



HAL
open science

Assimilation de données et analyse de sensibilité. Une application à la circulation océanique

Hans Emmanuel Ngodock

► **To cite this version:**

Hans Emmanuel Ngodock. Assimilation de données et analyse de sensibilité. Une application à la circulation océanique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1996. Français. NNT: . tel-00005006

HAL Id: tel-00005006

<https://theses.hal.science/tel-00005006>

Submitted on 23 Feb 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée par
NGODOCK Hans Emmanuel

Pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I.
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées.**

**Assimilation de données et Analyse de sensibilité:
Une application à la circulation océanique.**

Date de soutenance : 25 Mars 1996.

Composition du jury :

M. J. BLUM	Président
M. O. TALAGRAND	Rapporteur
M. G. CHAVENT	Rapporteur
M. C. LE PROVOST	Examineur
M. F. X. LE DIMET	Directeur
M. E. BLAYO	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Projet IDOPT (CNRS/INPG/UJF/INRIA)

en collaboration avec l'équipe MEOM du laboratoire LEGI-IMG

Table des matières

Introduction.	1
I Généralités sur le modèle QG et l'assimilation variationnelle.	5
1.1 Le modèle de circulation Quasi-Géostrophique	5
1.1.1 Introduction.	5
1.1.2 Hypothèses d'approximation et les équations.	5
1.1.3 Passage de couches en modes.	10
1.1.4 Conditions aux limites.	11
1.2 Assimilation variationnelle: Formalisme général	12
1.2.1 Formulation du problème discrétisé.	13
1.2.2 Calcul du gradient et détermination de la condition d'optimalité	14
II Analyse de sensibilité.	19
2.1 Introduction	19
2.2 Théorie générale de l'analyse de sensibilité	20
2.2.1 Méthode de sensibilité directe	22
2.2.2 Méthode de sensibilité par les équations adjointes	23
2.2.3 Cadre mathématique pour la méthode de sensibilité adjointe	24
2.3 Formulation faible de la méthode adjointe d'analyse de sensibilité	28
2.3.1 Formulation lagrangienne	31
III Analyse de sensibilité et assimilation variationnelle.	37
3.1 Introduction et position du problème	37
3.2 Exemple	38
3.3 Rappels sur l'assimilation variationnelle: formulation générale	41
3.3.1 Quelques rappels de calcul différentiel	42
3.3.2 Système d'optimalité	44
3.4 Choix du modèle et justification	44
3.5 Application à l'assimilation variationnelle de données	46
3.5.1 Remarques	48
3.5.2 Calcul pratique du gradient de \mathcal{G}	49
3.5.3 Le Hessien de la fonction-coût	50
3.5.4 Symétrie du Hessien	51

3.5.5	Démonstration du théorème	53
3.6	Sensibilité de la condition initiale optimale	57
3.6.1	Calcul pratique de la sensibilité de la condition initiale	60
3.7	Application aux équations QG	63
3.8	Résultats numériques	65
3.8.1	Sensibilité de la condition initiale optimale	66
3.8.2	Sensibilité des critères fonctionnels	70
3.8.3	Comparaison	77
3.8.4	Coût de la méthode	86
3.9	Analyse de sensibilité et prévision	87
IV	L'existence et l'unicité de la solution du modèle Q.G. adjoint au second ordre	89
4.1	Introduction	89
4.2	Majoration de \mathbf{Q} dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{H}^2(\Omega))$	93
4.3	Majoration de $\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{H}^1(\Omega))$	104
4.4	Majoration de \mathbf{Q} dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{H}^3(\Omega))$	112
4.5	Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. adjointe au second ordre.	129
4.5.1	Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. non linéaire. . .	130
4.5.2	Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. linéarisée. . . .	130
4.5.3	Cadre fonctionnel	132
4.5.4	Énoncé et démonstration du théorème.	138
4.6	Qualité de l'approximation du Hessien.	142
V	Sensibilité par rapport à la configuration spatio-temporelle des observations.	147
5.1	Introduction et position du problème	147
5.2	Historique de l'observation de l'océan: de l'antiquité à l'ère spatiale	149
5.2.1	Les premiers océanographes	149
5.2.2	Les débuts de la recherche	149
5.2.3	La maturité	149
5.2.4	L'ère spatiale	150
5.2.5	Observer depuis l'espace	150
5.3	Sensibilité directe: prise en compte des paramètres d'observation	151
5.3.1	Remarques	153
5.4	Importance de l'opérateur C	154
5.4.1	Le rôle du Hessien en assimilation variationnelle de données	156
5.5	Comment comparer	159
5.5.1	Le conditionnement du Hessien	160
5.5.2	Décomposition spectrale du Hessien	163
5.5.3	La variance d'une forme linéaire	165
5.6	Résultats numériques	167
5.7	Sensibilité de la prédictibilité par rapport à C	173

5.7.1	Exposants Classiques de Lyapunov en dimension finie	174
5.7.2	Calcul pratique des ECL	174
5.7.3	Exposants Locaux de Lyapunov	175
5.7.4	Exposants de Lyapunov d'une série temporelle de données	177
5.7.5	Détermination pratique des D_{X_i}	180
5.7.6	Application à l'assimilation variationnelle	183
5.7.7	Résultats numériques	185
	Conclusion.	193
	Bibliographie.	197

Introduction.

L'un des grands sujets d'actualité de ces deux dernières décennies est la connaissance de l'environnement et plus précisément la prévision du climat de notre planète. C'est ce qui a motivé le lancement (au début des années 80) du Programme Mondial d'Etude du Climat "*Global Change*" dont le but est lié à de nombreuses questions: réchauffement de l'atmosphère, couche d'ozone, montée du niveau des mers, pollution, écologie... etc. Ce programme doit permettre d'améliorer la connaissance des processus climatiques terrestres. Ceci passe par l'étude et la compréhension de deux grandes composantes qui sont l'atmosphère et l'océan et de leurs interactions mutuelles. Dans ce travail nous nous intéressons essentiellement à la composante océanique dans une modélisation de type quasi-géostrophique.

A travers les deux dernières décennies, un intérêt croissant porté sur l'étude de la circulation océanique générale et son rôle dans les processus climatiques a motivé l'utilisation des méthodes inverses et l'assimilation de données pour améliorer la connaissance de l'océan. Ces méthodes permettent de combiner l'information sur "*l'état réel*" de l'océan qui est contenue dans un ensemble de mesures avec l'information sur les processus dynamiques importants de l'océan. Les méthodes inverses peuvent être considérées comme une approche d'interpolation ou de lissage d'un ensemble de données en espace et en temps où le modèle agit comme une contrainte dynamique. Ceci permet de trouver une estimation plus réaliste de "*l'état réel*" de l'océan que celle obtenue à partir des données ou du modèle uniquement. Un ensemble de données est normalement dispersé en espace et en temps et ne résout pas en temps et en espace toutes les échelles physiques d'intérêt. Parallèlement, un modèle dynamique ne contient que l'information sur l'interaction des processus physiques pris en compte dans les équations du modèle et les solutions du modèle sont en général déterminées à partir d'une condition initiale ou des conditions aux bords et un forçage mal connus. Ainsi, pour trouver la meilleure estimation possible de "*l'état réel*" du système physique, il est nécessaire d'utiliser toutes les informations disponibles à partir du modèle et des données. L'assimilation de données est donc une réponse cohérente à ce propos.

Depuis ces dernières années, l'assimilation de données a pris une importance croissante dans la quasi-totalité des branches scientifiques. Cette technique s'est montrée très

efficace soit pour tester les modélisations des processus physiques (d'où une meilleure compréhension des phénomènes) soit pour déterminer les états du système étudié d'où une amélioration de la fiabilité des prévisions numériques.

Il existe actuellement deux grandes techniques d'assimilation de données :

- Le filtre de Kalman: c'est une technique stochastique qui requiert des hypothèses et des connaissances préalables sur le bruit des données l'erreur du modèle et du point de départ de l'assimilation «*first guess*». Il a été utilisé par: GHIL et MALANOTTE-RIZZOLI [32] [30] [31] l'EVENSEN [22] [19] [20] l'FUKUMORI [26] [25] l'TALAGRAND [96] [95]
- La méthode variationnelle qui est basée sur la théorie du contrôle optimal de J.L. LIONS [65]. C'est dans le cadre de cette deuxième méthode que se fera notre travail.

Le formalisme variationnel en météorologie a été introduit pour la première fois par SASAKI [90]. Cette technique a connu un développement extraordinaire tant du point de vue formel que du point de vue algorithmique comme en témoignent les nombreux résultats obtenus par les divers auteurs dans la littérature à ce sujet.

En océanographie cette recherche se base sur le travail des météorologistes jouissant d'une plus longue expérience dans le domaine de l'assimilation. L'assimilation variationnelle de données dans les modèles de circulation océaniques a déjà fait l'objet de plusieurs travaux notamment: MOORE [70] l'SCHRÖTER, SEILER et WENZEL [91] l'DE MEY et MORROW [13] l'EVENSEN [21] et B. LUONG [68] [69].

Le but de ce travail est de faire une étude *a posteriori* de l'assimilation variationnelle de données. C'est avant tout un travail de prospection pour la mise au point des outils permettant de faire une analyse diagnostique (qualitative et quantitative) du processus d'assimilation variationnelle notamment en ce qui concerne:

- l'influence du bruit des observations sur le processus d'assimilation et sa propagation sur les champs reconstitués. Nous serons alors amenés à faire une étude de sensibilité;
- l'influence de la configuration spatio-temporelle des observations sur le processus d'assimilation. Ceci est actuellement d'une grande importance surtout pour les observations satellitaires pour lesquelles on aimerait lancer des satellites avec des configurations orbitales (inclinaison l'altitude l'période de révolution) optimales.

Ce travail fait suite à la thèse de B. LUONG qui a étudié l'applicabilité des méthodes de contrôle optimal pour l'assimilation de données d'altimétrie satellitaire dans un modèle de circulation générale océanique quasi-géostrophique du LEGI-IMG¹. Nous ne reviendrons alors que très peu sur le problème d'assimilation proprement dit par contre nous nous étendrons sur la question de l'étude *a posteriori* de l'assimilation.

Nous commencerons au premier chapitre par rappeler le modèle QG les généralités sur l'assimilation variationnelle et son application au modèle. Au second chapitre nous

1. Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels, Institut de Mécanique de Grenoble

présenterons la formulation de l'analyse de sensibilité. Le troisième chapitre sera consacré à l'application de l'analyse de sensibilité dans le cadre de l'assimilation variationnelle. Nous verrons qu'il faut s'y prendre de façon différente de ce qui est fait dans le cas d'une analyse de sensibilité directe. L'application de l'analyse de sensibilité à l'assimilation variationnelle de données nous conduira à la résolution d'un système de deux équations différentielles couplées dont nous proposerons une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de solution. Cette étude sera centrée sur l'adjoint au second ordre introduit par LE DIMET et *al.* [111] et nous donnerons au quatrième chapitre une démonstration d'existence et d'unicité de la solution de l'équation adjointe au second ordre pour le modèle QG. Enfin dans le cinquième chapitre nous aborderons la question de faisabilité de l'optimisation de la configuration spatio-temporelle des observations. Nous étudierons deux critères (non exhaustifs) de comparaison entre différentes configurations. Nous regarderons aussi la prédictibilité du système d'optimalité pour étudier dans quelle mesure elle peut être une amélioration de la prédictibilité du modèle direct d'une part et d'autre part nous regarderons l'influence de la configuration des observations sur la prédictibilité de système d'optimalité.

Chapitre I :

Généralités sur le modèle QG et l'assimilation variationnelle.

1.1 Le modèle de circulation Quasi-Géostrophique

1.1.1 Introduction.

Les écoulements océaniques à grande échelle dans l'espace et dans le temps sont des mouvements sur lesquels l'effet de la rotation terrestre joue un rôle dynamique essentiel. Le recours à des hypothèses fortement simplificatrices conduit à une représentation approchée de cette dynamique par ce que l'on appelle l'équilibre *géostrophique* c'est-à-dire un équilibre dynamique entre la force de Coriolis et le gradient de pression. En réalité la notion d'équilibre géostrophique est insuffisante en elle même pour conduire à la détermination de toute la dynamique de l'écoulement. L'introduction de termes correspondants à un degré supérieur d'approximation peut seule permettre cette détermination : c'est le sens de l'approximation *quasi-géostrophique* (QG).

Le système dynamique océanique est extrêmement complexe ; du seul point de vue de la mécanique des fluides il requiert le respect des principes fondamentaux de la mécanique : conservation de la masse et de la quantité de mouvement ; lois de la thermodynamique. Nous écartons ici les difficultés associées à la prise en compte des équations de la thermodynamique. Une grande partie des caractères dynamiques des systèmes géophysiques réels est néanmoins préservée.

1.1.2 Hypothèses d'approximation et les équations.

On note respectivement L et D les échelles de distance horizontale et de distance verticale et U la vitesse horizontale de l'écoulement dans un milieu sphérique tournant à une vitesse angulaire constante (c'est la rotation terrestre). La force de Coriolis moyenne dans le domaine de circulation f_0 a pour l'unité $1/T$ (T l'échelle de temps). Cette quantité de force dépend à la fois de la vitesse de rotation du milieu tournant et aussi de la latitude centrale du domaine.

À partir de ces paramètres on définit des nombres adimensionnels :

- $\delta = \frac{D}{L}$: le *paramètre d'aspect*;
- $\varepsilon = \frac{U}{f_0 L}$: le *nombre de Rossby*. Il mesure l'importance relative des effets d'inertie (de temps caractéristique L/U) et de rotation terrestre (de temps caractéristique $1/f_0$).

La formulation du modèle quasi-géostrophique suppose les approximations suivantes :

- $\delta \ll 1$: la profondeur du bassin est petite devant sa longueur ce qui traduit la caractéristique de l'océan d'être une couche mince à l'échelle planétaire.
- $\varepsilon \ll 1$: l'effet d'inertie est faible devant l'effet de rotation de la terre.
- La linéarisation de l'effet de la sphéricité terrestre permet d'approcher le paramètre de Coriolis par $f = f_0 + \beta_0 y$ où y désigne la latitude du point considéré. Il s'agit là de l'hypothèse du *β -plan*.

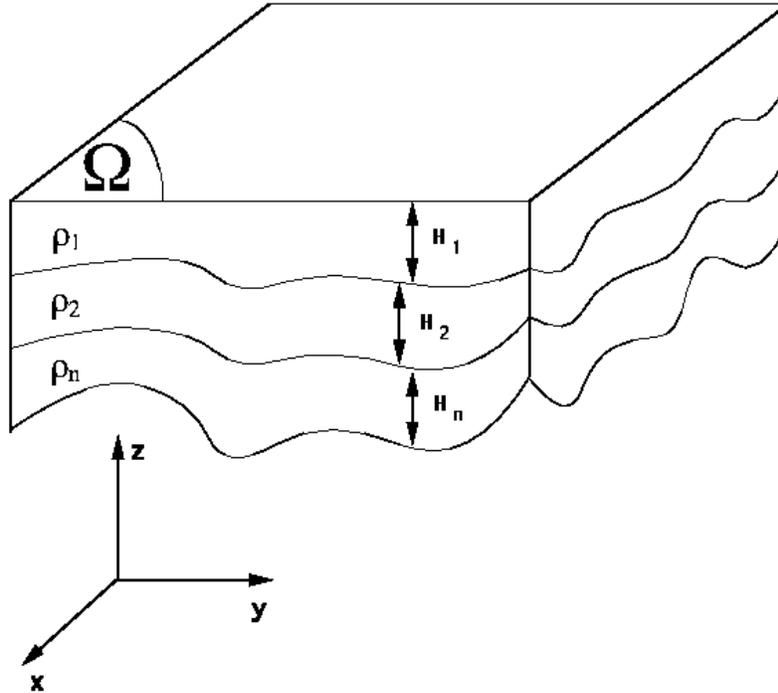
Le développement à l'ordre 0 en ε et δ de l'équation de Navier-Stokes conduit à une relation exprimant *l'équilibre géostrophique* présenté plus haut.

Le développement à l'ordre 1 de cette même équation de Navier-Stokes dans un milieu tournant donne une approximation dont le champ de vitesse de l'écoulement est à divergence nulle. En supposant une stratification en N couches d'épaisseurs au repos H_1, H_2, \dots, H_N avec une densité ρ_k considérée comme constante dans chaque couche k la non-divergence permet d'introduire une *fonction de courant* dans chaque couche Ψ_k nous obtenons un système *Quasi-Géostrophique* de N équations couplées d'inconnues Ψ_k :

Soit Ω (bassin d'écoulement) un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 .

$$\Psi_k : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \text{la fonction de courant de la couche } k; \quad (1.1)$$

$$\frac{D(\theta_k(\Psi) + f)}{Dt} + \delta_{k,N} \cdot C_B \cdot \Delta \Psi_N - A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_k = F_k; \quad \forall k = 1, 2, \dots, N; \quad (1.2)$$



avec les notations suivantes :

- $\vec{V}_k = (u_k, v_k)^t = \left(-\frac{\partial \Psi_k}{\partial y}, \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right)^t$ est le vecteur vitesse instantanée de l'écoulement du fluide ;
- $\frac{D.}{Dt}$ désigne l'opérateur de dérivée particulaire. Elle s'exprime de plusieurs façons équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{D.}{Dt} &= \frac{\partial.}{\partial t} + u \frac{\partial.}{\partial x} + v \frac{\partial.}{\partial y} \\ &= \frac{\partial.}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial.}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial.}{\partial y}. \end{aligned}$$

(ici il convient de noter que le vecteur de vitesse $(u, v)^t$ dépend évidemment de la couche considérée).

- $\theta_k(\Psi)$ est la somme de la vorticité dynamique et la vorticité thermique (ou stretching) :

$$\theta_k(\Psi) = \underbrace{\Delta\Psi_k}_{\text{dynamique}} + \underbrace{\frac{f_0}{H_k} (h_{k+\frac{1}{2}}(\Psi) - h_{k-\frac{1}{2}}(\Psi))}_{\text{thermique}}.$$

où : pour $k = 1, \dots, N - 1$ on définit $h_{k+\frac{1}{2}}(\Psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_0}{g'_{k+\frac{1}{2}}} (\Psi_{k+1} - \Psi_k)$: il s'agit de la *hauteur de dénivellation* de l'interface entre la couche k et $k + 1$. Pour les indices k extrêmes on définit $h_{\frac{1}{2}} = 0$ et $h_{N+\frac{1}{2}} = h_B$ (hauteur de la topographie de fond).

- Les constantes $g'_{k+\frac{1}{2}}$ sont appelées *gravités réduites*. Elles sont calculées à partir des densités des couches : $g'_{k+\frac{1}{2}} = g \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\rho_s}$ (avec g et ρ_s respectivement l'attraction terrestre moyenne et la densité moyenne du fluide et ρ_k la densité moyenne de la couche k).
- Les constantes H_k sont les hauteurs des couches au repos. Au régime non stationnaire il faut rajouter en plus à ces hauteurs les dénivellations intercouches $h_{k-\frac{1}{2}}$ et $h_{k+\frac{1}{2}}$ pour avoir les hauteurs dynamiques des couches.
- f est la force de Coriolis. Dans l'hypothèse β -plan elle varie linéairement suivant la latitude : $f = f_0 + \beta \cdot y$.
- $\delta_{k,N} \cdot C_B \cdot \Delta\Psi_N$ est un terme de dissipation par frottement au fond du bassin. Le symbole de Kronecker $\delta_{k,N}$ signifie donc que l'effet de frottement se présente uniquement sur la couche de fond. C_B est le coefficient de frottement supposé constant et fixé.
- $-A_4 \cdot \Delta^2\Psi_k$ est un terme de dissipation par friction latérale. Ce terme se présente dans toutes les couches. A_4 est le coefficient de viscosité supposé constant et fixé.
- F_k est le forçage moteur du système dynamique. Dans le cadre physique ce forçage est dû uniquement à l'effet de la tension du vent en surface c.-à-d. $F_1 = \frac{1}{H_1} r \dot{\omega}_z \vec{\tau}$ avec $\vec{\tau}$ la tension du vent et $F_k = 0$ pour $k \geq 2$.

Les autres quantités physiques et notations utiles à connaître :

- Le terme de convection dans l'expression de déviation particulière $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ s'exprime le plus souvent à l'aide d'un opérateur *Jacobien* défini par :

$$J(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

et donc :

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} = J(\Psi, \cdot).$$

Remarquons que l'opérateur Jacobien est bilinéaire et anti-symétrique. Dans les équations quasi-géostrophiques c'est le seul terme qui soit **non linéaire** par rapport à la variable Ψ .

- La somme des trois vorticités

- (1) dynamique $\Delta\Psi_k$;
- (2) thermique $\frac{f_0}{H_k} (h_{k+\frac{1}{2}}(\Psi) - h_{k-\frac{1}{2}}(\Psi))$;
- (3) et planétaire f ;

est la *vorticité potentielle*. Les équations quasi-géostrophique expriment donc la loi de conservation de la vorticité potentielle.

- La quantité

$$w_{k+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \frac{f_0}{g'_{k+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\Psi_{k+1} - \Psi_k) + J(\Psi_k, \Psi_k - \Psi_{k+1}) \right]$$

peut être regardée comme la vitesse verticale intercouche.

- L'énergie cinétique de la couche k est définie par :

$$K_k \stackrel{def}{=} \frac{H_k}{2} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla}\Psi_k\|^2 dx.$$

- L'énergie potentielle entre la couche $k+1$ et la couche k est définie par :

$$P_k \stackrel{def}{=} \frac{f_0^2}{2 g'_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} (\overline{\Psi}_{k+1} - \overline{\Psi}_k)^2 dx.$$

Notation $\overline{(\cdot)}$: on verra que les conditions aux limites en espace exigent que les fonctions de courant soient constantes sur les frontières (en espace uniquement). La notation $\overline{\Psi}_k$ signifie donc que l'on retranche à Ψ_k sa constante sur la bord :

$$\overline{\Psi}_k \stackrel{def}{=} \Psi_k - \Psi_k|_{\partial\Omega} \cdot \mathbb{1}(\Omega),$$

- L'ensrophie de la couche k est définie par :

$$E_k \stackrel{def}{=} \frac{H_k}{2} \int_{\Omega} (\Delta\Psi_k)^2 dx.$$

1.1.3 Passage de couches en modes.

Le passage de couches aux modes est en plus des considérations physiques requis par la formulation des conditions aux limites (voir la section 1.1.4).

Introduisons la *matrice de couplage* des couches (W_{kl}):

$$W = \begin{pmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -a_2 - b_2 & b_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} - b_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & -a_n - b_n \end{pmatrix}$$

où $a_k = \frac{f_0^2}{H_k g'_{k-\frac{1}{2}}}$ et $b_k = \frac{f_0^2}{H_k g'_{k+\frac{1}{2}}}$.

Alors le vecteur des vorticités $\theta_k(\Psi)$ est :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix} = (\Delta. + W.) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix}$$

Et les équations quasi-géostrophiques s'écrivent sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta. + W.) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_1 - J(\Psi_1, \theta_1(\Psi) + f) + A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_1 \\ \vdots \\ F_N - J(\Psi_N, \theta_N(\Psi) + f) - C_B \cdot \Delta \Psi_N + A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec $G_k \stackrel{def}{=} F_k - J(\Psi_k, \theta_k(\Psi) + f) - \delta_{k,N} \cdot C_B \cdot \Delta \Psi_N + A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_k$.

Il est facile de vérifier que la matrice produit :

$$diag(-H_1, -H_2, \dots, -H_N) \cdot W$$

est symétrique positive. On montre aussi qu'elle admet une unique valeur propre nulle. On en déduit qu'il en est donc de même pour la matrice $[-W]$. Soit $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ la matrice diagonale semblable à $-W$ (on classe les valeurs propres en ordre croissant : $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$) et B la matrice de passage :

$$W = -B \cdot D \cdot B^{-1}$$

et posons

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} [B^{-1}] \cdot \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{pmatrix} = [B] \cdot \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Le vecteur (Φ_k) est appelé le *vecteur des modes* En particulier Φ_1 est la *mode barotrope* et Φ_k avec $k \geq 2$ est le $k^{\text{ième}}$ *mode barocline*.

Le passage (1.4) est le passage *couches en modes* et (1.5) est le passage *modes en couches*.

Le système (1.3) écrit en modes devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \cdot - D \cdot) \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} = [B^{-1}] \cdot \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_N \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre de W correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est le vecteur $(1, 1, \dots, 1)^t$ (en effet la somme des colonnes de W s'annule). Dans la suite on fait la normalisation en prenant $B_{k,1} = 1 \forall k$.

1.1.4 Conditions aux limites.

Dans notre étude on se restreint uniquement à des conditions aux limites utilisées pour les frontières terrestres. Nous supposons donc que le domaine Ω soit un bassin fermé il n'y a donc pas de flux de circulation entrant ou sortant du domaine.

Nous utilisons la condition dite de *glissement* sur la frontière terrestre plus une condition de conservation de masse c.-à-d. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \Psi_k(t) \equiv C_k^{te}(t) \text{ sur } \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N \text{ tel que:} \\ \text{si } \Phi_k = [B^{-1} \cdot \Psi]_k \text{ (la transformation en modes)} \\ \text{alors } \Phi_1 \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \text{ et } \int_{\Omega} \Phi_k(t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k \geq 2 \end{array} \right. \\ \text{et :} \\ \Delta \Psi_k \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Pour plus de détails sur le modèle QG on peut consulter: J. PEDLOSKY [85] et E. BLAYO [5]

1.2 Assimilation variationnelle: Formalisme général

Pour décrire le formalisme général proposé par LE DIMET et TALAGRAND [63] on se donne un domaine Ω borné du plan ou de l'espace et un intervalle de temps $[0, T]$ où T est un réel strictement positif.

Soit X une variable décrivant l'état de l'océan. On suppose que dans l'espace de Hilbert \mathcal{X} des états possibles de l'océan X est solution de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) \quad (1.7)$$

où F est un opérateur différentiel non linéaire de \mathcal{X} dans lui-même (et qu'on supposera différentiable).

Désignons par \mathcal{O} l'espace de Hilbert des observations et par C l'opérateur de projection de \mathcal{X} dans \mathcal{O} . \mathcal{O} est nécessairement un espace de dimension finie car on ne peut disposer que d'un nombre fini d'observations.

Considérons en outre un ensemble \mathcal{U} appelé l'ensemble des contrôles admissibles tel que pour $u \in \mathcal{U}$ l'état X soit fonction de u . En général \mathcal{U} est un convexe fermé non vide mais nous supposons pour des besoins de simplicité que \mathcal{U} est aussi un espace de Hilbert et que pour tout u donné l'équation (1.7) admet une solution unique. On peut alors définir une fonctionnelle d'écart entre la solution X du modèle (1.7) et une observation X_{obs} de \mathcal{O} par:

$$J(X) = \frac{1}{2} \|CX - X_{obs}\|_{\mathcal{O}}^2$$

En réalité J est une fonction de la variable u :

$$J(u) = \frac{1}{2} \|CX(u) - X_{obs}\|_{\mathcal{O}}^2 \quad (1.8)$$

On pose alors le problème (de contrôle optimal) suivant:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{trouver } u^* \in \mathcal{U} \text{ tel que:} \\ J(u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans le cas général lorsque J est différentiable une condition nécessaire pour que u^* soit solution de (1.9) est :

$$\nabla J(u^*) = 0$$

où ∇J est le gradient de J par rapport à u .

La détermination de ∇J permet de mettre en œuvre des méthodes d'optimisation. La résolution de (1.9) se faisant de façon numérique nous allons en donner la formulation discrétisée.

1.2.1 Formulation du problème discrétisé.

La discrétisation en espace peut généralement se faire par:

- différences finies
- éléments finis
- troncature d'un développement analytique Γ par exemple suivant une base orthogonale de fonctions propres dans le cas d'un opérateur F linéaire.
- méthode de Galerkin
- méthodes de collocation
- méthodes spectrales

Nous supposons alors qu'après avoir discrétisé en espace Γ l'équation (1.7) s'écrit sous la forme:

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

où F est une application non linéaire de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N Γ supposée lipschitzienne Γ et X un vecteur à $N = N_{var} \times N_g$ composantes fonctions du temps ΓN_{var} étant le nombre de variables du modèle et N_g le nombre de points de grille de la discrétisation.

Le problème de Cauchy avec la condition initiale

$$\begin{aligned} \frac{dX(u, t)}{dt} &= F(X(u, t)) \\ X(u, 0) &= u \end{aligned}$$

admet alors une solution unique $X(u, t)$ sur l'intervalle $[0, T]$.

Nous supposons que les observations réparties dans l'espace et dans le temps ont permis Γ par l'intermédiaire d'un opérateur de prolongement de définir un vecteur fonction du temps $X_{obs}(t)$ que nous appellerons vecteur des observations. On définit alors la fonction coût $J(u)$ par:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle W \cdot (CX(u, t) - X_{obs}(t)) , CX(u, t) - X_{obs}(t) \rangle dt \quad (1.10)$$

où W désigne une matrice diagonale positive Γ indépendante du temps Γ dont les éléments diagonaux sont les poids de la fonction Γ et

$$\langle X(t), Y(t) \rangle = \sum_{i=1}^N X_i(t) \cdot Y_i(t)$$

désigne le produit scalaire de vecteurs $X(t)$ et $X(t)$ de composantes $X_i(t)Y_i(t)$ $1 \leq i \leq N$.

L'ensemble des états possibles étant théoriquement \mathbb{R}^N tout entier on a donc un problème d'optimisation sans contraintes qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u^* \in \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ J(u^*) = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} J(u) \end{array} \right. \quad (1.11)$$

1.2.2 Calcul du gradient, détermination de la condition d'optimalité

Le problème (1.11) ne peut en général pas être résolu analytiquement. Il existe toutefois des algorithmes de résolution numérique qui permettent d'en déterminer les solutions approchées parmi lesquels les méthodes de gradient ou de quasi-Newton. La plupart sont des procédures itératives de descente qui partant d'une valeur initiale u_0 recherchent la meilleure approximation u_1 de la solution u^* de façon que $J(u_1) \leq J(u_0)$ et itèrent le procédé jusqu'à satisfaire une condition de convergence donnée. Toutes ces méthodes utilisent le gradient de la fonction à minimiser par rapport à la variable de contrôle d'où l'importance de la détermination du gradient de J par rapport à u .

Une possibilité théorique serait d'évaluer les composantes de $\nabla_u J$ en différences finies en utilisant des approximations de la forme $\frac{\Delta J}{\Delta u_i}$ où ΔJ est une variation de J résultant d'une perturbation Δu_i de la i -ème composante de u . Malheureusement cette technique nécessite d'intégrer le modèle autant de fois que u a de composantes et dans le cas particulier de l'océanographie u peut avoir plus de 10^5 composantes et le problème numérique devient alors prohibitif malgré la disponibilité de calculateurs performants.

Une technique très efficace pour obtenir le gradient de la fonction coût par rapport à la variable de contrôle est l'utilisation du système adjoint que nous allons présenter. Pour cela nous considérons un vecteur $h \in \mathcal{U}$. $X(u + \alpha h, t)$ et $X(u, t)$ sont alors solutions respectives des équations différentielles ordinaires avec conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX(u + \alpha h, t)}{dt} = F(X(u + \alpha h, t)) \\ X(u + \alpha h, 0) = u + \alpha h \end{array} \right. \quad (1.12)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX(u, t)}{dt} = F(X(u, t)) \\ X(u, 0) = u \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Définition 1.2.1 Soit G une application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N de variable u . On appelle dérivée de Gâteaux de G dans la direction h , l'application définie par :

$$\hat{G}(u, h, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{G(u + \alpha h, t) - G(u, t)}{\alpha}$$

lorsque cette limite existe. Si \widehat{G} est linéaire en h on peut alors noter

$$\widehat{G}(u, h, t) = \langle \nabla G(u, t), h \rangle$$

où ∇G est le gradient de G par rapport à u .

La dérivée de Gâteaux est encore appelée dérivée directionnelle.

Si nous retranchons (1.13) de (1.12) puis nous divisons par α et passons à la limite lorsque α tend vers 0 on obtient que la dérivée de Gâteaux \widehat{X} de X dans la direction h est alors solution du système:

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{X}(u, h, t)}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \widehat{X}(u, h, t) \\ \widehat{X}(u, h, 0) = h \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ est la matrice jacobienne de F par rapport à X .

La dérivée de Gâteaux de la fonction coût J dans la direction h est donnée par:

$$\widehat{J}(u, h) = \int_0^T \langle CX(u, t) - X_{obs}, C\widehat{X} \rangle dt \quad (1.15)$$

Pour trouver la linéarité de \widehat{J} par rapport à h nous faisons dans la première équation de (1.14) le produit de chacun de ses membres par une variable P de \mathbb{R}^N et nous intégrons le résultat obtenu sur l'intervalle $[0, T]$. Il vient:

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\widehat{X}}{dt}, P \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \widehat{X}, P \right\rangle dt$$

En intégrant par parties le premier membre et en transposant le second on a:

$$\langle \widehat{X}(T), P(T) \rangle - \langle \widehat{X}(0), P(0) \rangle - \int_0^T \left\langle \frac{dP}{dt}, \widehat{X} \right\rangle dt = \int_0^T \left\langle \widehat{X}, \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t P \right\rangle dt$$

et en vertu de la condition initiale de (1.14):

$$\langle \widehat{X}(T), P(T) \rangle - \langle h, P(0) \rangle = \int_0^T \left\langle \widehat{X}, \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t P \right\rangle dt \quad (1.16)$$

Si nous définissons P comme la solution de l'équation rétrograde:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t P = C^t [CX - X_{obs}] \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

alors (1.16) s'écrit:

$$-\langle h, P(0) \rangle = \int_0^T \langle C\widehat{X}, CX - X_{obs} \rangle dt$$

soit:

$$\widehat{J}(u, h) = -\langle h, P(0) \rangle$$

et donc

$$\nabla J(u) = -P(0) \tag{1.18}$$

■

Définition 1.2.2 *Le système (1.17) est appelé système adjoint du système direct (1.14).*

Remarque

Le gradient de la fonction coût est obtenu par intégration du système adjoint (1.17). La solution u^* du problème (1.11) est donnée par résolution du système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = u^* \\ \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t P = C^t [CX - X_{obs}] \\ P(T) = 0 \\ P(0) = 0 \end{array} \right. \tag{1.19}$$

qui est appelé *système d'optimalité*.

Cette technique a été utilisée par de nombreux auteurs dans divers problèmes. En météorologie et en océanographie nous pouvons citer (de façon non exhaustive) les travaux de: LEDIMET [63Γ60Γ61Γ62Γ46Γ41Γ55Γ43Γ42Γ59Γ39Γ40Γ57Γ56Γ58Γ45Γ44]ΓOUBERDOUS [80]ΓTALAGRAND et COURTIER [98Γ97Γ94]ΓTHÉPAUT et COURTIER [100Γ102Γ101]ΓNAVON [74Γ75]ΓEVENSEN [21]ΓMOORE [70]ΓSCHRÖTER, SEILER et WENZEL [91]ΓDE MEY et MORROW [13]ΓB. LUONG [68Γ69]

En ce qui concerne la détermination du minimum de la fonction coût on peut citer les travaux de NAVON et ZOU [72Γ71Γ73]ΓLEDIMET [110]ΓGILBERT et LEMARECHAL [33]

Pour le modèle QG décrit ci-dessus on se donne la fonction coût:

$$\mathcal{J}(\Psi^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i} (\Psi_1(t_i) - \Psi^{obs}(t_i))^2 ds \quad (1.20)$$

où t_1, t_2, \dots, t_m sont m instants $t_i \in]0, T[$ (ceci par soucis de simplicité pour des raisons pratiques afin que les observations n'affectent pas les conditions finale et initiale de l'état adjoint) $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ sont m courbes régulières de Ω (les Γ_i symbolisent la trace du satellite dans le bassin à l'instant i) et on suppose qu'on a sur ces traces des observations $\Psi_{t_1}^{obs}, \Psi_{t_2}^{obs}, \dots, \Psi_{t_m}^{obs} \in L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \dots \times L^2(\Gamma_m)$. Ψ_1 est la fonction de courant en surface correspondant à la solution de l'équation QG non linéaire résolue avec la condition initiale Ψ^0 .

La différentiabilité de cette fonction coût a été étudiée par B. LUONG [68] qui a en outre montré que les équations adjointes s'écrivent sous la forme suivante P étant le vecteur d'inconnues.

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(t=T) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Psi_k(T)}(\Psi) & \text{sur } \Omega \\ -\frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(P) - \Delta J(\Psi_k, P_k) - [W^t]_k J(\Psi, P) & \\ - J(P_k, \theta_k(\Psi) + f) & \text{sur } \Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \\ + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta P_N - A_4 \cdot \Delta^2 P_k = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Psi_k}(\Psi) & \\ P_k(t) = C_k^{te}(t) & \text{sur } \partial\Omega; \quad \forall t \in [0, T] \\ \chi_k = [B^{-t} \cdot P]_k & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \chi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \int_{\Omega} \chi_k(t) dx = 0 & \forall t \in [0, T] \\ \Delta(P_k) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Chapitre II :

Analyse de sensibilité.

2.1 Introduction

Avant d'aboutir à la forme sous laquelle se présente l'analyse de sensibilité aujourd'hui elle a suivi dans le passé plusieurs étapes d'évolution correspondant aux différents points de vue suivant lesquels elle a été utilisée.

Ses premières applications ont vu le jour dans le domaine de la neutronique des réacteurs dès les années quarante. L'analyse de sensibilité était alors abordée par des méthodes basées sur la théorie des perturbations et l'approche variationnelle. En théorie des réacteurs par exemple la première utilisation de la théorie des perturbations est attribuée à Wigner [105] et un travail important a été développé par la suite par Gandini [28] dans les années soixante. L'utilisation des méthodes variationnelles est considérée comme ayant évolué à partir des travaux de Levine [64] et Roussopolos [88].

D'un point de vue théorique l'analyse de sensibilité gardait un caractère heuristique mais le succès qu'elle a rencontré sur le plan pratique a suscité de l'intérêt auprès des chercheurs et le domaine d'application de la théorie des perturbations et des principes variationnels pour l'analyse de sensibilité s'est généralisé et étendu. A la fin des années soixante-dix on a commencé à étudier son application à la thermodynamique des réacteurs. Oblow [78] en a été l'instigateur et il a abordé l'analyse de sensibilité formellement d'un point de vue différentiel.

Une troisième approche de l'analyse de sensibilité est l'utilisation des équations adjointes et cette dernière trouve des applications dans des domaines divers: économie, économétrie, sciences pour l'ingénieur, industrie, physique nucléaire, physique des réacteurs, Cacuci [10] et aussi dans les problèmes d'environnement (sciences de l'univers) notamment en météorologie: Buzzia [7], Errico et Vukicevic [18], Hall et al. [35], Rabier et al. [86], Zou et al. [109] et Zupanski [112].

La première tentative pour définir la méthode d'analyse de sensibilité dans un cadre mathématique rigoureux revient à Cacuci [8]. Mais comme nous le ferons dans le cadre de l'assimilation de données (au chapitre suivant) il faut pousser un peu plus loin l'investigation dans le domaine de l'analyse de sensibilité pour d'autres contextes.

L'importance et la nécessité de l'analyse de sensibilité se fait ressentir dès qu'on a un modèle dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. En se donnant une fonction-réponse

(encore appelée critère de sensibilité) qui est une fonction des paramètres. Le but est de calculer la dérivée ou le gradient de cette fonction-réponse par rapport au(x) paramètre(s). Des travaux ont été effectués dans ce sens par Droegemeier et al. [15] Rabier et al. [86] Errico et al. [18] et beaucoup d'autres auteurs dans les problèmes d'environnement notamment en météorologie.

L'analyse de sensibilité fait recours à la différentiabilité et nous nous limiterons dans cette étude à la notion de différentiabilité au sens de Gâteaux les calculs étant plus compliqués pour la différentiabilité au sens de Fréchet dans les applications concrètes.

Nous parlerons donc dans ce chapitre de la théorie générale de l'analyse de sensibilité et de sa formulation dans un cadre mathématique.

2.2 Théorie générale de l'analyse de sensibilité

Pour exposer le principe général des méthodes d'analyse de sensibilité nous adopterons ici la présentation consacrée que l'on rencontre dans la littérature traitant de ce problème.

Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^m . On considère une formulation d'un modèle par:

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) = 0 \tag{2.1}$$

où:

- $\mathcal{X} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système. On supposera que \mathcal{X} est un élément d'un espace de Hilbert $H_{\mathcal{X}}$.
- \mathcal{K} est un paramètre ou un vecteur de paramètres du modèle. On supposera que \mathcal{K} est un élément d'un espace vectoriel normé $E_{\mathcal{K}}$.
- \mathcal{F} est en général un opérateur différentiel. Certains auteurs (Ounsi [81] et Cacuci [8] présentent \mathcal{F} sous la forme vectorielle $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ où \mathcal{F}_1 décrit l'équation d'état du modèle et \mathcal{F}_2 les conditions aux limites du domaine. Dans notre cas nous supposons sans nuire à la généralité d'une part que l'expression des conditions aux limites est incluse dans \mathcal{F} et d'autre part que ces conditions aux limites ne dépendent pas des paramètres du modèle. C'est le cas dans beaucoup de problèmes géophysiques.

En général \mathcal{F} est un opérateur non-linéaire et dans les calculs (simulations) numériques \mathcal{F} devient une application fonctionnelle entre deux espaces de dimension finie. \mathcal{F} fait donc correspondre à tout $(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \in H_{\mathcal{X}} \times E_{\mathcal{K}}$ un élément $\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \in H$ où H est un espace de Hilbert.

Nous supposerons que pour \mathcal{K} fixé dans $E_{\mathcal{K}}$ le système (2.1) possède une unique solution $\mathcal{X}(\mathcal{K})$ et que l'opérateur \mathcal{F} est différentiable au sens de Gâteaux.

Rappelons que la Gâteaux-différentielle $\tilde{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} dans une direction k donnée est calculée par:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \cdot k = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K} + \alpha \cdot k) - \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K})}{\alpha}$$

Nous nous intéressons alors à une *réponse* sous la forme intégrale ceci n'étant qu'un cas particulier. Des études ont été faites pour d'autres types de réponses dans les travaux de Cacuci [9].

