Chapitre 3
Modeleur solide utilisé pour l'implémentation du modèle de Wulff-Jaccodine étendu

La simulation du phénomène de gravure chimique nécessite le choix préalable d'une représentation informatique des objets intervenant (substrat et masque). Cette représentation devra rendre compte des aspects particuliers du problème, et permettre leur traitement. Les principales formes de représentation des solides (représentations surfaciques ou volumiques) ont été envisagées. Nous présentons dans ce chapitre la représentation choisie pour implémenter le modèle de Wulff-Jaccodine étendu en dimension 3. Nous décrivons enfin les opérateurs booléens que nous avons dû développer, faute de disposer d'un modeleur solide adapté à nos besoins.

1 - Représentations volumiques des solides

Les représentations volumiques considèrent un objet comme un ensemble de volumes élémentaires. Elles sont particulièrement indiquées pour représenter des objets dont le poids et bien sûr le volume font partie des grandeurs étudiées. Par contre, elles ne rendent pas toujours compte de la frontière de l'objet (équation des faces de l'objet).

De plus, s'il est aisé de déterminer si un point de l'espace est à l'intérieur de l'objet, il est difficile d'étudier son appartenance à la frontière de l'objet. Enfin, elles se prêtent tout particulièrement aux opérations booléennes (union, intersection et différence de deux objets).

1.1 - Enumération exhaustive

La plus simple des représentations volumiques est celle qui consiste à diviser l'espace étudié en volumes élémentaires (discrétisation), et à associer à un objet la liste exhaustive des volumes élémentaires qu'il occupe. Le principal inconvénient de ce type de représentation est la quantité d'informations nécessaires.

1.2 - Subdivisions récursives de l'espace

Pour alléger la représentation, on peut décomposer un objet en volumes élémentaires de tailles différentes, la taille de ces volumes étant de plus en plus petite lorsqu'une grande précision est nécessaire. Un solide peut être représenté par un arbre dont chaque nœud a au plus huit feuilles. Si l'espace représenté par un nœud est entièrement à l'intérieur ou entièrement à l'extérieur du solide, alors il porte un attribut qui l'indique. Dans le cas contraire, cet espace est subdivisé en huit sous-espaces, et le test est réitéré pour ces sous-espaces. Dans un tel arbre, la racine représente l'espace entier (de préférence un cube), et la feuille de plus grande profondeur la précision maximale de la représentation. Cette représentation porte le nom d'OCTREE [JACKINS - TANIMOTO 1980] [MEAGHER 1982].

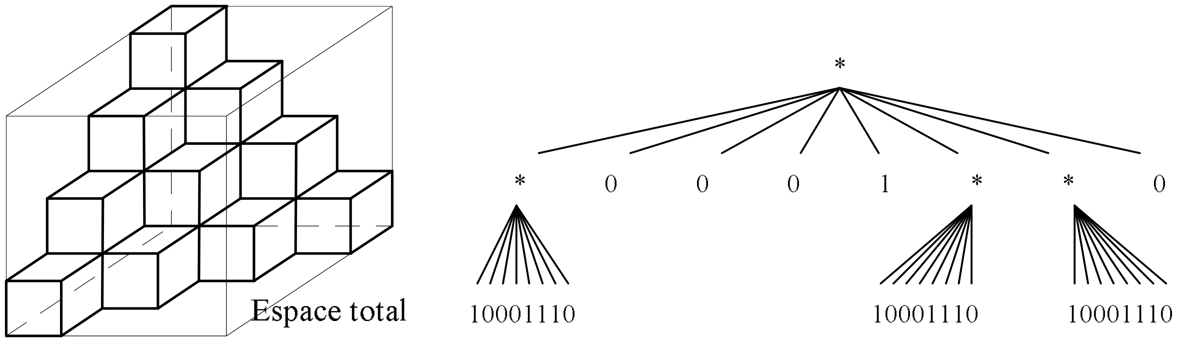


Fig 1 - Représentation de l'espace par OCTREE

Cette représentation, moins gourmande en place mémoire que la précédente, est bien adaptée aux problèmes d'appartenance d'un point à un volume, et aux opérations booléennes, mais ne permet pas de déterminer facilement l'appartenance d'un point à une face du solide.

1.3 - Division de l'espace en cellules

Pour rendre parfaitement compte de la frontière d'un objet, il est possible de le diviser en cellules de formes différentes. Ces cellules peuvent alors épouser des surfaces gauches à la périphérie de l'objet [DUFF 1992], et des formes plus grossières à l'intérieur (maillage adaptatif). Ce type de représentation est très difficile à mettre en œuvre du fait de la nécessité de manipuler des équations de surfaces complexes, et d'assurer la continuité entre les surfaces de deux cellules adjacentes.

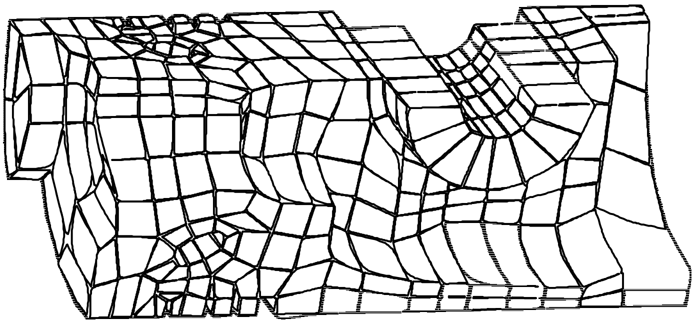


Fig 2 - Division de l'objet en cellules

2 - Représentations surfaciques des solides

Les représentations surfaciques décrivent la frontière d'un objet. Cette frontière est divisée en surfaces définies par un ensemble de points caractéristiques, une équation... Ces représentations sont particulièrement adaptées à des problèmes de déformations, et des problèmes où l'on doit déterminer si un point est ou non sur la surface d'un objet. De plus, pour des objets ne comportant pas de surfaces gauches, et donc représentables par un ensemble de polygones, elles permettent une économie importante en place mémoire par rapport aux méthodes d'énumérations volumiques. On s'intéressera ici à de tels solides, qui sont représentatifs des formes obtenues par gravure chimique d'un monocristal.

2.1 - Représentation par demi-espaces

Un objet convexe pouvant se représenter par une intersection de demi-espaces (intersection finie si l'objet comporte un nombre fini de facettes planes), et tout objet pouvant se décomposer en une union d'objets convexes, on peut écrire :

$S = \bigcup_i SC_i$, où SC_i est un solide convexe défini par une intersection de demi-espaces :

$SC_i = \bigcap_j DE_j^i$, où DE_j^i représente un demi-espace d'équation $ax + by + cz + d = 0$,

d'où :
$$S = \bigcup_i (\bigcap_j DE_j^i)$$

2.2 - Représentation par faces, arêtes et sommets

Dans ce type de représentation, on s'intéresse aux sommets, arêtes et faces d'un solide, et aux relations d'adjacence entre ces objets [MÄNTYLÄ 1988], [ANSALDI *et al* 1985], [WEILER 1985], [WOO 1985].

