “fuzzification” et de “defuzzification”

Le critère déterminant si un sommet qui vient de mourir devient flou ou non Γ dépend d'un seuil de “fuzzification” s_{fuzz} (voir section 5.12). De la même manière Γ le seuil de “defuzzification” s_{defuzz} détermine si un sommet flou s'attache définitivement à son père le plus similaire ou si ce sommet reste encore flou. Ces critères Γ en fait Γ évaluent la différence de similarité entre le sommet et ses deux pères les plus similaires; si la différence dépasse le seuil Γ le sommet décide de s'attacher définitivement.

La figure 5.32 montre l'influence de ces deux paramètres à plusieurs niveaux d'une pyramide floue. Remarquons que Γ dans la pyramide illustrée en (a) Γ la quantité de sommets flous n'est pas aussi importante que dans la pyramide (b). Cela est dû au fait que s_{fuzz} utilisé dans (b) est supérieur à celui utilisé dans (a). Dès lors Γ on voit naître un grand nombre de sommets flous en (b).

La figure 5.32 montre aussi que le taux de “defuzzification” est plus élevé en (b) qu'en (a). Cela indique que le seuil s_{defuzz} utilisé en (a) est supérieur à celui utilisé en (b). Les sommets flous dans (b) peuvent alors décider plus facilement que ceux de (a) Γ ce qui justifie qu'au septième niveau Γ la différence entre le nombre de sommets flous dans (a) et (b) ne soit pas très importante.

Il serait intéressant de choisir de manière automatique et dynamique s_{fuzz} et

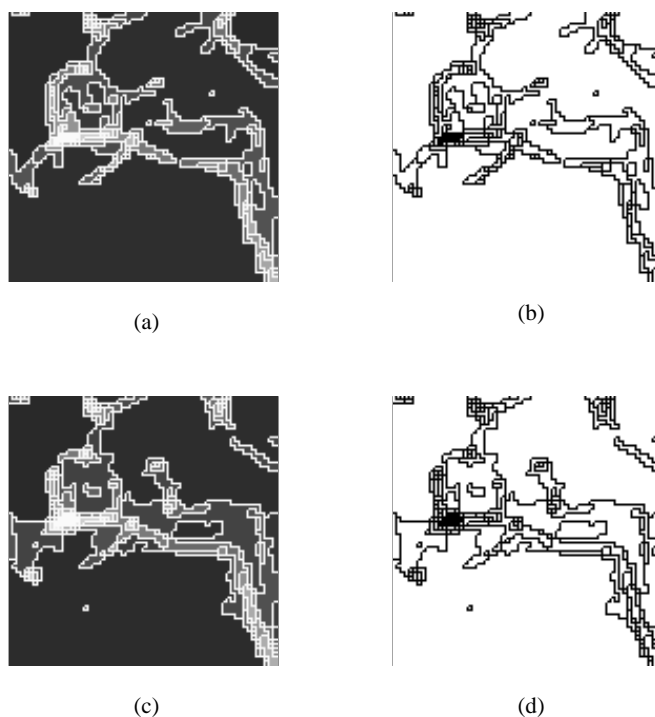


FIG. 5.30 - (a) L'apex trouvé par la pyramide floue Γ pour $s_g = 14$ en 18 niveaux et (b) la carte de contours respective montrant les 145 régions. (c) L'apex trouvé pour $s_g = 13$ en 16 niveaux et (d) la carte de contours respective montrant les 180 régions.

Image-test 8

Les trois résultats sur l'image-test 8 Γ qui sont montrés en figure 5.31 Γ nous amènent dire que la pyramide floue arrive à localiser de façon assez nette les formes dans l'image. Remarquons que l'image segmentée en 27 régions (a et d) Γ fournit des contours qui permettent d'avoir une idée de la forme des quatre entités présentes dans l'image. En réduisant le seuil global Γ le nombre de régions augmente Γ mais les zones occupées par les quatre entités restent toujours détectables (b et e). Dans le troisième résultat Γ on constate que la pyramide floue réduit l'influence de la texture du fond sur l'image.

Par rapport aux résultats fournis par la pyramide à maillage irrégulier (figure 4.14 Γ page 98) Γ nous pouvons dire que la pyramide floue est plus adaptée au traitement de la texture. Cela est certainement dû au fait que Γ dans les zones où des textures différentes sont voisines Γ la quantité de sommets flous est grande. Ces sommets ne se décident qu'après quelques itérations Γ lorsque les zones texturées se distinguent assez nettement.

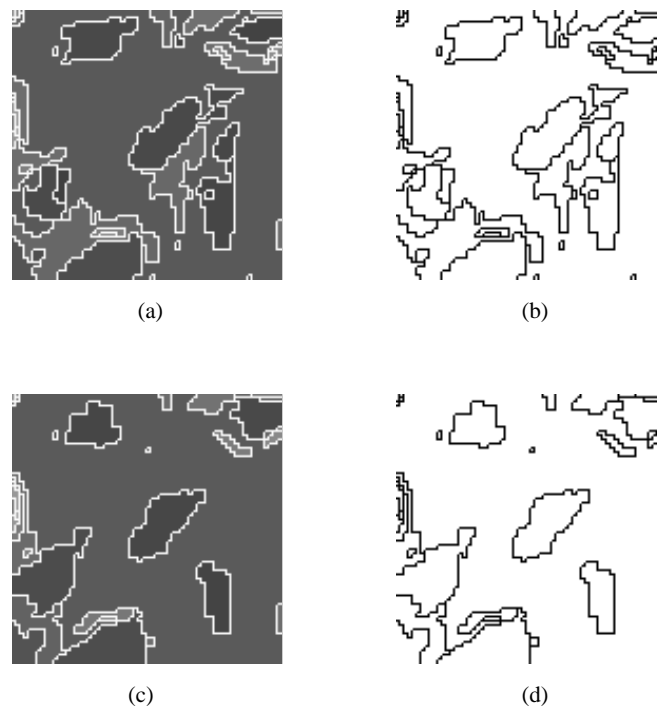


FIG. 5.28 - (a) L'apex trouvé pour $s_g = 10$ en 15 niveaux et (b) la carte de contours respective montrant les 48 régions. (c et d) Les 36 régions trouvées en 15 niveaux pour $s_g = 12$.

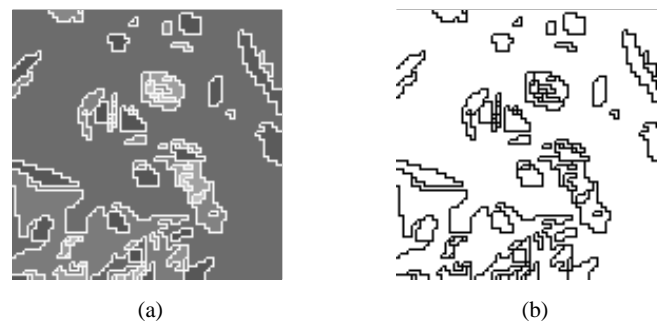


FIG. 5.29 - (a) L'apex trouvé pour $s_g = 11$ en 16 niveaux et (b) la carte de contours respective montrant les 90 régions.

les entités allongées dans l'image. C'est le cas du premier résultat (a et b) où l'on aperçoit que des entités allongées qui avaient été séparées en plusieurs morceaux par la pyramide irrégulière stochastique (les vaisseaux moins contrastés avec le fond) restent plus connexes. En baissant le seuil global la segmentation perd en qualité (c et d).

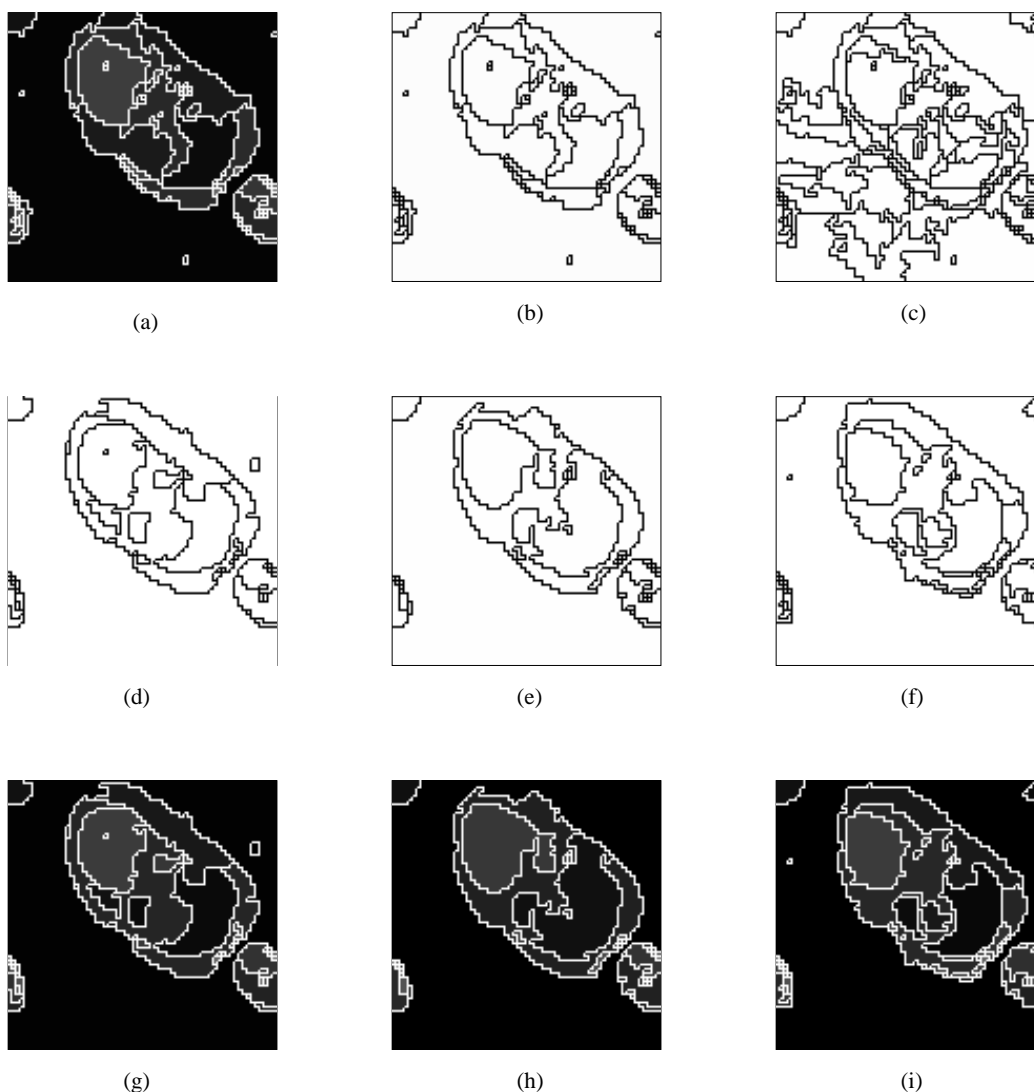


FIG. 5.27 - (a) L'apex trouvé pour $s_g = 10$ en 16 niveaux Γ (b) la carte de contours respective montrant les 78 régions et le niveau 8 de cette pyramide. (d et g) Les 45 régions trouvées en 13 niveaux Γ pour $s_g = 12$. (e et h) Les 44 régions trouvées en 14 niveaux Γ pour $s_g = 12$. (f et i) Les 62 régions trouvées en 14 niveaux Γ pour $s_g = 11$.

à maillage irrégulier. Pour vérifier cela il suffit de comparer les résultats montrés dans les figures 4.11 (page 96) et 4.12 (page 96) avec ceux des figures 5.28 et 5.29.

La coopération proposée dans la section 3.5 Γ fondée sur l'entropie floue et non-floue Γ reste toujours plus adaptée à la segmentation de ce type d'image.

Image-test 7

Pour l'image-test 7 Γ nous montrons deux résultats de l'application de la pyramide floue (figure 5.30). Par rapport aux résultats fournis par la pyramide à maillage irrégulier (page 97) Γ ceux obtenus avec l'introduction du flou arrivent à mieux détecter

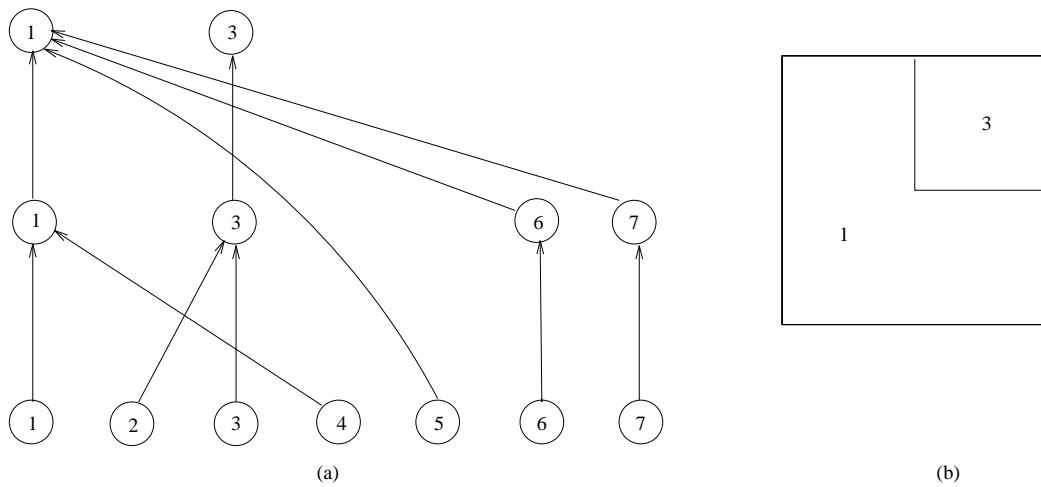


FIG. 5.26 - (a) Le graphe d'attachement flou et (b) la configuration finale.

Le graphe d'attachements flou de la figure 5.12(b) devient celui illustré en figure 5.26(a). La configuration finale est montrée en figure 5.26(b).

5.14 Mise en œuvre

Nous allons dans cette section analyser le comportement (en nombre et position dans l'image) des sommets flous en fonction des paramètres s_g , s_{fuzz} , s_{defuzz} et t_{max} ainsi que comparer les résultats obtenus par la pyramide floue avec ceux obtenus auparavant.

5.14.1 Résultats

Image-test 6

Pour l'image-test 6 la pyramide floue fournit de meilleurs résultats que ceux qui sont montrés en figure 4.10 (page 95). Cette supériorité est due au fait que la pyramide irrégulière stochastique se laisse tromper par le bruit tandis que la pyramide floue est adaptée au traitement de zones entachées d'incertitude. Les résultats fournis en figure 5.27 pour s_g égal à 10 (a et b) 11 (f et i) et 12 (d, g, e et h) illustrent bien cela. Nous montrons aussi le niveau 8 (où l'on peut voir l'influence du bruit) avant que l'apex (b) soit atteint au seizième niveau.

En général pour un même seuil global la pyramide floue atteint son apex en moins de niveaux que la pyramide à maillage irrégulier.

Images-test 1 et 2

La pyramide floue appliquée aux images des fibroblastes observés en contraste de phase ne donne guère de meilleurs résultats que ceux obtenus par la pyramide

$$NG(6) = \frac{110 \times 2 + 0.300 \times 4 \times 105}{2 + 0.300 \times 4} = 108, 13;$$

$$NG(7) = \frac{115 \times 4 + 0.267 \times 4 \times 105}{4 + 0.267 \times 4} = 112, 89.$$

Avec les nouveaux niveaux de gris le degré d'existence des arêtes floues (et conséquemment le degré de similarité) doit changer selon (5.21). Calculons-les :

$$s(1, 3) = 1 - \frac{59.206}{512} = 0.89;$$

$$s(1, 7) = 1 - \frac{22.034}{512} = 0.96;$$

$$s(6, 3) = 1 - \frac{52.956}{512} = 0.90;$$

$$s(6, 7) = 1 - \frac{15.789}{512} = 0.97.$$

Ainsi le graphe montrant le degré d'existence des arêtes est celui de la figure 5.25(a) le graphe de similarité est illustré en figure 5.25(b) et le graphe de similarité orienté est celui montré en figure 5.25(c).

Il existe deux noyaux maximaux dans ce graphe : $\{1, 3\}$ et $\{6, 3\}$. Restons par exemple avec $\{1, 3\}$. Il faut d'abord évaluer les sommets qui viennent de mourir (6 et 7). Ces sommets s'attachent au sommet survivant 1. Comme l'arête $\varphi(7, 5, 1)$ a été validée le sommet flou 5 s'attache ainsi naturellement au sommet 1.

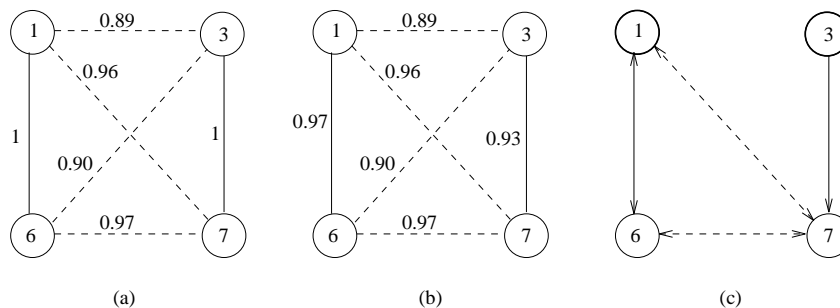


FIG. 5.25 - (a) Le degré d'existence des arêtes (b) le graphe de similarité et (c) le graphe de similarité orienté.

évalue chaque sommet qui vient de mourir (ou qui est déjà flou) pour vérifier s'il est capable de décider.

Nous proposons que ce critère soit fondé sur la différence de similarité entre le sommet en question et ses deux pères potentiels les plus similaires. Soit alors P_i le père potentiel le plus similaire P_j le deuxième mieux placé et s la fonction de similarité qui varie entre 0 et 1. Le sommet A choisit définitivement P_i comme père si

$$s(A, P_i) = 1 \quad \text{ou} \quad s(A, P_i) - s(A, P_j) \geq \begin{cases} s_{fuzz} & \text{si } A \text{ vient de mourir} \\ s_{defuzz} & \text{si } A \text{ est flou} \end{cases} \quad (5.40)$$

Les valeurs de s_{fuzz} et s_{defuzz} sont dans $]0, 1[$. Remarquons que même si $s(A, P_i) - s(A, P_j) = 0$ le sommet doit s'attacher à P_i au cas où la similarité est maximale.

Un autre paramètre qui entre en jeu dans ce processus est la taille maximale t_{max} pour qu'une région puisse devenir floue. Lors que la surface associée à un sommet qui vient de mourir dépasse t_{max} le sommet est obligé de prendre sa décision.

Ces paramètres feront objet d'une étude à la section 5.14.2.

5.13 Synthèse et exemple

Selon ce qui a été développé dans ce chapitre une pyramide irrégulière floue est construite par l'algorithme 4. D'après la section 5.9.3 l'étape 3 de cet algorithme doit être remplacée par la procédure 2 (page 133) si on veut permettre que de nouveaux regroupements locaux se produisent.

Le processus itératif commence par le choix des sommets survivants. Après cela pour passer d'un niveau k au niveau $k + 1$ deux procédures sont nécessaires la première évaluant les sommets qui viennent de mourir et la deuxième évaluant les sommets flous. Ce sont respectivement les procédures 10 et 12.

Développement d'un exemple

Considérons l'exemple de la section 4.5.4 où le graphe initial est celui de la figure 4.4(b) et l'ensemble de survivants est $S = \{1, 3, 6, 7\}$. Les sommets 2 et 4 décident de s'attacher respectivement aux survivants 3 et 1 mais le sommet 5 devient flou. Le graphe montrant ces attachements est celui de la figure 5.12(b). Les nouvelles adjacences sont illustrées en figure 5.12(a).

En fait au moment de recalculer le niveau de gris des survivants on n'a pas pris en compte l'information apportée par le sommet flou. On le fera maintenant en utilisant les équations de la section 5.11 :

$$NG(1) = \frac{100 \times 2 + 0.300 \times 4 \times 105}{2 + 0.300 \times 4} = 101.87 ;$$

$$NG(3) = \frac{135 \times 4 + 0.133 \times 4 \times 105}{4 + 0.133 \times 4} = 131.48 ;$$

$$\begin{aligned}
 A^{k+1}(S) &= A^{k'}(S) + \sum_{F^S} \mu_S(F) \cdot A(F) \\
 S_NG^{k+1}(S) &= NG^{k'}(S) + \sum_{F^S} \mu_S(F) \cdot A(F) \cdot NG(F) \\
 NG^{k+1}(S) &= \frac{S_NG^{k+1}(S)}{A^{k+1}(S)}
 \end{aligned}$$

selon le moment où le sommet S est évalué au niveau k .

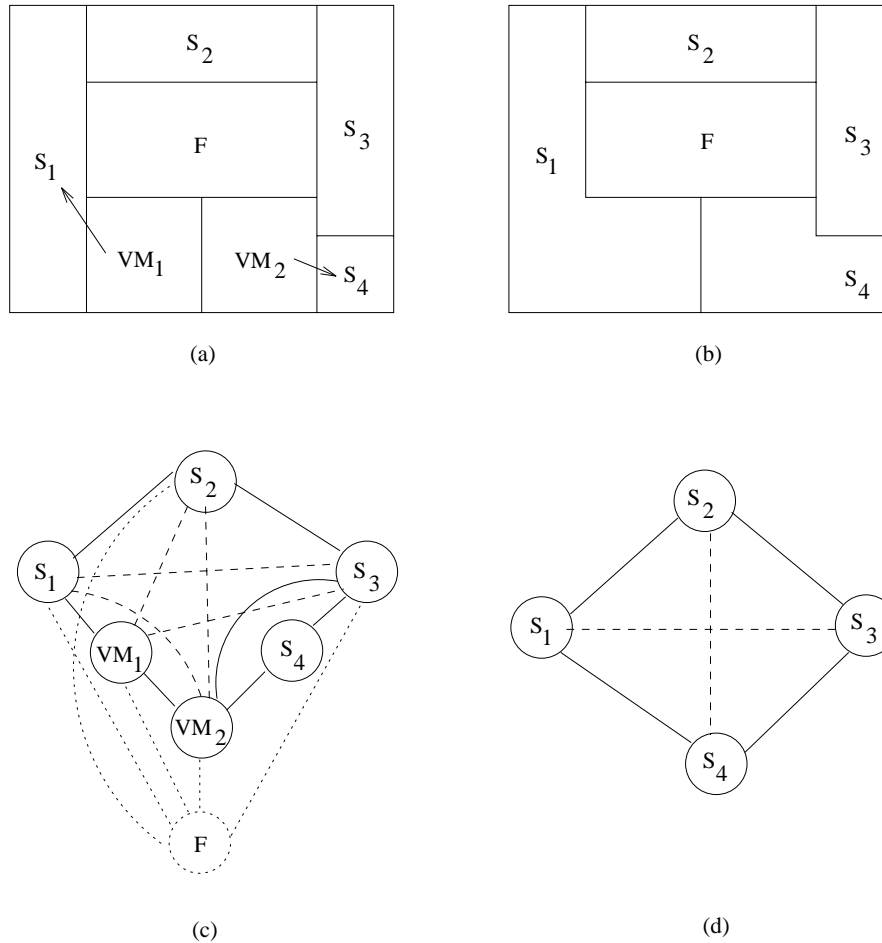


FIG. 5.24 - La configuration montrée en (b) résulte de celle de (a) après les fusions des sommets VM_1 avec S_1 et VM_2 avec S_4 . La clique floue d'ordre 5 de (c) donne lieu à la nouvelle clique illustrée en (d).

5.12 Critère de “fuzzification” et “defuzzification”

Durant le développement de la pyramide irrégulière floue nous avons plusieurs fois dit “qu'un sommet peut devenir flou”. Il est temps de définir un critère qui

$(P_i(F), P(F))$. En fait Γ pour avoir la certitude que le voisinage est mis à jour correctement Γ il est nécessaire de considérer aussi les pères potentiels de F qui ne sont pas survivants et Γ d'utiliser à la place de $P_i(F)$ leurs pères $P(P_i(F))$. À la place de $(P_i(F), P(F))$ on aura donc $(P(P_i(F)), P(F))$. La figure 5.23(a à d) illustre la transformation de la clique floue composée des sommets S_1, S_2, S_3, VM_1 et VM_2 en un graphe d'adjacence qui ne possède pas forcément les mêmes éléments de la clique. C'est le cas du sommet VM_1 qui disparaît ou de VM_2 qui introduit son père S_4 dans les nouvelles relations d'adjacence. La procédure 8 (page 158) effectue la mise à jour du voisinage des pères des sommets flous.

Les sommets flous qui restent flous

Maintenant Γ il ne reste dans le graphe que les survivants et les sommets flous qui n'ont pas encore pu choisir un père. Il faut refaire les cliques floues engendrées par ces sommets car l'ensemble des pères de chacun des sommets flous a pu changer. Cela s'explique par le fait qu'après chaque itération Γ l'ensemble $P(F) = \{S_1, S_2, \dots, S_v\}$ devient $\{P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_v)\}$. Comme la cardinalité de cet ensemble soit diminue Γ soit reste la même Γ les cliques floues engendrées par F deviennent de plus en plus simples. Il faut remarquer que lorsqu'une chaîne floue est détectée Γ l'ensemble $P(F)$ contient au moins un sommet flou.

Le traitement des sommets flous qui restent flous est réalisé par la procédure 9 (page 159).

Comme exemple remarquons ce qui se passe avec la configuration de la figure 5.24(a) si le sommet flou F reste flou : $P^k(F) = \{S_1, S_2, S_3, VM_1, VM_2\}$ devient $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ Γ comme nous montre la figure 5.24(b) Γ et la clique floue de la figure 5.24(c) devient celle montrée en figure 5.24(d).

5.11 La mise à jour des attributs des survivants

D'après ce qui a été présenté à la section 5.10.1 Γ les attributs de chaque sommet S survivant sont donnés dans un premier temps par :

$$\begin{aligned} A^{k'}(S) &= A^k(S) + \sum_{F^S} \mu_S(F)A(F) + \sum_{VM^S} A(VM) \\ S_NG^{k'}(S) &= NG^k(S) + \sum_{F^S} \mu_S(F)A(F)NG(F) + \sum_{VM^S} A(VM)NG(VM) \\ NG^{k'}(S) &= \frac{SNG^{k'}(S)}{A^{k'}(S)} \end{aligned}$$

où F^S représente les sommets flous qui ont choisi S comme père définitif et VM^S représente les sommets qui viennent de mourir et qui ont décidé de s'attacher à S . Dans la deuxième partie de l'itération k Γ où il n'y a plus de sommets tu type VM Γ ces mêmes attributs sont donnés par :

5.10.4 Le traitement complet des sommets flous

Après avoir traité les sommets qui viennent de mourir il est temps de mettre à jour les arêtes floues entre les survivants. Cela se fait au moyen des sommets flous. Nous allons traiter d'abord les sommets flous qui ont choisi leurs pères et ensuite ceux qui restent flous. C'est grâce à l'analyse des sommets flous que le voisinage flou des sommets qui viennent de mourir est traité en totalité.

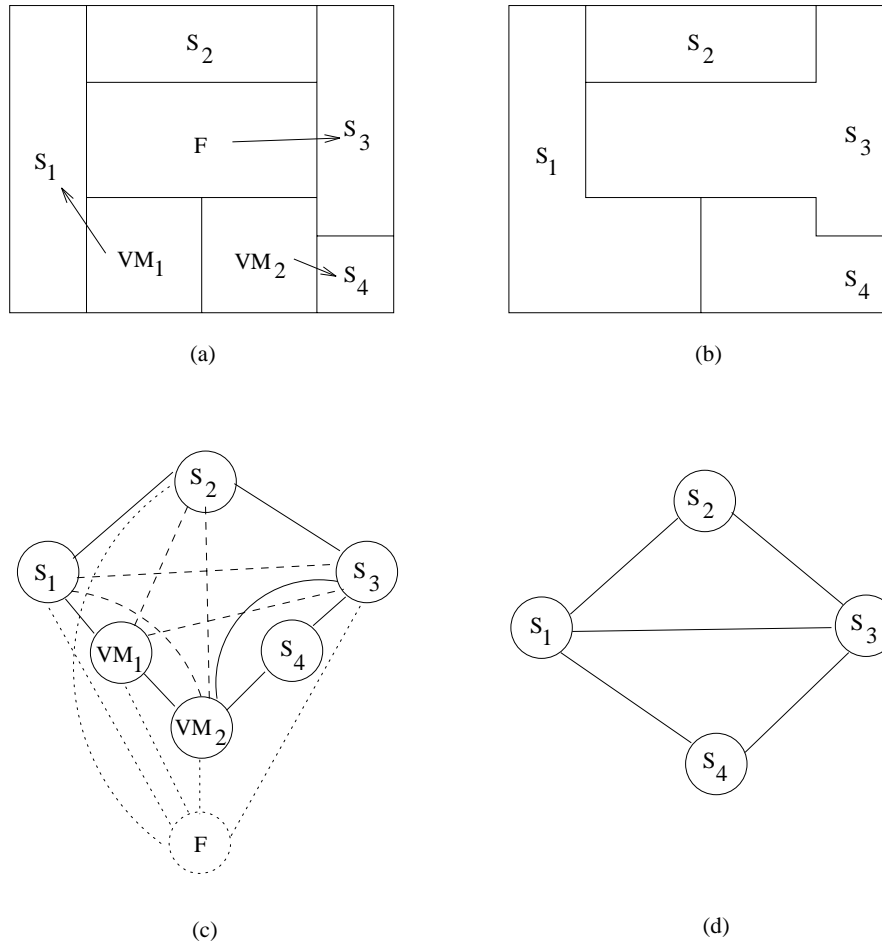


FIG. 5.23 - La configuration montrée en (b) résulte de celle de (a) après les fusions des sommets VM_1 avec S_1 Γ VM_2 avec S_4 et F avec S_3 . La clique floue d'ordre 5 de (c) donne lieu aux adjacences réelles montrées en (d).

Les sommets flous qui ont choisi un père

Soit F un sommet flou qui a choisi définitivement son père $P(F)$. La clique floue engendrée par F a déjà été éliminée par la procédure 6 (page 137) et les attributs de ce sommet ont été déjà transmis à son père au moyen des équations (5.31) à (5.36). Il faut donc transformer quelques unes des arêtes de l'ancienne clique floue engendrée par F en arêtes réelles. Ce sont les anciennes arêtes du type $\wp(P_i(F), F, P(F))\Gamma$ où chaque $P_i(F)$ était un père potentiel de F avant le choix de $P(F)$ Γ qui deviennent

correspondant à la configuration de la figure 5.21(a) après la fusion de VM avec S .

$P(VM) \notin P(F)$ Les liens du type $\varphi(VM, F, V)$ deviennent $\varphi(P(VM), F, P(V))$ à la condition que le sommet F continue à être flou et que l'arête $\varphi(P(VM), F, P(V))$ représente le plus fort lien entre $P(VM)$ et $P(V)$. Sur la figure 5.22(a et b) nous pouvons remarquer que le sommet V_2 devient voisin de S par l'intermédiaire de F grâce à la fusion de VM avec S .

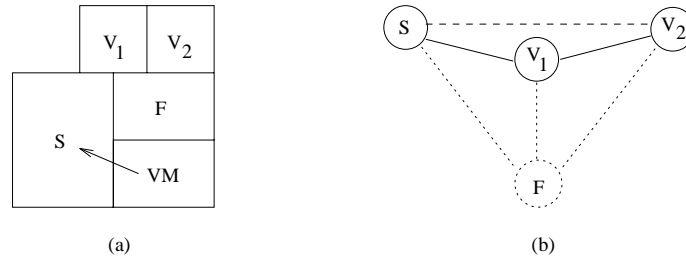


FIG. 5.21 - Après la fusion de VM avec S le graphe d'adjacence représentant la configuration montrée en (a) devient celui montré en (b).

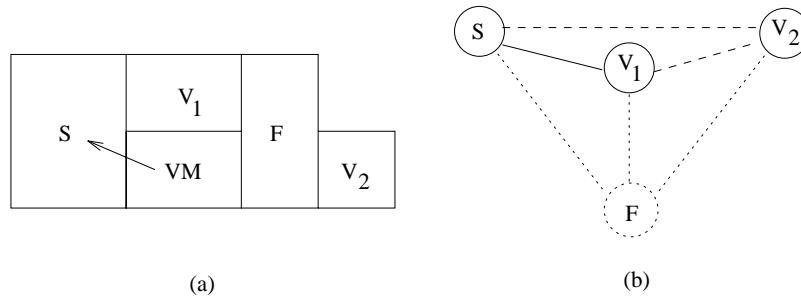


FIG. 5.22 - Après la fusion de VM avec S le graphe d'adjacence représentant la configuration montrée en (a) devient celui montré en (b).

Si le sommet flou F choisit son père définitif l'arête floue $\varphi(P(VM), F, P(V))$ pourra devenir une arête réelle (si $P(F) \in \Gamma(V)$ ou $P(F) \in \Gamma(VM)$) ou disparaître.

Eventuellement le voisinage flou d'un sommet qui vient de mourir peut être traité lorsque les cliques floues sont éliminées ou mises à jour au moyen des procédures 6 et 9.

La procédure d'évaluation du voisinage de chaque sommet VM

Cette synthèse des cas possibles nous mène à la création de la procédure 7 (page 158) qui évalue chaque sommet qui vient de mourir.

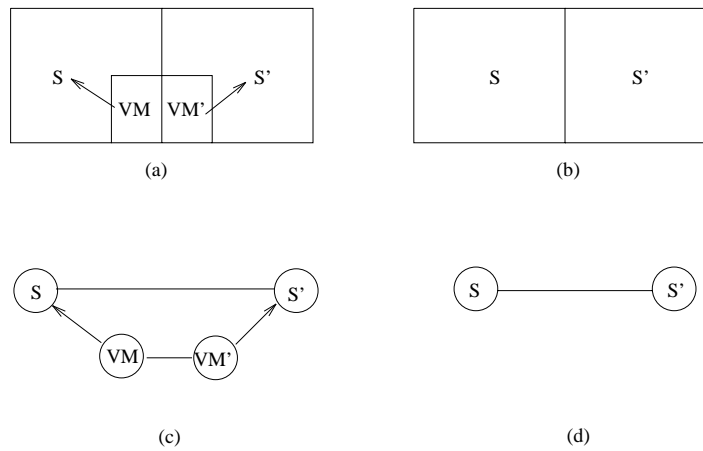


FIG. 5.19 - La configuration des régions en (a) devient celle montrée en (b) après la fusion de VM avec S et de VM' avec S' . Le graphe d'adjacence montré en (d) est le résultat de celui de (c) après contraction des sommets VM et S et VM' et S' .

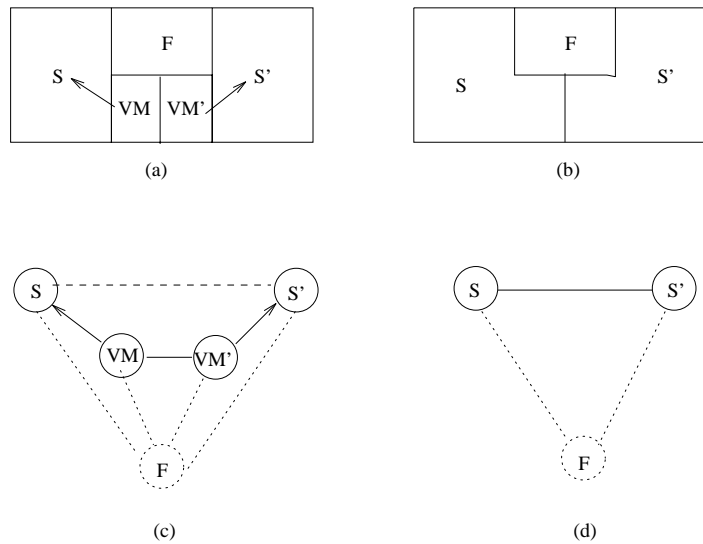


FIG. 5.20 - La configuration des régions en (a) devient celle montrée en (b) après la fusion de VM avec S et de VM' avec S' . Le graphe d'adjacence montré en (d) est le résultat de celui de (c) après contraction des sommets VM et S et VM' et S' .

Le voisinage flou d'un sommet VM

Les voisins V de VM liés par une arête floue ont en commun avec ce sommet la paternité d'un sommet flou F . Si le sommet flou reste flou deux cas sont possibles : soit $P(VM)$ est aussi un père de F soit il ne l'est pas.

$P(VM) \in P(F)$ Dans ce cas rien ne doit être fait car toutes les arêtes du type $\varphi(VM, F, V)$ possèdent leur correspondant $\varphi(P(VM), F, V)$ ou $(P(VM), V)$. C'est le cas des arêtes (S, V_1) et $\varphi(S, F, V_2)$ du graphe de la figure 5.21(b)

Les voisins qui viennent de mourir d'un sommet VM

Soit le sommet qui vient de mourir VM voisin de VM' tel que $P(VM') = S' \neq S = P(VM)$. Trois situations sont à analyser :

S' n'est pas voisin de S Cette situation est montrée en figure 5.18(a). Le résultat après la fusion de VM avec S et de VM' avec S' est celui montré par la figure 5.18(b). Nous voyons que les régions S et S' deviennent voisines donc l'arête (S, S') doit être créée. Les graphes représentant les adjacences sont ceux de la figure 5.18(c et d).

S' est voisin réel de S Dans ce cas l'arête (S, S') existe déjà donc on n'a rien à faire simplement les attributs de VM doivent être transmis à S et ceux de VM' seront transmis au père de VM . La figure 5.19(a à d) montre ce qui se passe au niveau de la configuration des régions et au niveau du graphe d'adjacence.

S' est voisin flou de S L'arête floue (S, F, S') doit être transformée en une arête réelle comme le montrent les graphes de la figure 5.20(c et d). La configuration de la figure 5.20(b) résulte de celle montrée par la figure 5.20(a). Les pères VM et VM' de F doivent être éliminés de la liste $P(F)$. Cela sera fait lors du traitement du sommet F .

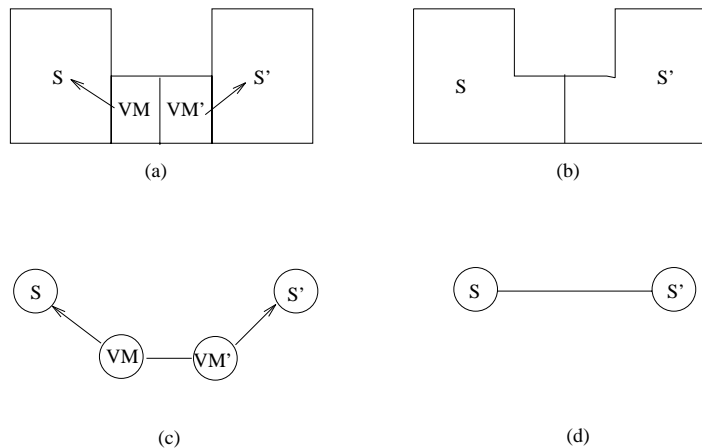


FIG. 5.18 - La configuration des régions en (a) devient celle montrée en (b) après la fusion de VM avec S et de VM' avec S' . Le graphe d'adjacence montré en (d) est le résultat de celui de (c) après contraction des sommets VM et S et VM' et S' .

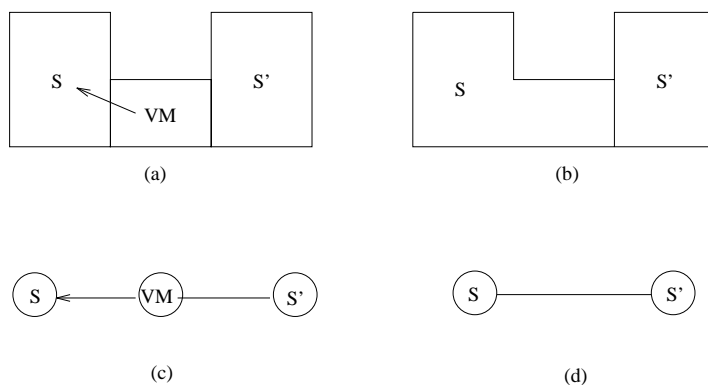


FIG. 5.15 - Avant ((a) et (c)) et après ((b) et (d)) la fusion de VM avec S .

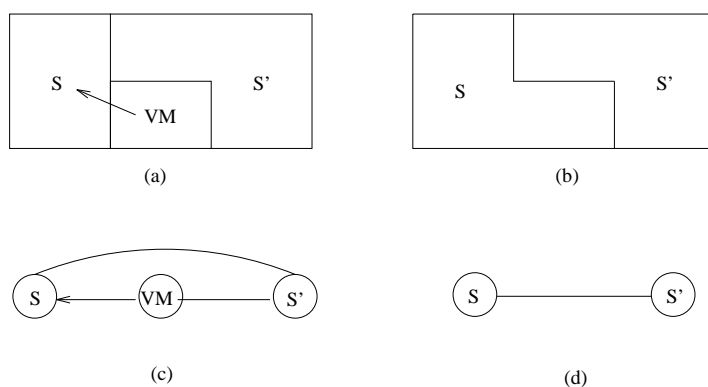


FIG. 5.16 - Avant ((a) et (c)) et après ((b) et (d)) la fusion de VM avec S .

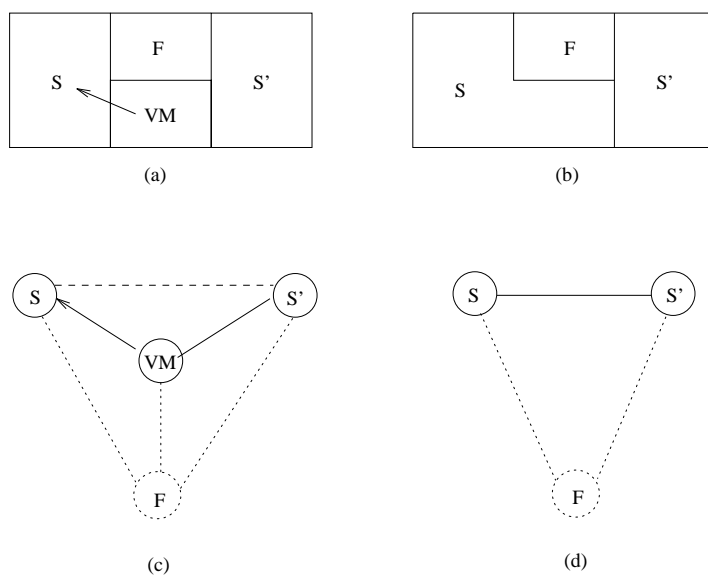


FIG. 5.17 - Avant ((a) et (c)) et après ((b) et (d)) la fusion de VM avec S .

La mise à jour des voisinages entraînée par le choix des sommets flous sera faite seulement après l'analyse des sommets qui viennent de mourir. Cela permet de calculer correctement le degré d'existence des arêtes floues car tous les attributs des survivants ont déjà été mis à jour.

5.10.3 Le traitement des sommets qui viennent de mourir

Dans cette section nous ne traitons que les sommets qui viennent de mourir et qui ont choisi un père. Cela parce que les sommets qui sont devenus flous seront traités par la procédure qui évalue les sommets flous. Soit alors VM un sommet qui vient de mourir et qui a choisi son père $P(VM)$. Tout d'abord les attributs de ce sommet doivent passer à son père :

$$A^{k'}(P(VM)) = A^k(P(VM)) + A(VM) \quad (5.37)$$

$$S_NG^{k'}(P(VM)) = S_NG^k(P(VM)) + A(VM) \cdot NG(VM) \quad (5.38)$$

$$NG^{k'}(P(VM)) = \frac{S_NG^{k'}(P(VM))}{A^{k'}(P(VM))} \quad (5.39)$$

Ensuite le voisinage de $P(VM)$ doit être mis à jour en fonction de celui de VM . Plusieurs situations peuvent se présenter et il est nécessaire d'avoir une procédure qui les traite toutes. Nous présentons ensuite les configurations possibles et la manière de les traiter. À la fin de cette présentation la procédure de mise à jour des voisinages est donnée.

Les voisins survivants d'un sommet VM

Soit S' un voisin survivant du sommet VM qui a choisi S comme père. Trois situations sont à analyser :

S' n'est pas voisin de S Cette situation est montrée sur la figure 5.15(a). Le résultat après la fusion de VM avec S est celui montré sur la figure 5.15(b). Nous voyons que les régions S et S' deviennent voisines donc l'arête (S, S') doit être créée. Les graphes représentant les adjacences sont ceux des figures 5.15(c et d).

S' est voisin réel de S Dans ce cas l'arête (S, S') existe déjà donc on n'a rien à faire simplement les attributs de VM doivent être transmis à S . Les figures 5.16(a à d) montrent ce qui se passe avec la configuration des régions et le graphe d'adjacence.

S' est voisin flou de S L'arête floue (S, F, S') doit être transformée en une arête réelle comme le montrent les graphes des figures 5.17(c et d). La configuration de la figure 5.17(b) résulte de celle montrée en figure 5.17(a). Le père VM de F doit être éliminé de la liste $P(F)$.

doivent être éliminées pour permettre aux sommets flous qui n'ont pas décidé de créer ou d'agrandir leurs cliques floues associées. Si l'arête $\wp(A, F_1, B)$ existe l'arête $\wp(A, F_2, B)$ ne peut être créée qu'après l'élimination de l'arête $\wp(A, F_1, B)$ car $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_1, B)] > \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_2, B)]$.

Soit alors F un sommet flou qui vient de choisir son père $P(F)$. Tout d'abord les attributs de ce sommet doivent être enlevés de ses anciens pères $P_i(F)$. Cela se fait à deux moments différents dans un niveau k : dans un premier temps lorsque les sommets flous privilégient un flux la mise à jour se fait au moyen de :

$$A^{k'}(P_i(F)) = A^k(P_i(F)) - \mu_{P_i(F)}(F) \cdot A(F) \quad \forall i \quad (5.25)$$

$$S_NG^{k'}(P_i(F)) = S_NG^k(P_i(F)) - \mu_{P_i(F)}(F) \cdot A(F) \cdot NG(F) \quad \forall i \quad (5.26)$$

$$NG^{k'}(P_i(F)) = \frac{S_NG^{k'}(P_i(F))}{A^{k'}(P_i(F))} \quad \forall i \quad (5.27)$$

et dans un deuxième temps dédié à la prise de décision des sommets flous les équations (5.25) (5.26) et (5.27) deviennent :

$$A^{k+1}(P_i(F)) = A^{k'}(P_i(F)) - \mu_{P_i(F)}(F) \cdot A(F) \quad \forall i \quad (5.28)$$

$$S_NG^{k+1}(P_i(F)) = S_NG^{k'}(P_i(F)) - \mu_{P_i(F)}(F) \cdot A(F) \cdot NG(F) \quad \forall i \quad (5.29)$$

$$NG^{k+1}(P_i(F)) = \frac{S_NG^{k+1}(P_i(F))}{A^{k+1}(P_i(F))} \quad \forall i \quad (5.30)$$

Ensuite le sommet flou doit passer définitivement ses attributs à son père $P(F)$. Cela se fait aussi en deux temps tout d'abord dans la première partie du niveau k au moyen de :

$$A^{k'}(P(F)) = A^k(P(F)) + A(F) \quad (5.31)$$

$$S_NG^{k'}(P(F)) = S_NG^k(P(F)) + A(F) \cdot NG(F) \quad (5.32)$$

$$NG^{k'}(P(F)) = \frac{S_NG^{k'}(P(F))}{A^{k'}(P(F))} \quad (5.33)$$

et dans la deuxième partie au moyen de :

$$A^{k+1}(P(F)) = A^{k'}(P(F)) + A(F) \quad (5.34)$$

$$S_NG^{k+1}(P(F)) = S_NG^{k'}(P(F)) + A(F) \cdot NG(F) \quad (5.35)$$

$$NG^{k+1}(P(F)) = \frac{S_NG^{k+1}(P(F))}{A^{k+1}(P(F))} \quad (5.36)$$

Il faut ensuite traiter les arêtes floues que ce sommet a créées. Ces arêtes doivent être éliminées selon la procédure 6 (page 137).

Procédure 5 *Élimination de l'arête floue $\varphi(A, F, B)$*

1. *Parcourir $\Gamma(A)$*

SI $(B \in \Gamma(A)$ et $\text{lien_flou}(A, B) = F$) ALORS

aller à 2;

SINON

rien à faire puisque $\varphi(A, F, B)$ n'existe plus;

FIN SI

2. *CAS $B \in \Gamma(A)$ et $\text{lien_flou}(A, B) = F$ ALORS*

$\Gamma(A)[\text{position_de_}B] = \text{NULL};$

$\mu_A[\text{position_de_}B] = 0;$

$\text{lien_flou}[\text{position_de_}B] = \text{NULL};$

Parcourir $\Gamma(B)$ jusqu'à trouver A et faire

$\Gamma(B)[\text{position_de_}A] = \text{NULL};$

$\mu_A[\text{position_de_}A] = 0;$

$\text{lien_flou}[\text{position_de_}A] = \text{NULL};$

Procédure 6 *Élimination de la clique floue engendrée par F*

POUR toute arête $\varphi(P_i, F, P_j), P_j \neq P_i$ de pères de F FAIRE

éliminer l'arête floue $\varphi(P_i, F, P_j)$;

FIN POUR

pour être éliminée il faut aussi que le sommet qui sert de lien soit bien le sommet F .

5.10.2 Le traitement des sommets flous qui ont choisi un père

Il est essentiel que les sommets flous qui ont choisi un père soient traités avant les autres. Cela se justifie parce que les cliques floues qu'ils avaient engendrées

Procédure 4 *Création de l'arête floue $\wp(A, F, B)$*

1. *Parcourir $\Gamma(A)$*

SI ($B \in \Gamma(A)$) ALORS

SI ($\mu_{\mathcal{A}}[\text{position_de_}B] = 1$) ALORS

FIN (puisque'une arête floue ne remplace pas une arête réelle).

SINON

aller à 2;

FIN SI

SINON

aller à 3;

FIN SI

2. *CAS $B \in \Gamma(A)$ et $\mu_{\mathcal{A}}[\text{position_de_}B] \neq 1$*

SI ($\mu_{\mathcal{A}}[\text{position_de_}B] \geq \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)]$) ALORS

rien à faire puisque $\wp(A, F, B)$ est moins puissante que $\wp(A, F_{\text{ancien}}, B)$;

SINON

$\mu_{\mathcal{A}}[\text{position_de_}B] = \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)]$;

lien_flou[$\text{position_de_}B$] = F ;

Parcourir $\Gamma(B)$ jusqu'à trouver A et faire

$\mu_{\mathcal{A}}[\text{position_de_}A] = \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)]$;

lien_flou[$\text{position_de_}A$] = F ;

FIN SI

3. *CAS $B \notin \Gamma(A)$*

Parcourir $\Gamma(A)$ jusqu'à trouver une place libre et faire

$\Gamma(A)[\text{place_libre}] = B$;

lien_flou[place_libre] = F ;

$\mu_{\mathcal{A}}[\text{place_libre}] = \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)]$;

Parcourir $\Gamma(B)$ jusqu'à trouver une place libre et faire

$\Gamma(B)[\text{place_libre}] = A$;

lien_flou[place_libre] = F ;

$\mu_{\mathcal{A}}[\text{place_libre}] = \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)]$;

Procédure 3 *Création de l'arête réelle (A,B)*

1. *Parcourir* $\Gamma(A)$

SI $(B \in \Gamma(A))$ *ALORS*

aller à 2;

SINON

aller à 3;

FIN SI

2. *CAS* $B \in \Gamma(A)$

SI $(\text{lien_flou}(A, B) = \text{NULL})$ *ALORS*

rien à faire puisque (A, B) existe déjà;

SINON

$\mu_A[\text{position_de_B}] = 1;$

$\text{lien_flou}[\text{position_de_B}] = \text{NULL};$

Parcourir $\Gamma(B)$ *jusqu'à trouver A et faire*

$\mu_A[\text{position_de_A}] = 1;$

$\text{lien_flou}[\text{position_de_A}] = \text{NULL};$

FIN SI

3. *CAS* $B \notin \Gamma(A)$

Parcourir $\Gamma(A)$ *jusqu'à trouver une place libre et faire*

$\Gamma(A)[\text{place_libre}] = B;$

$\mu_A[\text{place_libre}] = 1;$

$\text{lien_flou}[\text{place_libre}] = \text{NULL};$

Parcourir $\Gamma(B)$ *jusqu'à trouver une place libre et faire*

$\Gamma(B)[\text{place_libre}] = A;$

$\mu_A[\text{place_libre}] = 1;$

$\text{lien_flou}[\text{place_libre}] = \text{NULL};$

- les arêtes floues peuvent devenir réelles.

Cette liste n'est pas exhaustive mais elle permet de voir qu'il est nécessaire d'établir un bon ordre entre les procédures de mise à jour des adjacences pour que cela se fasse correctement.