Soit donc

$$\mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{X}) = \int_{\Omega} G(\mathcal{K}, \mathcal{X}, x) dx \quad (2.2)$$

où G est une fonction à valeurs réelles supposée régulière au moins \mathcal{C}^1 . Puisque \mathcal{X} dépend de \mathcal{K} par l'intermédiaire du système (2.1) nous pouvons définir une fonction

$$g : \mathcal{K}_0 \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}(\mathcal{K}_0))$$

Partant donc d'un cas base $(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) = (\mathcal{K}_0, \mathcal{X}(\mathcal{K}_0))$ nous pouvons approximer au premier ordre la variation totale de \mathcal{G} due à une variation $(\delta_{\mathcal{K}}, \delta_{\mathcal{X}})$ autour de $(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0)$ par:

$$\tilde{\mathcal{G}} = D_{\mathcal{K}} \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}} + D_{\mathcal{X}} \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_{\mathcal{X}} \quad (2.3)$$

avec

$$D_{\mathcal{K}} \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}} = \int_{\Omega} D_{\mathcal{K}} G(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0, x) \cdot \delta_{\mathcal{K}} dx$$

$$D_{\mathcal{X}} \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_{\mathcal{X}} = \int_{\Omega} D_{\mathcal{X}} G(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0, x) \cdot \delta_{\mathcal{X}} dx$$

On s'intéresse en particulier aux variations $(\delta_{\mathcal{K}}, \delta_{\mathcal{X}})$ telles que $\mathcal{X}_0 + \delta_{\mathcal{X}}$ soit solution de (2.1) pour $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \delta_{\mathcal{K}}$.

En différentiant l'équation (2.1) on trouve en approximation du premier ordre que $\delta_{\mathcal{K}}$ et $\delta_{\mathcal{X}}$ sont liés par:

$$D_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}} + D_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{X}} = 0 \quad (2.4)$$

Si donc $\delta_{\mathcal{K}}$ est donné dans $E_{\mathcal{K}}$ l'est aussi par la solution du système linéaire:

$$L \cdot \delta_{\mathcal{X}} = M \cdot \delta_{\mathcal{K}} \quad (2.5)$$

où

$$L = D_{\mathcal{X}}\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(H_{\mathcal{X}}, H)$$

$$M = -D_{\mathcal{K}}\mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(E_{\mathcal{K}}, H)$$

Le but de l'analyse de sensibilité est alors de calculer la variation $D\mathcal{G}$ de \mathcal{G} (toujours en approximation du premier ordre) autour de sa valeur de base $\mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0)$ à partir d'une variation $\delta_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{K} autour de \mathcal{K}_0 .

2.2.1 Méthode de sensibilité directe

La méthode de sensibilité directe consiste à résoudre le système différentiel (2.5). Pour $\delta_{\mathcal{K}}$ donné on détermine ainsi $\delta_{\mathcal{X}}$ et on peut alors calculer $D\mathcal{G}$.

Si l'on suppose que l'application $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{X}(\mathcal{K})$ est différentiable alors $\mathcal{K} \mapsto g(\mathcal{K})$ l'est aussi et l'on a :

$$D_{\mathcal{K}}g(\mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}} = D\mathcal{G}$$

avec dans l'expression de $D\mathcal{G}$

$$\delta_{\mathcal{X}} = D_{\mathcal{K}}\mathcal{X}(\mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}}$$

Dans le cas où les paramètres sont réels (ce qu'on rencontre souvent en pratique) $E_{\mathcal{K}} = \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Et on veut calculer séparément les sensibilités de g aux différents paramètres à savoir :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathcal{K}_i}(\mathcal{K}_0) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathcal{K}_i}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) + D_{\mathcal{X}}\mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{K}_i}(\mathcal{K}_0)$$

$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{K}_i}(\mathcal{K}_0)$ étant déterminé à l'aide d'un système du genre (2.5) avec :

$$\delta_{\mathcal{X}} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \mathcal{K}_i} \delta_{\mathcal{K}}$$

$$\delta_{\mathcal{K}} = (0, \dots, 0, \delta_{\mathcal{K}_i}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$$

En résumé par la méthode de sensibilité directe le calcul de la sensibilité de g à un paramètre nous coûte la résolution d'un système linéaire. Quand il s'agit d'un grand nombre de paramètres (ce qui est le cas en général) cette méthode devient trop vite onéreuse voire prohibitive pour être utilisée. Elle est par contre pratique si l'on veut calculer simultanément la sensibilité d'un grand nombre de critères à des paramètres très peu nombreux. D'autre part cette méthode est formulée dans le cadre des espaces vectoriels normés et l'existence des G-différentielles des opérateurs apparaissant dans le problème est à la fois une condition nécessaire et suffisante pour la validité de la méthode.

2.2.2 Méthode de sensibilité par les équations adjointes

L'expression de $D\mathcal{G}$ (2.3) est composée de deux termes (ou contributions) dont le premier peut être qualifié de *terme à effet direct*: c'est celui qui dépend explicitement et linéairement de $\delta_\kappa \Gamma$ et le second peut être qualifié de *terme à effet indirect* car il ne dépend pas explicitement de δ_κ .

La méthode de calcul de sensibilité par l'utilisation des équations adjointes consiste à faire disparaître la dépendance explicite par rapport à δ_x dans l'expression de $D\mathcal{G}$.

$D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0)$ étant une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $H_X \Gamma$ le théorème de Riesz (Brezis [6]) nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'un élément h de H_X tel que:

$$D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_x = \langle h, \delta_x \rangle_{H_X} \quad \forall \delta_x \in H_X \quad .$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_X}$ désigne le produit scalaire dans H_X . Par ailleurs nous pouvons écrire:

$$\langle q, L \cdot \delta_x \rangle_H = \langle L^* \cdot q, \delta_x \rangle_{H_X} + P(\delta_x, q), \quad \forall q \in H \quad (2.6)$$

où P est une forme bilinéaire représentant éventuellement les intégrales sur le bord de Ω obtenues après intégration par parties Γ selon la structure de l'opérateur \mathcal{F} .

Dans la littérature traitant de l'analyse de sensibilité l'on désigne par L^* un opérateur improprement(?) appelé l'adjoint de L .

S'il existe $q \in H$ tel que $L^* \cdot q = h \Gamma$ alors on a:

$$\begin{aligned} D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_x &= \langle L^* \cdot q, \delta_x \rangle_{H_X} \\ &= \langle q, L \cdot \delta_x \rangle_H - P(\delta_x, q) \\ &= \langle q, M \cdot \delta_\kappa \rangle_H - P(\delta_x, q) \end{aligned}$$

On utilise ensuite les conditions aux limites liant δ_x et δ_κ et on impose à q des conditions supplémentaires de manière à transformer $P(\delta_x, q)$ en une nouvelle forme bilinéaire $\tilde{P}(\delta_\kappa, q)$ qui ne fait pas intervenir δ_x sur la partie du bord de Ω où l'on ne la connaît pas explicitement. Les conditions aux limites ainsi imposées à q doivent être indépendantes de δ_κ .

Dans ce cas l'on pourra écrire:

$$D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_x = \langle q, M \cdot \delta_\kappa \rangle_H - \tilde{P}(\delta_\kappa, q)$$

où q est la solution du système:

$$\begin{cases} L^* \cdot q = h \\ + \text{ conditions aux limites} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce système étant indépendant de δ_x on voit qu'une fois qu'il est résolu on peut calculer $Dg(\mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$ pour tout δ_κ à l'aide de l'expression:

$$Dg(\mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa = D_\kappa \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_\kappa + \langle q, M \cdot \delta_\kappa \rangle_H - \tilde{P}(\delta_\kappa, q)$$

Donc le calcul de la sensibilité de g à une variation de paramètre δ_κ revient à un calcul d'intégrale(s) en plus de la résolution du système (2.7) (unique quel que soit le nombre de paramètres). Ceci est beaucoup moins coûteux que l'utilisation de la méthode de sensibilité directe pour le même calcul.

Remarques:

La présentation faite ci-dessus pour la méthode de sensibilité par les équations adjointes et qui correspond à celle utilisée dans la littérature traitant du sujet comporte néanmoins quelques lacunes:

- L'utilisation du théorème de représentation de Riesz-Fréchet (Brezis [6]) restreint la méthode à la détermination de formes linéaires dans des espaces de Hilbert. Or on n'a pas toujours le cadre *idéal* hilbertien dans la pratique. De plus une incertitude demeure quant à la nature du représentant h de la forme linéaire $D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0)$ et son calcul.
- La détermination des conditions aux limites pour q paraît relever de l'arbitraire surtout en ce qui concerne leur dépendance ou leur indépendance par rapport à δ_κ ce qui est essentiel pour la méthode.

Dans ce qui suit nous discuterons de la façon dont on peut présenter cette méthode plus rigoureusement.

2.2.3 Cadre mathématique pour la méthode de sensibilité adjointe

Nous voulons dans ce paragraphe donner à la méthode d'analyse de sensibilité par les équations adjointes une présentation (formulation) mathématique rigoureuse tout en restant dans un cadre le plus général possible. Nous garderons les notations du paragraphe précédant mais nous apporterons quelques modifications aux hypothèses faites sur les données du problème.

Rappelons tout d'abord que nous avons supposé que la fonction

$$\begin{aligned} G & : E_\kappa \times H_x \times \Omega \longmapsto \mathbb{R} \\ (\mathcal{K}, \mathcal{X}, x) & \longmapsto G(\mathcal{K}, \mathcal{X}, x) \end{aligned}$$

était régulière au moins de classe \mathcal{C}^1 .

Nous supposons en plus que pour tout \mathcal{K}_0 fixé dans E_κ la solution \mathcal{X}_0 de (2.1) est telle que la fonction:

$$x \mapsto D_x G(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0, x)$$

est un élément de $L^2(\Omega)$.

Les espaces H_x et H sont ici considérés comme des espaces de Banach. On suppose enfin que l'opérateur \mathcal{F} est composé de deux opérateurs \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 continus et différentiables et qu'il existe un espace de Banach H_Γ espace de fonctionnelles sur une partie connexe Γ du bord $\partial\Omega$ de Ω tels que:

$$\mathcal{F}_1 : H_x \times E_\kappa \mapsto H$$

$$\mathcal{F}_2 : H_x \times E_\kappa \mapsto H_\Gamma$$

\mathcal{F}_2 traduit les (éventuelles) conditions aux limites dépendant des paramètres.

En reprenant les développements du paragraphe précédent on trouve que pour toute variation $(\delta_x, \delta_\kappa)$ autour du cas base $(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0)$ la différentiation de la réponse conduit à:

$$D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_x = \langle D_x G(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0, x), \delta_x \rangle_{L^2(\Omega)}$$

et le système de sensibilité direct s'écrit:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \delta_x = M_1 \cdot \delta_\kappa \\ L_2 \cdot \delta_x = M_2 \cdot \delta_\kappa \end{cases} \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} L_1 &= D_x \mathcal{F}_1(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(H_x, H) \\ M_1 &= -D_\kappa \mathcal{F}_1(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(E_\kappa, H) \\ L_2 &= D_x \mathcal{F}_2(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(H_x, H_\Gamma) \\ M_2 &= -D_\kappa \mathcal{F}_2(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(E_\kappa, H_\Gamma) \end{aligned}$$

En considérant l'espace vectoriel normé $R_\Gamma = \text{Im}(M_2)$ l'image de l'application M_2 muni de la norme de H_Γ on suppose qu'il existe un opérateur linéaire continu:

$$L_3 : R_\Gamma \mapsto H_x$$

tel que:

$$L_2 L_3 = Id_{R_\Gamma}$$

où $L_2 L_3$ désigne la composée $L_2 \circ L_3$ des opérateurs L_2 et L_3 . Ainsi l'en posant

$$\bar{\delta}_x = \delta_x - L_3 M_2 \delta_\kappa$$

on se ramène à un nouveau système direct de sensibilité:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \bar{\delta}_x = (M_1 - L_1 L_3 M_2) \delta_\kappa \\ L_2 \cdot \bar{\delta}_x = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Considérons alors l'espace

$$\bar{H}_x = \{ \bar{\delta}_x \in H_x; L_2 \bar{\delta}_x = 0 \}$$

que nous supposons contenu dans $L^2(\Omega)$. Nous pouvons alors nous placer dans le cadre des opérateurs linéaires non bornés l'en introduisant l'opérateur L de domaine $D(L) = \bar{H}_x$ et défini par:

$$\begin{aligned} L &: D(L) &\longmapsto & H \\ &\bar{\delta}_x &\longmapsto & L_1 \cdot \bar{\delta}_x \end{aligned}$$

Dans ce cas l'en système (2.9) peut s'écrire:

$$\begin{cases} L \cdot \bar{\delta}_x = (M_1 - L_1 L_3 M_2) \delta_\kappa \\ \bar{\delta}_x \in D(L) \end{cases} \quad (2.10)$$

Supposons maintenant que le domaine $D(L)$ de L soit dense dans H_x . En faisant appel à la théorie des opérateurs non bornés sur les espaces de Banach (voir Brezis [6]) l'en sait alors qu'on peut définir un opérateur linéaire L^* appelé adjoint de L :

$$L^* : D(L^*) \subset H' \longmapsto H'_x$$

tel que:

$$\langle q, L \cdot \delta_x \rangle_{H', H} = \langle L^* \cdot q, \delta_x \rangle_{H'_x, H_x} \quad , \quad \delta_x \in D(L), q \in D(L^*)$$

Le domaine $D(L^*)$ de L^* étant défini comme l'ensemble des éléments $q \in H'$ pour lesquels il existe une constante positive C telle que:

$$|\langle q, L \cdot \delta_x \rangle_{H', H}| \leq C \|\delta_x\|_{H_x} \quad \forall \delta_x \in D(L) \quad (2.11)$$

Dans ces conditions nous pouvons définir de manière unique le système adjoint:

$$\begin{cases} L^* \cdot q = D_x G \\ q \in D(L^*) \end{cases} \quad (2.12)$$

Si q est solution du système (2.12) alors on a:

$$\begin{aligned} D_x \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0) \cdot \delta_x &= \langle D_x G, \bar{\delta}_x \rangle_{H_x} + \langle D_x G, L_3 M_2 \delta_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle L_1 \cdot \bar{\delta}_x, q \rangle_{H', H} + \langle D_x G, L_3 M_2 \delta_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle q, (M_1 - L_1 L_3 M_2) \cdot \delta_\kappa \rangle_{H', H} + \langle D_x G, L_3 M_2 \delta_\kappa \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui est le but recherché. Précisons cependant que: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H', H}$ désigne la dualité entre les espaces H' et H H' étant l'espace dual de H . Aussi $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ désigne le produit scalaire d'un espace de Hilbert E quelconque.

Remarques

1. De la manière dont on vient de formuler le problème on note cette fois-ci que la détermination des conditions aux limites du système (2.7) dont il s'agissait au paragraphe (2.2.2) et qui sont ici équivalentes à la condition $q \in D(L^*)$ ne relèvent plus d'un quelconque choix. Elles découlent immédiatement et de façon unique de la définition du domaine $D(L^*)$ comme ensemble des éléments pour lesquels (2.11) est vérifiée.

Par ailleurs cette formulation du problème nous évite de passer par le théorème de Riesz. Une conséquence en est que le second membre du système adjoint à savoir $D_x G$ est directement et clairement défini.

Enfin et c'est le plus important on sait maintenant par construction de (2.12) que le système adjoint est indépendant de δ_κ .

Notons toutefois que la démarche ainsi esquissée ne saurait être appliquée à n'importe quel problème. En effet les hypothèses adoptées pour la développer ($D_x G \in L^2(\Omega)$, $D(L)$ dense dans H_x) peuvent selon les cas être très restrictives.

2. Dans la pratique il n'est pas toujours évident de déterminer explicitement le domaine $D(L^*)$. Si dans ce cas on se donne un sous-espace $D \subset H$ tel que $D \subset D(L^*)$ rien ne nous empêche alors de substituer au système adjoint (2.12) le nouveau système:

$$\begin{cases} L^* \cdot q = D_x G \\ q \in D \end{cases} \quad (2.13)$$

En effet si les conditions aux limites du système (2.13) exprimées à l'aide de l'espace D que l'on connaît explicitement font que le système est résoluble on ne change rien au résultat obtenu.

3. Si l'application qui à \mathcal{K} associe $\mathcal{X}(\mathcal{K})$ solution du système direct est différentiable alors on en déduit que l'application

$$g : \mathcal{K} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{K}, \mathcal{X}(\mathcal{K}))$$

est différentiable avec:

$$\begin{aligned} Dg(\mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}} &= D_{\mathcal{K}} \mathcal{G}(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}(\mathcal{K}_0)) \cdot \delta_{\mathcal{K}} + \langle q, (M_1 - L_1 L_3 M_2) \cdot \delta_{\mathcal{K}} \rangle_{H', H} \\ &\quad + \langle D_x G, L_3 M_2 \cdot \delta_{\mathcal{K}} \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

q étant la solution du système adjoint.

4. Les résultats ci-dessus restent valables pour les problèmes dans lesquels les paramètres n'interviennent pas dans l'expression des conditions aux limites du système direct (par l'opérateur \mathcal{F}_2). Dans ce cas il suffit de reprendre la démarche ci-dessus avec $M_2 \equiv 0$.

2.3 Formulation faible de la méthode adjointe d'analyse de sensibilité

En général pour la résolution des équations aux dérivées partielles issues des modélisations de problèmes physiques classiques la question d'existence d'une solution est posée en termes de formulation faible du problème.

Nous développons dans ce paragraphe un formalisme de la méthode adjointe d'analyse de sensibilité qui peut s'adapter à ce type de formulation.

On se donne donc un espace vectoriel normé $E_{\mathcal{K}}$ et deux espaces de Banach H_x et H . Soient deux applications continues et différentiables:

$$\mathcal{G} : H_{\mathcal{X}} \times E_{\mathcal{K}} \mapsto \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F} : H_{\mathcal{X}} \times E_{\mathcal{K}} \mapsto H'$$

On suppose que pour tout \mathcal{K} fixé dans $E_{\mathcal{K}}$ la formulation faible du système direct

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) = 0 \tag{2.14}$$

admet une unique solution $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathcal{K})$ dans $H_{\mathcal{X}}$. Cela permet de définir l'application

$$g : E_{\mathcal{K}} \mapsto \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{X}(\mathcal{K}), \mathcal{K})$$

Considérons un cas de référence $(\mathcal{K}_0, \mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(\mathcal{K}_0))$. Une variation $\delta_{\mathcal{K}}$ autour de \mathcal{K}_0 entraîne une variation $\delta_{\mathcal{X}}$ autour de \mathcal{X}_0 . En différentiant le système (2.14) on peut affirmer qu'en approximation du premier ordre $\delta_{\mathcal{X}}$ est lié à $\delta_{\mathcal{K}}$ par le système (linéaire) direct de sensibilité:

$$L \cdot \delta_{\mathcal{X}} = M \cdot \delta_{\mathcal{K}} \tag{2.15}$$

où:

$$\begin{cases} L = D_{\mathcal{X}} \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(H_{\mathcal{X}}, H') \\ M = -D_{\mathcal{K}} \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in \mathcal{L}(E_{\mathcal{K}}, H') \end{cases} \tag{2.16}$$

Si pour $\delta_{\mathcal{K}}$ donné $\delta_{\mathcal{X}}$ est solution de (2.15) alors une approximation au premier ordre de la variation Dg de g due à $\delta_{\mathcal{K}}$ est donnée par :

$$Dg = D_{\mathcal{X}} \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{X}} + D_{\mathcal{K}} \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}}$$

Le but de la méthode adjointe d'analyse de sensibilité est d'exprimer Dg en fonction de $\delta_{\mathcal{K}}$ uniquement.

L étant un opérateur linéaire continu entre les deux espaces de Banach $H_{\mathcal{X}}$ et H' soit:

$$L^* : H'' \mapsto H'_{\mathcal{X}}$$

son adjoint. Par définition ΓL^* est un opérateur linéaire et continu tel que:

$$\langle q, L \cdot \delta_x \rangle_{H'', H'} = \langle L^* q, \cdot \delta_x \rangle_{H'_x, H_x}, \quad \delta_x \in H_x, \quad q \in H''.$$

Soit \mathcal{I} l'isométrie canonique de H dans H'' défini pour tout $q \in H$ par:

$$\langle \mathcal{I}(q), p \rangle_{H'', H'} = \langle p, q \rangle_{H', H}, \quad \forall p \in H'$$

Alors on a pour tout $q \in H$ $\Gamma \delta_x \in H_x$:

$$\langle L \cdot \delta_x, q \rangle_{H', H} = \langle \mathcal{I}(q), L \cdot \delta_x \rangle_{H'', H'} \quad (2.17)$$

$$= \langle L^* \mathcal{I}(q), \delta_x \rangle_{H'_x, H_x} \quad (2.18)$$

\mathcal{G} étant différentiable on a:

$$D_x \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \in H'_x$$

On peut donc introduire le système adjoint:

$$\begin{cases} L^* \cdot \mathcal{I}(q) = D_x \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \\ q \in H \end{cases} \quad (2.19)$$

C'est un système linéaire indépendant de δ_x . Si q_0 en est la solution alors nous pouvons utiliser (2.18) pour obtenir:

$$\begin{aligned} D_x \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_x &= \langle L^* \cdot \mathcal{I}(q_0), \delta_x \rangle_{H'_x}, \\ &= \langle L \cdot \delta_x, q_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle M \cdot \delta_x, q_0 \rangle_{H', H} \end{aligned}$$

et donc:

$$Dg = \langle M \cdot \delta_x, q_0 \rangle_{H', H} + D_{\mathcal{K}} \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_{\mathcal{K}}$$

2.3.1 Formulation lagrangienne

Nous reprenons les données du problème tel qu'il a été introduit au paragraphe (2.3) et nous lui associons le lagrangien:

$$\mathcal{B} : H_x \times H \times E_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$$

défini par:

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}, q, \mathcal{K}) = \mathcal{G}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) - \langle \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}), q \rangle_{H', H}$$

En vertu des hypothèses sur \mathcal{G} et \mathcal{F} nous pouvons affirmer que l'application \mathcal{B} est continue et différentiable. Soit \mathcal{K}_0 fixé dans $E_{\mathcal{K}}$. Nous considérons le problème:

$$\begin{cases} (\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}) \in H_x \times H \\ D_x \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) = 0 \text{ dans } H'_x \\ D_q \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) = 0 \text{ dans } H'_x \end{cases} \quad (2.20)$$

Alors on a:

Proposition 2.3.1 *Le couple $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}) \in H_x \times H$ est solution du système (2.20) si et seulement si :*

- a) $\bar{\mathcal{X}}$ est solution du système (2.14) pour $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$, et
- b) \bar{q} est solution du système adjoint (2.19) avec pour second membre $D_x \mathcal{G}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0)$

Démonstration:

Il suffit de calculer les différentielles $D_x \mathcal{B}$ et $D_q \mathcal{B}$.

Pour tout $p \in H$ on a:

$$D_q \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) \cdot p = - \langle \mathcal{F}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0), p \rangle_{H', H}$$

D'autre part pour tout $\delta_x \in H_x$ on a:

$$D_x \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_x = \langle D_x \mathcal{G}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0), \delta_x \rangle_{H', H} - \langle D_x \mathcal{F}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_x, \bar{q} \rangle_{H', H}$$

Si donc $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q})$ est solution de (2.20) on en déduit en particulier que:

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0) = 0 \text{ dans } H'$$

c'est-à-dire que $\bar{\mathcal{X}}$ est solution de (2.14) pour $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. Posons dans ce cas

$$L = D_x \mathcal{F}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0)$$

comme dans le paragraphe (2.3). Alors:

$$\begin{aligned} D_x \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_x &= \left\langle D_x \mathcal{G}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0), \delta_x \right\rangle_{H', H} - \langle L \cdot \delta_x, \bar{q} \rangle_{H', H} \\ &= \left\langle D_x \mathcal{G}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0) - L^* \mathcal{I}(q), \delta_x \right\rangle_{H', H} \end{aligned}$$

et $D_x \mathcal{B}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{q}, \mathcal{K}_0) = 0$ dans H' implique que \bar{q} est solution du système adjoint (2.19). La réciproque se fait de la même façon. \blacksquare

Nous allons maintenant voir que sous certaines hypothèses supplémentaires l'expression de Dg obtenue comme approximation au premier ordre de $g(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - g(\mathcal{K}_0)$ dans le paragraphe (2.3) n'est autre que:

$$Dg = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$$

Proposition 2.3.2 Soient $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ et $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(\mathcal{K}_0)$ la solution de (2.14) pour $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. On suppose que:

i) L'application $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{X}(\mathcal{K})$ est continue en \mathcal{K}_0 .

ii) L'opérateur linéaire $L = D_x \mathcal{F}(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{K}_0)$ est injectif et à image fermée dans H' .

Si le système adjoint (2.19) admet une solution $\bar{q} = q_0$, alors l'application g est différentiable en \mathcal{K}_0 et on a :

$$Dg = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0)$$

Démonstration:

L'application \mathcal{F} étant différentiable en $(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0)$ on a:

$$\|\mathcal{F}(\mathcal{X}_0 + \delta_x, \mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) - L \cdot \delta_x - M \cdot \delta_\kappa\| \leq C_1(\|\delta_x\|, \|\delta_\kappa\|)(\|\delta_x\| + \|\delta_\kappa\|)$$

où L et M sont définis par (2.16) et C_1 est une fonction vérifiant:

$$\lim_{\substack{\|\delta_x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta_\kappa\| \rightarrow 0}} C_1(\|\delta_x\|, \|\delta_\kappa\|) = 0 \quad (2.21)$$

De même pour \mathcal{B} il existe une fonction C_2 vérifiant la même propriété (2.21) que C_1 et telle que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\mathcal{X}_0 + \delta_x, q_0, \mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) - D_x \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_x - D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa| &\leq \\ &\leq C_2(\|\delta_x\|, \|\delta_\kappa\|)(\|\delta_x\| + \|\delta_\kappa\|) \end{aligned}$$

Choisissons en particulier $\delta_x = \delta_x(\delta_\kappa) = \mathcal{X}(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - \mathcal{X}(\mathcal{K}_0)$. Nous pouvons alors noter dans ce cas que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{X}_0 + \delta_x, \mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) &= \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) = 0 \\ \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) &= g(\mathcal{K}_0) \\ \mathcal{B}(\mathcal{X}_0 + \delta_x, q_0, \mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) &= g(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa)\end{aligned}$$

Par ailleurs l'hypothèse de continuité i) assure que:

$$\lim_{\|\delta_\kappa\| \rightarrow 0} \|\delta_x(\delta_\kappa)\| = 0$$

Pour ce choix de δ_x l'on a donc:

$$\|L \cdot \delta_x + M \cdot \delta_\kappa\| \leq C_3(\|\delta_\kappa\|)(\|\delta_x\| + \|\delta_\kappa\|) \quad (2.22)$$

avec:

$$\lim_{\|\delta_\kappa\| \rightarrow 0} C_3(\|\delta_\kappa\|) = 0$$

D'autre part comme $D_x \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) = 0$ l'on a:

$$|g(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - g(\mathcal{K}_0) - D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa| \leq C_4(\|\delta_\kappa\|)(\|\delta_x\| + \|\delta_\kappa\|)$$

avec:

$$\lim_{\|\delta_\kappa\| \rightarrow 0} C_4(\|\delta_\kappa\|) = 0$$

De l'inégalité

$$| \|L \cdot \delta_x\| - \|M \cdot \delta_\kappa\| | \leq \|L \cdot \delta_x + M \cdot \delta_\kappa\|$$

on déduit l'avec (2.22) que:

$$\|L \cdot \delta_x\| \leq C_3(\|\delta_\kappa\|) \cdot \|\delta_x\| + (C_3(\|\delta_\kappa\|) + \|M\|) \cdot \|\delta_\kappa\| \cdot$$

Or l'hypothèse ii) équivaut à dire (voir Brezis [6])

$$\exists \lambda > 0 : \quad \|h\| \leq \lambda \|L \cdot h\| \quad \forall h \in H_x$$

Ainsi pour $\|\delta_\kappa\|$ assez petit on mettons $\|\delta_\kappa\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fixé on peut affirmer l'existence d'une constante $\mu > 0$ telle que:

$$\|\delta_{\mathcal{X}}\| \leq \mu \cdot \|\delta_\kappa\| \quad (2.23)$$

On en conclut donc qu'avec $\|\delta_\kappa\| < \varepsilon$ on a:

$$|g(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - g(\mathcal{K}_0) - D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa| \leq (1 + \mu) C_4(\|\delta_\kappa\|) \|\delta_\kappa\|$$

avec:

$$\lim_{\|\delta_\kappa\| \rightarrow 0} C_4(\|\delta_\kappa\|) = 0$$

Ceci signifie que g est différentiable en \mathcal{K}_0 et l'on a:

$$Dg(\mathcal{K}_0) = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$$

■

Dans les conditions de la proposition (2.3.2) nous pouvons conclure qu'une approximation au premier ordre de $g(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - g(\mathcal{K}_0)$ est naturellement:

$$Dg = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$$

En développant cette dernière expression on trouve:

$$Dg = D_\kappa \mathcal{G}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa - \langle D_\kappa \mathcal{F}(\mathcal{X}_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa, q_0 \rangle_{H', H}$$

expression identique à celle obtenue au paragraphe (2.3)

En fait quand on regarde de près la démonstration de la proposition (2.3.1) on remarque que la condition *ii*) a servi uniquement à réaliser la propriété (2.23) qui a permis de montrer la différentiabilité de g en $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. On peut donc énoncer la :

Proposition 2.3.3 *Soit $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ et $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(\mathcal{K}_0)$ la solution de (2.14) pour $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu > 0$ tels que:*

$$\|\delta_\kappa\| < \varepsilon \implies \|\mathcal{X}(\mathcal{K}_0 + \delta_\kappa) - \mathcal{X}(\mathcal{K}_0)\| \leq \mu \|\delta_\kappa\|$$

Si le système adjoint (2.19) admet une solution $\bar{q} = q_0$, alors g est différentiable en $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ et on a:

$$Dg = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$$

Corollaire 2.3.1 *Si $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{K})$ est différentiable en $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$, et si (2.19) admet une solution $\bar{q} = q_0$, alors g est différentiable en $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ et on a:*

$$Dg = D_\kappa \mathcal{B}(\mathcal{X}_0, q_0, \mathcal{K}_0) \cdot \delta_\kappa$$

Chapitre III :

Analyse de sensibilité et assimilation variationnelle.

3.1 Introduction et position du problème

Nous voulons dans ce chapitre proposer une réponse à la question:

Comment mener une étude de sensibilité dans le contexte de l'assimilation variationnelle de données?

La question ne se pose pas pour un modèle dépendant d'un (vecteur de) paramètre(s) car il suffirait d'appliquer l'une des méthodes décrites au chapitre II

La difficulté que l'on rencontre lorsqu'on veut appliquer les méthodes du chapitre II dans le contexte de l'assimilation de données réside dans le fait qu'en plus d'un modèle dépendant d'un (vecteur de) paramètre(s) tels que les conditions initiales les conditions aux limites du domaine les forçages...etc il y a la présence d'une seconde famille de paramètres: **les données ou observations**. Ceci implique la dépendance des résultats par rapport aux observations.

Dans le cadre de l'assimilation de données l'application des équations adjointes pour l'analyse de sensibilité (comme nous le verrons dans cette étude) ne se fait pas sur les équations directes régissant l'évolution de l'état du système contrairement à ce que certains auteurs ont pu penser: Park et al. [83] et [82] Droegemeier [15] Rabier et al. [86] [87] et les références ci-dessus relatives à l'analyse de sensibilité sur un modèle résultant de l'assimilation de données.

Nous montrons dans ce chapitre par le moyen d'un exemple simple que cette démarche comporte des lacunes dans le contexte de l'assimilation de données et qu'il faut s'y prendre différemment. L'erreur que beaucoup d'auteurs commettent (références ci-dessus) en appliquant la théorie générale de l'analyse de sensibilité à des modèles dans le contexte de l'assimilation de données est qu'ils ne tiennent pas compte de la dépendance mentionnée ci-dessus.

Nous proposons alors une nouvelle méthode pour l'analyse de sensibilité dans ce cas et nous l'appliquons à l'assimilation de données dans un modèle de circulation générale océanique. Le principe reste le même pour n'importe quel autre modèle pourvu que ce soit dans le contexte de l'assimilation de données.

Pour nous du moins dans cette étude le vecteur de paramètres qui nous intéresse est le vecteur des données ou observations X_{obs} . Et pour cause: les observations peuvent être mal prises elles peuvent être bruitées leur configuration spatio-temporelle peut varier. Et dans ce cas on aimerait savoir quelle est la variation d'un critère choisi par rapport à un bruit ou une variation sur les observations. Plus précisément notre assimilation variationnelle de données consiste à reconstruire l'état initial du modèle à partir des observations. La question peut alors être posée de la façon suivante: *Quelle est la perturbation produite sur la condition initiale reconstruite par une perturbation sur les observations?*

Après avoir illustré cette introduction par un exemple nous proposerons une méthode qui permet de répondre à la question posée ci-dessus. Nous développerons d'abord la méthode pour un vecteur de paramètres quelconque dans le modèle puis nous en déduirons le résultat par le vecteur des observations. Des applications numériques seront aussi faites pour le cas de l'assimilation de données dans le modèle QG ci-dessus (chap. I)

3.2 Exemple

Cet exemple peut en réalité être regardé comme un contre-exemple. Considérons un modèle donné par l'équation différentielle ordinaire:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha \cdot X$$

avec la condition initiale:

$$X(0) = U$$

où X est une variable scalaire fonction du temps dans l'intervalle $[0, 1]$ et α est une constante. Nous nous plaçons dans le cadre de l'assimilation variationnelle de données en considérant une observation X_{obs} de X que nous supposons constante et égale à β dans l'intervalle de temps $]0, 1[$. Soit alors la fonction-coût à minimiser:

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^1 (X(t) - \beta)^2 dt$$

et la réponse (critère de sensibilité):

$$G(\alpha) = \int_0^1 X(t) dt$$

J est une fonction composée de U par l'intermédiaire de X il en est de même pour G qui est une fonction composée de α .

La solution de l'équation différentielle est :

$$X(t) = U e^{\alpha \cdot t}$$

et nous pouvons alors exprimer J explicitement en fonction de U :

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ue^{\alpha t} - \beta)^2 dt$$

En écrivant l'équation d'Euler pour la minimisation de J ($J'(U) = 0$) nous obtenons la valeur optimale de U :

$$U_{opt} = \frac{2\beta}{e^\alpha + 1}$$

ce qui donne la valeur explicite de G en fonction de α :

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \int_0^1 \frac{2\beta}{e^\alpha + 1} e^{\alpha t} dt \\ &= \frac{2\beta}{\alpha} \left[\frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \right] \end{aligned}$$

et on peut donc directement calculer la sensibilité (le gradient) de G par rapport à α :

$$G'(\alpha) = \frac{2\beta}{\alpha(e^\alpha + 1)} \left[\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} - \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \right] \quad (3.1)$$

Ceci est l'expression exacte de la sensibilité. Nous allons maintenant appliquer l'analyse de sensibilité par les équations adjointes pour calculer le gradient de G par rapport à α .

Compte tenu des développements faits aux chapitres précédents sur l'assimilation de données l'équation adjointe associée à ce problème est :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} + \alpha \cdot P &= 1 \\ P(1) &= 0 \end{aligned}$$

dont la solution est:

$$P(t) = \frac{1}{\alpha} [1 - e^\alpha \cdot e^{-\alpha t}]$$

et le gradient de G en utilisant les équations adjointes est donné par:

$$\begin{aligned} G' &= - \int_0^1 X(t) \cdot P(t) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{2\beta}{\alpha(e^\alpha + 1)} e^{\alpha t} [1 - e^\alpha \cdot e^{-\alpha t}] dt \\ &= \frac{2\beta}{\alpha(e^\alpha + 1)} \left[e^\alpha - \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les deux expressions (3.1) et (3.2) sont différentes. Mais c'est la seconde qui est fautive car elle ne tient pas compte de la dérivée de U_{opt} par rapport à α . Telle est l'erreur commise

couramment lorsqu'on qui applique directement (sans précautions) la théorie générale de l'analyse de sensibilité dans le contexte de l'assimilation de données (cf références ci-dessus).

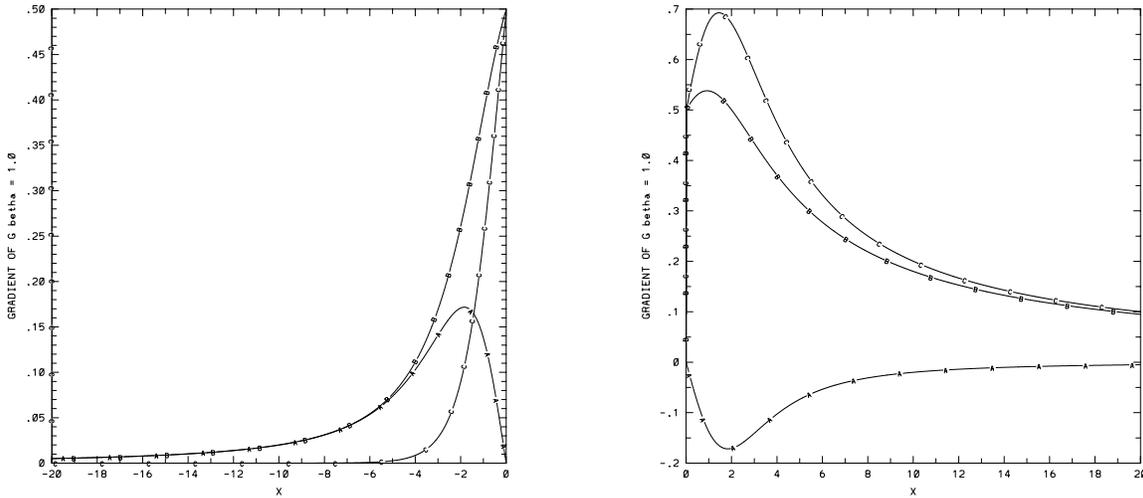


FIG. 3.1 – Courbes de gradients en fonction de α . A: résultat du calcul direct (courbe exacte), et B: résultat obtenu en utilisant les équations adjointes, et C: la différence de A et B, pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$.

La source de cette erreur ne réside pas dans la théorie de l'analyse de sensibilité Γ mais dans son application. Et encore Γ pour appliquer la théorie générale de l'analyse de sensibilité Γ on n'a besoin que d'un modèle dépendant de paramètre(s) et d'une réponse. Le faux résultat illustré par l'exemple ci-dessus nous indique alors tout simplement que le modèle à considérer pour appliquer la théorie de l'analyse de sensibilité n'est pas le modèle direct Γ car il nous conduirait à ne pas prendre en compte toute la variation de l'état du système par rapport au(x) paramètre(s). On peut donc tout naturellement se poser la question suivante:

Quel modèle considérer pour appliquer la théorie de l'analyse de sensibilité dans le contexte de l'assimilation variationnelle de données ?

Répondre à cette question consiste à choisir un “bon modèle” pour appliquer de façon cohérente Γ la théorie générale de l'analyse de sensibilité . Ce modèle devrait résoudre le problème posé par l'utilisation du modèle direct. En d'autres termes Γ il devrait nous permettre de prendre en compte toutes les variations de l'état du système en fonction des paramètres. Mais avant de proposer une réponse à la question ci-dessus Γ nous nous replacerons dans le cadre de l'assimilation variationnelle que nous sommes fixés au chapitre II dans une formulation générale pour le moment. Nous choisirons ensuite le

modèle sur lequel nous appliquerons la théorie générale de l'analyse de sensibilité et nous justifierons ce choix et enfin nous appliquerons les résultats généraux de l'analyse de sensibilité (chapitre II) à ce modèle.

3.3 Rappels sur l'assimilation variationnelle: formulation générale

Rappelons d'abord ce qu'est l'assimilation variationnelle du moins dans le cadre que nous nous sommes fixés au chapitre I.

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que: $V \subset H$ avec injection continue et dense. Considérons un système dont l'état pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ est régi par l'équation d'évolution abstraite suivante:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = U \end{cases} \quad (3.3)$$

Sans nuire à la généralité et pour simplifier les notations nous identifions l'espace dual H' à H par la représentation de Riesz-Fréchet (Brezis [6]). Supposons que la condition initiale $U \in H$ que $F(\cdot)$ est un opérateur non-linéaire de V dans V' indépendant du temps. La solution X de l'équation (3.3) est alors à chercher dans l'espace des fonctions de $L^2(0, T; V)$ dont les dérivées en temps $\frac{dX}{dt}$ appartiennent à $L^2(0, T; V')$.

Notons $W(0, T; V)$ cet espace de solutions. Comme les éléments de $W(0, T; V)$ sont continus dans H par rapport au temps i.e. $W(0, T; V) \subset C(0, T; H)$ on cherche alors la solution X telle que:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{dX}{dt}, \varphi \right\rangle_{V', V} = \langle F(X), \varphi \rangle_{V', V} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T; V) \\ X(0) = U \end{cases} \quad (3.4)$$

Pendant ce même temps des observations (mesures) sont faites sur l'état du système. Nous considérons alors un opérateur linéaire d'observation $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V), \mathcal{H})$ où \mathcal{H} est l'espace des observations. Soit $X^{obs} \in \mathcal{H}$ un vecteur d'observations. Le problème d'assimilation variationnelle qui nous intéresse consiste à identifier la condition initiale U^* qui minimise la fonctionnelle:

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C \cdot X - X^{obs}\|^2 dt \quad (3.5)$$

où X dépend de U en tant que solution de l'équation (3.3).

Supposons en outre que V soit séparable. Soit alors $\{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots\}$ une base hilbertienne de V . On peut alors décomposer le vecteur X solution de l'équation (3.3) dans

cette base et obtenir un système d'équations différentielles vérifiées par les composantes de X . Soit $(X_1(t), X_2(t), \dots, X_i(t), \dots)$ les composantes de X : on a

$$X_i(t) = \langle X(t), v_i \rangle_H \quad \forall i, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.6)$$

Comme la solution $X(t)$ est continue de $[0, T]$ dans H il en est de même pour chaque composante $X_i(t)$. On définit de façon analogue les composantes de la condition initiale dans la base $\{v_i\}$. Et pour tout $i = 1, 2, \dots$ nous pouvons introduire une fonctionnelle non-linéaire

$$F_i : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \langle F(\varphi), v_i \rangle_{V', V} \quad (3.7)$$

Et l'opérateur F dans (3.3) peut alors s'écrire sous la forme:

$$F(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(\varphi) \cdot v_i \quad \forall \varphi \in V \quad (3.8)$$

Compte tenu des décompositions ci-dessus nous pouvons récrire le système (3.3) sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt}(t) = F_i(X(t)) \\ X_i(t=0) = U_i \end{cases} \quad \text{avec} \quad X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t) \cdot v_i \quad (3.9)$$

3.3.1 Quelques rappels de calcul différentiel

En vue de leur utilisation dans la suite nous rappelons quelques notions de calcul différentiel pour les opérateurs.