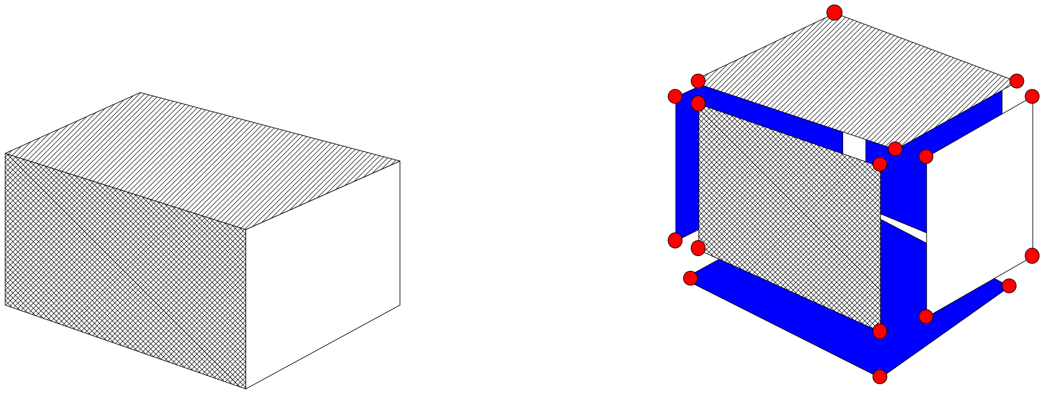


Fig 3 - Représentation d'un solide par faces, arêtes et sommets

On gère des listes chaînées (ou doublement chaînées) de :

- sommets : points particuliers du solide,
- demi-arêtes : segments orientés d'un sommet vers un autre sur la périphérie du solide,
- arêtes : couples de demi-arêtes appariées,
- circuits : ensemble de demi-arêtes successives,
- faces : ensemble de circuits.

Ces listes sont organisées de la façon suivante :

- Les solides sont accessibles par une liste doublement chaînée ;
- Chaque solide donne accès à trois listes :
  - la liste de ses faces, chaque face pointant sur le solide auquel elle appartient
  - la liste de ses arêtes,
  - la liste de ses sommets ;
- Pour chaque face, on mémorise l'équation du plan orienté qui la porte. Chaque face donne également accès à la liste des circuits qui la constituent. Le premier de ces circuits est le circuit extérieur ;
- Chaque circuit donne accès à une liste circulaire de demi-arêtes, chacune pointant à son tour sur le circuit auquel elle appartient ;
- Chaque demi-arête pointe sur son sommet de départ, et sur l'arête à laquelle elle appartient ;
- Chaque sommet pointe sur une des demi-arêtes dont il est l'origine.

```
Solides : Solide ←→ ... ←→ Solide
          3
          3→ Faces : Face ←→ ... ←→ Face
          3          3Equation du plan orienté
          3          3←→ Circuits : Circuit ←→ ... ←→ Circuit
          3          3                3←→ ½ arêtes : ← ½ arête ←→ ... ←→ ½ arête →
          3          3                3              ↑↓                  ↑↓
          3          3                3            origine             origine
          3                                       (sommet)            (sommet)
          3
          3 → Arêtes : Arête ←→ ... ←→ Arête
          3           3←→ Première ½ arête
          3           3←→ Seconde ½ arête
          3
          3
          3→ Sommets : Sommet ←→ ... ←→ Sommet
          3             3→ Coordonnées du sommet
```

2.3 - Choix d'une représentation adaptée au problème de la gravure

La représentation la mieux adaptée à l'implémentation du modèle de Wulff-Jaccodine généralisé en dimension 3 serait une représentation par demi-espaces. La forme initiale doit en effet être représentée par une composition (unions et intersections) de demi-espaces. Le modeleur doit être suffisamment souple (modeleur de type "tool box") pour permettre de rajouter des demi-espaces, même redondants. En effet, pour chaque coin du substrat, le modèle décrit met en jeu les demi-espaces extrêmes (demi-espaces portant les faces du coin) et tous les demi-espaces intermédiaires. L'utilisation d'un tel modeleur permettrait de générer immédiatement le résultat de la gravure par un déplacement paramétré des demi-espaces, chaque demi-espace étant déplacé suivant son orientation.

Faute d'un modeleur vérifiant ces conditions, nous avons choisi une autre représentation, en nous appuyant sur les éléments suivants :

- la gravure est un phénomène local : un traitement particulier est nécessaire au niveau des singularités (sommets et arêtes), alors que les faces infiniment éloignées d'une singularité se propagent parallèlement à leur orientation d'origine, avec une vitesse qui ne dépend que de cette orientation.

- on voit apparaître des faces correspondant aux plans de gravures les plus lents ou les plus rapides localement, et rarement des surfaces gauches. De telles surfaces peuvent, sans inconvénient, être assimilées à un ensemble de facettes planes ; en effet, on utilisera le plus souvent la gravure chimique dans des zones du diagramme d'attaque où la variation de la vitesse en fonction de la direction est importante.

Au vu de ces considérations, nous avons choisi une représentation par faces, arêtes et sommets, qui permet un accès direct aux éléments caractéristiques du problème (singularités géométriques et plans).

3 - Opérateurs agissant sur la structure du solide

Pour construire et manipuler les solides représentés suivant le modèle *winged-edge* (demi-arêtes), on utilisera les opérateurs d'Euler. Ces opérateurs, appliqués à des solides vérifiant la relation d'Euler-Poincaré $2s - 2c - f + e - v = 0$ où :

- s est le nombre de parties distinctes composant le solide (en général : une),
- c est le nombre de cavités (entièrement entourées de matière),
- f, e et v sont les nombres de faces, d'arêtes et de sommets,

garantissent que le solide résultant vérifiera aussi cette relation [WILSON 1985], [MÄNTYLÄ 1988]. Les opérateurs d'Euler utilisés sont désignés par une suite de lettres décrivant l'action effectuée (m pour **m**ake, k pour **k**ill, j pour **j**oin, s pour **s**plit), et les objets concernés (s pour **s**olid, f pour **f**ace, r pour **r**ing, rh pour **r**ing **h**ole, e pour **e**dge, v pour **v**ertex). Les douze opérateurs décrits ici (six opérateurs principaux et leur réciproque) suffisent pour effectuer toutes les modifications de la structure d'un solide représenté par demi-arêtes et garantissent la satisfaction de la relation d'Euler-Poincaré.

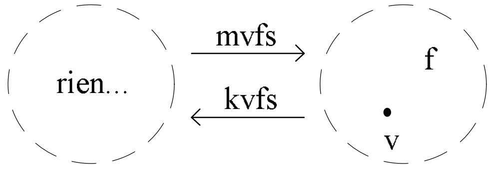


Fig 4 - mvfs (*make vertex, face and solid*) : Création d'un solide comportant un sommet et une face,
kvfs (*kill vertex, face and solid*) : Destruction d'un tel solide

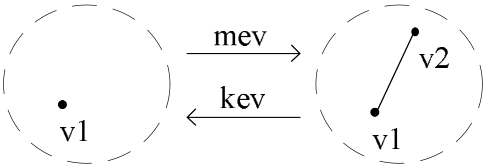


Fig 5 - mev (*make edge and vertex*) : Création d'une arête pendante et de son extrémité libre, kev(*kill edge and vertex*) : Destruction d'une arête pendante et de son extrémité libre

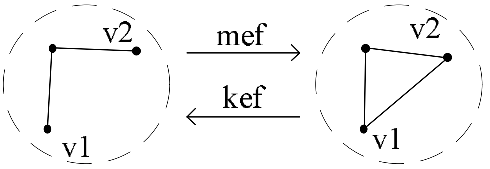


Fig 6 - mef (*make edge and face*) : Création d'une arête qui divise une face en deux kef (*kill edge and face*) : Réunion de deux faces par suppression de l'arête les séparant

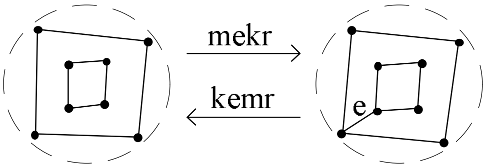


Fig 7 - kemr (*kill edge, make ring*) : Division d'un circuit par suppression d'une arête empruntée dans les deux sens par le circuit,
mekr (*make edge, kill ring*) : Réunion de deux circuits par création d'une arête qui les relie