Tout d'abord on présente les procédures responsables de la création de plusieurs sortes d'arêtes dans le graphe d'adjacence.

5.10.1 Procédures de base

La création d'une arête réelle

Supposons que l'arête (A, B) doive être créée. Il faut pour cela vérifier si le sommet B fait partie de la liste $\Gamma(A)$ des voisins de A . Le cas échéant il est nécessaire de savoir si l'arête (A, B) existante est floue ou réelle. Si cette arête est réelle on n'a pas besoin d'en créer une autre; dans le cas contraire il faut remplacer la valeur de l'ancien $\mu_{\mathcal{A}}[(A, B)]$ par 1 et mettre "NULL" à la place du sommet flou responsable du lien entre A et B . Si en revanche B ne fait pas partie de la liste des voisins du sommet A il est nécessaire de trouver la première place libre dans cette liste pour y mettre B avec $\mu_{\mathcal{A}}[(A, B)] = 1$ et "NULL" à l'endroit réservé au sommet flou responsable du lien entre A et B .

Un raisonnement similaire à celui fait pour le sommet A doit être employé pour B . La procédure 3 (page 135) réalise ces tâches.

La création d'une arête floue

Supposons que l'arête $\wp(A, F, B)$ doive être créée. Similairement à ce qui a été développé pour la création d'une arête réelle il faut tout d'abord vérifier si le sommet B fait partie de $\Gamma(A)$. Le cas échéant deux situations sont possibles: soit B est un voisin réel de A soit A et B sont liés par une arête floue. Si B est un voisin réel il n'y a rien à faire dans le cas contraire le lien le plus fort doit être privilégié c.-à-d. : si $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F, B)] > \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_{ancien}, B)]$ le sommet flou qui sert de lien doit être changé par F ainsi que le degré d'existence de l'arête floue. Si par contre le sommet B ne fait pas partie du voisinage de A il faut trouver la première place libre dans $\Gamma(A)$ pour y mettre B avec le degré d'existence de l'arête floue $\wp(A, F, B)$. Le sommet F responsable de la création de cette arête doit remplacer $NULL$.

Un raisonnement similaire doit être employé pour B . La procédure 4 (page 136) réalise ces tâches.

L'élimination d'une arête floue

Supposons que l'arête $\wp(A, F, B)$ doive être éliminée. Cela veut dire que le sommet B doit disparaître de la liste de voisins de A et *vice versa*. La procédure 5 (page 137) réalise cette tâche.

L'importance de l'utilisation de cette procédure vient du fait qu'elle permet l'élimination d'une arête floue précise: il ne suffit pas que l'arête reliant A et B soit floue

Procédure 2 *Version améliorée de l'étape 3 de l'algorithme 4*

SI (l'itération k précédente correspondait au dernier niveau) ALORS

choisir S^{k+1} ;

SI ($|S^k| = |S^{k+1}|$) ALORS

FIN

SINON

analyse des sommets qui viennent de mourir ;

– choix des pères ;

– mise à jour des attributs des survivants ;

– mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;

(niveau $(k + 1)'$) analyse des sommets flous ;

– le choix des pères ;

– mise à jour des attributs des sommets ;

– mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;

FIN SI

SINON

décimation du niveau $k + 1$ courant ;

analyse des sommets qui viennent de mourir ;

– choix des pères ;

– mise à jour des attributs des sommets ;

– mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;

(niveau k') analyse des sommets flous ;

– le choix des pères ;

– mise à jour des attributs des sommets ;

– mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;

FIN SI

Les sommets flous peuvent être traités autrement. Cela veut dire qu'il est possible de permettre aux régions floues qui possèdent un degré de dissimilarité très grand par rapport à leur voisinage de ne pas fusionner et d'être reconnues comme des régions à part entière. Pour mettre en œuvre cela l'on n'a besoin que d'un seuil.

Remarquons que si tous les sommets flous décident l'ensemble des attributs des sommets survivants change et cela peut entraîner encore d'autres fusions. Il est alors possible de réaliser des fusions locales à l'aide de quelques itérations supplémentaires. Dans ce cas l'étape 3 de l'algorithme 4 doit être remplacée par la procédure 2 (page 133). Cette "dernière itération" ne serait alors qu'une manière de lever de temps en temps l'incertitude dans la pyramide.

5.10 Mise à jour des voisinages et des attributs

Après la détermination de l'ensemble S^k des survivants à l'itération k et le choix des pères il faut mettre à jour les attributs des sommets survivants (tels que la surface et le niveau de gris moyen) ainsi que leurs voisinages.

Nous tenons à ce que cela se fasse en parallèle sur toute l'image et que l'indépendance de l'ordre d'évaluation des sommets soit préservée.

Cette mise à jour n'est pas aussi naturelle que celle de la pyramide irrégulière car dans le cas flou il faut tenir compte de l'influence des sommets et des arêtes floues. Il est nécessaire de considérer que :

- lorsqu'un sommet flou décide l'avant qu'il soit considéré comme mort la chaîne floue qu'il avait générée doit être éliminée et les attributs qu'il avait passés à ses pères potentiels doivent cette fois-ci être affectés seulement à son père définitif ;
- lorsqu'une clique floue est éliminée d'autres cliques floues peuvent être élargies ; cela veut dire qu'une arête floue utilisant un sommet flou F_1 peut être remplacée par une autre arête qui utilise le sommet flou F_2 ;
- ainsi comme au cas précédent lorsqu'une clique floue est créée d'autres cliques floues peuvent être réduites ;
- à chaque fois qu'un sommet flou ne décide pas il devient "plus âgé" ;
- les attributs des sommets doivent être mis à jour avant que les arêtes floues soient créées ;
- lorsqu'une clique floue doit disparaître cela doit se faire avant la mise à jour des voisinages ;
- deux sommets voisins qui viennent de mourir peuvent devenir flous en même temps. Dans ce cas il n'y a pas de chaîne floue. Il est donc nécessaire de considérer ce cas ;

5.9.2 Le choix des sommets flous

A ce moment Γ les sommets qui restent flous ont l'opportunité de réévaluer les attributs de leurs pères pour éventuellement réaliser la décision définitive d'attachement.

Parmi eux Γ quelques uns sont obligés de réaliser le choix du père. Ce sont les sommets les "plus âgés" des chaînes floues⁹. Il peut arriver aussi que deux voisins deviennent flous en même temps dans la première partie de l'itération k . Dans ce cas Γ pour maintenir le parallélisme et l'indépendance d'évaluation des sommets Γ nous avons décidé de privilégier les attachements locaux les plus forts. Cela veut dire qu'un sommet flou qui possède un voisin flou est obligé de décider s'il est plus similaire à son père provisoire que son voisin flou ne l'est au sien. Cela est réitéré jusqu'au moment où chaque sommet flou ne possède plus de voisins flous Γ selon la procédure 1.

Chaque sommet flou devient alors mort ou reste flou Γ mais il n'y aura pas deux sommets voisins qui resteront flous. Le traitement des sommets flous est réalisé par la procédure 12 (page 161).

Procédure 1 *Élimination des voisins flous d'un sommet flou*

REPETER jusqu'à ce que les sommets flous ne possèdent plus de voisins flous

POUR TOUT sommet F non marqué, ayant $age_flou = 1$ FAIRE

SI (F possède au moins un voisin F' flou non marqué) ALORS

$\mu_{\mathcal{A}}[(F, P_prov(F))] > \mu_{\mathcal{A}}[(F', P_prov(F'))] \forall F' \in \Gamma(F)$ non marqué) ALORS

$P(F) = P_prov(F)$;

marquer F ;

FIN SI

FIN SI

FIN POUR

5.9.3 La dernière itération

Lorsque les survivants ne changent plus du niveau k au niveau $k + 1$ Γ l'apex est atteint. A ce moment Γ toute imprécision doit disparaître de la pyramide pour que les régions soient bien définies en taille Γ forme et niveaux de gris.

Il faudra donc forcer les sommets flous à décider puisqu'il n'existe plus de sommets qui viennent de mourir. L'algorithme s'arrête.

⁹Voir la définition 75.

changé ainsi que les attributs de chacun d'entre eux. De cette manière les sommets flous pourront peut-être choisir un père définitif.

La construction de la pyramide irrégulière floue est faite selon l'algorithme 4.

Algorithme 4 *Algorithme de construction de la pyramide irrégulière floue*

1. *Lecture de l'image et des paramètres d'entrée ;*
2. *Construction de la base de la pyramide ;*
3. *Répéter les étapes suivantes jusqu'à ce qu'une condition d'arrêt soit vérifiée :*
 - décimation du niveau k courant ;*
 - analyse des sommets qui viennent de mourir ;*
 - choix des pères ;*
 - mise à jour des attributs des sommets ;*
 - mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;*
 - (niveau k') analyse des sommets flous ;*
 - choix des pères ;*
 - mise à jour des attributs des sommets ;*
 - mise à jour des graphes d'adjacence et de similarité ;*
4. *Détection des entités dans l'image ;*
5. *Processus de post-segmentation.*

5.9.1 Le choix des sommets qui viennent de mourir

Chaque sommet qui vient de mourir doit faire le choix provisoire d'un père dans cette première partie de l'itération. Le sommet devient flou s'il est incapable de réaliser ce choix. Pour ceux qui aboutissent à une décision la validation du père dépend en fait de l'arête qui les unit. Si cette arête est réelle il n'y a pas de problème mais si l'arête est floue il est nécessaire de savoir d'abord si elle fait partie du flux⁸ privilégié par le sommet flou responsable du lien. Un sommet qui vient de mourir peut alors devenir flou ou mourir.

Ceux qu'on vient de présenter sur le traitement des sommets qui viennent de mourir est réalisé dans les étapes 1 à 3 de la procédure 10 (page 159).

Après cette première partie de l'itération k il ne reste que les sommets flous qui peuvent changer d'état. On arrive alors à l'itération k' intermédiaire entre les itérations k et $k + 1$.

⁸Les stratégies concernant les flux qui utilisent un sommet flou ont été exposées à la section 5.5.

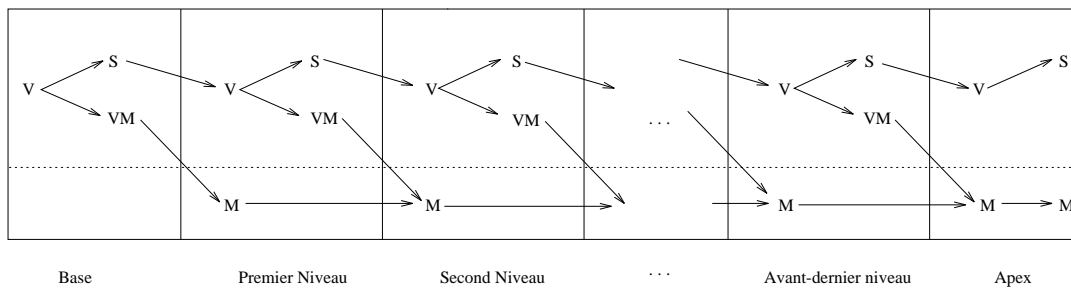


FIG. 5.13 - L'évolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière. À la base tous les sommets sont vivants (V). Ils se partagent alors en deux classes : ceux qui viennent de mourir (VM) et les survivants (S) qui seront les vivants du premier niveau. Ceux qui viennent de mourir choisissent leurs pères et deviennent morts (M). Le processus se réitère jusqu'à l'apex où il ne reste que des survivants et des morts.

ils s'attachent au père choisi et meurent. L'évolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière floue est montrée par la figure 5.14.

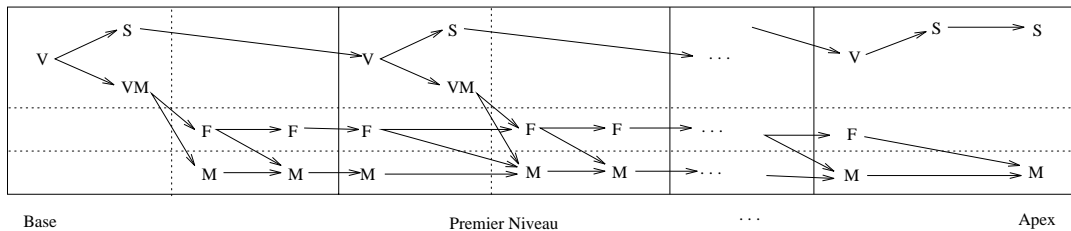


FIG. 5.14 - L'évolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière floue. Une fois qu'un sommet devient flou (F) soit il reste flou soit il meurt. Les morts (M) restent toujours dans le même état. La différence par rapport au schéma d'évolution de l'état des sommets de la pyramide irrégulière classique est qu'un sommet qui vient de mourir peut rester temporairement flou avant de mourir. À l'apex tous les sommets flous sont obligés de prendre une décision.

Il y a donc deux classes de sommets qui sont censés faire un choix d'attachement : les flous et ceux qui viennent de mourir. Les flous ne sont pas capables de changer leur statut car ils possèdent exactement les mêmes pères (survivants ou non) qu'à la fin de l'itération précédente. En plus, si un sommet flou décide, il inactive les arêtes floues qu'il a créées, ce qui entraîne l'obligation d'une mise à jour des voisinages en même temps que les sommets réalisent leur choix d'attachement. On perdrait dans ce cas le parallélisme et l'indépendance par rapport à l'ordre d'évaluation des sommets.

Comme on veut garder ces deux caractéristiques dans la pyramide irrégulière floue, il faut séparer chaque niveau de la pyramide en deux parties par rapport au choix des pères. La première partie est celle qui permet aux sommets qui viennent de mourir de réaliser leur choix. La deuxième, donne la même opportunité aux sommets flous, puisqu'après les derniers attachements l'ensemble de ses pères potentiels a

5.8.3 Processus de décimation stochastique ou adaptatif?

Après la détermination du graphe de similarité orienté du niveau k de la pyramide il est nécessaire de choisir les survivants. Lors de la présentation du processus de décimation de la pyramide irrégulière nous l'avons séparé en deux catégories : stochastique ou adaptatif.

Dans notre approche floue il faut tenir compte de la taille des régions pour éviter que de grandes surfaces deviennent floues car à une grande région floue est associée une grande incertitude. On essaiera donc d'empêcher que de grandes régions deviennent floues en laissant mourir plutôt les régions de taille moins importante.

Le choix de la valeur associée à chaque sommet sera par conséquent en même temps stochastique et adaptatif. Stochastique parce qu'on associe à chaque sommet x_i une variable aléatoire p_i uniformément répartie entre 0 et 1 ; adaptatif car cette valeur subit une modification en fonction de la surface A_i associée à la région générant p'_i . On cherchera donc à maximiser l'évaluation d'un opérateur local donné par :

$$p'_i = p_i \cdot \frac{A_i}{A_{max}} \quad (5.24)$$

où $0 \leq \frac{A_i}{A_{max}} \leq 1$.

L'analyse fondée sur la théorie des graphes qui a été présentée à la section 4.5.3 reste valable pour la pyramide irrégulière floue car la structure de transformation des graphes d'adjacence en graphes de similarité n'a pas été affectée par la présence des éléments flous.

5.9 Le choix d'un père

L'ensemble de survivants étant déterminé l'étape suivante consiste à réaliser les affectations de chaque sommet non-survivant à un voisin qui sera présent au niveau suivant de la pyramide.

Dans l'algorithme de la pyramide irrégulière à la fin de l'itération $k - 1$ les sommets peuvent être actifs ou inactifs. Les sommets actifs sont les survivants et les inactifs les morts. Les survivants se transforment en vivants au niveau k tandis que les morts disparaissent. Le schéma de la figure 5.13 montre l'évolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière.

Avec l'introduction des sommets flous ce schéma se modifie. Tout d'abord à la fin de l'itération $k - 1$ si tous les sommets du graphe initial sont considérés ceux-ci peuvent être des sommets survivants, morts ou flous. Comme les morts restent toujours morts et disparaissent au niveau k il ne restent que les flous et les survivants qui peuvent changer d'état. Les sommets survivants deviennent les sommets vivants du niveau k et après le choix de S^k ils se partagent en survivants du niveau k et en ceux qui viennent de mourir. Les sommets flous du niveau k continuent d'être flous au niveau $k + 1$ s'ils n'arrivent pas à choisir un père ; dans le cas contraire

Pour adapter l'utilisation d'un même seuil global aux arêtes réelles et floues⁷ puisque ces dernières représentent en fait trois sommets⁷ nous suggérons que ce seuil soit exprimé en fonction des attributs des sommets qui entrent en jeu dans la formation de chaque arête.

Le critère (4.2)⁷ déterminant les arêtes du graphe d'adjacence qui seront exclues du graphe de similarité⁷ adapté au cas flou⁷ devient alors : le lien⁷ entre A et B est éliminé si

$$s(A, B) < s_g \quad (5.21)$$

où la fonction de similarité $s(A, B)$ est donnée par :

$$s(A, B) = \begin{cases} 1 - \frac{|NG(A) - NG(B)|}{max - min} & \text{si } \mu_{\mathcal{A}}[(A, B)] = 1 \\ \mu_{\mathcal{A}}[(A, B)] & \text{si } 0 < \mu_{\mathcal{A}}[(A, B)] < 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

où $\mu_{\mathcal{A}}[(A, B)]$ est calculé selon ce qui a été exposé à la section 5.4.3. La fonction de similarité prend alors en compte les niveaux de gris des deux ou trois sommets en jeux⁷ selon que l'arête soit réelle ou floue.

Dans ce cas⁷ le seuil global est contenu dans $[0, 1]$. Lorsque s_g vaut 1⁷ le critère (5.21) n'accepte que les regroupements des sommets ayant le même niveau de gris.

Le seuil local adapté aux arêtes floues

La détermination d'un seuil local pour chaque sommet sert à prendre en compte les caractéristiques locales de l'image et entraîne la transformation du graphe de similarité en un graphe orienté. À chaque sommet x_i du graphe du niveau k de la pyramide irrégulière est associé un seuil local $0 \leq s_l(x_i) \leq s_g$ fondé sur la similarité entre ce sommet x_i et ses voisins.

De par l'existence des arêtes non réelles⁷ il est nécessaire d'adapter la détermination de la similarité au cas flou. Nous proposons de conserver la similarité donnée par la fonction (5.22). De cette manière nous pouvons conserver le critère de choix du seuil local de la pyramide irrégulière⁷ déjà présenté à la section 4.5.1.

Ainsi que pour le seuil global⁷ il est nécessaire d'adapter le critère d'acceptation des voisins. Pour qu'on ne s'éloigne pas trop de l'algorithme de la pyramide irrégulière⁷ seuls les voisins x_j de x_i qui satisfont :

$$s(x_i, x_j) \geq s_l(x_i) \quad (5.23)$$

sont retenus dans le graphe de similarité orienté.

⁷Par lien on entend tous les types d'arêtes.

Dans l'algorithme de la pyramide irrégulière la cardinalité de S^k est liée directement au nombre d'arêtes du graphe au niveau k . Il est donc nécessaire de bien définir le rôle des arêtes réelles et floues dans cette étape de l'algorithme de la pyramide irrégulière floue.

Si les arêtes floues ne sont pas considérées pour établir le choix de S^k l'ensemble de survivants ne sera pas représentatif car les relations de similarité entre les sommets seront d'autant moins prises en considération que le nombre de liens entre les sommets vivants est réduit. Lorsque le nombre de sommets flous est grand on observe un taux important de déconnexions dans le graphe d'arêtes réelles d'où le besoin de considérer les arêtes floues.

Comme nous l'avons déjà dit les sommets flous n'interviennent qu'indirectement dans le choix de S^k en revanche les adjacences floues créées par ces sommets ont la même importance que celles représentées par les arêtes réelles.

5.8.1 Le critère d'arrêt

La condition (5.20) étant satisfaite l'algorithme de la pyramide irrégulière floue peut s'arrêter lorsque la cardinalité de S^k ne change pas par rapport à celle de S^{k-1} . Cela veut dire qu'on garde le même critère d'arrêt que celui de la pyramide irrégulière classique.

5.8.2 Le rôle des seuils

Lorsqu'un sommet devient flou il crée des liens entre ses pères. Cela veut dire que l'arête floue $\varphi(P_i(F), F, P_j(F))$ est créée si $P_i(F)$ et $P_j(F)$ pères de F ne sont pas voisins ou alors $\varphi(P_i(F), F, P_j(F))$ remplace une autre arête floue $\varphi(P_i(F), F', P_j(F))$ à la condition que $\mu_{\mathcal{A}}[\varphi(P_i(F), F, P_j(F))] > \mu_{\mathcal{A}}[\varphi(P_i(F), F', P_j(F))]$. Ce sont en fait les conditions de création de la clique floue engendrée⁶ par le sommet flou F .

D'après le critère "deux voisins ne peuvent pas survivre en même temps" il y aura au maximum un père du sommet flou qui survivra si aucun seuil sur le voisinage n'est utilisé. Cela est en désaccord avec le principe de la pyramide floue qui prétend fournir un choix plus vaste à chaque sommet au moment de s'attacher à un père. Il est donc essentiel comme dans la pyramide irrégulière classique de considérer les seuils de similarité. On présente dans la suite une étude de l'adaptativité des seuils global et local au cas flou.

Le seuil global adapté aux arêtes floues

Lorsqu'on utilise un seuil global s_g les arêtes qui ne respectent pas un minimum de similarité ne seront pas présentes dans le graphe de similarité. Dans la pyramide irrégulière cette condition se traduit par le fait qu'une arête (A, B) est présente dans le graphe de similarité si $|NG(A) - NG(B)| < s_g$.

⁶La définition d'une clique floue engendrée par un sommet peut être trouvée à la page 124.

<i>voisins</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
$\mu[(1, \textit{voisin})]$	<i>0.85</i>	<i>1</i>	<i>0.93</i>
<i>lien_flou</i>	<i>F</i>	<i>NULL</i>	<i>F</i>

TAB. 5.2 - La structure représentant le voisinage du sommet 1.

Un deuxième changement dans la structure de données vient du besoin de pouvoir affecter provisoirement les sommets aux pères avant l'affectation définitive. Cela parce qu'à chaque fois qu'un sommet $VM\Gamma$ qui vient de mourir Γ choisit son père Γ la validation de ce choix dépend des flux privilégiés par les sommets flous. Le "père provisoire" choisi reste ainsi dans $P_{prov}(VM)$ jusqu'à ce que les sommets flous valident les flux. Cela sert à éviter la création de liens entre pères et fils risquant de se défaire à cause du choix des sommets flous.

Comme une nouvelle classe de sommets a été créée (les sommets flous) Γ nous avons besoin de la liste de ces sommets Γ ainsi que de leur âge Γ c.-à-d. qu'il est important de savoir depuis combien de niveaux un sommet est flou. Cela est utile lors de la détection des chaînes floues (définition 75) qui servent à forcer les sommets flous les plus âgés à s'attacher définitivement.

Les changements décrits ci-dessus nous permettent de conserver la relation entre sommets et champs récepteurs à un niveau quelconque de la pyramide floue.

Comme nous l'avons vu dans la section 4.5 Γ un algorithme pour la construction d'une pyramide irrégulière comporte trois étapes :

- le choix des survivants Γ où les graphes d'adjacence et de similarité entrent en jeu ;
- le choix d'un père par les sommets non-survivants ;
- la mise à jour des voisinages et des attributs associés aux sommets.

Les trois prochaines sections sont dédiées à l'extension des trois étapes citées ci-dessus Γ pour le modèle irrégulier classique Γ au cas flou.

5.8 Le choix des survivants

Dans l'algorithme de la pyramide irrégulière Γ l'ensemble S^k de survivants est extrait de l'ensemble des sommets vivants du niveau k . Après le choix de S^k on aura Γ à la place des vivants Γ ceux qui viennent de mourir et les survivants. Ces derniers sont en fait les vivants du niveau $k + 1$.

De cette manière Γ la suite d'ensembles S de survivants est telle que :

$$S^0 \supset S^1 \supset S^2 \supset \dots \supset S^{apex-1} = S^{apex} \quad (5.20)$$

Nous voulons préserver cette propriété dans la pyramide irrégulière floue. Pour cela les sommets flous ne peuvent intervenir qu'indirectement dans le choix de S^k car ils ne sont plus présents au niveau k de la pyramide.

Les cliques et les chaînes ont déjà été définies lors de la présentation de la théorie des graphes. Cependant nous avons besoin de faire l'extension de ces définitions au cas flou.

Définition 73 Une **clique floue** est une clique où les arêtes ne sont pas toutes réelles.

Définition 74 Les arêtes floues créées par un sommet F forment la **clique floue engendrée par F** . La cardinalité des arêtes floues d'une clique floue d'ordre n engendrée par F est alors inférieure ou égale à celle d'une clique floue d'ordre n .

Cette définition sera utile lors du traitement des cliques engendrées par les sommets flous. Lorsqu'on parlera de clique floue engendrée par un sommet F on exclut alors les arêtes réelles faisant partie de la clique floue ainsi que les arêtes floues qui utilisent un autre sommet flou à la place de F . Cela veut dire qu'une clique floue engendrée par F contient seulement les arêtes du type $\wp(-, F, -)$.

Exemple 12 Le graphe montré en figure 5.12(a) est une clique floue d'ordre 4, mais la clique floue engendrée par le sommet 5 est composée par les arêtes: $\wp(1, 5, 3)$, $\wp(1, 5, 7)$, $\wp(6, 5, 3)$ et $\wp(6, 5, 7)$.

Définition 75 Une **chaîne floue** est une chaîne dont les sommets extrémités sont flous.

Un sommet extrémité d'une chaîne floue est toujours un sommet flou F et l'un de ces pères $P_i(F)$ qui devient flou. Remarquons qu'une chaîne floue est une entité qui n'existe pas dans un niveau spécifique de la pyramide floue car elle traverse plusieurs niveaux.

Lorsqu'une chaîne floue est détectée dans le graphe d'attachements flou le sommet flou le plus ancien de la chaîne doit impérativement prendre sa décision. Cette règle nous permet de contrôler la propagation de l'incertitude dans la pyramide floue.

5.7 Structure de données

La structure de données de la pyramide irrégulière floue par rapport à la pyramide irrégulière stochastique a besoin d'une adaptation.

Pour exprimer le voisinage des sommets trois listes sont nécessaires : celle contenant les voisins de chaque sommet celle du degré d'existence des arêtes et la dernière qui contient les sommets flous responsables pour les liens. Pour un sommet A par exemple si le voisin d'indice i est le sommet B le degré d'existence de l'arête (A, B) est l'élément i de la liste μ_A ; et si cette arête est floue le sommet flou responsable de ce lien doit être mis à la place i dans la liste *lien_flou*. Si l'arête (A, B) est réelle nous devons avoir *lien_flou*[i] = *NULL*.

Exemple 13 La structure déterminant le voisinage du sommet 1 de la figure 5.12(a) est donnée par la table 5.2.

sans passer par des liens intermédiaires. Le graphe d'attachements flou n'est plus biparti.

Exemple 11 *Le graphe de la figure 5.5(b), où il y a 4 sommets survivants et un sommet flou, donne naissance aux relations d'adjacence montrées en figure 5.5(d). Considérons alors $\epsilon = 0.01$ et $\psi_{max} = 256$ pour calculer le degré d'existence de chacune des arêtes du graphe montré en figure 5.5(d).*

D'après (5.8), les arêtes réelles ont la valeur 1 :

$$- \mu_{\mathcal{A}}(1, 6) = 1 ;$$

$$- \mu_{\mathcal{A}}(3, 7) = 1.$$

Le degré d'appartenance de chaque arête floue à \mathcal{A} peut être calculé en utilisant (5.7) :

$$- \mu_{\mathcal{A}}(1, 3) = \max\left\{1 - \frac{|100-105|+|100-135|+|105-135|}{512} - 0.01, 0.01\right\} = 0.85 ;$$

$$- \mu_{\mathcal{A}}(1, 7) = \max\left\{1 - \frac{|100-105|+|100-115|+|105-115|}{512} - 0.01, 0.01\right\} = 0.93 ;$$

$$- \mu_{\mathcal{A}}(6, 3) = \max\left\{1 - \frac{|110-105|+|110-135|+|105-135|}{512} - 0.01, 0.01\right\} = 0.87 ;$$

$$- \mu_{\mathcal{A}}(6, 7) = \max\left\{1 - \frac{|110-105|+|110-115|+|105-115|}{512} - 0.01, 0.01\right\} = 0.95.$$

et cela nous donne le graphe de la figure 5.12(a), défini par la matrice (5.19).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.85 & 1 & 0.93 \\ 0.85 & 0 & 0.87 & 1 \\ 1 & 0.87 & 0 & 0.95 \\ 0.93 & 1 & 0.95 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

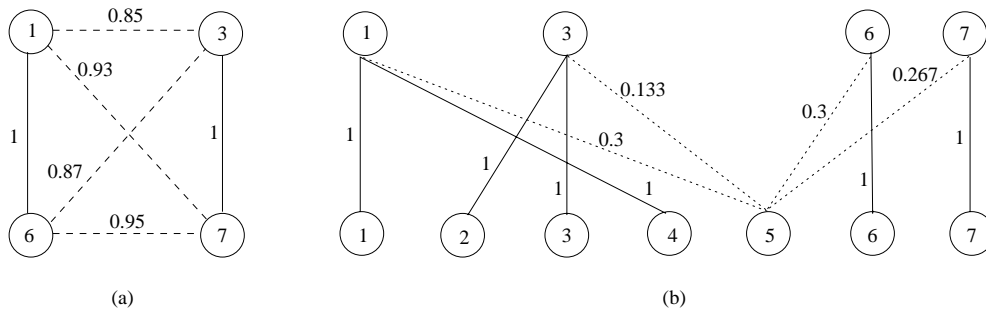


FIG. 5.12 - (a) Graphe d'adjacence flou et (b) graphe d'attachement flou.

Le graphe d'attachements flou, obtenu à partir de la configuration illustrée en figure 4.4(a), est montré en figure 5.12(b). Nous remarquons dans ce graphe que les sommets survivants restent attachés à eux mêmes ($P(1) = 1, P(3) = 3, P(6) = 6$ et $P(7) = 7$) et que seuls les sommets flous s'attachent à plusieurs sommets ($P(5) = \{1, 3, 6, 7\}$). Chaque sommet qui a choisi son père s'attache évidemment à ce père, ($P(2) = 3$ et $P(4) = 1$).

Dans le cas où $X = Y$ est composé par les n sommets d'un graphe G la relation R peut représenter les adjacences ou la similarité entre ses sommets et la matrice $M_{n \times n}$ est carrée et symétrique.

Cependant pour décrire la pyramide des graphes flous il nous faut pouvoir définir une relation qui prenne en compte non seulement les liens flous entre les sommets réels (les adjacences dans chaque niveau) mais aussi toute autre forme d'adjacence comme celle qui associe les sommets flous à ses pères potentiels (adjacences entre plusieurs niveaux) ou bien à d'autres sommets flous. Nous devons donc définir un graphe flou pour pouvoir représenter une pyramide floue.

Définition 69 $G(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ est un **graphe flou** lorsque \mathcal{S} et/ou \mathcal{A} sont des ensembles flous.

Il est nécessaire de définir les graphes représentant les relations d'adjacence et similarité entre les arêtes (floues ou non) à un niveau quelconque de la pyramide floue.

Définition 70 $G_A(X, \mathcal{A})$ est un **graphe d'adjacence flou** lorsque \mathcal{A} est un ensemble flou défini par la relation floue (5.8). Cette relation associe à chaque arête dans $X \times X$ son degré d'appartenance à \mathcal{A} .

Définition 71 $G_S(X, \mathcal{A})$ est un **graphe de similarité flou** lorsque \mathcal{A} est un ensemble flou défini par une relation de similarité⁵. Cette relation associe à chaque arête ou arc du type (x_i, x_j) dans $X \times X$ la similarité entre x_i et x_j .

La matrice représentant un graphe de similarité orienté n'est pas symétrique car l'existence d'un arc du type (A, B) n'entraîne pas l'existence de (B, A) .

Maintenant nous allons définir les attachements entre les pères et ses fils entre deux niveaux successifs de la pyramide floue.

Définition 72 Les attachements entre les sommets d'un niveau k et ceux du niveau $k + 1$ sont représentés par le **graphe d'attachements flou** $G(\mathcal{S}, \mathcal{A})$. L'ensemble des sommets \mathcal{S}^{k+1} du niveau $k + 1$ est contenu dans \mathcal{S}^k , qui est un ensemble flou. Chacun des ensembles \mathcal{S}^k est défini comme suit :

$$\mu_{x_i}(\mathcal{S}) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } x_i \text{ est flou} \\ 1 & \text{si } x_i \text{ est survivant} \end{cases} \quad (5.18)$$

et chaque arc $(x_i, P(x_i))$; $x_i \in \mathcal{S}^k, P(x_i) \in \mathcal{S}^{k+1}$ vaut 1 si $\mu_{x_i}(\mathcal{S}) = 1$ ou alors cette valeur est donnée par l'équation (5.1).

Lorsqu'un sommet flou F décide les arcs du type $(F, P_i(F))$ sont remplacés par un seul arc $(F, P(F))$ qui rattache directement le sommet flou à son père définitif

⁵La relation que nous proposons, donnée par (5.22), est définie dans la section 5.8.2.

$[0, 1]$ le 1 représentant des liens réels le 0 indiquant qu'il n'existe pas de lien ; et lorsque les sommets i et j sont liés par une arête floue celle-ci est évaluée dans $]0, 1[$.

Nous allons donc utiliser la définition de relation floue pour aboutir à la définition de graphe flou et la particulariser au cas qui nous intéresse.

Définition 68 Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ deux ensembles finis. Une **relation floue** R entre X et Y est définie comme un sous-ensemble flou de $X \times Y$ et peut être décrite par la matrice $M_{m \times n}(R)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance, où $\mu_R(x_i, y_j)$ s'interprète comme le degré de satisfaction de la relation R entre x_i et y_j .

$$M(R) = \begin{pmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \mu_R(x_1, y_2) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1) & \mu_R(x_2, y_2) & \cdots & \mu_R(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \mu_R(x_m, y_2) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 10 La relation floue $R =$ "approximativement égal à", définie par la fonction (5.16),

$$f_R(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-y)^2} & \text{si } |x-y| < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.16)$$

peut être représentée par la matrice $M_{3 \times 2}$ (5.17), lorsque $X = \{1, 3, 4\}$ et $Y = \{1, 4\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Les matrices des relations floues servent à représenter des relations de similarité ou d'ordre entre les éléments de deux ensembles X et Y . La matrice (5.17) peut alors représenter une relation de similarité entre les sous-ensembles X et Y de sommets d'un graphe. La figure 5.11 illustre la relation $\{1, 3, 4\} \times \{1, 4\}$ de l'exemple 10.

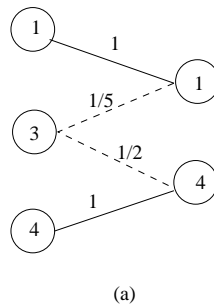


FIG. 5.11 - Graphe pondéré associé à la matrice M .

Stratégie 2(b) ϕ favorise l'arête la plus forte :

$$\phi(S_j) = \max_i \{\mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_j)\} \quad (5.14)$$

Une fois que cette arête est déterminée le sommet flou choisit son père au moyen de (5.12). Tous les autres sommets M_i qui l'avaient aussi choisi *a priori* fusionnent définitivement avec lui. Dans notre exemple l'arête la plus forte est $\varphi(M_1, F, S_1)$. Comme les sommets M_3 et M_4 avaient choisi S_2 comme père *a priori* la nouvelle configuration sera formée par les sommets : $M_1 \Gamma M_3 \Gamma M_4 \Gamma F$ et $S_2 \Gamma c$ ce qui nous donne un résultat identique à celui fourni par la stratégie 2(b) (figure 5.10(c)).

Stratégie 2(c) ϕ maximise la moyenne des degrés d'appartenance à \mathcal{A} des arêtes floues qui vont dans une même direction :

$$\phi(S_j) = \frac{\sum_i \mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_j)}{|M|} \quad (5.15)$$

où $M = \{M_i : \mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_j) > \mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_k), k \neq j\}$.

Dans ce cas nous aurons $\phi(S_1) = \frac{0.9+0.5+0.4}{3} = 0.6 < \phi(S_2) = \frac{0.8+0.2}{2} = 0.8$ ce qui privilégie le flux des sommets $M_2 \Gamma M_5$ et F vers le survivant S_2 .

Ces stratégies peuvent toutes être implémentées en parallèle puisque ce sont les sommets flous qui doivent privilégier les attachements les plus robustes. La dernière proposition est celle que prend en compte le maximum d'information concernant le degré d'existence des arêtes floues.

Les attachements qui n'ont pas été privilégiés doivent être éliminés et les sommets respectifs deviennent flous car leur meilleur choix ne peut pas s'effectuer ; il est donc plus intéressant d'attendre un peu pour ne pas prendre une décision précipitée.

5.6 Formalisation du modèle au moyen des graphes flous

Normalement dans les graphes les relations d'adjacence peuvent être définies en utilisant une matrice $M_{n \times n}$ où n est le nombre des sommets du graphe de manière à ce que $m(i, j) = 1$ si les sommets i et j sont adjacents en cas contraire $m(i, j) = 0$.

Or avec la nouvelle approche on introduit une nouvelle classe de sommets qui existent partiellement dans le graphe représentant un niveau k de la pyramide. Grâce à la logique floue nous pouvons représenter les relations d'adjacence entre ces sommets dits flous et les sommets réels au moyen des arêtes floues auxquelles on associe un degré d'existence. Les éléments de $M_{n \times n}$ seront évalués dans l'intervalle

- $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_4, F, S_1)] > \mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_4, F, S_2)]$;
- $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_5, F, S_1)] < \mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_5, F, S_2)]$.

Il est évident que tous ces attachements *a priori* ne peuvent pas aboutir parce qu'au moment de la prise de décision définitive de la région floue celle-ci s'attachera soit à S_1 soit à S_2 . Pour réaliser son choix la région floue peut utiliser plusieurs stratégies :

Stratégie 1

Le sommet flou ne favorise que l'arête ayant le plus grand degré d'appartenance à l'ensemble \mathcal{A} donnée par :

$$\max_{i,j} \{\mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_j)\} \quad (5.11)$$

Dans notre exemple cela se traduit par la fusion des régions $M_1 \Gamma F$ et S_1 .

Stratégie 2

Le sommet flou favorise l'un des flux ϕ passant par lui vers un sommet survivant :

$$\max_j \{\phi(S_j)\} \quad (5.12)$$

La fonction ϕ peut tenir compte autant de la quantité que de la qualité du nouveau regroupement comme suit :

Stratégie 2(a) ϕ ne fait que compter les sommets qui s'attachent à chaque survivant passant par F :

$$\phi(S_j) = |M| \quad \text{où } M = \{M_i : \mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_j) > \mu_{\mathcal{A}}(M_i, F, S_k), k \neq j\} \quad (5.13)$$

Dans ce cas le critère (5.12) maximise la cardinalité des regroupements permettant que le sommet flou induise des fusions plus nombreuses. Dans notre exemple on aurait $\phi(S_1) = 3$ et $\phi(S_2) = 2$ ce qui fournit $\max_j \{\phi(S_j)\} = 3$. Par conséquent les régions $M_1 \Gamma M_3 \Gamma M_4 \Gamma F$ et S_1 fusionneraient. Ce résultat est montré dans la figure 5.10(c). Nous remarquons que la fonction ϕ définie de cette manière ne prend pas en compte l'information la plus importante à propos des arêtes floues : leur degré d'appartenance à \mathcal{A} . Cela risque de former des configurations qui ne sont pas homogènes.

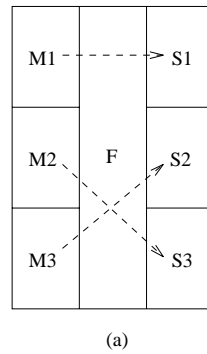


FIG. 5.9 - Trois arêtes floues qui s'interdisent mutuellement.

seulement. D'après ce qui a été développé jusqu'à présent dans ce chapitre le sommet flou responsable de la création d'une arête floue ne participe qu'à une seule fusion.

Si on maîtrise bien le rôle des sommets et des arêtes floues dans une structure pyramidale il est encore possible d'en tirer d'autres profits. En fait quand on dit qu'une arête floue permet le regroupement de 3 régions en même temps cela veut dire au moins 3 régions. Cela peut surprendre puisque dans les structures pyramidales y comprises les irrégulières chaque arête ne peut entraîner qu'une seule fusion.

Pour illustrer cela supposons que les régions M_1 à M_5 de la figure 5.10(a) doivent s'attacher à l'une des deux régions survivantes : S_1 ou S_2 et que leurs choix soient représentés par les flèches de la configuration de la figure 5.10(b).

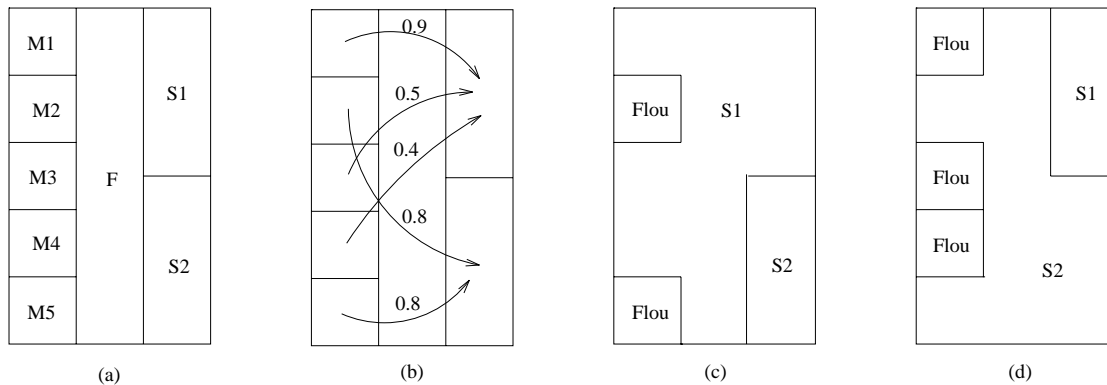


FIG. 5.10 - (a) Cinq régions qui viennent de mourir (M_1 à M_5) et (b) leurs choix *a priori* d'attachement formant deux flux vers S_1 et S_2 . (c) Le flux vers S_1 se concrétise et pas l'autre. (d) Situation inverse à celle de (c).

Le sommet flou F fait partie de toutes les arêtes reliant les sommets M_1 à M_5 aux sommets S_1 et S_2 . D'après la figure 5.10(b) on conclut que :

- $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_1, F, S_1)] > \mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_1, F, S_2)]$;
- $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_2, F, S_1)] < \mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_2, F, S_2)]$;
- $\mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_3, F, S_1)] > \mu_{\mathcal{A}}[\wp(M_3, F, S_2)]$;

$$\mu_A(A, B) = \max_{L_\varphi(A, F_i, B)} [\min\{\mu_A(F_i), \mu_B(F_i)\}] \quad (5.10)$$

où $L_\varphi(A, F_i, B)$ représente tous les liens flous possibles entre A et B .

L'inconvénient de cette approche est que chaque sommet flou peut créer des arêtes ayant des degrés d'existence similaires. Cela ne permettrait guère d'établir un ordre d'importance entre les arêtes non réelles.

5.5 Le problème de déconnexion

Essayons de voir ce qui se passerait avec le graphe de la figure 5.5(d) possédant 4 arêtes floues et 2 réelles si l'ensemble de survivants est donné par $S = \{3, 7\}$ et le sommet 1 choisit le survivant 7Γ tandis que 6 choisit 3 comme père.

On s'aperçoit que le sommet flou F a été utilisé deux fois c.à-d. $\varphi(1, F, 7)$ et $\varphi(6, F, 3)$ doivent être validés en même temps Γ générant les deux configurations montrées par les figures 5.8(a et b) respectivement. Or si l'arête floue $\varphi(1, F, 7)$ est validée Γ le sommet flou F doit impérativement s'attacher à 7Γ ce qui empêche la validation de $\varphi(6, F, 3)$ et *vice versa*.

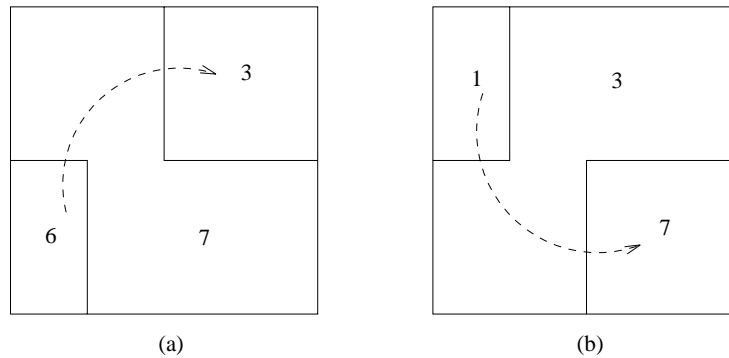


FIG. 5.8 - Deux arêtes floues qui s'interdisent mutuellement.

Il est alors impossible de faire les deux attachements en même temps sans créer une incohérence dans la topologie de l'image ; d'où le besoin d'effectuer seulement l'un des attachements.

Évidemment cette situation peut se produire avec plus de 4 sommets. Il est facile d'imaginer $M_1\Gamma M_2$ et $M_3\Gamma$ non-survivants utilisant le sommet flou F pour s'attacher aux survivants $S_1\Gamma S_3$ et S_2 respectivement Γ comme le montre la figure 5.9(a).

On présente dans la suite des stratégies de fusion qui éliminent ces problèmes de déconnexion.

Stratégies de fusion

On a déjà remarqué qu'une arête floue permet le regroupement de 3 régions Γ ce qui n'est pas le cas des arêtes classiques Γ qui permettent la fusion de deux régions

- $\varphi(M, F_2, S)$;
- $\varphi(M, F_3, S)$.

Nous pouvons quantifier la valeur de chacune de ces arêtes au moyen de la formule (5.7), comme suit ⁴ :

$$\begin{aligned} - \mu_{\mathcal{A}}[\varphi(A, F_1, B)] &= 1 - \frac{|10-50|+|50-10|+|50-50|}{2 \cdot \psi_{max}} = 1 - \frac{40}{\psi_{max}}; \\ - \mu_{\mathcal{A}}[\varphi(A, F_2, B)] &= 1 - \frac{|60-50|+|60-50|+|50-50|}{2 \cdot \psi_{max}} = 1 - \frac{10}{\psi_{max}}; \\ - \mu_{\mathcal{A}}[\varphi(A, F_3, B)] &= 1 - \frac{|50-50|+|50-50|+|50-50|}{2 \cdot \psi_{max}} = 1 - \frac{0}{\psi_{max}}. \end{aligned}$$

Or, étant donné que $\psi_{max} > 0$, le critère (5.6) nous fait choisir F_3 pour réaliser le lien entre A et B car $\max\{1 - \frac{40}{\psi_{max}}; 1 - \frac{10}{\psi_{max}}; 1\} = 1$. Selon (5.8), le degré d'appartenance de l'arête $\varphi(A, F_3, B)$ à l'ensemble \mathcal{A} des arêtes est :

$$\max\{1 - \frac{0}{\psi_{max}} - \epsilon, \epsilon\} = \max\{1 - \epsilon, \epsilon\} = 1 - \epsilon. \quad (5.9)$$

Supposons que $\psi_{max} = 80$ et $\epsilon = 0.01$. Les résultats sont montrés en figure 5.7(c) et les deux arêtes floues non privilégiées ($\varphi(A, F_1, B)$ et $\varphi(A, F_2, B)$) doivent alors être éliminées.

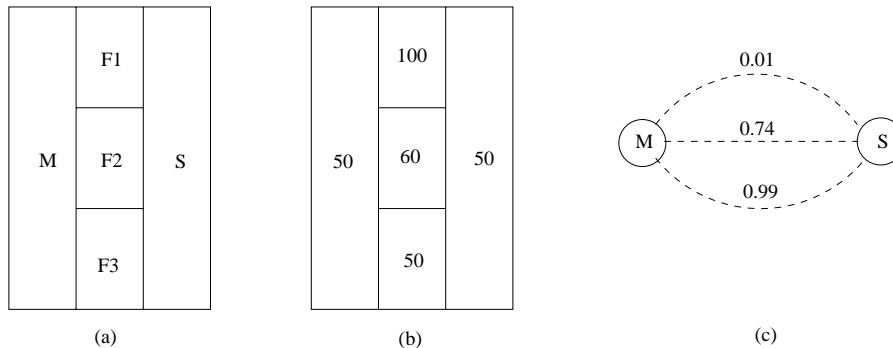


FIG. 5.7 - (a) Les trois possibilités d'attacher le sommet M au sommet S passant par F_1, F_2 ou F_3 . (b) Avec les niveaux des gris Γ (c) la valeur associée à chaque arête floue est calculée.

5.4.4 Degré de connexité adapté

Il est possible d'utiliser une adaptation de l'équation du degré de connexité (voir définition 59) pour calculer le degré d'existence des arêtes floues. Cela nous fournit :

⁴L'équation (5.7) pourra aussi être utilisée.

$$\mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F^*, B)] = \max_{1 \leq i \leq k} \{\mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_i, B)]\} \quad (5.6)$$

où le degré d'appartenance de chaque arête floue $\wp(A, F_i, B)$ à \mathcal{A} peut être évalué par :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_i, B)] &= \\ &= 1 - \frac{|NG(F_i) - NG(A)| + |NG(B) - NG(F_i)| + |NG(B) - NG(A)|}{2 \cdot \psi_{max}} \\ &= 1 - \frac{\max\{NG(A), NG(F_i), NG(B)\} - \min\{NG(A), NG(F_i), NG(B)\}}{\psi_{max}} \end{aligned}$$

où $\psi_{max} = (max - min) \geq 0$. L'égalité $max = min$ caractérise une image uniforme. Grâce à ψ_{max} l'équation (5.7) ne prend pas de valeurs supérieures à l'unité.

A la place de (5.7) il est possible d'utiliser :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F_i, B)] &= \\ &= 1 - \frac{\sigma(NG(A), NG(F_i), NG(B))}{\sigma_{max}} = \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{3} \sqrt{(NG - NG(A))^2 + (NG - NG(F_i))^2 + (NG - NG(B))^2}}{\sigma_{max}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

où σ_{max} est le maximum des variances pour tous A, F_i et B .

Nous proposons alors que le degré d'appartenance des arêtes à l'ensemble \mathcal{A} devienne au lieu de (5.5) :

$$\mu_{\mathcal{A}}^k(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont voisins} \\ \max\{\mu_{\mathcal{A}}[\wp(A, F^*, B)] - \epsilon, \epsilon\} & \text{si } \begin{array}{l} B \notin \Gamma^k(A) \text{ mais} \\ \exists F^* \in \mathcal{F}; \\ P^k(F) \supseteq \{A, B\} \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.8)$$

où $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ est la famille des sommets flous capables de réaliser le lien entre les sommets A et B .

Exemple 9 Les figures 5.7(a et b) montrent les 3 possibilités d'attacher le sommet M au sommet survivant S . Les trois arêtes floues qui peuvent être créées, montrées en figure 5.7(c), sont :

$$- \wp(M, F_1, S);$$

Règle 2 À chaque fois qu'un sommet M décide de s'attacher à un sommet S au moyen d'une arête floue $\wp(M, F, S)$, le sommet flou F doit s'attacher lui aussi à S . Nous dirons alors que l'arête floue $\wp(M, F, S)$ est **validée**.

Nous remarquons que la fonction $\mu_{\mathcal{A}}$ définie par l'équation (5.5) ne tient pas compte du niveau de gris du sommet flou faisant partie d'une arête floue qui a été validée. D'après la règle 2 Γ la prise en compte de cette information est d'extrême importance car le sommet flou va s'attacher Γ lui aussi Γ au sommet survivant.

Il n'est pas difficile d'imaginer une situation de décision erronée Γ où l'arête $\wp(M_1, F, S_1)$ Γ est validée à la place de $\wp(M_2, F, S_2)$ Γ simplement parce que $|NG(M_1) - NG(S_1)| < |NG(M_2) - NG(S_2)|$. Prenons comme exemple les valeurs : 100 Γ 160 Γ 100 Γ 180 et 170 qui représentent les niveaux de gris des sommets M_1 Γ M_2 Γ S_1 Γ S_2 et F respectivement Γ comme le montrent les figures 5.6(a et b). Il est évident que le fait que S_1 et M_1 soient plus similaires que S_2 et M_2 va générer la région $\{M_1 \cup F \cup S_1\}$ montrée en figure 5.6(c). Néanmoins cette région est plus hétérogène que celle qui aurait été créée si $\wp(M_2, F, S_2)$ avait été validée (voir la figure 5.6(d)).