On définit la dérivée partielle première de la fonctionnelle F_j par:

$$\frac{\partial F_j}{\partial v_i}(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F_j(X + \alpha \cdot v_i) - F_j(X)}{\alpha}$$

et la dérivée partielle seconde:

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial v_k \partial v_i}(X) = \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{\partial F_j}{\partial v_i}(X) \right)$$

Soit \mathcal{K} un troisième espace de Hilbert (espace des paramètres indépendants) séparable et muni d'une base hilbertienne $\{k_i\}$. Si F est un opérateur de $V \times \mathcal{K}$ dans V' alors on définit de façon analogue les dérivées partielles première et secondes:

$$\frac{\partial F_j}{\partial k_i}(X) \quad , \quad \frac{\partial^2 F_j}{\partial v_i \partial k_l} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{\partial F_j}{\partial k_l} \right) \quad , \quad \frac{\partial^2 F_j}{\partial k_i \partial k_l} = \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial F_j}{\partial k_l} \right)$$

On dira que F_j est deux fois Fréchet-différentiable en X s'il admet une représentation de Taylor de la forme:

$$F_j(X + h) = F_j(X) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial v_i}(X) \cdot h_i + \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j}{\partial v_k \partial v_i}(X) \cdot h_k \cdot h_i + 0 \left(\|h\|_V^2 \right) \quad (3.10)$$

Enfin on dira que F est deux fois Fréchet-différentiable en X si pour tout j chaque fonctionnelle F_j est deux fois Fréchet-différentiable en X et de plus les restes 0 $\left(\|h\|_V^2 \right)$ dans (3.10) sont uniformément bornés par rapport à j .

Dans la suite on supposera que F est deux fois Fréchet-différentiable en tout point X de V . Nous supposons en plus que les dérivées partielles secondes des fonctionnelles F_j sont continues dans V autrement dit pour tout i, j, k les applications

$$X \mapsto \frac{\partial^2 F_j}{\partial v_k \partial v_i}(X)$$

sont continues de V dans $\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, V'))$.

On peut montrer que cette dernière hypothèse implique que l'on peut commuter l'ordre de dérivation partielle dans chaque dérivée partielle seconde des F_j . On verra par la suite que cette conséquence impliquera (naturellement) la symétrie de la fonction-coût J .

Linéarisation et transposition

Notons $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ la matrice jacobienne de F par rapport à X . Grâce aux dérivées partielles des fonctionnelles F_j $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] &: V \longrightarrow V' \\ h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot v_k &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial v_k}(X) \cdot h_k \right) \cdot v_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

De même V étant un espace de Hilbert l'opérateur adjoint du linéarisé $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t &: V \longrightarrow V' \\ l = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \cdot v_k &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_k}{\partial v_j}(X) \cdot l_k \right) \cdot v_j \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \in \mathcal{L}(V, V')$ (c'est-à-dire si F est Fréchet-différentiable) alors il en est de même pour $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t$; en plus ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre dans le sens

classique:

$$\left\langle \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \cdot u, v \right\rangle_{v', v} = \left\langle u, \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot v \right\rangle_{v, v'} \quad \forall u, v \in V$$

Si F est deux fois Fréchet-différentiable nous notons de façon analogue $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right]$ l'opérateur linéarisé de $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ au voisinage de X et nous définissons comme ci-dessus sa transposée $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right]^t$.

D'autre part si F est fonction de deux variables X et K nous noterons $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X} \right]$ l'opérateur linéarisé de $\left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]$ au voisinage de K et sa transposée $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X} \right]^t$.

3.3.2 Système d'optimalité

Comme nous l'avons vu au chapitre II la condition initiale optimale est caractérisée par $\nabla J(U^*) = 0$. Or le gradient de la fonction-coût J en un point U de l'espace des contrôles est obtenu par résolution successive de l'équation directe d'évolution et de l'équation adjointe rétrograde et en prenant ensuite la trace la variable adjointe sur l'espace des contrôles ce qui se traduit dans notre cas par le système:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = U^* \\ \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot P = C^t(C \cdot X - X_{obs}) \\ P(T) = 0 \\ \nabla J(U) = -P(0) \end{cases} \quad (3.13)$$

où C^t est l'opérateur adjoint de C :

$$\langle C \cdot X, Z \rangle_{\mathcal{H}} = \langle X, C^t \cdot Z \rangle_{v, v'} \quad (3.14)$$

3.4 Choix du modèle et justification

Dans le contexte de l'assimilation variationnelle de données Γ (cf chapitre I) l'état du système n'est obtenu qu'après la minimisation de la fonction-coût et non après la

résolution du modèle direct. Or la minimisation de la fonction-coût est équivalente à la résolution du système d'optimalité. Nous pouvons donc étendre la notion de modèle dans ce cas au système d'optimalité puisque c'est ce dernier qui finalement nous donne le véritable état du modèle.

D'autre part le système d'optimalité contient beaucoup plus d'informations. Il tient compte du modèle direct des données (observations) et du lien optimal entre les données et les paramètres du modèle. Le système d'optimalité est donc un "*bon candidat*" en tant que modèle pour l'application de l'analyse de sensibilité en assimilation variationnelle de données ce qui nécessitera une analyse plus poussée (analyse au second ordre) que nous justifierons et présenterons dans la suite.

Considérons maintenant K étant un vecteur de paramètres un système gouverné par:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, K) \\ X(0) = U \end{cases}$$

la condition initiale étant issue de la procédure d'assimilation variationnelle décrite au chapitre I

La méthode "*traditionnelle*" de calcul de la sensibilité d'une réponse \mathcal{G} donnée par rapport à K consiste à intégrer le modèle direct et son adjoint en faisant pour la théorie générale de l'analyse de sensibilité les identifications:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\equiv K \\ \mathcal{X} &\equiv X \\ \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) &= \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} - F(X, K) \\ X(0) - U \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15)$$

et à appliquer les résultats du chapitre II pour obtenir le gradient de \mathcal{G} par rapport à K .

Mais cette démarche n'est pas toujours correcte c'est du moins ce que nous avons illustré par l'exemple (3.2). En effet si une perturbation k est appliquée à K alors la condition initiale n'a plus aucune raison d'être optimale du moins rien ne pourrait nous garantir son optimalité. Une perturbation k sur K induit forcément une variation δ_v sur U et cette variation devrait être prise en compte dans l'analyse de sensibilité qui suit l'assimilation variationnelle .

Soit K_{ad} l'ensemble de toutes les valeurs possibles de K . Lorsque K varie dans K_{ad} U parcourt un ensemble U_{ad} de toutes les conditions initiales admissibles. Nous pouvons alors transformer la question posée au début de ce chapitre en :

Quel opérateur considérer pour \mathcal{F} ?

L'erreur courante qu'on commet est de considérer (3.15) et d'utiliser le modèle adjoint pour calculer la sensibilité. Mais la variable d'état dans un problème d'assimilation variationnelle (météorologie, océanographie, etc) n'est pas la solution directe d'une équation

mais la solution d'un problème d'optimisation. Et donc pour appliquer la théorie générale de l'analyse de sensibilité le seul modèle à considérer est le modèle dont l'état optimal est la solution c'est-à-dire le système d'optimalité (3.13). Ainsi pour tenir compte de la dépendance des perturbations sur toutes les variables et tous les paramètres du modèle nous devons donc considérer:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{K}) = \begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} - F(X, K) \\ X(0) - U^* \\ \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot P - C^t(CX - X_{obs}) \\ P(T) \\ P(0) \end{pmatrix}$$

Ceci signifie que dans le contexte de l'assimilation variationnelle la notion de modèle doit dépasser le cadre d'une équation directe pour s'étendre au système d'optimalité et c'est sur ce système que nous appliquons les résultats généraux de l'analyse de sensibilité

3.5 Application à l'assimilation variationnelle de données

Pour appliquer les méthodes décrites au chapitre II sur l'analyse de sensibilité nous donnons un critère de sensibilité ("*fonction réponse*") \mathcal{G} que nous supposons sous la forme intégrale:

$$\mathcal{G} = \int_0^T G(X) dt$$

où G est une fonction à valeurs réelles X dépend de K par l'intermédiaire du système d'optimalité. Le choix de la forme de \mathcal{G} n'est pas restrictif il est fait avec un souci de simplicité dans les calculs. D'autres types de réponses ont été étudiées par: Cacuci [9] et Ounsi [81].

Nous calculons alors le gradient de \mathcal{G} comme nous l'avons introduit au chapitre II. Pour cela nous allons perturber \mathcal{K} de $\delta_{\mathcal{K}}$ en fait nous perturbons K de k . Il s'ensuit des perturbations \hat{X} de X , \hat{P} de P et \hat{U}^* de U^* qui ne sont autre que les dérivées

directionnelles de $X\Gamma P$ et U^* respectivement Γ dans la direction k . $X\Gamma P$ et U^* étant fonctions implicites de $K\Gamma\hat{X}\Gamma\hat{P}$ et \hat{U}^* sont solution du système linéaire tangent au système d'optimalité:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{X}}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right] \cdot \hat{X} + \left[\frac{\partial F}{\partial K}(X, K) \right] k \\ \hat{X}(0) = \hat{U}^* \\ \frac{d\hat{P}}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right]^t \cdot \hat{P} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X, K)\hat{X} \right]^t \cdot P + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X}(X, K) \cdot k \right]^t \cdot P = C^t C \hat{X} \\ \hat{P}(T) = 0 \\ \hat{P}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Nous appliquons alors la formulation lagrangienne de l'analyse de sensibilité en introduisant la variable adjointe $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}$ de $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$.

Au moyen d'un produit scalaire convenable (à préciser dans les applications concrètes) Γ nous multiplions les deux équations d'évolution (en \hat{X} et en \hat{P}) du système (3.16) par Q et R respectivement Γ nous additionnons les deux quantités et nous intégrons sur l'intervalle $[0, T]$ pour obtenir:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\left\langle \frac{d\hat{X}}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right] \hat{X}, Q \right\rangle_{v',v} + \left\langle \frac{d\hat{P}}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right]^t \hat{P}, R \right\rangle_{v',v} \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[- \left\langle \left[\frac{\partial F}{\partial K}(X, K) \right] \cdot k, Q \right\rangle_{v',v} + \left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X}(X, K) \cdot k \right]^t \cdot P, R \right\rangle_{v',v} \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[\left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X, K) \cdot \hat{X} \right]^t \cdot P, R \right\rangle_{v',v} - \langle C^t (C \hat{X}), R \rangle_{v',v} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

Après intégration par parties et en utilisant l'égalité (3.26) que l'on démontre dans la suite Γ on obtient:

$$\begin{aligned} & \langle \hat{X}(T), Q(T) \rangle_H - \langle \hat{X}(0), Q(0) \rangle_H + \langle \hat{P}(T), R(T) \rangle_H - \langle \hat{P}(0), R(0) \rangle_H + \\ & + \int_0^T \left[\left\langle \hat{X}, -\frac{dQ}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right]^t \cdot Q + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X, K) \cdot R \right]^t \cdot P - C^t C R \right\rangle_{v,v'} \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[\left\langle \hat{P}, -\frac{dR}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right] R \right\rangle_{v,v'} + \left\langle - \left[\frac{\partial F}{\partial K}(X, K) \right] k, Q \right\rangle_{v,v'} \right] dt + \\ & + \int_0^T \left[\left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X}(X, K) \cdot R \right]^t \cdot P, k \right\rangle_{v,v'} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

il en découle que si Q et R sont définis comme solution du système:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right]^t \cdot Q - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X, K) \cdot R \right]^t \cdot P + C^t C R = \left[\frac{\partial G}{\partial X} \right] \\ \frac{dR}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X, K) \right]^t \cdot R = 0 \\ Q(0) = 0 \\ Q(T) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Alors le gradient de \mathcal{G} par rapport à K est donné par:

$$\nabla \mathcal{G} = \int_0^T \left(\left[\frac{\partial F}{\partial K}(X, K) \right]^t \cdot Q - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial X}(X, K) \cdot R \right]^t \cdot P \right) dt \quad (3.18)$$

3.5.1 Remarques

1. Le système ci-dessus (3.17) est appelé *système adjoint au second ordre* par LE DIMET et al. [111] et WANG et al. [113].
2. S'il y a des observations à l'instant final T la condition finale du modèle adjoint $P(T) = 0$ devient $P(T) = C^t(CX(T) - X_{obs}(T))$ qui donne pour \hat{P} la condition finale: $\hat{P}(T) = C^t C \hat{X}(T)$. Et donc la condition finale du système (3.17) $Q(T) = 0$ devient: $Q(T) + C^t C R(T) = 0$. Toutefois l'expression (3.18) donnant le gradient de \mathcal{G} demeure inchangée bien que sa valeur puisse varier en conséquence des changements respectifs des valeurs de Q et R .
3. Pour calculer la sensibilité donnée par (3.18) il faut résoudre le système (3.17) qui est un système couplé de deux équations différentielles linéaires. La seconde équation de (3.17) n'est autre que ce qu'on appelle couramment le modèle linéaire tangent. La première possède une condition initiale $Q(0) = 0$ choisie pour annuler la dépendance par rapport aux variations de la condition initiale optimale et une condition finale $Q(T) = 0$ ou bien selon le point (2.) de cette remarque une condition finale de couplage $Q(T) + C^t C R(T) = 0$. S'il n'y a pas d'observations à l'instant final T la seconde équation n'a ni condition initiale ni condition finale. En tout cas nous sommes en présence d'un système non standard et qui n'est pas facile à résoudre. Il est important de noter que l'absence de condition initiale et/ou finale pour R provient des égalités $P(0) = 0$ et $P(T) = 0$.
4. Si $\mathcal{G} = \mathcal{J}$ la fonction-coût il est évident que $R \equiv 0$ est une solution et nous trouvons aussi que $Q \equiv P$ la variable adjointe du modèle direct. Mais si $\mathcal{G} \neq \mathcal{J}$ $R \equiv 0$ est toujours une solution de la seconde équation et nous obtenons formellement pour Q une équation similaire à l'équation adjointe dans (3.13) mais avec un second membre différent. Il est clair qu'il n'y a aucune raison d'obtenir $Q(0) = 0$ après intégration

de cette équation et donc la sensibilité (3.18) ne peut être déduite à partir de cette variable “pseudo-adjointe” comme c’est la pratique courante en analyse de sensibilité

5. La faiblesse de la méthode qui consiste à utiliser l’équation *pseudo-adjointe*

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot Q = \left[\frac{\partial G}{\partial X} \right] \\ Q(T) = 0 \end{cases}$$

est dévoilée lorsqu’on cherche à calculer la sensibilité par rapport aux observations. Ceci est dû au fait que les observations ne sont pas des variables explicites du modèle direct et même elles n’y apparaissent pas du tout. Par contre les observations apparaissent explicitement dans le système d’optimalité et donc du point de vue formel elles peuvent être considérées comme paramètre dans ce dernier modèle. Pour une réponse \mathcal{G} sous forme intégrale et dépendant de \mathcal{X} et donc implicitement de X_{obs} en faisant une analyse similaire à celle décrite ci-dessus nous trouvons que:

$$\nabla \mathcal{G} = -C \cdot R \tag{3.19}$$

3.5.2 Calcul pratique du gradient de \mathcal{G}

Nous allons dans ce qui suit proposer une méthode (un algorithme) pour résoudre le système (3.17) et calculer par la suite la sensibilité donnée par (3.18) ou (3.19). Pour cela il nous faudra faire des hypothèses qui nous assurent l’existence et l’unicité de la solution du système (3.17).

Ce qui rend difficile la résolution de ce système c’est l’absence de la condition initiale (ou finale) explicite pour R . Nous proposons alors la démarche suivante:

- Choisir une condition initiale v pour R : $R(0) = v$
- Intégrer la seconde équation de (3.17)
- Dans le cas du point (2.) de la remarque (3.5.1) utiliser la condition finale de couplage et en déduire $Q(T)$
- Sinon intégrer (de façon rétrograde) la première équation de (3.17)

Nous obtenons alors $Q(0)$ comme une fonction implicite de v par l’intermédiaire de R dans le système (3.17): $Q(0) = Q(0, v)$. Et la condition $Q(0) = 0$ peut être utilisée comme contrainte en cherchant v^* tel que: $Q(0, v^*) = 0$.

L’existence et l’unicité de v^* qui est le point central de cet algorithme repose sur le résultat (théorème) suivant:

Théorème 3.5.1 *Si le Hessien de la fonction-coût par rapport à la variable de contrôle U est inversible à l'optimum i.e. pour $U = U^*$, alors il existe un unique vecteur v^* , dans l'espace des conditions initiales V pour le modèle direct, tel que:*

$$Q(0, v^*) = 0$$

Remarque

L'existence et l'unicité de v^* montre aussi l'existence et l'unicité de la solution du système (3.17) et donc un calcul de manière univoque de la sensibilité (3.18) ou (3.19).

Puisque l'hypothèse du théorème porte sur le Hessien de la fonction-coût Γ nous montrerons d'abord Γ avant de démontrer le théorème Γ comment obtenir le Hessien Γ et quel est le lien avec le système (3.17) et l'existence de v^* .

3.5.3 Le Hessien de la fonction-coût

Le produit du Hessien de la fonction-coût (en un point $U \in V$) par un vecteur v est donné par la dérivée directionnelle du gradient de la fonction-coût en U dans la direction v . Si nous notons $H(U)$ le Hessien en U on a :

$$H(U) \cdot v = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\nabla J(U + \alpha \cdot v) - \nabla J(U)}{\alpha} \quad (3.20)$$

Pour calculer cette dérivée directionnelle il suffit de calculer les dérivées directionnelles des variables X et P du système (3.14) dans la direction de la perturbation v sur U .

Proposition 3.5.1 *La dérivée directionnelle (\tilde{X}, \tilde{P}) du couple (X, P) est donnée comme solution du système:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] \cdot \tilde{X} \\ \tilde{X} = v \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \cdot \tilde{P} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t \cdot P = C^t C \tilde{X} \\ \tilde{P}(T) = 0 \\ \tilde{\nabla} J(U, v) = -\tilde{P}(t=0) \end{array} \right. \quad (3.21)$$

où $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t \cdot P$ représente le vecteur: $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j}{\partial v_k \partial v_i}(X) \cdot \tilde{X}_k \cdot P_j \right) v_i$
avec $\tilde{X}_k = \langle \tilde{X}, v_k \rangle_H$ et $P_j = \langle P, v_j \rangle_H$

$\tilde{\nabla} J(U, v)$ est la perturbation induite sur $\nabla J(U)$ par v .

Démonstration:

Le système (3.21) est obtenu en dérivant le système (3.13). La seule dérivation non triviale est celle du terme $\left[\frac{\partial F}{\partial X}(X)\right]^t \cdot P$. Si nous décomposons cette quantité dans la base $\{v_i\}$ l'on a :

$$\left[\frac{\partial F}{\partial X}(X)\right]^t \cdot P = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_j^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial v_i}(X) \cdot P_j \right) \cdot v_i \quad (3.22)$$

et la dérivée dans la direction (\tilde{X}, \tilde{P}) de (3.22) est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j}{\partial v_k \partial v_i}(X) \cdot \tilde{X}_k \cdot P_j \right) \cdot v_i + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial v_i} \cdot \tilde{P}_j \right) \cdot v_i$$

C.Q.F.D. ■

La proposition ci-dessus nous montre que si l'on résout le système (3.21) l'on récupère la dérivée directionnelle $\tilde{\nabla} J(U, v)$ dans le vecteur $-\tilde{P}(t=0)$ puisque par définition :

$$Hess(U) \cdot v = \tilde{\nabla} J(U, v) = -\tilde{P}(t=0) \quad (3.23)$$

3.5.4 Symétrie du Hessian

Proposition 3.5.2 *Sous les hypothèses de la section (3.3.1) sur la bi-dérivabilité de l'opérateur F , le Hessian de la fonction-coût J (par rapport à la variable de contrôle U) est symétrique, c'est-à-dire :*

$$\langle H(U) \cdot v, w \rangle_H = \langle v, H(U) \cdot w \rangle_H \quad \forall v, w \in V$$

Démonstration :

Soit (Q, R) un couple de variables dans $L^2(0, T; V) \times L^2(0, T; V)$. Multiplions la première et la troisième équation de (3.21) par Q et R respectivement l' faisons la somme et transposons l'expression :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{d\tilde{X}}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X)\right] \cdot \tilde{X}, Q \right\rangle_{L^2(0, T; V'), L^2(0, T; V)} \\ &+ \left\langle \frac{d\tilde{P}}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X)\right]^t \cdot \tilde{P} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X}\right]^t \cdot P - C^t \cdot C \cdot \tilde{X}, R \right\rangle_{L^2(0, T; V'), L^2(0, T; V)} \\ &= \left\langle \tilde{X}, -\frac{dQ}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X)\right]^t \cdot Q \right\rangle_{L^2(0, T; V), L^2(0, T; V')} + \left\langle \tilde{X}(T), Q(T) \right\rangle_H - \left\langle \tilde{X}(0), Q(0) \right\rangle_H + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \tilde{P}, -\frac{dR}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] \cdot R \right\rangle_{L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')} + \langle \tilde{P}(T), R(T) \rangle_H - \langle \tilde{P}(0), R(0) \rangle_H + \\
& + \left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t \cdot P, R \right\rangle_{L^2(0,T;V'), L^2(0,T;V)} - \langle \tilde{X}, C^t \cdot C \cdot R \rangle_{L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

or le terme $\left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t \cdot P, R \right\rangle_{L^2(0,T;V'), L^2(0,T;V)}$ s'écrit dans la base $\{v_i\}$ sous la forme:

$$\left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t P, R \right\rangle_{L^2(0,T;V'), L^2(0,T;V)} = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j(X)}{\partial v_k \partial v_i} \tilde{X}_k P_j R_i \right) dt \quad (3.25)$$

Grâce aux hypothèses de la section (3.3.1) sur la continuité des dérivées partielles secondes Γ on peut permuter l'ordre de dérivation des F_j . Si l'on permute alors les indices i et k dans le second membre de (3.25) Γ on peut aussi permuter les sommations sur i et k pour obtenir:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t P, R \right\rangle_{L^2(0,T;V'), L^2(0,T;V)} & = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j(X)}{\partial v_k \partial v_i} R_k P_j \tilde{X}_i \right) dt \\
& = \left\langle \tilde{X}, \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot R \right]^t P \right\rangle_{L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

et l'égalité (3.24) devient alors:

$$\begin{aligned}
0 & = \left\langle \tilde{X}, -\frac{dQ}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t Q + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) R \right]^t P - C^t C R \right\rangle_{L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')} + \\
& + \left\langle \tilde{P}, -\frac{dR}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] R \right\rangle_{L^2(0,T;V), L^2(0,T;V')} \\
& + \langle \tilde{X}(T), Q(T) \rangle_H - \langle \tilde{X}(0), Q(0) \rangle_H + \langle \tilde{P}(T), R(T) \rangle_H - \langle \tilde{P}(0), R(0) \rangle_H \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Soit w un vecteur quelconque de $V = \mathcal{U}_{ad}$. Dans (3.27) Γ on impose de plus que Q et R soient solution du système adjoint au second ordre introduit par LE DIMET et *al.* [111] Γ WANG et *al.* [113]:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \cdot R = 0 \\ R(0) = w \\ \frac{dQ}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot Q - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} R \right]^t \cdot P + C^t C R = 0 \\ Q(T) = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Ce système est exactement de même type que le système (3.21) et on a donc :

$$H(U) \cdot w = Q(t = 0)$$

ce qui implique dans (3.27)

$$0 = - \left\langle \tilde{X}(0), Q(0) \right\rangle_H - \left\langle \tilde{P}(0), R(0) \right\rangle_H$$

et compte tenu de (3.23) on a :

$$\left\langle H(U) \cdot v, w \right\rangle_H = \left\langle v, H(U) \cdot w \right\rangle_H$$

C.Q.F.D. ■

Cette symétrie du Hessien montre qu'on peut aussi calculer le produit Hessien \times vecteur par résolution du système adjoint au second ordre (3.28). C'est cette caractérisation que nous utiliserons pour la démonstration du théorème (3.5.1).

3.5.5 Démonstration du théorème (3.5.1)

Soit $v \in \Gamma$ un élément de l'espace des conditions initiales du modèle direct V . Posons $R(0) = v$ et retenons la condition $Q(0) = 0$ comme contrainte. Il nous faut alors résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot Q - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} R \right]^t \cdot P + C^t C R = \left[\frac{\partial G}{\partial X} \right] \\ \frac{dR}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \cdot R = 0 \\ R(0) = v \\ Q(T) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

et chercher v^* tel que $Q(0, v^*) = 0$.

Le système (3.29) étant linéaire et non homogène nous pouvons le décomposer comme suit :

$$Q = Q_0 + Q_1 \quad (3.30)$$

avec (Q_0, R) solution de

$$\begin{cases} \frac{dQ_0}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot Q_0 - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} R \right]^t \cdot P + C^t C R = 0 \\ \frac{dR}{dt} - \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right] \cdot R = 0 \\ R(0) = v \\ Q_0(T) = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

et Q_1 solution de

$$\begin{cases} \frac{dQ_1}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot Q_1 &= \left[\frac{\partial G}{\partial X} \right] \\ Q_1(T) &= 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Q_0, Q_1 et R sont définis de façon unique et nous avons:

$$Q(0) = Q_0(0) + Q_1(0)$$

Or le système (3.31) identique à (3.28) n'est autre que l'adjoint au second ordre décrit par Le Dimet et al. [111] et Wang et al. [113] que nous avons déjà rencontré à la section (3.5.4). Nous savons alors que

$$Q_0(0) = H \cdot v$$

H étant le Hessien de la fonction-coût par rapport à la variable de contrôle U pour $U = U^*$. Ainsi nous obtenons:

$$Q(0) = Q(0, v) = H \cdot v + Q_1(0)$$

Donc si H est inversible il existe un unique vecteur v^* tel que $Q(0) = 0$ et le système adjoint au second ordre possède alors une solution unique pour le calcul de la sensibilité (3.18) ou (3.19)

C.Q.F.D. ■

Corollaire 3.5.1 *Sous les hypothèses de la section (3.3.1), si H est défini positif, alors il existe un unique v^* tel que $Q(0) = 0$*

Preuve

H est déjà symétrique en raison des hypothèses de la section (3.3.1) et de la proposition (3.5.2) si en plus H est défini positif alors H est inversible et on peut appliquer le théorème (3.5.1). ■

Remarques

1) Nous pouvons reprendre le point (2.) de la remarque (3.5.1): s'il y a une observation à l'instant final T la méthode et les équations ne changent pas sauf la condition $Q(T) = 0$ qui devient $Q(T) + C^t C R(T) = 0$ dans les systèmes (3.17) (3.28) (3.29) et $Q_0(T) + C^t C R(T) = 0$ dans (3.31).

2) Calculer la sensibilité (3.18) ou (3.19) nécessite le calcul du Hessien et son inversion ce qui est prohibitif du point de vue du coût de calcul. Par contre par le moyen du système adjoint au second ordre (3.28) ou (3.29) nous pouvons calculer le produit $H \cdot v$ du Hessien

appliqué à un vecteur v pour v quelconque. Ceci nous permet de caractériser v^* de façon différente:

$$v^* = \min_{v \in V} f(v) \quad (3.33)$$

avec

$$f(v) = \frac{1}{2} \langle H \cdot v, v \rangle_v + \langle Q_1(0), v \rangle_v \quad (3.34)$$

et nous pouvons alors utiliser une méthode de type descente ou gradient conjugué pour la minimisation de f

3) v^* n'est autre que la sensibilité de la condition initiale optimale par rapport à une perturbation sur les paramètres comme nous le verrons plus loin à la section (3.6).

4) L'hypothèse du théorème (3.5.1) (et donc du corollaire (3.5.1)) n'est ni trop forte ni restrictive. C'est une hypothèse naturelle car elle est une expression de la condition suffisante pour l'existence d'une solution unique du problème d'optimisation.

Exemple d'application

Nous reprenons ici le modèle de l'exemple (le contre exemple) (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha \cdot X \\ X(0) &= U \end{aligned}$$

La fonction coût J et la réponse G définies par:

$$\begin{aligned} J(U) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [X(t) - \beta]^2 dt \\ G(\alpha) &= \int_0^1 X(t) dt \end{aligned}$$

Nous avons vu qu'en appliquant la théorie générale de l'analyse de sensibilité utilisant les équations adjointes du modèle direct le résultat obtenu (∇G) est différent de celui attendu. Nous allons maintenant appliquer ce qui a été développé ci-dessus. Et comme cela a été dit le modèle sur lequel nous appliquons l'analyse de sensibilité est le système d'optimalité associé à la minimisation de J :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha \cdot X \\ X(0) &= U_{opt} \\ \frac{dP}{dt} + \alpha P &= X - \beta \\ P(0) &= 0 \\ P(1) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

qui a pour solution:

$$\begin{aligned} X(t) &= U_{opt} e^{\alpha \cdot t} \\ P(t) &= \frac{U_{opt}}{2\alpha} (e^{\alpha \cdot t} - e^{2\alpha} e^{-\alpha \cdot t}) + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha} e^{-\alpha \cdot t} - 1) \end{aligned}$$

Le gradient de J par rapport à U est donné par

$$\nabla J(U) = -P(0) = -\frac{U_{opt}}{2\alpha} (1 - e^{2\alpha}) - \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha} - 1)$$

et on peut en déduire la valeur de U_{opt} solution de $\nabla J(U_{opt}) = 0$

$$U_{opt} = \frac{2\beta}{e^{\alpha} + 1}$$

expression identique à celle obtenue par l'analyse directe. Si une perturbation $\tilde{\alpha}$ est faite sur α nous pouvons à partir du système linéaire tangent au système d'optimalité (3.35) introduire les variables adjointes du second ordre (Q, R) et déduire le système adjoint au second ordre analogue à (3.17) qui est ici l'adjoint du système d'optimalité (3.35). Après les calculs nous obtenons comme système à résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + \alpha \cdot Q &= 1 - R \\ \frac{dR}{dt} - \alpha R &= 0 \\ Q(1) &= 0 \\ Q(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

et la sensibilité est donnée par:

$$G'(\alpha) = \int_0^1 [R(t) \cdot P(t) - Q(t) \cdot X(t)] dt \quad (3.37)$$

La résolution de (3.36) est menée selon l'algorithme décrit ci-dessus.

Soit $v \in \mathbb{R}$: posons $R(0) = v$. Nous cherchons alors v^* tel que $Q(0) = 0$. On a alors:

$$R(t) = v e^{\alpha \cdot t} \quad Q(t) = \frac{v}{2\alpha} [e^{2\alpha} e^{-\alpha \cdot t} - e^{\alpha \cdot t}] + \frac{1}{\alpha} [1 - e^{\alpha} e^{-\alpha \cdot t}]$$

$$v^* = \frac{2}{e^{\alpha} + 1} \quad R(t) = \frac{2e^{\alpha \cdot t}}{e^{\alpha} + 1}$$

$$Q(t) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{e^{\alpha} + 1} (e^{2\alpha} e^{-\alpha \cdot t} - e^{\alpha \cdot t}) + (e^{\alpha} e^{-\alpha \cdot t} - 1) \right]$$

et en remplaçant dans (3.37) X, P, Q, R par leurs expressions respectives nous avons:

$$G'(\alpha) = \frac{2\beta}{\alpha \cdot (e^{\alpha} + 1)} \left[\frac{2e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} - \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \right]$$

qui est le résultat attendu l'identique à celui obtenu par calcul direct dans cet exemple simple.

Remarques

1) Dans ce même exemple nous pouvons considérer G comme fonction composée de β (l'observation) puisque l'état optimal dépend des observations. Ceci est d'une très grande importance en assimilation de données où les champs reconstruits et/ou les paramètres identifiés dépendent des observations. Il est donc possible de calculer la sensibilité d'une réponse par rapport à une perturbation sur les observations.

On a par calcul direct:

$$G(\beta) = \int_0^1 X(t)dt = \frac{2\beta(e^\alpha - 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)}$$

$$G'(\alpha) = \frac{2(e^\alpha - 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)}$$

En appliquant la méthode de calcul de la sensibilité proposée le système au second ordre à résoudre (3.36) reste le même et il garde donc la même solution (Q, R) calculée ci-dessus. Par contre l'expression donnant le gradient devient:

$$\nabla G(\beta) = \int_0^1 R(t)dt = \frac{2(e^\alpha - 1)}{\alpha(e^\alpha + 1)}$$

2) Si nous considérons la fonction-coût à l'optimum comme fonction de β i.e $G \equiv J$ alors en résolvant (3.35) on obtient: $R \equiv 0$ et $Q \equiv P$. Et la sensibilité calculée par la méthode proposée ci-dessus est encore dans ce cas égale à celle obtenue par calcul direct.

3) Une application de la méthode ci-dessus à un modèle non linéaire $\frac{dX}{dt} = \alpha \cdot X^2$ avec la même fonction coût J et la réponse G donne la même conclusion que pour le modèle linéaire étudié ci-dessus.

3.6 Sensibilité de la condition initiale optimale

Dans les développements faits ci-dessus nous avons calculé la sensibilité d'un critère fonctionnel par rapport aux observations. Mais le but de notre assimilation variationnelle étant de retrouver la condition initiale optimale U^* nous pouvons aussi calculer sa sensibilité par rapport aux observations. Le calcul de la sensibilité de U^* se fait de façon légèrement différente de ce qui a été développé ci-dessus. Pour calculer cette sensibilité nous nous servons une fois de plus des hypothèses portant sur le Hessien.

Hypothèses

Soit X^{obs} un vecteur d'observation fixé. Nous nous donnons les deux hypothèses suivantes:

H1) Il existe un voisinage \mathcal{Z} autour de X^{obs} tel que: $\forall Z \in \chi\Gamma$ le problème de minimisation

$$J_z(U_z^*) = \min_{U \in \mathcal{U}_{ad}} J_z(U) \quad (3.38)$$

admette une solution unique $U_z^* \Gamma$ avec J_z la fonctionnelle d'écart à l'observation Z :

$$J_z(U) = \frac{1}{2} \|\Gamma(U) - Z\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.39)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la composée de l'opérateur d'observation et du modèle dynamique.

H2) Le Hessien de la fonctionnelle $J_{X^{obs}}$ calculé au point optimal $U = U_{X^{obs}}^*$ est continu et coercif. i.e si:

$$H \stackrel{def}{=} Hess \mathcal{J}_{X^{obs}}(U_{X^{obs}}^*) \quad (3.40)$$

alors il existe C et $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|H.X\| &\leq C \|X\| \\ \langle H.X, X \rangle &\geq \alpha \|X\|^2 \quad \forall X \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

Nous énonçons alors le résultat suivant:

Théorème 3.6.1 *Sous les hypothèses **H1)** et **H2)**, l'application*

$$\begin{aligned} M : \mathcal{Z} &\longrightarrow \mathcal{U}_{ad} \\ Z &\longmapsto U_z^* \end{aligned} \quad (3.41)$$

où U_z^* est solution du problème de minimisation (3.38), est Gâteaux différentiable au point X^{obs} et sa dérivée est donnée par:

$$\left[\frac{\partial M}{\partial Z}(X^{obs}) \right] \cdot \delta Z = H^{-1} \cdot [\Gamma']^t \cdot \delta Z \quad \forall \delta Z \quad (3.42)$$

où δZ est un accroissement de l'observation Z , $[\Gamma']^t$ représente l'opérateur adjoint du linéarisé de l'opérateur Γ , linéarisation faite autour du point $U_{X^{obs}}^* = M(X^{obs})$

Démonstration

Soit $V = \mathcal{U}_{ad}$ l'espace des contrôles U et \mathcal{H} l'espace des observations Z . Supposons que V et \mathcal{H} soient des espaces de Hilbert. Pour des besoins de simplicité nous identifions V à son dual V' .

On considère l'application G qui à tout couple (U, Z) associe le vecteur gradient de la fonction-coût calculé au point U avec l'observation Z :

$$\begin{aligned} G : V \times \mathcal{H} &\longrightarrow V' = V \\ (U, Z) &\longmapsto \vec{\nabla} J_z(U) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Compte tenu de (3.39) ΓG peut s'écrire sous la forme explicite:

$$G(U, Z) = [\Gamma'(U)]^t \cdot (\Gamma(U) - Z) \quad (3.44)$$

Si $U = M(Z)$ i.e. si U est la condition initiale optimale correspondant à l'observation Z la condition nécessaire d'optimalité nous assure que le gradient de J_z calculé au point U s'annule; i.e.

$$G(M(Z), Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{Z}, \quad (3.45)$$

ce qui permet de définir une nouvelle application

$$\begin{aligned} \tilde{G} : \mathcal{H} &\longrightarrow V \\ Z &\longmapsto G(M(Z), Z) \end{aligned} \quad (3.46)$$

et on a

$$\tilde{G}(Z) \equiv 0 \quad \forall Z \in \mathcal{Z}$$

Calculons alors les dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial U} \in \mathcal{L}(V, V)$ et $\frac{\partial G}{\partial Z} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, V)$. Soit δU (resp. δZ) un accroissement quelconque de U (resp. Z). D'après la définition de l'application G (3.43) on a:

$$\frac{\partial G}{\partial U} \cdot \delta U = \frac{\partial}{\partial U} (\vec{\nabla} J_z(U)) \cdot \delta U = \text{Hess} J_z(U) \cdot \delta U \quad (3.47)$$

et d'après (3.44) on a:

$$\frac{\partial G}{\partial Z} \cdot \delta Z = -[\Gamma'(U)]^t \cdot \delta Z \quad (3.48)$$

La dérivée $\frac{\partial G}{\partial U}$ calculée au point X^{obs} est donc H . Compte tenu de l'hypothèse **H2**) et grâce au théorème des fonctions implicites nous en déduisons que M est différentiable en X^{obs} . Sa dérivée s'obtient en différentiant (3.45) et en utilisant (3.47) et (3.48):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Z} \cdot \delta Z \\ &= \frac{\partial G}{\partial U} \frac{\partial M}{\partial Z} \cdot \delta Z + \frac{\partial G}{\partial Z} \cdot \delta Z \\ &= H \cdot \frac{\partial M}{\partial Z} \cdot \delta Z - [\Gamma'(U)]^t \cdot \delta Z \end{aligned}$$

d'où le résultat:

$$\frac{\partial M}{\partial Z} \cdot \delta Z = H^{-1} \cdot [\Gamma'(U)]^t \cdot \delta Z \quad \forall \delta Z$$

C.Q.F.D. ■

Remarque

Dans le cas où le modèle Γ est linéaire le Hessien H s'écrit :

$$H = \Gamma^t \cdot \Gamma$$

Supposons que le vecteur d'observation X^{obs} soit connu avec un bruit γ

$$X^{obs} = X^{ref} + \gamma$$

où γ est supposé être un bruit Gaussien de matrice de variance-covariance $\Sigma_\gamma = E(\gamma \cdot \gamma^t)$. L'erreur de l'identification ξ est aussi Gaussienne de matrice de variance-covariance

$$\Sigma_\xi = H^{-1} \cdot \Gamma^t \cdot \Sigma_\gamma \cdot \Gamma \cdot H^{-1}$$

Si les observations sont décorréliées entre elles et si chacune d'elles est de même variance σ^2 en d'autres termes si la matrice de variance-covariance $\Sigma_\gamma = \sigma^2 \text{Id}$ alors on a :

$$\Sigma_\xi = \sigma^2 H^{-1}$$

Dans la k^{ime} direction propre \vec{w}_k du Hessien H correspondant à la valeur propre $\mu_k > 0$ la variance de l'erreur d'identification est $\frac{\sigma^2}{\mu_k}$. Cette variance est d'autant plus petite que μ_k est grand. Ainsi donc l'identification dans les directions propres correspondant aux plus grandes valeurs propres du Hessien est très peu affectée par les erreurs d'observation et elle est par contre beaucoup affectée dans les directions propres correspondant aux plus petites valeurs propres du Hessien.

3.6.1 Calcul pratique de la sensibilité de la condition initiale

Dans la pratique on va calculer la sensibilité de la condition initiale optimale par rapport aux observations en perturbant le vecteur d'observation X^{obs} par h^{obs} .

Soient $U_{x^{obs}}^* = M(X^{obs})$ et $V^* = M(X^{obs} + h^{obs})$. La sensibilité de la condition initiale optimale dans la direction de perturbation h^{obs} est donnée par :

$$\tilde{U}^* = M(X^{obs} + h^{obs}) - M(X^{obs})$$

Nous voulons alors exprimer \tilde{U}^* en fonction de h^{obs} . Puisque $U_{x^{obs}}^*$ et V^* sont solutions du système d'optimalité (3.13) avec pour vecteur d'observation X^{obs} et $X^{obs} + h^{obs}$ respectivement. Des calculs algébriques simples montrent qu'en approximation au premier ordre

\tilde{U}^* est solution de:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] \cdot \tilde{X} \\ \tilde{X}(0) = \tilde{U}^* \\ \frac{d\tilde{P}}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \cdot \tilde{P} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \tilde{X} \right]^t \cdot P = C^t (C\tilde{X} - h^{obs}) \\ \tilde{P}(T) = 0 \\ \tilde{P}(0) = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

Nous énonçons alors le résultat suivant Γ pour l'existence et l'unicité de la solution \tilde{U}^* du système (3.49)

Proposition 3.6.1 *Si le Hessien de la fonction coût par rapport aux paramètres de contrôle U est inversible à l'optimum i.e. pour $U = U_{x^{obs}}^*$, alors le système (3.49) possède une solution unique \tilde{U}^**

Démonstration

Le système (3.49) étant linéaire non homogène en \tilde{X} et \tilde{P} nous pouvons écrire:

$$\tilde{P} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2,$$

où le couple (\tilde{X}, \tilde{P}_1) est solution de:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] \cdot \tilde{X} \\ \tilde{X}(0) = \tilde{U}^* \\ \frac{d\tilde{P}_1}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \cdot \tilde{P}_1 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \cdot \tilde{X} \right]^t \cdot P = C^t C \tilde{X} \\ \tilde{P}_1(T) = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

et \tilde{P}_2 est solution de:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{P}_2}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \cdot \tilde{P}_2 = -C^t \cdot h^{obs} \\ \tilde{P}_2(T) = 0 \end{cases}$$

Le système (3.50) est identique à (3.21); comme nous l'avons déjà vu ci-dessus il s'ensuit que

$$\tilde{P}_1(0) = H \cdot \tilde{U}^*,$$

et nous pouvons alors caractériser \tilde{U}^* par la condition d'optimalité

$$\tilde{P}(0) = 0,$$

i.e

$$H \cdot \tilde{U}^* + \tilde{P}_2(0) = 0 \quad (3.51)$$

où $\tilde{P}_2(0)$ et la perturbation induite sur le gradient de la fonction coût par la perturbation h^{obs} sur les observations. Si donc H est inversible il existe une unique solution \tilde{U}^* pour le système (3.49)

C.Q.F.D. ■

Corollaire 3.6.1 *Sous les hypothèses **H2**) et celles de la proposition (3.5.2), le système (3.49) possède une unique solution \tilde{U}^**

Preuve

Les hypothèses de la proposition (3.5.2) et **H2**) nous assurent que H est symétrique et défini positif et donc il est inversible.