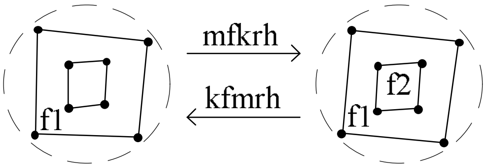


Fig 8 - kfmrh (*kill face, make ring hole*) : Transformation d'une face entourée par une autre en un circuit intérieur de la seconde,
mfkrh (*make face, kill ring hole*) : Transformation d'un circuit interne en une nouvelle face

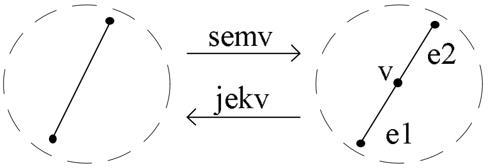


Fig 9 - semv (*split edge, make vertex*) : Division d'une arête par création d'un sommet entre ses extrémités
jekv (*join edge, kill vertex*) : Réunion de deux arêtes consécutives par suppression de leur sommet commun

Ces opérateurs fournissent une bibliothèque d'outils permettant de construire des opérateurs plus complexes, tels ceux décrits dans les paragraphes suivants. Ceci permet de s'affranchir de la structure pour ne plus manipuler que des solides. On peut ainsi créer et manipuler des solides en n'utilisant qu'un sous-ensemble de ces opérations, ou au contraire en en ajoutant de plus complexes, pour augmenter la lisibilité des algorithmes.

4 - Opérateurs agissant sur le solide dans son ensemble

La modélisation de la gravure sur un angle tridimensionnel fait intervenir deux types d'opérations : d'une part la coupe d'un solide (troncature par un plan orienté) pour l'obtention de profils bidimensionnels et d'autre part les opérateurs booléens (union, intersection et différence de deux solides) pour la gravure tridimensionnelle. Il s'est avéré nécessaire de développer d'autres opérateurs que ceux de Mäntylä [MÄNTYLÄ 1986] [MÄNTYLÄ 1988] pour ce problème. En effet, certains cas géométriques n'étaient pas traités par ces opérateurs (voir [MARTIN - MARTIN 1987]). Nous avons donc développé et testé une méthode de troncature d'un solide par un plan et trois méthodes de réalisation des opérations booléennes.

4.1 - Troncature d'un solide par un demi-espace

L'opérateur troncature peut être réalisé à l'aide d'opérateurs booléens : pour tronquer un solide s par un demi-espace de frontière P, il suffit de construire un solide s' compris dans le demi-espace, dont une des faces serait orientée selon P, et suffisamment grand pour que toute la partie de s comprise dans le demi-espace soit comprise dans s' (par exemple un parallélépipède). Le résultat de la troncature sera alors donné par s", différence booléenne de s et s' :   s" = s \ s'

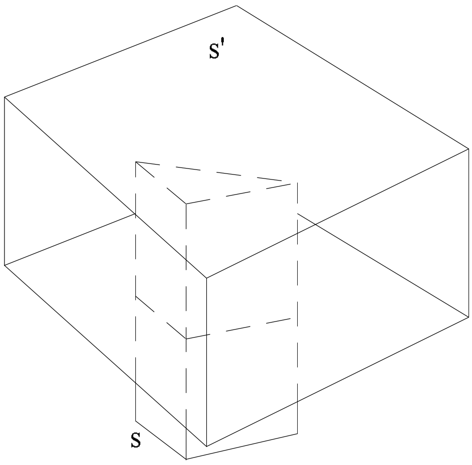


Fig 10 - solide à tronquer s
et parallélépipède s'

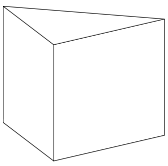


Fig 11 - s" est le résultat
de la différence de s et s'

Pour des raisons de simplicité et de rapidité, il est toutefois préférable de construire un opérateur spécifique pour la troncature. Nous proposons ici un algorithme en trois étapes :

- Détermination de la position de chaque sommet du solide par rapport au demi-espace (à l'intérieur, sur le plan frontière, ou à l'extérieur). Les arêtes dont les extrémités sont de part et d'autre du plan sont coupées en deux pour créer un sommet intermédiaire porté par le plan de coupe.

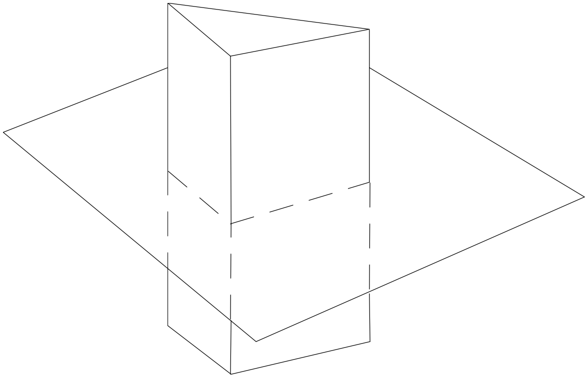


Fig 12 - Détermination de la position de chaque sommet par rapport au demi-espace

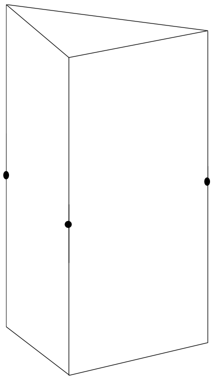


Fig 13 - Création des sommets de l'intersection du solide avec le plan par division des arêtes

- Division des faces coupées par le plan, par création d'arêtes reliant par paire les sommets de cette face qui appartiennent au plan. Cette phase est la plus délicate : les faces considérées n'étant pas forcément convexes, on doit choisir les sommets à relier de façon à ce que l'arête créée reste à l'intérieur de la face.

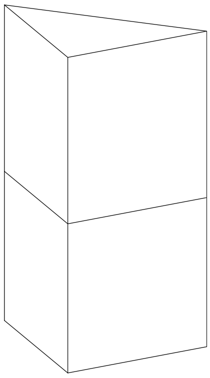


Fig 14 - Création d'arêtes du plan reliant les nouveaux sommets

- Elimination des parties du solide situées à l'extérieur du demi-espace (sommets, arêtes puis faces), pour ne laisser que la partie du solide comprise dans le demi-espace et les arêtes nouvellement créées. Les arêtes sont éliminées différemment suivant leur type : on effectue d'abord une suppression gloutonne des arêtes non pendantes dont les deux extrémités sont à l'extérieur du demi-espace ; la suppression est réalisée en rapprochant les deux extrémités jusqu'à ce qu'elles soient confondues. Elle entraîne donc la suppression d'un sommet. On peut alors effectuer la suppression gloutonne des arêtes dont une extrémité est à l'extérieur du demi-espace. La suppression d'une arête pendante s'accompagne de la suppression de celui de ses sommets qui se trouve à l'extérieur du demi-espace.

Fig 15 - Suppression des arêtes dont les sommets sont à l'extérieur du demi-espace en réduisant leur longueur à 0. Chaque disparition d'une arête entraîne la disparition d'un sommet.

Fig 16 - Suppression des arêtes dont un sommet est à l'extérieur du demi-espace : ceci entraîne la suppression des sommets extérieurs au demi-espace.

La troncature d'un solide s par un demi-espace de frontière P s'écrit donc :

Etape 1 :

```
POUR toute arête (v1,v2) FAIRE
    3 Marquer les sommets v1 et v2 en fonction de leur position
    3       (à l'intérieur du demi-espace, à l'extérieur ou sur la frontière)
    3 SI v1 et v2 sont de part et d'autre du plan P ALORS
    3       3 Diviser l'arête pour faire apparaître un sommet entre v1 et v2
    3       3       qui appartienne au plan P
```

Etape 2 : Relier les sommets d'une même face qui appartiennent au plan P par des arêtes qui restent à l'intérieur de la face

Etape 3 : Supprimer les arêtes dont les sommets sont à l'extérieur du demi-espace

Supprimer les arêtes dont un des sommets est à l'extérieur du demi-espace

Par convention, pour un demi-espace délimité par un plan d'équation

$$ax + by + cz = d,$$

les points de coordonnées (x,y,z) appartenant au demi-espace vérifient la relation

$$ax + by + cz \leq d.$$

4.2 - Opérations booléennes par coupes et collages

La méthode par "coupes et collages" vise à décomposer les solides sur lesquels on doit appliquer l'opérateur en sous-solides par des coupes successives. Cette décomposition utilise l'opérateur unaire de coupe par un demi-espace, implémentable de façon suffisamment rapide et sûre. Les coupes successives permettent de séparer les parties mises à contribution par les opérations booléennes ; en particulier, il est primordial de faire apparaître l'intersection des deux solides à traiter, car elle interviendra toujours dans le résultat.