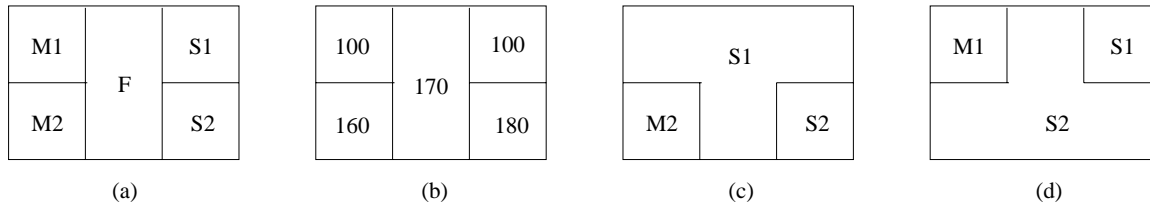


FIG. 5.6 - (a) Des régions Γ (b) leurs niveaux de gris et (c-d) deux configurations possibles résultant de la validation des arêtes floues.

Il y a encore une deuxième raison pour ne pas travailler avec la fonction (5.5). S'il peut arriver qu'un sommet A soit lié à un sommet B à travers un sommet flou F_1 Γ rien n'empêche qu'il existe un autre sommet flou F_2 capable de faire le même lien. Il faut donc décider quelle arête représentera $(A|B)$: $\wp(A, F_1, B)$ ou $\wp(A, F_2, B)$. En généralisant Γ s'il existe p sommets flous Γ disons F_1, F_2, \dots, F_p Γ qui puissent réaliser le lien entre les sommets A et B Γ comment alors choisir le meilleur d'entre eux Γ étant donné que $\mu_{\mathcal{A}}(\wp(A, F_1, B)) = \mu_{\mathcal{A}}(\wp(A, F_2, B)) = \dots = \mu_{\mathcal{A}}(\wp(A, F_p, B))$?

Ainsi Γ il est nécessaire et plus rationnel d'utiliser le maximum d'information dans le but d'obtenir une valeur plus cohérente dans le calcul de $\mu_{\mathcal{A}}$.

Étant donné qu'au moment où une arête floue est validée Γ les trois sommets mis en jeu fusionnent Γ il est important de coopérer avec les fusions les plus homogènes. Pour mesurer cette homogénéité Γ nous proposons d'utiliser soit la somme des différences entre les niveaux de gris des régions mises en jeu Γ soit la variance normalisée des niveaux de gris de ces régions. Évidemment Γ d'autres mesures peuvent être utilisées.

S'il existe plusieurs sommets flous Γ disons F_1 Γ F_2 Γ ... Γ F_k Γ qui peuvent réaliser le lien entre les sommets A et B Γ l'arête floue qui aura le plus de chances d'être validée sera celle pour laquelle l'homogénéité est maximale Γ c.à-d. l'arête qui appartient avec le degré le plus fort à $\mu_{\mathcal{A}}$:

Il nous faut donc définir une fonction adaptée à toutes les situations. Voici notre première proposition :

$$\mu_{\mathcal{A}}^k(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont voisins} \\ \max\{1 - \frac{|NG(A) - NG(B)|}{max - min} - \epsilon, \epsilon\} & \text{si } \begin{array}{l} B \notin \Gamma^k(A) \text{ mais} \\ \exists F \text{ flou ;} \\ P^k(F) \supseteq \{A, B\} \end{array} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.5)$$

où ϵ est un réel positif proche de zéro.

À propos de la fonction $\mu_{\mathcal{A}}$ ainsi définie nous pouvons dire que :

- Elle permet de différencier les deux types d'arêtes : réelles (qui ont toujours la valeur 1) et floues (qui grâce à l'introduction de ϵ ne peuvent pas prendre la valeur 1) ;
- Grâce à l'introduction de la fonction max elle empêche que les arêtes possédant un sommet flou soient considérées inexistantes lorsque $|NG(A) - NG(B)| = max - min$;
- Elle construit un ordre entre les arêtes de manière à ce que les plus fortes soient celles qui possèdent les plus faibles différences de niveaux de gris entre les deux sommets correspondants.

Le nouveau paramètre ϵ doit représenter le degré d'existence minimal d'une arête floue entre deux sommets A et B tels que $|NG(A) - NG(B)| = max - min$.

Dans la suite on proposera l'utilisation d'un maximum d'informations dans le but d'obtenir des valeurs plus représentatives dans le calcul de $\mu_{\mathcal{A}}$.

5.4.3 L'information apportée par les sommets flous

Reprenons le graphe de la figure 5.5(d) et voyons ce qui se passe si l'ensemble des survivants est composé des sommets 3 et 7³. Le sommet 1 (portant un niveau de gris 100) s'attachera au sommet survivant 7 (qui possède le niveau de gris 115) grâce à l'existence de l'arête floue $\wp(1, 5, 7)$.

Cet attachement ne peut se faire sans l'aide du sommet flou 5 car si la région 1 s'attache à la région 7 la région floue 5 doit aussi s'y attacher ; comme cela on ne risque pas de construire une région ayant 2 composantes connexes. Cela veut dire qu'une arête floue est responsable de la fusion de trois régions (au minimum) en même temps. Par conséquent on établit la règle suivante :

³Cela est tout à fait possible car des arêtes qui traduisent une dissimilarité peuvent être éliminées au moyen d'un seuil.

- $\varphi(6, 5, 3)$;
- $\varphi(6, 5, 7)$;
- $\varphi(1, 5, 6)$;
- $\varphi(3, 5, 7)$.

Remarquons que ces 6 arêtes floues forment une clique dans le graphe. Comme il y a un degré d'existence associé à chacune de ces arêtes la clique engendrée par le sommet 5 est floue. La définition d'une "clique floue" est donnée à la page 124.

La création de $\varphi(1, 5, 6)$ et $\varphi(3, 5, 7)$ est inutile puisque les arêtes (1, 6) et (3, 7) existent déjà. La figure 5.5(d) montre une configuration capable de générer cela. En revanche ce n'est pas le cas des 4 autres arêtes. Nous devons alors trouver un moyen de différencier les arêtes réelles au niveau topologique (celles qui n'ont pas besoin d'un sommet flou pour exister) de celles qui sont floues.

5.4.2 Degré d'existence des arêtes

Il est nécessaire de créer la fonction d'appartenance de chaque arête à l'ensemble d'arêtes \mathcal{A} . Cette fonction doit permettre de différencier les arêtes floues des arêtes réelles ainsi que d'établir un ordre d'importance entre les arêtes non réelles. Au premier abord il semble que cette fonction puisse être définie pour tous sommets A et B du graphe représentant le niveau k de la pyramide par :

$$\mu_{\mathcal{A}}^k(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont voisins} \\ 1 - \frac{|NG^k(A) - NG^k(B)|}{\max^k - \min^k} & \text{si } A \text{ et } B \text{ ne sont pas} \\ & \text{voisins mais } \exists F \text{ flou :} \\ & P^k(F) \supseteq \{A, B\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.4)$$

où $NG^k(A)$ est le niveau de gris moyen de la région A et $\max^k - \min^k$ représente l'écart maximal entre les niveaux de gris de deux sommets quelconques. Le cas où $\max^k = \min^k$ n'est pas considéré car il traduit une image uniforme en niveaux de gris. Dans la suite pour simplifier la notation on n'utilisera pas l'exposant k pour indiquer le niveau de la pyramide dans les fonctions NG et $\mu_{\mathcal{A}}$.

La fonction $\mu_{\mathcal{A}}$ génère des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

Or cette fonction est naïve car quand les sommets A et B possèdent le même niveau de gris $\mu_{\mathcal{A}}(A, B)$ est égal à 1 empêchant ainsi la bonne séparation entre arêtes réelles et floues. De plus dans le cas où $NG(A)$ et $NG(B)$ sont aux extrêmes de la dynamique des niveaux de gris dans l'image (c.à-d. $NG(A) = \min$ et $NG(B) = \max$ ou *vice versa*) $\mu_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ indiquant que l'arête (A, B) n'existe pas.

fusionnent “*plus ou moins*” avec la région floue) deviennent tous voisins les uns des autres.

Malgré ces “voisinages flous” il est nécessaire de différencier les arêtes qui existent vraiment de celles nées des sommets flous. L'importance de cette différenciation vient du besoin de contrôler la propagation de l'incertitude dans la pyramide car lorsqu'un sommet flou décide les liens qu'il avait créés doivent disparaître. Une autre raison qui justifie ce contrôle est la possibilité que des régions déconnectées se forment. La section 5.5 est consacrée à ce problème.

5.4.1 L'idée de base

Le graphe représentant la configuration de la figure 5.5(a) est montré dans la figure 5.5(b). Ce graphe contient deux arêtes réelles ainsi que les 4 attachements flous entre le sommet 5 et ses voisins. Ces attachements traduisent plusieurs possibilités :

1. Le sommet flou pourra s'attacher définitivement au sommet 1. Si cela arrive la région 1 sera adjacente aux régions 3 et 7 mise à part l'adjacence qui existe déjà avec la région 6.
2. Le sommet flou pourra s'attacher définitivement au sommet 6. Si cela arrive la région 6 sera adjacente aux régions 3 et 7 mise à part l'adjacence qui existe déjà avec la région 1 :
3. Le sommet flou pourra s'attacher définitivement au sommet 3. Si cela arrive la région 3 sera adjacente aux régions 1 et 6 mise à part l'adjacence qui existe déjà avec la région 7 :
4. Le sommet flou pourra s'attacher définitivement au sommet 7. Si cela arrive la région 7 sera adjacente aux régions 1 et 6 mise à part l'adjacence qui existe déjà avec la région 3.

A la vue de ces possibilités le graphe d'adjacence de la figure 5.5(b) devient celui montré dans la figure 5.5(c). Dans ce graphe on aperçoit la présence d'arêtes floues (les arêtes formées par des traits en pointillé). Nous donnons ci-après la définition de ces arêtes :

Définition 67 *Une arête floue, notée $\varphi(A, F, B)$, est une arête non réelle qui réalise le lien entre les sommets A et B au moyen du sommet flou F .*

Chaque arête floue garde alors la trace du sommet flou responsable de sa création outre les deux sommets qui lui sont adjacents. Voici la liste des arêtes floues du graphe de la figure 5.5(c) :

- $\varphi(1, 5, 3)$;
- $\varphi(1, 5, 7)$;

qui viennent de mourir) les morts (qui ne sont plus actifs) et les flous. Quelques questions concernant ces derniers surgissent :

1. Quels moyens utiliser pour que les sommets flous ne fassent pas partie des prochains ensembles des survivants puisque'ils ne sont plus actifs alors que les régions qu'ils représentent n'appartiennent pas encore définitivement à une entité dans l'image?
2. Comment exploiter les liens entre le graphe d'adjacence et la topologie des régions (qui peuvent se chevaucher grâce à la notion d'appartenance floue) au niveau de la scène à segmenter?
3. De quelle manière pouvons nous utiliser les informations apportées par les sommets flous?
4. Comment peut-on tenir compte des arêtes adjacentes à un sommet flou puis du fait que ce sommet ne sera pas actif dans les itérations suivantes?

La solution à ces problèmes dus aux sommets flous passe par la création d'une nouvelle classe d'arêtes. Dans la section suivante on présente la manière d'exploiter l'information introduite par biais des sommets flous au moyen des "arêtes floues" dans les graphes représentant l'image.

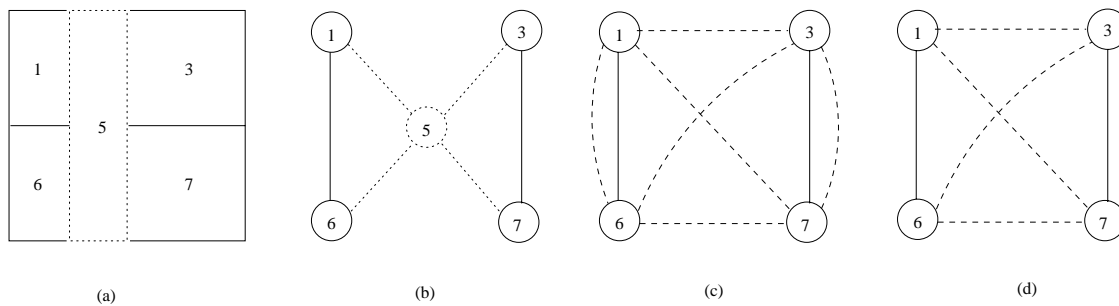


FIG. 5.5 - (a) Configuration de 5 champs récepteurs à la base de la pyramide affectés par un facteur de flou. (b) Graphe réalisant les relations d'attachement entre les 5 régions de (a). (c) Graphe au niveau k représentant toutes les arêtes floues et (d) le graphe antérieur sans les arêtes qui n'ont pas d'intérêt.

5.4 La création d'arêtes floues

Considérons la configuration montrée en figure 5.5(a) qui présente 4 régions vivantes et une floue celle de numéro 5. Selon la règle 1 la région 5 appartient partiellement aux autres 4 régions en même temps. Cette idée de gradation d'appartenance d'un élément à plusieurs classes complémentaires venue de la théorie des ensembles flous nous permet de dire que les sommets représentant ces régions vivantes (qui

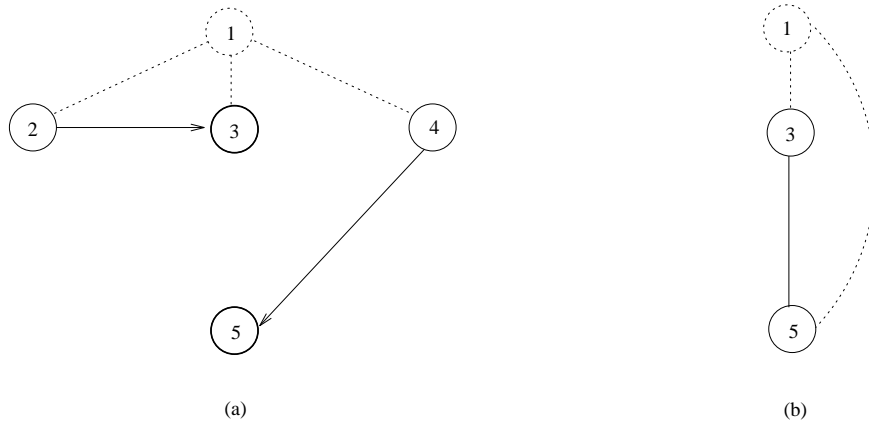


FIG. 5.4 - (a) Le sommet 1 est attaché à ses trois pères qui fusionnent formant les deux classes de la figure (b) représentées par les sommets 3 et 5. Dans cette dernière configuration le sommet flou possède deux pères.

contrôler la propagation de l'incertitude. Pour que le nouveau sommet flou puisse prendre une décision il est essentiel que l'autre sommet flou (le plus ancien) décide.

Les situations décrites ci-dessus montrent l'importance de l'attachement d'un sommet flou à *tous* ses pères potentiels ainsi qu'aux voisins qui viennent de mourir avec lui à la même itération. Cela justifie la création de la règle 1 puisqu'il est nécessaire de garder le lien avec tous ses voisins Γ pour que le graphe d'adjacence du niveau supérieur représente la vraie configuration des champs récepteurs. Cette trace peut être mise à jour en prenant à chaque nouveau niveau de la pyramide seulement les pères des voisins du sommet flou. Cela empêche qu'on travaille avec les sommets morts Γ et introduit la prise en considération de nouveaux pères potentiels qui ne faisaient pas partie du niveau précédent.

Revenons à l'exemple de la section 4.5.4. Dans cet exemple Γ à l'itération k le voisinage du sommet 5 est donné par $\Gamma^k(5) = \{1, 4, 6, 7, 2\}$ et comme l'ensemble des survivants est $S^k = \{1, 3, 6, 7\}$ $P^k(5) = \{1, 6, 7\}$. Du fait que $s(5, 1) = s(5, 6) > s(5, 7)$ où s est la fonction de similarité Γ le sommet 5 devient flou. Comme à la fin de l'itération k des nouveaux regroupements se sont formés Γ on peut remettre en question le choix du sommet flou 5. La figure 5.5(a) montre la nouvelle configuration Γ où l'on passe de $\Gamma^k(5) = \{1, 4, 6, 7, 2\}$ à $\{P^k(1), P^k(4), P^k(6), P^k(7), P^k(2)\} = \{1, 6, 3, 7\}$ qui n'est composé que de sommets survivants.

Le sommet flou peut donc remettre en question son choix. Comme $NG(1) = NG(4)$ Γ on a encore $s(5, 1) = s(5, 6)$ Γ donc le sommet 5 reste flou. Cela veut dire Γ qu'il y a la propagation de l'incertitude d'un niveau k de la pyramide vers le niveau supérieur $k + 1$. Cette propagation doit être représentée sur les graphes d'adjacence et de similarité.

Nous remarquons que les sommets seront partagés en 3 groupes au niveau $k + 1$: les vivants (qui Γ après l'étape de décimation Γ se sous-divisent en survivants et ceux

associé à chaque sommet donne de la souplesse à la pyramide et permet des fusions plus cohérentes et significatives. Le résultat est montré en figure 5.3(b).

Le cas présenté ci-dessus peut être généralisé par la construction de $P^k(F) = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ qui se réduit à S_j au niveau $k + 1$ $S_j \notin P^k(F)$.

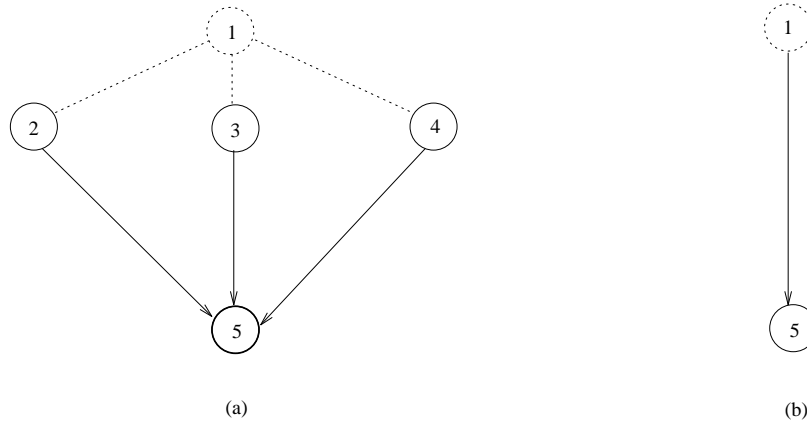


FIG. 5.3 - (a) Configuration montrant le sommet flou 1 lié à ses trois voisins. Lorsque ces derniers décident de tous s'attacher au sommet 5. La fusion des sommets 2, 3, 4 et 5 génère le graphe contracté (b) qui permet au sommet 1 de se lier à 5.

Situation 3

Il peut arriver que seuls les sommets 3 et 5 survivent au niveau $k + 1$ comme dans la situation 1, mais les deux sommets qui viennent de mourir, 2 et 4, choisissent respectivement 3 et 5 comme pères. Nous aurons alors la configuration montrée dans la figure 5.4(a). L'ensemble des pères potentiels du sommet flou 1 devient au niveau $k + 1$: $P^{k+1}(1) = \{P^k(2), P^k(3), P^k(4)\} = \{3, 5\}$. Cette situation était inattendue au départ car le sommet 5 ne faisait pas partie des pères possibles de 1, mais comme l'un des pères potentiels du sommet 1 est mort, il a été nécessaire de mettre à jour les liens entre ce sommet flou et les survivants du niveau supérieur. Dans ce cas, le sommet 1 aura le choix entre les survivants 3 et 5 à l'itération $k + 1$. S'il choisit le sommet 3 comme étant son père définitif, cela veut dire que la région qu'il représente est plus similaire au regroupement formé par les régions 2 et 3 qu'à celui formé par les régions 4 et 5.

Il est possible, par contre, que ce sommet flou ne puisse pas décider. Dans ce cas, il reste encore flou, mais attaché aux nouveaux pères 3 et 5. Le graphe de la figure 5.4(b) montre la configuration des sommets au niveau $k + 2$.

Situation 4

Il peut arriver qu'un sommet qui devient flou possède un fils qui était déjà flou dans un niveau inférieur $k - b$, $b \geq 1$. Dans cette situation, il est nécessaire de

Situation 1

Seuls les sommets 3 et 5 survivent au niveau suivant. Les deux sommets qui viennent de mourir (2 et 4) ayant le choix entre les survivants 3 et 5 choisissent le premier car comme nous le montre la figure 5.2(a). À ce moment le sommet flou n'a qu'à s'attacher au survivant 3 puisque celui-ci devient son unique père potentiel.

Voyons l'évolution de l'ensemble $P^k(1)$ des pères potentiels du sommet 1. Au départ $P^k(1) = \{2, 3, 4\}$ mais comme à l'itération $k + 1$ les sommets 2 et 4 ont décidé de s'attacher au survivant 3 le sommet 1 se retrouve avec : $P^{k+1}(1) = \{P^k(2), P^k(3), P^k(4)\} = \{3\}$.

Cette situation n'est qu'un cas particulier d'une configuration plus générale où l'ensemble des pères potentiels $P^k(F) = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$ d'un sommet flou F se réduit à un seul survivant S_j $1 \leq j \leq p$ au niveau $k + 1$ auquel se rattachent tous les autres.

En permettant à ses voisins de fusionner le sommet flou s'attache ainsi naturellement au survivant représentant la nouvelle région contenant tous les éléments de $P^k(F)$. Cela est montré en figure 5.2(b).

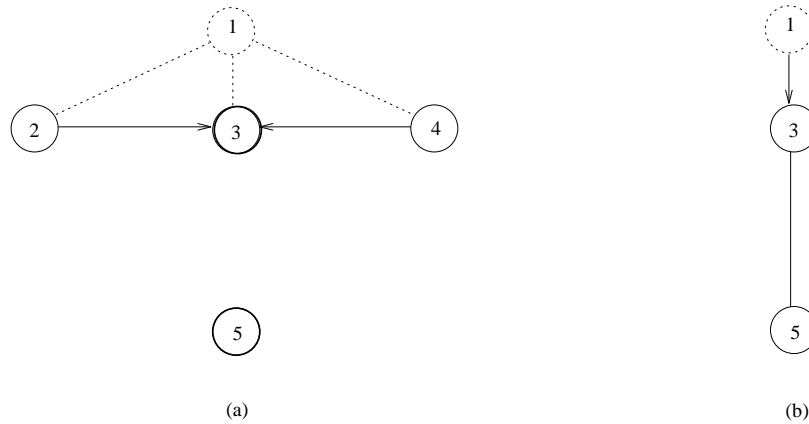


FIG. 5.2 - (a) Configuration montrant le sommet flou 1 attaché à ses pères qui fusionnent formant le graphe contracté (b). Cette configuration permet au sommet 1 de s'attacher à son voisin 3.

Situation 2

Considérons maintenant le cas où tous les éléments de $P^k(F)$ meurent à l'itération $k + 1$ et décident de s'attacher à un seul sommet survivant le sommet 5. Dans ce cas illustré par la figure 5.3(a) l'ensemble des pères potentiels du sommet flou évolue de la manière suivante : $P^k(1) = \{2, 3, 4\}$ et $P^{k+1}(1) = \{P^k(2), P^k(3), P^k(4)\} = \{5\}$. Le sommet 1 peut maintenant s'attacher au seul survivant qui peut le représenter au niveau suivant.

Remarquons qu'au départ le sommet 5 ne faisait pas partie des pères potentiels du sommet flou 1. Cette évolution qui prend en compte le vrai voisinage topologique

- lorsqu’un sommet flou prend sa décision définitive l’arête en pointillé qui est validée se transforme en arc indiquant l’absorption de ce sommet par un survivant. Un exemple est montré en figure 5.2(b) où le sommet 3 absorbe le sommet 1 ;
- les sommets survivants peuvent se distinguer des vivants par leur couleur plus sombre comme par exemple les sommets 3 et 5 du graphe de la figure 5.2(a) ;
- les arêtes floues (qui n’ont pas encore été définies) sont représentées par des traits pointillés. Dans le graphe de la figure 5.5(d) on voit 4 arêtes floues.

5.3 Gestion des attachements flous

Nous avons dit au début de ce chapitre que “l’introduction des sommets flous dans la structure pyramidale permettrait aux autres sommets de se regrouper entre eux formant des nouvelles régions permettant ainsi à chaque sommet flou de réaliser un meilleur choix”. Nous allons éclaircir cette affirmation en présentant la manière de gérer les liens entre chaque sommet flou et ses pères possibles.

Fondamentalement quatre situations peuvent se produire. Pour les illustrer nous allons utiliser le graphe de la figure 5.1(b) qui est une version simplifiée de celui montré par la figure 5.1(a). Nous montrons ces deux graphes pour justifier l’existence d’arêtes entre deux sommets survivants sans que cela entraîne un non respect de la condition “deux sommets voisins ne peuvent pas survivre en même temps”.

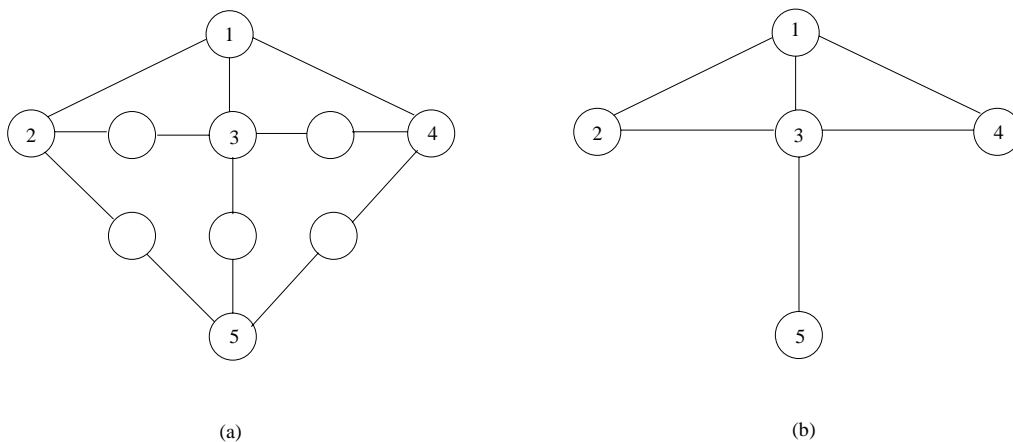


FIG. 5.1 - Le graphe (b) est obtenu à partir de (a) par absorption des sommets non numérotés.

Supposons alors que les sommets 2, 3 et 4 de la figure 5.1(a) survivent au niveau k et que le sommet 1 devienne flou parce qu’il vient de mourir et il ne peut pas réaliser son choix entre ses pères potentiels (les survivants 2, 3 et 4). Nous allons décrire maintenant les différentes situations possibles au niveau $k + 1$:

En calculant $0.98 + 0.92 + 0.98 + 0.96 = 3.84$, les degrés d'appartenance, obtenus au moyen de l'équation (5.1) sont :

$$\mu_1(5) = \frac{0.98}{3.84} = 0.255 ;$$

$$\mu_3(5) = \frac{0.92}{3.84} = 0.240 ;$$

$$\mu_6(5) = \frac{0.98}{3.84} = 0.255 ;$$

$$\mu_7(5) = \frac{0.96}{3.84} = 0.250.$$

La deuxième possibilité, qui utilise l'équation (5.3) et $\sum_j |NG(F) - NG(P_j)| = 5 + 30 + 5 + 10 = 50$ fournit :

$$s(5, 1) = 1 - \frac{|105-100|}{50} = 0.9 ;$$

$$s(5, 3) = 1 - \frac{|105-135|}{50} = 0.4 ;$$

$$s(5, 6) = 1 - \frac{|105-110|}{50} = 0.9 ;$$

$$s(5, 7) = 1 - \frac{|105-115|}{50} = 0.8.$$

On obtient alors, grâce à (5.1) :

$$\mu_1(5) = \frac{0.9}{3} = 0.300 ;$$

$$\mu_3(5) = \frac{0.4}{3} = 0.133 ;$$

$$\mu_6(5) = \frac{0.9}{3} = 0.300 ;$$

$$\mu_7(5) = \frac{0.8}{3} = 0.267.$$

La deuxième procédure fournit des résultats plus discriminants, comme nous pouvons voir dans la table 5.1.

Nous allons présenter maintenant la manière de gérer les liens entre chaque sommet devenu flou et ses pères potentiels.

5.2 Notations utilisées dans ce chapitre

- Dorénavant nous allons représenter en pointillés les sommets flous ainsi que les arêtes qui leur sont adjacentes. Comme illustration voir le sommet flou F de la figure 5.2(a) et les 3 arêtes qui l'attachent aux sommets non flous 2, 3 et 4 ;

$P_i(5)$	1	3	6	7
NG	100	135	110	115
$\mu_{P_i}(5)$ - selon l'équation 5.2	0.255	0.240	0.255	0.250
$\mu_{P_i}(5)$ - selon l'équation 5.3	0.300	0.133	0.300	0.267

TAB. 5.1 - Degrés d'appartenance du sommet 5 à ses pères potentiels.

F et ce père possible tandis que la première est beaucoup plus restrictive. Cela nous amène à la définition de la règle suivante :

Règle 1 *Chaque sommet flou sera partiellement attaché à ses pères potentiels. Cela signifie que la région qu'il représente fera partiellement partie de chacun des champs récepteurs correspondants voisins à la base de la pyramide.*

Ainsi le degré d'appartenance $\mu_{P_i}(F)$ du sommet F à son père P_i peut être donné par :

$$\mu_{P_i}(F) = \frac{s(F, P_i)}{\sum_j s(F, P_j)} \quad \forall i \quad (5.1)$$

(ce qui nous donne $\sum_j \mu_{P_j}(F) = 1$) où $s(F, P_i)$ est donné par

$$s(F, P_i) = 1 - \frac{|NG(F) - NG(P_i)|}{256} \quad (5.2)$$

ou alternativement par :

$$s(F, P_i) = 1 - \frac{|NG(F) - NG(P_i)|}{\sum_j |NG(F) - NG(P_j)|} \quad (5.3)$$

Exemple 8 *Pour comparer les équations (5.2) et (5.3), nous allons les appliquer au graphe montré en figure 5.5(b). Dans ce graphe le sommet flou 5, de niveau de gris 105, possède 4 pères potentiels. Dans la table 5.1 il est montré le niveau de gris de ces sommets.*

En utilisant l'équation (5.2), nous avons :

$$s(5, 1) = 1 - \frac{|105-100|}{256} = 0.98 ;$$

$$s(5, 3) = 1 - \frac{|105-135|}{256} = 0.92 ;$$

$$s(5, 6) = 1 - \frac{|105-110|}{256} = 0.98 ;$$

$$s(5, 7) = 1 - \frac{|105-115|}{256} = 0.96.$$

de similarité est maximal; F devient alors un sommet flou. De ce fait Γ ce sommet ne peut pas être présent au niveau $k + 1$ de la pyramide puisque seuls les survivants y seront. Le sommet F sera alors représenté par ses pères (et on ne parle plus de mettre à jour son voisinage dans la pyramide de graphes parce que ce sommet ne fait pas partie des survivants) aux niveaux supérieurs jusqu'à ce qu'il puisse décider.

Nous devons développer une stratégie pour mettre à jour l'ensemble des pères de F aux itérations $k + 1, k + 2, \dots$ puisque au fur et à mesure que les graphes se contractent à chaque nouveau niveau de la pyramide Γ le sommet flou risque de ne rester attaché qu'à des sommets non-survivants. Si on ne retient de $P^k(F)$ que les sommets survivants Γ de fortes similarités seront abandonnées et le choix de F deviendra restreint Γ ce qui contredit notre idée d'origine. Il est donc plus intéressant de choisir $P^{k+1}(F)$ dans $\{P^k(V_1), P^k(V_2), \dots, P^k(V_v)\}$. De cette manière $\Gamma P^k(F)$ peut faire partie de $P^{k+1}(F)$ Γ car pour chaque sommet S_i Γ voisin survivant de F Γ on a $P^k(S_i) = S_i$. En plus Γ le sommet flou F aura un choix plus riche à réaliser puisque des éléments $S_j \notin P^k(F)$ peuvent être présents dans $P^{k+1}(F)$ (il suffit que $\exists V_c$ non survivant dans $P^k(F)$ tel que $P^k(V_c) = S_j$).

Il existe plusieurs manières de déterminer l'ensemble des pères $P^{k+1}(F)$ du niveau $k + 1$ à partir de $P^k(F)$:

1. F ne reste attaché qu'aux pères potentiels qui survivent au niveau $k + 1$ et qui ont le même degré maximal de similarité Γ en éliminant les moins similaires. Dans ce cas l'ensemble des pères $P^{k+1}(F)$ du sommet flou F au niveau $k + 1$ est tel que $P^{k+1}(F) \subseteq \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$.
2. F décide de s'attacher à tous les éléments de $\{P^k(V_1), P^k(V_2), \dots, P^k(V_v)\}$ indépendamment des similarités. L'ensemble $P^{k+1}(F)$ contiendra $P^k(S_1)$ Γ $P^k(S_2)$ Γ \dots $\Gamma P^k(S_t)$ Γ mais pas forcément ni $\Gamma^k(F)$ Γ ni $P^k(F)$. En revanche Γ tout sommet survivant père d'un des voisins morts de F fera partie des pères de F au niveau $k + 1$. Ce choix garde en fait tous les liens possibles entre F et les survivants du niveau supérieur.
3. Il est possible de séparer les pères potentiels du niveau k d'un sommet flou F en deux groupes au niveau $k + 1$. Cette séparation peut être réalisée au moyen d'un seuil basé sur les différences de niveaux de gris entre F et chaque élément de $\{P^k(S_1), P^k(S_2), \dots, P^k(S_m)\}$. Des possibilités de détermination des deux classes ont été exposées au chapitre 3 et dans la section 4.5.1 lors de la présentation de techniques capables de fournir des seuils locaux. Dans ce cas $\Gamma P^k(F) = \{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ devient un sous-ensemble de $\{P^k(S_1), P^k(S_2), \dots, P^k(S_m)\}$ Γ $m < t$.

Malgré l'aspect intéressant de la troisième proposition Γ la détermination d'un nouveau seuil se fait nécessaire Γ en plus des seuils global et local Γ déjà définis dans le chapitre précédent. Nous préférons la deuxième option car un père potentiel qui n'est pas "pour le moment" l'un des plus similaires peut le devenir dans l'une des itérations suivantes. La deuxième option n'écarte pas la possibilité d'une fusion entre

pyramidale et on permet la propagation (avec contrôle) d'une certaine incertitude.

5.1 Attachement flou

L'une des contraintes du modèle pyramidal imposée par la logique classique est l'unicité d'appartenance d'une région à un seul champ récepteur. Cela veut dire qu'une région ne peut appartenir qu'à un seul regroupement et par conséquent dans le graphe représentant l'image chaque sommet qui vient de mourir ne peut choisir qu'un seul père.

Dans notre approche nous proposons que cette contrainte soit relaxée lorsque pour l'une des raisons exposées au début de ce chapitre un sommet qui vient de mourir a une certaine incertitude sur son choix. Au moyen de la logique floue en permettant qu'un sommet puisse sélectionner plusieurs pères jusqu'au moment de la prise de décision définitive nous espérons pouvoir obtenir un processus de segmentation plus aisé.

Retournons à l'exemple de la section 4.5.4. Dans cet exemple à l'itération k le sommet 5 ne pouvait pas décider à quel survivant il s'attacherait avec les informations qu'il possédait. Nous proposons donc que ce sommet ne soit pas obligé de décider. La région qu'il représente restera en veille permettant aux autres régions de fusionner entre elles en espérant que dans les prochaines itérations elle pourra réaliser son choix grâce aux nouvelles informations développées. Cela veut dire que ce sommet devra rester dans un "état d'indécision" jusqu'au moment où les changements apportés par les nouveaux champs récepteurs lui permettront de décider.

Les attributs d'un sommet qui possède plus d'un père seront pris en compte partiellement par ces pères. Ainsi la région représentée par ce sommet contribuera en surface et niveau de gris moyen selon son degré d'appartenance aux champs récepteurs auxquels elle est attachée.

Définition 66 *Un sommet indécis, qui n'arrive pas à choisir parmi ses voisins survivants son père, sera dénommé **sommet flou** tant qu'il reste dans cet état d'indécision.*

Il est important de contrôler la propagation de l'incertitude dans la pyramide pour éviter des incohérences et pouvoir en tirer le maximum de profit.

Soit F un sommet qui vient de mourir au niveau k de la pyramide et $\Gamma^k(F) = \{V_1, V_2, \dots, V_v\}$ l'ensemble de ses voisins. Considérons l'ensemble des pères potentiels² de F $P^k(F) = \{S_1, S_2, \dots, S_p, \dots, S_t\}$ au niveau k tel que $s(F, S_1) = s(F, S_2) = \dots = s(F, S_p) > s(F, S_j) \quad \forall j > p$ où s est la fonction de similarité. Comme chacun des pères potentiels est un sommet survivant nous avons $P^k(F) \subseteq \Gamma^k(F)$ d'où $t \leq v$. Or F ne peut pas choisir son père dans l'ensemble $P^k(F)$ car il existe plusieurs pères potentiels auxquels ce sommet est identiquement similaire et ce degré

²Pour chaque sommet flou F , on notera $P^k(F)$ l'ensemble des ses pères potentiels au niveau k de la pyramide.

Chapitre 5

Pyramide irrégulière floue

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le choix d'un ensemble de survivants S^k au niveau k de la pyramide irrégulière entraîne la séparation des sommets en deux groupes : ceux qui font partie de S^k qui seront les **vivants** du niveau $k + 1$ et les autres qui seront considérés comme étant **morts** au niveau $k + 1$.

Chaque sommet vivant du niveau k qui ne fait pas partie des survivants est encore actif pendant qu'il choisit son père et qu'il passe ses attributs à ce survivant qui le représentera au niveau prochain. Le rôle de ces sommets est d'extrême importance car le résultat du processus de segmentation dépend fortement des bonnes fusions. Nous nous référerons aux sommets qui ne font pas partie des survivants mais qui sont encore vivants comme des sommets qui **viennent de mourir**¹.

Le choix d'un père est facile lorsqu'un sommet qui vient de mourir ne possède qu'un seul voisin survivant qui respecte le seuil global s_g , à-d. un seul père potentiel. Ce choix étant unique le sommet ne peut que s'attacher à ce père même s'il ne lui est pas très similaire. Au niveau informatique lorsqu'un sommet est obligé de fusionner avec son unique père potentiel la tâche à réaliser est facile en revanche de mauvaises fusions peuvent se réaliser.

Un sommet qui vient de mourir est obligé de faire un choix unique même s'il est identiquement similaire à quelques uns de ses pères potentiels. Dans ce cas un choix aléatoire doit se produire.

Or il serait intéressant de permettre à chaque sommet qui n'est pas prêt à réaliser son choix (soit parce qu'il possède plusieurs voisins qui lui sont identiquement similaires soit parce que son unique voisin survivant et lui ne sont pas assez similaires) de repousser la décision d'attachement. Cette souplesse dans une structure pyramidale permettrait aux autres sommets de se regrouper entre eux formant peu à peu de nouvelles régions. Ces dernières peuvent ou non devenir plus similaires à la région indéfinie lui permettant alors de réaliser un meilleur choix.

Dans ce chapitre on va développer un modèle qui permet de repousser la décision des sommets qui viennent de mourir sans que des incohérences ne se produisent. De cette manière on introduit la remise en cause des décisions dans une structure

¹Le fait de nommer cet état intermédiaire, nous évitera de parler des "sommets vivants qui ne sont pas survivants" à chaque fois qu'on fera référence aux sommets qui "viennent de mourir".

difficile à automatiser car il y a des techniques qui ont un fort potentiel pour traiter certains types d'images mais échouent lorsqu'elles sont appliquées à d'autres.

Des améliorations sur la base de la multi-résolution dans la pyramide irrégulière sont développés par Pascal Bertolino [6].

La segmentation d'images au moyen des pyramides est un processus général qui essaye de s'adapter à tous les types d'images. L'introduction des coopérations du type région/contours est également prometteuse.

Nous remarquons que :

- en général une décision prise n'est jamais remise en cause; en outre des mauvaises fusions sont réalisées car les décisions d'attachement ne peuvent pas être repoussées ;
- l'information portée par une arête ne concerne que les deux sommets qui lui sont adjacents sans tenir compte ni des voisins de ses sommets ni des regroupements similaires ou non qui lui sont proches ;
- chaque élément a le droit d'appartenir à une et seule une entité.

Dans le chapitre suivant nous allons introduire la logique floue dans les structures pyramidales irrégulières pour essayer de donner plus de souplesse à l'algorithme de segmentation et pour obtenir un processus plus aisé.

La nouvelle technique comme pour les pyramides irrégulières se traduit par des agrégations itératives de régions mais qui ne sont pas forcément adjacentes. La prise de décision pour réaliser la fusion et la contraction du graphe représentant l'image pourra être repoussée pour éviter l'introduction d'un processus de décision aléatoire. Cette structure pyramidale floue conservera la propriété d'obtention d'un niveau k de la pyramide directement du niveau $k-1$ ainsi que les caractéristiques de parallélisme de l'indépendance d'ordre d'évaluation. En outre une classe d'arêtes sera définie de manière qu'elles puissent intervenir dans la fusion de multiples sommets.

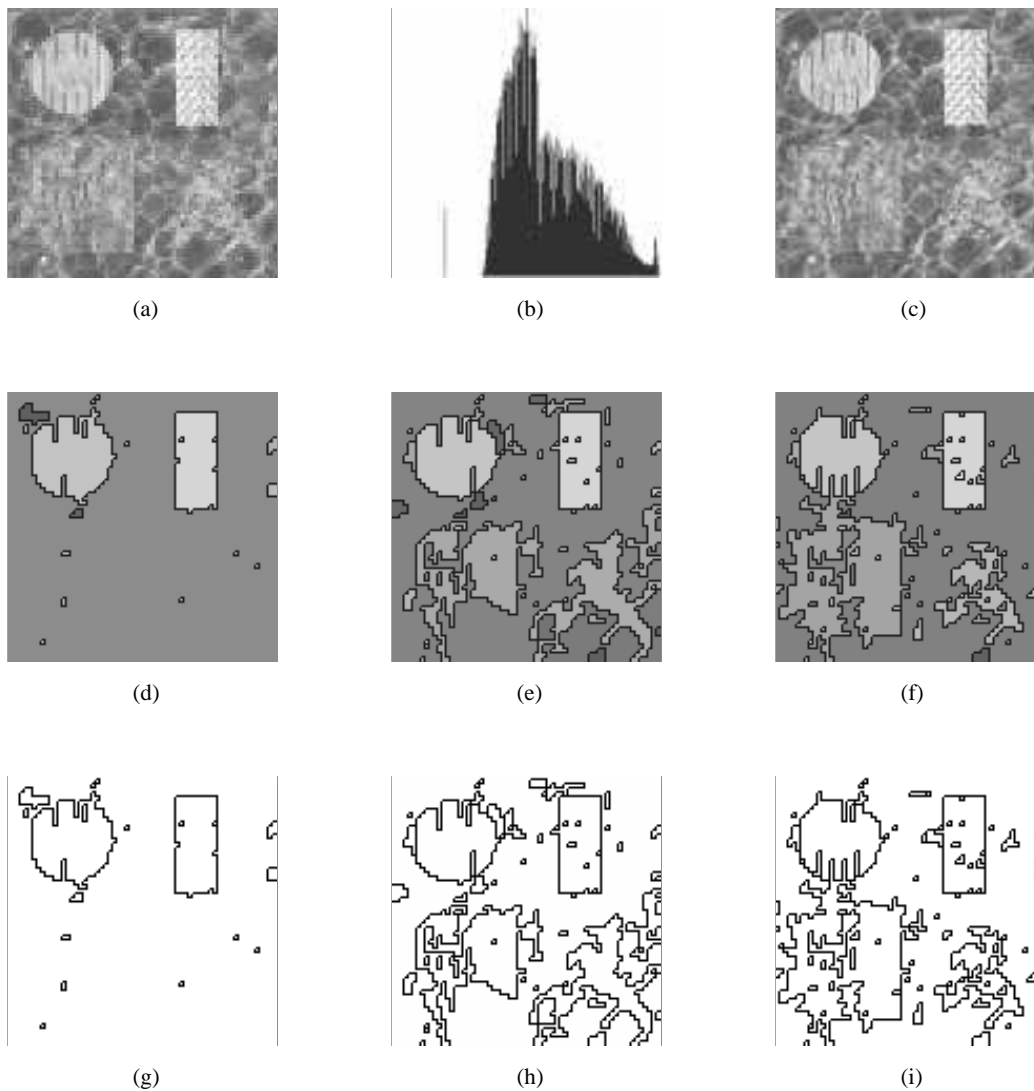


FIG. 4.14 - (a) L'image-test Γ (b) son histogramme de niveaux de gris et (c) l'image originale de taille 256×256 . Résultats contenant : (d et g) 20 régions Γ (e et h) 64 régions et (f et i) 79 régions.

4.6 Commentaires

Nous avons présenté dans ce chapitre les structures pyramidales les plus connues. Une attention spéciale a été donnée aux processus de segmentation d'images en niveaux de gris basés sur ces structures.

Des aspects comme le parallélisme Γ la multirésolution et la récursivité ont été abordés Γ ainsi que la complexité et convergence des structures pyramidales.

Un autre point d'intérêt des structures irrégulières vient du fait que la position Γ orientation et la forme des régions dans l'image n'ont aucune influence dans le processus de segmentation.

Malgré les progrès des dernières années Γ la segmentation d'images reste toujours

Image-test 7

Deux résultats de l'application de la pyramide irrégulière stochastique à l'image-test 7 sont présentés en figure 4.13. Sur l'un d'entre eux (c et d) on remarque un fond assez homogène mais des entités allongées (les vaisseaux moins contrastés avec le fond) ont été partitionnés en plusieurs morceaux. Pour tenter d'avoir la connexité des vaisseaux on a baissé le seuil global. Le résultat (e et f) est plutôt décevant car il est trop chargé d'informations non significatives ; en outre le fond et les vaisseaux ne se sont pas distingués.

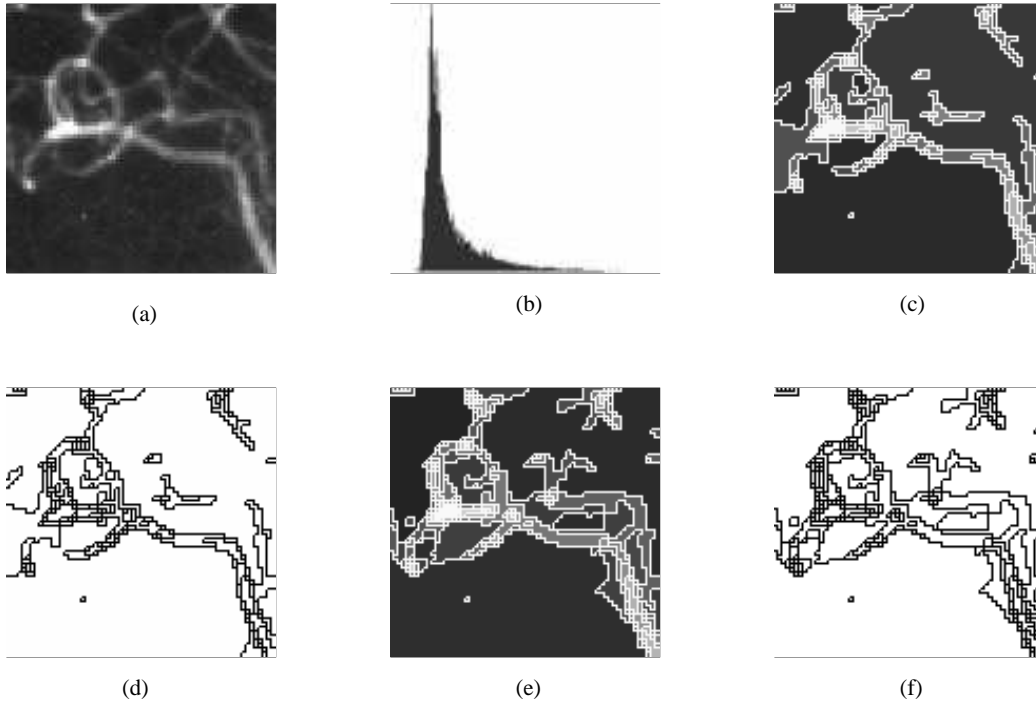


FIG. 4.13 - (a) L'image originale et son (b) histogramme. (c) L'apex trouvé par la pyramide irrégulière stochastique pour $s_g = 18$ en 15 niveaux et (d) la carte de contours respective montrant les 174 régions. (e) L'apex trouvé pour $s_g = 15$ en 19 niveaux et (d) la respective carte de contours montrant les 232 régions.

Image-test 8

Trois résultats sur l'image-test 8 sont montrés en figure 4.14. Nous remarquons qu'avec un seuil assez grand seules les formes du haut sont détectées (d et g). En baissant le seuil nous passons de 20 à 64 régions mais la présence des entités dans la partie inférieure de l'image est claire (e et h). Le troisième résultat (f et i) est un peu similaire au deuxième néanmoins il fournit des contours plus précis pour le carré du bas à gauche.

globaux plus bas (voir figures 4.11(d et e) et 4.12(b et c)). Bien que meilleurs, ces résultats ne fournissent pas une bonne interprétation sémantique des images car le fond se montre hétérogène et des morceaux des anneaux de réfringence (présents dans la périphérie des cellules) sont considérés comme étant des régions à part entière.

La coopération proposée dans la section 3.5 se montre plus efficace pour segmenter ce type d'image.

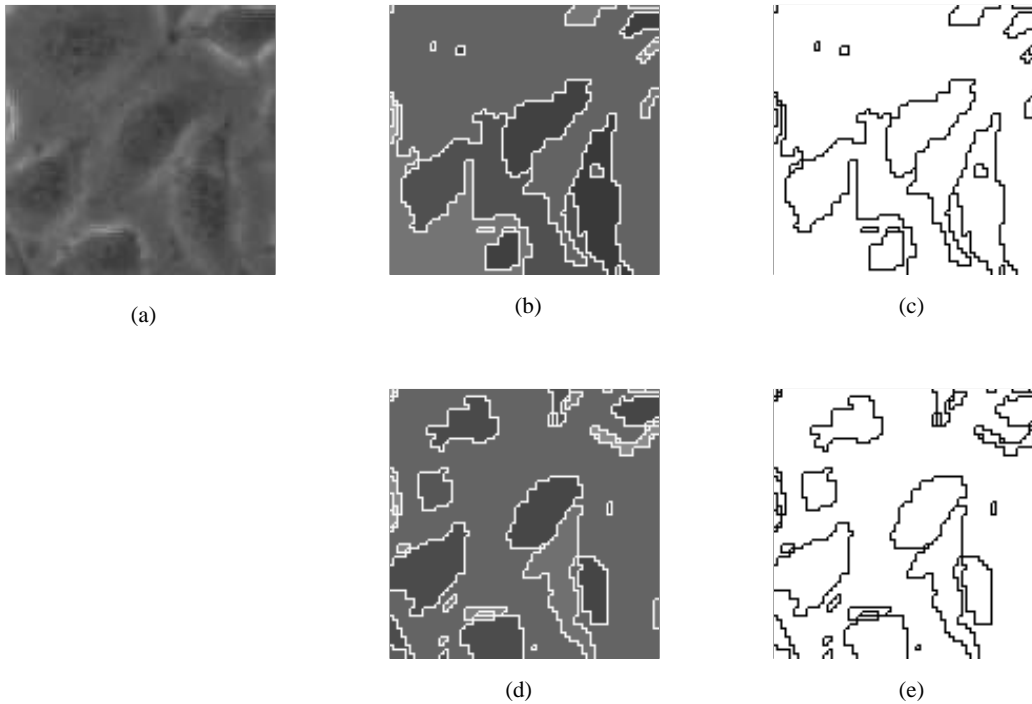


FIG. 4.11 - (a) L'image originale (b) l'apex trouvé pour $s_g = 15$ en 15 niveaux et (c) la carte de contours respective montrant les 25 régions. (d et e) Les 50 régions trouvées en 13 niveaux pour $s_g = 12$.

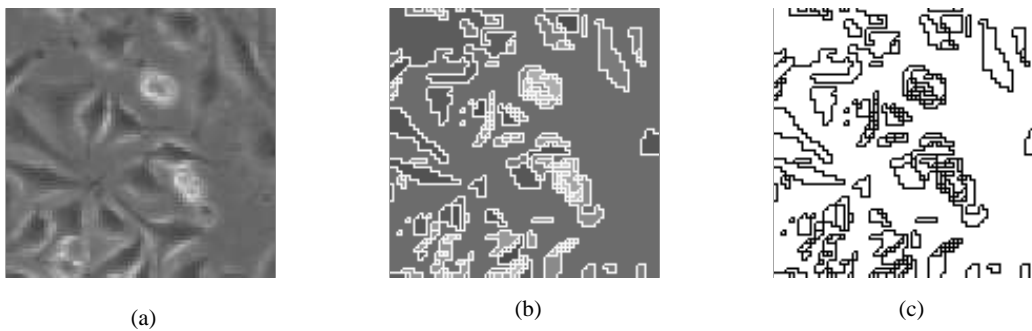


FIG. 4.12 - (a) L'image originale (b) l'apex trouvé pour $s_g = 13$ en 16 niveaux et (c) la carte de contours respective montrant les 211 régions.