C.Q.F.D. ■

Remarque

Dans les conditions ci-dessus on a :

$$\tilde{U}^* = -H^{-1} \cdot \tilde{P}_2(0)$$

ce résultat est identique à (3.42) car

$$[\Gamma'(U)]^t \cdot \delta Z = -\tilde{P}_2(0)$$

Le calcul pratique de \tilde{U}^* est fait par minimisation de la fonctionnelle :

$$f(v) = \frac{1}{2} \langle H \cdot v, v \rangle_v + \langle \tilde{P}_2(0), v \rangle_v$$

par une méthode de type gradient conjugué.

Remarque

Le calcul de sensibilité ci-dessus est le développement détaillé de la méthode proposée dans LE DIMET et NGODOCK [51Γ48Γ49Γ47Γ52Γ54Γ50Γ53].

3.7 Application aux équations QG

Soit Ψ^0 un état initial des équations du modèle QG. Pour calculer le produit du Hessien en Ψ^0 par un vecteur $\tilde{\Psi}^0$ selon la méthode proposée ci-dessus il faut résoudre successivement:

1. Équation quasi-géostrophique (non-linéaire) :

Le vecteur d'inconnues est Ψ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Psi(t=0) = \Psi^0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta_k(\Psi) + J(\Psi_k, \theta_k(\Psi) + f) & \text{sur } \Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \\ \quad + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta \Psi_N - A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_k = F_k & \\ \Psi_k(t) = C_k^{te}(t) & \text{sur } \partial\Omega; \quad \forall t \in [0, T] \\ \Phi_k = [B^{-1} \cdot \Psi]_k & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \Phi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \int_{\Omega} \Phi_k(t) dx = 0 & \forall t \in [0, T] \\ \Delta(\Psi_k) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

2. Équation adjointe quasi-géostrophique :

Le vecteur d'inconnues est P .

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(t=T) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Psi_k(T)}(\Psi) & \text{sur } \Omega \\ -\frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(P) - \Delta J(\Psi_k, P_k) - [W^t]_k J(\Psi, P) & \\ \quad - J(P_k, \theta_k(\Psi) + f) & \text{sur } \Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \\ \quad + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta P_N - A_4 \cdot \Delta^2 P_k = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Psi_k}(\Psi) & \\ P_k(t) = C_k^{te}(t) & \text{sur } \partial\Omega; \quad \forall t \in [0, T] \\ \chi_k = [B^{-t} \cdot P]_k & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \chi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \int_{\Omega} \chi_k(t) dx = 0 & \forall t \in [0, T] \\ \Delta(P_k) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

3. Équation quasi-géostrophique linéarisée :

Le vecteur d'inconnues est $\tilde{\Psi}$.

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \tilde{\Psi}(t=0) = \Psi^0 & \text{sur } \Omega \\
 \frac{\partial}{\partial t} \theta_k(\tilde{\Psi}) + J(\tilde{\Psi}_k, \theta_k(\Psi) + f) + J(\Psi_k, \theta_k(\tilde{\Psi})) \\
 \quad + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta \tilde{\Psi}_N - A_4 \cdot \Delta^2 \tilde{\Psi}_k = 0 & \text{sur } \Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \\
 \tilde{\Psi}_k(t) = C_k^{te}(t) & \text{sur } \partial\Omega; \quad \forall t \in [0, T] \\
 \tilde{\Phi}_k = [B^{-1} \cdot \tilde{\Psi}]_k & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\
 \tilde{\Phi}_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\
 \int_{\Omega} \tilde{\Phi}_k(t) dx = 0 & \forall t \in [0, T] \\
 \Delta(\tilde{\Psi}_k) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N}
 \end{array} \right. \quad (3.54)$$

4. Équation adjointe quasi-géostrophique au second ordre :

Le vecteur d'inconnues est \tilde{P}

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \tilde{P}(t=T) = \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \Psi_k^2(T)}(\tilde{\Psi}) & \text{sur } \Omega \\
 -\frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(\tilde{P}) - \Delta J(\tilde{\Psi}_k, P_k) - \Delta J(\Psi_k, \tilde{P}_k) \\
 \quad - [W^t]_k J(\tilde{\Psi}, P) - [W^t]_k J(\Psi, \tilde{P}) \\
 \quad - J(\tilde{P}_k, \theta_k(\Psi) + f) - J(P_k, \theta_k(\tilde{\Psi})) \\
 \quad + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta \tilde{P}_N - A_4 \cdot \Delta^2 \tilde{P}_k = \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \Psi_k^2}(\tilde{\Psi}) & \text{sur } \Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N} \\
 \tilde{P}_k(t) = C_k^{te}(t) & \text{sur } \partial\Omega; \quad \forall t \in [0, T] \\
 \tilde{\chi}_k = [B^{-t} \cdot \tilde{P}]_k & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\
 \tilde{\chi}_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\
 \int_{\Omega} \tilde{\chi}_k(t) dx = 0 & \forall t \in [0, T] \\
 \Delta(\tilde{P}_k) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T]; \quad k = \overline{1, N}
 \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Le résultat du produit Hessien×vecteur est récupéré dans $\tilde{P}(t=0)$. Les seconds membres des équations (2) et (4) sont des dérivations de la fonctionnelle sans-conainte \mathcal{J} (1.20). Par exemple dans le cas de l'observation complète de la fonction de courant en surface on a :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Psi_k}(\Psi) = \begin{cases} (\Psi_1 - \Psi_1^{obs}) - \frac{1}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega} (\Psi_1 - \Psi_1^{obs}) dy \right] \cdot \mathbb{I}(\Omega) & \text{si } k = 1 \\ \frac{B_{11} \cdot B_{1k}^{-1}}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega} (\Psi_1 - \Psi_1^{obs}) dy \right] \cdot \mathbb{I}(\Omega) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{et :} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \Psi_k^2}(\Psi) = \begin{cases} \Psi_1 - \frac{1}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega} \Psi_1 dy \right] \cdot \mathbb{I}(\Omega) & \text{si } k = 1 \\ \frac{B_{11} \cdot B_{1k}^{-1}}{|\Omega|} \left[\int_{\Omega} \Psi_1 dy \right] \cdot \mathbb{I}(\Omega) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

3.8 Résultats numériques

Des expériences numériques ont été faites avec le modèle QG dans deux formulations différentes: la formulation barotrope (une couche) d'une part et la formulation barocline (trois couches) d'autre part toutes deux utilisées avec une basse résolution.

Dans chaque cas le modèle a été initialisé à zéro puis intégré sur un intervalle de temps $[0, T_0]$ suffisamment long pour éviter la phase de *spin-up* et c'est l'état du modèle à l'instant T_0 qui est utilisé comme condition initiale.

La discrétisation est faite par différences finies homogènes en espace ($\Delta x = \Delta y = 100 \text{ km}$) pour un bassin carré de 4000 km de côté; et la discrétisation temporelle est faite selon un schéma de type "saute-mouton". Le pas de temps retenu dans les expériences est de 4 h et la longueur de la période d'intégration (et d'observation) est de deux mois.

Les observations sont générées par intégration du modèle à partir de la condition initiale de référence (décrite ci-dessus) sur des *pseudo-traces* au sol de satellite uniquement sur la couche de surface. Ces traces sont simulées en supposant qu'elles sont des diagonales croisées (montantes et descendantes) à l'intérieur du domaine. On a alors introduit deux paramètres (*modpt* et *interv*) permettant de faire varier la densité spatio-temporelle des observations.

- *interv* décrit la distance (en nombre de pas de discrétisation en espace) entre deux traces consécutives. Par exemple *interv* = 1 indique que les observations sont faites sur toute la couche de surface.
- *modpt* décrit l'intervalle de temps régulier qui sépare deux insertions des observations dans le processus d'assimilation.

Pour mener l'étude de sensibilité par rapport aux observations ces dernières sont bruitées par une gaussienne (bruit blanc) et nous avons calculé la sensibilité V^* de la condition initiale optimale par rapport au bruit sur les observations ainsi que celle des critères fonctionnels décrits dans la suite. Notons qu'on commet un abus de langage en appelant V^* la sensibilité de la condition initiale optimale. En réalité V^* est la dérivée directionnelle de la condition initiale optimale dans la direction de perturbation du vecteur des observations.

Dans toutes les expériences ci-dessous la trajectoire de référence reste la même il en est donc de même pour les observations. Par contre la configuration des observations peut changer selon les valeurs de *interv* et *modpt*.

Nous présentons dans un premier temps les résultats numériques du calcul de V^* . Ensuite nous présenterons les résultats du calcul de la sensibilité de l'énergie cinétique et de l'entrophie pour chacun des modèles barotrope et barocline. Le vecteur de sensibilité par rapport aux observations est un vecteur de la même taille (dimension) que le vecteur des observations et nous en représenterons l'état initial et l'évolution de sa norme au cours du temps. Par soucis de représentations graphiques nous supposons que les observations sont disponibles sur toute la couche de surface (i.e. *interv* = 1) mais pas forcément en tout temps. Les résultats ci-dessous correspondent au cas *modpt* = 6 i.e. les observations sont faites tous les jours.

Ces derniers résultats sont comparés à ceux obtenus par l'analyse de sensibilité n'utilisant que l'adjoint au premier ordre.

3.8.1 Sensibilité de la condition initiale optimale

Cette sensibilité est en réalité une dérivée directionnelle voir la section (3.6.1)

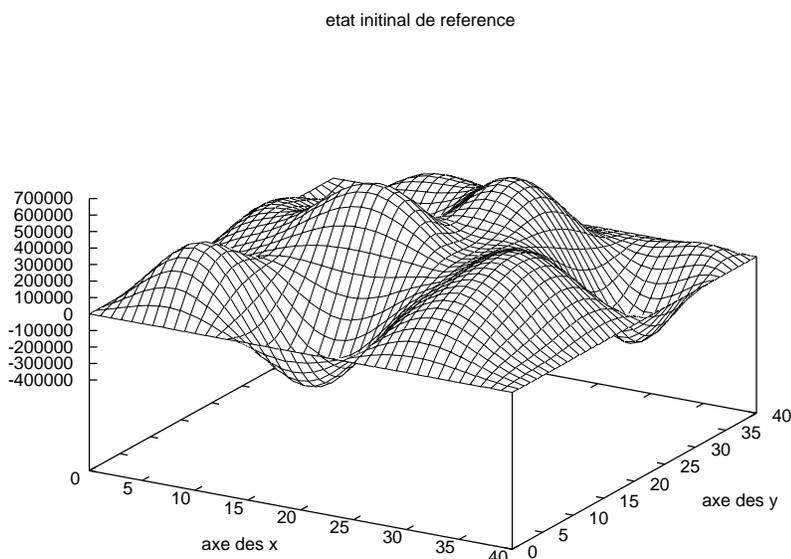


FIG. 3.2 – état initial de référence (fonction de courant): dans le contexte du “twin experiment”, c’est aussi l’état initial optimal.

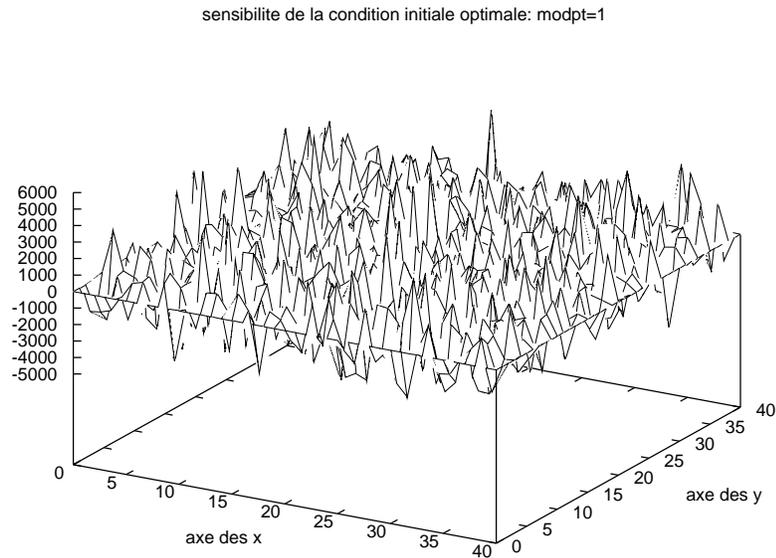


FIG. 3.3 – Sensibilité de la condition initiale optimale. Ici, les observations sont introduites à tous les points de grille (i.e $\text{interv} = 1$) à l'instant initial.

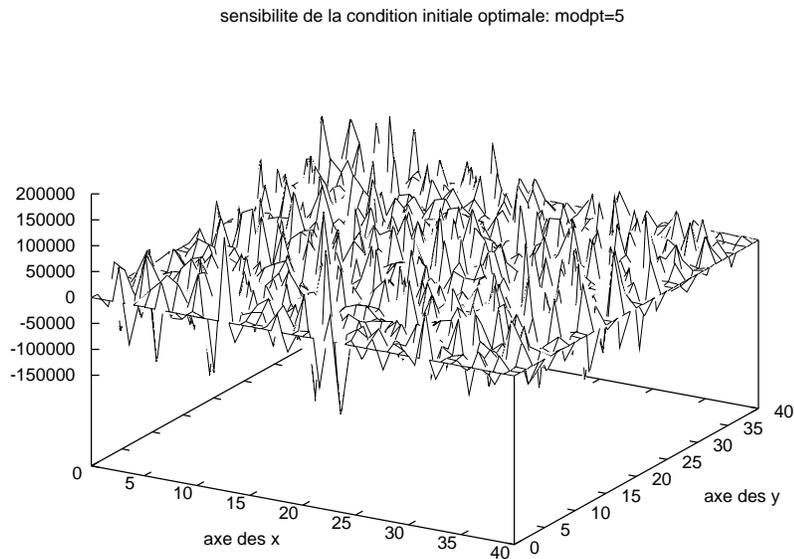


FIG. 3.4 – Sensibilité de la condition initiale optimale. Ici, les observations sont introduites avec $\text{interv} = 5$.

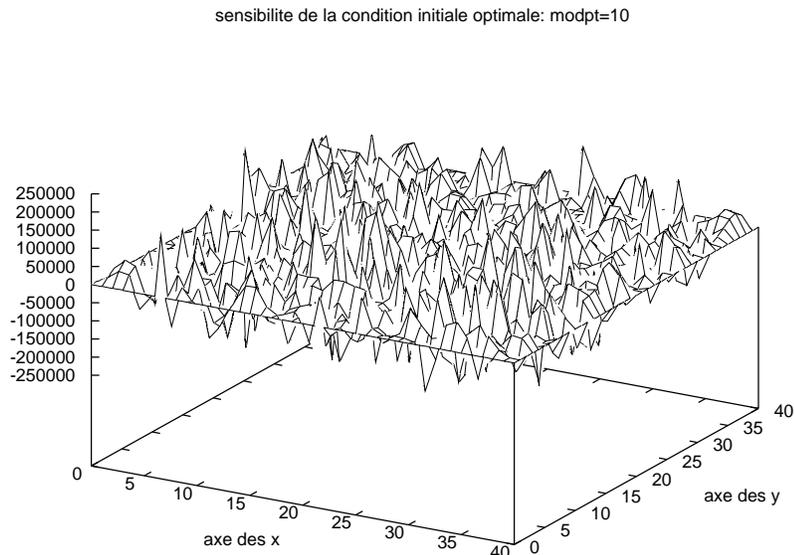


FIG. 3.5 – *Sensibilité de la condition initiale optimale. Ici, les observations sont introduites avec $interv = 10$.*

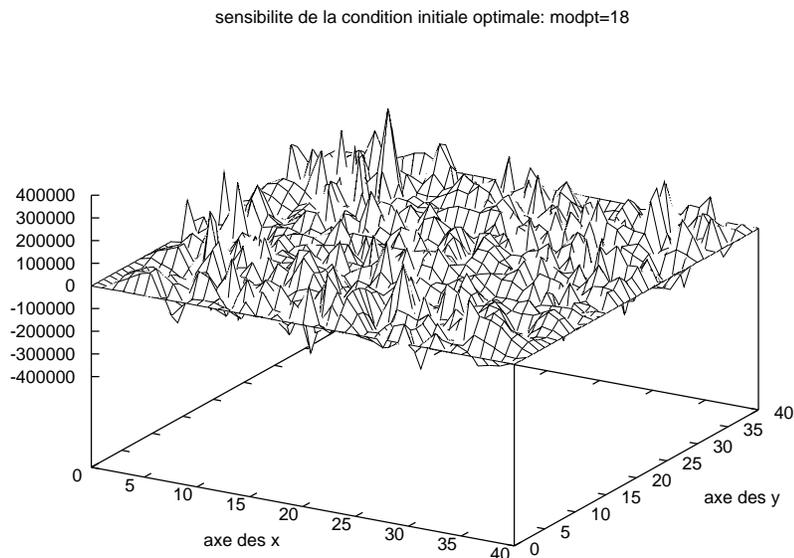


FIG. 3.6 – *Sensibilité de la condition initiale optimale. Ici, les observations sont introduites avec $interv = 18$.*

Nous avons aussi introduit les observations sur toute la couche de surface par une pondération spatiale dont les coefficients en un point du maillage dépendent de la distance des points aux traces les plus proches. Cela fournit des données plus régulières et nous présentons la sensibilité de la condition initiale optimale correspondante par rapport aux observations:

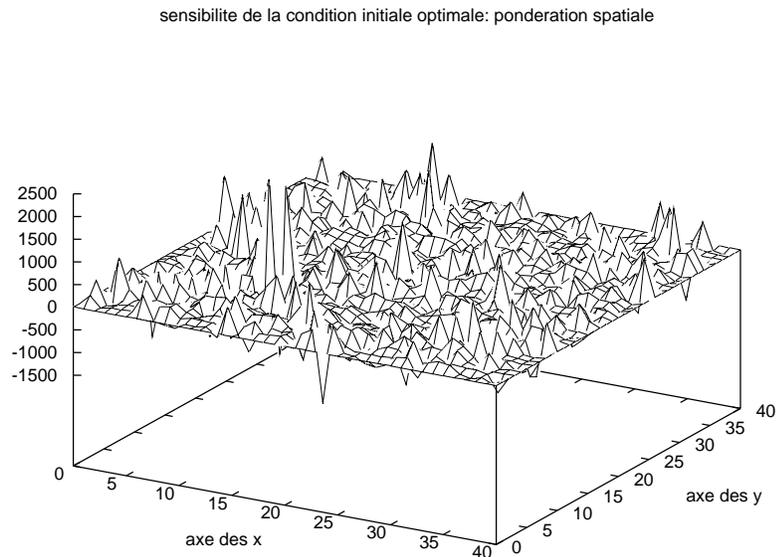


FIG. 3.7 – Sensibilité de la condition initiale optimale.

Pour le calcul de toutes les sensibilités ci-dessus nous présentons des courbes de taux de convergence de la norme du résidu $H \cdot \tilde{U}^* + \tilde{P}_2(0)$ et de la norme du vecteur de sensibilité \tilde{U}^* . Les deux familles de courbes sont obtenues au cours des itérations en divisant la norme du résidu à l'itération k par la norme du résidu au point de départ de la minimisation; il en est de même pour la norme du vecteur de sensibilité.

FIG. 3.8 – *Convergence: norme du residu en fonction des itérations à gauche, et norme du vecteur de sensibilité à droite. Les légendes A,B,C,D et E correspondent aux différentes configurations d'observations considérées: interv = 1, 5, 10, 18 et la pondération spatiale respectivement.*

Nous remarquons une très bonne convergence dans les courbes A et E. Ceci s'explique par le fait que dans ces deux expériences les observations sont disponibles sur toute la couche de surface. Nous en donnerons plus d'explications au chapitre suivant car ce comportement est lié au conditionnement du Hessien.

3.8.2 Sensibilité des critères fonctionnels

Nous nous sommes aussi intéressés aux critères (à des réponses) fonctionnels. Nous les avons choisis de sorte qu'ils puissent représenter des grandeurs physiques du modèle: l'énergie cinétique et l'énstrophie qui sont définies par:

$$Ecin_k(X_{obs}) = \frac{H_k}{2} \int_0^T \int_D (\nabla \Psi_k \cdot \nabla \Psi_k) dx dt$$

$$Enst_k(X_{obs}) = \frac{H_k}{2} \int_0^T \int_D (\Delta \Psi_k \cdot \Delta \Psi_k) dx dt$$

où l'indice k désigne la couche considérée. Ces quantités dépendent des observations du moment que la fonction de courant est prise à l'optimum.

Le gradient de ces quantités par rapport aux observations est un vecteur qui a la même taille (dimension) que le vecteur des observations (en espace et en temps). Nous choisissons délibérément ici de considérer les observations sur toute la couche de surface. Nous pouvons alors présenter l'état initial de ces gradients et l'évolution de leurs normes au cours du temps.

Modèle à une couche

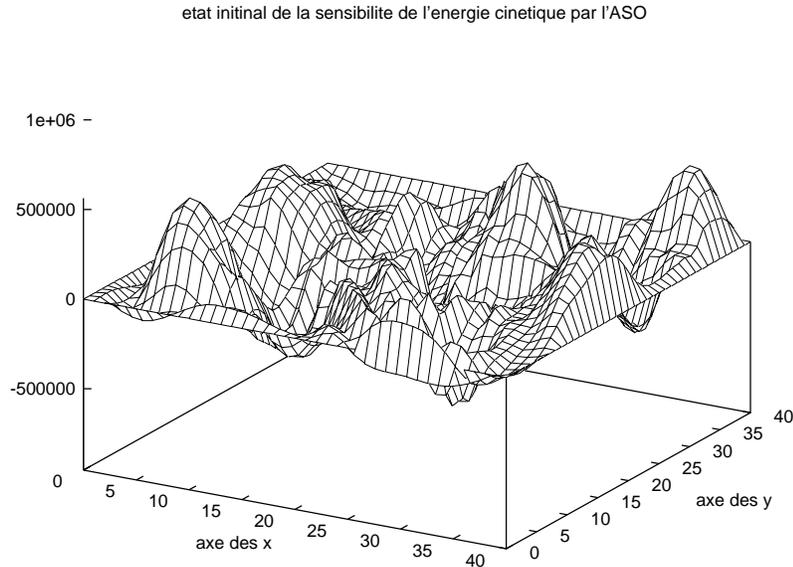


FIG. 3.9 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique par rapport aux observations.

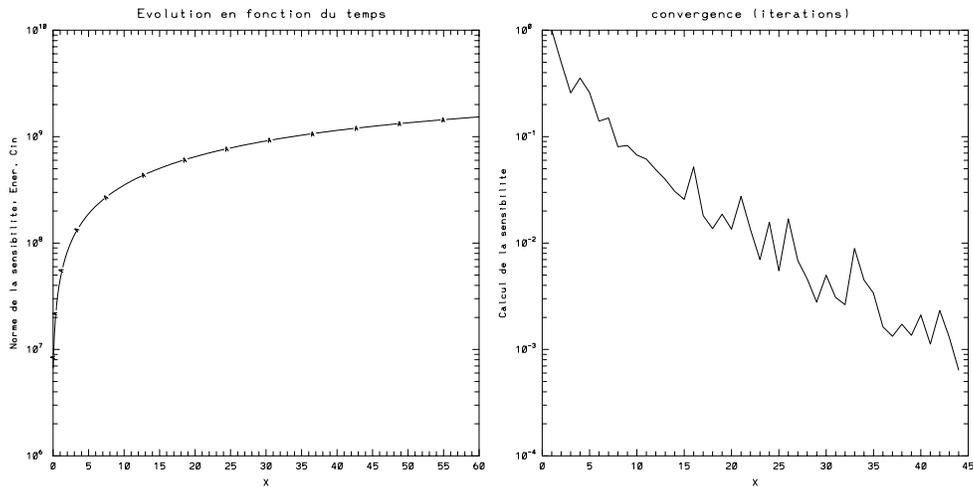


FIG. 3.10 – La courbe de gauche représente l'évolution (en fonction du temps) de la norme du gradient de l'énergie cinétique; celle de droite montre la convergence du calcul de l'état initial du gradient de l'énergie cinétique au cours des itérations.

Les mêmes calculs sont faits pour calculer la sensibilité de l'entropie du modèle:

etat initial de la sensibilité de l'entrophie par l'ASO

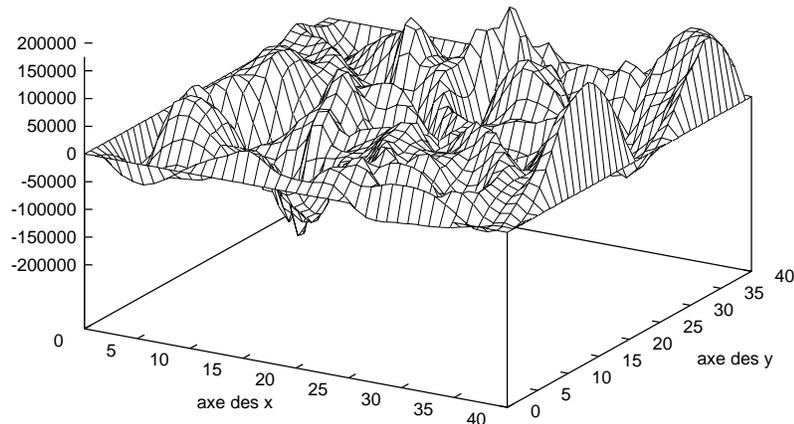


FIG. 3.11 – *Etat initial du gradient de l'entrophie par rapport aux observations.*

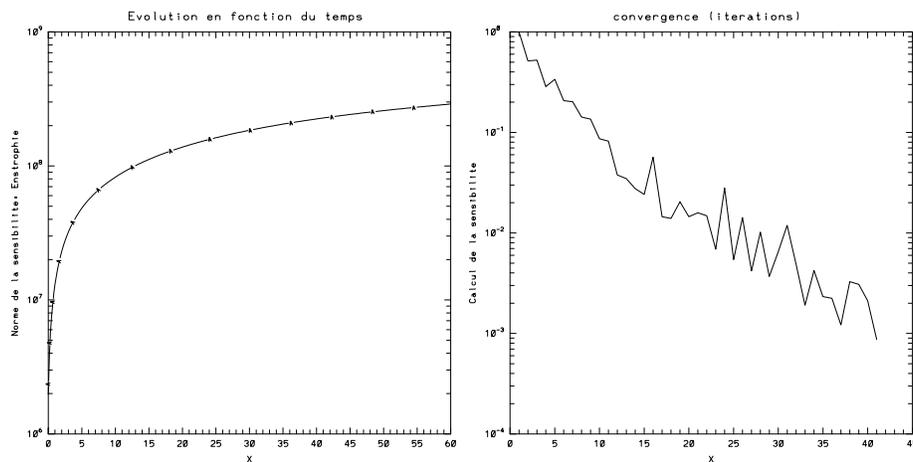


FIG. 3.12 – *La courbe de gauche représente l'évolution (en fonction du temps) de la norme du gradient de l'entrophie; celle de droite montre la convergence du calcul de l'état initial du gradient de l'entrophie au cours des itérations.*

Modèle à trois couches

Pour l'énergie cinétique et l'entrophie nous reprenons les calculs de la sensibilité par rapport aux observations mais cette fois avec un modèle à trois couches.

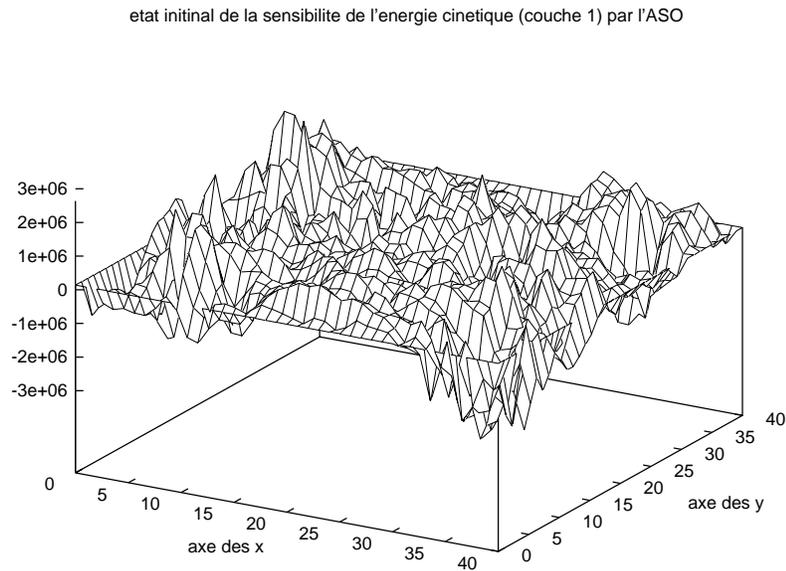


FIG. 3.13 – *Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 1 par rapport aux observations.*

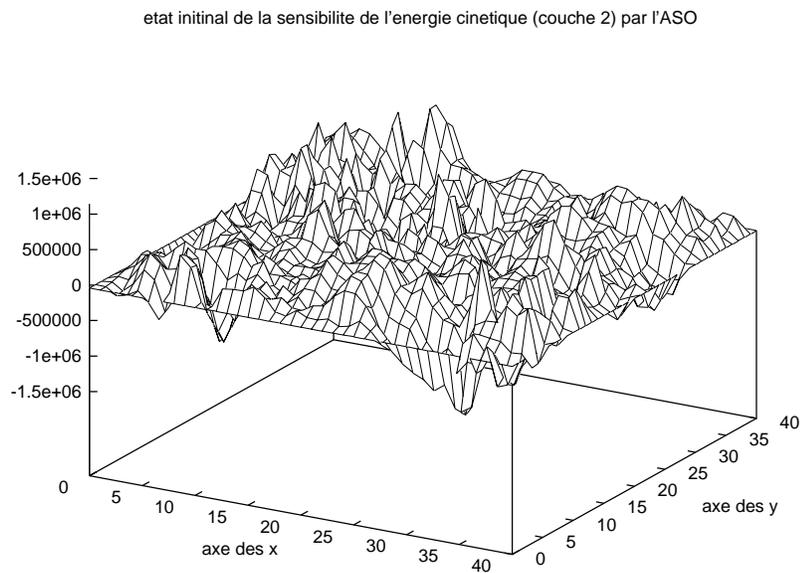


FIG. 3.14 – *Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 2 par rapport aux observations.*

etat initial de la sensibilité de l'énergie cinétique (couche 3) par l'ASO

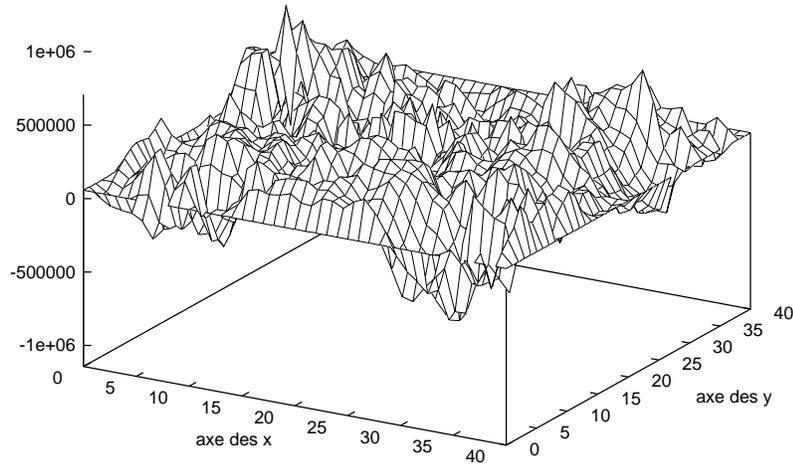


FIG. 3.15 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 3 par rapport aux observations.

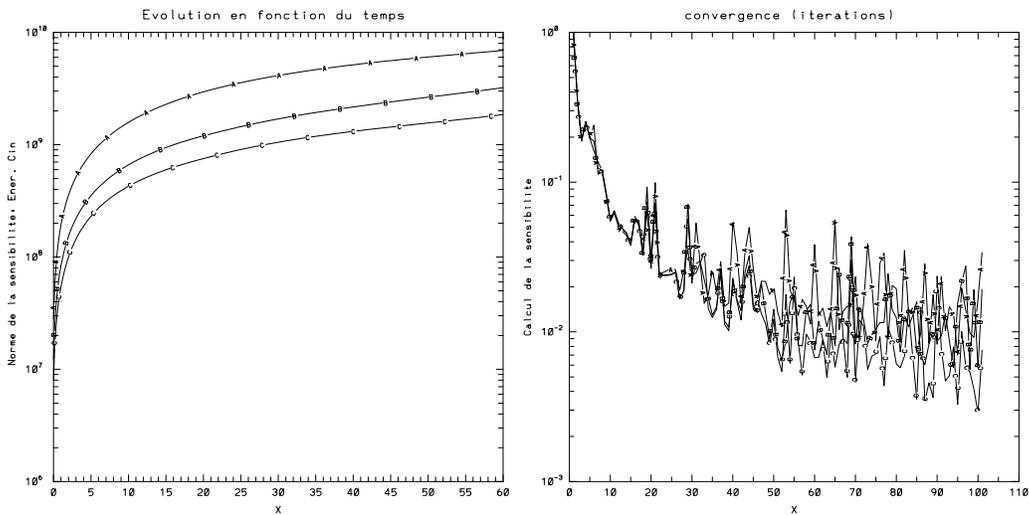


FIG. 3.16 – La figure de gauche représente l'évolution (en fonction du temps) de la norme du gradient de l'énergie cinétique; celle de droite montre la convergence du calcul de l'état initial du gradient de l'énergie cinétique au cours des itérations. Les légendes A, B, et C correspondent respectivement aux couches 1, 2 et 3.

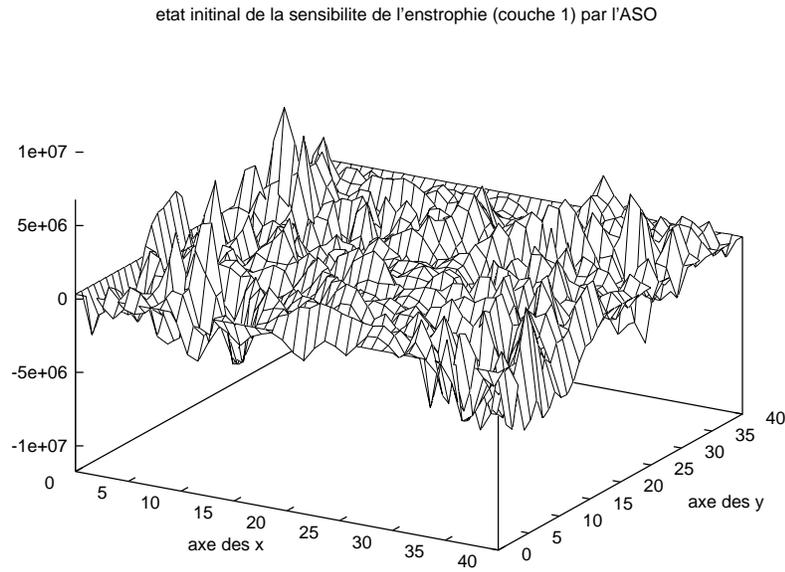


FIG. 3.17 – *Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 1 par rapport aux observations.*

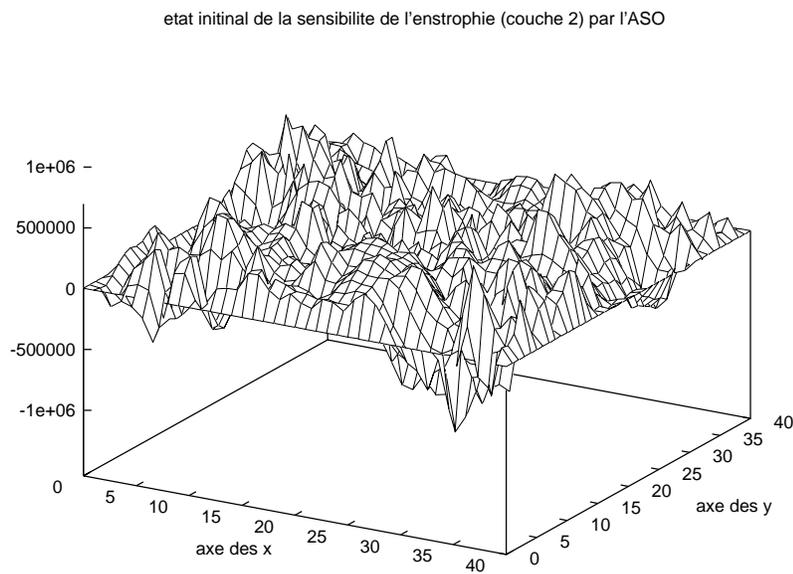


FIG. 3.18 – *Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 2 par rapport aux observations.*

etat initial de la sensibilité de l'enstrophie (couche 3) par l'ASO

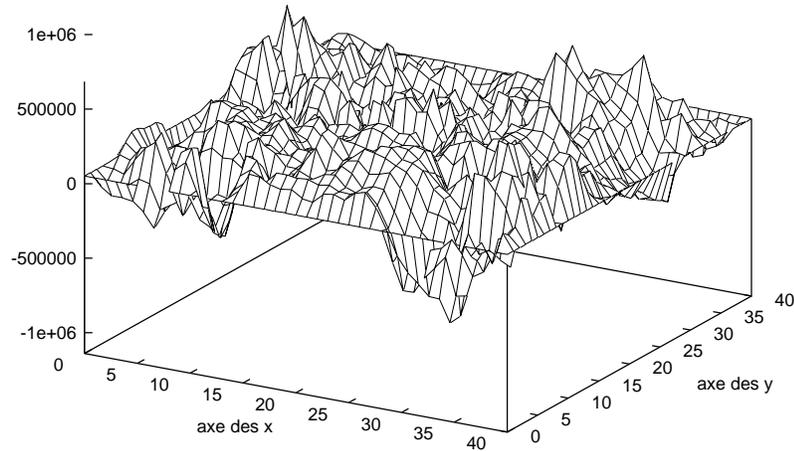


FIG. 3.19 – Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 3 par rapport aux observations.

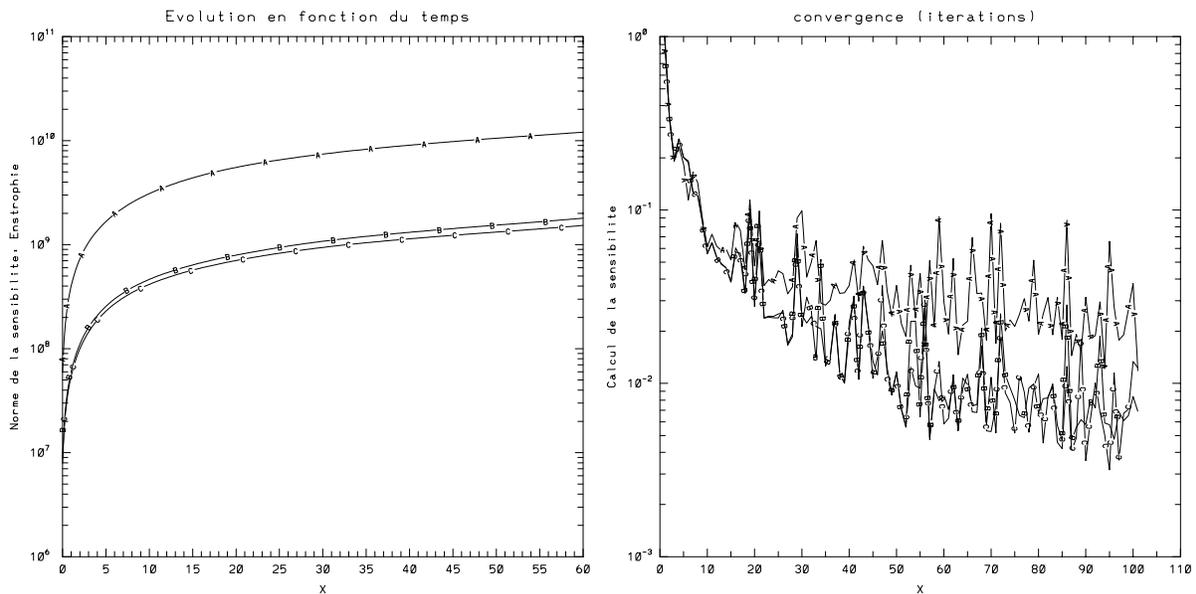


FIG. 3.20 – La figure de gauche représente l'évolution (en fonction du temps) de la norme du gradient de l'enstrophie; celle de droite montre la convergence du calcul de l'état initial du gradient de l'enstrophie au cours des itérations. Les légendes A, B, et C correspondent respectivement aux couches 1, 2 et 3.

Commentaires

Les champs reconstitués par l’assimilation variationnelle de données sont donc bien sensibles au bruit sur les observations. Cette sensibilité est d’autant plus importante que la densité spatio-temporelle des observations est faible: c’est ce qu’on constate dans les figures représentant la réponse de la condition initiale optimale suite à une perturbation sur les observations.

En effet la sensibilité est calculée par inversion du Hessien dont le conditionnement dépend de la densité spatio-temporelle des observations (cf chapitre V). La sensibilité des champs reconstitués implique celle des quantités (physiques) diagnostiques du modèle notamment l’énergie cinétique et l’ensrophie.

D’autre part on remarque lorsqu’on regarde l’évolution de la norme du gradient (sensibilité) de l’énergie cinétique et de l’ensrophie au cours du temps que la couche de surface est plus sensible aux observations que celles du milieu et du fond. Les trois courbes sont croissantes ce qui signifie qu’elles sont plus sensibles aux observations finales qu’aux observations initiales. Mais cette dernière remarque est étroitement liée à la dynamique du modèle.

3.8.3 Comparaison

Nous avons présenté ci-dessus les résultats de sensibilité calculés par les équations adjointes au second ordre. Il est aussi intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par les équations adjointes au premier ordre comme nous l’avons fait pour l’exemple d’illustration. Nous nous replaçons alors dans le contexte d’expérimentation ci-dessus et nous reconsidérons les “réponses” diagnostiques ci-dessus: l’énergie cinétique et l’ensrophie.

Le gradient de la “réponse” par rapport aux observations est un vecteur appartenant au même espace que le vecteur des observations et on sait calculer son état initial et son évolution au cours du temps. Par les équations adjointes au premier ordre (APO) cet état initial est donné par $Q_1(0)$ (voir (3.32)) et par les équations adjointes au second ordre (ASO) l’état initial du gradient de la réponse est donné par v^* (voir (3.33) et (3.34)). Dans ce qui suit nous comparons ces deux vecteurs ainsi que l’évolution de leur norme au cours du temps (par intégration du modèle linéaire tangent). Pour des soucis de représentations graphiques nous avons considéré que toute la couche de surface est observée.