Le résultat de l'opération booléenne est construit à partir de certains des sous-solides créés par les coupes : une fois les parties inutiles supprimées, une phase de "collage" des solides restants intervient. Coller deux faces géométriquement confondues revient à modifier localement les relations d'adjacence concernant chacune de ces faces. On notera que, dans le cas de faces qui ne sont pas géométriquement confondues (une face incluse dans l'autre, ou deux faces en porte-à-faux), le collage nécessitera une division préalable des faces en sous-faces, puis un collage des sous-faces géométriquement confondues.

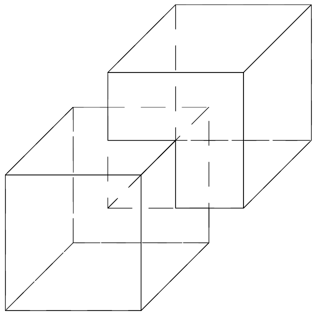


Fig 17 - Solides dont on veut construire la différence

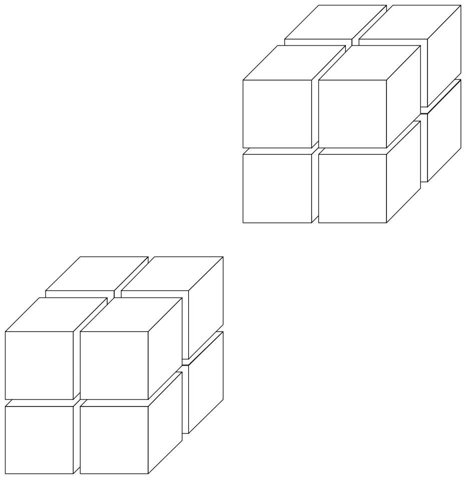


Fig 18 - Solides après division en sous-solides par des coupes successives (vue éclatée)

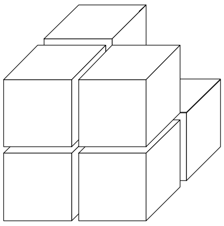


Fig 19 - Sous-solides intervenant dans le résultat (vue éclatée)

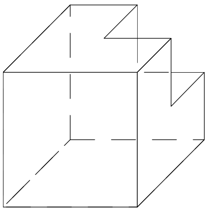


Fig 20 - Solide résultat après collage des sous-solides

On notera également que pour être sûr que l'intersection des deux solides à traiter apparaisse (sous forme d'un ou plusieurs sous-solides), il peut s'avérer nécessaire de couper chacun des solides par toutes les directions des faces des deux solides. Par conséquent, même pour des solides de départ convexes, le nombre de solides peut être multiplié par 2 à chaque coupe (croissance en 2^n). On est alors amené à effectuer un très grand nombre de collages.

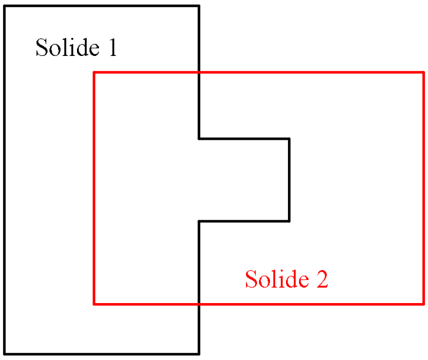


Fig 21 - Solides de départ comportant respectivement 8 et 4 faces

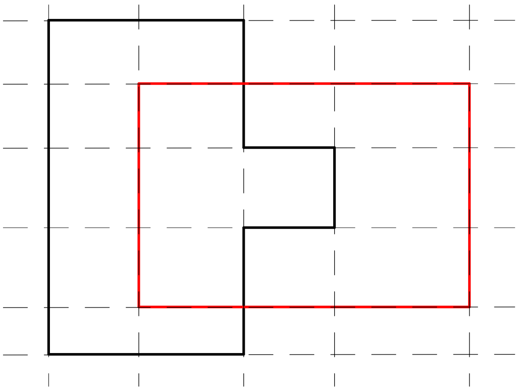


Fig 22 - Coupes suivant les directions de toutes les faces (11 coupes)

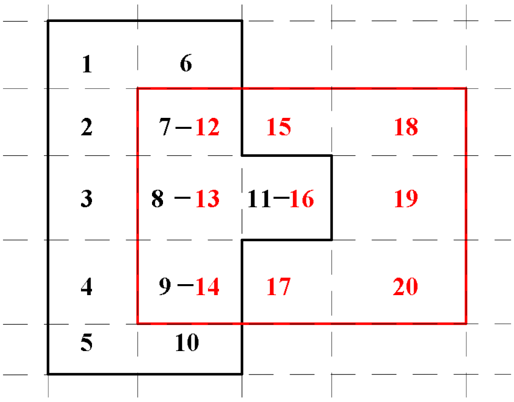


Fig 23 - Explosion du nombre de sous-solides (20 sous-solides malgré la simplicité des solides de départ)

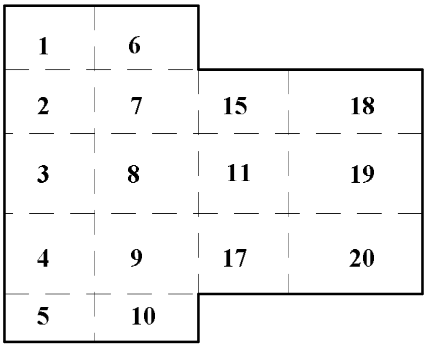


Fig 24 - Construction du résultat de l'opération booléenne (ici, l'union) par collage des sous-solides non redondants (23 collages)

L'utilisation de cette méthode conduit vite à une explosion du temps de traitement des collages, qui représentent la partie la plus lente du processus. En effet, un collage nécessite de nombreux parcours de la structure (en particulier des listes de demi-arêtes) pour situer chaque sommet d'une face par rapport à chaque sommet d'une autre face.