Image-test 6

La figure 4.10(c à f) montre deux résultats de l'application de la pyramide irrégulière stochastique à l'image montrée dans (a). Le premier de ces résultats l'accompagne de sa carte de contours (c et d) l'aide à visualiser la difficulté de l'algorithme à traiter l'information bruitée (il y a beaucoup de petites régions dans les zones texturées et le fond de l'image n'est pas homogène). En augmentant le seuil global de 10 à 12 on passe de 153 à 71 régions à l'apex (e et f). Ce résultat n'est pas meilleur que le précédent car on a une perte d'information à l'intérieur du torse et les deux organes de taille importante ne sont pas correctement identifiés.

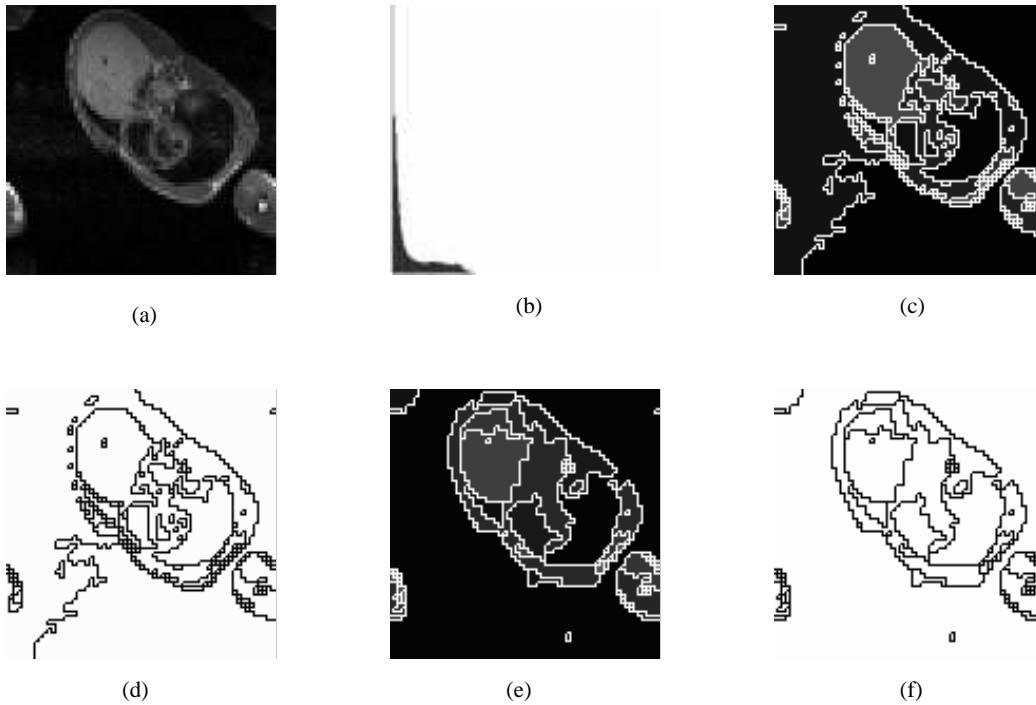


FIG. 4.10 - (a) Image-test 6 normalisée et son (b) histogramme de niveaux de gris. (c) Résultat obtenu en utilisant la pyramide irrégulière stochastique avec un seuil global $s_g = 10$ et (d) la carte de contours montrant les 153 régions. (e) L'apex atteint en 18 niveaux pour $s_g = 12$ et (f) la carte de contours respective avec les 71 régions.

Images-test 1 et 2

La technique décrite dans ce chapitre a été utilisée pour segmenter les images de fibroblastes observés en contraste de phase et les résultats sont montrés dans les figures 4.11(b à e) et 4.12(b et c).

Ces images ont la particularité d'avoir la teinte de l'intérieur des cellules similaire à celle du fond ce qui entraîne des fusions erronées entre les cellules et le fond (voir figure 4.11(b et c)). Pour empêcher ce phénomène on a essayé d'utiliser des seuils

Pour la même image Γ mais avec un seuil global inférieur Γ moins de fusions se réalisent. Cela est montré en figure 4.9 Γ où l'on peut voir les trois derniers niveaux de la pyramide. Remarquons qu'à la fin du processus Γ le taux de réduction de sommets est très réduit (nous passons de 23 à 21 sommets du niveau 11 au niveau 12 Γ pour avoir 20 sommets à l'apex).

Les éléments allongés dans l'image-test 5 sont détectés facilement par la pyramide irrégulière stochastique. Nous pouvons dire Γ qu'en général Γ cette image est bien segmentée Γ car elle est bien contrastée.

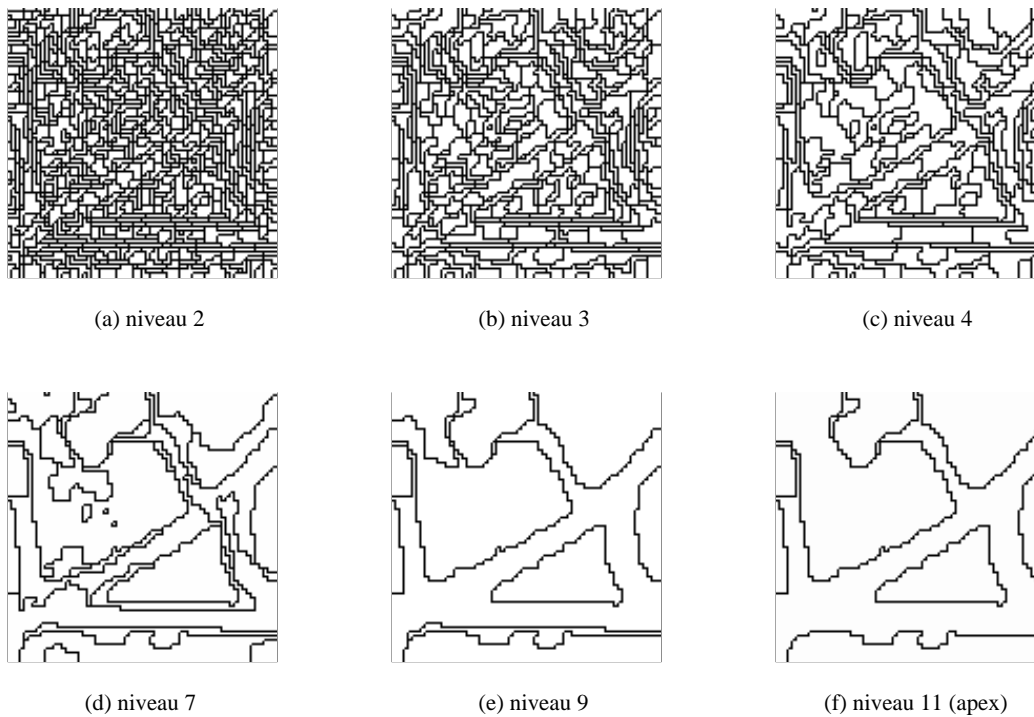


FIG. 4.8 - L'évolution des champs récepteurs pour l'image-test 5. Nombre de régions composant chaque niveau : (a) 814 Γ (b) 365 Γ (c) 175 Γ (d) 38 Γ (e) 16 et (f) 13.

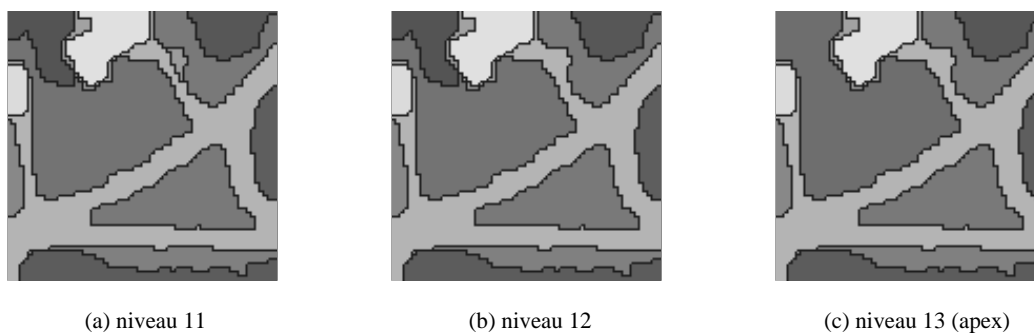


FIG. 4.9 - Les 3 derniers niveaux Γ ayant chacun : (a) 23 Γ (b) 21 et (c) 20 régions Γ pour un seuil global inférieur à celui utilisé pour la figure 4.8.

4.5.5 Mise en œuvre

Dans cette section nous présentons quelques résultats expérimentaux obtenus par la pyramide irrégulière stochastique. Nous rappelons que pour le choix des survivants cet algorithme prend en compte le graphe de similarité orienté.

Description des images

Les résultats montrés dans cette section sont obtenus sur les images-test présentées au chapitre 3 (dont la description se trouve en page 58) et les images suivantes :

Image-test 6 : figure 4.10(a) C'est une image de résonance magnétique (IRM) qui montre essentiellement la coupe d'un torse sur un fond. L'image est bruitée et les différents organes sont difficilement segmentables. L'histogramme de niveaux de gris est montré en figure 4.10(b).

Image-test 7 : figure 4.13(a) Cette image a été obtenue à partir d'une radiographie analogique d'un réseau vasculaire. L'une des difficultés lors de la segmentation de cette image est la conservation de la connexion des vaisseaux car leur contraste avec le fond varie le long de leur trajet. L'histogramme de niveaux de gris est montré en figure 4.13(b).

Image-test 8 : figure 4.14(a) Cette image est composée de quatre formes ayant des textures différentes sur un fond texturé. L'histogramme de niveaux de gris est montré en figure 4.14(b).

Les images-test 4, 6, 7 et 8 font partie de la banque du GDR TDSI¹⁰. Les images testées sont à l'origine de dimensions 256×256 mais la structure pyramidale prenant beaucoup de place en mémoire nous les traitons en dimension 64×64 . Lors de cette réduction faite par sous-échantillonnage et calcul de la moyenne des détails dans l'image originale peuvent disparaître ou devenir moins visibles. Pour illustrer cela nous présentons en figure 4.14 l'image-test 8 de taille réduite (a) et l'image originale (c) où l'on peut voir outre les 4 formes deux autres (à l'intérieur du cercle et du carré).

Afin de faciliter l'interprétation des résultats les régions peuvent être accompagnées de leur carte de contours.

Ces premiers résultats essayent de mettre en évidence les points positifs et les faiblesses de la méthode. Ils seront utilisés dans le chapitre suivant pour une comparaison avec la technique que nous allons proposer.

Image-test 5

Nous montrons en figure 4.8 la configuration des champs récepteurs dans 6 niveaux de la pyramide. Au fur et à mesure que les champs fusionnent l'image converge vers son apex constitué de 13 régions.

¹⁰Groupement De Recherche - Traitement Du Signal et de l'Image.

et le graphe de similarité orienté. Les figures 4.5(e à h) montrent les mêmes choses mais en considérant que le sommet 5 a été affecté au survivant 6.

À l'étage suivante quel que soit le choix fait par le sommet 5 l'ensemble des survivants est le noyau $\{1, 3, 7\}$ et le sommet 6 est affecté à 1 générant la configuration du niveau $k + 2$ montrée dans la figure 4.6(a). Les niveaux de gris des régions et les graphes d'adjacence et de similarité sont montrés respectivement par les figures 4.6(b à d). Le résultat final à l'apex peut être vu dans les figures 4.7(a et b).

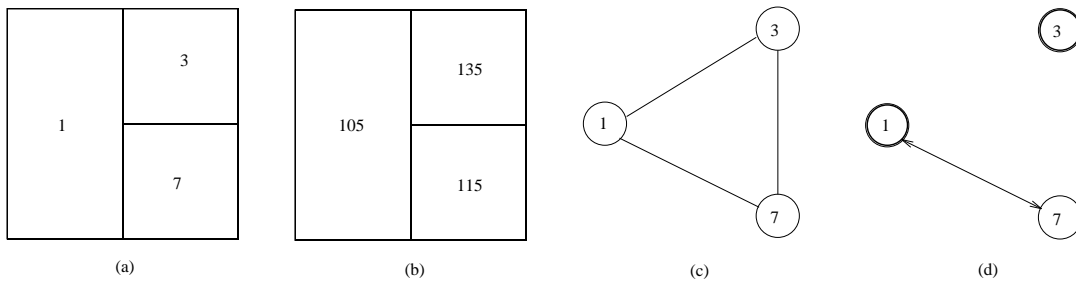


FIG. 4.6 - (a) La configuration au niveau $k + 2$ suivie des (b) régions avec leurs niveaux de gris et les graphes (c) d'adjacence et (d) de similarité.

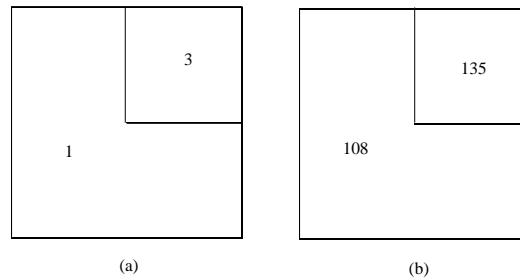


FIG. 4.7 - (a) Configuration et (b) niveaux de gris des régions à l'apex.

Si un seuil global n'avait pas été utilisé il y aurait encore une itération où les deux régions de la figure 4.7(a) auraient fusionné ne laissant qu'un seul sommet à l'apex de la pyramide. En revanche si ce seuil avait été inférieur à 10 des fusions qui ont été réalisées auraient été empêchées de sorte que l'apex serait atteint plus tôt dans la pyramide.

Remarquons aussi qu'au cas où le niveau de gris de la région 7 était au départ 111 ou 112 la configuration des régions montrée dans la figure 4.6(a) ne serait pas la même car l'affectation du sommet 5 à la région 6 au niveau $k + 1$ entraînerait qu'à la prochaine itération le sommet 6 choisisse le sommet 7 comme père à la place de 1. On remarque donc que l'utilisation d'un choix aléatoire peut (dans un cas réel où le nombre de sommets est beaucoup plus important) entraîner des mauvaises fusions. Il serait intéressant d'éviter le plus possible l'utilisation d'une variable aléatoire pour réaliser la fusion des régions dans les cas où un sommet possède plusieurs voisins survivants ayant le même degré de similarité.

$10 = s_g$ seul le seuil global sera considéré pour ce sommet. Le graphe de similarité orienté de la figure 4.4(c) peut alors être généré. Remarquons que les arêtes $(4, 6)$ et $(2, 5)$ ont été éliminées ainsi que l'arc $(1, 5)$.

Le prochain pas après l'extraction du graphe de similarité orienté du graphe d'adjacence est le choix des survivants. Nous l'avons choisi comme étant le noyau $S = \{1, 3, 6, 7\}$. Ensuite chaque sommet non-survivant doit choisir son père.

Étudions ce qui se passe avec chacun de ces sommets :

- Le sommet 4 ne peut que choisir le sommet 1 comme père car celui-ci est l'unique voisin survivant qui peut l'absorber ;
- de la même façon le sommet 2 s'attache au sommet 3. Remarquons que le sommet survivant 7 aurait pu être un père potentiel mais il a été éliminé grâce au seuil global ;
- Le sommet 5 doit faire son choix entre les sommets 1 et 6 ou 7. Évidemment l'hypothèse du choix du sommet 7 est éliminée car il est le moins similaire. Le choix doit se faire entre les deux autres survivants : 1 ou 6. Or le sommet 5 est autant similaire à l'un qu'à l'autre et dans ce cas l'algorithme de la pyramide irrégulière oblige la région 5 à choisir aléatoirement.

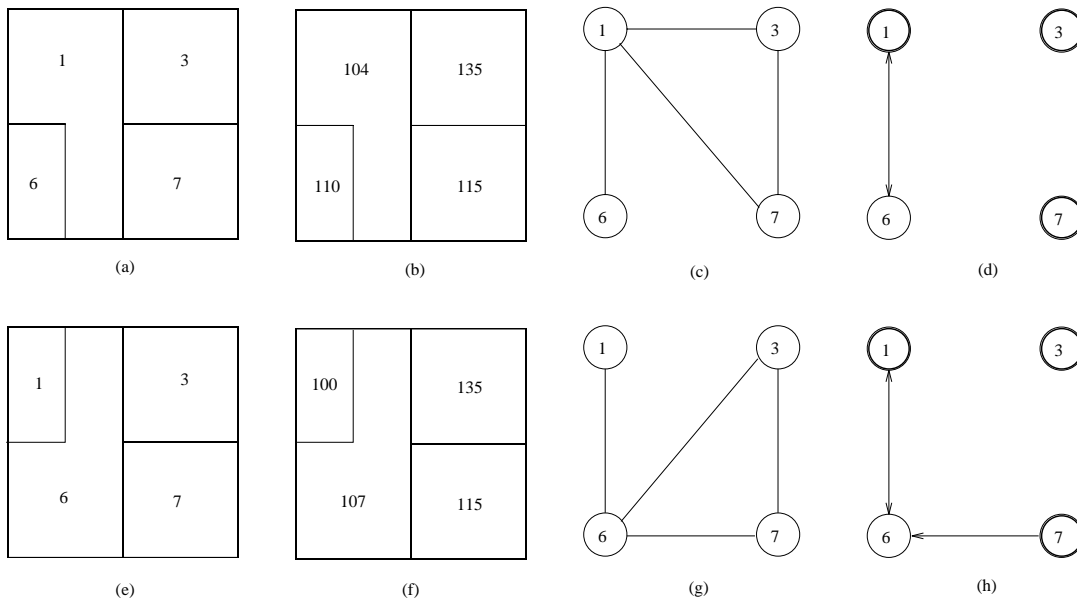


FIG. 4.5 - (a-e) Deux configurations possibles des régions au niveau $k + 1$ avec (b-f) le niveau de gris de chaque région et les graphes (c-g) d'adjacence et (d-h) de similarité respectifs.

Les figures 4.5(a à d) montrent respectivement la nouvelle configuration au niveau $k+1$ lorsqu'on affecte 5 à 1 les nouveaux niveaux de gris des régions formées (obtenus par la moyenne des niveaux de gris pondérés par les surfaces) et le graphe d'adjacence

région	niveau de gris	surface (u.a.)	voisinage
1	100	1	4I5
2	135	3	3I7I5
3	135	1	2
4	100	1	1I5I6
5	105	4	1I4I6I7I2
6	110	2	4I5
7	115	4	5I2

TAB. 4.1 - Données relatives à l'exemple de la section 4.5.4.

voisins	1	4	6	7	2
$ NG(5) - NG(voisin) $	5	5	5	10	20

TAB. 4.2 - Les différences entre le niveau de gris du sommet 5 et celui de ses voisins.

4.5.4 Développement d'un exemple

Considérons la figure 4.4(a) représentant 7 régions à un niveau k de la pyramide. La table 4.1 donne le niveau de gris Γ la surface et le voisinage (en ordre décroissant de similarité) associés à chacune de ces régions.

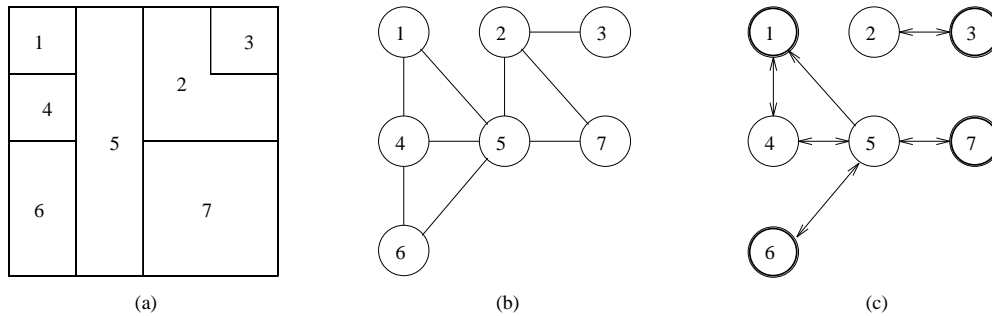


FIG. 4.4 - (a) Configuration des régions au niveau k qui donne naissance aux graphes (b) d'adjacence et de (c) similarité.

Considérons le seuil global $s_g = 10$; cela permet d'enlever quelques-unes des arêtes du graphe d'adjacence G_A^k Γ montré dans la figure 4.4(b). En utilisant le critère de similarité non symétrique proposé par [83] et présenté dans la section 4.5.1 ΓG_A^k est transformé en G_S^k de façon à ce que seuls les voisins plus similaires à chaque sommet du graphe soient retenus comme pères potentiels. Pour le sommet 5 Γ par exemple Γ l'écart le plus grand dans la suite de différences de niveaux de gris donnée par la table 4.2 est égal à 10 Γ correspondant à la séparation des voisins en deux groupes : $\{1, 4, 6, 7\}$ et $\{2\}$. Cela entraîne la création des arcs : $(5I1)\Gamma(5I4)\Gamma(5I6)$ et $(5I7)$. Par conséquent nous avons le seuil local $s_l(5) = 10$.

Avec le même raisonnement on obtient : $s_l(1) = 0\Gamma s_l(2) = 20\Gamma s_l(3) = 0\Gamma s_l(4) = 0$ ou 5 (on va rester avec ce dernier) $\Gamma s_l(6) = 5$ et $s_l(7) = 10$. Comme $s_l(2) = 20 >$

C2' Deux sommets ayant une relation d'absorption entre eux ne peuvent pas survivre au même temps.

La condition **C1'** est traduite dans la théorie des graphes par la recherche d'un **ensemble absorbant** ⁷ S . Cette condition garantit que tout sommet non-survivant peut s'attacher à un survivant pour que ses attributs soient pris en compte dans les prochaines itérations. La condition **C2'** n'est l'autre que l'exigence que S soit aussi un ensemble stable.

Il est intéressant de remarquer que dû à la transformation du graphe d'adjacence en graphe de voisinage Γ plusieurs arêtes qui étaient présentes dans $G_V^k(V, E)$ ne seront pas représentées dans $G_S^k(V, A)$. Cela arrive à chaque fois qu'un sommet x_i décide que son voisin x_j n'est pas similaire. Si auparavant les sommets x_i et x_j ne pouvaient pas survivre en même temps car ils étaient voisins Γ maintenant ils peuvent tous les deux être présents au niveau $k + 1$ de la pyramide puisqu'ils ne sont pas similaires malgré leur adjacence. De cette manière on peut déjà prévoir un nombre plus important de survivants lorsqu'on utilise le graphe de similarité orienté.

Dans la théorie des graphes Γ le sous-ensemble de sommets d'un graphe orienté qui satisfait **C1'** et **C2'** s'appelle le **noyau** ⁸.

Comme il a déjà été montré dans la section 2.3.3 Γ tous les graphes ne possèdent pas de noyaux. La condition qui garantit la présence d'un noyau est que le graphe ne possède pas de circuits d'ordre impair. Comme on n'est jamais sûr de ne pas avoir des circuits d'ordre impair dans les graphes de similarité on ne peut pas garantir l'existence d'un noyau. Cela exige une relaxation des conditions **C1'** et **C2'**.

Nous savons qu'il est essentiel que les sommets non-survivants possèdent des voisins survivants qui puissent les absorber Γ donc **C1'** doit être respectée. Comme il est impossible de garantir la stabilité Γ la condition **C2'** doit être relaxée. Comme la deuxième condition garantit une bonne répartition des survivants sur l'image Γ et qu'elle évite que l'on trouve comme solution le propre ensemble des sommets $V \Gamma$ nous ne devons pas nous éloigner de ces caractéristiques. Il faut donc s'approcher le plus possible d'un noyau et s'il est possible Γ en trouver un ⁹. Cela se traduit par :

C2' relaxée L'ensemble S des survivants doit être minimal au sens où il accroît le moins possible un stable maximal pour qu'il devienne un ensemble absorbant.

Avec **C2' relaxée** on assure la décroissance de la cardinalité de S en restant toujours avec un nombre pas trop réduit de survivants. L'application de cette condition au graphe de la figure 2.9 exigerait d'abord le choix d'un stable maximal ; ce pourrait être $S = \{1\}$ Γ par exemple. Ensuite Γ l'agrandissement minimal étant d'un sommet Γ nous aurions comme solutions $S = \{1, 2\}$ ou $S = \{1, 3\}$.

L'utilisation de **C2** Γ **C2'** ou **C2' relaxée** garantit la convergence du processus.

⁷Voir définition 37 à la page 22.

⁸Conformément à la définition 39 de la page 23.

⁹Il n'est pas question de trouver le noyau maximum car ce problème est *NP*-complet.

minimal peut ne pas être un stable (il suffit de choisir $S = \{4, 5, 6\}$ dans le graphe de la figure 2.8(a)). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 5 *Dans un graphe G , la cardinalité d'un stable maximal est supérieure ou égale à celle d'un ensemble dominant minimum.*

Pour vérifier ce théorème il suffit de remarquer que dans un graphe G la cardinalité d'un ensemble dominant minimum est inférieure ou égale à celle de chaque ensemble dominant minimal et que chaque stable maximal est aussi un ensemble dominant minimal. L'égalité se vérifie dans le cas où le stable est aussi un ensemble dominant minimum comme celui montré en figure 2.8(f).

Le théorème précédent n'empêche pas qu'au moment de choisir l'ensemble des survivants S on tombe sur un ensemble dominant minimum qui peut comme on l'a déjà expliqué ne pas donner un résultat de segmentation qui dépende fortement du contenu de l'image. En tout cas **C1** et **C2** fournissent une grande possibilité aux sommets non-survivants d'avoir plusieurs pères potentiels en même temps que la garantie de la réduction du nombre de sommets survivants d'une itération à l'autre ; quand ce nombre ne change plus l'algorithme s'arrête.

Une question se pose alors forcément : pourquoi ne pas chercher plutôt un stable maximum à la place d'un stable maximal ? Il est vrai que si un stable maximal permet d'avoir un ensemble de survivants plus riche que celui qui aurait pu être fourni par un ensemble dominant minimum un stable maximum permettrait de prendre davantage en compte les caractéristiques de l'image. Malheureusement le calcul d'un stable maximum dans un graphe est un problème *NP-complet* raison pour laquelle nous nous contentons de rester avec un stable maximal.

Nous avons vu que tout stable maximal est aussi un ensemble dominant minimal (théorème 4) mais le choix de ce dernier ne nous convient pas par la seule raison qu'un ensemble dominant minimal n'est pas forcément bien réparti sur l'image. Cela pourrait entraîner une mauvaise distribution des survivants dans le graphe ce qui est mauvais surtout aux premières itérations de l'algorithme.

Les changements apportés par le graphe de similarité orienté

Pour tenir compte des caractéristiques de l'image le graphe de similarité $G_S^k(V, A)$ est construit à l'aide des seuils locaux à partir du graphe d'adjacence $G_V^k(V, E)$. Comme le critère qui définit les seuils locaux n'est pas symétrique le graphe qui représente les similarités est orienté.

L'arc (x_i, x_j) traduit que le sommet x_i reconnaît x_j comme similaire. Le sommet x_j sera alors un père potentiel de x_i s'il est choisi comme survivant et x_i non. Dans ce cas il y a une relation d'absorption entre ces deux sommets. Les conditions **C1** et **C2** définies pour les graphes non-orientés doivent alors être adaptées au graphe de similarité où l'on parle plutôt d'absorbance que de dominance comme suit :

C1' Tous les sommets non-survivants doivent posséder au moins un sommet survivant qui les absorbe ;

par des flèches. Évidemment si l'on prend $S = V$ on est sûr d'avoir un ensemble dominant Γ mais dans ce cas on n'aura pas de réduction du nombre de sommets entre les itérations k et $k+1$. Pour avoir le maximum de réduction Γ l'ensemble de survivants S doit être un **ensemble dominant minimum**⁵. L'un de ces ensembles est montré en figure 2.8(f). Remarquons dans cet exemple que seul le sommet 4 aura un choix pour son père Γ car les autres non-survivants ne possèdent qu'un seul père potentiel et donc leur choix ne dépend pas des attributs associés aux survivants car ils sont obligés de s'attacher à l'unique voisin survivant qu'ils possèdent. On voit alors qu'avec le choix d'un ensemble dominant minimum les sommets non-survivants risquent de ne pas avoir une quantité considérable de voisins survivants auxquels ils peuvent s'attacher.

Comme première conclusion Γ nous pouvons dire qu'un ensemble dominant doit être choisi pour que la condition **C1** soit satisfaite Γ mais que cet ensemble ne doit pas être minimum. Pour mieux diriger le choix vers un ensemble optimal de survivants qui garantisse la décroissance du nombre de sommets présents au niveau $k + 1$ de la pyramide Γ le critère suivant a été créé :

C2 Deux voisins ne peuvent pas survivre en même temps.

Cela veut dire Γ l'ensemble des survivants $S \subseteq V$ doit être un **stable**⁶ Γ mais pas n'importe lequel Γ comme nous pouvons le remarquer dans la figure 2.8(b) qui montre un stable qui n'est pas un ensemble dominant. Cette figure illustre qu'un stable n'est pas forcément un ensemble dominant ; de même Γ un ensemble dominant n'est pas forcément un stable Γ comme le montre la figure 2.8(c).

Cependant Γ pour que les critères **C1** et **C2** soient satisfaits Γ c.à-d. Γ pour que l'ensemble des survivants S soit un stable et un ensemble dominant en même temps Γ il suffit qu'il soit un **stable maximal**.

Théorème 4 *Dans un graphe G , un stable maximal est aussi un ensemble dominant minimal.*

La vérification de ce théorème est assez simple. Supposons que le stable S ne soit pas un ensemble dominant Γ alors il existe au moins un sommet de G qui n'est pas adjacent à S . Dans ce cas il peut être ajouté à S Γ formant un stable de cardinalité supérieure à celle de S . Or Γ S n'était pas alors un stable maximal. Supposons maintenant que S soit un ensemble dominant Γ mais pas minimal Γ cela veut dire qu'il contient au moins un sommet qui étant enlevé de S ne casse pas la condition de dominance. Or Γ dans ce cas Γ ce sommet possède forcément un voisin qui est dans S . S n'était pas alors un stable.

Des stables maximaux sont présentés dans les figures 2.8(d à f). Remarquons que la réciproque du théorème précédent n'est pas vraie car un ensemble dominant

⁵En théorie des graphes, pour une propriété donnée il y a une différence entre les dénominations "minimal" et "minimum" (voir page 22).

⁶Selon la définition 2.8 présentée à la page 23.

généité permet d'enlever ou de rajouter des arcs sur le graphe de similarité.

4.5.3 Support venu de la théorie des graphes

Des règles concernant le processus de décimation dans les algorithmes basés sur les pyramides irrégulières ont été présentées dans les sections précédentes sans être profondément analysées au niveau théorique. Dès lors plusieurs questions surgissent :

- Pourquoi l'ensemble des survivants doit-il être un stable?
- L'utilisation des seuils locaux introduit le besoin de représenter des similarités dans l'image au moyen d'un graphe orienté. L'algorithme converge-t-il alors plus rapidement? Les conditions **C1** et **C2** (page 83) doivent elles être adaptées à ce nouveau graphe? Si oui comment le faire?
- Plus on augmente le taux de réduction du nombre de sommets d'un niveau à l'autre de la pyramide plus tôt le processus converge. Est-il alors très important d'avoir le maximum de réduction possible? Si l'on réduit moins cela permettrait-il d'obtenir des résultats plus adaptés à l'image?

Dans cette section nous allons ordonner les idées concernant le processus de décimation (qui entraîne des contractions dans le graphe d'adjacence) d'une part en répondant à ces questions d'autre part en fournissant une formalisation encore inexistante de ce processus à l'aide de la théorie des graphes.

Pour mieux justifier l'utilisation des différentes entités (stables, ensembles dominants et absorbants, noyaux...) au moment de choisir l'ensemble de survivants et leurs influences sur les résultats de la segmentation nous avons séparé cette présentation en deux parties : le choix des survivants dans le graphe d'adjacence et les changements apportés par le graphe de similarité orienté.

Le choix des survivants dans le graphe d'adjacence

Le graphe d'adjacence (ou de voisinage) $G_A^k(V, E)$ à l'itération k associe à chaque région de l'image un sommet et à chaque voisinage topologique entre deux régions une arête entre les deux sommets respectifs.

Pour choisir le sous-ensemble S dans V des sommets survivants qui seront présents à l'itération $k+1$ le critère **C1** qui nous rappelons ici doit être respecté :

C1 Chaque sommet non-survivant doit posséder au moins un voisin survivant.

La condition **C1** vient du fait que chaque sommet non-survivant doit être représenté dans les niveaux supérieurs de la pyramide sinon ses attributs ne seront pas pris en compte et la segmentation risque de ne pas être représentative.

La condition **C1** exige alors que l'ensemble $S \subseteq V$ des survivants soit un **ensemble dominant**⁴. Les figures 2.8(c à f) montrent des ensembles dominants extraits du graphe de la figure 2.8(a) avec leurs relations de dominance représentées

⁴Conformément à la définition 33 de la page 21.

segmentation par rapport à une autre autrement que par des critères de contrôle visuel [82].

En travaillant avec une composante aléatoire dans la procédure de décimation nous pouvons aboutir à différents résultats associés à différentes exécutions de l'algorithme sur une même image. Une image dite d'accumulation peut être calculée de façon à ce que chaque point mémorise le nombre de ses voisins qui sont dans la même région que lui cela étant calculé sur toutes les réalisations de l'algorithme. Un point qui reçoit une accumulation forte traduit son appartenance à une région. Cette accumulation est d'autant plus faible que le point est souvent situé à la frontière entre plusieurs régions. Un seuillage de l'image d'accumulation permet de partager les points en trois catégories : des points de contour ceux qui appartiennent à l'intérieur d'une région et ceux qui ne peuvent pas apporter d'information à cause de l'ambiguïté d'appartenance. Cette approche est développée dans [5308082].

L'évaluation de la qualité d'une segmentation reste pourtant malgré les derniers développements un des points immatures de l'analyse d'images. Pour aboutir à de meilleurs résultats il est possible de définir une taille minimale t_m pour les régions [530]. Si à la fin du processus il reste des régions ayant une taille inférieure à un certain seuil elles doivent se regrouper les unes avec les autres pour atteindre la taille minimale acceptée ou fusionner avec des régions ayant une taille déjà importante.

4.5.2 Coopération avec les contours

L'utilisation d'une technique de multi-résolution en segmentation d'images peut entraîner la fusion erronée de régions dont la frontière commune était bien contrastée au départ ou bien des fusions pertinentes sont progressivement rendues impossibles lorsque les régions fusionnent et recalculent leurs attributs. Il peut donc être important d'utiliser dynamiquement une information de contour dans un processus pyramidal de segmentation.

Il est proposé dans [580] une coopération région-contour qui utilise un critère de qualité du voisinage sur une structure de graphes représentant l'image dans toutes les résolutions de la pyramide. La mesure de qualité des contours est récursivement dérivée des informations de discontinuité obtenues de l'image. Le graphe de similarité utilise alors les mesures de niveaux de gris et celles de la qualité des contours.

Cette approche associe à chaque arête du graphe d'adjacence le nombre d'éléments homogènes situés sur la frontière séparant les deux régions adjacentes et le nombre d'éléments non homogènes situés sur cette même frontière. La gestion de ces nouveaux attributs est effectuée en deux phases : la première étant l'initialisation de la base de la pyramide avec les données apportées par un détecteur de contour et la deuxième est la mise à jour de ces nouveaux attributs durant la construction. Cette mise à jour est basée sur le principe qu'une arête au niveau $k + 1$ représente plusieurs arêtes du niveau k par conséquent chaque nouvelle arête est d'autant plus un élément de contour que les arêtes qu'elle représente le sont aussi ; le même raisonnement est valable pour les arêtes d'homogénéité.

Concrètement un critère basé sur le nombre d'éléments de contours ou d'homogénéité.

degré de similarité) Ce choix est fait grâce à l'aide d'une variable aléatoire affectée à chaque sommet. Au moment de se rattacher à un sommet survivant les champs récepteurs fusionnent et chaque sommet survivant garde en fait les attributs de son nouveau champ récepteur.

Les liens entre deux niveaux successifs de la pyramide sont formés par les liaisons entre pères et fils. En termes de graphes nous pouvons dire que cela forme un graphe biparti. En plus si on considère toute la pyramide ces liens sont représentés par un graphe h -parti où h est la hauteur de la pyramide. Ces graphes bipartis ne sont pas complets car chaque sommet du niveau k possède un et un seul père au niveau $k + 1$.

Mise à jour des attributs des sommets survivants

Une fois que toutes les décisions d'attachement ont été prises par les sommets non-survivants c'est au tour des survivants de mettre à jour leurs attributs en fonction de leurs fils. Un sommet survivant portera la surface A et le niveau de gris moyen NG de la région qu'il représente :

$$A(\text{sommet}) = \sum_{\text{fils}} A(\text{fils}) \quad (4.6)$$

$$NG(\text{sommet}) = \frac{\sum_{\text{fils}} [NG(\text{fils}) \times A(\text{fils})]}{\sum_{\text{fils}} A(\text{fils})} \quad (4.7)$$

Le calcul de ces paramètres est donc récursif lors de la contraction du graphe.

Détection des entités de l'image

Dans une pyramide irrégulière la détection des entités est obtenue par la décomposition de l'image en zones de niveaux de gris homogènes.

Les procédures d'affectation des sommets non-survivants et de mise à jour du graphe d'adjacence permettent que tout sommet de la pyramide connaisse les sommets qui sont ses fils aux niveaux inférieurs et le sommet qui est son père au niveau supérieur ainsi que les sommets qui sont ses voisins sur son niveau.

Chaque sommet est donc capable de redescendre sur un niveau inférieur quelconque pour trouver les sommets qui lui ont été attachés et en particulier sur la base de la pyramide pour trouver la région de l'image qu'il représente. Par construction cette région est connexe. Nous pouvons vérifier que deux sommets adjacents à l'apex représentent des régions adjacentes de l'image initiale.

Post-segmentation

Un des problèmes de fond dans le processus d'analyse d'images vient du fait que jusqu'à maintenant nous ne sommes pas capables d'évaluer la qualité d'une

Une pyramide comporte généralement une quinzaine de niveaux pour une image de taille 256×256 ce nombre ne dépassant pratiquement jamais trente si le seuil s_g est cohérent [5].

Décimation

Le choix des sommets du niveau k qui seront présents dans le niveau $k + 1$ est d'extrême importance. Ces sommets doivent être bien répartis sur le graphe d'adjacence pour pouvoir bien représenter l'image en une résolution inférieure à celle du niveau précédent. En plus la possibilité de n'utiliser que des opérations locales permet une amélioration du temps de calcul.

Le processus de décimation est fait en parallèle selon les critères suivants :

C1 Chaque non-survivant doit avoir au moins un voisin survivant ;

C2 Deux survivants ne peuvent pas être voisins.

En théorie des graphes un ensemble de sommets deux-à-deux non-adjacents (critère **C2**) est appelé un stable (voir la définition 34). Pour certifier que chaque sommet non-survivant a un voisin survivant (**C1**) le stable doit être maximal. Dans [32-70-76-77] sont proposés des algorithmes parallèles pour trouver un stable maximal dans un graphe.

Une étude plus approfondie du processus de décimation est présentée dans la section 4.5.3.

Meer [76] propose un processus parallèle qui choisit les sommets survivants à chaque niveau d'une pyramide de graphes. Ce processus décrit ci-après satisfait les conditions **C1** et **C2** conservant le principe de la réduction du volume d'information.

À chaque sommet x_i est associée une variable aléatoire p_i uniformément répartie entre 0 et 1. Un sommet x_i est retenu si $p_i > p_j \forall x_j$ voisin de x_i . La probabilité pour qu'un sommet soit retenu dans le cas de la 8-connexité étant de $1/9$ (pour les sommets du bord cette valeur est adaptée au nombre de voisins du sommet) il est nécessaire de mettre en œuvre une structure de consolidation itérative. Cette structure est la suivante : dès qu'un sommet est retenu ses voisins sont éliminés permettant alors aux sommets qui n'étaient pas des maxima locaux de réévaluer leur statut. Ce processus se stabilise après 3 itérations et le facteur de réduction est de 5/4 [77].

La pyramide adaptative proposée par Jolion et Montanvert [49-50] est basée sur l'interprétation globale de l'image obtenue par l'accumulation d'évidences locales. La différence par rapport à la pyramide stochastique est qu'à la place des variables aléatoires c'est la variance des niveaux de gris du champ récepteur de chaque région qui est utilisée. Pour la première itération une fenêtre 3×3 est utilisée.

Affectation des sommets non-survivants

Chaque sommet non-survivant s'attache au voisin survivant le plus similaire. Au cas où il existe plusieurs voisins survivants identiquement similaires (ayant le même

Le placement de $s_l(x_i)$ peut se faire de plusieurs manières. La plus simple est de ne conserver que le voisin le plus similaire c.à-d. : $s_l(x_i) = \delta_1$. L'inconvénient principal de ce choix est qu'il empêche la majorité des fusions et le taux de réduction d'un niveau à l'autre de la pyramide est très réduit. La généralisation de cette procédure se traduit par le choix des k voisins plus similaires ($s_l(x_i) = \delta_k$) ou une fraction fixe des voisins satisfaisant s_g ($s_l(x_i) = \alpha \delta_g$) mais cela entraînerait l'introduction des nouveaux paramètres k ou α .

Des bons résultats ont été obtenus avec le choix qui maximise la différence des moyennes entre les deux groupes [83]. Le seuil local que nous allons utiliser est donc celui qui partage les voisins au point où l'écart dans (4.5) est maximal.

Puisque chaque seuil local $s_l(x_i)$ est spécifique à x_i le critère n'est pas symétrique. Cela veut dire que

$$|NG(x_i) - NG(x_j)| \leq s_l(x_i) \quad \text{n'implique pas} \quad |NG(x_j) - NG(x_i)| \leq s_l(x_j)$$

et *vice versa* car chaque sommet analyse son voisinage. Il est tout à fait normal qu'une arête (x_i, x_j) présente dans le graphe de similarité basé sur un seuil global ne soit plus présente au moment de représenter la similarité locale. Cela peut venir du fait qu'un seul sommet reconnaît l'autre comme voisin similaire ou qu'aucun d'entre eux ne reconnaissent l'autre comme étant similaire. De ce fait pour représenter la relation de similarité locale l'utilisation d'un graphe orienté devient nécessaire.

La réduction du nombre de sommets survivants d'une itération à l'autre est le facteur qui détermine le nombre de niveaux qu'une pyramide possède. Il est important de réduire ce nombre pour avoir un meilleur temps de calcul. En revanche si le facteur de réduction est trop important le critère de fusion risque de ne pas être dépendant du contenu de l'image.

La création du graphe de similarité orienté permet qu'un nombre supérieur de sommets survivent d'une itération à l'autre. L'utilisation des critères locaux dans le graphe de similarité sera encore abordée dans la section 4.5.3.

Test d'arrêt

En fonction du seuil global s_g le graphe G_S^k est obtenu à partir du graphe G_A^k . La décimation et la mise à jour des adjacences dans ces graphes traduisent en fait un processus de contraction qui génère le graphe G_A^{k+1} . Ainsi à chaque itération le graphe d'adjacence (et par conséquent celui de similarité) se contracte jusqu'au moment où plus aucune contraction n'est possible. L'apex de la pyramide est alors atteint. Cela peut être vérifié de plusieurs manières différentes :

- deux niveaux successifs de la pyramide possèdent le même nombre de sommets ;
- le graphe de similarité n'est composé que de sommets isolés ;
- $G_S^k(X, E)$ est tel que $E = \emptyset$.

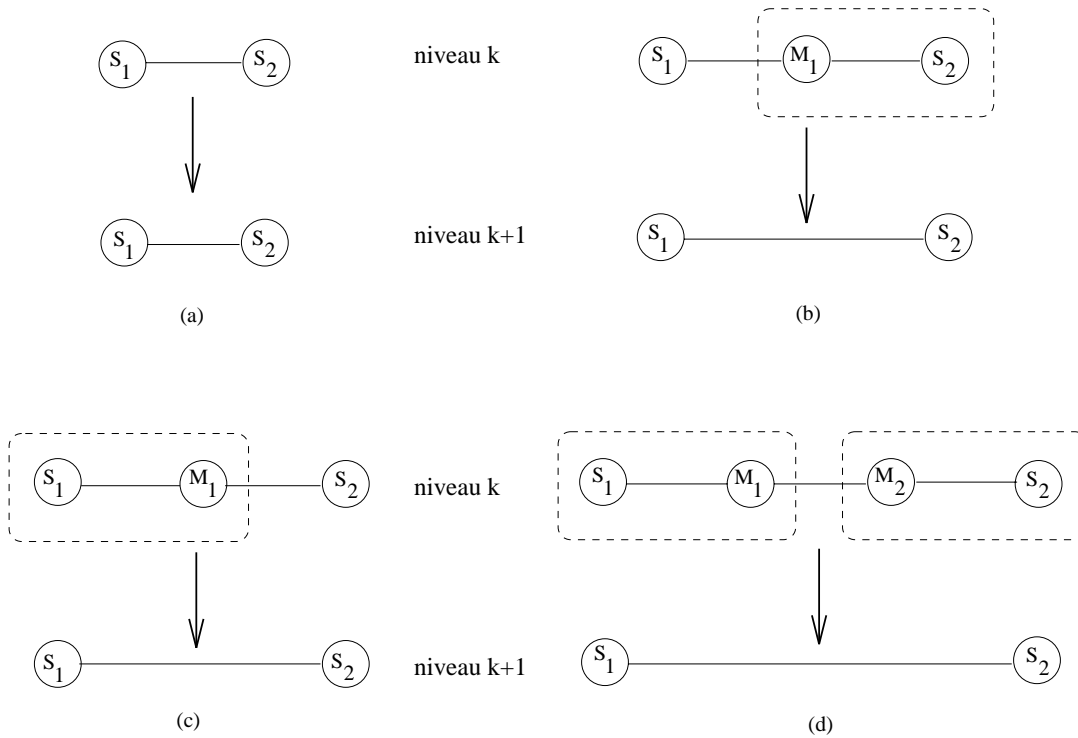


FIG. 4.3 - Construction des arêtes du graphe d'adjacence au niveau $k + 1$ à partir des adjacences du niveau k .

Nous remarquons que le graphe de similarité ayant pour base un seul seuil valable pour tous les sommets est construit de manière systématique sans tenir compte des caractéristiques locales dans l'image. Pour prendre en compte ces dernières Montanvert et al [83] proposent l'extraction d'un graphe de similarité à partir d'une analyse plus fine de l'environnement de chaque sommet.

Cette extraction est exécutée en parallèle sur toute l'image et partage le voisinage de chaque sommet en deux groupes : ceux des sommets qui lui sont similaires et les autres. Pour cela un seuil local $s_l(x_i)$ tel que $0 \leq s_l(x_i) \leq s_g$ est associé à chaque sommet x_i . Seuls les voisins x_j de x_i qui satisfont :

$$|NG(x_i) - NG(x_j)| \leq s_l(x_i) \quad (4.4)$$

sont retenus. Pour satisfaire les critères (4.2) et (4.4) en même temps nous allons rester pour chaque sommet x_i avec le minimum entre s_g et $s_l(x_i)$. Le cas extrême où $s_l(x_i) = 0$ correspond à l'extraction d'une composante connexe de niveau de gris $NG(x_i)$. Pour que le critère soit vraiment local chacun des seuils locaux doit être calculé en fonction du sommet et de son voisinage. Soit alors δ_k , $k = 1, 2, \dots, v$ la suite ordonnée des différences absolues $\delta_k = |NG(x_i) - NG(x_k)|$ entre x_i et ses v voisins. On a :

$$0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_s \leq s_l(x_i) \leq \dots \leq \delta_g \leq s_g < \dots \leq \delta_v. \quad (4.5)$$

Construction des graphes d'adjacence et de similarité

Tout d'abord à la base de la pyramide un sommet reconnaît ses 4 ou 8 voisins (sauf les voisins du bord de l'image) selon la 4 ou 8-connexité utilisée. Il est donc facile de construire le graphe d'adjacence (ou de voisinage) de ces sommets ; il suffit de créer l'arête (x, y) si x et y sont adjacents.

Dans les niveaux supérieurs le niveau k par exemple la procédure adoptée pour chaque sommet survivant S_1 est la suivante : on parcourt la liste $\Gamma_G^k(S_1)$ des voisins du sommet S_1 dans le graphe G au niveau k . Pour chaque sommet de cette liste

- si ce sommet est survivant (appelons le S_2) rien ne change par rapport à lui comme nous montre la figure 4.3(a) ;
- si par contre ce sommet n'est pas survivant (il sera représenté par M_1) il est éliminé de la liste des voisins de S_1 . Deux situations sont possibles :
 - le sommet M_1 a choisi comme père un autre survivant disons S_2 . Dans ce cas l'arête (S_1, S_2) doit être créée conformément à la figure 4.3(b) si elle n'existe pas encore ;
 - le sommet M_1 a choisi S_1 comme père. Dans ce cas chaque voisin survivant du sommet M_1 qui n'est pas voisin de S_1 le devient comme nous montre la figure 4.3(c). Si le sommet M_1 possède des voisins non-survivants les pères de ces sommets deviennent voisins de S_1 s'ils ne le sont pas encore cf. figure 4.3(d).

Dans la figure 4.3 les rectangles en pointillé représentent l'opération de contraction dans le graphe. Grâce à cette opération les sommets non-survivants sont éliminés des listes de voisins des survivants mais ils transmettent à leur père leurs propres voisins ce qui crée une bijection entre les adjacences des champs récepteurs des survivants et le voisinage de ces sommets dans chaque niveau de la pyramide.

Pour reconstituer un niveau de la pyramide à partir d'un niveau plus haut il est donc nécessaire de savoir à quel niveau chaque sommet est devenu non-survivant.

Nous présentons maintenant la construction d'un autre graphe mais cette fois-ci orienté qui est utilisé pour mieux décrire les relations de similarité entre les sommets d'un même niveau d'une pyramide au moyen d'un opérateur local.

L'extraction du graphe de similarité

L'utilisation d'un seuil global de similarité s_g dans le graphe d'adjacence représentant le voisinage de l'image à un niveau de résolution précis permet d'éliminer les adjacences sans intérêt créant le graphe de similarité. Cela veut dire que même si les champs récepteurs des sommets x_i et x_j sont voisins il n'y aura une arête d'adjacence entre les sommets x_i et x_j que si la condition (4.2) est satisfaite.

Le graphe d'adjacence est le cas particulier du graphe de similarité pour lequel le seuil global s_g est le plus grand écart entre les niveaux de gris de la dynamique.

[0..255].

L'un des principaux paramètres d'entrée est le **seuil global** s_g . Grâce à l'introduction de ce seuil un sommet peut choisir parmi ses voisins les plus similaires. Toute arête (x_i, x_j) du graphe d'adjacence G_A^k qui ne satisfait pas

$$|NG(x_i) - NG(x_j)| \leq s_g \quad (4.2)$$

où $NG(x_k)$ est le niveau de gris de la région représentée par le sommet x_k sera éliminée. Le graphe de similarité ainsi défini G_S^k est un graphe partiel de G_A^k . Il peut être considéré comme non orienté car le critère (4.2) est symétrique. Il est possible d'utiliser d'autres attributs dans 4.2 que le seul niveau de gris.

C'est au moyen de s_g que le niveau où la pyramide doit s'arrêter est déterminé. En théorie la construction d'une pyramide se finit au moment où il ne reste qu'un seul sommet. Cependant pour une image contenant plusieurs entités il est nécessaire de s'arrêter là où les sommets représentant ces entités sont détectés. Il y aura un moment où aucune paire de sommets adjacents dans G_A^k ne vérifie la condition (4.2). Le graphe G_S^k de similarité sera alors composé seulement par des sommets isolés c.à.d. que l'ensemble d'arêtes sera vide. Aucune fusion ne sera possible et l'algorithme s'arrête. À ce moment chaque sommet représentera une entité dans l'image.

Le choix de s_g s'avère difficile car si ce seuil est grand plusieurs fusions entre des régions ayant une certaine similarité se produiront créant le risque de ne pas détecter toutes les entités dans l'image. En revanche si le seuil est trop petit des régions n'ayant pas de sens peuvent être détectées.

Meer [30] propose la sélection automatique de s_g basée sur une procédure d'accumulation des différences entre le niveau de gris de chaque pixel et celui de ses voisins dans la base de la pyramide. Dans la pratique le seuil global est choisi "un peu au hasard" en fonction du type d'image à segmenter.