Nous présenterons dans un premier temps les résultats obtenus avec le modèle barotrope (une couche) ensuite nous considérerons le modèle à trois couches dont nous présenterons les résultats de comparaison pour chaque couche.

Modèle à une couche

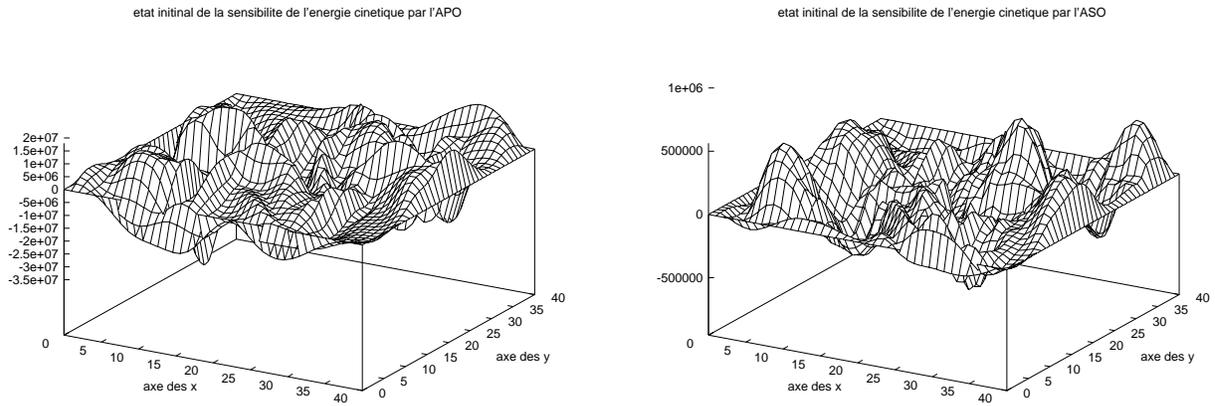


FIG. 3.21 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

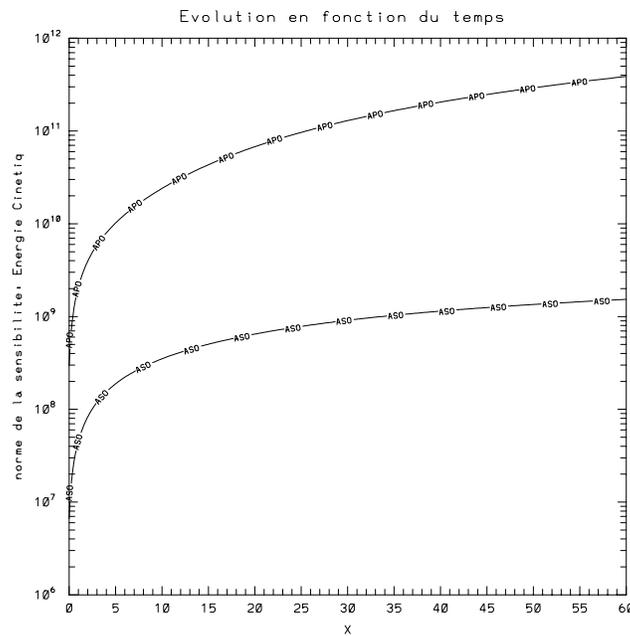


FIG. 3.22 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'énergie cinétique par rapport aux observations. La figure illustre la comparaison des résultats obtenus par les méthodes APO et ASO respectivement.

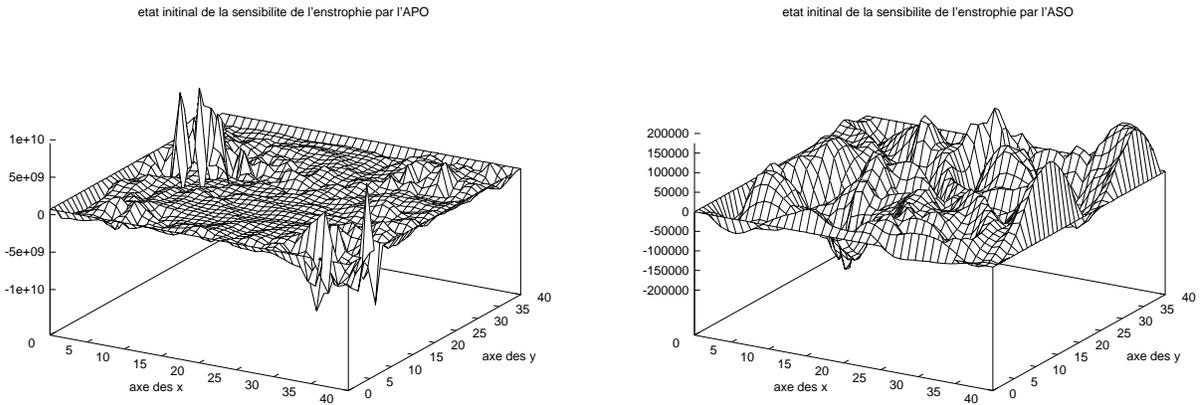


FIG. 3.23 – Etat initial du gradient de l'enstrophie par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

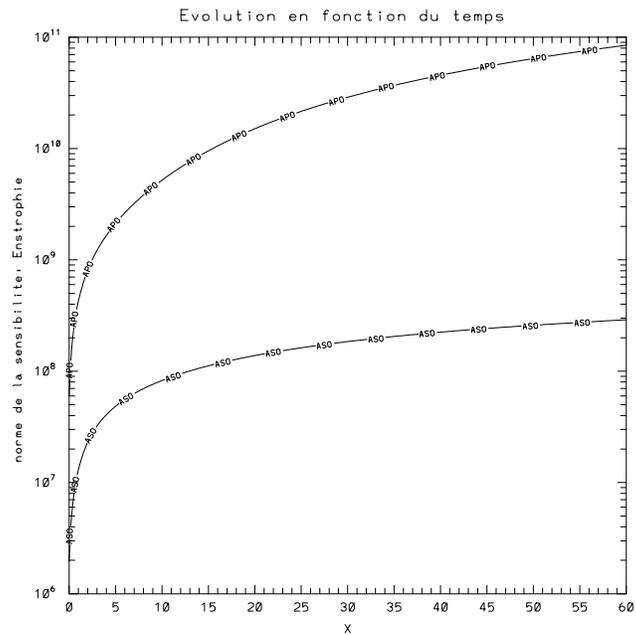


FIG. 3.24 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'enstrophie par rapport aux observations.

Modèle à trois couches

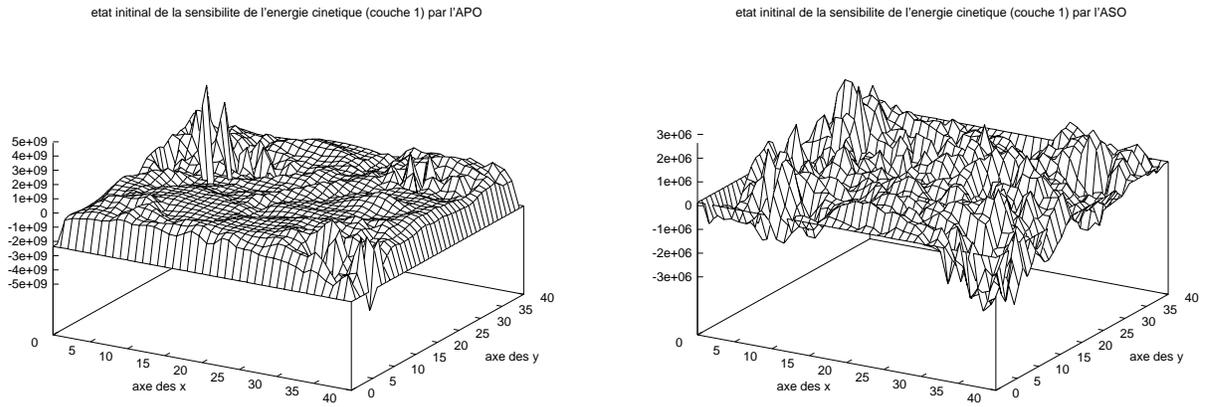


FIG. 3.25 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 1 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

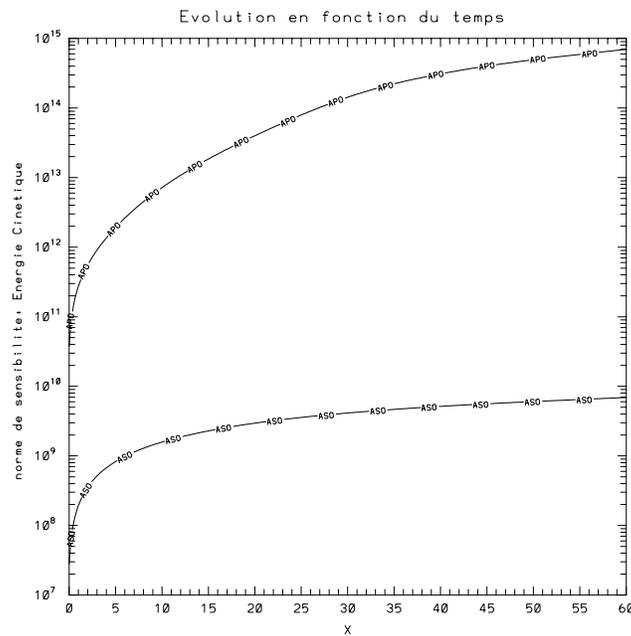


FIG. 3.26 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'énergie cinétique de la couche 1 par rapport aux observations.

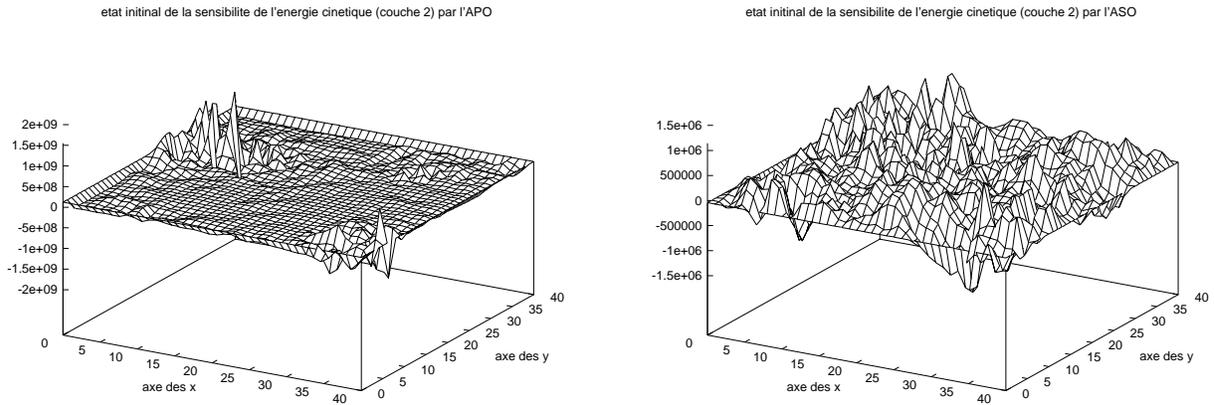


FIG. 3.27 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 2 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

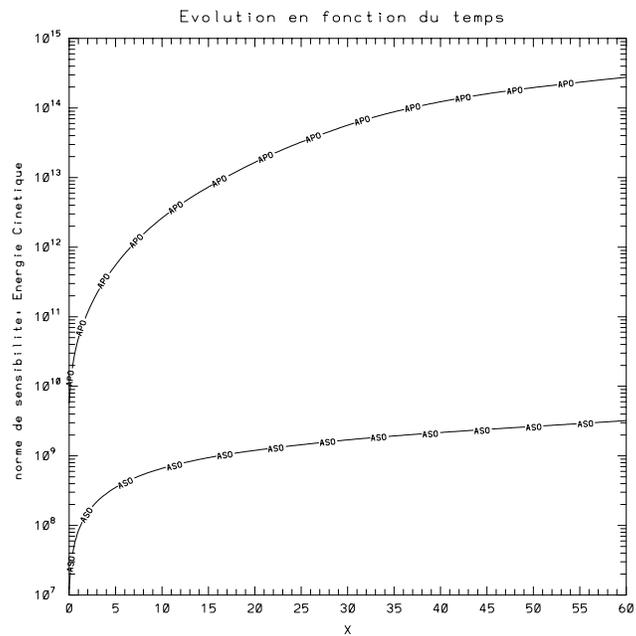


FIG. 3.28 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'énergie cinétique de la couche 2 par rapport aux observations.

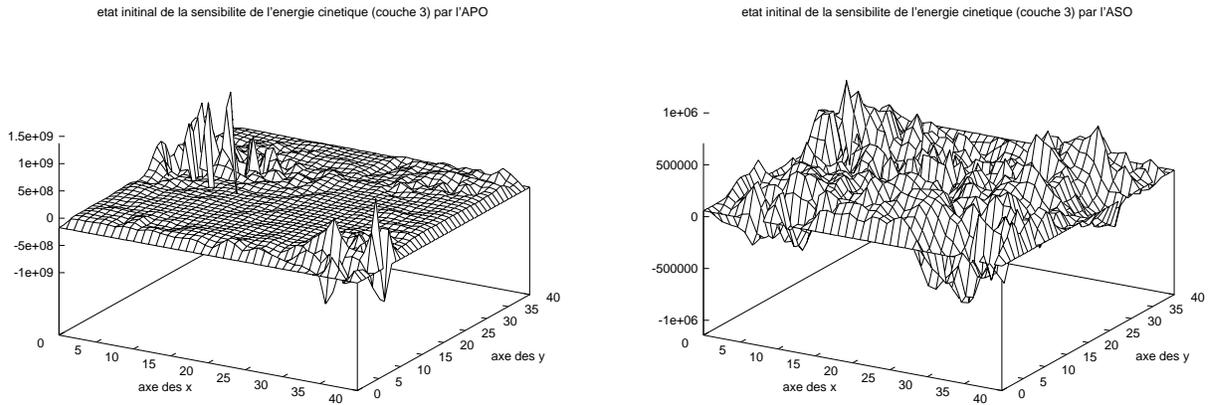


FIG. 3.29 – Etat initial du gradient de l'énergie cinétique de la couche 3 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

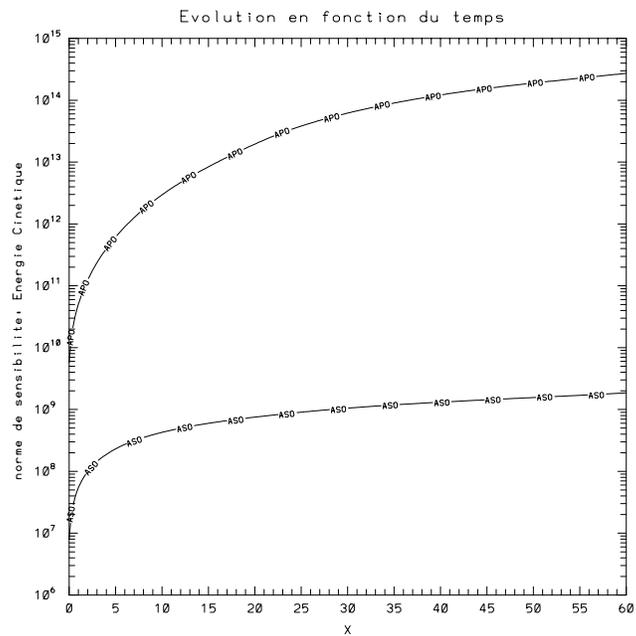


FIG. 3.30 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'énergie cinétique de la couche 3 par rapport aux observations.

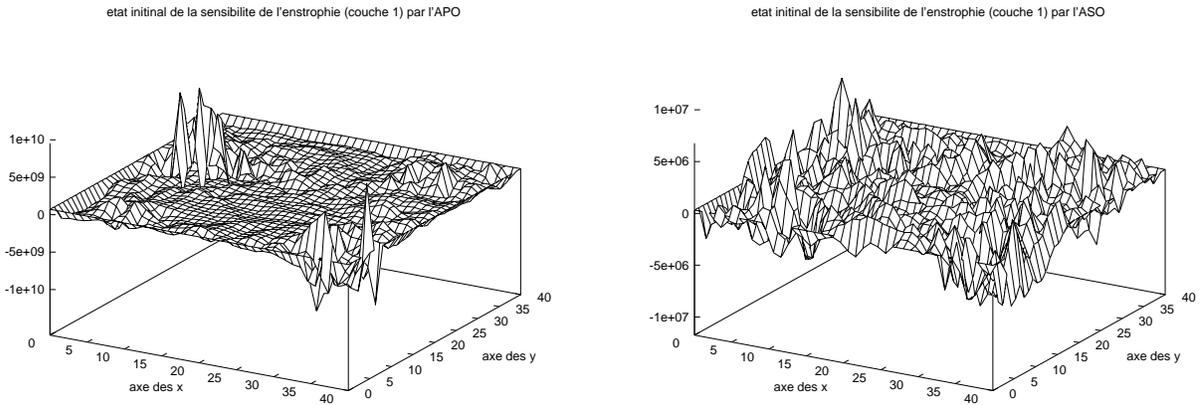


FIG. 3.31 – Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 1 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

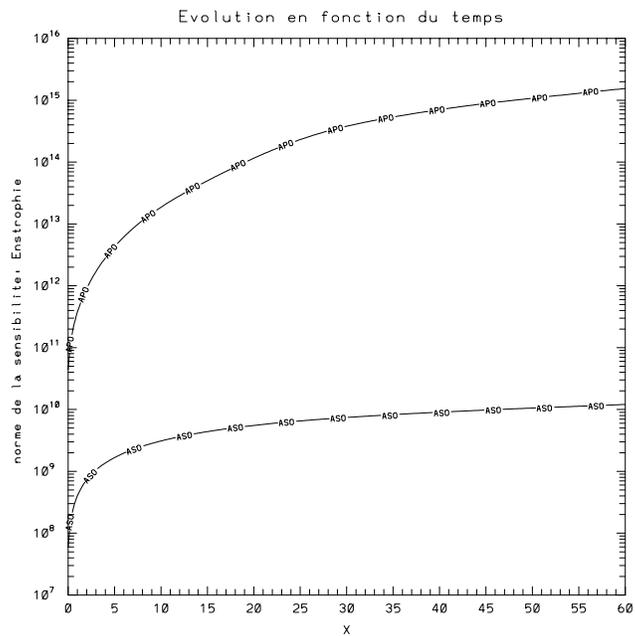


FIG. 3.32 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'enstrophie de la couche 1 par rapport aux observations.

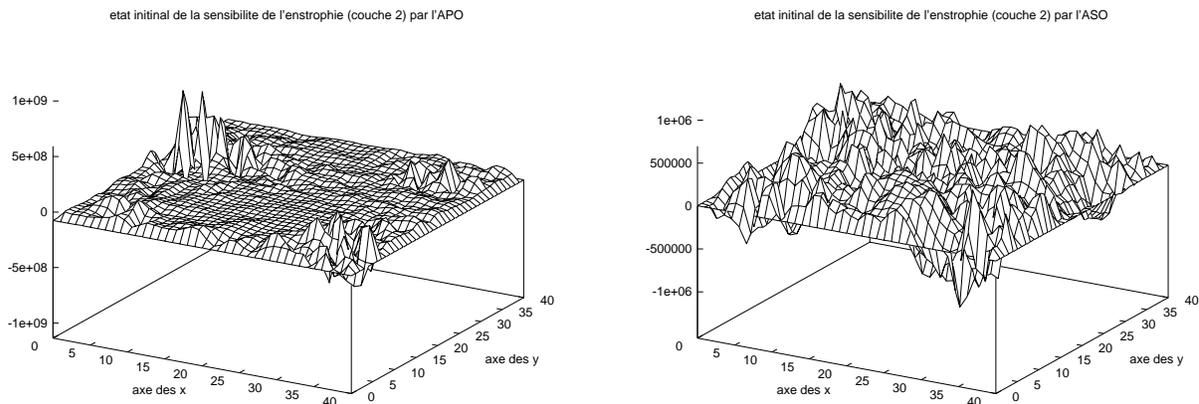


FIG. 3.33 – Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 2 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

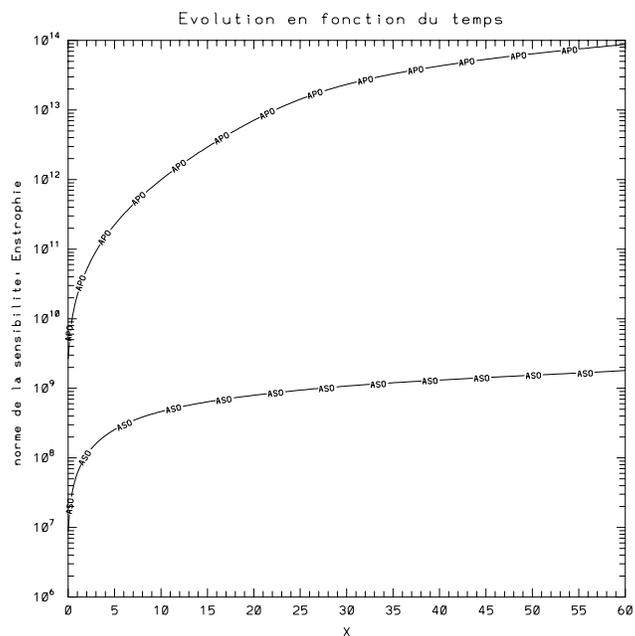


FIG. 3.34 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'enstrophie de la couche 2 par rapport aux observations.

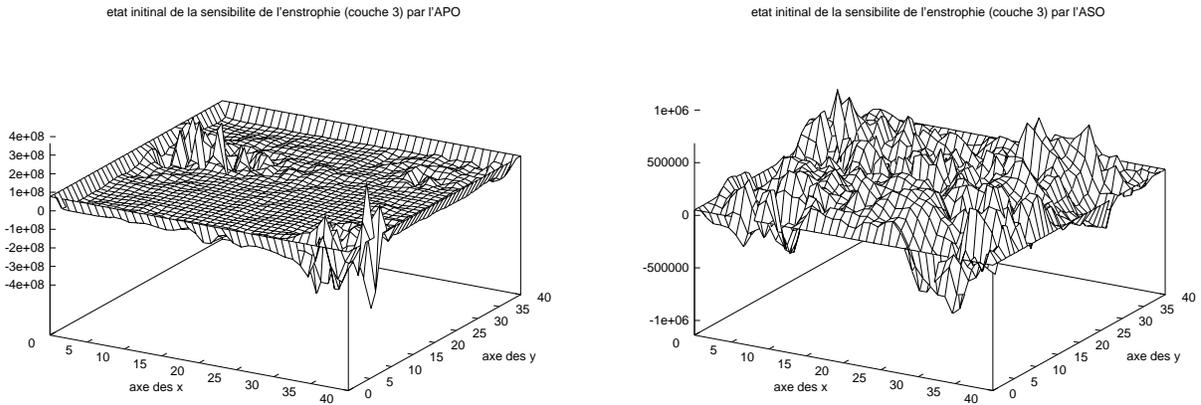


FIG. 3.35 – Etat initial du gradient de l'enstrophie de la couche 3 par rapport aux observations, par la méthode APO (à gauche) et par la méthode de ASO (à droite).

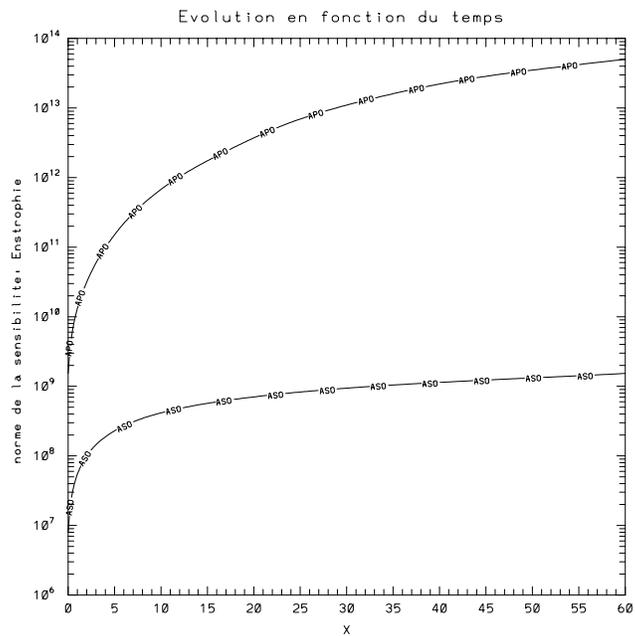


FIG. 3.36 – Evolution au cours du temps de la norme de la sensibilité de l'enstrophie de la couche 3 par rapport aux observations.

Conclusion

Les résultats de comparaison ci-dessus illustrent bien la différence des résultats de sensibilité obtenus par les méthodes APO et ASO respectivement. Comme nous l'avons décrit théoriquement cette différence est fondamentale car elle montre numériquement que selon qu'on applique la théorie générale de l'analyse de sensibilité au modèle direct (APO) ou au système d'optimalité (ASO) les résultats ne sont pas les mêmes.

On constate dans les résultats d'évolution des normes des vecteurs de sensibilité que les normes obtenues par la méthode APO sont plus grandes que celles obtenues par la méthode ASO pour le modèle considéré. On en conclut que la méthode APO qui n'est pas la bonne pour le calcul de la sensibilité en assimilation variationnelle conduit à une surestimation de la sensibilité. Cependant l'inverse (i.e. la sous-estimation de la sensibilité par la méthode APO) pourrait se produire pour un autre modèle.

Notons par ailleurs que l'une des raisons importantes de cette différence réside dans le fait que la condition initiale (V^*) permettant de calculer la sensibilité (par la méthode ASO) a été obtenue par inversion du Hessien via la minimisation d'une fonctionnelle quadratique alors que la condition initiale ($Q_1(0)$) pour le calcul de la sensibilité par la méthode APO ne réalise pas le minimum de cette fonctionnelle.

3.8.4 Coût de la méthode

Le calcul de la sensibilité selon la méthode décrite ci-dessus nécessite la résolution du système d'optimalité qui se fait par des algorithmes de minimisation de type *méthodes de descente*. Les propriétés de la fonction-coût ont ici toute leur importance dans la convergence plus ou moins rapide de la minimisation. Une autre partie de cette importance est attribuée à la connaissance d'un *bon point de départ (first-guess)*. Mais la connaissance de l'optimum est toujours approximative par le biais des critères d'arrêt de la minimisation principalement:

- le nombre d'itérations: une itération de la minimisation comprend l'intégration du modèle direct et celle du modèle adjoint.
- la norme du gradient lorsqu'elle devient petite; ceci dépend des problèmes

Ensuite il faut minimiser (3.34). Et pour cela il faut mettre à jour le produit $H \cdot V$ à chaque itération $Q_1(0)$ étant calculé une fois pour toutes au début de la minimisation. Cette mise à jour nécessite la résolution du système (3.29) qui suppose qu'on a stocké les états direct et adjoint. Une itération de cette seconde minimisation a un coût de calcul quasiment égal à celui d'une itération de la minimisation de la fonction-coût. Si C_0 est le coût de calcul (en temps C.P.U. machine (CRAY)) de l'intégration du modèle direct la minimisation de la fonction-coût revient à $2N_1C_0$ où N_1 est le nombre d'itérations utilisées et la minimisation de (3.34) revient à $2N_2C_0$ où N_2 est le nombre d'itérations utilisées. D'autre part la vitesse de convergence des deux minimisations dépend du conditionnement du Hessien H et on peut en déduire que $N_1 \simeq N_2$ si les points de départ de

la minimisation sont convenablement choisis dans les deux cas. En ajoutant les deux intégrations correspondant respectivement au calcul de $Q_1(0)$ et de la sensibilité on a un coût total de $2(2N_1 + 1)C_0$.

Si l'on avait calculé la sensibilité (par les équations adjointes au premier ordre) juste après la minimisation de la fonction-coût le coût serait de $(2N_1 + 1)C_0$.

D'autre part le calcul du produit Hessien \times vecteur nécessite le stockage de l'état direct et son adjoint pour le calcul de l'adjoint au second ordre. On a donc besoin d'un espace mémoire deux fois plus grand que pour le calcul du gradient.

L'utilisation de l'adjoint au second ordre coûte donc deux fois plus cher que l'utilisation de l'adjoint au premier ordre en termes de coût de calcul et d'espace mémoire. Nous retrouvons le fameux problème bien connu sous le nom de *Rapport qualité-prix*. Pour la méthode proposée dans cette étude le rapport qualité-prix est donc élevé.

3.9 Analyse de sensibilité et prévision

Dans la plupart des cas les observations sont bruitées et nous ne pouvons ignorer l'influence de ce bruit lorsque nous utilisons ces observations dans des processus d'assimilation de données. La prise en compte du bruit sur les observations est d'autant plus importante que les résultats de l'assimilation sont utilisés pour faire de la prévision (c'est le cas en océanographie et en météorologie et dans plusieurs autres domaines). Il est alors nécessaire d'estimer l'erreur de prévision que l'on commet. La prévision étant faite par intégration du modèle direct avec pour condition initiale la condition initiale optimale résultant de l'assimilation l'erreur de prévision est calculée par intégration du modèle linéaire tangent au modèle direct avec pour condition initiale la sensibilité de la condition initiale optimale par rapport au bruit sur les observations: V^* .

Il faut donc être très précis et rigoureux dans le calcul de V^* si l'on veut faire une bonne prévision car un "*mauvais*" calcul de V^* implique un "*mauvais*" calcul de l'erreur de prévision et donc une "*mauvaise*" prévision (et des conséquences plus ou moins graves?)

Si nous connaissons le bruit sur les observations nous pouvons utiliser l'algorithme proposé ci-dessus pour le calcul de V^* qui fait intervenir la résolution du système adjoint au second ordre. Nous ne pouvons dans ce cas précis éviter cette résolution qui est somme toute coûteuse car V^* représente la sensibilité de la condition initiale optimale par rapport au bruit sur les observations et les observations n'apparaissent pas comme paramètres explicites dans le modèle direct mais dans le système d'optimalité.

Chapitre IV :

L'existence et l'unicité de la solution du modèle Q.G. adjoint au second ordre.

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédant qu'en assimilation variationnelle le calcul de la sensibilité se fait par inversion du Hessien dont le produit avec un vecteur est obtenu par la trace de la solution de l'équation adjointe au second ordre sur l'espace de contrôle. Cela nécessite la résolution au préalable de l'équation directe non linéaire et de l'équation directe linéarisée autour de la solution de l'équation directe non linéaire et de l'équation adjointe.

L'existence et l'unicité de l'équation Q.G. directe ont été étudiées et démontrées par C. BERNIER [4].

L'existence et l'unicité de l'équation Q.G. linéarisée et adjointe ont été étudiées et démontrées par B. LUONG [68]. Les hypothèses garantissant l'existence et l'unicité de l'équation linéarisée se transposent dans le cadre de l'équation adjointe moyennant des hypothèses de régularité du second membre de l'équation adjointe et de sa condition finale qui dépendent essentiellement de la régularité des observations. Par le moyen d'un changement de la variable de temps ($t' = T - t$) dans la résolution de l'équation adjointe on peut conserver le même cadre fonctionnel que celui de la résolution de l'équation linéarisée. Ainsi donc l'équation adjointe au second ordre étant la linéarisée de l'équation adjointe garde aussi le même cadre fonctionnel. Ceci s'explique par le schéma suivant. Supposons que U_{ad} et V sont des Hilbert. On a:

équation directe:

$$\begin{array}{ccc} U_{ad} & \xrightarrow{Sol} & V \\ u_0 & \mapsto & Sol(u_0) = \Psi \end{array}$$

équation directe linéarisée:

$$\begin{aligned} U_{ad} & \xrightarrow{D.Sol} \mathcal{L}(U_{ad}, V) \\ u_0 & \longmapsto Sol(u_0) = D\Psi(u_0) \end{aligned}$$

et donc la dérivée directionnelle de la solution de l'équation directe dans la direction \tilde{u} est $\tilde{\Psi}(u_0) = D\Psi(u_0) \cdot \tilde{u} \in V$. C'est la solution de l'équation linéarisée.

D'autre part il existe un Hilbert H qu'on identifie à son dual H' et tel que:

$$V \subset H \subset V'$$

avec inclusions continues et denses. Alors sous des hypothèses de régularité du second membre de l'équation adjointe (notamment si ce second membre est dans H) et de sa condition finale on peut encore chercher la solution de l'équation adjointe dans V . Soit $P \in V$. On a formellement:

$$\left(P, \tilde{\Psi}(u_0) \cdot \tilde{u} \right)_V = \left\langle {}^t\tilde{\Psi}(u_0) \cdot P, \tilde{u} \right\rangle_{U'_{ad}, U_{ad}}$$

i.e.

$$\begin{aligned} V & \xrightarrow{{}^tD.Sol} U'_{ad} \\ P & \longmapsto {}^t\tilde{\Psi}(u_0) \cdot P \end{aligned}$$

De façon plus précise dans le cadre de l'assimilation variationnelle dans un modèle d'évolution (ce qui est notre cas) si nous supposons que le second membre de l'équation adjointe est dans H et si V_{fin} désigne l'espace des conditions finales du modèle direct alors la solution de l'équation adjointe définit une application:

$$\begin{aligned} P & : V_{fin} \longrightarrow V \\ u_0^{fin} = u_{fin}(u_0) & \longmapsto P(u_{fin}) \end{aligned}$$

$u_{fin}(u_0)$ désigne l'état final de la solution du modèle direct linéarisé avec u_0 comme état initial et on a:

$${}^t\tilde{\Psi}(u_0) \cdot P = \mathcal{P}_{U_{ad}}(P(u_{fin})) = \text{Gradient de la fonction coût} \in U'_{ad} \quad (4.1)$$

où $\mathcal{P}_{U_{ad}}$ est l'opérateur de trace sur l'espace de contrôle.

Or la dérivée directionnelle du gradient en u_0 dans la direction \tilde{u} donne le produit du Hessien en u_0 appliqué à \tilde{u} . L'égalité (4.1) ci-dessus nous montre que ce produit est obtenu par la trace sur U_{ad} de la dérivée directionnelle \tilde{P} de P dans la direction \tilde{u} où \tilde{P} est la perturbation induite sur P par la perturbation \tilde{u}_0 autour de u_0 . Si Q désigne la différentielle de P en u_0 alors \tilde{P} est donné par:

$$\begin{aligned} Q & : V_{fin} \longrightarrow \mathcal{L}(V_{fin}, V) \\ u_0^{fin} & \longmapsto Q(u_0^{fin}) \quad : \quad Q(u_0^{fin}) \cdot \tilde{u}_0^{fin} = \tilde{P} \in V \end{aligned}$$

et on a :

$$\mathcal{P}_{U_{ad}}(\tilde{P}) = Hess(u_0) \cdot \tilde{u}_0 \in U'_{ad}$$

Nous cherchons donc la solution $Q = Q(u_0^{fin}) \cdot \tilde{u}_0^{fin}$ du linéarisé de l'équation adjointe (i.e l'adjoint au second ordre) dans $V\Gamma$ c'est-à-dire que nous conservons le cadre fonctionnel de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation linéarisée pour la résolution de l'équation adjointe au second ordre.

Remarque

Ceci n'est valable que dans le cadre restreint où les observations sont régulières en espace et en temps. Dans le cas des observations ponctuelles le second membre de l'équation adjointe et celui de l'équation adjointe au second ordre font intervenir des masses diracs. Il faut alors chercher leurs solutions dans des espaces de distributions notamment par l'utilisation des noyaux de Green. Nous n'abordons pas ce cas dans ce chapitre le but étant juste de légitimer l'utilisation du Hessien.

Rappelons l'équation Q.G. adjointe au second ordre:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_k(T) = \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \Psi_k^2(T)}(\Psi) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) - \Delta J(\Psi_k, Q_k) - [W^t \cdot J(\Psi, Q)]_k - J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) + \\ + \delta_{k,N} C_B \Delta Q_N - A_4 \Delta^2 Q_k = \\ = \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \Psi_k^2}(\Psi) + \Delta J(\tilde{\Psi}_k, P_k) + [W^t \cdot J(\tilde{\Psi}, P)]_k + J(P_k, \theta_k(\tilde{\Psi})) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_k(t) = C_k^{te}(t) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad , \quad \forall t \in [0, T] \\ \chi_k(t) = [B^{-t} \cdot Q]_k \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \chi_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \int_{\Omega} \chi_k(t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ \Delta Q_k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], k = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Nous rappelons aussi que $\Psi, \tilde{\Psi}$ et P désignent respectivement les solutions des équations directe non linéaire, directe linéarisée et adjointe.

Posons :

$$F_k = \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \Psi_k^2}(\Psi) + \Delta J(\tilde{\Psi}_k, P_k) + [W^t \cdot J(\tilde{\Psi}, P)]_k + J(P_k, \theta_k(\tilde{\Psi}))$$

$$G_k = \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial \Psi_k^2(T)}(\Psi)$$

$$t' = T - t \quad (\text{changement de variable en temps}).$$

Par abus de notations l'équation (4.2) s'écrit encore sous la forme:

$$\begin{cases} Q_k(0) = G_k \\ \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) + \Delta J(Q_k, \Psi_k) + [W^t \cdot J(Q, \Psi)]_k - \\ - J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) + \delta_{k,N} C_B \Delta Q_N - A_4 \Delta^2 Q_k = F_k \end{cases} \quad (4.4)$$

avec les mêmes conditions aux limites (4.3)

Pour démontrer l'existence et l'unicité de cette équation nous supposons fixés la condition initiale G_k et le second membre F_k et nous établirons des majorations *a priori* de la solution Q_k de (4.4):

- majoration de (Q_k) dans $L^2(0, T; H^2(\Omega))$
- majoration de $\left(\frac{\partial Q_k}{\partial t}\right)$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$
- majoration de (Q_k) dans $L^2(0, T; H^3(\Omega))$

Ensuite nous donnerons une démonstration de l'existence et l'unicité grâce à ces trois majorations par la méthode de Faedo-Galerkin dans un cadre fonctionnel que l'on précisera.

Remaque

Cette démarche s'inspire de la démarche faite par B. LUONG [68] pour la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation Q.G. linéarisée. Notons aussi qu'une deuxième démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation Q.G. adjointe au second ordre peut être faite par la méthode de régularisation elliptique J.L. LIONS [66] exactement comme l'a fait B. LUONG pour l'équation Q.G. linéarisée.

Nous rappelons aussi les inégalités de Gagliardo-Nirenberg (cf H. BREZIS [6] pp. 194 – 195) et Hölder ([6] p. 56):

Inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg :

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .