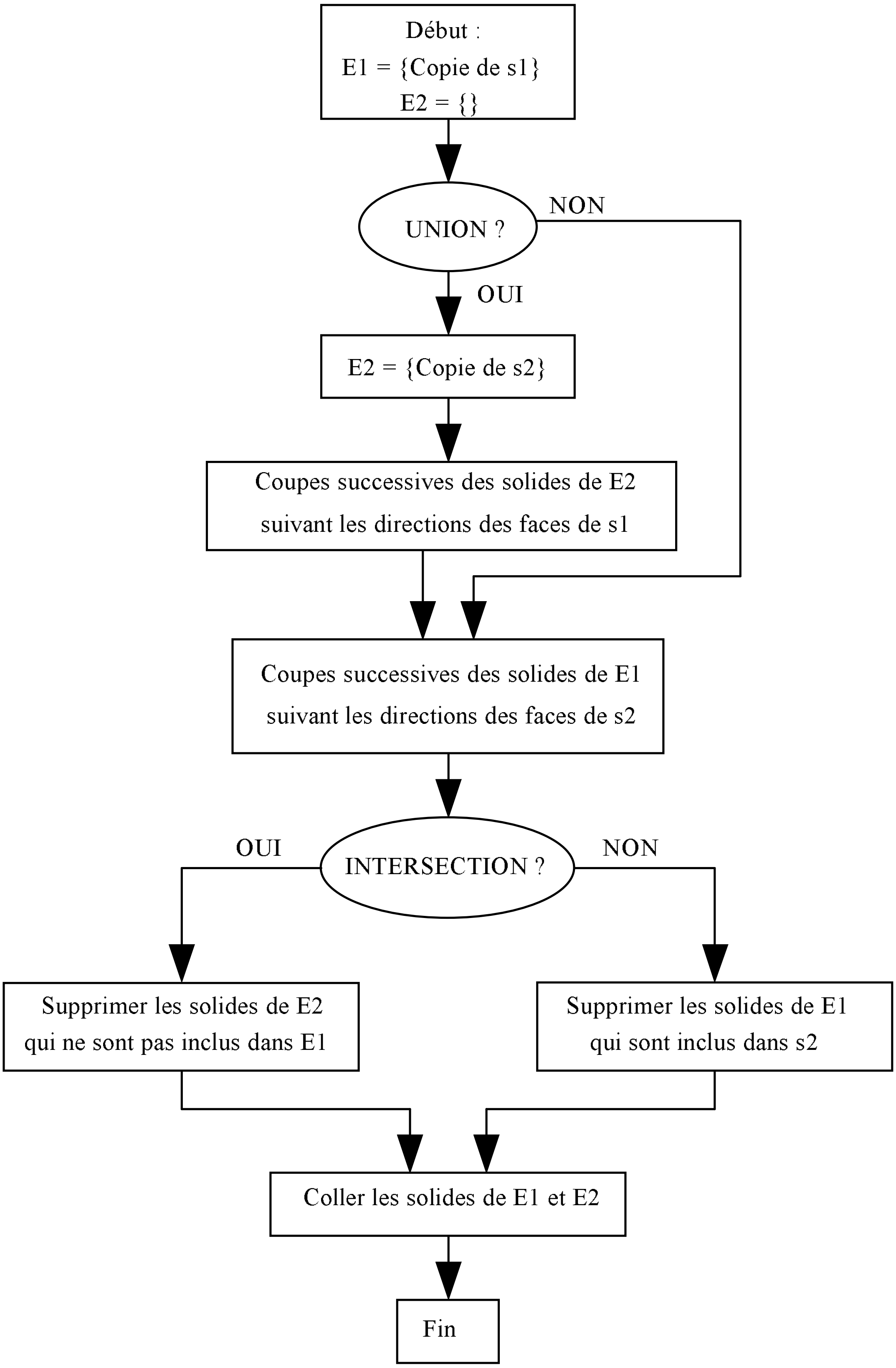
Cette méthode, bien que très simple de principe et facile à implémenter, pose donc de gros problèmes pratiques. Pour la rendre exploitable, il faudrait impérativement diminuer le nombre de collages (donc le nombre de solides créés par les coupes).

L'algorithme utilisé pour la méthode des coupes et collages est le suivant :

Soit à effectuer l'opération booléenne "op" sur les solides s_1 et s_2. Trois opérations sont possibles : s_1 UNION s_2, s_1 INTERSECTION s_2, et s_1 DIFFERENCE s_2.

```
Au départ :  $E_1$ est un ensemble de solides ne contenant qu'une copie du solide $s_1$
             $E_2$ est un ensemble vide

Etape 1 :    SI op = UNION ALORS
                 ³ Ajouter une copie du solide $s_2$ à l'ensemble $E_2$
                 ³ POUR toute face $f_1$ de $s_1$ FAIRE
                 ³     ³ POUR tout solide s de l'ensemble $E_2$ FAIRE
                 ³     ³     Supprimer s de l'ensemble $E_2$
                 ³     ³     Ajouter à $E_2$ le(s) solide(s) obtenu(s) par la coupe de s
                 ³     ³          suivant la direction de $f_1$

Etape 2 :    POUR toute face $f_2$ de $s_2$ FAIRE
                 ³ POUR tout solide s de l'ensemble $E_1$ FAIRE
                 ³     ³ Supprimer s de l'ensemble $E_1$
                 ³     ³ Ajouter à $E_1$ le(s) solide(s) obtenu(s) par la coupe de s suivant
                 ³           la direction de $f_2$

Etape 3 :    SI op = INTERSECTION ALORS
                 ³ Supprimer les solides de $E_1$ qui ne sont pas inclus dans $s_2$
             SINON
                 ³ Supprimer les solides de $E_1$ qui sont inclus dans $s_2$

Etape 4 :    Coller ensemble (face par face) tous les solides des ensembles $E_1$ et $E_2$
```

Fig 25 - **Méthode des coupes et collages :**



4.3 - Opérations booléennes par évolution d'une surface

La méthode dite "d'évolution de surface" s'apparente à l'algorithme glouton de calcul de l'enveloppe convexe d'une famille de points [CARLIER - SZAFRAN 1989]. Partant d'un solide de départ simple à créer, elle le fait évoluer pas à pas vers le résultat désiré, en prenant en compte un par un les sommets du solide à traiter. Le principe est le suivant : pour chacun de ces sommets, on détermine quelles faces du solide de départ (ce solide peut être l'un des deux solides) sont visibles. Ces faces sont alors supprimées, et le sommet traité est relié à la bordure de ces faces (lorsque seule une face est visible, on crée donc une pyramide ayant pour base cette face, et pour sommet le sommet traité. Un sommet depuis lequel aucune face n'est visible est mis en réserve, et sera traité ultérieurement.

En fonction de l'opération à effectuer, les faces évoluent de la façon suivante :

- pour effectuer l'union de deux solides 1 et 2, les faces du solide 1 qui sont à l'intérieur du solide 2 sont déplacées vers les sommets du solide 2 qui sont à l'extérieur du solide 1

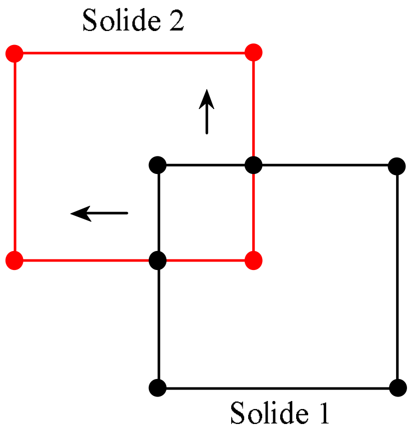


Fig 26 - Evolution du solide 1 vers l'union des deux solides

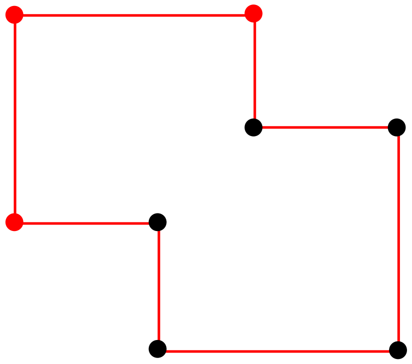


Fig 27 - Résultat de l'union des deux solides

- pour effectuer l'intersection entre les solides 1 et 2, les faces du solide 1 qui sont à l'extérieur du solide 2 sont déplacées vers les sommets du solide 2 qui sont à l'intérieur du solide 1

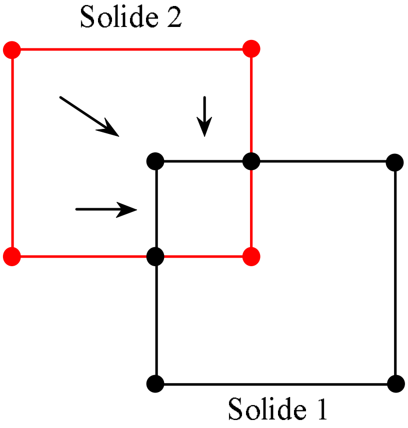


Fig 28 - Evolution du solide 1 vers l'intersection des deux solides

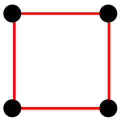


Fig 29 - Résultat de l'intersection des deux solides

- pour effectuer la différence entre les solides 1 et 2 (Solide 1 - Solide 2), les faces du solide 1 qui sont à l'intérieur du solide 2 évoluent vers les sommets du solide 2 qui sont à l'intérieur du solide 1.