Pour une image bruitée la valeur de s_g doit être supérieure à celle de la même image non bruitée pour compenser les variations locales induites par le bruit.

Un autre paramètre souvent utilisé surtout dans la post-segmentation est la définition d'une **taille minimale** t_m pour les régions. Si à la fin de la segmentation il reste des régions ayant une taille inférieure à t_m chacune de ces régions doit impérativement fusionner avec le voisin le plus similaire.

Ce paramètre peut aussi être utilisé pour la détection de régions qui ne survivent pas au niveau $k + 1$ mais présentent un fort contraste avec tous leurs voisins [49][50]. Cette mesure de contraste tient compte de la taille de la région non conservée. En effet plus une région est petite plus elle devra être contrastée pour être détectée. Ce critère est équivalent à un seuil global qui peut être élargi en fonction de la taille $t(x)$ de chaque région x et de la taille minimale t_m souhaitable [50] conformément à :

$$s_g(x) = \begin{cases} s_g & \text{si } t(x) \geq t_m \\ s_g \cdot e^{\alpha(t_m - t(x))} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

Remarquons que cette procédure demande la définition de nouveaux paramètres.

Algorithme 3 *Algorithme de construction d'une pyramide irrégulière stochastique*

1. *Lecture de l'image et des paramètres d'entrée ;*
2. *Construction de la base de la pyramide ;*
3. *REPETER les étapes suivantes jusqu'à ce qu'une condition d'arrêt soit vérifiée :*
 - décimation du niveau k courant ;*
 - affectation des sommets non survivants ;*
 - mise à jour des graphes d'adjacence et similarité ;*
 - mise à jour des attributs des survivants ;*
4. *Détection des entités dans l'image ;*
5. *Processus de post-segmentation.*

sont adjacents dans l'image. L'extraction d'un graphe de similarité à l'aide du seuil global et/ou des seuils locaux à partir du graphe d'adjacence est aussi possible.

Le processus itératif qui suit ces premières étapes est composé tout d'abord de la décimation du niveau k courant qui se traduit par le choix des sommets qui seront présents au niveau $k + 1$ appelés survivants. Cette étape de décimation peut être réalisée en parallèle et de plusieurs manières différentes. Ensuite chaque sommet non-survivant doit être affecté au voisin survivant le plus similaire. De cette manière les sommets non-survivants sont représentés dans les niveaux prochains de la pyramide. Il est donc possible de mettre à jour les nouvelles relations d'adjacence entre les sommets qui seront présents au niveau $k + 1$ grâce à leurs champs récepteurs respectifs. Enfin ces sommets auront leurs attributs (surface, écart-type, niveau de gris moyen, seuil local) recalculés et mis à jour pour une nouvelle itération.

La condition d'arrêt étant atteinte il ne reste qu'à associer à chaque sommet présent à l'apex de la pyramide une région dans l'image. Des procédures de post-segmentation peuvent être alors réalisées.

Nous allons maintenant décrire avec plus de précision les étapes de l'algorithme précédent.

Lecture de l'image et des paramètres d'entrée

L'image contenant $NL \times NC$ (le plus souvent $2^M \times 2^M$) pixels où NL et NC sont respectivement les nombres de lignes et de colonnes sera représentée par une matrice. À chaque élément i_{lc} de cette matrice est associé le niveau de gris du pixel de la l -ème ligne et c -ème colonne codé sur 8 bits, à-d. prenant une valeur dans

tant. D'ailleurs la position des sommets dans le graphe n'a aucun intérêt dans le processus.

Pour la segmentation en régions homogènes d'une image en niveaux de gris les pyramides irrégulières peuvent être séparées en deux catégories :

pyramide irrégulière stochastique : [82, 83, 81] lorsque les sommets survivants de chaque niveau correspondent à des maxima locaux obtenus de façon aléatoire ;

pyramide irrégulière adaptative : [49, 50] lorsque l'on cherche localement dans chaque niveau les sommets qui maximisent l'évaluation d'un opérateur d'intérêt.

La section 4.5 présente la pyramide irrégulière stochastique en détails.

4.5 Pyramides irrégulières stochastiques

4.5.1 L'algorithme

La pyramide irrégulière stochastique d'une image est construite récursivement de la base à l'apex et chaque niveau est représenté par un graphe d'adjacence. Il est donc nécessaire de définir la procédure de dérivation du graphe du niveau k à partir de celui du niveau $k - 1$ précédent. Nous verrons plus tard que cette tâche est réalisée à l'aide d'opérations de contraction sur le graphe.

Pour que les principes généraux des structures pyramidales soient préservés tels que le parallélisme et l'appel à des opérations locales il est nécessaire de définir des règles de fusion. Ces dernières se traduisent dans une structure irrégulière par le choix des sommets survivants suivi de la génération des liens parent-enfant pour chaque non-survivant et de la mise à jour du graphe d'adjacence. L'une des différences entre les pyramides irrégulières stochastiques et les techniques de croissance de régions vient du fait qu'un sommet peut participer à plusieurs contractions dans une même itération.

Le nombre d'itérations dans une pyramide irrégulière stochastique est d'ordre $O(\log(\text{taille classe}))$ où "taille classe" est le plus grand diamètre interne des composantes connexes³. Ce nombre n'est pas fixe et la construction est définie par l'algorithme 3.

Après la lecture de l'image et le choix des paramètres d'entrée comme le seuil global par exemple la base de la pyramide doit être construite. L'image est alors représentée par un graphe d'adjacence qui associe à chaque pixel un sommet dans le graphe et une arête est créée entre deux sommets si les deux pixels correspondants

³Défini par $\max_{CC} \left\{ \max_{x, y \in \text{contour}} \{ \min \{ \text{distance géodésique}(x, y) \} \} \right\}$, où CC représentent les composantes connexes dans l'image.

4.4.1 L'utilisation d'un arbre couvrant

L'idée d'utilisation d'un arbre couvrant de poids minimal a été développée [75] dans le but de représenter l'image par un graphe optimal qui permettrait une meilleure segmentation.

4.4.2 Pyramides liées

Cette méthode [21] est moins sensible en translation que d'autres permet de délimiter des régions de tailles et de formes différentes. Chaque élément d'un niveau k possède 4 pères potentiels et doit choisir l'un d'entre eux mais ce choix sera remis en cause plus tard. Chaque père du niveau $k + 1$ a 16 fils au niveau k cependant il partage ces fils avec ces 4 voisins du niveau $k + 1$. Après le choix d'un père "provisoire" pour chaque fils les attributs des pères sont mis à jour en fonction de ses nouveaux fils. En évaluant les nouveaux attributs des pères potentiels les fils ont le droit de changer le père "provisoire" par un autre ou de rester avec lui. Au niveau suivant on initialise les attributs des pères selon les attributs de leurs 16 fils. Quand un fils n'a pas de père qui lui ressemble il est considéré comme étant une entité recherchée sur la base de la pyramide. Cette situation est identique pour le cas d'un père qui n'a pas de fils. Le point fort de cette méthode est la remise en cause du choix des éléments dans la pyramide.

4.4.3 Pyramides duales

Kropatsch et Willersinn [62] utilisent un processus qui réduit le nombre de sommets d'une itération à l'autre par contraction du graphe dual représentant l'image de manière à ce que le degré de chaque sommet soit limité (contrairement aux pyramides irrégulières). Dans cette approche les relations topologiques entre survivants sont préservées et d'importants taux de réduction du nombre de sommets peuvent être atteints.

4.4.4 Pyramides irrégulières

Les échecs connus auparavant par les techniques de segmentation basées sur les pyramides régulières tels que la difficulté de détection d'objets allongés la déconnexion des régions et la variation en translation ont engendré ces dernières années des recherches visant à la conception d'une structure plus flexible prenant en compte la spécificité des données.

En éliminant la rigidité posée par la détermination précise du nombre de fils ou de pères potentiels des sommets à chaque niveau les pyramides irrégulières ouvrent une nouvelle voie dans le domaine de la segmentation d'images.

L'image segmentée est considérée comme un ensemble de régions ayant des formes taille et position variables.

Les pyramides irrégulières sont robustes en translation. Un autre avantage vient du fait qu'un sommet connaît ses voisins mais leur positionnement n'est pas impor-

La planarité du **graphe d'adjacence** dans un niveau k quelconque n'est assurée que si la base a été construite en utilisant la 4-connexité car les relations de voisinage se forment selon la topologie des champs récepteurs. Deux configurations non-planaires possibles représentées par K_5 (la clique d'ordre 5 de la figure 4.2(c)) sont montrées dans les figures 4.2(a et b).

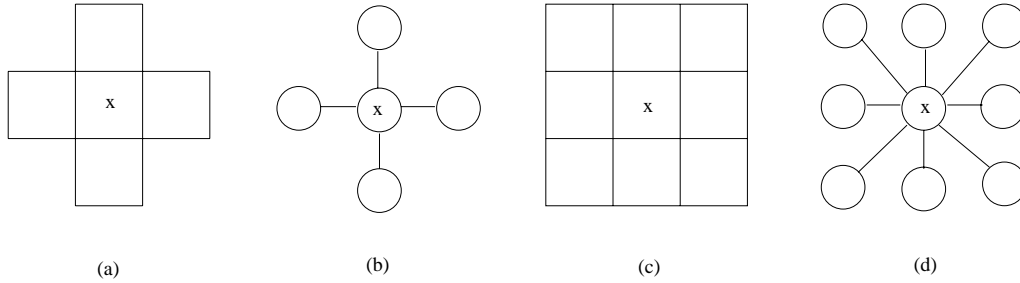


FIG. 4.1 - Un pixel x et son (a) 4-voisinage (c) 8-voisinage. Graphe d'adjacence généré par x en relation à la (b) 4-connexité (d) 8-connexité.

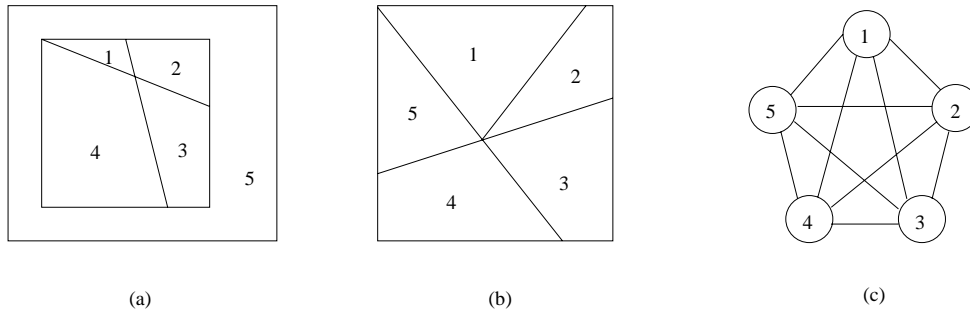


FIG. 4.2 - (a - b) Deux configurations montrant 5 régions toutes connexes les unes aux autres. (c) K_5 le graphe d'adjacence de ces régions.

Un niveau k de la pyramide est construit à partir du niveau $k - 1$. Les sommets présents au niveau $k - 1$ sont appelés **vivants**. Un sous-ensemble des sommets vivants sera choisi selon des règles qui seront présentées plus tard formant alors l'ensemble des **survivants**. Les survivants du niveau $k - 1$ seront les sommets vivants présents au niveau k . Nous remarquons qu'à la base de la pyramide tous les sommets sont vivants et qu'à l'apex il n'y en aura qu'un seul.

C'est grâce aux relations entre les sommets vivants d'un niveau $k - 1$ et leurs champs récepteurs respectifs que les arêtes entre les sommets survivants du graphe représentant le niveau k sont construites.

À la fin du processus les liens entre les h niveaux de la pyramide sont modélisés par un graphe h -parti. Chaque élément d'un niveau k est relié avec des éléments du niveau $k - 1$ appelés ses **fil**s et à un élément du niveau $k + 1$ appelé son **père**. Ces relations définissent une structure arborescente. Pendant le processus chaque élément d'un niveau k susceptible d'être père d'un sommet du niveau $k - 1$ est considéré comme étant un **père potentiel** de ce sommet. Remarquons qu'un sommet peut être père potentiel de plusieurs sommets.

Dans le graphe représentant l'image Γ chaque sommet dans un niveau k est père de 4 sommets du niveau $k + 1$ (pour l'arbre quaternaire) ou 3 (pour Delaunay) Γ sauf au moment où la région qu'il représente respecte le critère d'homogénéité et ne se divise plus.

4.3.2 La fusion

La configuration obtenue par la phase de division Γ puis à un niveau k quelconque de la pyramide Γ est représentée au moyen d'un graphe d'adjacence où à chaque arête est associé le coût de fusion entre les deux sommets adjacents. Ce graphe pondéré est utilisé dans le but de fusionner les régions les plus similaires. A chaque fois que deux sommets fusionnent Γ une opération de contraction¹ est réalisée sur le graphe.

La méthode la plus naturelle et la plus simple pour décider quelles sont les fusions qui doivent se produire est celle où l'arête ayant le coût minimal parmi toutes les arêtes du graphe Γ notée (x_i, x_j) Γ est déterminée. Les deux sommets adjacents à cette arête fusionnent et l'un des deux Γx_i ou x_j Γ représentera la nouvelle région. Les nouveaux attributs obtenus prenant en compte les informations de x_i et x_j Γ ainsi que les nouveaux coûts de fusion Γ seront recalculés. La procédure est réitérée jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de fusionner. Malgré son optimalité et l'indépendance par rapport à l'ordre d'évaluation des arêtes Γ c'est une approche séquentielle très coûteuse en temps de calcul.

Pour cela il semble être intéressant d'utiliser les techniques parallèles de fusion à la place des techniques séquentielles. Ces techniques se basent sur la recherche d'un couplage² de coût minimal dans le graphe. Cela veut dire que l'on cherche un sous-ensemble d'arêtes du graphe d'adjacence qui soit indépendant. Il est donc interdit qu'un sommet participe à plusieurs fusions en même temps. On gagne alors en temps de calcul mais on perd en optimalité. Des approches parallèles pour la fusion sont présentées dans [7 Γ 26 Γ 31 Γ 79 Γ 117].

Nous remarquons que l'ordre d'évaluation n'est pas influent sur le résultat Γ et chaque sommet ne peut intervenir qu'à une seule fusion à chaque itération.

4.4 Pyramides de graphes

La modélisation du niveau 0 de la pyramide par des graphes est réalisée de la manière suivante : à chaque pixel de l'image Γ on associe un sommet et l'arête (x_i, x_j) est créée si et seulement si les deux pixels représentés par les sommets x_i et x_j sont voisins. Dans le cas où on travaille avec un maillage carré Γ il est possible d'associer à un pixel son 4-voisinage ou son 8-voisinage. Si on travaille avec le 4-voisinage Γ la base de la pyramide est un graphe planaire Γ ce qui n'est pas le cas pour le 8-voisinage (voir la figure 4.1(a à d)). Aux niveaux supérieurs de la pyramide chaque sommet représente un ensemble connexe de sommets de la base Γ appelé **champ récepteur**.

¹La contraction d'un graphe est définie à la page 19.

²Voir définition 31.

Nous allons dans la suite de ce chapitre faire un survol des techniques utilisées en analyse d'images (surtout en segmentation) fondées sur des procédures pyramidales partant des structures régulières les plus classiques et allant jusqu'aux pyramides irrégulières pour proposer alors au chapitre 5 une structure plus adaptée aux images appelée pyramide floue.

4.2 Pyramides gaussienne et laplacienne

Les pyramides gaussienne et Laplacienne [21-22] sont des structures ascendantes construites en utilisant comme base les concepts du traitement du signal (filtrage et sous-échantillonnage sur l'image).

Une pyramide gaussienne est une suite d'images dans laquelle l'image au niveau k est de taille 4 fois inférieure à celle du niveau $k - 1$ obtenue au moyen d'un filtrage de type passe-bas et d'un sous-échantillonnage. Le filtrage est obtenu par un noyau de convolution utilisant des coefficients qui approximent les valeurs d'une courbe gaussienne.

La pyramide laplacienne représente une décomposition fréquentielle de l'image de manière à ce que les composantes de plus basses fréquences se trouvent au sommet de la pyramide. Le niveau k de la pyramide est défini par :

$$L_k = G_k - \text{Expansion}(G_{k+1}) \quad (4.1)$$

où G_k et G_{k+1} représentent les niveaux k et $k + 1$ d'une pyramide gaussienne. Le noyau gaussien est généralement de dimension 5×5 . Nous pouvons considérer L_k comme l'information perdue lorsqu'on passe du niveau L_k au niveau L_{k+1} .

4.3 Pyramides de partitionnement géométrique

Dans les approches géométriques tout d'abord l'image est partagée récursivement en polygones (carrés, triangles, ... selon la technique utilisée). C'est l'étape de **division**. Ensuite vient la deuxième étape, la **fusion**, où les éléments géométriques adjacents peuvent ou non fusionner selon un critère pré-établi permettant la détection des entités dans l'image.

4.3.1 La division

Les principales techniques de division sont décrites dans la section 2.1.3 à la page 9. Elles sont :

- le quadtree ou l'arbre quaternaire qui découpe l'image en carrés ;
- la triangulation de Delaunay qui partitionne l'image en triangles ;
- les polygones de Voronoï où l'image est partitionnée en polygones qui comportent un nombre de côtés variable.

Par la simplification de l'information de départ (à travers la réduction de son volume) la pyramide devient un outil de compression de données. Par l'affinement de ce résultat dans un deuxième temps (en retournant récursivement vers la résolution de départ) la pyramide sert à segmenter des images.

Dans le cas des images binaires chaque sommet transporte son appartenance à un objet ou au fond. La procédure de détection des composantes connexes revient à induire un graphe G' à partir de G (le graphe d'adjacence) par suppression de toutes les arêtes qui ne relient pas deux sommets de la même classe. Les sous-graphes connexes maximaux de G' correspondent aux composantes connexes de l'image initiale. Lorsqu'il existe plusieurs entités dans l'image l'apex de la pyramide est atteint lorsque chaque composante connexe de l'image initiale est représentée par un seul sommet.

Nous nous intéressons dans ce travail à l'application du modèle pyramidal à la segmentation d'images en niveaux de gris.

4.1.2 Avantages et inconvénients

Bister [13] présente quelques avantages du modèle pyramidal tels que : la réduction de l'influence du bruit par l'élimination de l'importance des détails non significatifs la possibilité de travailler avec les différents niveaux de résolution des régions d'intérêt dans l'image la conversion des caractéristiques globales en caractéristiques locales et la possibilité de trouver les régions avec peu de coût.

Mais cela n'est pas tout ; la combinaison du parallélisme de la récursivité et de la multirésolution fait de la structure pyramidale un outil fort pour la représentation et le traitement de données. Le parallélisme donne la possibilité d'améliorer considérablement le temps de calcul ; la multirésolution réduit le nombre d'opérations nécessaires au traitement d'une image facilitant la détection et la localisation des entités ; et la récursivité joue un rôle important dans la cohérence et la simplification des algorithmes en permettant d'appliquer le même traitement plusieurs fois.

En contre-partie nous pouvons dire que la difficulté à traiter des informations de contour est l'un des inconvénients associés aux pyramides. Un autre problème est la fusion erronée de régions dont la frontière commune était bien contrastée sur l'image initiale. Cela arrive car au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la base de la pyramide les informations de discontinuités ne sont pas traitées. En outre des discontinuités qui n'existaient pas au départ sont générées en même temps que les régions recalculent leurs attributs.

4.1.3 Structures pyramidales

Les structures pyramidales les plus simples sont celles définies sur un maillage carré possédant un nombre fixe de niveaux des facteurs de réduction et de résolution constants ainsi que des relations horizontales et verticales pré-établies.

Par la relaxation d'une ou plusieurs de ces contraintes on obtient des modèles plus flexibles comme les pyramides à maillage non-carré par exemple.

Chapitre 4

Structures pyramidales pour la segmentation

Une **pyramide** est une structure de données capable de représenter une image à différents niveaux de résolution. De la **base** qui normalement est l'image initiale à l'**apex** qui est le dernier niveau de la pyramide la résolution de l'image décroît permettant l'élimination des détails contenus dans l'image.

L'image représentée à la base d'une pyramide est une matrice de pixels contenant le plus souvent $2^M \times 2^M$ éléments où 2^M caractérise la taille de l'image. Il est également aussi tout à fait possible de manipuler des images qui ne sont pas carrées.

Nous allons dans la suite introduire la philosophie du modèle pyramidal et essayer de citer ses avantages et inconvénients ainsi que de donner une idée de ses applications possibles. Après cela nous allons décrire les principales structures pyramidales.

4.1 Le modèle pyramidal

4.1.1 Historique et applications

L'utilisation du concept de pyramide en analyse d'images a été d'abord introduit en 1975 par Tanimoto et Pavlidis [108]. Les résultats des premières recherches dans ce domaine sont présentés dans [24] [104] et [115]. Une étude sur la robustesse des algorithmes implantés dans une architecture pyramidale est présentée dans [78] cependant cette étude n'aborde pas les structures irrégulières.

Des analyses comparant les différents aspects des modèles pyramidaux comme la multirésolution le parallélisme la robustesse ou la complexité sont présentés dans [12] [13] [48] [51] et [78].

Nous pouvons citer comme exemples d'application des techniques pyramidales : la pyramide laplacienne qui fournit une décomposition fréquentielle de l'image [21] la détection des zones contrastées dans une image [15] ou la discrimination de textures [63] [114].

Dans la suite nous allons passer aux techniques de deuxième ordre. Tout d'abord au chapitre 4 les techniques basées sur les pyramides dont les structures irrégulières seront présentées. Cela nous permet de définir au chapitre 5 une nouvelle structure pyramidale : la pyramide irrégulière floue basée sur les graphes flous.

cas précédent toute information inutile. Les résultats illustrés dans la figure 3.9(c et d) montrent que le nombre de régions détectées est le même que celui de l'image originale non bruitée.

Le même processus a été appliqué dans l'image-test 3 (voir l'image bruitée et l'histogramme dans la figure 3.10(a et b)). Les résultats sont aussi comparables à ceux obtenus auparavant avec l'image non bruitée mais on remarque une déformation dans la forme des cellules détectées. Cela est montré en figure 3.10(c et d).

Cela nous montre la robustesse aux bruits additif et impulsionnel.

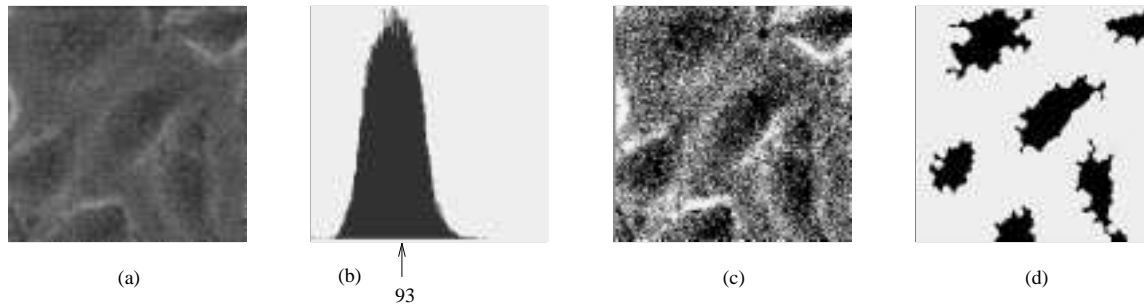


FIG. 3.9 - (a) L'image-test 2 bruitée et (b) l'histogramme des niveaux de gris. (c) La binarisation au moyen de $s_{NEF} = 93$ et (d) le résultat obtenu par traitement morphologique.

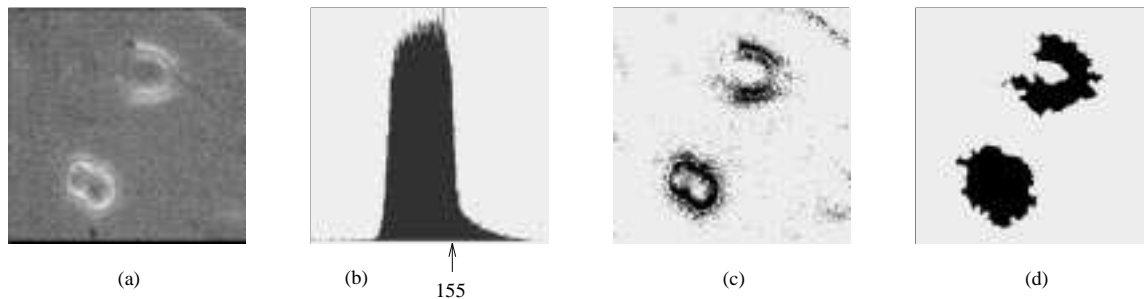


FIG. 3.10 - (a) L'image-test 3 bruitée et (b) l'histogramme des niveaux de gris. (c) La binarisation au moyen de $s_{EPA} = 155$ et (d) le résultat obtenu par traitement morphologique.

3.7 Commentaires

Dans ce chapitre nous avons fait un survol des méthodes traditionnelles de seuillage. Ces méthodes ont été comparées avec des techniques basées sur la logique floue. Nous avons développé deux méthodes utilisant des variantes de l'entropie floue qui associées à l'entropie classique nous permettent de segmenter des images cytologiques qui sont réputées être difficiles à segmenter. Cette coopération se montre robuste aux bruits additif et impulsionnel.

3.6 La robustesse des méthodes

Dans le but de vérifier la robustesse de la coopération entre les techniques floues et non-floues proposées dans la section 3.5 nous avons bruité les images déjà présentées ayant un histogramme unimodal avant de procéder à leur segmentation.

L'image-test 1 a été bruitée ⁶ et le résultat ainsi que l'histogramme sont montrés dans la figure 3.8(a et b). Le seuil $s_{EPA} = 153$ fourni par le maximum de l'entropie *a posteriori* adaptée permet de détecter les fibroblastes en mitose dans l'image. Ensuite en utilisant la coopération proposée dans la section 3.5 l'entropie floue adaptée nous donne le seuil $s_{EFA} = 102$ cherché dans l'intervalle $[0, 153]$. Cette deuxième valeur suffit pour la détection des cellules foncées dans l'image. La figure 3.8(c à f) montre ces résultats : d'abord seulement les binarisations et ensuite les entités trouvées à l'aide de la morphologie mathématique qui nous a permis d'éliminer le bruit et les régions trop petites n'ayant pas de sens. Les résultats sont aussi bons que ceux obtenus avec l'image originale non bruitée.

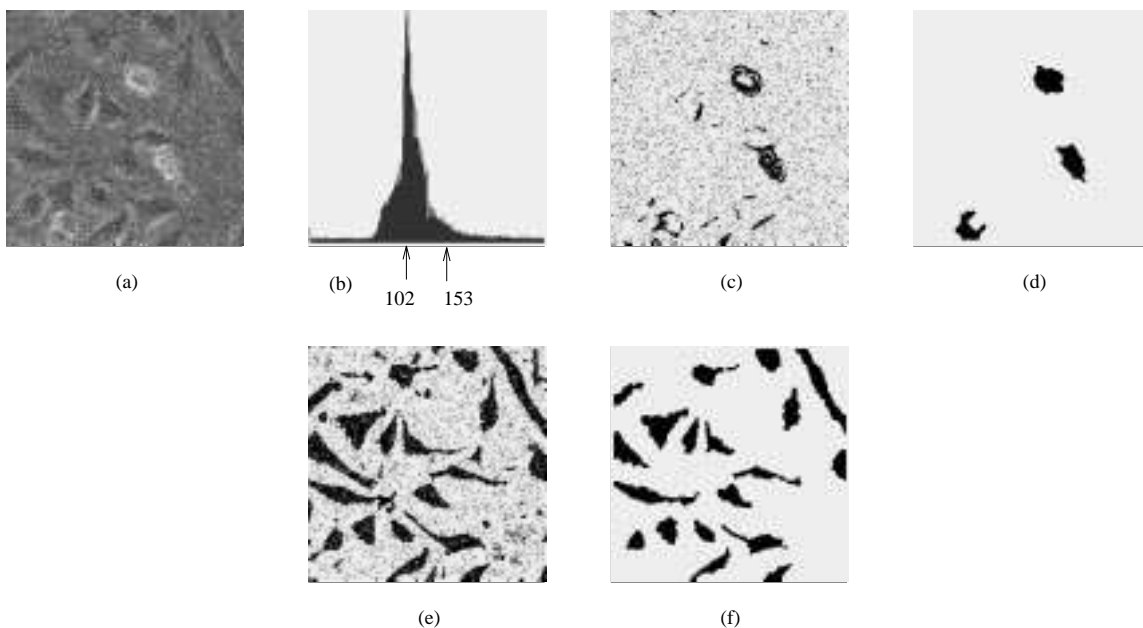


FIG. 3.8 - (a) L'image-test 1 bruitée et (b) l'histogramme des niveaux de gris. (c) La binarisation au moyen de $s_{EPA} = 153$ et (d) le résultat obtenu par traitement morphologique. (e) La binarisation au moyen de $s_{EFA} = 102$ et (f) le résultat obtenu par traitement morphologique.

La figure 3.9(a et b) montre l'image-test 2 bruitée ⁷ et le nouvel histogramme des niveaux de gris. La coopération entre les méthodes floues et non-floues fournit $s_{NEF} = 93$ cherché dans l'intervalle $[0, 146]$ qui permet la localisation des fibroblastes dans l'image. Le traitement morphologique sert à éliminer comme dans le

⁶Par un bruit impulsif de distribution uniforme.

⁷Par un bruit additif (entre -35 et 35) de distribution uniforme.

En fait dans ce genre d'image trois classes doivent être détectées : les cellules foncées, les cellules claires et le fond conformément à ce qui a été exposé lors de la description de l'image-test 1 à la page 58.

On pourrait à la limite définir une autre classe d'éléments : les cellules intermédiaires (celles qui sont encore en début de mitose) et qui par conséquent ne sont pas aussi sphériques (circulaires dans \mathbb{R}^2) que les cellules claires mais ne possèdent pas non plus une forme polyédrique et une structure plate comme les cellules foncées. Dans ce cas leurs bords ne sont pas aussi clairs que ceux des fibroblastes en mitose mais présentent déjà un signe de luminosité sur leur périphérie.

Parmi les méthodes de seuillage étudiées il y en a deux classiques qui fournissent un seuil permettant de séparer les fibroblastes en mitose des autres classes de l'image. Ces méthodes sont la maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée et la minimisation de l'erreur. Parmi les méthodes qui utilisent la logique floue la dissimilarité paramétrée par Poisson et aussi par deux distributions normales fournit des seuils proches des deux premières techniques citées ; en revanche elles sont plus coûteuses en temps de calcul. L'écart entre les deux premières méthodes n'étant pas suffisamment grand pour changer les résultats nous n'avons pas de préférence entre ces deux techniques.

La sensibilité de ces méthodes s'arrête là. Nous pouvons donc sans problèmes éliminer la partie de l'histogramme qui se trouve entre le seuil choisi par une des techniques précédentes et la limite maximale de la dynamique pour continuer la recherche dans la partie restante.

Pour localiser les fibroblastes (cellules foncées) il est nécessaire d'utiliser une technique qui est plus sensible aux changements de couleur entre le fond et ces mêmes cellules. Pour cela les deux variantes de l'entropie floue que nous avons proposées se montrent efficaces. Il nous paraît important de rappeler ici que les méthodes de Fisher et FCM adaptés fournissent elles aussi (appliquées à trois classes) un seuil (normalement le plus petit) qui permet de localiser les cellules foncées de l'image. La différence entre l'approche de Fisher ou FCM par rapport à l'entropie floue adaptée ou à la nouvelle entropie floue vient du fait que les deux premières travaillent sur un critère d'arrêt approximatif c.-à-d. que le nombre d'itérations est inconnu. Ça n'est pas le cas des deux dernières techniques qui évaluent un critère dans la dynamique de l'image et choisissent en fonction des valeurs obtenues les meilleurs seuils. Voilà la raison pour laquelle on suggère l'utilisation des équations de l'entropie floue adaptée ou de la nouvelle entropie floue pour localiser les fibroblastes dans les images de cellules observées en contraste de phase.

Cette coopération entre les techniques floues et non-floues de seuillage permet la détection d'une part par les techniques classiques des fibroblastes en mitose et d'autre part en utilisant une des méthodes floues des cellules foncées. L'astuce de ne prendre en compte que la partie de la dynamique qui est en-dessous du seuil qui sert à localiser les cellules claires nous aide à avoir une meilleure précision et gagner en temps de calcul puisqu'on n'évalue pas les niveaux de gris qui ont déjà été affectés aux cellules en mitose.

méthodes localisent bien les fibroblastes en mitose mais en ce qui concerne les seuils fournis par 3 classes les résultats ne sont pas bons car la méthode de Fisher permet l'identification du fond mais ne localise pas bien les cellules. FCM en revanche localise les deux cellules mais partage le fond en deux classes. Enfin pour 4 classes Fisher rajoute un nouveau seuil sans altérer les deux seuils antérieurs et le résultat change peu. FCM donne parmi ses trois seuils deux valeurs identiques à ceux de Fisher. L'autre seuil est celui qui sépare le fond en deux classes.

type II Pour l'image-test 4 les seuils donnés par les méthodes de Fisher et FCM sont les mêmes à deux unités près en revanche appliquée à l'image-test 5 pour 4 classes FCM arrive à bien localiser les maisons et fournit une localisation assez bonne des routes mais Fisher mélange encore ces éléments. Appliquées à deux classes les méthodes sont comparables et enfin appliquées à trois classes on ne peut pas dire que les méthodes fournissent des résultats assez bons.

synthèse On conclut que les résultats fournis par les deux méthodes sont comparables dans la majorité des cas que les images soient de type I ou II. Les nuances qu'on a pu trouver entre les deux méthodes ne nous permettent pas de dire qu'une des techniques est meilleure que l'autre.

Nouvelle entropie floue et entropie floue adaptée (sections 3.3.1 et 3.3.2)

type I Les résultats montrent que ces techniques sont efficaces dans la localisation d'un bon seuil lorsque celui-ci se trouve près du pic de l'histogramme. Dans le cas des images-test 1 et 2 les seuils fournis permettent de détecter les cellules foncées présentes dans les images.

type II Ces méthodes ne sont pas adaptées aux images de type II car elles ne donnent pas des seuils près des vallées de l'histogramme.

synthèse Ces deux méthodes sont adaptées aux images ayant un histogramme unimodal.

3.5 Coopérations entre les méthodes

Dans le but de segmenter les images cytologiques surtout celles des fibroblastes observés en contraste de phase nous avons étudié et proposé plusieurs méthodes. Ces images sont difficiles à segmenter car les cellules sont bruitées et dans certains cas petites. Il faut éliminer les régions du fond qui sont souvent confondues avec les cellules. Les "jambes" qui relient les fibroblastes ne doivent pas faire partie des entités localisées dans l'image. Dans la section 3.4.3 nous avons fait remarquer qu'il y a des techniques capables de détecter les différents éléments constituant les images des populations cellulaires.

que cette classe est aussi déterminée par l'un des seuils fournis par la divergence floue. Cette deuxième mesure est alors plus puissante que la mesure de dissimilarité.

– Cas paramétrique : Poisson

type I Pour les histogrammes unimodaux, deux points de maxima sont localisés et le plus grand d'entre eux permet de localiser à peu près les cellules en mitose. On a remarqué que ce seuil n'est pas dans la majorité des cas très éloigné du seuil fourni par la méthode de maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée.

type II Étant appliquée aux images de type III, cette technique fournit normalement une solution unique, mais pas toujours la bonne.

synthèse Nous pouvons donc dire qu'en appliquant cette technique aux images de type II, les résultats peuvent être satisfaisants pour la localisation des cellules claires dans l'image.

– Cas paramétrique : normal

type I Sur les histogrammes de type II, les résultats ne sont pas bons.

type II Le seuil le plus grand, parmi les deux trouvés, fournit un résultat proche de celui donné par la maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée. L'autre seuil peut être abandonné.

synthèse Malgré la lenteur de cette technique, elle fournit des bons résultats pour les images possédant un histogramme unimodal.

Évaluation de l'entropie floue (section 3.2.7)

type I Cette méthode fournit des seuils localisés près du pic de l'histogramme mais normalement au-dessus des bonnes valeurs.

type II Pour les images de type II, les résultats ne servent pas normalement à localiser les classes.

synthèse Comme cette méthode donne des seuils à la proximité du pic de l'histogramme de niveaux des gris, elle n'est pas adaptée aux images qui possèdent les bons seuils près des vallées.

FCM x Fisher (sections 3.2.6 et 3.1.5)

type I Pour les images-test 1 et 3, les résultats présentés par les deux méthodes sont presque les mêmes et permettent de séparer les cellules foncées des claires lorsqu'on travaille avec 3 classes. Pour deux et quatre classes, en revanche, il arrive que les seuils ne soient pas représentatifs. L'image-test 2 présente une hétérogénéité des résultats assez intéressante. D'abord, pour deux classes, les

été trouvée si on avait maximisé l'entropie *a posteriori*. Ce seuil sépare donc l'histogramme en deux classes possédant presque la même quantité de pixels chacune. Le seuillage ne possède guère de signification visuelle car le seuil est attaché à une valeur qui ne représente pas toujours une transition de classe dans l'image.

type II Ce phénomène se reproduit aussi quand cette méthode est appliquée aux images de type II. Dans ce cas Γ plusieurs seuils sont fournis Γ un pour chaque classe présente dans l'histogramme.

synthèse Nous pouvons donc dire que cette technique réalise pour chaque classe dans l'histogramme ce que l'entropie *a posteriori* réalise pour l'histogramme comme un tout. Les résultats ne possèdent guère de signification visuelle.

La divergence floue (section 3.2.3)

type I Cette méthode ne présente pas de bons résultats quand elle est appliquée aux images de type I car les seuils fournis se situent toujours dans les limites inférieure et supérieure de la dynamique de l'image.

type II Appliquée aux histogrammes de type III Γ la méthode nous donne plusieurs maxima locaux qui correspondent à des classes dans l'image. Pour obtenir ces seuils Γ la valeur de k qui définit l'intervalle d'incertitude Γ joue un rôle important.

synthèse Pour les images de type III Γ composées par les histogrammes à plusieurs pics Γ des valeurs de k entre 10 et 40 fournissent de bons seuils Γ néanmoins on n'obtient pas de seuils raisonnables si l'histogramme n'a qu'un seul pic. Les figures 3.6(c et d) et 3.7(d) nous permettent de voir des éléments identifiés dans les images-test 4 et 5 Γ lors de l'utilisation des seuils fournis par cette méthode.

La maximisation de la dissimilarité (section 3.2.4)

– Cas non paramétrique

type I La méthode se montre inefficace lorsqu'elle est appliquée aux images de type I. Les maxima locaux se trouvent toujours aux extrêmes de l'histogramme.

type II Cette méthode présente un bon résultat lorsqu'elle est appliquée à l'image 4 dès qu'on utilise l'équation (3.33) pour mesurer la dissimilarité entre deux niveaux de gris. Pour l'image 5 c'est l'équation (3.34) qui nous permet de trouver un bon seuil.

synthèse Après le choix d'une mesure de dissimilarité appropriée Γ la méthode peut être appliquée dans la localisation d'une seule classe d'éléments sur les images qui possèdent un histogramme multimodal. Nous remarquons

	type I			type II	
	image 1	image 2	image 3	image 4	image 5
	(64Π59)	(53Π27)	(63Π238)	(44Π249)	(66Π234)
DF	minΓmax	minΓmax	minΓmax	68Γ89Γ216	86Γ157Γ214
NP	minΓmax	minΓmax	minΓmax	88	212
P _o	45Γ152	99Γ154	100Γ146	130	142
N _o	74Γ159	59Γ124	100Γ144	161	187
<i>FCM</i>	120	90	141	125	148
<i>FCM</i> ₃	102Γ132	82Γ101	118Γ147	102Γ170	124Γ169
<i>FCM</i> ₄	97Γ116Γ145	77Γ91Γ107	116Γ133Γ166	92Γ147Γ195	107Γ151Γ202
EF	107	86	117	54	110
EFA	108	88	sans intérêt	62	122
NEF	103Γ127	86Γ103	sans intérêt	153	142

TAB. 3.2 - Résultats fournis par les techniques utilisant la notion d'ensemble flou

résultats présentés dans les figures 3.1(c et k) et 3.5(c et d) montrent bien cela. On trouve donc pour les images 3.1(a) et 3.5(a) leur binarisation utilisant le seuil fourni par l'entropie *a posteriori* adaptée (figures 3.1(c) et 3.5(c)) et le résultat après un traitement morphologique ⁴ et l'utilisation d'un seuil sur la surface ⁵ (figures 3.1(k) et 3.5(d)). Les deux grandes cellules en mitose ont pu être détectées.

Même dans l'image-test 2Γ où il n'y a pas de fibroblastes en mitoseΓ le seuil fourni nous permet de visualiser l'anneau de réfringence qui est présent à la périphérie de chacune des cellules (voir l'image 3.4(d))Γ cela veut dire que ces cellules ont déjà commencé à changer de forme.

type II Ces techniques sont aussi comparables lorsqu'elles sont appliquées à l'image-test 5Γ mais ce n'est pas le cas pour l'image-test 4 où le seuil fourni pour la méthode qui minimise l'erreur sert à localiser les cellules plus foncées et le seuil obtenu en maximisant l'entropie *a posteriori* adaptéeΓ localise en outre le bord des cellules plus claires.

synthèse On peut donc conclure que pour les images possédant un histogramme de type II ces deux méthodes servent à localiser la classe d'éléments les plus clairs (les cellules en mitose ou si c'est le casΓ l'anneau de réfringence des cellules en début de mitose).

Coefficient d'anisotropie (section 3.1.3)

type I Pour les images de type II les résultats fournis pour la méthode qui utilise le coefficient d'anisotropie donnent un seuil près de la valeur qui aurait

⁴Ce traitement a éliminé le bruit et a permis la localisation des composantes connexes.

⁵Seuls les éléments ayant l'aire satisfaisante ont été retenus.

1. Celles de la section 3.1 basées sur la logique binaire :
 - EPA : entropie *a posteriori* adaptée ;
 - CA : coefficient d'anisotropie ;
 - ME : minimum d'erreur ;
 - F et F_3 et F_4 : Fisher pour 2 et 4 classes respectivement ;
2. Celles de la section 3.2 qui utilisent la logique floue en essayant de donner plus de souplesse au choix du seuil s :
 - DF : divergence floue ;
 - NFPo et No : mesures de probabilités non-paramétriques basées sur les distributions de Poisson et sur les normales ;
 - FCM et FCM_3 et FCM_4 : fuzzy c-means adapté pour 2 et 4 classes ;
3. Les deux méthodes floues que nous avons développées et proposées dans la section 3.3 :
 - EFA : entropie floue adaptée ;
 - NEF : nouvelle entropie floue.

Les tables 3.1 et 3.2 montrent les seuils trouvés pour chacune de ces méthodes ainsi que la dynamique des niveaux de gris de chaque image. Ces résultats sont maintenant interprétés et analysés séparément pour les images de type I et II.

	type I			type II	
	image 1	image 2	image 3	image 4	image 5
	(64 241)	(53 81)	(63 238)	(44 249)	(66 234)
EPA	159	127	149	147	136
CA	105	86	116	151	103 175 227
ME	155	128	142	75	148
F	123	92	142	126	143
F_3	101 133	82 102	131 164	102 168	78 151
F_4	97 118 148	78 92 110	78 131 164	92 147 194	71 122 166

TAB. 3.1 - Résultats fournis par les techniques classiques

L'entropie adaptée et le minimum d'erreur (sections 3.1.2 et 3.1.4)

type I Ces méthodes se focalisent sur deux points différents dans leur approche théorique mais malgré cela les résultats sont tout à fait comparables en traitant des images du type I. En plus les résultats nous permettent de localiser les cellules en mitose autant dans l'image-test 1 que dans l'image-test 3. Les

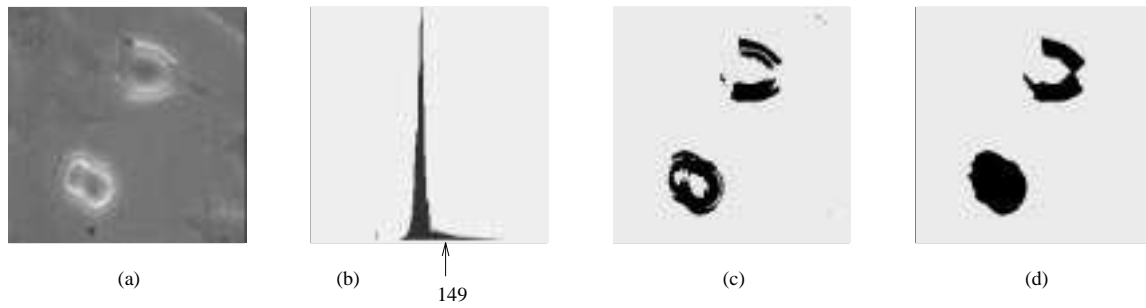


FIG. 3.5 - (a) L'image des fibroblastes en mitose observés en contraste de phase avec une plus grande résolution Γ (b) l'histogramme des niveaux de gris Γ le résultat de binarisation à partir du seuil (c) $s_{EPA} = 149$ et (d) le résultat final après un traitement morphologique.

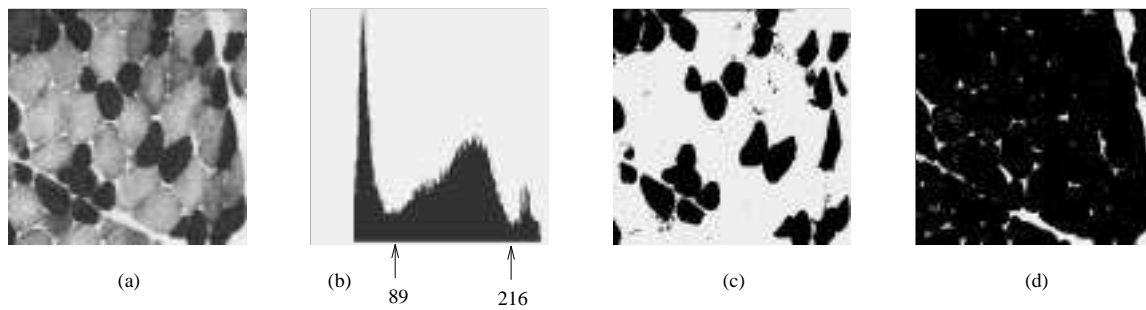


FIG. 3.6 - (a) L'image de fibres musculaires en section transversale Γ (b) l'histogramme des niveaux de gris et le résultat de deux binarisations à partir des seuils (c) $s_{DF}^1 = 89$ et (d) $s_{DF}^2 = 216$.

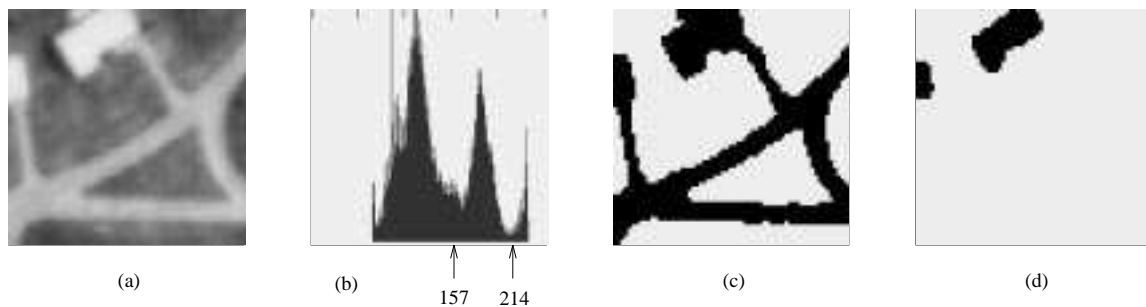


FIG. 3.7 - (a) L'image d'une vue aérienne Γ (b) l'histogramme des niveaux de gris et le résultat de deux binarisations à partir des seuils (c) $s_{DF}^1 = 157$ et (d) $s_{DF}^2 = 214$.

3.4.3 Résultats, interprétation et comparaisons

Nous avons implémenté les différentes méthodes présentées dans ce chapitre. Pour mieux interpréter et comparer les résultats Γ ces méthodes ont été séparées en trois groupes :

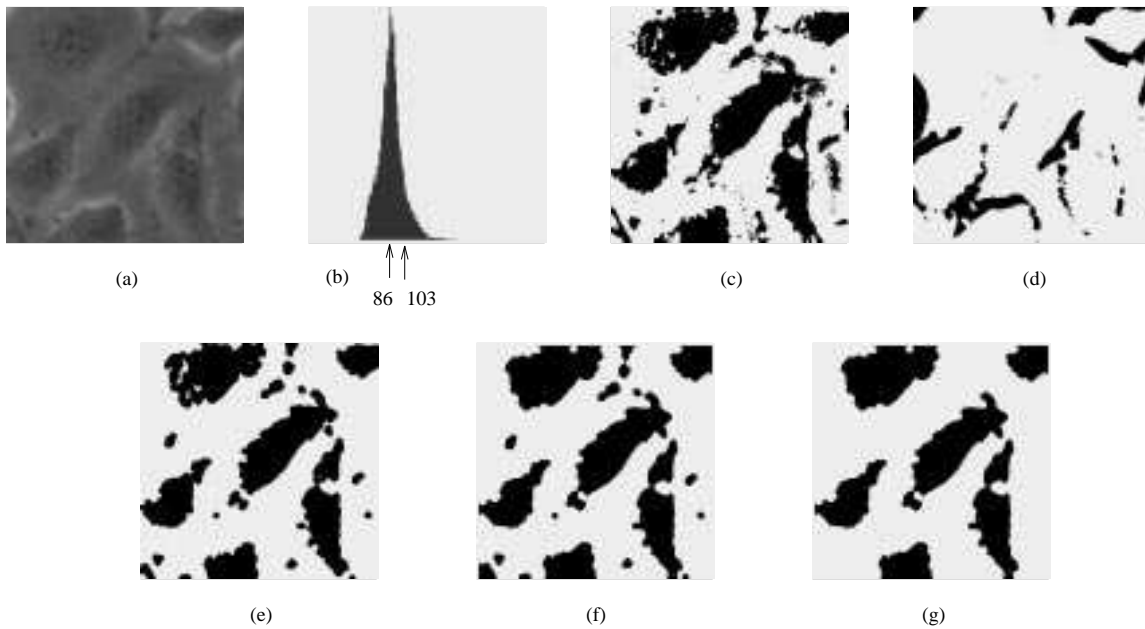


FIG. 3.4 - (a) L'image des fibroblastes observés en contraste de phase avec une plus grande résolution Γ (b) l'histogramme des niveaux de gris et deux résultats de binarisations à partir des seuils suivants : (c) $s_{NEF}^1 = 86$ et (d) $s_{NEF}^2 = 103$. Le traitement morphologique est appliqué au résultat obtenu par le seuil $s_{NEF}^1 = 86$: (e) fermeture binaire appliquée sur l'image (c) Γ (f) l'ouverture binaire appliquée sur l'image (e) et (g) l'imposition d'un seuil sur la surface dans l'image (f).

Image-test 3 : figure 3.5(a) De la même nature que l'image précédente Γ au niveau de sa résolution Γ cette image présente des fibroblastes en mitose qui se différencient des précédents par leurs forme Γ teinte et taille. Visuellement ces cellules possèdent un intérieur beaucoup plus foncé que leur bord Γ où l'on peut détecter des anneaux de réfringence. Souvent "une" cellule peut être observée en double ; c'est en fait la fin du processus de mitose qui la partage en deux nouvelles cellules identiques.

Image-test 4 : figure 3.6(a) Ce sont des fibres musculaires en section transversale. Cette image a la particularité de contenir des cellules presque toutes similaires en taille et forme. En raison de l'homogénéité ou de l'hétérogénéité des niveaux de gris des pixels qui composent les cellules Γ celles-ci peuvent être plus ou moins facilement détectées. Les cellules plus foncées Γ par exemple Γ ne posent pas de problème de détection.

Image-test 5 : figure 3.7(a) C'est une prise de vue aérienne où l'on trouve des maisons (les parties les plus claires) et des routes. L'un des problèmes Γ au moment de segmenter cette image Γ est la difficulté de séparer les maisons des routes.

populations cellulaires surtout au niveau de la segmentation des scènes observées en microscopie à contraste de phase.

L'image des fibroblastes présentée jusqu'à présent a été utilisée pour donner une première vision des résultats obtenus par les méthodes que nous avons décrites.

Dans la suite on va présenter d'autres tests sur un jeu d'images chacune possédant des caractéristiques différentes. Ensuite les résultats obtenus seront interprétés et comparés.

3.4.2 Les images testées et leurs histogrammes

Nous avons partagé les images en deux groupes selon la forme de leur histogramme : celles dont l'histogramme des niveaux de gris possédant un seul mode ne permet pas de distinguer les classes qui seront appelées dans la suite de type I (c'est le cas par exemple de l'image des fibroblastes vue jusqu'à présent) ; et celles qui présentent un histogramme avec des classes bien différenciées (plusieurs modes) appelées dorénavant de type II.