- Soit $u \in L^p(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$. Alors $u \in W^{1,q}(\Omega)$ où q est la moyenne harmonique de p et r , c.-à-d. $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right)$, et :

$$\|Du\|_{L^q(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{2,r}}^{1/2} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1/2}. \quad (4.5)$$

– Soit $u \in L^q(\Omega) \cap W^{1,n}(\Omega)$. Soit $1 \leq q \leq p < \infty$. Alors $u \in L^p(\Omega)$, et :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}^a \quad \text{avec } a = 1 - \frac{q}{p}. \quad (4.6)$$

Inégalité de Hölder :

Soient f_1, f_2, \dots, f_k des fonctions telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{avec } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}. \quad (4.7)$$

4.2 Majoration de Q dans $L^2(0, T; H^2(\Omega))$

Dans cette partie nous allons multiplier la $k^{\text{ième}}$ équation Q.G adjointe au second ordre (4.4) par $\frac{\bar{V}_k}{H_k} \Gamma$ où \bar{V}_k représente les fonctions de courant nulles au bord correspondant à $V_k \Gamma$ c'est-à-dire :

$$\bar{V}_k \stackrel{\text{def}}{=} V_k - V_k|_{\partial\Omega} \quad \Pi(\Omega) \quad (4.8)$$

Nous allons établir la première majoration *a priori* en prenant $V_k = Q_k \Gamma$ en intégrant en temps et en espace et en sommant les N produits obtenus: On obtient alors l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \bar{Q}_k dx dt + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \bar{Q}_k dx dt + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t \cdot J(Q, \Psi)]_k \bar{Q}_k dx dt - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \bar{Q}_k dx dt + \\ & + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \bar{Q}_N dx dt - A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \bar{Q}_k dx dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \bar{Q}_k dx dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

- **Premier terme :**

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \bar{Q}_k dx dt$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\overline{Q_k}}{H_k} dx &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \Delta Q_k \overline{Q_k} dx + \\
&+ \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \left[\frac{f_0^2}{g'_{k+1/2}} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) - \frac{f_0^2}{g'_{k-1/2}} \left(\frac{Q_k}{H_k} - \frac{Q_{k-1}}{H_{k-1}} \right) \right] \frac{\overline{Q_k}}{H_k} dx = \\
&= - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \nabla Q_k \nabla \overline{Q_k} dx - \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \left(\frac{\overline{Q_{k+1}}}{H_{k+1}} - \frac{\overline{Q_k}}{H_k} \right) dx
\end{aligned}$$

où $p_{k+1/2} = \frac{f_0^2}{g'_{k+1/2}}$. Ainsi grâce au lemme (4.2.1) suivant on a :

$$- \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\overline{Q_k}}{H_k} dx = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \|\nabla Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \quad (4.10)$$

Lemme 4.2.1 *On a l'égalité suivante :*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \left(\frac{\overline{Q_{k+1}}}{H_{k+1}} - \frac{\overline{Q_k}}{H_k} \right) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \quad (4.11)$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{Q_k}}{H_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_k}{H_k} - \frac{Q_k}{H_k} \Big|_{\partial\Omega} \mathbb{I}(\Omega) &\implies \int_{\Omega} \frac{\overline{Q_k}}{H_k} dx = \int_{\Omega} \frac{Q_k}{H_k} dx - \frac{Q_k}{H_k} \Big|_{\partial\Omega} \cdot |\Omega| \\
\int_{\Omega} \frac{Q_k}{H_k} dx &= \frac{1}{H_k} \left[B^t \cdot \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \chi_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \chi_N dx \end{pmatrix} \right]_k = \frac{1}{H_k} \sum_{j=1}^N B_{kj}^t \int_{\Omega} \chi_j dx = \frac{1}{H_k} B_{1k} \int_{\Omega} \chi_1 dx
\end{aligned}$$

On normalise B de telle sorte que $\frac{B_{1k}}{H_k} = 1 \quad \forall k$

$$\begin{aligned}
&\implies \int_{\Omega} \frac{Q_k}{H_k} dx = \int_{\Omega} \chi_1 dx \quad \forall k \implies \int_{\Omega} \frac{\overline{Q_k}}{H_k} dx = \int_{\Omega} \chi_1 dx - \frac{Q_k}{H_k} \Big|_{\partial\Omega} \cdot |\Omega| \\
\implies \overline{Q_k} \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{H_k \int_{\Omega} \chi_1 dx - \int_{\Omega} \overline{Q_k} dx}{|\Omega|} \implies \frac{\overline{Q_k}}{H_k} = \frac{Q_k}{H_k} - \frac{\int_{\Omega} \chi_1 dx}{|\Omega|} \mathbb{I}(\Omega) + \frac{\int_{\Omega} \overline{Q_k} dx}{H_k |\Omega|} \mathbb{I}(\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) - \left(\overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} - \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \left[\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\int_{\Omega} \chi_1 dx}{|\Omega|} + \frac{\int_{\Omega} \overline{Q_{k+1}} dx}{H_{k+1} |\Omega|} \right] - \frac{Q_k}{H_k} \left[\frac{Q_k}{H_k} + \frac{\int_{\Omega} \chi_1 dx}{|\Omega|} - \frac{\int_{\Omega} \overline{Q_{k+1}} dx}{H_{k+1} |\Omega|} \right] dx = \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx + \frac{1}{|\Omega|} \underbrace{\int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) dx}_{=0 \text{ normalisation ci-dessus}} \cdot \int_{\Omega} \left(\overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} - \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx
 \end{aligned}$$

■

Un calcul similaire faisant intervenir l'opérateur de dérivation partielle en temps $\frac{\partial}{\partial t}$ et l'intégration de 0 à T nous donne:

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \overline{Q_k} dx dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \nabla Q_k \nabla \overline{Q_k} dx dt + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) dx dt
 \end{aligned}$$

et on a alors:

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \overline{Q_k} dx dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \|\nabla Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \right] dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \|\nabla Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

• **Deuxième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \overline{Q_k} dx dt}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \overline{Q_k} dx &\stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \nabla J(Q_k, \Psi_k) \nabla \overline{Q_k} dx \\
 &\stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} J(Q_k, \Psi_k) \Delta \overline{Q_k} dx
 \end{aligned}$$

Or

$$\int_{\Omega} J(Q_k, \Psi_k) \Delta \overline{Q_k} dx = \int_{\Omega} J(Q_k, \Psi_k) \Delta Q_k dx$$

D'autre part on a:

Lemme 4.2.2 Soient u, Ψ deux fonctions de $H^2(\Omega)$ dont les traces sur le bord $\partial\Omega$ sont constantes. Alors on a:

$$\int_{\Omega} J(u, \Psi) \Delta \Psi dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx \quad (4.13)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J(u, \Psi) \Delta \Psi dx &= \int_{\Omega} (u_x \Psi_y - u_y \Psi_x) (\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_x \Psi_y \Psi_{xx} + u_x \Psi_y \Psi_{yy} - u_y \Psi_x \Psi_{xx} - u_y \Psi_x \Psi_{yy}) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_x \Psi_y \Psi_{xx} - u_y \Psi_x \Psi_{yy}) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_x (\Psi_y^2)_y - u_y (\Psi_x^2)_x] dx \\ &= \int_{\Omega} -(u_x \Psi_y)_x \Psi_x + (u_y \Psi_x)_y \Psi_y dx + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_x (\Psi_y^2)_y - u_y (\Psi_x^2)_x] dx \\ &= \int_{\Omega} (-u_{xx} \Psi_y \Psi_x - u_x \Psi_{xy} \Psi_x + u_{yy} \Psi_x \Psi_y + u_y \Psi_{xy} \Psi_y) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_x (\Psi_y^2)_y - u_y (\Psi_x^2)_x] dx + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x - u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma \\ &= \int_{\Omega} (-u_{xx} + u_{yy}) \Psi_x \Psi_y dx + \int_{\Omega} (-u_x \Psi_{xy} \Psi_x + u_y \Psi_{xy} \Psi_y) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_x (\Psi_y^2)_y - u_y (\Psi_x^2)_x] dx + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x - u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma \\ &= \int_{\Omega} (-u_{xx} + u_{yy}) \Psi_x \Psi_y dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [-u_x (\Psi_x^2)_y + u_y (\Psi_y^2)_x] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_x(\Psi_y^2)_y - u_y(\Psi_x^2)_x] dx + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x - u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma \\
 = & \int_{\Omega} (-u_{xx} + u_{yy}) \Psi_x \Psi_y dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u_{xy}(\Psi_x^2) - u_{xy}(\Psi_y^2)] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [-u_{xy}(\Psi_y^2) + u_{xy}(\Psi_x^2)] dx \\
 & + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x d\sigma - \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma \\
 \int_{\Omega} J(u, \Psi) \Delta \Psi dx = & \int_{\Omega} (-u_{xx} + u_{yy}) \Psi_x \Psi_y dx + \int_{\Omega} [u_{xy}(\Psi_x^2) - u_{xy}(\Psi_y^2)] dx \\
 & + \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x d\sigma - \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} -u_x \Psi_x^2 n_y + u_y \Psi_y^2 n_x d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y^2 n_y - u_y \Psi_x^2 n_x d\sigma.
 \end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier que les intégrales sur le bord $\partial\Omega$ s'annulent. En fait on va couper les deux premières intégrales sur $\partial\Omega$ en deux pour sommer avec les autres termes.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_x^2 n_y d\sigma &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_x \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\sigma = 0. \\
 -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_y^2 n_x d\sigma &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_y \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} d\sigma = 0.
 \end{aligned}$$

Et

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \Psi_x n_x d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y^2 n_y d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_x \Psi_y \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma. \quad (4.14)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \Psi_y n_y d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x^2 n_x d\sigma = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_y \Psi_x \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma. \quad (4.15)$$

Et finalement la somme de (4.14) et de (4.15) donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} J(u, \Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

C.Q.F.D.



Lemme 4.2.3 *On a la majoration:*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(\Psi_k, Q_k) \Delta Q_k dx \right| &\leq \\ &\leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \left(\frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \alpha C \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle, et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Démonstration

Grâce au lemme 4.2.2 et l'inégalité de Hölder on a:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} J(\Psi_k, Q_k) \Delta Q_k dx \right| &\leq \|J(\Psi_k, Q_k) \Delta Q_k\|_{L^1(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|D^2 \Psi_k\|_{L^2(\Omega)} \|(DQ_k)^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\Psi\|_{H^2(\Omega)} \|DQ\|_{L^4(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (4.5) appliquée à $u = DQ\Gamma$ avec $p = 4$, $q = 2$, $n = 2$, $a = 1/2\Gamma$ on a:

$$\begin{aligned} \|DQ\|_{L^4(\Omega)} &\leq \|DQ\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|DQ\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{1/2} \leq C \|Q\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|Q\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \\ \|DQ\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq C \|Q\|_{H^1(\Omega)} \|Q\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha C \|Q\|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

et donc on a:

$$\|J(\Psi_k, Q_k) \Delta Q_k\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\Psi\|_{H^2(\Omega)} \left(\frac{C}{\alpha} \|Q\|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha C \|Q\|_{H^2(\Omega)}^2 \right)$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps on obtient le résultat de lemme 4.2.3 ■

• **Troisième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \overline{Q_k} dx dt}$$

Lemme 4.2.4 *On a la majoration:*

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \overline{Q_k} dx dt \right| \leq \\ \leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \left(\frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \alpha C \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \quad (4.17)$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle, et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Démonstration

On a:

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \overline{Q_k} dx \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|W\| \cdot \|J(Q, \Psi)\|_{L^2(\Omega)} \|Q\|_{L^2(\Omega)} \\ \int_{\Omega} |J(Q_k, \Psi_k)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} - \frac{\partial Q_k}{\partial y} \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right) \right|^2 dx \leq \\ \leq \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial Q_k}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right)^2 + 2 \left| \frac{\partial Q_k}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial Q_k}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \right| \right] dx \\ \leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial Q_k}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial y} \right|^2 \left| \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right|^2 dx \leq C \cdot \|(DQ_k)^2\|_{L^2(\Omega)} \|(D\Psi_k)^2\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C \cdot \|DQ_k\|_{L^4(\Omega)}^2 \|D\Psi_k\|_{L^4(\Omega)}^2$$

et on a donc:

$$\|J(Q_k, \Psi_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \cdot \|DQ_k\|_{L^4(\Omega)} \|D\Psi_k\|_{L^4(\Omega)}$$

Mais d'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (4.5) avec $r = 2, q = 4, p = \infty$ on a: $\|D\Psi_k\|_{L^4(\Omega)} \leq C \cdot \|\Psi_k\|_{W^{2,2}(\Omega)}^{1/2} \|\Psi_k\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}$. D'autre part $\Gamma H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans $L^\infty(\Omega)$. On a alors:

$$\|D\Psi_k\|_{L^4(\Omega)} \leq C \cdot \|\Psi_k\|_{H^2(\Omega)}$$

De même on a:

$$\|DQ_k\|_{L^4(\Omega)} \leq C \cdot \|Q_k\|_{H^2(\Omega)}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \overline{Q_k} dx \right| &\leq \| \|W\| \| \cdot \| J(Q, \Psi) \|_{L^2(\Omega)} \| Q \|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \cdot \| \Psi \|_{H^2(\Omega)} \| Q \|_{H^2(\Omega)} \| Q \|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq \| \Psi \|_{H^2(\Omega)} \left(\frac{C}{\alpha} \| Q \|_{H^1(\Omega)}^2 + \alpha C \| Q \|_{H^2(\Omega)} \right)
 \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Hölder sur l'intégrale en temps de cette dernière majoration pour obtenir le résultat du lemme (4.2.4) ■

• **Quatrième terme :**

$$\boxed{- \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \overline{Q_k} dx dt}$$

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \overline{Q_k} dx &= \\
 &\stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} J(Q_k, \overline{Q_k}) (\theta_k(\Psi) + f) dx - \int_{\partial\Omega} Q_k \overline{Q_k} \frac{\partial}{\partial \tau} (\theta_k(\Psi) + f) d\sigma \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc Γ

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \overline{Q_k} dx dt = 0 \tag{4.18}$$

• **Cinquième terme :**

$$\boxed{\frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \overline{Q_N} dx dt}$$

$$\int_{\Omega} \Delta Q_N \overline{Q_N} dx \stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \| \vec{\nabla} Q_N \|^2 dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_N}{\partial n} d\sigma}_{=0}$$

Donc Γ

$$- \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \overline{Q_N} dx dt = \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \| \vec{\nabla} Q_N \|^2 dx dt \tag{4.19}$$

• Sixième terme :

$$\boxed{-A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \overline{Q_k} dx dt}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \overline{Q_k} dx &\stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Delta Q_k \cdot \vec{\nabla} Q_k dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta Q_k) \overline{Q_k} d\sigma}_{=0} \\ &\stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} \Delta Q_k \Delta Q_k dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Delta Q_k \frac{\partial}{\partial n} (\overline{Q_k}) d\sigma}_{=0} \end{aligned}$$

Donc

$$A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \overline{Q_k} dx dt = A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \quad (4.20)$$

• Septième terme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \overline{Q_k} dx dt}$$

Notons d'abord par Δ_d^{-1} l'inverse de l'opérateur laplacien pour le problème de Dirichlet homogène Γ c.-à-d. $u = \Delta_d^{-1} f$ est définie comme la solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega; \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.21)$$

On remarque que $\Delta \circ \Delta_d^{-1} = Id (H^{-1}(\Omega))$. Appliquons cela à F_k :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_k \overline{Q_k} dx &= \int_{\Omega} \Delta \Delta_d^{-1} F_k \overline{Q_k} dx \\ &\stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Delta_d^{-1} F_k \cdot \vec{\nabla} Q_k dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta_d^{-1} F_k}{\partial n} \overline{Q_k} d\sigma}_{=0} \\ &\stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} \Delta_d^{-1} F_k \Delta Q_k dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \Delta_d^{-1} F_k \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma}_{=0}. \end{aligned}$$

On peut maintenant majorer notre terme :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} F_k \overline{Q_k} dx dt \right| &\leq C \cdot \sum_{k=1}^N \left(\|\Delta_d^{-1} F_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\Delta Q_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\ &\leq C \cdot \|\Psi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \sum_{k=1}^N \|\Delta_d^{-1} F_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Soit $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$ posons $\|F\|_{-2,\Omega} \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^N \|\Delta_d^{-1} F_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} F_k \overline{Q_k} dx dt \right| &\leq C \cdot \|\Psi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \|F\|_{-2,\Omega} \\ &\leq \alpha \cdot C \|\Psi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|F\|_{-2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

(où α un nombre que l'on peut choisir arbitrairement dans \mathbb{R}_*^+).

Nous pouvons maintenant énoncer notre première majoration a priori :

Proposition 4.2.5 *On a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{k=1}^N H_k \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} + \\ &+ H_N C_B \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx dt + \frac{A_4}{2} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \leq \\ &\leq C(\Omega, T, \Psi^{ref}) \cdot \|F\|_{-2,\Omega}^2; \end{aligned} \quad (4.23)$$

où $C(\Omega, T, \Psi^{ref})$ est une constante qui ne dépend que de Ω , T , des paramètres du modèle et de $\|\Psi^{ref}\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$.

Démonstration

Faisons d'abord le changement de fonction inconnue $\phi(t) \stackrel{def}{=} e^{-\lambda t} Q(t)$ où λ est un réel positif que l'on précisera dans la suite. La nouvelle inconnue ϕ vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(\phi) + \underline{\lambda \theta_k^t(\phi)} + \Delta J(\phi_k, \Psi_k) + [W^t J(\phi, \Psi)]_k - \\ - J(\phi_k, \theta_k(\Psi) + f) + \delta_{k,N} C_B \Delta \phi_N - A_4 \Delta^2 \phi_k = \underline{e^{-\lambda t} F_k} \end{aligned}$$

On voit alors apparaître le terme $\lambda \theta_k^t(\phi)$ qui ne figure pas dans l'équation Q.G. adjointe au second ordre vérifiée par Q et le second membre F_k est multiplié par $e^{-\lambda t}$. Pour simplifier les notations on fait l'abus de noter ϕ par Q . En appliquant les résultats donnés par: (4.12)(4.16)(4.17)(4.18)(4.19)(4.20) et (4.22) on obtient:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} + \\
 & + \lambda \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_k\|^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx dt \right] + \\
 & + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx dt + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \leq \\
 & \leq \frac{C_1}{\alpha_1} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \alpha_1 C_1 \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \\
 & + \alpha_2 C_2 \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 + \frac{C_2}{\alpha_2} \|F\|_{-2,\Omega}^2 \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

On commence par choisir α_1 et α_2 assez petits en utilisant la propriété de régularité de l'opérateur inverse du laplacien de sorte que:

$$(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2) \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \leq \frac{A_4}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \tag{4.25}$$

ensuite nous choisissons λ assez grand en utilisant l'inégalité de Poincaré pour que:

$$\begin{aligned}
 \lambda \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_k\|^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx dt \right] & \geq \\
 & \geq \frac{C_1}{\alpha_1} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Avec ces choix (4.24) se simplifie en:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_k\|^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} + \\
 & + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx dt + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \leq \\
 & \leq C^{te} \cdot \|F\|_{-2,\Omega}^2 \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

■

4.3 Majoration de Q dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{H}^1(\Omega))$

Nous multiplions la $k^{\text{ième}}$ équation Q.G. adjointe au second ordre par $\frac{1}{H_k} \frac{\partial \overline{V}_k}{\partial t}$ où \overline{V}_k est définie par (4.8). En prenant $V_k = Q_k$ et en sommant les N produits obtenus après avoir intégré en espace et en temps on a l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t \cdot J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt + \\ & + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial \overline{Q}_N}{\partial t} dxdt - A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt \end{aligned} \quad (4.28)$$

• Premier terme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Delta Q_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[p_{k+1/2} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) - p_{k-1/2} \left(\frac{Q_k}{H_k} - \frac{Q_{k-1}}{H_{k-1}} \right) \right] \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt \\ & \stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dxdt - \\ & - \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{Q}_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{\overline{Q}_k}{H_k} \right) dxdt \end{aligned}$$

Grâce au lemme (4.3.1) suivant on a:

$$- \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dxdt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dxdt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right)^2 dx dt \quad (4.29)$$

Lemme 4.3.1 *On a l'égalité suivante:*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} - \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right)^2 dx \quad (4.30)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} - \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right)^2 dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} - \overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} + \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx \end{aligned}$$

Regardons la deuxième intégrale du membre de droite de cette égalité. En notant C_k la constante de même valeur que $\frac{Q_k}{H_k}$ sur le bord $\partial\Omega$ de Ω on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} - \overline{\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}}} + \overline{\frac{Q_k}{H_k}} \right) dx &= \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \frac{\partial}{\partial t} (C_{k+1} \mathbb{I}(\Omega) - C_k \mathbb{I}(\Omega)) dx \\ &= |\Omega| \cdot \frac{\partial}{\partial t} (C_{k+1} - C_k) \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) dx \end{aligned}$$

Or nous avons vu au lemme (4.2.1) que $\int_{\Omega} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) dx = 0$ En tenant compte de la normalisation de la matrice de passage couches-modes $B\Gamma$ ceci termine la démonstration du lemme (4.3.1) ■

• **Deuxième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt}$$

Lemme 4.3.2 *On a la majoration suivante:*

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt \right| \leq \\ & \leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \left(\alpha C \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle, et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Démonstration

On a:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx \right| \stackrel{Green}{=} \left| \int_{\Omega} \vec{\nabla} J(Q_k, \Psi_k) \vec{\nabla} \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx \right| \\ & \stackrel{Hölder}{\leq} \left\| \vec{\nabla} J(Q_k, \Psi_k) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \|\Psi_k\|_{H^2(\Omega)} \|Q_k\|_{H^2(\Omega)} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \|\Psi_k\|_{H^2(\Omega)} \left(\alpha C \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha C \|Q_k\|_{H^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps de cette majoration pour avoir la résultat du lemme (4.3.2). ■

- **Troisième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt}$$

Lemme 4.3.3 *On a l'inégalité:*

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt \right| \leq \\ & \leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \left(\alpha C \left\| \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle, et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Démonstration

On a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx &\stackrel{H\ddot{o}lder}{\leq} \| \|W\| \| \cdot \| J(Q, \Psi) \|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \cdot \| \vec{\nabla} \Psi \|_{L^2(\Omega)} \| \vec{\nabla} Q \|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq \| \Psi \|_{H^1(\Omega)} \left(\alpha C \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{\alpha} \| Q \|_{H^1(\Omega)}^2 \right)
 \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps de cette majoration pour obtenir le résultat du lemme (4.3.3). ■

• **Quatrième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt}$$

Lemme 4.3.4 *On a la majoration suivante:*

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt \right| &\leq \\
 &\leq C(\Psi) \left(\alpha C(\Omega) \left\| \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{C(\Omega)}{\alpha} \| Q \|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

où

- $C(\Psi)$ est une constante de la forme: $C(\Psi) = \max \{ \| \Psi \|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}, C(\Omega) \}$,
- $C(\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de Ω, T et des paramètres du modèle,
- et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Pour démontrer ce lemme nous avons besoin du résultat suivant:

Lemme 4.3.5 *Soient $U, V \in H^1(\Omega)$ et $W \in H^2(\Omega)$. Si U est constante sur le bord $\partial\Omega$, alors on a:*

$$\left| \int_{\Omega} J(W, U) V dx \right| = \left| \int_{\Omega} J(U, V) W dx \right| \leq C \| U \|_{H^1(\Omega)} \| V \|_{H^1(\Omega)} \| W \|_{H^2(\Omega)} \quad (4.34)$$

Démonstration

On a:

$$\left| \int_{\Omega} J(U, V)W dx \right| \stackrel{Green}{=} \left| - \int_{\Omega} J(U, W)V dx + \int_{\partial\Omega} WV \frac{\partial U}{\partial \tau} d\sigma \right|$$

$$\stackrel{Hölder}{\leq} \|\vec{\nabla} W\|_{L^4(\Omega)} \|\vec{\nabla} U\|_{L^2(\Omega)} \|V\|_{L^4(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (4.5) avec $r = 2$, $q = 4$, et $p = \infty$ et l'injection continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ on a:

$$\|\vec{\nabla} W\|_{L^4(\Omega)} \leq C \cdot \|W\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \|W\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2} \leq C \cdot \|W\|_{H^2(\Omega)}$$

D'autre part l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (4.6) avec $p = 2$, $q = 4$ et $a = 1/2$ donne:

$$\|V\|_{L^4(\Omega)} \leq C \cdot \|V\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|V\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \leq C \cdot \|W\|_{H^1(\Omega)}$$

et on a donc:

$$\left| \int_{\Omega} J(U, V)W dx \right| \leq C \cdot \|W\|_{H^2(\Omega)} \|U\|_{H^1(\Omega)} \|V\|_{H^1(\Omega)}$$

■

Démonstration du lemme (4.3.4)

La démonstration de ce lemme utilise les mêmes techniques que celles de la démonstration du lemme (4.3.5) ci-dessus. En effet on pose $U = \theta_k(\Psi) + f$, $V = \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t}$ et $W = Q_k$ et on applique le résultat du lemme (4.3.5) pour obtenir:

$$\left| \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx \right| \leq C \|\theta_k(\Psi) + f\|_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega)} \|Q_k\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\leq C (\|\Psi\|_{H^3(\Omega)} + C) \left\| \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega)} \|Q_k\|_{H^2(\Omega)}$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps de cette majoration. On obtient:

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} + C \right) \left\| \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \|Q\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ &\leq C(\Psi) \left(\alpha C(\Omega) \left\| \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{C(\Omega)}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

■

• Cinquième terme :

$$\boxed{\frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial \bar{Q}_N}{\partial t} dx dt}$$

On a :

$$\int_{\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial \bar{Q}_N}{\partial t} dx \stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} Q_N \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_N = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx$$

et en intégrant en temps l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial \bar{Q}_N}{\partial t} dx dt &= -\frac{C_B}{2H_N} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx dt \\ &= -\frac{C_B}{2H_N} \left[\int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \end{aligned} \quad (4.35)$$

• Sixième terme :

$$\boxed{A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial t} dx dt}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial t} dx &\stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Delta Q_k \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} \Delta Q_k \frac{\partial}{\partial t} \Delta Q_k \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta Q_k)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx \end{aligned}$$

et en intégrant en temps l'on a :

$$A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial t} dx dt = \frac{A_4}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \left[\int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \quad (4.36)$$

- Septième terme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt}$$

On utilise l'inverse de l'opérateur laplacien (Δ_d^{-1}) introduit ci-dessus en (4.21). En notant que $\Delta \circ \Delta_d^{-1} = Id_{H^{-1}(\Omega)}$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx &= \int_{\Omega} \Delta \circ \Delta_d^{-1} F_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx \\ &\stackrel{Green}{=} - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Delta_d^{-1} F_k \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta_d^{-1} F_k) \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} d\sigma}_{=0} \end{aligned}$$

On peut donc majorer ce septième terme comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt \right| &\leq C \sum_{k=1}^N \left(\left\| \Delta_d^{-1} F_k \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \right) \\ &\leq C \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \sum_{k=1}^N \left\| \Delta_d^{-1} F_k \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \end{aligned}$$

Posons $\|F\|_{-1,\Omega} \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^N \left\| \Delta_d^{-1} F_k \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ où $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q_k}}{\partial t} dx dt \right| &\leq C \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \|F\|_{-1,\Omega} \\ &\leq \alpha C \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|F\|_{-1,\Omega}^2 \quad (4.37) \end{aligned}$$

où α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+ . ■

Nous pouvons alors énoncer l'estimation *a priori* suivante :

Proposition 4.3.6 *On a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right]^2 dx dt + \\ + \left[\frac{C_B}{H_N} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} Q_N \right\|^2 dx + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \leq C(\Omega, T, \Psi) \|F\|_{-1,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

où $C(\Omega, T, \Psi)$ est une constante qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle et de $\|\Psi\|_{L^\infty(0, T, H^3(\Omega))}$.

Démonstration

La démonstration est basée sur les égalités et les inégalités (4.29) (4.31) (4.32) (4.33) (4.35) (4.36) et (4.37) établies ci-dessus mais aussi sur la majoration (4.23) de la proposition (4.2.5). Tout d'abord on réécrit l'égalité (4.28) sous la forme:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial \overline{Q}_N}{\partial t} dx dt \\
 & - A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt \\
 & - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} [W^t \cdot J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} F_k \frac{\partial \overline{Q}_k}{\partial t} dx dt \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

On remplace les égalités (4.29) (4.35) et (4.36) dans le membre de gauche de l'égalité (4.39) et on utilise les inégalités (4.31) (4.32) (4.33) et (4.37) dans le membre de droite. On obtient:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right]^2 dx dt + \\
 & + \left[\frac{C_B}{H_N} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \leq \\
 & \leq \left(\alpha C^{te} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{C^{te}}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right) + C^{te} \|F\|_{-1, \Omega}^2
 \end{aligned}$$

où C^{te} est une constante positive comme dans les lemmes ci-dessus.

Quitte à choisir α assez petit et à multiplier par 2 les deux membres de l'inégalité ci-dessus le terme $\alpha C^{te} \left\| \vec{\nabla} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2$ passe à gauche et se simplifie avec la moitié

du premier terme de même type à droite i.e: $\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt$.

D'après la proposition 4.2.5 et d'après la régularité de l'opérateur inverse du laplacien « Δ_d^{-1} » on a aussi la majoration:

$$\|Q\|_{(L^2(0,T;H^2(\Omega)))^N}^2 \leq C^{\text{te}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \leq C(\Omega, T, \Psi) \cdot \|F\|_{-2,\Omega}^2$$

On obtient finalement:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+1/2} \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right]^2 dx dt + \\ & + \left[\frac{C_B}{H_N} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} Q_N\|^2 dx + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \leq \\ & \leq \frac{C_1}{\alpha} \cdot \|F\|_{-2,\Omega}^2 + \frac{C_2}{\alpha} \cdot \|F\|_{-1,\Omega}^2 \leq C(\Omega, T, \Psi) \cdot \|F\|_{-1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

d'après la définition des normes $\|\cdot\|_{-2,\Omega}$ et $\|F\|_{-1,\Omega}$ ■

Remarque

La constante $C(\Omega, T, \Psi)$ dépend cette fois de la norme $\|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))}$ plutôt que de la norme $\|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$. Ceci est dû à une moins bonne majoration des termes en jacobien que dans la majoration *a priori* énoncée dans la proposition 4.2.5.

4.4 Majoration de Q dans $L^2(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{H}^3(\Omega))$

La troisième et dernière majoration *a priori* sera obtenue en multipliant le gradient de la $k^{\text{ième}}$ équation Q.G adjointe au second ordre par le gradient $\frac{1}{H_k} \vec{\nabla} V_k \Gamma$ en intégrant en espace et en temps Γ puis en faisant la sommation en k des N produits obtenus. Nous avons:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t \cdot J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt - \\ & - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H_N C_B \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta \Psi_N, \vec{\nabla} V_N \rangle dx dt - A_4 \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta^2 \Psi_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt = \\
& = \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} f_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Nous allons étudier chacun des termes de (4.40):

• **Premier terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt & = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Delta Q_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt + \\
& + \sum_{k=1}^N p_{k+\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right), \vec{\nabla} \frac{V_k}{H_k} \rangle dx dt - \\
& - \sum_{k=1}^N p_{k-\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \left(\frac{Q_k}{H_k} - \frac{Q_{k-1}}{H_{k-1}} \right), \vec{\nabla} \frac{V_k}{H_k} \rangle dx dt
\end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Delta Q_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt & \stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial t} \Delta V_k dx dt + \\
& + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial t} \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt
\end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite est nul car $\Delta Q_k = 0$ sur $\partial \Omega$. Et dans le cas où $V_k = Q_k$ on a :

$$\begin{aligned}
- \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q), \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt & = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial t} \Delta Q_k dx dt + \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right), \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \rangle dx dt = \\
& = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta Q_k)^2 dx dt + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right\|^2 dx dt
\end{aligned}$$

et on a alors l'égalité:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q), \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right\|^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

• **Deuxième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt & \stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \Delta V_k dx dt + \\
 & + \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} J(Q_k, \Psi_k) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette égalité est nul grâce au lemme suivant:

Lemme 4.4.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur Ω et constantes sur le bord $\partial\Omega$, telles que l'opérateur Jacobien appliqué à f et g ait un sens dans $\bar{\Omega}$. On a alors*

$$J(f, g)(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \partial\Omega \quad (4.42)$$

Démonstration

Fixons $x_0 \in \partial\Omega$. Soient \vec{n}_0 et $\vec{\tau}_0$ les vecteurs normal et tangent à la frontière pris au point x_0 . Faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} F(\vec{X}) & = f(\vec{X} \cdot \vec{n}_0 + \vec{X} \cdot \vec{\tau}_0) \\ G(\vec{X}) & = g(\vec{X} \cdot \vec{n}_0 + \vec{X} \cdot \vec{\tau}_0). \end{cases} \quad \text{et}$$

Calculons l'opérateur Jacobien au point x_0 :

$$\begin{aligned}
 J(f, g)(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) \\
 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) n_x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0) n_y \right) \left(-\frac{\partial G}{\partial x}(x_0) n_y + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0) n_x \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) n_y - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0) n_x \right) \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x_0) n_x + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0) n_y \right) \\
 &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) \frac{\partial G}{\partial y}(x_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0) \frac{\partial G}{\partial x}(x_0).
 \end{aligned}$$

Or Γ comme f est constante sur $\partial\Omega\Gamma$ donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0) = 0.$$

De même Γ on a aussi :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial \tau}(x_0) = 0.$$

Le terme Jacobien s'annule donc en x_0 . Comme x_0 est un point choisi quelconque sur $\partial\Omega\Gamma$ on en déduit que le terme Jacobien s'annule presque partout sur le bord. D'où le résultat. ■

On a finalement :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \Delta V_k dx dt \quad (4.43)$$

Dans le cas où $V_k = Q_k \Gamma$ le deuxième terme de l'égalité (4.40) est majoré selon le lemme suivant:

Lemme 4.4.2 *On a la majoration :*

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt \right| \leq \\
 &\leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \left(\alpha \cdot C \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

où C est une constante qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle. α est une constante que l'on peut choisir arbitrairement dans \mathbb{R}_*^+ .

Démonstration

D'après (4.43) on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \Delta Q_k dx dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \left| \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \Delta Q_k dx \right| dt \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \Delta J(Q_k, \Psi_k) \Delta Q_k dx \right| &\stackrel{H\ddot{o}lder}{\leq} \|\Delta J(Q_k, \Psi_k)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta Q_k\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|J(Q_k, \Psi_k)\|_{H^2(\Omega)} \|Q_k\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \cdot \|DQ_k\|_{H^2(\Omega)} \|D\Psi_k\|_{H^2(\Omega)} \|Q_k\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \cdot \|\Psi\|_{H^3(\Omega)} \|Q\|_{H^3(\Omega)} \|Q\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps de cette majoration pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(Q_k, \Psi_k), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt \right| &\leq \\ &\leq C \cdot \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &\leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \left(\alpha \cdot C \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

où α est une constante positive arbitraire. ■

• **Troisième terme :**

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx &= \\ &= - \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \Delta V_k dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma}_{=0} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette égalité est nul grâce à l'égalité (4.42) du lemme (4.4.1). Dans le cas où $V_k = Q_k \Gamma$ ce troisième terme de l'égalité (4.40) est majoré selon le lemme suivant:

Lemme 4.4.3 *On a la majoration suivante:*

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt \right| \leq \leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \left(\alpha \cdot C \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \right) \quad (4.46)$$

où C est une constante qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle. α est une constante que l'on peut choisir arbitrairement dans \mathbb{R}_*^+ .

Démonstration

Grâce à l'égalité (4.45) on a:

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt \right| \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \left| \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \Delta Q_k dx \right| dt$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à l'intégrale en espace. On a:

$$\left| \int_{\Omega} [W^t J(Q, \Psi)]_k \Delta Q_k dx \right| \stackrel{Hölder}{\leq} \|W\| \|\nabla \Psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla Q\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta Q\|_{L^2(\Omega)}$$

Puisque l'injection de $H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ est continue on a:

$$\|\nabla \Psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|D\Psi\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Psi\|_{H^3(\Omega)}$$

On a aussi:

$$\|\nabla Q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Q\|_{H^3(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\Delta Q_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Q_k\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|Q\|_{H^3(\Omega)}$$

L'intégrale en espace est alors majorée par :

$$\left| \int_{\Omega} \langle [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} Q_k \rangle \right| \leq C \|\Psi\|_{H^2(\Omega)} \|Q\|_{H^2(\Omega)} \|Q\|_{H^3(\Omega)}$$

Ensuite on applique l'inégalité de Hölder à l'intégrale en temps de cette majoration pour obtenir:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} [W^t J(Q, \Psi)]_k, \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt \right| &\leq \\ &\leq C \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &\leq \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \left(\alpha C \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

où α et C sont comme dans l'énoncé du lemme. ■

• **Quatrième terme :**

$$\boxed{- \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} V_k \rangle dx &\stackrel{Green}{=} \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \Delta V_k dx \\ &- \int_{\partial\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité (4.42) du lemme (4.4.1) on a

$$\int_{\partial\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi)) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (4.47)$$

d'autre part en utilisant l'hypothèse β -plan c'est-à-dire que la force de Coriolis dépend de façon linéaire de la latitude: $f(x, y) = f_0 + \beta y$ on a:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi)) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma}_{=0} + \int_{\partial\Omega} J(Q_k, f) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma \\ &= \beta \int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma \end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt &= \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \Delta V_k dx dt - \beta \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dans le cas où $V_k = Q_k$ on peut majorer le quatrième terme de l'égalité (4.40) selon le lemme suivant:

Lemme 4.4.4 *On a la majoration suivante:*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt \right| &\leq \\ &\leq C(\Psi) \left(\alpha C(\Omega) \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C(\Omega)}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Où $C(\Psi)$ est une constante de la forme $C(\Psi) = \max \left\{ \beta, \|\Psi\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} \right\}$ et $C(\Omega)$ est une constante qui ne dépend que de Ω, T , des paramètres du modèle, et α est une constante arbitraire dans \mathbb{R}_*^+

Démonstration

D'après (4.48) On a:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f), \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \Delta Q_k dx dt \right| + \beta \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \end{aligned}$$

Or

$$\left| \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \Delta Q_k dx \right| \stackrel{H\ddot{o}lder}{\leq} \left\| \vec{\nabla} Q_k \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \Delta Q_k \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \vec{\nabla} (\theta_k(\Psi) + f) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Avec les mêmes techniques utilisées pour démontrer le lemme (4.4.3) On obtient facilement:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) \Delta Q_k dx dt \right| \leq \\ & \leq C(\Psi) \left(\alpha C(\Omega) \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C(\Omega)}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où $C(\Omega), C(\Psi)$ et α sont comme dans l'énoncé du lemme.

Nous terminons la démonstration du lemme (4.4.4) en majorant comme ci-dessus le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (4.48):

$$\beta \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \leq \beta \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \left| \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 \langle \vec{n}, \vec{\nu} \rangle d\sigma \right| dt$$

Or on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 \langle \vec{n}, \vec{\nu} \rangle d\sigma \right| & \leq \underbrace{\sup (|\langle \vec{n}, \vec{\nu} \rangle|)}_{=\pi/2} |\partial\Omega| \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 d\sigma \\ & \leq \frac{\pi}{2} |\partial\Omega| \left\| \frac{\partial Q_k}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \end{aligned}$$

On utilise ensuite la continuité de l'opérateur trace de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)\Gamma$ qui à tout $v \in H^2(\Omega)$ associe $\frac{\partial v}{\partial n}$. On a alors:

$$\beta \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \leq C(\beta, \Omega, T) \|Q_k\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2$$

et comme $\|Q_k\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \leq \|Q_k\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2$ on en déduit facilement que cette deuxième intégrale est majorée par une expression de la même forme que la majoration de la première intégrale. Le membre de droite de (4.50). En regroupant ces deux majorations on obtient le résultat du lemme (4.4.4). ■

• **Cinquième terme :**

$$\frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta Q_N, \vec{\nabla} V_N \rangle dx dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta Q_N, \vec{\nabla} V_N \rangle dx dt \stackrel{Green}{=} - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta Q_N \Delta V_N dx dt + \underbrace{\int_0^T \int_{\partial\Omega} \Delta Q_N \frac{\partial V_N}{\partial n} d\sigma dt}_{=0}.$$

Dans le cas où $V_k = Q_k$ on obtient :

$$-H_N C_B \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta Q_N, \vec{\nabla} Q_N \rangle dx dt = H_N C_B \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_N)^2 dx dt. \quad (4.51)$$

• **Sixième terme :**

$$A_4 \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta^2 Q_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt$$

Pour ce terme nous supposons dans un premier temps que les (Q_k) soient assez régulières pour que tous les termes que l'on écrit aient un sens. Nous allons appliquer deux fois successivement la formule de Green en espace cela nous donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta^2 Q_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt = \\ & \stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \Delta^2 Q_k \Delta V_k dx dt + \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Green} \quad & \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta Q_k, \vec{\nabla} \Delta V_k \rangle dx dt - \underbrace{\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial n} \Delta V_k d\sigma dt}_{=0} + \\ & + \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale sur le bord $\partial\Omega$ est à première vue un terme très gênant pour notre formulation faible théorique pour plusieurs raisons :

- Ce terme ne s'élimine pas comme d'habitude car les conditions aux limites en espace ne donnent aucune information sur la trace de $\Delta^2 Q$ sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine.
- La trace de $\Delta^2 Q$ est (en terme de régularité) du même ordre que $\partial^4 Q / \partial n^4$ dans le cas par exemple où la frontière du domaine Ω est régulière. Et cette dérivée normale à l'ordre quatre ne peut se majorer à l'aide de la norme dans $H^2(\Omega)$ de Q mais plutôt par la norme dans $H^5(\Omega)$ de Q . Or notre but est de majorer seulement la norme de Q dans $H^3(\Omega)$!

En fait dans le cas général où les (Q_k) ne sont pas assez régulières nous n'avons évidemment pas le droit d'introduire la trace de $\Delta^2 Q$ sur la frontière dans la considération de notre espace Hilbertien introduit prochainement dans la section (cadre fonctionnel) 4.5.3. Nous allons donc utiliser l'équation Q.G. linéarisée forte pour transformer ce terme. Sur la frontière $\partial\Omega$ $\Delta^2 Q$ s'écrit formellement grâce à l'équation comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta^2 Q_k &= \frac{1}{A_4} \left[\frac{\partial}{\partial t} \theta_k(Q) + J(Q_k, f) - f_k \right] \\ &= \frac{1}{A_4} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{f_0^2}{H_k g'_{k+\frac{1}{2}}} (Q_{k+1} - Q_k) - \frac{f_0^2}{H_k g'_{k-\frac{1}{2}}} (Q_k - Q_{k-1}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} - f_k \right]. \end{aligned}$$

Pour simplifier un peu les notations nous allons utiliser la matrice de couplage des couches (W_{kl}) Rappelons sa définition :

$$W = \begin{pmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -a_2 - b_2 & b_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} - b_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & -a_n - b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{où } a_k = \frac{f_0^2}{H_k g'_{k-\frac{1}{2}}} \text{ et } b_k = \frac{f_0^2}{H_k g'_{k+\frac{1}{2}}}.$$

On utilise aussi la notation suivante :

$$W_k(Q) = \left[W. \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \right]_k$$

Pour les fonctions (Q_k) qui ne sont pas assez régulières Γ par abus de notation Γ nous « définissons » la quantité :

$$\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \Delta^2 Q_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt \stackrel{def}{=} \frac{1}{A_4} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) + \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} - f_k \right) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt.$$

Par conséquent Γ avec cette définition Γ on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta^2 Q_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt &= \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta Q_k, \vec{\nabla} \Delta V_k \rangle dx dt + \\ &+ \frac{1}{A_4} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) + \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} - f_k \right) \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Et dans le cas où $V_k = Q_k$ on a :

$$\begin{aligned} A_4 \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta^2 Q_k, \vec{\nabla} Q_k \rangle dx dt &= A_4 \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} \Delta Q_k\|^2 dx dt + \\ &+ \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) + \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} - f_k \right) \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.53)$$

• Septième terme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} f_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt}$$

Une fois de plus Γ appliquons la formule de Green :

$$\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} f_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt \stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} f_k \Delta V_k dx dt + \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} f_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt.$$

Appliquons maintenant l'opérateur Δ_d^{-1} introduit comme dans (4.21) nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} f_k \Delta V_k dx dt &= \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \Delta_d^{-1} f_k \Delta V_k dx dt \\ &\stackrel{Green}{=} - \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta_d^{-1} f_k, \vec{\nabla} \Delta V_k \rangle dx dt + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta_d^{-1} f_k) \Delta V_k d\sigma dt}_{=0}. \end{aligned}$$

L'expression de départ se transforme donc en :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} f_k, \vec{\nabla} V_k \rangle dx dt &= \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta_d^{-1} f_k, \vec{\nabla} \Delta V_k \rangle dx dt + \\ &\quad + \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} f_k \frac{\partial V_k}{\partial n} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre 3^{ième} majoration a priori suivante :

Proposition 4.4.5 *On a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right\|^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} + \\ + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_N)^2 dx dt + \frac{A_4}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \Delta Q_k \right\|^2 dx dt \\ \leq C(\Omega, T, \Psi) \cdot \|F\|_{-1, \Omega} \cdot \|F\|_{-2, \Omega} \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $C(\Omega, T, \Psi)$ est une constante qui ne dépend que de Ω , T de $\|\Psi\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega))}$ et des paramètres du modèle. On remarque qu'en particulier le coefficient β dans l'hypothèse « β -plan » de la force de Coriolis joue un rôle très important dans cette estimation.

D'abord nous commençons par donner quelques lemmes techniques d'estimation dont on aura besoin pour démontrer cette proposition.

Lemme 4.4.6 *Il existe une constante C (qui, comme d'habitude, ne dépend que de Ω , T et des paramètres du modèle) telle que nous ayons l'estimation suivante :*

$$\sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) \right)^2 d\sigma dt \leq C \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt. \quad (4.56)$$

Démonstration

La démonstration de ce lemme va se faire en trois étapes :

1. Nous allons d'abord vérifier que :

$$\|W_k(\varphi)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \cdot \left\| \vec{\nabla} \varphi \right\|_{(L^2(\Omega))^N}^2 \quad \forall k = 1, \dots, N;$$

et $\forall \varphi \in V$.

(Rappelons la définition de V :

$$V = \left\{ \varphi = (\varphi_k) \in (H^3(\Omega))^N \text{ qui vérifie (i) et (ii) } \right\}$$

avec :

- (i) $\varphi_k \equiv C_k^{te}$ sur $\partial\Omega \forall k$ Les constantes C_k^{te} étant choisies de telle sorte que Γ si $\phi_k \stackrel{def}{=} [B^{-1} \cdot \varphi]_k$ la transformation en modes de φ Γ l'on ait : $\phi_1 \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_{\Omega} \phi_k dx = 0 \forall k \geq 2$;
- (ii) $\Delta(\varphi_k) \equiv 0$ sur $\partial\Omega \forall k$.).