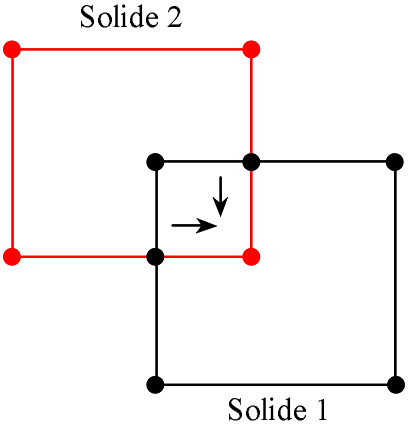


Fig 30 - Evolution du solide 1 vers la différence des deux solides

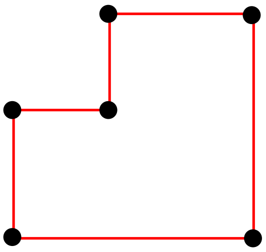


Fig 31 - Résultat de la différence des deux solides

L'algorithme utilisé pour la méthode d'évolution d'une surface est le suivant :

Soient deux solides s_1 et s_2. Trois opérations peuvent être appliquées à s_1 et s_2 : s_1 UNION s_2, s_1 INTERSECTION s_2, et s_1 DIFFERENCE s_2.

Notation : On appelle face non-extérieure à un solide une face dont un sommet au moins est à l'intérieur du solide ou sur sa surface.

Etape 1 : Faire apparaître les sommets et les arêtes de l'intersection des deux solides en divisant au besoin certaines arêtes des solides.

Etape 2 :

```
SELON op :
    ³ SI op = INTERSECTION ALORS
    ³       ³ Faire évoluer les faces de $s_1$ non-incluses dans $s_2$ vers les
    ³       ³       sommets de $s_2$ non-extérieurs à $s_1$
    ³ SI op = DIFFERENCE ALORS
    ³       ³ Faire évoluer les faces de $s_1$ non-extérieures à $s_2$ vers les
    ³       ³       sommets de $s_2$ non-extérieurs à $s_1$
    ³ SI op = UNION ALORS
    ³       ³ Faire évoluer les faces de $s_1$ non-extérieures à $s_2$ vers les
    ³       ³       sommets de $s_2$ non-inclus dans $s_1$
```

L'évolution des faces s_a d'un solide vérifiant un critère c_a vers les sommets d'un solide s_b vérifiant un critère c_b se fait de la façon suivante :

```
TANT QU'il existe un sommet V de $s_b$ non traité, et vérifiant le critère $c_b$ FAIRE
    ³ SI des faces de $s_a$ vérifiant le critère $c_a$ sont visibles depuis V ALORS
    ³       ³ POUR chacune de ces faces FAIRE
    ³       ³       ³ Relier le sommet v à tous les sommets de la face de façon à
    ³       ³       ³       construire une pyramide
    ³       ³       ³ Supprimer la face
    ³ SINON
    ³       ³ Le sommet sera traité plus tard
```

Fig 32 - **Méthode générale d'évolution d'une surface :**

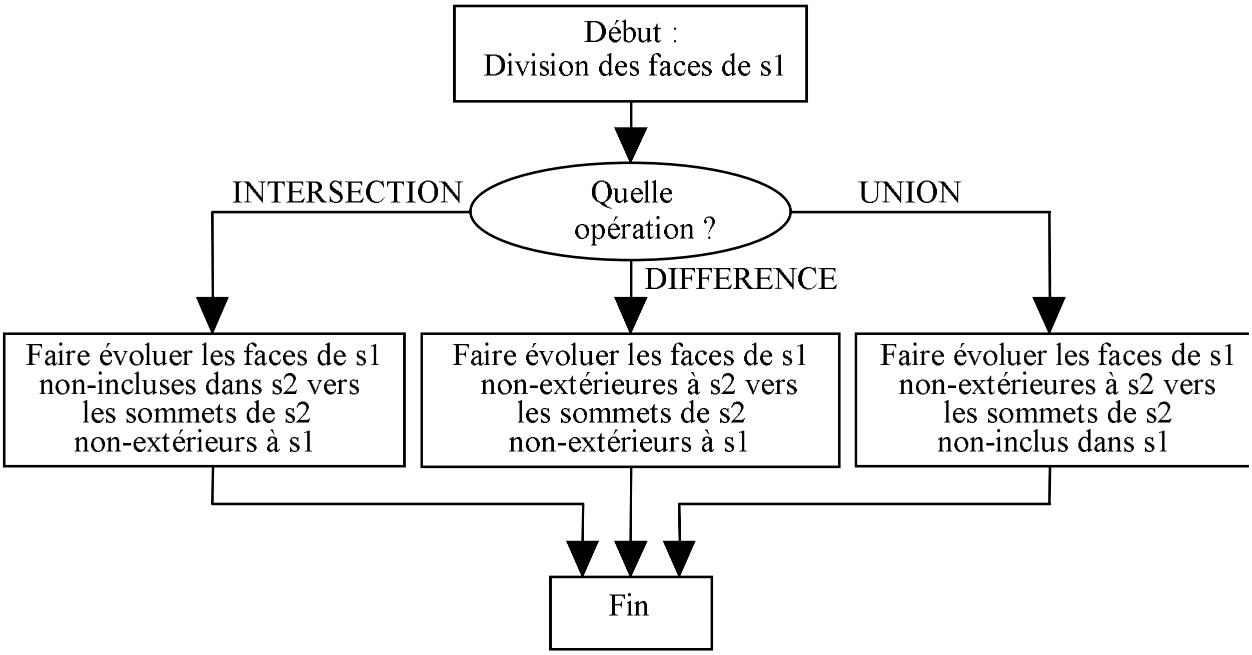
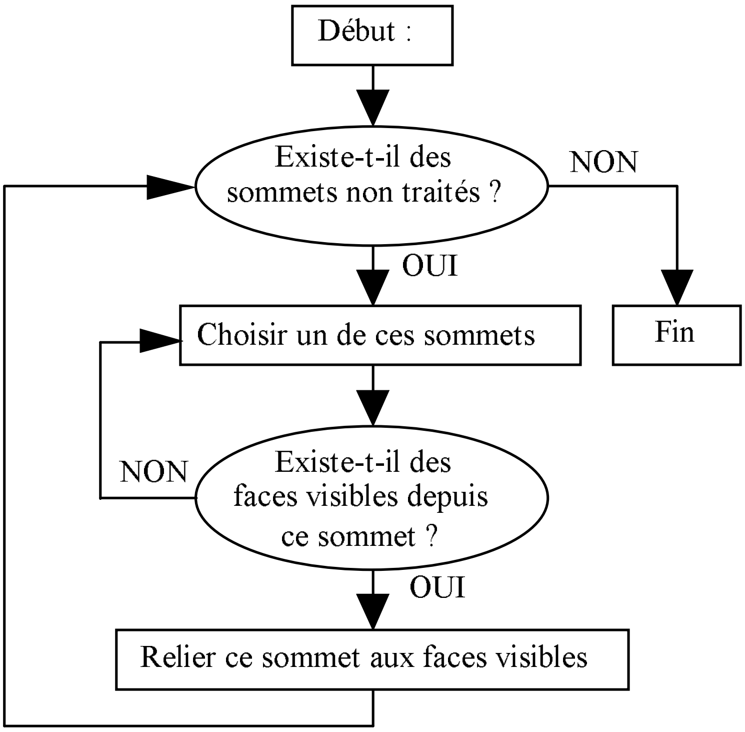


Fig 33 - **Evolution d'une surface :**



Cette méthode pose le problème de la définition d'un critère fiable de visibilité d'une face depuis un point pour les solides non-convexes. L'approche utilisée est la suivante : si une face est entièrement visible depuis un sommet V, la pyramide ayant pour base cette face et comme sommet le sommet V n'intersecte aucun autre solide. On est donc amené à traduire la visibilité en terme d'existence d'une intersection entre deux solides.