Les cinq images sont représentées en 256 niveaux de gris et leur taille est 256×256 à l'exception de l'image 5 qui possède 64×64 pixels. Voici maintenant une description simple de ces images.

Image-test 1 : figure 3.1(a) Cette image est composée essentiellement de trois classes : les fibroblastes (cellules foncées de forme polyédrique due à leur forme plate qui sont normalement liées par des "jambes") les fibroblastes en mitose (cellules claires présentent des anneaux de réfringence en périphérie dus à leur forme sphérique) et le fond. La localisation des fibroblastes est assez difficile car ils ne possèdent pas de grande différence de niveaux de gris par rapport au fond ce qui entraîne la nécessité d'une bonne précision du seuil. Si le seuil trouvé est au-dessus de la bonne valeur des régions du fond peuvent être confondues avec les fibroblastes et même plusieurs fibroblastes peuvent être regroupés comme s'ils n'étaient qu'un seul. Autrement si le seuil est en-dessous de la bonne valeur un fibroblaste peut être interprété comme étant plusieurs cellules à cause de la non connexité entre ses pixels.

Image-test 2 : figure 3.4(a) Cette image est composée essentiellement de deux classes : les fibroblastes et le fond. La localisation des fibroblastes est difficile pour les mêmes raisons que celles exposées pour l'image-test 1. La particularité de cette image qui ne contient pas de cellules en mitose est le fait que sa résolution est supérieure à celle utilisée pour l'image-test 1 (car on a augmenté le grossissement des cellules). Par conséquent les cellules sont beaucoup plus grandes et les erreurs commises par un seuil mal placé seront beaucoup plus importantes car plus perceptibles.

niveaux de gris peuvent si c'est le cas être compensées par une forte appartenance à la classe.

La mesure d'information associée à la séparation par un seuil S est :

$$\begin{aligned}
NEF(X \setminus s, k) &= NEF(O \setminus s, k) + NEF(F \setminus s, k) = \\
&= - \sum_{i=0}^{s-k-1} \left[\frac{p_i}{P_O} \ln \frac{p_i}{P_O} + \left(1 - \frac{p_i}{P_O}\right) \ln \left(1 - \frac{p_i}{P_O}\right) \right] \\
&\quad - \sum_{s-k}^{s+k} \left[\frac{\mu_O(i)p_i}{P_O} \ln \frac{\mu_O(i)p_i}{P_O} + \left[1 - \frac{\mu_O(i)p_i}{P_O}\right] \ln \left[1 - \frac{\mu_O(i)p_i}{P_O}\right] \right] \\
&\quad - \sum_{s-k}^{s+k} \left[\frac{\mu_F(i)p_i}{P_F} \ln \frac{\mu_F(i)p_i}{P_F} + \left[1 - \frac{\mu_F(i)p_i}{P_F}\right] \ln \left[1 - \frac{\mu_F(i)p_i}{P_F}\right] \right] \\
&\quad - \sum_{i=s+k+1}^{N-1} \left[\frac{p_i}{P_F} \ln \frac{p_i}{P_F} + \left(1 - \frac{p_i}{P_F}\right) \ln \left(1 - \frac{p_i}{P_F}\right) \right] \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Pour l'image 3.1(a) en utilisant $k = 5$ et une dynamique [64, 159] la fonction (3.50) possède deux maxima : $S_{NEF}^1 = 103$ comme le montre la figure 3.1(g) et $S_{NEF}^2 = 127$ qui détecte des anneaux de forte réfringence dans la périphérie des cellules. Le premier seuil permet de localiser les cellules foncées dans l'image et le deuxième permet la localisation des cellules qui sont ou qui seront bientôt en mitose (voir figure 3.1(d)).

On remarque que la précision est très importante lorsqu'on prend des seuils près du mode de l'histogramme où une grande quantité de pixels change de classe au moindre changement du seuil (voir figures 3.1(e à h)) contrairement à ce qui se passe près des frontières de la dynamique.

Le point fort de cette technique est l'association de la fréquence de chaque niveau de gris avec son degré d'appartenance aux classes.

3.4 Mise en œuvre

Dans les sections précédentes nous avons présenté plusieurs techniques (floues et non floues) de seuillage basées sur l'histogramme de niveaux de gris d'une image. Pour comparer ces techniques nous avons choisi cinq images différentes chacune possédant des caractéristiques particulières.

3.4.1 Domaines d'application

Dans l'introduction de ce travail (page 1) nous avons présenté les domaines d'application du processus d'analyse d'images. Nous avons cité la médecine l'industrie l'astronomie la robotique la géophysique la météorologie etc. Nous avons aussi dit que nous nous intéressons particulièrement au problème de l'analyse quantitative des

$$\begin{aligned}
EFA(X \setminus s, k) &= EFA(O \setminus s, k) + EFA(F \setminus s, k) = \\
&= - \sum_{i=0}^{s+k} p_i \cdot \left[\frac{\mu_O(i)}{P_O} \ln\left(\frac{\mu_O(i)}{P_O}\right) + \left[1 - \frac{\mu_O(i)}{P_O}\right] \ln\left[1 - \frac{\mu_O(i)}{P_O}\right] \right] \\
&\quad - \sum_{i=s-k}^{N-1} p_i \cdot \left[\frac{\mu_F(i)}{P_F} \ln\left(\frac{\mu_F(i)}{P_F}\right) + \left[1 - \frac{\mu_F(i)}{P_F}\right] \ln\left[1 - \frac{\mu_F(i)}{P_F}\right] \right] = \\
&= - \left[\frac{1}{P_O} \ln\left(\frac{1}{P_O}\right) + \left[1 - \frac{1}{P_O}\right] \ln\left[1 - \frac{1}{P_O}\right] \right] \cdot \sum_{i=0}^{s-k-1} p_i \\
&\quad - \sum_{i=s-k}^{s+k} p_i \cdot \left[\frac{\mu_O(i)}{P_O} \ln\left(\frac{\mu_O(i)}{P_O}\right) + \left[1 - \frac{\mu_O(i)}{P_O}\right] \ln\left[1 - \frac{\mu_O(i)}{P_O}\right] \right] \\
&\quad - \sum_{i=s-k}^{s+k} p_i \cdot \left[\frac{\mu_F(i)}{P_F} \ln\left(\frac{\mu_F(i)}{P_F}\right) + \left[1 - \frac{\mu_F(i)}{P_F}\right] \ln\left[1 - \frac{\mu_F(i)}{P_F}\right] \right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{P_F} \ln\left(\frac{1}{P_F}\right) + \left[1 - \frac{1}{P_F}\right] \ln\left[1 - \frac{1}{P_F}\right] \right] \cdot \sum_{i=s-k}^{N-1} p_i \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Les points clefs de cette technique sont la normalisation des degrés d'appartenance des niveaux de gris dans chaque classe et la prise en considération des éléments en dehors de l'intervalle d'incertitude. Normalement le seuil fourni se trouve près du mode de l'histogramme.

La maximisation de l'entropie floue adaptée fournit le seuil $s_{EFA} = 108$ pour l'image de la figure 3.1(a). Le résultat est montré dans la figure 3.1(e). Nous pouvons noter qu'il y a eu quelques changements par rapport au résultat donné par l'entropie floue mais ce dernier résultat ne donne pas une bonne interprétation sémantique de l'image.

3.3.2 Nouvelle entropie floue

Considérons maintenant les deux distributions suivantes :

$$\begin{aligned}
D_O &: \frac{\mu_O(0)p_0}{P_O}, \frac{\mu_O(1)p_1}{P_O}, \dots, \frac{\mu_O(N-1)p_{N-1}}{P_O} \\
D_F &: \frac{\mu_F(0)p_0}{P_F}, \frac{\mu_F(1)p_1}{P_F}, \dots, \frac{\mu_F(N-1)p_{N-1}}{P_F}
\end{aligned}$$

$$\text{où } P_O = \sum_{i=0}^{s+k} \mu_O(i)p_i \text{ et } P_F = \sum_{i=s-k}^{N-1} \mu_F(i)p_i.$$

Dans ce cas les distributions prennent en compte la fréquence et le degré d'appartenance de chaque niveau de gris associés directement au moyen d'une multiplication et normalisés dans chaque classe. Grâce à cette association les basses fréquences de

$$HF(s) = - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \cdot [\mu_O(i) \ln \mu_O(i) + (1 - \mu_O(i)) \ln(1 - \mu_O(i))] \quad (3.47)$$

où $\mu_O(i)$ peut être donné par (3.21). Comme en dehors de $[s - k, s + k]$ il n'y a pas d'incertitude $\mu_O(i) = 0 \quad \forall i \in [0, s - k]$ et $\mu_O(i) = 0 \quad \forall i \in [s + k, N - 1]$. L'équation (3.47) devient alors :

$$HF(s) = - \sum_{i=s-k+1}^{s+k-1} p_i \cdot [\mu_O(i) \ln \mu_O(i) + (1 - \mu_O(i)) \ln(1 - \mu_O(i))] \quad (3.48)$$

La maximisation de l'entropie floue permet de trouver un seuil près du mode de l'histogramme. Pour l'image des fibroblastes observés en contraste de phase (figure 3.1(a)) en utilisant $k = 5$ le seuil $s_{EF} = 106$ est obtenu. Un résultat similaire est montré dans la figure 3.1(f).

Dans la section 3.3 nous proposons d'autres distributions possibles de nature floue aussi qui peuvent fournir des seuils différents plus adaptés aux images à seuiller.

3.3 Nouvelles techniques fondées sur l'entropie floue

Notre idée consiste à utiliser l'entropie floue mais en considérant la totalité de la dynamique même en dehors de l'intervalle d'incertitude. Deux nouvelles approches seront présentées dans la suite. La force de ces méthodes est leur pouvoir de fournir des seuils plus adaptés aux images.

3.3.1 Entropie floue adaptée

Nous proposons l'utilisation des distributions des degrés d'appartenance normalisés par rapport à la classe (objet O ou fond F) où ils se trouvent comme suit :

$$D_O : \frac{\mu_O(0)}{P_O}, \frac{\mu_O(1)}{P_O}, \dots, \frac{\mu_O(N-1)}{P_O}$$

$$D_F : \frac{\mu_F(0)}{P_F}, \frac{\mu_F(1)}{P_F}, \dots, \frac{\mu_F(N-1)}{P_F}$$

où $P_O = \sum_{i=0}^{s+k} \mu_O(i)$ et $P_F = \sum_{i=s-k}^{N-1} \mu_F(i)$ ont la même fonction que P_s défini dans la section 3.1.2.

Chaque seuil s possible fournira à la place de (3.48) :

Cela illustre la difficulté du choix de c car on n'a pas toujours intérêt à prendre c égal au nombre de classes recherchées.

Algorithme 2 *Algorithme FCM adapté*

1. *Initialisation*

- Fixer les paramètres c ($2 \leq c \leq M$), $m \in [1, \infty)$ et ε (seuil de convergence);
- Initialiser le vecteur v des centres des classes;
- Calculer la fréquence f_i de chaque niveau de gris dans l'image;

2. Répéter jusqu'à $|J_m^{it} - J_m^{it-1}| \leq \varepsilon$

Calculer les distances d_{ik} entre tous les niveaux de gris i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) et les centres v_k des classes ($k = 1, 2, \dots, c$);

Calculer la partition U floue :

$$\mu_{ik} = 1 / \sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{\frac{2}{m-1}} \quad (3.43)$$

Calculer les nouveaux centres v_k des c classes :

$$v_k = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (\mu_{ik})^m i f_i}{\sum_{i=0}^{N-1} (\mu_{ik})^m f_i} \quad (3.44)$$

3.2.7 Évaluation de l'entropie floue

Pour séparer les niveaux de gris en deux classes il faut trouver un seuil s qui partage l'histogramme de ces niveaux de façon à retenir un maximum d'information.

Si on veut tenir compte de l'information ambiguë fournie par les niveaux proches de la frontière séparatrice des deux classes il est intéressant d'utiliser la mesure d'information définie par l'entropie floue [34] donnée par l'équation (2.24).

Pour mesurer le degré de flou associé à une image seuillée l'utilisation des deux distributions de nature floue suivantes est proposée [90] :

$$D_O : \mu_O(0), \mu_O(1), \dots, \mu_O(N - 1) \quad (3.45)$$

$$D_F : \mu_F(0), \mu_F(1), \dots, \mu_F(N - 1) \quad (3.46)$$

En considérant que pour chaque seuil s possible il y a un intervalle $[s - k, s + k]$ où l'information est ambiguë³ et en éliminant la partie constante de (2.30) cette équation devient :

³Le degré d'appartenance de chacun des éléments de cet intervalle à l'objet et au fond est contenu dans $(0, 1)$.

3.2.6 L'algorithme FCM appliqué à la segmentation d'images

Un algorithme de segmentation par classification floue de pixels est constitué de deux étapes :

1. la division de l'ensemble des pixels en un nombre donné de classes non-disjointes. Durant cette première partie on cherche à conserver le plus longtemps possible les informations utiles jusqu'au moment de la prise de décision (*defuzzification*);
2. la définition des différentes régions contenues dans l'image qui pourra s'effectuer par un seuillage par rapport à un degré d'appartenance donné ou plus simplement en choisissant d'attribuer chaque pixel à la classe pour laquelle son degré d'appartenance est maximal.

Une autre manière qui permet de reculer la prise de décision d'une étape supplémentaire est d'opérer sur une partition floue de l'ensemble des pixels en deux classes non-disjointes : les contours et le reste de l'image.

Comme dans les techniques de segmentation par classification il n'est pas nécessaire de classer tous les pixels d'une image mais de classer simplement les différentes valeurs de niveaux de gris que l'on trouve dans celle-ci l'algorithme FCM peut être adapté au cas de la classification floue des N niveaux de gris d'une image.

Avec cette version adaptée de l'algorithme FCM présentée à la page 54 la réduction du nombre d'informations manipulées est très importante. Pour une image 256×256 représentée en 256 niveaux de gris par exemple on passe de $256^2 (= 65.536)$ à un maximum de 256 formes à classer cela parce que si l'image n'est pas étalée sur toute la dynamique disponible on ne considère que les niveaux de gris présents dans l'image.

De plus le temps de traitement d'une image 512×512 est sensiblement le même que pour une image 256×256 ou 128×128 si elles sont quantifiées sur le même nombre de niveaux de gris (non nécessairement les mêmes).

Il a été remarqué que le nombre d'itérations de l'algorithme FCM adapté nécessaire à la convergence ne croît pas systématiquement avec les valeurs de c [64]. La raison en est simplement que l'algorithme converge plus rapidement lorsque le nombre de classes formées s'approche du nombre de classes réelles.

Des opérateurs pour la détection des contours qui évaluent les variations locales des degrés d'appartenance de chaque pixel aux classes par rapport à ses voisins ont été définis dans [64] et comparés avec l'opérateur gradient dans [25]. Les résultats de cette comparaison montrent que l'utilisation des opérateurs contours peut apporter d'importantes informations quand les images sont bruitées.

L'algorithme FCM-adapté étant appliqué à l'image des fibroblastes de la figure 3.1(a) fournit $s_{FCM} = 120$ qui n'est pas un seuil représentatif. Lorsqu'on l'utilise pour la détection de trois classes dans cette même image nous ne pouvons dire de même car l'un des deux seuils détectés $s_{FCM_3}^1 = 102$ donne un bon résultat similaire à celui montré dans la figure 3.1(h) qui permet de localiser les cellules foncées. L'autre seuil ($s_{FCM_3}^2 = 132$) ne sert pas à représenter des entités dans l'image.

$U = [1/c]$ ce qui n'offre pas de réel intérêt. Pour les valeurs de m proches de 1 les degrés d'appartenance sont très stricts (proches des valeurs binaires) et ne traduisent pas l'ambiguïté d'affectation des formes de X . Enfin les valeurs de m prises dans l'intervalle $[1.5, 2]$ permettent d'obtenir des résultats intéressants et d'interprétation aisée.

Algorithme 1 *Algorithme FCM*

1. *Initialisation*

- Fixer les paramètres c ($2 \leq c \leq M$), $m \in [1, \infty)$ et ε (seuil de convergence) ;
- Initialiser la partition floue U ou le vecteur v des centres des classes ;

2. Répéter jusqu'à $|J_m^{it} - J_m^{it-1}| \leq \varepsilon$

Calculer les centres v_k des c classes :

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^M (\mu_{ik})^m x_i}{\sum_{i=1}^M (\mu_{ik})^m} \quad (3.41)$$

Calculer la partition U floue :

$$\mu_{ik} = 1 / \sum_{j=1}^c \left(\frac{d_{ik}}{d_{jk}} \right)^{\frac{2}{m-1}} \quad (3.42)$$

Le nombre d'itérations de l'algorithme FCM augmente avec la précision demandée sur les valeurs des centres (ou des degrés d'appartenance si le test d'arrêt est fait en fonction de celles-ci). Pour les formes entières (les niveaux de gris par exemple) un seuil de convergence de 0.01 donne des erreurs inférieures à 0.5% ce qui nous apporte un bon compromis entre la rapidité de convergence et la précision des résultats.

En classification floue l'appartenance d'un élément à une classe est d'autant plus forte que son degré d'appartenance à cette classe est proche de 1 et que ses degrés d'appartenance aux autres classes sont proches de 0. La meilleure classification floue réalisable est donc la classification qui correspond le plus à une partition binaire.

Dans [64] une comparaison des différentes mesures de validité de classification dans le but de décider pour quelle valeur de c la classification floue donne les meilleurs résultats a été réalisée.

Des phénomènes de scission ou d'agrégation des classes sont observables au fur et à mesure que l'on exécute l'algorithme FCM pour $2 \leq c \leq M$ classes.

La convergence de l'algorithme FCM vers un minimum local est assurée quelle que soit la configuration initiale choisie à condition que plusieurs centres ne soient pas initialisés aux mêmes valeurs.

Les mesures de probabilité ont été utilisées pour seuiller l'image de la figure 3.1(a). Pour le cas non-paramétrique (cf. le critère 3.35) les deux seuils obtenus sont les limites de la dynamique. De la même façon que pour les résultats fournis par la divergence floue Γ ces deux derniers sont aussi peu significatifs. Néanmoins le cas paramétrique fournit $s_{P_o}^1 = 74$ et $s_{P_o}^2 = 159$ pour des distributions de Poisson et $s_{N_o}^1 = 45$ et $s_{N_o}^2 = 152$ pour deux lois normales. Seules $s_{P_o}^2$ et $s_{N_o}^2$ sont représentatifs et un résultat similaire a déjà été montré par la figure 3.1(c).

Nous remarquons que ces deux mesures ne travaillent pas avec l'aire de recouvrement entre les deux distributions de probabilité choisies Γ ce qui n'est pas le cas des méthodes reposant sur la divergence floue ou sur l'entropie.

3.2.5 L'algorithme fuzzy c-means (FCM)

Le fuzzy c-means (FCM) [8 Γ 36] est un algorithme itératif Γ non-supervisé de classification floue. Cet algorithme Γ présenté à la page 52 Γ est basé sur un critère quadratique qui sert à classer des formes en classes non-disjointes en permettant de conserver longtemps un volume d'information important Γ sans avoir à prendre la décision prématurément.

Le critère quadratique à minimiser est la somme pondérée Γ pour toutes les classes formées Γ des écarts quadratiques intra-classes.

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ un ensemble fini de formes de dimension p Γ c un entier appartenant à $\{2, 3, \dots, M\}$ représentant le nombre de classes et $U = \mu_{ik}$ une partition floue de X en c classes Γ où chaque μ_{ik} est le degré d'appartenance $\mu_k(x_i)$ de la forme x_i à la classe k .

Supposons $\sum_{k=1}^c \mu_{ik} = 1 \quad \forall i$ Γ alors le critère quadratique de classification J_m est défini par :

$$J_m(U, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^c (\mu_{ik})^m (d_{ik})^2 \quad (3.40)$$

où m est le facteur de flou ($1 \leq m < \infty$) Γ d_{ik} est une distance quelconque entre la forme x_i et le vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_c)$ des centres des classes. Lorsque m tend vers 1 et d est la distance euclidienne Γ l'algorithme FCM est connu comme *Hard c-fuzzy* (HCF). Dans ce cas il fournit la partition binaire optimale.

Une étude sur l'influence de plusieurs variables dans l'algorithme FCM se trouve dans [64]. Quelques-uns de ces résultats seront présentés ci-après.

Il n'y a pas de règles pour fixer la valeur de m car il n'existe pas de base théorique pour l'optimisation de ce paramètre. Cela permet de mettre en valeur l'ambiguïté existante dans l'ensemble à classer Γ ou au contraire Γ de l'atténuer. Le facteur de flou m interfère sur deux caractéristiques de l'algorithme : la rapidité de convergence décroît avec l'augmentation de m Γ en même temps que l'apport de chaque élément dans le calcul des centres des classes décroît.

Pour les valeurs de m supérieures à 2 Γ les partitions tendent Γ lorsque m croît Γ vers le centre de gravité de l'espace des partitions floues Γ c.à.d. vers la partition

Non-paramétrique

Dans ce cas Γ on considère l'histogramme comme représentant deux distributions de probabilité et (3.32) devient alors :

$$\max_s \left\{ \sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^{N-1} \mu_D(x_i, x_j) \frac{f_i}{\sum_{k=0}^s f_k} \frac{f_j}{\sum_{k=s+1}^{N-1} f_k} \right\} \quad (3.35)$$

Paramétrique

Les deux distributions de probabilité Γ celle de l'objet et celle du fond peuvent être approchées par deux lois normales ou deux distributions de Poisson. Dans le premier cas Γ (3.32) est remplacé par :

$$\max_s \left\{ \frac{1}{\sigma_1(s)\sigma_2(s)} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^{N-1} \mu_D(x_i, x_j) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{i-m_1(s)}{\sigma_1(s)}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{j-m_2(s)}{\sigma_2(s)}\right)^2} \right\} \quad (3.36)$$

où

$$\mu_k(s) = \frac{\sum_{i=a}^b i f_i}{\sum_{i=a}^b f_i(s)} \quad \text{et} \quad \sigma_k^2(s) = \frac{\sum_{i=a}^b [i - \mu_k(s)]^2 f_i(s)}{\sum_{i=a}^b f_i(s)} \quad (3.37)$$

pour

$$a = \begin{cases} 0 & k = 1 \\ s + 1 & k = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad b = \begin{cases} s & k = 1 \\ N - 1 & k = 2 \end{cases}$$

Dans le deuxième cas Γ (3.32) est remplacé par :

$$\max_s \left\{ \sum_{i=0}^s \sum_{j=s+1}^{N-1} \mu_D(x_i, x_j) \frac{(\lambda_1(s))^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_1(s)} \frac{(\lambda_2(s))^j}{j!} \cdot e^{-\lambda_2(s)} \right\} \quad (3.38)$$

où :

$$\lambda_1(s) = \frac{\sum_{i=0}^s i f_i}{\sum_{i=0}^s f_i(s)} \quad \text{et} \quad \lambda_2(s) = \frac{\sum_{i=s+1}^{N-1} i f_i}{\sum_{i=s+1}^{N-1} f_i(s)} \quad (3.39)$$

$$\max_s \left\{ \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} D_i(O, F) \cdot f_i \right\} \quad (3.29)$$

où $D_i(O, F)$ est donnée par l'équation (3.26). Alternativement en fonction d'un seul ensemble flou Γ (3.29) devient :

$$\max_s \left\{ \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} [2\mu_O(x_i) - 1] \ln \frac{1 + \mu_O(x_i)}{2 - \mu_O(x_i)} \cdot f_i \right\} \quad (3.30)$$

Étant appliqué à l'histogramme de l'image des fibroblastes en contraste de phase Γ le critère donné par (3.30) fournit deux seuils : $s_{DF}^1 = 64$ et $s_{DF}^2 = 241\Gamma$ qui sont les limites inférieure et supérieure de la dynamique. Ces résultats sont alors peu intéressants.

3.2.4 L'utilisation des mesures de probabilité

Soit deux ensembles disjoints $X_1 = \{0, 1, \dots, k_1\}$ et $X_2 = \{k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2\}$. Soit un ensemble flou $D\Gamma$ avec sa fonction d'appartenance $\mu_D(x_i, x_j)$ qui détermine la dissimilarité entre x_i et x_j . La probabilité que X_1 et X_2 ne soient pas similaires (c.à.d. la mesure de dissimilarité entre X_1 et X_2) est donnée par [9] :

$$P = \sum_{i \in X_1} \sum_{j \in X_2} Diss(i, j) P(i \in X_1) P(j \in X_2) \quad (3.31)$$

ou

$$P = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \mu_D(x_i, x_j) P(i, X_1) P(j, X_2) \quad (3.32)$$

Pour appliquer cette mesure de dissimilarité à l'histogramme des niveaux de gris Γ on considère pour chaque seuil s possible k_1 et k_2 comme étant s et $N - 1$ respectivement. La fonction μ_D peut être définie de plusieurs manières. Citons quelques exemples :

$$\mu_D(i, j) = \frac{|i - j|}{N - 1} \quad (3.33)$$

$$\mu_D(i, j) = 1 - e^{-|i-j|} \quad (3.34)$$

Remarquons que (3.33) et (3.34) donnent comme résultats des valeurs contenues dans l'intervalle $[0, 1]$. La fonction μ_D fournie par (3.33) fournit une distribution régulière Γ contrairement à celle définie par (3.34) qui regroupe ses valeurs près de l'unité. Pour vérifier cela Γ il suffit de comparer $\mu_D(0, 10)$ dans les deux cas. En utilisant (3.33) on obtient 0.0392 alors que (3.34) fournit $1 - \frac{1}{e^{10}} = 0.9999546$.

Selon la distribution de probabilité de X_1 et X_2 Γ on peut sélectionner le seuil s de façon paramétrique ou non-paramétrique.

$$D(A, B) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [D_i(A, B) + D_i(B, A)] \quad (3.23)$$

où $D_i(A, B)$ et $D_i(B, A)$ sont définis par (3.24) et (3.25) et donnent l'information par unité de support i à partir de A au détriment de B et *vice versa*.

$$D_i(A, B) = \mu_A(x_i) \ln \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)} + [1 - \mu_A(x_i)] \ln \frac{1 - \mu_A(x_i)}{1 - \mu_B(x_i)} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} D_i(B, A) &= \mu_B(x_i) \ln \frac{\mu_B(x_i)}{\mu_A(x_i)} + [1 - \mu_B(x_i)] \ln \frac{1 - \mu_B(x_i)}{1 - \mu_A(x_i)} \quad (3.25) \\ &= -\mu_B(x_i) \ln \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_B(x_i)} - [1 - \mu_B(x_i)] \ln \frac{1 - \mu_A(x_i)}{1 - \mu_B(x_i)} \end{aligned}$$

La seconde partie de (3.24) et (3.25) prend en compte la divergence entre les compléments de A et B mais ces équations ne servent pas à mesurer la divergence entre deux ensembles classiques car pour chaque élément x_i soit $\mu_A(x_i) = 0$ soit $\mu_B(x_i) = 0$. Pour tenir compte des ensembles classiques (3.24) et (3.25) seront remplacées par :

$$D_i(A, B) = \mu_A(x_i) \ln \frac{1 + \mu_A(x_i)}{1 + \mu_B(x_i)} + [1 - \mu_A(x_i)] \ln \frac{2 - \mu_A(x_i)}{2 - \mu_B(x_i)} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} D_i(B, A) &= \mu_B(x_i) \ln \frac{1 + \mu_B(x_i)}{1 + \mu_A(x_i)} + [1 - \mu_B(x_i)] \ln \frac{2 - \mu_B(x_i)}{2 - \mu_A(x_i)} \quad (3.27) \\ &= -\mu_B(x_i) \ln \frac{1 + \mu_A(x_i)}{1 + \mu_B(x_i)} - [1 - \mu_B(x_i)] \ln \frac{2 - \mu_A(x_i)}{2 - \mu_B(x_i)} \end{aligned}$$

D'après (3.26) et (3.27) l'équation (3.23) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} D(A, B) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \ln \frac{1 + \mu_A(x_i)}{1 + \mu_B(x_i)} + \right. \\ &\quad \left. + [\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)] \ln \frac{2 - \mu_A(x_i)}{2 - \mu_B(x_i)} \right] \quad (3.28) \end{aligned}$$

La maximisation de la divergence floue peut être utilisée pour trouver le niveau de gris le plus ambigu dans l'histogramme [9]. On doit donc choisir l'intervalle d'incertitude $[s - k, s + k]$ et poser $\mu_O(s) = \mu_F(s) = 0.5$ s étant l'élément le plus ambigu. Pour cela la fonction S_Z se montre tout à fait cohérente. Comme $\mu_O(x_i) + \mu_F(x_i) = 1 \quad \forall x_i \in X$ $D_i(O, F) = D_i(F, O) \quad \forall x_i \in X$. Le critère de maximisation de la divergence entre l'objet et le fond $\max_s D(O, F)$ peut s'écrire de la manière suivante :

Remarquons que la fonction S_Z satisfait ces conditions. En acceptant ces deux idées on aura pour chaque seuil s possible le degré d'appartenance de tous les niveaux de gris aux deux classes : le fond et l'objet comme suit :

$$\mu_i(\text{fond}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s - k \\ S_Z(s, x) & \text{si } s - k \leq x \leq s + k \\ 1 & \text{si } x > s + k \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\mu_i(\text{objet}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < s - k \\ 1 - S_Z(s, x) & \text{si } s - k \leq x \leq s + k \\ 0 & \text{si } x > s + k \end{cases} \quad (3.22)$$

3.2.2 L'utilisation des indices de flou

Le degré d'appartenance de chaque niveau de gris présent dans une image étant donné par la fonction S_Z cf. (3.17) cela permet aux indices de flou γ_l et γ_q donnés respectivement par les équations (2.28) et (2.29) d'être utilisés dans le but de mesurer l'ambiguïté associée à l'image. À chaque valeur de croisement possible correspond une partition floue de l'image.

Soit une image X ayant un histogramme des niveaux de gris bimodal le point de croisement s choisi comme seuil optimal séparant l'image en deux classes est celui pour lequel l'ambiguïté est maximale à d. $S(s) = 0.5$. Les différents niveaux de gris seront séparés en deux classes : $x \in [0, s - 1]$ où $S(x) < 0.5$ et $x \in [s + 1, N - 1]$ où $S(x) > 0.5$.

La valeur de s pour laquelle l'intervalle $[s - k, s + k]$ possède un nombre minimum d'éléments x ayant $\mu_O(x) \simeq 0.5$ et un nombre maximum d'éléments ayant $\mu_O(x) \simeq 0$ ou 1 correspond à une vallée dans l'histogramme. Le pic à son tour est représenté par la valeur de s qui possède un nombre maximum d'éléments x ayant $\mu_O(x) \simeq 0.5$ et un nombre minimum d'éléments ayant $\mu_O(x) \simeq 0$ ou 1. L'utilisation des indices de flou peut ne pas donner des bons résultats lorsque les images traitées ne possèdent pas des seuils représentatifs dans les vallées de l'histogramme. C'est le cas de l'image 3.1(a) ayant un histogramme unimodal (figure 3.1(b)).

Dans les cas où l'histogramme est multimodal il est possible de tomber sur un minimum local. Pour éviter cela un critère pour le choix de k déterminant la largeur de bande² est proposé dans [85].

3.2.3 Maximisation de la divergence floue

La divergence floue est une mesure de différence entre deux ensembles flous.

Définition 65 Soit A et B deux ensembles flous définis dans $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ tels que $0 < \mu_A(x_i), \mu_B(x_i) < 1 \quad \forall i$, la **divergence floue** entre A et B est donnée par [9]:

²Ce critère a été proposé dans la section 3.2.1.

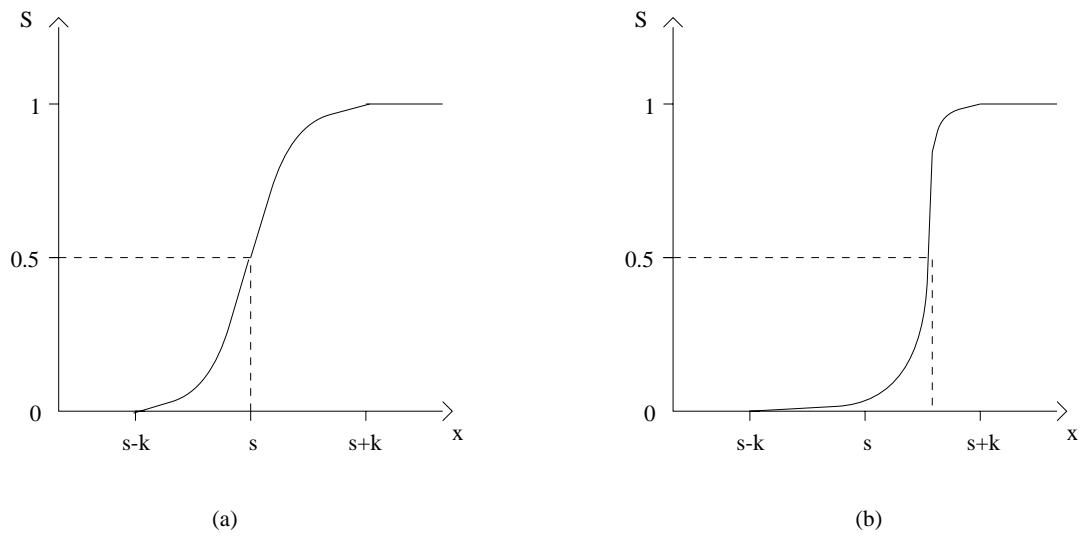


FIG. 3.2 - (a) Fonction S_Z et (b) une fonction d'appartenance non symétrique

$$h_{inf}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \min \leq x \leq \min + \varepsilon \\ x - \varepsilon & \text{si } \min + \varepsilon \leq x \leq \max \end{cases} \quad (3.19)$$

$$h_{sup}(x) = \begin{cases} x + \varepsilon & \text{si } \min \leq x \leq \max - \varepsilon \\ 1 & \text{si } \max - \varepsilon \leq x \leq \max \end{cases} \quad (3.20)$$

La figure 3.3 montre les fonctions-limite h_{inf} et h_{sup} développées pour $\min = s - k$, $\max = s + k$ et $\varepsilon = 0.25$.

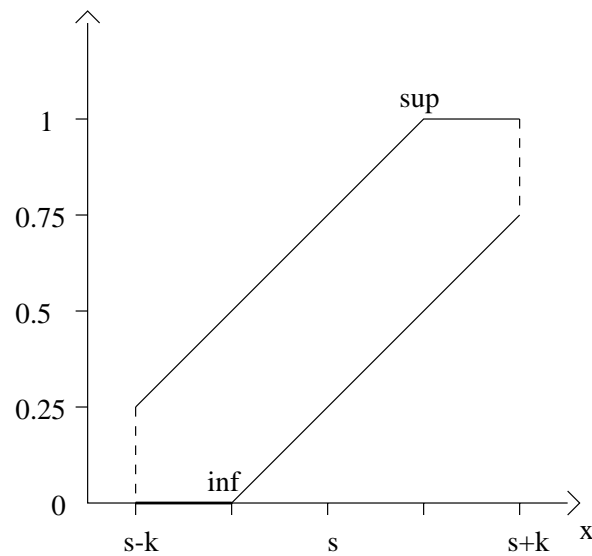


FIG. 3.3 - Fonctions limite

Dans [85] une manière de résoudre le premier problème en utilisant la distance entre deux maxima de l'histogramme de niveaux de gris est présentée. En fait si l'intervalle $[s - k, s + k]$ est trop petit il est possible que des seuils non représentatifs soient détectés par contre si cet intervalle est trop grand des bons seuils peuvent être éliminés. Pour éviter cela il est important que k soit inférieur en restant proche de la moitié de la distance entre deux maxima de l'histogramme [85]. L'hypothèse de la convexité de l'histogramme entre les maxima a été utilisée. Pour les histogrammes ayant plus de deux maxima ou alors n'en ayant qu'un seul cette règle ne donne pas toujours de bons résultats. En tout cas pour éviter la détection des maxima locaux il est conseillé de lisser l'histogramme d'abord.

Le deuxième problème peut facilement être contourné par l'utilisation de la fonction S_Z (connue comme fonction S de Zadeh). Cette fonction est définie de manière que pour tout élément x dans un intervalle (a, c) inclus dans $[0, N - 1]$ la valeur de $S_Z(x)$ soit dans l'intervalle $(0, 1)$:

$$S_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2\left[\frac{x-a}{c-a}\right]^2 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 - 2\left[\frac{x-c}{c-a}\right]^2 & \text{si } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

Le point $b = (c + a)/2$ pour lequel S_Z possède valeur 0.5 est appelé point de croisement et la valeur de $c - a$ est dite "largeur de bande". Soit s le point de croisement et $2k$ la largeur de bande la fonction S_Z peut alors être définie en fonction de ces paramètres (voir la figure 3.2(a)) comme suit :

$$S_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq s - k \\ \frac{[x - (s - k)]^2}{2k^2} & \text{si } s - k \leq x \leq s \\ 1 - S_Z(2s - x) & \text{si } s \leq x \leq s + k \\ 1 & \text{si } x \geq s + k \end{cases} \quad (3.17)$$

Cette fonction possède la particularité de ne pas avoir une grande variation de ses valeurs concentrée dans un petit intervalle en dépit d'une petite variation en dehors de cet intervalle (comme la fonction de la figure 3.2(b) par exemple). Il est suggéré dans [85] que deux conditions soient satisfaites pour éviter le problème posé par les fonctions comme celle montrée par la figure 3.2(b) :

- le respect de la symétrie par rapport à s à.d. :

$$\mu(s - x) + \mu(s + x) = 1 \quad \forall x \leq k \quad (3.18)$$

- le respect de $h_{inf}(x) \leq \mu(x) \leq h_{sup}(x) \quad \forall x \leq k$ où les fonctions-limite h_{inf} et h_{sup} sont données par :

où $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ est une partition des niveaux de gris $0, 1, 2, \dots, N - 1$ f_i est le nombre de points de la partition qui possèdent le niveau de gris i et $G(P_l)$ est la moyenne pondérée des valeurs de gris de la classe l donnée par :

$$G(P_l) = \frac{\sum_{i \in P_l} f_i \cdot i}{\sum_{i \in P_l} f_i} \quad (3.16)$$

L'évaluation est faite sur toute la dynamique des niveaux de gris et le nombre de classes est un paramètre d'entrée.

La méthode de Fisher appliquée à l'image des fibroblastes de la figure 3.1(a) fournit $s_F = 123$ qui n'est pas un seuil représentatif. Néanmoins lorsqu'on l'utilise pour la détection de trois classes dans cette même image l'un des deux seuils détectés $s_{F_3}^1 = 101$ donne le résultat montré dans la figure 3.1(h) qui permet de localiser les cellules foncées. L'autre seuil ($s_{F_3}^2 = 133$) n'est pas représentatif.

Le résultat final après un post-traitement en morphologie mathématique et l'imposition d'un seuil sur la surface est montré dans la figure 3.1(j).

3.2 Méthodes utilisant la notion d'ensemble flou

Dans la section 2.4.5 nous avons présenté l'utilisation de notions venues de la logique floue en segmentation d'images. Plusieurs indices de flou ont été présentés dans le but de trouver le meilleur seuil qui sépare l'histogramme des niveaux de gris. Dans cette section nous allons étudier la façon dont ces indices de flou peuvent être utilisés et nous porterons une attention spéciale à l'entropie floue. Des critères utilisant la divergence floue et des mesures de probabilité seront présentés et discutés ainsi que l'algorithme "FCM" (déjà cité en page 36) adapté à la segmentation d'images monochromes.

3.2.1 Ambiguïté en niveaux de gris

Au moment de la séparation des niveaux de gris en deux classes par un seuil s il est possible de prendre en compte l'incertitude d'appartenance de quelques pixels aux deux classes principalement ceux qui ont un niveau de gris très proche de s .

La logique floue permet de laisser les niveaux de gris appartenant à l'intervalle $[s - k, s + k]$ attachés aux deux classes de manière floue. On supposerait alors qu'en dehors de cet intervalle les niveaux de gris n'ont aucune incertitude quant à la classe à laquelle ils appartiennent.

Deux nouveaux problèmes surgissent alors :

- Comment choisir un tel intervalle?
- Comment définir les degrés d'appartenance des niveaux de gris de cet intervalle aux deux classes?

Le critère (3.9) donne pour chaque seuil s possible le chevauchement minimal entre les modèles gaussiens des classes représentées par les distributions. Le problème de la sélection du seuil qui donne l'erreur minimale associée aux deux classes peut être formulé comme :

$$\min_s \left\{ \sum_{i \leq s} f_i \cdot \epsilon(i, s) + \sum_{i > s} f_i \cdot \epsilon(i, s) \right\} \quad (3.10)$$

qui après avoir été développé dans [57] nous permet de remplacer (3.9) par :

$$\min_s \left\{ 1 + 2 \left[p_O(s) \ln \frac{\sigma_O(s)}{p_O(s)} + p_F(s) \ln \frac{\sigma_F(s)}{p_F(s)} \right] \right\} \quad (3.11)$$

où

$$p_O(s) = \sum_{i \leq s} f_i \quad \text{et} \quad p_F(s) = \sum_{i > s} f_i \quad (3.12)$$

$$\mu_O(s) = \frac{\sum_{i \leq s} i f_i}{p_O(s)} \quad \text{et} \quad \mu_F(s) = \frac{\sum_{i > s} i f_i}{p_F(s)} \quad (3.13)$$

$$\sigma_O^2(s) = \frac{\sum_{i \leq s} [i - \mu_O(s)]^2 f_i}{p_O(s)} \quad \text{et} \quad \sigma_F^2(s) = \frac{\sum_{i > s} [i - \mu_F(s)]^2 f_i}{p_F(s)} \quad (3.14)$$

Cette méthode fournit le seuil $s_{ME} = 155$ lorsqu'elle est appliquée à l'image de la figure 3.1(a). Le résultat est similaire à celui obtenu par la maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée montrée par la figure 3.1(c). Cela nous fait remarquer que pour les images ayant un histogramme unimodal il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision lorsque le seuil se trouve beaucoup plus proche des frontières de la dynamique que du mode.

Nous remarquons aussi que jusqu'à présent les cellules foncées de l'image test n'ont pas encore pu être détectées.

3.1.5 La méthode Fisher pour multiseuils

La méthode de Fisher [37] détermine la partition des N niveaux de gris en k classes qui minimise la somme des variances des niveaux de gris de chacune de ces classes donnée par :

$$\min_P \left\{ \sum_{l=1}^k \sum_{i \in P_l} [f_i \cdot (i - G(P_l))^2] \right\} \quad (3.15)$$

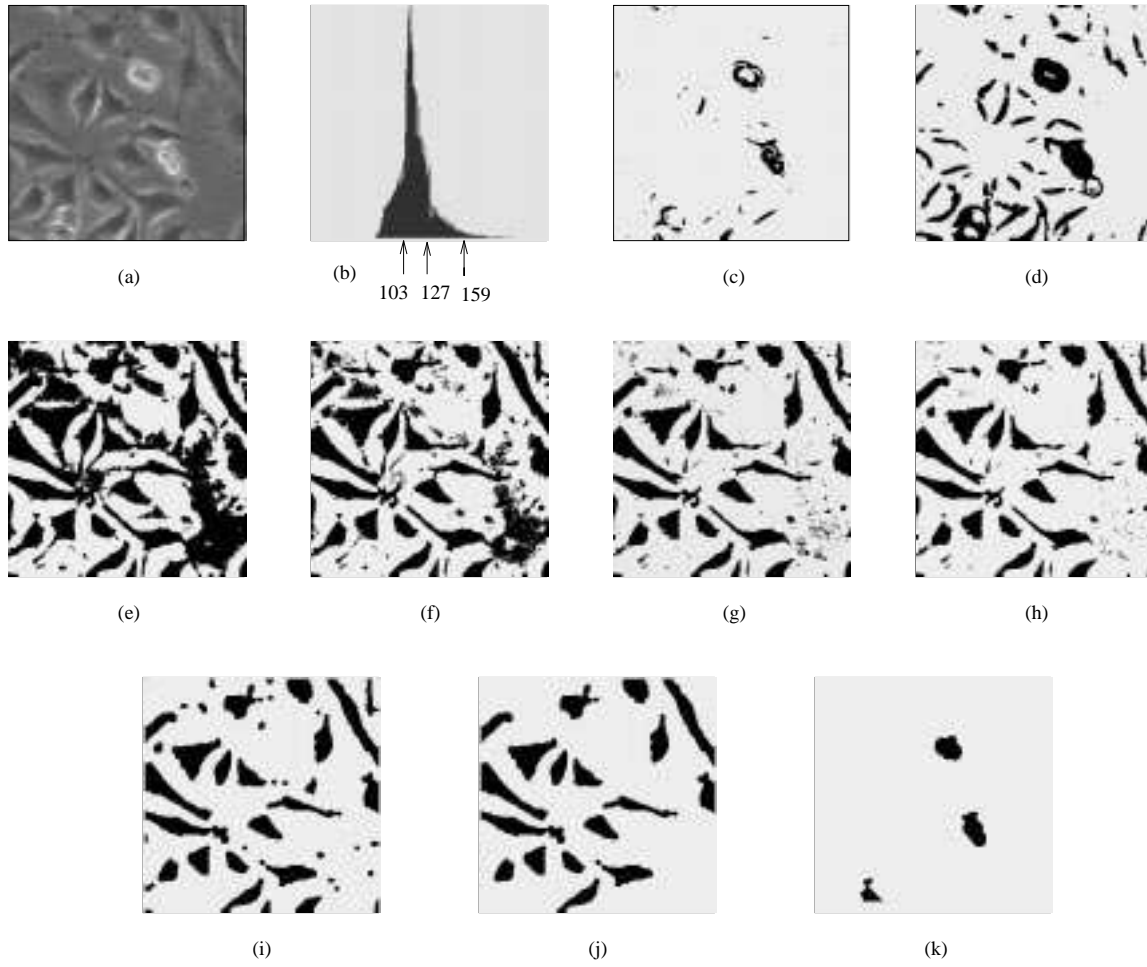


FIG. 3.1 - (a) L'image des fibroblastes observés en contraste de phase Γ (b) l'histogramme des niveaux de gris et quelques résultats de la binarisation à partir des seuils suivants : (c) $s_{EPA} = 159$ (d) $s_{NEF}^2 = 127$ (e) $s_{EP} = s_{EFA} = 108$ (f) $s_{CA} = 105$ (g) $s_{NEF}^1 = 103$ et (h) $s_{F_3}^1 = 101$. (i) L'image (g) traitée par la morphologie mathématique et (j) le résultat après l'imposition d'un seuil sur la surface. (k) L'image (c) après un traitement venu de la morphologie mathématique et l'imposition d'un seuil sur la surface.

rapport à un seuil s [57]. Ces populations sont caractérisées par leurs moyennes $\mu_O(s)$ et $\mu_F(s)$ et leurs écarts-type $\sigma_O(s)$ et $\sigma_F(s)$. L'idée ici est de minimiser l'erreur de classification $\epsilon(i, s)$ associée à cette séparation à travers :

$$\min_s \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cdot \epsilon(i, s) \right\} \quad (3.9)$$

où Γ pour deux classes Γ on a :

$$\epsilon(i, s) = f_{i \setminus j}(s) \cdot p_j(s) / f_i \quad \text{pour } j = \begin{cases} O & \text{si } i \leq s \\ F & \text{si } i > s \end{cases}$$

Cette fois-ci en utilisant la fréquence de chaque niveau de gris dans la classe à laquelle il appartient on essaye de trouver le seuil s qui maximise l'entropie de l'objet additionnée à celle du fond qui grâce à la propriété **P 5** (page 12) est donnée par :

$$\max_s \{H_O(s) + H_F(s)\} = \max_s \left\{ -\sum_{i=0}^s \frac{p_i}{P_s} \ln \frac{p_i}{P_s} - \sum_{i=s+1}^{N-1} \frac{p_i}{1-P_s} \ln \frac{p_i}{1-P_s} \right\} \quad (3.6)$$

En simplifiant la formule 3.6 on cherche à maximiser par rapport à s :

$$\max_s \left\{ \ln P_s(1-P_s) + \frac{H_s}{P_s} + \frac{H_n - H_s}{1-P_s} \right\} \quad (3.7)$$

où $H_s = -\sum_{i=0}^s p_i \ln p_i$ pour $s = 0, 1, \dots, N-1$.

La maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée fournit $s_{EPA} = 159$ comme seuil optimal pour l'image des fibroblastes de la figure 3.1(a). Le résultat montré dans la figure 3.1(c) permet de localiser les cellules claires et quelques anneaux de réfringence en périphérie des cellules.

3.1.3 Prise en compte du coefficient d'anisotropie

Une autre manière de sélectionner un seuil fondée sur le coefficient d'anisotropie qui est obtenu à partir de l'asymétrie de l'histogramme des niveaux de gris de l'image est proposée dans [96]. Une heuristique qui donnerait le même résultat [53] considère simplement la fonction :

$$g(s) = \frac{\sum_{i=0}^s p_i \ln p_i}{\left(\sum_{i=0}^s p_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} p_i \ln p_i \right)} \quad (3.8)$$

Le seuil choisi sera la valeur de s pour laquelle $g(s)$ approche le plus possible l'unité.

On remarque que pour $s = N-1$ $g(s) = 1$ mais évidemment cette valeur doit être éliminée. Aussi il serait intéressant de trouver un autre point optimal qui soit assez éloigné des dernières valeurs des niveaux de gris.

Pour l'image de fibroblastes observés en contraste de phase et seuillée par cette technique on obtient le seuil $s_{CA} = 105$. La figure 3.1(f) montre que ce résultat n'est pas très loin d'une bonne segmentation.

3.1.4 Sélection du seuil qui minimise l'erreur

Souvent il est correct de supposer que les niveaux de gris présents dans une image sont distribués en deux populations de densité normale objet(O) et fond(F) par

$$p_1 = \sum_{i=0}^s f_i/M \quad \text{et} \quad p_2 = \sum_{i=s+1}^{N-1} f_i/M \quad (3.1)$$

L'entropie *a posteriori* de I binarisée sera donc :

$$H(I_1, I_2) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 \quad (3.2)$$

où p_1 et p_2 sont donnés par (3.1).

En maximisant $H(I_1, I_2)$ on maximise l'information *a posteriori* contenue dans I binarisée. Cette opération fournit la valeur de s comprise entre 0 et $N - 1$ qui partage l'image I de manière à optimiser l'information retenue c.à.d. séparer le mieux possible les pixels clairs des pixels foncés. D'après la propriété **P 3** (page 12) le seuil s retenu sera alors celui qui approche le plus possible p_1 de p_2 . Dans le cas où l'égalité est possible on a

$$\sum_{i=0}^s p_i = \sum_{i=s+1}^{N-1} p_i \quad (3.3)$$

et par conséquent $H(I_1, I_2) = -2 \cdot 0.5 \log_2 0.5 = \log_2 2 = 1$ qui est sa valeur maximale (c.à.d. l'entropie d'une expérience ayant deux événements équiprobables ($S = \{I_1, I_2\}$ où $p(I_1) = p(I_2) = 0.5$) est égale à 1). Pour l'image des fibroblastes observés en contraste de phase ¹ (figure 3.1(a)) le seuil obtenu par la maximisation de l'entropie *a posteriori* est $s_{EP} = 108$. Le résultat même s'il n'est guère significatif visuellement est montré en figure 3.1(e). La raison pour laquelle ce résultat a l'air de ne pas être trop mauvais vient du fait qu'un bon seuil se trouve près du mode de l'histogramme et par coïncidence le point qui partage les pixels en deux classes de même cardinalité n'en est pas très loin.

Le choix de la base 2 pour le logarithme n'est pas essentiel comme on l'a déjà fait remarquer dans la section 2.2.1 (page 11). Nous allons dans la suite utiliser le logarithme népérien sans considérer la partie constante $\log_2 e$.

3.1.2 Maximisation de l'entropie *a posteriori* adaptée

L'utilisation de l'histogramme des niveaux de gris normalisé comme étant une distribution de probabilité est proposé dans [53]. Les distributions D_O et D_F suggérées pour représenter l'objet et le fond respectivement sont les suivantes :

$$D_O : \frac{p_0}{P_s}, \frac{p_1}{P_s}, \dots, \frac{p_s}{P_s} \quad (3.4)$$

$$D_F : \frac{p_{s+1}}{1 - P_s}, \frac{p_{s+2}}{1 - P_s}, \dots, \frac{p_{N-1}}{1 - P_s} \quad (3.5)$$

où $P_s = \sum_{i=0}^s p_i$.

¹Cette image est décrite à la page 58.