2. La deuxième étape consiste à montrer que ceci est encore juste quand on introduit la dérivée en temps Γ mais valable pour des fonctions plus régulières.
3. La dernière étape consiste à passer par densité l'inégalité aux fonctions qui ne sont pas régulières.

Étape 1 :

Soit φ une fonction de V quelconque. On a :

$$\left| W_k(\varphi) \right|_{\partial\Omega} \leq \|W\|_2 \cdot \left\| (\varphi_l) \right\|_{\partial\Omega} \quad \forall k = 1, \dots, N;$$

avec :

- $\|W\|_2$ la norme 2 de la matrice W définie par : $\|W\|_2 = \sup_{X \neq 0} \frac{\|W \cdot X\|_2}{\|X\|_2} \Gamma$
- et $\left\| (\varphi_l) \right\|_{\partial\Omega}^2 = \sum_{l=1}^N \left(\varphi_l \right)_{\partial\Omega}^2$.

Or Γ en écrivant la transformation de modes en couches sur (φ_l) nous avons :

$$\varphi_l|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^N B_{l,k} \cdot \phi_k|_{\partial\Omega} \quad \forall l = 1, \dots, N;$$

où $(\phi_k) = [B^{-1}] \cdot (\varphi_l)$ la transformation en mode de (φ_l) .

Puisque $\phi_1|_{\partial\Omega} = 0$ on obtient donc :

$$\varphi_l|_{\partial\Omega} = \sum_{k=2}^N B_{l,k} \cdot \phi_k|_{\partial\Omega} \quad \forall l = 1, \dots, N. \quad (4.57)$$

D'un autre côté d'après le théorème de traces nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \|\phi_k\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq C \cdot \|\phi_k\|_{H^1(\Omega)} \\ \left(\int_{\partial\Omega} \phi_k^2 d\sigma \right)^{1/2} &\leq C \cdot \|\phi_k\|_{H^1(\Omega)} \\ |\partial\Omega|^{1/2} \cdot |\phi_k|_{\partial\Omega} &\leq C \cdot \left(\|\phi_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Donc Γ comme $\int_{\Omega} \phi_k dx = 0$ et d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger la norme $\|\phi_k\|_{L^2(\Omega)}$ est majorée par $\|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)}$ on obtient :

$$|\phi_k|_{\partial\Omega} \leq C \cdot \|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Remplaçons ceci dans (4.57) cela nous donne :

$$\begin{aligned} |\varphi_l|_{\partial\Omega} &\leq C \cdot \max_{k \geq 2} \{|B_{l,k}|\} \cdot \sum_{k=2}^N \|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \cdot \sum_{k=2}^N \|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Il suffit maintenant d'utiliser la transformation de couches en modes $\vec{\nabla}\phi_k = \sum_{k=1}^N B_{k,l}^{-1} \cdot \vec{\nabla}\varphi_l$:

$$\|\vec{\nabla}\phi_k\|_{L^2(\Omega)} = \left\| B^{-1} \right\|_2 \cdot \|\vec{\nabla}(\varphi_l)\|_{(L^2(\Omega))^N} \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Il suffit de combiner ceci avec (4.58) nous terminons ainsi notre 1^{ère} étape.

Étape 2 :

Prenons maintenant des fonctions-test (φ_k) qui cette fois ci dépendent aussi du temps t et qui sont régulières. Plus exactement on prend des φ_k dans $C^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et telles que pour tout t dans $]0, T[$ on ait $(\varphi_k)(t) \in V$. Comme (φ_k) sont régulières ses dérivées peuvent être exprimées comme une limite classique :

$$\frac{d}{dt} W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t+h) - W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t) \right) \quad \forall t \in]0, T[.$$

Intégrons ceci sur le bord du domaine et d'après le théorème de la convergence dominée Γ comme on peut intervertir le signe « intégrale » et « limite » on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t) \right)^2 d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t+h) - W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t)) \right]^2 d\sigma \\ &\stackrel{\text{C.V.}}{\underset{\text{dominée}}{=}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\partial\Omega} (W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t+h) - W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t))^2 d\sigma \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\partial\Omega} (W_k(\varphi(t+h) - \varphi(t))|_{\partial\Omega})^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Appliquons le résultat de l'étape 1 à la fonction $\varphi(t+h) - \varphi(t)$ (car cette fonction appartient à V) nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t) \right)^2 d\sigma &\leq C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) \right\|^2 dx \\ &\leq C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \varphi(t+h) - \vec{\nabla} \varphi(t) \right\|^2 dx. \end{aligned}$$

Repassons à la limite en utilisant encore une fois le théorème de la convergence dominée on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}(t) \right)^2 d\sigma &\leq C \int_{\Omega} \left\| \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \varphi(t) \right\|^2 dx \\ &\leq C \sum_{l=1}^N \frac{1}{H_l} \int_{\Omega} \left\| \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \varphi_l(t) \right\|^2 dx \quad \forall t \in]0, T[. \end{aligned}$$

D'où après avoir intégré en temps puis divisé par H_k puis fait la sommation sur $k \in \Gamma$ nous arrivons à l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(\varphi) \right)^2 d\sigma dt \leq C \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi_k \right\|^2 dx dt.$$

Nous venons de montrer le résultat du lemme mais valable uniquement pour des fonctions très régulières.

Étape 3 :

Comme $\mathcal{C}^\infty(]0, T[\times \Omega) \cap L^2(0, T; V)$ est dense dans $\mathcal{V} = L^2(0, T; V)$ et que l'opérateur

$$\varphi \longmapsto \frac{d}{dt} W_k(\varphi)|_{\partial\Omega}$$

est fermé de \mathcal{V} dans $L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$. Il en est aussi de même pour l'opérateur

$$\varphi \longmapsto \frac{d}{dt} \vec{\nabla} \varphi$$

de \mathcal{V} dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Quitte à prendre une suite $\{\varphi_n\}$ telle que l'on ait la convergence à la fois de φ_n vers Q dans \mathcal{V} et de $\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\varphi_n$ vers $\frac{d}{dt}\vec{\nabla}Q$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ l'on en déduit que la quantité :

$$\frac{d}{dt}W.(\varphi_n)|_{\partial\Omega}$$

est - d'après l'étape 2 - bornée dans $L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$ (par rapport à n) par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi_{nk} \right\|^2 dx dt = C \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt.$$

On peut donc extraire de $\{\varphi_n\}$ une sous-suite que l'on note encore par $\{\varphi_n\}$ telle que $\frac{d}{dt}W.(\varphi_n)|_{\partial\Omega}$ converge faiblement vers une limite notée u dans $L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$. De plus comme le graphe de l'application $\varphi \mapsto \frac{d}{dt}W.(\varphi)|_{\partial\Omega}$ est convexe (car elle est linéaire!) et que les deux notions « faiblement fermé » et « fortement fermé » coïcident sur des ensembles convexes (c.f. BREZIS [6] page 38) la limite u trouvée est unique (c.-à-d. ne dépend pas de la sous-suite extraite). La limite de la suite $\{\varphi_n\}$ étant la fonction Q et comme la convergence forte implique la convergence faible nous en déduisons qu'en fait :

$$Q \in \mathcal{D} \left(\frac{d(W.)}{dt} |_{\partial\Omega}; L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)) \right);$$

et que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) \right)^2 d\sigma dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(\varphi_n) \right)^2 d\sigma dt \\ &\leq C \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 4.4.7 *Nous avons la majoration :*

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 d\sigma dt \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt. \quad (4.59)$$

Démonstration

D'après le théorème de traces l'opérateur $Q \mapsto \frac{\partial Q}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ est continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

En utilisant maintenant la propriété de régularité de l'opérateur inverse du laplacien nous avons :

$$\|Q\|_{(H^2(\Omega))^N}^2 \leq C \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx.$$

D'où le résultat en intégrant en temps. ■

Démonstration de la proposition 4.4.5

D'abord dans la formulation faible (4.40) on remplace V_k par $(-Q_k)$. Ensuite en utilisant (4.41) (4.44) (4.46) (4.49) (4.51) (4.53) et (4.54) et après avoir pris garde de simplifier les deux termes $\frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} f_k \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt$ présentés à la fois dans (4.53) et dans (4.54) (avec deux signes opposés) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \|\vec{\nabla}(Q_{k+1} - Q_k)\|^2 dx \right]_{t=0}^{t=T} + \\ & + \frac{C_B}{H_N} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_N)^2 dx dt + A_4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \|\vec{\nabla} \Delta Q_k\|^2 dx dt \leq \\ & \leq C(Q_{ref}) \left(\alpha \cdot C(\Omega) \|Q\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}^2 + \frac{C(\Omega)}{\alpha} \|Q\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) + \\ & + \left| \sum_{k=1}^N H_k \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) + \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right|. \end{aligned} \tag{4.60}$$

En utilisant la propriété de régularité de l'opérateur inverse du laplacien appliqué à Q et comme ΔQ s'annule sur $\partial\Omega$ d'après l'inégalité de Poincaré nous avons :

$$\|Q\|_{H^3(\Omega)} \leq C \|\Delta Q\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\vec{\nabla} \Delta Q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à ceci nous pouvons choisir la constante α dans (4.60) assez petite de telle manière que la norme dans $L^2(0, T; H^3(\Omega))$ de Q dans le membre de droite de l'inégalité puisse passer de l'autre côté pour se simplifier avec $\frac{A_4}{2} \|\vec{\nabla} \Delta Q\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$.

Ensuite le terme correspondant à la norme dans $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ de Q à droite de (4.60) sera majoré - grâce à la régularité de l'inverse du laplacien - par la norme de ΔQ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ donc par $\|F\|_{-2,\Omega}^2$ d'après la proposition (prop de la 2eme estimation

a priori) 4.3.6.

Enfin Γ pour le dernier terme (avec la valeur absolue) dans le membre de droite de (4.60) Γ en utilisant les deux majorations établies dans les lemmes 4.4.6 et 4.4.7 Γ nous faisons la majoration comme ceci :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dt} W_k(Q) \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \leq \\ & \leq C \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{d}{dt} W_k(Q) \right)^2 d\sigma dt \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 d\sigma dt \right]^{1/2} \\ & \leq C \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} Q_k \right\|^2 dx dt \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ces deux termes sont majorés respectivement par les normes $\| \cdot \|_{-1,\Omega}$ et $\| \cdot \|_{-2,\Omega}$ du second membre $F = (f_k)$ de notre équation Q.G. adjointe au second ordre Γ grâce respectivement aux propositions 4.3.6 et 4.2.5. Nous obtenons donc la majoration :

$$\left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{d}{dt} W_k(Q) \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \leq C \cdot \|F\|_{-1,\Omega} \cdot \|F\|_{-2,\Omega}.$$

De même Γ nous majorons l'intégrale :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \beta \frac{\partial Q_k}{\partial x} \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| = \beta \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\nabla}_X Q_k, \vec{i} \rangle \frac{\partial Q_k}{\partial n} d\sigma dt \right| \\ & \leq \beta \cdot \sup_{x \in \partial\Omega} |\langle \vec{n}, \vec{i} \rangle| \cdot \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial n} \right)^2 d\sigma dt \right| \\ & \leq C \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx dt \\ & \leq C \cdot \|F\|_{-2,\Omega}. \end{aligned}$$

Donc Γ après avoir combiné toutes ces majorations Γ en remarquant que $\|F\|_{-2,\Omega} \leq C \cdot \|F\|_{-1,\Omega}$ Γ nous terminons ainsi la démonstration de la proposition. ■

4.5 Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. adjointe au second ordre.

Avant de passer à la démonstration de l'existence et l'unicité de l'équation Q.G. adjointe au second ordre Γ nous rappelons d'abord le résultat de l'existence et l'unicité de

l'équation Q.G. *non linéaire* dû à C. BERNIER [4] et celui de l'équation Q.G. *linéarisée* dû à B. LUONG [68].

4.5.1 Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. non linéaire.

Théorème 4.5.1 *Soient $F \in L^2(0, T; L^2(\Omega))^N$ et $\Psi^0 \in H^1(\Omega)^N$. Alors il existe une solution Ψ dans $C^0(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, T; H^3(\Omega))$ unique et continue dans cet espace par rapport à la condition initiale de l'équation :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k(\Psi) + J(\Psi_k, \theta_k(\Psi) + f) + \\ + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta \Psi_N - A_4 \cdot \Delta^2 \Psi_k = F_k \text{ sur } \Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (4.61)$$

avec les conditions aux limites :

$$\Psi_k(t = 0) = \Psi_k^0 \text{ sur } \Omega. ; \quad (4.62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_k(t) \equiv C_k^{te}(t) \text{ sur } \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N \text{ tel que :} \\ \text{si } \phi_k = [B^{-1} \cdot \Psi]_k \text{ alors} \\ \phi_1 \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \text{ et } \int_{\Omega} \phi_k(t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k \geq 2 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

et :

$$\Delta(\Psi_k) \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (4.64)$$

4.5.2 Existence et unicité de solutions de l'équation Q.G. linéarisée.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions de l'équation Q.G. linéarisée B. LUONG a introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$V \stackrel{def}{=} \left\{ \varphi \equiv (\varphi_k) \in (H^3(\Omega))^N \text{ qui vérifient (i) et (ii)} \right\}$$

avec :

(i) $\varphi_k \equiv C_k^{te}$ sur $\partial\Omega \quad \forall k$ Les constantes C_k^{te} choisies de telles sortes que si $\phi_k \stackrel{def}{=} [B^{-1} \cdot \varphi]_k$ la transformation en modes de φ l'on ait : $\phi_1 \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_{\Omega} \phi_k dx = 0 \quad \forall k \geq 2$

(ii) $\Delta \varphi_k \equiv 0$ sur $\partial\Omega \quad \forall k$.

V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle_V = \sum_{k=1}^N H_k \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta f_k, \vec{\nabla} \Delta g_k \rangle dx$$

et:

$$H \stackrel{def}{=} \text{adhérence de } V \text{ dans } (H^1(\Omega))^N$$

est aussi un espace de Hilbert.

En identifiant H à son dual H' et en posant:

$$\mathcal{V} = L^2(0, T; V), \quad \mathcal{V}' = L^2(0, T; V'), \quad \text{et } \mathcal{H} = L^2(0, T; H)$$

on a:

Théorème 4.5.2

Supposons que Ψ^{ref} soit dans $\mathcal{V} \cap L^\infty(0, T; H^3(\Omega))^N$. Alors, pour tout second membre $F \in \mathcal{V}'$, il existe une solution $\tilde{\Psi} \in \mathcal{V}$ unique de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k(\tilde{\Psi}) + J(\Psi_k^{ref}, \theta_k(\tilde{\Psi})) + J(\tilde{\Psi}_k, \theta_k(\Psi^{ref}) + f) + \\ + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta \tilde{\Psi}_N - A_4 \cdot \Delta^2 \tilde{\Psi}_k = F_k \text{ sur } \Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (4.65)$$

avec la condition initiale homogène :

$$\tilde{\Psi}_k(t=0) = 0 \text{ sur } \Omega. \quad (4.66)$$

Rappelons que l'on a les deux conditions aux limites en espace suivantes qui sont incluses dans la définition de \mathcal{V} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_k(t) \equiv C_k^{te}(t) \text{ sur } \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N \text{ tel que :} \\ \text{si } \phi_k = [B^{-1} \cdot \tilde{\Psi}]_k \text{ alors} \\ \phi_1 \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \text{ et } \int_{\Omega} \phi_k(t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k \geq 2; \end{array} \right. \quad (4.67)$$

et :

$$\Delta \tilde{\Psi}_k \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (4.68)$$

Remarque

L'équation Q.G. adjointe étant par définition l'adjoint de l'équation Q.G. linéarisée Γ on peut en déduire l'existence et l'unicité de la solution par la technique de transposition

(cf. J.L. LIONS et E. MAGENES [67]) Γ puisqu'on a déjà l'existence et l'unicité de la solution de l'équation linéarisée. Mais nous pouvons aussi obtenir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation Q.G. adjointe en passant par des estimations *a priori* dans un cadre fonctionnel défini Γ et en utilisant un schéma de type Galerkin. C'est ce que nous allons faire Γ non pour l'équation adjointe Γ mais pour l'équation adjointe au second ordre Γ car c'est cette dernière qui nous intéresse. Nous rappelons que l'équation adjointe au second ordre ne diffère de l'équation adjointe que du second membre et de la condition finale Γ et que par un changement de variable en temps Γ la condition finale se transforme en condition initiale Γ de sorte que les équations adjointe et adjointe au second ordre peuvent être résolues de façon prograde et non rétrograde.

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation Q.G. adjointe au second ordre avec la condition initiale nulle Γ mais avec un second membre non nul et pas forcément homogène sur toutes les couches. Ainsi Γ la condition initiale nulle sera directement prise en compte dans le cadre fonctionnel considéré.

Pour démontrer l'existence et l'unicité dans le cas des conditions initiales non nulles Γ il suffira d'appliquer le théorème de traces sur des fonctions définies sur un cylindre du domaine espace \times temps Γ et de translater la variable Q pour se ramener au cas des conditions initiales nulles.

Commençons par définir le cadre fonctionnel dans lequel nous chercherons la solution de l'équation adjointe au second ordre:

4.5.3 Cadre fonctionnel

Soit:

$$V \stackrel{def}{=} \left\{ \varphi = (\varphi_k) \in \left(H^3(\Omega) \right)^N \text{ qui vérifient (i) et (ii) } \right\}$$

avec:

(i) $\varphi_k \equiv C_k^{te}$ sur $\partial\Omega \forall k$ Γ les constantes C_k^{te} choisies de telles sortes que Γ si $\phi_k \stackrel{def}{=} [B^{-t} \cdot \varphi]_k$ la transformation en modes de φ Γ on ait : $\phi_1 \equiv 0$ sur $\partial\Omega$ et $\int_{\Omega} \phi_k dx = 0 \forall k \geq 2$ Γ

(ii) $\Delta \varphi_k \equiv 0$ sur $\partial\Omega \forall k$.

Il est facile de vérifier que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle_V = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta f_k, \vec{\nabla} \Delta g_k \rangle dx$$

On montre aussi Γ grâce à la régularité de l'opérateur inverse du laplacien Γ que la norme associée sur V est équivalente à la norme de $\left(H^3(\Omega) \right)^N$

En effet Γ soit $f \in V$. D'après la régularité de l'opérateur inverse du laplacien Γ on a d'une part:

$$\|f\|_{(H^3(\Omega))^N} \leq \|\Delta f\|_{(H^1(\Omega))^N}$$

d'autre part l'inégalité de Poincaré nous donne:

$$\|\Delta f\|_{(H^1(\Omega))^N} \leq \|\vec{\nabla} \Delta f\|_{(L^2(\Omega))^N}$$

Lemme 4.5.3 *Soit H l'espace de Hilbert défini comme l'adhérence de V dans $(H^1(\Omega))^N$. Alors H peut s'écrire aussi comme :*

$$H = \left\{ \varphi = (\varphi_k) \in (H^1(\Omega))^N \text{ qui vérifie la condition (i) dans la définition de } V \right\}.$$

Démonstration

1. Il est clair que :

$$\bar{V} \text{ dans } (H^1(\Omega))^N \subset \left\{ \varphi = (\varphi_k) \in (H^1(\Omega))^N \text{ vérifiant (i)} \right\}.$$

En effet pour tout k l'application :

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (Q_k) &\longmapsto \int_{\Omega} [B^{-t} \cdot Q]_k \, dx \end{aligned}$$

est continue de $(L^1(\Omega))^N$ donc de $(H^1(\Omega))^N$ (en supposant que le domaine Ω soit borné) dans \mathbb{R} . Donc l'application $Q = (Q_k) \longmapsto C_k^{te} \Gamma$ avec C_k^{te} la constante définie dans la condition (i) est bien continue de $(H^1(\Omega))^N$ dans \mathbb{R} .

2. Inversement soit Q une fonction donnée dans $(H^1(\Omega))^N$ vérifiant la condition (i). Nous allons chercher une suite $\{v_n\}$ dans V qui tend vers Q dans $(H^1(\Omega))^N$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et aussi que $L^2(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$ avec l'injection canonique continue on peut trouver une suite $\{\tilde{u}_n\}$ telle que :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n &\in (H^{-1}(\Omega))^N \text{ et} \\ \tilde{u}_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(H^{-1}(\Omega))^N} \Delta Q \in (H^{-1}(\Omega))^N. \end{aligned}$$

On définit ensuite $\{v_n\}$ les solutions dans V du problème :

$$\Delta v_n = \tilde{u}_n. \tag{4.69}$$

comme suit :

Définition de la solution dans V de (4.69).

La solution dans V de ce problème est trouvée par le procédé suivant :

On commence par résoudre le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{v}_n = \tilde{u}_n & \text{dans } \Omega, \\ \tilde{v}_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ensuite on passe en mode les solutions trouvées, c.-à-d. on prend $\tilde{w}_n = B^{-t} \cdot \tilde{v}_n$, puis on rajoute les fonctions indicatrices à \tilde{w}_n de telle sorte que son laplacien ne change pas et que les conditions aux limites imposées dans V soient vérifiées, c.-à-d. :

Par abus de langage, nous identifions les fonctions w_n à leurs modes (c.-à-d. $[B^t w_n]_k$)

$$\begin{cases} w_n \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w}_n - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_n dx \right) \mathbb{I}(\Omega) & \text{pour les modes baroclines et} \\ w_n \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w}_n & \text{pour le mode barotrope.} \end{cases}$$

Et utilisant ces fonctions w_n on repasse en couche $v_n = B^t \cdot w_n$.

Les fonctions v_n ainsi construites appartiennent bien à V . En effet :

Puisque $\tilde{u}_n \in \mathcal{D}(\Omega) \subset (H^1(\Omega))^N$ on en déduit que $\tilde{v}_n \in (H^3(\Omega))^N$ par régularité de l'inverse du laplacien.

De plus comme les \tilde{u}_n appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, les solutions de l'équation (4.69) sont des solutions classiques (c.-à-d. solutions fortes) C^∞ du laplacien. On peut donc bien passer à la limite la restriction sur $\partial\Omega$ les deux membres de cette équation et on trouve donc :

$$\Delta \tilde{v}_n|_{\partial\Omega} = \tilde{u}_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Donc :

$$\Delta v_n|_{\partial\Omega} = \Delta \tilde{v}_n|_{\partial\Omega} = 0.$$

Et enfin par construction, on a $w_n|_{\partial\Omega} = 0$ en barotrope et, en barocline l'intégrale sur le domaine vaut :

$$\int_{\Omega} w_n dx = \int_{\Omega} \tilde{w}_n dx - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{w}_n dx \int_{\Omega} dx = 0.$$

□

Vérifions maintenant que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Q$ dans $H^1(\Omega)$:

Posons $\tilde{Q} \stackrel{\text{def}}{=} Q - Q|_{\partial\Omega} \cdot \mathbb{I}(\Omega)$. Cette fonction appartient donc à $H_0^1(\Omega)$ et on a :

$$\Delta \tilde{Q} = \Delta Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \tilde{v}_n \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Par conséquent Γ comme le laplacien est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ on a la convergence :

$$\tilde{v}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{Q} \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

On en déduit que :

$$\left| \int_{\Omega} (\tilde{v}_n - \tilde{Q}) dx \right|^2 \leq |\Omega| \int_{\Omega} (\tilde{v}_n - \tilde{Q})^2 dx$$

$$\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} C(\Omega) \|\tilde{v}_n - \tilde{Q}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

C'est-à-dire que :

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{Q} dx.$$

On conclut facilement que :

$$w_n = \tilde{w}_n - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \tilde{w}_n dx \right) \mathbb{I}(\Omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1(\Omega)} \chi = \tilde{\chi} - \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} \tilde{\chi} dx \right)$$

sur des modes baroclines ;

et que :

$$w_n = \tilde{w}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1(\Omega)} \chi = \tilde{\chi}$$

sur le mode barotrope.

Repassons en couches Γ nous obtenons ainsi la convergence $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H^1(\Omega)} Q$ sur toutes les couches.

On vient donc de montrer que :

$$\left\{ \varphi = (\varphi_k) \in (H^1(\Omega))^N \text{ vérifiant (i)} \right\} \subset \bar{V} \text{ dans } (H^1(\Omega))^N$$

Ceci termine donc notre démonstration. ■

Remarque :

Au travers de la démonstration de ce lemme on voit que si l'on munit l'espace H défini dans l'énoncé du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} u_k, \vec{\nabla} v_k \rangle dx,$$

alors la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $(H^1(\Omega))^N$ grâce à l'inégalité de Poincaré et Poincaré-Wirtinger. H est donc un espace de Hilbert.

On identifie le dual de H à lui-même par le théorème de représentation de Riesz et on fait donc le schéma d'inclusion classique suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & H & \hookrightarrow & V' \\ & & \parallel & & \\ & & H' & & \end{array}$$

Chacun des espaces dans ce schéma est donc dense dans le suivant par construction de H .

Espace fonctionnel en temps.

Soit $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. Définissons les espaces de Hilbert suivants :

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(0, T; V); \quad \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(0, T; H).$$

\mathcal{V}' l'espace dual de \mathcal{V} est alors donné par :

$$\mathcal{V}' = L^2(0, T; V').$$

Comme précédemment le schéma d'inclusion est encore valable pour ces espaces avec le temps Γ c.-à-d. :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \hookrightarrow & \mathcal{H} & \hookrightarrow & \mathcal{V}' \\ & & \parallel & & \\ & & \mathcal{H}' & & \end{array}$$

Soit L l'opérateur de dérivation en temps présenté dans l'équation adjointe au second ordre: $L.Q \stackrel{\text{def}}{=} -\partial/\partial t \theta_k^t(Q)$. L est un opérateur linéaire non borné de domaine $D(L) \subset \mathcal{V}$ et à valeur dans \mathcal{V}' . L est fermé de domaine dans \mathcal{V} et tel que :

$$\begin{cases} \langle L.Q, Q \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 & \forall Q \in D(L), \\ \langle L^*.Q, Q \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 & \forall Q \in D(L^*). \end{cases}$$

En effet Γ d'une part Γ on a :

$$D(L) = \left\{ Q = (Q_k) \in \mathcal{V} \text{ tel que : } \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \in \mathcal{V}' \text{ et } Q|_{t=0} = 0 \right\};$$

et d'autre part Γ d'après l'égalité (4.41) on a :

$$\langle L.Q, Q \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right\|^2 dx \right]_{t=T} \geq 0.$$

De même Γ pour l'opérateur adjoint $L^* = \partial/\partial t \theta_k^t(\cdot)$ Γ nous avons d'une part :

$$D(L^*) = \left\{ Q = (Q_k) \in \mathcal{V} \text{ tel que : } \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) \in \mathcal{V}' \text{ et } Q|_{t=T} = 0 \right\};$$

et les même calculs nous donnent aussi d'autre part :

$$\langle L^*.Q, Q \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} (\Delta Q_k)^2 dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\| \vec{\nabla} \left(\frac{Q_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{Q_k}{H_k} \right) \right\|^2 dx \right]_{t=0} \geq 0.$$

Les propriétés importantes de l'opérateur L sont données dans le lemme suivant. Pour la démonstration on peut consulter le livre de J.L. LIONS [66] à la (page 313):

Lemme 4.5.4 *Soit L défini par $L = -\partial/\partial t \theta_k^i(\cdot)$. L vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) *L est un opérateur linéaire de $D(L)$ dans \mathcal{V} qui est maximal monotone à domaine dense ;*

(ii) *pour tout couple $(Q, F) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ tel que :*

$$\langle L.Q - F, \varphi - Q \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in D(L),$$

on a :

$$Q \in D(L) \text{ et } F = L.Q.$$

Remarque :

Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes et sont dues essentiellement à deux choses :

- (1) la stricte convexité de \mathcal{V} et de son dual \mathcal{V}' et
- (2) les propriétés de positivité remarquées plus haut de L et L^* .

Base Hilbertienne spéciale pour V .

Considérons l'espace suivant :

$$V_2 \stackrel{def}{=} \text{l'adhérence } \bar{V} \text{ de } V \text{ dans } H^2(\Omega)^N.$$

On montre aussi (la démonstration est strictement analogue à celle du lemme 4.5.3) que V_2 peut être défini d'une autre façon et directement par :

$$V_2 = \left\{ \varphi = (\varphi_k) \in (H^2(\Omega))^N \text{ qui vérifie la condition (i) dans la définition de } V \right\}.$$

Grâce aux propriétés de régularité de l'opérateur inverse du laplacien on voit aussi que si l'on munit V_2 du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{V_2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \Delta u_k \Delta v_k dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\langle \vec{\nabla} \left(\frac{u_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{u_k}{H_k} \right), \vec{\nabla} \left(\frac{v_{k+1}}{H_{k+1}} - \frac{v_k}{H_k} \right) \right\rangle dx,$$

alors V_2 est encore un Hilbert dont la norme associée est équivalente à la norme $H^2(\Omega)^N$.

Désignons par $D(\Delta_V)$ l'ensemble des fonctions Q dans V telles que la forme linéaire :

$$u \mapsto \langle Q, u \rangle_V$$

soit continue pour la topologie induite par la norme de V_2 . Il existe un opérateur non borné que l'on note par « $-\Delta_V$ » de domaine $D(\Delta_V)$ tels que :

$$\langle Q, u \rangle_V = \langle -\Delta_V(Q), u \rangle_{V_2}$$

(Le produit scalaire de V sera précisé ultérieurement).

Il est facile de vérifier que $-\Delta_V$ est un opérateur autoadjoint et positif en effet :

$$\langle -\Delta_V Q, Q \rangle_{V_2} = \|Q\|_V^2 \geq C \cdot \|Q\|_{V_2}^2.$$

En particulier $-\Delta_V$ est une application injective. On note par T son inverse définie sur l'ensemble d'image $-\Delta_V(V)$. T est continue dans V par rapport à la topologie de V_2 en effet :

$$\begin{aligned} \langle T(Q), u \rangle_V &= \langle -\Delta_V \circ T(Q), u \rangle_{V_2} \\ &= \langle Q, u \rangle_{V_2} \\ &\leq \|Q\|_{V_2} \cdot \|u\|_{V_2} \\ &\leq C \cdot \|Q\|_{V_2} \cdot \|u\|_V \quad \forall Q \in -\Delta_V(V), \forall u \in V. \end{aligned}$$

Donc $\|T(Q)\|_V \leq C \cdot \|Q\|_{V_2}$. Étant donné que $-\Delta_V(V)$ est dense dans V_2 on prolonge donc T sur V_2 . Par compacité de l'injection canonique de V dans V_2 on en déduit que T est compact de V_2 dans lui-même. D'après la théorie sur la décomposition spectrale des opérateurs compacts il existe une base Hilbertienne de V_2 formée par des vecteurs propres de T (qui sont orthogonaux sur V_2 deux à deux) :

$$T(w_n) = \mu_n w_n \quad w_n \in V_2.$$

En fait les w_n appartiennent donc à V (car $T(V_2) \subset V$). Donc $\{w_n\}$ est aussi une base Hilbertienne de V avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \quad \langle w_n, u \rangle_V = \lambda_n \langle w_n, u \rangle_{V_2} \quad \forall u \in V \\ \text{et} \\ \sum_{k=1}^N \frac{1}{H_k} \int_{\Omega} \Delta w_{nk} \Delta w_{mk} dx + \sum_{k=1}^{N-1} p_{k+\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\langle \vec{\nabla} \left(\frac{w_{nk+1}}{H_{k+1}} - \frac{w_{nk}}{H_k} \right), \vec{\nabla} \left(\frac{w_{mk+1}}{H_{k+1}} - \frac{w_{mk}}{H_k} \right) \right\rangle dx = 0 \\ \forall m \neq n. \end{array} \right.$$

4.5.4 Énoncé et démonstration du théorème.

Théorème 4.5.5

Supposons que Ψ soit dans $\mathcal{V} \cap L^\infty(0, T; H^3(\Omega))^N$. Alors, pour tout second membre $F \in \mathcal{V}'$, il existe une solution $Q \in \mathcal{V}$ unique de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_k^t(Q) + \Delta J(Q_k, \Psi_k) + [W^t J(Q, \Psi)]_k - J(Q_k, \theta_k(\Psi) + f) + \\ + \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta Q_N - A_4 \cdot \Delta^2 Q_k = F_k \text{ sur } \Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (4.70)$$

avec la condition initiale homogène :

$$Q_k(t = 0) = 0 \text{ sur } \Omega. \quad (4.71)$$

Rappelons que l'on a les deux conditions aux limites en espace suivantes qui sont incluses dans la définition de \mathcal{V} :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_k(t) \equiv C_k^{te}(t) \text{ sur } \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N \text{ tel que :} \\ \text{si } \chi_k = [B^{-t}.Q]_k \text{ alors} \\ \chi_1 \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \text{ et } \int_{\Omega} \chi_k(t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall k \geq 2; \end{array} \right. \quad (4.72)$$

et :

$$\Delta Q_k \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T] \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (4.73)$$

Démonstration de l'unicité

Comme l'équation est linéaire il suffit de vérifier que la seule solution pour un second membre $F = 0$ est la solution triviale $Q = 0$. Or ceci est donné par la majoration que nous avons obtenu dans la proposition 4.4.5.

Nous allons maintenant montrer l'existence de la solutions par la méthode de Faedo-Galerkin. Mais d'abord donnons quelques notations utiles. Posons :

$$\mathcal{A}(Q) \stackrel{def}{=} -\Delta J(Q_k, \Psi_k) - [W^t J(Q, \Psi)]_k + J(Q_k, \theta_k(\Psi^{ref}) + f) - \delta_{k,N} C_B \cdot \Delta Q_N + A_4 \cdot \Delta^2 Q_k.$$

La preuve de l'existence revient donc à montrer qu'il existe un élément de $\Psi \in D(L)$ tel que :

$$L(\Psi) + \mathcal{A}(\Psi) = -F. \quad (4.74)$$

L'existence par Faedo-Galerkin.

a. Approximation Faedo-Galerkin.

On désigne G_m l'espace de Galerkin engendré par m fonctions (w_1, w_2, \dots, w_m) . Soit à résoudre l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_m \in G_m \text{ telle que :} \\ \langle L(Q_m) + \mathcal{A}(Q_m), w_i \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = -\langle F, w_i \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (4.75)$$

b. Estimations a priori de (4.75).

Cette équation se réécrit comme un système d'équations différentielles en temps suivant :

$$\begin{cases} Q_m(t=0) = 0 \\ \left\langle \frac{d\theta^t(Q_m)}{dt}, w_i \right\rangle_{V_2} + \langle \mathcal{A}(Q_m), w_i \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = -\langle F, w_i \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

D'après le théorème de Carathéodory ce problème admet une solution. Les estimations que l'on a fait dans la proposition 4.4.5 sont encore valables. Donc en particulier les solutions sont bien définies sur $[0, T]$ et elles sont bornées dans $(L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)))^N$ par rapport à m .

Montrons maintenant que les $L.Q_m$ sont bornés dans $L^2(0, T; V')$. Pour cela introduisons P_m l'opérateur de projection dans H sur l'espace G_m .

En effet Γ comme d'une part :

$$L(Q_m) = -P_m \mathcal{A}(Q_m) - P_m F$$

(on remarque que $P_m L(Q_m) = L(Q_m)$ grâce au choix de la base) Γ et comme d'autre part l'opérateur \mathcal{A} est continue de \mathcal{V} dans \mathcal{V}' il suffit donc de montrer que les P_m sont uniformément bornés dans \mathcal{V}' . En fait on va prouver Γ par transposition Γ qu'ils sont uniformément bornés dans \mathcal{V} . Soit $v \in V$ on définit $\bar{\theta}^t(v) \in H$ - quitte à un réajustement en ajoutant des fonctions indicatrices - de telle sorte que :

$$\vec{\nabla} \bar{\theta}^t(v) = \vec{\nabla} \theta^t(v) \quad \text{p.p.}$$

La définition du produit scalaire sur V_2 s'écrit aussi comme :

$$\langle u, v \rangle_{V_2} = \langle \bar{\theta}^t(u), v \rangle_H = \langle u, \bar{\theta}^t(v) \rangle_H.$$

On vérifie sans peine d'autre part que le produit scalaire défini comme suit

$$\langle \langle u, v \rangle \rangle_V \stackrel{def}{=} \langle \bar{\theta}^t(u), \bar{\theta}^t(v) \rangle_H$$

à la norme associée qui est équivalente à celle définie initialement sur V . Travaillons plutôt avec ce produit scalaire. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\theta}^t(w_i), \bar{\theta}^t(v) \rangle_H &= \langle \langle w_i, v \rangle \rangle_V \\ &= \lambda_i \langle w_i, v \rangle_{V_2} \\ &= \lambda_i \langle w_i, \bar{\theta}^t(v) \rangle_H. \end{aligned}$$

Par densité on en déduit que $\bar{\theta}^t(w_i) = \lambda_i w_i \quad \forall i$. Et en plus :

$$\begin{aligned} \langle \langle w_i, v \rangle \rangle_V &= \langle \bar{\theta}^{t^2}(w_i), v \rangle_H \\ &= \lambda_i^2 \langle w_i, v \rangle_H. \end{aligned}$$

Soit $u \in V$. On décompose $u = P_m(u) + (u - P_m(u))$; (avec $P_m(u) \in G_m$ et $(u - P_m(u)) \in G_m^\perp$). Calculons la norme de u dans V :

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &= \|P_m u\|_V^2 + \|u - P_m u\|_V^2 + 2\langle\langle P_m(u), u - P_m(u) \rangle\rangle_V \\ &= \|P_m u\|_V^2 + \|u - P_m u\|_V^2 + 2 \sum_{i=1}^m u_i \langle\langle w_i, u - P_m(u) \rangle\rangle_V \\ &= \|P_m u\|_V^2 + \|u - P_m u\|_V^2 + 2 \sum_{i=1}^m u_i \lambda_i^2 \underbrace{\langle\langle w_i, u - P_m(u) \rangle\rangle_H}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|P_m u\|_V^2 \leq \|u\|_V^2 \quad \forall m.$$

Soit $u \in H$. Calculons maintenant la norme de $P_m u$ dans V' :

$$\begin{aligned} \|P_m u\|_{V'} &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle P_m u, v \rangle_{V', V}}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle P_m u, v \rangle_H}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle u, P_m v \rangle_H}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \neq 0} \frac{\langle u, P_m v \rangle_{V', V}}{\|v\|_V} \\ &\leq \|u\|_{V'} \sup_{v \neq 0} \frac{\|P_m v\|_V}{\|v\|_V} \\ \|P_m u\|_{V'} &\leq \|u\|_{V'}. \end{aligned}$$

Donc les $L(Q_m)$ demeurent bornés dans $L^2(0, T; V')$.

c. Passage à la limite

On peut donc d'après l'étape (b) et grâce à la compacité de $D(L)$ dans $L^2(0, T; H^2(\Omega))^N \Gamma$ extraire de Q_m une sous-suite Q_ν telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q_\nu \rightharpoonup Q & \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible} \Gamma \\ Q_\nu \xrightarrow{*} Q & \text{dans } L^\infty(0, T; H^2(\Omega))^N \text{ faible étoile} \Gamma \\ Q_\nu \rightarrow Q & \text{dans } L^2(0, T; H^2(\Omega))^N \text{ fort et p.p. dans } \Omega \times]0, T[, \\ L.Q_\nu \rightharpoonup L.Q & \text{dans } L^2(0, T; V') \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Donc nous vérifions sans peine qu'à la limite de l'équation (4.75) on obtient :

$$\langle L(Q) + \mathcal{A}(Q), \varphi w_i \rangle_{V', V} = -\langle F, \varphi w_i \rangle_{V', V} \quad \forall i, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

Par densité ΓQ vérifie l'équation :

$$L(Q) + \mathcal{A}(Q) = -F.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

4.6 Qualité de l'approximation du Hessien.

Nous terminons l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de l'équation Q.G. adjointe au second ordre en quantifiant la qualité de cette approximation. De façon plus précise nous cherchons la différentiabilité de l'application :

$$\begin{cases} V & \mapsto V' \\ \Psi^0 & \mapsto \vec{\nabla} J(\Psi^0) = P(t=0) \end{cases} \quad (4.76)$$

où P est la solution de l'équation Q.G. adjointe obtenue par transposition de l'équation Q.G. linéarisée autour de la solution de référence Ψ engendrée par Ψ^0 .

Nous ferons dans la suite un abus de notation entre les espace de solution des équations directe linéarisée et adjointe car les produits scalaires définissant ces espaces sont les mêmes à des constantes multiplicatives près.

Nous étudions de façon plus générale la différentiabilité de l'application :

$$\begin{cases} V & \mapsto \mathcal{V} \\ \Psi^0 & \mapsto P(t \in [0, T]) \end{cases} \quad (4.77)$$

et nous en déduisons la différentiabilité de (4.76) en prenant la trace de P en 0.

En étudiant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation Q.G. linéarisée ΓB . LUONG a en outre montré que :

Théorème 4.6.1 *L'application :*

$$\begin{cases} V & \mapsto \mathcal{V} \\ \Psi^0 & \mapsto \Psi(t \in [0, T]) \end{cases} \quad (4.78)$$

par résolution de l'équation Q.G. non linéaire est Fréchet-différentiable. Si en plus on munit \mathcal{V} de la topologie induite par $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))^N$, elle est encore Fréchet-différentiable. Sa différentielle s'obtient en résolvant l'équation Q.G. linéarisée (avec la condition initiale non nulle).

Et comme conséquence naturelle de ce résultat on a :

Corollaire 4.6.2 *Si l'opérateur C (introduit dans la définition de la fonction coût) est continu par rapport à la topologie de \mathcal{V} , ou bien par rapport à la topologie induite par $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))^N$, alors la fonction coût J est différentiable en tout point, i.e le vecteur gradient de cette fonction est bien défini en tout point.*

La formulation de l'assimilation variationnelle montre que cette différentielle est donnée par l'application (4.76) dont nous allons maintenant étudier la différentiabilité pour justifier l'utilisation du Hessien.

Remarquons aussi qu'en dérivant (formellement) une deuxième fois l'équation Q.G. non linéaire (et donc en dérivant une fois l'équation linéarisée) par la même technique utilisée pour montrer la différentiabilité de l'application (4.78) on montre que cette application est deux fois Fréchet-différentiable et que sa différentielle s'obtient par résolution du linéarisé de l'équation Q.G. linéarisée. En conséquence si l'opérateur C est continu (il est linéaire par considération) alors la fonction-coût est deux fois Fréchet-différentiable.

Par souci de simplicité et sans nuire à la généralité nous allons nous restreindre au cas du modèle barotrope (une couche) les calculs étant les mêmes dans le cas du modèle multicouches.