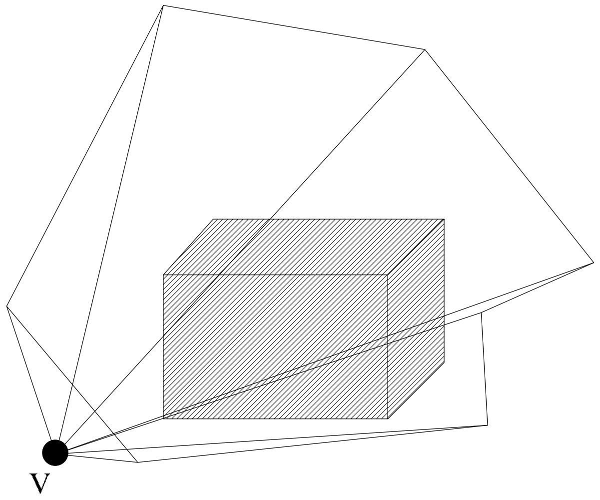


Fig 34 - Absence de visibilité d'une face depuis le point V du fait d'un obstacle

L'existence d'une intersection entre deux solides, quant à elle, est déterminée grâce à des considérations faciles à implémenter :

- si un sommet d'un solide s1 est à l'intérieur (strictement) d'un solide s2, alors s1 et s2 s'intersectent,

- si une arête d'un solide s1 coupe une face (strictement à l'intérieur de celle-ci) d'un solide s2, alors les solides s1 et s2 s'intersectent,

- si aucune des propriétés précédentes n'est vérifiée, on doit examiner toutes les intersections des arêtes du solide s1 avec les faces du solide s2. S'il n'existe aucune intersection, les solides sont disjoints. S'il existe de telles intersections, on doit pour chaque arête de s1 examiner les segments formés par les points d'intersection consécutifs. Si un point quelconque strictement à l'intérieur d'un de ces segments est à l'intérieur du solide s2, alors s1 et s2 s'intersectent.

Cette phase est la plus lourde de la méthode. Les nombreux parcours de la structure qu'elle nécessite rendent sa complexité élevée. De plus, nous n'avons pas pu construire la preuve rigoureuse de la méthode, ce qui la rend difficilement exploitable. Par contre, la position d'un point par rapport à un solide est déterminée simplement par comptage du nombre d'intersections du solide et d'un rayon infini partant du point étudié.

4.4 - Opérations booléennes par assemblage de faces orientées

Le meilleur rapport (Performances / Temps de calcul) a été obtenu grâce à une décomposition de chaque solide en faces. Chaque face d'un solide est tout d'abord divisée suivant les plans de toutes les faces qui l'intersectent. Ces divisions ont pour effet de faire apparaître les arêtes du résultat de l'opération booléenne à effectuer sous forme d'une ou plusieurs arêtes appartenant à l'un ou l'autre solide. Les faces sont ensuite classées suivant leur position par rapport à l'autre solide (à l'intérieur, à l'extérieur, ou sur la périphérie). Enfin, on construit le résultat en ne gardant que les faces qui le composent. Les arêtes inutiles sont éliminées grâce à une procédure d'optimisation de la structure (fusion des faces coplanaires et adjacentes, suppression des arêtes pendantes,...). Cette méthode est à rapprocher de la décomposition de chaque face en triangles et l'assemblage d'un sous-ensemble des triangles créés [YAMAGUCHI - TOKIEDA 1984].

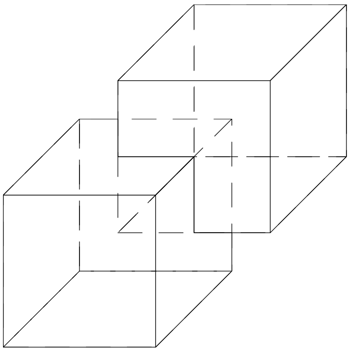


Fig 35 - Solides dont on veut construire la différence

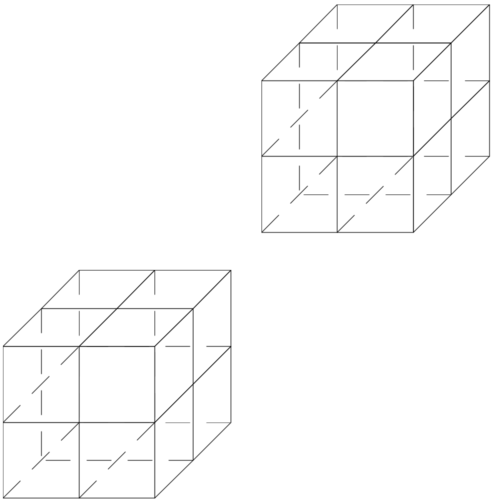


Fig 36 - Solides après division des faces (vue éclatée)

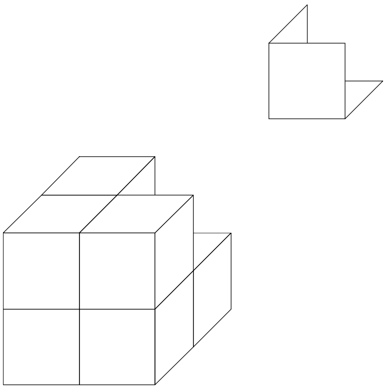


Fig 37 - Faces intervenant dans le résultat (vue éclatée)

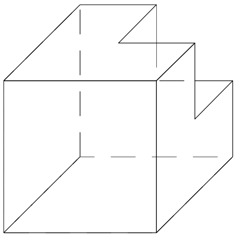


Fig 38 - Résultat de la différence booléenne après assemblage des faces et optimisation

L'algorithme utilisé pour la méthode d'assemblage de faces orientées est le suivant :

Soit à effectuer l'opération booléenne "op" sur les solides s_1 et s_2. Trois opérations sont possibles : s_1 UNION s_2, s_1 INTERSECTION s_2, et s_1 DIFFERENCE s_2.