Chapitre 3

Segmentation floue par seuillage

Dans la section 2.1.3 (page 7) nous avons introduit le seuillage d'une image. Dans ce chapitre on va tout d'abord faire un survol des méthodes traditionnelles de seuillage basées sur des critères d'entropie, d'anisotropie, de l'erreur et de la variance associées à la séparation des pixels en classes.

Deuxièmement nous allons présenter des méthodes utilisant la notion d'ensemble flou. L'apport de la logique floue en segmentation d'images a déjà été abordée dans la section 2.4.5 (page 29).

De nouvelles approches utilisant la notion d'entropie floue seront proposées dans la suite. Les méthodes seront comparées et une coopération entre les techniques floues et non floues de seuillage est suggérée dans le but de détecter les entités dans des images cytologiques réputées être difficiles à segmenter.

3.1 Les méthodes traditionnelles de seuillage

Ces méthodes maximisent ou minimisent une fonction qui traduit un critère et est définie par rapport à la quantité de pixels de chaque niveau de gris qui peuvent être placés dans les classes suivant lesquelles l'image a été partagée. Ce sont alors des critères basés sur l'histogramme des niveaux de gris de l'image. Voir : [53], [57], [65], [87], [96] ou [97].

Nous présentons dans la suite quelques unes de ces méthodes.

3.1.1 Maximisation de l'entropie *a posteriori*

Soit I une image composée de M pixels représentés sur N niveaux de gris. Soit f_i la fréquence de chacun des N niveaux de gris et $p_i = f_i/M$ la probabilité associée à chacun de ces niveaux.

La formule (2.3) nous fournit l'entropie *a priori* de I . Après sa binarisation, cette image sera partagée en deux classes notées I_1 et I_2 par un seuil s . La probabilité associée à chacune de ces classes est :

Pyramides floues

Une méthode hiérarchique pour localiser des courbes de longueur importante dans une image en utilisant pour cela une structure pyramidale symbolique est présentée dans [11]. Les notions de relation floue, division et fusion floues et fermeture floue sont utilisées dans cette approche.

Une structure pyramidale ayant pour but de construire la pyramide floue des caractéristiques utilisant des fenêtres circulaires et des secteurs est présentée dans [68].

2.5 Commentaires

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions qui servent de base aux développements des prochains chapitres.

Une coopération entre les entropies classique et floue est présentée au chapitre 3 dans le but de seuiller des images. La théorie des graphes est utilisée au chapitre 4 comme fondement de la construction des pyramides irrégulières. Dans le chapitre 5 la notion de “graphe flou” est utilisée lors du développement des pyramides floues.

avoir à prendre la décision prématurément. Le “Fuzzy-C Means (FCM)” [8] est un algorithme itératif de classification floue. Dans cet algorithme lors de la prise de décision chaque élément est affecté définitivement à la classe pour laquelle son degré d’appartenance est maximal.

L’algorithme “Fuzzy-C Means - FCM” est présenté dans la section 3.2.5. Les méthodes floues de classification (supervisées ou non) principalement l’algorithme “FCM” ont été étudiées par plusieurs auteurs. Ci-dessous nous citons quelques uns des résultats obtenus.

Deux opérateurs flous de détection de contours ont été proposés dans [64]. Le principe de ces opérateurs est de réaliser pour chaque pixel dans la classe où son degré d’appartenance est maximal les variations maximale et moyenne par rapport à ses voisins. Un seuil sera utilisé pour la prise en compte ou non du pixel comme un élément de contour.

Une extension de l’algorithme “FCM” en utilisant un classifieur qui procède par focalisation graduelle en prenant en compte le voisinage spatial de chaque pixel est présentée dans [19].

Une étude de l’apport du contexte en segmentation non supervisée d’images dans le cas d’un modèle statistique incluant des classes floues est présentée dans [23].

Une méthode pour la classification supervisée d’objets utilisant la détection floue de frontières au moyen des opérateurs min et max est présentée dans [33].

Un critère pour trouver le nombre optimal de classes dans l’algorithme “FCM” basé sur la séparabilité et la compacité des classes possibles est proposé dans [126].

La théorie des possibilités utilisée avec l’analyse de classes dans le but de sélectionner les variables les plus significatives dans une base de données multidimensionnelles est proposée dans [35].

Une coopération basée sur le seuillage et l’algorithme “FCM” [67] a été proposée dans le but de segmenter des images en couleurs.

Dans [90] l’étude d’une technique de seuillage fondée sur la compacité floue est présentée. Une formulation mathématique qui établit les critères de choix de la fonction d’appartenance dans une fenêtre d’incertitude est présentée dans [85].

Segmentation floue par division et fusion

Dans les approches de segmentation par division et fusion l’image initiale est partitionnée en régions qui peuvent ou non fusionner selon un critère d’homogénéité. En logique floue chaque région est représentée par un ensemble flou. Fusionner deux régions qui satisfassent un critère de similarité donné équivaut à fusionner deux sous-ensembles flous μ_1 et μ_2 c.à.d. à combiner ses fonctions d’appartenance dans une nouvelle fonction au moyen d’un opérateur [103]. Cet opérateur peut être par exemple le max ou alors $1 - (1 - \mu_1) \cdot (1 - \mu_2)$ qui peut être écrit autrement comme $\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2$.

Dans [41] il a été développé un processus de segmentation par croissance de régions utilisant des concepts flous et des procédures de retour arrière (“backtrack”).

Les concepts d'érosion et de dilatation ont été adaptés au cas d'une image définie par la fonction d'appartenance floue μ comme suit :

Définition 63 *L'érosion floue d'un ensemble de fonction d'appartenance μ par un élément structurant binaire B est définie par "fuzzification" à partir des érodés binaires des coupes de hauteur α de μ par B :*

$$I \ominus B = \int_0^1 \inf_{y \in B_x} [\mu_\alpha(y)] d\alpha \quad (2.43)$$

où, pour alléger l'écriture, $\mu_\alpha = \{x \in X | \mu_\alpha(x) = 1\}$.

Le calcul en un point x quelconque de I donne :

$$(I \ominus B)(x) = \inf_{y \in B_x} [\mu(y)]. \quad (2.44)$$

Définition 64 *La dilatation floue d'un ensemble de fonction d'appartenance μ par un élément structurant binaire B est définie par la "fuzzification" de la dilatation binaire, construite à partir de l'ensemble des coupes de hauteur α de μ dilatées par B :*

$$I \oplus B = \int_0^1 \sup_{y \in B_x} [\mu_\alpha(y)] d\alpha \quad (2.45)$$

Le calcul en un point x quelconque de I donne :

$$(I \oplus B)(x) = \sup_{y \in B_x} [\mu(y)]. \quad (2.46)$$

Dans le cas où B est un disque de rayon δ On remplace le degré d'appartenance d'un point x par l'infime (ou par le suprême au si l'opération réalisée est la dilatation) des degrés d'appartenance des points situés à une distance inférieure à δ de x .

D'autres options pour définir la dilatation et l'érosion floues sont proposées dans [17]. Une étude des différentes manières de construire une morphologie mathématique floue est présentée dans [18].

Une technique fondée sur la morphologie mathématique floue ayant pour but la restauration et la récupération de propriétés structurales d'images astronomiques est proposée dans [72].

Extension de la logique floue aux méthodes de classification

Les méthodes de classification non supervisées consistent à partitionner un ensemble d'éléments en un nombre donné de classes en optimisant une fonction objectif. Chaque classe de la partition possède un centre de gravité (prototype de la classe). Dans l'approche floue On calcule les valeurs d'appartenance de chaque élément à chacune des classes itérativement jusqu'à l'optimisation d'un critère. De cette manière chaque élément peut appartenir à plusieurs classes avec un degré plus ou moins fort permettant de conserver longtemps un volume d'information important sans

Des résultats à propos de la concavité et de la convexité dans les ensembles flous sont présentés dans [29] ou [47]. Dans [86] une étude concernant la connexité floue et les fonctions continues dans les images est faite.

Ensembles flous et morphologie mathématique

La morphologie mathématique est connue pour ses relations ensemblistes entre l'ensemble X à analyser (dans notre cas Γ une image) et un élément structurant ¹² B que l'on fait varier selon les besoins de l'analyse. Ces relations sont en effet à la base des opérateurs morphologiques élémentaires que sont l'érosion et la dilatation.

Soit B un élément structurant et I une image. Pour tout point x de l'image I on note B_x la translation de B en x .

Sur une image binaire on peut définir l'érosion et la dilatation comme suit [112] :

Définition 61 *L'érosion de l'image I par le disque B est l'ensemble des points x de I sur lesquels on peut faire coïncider le centre de B quand B est inclus dans I .*

$$I \ominus B = \{x \in I : B_x \subset I\} \quad (2.38)$$

L'opération duale de l'érosion est la dilatation.

Définition 62 *La dilatation d'une image est l'ensemble des points x de I tels que le disque B centré en x a au moins un point en commun avec I .*

$$I \oplus B = \{x \in I : B_x \cap I \neq \emptyset\} \quad (2.39)$$

Considérons Γ pour une image à niveaux de gris $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction image et x un point de \mathbb{N}^2 . L'érosion et la dilatation sont définis comme suit :

$$(I \ominus B)(x) = \min_{y \in B_x} [f(y)] \quad (2.40)$$

$$(I \oplus B)(x) = \max_{y \in B_x} [f(y)] \quad (2.41)$$

$$(2.42)$$

L'érosion et la dilatation d'une image reviennent alors à remplacer chaque point de l'image par le minimum et le maximum respectivement sur une fenêtre centrée sur ce point.

À partir de ces définitions de base de la morphologie mathématique Γ d'autres opérateurs peuvent être définis Γ comme par exemple : l'ouverture et la fermeture. Des techniques de segmentation d'images utilisent ces deux derniers opérateurs [71].

¹²Un élément structurant est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Dans le cas des images, n vaut 2.

Définition 57 La **compacité** d'un ensemble flou μ ayant une surface $\alpha(\mu)$ et un périmètre $p(\mu)$ est définie par :

$$Comp(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{p^2(\mu)} \quad (2.33)$$

Physiquement la compacité est la fraction du maximum de surface occupée par l'objet de périmètre p .

Un algorithme reposant sur la minimisation de la compacité floue qui a pour but de trouver les squelettes flou et non-flou d'une image donnée a été développé dans [89Γ90]. Dans [116] une méthode de seuillage qui utilise la mesure de compacité floue présentée ci-dessus est développée.

Définition 58 La **hauteur** et la **largeur** d'un ensemble flou μ sont ses projections sur des lignes verticale et horizontale respectivement.

$$h(\mu) = \int [\max_x \mu(x, y)] dy \quad (2.34)$$

$$w(\mu) = \int [\max_y \mu(x, y)] dx \quad (2.35)$$

où les intégrales sont calculées sur une région telle que $\mu(x, y) \neq 0$

L'utilisation de disques flous pour la représentation d'images au moyen de leurs axes médians (squelettes) est proposée dans [91].

Connexité dans les ensembles flous

Les opérateurs ensemblistes simples se généralisent aisément au cas des ensembles flous. En revanche il n'en va pas de même pour la connexité. La notion de connexité des ensembles binaires se généralise au cas flou en degré de connexité. Nous présentons ensuite quelques définitions concernant la connexité dans les ensembles flous [100Γ103Γ102]. Ces concepts seront utiles lors de la présentation des pyramides floues au chapitre 5.

Définition 59 Le **degré de connexité** entre deux points P et Q quelconques d'un ensemble flou μ est défini par [103] :

$$C_\mu(P, Q) = \max_{L_{P,Q}} \left[\min_{1 \leq i \leq n} \mu(P_i) \right] \quad (2.36)$$

où $L_{P,Q} = [P_1, \dots, P_n]$ est un chemin de $P = P_1$ à $Q = P_n$ dans X .

Nous disons que P et Q sont connectés dans μ si $C_\mu(P, Q) \geq \min\{\mu(P), \mu(Q)\}$.

La relation entre le coût de connexion Ψ_μ et le degré de connexité C_μ entre deux éléments P et Q de X est représentée par $\Psi_\mu = 1 - C_\mu$ [16].

Définition 60 Dans un ensemble flou μ la **composante connexe floue** associée à un point Q est l'ensemble flou de fonction d'appartenance μ' :

$$\mu'_\mu(Q) = C_\mu(P, Q) \quad \forall P \in X \quad (2.37)$$

$$\gamma_q(X) = \frac{2}{(MN)^{1/2}} \sum_i [(\mu_X(x_i) - \mu_{\bar{X}}(x_i))^2 \cdot f(i)]^{1/2} \quad (2.29)$$

$$HF(X) = \frac{1}{MN \ln 2} \sum_i [S(\mu_X(x_i)) \cdot f(i)] \quad (2.30)$$

Dans les méthodes de segmentation par seuillage le but est de trouver le meilleur seuil permettant d'extraire les objets de l'image. En raisonnant avec la logique floue l'objectif est trouver la valeur seuil qui minimise l'incertitude associée à l'image. Cette incertitude peut être déterminée par un des indices de flou présentés ci-dessus. Dans la section 3.2 nous allons étudier cette technique en détails.

Un algorithme pour seuiller une image fondé sur le concept d'entropie floue et sur le principe de l'entropie maximum étendu est présenté dans [66].

Il est présenté dans [52] un algorithme utilisant un raisonnement flou pour la détection de frontières dans des images en couleur. Une autre méthode de segmentation floue envisageant la détection des frontières est présentée dans [123].

Mesures de divergence floue et probabilités d'événements flous sont utilisées dans [9] pour seuiller une image. Ces algorithmes sont présentés en détails dans la section 3.2.

Géométrie floue

Plusieurs concepts et propriétés géométriques venus de la théorie classique des ensembles ont été généralisés au cas flou dans [100, 101, 103, 107]. Pour simplifier leurs présentations nous noterons la fonction d'appartenance $\mu_X(x_{mn})$ par μ tout simplement.

Considérons que le support de l'ensemble flou en question est borné et que ses sous-ensembles sont constants par morceaux ("piecewise constant set").

Définition 55 La *surface* d'un ensemble flou μ est définie par :

$$\alpha(\mu) = \int \mu \quad (2.31)$$

où l'intégrale est calculée sur une région telle que $\mu \neq 0$. Lorsque μ est constant par morceaux X forme une partition $X = \bigcup_i X_i$ telle que $\forall x \in X_i, \mu(x) = \alpha_i$. Dans ce cas $\alpha(\mu)$ est la somme des surfaces de ces morceaux (régions) où μ a des valeurs constantes pondérées par ces dernières et la frontière entre deux morceaux X_i et X_j est une réunion d'arcs rectifiables A_{ijk} . Le périmètre de μ est alors défini par :

Définition 56 Le *périmètre* d'un ensemble flou μ est défini par :

$$p(\mu) = \sum_{\substack{i, j, k \\ i < j}} |\mu_i - \mu_j| \cdot |A_{ijk}| \quad (2.32)$$

où $|A_{ijk}|$ est la longueur de l'arc joignant les deux régions i et j ayant pour valeurs μ_i et μ_j respectivement.

$$\begin{aligned}
\gamma_l(A) &= \frac{2}{n} d_l(A, \tilde{A}) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)| \\
&= \frac{2}{n} \sum_{x \in X} \mu_{A \cap \tilde{A}}(x) \tag{2.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_q(A) &= \frac{2}{n^{1/2}} d_q(A, \tilde{A}) \\
&= \frac{2}{n^{1/2}} \sum_{x \in X} [(\mu_A(x) - \mu_{\tilde{A}}(x))^2]^{1/2} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Pour évaluer l'ambiguïté associée à un ensemble flou il est aussi possible d'utiliser la mesure d'information classique d'entropie adaptée au cas flou¹⁰. L'incertitude¹¹ de nature floue (et non plus de nature aléatoire comme en (2.3)) dans un ensemble flou A peut être mesurée par [34] :

$$\begin{aligned}
HF(A) &= \frac{1}{n \ln 2} \sum_{x \in A} S(\mu_A(x)) \\
&= -\frac{1}{n \ln 2} \sum_{x \in A} [\mu_A(x) \ln \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x)) \ln(1 - \mu_A(x))] \tag{2.24}
\end{aligned}$$

où S est appelée la fonction de Shannon.

Dans le cas d'une image X de dimensions $M \times N$ ces fonctions se traduisent par :

$$\gamma_l(X) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \mu_{X \cap \tilde{X}}(x_{mn}) \tag{2.25}$$

$$\gamma_q(X) = \frac{2}{(MN)^{1/2}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(\mu_X(x_{mn}) - \mu_{\tilde{X}}(x_{mn}))^2]^{1/2} \tag{2.26}$$

$$HF(X) = \frac{1}{MN \ln 2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N S(\mu_X(x_{mn})) \tag{2.27}$$

Soit f la fonction qui associe à chaque niveau de gris i ($0 \leq i \leq M$) le nombre d'occurrences $f(i)$ du niveau i (définition 1) les mesures floues (2.25) (2.26) et (2.27) peuvent s'écrire comme suit :

$$\gamma_l(X) = \frac{2}{MN} \sum_i [\mu_{X \cap \tilde{X}}(x_i) \cdot f(i)] \tag{2.28}$$

¹⁰L'entropie floue peut avoir une interprétation complètement différente de l'entropie classique, car elle n'est fondée sur aucun concept probabilistique.

¹¹L'incertitude peut être aussi interprétée comme la quantité d'information obtenue, conformément à ce qui a été dit dans la section 2.2.2.

En logique floue Γ où un élément peut appartenir à plusieurs classes en même temps la condition 2 (page 7) référente à la partition d'une image X en régions X_i n'est pas en général vérifiée.

Indices de flou appliqués aux méthodes de seuillage

Soit une image X de dimensions $M \times N$ représentée sur L niveaux de gris notée :

$$X = \mu_X(x_{mn}) = \sum_{m \in M} \sum_{n \in N} \mu_{mn}/x_{mn} \quad (2.17)$$

où $\mu_X(x_{mn}) \in [0, 1]$ représente le degré de brillance du pixel (m, n) d'intensité x_{mn} . Pour évaluer l'ambiguïté associée aux niveaux de gris présents dans l'image X par la valeur d'un indice de flou plusieurs mesures existent. Ces mesures prennent en compte la distance entre l'ensemble flou X et l'ensemble ordinaire \tilde{X} le plus proche. Cet ensemble ordinaire est tel que :

$$\mu_{\tilde{X}}(x_{mn}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_X(x_{mn}) \geq 0.5 \\ 0 & \text{si } \mu_X(x_{mn}) < 0.5 \end{cases} \quad (2.18)$$

Définition 52 *L'indice de flou d'un ensemble A ayant n points est défini comme suit [55] :*

$$\gamma(A) = \frac{2}{n^k} d(A, \tilde{A}) \quad (2.19)$$

où $d(A, \tilde{A})$ est la distance entre A et le sous-ensemble ordinaire \tilde{A} le plus proche. \tilde{A} est donné par l'équation (2.18), et k est une constante positive de normalisation dont la valeur dépend du type de distance utilisée.

Définition 53 *La distance euclidienne entre deux ensembles flous μ_1 et μ_2 sur X est définie par [55] :*

$$d_l(\mu_1, \mu_2) = \sum_{x \in X} |\mu_1(x) - \mu_2(x)| \quad (2.20)$$

Définition 54 *La distance quadratique entre deux ensembles flous μ_1 et μ_2 sur X est définie par [55] :*

$$d_q(\mu_1, \mu_2) = \left[\sum_{x \in X} (\mu_1(x) - \mu_2(x))^2 \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

D'autres distances sont proposées dans [105Γ102].

Plusieurs indices de flou ont été développés selon plusieurs distances existantes. La distance Euclidienne (définition 53) équivaut à utiliser $k = 0.5$ dans l'équation (2.19) et la distance quadratique (définition 54) équivaut à utiliser $k = 1$. Les indices de flou d'un ensemble A correspondant à ces distances sont l'indice de flou linéaire $\gamma_l(A)$ et l'indice de flou quadratique $\gamma_q(A)$ qui s'écrivent :

Définition 51 Pour toute valeur $\alpha \in [0, 1]$ le **sous-ensemble de niveau** α , A_α ⁹ d'un ensemble flou A de X est l'ensemble $\{x \in X \text{ tel que } \mu_A(x) \geq \alpha\}$, de fonction caractéristique :

$$\chi_{A_\alpha} = 1 \text{ si et seulement si } \mu_A(x) \geq \alpha \quad (2.16)$$

À partir de l'ensemble flou A de l'exemple 7 on peut construire : $A_{0.5} = \{20, 60\}$ ou $A_{0.4} = \{20, 40, 60\}$.

Nous pouvons remarquer que pour $\alpha = 0$ on a toujours $A_0 = X$ et pour $\alpha = 1$ $A_1 = \text{noy}(A)$.

Si A et B sont deux ensembles flous les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$;
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$;
- si $A \subseteq B$ alors $A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

2.4.4 D'autres outils flous

En fait le développement de la logique floue va beaucoup plus loin que les quelques éléments présentés. Nous pouvons citer encore sans être exhaustifs : les opérations algébriques sur ensembles flous le principe d'extension les relations floues la théorie des possibilités les variables linguistiques et les propositions floues.

2.4.5 Logique floue en segmentation d'images

Nous pouvons trouver l'incertitude et l'imprécision à tous les niveaux d'un système de traitement d'analyse et d'interprétation d'images. Ce genre d'information "incomplète" peut être présente soit au niveau de l'image bidimensionnelle formée à partir de la projection d'une scène réelle à trois dimensions soit au niveau de la précision et de la manipulation des instruments qui sont toujours sujets à des erreurs. Sans vouloir être exhaustifs nous pouvons aussi dire que lorsqu'il faut porter un jugement sur un résultat ce jugement étant souvent subjectif l'incertitude est présente.

Avoir un modèle mathématique qui sache appréhender ce genre d'information incertaine et imprécise à un niveau quelconque d'un système de vision qui puisse contrôler sa propagation et pouvoir en tirer profit aux niveaux suivants peut être alors intéressant. En pensant de cette manière plusieurs auteurs ont essayé de créer les moyens nécessaires à l'application de la logique floue en analyse d'images. Une discussion à propos de l'état de l'art des méthodologies et des algorithmes qui utilisent la logique floue dans le domaine de la reconnaissance des formes est présentée dans [93]. Nous nous intéressons surtout aux applications concernant la segmentation d'images.

⁹Ce sous-ensemble est aussi connu comme α -coupe.

Il est possible de définir ces opérations autrement qu'au moyen des opérateurs "max" "min" et de la complémentation à 1 mais ce choix se justifie par le fait qu'il préserve toute la structure de la théorie classique des ensembles. Voici des propriétés classiques préservées lorsqu'on considère les ensembles A , B et C flous :

- commutativité: $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$;
- associativité: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- distributivité: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup X = X$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap X = A$;
- $A \cup B \supseteq A \supseteq A \cap B$;
- $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$;
- $|A| + |\bar{A}| = |X|$;
- $\overline{\bar{A}} = A$;
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Voici des propriétés classiques qui ne se vérifient pas toujours quand on travaille avec des ensembles flous :

- $\bar{A} \cap A = \emptyset$;
- $\bar{A} \cup A = X$.

Exemple 7 Soit $A = 1/20 + 0.3/30 + 0.4/40$ et $B = 0.3/30 + 0.6/60$ deux ensembles flous définis sur $X = \{20, 30, 40, 50, 60\}$. Les opérations définies dans cette section nous donnent comme résultat: $A \cup B = 1/20 + 0.3/30 + 0.4/40 + 0.6/60$, $A \cap B = 0.3/30$, $\bar{A} = 0.7/30 + 0.6/40 + 1/50 + 1/60$; $\bar{B} = 1/20 + 0.7/30 + 1/40 + 1/50 + 0.4/60$.

2.4.3 Les α -coupes des ensembles flous

Il peut être intéressant de se référer à des ensembles ordinaires comme une approximation classique à un ensemble flou donné surtout pour la prise de décision lorsqu'on est obligé de faire de la "defuzzification". La manière la plus simple de faire cela est de fixer un seuil α dans l'ensemble flou A de manière à accepter seulement les éléments qui possèdent un degré d'appartenance à A supérieur ou égal à α .

Après cette vision de base de la théorie des ensembles flous on va présenter avec rigueur quelques uns de ses éléments méthodologiques. Commençons par ses opérations ensemblistes.

2.4.2 Opérations sur les ensembles flous

Pour pouvoir manipuler les ensembles flous il a fallu généraliser les opérations ensemblistes classiques. Considérons pour les prochaines définitions proposées dans [127] que A et B sont deux ensembles flous définis dans X .

Définition 46 A et B sont *égaux* si

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (2.11)$$

Définition 47 Le *complément* A^c (ou \bar{A}) de A par rapport à X est défini par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X \quad (2.12)$$

Définition 48 A est *inclus* dans B si et seulement si

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X \quad (2.13)$$

Définition 49 L'*union* de A et B est l'ensemble flou ayant la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X \quad (2.14)$$

Définition 50 L'*intersection* de A et B est l'ensemble flou ayant la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X \quad (2.15)$$

Il semble être naturel de dire que deux ensembles flous sont égaux si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout point de X (voir définition 46). La complémentation (définition 47) comme elle a été présentée semble aussi être naturelle. Essayons maintenant d'interpréter l'inclusion (définition 48) l'union (définition 49) et l'intersection (définition 50) comme elles ont été définies.

La définition 48 nous dit que chaque élément qui appartient à A étant inclus dans B appartient à B au moins de la même façon qu'il appartient à A . Tout d'abord un élément $x \in X$ appartient à $A \cup B$ s'il appartient à A ou à B . Pour que cet élément x appartienne à $A \cap B$ il faut qu'il soit dans A et B . En définissant l'union comme le "max" on détecte le plus petit ensemble flou qui contient A et B . En définissant l'intersection comme le "min" on détecte le plus grand ensemble flou qui est contenu dans A et B . De cette façon un ensemble flou qui contient A et B contient $A \cup B$ qui à son tour contient $A \cap B$.

Voici la notation normalement adoptée pour représenter le sous-ensemble flou A de X :

$$\begin{aligned} A &= \int_X \mu_A(x)/x \text{ si } A \text{ est infini} \\ A &= \sum_{x \in X} \mu_A(x)/x \text{ si } A \text{ est fini} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le symbole “+” dans la représentation d’un ensemble flou A fini dénote l’opération union.

Il existe plusieurs définitions qui servent à mieux décrire un ensemble flou en fonction de ses caractéristiques. Nous allons les présenter maintenant. Pour cela considérons A un sous-ensemble flou de l’ensemble de référence X et μ_A sa fonction d’appartenance.

Définition 41 Le **support** $\text{supp}(A)$ de A est le sous-ensemble classique de X tel que ses éléments appartiennent au moins un peu à A .

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.7)$$

Définition 42 La **hauteur** $h(A)$ de A est le degré le plus fort avec lequel un élément de X appartient à A .

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (2.8)$$

Définition 43 A est dit **normalisé** s’il existe au moins un élément de X qui lui appartienne de façon absolue (c.à.d. avec un degré d’appartenance égal à 1). Par conséquent, A est normalisé si sa hauteur est égale à 1.

Définition 44 Le **noyau** $\text{noy}(A)$ de A est composé par tous les éléments de X qui appartiennent à A de façon absolue.

$$\text{noy}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (2.9)$$

Définition 45 Lorsque X est fini, on définit la **cardinalité** $|A|$ de A comme étant le degré global avec lequel les éléments de X appartiennent à A .

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \quad (2.10)$$

Exemple 6 Soit $X_1 = \{20, 30, 40\}$, $X_2 = \{30, 60, 90\}$ et A défini dans X_1 et X_2 en utilisant :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 25 \\ 0 & \text{si } x \geq 70 \\ x/100 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $A = 1/20 + 0.3/30 + 0.4/40$ si l’ensemble de référence est X_1 et $A = 0.3/30 + 0.6/60 + 0/90 = 0.3/30 + 0.6/60$ si l’ensemble de référence utilisé est X_2 . Dans le premier cas on a $\text{supp}(A) = X_1$, $|A| = 1.7$ et A est normalisé. Dans le deuxième cas, $h(A) = 0.6$, $\text{supp}(A) = \{30, 60\}$ et $|A| = 0.9$. Remarquons que $\text{noy}(A) = \emptyset$ par rapport à X_2 et $\text{noy}(A) = \{20\}$ par rapport à X_1 .

similaires.

Les informations qu'on reçoit peuvent être aussi entachées d'une certaine **incertitude**. Voici des phrases qui sont entachées d'incertitude : M. Dubu qui n'a que 46 ans "ne doit pas" encore être à la retraite. "Il est possible" qu'il neige puisque la température est descendue vers zéro degré.

Les incertitudes font aussi partie du monde scientifique ; par exemple lorsqu'on dit "il est fort probable que les cellules rentrent en mitose dans une demi-heure".

Il n'est pas difficile de trouver une situation attachée d'incertitude et d'imprécision en même temps. Pour cela il suffit de dire "il est possible que nous ayons un léger retard". Qu'est-ce que c'est un léger retard ? Quelle est la possibilité de produire ce retard ? Remarquons que la dernière question ne porte pas sur la probabilité d'un léger retard mais sur sa possibilité.

L'être humain est habitué à utiliser des informations entachées d'incertitude et d'imprécision dans la vie de tous les jours. Il utilise ces informations incomplètes et raisonne avec elles et prend des décisions. Dans le domaine scientifique il a été nécessaire de créer une logique que admette des valeurs de vérité en dehors de l'ensemble $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$ pour pouvoir tenir compte et manipuler ce genre d'information incomplète.

Contrairement à la logique classique les logiques multivalentes permettent de manipuler d'autres valeurs de vérité que le "vrai" et le "faux" absolus.

L'incertain a été abordé par la notion de probabilité dès le *XVII^e* siècle mais celle-ci ne permet pas de traiter des croyances subjectives et dans certains cas il est aussi naturel à l'homme de traiter des données affectées d'incertitude que d'utiliser des critères subjectifs donc imprécis.

Lukasiewicz propose en 1920 une logique ayant les trois valeurs de vérité suivantes : "vrai" "faux" et "doute". Ces valeurs qui étaient représentées par l'ensemble $\{0, 1, 0.5\}$ ont été ensuite étendues à l'intervalle $[0, 1]$.

Néanmoins c'est Zadeh [127] qui à partir de l'idée d'appartenance partielle d'un élément à plusieurs classes a formellement introduit en 1965 la logique floue.

Cette logique permet de modéliser les connaissances incertaines et imprécises à travers les ensembles flous. Voyons maintenant les concepts de base de la théorie des ensembles flous.

2.4.1 La théorie des ensembles flous

Définition 40 *Étant donné un ensemble de référence X , un **sous-ensemble flou** A de X est défini par une **fonction d'appartenance** μ_A qui associe à chaque élément x de X , son degré d'appartenance $\mu_A(x)$ à A , compris entre 0 et 1 :*

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]. \quad (2.5)$$

Le sous-ensemble flou A est un sous-ensemble classique de X lorsque μ_A ne prend que des valeurs 0 et 1. Plus $\mu_A(x)$ tend vers 1 plus x appartient à A .

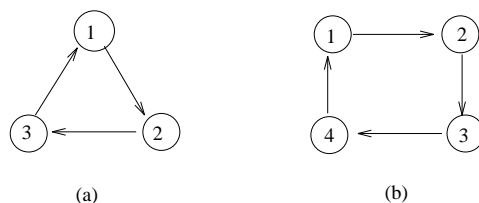


FIG. 2.9 - (a) Graphe sans noyau et (b) graphe avec deux noyaux ($\{1\}$ ou $\{2\}$).

2.3.4 Les graphes en analyse d'images

Les graphes jouent un rôle important dans le contexte du processus d'analyse d'images. Ils sont utilisés pour la représentation topologique de la scène étudiée. Dans ce cas les sommets correspondent aux régions dans la scène et les arêtes décrivent les relations de voisinage entre ces régions. En outre des relations de similarité entre des régions voisines peuvent être représentées par la simple pondération des arêtes.

Les graphes de Delaunay de Gabriel de voisinage relatif et de Voronoï peuvent être utilisés pour représenter des images (voir par exemple [27, 45]) comme cela a déjà été mentionné dans la section 2.1.3.

Les forts liens entre la morphologie mathématique⁸ et les graphes sont présentés dans [45], [120], [121] ou [122]. L'érosion et la dilatation les deux opérateurs de base de la morphologie mathématique seront utilisés dans le chapitre 3 pour améliorer les résultats obtenus à partir du seuillage des images étudiées.

Le chapitre 4 est dédié à la segmentation d'images par des approches pyramidales. Dans ces approches l'image est représentée par un graphe qui peu à peu se contracte à l'aide du choix d'un ensemble de sommets survivants. Les relations entre deux niveaux successifs de la pyramide sont représentées à travers un graphe biparti. Pour optimiser ce processus de contraction il est possible d'utiliser l'arbre de poids minimum défini sur le graphe représentant l'image [75]. Une nouvelle technique utilisant cette fois-ci la structure d'un graphe flou est proposée dans le chapitre 5 pour donner plus de souplesse à l'algorithme de segmentation basé sur la structure pyramidale.

2.4 La logique floue

Dans la vie de tous les jours nous nous trouvons dans des situations où les informations dont nous disposons ne sont pas toujours précises. Un exemple de cette **imprécision** qui peut nous arriver assez souvent c'est quand quelqu'un nous dit "je vais rentrer tard ce soir". Une autre situation imprécise peut être remarquée dans une simple conversation où une personne dit qu'elle n'a pas payé "trop cher" pour un livre de cuisine.

Des imprécisions peuvent être aussi vues dans le domaine de la science ; par exemple lorsqu'on veut établir une valeur qui caractérise combien deux formes sont

⁸Les notions de base de la morphologie mathématique sont présentées dans la section 2.4.5.

dominant minimum car la cardinalité de S_4 est supérieure à celles de S_3 et de $S_5 = \{1, 6, 7\}$. Ce dernier Γ montré dans la figure 2.8(f) est un ensemble *dominant minimum* et un *stable maximal*.

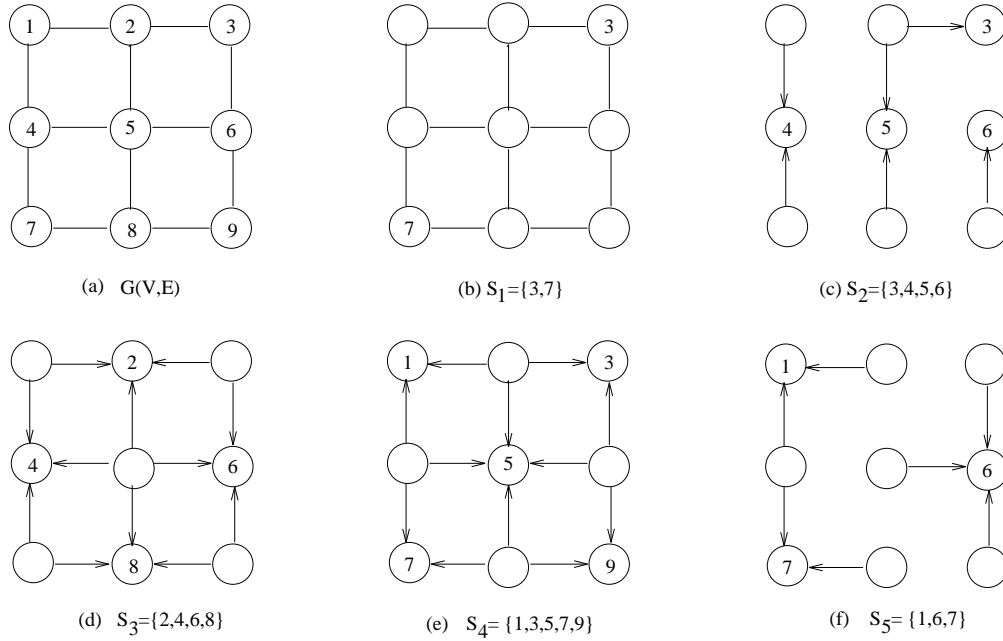


FIG. 2.8 - (a) Un graphe Γ (b) un ensemble stable $S_1 = \{3, 7\}$ (c) un ensemble dominant $S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ (d) un ensemble dominant minimal $S_3 = \{2, 4, 6, 8\}$ qui est aussi un ensemble stable maximal (e) un ensemble dominant $S_4 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ qui est aussi un ensemble stable maximum et (f) un ensemble dominant minimum $S_5 = \{1, 6, 7\}$ qui est aussi un ensemble stable maximal.

Définition 39 *Étant donné un graphe orienté $G(V, U)$ on dit que l'ensemble $N \subseteq V$ est un **noyau** si N est à la fois stable et absorbant; on a donc;*

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \cap N &= \emptyset \quad \forall x \in N \quad (\text{Stable}) \\ \Gamma^+(x) \cap N &\neq \emptyset \quad \forall x \in X \setminus N \quad (\text{Absorbant}) \end{aligned}$$

Voici quelques propriétés à propos des noyaux dont les preuves peuvent être trouvées dans [3];

P1 Si N est un noyau Γ c'est aussi un *ensemble stable maximum* et un *ensemble absorbant minimum*;

P2 $G(V, A)$ sans circuit admet un noyau; en outre Γ ce noyau est unique;

P3 $G(V, A)$ sans circuit d'ordre impair admet un noyau (pas nécessairement unique).

Ces propriétés nous montrent que tous les graphes ne possèdent pas de noyaux Γ comme celui de la figure 2.9(a) Γ ou alors Γ il peut arriver qu'un noyau ne soit pas unique Γ comme dans la figure 2.9(b).

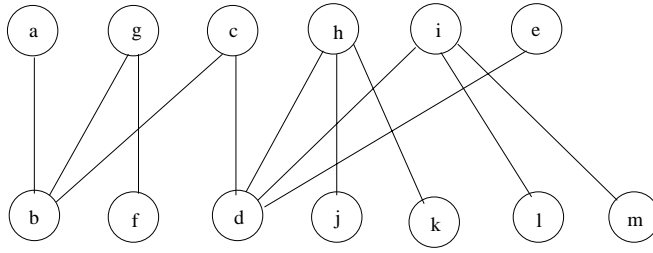


FIG. 2.7 - Le même arbre que celui de la figure 2.6(a) représenté autrement.

Définition 37 Un ensemble S de sommets d'un graphe $G(V, U)$ est **absorbant** si

$$\Gamma^+(x) \cap S \neq \emptyset \quad \forall x \in X \setminus S.$$

Définition 38 Étant donné un graphe $G(X, E)$ et une propriété \mathcal{P} sur un sous-ensemble S des sommets de X ou de arêtes de E , nous disons que :

- (a) S est **minimal** par rapport à \mathcal{P} si, quel que soit l'élément que l'on enlève, \mathcal{P} n'est plus vérifié; autrement dit, si S ne possède aucun sous-ensemble propre qui vérifie \mathcal{P} .
- (b) S est **maximal** par rapport à \mathcal{P} si, quel que soit l'élément de $X \setminus S$ que l'on rajoute, \mathcal{P} n'est plus vérifié; autrement dit, si S n'est pas un sous-ensemble propre d'un ensemble qui vérifie \mathcal{P} .
- (c) S est **minimum** par rapport à \mathcal{P} s'il est de cardinalité minimale parmi les sous-ensembles minimaux qui vérifient \mathcal{P} .
- (d) S est **maximum** par rapport à \mathcal{P} s'il est de cardinalité maximale parmi les sous-ensembles maximaux qui vérifient \mathcal{P} .

Les figures 2.8(a-f) illustrent ces principes. À partir du graphe $G(V, E)$ de la figure 2.8(a) on obtient $S_1 = \{3, 7\}$ (montré dans la figure 2.8(b)) qui représente un ensemble *stable* et $S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ (montré dans la figure 2.8(c)) qui représente un ensemble *dominant* (les flèches ont le seul objectif de montrer les relations de dominance). Remarquons que S_1 n'est pas un stable maximal car les sommets 1 et 9 peuvent être rajoutés à S_1 sans casser sa stabilité. S_1 n'est pas non plus un ensemble dominant car ces mêmes sommets 1 et 9 ne sont voisins ni du sommet 3 ni du sommet 7. S_2 n'est pas un ensemble dominant minimal car l'on peut enlever le sommet 3 et il reste encore dominant. On définit $S_3 = \{2, 4, 6, 8\}$ (figure 2.8(d)) qui est un ensemble *dominant minimal* et *stable* simultanément. Il est alors un *stable maximal* dans $G(V, E)$ (car il n'est pas possible d'y mettre un autre élément sans casser sa condition de stabilité) mais pas forcément un stable maximum. L'ensemble *stable maximum* est $S_4 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (voir figure 2.8(e)) qui à son tour est un ensemble *dominant minimal* (car il n'est pas possible d'enlever un de ses éléments sans casser sa condition de dominance) mais pas un ensemble

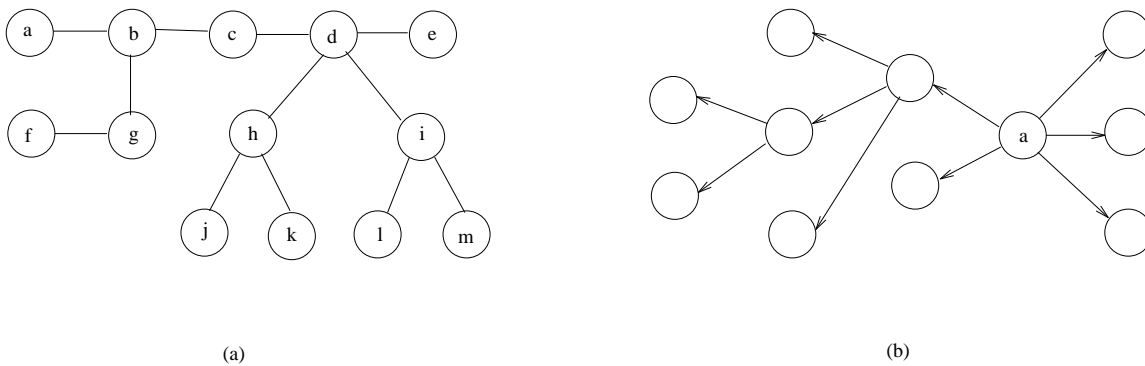


FIG. 2.6 - (a) Un arbre et (b) une arborescence de racine “a”.

Définition 32 Étant donné un graphe $G(X,E)$, un **transversal** est un sous-ensemble de sommets $X' \subseteq X$ tel que chaque arête de E est adjacente à au moins un sommet de X' .

Les arêtes (a,b) , (f,g) et (i,m) du graphe de la figure 2.6(a) forment un couplage dans ce graphe. Un transversal dans ce même graphe est celui formé par les sommets b , d , g , h et i .

Définition 33 S est un **ensemble dominant** dans $G(V,E)$ si chaque sommet de $V \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet de S , c.à.d. si chaque sommet qui n'appartient pas à S possède au moins un voisin dans S .

$$\Gamma(x) \cap S \neq \emptyset \quad \forall x \in V \setminus S.$$

Un ensemble dominant est aussi appelé une couverture des sommets par des sommets.

Définition 34 Un ensemble S de sommets d'un graphe $G(V,E)$ est un **stable** si les sommets de S sont deux à deux non adjacents dans $G(V,E)$.

$$\Gamma(x) \cap S = \emptyset \quad \forall x \in S.$$

Théorème 3 X' est un stable du graphe $G(X,E)$ si et seulement si $V \setminus X'$ est un transversal.

Définition 35 Un graphe $G(X \cup Y, E)$ est dit **biparti** si l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux classes X et Y de telle sorte que chaque arête ait une de ses extrémités dans une classe et l'autre extrémité dans l'autre.

Les arbres sont des graphes bipartis. L'arbre de la figure 2.6(a) peut être représenté autrement (voir figure 2.7) de manière à ce que les ensembles X et Y soient plus facilement visualisés. Dans cet exemple on a $X = \{a, g, c, h, i, e\}$ et $Y = \{b, f, d, j, k, l, m\}$ ou *vice versa*.

La définition de graphe biparti peut être généralisée comme suit :

Définition 36 Un graphe est dit **k-parti** (ou **multiparti**) si son ensemble de sommets admet une partition en k stables.

fortement connexes ⁷ et il existe un arc entre deux composantes fortement connexes si et seulement si il existe au moins un arc entre un sommet d'une composante et un sommet de l'autre composante.

2.3.3 Structures définies dans les graphes

Définition 28 Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycle.

Théorème 2 Dans un graphe G ayant $m \geq 2$ sommets, les propriétés suivantes sont équivalentes et caractérisent un **arbre** (voir la démonstration dans [109]);

- (i) G est connexe et sans cycle.
- (ii) G est connexe et minimal pour cette propriété.
- (iii) G est connexe et possède $m-1$ arêtes.
- (iv) G est sans cycle et maximal pour cette propriété.
- (v) G est sans cycle et possède $m-1$ arêtes.
- (vi) Il existe dans G une chaîne et une seule joignant tout couple de sommets.

Si les arêtes d'un graphe sont pondérées l'**arbre de poids minimum** dans ce graphe est le graphe partiel de G qui est un arbre pour lequel la somme des poids des arêtes est minimum. L'arbre de poids minimum peut être trouvé au moyen d'un algorithme glouton : tout d'abord on ordonne les arêtes par poids décroissants puis on doit parcourir cette liste. Si l'inclusion d'une arête forme un cycle dans le graphe partiel à déterminer elle n'est pas acceptée dans le cas contraire elle l'est. L'ensemble des arêtes retenues forme un arbre qui aura un poids minimal. Le même processus peut être utilisé pour obtenir l'arbre de poids maximum il suffit de changer le signe des poids des arêtes.

Définition 29 Un sommet " a " d'un graphe est une **racine** s'il existe dans G un chemin joignant " a " à x , pour tout $x \in X$.

Définition 30 Un graphe G ayant deux arcs ou plus est une **arborescence de racine " a "** si " a " est une racine de G et si G est un arbre.

Remarquons que le concept d'arborescence est essentiellement orienté car la notion de racine est utilisée dans sa définition. De là nous pouvons conclure que toute arborescence est un arbre mais l'inverse n'est pas toujours vrai. La figure 2.6 montre un arbre et une arborescence de racine " a " (qui est aussi un arbre).

Définition 31 Étant donné un graphe $G(X, E)$ simple, un **couplage** est un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ tel que deux arêtes quelconques de E' ne sont pas adjacentes.

⁷La notion de composante fortement connexe est similaire à celle de composante connexe à la différence que l'on associe des arcs et non des arêtes

La relation

$$x \mathfrak{R} y \iff \text{soit } x=y \text{ soit il existe une chaîne joignant } x \text{ et } y$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Définition 23 Les partitions de X en X_1, X_2, \dots, X_p induites par \mathfrak{R} forment les **composantes connexes** de G . G est dit **connexe** si $p=1$.

Définition 24 Un **point d'articulation** d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Exemple 5 Le graphe de la figure 2.5(a) est connexe. En supprimant le sommet b cette propriété n'est plus vérifiée car il passe de une à trois composantes connexes. Ce graphe (sans le sommet b) possédant trois composantes connexes est montré dans la figure 2.5(b). On peut remarquer que si à la place du sommet b on avait supprimé soit le sommet a , soit le sommet c , le nombre de composantes connexes aurait augmenté d'une unité.

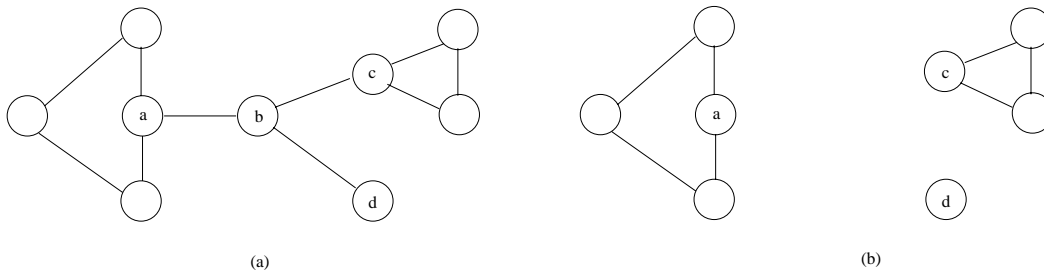


FIG. 2.5 - (a) Un graphe connexe et (b) un graphe avec trois composantes connexes.

Définition 25 Soit G un graphe planaire connexe, le **dual** G^* de G est le graphe où chaque sommet x^* correspond à la face x dans G et chaque arête e^* reliant les sommets x^* et y^* correspond à l'arête commune aux faces x et y dans G .

Définition 26 Un graphe G/Y **contracté** de $G(X, E)$ par rapport à $Y \subset X$ est le graphe $G(X - Y + \{y\}, -)$ où le sous-ensemble de sommets Y de X est remplacé par le seul sommet y et les arêtes sont de la forme :

- (i, j) si $i \in X - Y, j \in X - y$ et $(i, j) \in E$;
- (i, y) si $i \in X - Y$ et s'il existe $j \in Y$ tel que $(i, j) \in E$.

L'opération de contraction de graphes sera utilisée dans le chapitre 4 lors de la présentation des techniques de segmentation basées sur les pyramides irrégulières.

Définition 27 On appelle graphe **réduit** de G , le quotient du graphe G par la relation de forte-connexité $G_r = G/\mathcal{R}$. Les sommets de G_r sont les composantes

Néanmoins si on analyse les degrés de ces mêmes sommets, mais dans le graphe non orienté de la figure 2.3(c), ça change ; $d_G(1) = d_G(4) = 2$ et $d_G(2) = d_G(3) = 3$.

Le sommet 4 du graphe de la figure 2.4(a) possède $\Gamma_G^+(4) = \{1, 2, 3\}$ et $\Gamma_G^-(4) = \{1, 2, 5\}$. Les voisins du sommet 1 dans ce même graphe sont $\Gamma_G(1) = \{2, 4\}$. Le 2-voisinage de ce sommet est $\Gamma_G^2(1) = \{2, 3, 4, 5\}$.

Définition 18 Un **sous-graphe** $G(X', E')$ de $G(X, E)$ est un graphe pour lequel $X' \subset X$ et $E' \subset E$ est composé par les arêtes de E qui possèdent les deux extrémités dans X' .

Définition 19 Un **graphe partiel** $G(X, E')$ de $G(X, E)$ est un graphe pour lequel $E' \subset E$.

Exemple 4 (Gondran et Minoux [42]) Si G est le graphe représentant les routes de France, celui qui représente les routes de Bretagne est un sous-graphe et celui qui représente les routes nationales de France est un graphe partiel. Celui qui représente alors les routes nationales de Bretagne est un sous-graphe partiel.

Définition 20 Le **complémentaire** du graphe $G(X', E')$ en relation au graphe $G(X, E)$ est le graphe $G(X'', E'')$ tel que $E'' = E \setminus E'$ ⁵ et V'' contient seulement les sommets auxquels les arêtes de E'' sont incidentes.

Normalement lorsqu'on parle du complémentaire G'' d'un graphe G' et on ne dit pas quel est le graphe G on suppose que G est un graphe complet.

Définition 21 Un graphe G est dit **planaire** s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts et les arêtes des courbes simples qui ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.

Comme exemples de graphes planaires nous pouvons citer les arbres les arborescences (figures 2.6(a et b)) et les graphes complets ayant au plus 4 sommets.

Théorème 1 (Kuratowski-1930) Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucun sous-graphe isomorphe⁶ aux subdivisions du graphe complet à 5 sommets (K_5) ou au graphe biparti complet sur deux groupes de 3 sommets ($K_{3,3}$).

Définition 22 Un graphe G est dit **connexe** si, pour tout couple de sommets x et y dans G , soit $x=y$, soit il existe une chaîne joignant x et y .

⁵Si A et B sont deux ensembles, $A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B .

⁶Deux graphes $G(X, E)$ et $G(X', E')$ sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection entre chaque sommet x de X et x' de X' telle que l'arête (x', y') existe dans $G(X', E')$ si et seulement si l'arête (x, y) existe dans $G(X, E)$.

$[(2\mathbb{A})(4\mathbb{B})(1\mathbb{C})(2\mathbb{A})(4\mathbb{B})]$ car l'arc $(2\mathbb{A})$ se répète. Si on veut transformer l'un des ces trois chemins en un circuit il suffit d'y rajouter l'arc $(3\mathbb{C})$ puisqu'il appartient à U .

Dans la figure 2.3(b) il existent plusieurs chaînes reliant les sommets 1 et 4 par exemple ; $[(1\mathbb{C})(2\mathbb{B})(3\mathbb{A})][(1\mathbb{C})(2\mathbb{A})]$ ou $[(1\mathbb{C})(2\mathbb{B})(3\mathbb{C})(1\mathbb{C})(2\mathbb{A})]$. Les deux premières sont élémentaires (et par conséquent simples) ; quant à la troisième elle n'est ni simple ni élémentaire. Remarquons que la troisième chaîne présentée contient déjà un cycle ; $[(2\mathbb{B})(3\mathbb{C})(1\mathbb{C})]$. C'est un cycle élémentaire.