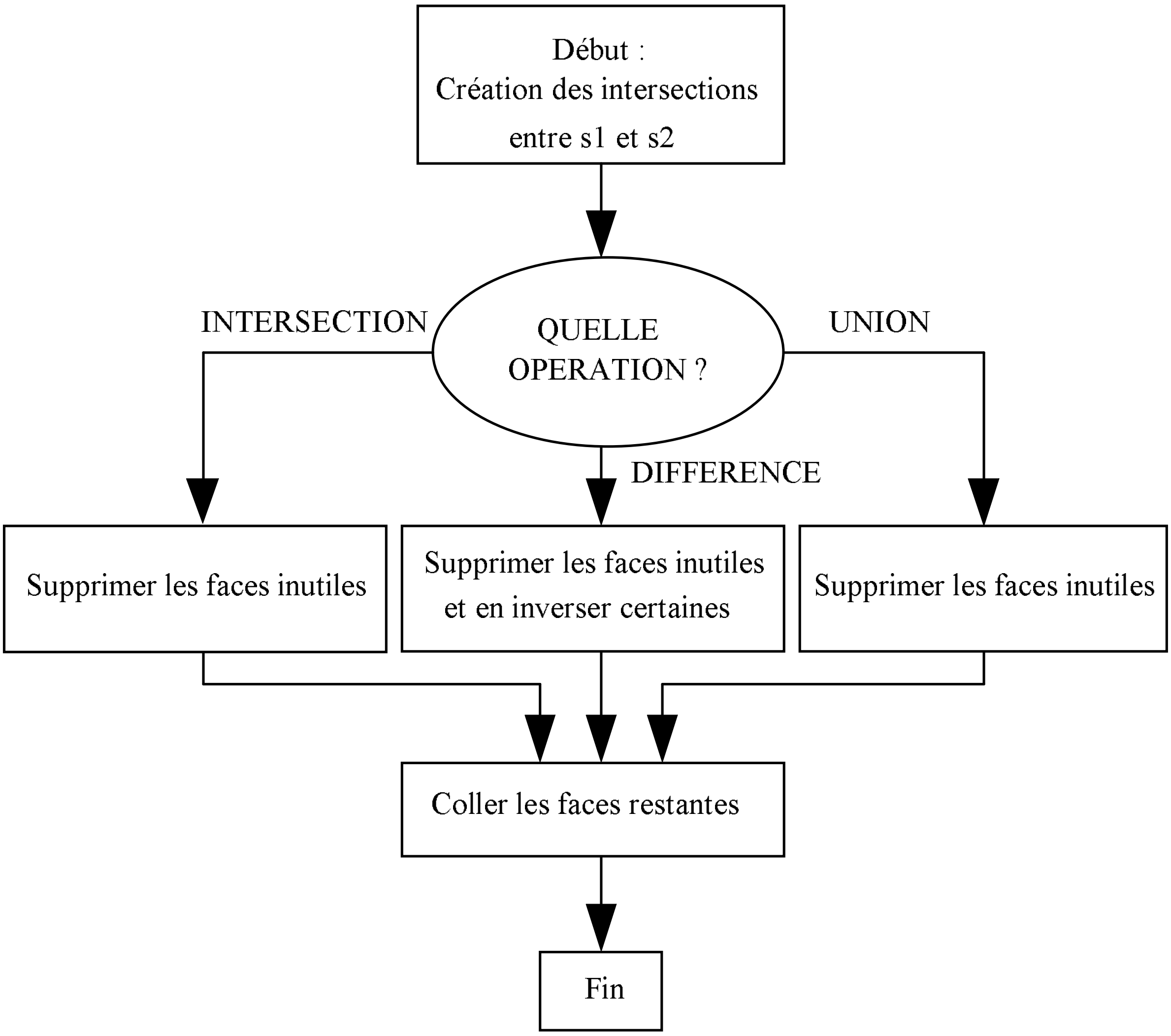
Etape 1 : Diviser les faces de s_1 pour faire apparaître les sommets et les arêtes de l'intersection des deux solides

Etape 2 :

```
SELON op :
          3 SI op = INTERSECTION ALORS
          3       3 Supprimer   - les faces de s1 extérieures à s2
          3       3             - les faces de s2 extérieures à s1
          3       3             - les faces de s1 situées sur s2, et qui sont
          3       3                     orientées vers l'intérieur de s2
          3       3             - les faces de s2 situées sur s1
          3
          3 SI op = DIFFERENCE ALORS
          3       3 Supprimer   - les faces de s1 intérieures à s2
          3       3             - les faces de s2 extérieures à s1
          3       3             - les faces de s2 situées sur s1
          3       3             - les faces de s1 situées sur s2
          3       3 Changer l'orientation des faces de s2 extérieures à s1
          3
          3 SI op = UNION ALORS
          3       3 Supprimer   - les faces de s1 intérieures à s2
          3       3             - les faces de s2 intérieures à s2
          3       3             - les faces de s1 situées sur s2, et qui sont
          3       3                     orientées vers l'intérieur de s2
          3       3             - les faces de s2 situées sur s1
```

Etape 3 : Reconstituer le solide résultat à partir de l'ensemble des faces restantes par appariement des demi-arêtes opposées, et simplification de la structure finale.

Fig 39 - **Réalisation des opérations booléennes par assemblage de faces :**



5 - Performances et fiabilité des opérateurs développés

Les deux premières méthodes expérimentées pour réaliser les opérations booléennes souffrent de défauts importants :

- la méthode des coupes et collages conduit à une explosion du nombre d'objets
- la méthode d'évolution d'une surface est complexe, donc difficile à tester

Nous avons donc utilisé les opérateurs booléens utilisant l'assemblage de faces pour modéliser la gravure chimique. Ces opérateurs semblent suffire pour des objets de faible complexité (faible nombre de faces, arêtes et sommets) et bien formés : objets dont aucune arête n'a une longueur nulle ou proche de 0, aucune arête pendante, aucune face de surface nulle...

On observe toutefois, après plusieurs opérations, une détérioration de la précision sur les coordonnées des sommets. Cette détérioration, malgré l'utilisation de tolérances sur la position d'un point par rapport à un autre objet [SEGAL 1990], peut provoquer une modification incorrecte de la structure (en particulier l'apparition de demi-arêtes non appariées) qui conduit rapidement à une faute d'exécution. Ce problème concerne particulièrement les opérations sur des objets très proches, dont les positions relatives deviennent incertaines. L'utilisation d'une arithmétique rationnelle [BENOUAMER *et al* 1994] permet d'éliminer ces incertitudes.

6 - Bibliographie

ANSALDI S. - DE FLORIANI L. - FALCIDIENO B. (1985)
"Geometric modeling of solid objects by using a face adjacency graph representation", *Computer Graphics* vol 19, n° 3, pp 131-139

BENOUAMER M. O. - MICHELUCCI D. - PEROCHE B. (1994)
"Error-free boundary evaluation based on a lazy rational arithmetic : a detailed implementation", *Computer-Aided Design* vol 26, n° 6, pp 403-416

CARLIER T. - SZAFRAN N. (1989)
"Structure de données pour la représentation et la manipulation de polyèdres", Rapport de recherche 772-M de l'Université Joseph FOURIER de GRENOBLE

DUFF T. (1992)
"Interval arithmetic and recursive subdivision for implicit functions and constructive solid geometry", *IEEE Computer Graphics* vol 26, n° 2, pp 131-138

JACKINS C. L. - TANIMOTO L. (1980)
"Octrees and their use in representing three-dimensional objects", *IEEE Computer Graphics and Image Processing* vol 14, 1980, pp 249-270

MÄNTYLÄ M. (1986)
"Boolean operations of 2-manifolds through vertex neighborhood classification", *ACM Transactions on Graphics*, vol 5, n° 1, pp 1-29

MÄNTYLÄ M. (1988)
"An introduction to solid modeling", ISBN 0-88175-108-1, Computer Science Press

MARTIN P. - MARTIN D. (1987)
"Les difficultés et les erreurs possibles dans les algorithmes de calcul de l'intersection de solides définis par leur bord", Université de NANTES, Communication à MARI-87

MEAGHER D. (1982)
"Geometric modeling using octree encoding", *Computer Graphics and Image Processing*, vol 19, n° 2, pp 129-147

SEGAL M. (1990)
"Using tolerances to guarantee valid polyhedral modeling results", *IEEE Computer Graphics* vol 24, n° 4, pp 105-114

WEILER K. (1985)
"Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments", *IEEE Computer Graphics and Applications* vol 5, n° 1, pp 21-40

WILSON P. R. (1985)
"Euler Formulas and Geometric Modeling", *IEEE Computer Graphics and Applications* vol 5, n° 8, pp 24-36

WOO T. C. (1985)
"A combinatorial analysis of boundary data structure schemata", *IEEE Computer Graphics and Applications* vol 5, n° 3, pp 19-27

YAMAGUCHI F. - TOKIEDA T. (1984)
"A Unified Algorithm for Boolean Shape Operations", *IEEE Computer Graphics and Applications* vol 4, n° 6, pp 24-37