Définition 15 *A tout sommet x du graphe G on associe :*

- (a) Le **degré sortant** (demi-degré extérieur) de x ; $d_G^+(x) = |\{u \in U \text{ tel que } x \text{ est l'extrémité initiale de } u\}|$ ⁴ où U est l'ensemble d'arcs de G ;
- (b) Le **degré entrant** (demi-degré intérieur) de x ; $d_G^-(x) = |\{u \in U \text{ tel que } x \text{ est l'extrémité terminale de } u\}|$ où U est l'ensemble d'arcs de G ;
- (c) Le **degré** de x ; $d_G(x) = d_G^+(x) + d_G^-(x)$;
- (d) Le **degré** de x dans un **graphe non orienté** ; $d_G(x) = |\{e \in E \text{ tel que } x \text{ est l'une des extrémités de } e\}|$ où E est l'ensemble d'arêtes de G .

Définition 16 *A tout sommet x du graphe G on associe :*

- (a) L'ensemble des **successeurs** $\Gamma_G^+(x) = \{y \in X : (x, y) \in U\}$;
- (b) L'ensemble des **prédécesseurs** $\Gamma_G^-(x) = \{y \in X : (y, x) \in U\}$;
- (c) L'ensemble des **voisins** $\Gamma_G(x) = \{y \in X : (x, y) \in E\}$;

Définition 17 *Un sommet y appartient au δ -voisinage d'un sommet x dans un graphe $G(X, E)$ si $x \neq y$ et s'il existe un chemin entre x et y de longueur inférieure ou égale à δ , c.à-d. ;*

$$\text{dist}(x, y) \leq \delta \tag{2.4}$$

Exemple 3 *Les sommets du graphe de la figure 2.3(b) possèdent les degrés suivants ;*

$$d_G^+(1) = 2, d_G^-(1) = 2 \text{ et } d_G(1) = 4 ;$$

$$d_G^+(2) = 3, d_G^-(2) = 3 \text{ et } d_G(2) = 6 ;$$

$$d_G^+(3) = 3, d_G^-(3) = 3 \text{ et } d_G(3) = 6 ;$$

$$d_G^+(4) = 2, d_G^-(4) = 2 \text{ et } d_G(4) = 4.$$

⁴où $|M|$ désigne le cardinal de M .

Définition 10 *Un sous-ensemble de sommets $K \subseteq X$ dans un graphe $G(X,E)$ tel que deux sommets quelconques de K sont reliés par une arête est appelé une **clique**.*

Les sommets 1, 2 et 3 du graphe de la figure 2.3(c) forment une clique notée K_3 .

Définition 11 (a) *Un **chemin** de longueur q dans un graphe $G(X,U)$ est une séquence d'arcs $[(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{q-1}, x_q)]$ telle que l'extrémité initiale du premier arc de la séquence est x_1 , l'extrémité initiale de chacun des autres arcs de la séquence coïncide avec l'extrémité terminale de l'arc précédent et finalement, l'extrémité terminale du dernier arc de la séquence est x_q .*

(b) *Une **chaîne** de longueur q dans un graphe $G(X,E)$ non orienté est une séquence d'arêtes $[(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{q-1}, x_q)]$ telle que l'une des extrémités de la première arête est x_1 , chaque arête est liée à l'arête précédente par une extrémité et à l'autre arête de la séquence par l'autre extrémité, de manière que x_q soit lié à la dernière arête de la séquence.*

Définition 12 (a) *Un **chemin** est dit **simple** si la séquence d'arcs qui le constitue ne comporte pas plusieurs fois le même élément.*

(b) *Un **chemin** est dit **élémentaire** si les sommets de G sont adjacents à deux arcs du chemin au plus.*

(c) *Une **chaîne** dans un graphe non orienté est dite **simple** si la séquence d'arêtes qui la constitue ne comporte pas plusieurs fois le même élément.*

(d) *Une **chaîne** dans un graphe non orienté est dite **élémentaire** si les sommets de G sont adjacents à deux arêtes de la chaîne au plus.*

Définition 13 (a) *Un **circuit** dans un graphe est un chemin simple où l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité terminale.*

(b) *Un **cycle** dans un graphe non orienté est une chaîne simple où l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité terminale.*

Définition 14 (a) *Un **circuit** est dit **élémentaire** si tout sommet est adjacent à deux arcs de la séquence au maximum.*

(b) *Un **cycle** dans un graphe non orienté est dit **élémentaire** si tout sommet est adjacent à deux arêtes de la séquence au maximum.*

Pour illustrer ces définitions rapportons-nous à la figure 2.2(a). Dans ce graphe nous trouvons plusieurs chemins allant du sommet 2 au sommet 3. Voici deux d'entre eux ; $[(2,1)|(1,4)|(4,3)]$ et $[(2,5)|(5,4)|(4,2)|(2,4)|(4,3)]$. Le premier chemin est élémentaire (et par conséquent simple) par contre le deuxième n'est pas élémentaire (mais il est simple). Un chemin non simple possible serait par exemple

Définition 5 Un graphe $G(X,E)$ est dit **non orienté** quand il est défini par un ensemble X de sommets et un ensemble E d'arêtes qui associe à chaque arête (x_i, x_j) les sommets x_i et x_j .

Définition 6 Un **multigraphe** est un graphe où il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets x_i et x_j donnés.

Définition 7 (a) Un graphe est dit **simple** s'il ne possède ni boucles ni deux arcs ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale.

(b) Un graphe non orienté est dit **simple** s'il ne possède ni boucles ni deux arêtes ayant les mêmes extrémités.

Tous les graphes vus jusqu'à présent sont simples. Les figures 2.4(a et b) montrent deux graphes non simples qui ont été construits à partir des deux graphes de la figure 2.2. Les graphes non simples sont utilisés normalement pour représenter plusieurs manières différentes d'arriver à un point y à partir d'un point x donné. C'est le cas par exemple d'un réseau routier où il existe plusieurs routes qui relient les villes x et y . Chaque route est représentée par un arc (si elle possède sens unique) ou par une arête.

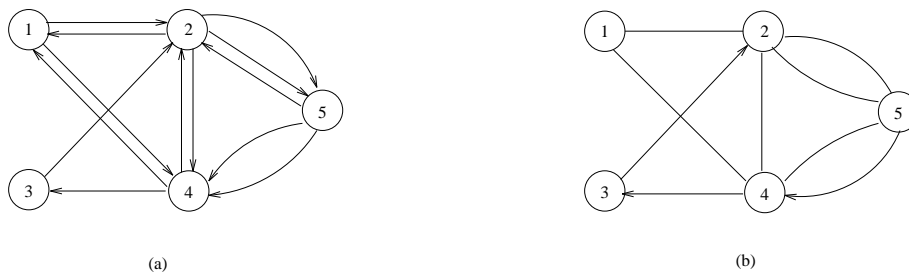


FIG. 2.4 - Deux graphes non simples.

Nous allons maintenant présenter quelques concepts de théorie des graphes.

2.3.2 Notions fondamentales en théorie de graphes

Définition 8 Un graphe simple $G(X,U)$ est dit :

- (a) **symétrique** si $\forall (x,y) \in U \implies (y,x) \in U$;
- (b) **antisymétrique** si $\forall (x,y) \in U \implies (y,x) \notin U$;

Tous les graphes symétriques peuvent être transformés en graphes non orientés.

Définition 9 Un graphe simple non orienté $G(X,E)$, est dit **complet** si $\forall x,y \in X \implies$ l'arête $(x,y) \in E$. Un graphe complet d'ordre n (possédant n sommets) est noté K_n .

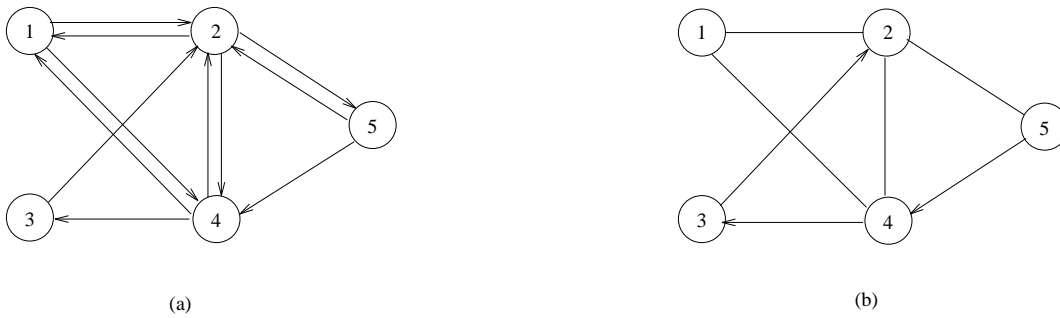


FIG. 2.2 - Deux manières différentes de représenter le graphe $G(\{1, 2, 3, 4, 5\} \mid \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4)\})$.

deux sommets x_i et x_j sont liés dans les deux sens nous pouvons remplacer par raison de commodité les deux arcs correspondants (x_i, x_j) et (x_j, x_i) par une arête $e_{i,j} = (x_i, x_j)$ qui associe les deux extrémités sans ordre. Le graphe de l'exemple 1 peut être alors représenté autant par celui de la figure 2.2(a) que par celui de la figure 2.2(b).

Parfois on travaille avec des graphes où les notions d'extrémité initiale et terminale ne sont pas importantes car à chaque fois que deux sommets sont liés ils sont liés dans les deux sens. Nous pouvons remplacer alors deux arcs symétriques par l'arête respective. Voyons un exemple où on peut se passer de l'utilisation des arcs :

Exemple 2 Représentons chacune des régions de la figure 2.3(a) par un sommet et créons un arc partant d'une région x_i vers la région x_j chaque fois que les régions x_i et x_j sont voisines. Comme la relation de voisinage est symétrique, à chaque fois qu'un arc (x_i, x_j) est créé, son correspondant symétrique (x_j, x_i) doit être créé aussi. Ainsi nous pouvons représenter la relation de voisinage des régions de la figure 2.3(a) par les graphes représentés dans les figures 2.3(b et c). Évidemment celui qui n'utilise que des arêtes est préférable à l'autre.

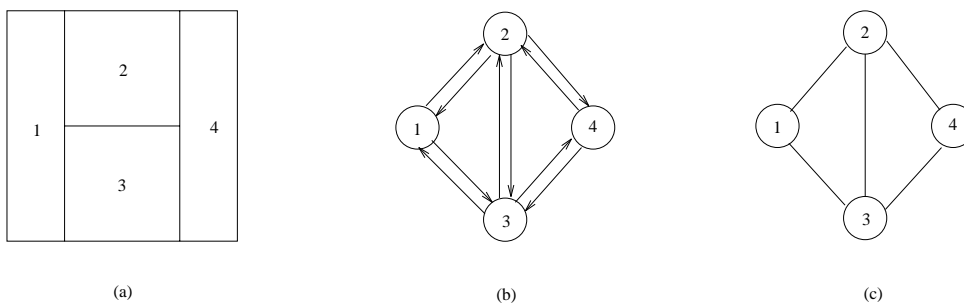


FIG. 2.3 - (a) Un graphe et ses représentations utilisant (b) soit des arcs (c) soit des arêtes.

Définition 4 Dans un graphe $G(X, U)$ un arc (x_i, x_i) dont les extrémités coïncident est appelé **boucle**.

P 4 $H(p_1, p_2, \dots, p_k) = H(p_1, p_2, \dots, p_k, 0)$

P 5 $H(A, B) = H(A) + H(B)$ si A et B sont deux expériences indépendantes.

2.2.3 L'entropie en segmentation d'images

Soit une image représentée en N niveaux de gris $(0, 1, \dots, N-1)$ et composée de M pixels Γ comme il a été défini dans la section 2.1.1. Soit f_i la fréquence de chacun des N niveaux de gris et $p_i = f_i/M$ la probabilité associée à chacun de ces niveaux. D'après l'équation (2.2) Γ la quantité d'information associée à cette source de données est :

$$H(p_0, p_1, \dots, p_{N-1}) = - \sum_{i=0}^{N-1} p_i \ln p_i \quad (2.3)$$

La notion d'entropie est utilisée en analyse d'images pour segmenter des images de manière à maximiser la qualité de l'information retenue. Récemment [73] Γ l'entropie spatiale Γ qui peut mesurer le comportement statistique d'un pixel dans la classe à laquelle il appartient Γ a été proposée pour contrôler l'évolution des algorithmes de classification itératifs.

Nous allons présenter et proposer dans le chapitre 3 quelques méthodes pour seuiller des images utilisant comme critère la fonction entropie et des variantes.

2.3 Théorie des graphes

“Il est incontestable que les résultats (souvent fort abstraits) obtenus en théorie des graphes l'ont été - ou du moins leur obtention a-t-elle été grandement facilitée - parce qu'on peut faire de petits dessins” [109]. C'est cette représentation graphique facile qui permet une modélisation claire et une compréhension rapide d'un problème.

Nous allons maintenant introduire plusieurs concepts qui seront utilisés dans la suite de ce travail. On essaiera de donner toujours des exemples pour illustrer ces concepts.

2.3.1 Un graphe et ses représentations

Définition 3 Un **graphe** $G(X, U)$ est défini par un ensemble X de sommets et un ensemble U d'arcs qui associe à chaque arc $u = (x_i, x_j)$ le sommet x_i comme extrémité initiale et le sommet x_j comme extrémité terminale.

Exemple 1 Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $U = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 4)\}$. Le graphe $G(X, U)$ peut être représenté par la figure 2.2(a).

Remarquons que dans l'exemple 1 les arcs $(1, 2)$ et $(2, 1)$ appartiennent à U . La même situation existe avec $(1, 4)$ et $(4, 1)$ et bien d'autres arcs. Dans ces cas Γ quand

avec $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, est appelée **entropie**.

En choisissant la base 2 l'expression de l'entropie utilise l'incertitude d'une expérience ayant deux événements équiprobables ($S = \{s_1, s_2\}$ où $p_1 = p_2 = 0.5$) comme unité de mesure. Cette unité de mesure s'appelle *bit* (binary unit). La formule (2.1) donne alors le nombre de bits nécessaires pour coder l'expérience.

Il faut remarquer que le choix de la base 2 pour le logarithme n'est pas essentiel car il est possible de passer d'une base à une autre à l'aide de $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$.

La formule (2.1) peut s'exprimer alors (en utilisant comme base pour le logarithme le nombre d'éléments de S) à un facteur constant près comme :

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = -\log_2 k \sum_{i=1}^k p_i \log_k p_i \quad (2.2)$$

Dans la suite de ce travail on travaillera avec cette expression sans tenir compte de la constante.

2.2.2 L'entropie comme mesure d'information

Lorsque nous connaissons le résultat d'une expérience nous pouvons aussi être intéressés par la quantité d'information qui caractérise ce résultat. Nous voudrions donc mesurer la quantité d'information que nous recevons lorsqu'une expérience a eu lieu et que nous connaissons le résultat

Une information est considérée comme telle si et seulement si elle élimine une certaine incertitude d'où le lien très étroit entre information et incertitude. On peut dire que plus l'incertitude est grande au début d'une expérience plus l'information que l'on obtient à la fin est grande.

Du fait que l'information supprime une incertitude la mesure d'incertitude (2.2) peut être aussi utilisée pour quantifier l'information obtenue [43]. Dans ce cas le sens de variation de l'incertitude est opposé au sens de variation de l'information. La différence entre ces deux interprétations consiste seulement dans le fait que nous pouvons nous placer soit *avant* la réalisation de l'expérience (où l'équation (2.1) mesure l'incertitude des événements de l'espace de probabilité des solutions possibles) soit *après* que cette expérience ait eu lieu (dans ce dernier cas l'équation (2.1) mesure la quantité d'information obtenue).

On présente ci-après quelques propriétés associées à la fonction entropie. Les preuves peuvent être trouvées dans [43].

P 1 $H(p_1, p_2, \dots, p_k) \geq 0$.

P 2 $H(p_1, p_2, \dots, p_k) = 0$ si $\exists i \mid p_i = 1$.

P 3 $H(p_1, p_2, \dots, p_k) \leq H(\underbrace{1/k, 1/k, \dots, 1/k}_{k \text{ fois}})$.

peuvent être obtenues par :

- des mesures topologiques des objets comme leur surface Γ périmètre ou nombre de cavités ;
- la mise en évidence de la forme des entités par mesures de compacité et d'allongement ;
- un comptage d'objets ;
- la mise en relief des altérations de couleur ou de texture ;
- des mesures statistiques des objets comme par exemple : moyenne Γ variance Γ entropie Γ énergie Γ dissymétrie ou aplatissement.

Les entités peuvent être décrites en termes de ces nouveaux paramètres et des décisions peuvent être alors prises plus facilement car la quantité d'information à cette étape du processus de l'analyse d'images n'est plus aussi importante qu'elle l'était avant.

Parfois Γ pour rendre les images segmentées plus exploitables il est intéressant d'utiliser des opérateurs morphologiques comme l'érosion ou la dilatation. Ces opérateurs seront présentés à la page 34.

2.2 L'entropie associée à une image

2.2.1 L'entropie comme mesure d'incertitude

Étant donné une expérience dont le résultat avant sa réalisation est inconnu Γ mais pour laquelle nous pouvons décrire l'ensemble des tous les résultats possibles Γ il s'ensuit que cette expérience contient une certaine incertitude qui sera éliminée après sa réalisation.

Comment pourrions-nous mesurer cette incertitude? Étant donné que nous connaissons les probabilités *a priori* de chacun des événements qui caractérisent le résultat de l'expérience Γ il est déjà possible de prévoir que l'incertitude associée à des événements équiprobables est supérieure à celle associée au cas où il y a des événements qui ont une probabilité d'occurrence plus grande que d'autres Γ ou au cas extrême où il y a un élément dont la probabilité est égale à 1. Dans ce dernier cas Γ l'incertitude associée à l'expérience est nulle.

L'incertitude sur une expérience dépend donc des probabilités attachées aux différents résultats possibles.

Shannon Γ en 1948 Γ a donné l'expression qui fournit l'incertitude associée à un ensemble fini $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ d'événements indépendants où p_i est la probabilité d'occurrence de chaque événement s_i .

Définition 2 *La mesure d'incertitude associée à S , calculée par*

$$H(p_1, p_2, \dots, p_k) = - \sum_{i=1}^k p_i \log_2 p_i \quad (2.1)$$

fixe. À chaque fois qu'un polygone ne satisfait pas un critère de similarité il est partitionné en d'autres polygones. Une des différences par rapport aux deux structures précédentes est que lorsqu'un polygone est partitionné la topologie de polygones voisins change aussi s'adaptant à ce nouveau partitionnement. En analyse d'images le diagramme de Voronoï représente un moyen efficace pour décrire, manipuler et interpréter des entités géométriques. Plus de détails sur les travaux fondés sur l'utilisation du graphe de Voronoï sont donnés dans [1] [27] [28] [63] [99] ou [119].

À la fin de la procédure de division vient la deuxième étape la **fusion** où les éléments géométriques adjacents peuvent ou non fusionner selon un critère de similarité pré-établi permettant la détection des entités dans l'image. Une étude des stratégies sur la fusion des régions est présentée à la section 4.3.2.

Le lien entre les approches de segmentation basées sur la *croissance de régions en utilisant les regroupements d'ensembles de points* et les techniques de segmentation par *division et fusion* est très étroit. En fait lorsqu'on commence la fusion on a deux choix : soit les primitives régions sont les pixels (méthodes basées sur la croissance de régions) soit elles sont des regroupements de pixels ayant une certaine homogénéité fournis par l'étape de division (méthodes de division et fusion). Cela veut dire si l'image passe d'abord par l'étape de division que la fusion débute à partir de régions homogènes sinon les germes sont des pixels.

Approches pyramidales

En traitement d'images une structure pyramidale est un empilement d'images de résolution décroissante depuis la base jusqu'à l'apex. En fait les techniques de croissance de région qui procèdent par fusion sont considérées comme des techniques pyramidales. La base de la pyramide est représentée par un graphe d'adjacence où chaque pixel de l'image est un sommet du graphe. Chaque sommet qui n'est pas présent dans un niveau k de la pyramide est obligatoirement représenté par un autre sommet qui appartient à ce niveau.

Dans [11] [60] [61] l'idée d'utiliser une structure irrégulière pour la représentation de courbes est développée. Plus de détails à propos du modèle pyramidal en analyse d'images peuvent être trouvés dans [13] [50] [76] [83] ou [106].

Les structures pyramidales sont présentées au chapitre 4 et une attention spéciale est donnée à la structure irrégulière dans la section 4.5. Le chapitre 5 est dédié au développement d'une structure pyramidale floue.

2.1.4 La post-segmentation

Au terme de la segmentation on dispose d'une représentation du support de l'image en entités. Selon l'application visée il peut être important de définir clairement des connaissances précises que l'on a sur les formes à traiter. Ces connaissances

de sorte que chaque région croît pixel par pixel.

- **regroupement d'ensembles de points** Au départ les régions-germes peuvent être les pixels. Un graphe ² représentant les adjacences entre les primitives régions est construit de manière à ce que chaque région-germe soit représentée par un sommet et une arête est créée entre deux sommets si et seulement si les régions qu'ils représentent sont adjacentes. Si on associe à chaque arête de ce graphe le coût de fusion entre les deux sommets adjacents nous pouvons utiliser ce "nouveau graphe pondéré" pour choisir les meilleures fusions de façon à minimiser la perte d'information. Chaque fusion entraîne une contraction dans le graphe d'adjacence. Les stratégies sur la fusion des régions sont présentées à la section 4.3.2.

Pour plus de détails à propos de la segmentation par croissance de régions voir [40][92][98][117][118] ou [128].

Approches par division et fusion

Dans les approches de segmentation par division et fusion l'image initiale est considérée tout d'abord comme une seule région. Elle sera ensuite partagée itérativement en régions de plus en plus petites selon un critère de similitude. Ce découpage est récursif s'arrêtant pour une région lorsqu'elle respecte un critère d'homogénéité. Cette phase de division est normalement réalisée selon une structure géométrique. Citons trois structures possibles :

- **l'arbre quaternaire (structure "quadtree")** En segmentation d'images la structure quadtree [38][39][111][113] opère de façon à ce que l'image soit découpée récursivement en carrés jusqu'à ce que chaque carré soit homogène. La récursivité vient du fait que chaque carré doit être découpé en 4 carrés s'il ne respecte pas le critère d'homogénéité. Deux inconvénients de cette approche sont la non invariance en translation ³ de l'image et le fait que la segmentation par quadtree est totalement fondée sur des critères géométriques.
- **structure de Delaunay** Cette approche [20] consiste à partitionner l'image en triangles. Tant qu'un triangle ne respecte pas un critère d'homogénéité il est subdivisé en trois triangles par l'insertion d'un germe à son barycentre. La triangulation de Delaunay est alors une procédure récursive parallèle moins stricte que la précédente (car la longueur des arêtes des triangles est variable) mais la segmentation reste largement guidée par un facteur géométrique.
- **structure de Voronoï** La structure de Voronoï est duale de la structure de Delaunay en revanche ses contraintes géométriques sont moins fortes car l'image est partitionnée en polygones qui comportent un nombre de côtés non

²La section 2.3 est dédiée à la présentation des notions de base de la théorie des graphes.

³Nous dirons qu'une méthode est invariante par translation si les résultats ne varient pas en cas de translation ou rotation de l'image.

Les méthodes de classification

En reconnaissance de formes les techniques de classification sont celles qui ont pour but d'organiser un ensemble de données en classes ("clusters") de manière que chaque forme (élément) dans une classe soit plus similaire au "prototype" qui représente cette classe qu'à toute autre forme appartenant à une autre classe.

La technique de classification la plus simple procède par binarisation où les pixels de l'image sont partagés par un seul seuil s en deux classes : ceux qui appartiennent au fond et ceux qui appartiennent à la scène. C'est le processus de **seuillage**. L'image est alors séparée en deux classes de façon à ce que l'information comprise entre 0 et s soit retenue (c.à.d. les pixels de niveau de gris entre 0 et s seront acceptés) et les autres non ; ou vice-versa. Chacune de ces classes sera décomposée en composantes connexes pour constituer les entités dans l'image.

Cette technique est malheureusement très sensible aux bruits et ne peut être employée que dans des applications spécifiques. Le grand avantage des méthodes de seuillage par classification vient du fait que si on considère deux pixels quelconques de même niveau de gris ils seront traités de la même façon. Ces deux pixels auront donc le même degré d'appartenance à chacune des classes. Il n'est pas alors nécessaire de classer tous les pixels d'une image mais simplement de classer les différentes valeurs de niveaux de gris que l'on trouve dans celle-ci.

Plusieurs méthodes de seuillage peuvent être trouvées dans [65][87][53][57][96] ou [97]. Les quatre dernières seront étudiées plus attentivement dans le chapitre 3.

Il est souvent nécessaire de diviser l'image en un nombre de classes supérieur à deux ; dans ce cas pour obtenir k classes il faut $k - 1$ seuils ; c'est le processus de **multiseuillage**. Nous pouvons dire alors que plus généralement seuiller une image équivaut à regrouper les niveaux de gris en classes selon un critère de similitude. Chaque région est ensuite étiquetée par identification des composantes connexes. La difficulté de cette approche consiste à déterminer le nombre de classes présentes dans l'image. Les algorithmes de multiseuillage les plus représentatifs sont celui de Fisher [37] qui est présenté dans la section 3.1.5 et celui de Bhattacharya [10] qui est fondé sur le comportement du logarithme de la fonction histogramme de l'image.

D'autres méthodes de classification peuvent être trouvées dans [44][56] ou [124] par exemple.

Croissance de régions

Dans cette technique l'image est initialement décomposée en primitives régions une région pouvant être composée d'un seul pixel. Ensuite ces régions sont regroupées itérativement selon un critère de similarité jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de fusion possible.

Ces méthodes peuvent être partagées en deux groupes selon la façon de regrouper les régions :

- **agrégation de points** Des germes sont judicieusement choisis chaque germe fusionne avec un premier pixel puis avec un deuxième et ainsi itérativement

2. les opérations sur voisinages où la nouvelle valeur du pixel est obtenue à partir des valeurs des niveaux de gris de ses voisins ;
3. les opérations globales où l'étendue de la transformation est toute l'image pixel par pixel.

Le filtrage est une opération de pré-traitement qui à un signal d'entrée x appartenant à un espace \mathcal{E} associe un signal y appartenant à un sous-espace \mathcal{F} de \mathcal{E} [110]. Souvent il est utilisé pour l'extraction de l'information d'un signal bruité. Pour plus d'informations à propos des techniques de pré-traitement voir [2] par exemple.

Après l'élimination des informations superflues et inutiles par le pré-traitement l'image peut être segmentée.

2.1.3 La segmentation d'images

Le but de la segmentation est d'extraire dans l'image les objets constituant la scène plus précisément le support de l'image devra être partitionné en éléments de surface de manière à ce que chaque élément corresponde à une entité au niveau de la scène analysée. A chaque entité localisée est associée une composante connexe étiquetée. Une image X est alors partitionnée en régions X_i telles que :

1. $R_i \neq \emptyset \forall i$;
2. $R_i \cap R_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
3. $X = \bigcup_i R_i$;
4. R_i est connexe $\forall i$;
5. il existe un prédicat ¹ \mathcal{P} tel que $\mathcal{P}(R_i) = \text{vrai} \forall i$;
6. $\mathcal{P}(R_i \cup R_j) = \text{faux}$ si $i \neq j$ et R_i et R_j sont adjacentes.

Les méthodes de segmentation existantes peuvent être séparées en deux groupes : segmentation par régions (où les pixels de chaque région sont connectés par l'uniformité de leurs caractéristiques telles que : luminance couleur coordonnées désordre local) et segmentation par contours (basée sur la recherche des discontinuités locales). De nombreux détecteurs de contours ont déjà été proposés. Les premiers ([74][95]) utilisaient la notion de gradient ou de laplacien ; ensuite d'autres techniques utilisant la multi-résolution ([4][69]) et d'autres critères ([14][54]) sont apparues.

Nous nous intéressons aux techniques de segmentation fondées sur les régions. Ci-dessous nous décrivons les plus connues.

¹Le prédicat est un critère d'homogénéité qui peut être fondé sur la luminance, le désordre local ou un indice de texture, par exemple.

Étant *bruitées* ou floues ces images doivent passer par un **pré-traitement** avant toute opération de détection où l'information dégradée est restaurée. Dans cette étape des détails de l'image peuvent être rehaussés par plusieurs techniques.

Ensuite vient la phase la plus importante et la plus difficile du processus d'analyse d'images : la **segmentation**. Segmenter une image correspond à trouver les régions qui ont un sens. Cette étape doit permettre d'interpréter la scène aussi bien que le ferait l'observateur.

A partir de là viennent les **traitements de haut niveau** tels que la description de l'image la reconnaissance des formes et les décisions qui pourront être prises à partir des résultats fournis par la segmentation.

Comme nous l'avons remarqué pour arriver à la *reconnaissance des formes* dans une image plusieurs étapes sont nécessaires. Nous les avons décrites brièvement mais plusieurs termes restent à définir. Nous le faisons maintenant en même temps qu'on donne une notion plus précise de chacune de ces étapes.

2.1.1 La représentation discrète d'une image

La notion d'image qui est utilisée dans la suite est de nature bidimensionnelle discrète. A chaque élément (pixel) de l'image correspond un niveau d'intensité lumineuse (appelé niveau de gris) appartenant à $\{0, 1, \dots, N - 1\}$ où 0 correspond au manque total d'illumination (couleur noire) $N - 1$ est la couleur blanche et les autres valeurs sont des niveaux de gris entre le noir et le blanc.

Définition 1 *On définit l'histogramme des niveaux de gris d'une image comme étant la fonction $h : [0..N - 1] \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque niveau de gris entre 0 et $N-1$ la quantité de pixels de l'image qui possèdent cette intensité lumineuse.*

Une image $(1, \dots, M_1) \times (1, \dots, M_2)$ composée donc de $M = M_1 \cdot M_2$ éléments sera représentée en N niveaux de gris $(0, 1, \dots, N - 1)$. Voir comme exemple l'histogramme montré dans la figure 3.1(b) (page 42).

2.1.2 Pré-traitement

Des images brutes mémorisées par un système de vision contiennent une quantité énorme d'information. Cette quantité souvent trop importante peut être réduite en utilisant des procédures de pré-traitement.

Le pré-traitement consiste à sélectionner dans l'espace de représentation \mathcal{E} l'information $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ nécessaire à l'application [2]. Cette sélection passe souvent par l'élimination du bruit dû aux conditions d'acquisition par la normalisation des données ainsi que par l'homogénéisation (suppression des informations redondantes superflues et inutiles pour l'application visée).

Les opérations de pré-traitement peuvent être classées en 3 groupes :

1. les opérations ponctuelles qui modifient ponctuellement les valeurs des niveaux de gris des pixels ;

Chapitre 2

Notions de base

Nous allons tout d'abord faire la présentation du processus d'analyse d'images dans ce chapitre. Les étapes de ce processus seront décrites et nous allons étudier avec plus d'attention la partie concernant la segmentation d'images.

Le deuxième point d'intérêt est la présentation de l'entropie comme mesure d'information qui sera utilisée surtout dans le chapitre 3 au moment de développer des méthodes de seuillage. La théorie des graphes qui donne le support théorique des algorithmes développés dans le chapitre 4 constitue le point d'intérêt suivant avant la présentation de la logique floue qui sert de point de départ pour tous les développements nouveaux apportés par ce travail. Dans ce chapitre en particulier un historique de la logique floue en segmentation d'images est présenté.

2.1 Le processus d'analyse d'images

Le processus d'analyse d'images qui a pour but de fournir une **description** ou une **interprétation** d'une scène à partir de l'information extraite de l'image peut être décomposé en plusieurs étapes comme le montre la figure 2.1.

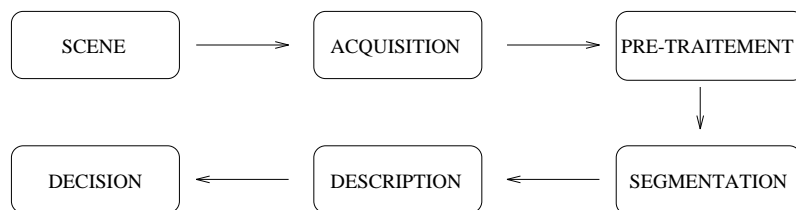


FIG. 2.1 - Étapes du processus d'analyse d'images

Au début on doit faire l'**acquisition d'une scène** en discrétisant l'image réelle continue. Normalement la quantité d'information brute initiale après la discrétisation est très volumineuse et difficile à manipuler. De plus cette discrétisation entraîne une perte d'information de même qu'elle nous pose des problèmes d'ordre technique comme l'illumination et la texture entre autres.

segmentation permettra de faire la corrélation des caractéristiques physiologiques des cellules (contenu en ADNΓactivité mitochondrialeΓconstituants du cytosquelette)Γrévélées par des marqueurs spécifiques fluorescentsΓavec les caractéristiques morphologiques de la cellule entière (formeΓsurfaceΓmouvements). Les principales difficultés résident dans l'hétérogénéité interne des cellules et dans la présence d'un fond inhomogène dont l'*histogramme de niveaux de gris* est confondu avec celui des objets.

Après cette brève introductionΓnous allons décrire dans le **chapitre 2** les principales étapes du domaine le plus vaste de la reconnaissance des formes : le processus d'analyse d'images. En outreΓl'entropie comme mesure d'informationΓla théorie des graphes et la logique floueΓdes outils de base nécessaires à la compréhension et au développement de ce travailΓseront présentés. Dans le **chapitre 3** un survol des méthodes les plus connues de seuillage est fait. Encore dans ce chapitreΓdes nouvelles techniques de seuillage floues fondées sur l' entropie seront proposées. Une coopération entre les techniques étudiées sera proposée avec pour but de seuiller des images cytologiques qui sont réputées être difficiles à segmenter. Les structures pyramidales pour la segmentation sont présentées dans le **chapitre 4**. Une attention spéciale est donnée à la structure irrégulière. Le **chapitre 5** est dédié à l'introduction d'éléments venus de la logique floue dans les méthodes de segmentation basées sur les pyramides de graphes. Une comparaison entre les résultats obtenus dans ce chapitre et ceux des chapitres 3 et 4 est présentée. FinalementΓdans le **chapitre 6** les conclusions et perspectives de ce travail sont exposées.

- la reconnaissance des empreintes digitales.

L'incertitude peut être présente au niveau d'une image formée à partir des données acquises car une image en deux dimensions n'est que la projection d'une scène sur un plan réalisée par des instruments qui sont toujours sujets à des erreurs de précision et de manipulation. Même à la fin du processus d'analyse d'images quand il est nécessaire de porter un jugement sur un résultat ce jugement étant souvent subjectif l'incertitude est présente.

Ainsi nous pouvons trouver l'**incertitude** et l'**imprécision** à tous les niveaux d'un système de traitement analyse et interprétation d'images. Il est important de savoir appréhender ce genre d'information incertaine et imprécise dans un niveau quelconque du système pour pouvoir travailler avec elle dans les niveaux suivants de façon à contrôler sa propagation et pouvoir en tirer profit.

Avoir un modèle mathématique qui traite des informations tachées d'incertitude et d'imprécision dans un système visionique peut être alors intéressant.

Une logique multivalente¹ qui considère et manipule ce genre d'information incomplète fondée sur l'idée d'appartenance d'un élément à plusieurs classes en même temps est la **logique floue**.

“La logique floue est une branche de l'intelligence artificielle qui aide les ordinateurs à teinter de gris et de bon sens des représentations d'un monde incertain [58].”

Dans la théorie classique des ensembles un élément ne peut appartenir à la fois à un ensemble et à son complémentaire; il ne peut pas non plus n'appartenir à aucun des deux. C'est le principe qui évite à un objet la contradiction d'être en même temps une chose et de ne pas l'être. Les ensembles flous violent à un certain niveau ces lois du tiers exclu et de non-contradiction [58].

En logique floue les éléments possèdent des degrés d'appartenance à des ensembles. La seule contrainte est que la somme des degrés d'appartenance d'un élément à des ensembles complémentaires soit égale à l'unité.

La fonction d'appartenance n'est pas de nature aléatoire. Il ne faut pas confondre ses valeurs avec des pourcentages issus des probabilités car ces dernières mesurent si quelque chose risque de se produire et le flou mesure le degré d'existence d'un fait ou d'une condition.

L'imprécision dans une image peut s'exprimer soit en termes d'ambiguïté d'appartenance d'un pixel à l'image ou au fond (s'il est noir ou blanc) soit au niveau de l'indéfinition de la forme et de la géométrie d'une région dans l'image soit de l'association des deux facteurs précédents [88]. Nous allons introduire des mécanismes de la **logique floue en segmentation d'images** avec l'objectif d'obtenir des résultats plus précis à travers deux stratégies de segmentation : le seuillage et l'agrégation de régions par pyramides de graphes.

Dans ce travail nous nous intéressons particulièrement au problème de l'analyse quantitative des populations cellulaires dont la **segmentation** est une des étapes clés. Dans des scènes observées en microscopie à contraste de phase une bonne

¹Une logique est multivalente si elle admet des valeurs de vérité en dehors de l'ensemble: $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$.

Chapitre 1

Introduction

En donnant à la machine la possibilité de percevoir l'homme a certainement franchi un pas important dans l'automatisation de ses tâches quotidiennes. Cette automatisation est sensible dans le domaine de la **reconnaissance de la parole** par exemple où la commande vocale, la dictée automatique et la traduction en temps réel de langues étrangères sont quelques unes de ses applications les plus connues. Nous pouvons citer aussi la **reconnaissance de l'écriture** avec l'identification des chèques bancaires, l'archivage de documents et la lecture et reconnaissance d'adresses pour le tri automatique du courrier.

En quelques années, les progrès techniques au niveau du traitement des images numériques ont permis un élargissement considérable dans le domaine de la **vision** assistée par ordinateur [94].

Parmi les applications dans ce domaine qui comprend le traitement, l'analyse et l'interprétation d'images, nous pouvons signaler, sans être exhaustifs :

- la médecine avec l'analyse d'images de radiographies ou d'échographies, la numération cytologique des préparations microscopiques (indication du nombre de chaque type de cellules présentes dans le champ d'observation) ;
- le contrôle de qualité dans l'industrie avec l'analyse de défauts dans des pièces ou l'identification, le triage et la localisation d'objets ;
- l'astronomie avec les mesures astrométriques et la détection automatique d'étoiles ;
- la robotique avec le contrôle des mouvements des robots et la planification de trajectoires ;
- la géophysique avec l'analyse d'images du sol en pétrographie ou l'analyse d'images aériennes d'une aire géographique pour la détection des étendues d'eau, des forêts, des zones cultivées, des routes ou des voies ferrées ;
- l'analyse d'images de satellites pour les prévisions météorologiques ou la surveillance de cultures ;

Liste des tableaux

3.1	Seuil fournis par les techniques classiques.	61
3.2	Seuil fournis par les techniques utilisant la notion d'ensemble flou. . .	62
4.1	Pyramide irrégulière : attributs de sommets.	90
4.2	Pyramide irrégulière : différences de niveaux de gris.	90
5.1	Degrés d'appartenance d'un sommet flou à ses pères.	104
5.2	Structure floue de voisinage	125

4.12	Segmentation de l'image-test 1 avec la pyramide irrégulière stochastique.	96
4.13	Segmentation de l'image-test 7 avec la pyramide irrégulière stochastique.	97
4.14	Segmentation d'une image texturée avec la pyramide irrégulière stochastique.	98
5.1	Graphes pour la gestion des attachements flous.	106
5.2	Gestion des attachements flous : situation 1.	107
5.3	Gestion des attachements flous : situation 2.	108
5.4	Gestion des attachements flous : situation 3.	109
5.5	Sommet et arêtes floues.	110
5.6	Configurations résultantes de la validation d'arêtes floues.	114
5.7	Trois possibilités d'attachement flou.	116
5.8	Deux arêtes floues qui s'interdisent mutuellement.	117
5.9	Trois arêtes floues qui s'interdisent mutuellement.	118
5.10	Flux traversant un sommet flou	118
5.11	Graphe pondéré associé à une matrice de relations floues.	121
5.12	Graphes d'adjacence et d'attachement flou.	123
5.13	Evolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière	129
5.14	Evolution de l'état des sommets dans la pyramide irrégulière floue.	129
5.15	Mise à jour des voisinages : cas 1(a)	140
5.16	Mise à jour des voisinages : cas 1(b)	140
5.17	Mise à jour des voisinages : cas 1(c)	140
5.18	Mise à jour des voisinages : cas 2(a)	141
5.19	Mise à jour des voisinages : cas 2(b)	142
5.20	Mise à jour des voisinages : cas 2(c)	142
5.21	Mise à jour des voisinages : cas 3(a)	143
5.22	Mise à jour des voisinages : cas 3(b)	143
5.23	Elimination d'une clique floue.	144
5.24	Mise à jour d'une clique floue.	146
5.25	Graphe de similarité flou et degré d'existence des arêtes.	148
5.26	Graphe d'attachement flou et configuration respective.	149
5.27	Segmentation de l'image-test 6 avec la pyramide floue.	150
5.28	Segmentation de l'image-test 2 avec la pyramide floue.	151
5.29	Segmentation de l'image-test 1 avec la pyramide floue.	151
5.30	Segmentation de l'image-test 7 avec la pyramide floue.	152
5.31	Segmentation d'une image texturée avec la pyramide floue.	153
5.32	Présentation des sommets flous dans 7 étages successifs de deux pyramides floues.	155

Table des figures

2.1	Étapes du processus d'analyse d'images	5
2.2	Deux manières différentes de représenter le même graphe.	14
2.3	Relation de voisinage représentée par des graphes.	14
2.4	Deux graphes non simples.	15
2.5	Un graphe connexe et un autre à trois composantes connexes.	19
2.6	Un arbre et une arborescence.	21
2.7	Graphe biparti	22
2.8	Stables maximaux et ensembles dominants minimaux.	23
2.9	Noyau dans un graphe.	24
3.1	Segmentation de l'image-test 1 par binarisation.	42
3.2	Fonctions d'appartenance floue possibles.	46
3.3	Fonctions limite	46
3.4	Segmentation de l'image-test 2 par binarisation.	59
3.5	Segmentation de l'image-test 3 par binarisation.	60
3.6	Segmentation de l'image-test 4 par binarisation.	60
3.7	Segmentation de l'image-test 5 par binarisation.	60
3.8	Segmentation par binarisation de l'image-test 1 bruitée.	67
3.9	Segmentation par binarisation de l'image-test 2 bruitée.	68
3.10	Segmentation par binarisation de l'image-test 3 bruitée.	68
4.1	Adjacences générées par la 4 et la 8-connexité.	75
4.2	Relations de voisinage représentées par une clique d'ordre 5.	75
4.3	Mise à jour des adjacences.	81
4.4	Pyramide irrégulière : graphes représentant une configuration donnée.	90
4.5	Pyramide irrégulière : deux résultats possibles à partir d'une configuration.	91
4.6	Pyramide irrégulière : configuration au niveau $k + 2$	92
4.7	Pyramide irrégulière : résultat final.	92
4.8	Évolution des champs récepteurs pour l'image-test 5.	94
4.9	Visualisation des 3 derniers niveaux pour l'image-test 5.	94
4.10	Segmentation de l'image-test 6 avec la pyramide irrégulière stochastique.	95
4.11	Segmentation de l'image-test 2 avec la pyramide irrégulière stochastique.	96

5.4.1	L'idée de base	111
5.4.2	Degré d'existence des arêtes	112
5.4.3	L'information apportée par les sommets flous	113
5.4.4	Degré de connexité adapté	116
5.5	Le problème de déconnexion	117
5.6	Formalisation du modèle au moyen des graphes flous	120
5.7	Structure de données	124
5.8	Le choix des survivants	125
5.8.1	Le critère d'arrêt	126
5.8.2	Le rôle des seuils	126
5.8.3	Processus de décimation stochastique ou adaptatif?	128
5.9	Le choix d'un père	128
5.9.1	Le choix des sommets qui viennent de mourir	130
5.9.2	Le choix des sommets flous	131
5.9.3	La dernière itération	131
5.10	Mise à jour des voisinages et des attributs	132
5.10.1	Procédures de base	134
5.10.2	Le traitement des sommets flous qui ont choisi un père	137
5.10.3	Le traitement des sommets qui viennent de mourir	139
5.10.4	Le traitement complet des sommets flous	144
5.11	La mise à jour des attributs des survivants	145
5.12	Critère de "fuzzification" et "defuzzification"	146
5.13	Synthèse et exemple	147
5.14	Mise en Œuvre	149
5.14.1	Résultats	149
5.14.2	L'influence des paramètres	153
5.15	Commentaires	156
6	Conclusions et perspectives	163
	Bibliographie	165

3.2.2	L'utilisation des indices de flou	47
3.2.3	Maximisation de la divergence floue	47
3.2.4	L'utilisation des mesures de probabilité	49
3.2.5	L'algorithme fuzzy c-means (FCM)	51
3.2.6	L'algorithme FCM appliqué à la segmentation d'images	53
3.2.7	Évaluation de l'entropie floue	54
3.3	Nouvelles techniques fondées sur l'entropie floue	55
3.3.1	Entropie floue adaptée	55
3.3.2	Nouvelle entropie floue	56
3.4	Mise en Œuvre	57
3.4.1	Domaines d'application	57
3.4.2	Les images testées et leurs histogrammes	58
3.4.3	Résultats l'interprétation et comparaisons	60
3.5	Coopérations entre les méthodes	65
3.6	La robustesse des méthodes	67
3.7	Commentaires	68
4	Structures pyramidales pour la segmentation	71
4.1	Le modèle pyramidal	71
4.1.1	Historique et applications	71
4.1.2	Avantages et inconvénients	72
4.1.3	Structures pyramidales	72
4.2	Pyramides gaussienne et laplacienne	73
4.3	Pyramides de partitionnement géométrique	73
4.3.1	La division	73
4.3.2	La fusion	74
4.4	Pyramides de graphes	74
4.4.1	L'utilisation d'un arbre couvrant	76
4.4.2	Pyramides liées	76
4.4.3	Pyramides duales	76
4.4.4	Pyramides irrégulières	76
4.5	Pyramides irrégulières stochastiques	77
4.5.1	L'algorithme	77
4.5.2	Coopération avec les contours	85
4.5.3	Support venu de la théorie des graphes	86
4.5.4	Développement d'un exemple	90
4.5.5	Mise en œuvre	93
4.6	Commentaires	98
5	Pyramide irrégulière floue	101
5.1	Attachement flou	102
5.2	Notations utilisées dans ce chapitre	105
5.3	Gestion des attachements flous	106
5.4	La création d'arêtes floues	110

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notions de base	5
2.1	Le processus d'analyse d'images	5
2.1.1	La représentation discrète d'une image	6
2.1.2	Pré-traitement	6
2.1.3	La segmentation d'images	7
2.1.4	La post-segmentation	10
2.2	L'entropie associée à une image	11
2.2.1	L'entropie comme mesure d'incertitude	11
2.2.2	L'entropie comme mesure d'information	12
2.2.3	L'entropie en segmentation d'images	13
2.3	Théorie des graphes	13
2.3.1	Un graphe et ses représentations	13
2.3.2	Notions fondamentales en théorie de graphes	15
2.3.3	Structures définies dans les graphes	20
2.3.4	Les graphes en analyse d'images	24
2.4	La logique floue	24
2.4.1	La théorie des ensembles flous	25
2.4.2	Opérations sur les ensembles flous	27
2.4.3	Les α -coupes des ensembles flous	28
2.4.4	D'autres outils flous	29
2.4.5	Logique floue en segmentation d'images	29
2.5	Commentaires	37
3	Segmentation floue par seuillage	39
3.1	Les méthodes traditionnelles de seuillage	39
3.1.1	Maximisation de l'entropie <i>a posteriori</i>	39
3.1.2	Maximisation de l'entropie <i>a posteriori</i> adaptée	40
3.1.3	Prise en compte du coefficient d'anisotropie	41
3.1.4	Sélection du seuil qui minimise l'erreur	41
3.1.5	La méthode Fisher pour multiseuils	43
3.2	Méthodes utilisant la notion d'ensemble flou	44
3.2.1	Ambiguïté en niveaux de gris	44

Abstract

In opposite to classic logic fuzzy logic enables to manipulate another truth values than “true” or “false”. In this work we study the introduction of this logic in image segmentation process. First and second order techniques are presented and applied to several images.

Two thresholding methods based on fuzzy entropy are developed. A cooperation between these methods and the adapted classic entropy is proposed to segment cytological images.

Second order segmentation techniques that use the pyramid notion are presented. Irregular pyramids are studied and their theoretic support based on graphs theory is formalised. The introduction of a fuzzy factor on segmentation process based in the graphs pyramid is proposed. This is done with fuzzy vertices and edges which create the fuzzy pyramid. All procedures are parallelisable. The order in which the graphs elements of the pyramid levels are evaluated doesn't have any importance.

Key-words:

Fuzzy logic image segmentation graphs theory entropy irregular pyramids fuzzy pyramid thresholding.

Résumé

Contrairement à la logique classique la logique floue permet de manipuler d'autres valeurs de vérité que le "vrai" et le "faux" absolus. Dans ce travail nous étudions l'introduction de cette logique dans les processus de segmentation d'images. Des techniques de premier et de deuxième ordre sont présentées et appliquées à plusieurs images.

Deux méthodes de seuillage basées sur l'entropie floue sont développées. Une coopération entre ces méthodes et l'entropie adaptée classique est proposée pour la segmentation d'images cytologiques.

Nous présentons les méthodes de segmentation de deuxième ordre utilisant la notion de pyramide. Les pyramides irrégulières sont étudiées et leur support théorique basé en théorie des graphes est formalisé. L'introduction d'un facteur d'incertitude dans le processus de segmentation basé sur la pyramide de graphes est proposée. Cela se fait à l'aide de sommets et arêtes flous créant la pyramide floue. Toutes les procédures restent parallélisables et l'ordre d'évaluation des éléments des graphes représentant les niveaux de la pyramide n'a pas d'importance.

Mots-clés :

Logique floue, segmentation d'images, théorie des graphes, entropie, pyramides irrégulières, pyramides floues, seuillage.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à *M^{me}* Annick Montanvert pour avoir accepté de diriger ce travail de thèse ainsi que pour ses conseils et son dynamisme.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail :

- M. Gerd Finke qui me fait l'honneur de présider ce jury ;
- *M^{lle}* Isabelle Bloch et M. Jean-Pierre Asselin de Beauville pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils lui ont porté ;
- M. Frédéric Maffray et M. Jean-Marc Chassery pour la lecture et la participation à ce jury.

Je tiens particulièrement à remercier Pascal Bertolino pour le temps qu'il m'a consacré sa gentillesse ses remarques...

Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance à tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail directe ou indirectement. Je pense particulièrement à :

- Athanase qui m'a beaucoup aidé aux premiers moments difficiles ;
- Emmanuelle Stéphane et Florence avec qui j'ai partagé la passion de la musique de la montagne et les repas à midi ;
- Guy pour son professionnalisme et sa disponibilité ;
- Cláudia e Paula que muito me encorajaram nos momentos mais duros. Nossas discussões me enriqueceram enormemente ;
- Ana Paula e Marilena por todo apoio que deram principalmente na reta final ;
- A turma do baralho pelos momentos de descontração les Dubu pour leur soutien amical...

Je voudrais rajouter une mention spéciale à CAPEST pour la bourse d'études.

Enfim essas agradecimentos nao estarão completos se deixo de citar meus pais (que do outro lado do Atlântico tanto torceram por mim) Teresinha (que suportou minhas crises de mau humor ao longo deste período) e Giselle (avec son sourire plein de joie) que me permitiram de levar este trabalho até seu fim.

à Teresinha et Giselle

THÈSE
présentée par

Gilson BRAVIANO

pour obtenir le titre de DOCTEUR
de l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984
et du 30 Mars 1992)

Recherche Operationnelle
(Spécialité: **Mathématiques Appliquées**)

**LOGIQUE FLOUE EN SEGMENTATION
D'IMAGES: SEUILLAGE PAR ENTROPIE ET
STRUCTURES PYRAMIDALES
IRREGULIERES**

Date de soutenance: 03 octobre 1995

Composition du jury

Président: GERD FINKE

Rapporteur: JEAN-PIERRE ASSELIN DE BEAUVILLE

Rapporteur: ISABELLE BLOCH

Examineur: FRÉDÉRIC MAFFRAY

Examineur: JEAN-MARC CHASSERY

Examineur: ANNICK MONTANVERT (DIRECTEUR DE THÈSE)

Thèse préparée au sein du LABORATOIRE TECHNIQUES DE
L'IMAGERIE, DE LA MODÉLISATION ET DE LA COGNITION - IMAG