Considérons alors deux états initiaux voisins Ψ_1^0 et Ψ_2^0 du modèle Q.G. barotrope tels que:

- (i) $\|\Psi_1^0 - \Psi_2^0\|_V \sim h \quad h \geq 0 \quad \text{assez petit}$
- (ii) Ψ_1^0 et Ψ_2^0 génèrent des solutions Ψ_1 et Ψ_2 de la même équation Q.G.
- (iii) Ψ_1 et Ψ_2 à leur tour donnent lieu à deux solutions P_1 et P_2 du modèle Q.G. adjoint. P_1 et P_2 vérifient les équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i(T) = \frac{\partial J}{\partial \Psi(T)}(\Psi_i) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \theta^t(P_i) - \Delta J(\Psi_i, P_i) - J(\Psi_i, P_i) - J(P_i, \theta^t(\Psi_i) + f) + \\ + C_B \Delta P_i - A_4 \Delta^2 P_i = \frac{\partial J}{\partial \Psi}(\Psi_i) \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (4.79)$$

et les conditions aux limites adéquates.

Posons $Q = P_1 - P_2$ et $\tilde{\Psi} = \Psi_1 - \Psi_2$. Alors Q vérifie l'équation:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(T) = \frac{\partial J}{\partial \Psi(T)}(\Psi_1) - \frac{\partial J}{\partial \Psi(T)}(\Psi_2) \\ -\frac{\partial}{\partial t} \theta^t(Q) - \Delta [J(\Psi_1, P_1) - J(\Psi_2, P_2)] - [J(\Psi_1, P_1) - J(\Psi_2, P_2)] - \\ - [J(\Psi_1, \theta(\Psi_1) + f) - J(\Psi_2, \theta(\Psi_2) + f)] + C_B \Delta Q - A_4 \Delta^2 Q = \\ = \frac{\partial J}{\partial \Psi}(\Psi_1) - \frac{\partial J}{\partial \Psi}(\Psi_2) \end{array} \right. \quad (4.80)$$

D'une part l'approximation de Taylor au premier ordre nous donne:

$$\frac{\partial J}{\partial \Psi}(\Psi_1) - \frac{\partial J}{\partial \Psi}(\Psi_2) = \frac{\partial^2 J(\Psi_1)}{\partial \Psi^2}(\Psi_1 - \Psi_2) + o(\|\Psi_1 - \Psi_2\|_V^2)$$

d'autre part On a :

$$\begin{aligned} J(\Psi_1, P_1) - J(\Psi_2, P_2) &= J(\Psi_1, Q) + J(\tilde{\Psi}, P_1) + J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) \\ J(\Psi_1, \theta(\Psi_1) + f) - J(P_2, \theta(\Psi_2) + f) &= J(P_1, \theta(\tilde{\Psi})) + J(Q, \theta(\Psi_1) + f) \\ &+ J(P_1 - P_2, \theta(\Psi_2 - \Psi_1)) \end{aligned}$$

On obtient alors pour Q l'équation:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial t} \theta^t(Q) - \Delta J(\Psi_1, Q) - \Delta J(\tilde{\Psi}, P_1) - J(\Psi_1, Q) - J(\tilde{\Psi}, P_1) - J(Q, \theta(\Psi_1) + f) - \\ -J(P_1, \theta(\tilde{\Psi})) + C_B \Delta Q - A_4 \Delta^2 Q = \frac{\partial^2 J(\Psi_1)}{\partial \Psi^2}(\tilde{\Psi}) + \Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) + \\ + J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) + J(P_1 - P_2, \theta(\Psi_2 - \Psi_1)) \end{array} \right.$$

On retrouve typiquement l'équation adjointe au second ordre mais avec un second membre augmenté de

$$G(\Psi_1, \Psi_2, P_1, P_2) = \Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) + J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) + J(P_1 - P_2, \theta(\Psi_2 - \Psi_1))$$

La différentiabilité de l'application (4.76) s'obtient alors en montrant que $G(\Psi_1, \Psi_2, P_1, P_2)$ est un terme d'ordre deux en h .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1), \vec{\nabla} U \rangle dx \right| &\stackrel{Green}{=} \left| \int_{\Omega} \Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1) \Delta U dx \right| \\ &\stackrel{Hölder}{\leq} C \|\Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta U\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1)\|_{H^2(\Omega)} \|U\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\vec{\nabla}(\Psi_1 - \Psi_2)\|_{H^2(\Omega)} \|\vec{\nabla}(P_1 - P_2)\|_{H^2(\Omega)} \|U\|_V \\ &\leq C \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{H^2(\Omega)} \|P_1 - P_2\|_V \|U\|_V \end{aligned}$$

et en intégrant en temps On :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} \langle \vec{\nabla} \Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1), \vec{\nabla} U \rangle dx dt \right| &\leq \\ &\leq C \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \|P_1 - P_2\|_{L^2(0,T;V)} \|U\|_{L^2(0,T;V)} \end{aligned}$$

Or le théorème (4.5.1) sur l'existence et l'unicité de solutions de l'équation Q.G. non linéaire montre que:

$$\|\Psi_1 - \Psi_2\|_{L^2(0,T;V)} \sim h \quad \text{et} \quad \|\Psi_1 - \Psi_2\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \sim h$$

on en déduit par transposition que pour l'équation adjointe Γ

$$\|P_1 - P_2\|_{L^2(0,T;V)} \sim h$$

Ainsi donc

$$\|\Delta J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1)\|_{\mathcal{V}'} \sim h^2$$

Une démarche analogue montre que:

$$\|J(\Psi_1 - \Psi_2, P_2 - P_1)\|_{\mathcal{V}'} \sim h^2 \quad \text{et} \quad \|J(P_1 - P_2, \theta(\Psi_1 - \Psi_2))\|_{\mathcal{V}'} \sim h^2$$

et donc $G(\Psi_1, \Psi_2, P_1, P_2)$ est un terme d'ordre deux en h . Nous pouvons alors énoncer la:

Proposition 4.6.3 *L'application:*

$$\begin{cases} V & \longmapsto \mathcal{V} \\ \Psi^0 & \longmapsto P(t \in [0, T]) \end{cases} \quad (4.81)$$

où P est la solution du modèle Q.G. adjoint est différentiable. Sa différentielle s'obtient par résolution de l'équation Q.G. adjointe au second ordre.

Puisque le gradient de la fonction coût s'obtient en prenant la trace de P en $t = 0$ on en déduit que:

Proposition 4.6.4 *L'application:*

$$\begin{cases} V & \longmapsto H \\ \Psi^0 & \longmapsto P(t = 0) \end{cases} \quad (4.82)$$

où P est la solution du modèle Q.G. adjoint est Fréchet-différentiable. Sa différentielle s'obtient en prenant la trace en $t = 0$ de la solution de l'équation Q.G. adjointe au second ordre.

Et donc la trace en $t = 0$ de la dérivée directionnelle du l'équation Q.G. adjointe au second ordre nous donne bien le produit Hessien \times vecteur Γ le Hessien étant le véritable Hessien.

Chapitre V :

Sensibilité par rapport à la configuration spatio-temporelle des observations

5.1 Introduction et position du problème

Le premier pas de la connaissance du monde qui nous entoure et de tous ses phénomènes et ses mécanismes, c'est **l'observation** de ce qui se passe. Ensuite vient la modélisation si possible, puis la mise en œuvre et les simulations.

Il est évident que l'on ne peut faire un bon compte-rendu (une bonne modélisation) d'un phénomène qui a été mal observé. Et quand bien même on aurait bien observé, on peut mal modéliser, d'où l'importance de comparer par la suite les résultats du modèle aux observations: l'assimilation de données. Et ce n'est qu'une fois qu'on a obtenu, s'il existe, le modèle le plus "proche" possible des observations, que l'on peut faire des prévisions, en espérant ne pas s'éloigner beaucoup de la réalité. Les observations seules ne suffisent pas pour faire de la prévision, car on ne peut observer le futur.

Les observations jouent donc un rôle de premier plan tant pour la modélisation que pour l'assimilation de données, et il est alors important de **bien observer**. Nous entendons par *bien observer*, prendre des mesures ou bien faire des observations à partir desquelles on peut reconstituer au mieux l'état du phénomène observé. Et pour bien observer, il faut un bon **système d'observation**.

L'étude menée dans ce chapitre a avant tout un caractère prospectif: c'est une étude de faisabilité.

La question qui nous a été posée par les mécaniciens des fluides, plus précisément les océanographes et à laquelle nous essayons d'apporter des éléments de réponses sur le plan mathématique est la suivante:

Peut-on optimiser un système d'observation satellitaire sur l'océan?

La façon d'observer est tout aussi importante que l'observation elle-même. Nous pouvons le constater avec l'exemple d'un peintre dessinant un objet ou un paysage qu'il

observe. Il ne peut retracer que ce qu'il voit. Il fait ainsi intervenir des paramètres dont la qualité finale du dessin dépendra: la façon de voir, l'angle sous lequel il regarde, son acuité visuelle. Ce constat reste valable dans toute procédure d'observation en vue de la modélisation: l'observation dépend incontestablement de ce que nous appelons ici les **paramètres d'observation**. Ce sont tous les paramètres qui définissent la position de l'observateur ou de l'appareil qui prend des mesures, mais aussi la précision de ce dernier. Nous pouvons dans ce chapitre, sans nuire à la généralité, supposer que "l'observateur a une acuité visuelle parfaite". Si ce n'est pas le cas, on peut mener une étude comme au chapitre III pour calculer la sensibilité d'un critère donné par rapport à un bruit sur les observations.

Dans le cas d'une acuité visuelle parfaite, l'observation, ainsi que sa configuration spatio-temporelle, ne dépendent plus que de la position de l'observateur, i.e. de tous les paramètres qui déterminent la position de l'observateur. En altimétrie satellitaire, ces paramètres sont principalement: la période de révolution du satellite, son altitude et son angle d'inclinaison.

L'approche ci-dessus suscite naturellement les questions suivantes: *existe-t-il une position de l'observateur pour laquelle l'observation est optimale? Quels sont les critères d'optimalité pour la position de l'observateur et les observations?*

Des réponses simples peuvent être données à ces questions lorsque l'état de l'objet ou du phénomène observé est stationnaire (reste fixe au cours du temps). Dans ce cas, la position optimale de l'observateur est celle qui lui permet de "voir" tous les aspects (du moins le maximum) de ce qu'il observe, et pas forcément au même instant. Et l'optimalité des observations est regardée à travers la précision avec laquelle on peut reconstruire, par assimilation de données, l'état observé.

Il est plus difficile par contre de répondre à ces questions lorsqu'il s'agit des phénomènes évolutifs (qui varient au cours du temps). Une idée de l'optimalité nous est néanmoins donnée par le cas stationnaire: la position optimale de l'observateur est encore celle qui lui permettrait de "voir" tous les aspects (du moins le maximum) du phénomène observé au cours du temps, et nous gardons la même définition de l'optimalité des observations énoncée pour le cas stationnaire, quoique ces critères soient plus difficiles à établir dans ce cas d'évolution.

Mais dans la modélisation, ce qui est le plus souvent utilisé n'est pas la position de l'observateur, ce sont plutôt la configuration de l'observation et l'observation elle-même. Il reste vrai que la configuration et l'observation sont déterminées par la position de l'observateur. En assimilation variationnelle de données, la position de l'observateur est introduite de façon implicite par l'opérateur de configuration des observations. C'est l'opérateur qui décrit la distribution spatiale et spatio-temporelle des observations pour les problèmes stationnaires et d'évolution respectivement. Cet opérateur est le plus souvent considéré comme l'opérateur de projection sur l'espace des observations et il est communément noté C , qui apparaît explicitement dans l'expression de la fonction-coût. Avant d'analyser l'importance de cet opérateur, rappelons d'abord l'historique de la prise des mesures sur l'océan.

5.2 Historique de l'observation de l'océan: de l'antiquité à l'ère spatiale

5.2.1 Les premiers océanographes

Ce sont les besoins de la navigation qui ont suscité les premières tentatives pour mesurer la vitesse et le parcours des courants marins. Les anciens marins de commerce ont établi des compilations partielles du régime des marées et des courants au large de la mer Rouge et de la méditerranée, qui sont parvenues jusqu'à nous. Ces voyageurs ont ainsi inventé l'océanographie physique.

Les Vikings ont traversé l'Atlantique nord, atteignant Vinland (Labrador) vers l'an mille. Les légendes nordiques gardent la trace d'un Nouveau Monde au-delà des mers. Mais ce sont d'autres européens qui, au début de la Renaissance, ont commencé à parcourir les océans pour chercher de nouveaux et riches territoires. Vers l'an 1600, les expéditions portugaises, espagnoles, françaises et anglaises avaient tracé la carte de la plupart des continents et des océans d'un globe qui était presque inconnu un siècle auparavant. Ces aventuriers intrépides, en reliant l'Ancien et le Nouveau Monde, ont entrepris l'exploration systématique des mers et révélé les dimensions de la planète océane.

5.2.2 Les débuts de la recherche

Responsable adjoint de la Poste pour la colonie américaine, Benjamin Franklin cherchait à réduire la durée du voyage Londres-New York en établissant une carte des courants dans l'Atlantique. En 1775, au cours d'un voyage de Londres à Philadelphie, Franklin traça les limites du Gulf Stream en mesurant la température de l'eau; il publia ultérieurement une carte devenue un classique de l'océanographie. Premier service chargé des cartes marines, le service Hydrographique avait été mis en place cinq ans auparavant, en France.

Peu après, le capitaine anglais James Cook terminait son fameux voyage d'exploration dans le Pacifique (1776-1779). Les expéditions se multiplièrent, et en 1849, Maury, un officier de marine américain, publiait les premières cartes mondiales de vents et de courants à partir des données recueillies par les bateaux.

L'année 1872 vit la première expédition purement consacrée à l'océanographie scientifique: le voyage de 42 mois du Challenger, pour le compte de la British Royal Society. Parcourant 70000 milles, Challenger arpenta systématiquement l'océan, et collecta de la surface au fond des données de bathymétrie, température et courants. Ces découvertes furent analysées au cours des vingt années suivantes et constituèrent les bases de l'océanographie moderne.

5.2.3 La maturité

Le vingtième siècle est marqué par des avancées majeures en océanographie, le déploiement des instruments à la mer, des coopérations internationales et une foule de découvertes.

Vers 1900-1930, les travaux de Challenger furent poursuivis par des expéditions nationales similaires. On leur doit l'invention de la première bouteille fiable pour prélever des échantillons en profondeur, la théorie du forçage des courants par le vent et les premières mesures physiques et chimiques à travers l'Atlantique.

La période 1930-1960 témoigne de rapides progrès techniques, vérification des théories sur le fonctionnement de l'océan, première collaboration telle l'Année Géophysique Internationale en 1957, nouveaux instruments pour mesurer la température et suivre les courants profonds, modèles de circulation à grande échelle et découverte de l'importance des tourbillons dans la dissipation de l'énergie.

Nous assistons depuis 1960 à des avancées fantastiques dans les techniques de mesure et de calcul, à des études détaillées au niveau régional, et à la reconnaissance de l'impact de l'océan sur le climat. C'est la période de l'Expédition dans l'Océan Indien, des courantomètres en profondeur, des modèles globaux de circulation atmosphérique et océanique. Plus près de nous, c'est la décennie internationale dédiée à l'étude des océans, l'océanographie par satellite et les expériences TOGA (Tropical Ocean and Global Atmosphere) et WOCE (World Ocean Circulation Experiment). Les scientifiques étudient désormais la Terre comme un système unique combinant différents éléments: terres, océans, atmosphère et biosphère.

5.2.4 L'ère spatiale

Son début, en 1957, a suscité et accompagné une évolution majeure dans les études de la Terre. En 1960, un satellite météorologique américain fournissait les premières images de la couverture nuageuse. Dans les années 70, des satellites ont commencé à transmettre régulièrement des données sur la physique, la chimie et la dynamique de l'atmosphère, ainsi que sur les caractéristiques des sols. C'est aussi l'époque des premières mesures altimétriques pour déterminer la topographie de la surface océanique.

Les mesures des navires et des instruments déployés en mer sont essentielles à la recherche. Des instruments sur bouées permettent une mesure exhaustive et automatique. Leur déploiement dans l'océan profond et au large est une innovation majeure du vingtième siècle. Toutefois ces techniques sont limitées dans l'espace et dans le temps; des mesures fréquentes de la hauteur ne peuvent être fournies sur une longue période à l'échelle d'un bassin océanique. La mesure de la topographie par radar embarqué sur satellite est le seul moyen d'obtenir ces observations. Les espoirs placés depuis vingt ans dans cette technique se sont concrétisés en 1992 avec le lancement de TOPEX/POSEIDON.

5.2.5 Observer depuis l'espace

L'océanographie n'est plus attachée à la mer. La technologie spatiale a permis aux scientifiques de placer à grande distance des capteurs sensibles, pour mesurer de manière différente la planète océane.

Deux décennies de progrès

Bien qu'un altimètre radar expérimental ait volé en 1973 à bord du SKYLAB de la NASA, c'est le satellite GEOS-3 qui a emporté le premier instrument ayant fourni des mesures utiles du niveau de la mer et sa variabilité dans le temps (1975-1978). La carte de la variabilité du Gulf Stream ainsi obtenue est en conformité avec les mesures historiques réalisées par les bateaux.

En 1978, le satellite SEASAT de la NASA emportait le premier altimètre conçu pour l'océanographie et fournissait des mesures globales inédites de topographie de surface. Cette mission ne dura que 100 jours, mais elle recueillit plus de données que les bateaux de recherche des 100 années précédentes. L'altimètre GEOSAT de la US-Navy (1985-1989) est à l'origine du premier jeu de données interannuelles de hauteur des océans, et a permis les mesures de variabilité les plus précises jamais obtenues.

En vingt ans de progrès en matière de technologie des instruments et d'analyse scientifique, la précision de l'altimètre est passée de 60cm avec Skylab à 4cm avec Geosat. Cependant, aucune de ces missions ne visait à étudier la circulation des océans, qui implique des mesures de topographie à une dizaine de centimètres près à l'échelle d'un bassin océanique entier. Toutes ces missions étaient limitées par les incertitudes sur l'orbite, qui allaient de 10m pour Geos à 2m pour Seasat et Geosat.

TOPEX/POSEIDON relève le défi

TOPEX/POSEIDON est la première mission qui allie une altimétrie de précision et l'exactitude de l'orbite pour relever ce défi: tracer une carte globale de la topographie océanique. A cet effet, il fournira pendant 3 à 5 ans des relevés de l'ensemble de la surface océanique, observée tous les dix jours.

Une altitude élevée (1336km) a été choisie pour réduire les effets du frottement atmosphérique et des variations du champ de gravité terrestre, afin d'obtenir une orbite de grande précision. L'inclinaison permet l'accès aux latitudes de 66 degrés nord et sud, et une meilleure détermination des variations d'altitudes dues aux marées. Les traces du satellite se répètent à un km près à chaque cycle de dix jours, ainsi les altimètres peuvent réitérer leurs mesures sur les mêmes points. L'espacement maximal entre traces est de 315km à l'équateur.

5.3 Sensibilité directe: prise en compte des paramètres d'observation

Dans la réalité de la prise des mesures, en océanographie ou dans toute autre discipline, la configuration spatio-temporelle des observations dépend des paramètres d'observation:

$$C : \alpha \longrightarrow C(\alpha)$$

où $\alpha \in \Lambda$, ensemble des paramètres d'observation admissibles.

Notre assimilation de données consistant à retrouver la condition initiale optimale du modèle, nous nous sommes posé la question suivante:

“Comment calculer la sensibilité de la condition initiale optimale par rapport aux paramètres d’observation ?”

Soit $\alpha_0 \in \Lambda$ et $C = C(\alpha_0)$.

On reprend le problème d’assimilation variationnelle de données dont on a déjà parlé dans les chapitres précédents. L’opérateur C n’étant introduit que dans l’expression de la fonction-coût, cette dernière devient:

$$J(U, \alpha_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C(\alpha_0) \cdot X - X_{obs}\|^2 dt$$

ce qui change le système d’optimalité en:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + \left[\frac{\partial F}{\partial X} \right]^t \cdot P = [C(\alpha_0)]^t (C(\alpha_0) \cdot X - X_{obs}) \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Notons $P(t, U, \alpha_0)$ la solution de (5.1), et faisons les hypothèses suivantes:

Hypothèses

H1) Il existe un unique $U^* \in E_{ini}$ tel que: $P(0, U^*, \alpha_0) = 0$

H2) L’application

$$\begin{aligned} E_{ini} \times \Lambda &\longrightarrow E'_{ini} \\ (U, \alpha) &\longrightarrow -P(0, U, \alpha) \end{aligned}$$

est de classe C^1

H3) $\frac{\partial P}{\partial U}(0, U^*, \alpha_0) \in Isom(E_{ini}, E'_{ini})$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante, déduite du théorème des fonctions implicites.

Proposition 5.3.1 *Sous les hypothèses H1), H2) et H3), il existe \mathcal{A} (resp \mathcal{V}) voisinage de α_0 (resp U^*) dans Λ (resp E_{ini}), et une unique application:*

$$\begin{aligned} u &: \mathcal{A} \longrightarrow E_{ini} \\ &\alpha \longrightarrow u(\alpha) \end{aligned}$$

tels que:

$$- P(0, u(\alpha), \alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{A}$$

– $u(\alpha_0) = U^*$

– u est de classe C^1 et on a :

$$\frac{du}{d\alpha}(\alpha_0) = - \left[\frac{\partial P}{\partial U}(0, U^*, \alpha_0) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha}(0, U^*, \alpha_0) \quad (5.2)$$

5.3.1 Remarques

– $\frac{du}{d\alpha}$ est la sensibilité effective de la condition initiale optimale par rapport aux paramètres d'observations.

– $\frac{\partial P}{\partial U}(0, U^*, \alpha_0) = \frac{\partial^2 J}{\partial U^2}(U^*, \alpha_0)$ est le Hessien de la fonction coût par rapport à la variable de contrôle U (voir chapitre III section 3.5.3)

– Le calcul de cette sensibilité nécessite :

– le calcul du produit Hessien.Vecteur, et on pourra ensuite inverser par des méthodes du type gradient-conjugué.

– la régularité au moins C^1 de l'application $\alpha \rightarrow C(\alpha)$, au cas où c'en est une, pour le calcul du vecteur $\frac{\partial P}{\partial U}(0, U^*, \alpha_0)$

– La sensibilité $\frac{du}{d\alpha}$ donne une indication sur l'optimisation des paramètres d'observation, les paramètres optimaux étant ceux pour lesquels la sensibilité est nulle. On pourrait ainsi établir un critère d'optimalité sur les paramètres d'observation mais malheureusement, l'application $\alpha \rightarrow C(\alpha)$, qui est le nœud central dans cette approche, est pratiquement inaccessible dans le contexte qui est le nôtre (altimétrie satellitaire).

La question à laquelle nous avons essayé de répondre par ce qui précède est semblable à celle qui a été posée au début du chapitre III, et qui était relative à la sensibilité V^* de la condition initiale optimale par rapport à un bruit sur les observations. Il est intéressant de voir comment les deux expressions de sensibilité sont similaires :

$$V^* = -H^{-1} \cdot Q_1(0) \quad (5.3)$$

$$\frac{du}{d\alpha}(\alpha_0) = -H^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha}(0, U^*, \alpha_0) \quad (5.4)$$

En réalité, cette similarité est loin d'être une identité à cause de la différence de la nature des deux vecteurs $Q_1(0)$ et $\frac{\partial P}{\partial \alpha}(0, U^*, \alpha_0)$. Le premier est la perturbation produite sur l'état adjoint (à l'instant $t = 0$) par une perturbation sur les observations,

et le second est la perturbation produite sur l'état adjoint (à l'instant $t = 0$) par une perturbation sur les paramètres d'observation. Et il est important de noter qu'une perturbation sur les paramètres d'observation n'induit pas une perturbation sur les observations, mais plutôt un changement sur la configuration spatio-temporelle des observations.

5.4 Importance de l'opérateur C

Comme nous venons de le constater dans l'historique, la façon d'observer ainsi que les moyens (instruments) d'observation de l'océan ont beaucoup évolué. On est passé du "*rudimentaire in-situ*" des anciens marins et leurs bateaux au modernisme technologique avec des bateaux beaucoup mieux équipés, des instruments sur bouées, la tomographie acoustique. La plus récente étape dans cette évolution étant l'altimétrie satellitaire, qui va au-delà des limites spatio-temporelles de toutes les autres techniques.

L'opérateur C est le seul moyen par lequel nous pouvons introduire, dans le processus d'assimilation de données, de l'information sur la répartition spatio-temporelle des observations. C'est le seul élément qui contient de l'information sur la position de l'observateur. Lorsqu'il y a un changement dans le système d'observation ou dans la position de l'observateur pour un même phénomène, cela peut se traduire en assimilation de données par un changement de l'opérateur C . Nous ramènerons donc la notion d'optimalité d'un système d'observation à la notion d'optimalité de l'opérateur C , car nous ne disposons pas de lien formel direct entre les paramètres d'observation et l'opérateur C . Un tel lien nous permettrait d'optimiser directement ces paramètres, et donc tout le système d'observation. Néanmoins, en optimisant l'opérateur C , on pourra par la suite poser la question suivante à des "*spécialistes*": "*à quel(s) système(s) d'observation correspond l'opérateur C optimal?*" Nous pouvons alors reformuler la question posée en début de ce chapitre:

Peut-on optimiser l'opérateur C ?

- Tout d'abord, il faut trouver un sens à "optimiser l'opérateur C ".
- Ensuite, l'optimisation est liée à la notion de différentiabilité i.e. optimiser l'opérateur C suppose que ce dernier est différentiable par rapport aux paramètres dont il dépend.

En ramenant le problème à l'optimisation de C , nous faisons une simplification volontaire pour éviter toutes les complications qu'entraînerait la prise en compte des changements des paramètres d'observation, surtout qu'il n'y a pas à notre connaissance, comme nous l'avons déjà dit ci-dessus, de lien formel direct entre ces paramètres et la configuration. Nous travaillerons donc dans toute la suite sur la configuration spatio-temporelle des observations. Nous laissons volontairement ouvert le problème de l'optimisation de C . Par contre nous allons étudier son rôle et son influence en assimilation. Pour cela, nous regarderons la sensibilité de quelques critères (non exhaustifs) par rapport à C . Mais avant d'aborder la grande question de la sensibilité par rapport à C , il est important et même

nécessaire de comprendre et si possible d'exhiber son rôle en assimilation de données. Nous pouvons nous servir du cas simple d'un problème linéaire.

Soit le modèle donné par:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= A \cdot X \\ X(0) &= U.\end{aligned}$$

On suppose qu'on a une observation X_{obs} de l'état du modèle et on cherche U^* qui minimise la fonction coût:

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \|C \cdot X - X_{obs}\|^2 dt.$$

Des calculs simples montrent que:

$$\begin{aligned}\nabla_U J(U) &= \int_0^T [C \cdot e^{s \cdot A}]^t \cdot (C \cdot e^{s \cdot A} \cdot U - X_{obs}) ds \\ H = \nabla_U^2 J(U) &= \int_0^T [C \cdot e^{s \cdot A}]^t \cdot [C \cdot e^{s \cdot A}] ds,\end{aligned}$$

et si nous avons calculé le gradient en utilisant les équations adjointes, nous aurions à résoudre:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + A^t \cdot P = C^t \cdot (C \cdot e^{t \cdot A} \cdot U - X_{obs}) \\ P(T) = 0, \end{cases}$$

et le gradient de J serait donné par le vecteur $-P(t=0)$. L'intégration de ce système donne effectivement pour $-P(0)$ la valeur de $\nabla_U J(U)$ calculée ci-dessus. Mais ce qui nous intéresse dans cet exemple, c'est le rôle de C . Il intervient dans:

- le calcul de l'état adjoint et donc dans le calcul du gradient de J .
- le calcul (et/ou l'expression) du Hessien de J par rapport à U

Nous pouvons nous limiter à mentionner ces deux éléments qui nous semblent être les plus importants acteurs dans le processus d'assimilation, avec le modèle et les observations. Ainsi, pour bien comprendre le rôle de C en assimilation de données, il faut bien comprendre le rôle de gradient et celui du Hessien. Le rôle du gradient en assimilation de données n'est plus à décrire. En effet, nous savons que l'assimilation variationnelle de données consiste à trouver les points stationnaires du gradient. Cela nous donne déjà une première idée du rôle de C , car le gradient dépend de C .

Toujours dans le but de comprendre le rôle de l'opérateur C , nous allons décrire le rôle du Hessien.

5.4.1 Le rôle du Hessien en assimilation variationnelle de données

Approche statistique

On cherche à estimer les erreurs d'ajustement sur les paramètres optimaux (résultats d'assimilation). Le point important dans cette démarche est que le Hessien de la fonction coût peut être identifié à l'inverse de la matrice de covariances des paramètres de contrôle. La matrice de covariances peut être utilisée pour estimer l'incertitude (l'erreur) sur un résultat quelconque du modèle (dépendant des paramètres) et ainsi , déterminer quels paramètres du modèle sont mal identifiés à partir des données.

Soit x le vecteur de contrôle (paramètres à identifier) d'un modèle, d le vecteur de données et $m(x)$ l'application qui transforme les solutions du modèle (à partir des paramètres x) en vecteur comparable aux données d .

Supposons que les différences entre le modèle et les données

$$\varepsilon = m(x) - d$$

sont des erreurs aléatoires. Notons que ces erreurs ne sont pas simplement dues aux imprécisions des instruments; dans les modèles météorologiques et océanographiques, une large contribution à cette erreur est la représentativité ou l'erreur due à une résolution finie. Si ces erreurs suivent une loi normale de moyenne nulle, alors la fonction coût peut être identifiée à l'argument de la fonction gaussienne:

$$f_E(\varepsilon; 0, A) = \left[\frac{\det(A)}{(2\pi)^\delta} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \varepsilon^T \cdot A \cdot \varepsilon \right] \quad (5.5)$$

A étant l'inverse de la matrice de covariance des erreurs aléatoires et δ la dimension du vecteur d .

Considérée comme fonction des paramètres de contrôle, la fonction de distribution (5.5) définit une fonction de vraisemblance:

$$L(x) = \alpha f_E(d - m(x); 0, A) \quad (5.6)$$

α étant une constante positive.

La minimisation de la fonction coût équivaut à la maximisation de la fonction de vraisemblance. En normalisant le choix d'un α_0 de sorte que: $\int L(x)dx = 1$, la fonction de vraisemblance peut être regardée comme une densité de probabilité pour les variables de contrôle x . L'optimum correspond au mode de cette distribution, qui équivaut à la moyenne lorsque $m(x)$ est affine et lorsque la distribution des erreurs d'ajustement est

supposée gaussienne. Les covariances de cette distribution donnent une mesure de la qualité de l'identification des paramètres à partir des données: Thacker [99]

Lorsque $m(x)$ est affine, la fonction de densité de x est:

$$f_x(x; x^*, H) = \left[\frac{\det(H)}{(2\pi)^\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} (x - x^*)^T \cdot H \cdot (x - x^*) \right] \quad (5.7)$$

où $x^* \in \mathbb{R}^\xi$ est l'optimum, et H est le Hessien de la fonction coût:

$$H = \left[\frac{\partial m}{\partial x} \right]^T \cdot A \cdot \left[\frac{\partial m}{\partial x} \right]$$

Ainsi, l'inverse du Hessien peut être identifié à la matrice de covariances de la densité de probabilité des variables de contrôle, et peut être utilisée pour estimer la variance d'une fonction quelconque des variables de contrôle. Ceci est analogue à la regression: Draper et Smith [14]

Si m est non-linéaire, l'estimation de l'erreur d'ajustement est plus compliquée. La fonction coût peut avoir plusieurs minima relatifs, auquel cas les variables de contrôle pourraient avoir une grande probabilité d'être localisées dans plusieurs régions disjointes. La forme (l'allure) de la fonction coût dépend du nombre, du type et de la qualité des données. Plus on dispose de données, plus le minimum principal est profond dans la forme de la fonction coût; donc avec suffisamment de *bonnes données*, la fonction coût aurait un unique minimum profond (plus profond que tous les autres), malgré la non-linéarité de m . Dans le voisinage de ce minimum profond, la fonction coût serait quadratique et la densité de probabilité de x serait approximativement gaussienne. Si c'est le cas, alors une bonne approximation de l'inverse de la matrice de covariances de x est encore donnée par le Hessien de la fonction coût (voir Gallant [27]).

En assimilation de données météorologiques ou océanographiques, il est très peu probable d'avoir autant de données (observations) que de degrés de liberté du modèle. Néanmoins, un unique optimum peut être trouvé en introduisant soit des pseudo-données représentant une connaissance a priori, soit un terme de régularisation, ce qui change la forme de la fonction coût et aussi de la fonction de vraisemblance. L'expression générale du Hessien est alors:

$$H = \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^T \cdot A \cdot \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right)^T \cdot A \cdot (m(x) - d)$$

On remarquera que pour les modèles linéaires, le Hessien est indépendant des variables de contrôle. Par contre, pour les modèles non-linéaires, le Hessien doit être évalué en $x = x^*$ pour une bonne approximation de la matrice de covariances.

Remarque: L'estimation des erreurs d'ajustement et leurs covariances nécessite le calcul du Hessien et son inversion. Mais ceci n'est pas toujours possible à cause des coûts

de calculs élevés pour les modèles de grande taille. Si l'on a N paramètres à identifier à partir du modèle et des données, le Hessien sera une matrice d'ordre $N^2 \times N^2$. Mais il est possible, par la méthode de l'adjoint au second ordre donnée par Le Dimet et al. [111] de calculer le produit Hessien-vecteur: $H \cdot v$. Et par un algorithme du type gradient conjugué, on peut aussi calculer $H^{-1} \cdot v$ ce qui est nettement plus précis (que les approximations du Hessien faites par différences finies jusqu'à présent) et moins coûteux.

Hessien et convergence

Dans le voisinage du minimum x^* , la fonction coût est approximativement quadratique:

$$J = \frac{1}{2}(x - x^*)^T \cdot H \cdot (x - x^*)$$

et la surface représentant J a la forme d'une cuvette parabolique multidimensionnelle dont les isocontours sont des ellipses. Les axes principaux de ces ellipses sont déterminés par les vecteurs propres e_i du Hessien. Les rayons le long de ces axes principaux sont proportionnels aux λ_i^{-1} . Ainsi, si $e_i^T \cdot x$ est bien identifié, la courbure dans la direction e_i est relativement raide. Si par contre $e_i^T \cdot x$ est mal identifié, la courbure dans la direction e_i est relativement plane.

La notion de courbure en identification de paramètres a été étudiée par G. CHAVENT [11, 12], et on peut consulter ces articles pour plus de renseignements sur la notion de courbure dans les problèmes inverses, et par conséquent en assimilation de données.

Dans les algorithmes classiques de descente, chaque nouveau point dans le calcul du minimum est obtenu en se déplaçant vers le bas dans la direction la plus raide, opposée à la direction de gradient $\frac{\partial J}{\partial x}$. Ainsi, si certaines directions sont plus raides que d'autres, il y aura tendance à se déplacer dans ces directions plus que dans les autres.

Les algorithmes de descente utilisant la méthode de gradient-conjugué apportent une amélioration considérable aux méthodes de descente simples et à pas optimal, car pour chaque itération, le gradient est orthogonal à tous les gradients précédents et la direction de descente est conjuguée à toutes les directions de descente précédentes. Si le modèle est linéaire, la convergence est obtenue en au plus autant d'itérations que de paramètres à identifier. Puisqu'il y a pratiquement un très grand nombre de paramètres, ceci ne paraît pas très rassurant. Néanmoins, si le Hessien est bien conditionné, et si les valeurs propres sont groupées dans un petit intervalle, l'algorithme converge rapidement. Malheureusement, il faut largement plus que ce nombre (théorique) d'itérations lorsque le Hessien est mal conditionné. Les erreurs d'arrondi empêchent les conditions " *vecteurs conjugués* " d'être satisfaites de façon exacte, et ainsi les directions planes sont évitées de la même manière que dans les algorithmes de descente classiques.

Géométriquement, il est clair que si les isocontours sont circulaires, le gradient aura toujours une direction radiale vers l'extérieur du minimum, et une seule itération de descente suffit. Dans ce cas, le Hessien est proportionnel à la matrice identité et son

conditionnement est égal à 1. L'idée qui inspire le préconditionnement de l'algorithme de gradient-conjugué est de faire un changement de variable tel que les isocontours soient presque circulaires. En pratique, le gradient de la fonction coût est multiplié par une matrice (de changement de variables), qui est choisie telle que le nouveau gradient soit orienté presque vers le minimum. Le gradient étant donné par:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = H \cdot (x - x^*)$$

il est évident que si la matrice de préconditionnement est H^{-1} , l'opposé du gradient transformé sera $x^* - x$ qui est directement orienté vers le minimum à partir de x . L'inverse de la matrice de préconditionnement devrait donc être une bonne approximation du Hessian.

5.5 Comment comparer

La comparaison de deux configurations d'observations nécessite non seulement des moyens, mais aussi des critères de comparaison adéquats.

Tout d'abord, il n'est pas possible de comparer directement deux configurations d'observations, car cela nécessite la définition d'une distance dans l'espace des observations. La difficulté de la définition d'une telle distance réside dans le fait que pour deux configurations différentes, les points du domaine observés ne sont pas les mêmes (il en est de même pour les points non observés). Il faudrait ensuite définir une configuration de référence par rapport à laquelle on pourrait établir un critère d'optimalité pour les autres configurations. Ces deux points nous ont paru difficiles à résoudre et nous les laissons ouverts dans le cadre de cette étude.

D'autre part, s'il était possible de définir une telle distance, elle devrait dépendre non seulement des observations, mais aussi du modèle, i.e. elle devrait être définie au moyen du système d'optimalité; car si on pouvait définir directement une distance dans l'espace des configurations, on n'aurait pas besoin du modèle, et encore moins de l'assimilation, et on pourrait courir le risque d'obtenir une configuration "*optimale*" au sens de la distance définie et non au sens de l'utilité et l'efficacité des observations correspondantes. Nous laissons donc de côté (problème ouvert) l'idée de définir une distance pour comparer les configurations entr'elles, quoique cela soit certainement plus facile dans des problèmes ayant des systèmes d'observation plus simples.

Nous essaierons dans ce qui suit, de répondre à la question de savoir

Comment comparer deux configurations d'observations

en passant par l'usage, l'utilité des observations elles-mêmes. Ainsi, au lieu de comparer les configurations entr'elles, nous les comparerons au moyen de l'utilité et de l'efficacité des observations correspondantes.

Les critères de comparaison que nous proposons seront donc définis au moyen du système d'optimalité, l'idée principale étant, dans une première approche, d'associer à chaque configuration un scalaire assez représentatif, et nous laisserons ouvert le problème du choix des critères vectoriels.

Les critères réels choisis sont: le conditionnement du Hessien, la variance d'une forme linéaire définie sur les variables de contrôle, la prédictibilité (quantifiée par le plus grand exposant de Lyapunov du système d'optimalité), et nous en présentons les résultats avec une analyse de consistance.

5.5.1 Le conditionnement du Hessien

Le conditionnement est défini par le rapport de la plus grande par la plus petite valeur propre, qui sont toutes positives ou nulles dans le cas où la matrice est symétrique semi-définie positive. C'est le cas du Hessien. Une valeur propre nulle indique que le Hessien est singulier et donc certains paramètres ne peuvent être identifiés à partir des données. A cause des erreurs d'arrondi, une valeur propre très petite ne peut être distinguée d'une valeur propre nulle. Un Hessien mal conditionné est presque singulier, c'est-à-dire que certaines combinaisons linéaires des paramètres sont très mal identifiées. Si le Hessien est mal conditionné, ce qui est le cas lorsque certaines combinaisons linéaires des paramètres sont mal identifiées, atteindre le minimum de la fonction coût nécessite beaucoup d'itérations par les algorithmes de descente. Une approche algorithmique pour éviter cela est de préconditionner le processus de minimisation pour accélérer la convergence. Le conditionnement du Hessien joue un rôle très important en assimilation variationnelle de données. Il donne une information à la fois qualitative et quantitative sur:

- l'identification des paramètres: on identifie "bien" tous les paramètres (variables de contrôle) lorsque le Hessien est bien conditionné, et lorsqu'il ne l'est pas, certaines combinaisons linéaires des paramètres, notamment les directions des vecteurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres, sont mal identifiées.
- la vitesse de convergence du processus de minimisation.
- la sensibilité des paramètres optimaux par rapport aux observations (cf chap III).

Lorsque les données sont suffisantes pour identifier les paramètres du modèle de façon assez précise, le Hessien paraît bien conditionné, et la convergence ne pose pas trop de problèmes, du moins a priori. Néanmoins, des méthodes de descente plus performantes (quasi-Newton, Newton tronqué) peuvent aider, notamment lorsque la lenteur de la convergence est due aux données inadéquates. En réalité, la source du problème de conditionnement et donc de vitesse de convergence peut se localiser dans le modèle aussi bien que dans les données:

1. Le modèle:

- Des paramètres dont l'échelle est incorrecte peuvent causer un mauvais conditionnement (et une convergence lente) même si les données sont *bonnes*.

- Le modèle peut comporter des paramètres ayant tellement peu d'influence sur $m(x)$ qu'ils ne pourront jamais être bien identifiés même avec de données très précises. En analyse de regression, des tests sont souvent faits pour savoir si tous les paramètres peuvent être identifiés par les données; sinon, ceux qui ne le sont pas sont éliminés. Nous pouvons entreprendre la même procédure: il faut tout simplement que la solution du modèle soit orthogonale aux combinaisons linéaires (des paramètres) qui ne sont pas correctement identifiés, et qui sont données par les vecteurs propres associés aux petites valeurs propres du Hessian: Wiggins [104], et Wunsch [107]. Néanmoins, il faudra faire attention pour garantir que cette restriction ou contraction de paramètres conserve au modèle un sens.

2. Les données:

La responsabilité des données dans la mauvaise identification de paramètres peut être:

- données insuffisantes
- mauvais échantillonnage

Mais dans le cadre de l'assimilation variationnelle, nous supposons que le modèle est parfait, et dans ce cas, le conditionnement ne dépend plus que de la configuration des observations.

Une configuration dépend essentiellement de trois paramètres:

- La durée de l'observation: on la prend en général égale à la durée d'intégration du modèle.
- l'intervalle de temps indiquant l'insertion régulière des données.
- l'intertrace ou distance entre deux traces consécutives.

Lorsque la durée d'observation est fixée, on ne peut faire varier la configuration que par les deux autres paramètres, et c'est ce qui engendre la variation de la densité spatio-temporelle des observations.

Consistance

La consistance du conditionnement (en tant que critère de comparaison) peut être définie par sa dégradation (croissance) en fonction de la dégradation (décroissance) de la densité spatio-temporelle des observations. On a:

$$\kappa(H) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Si H est symétrique et définie positive, nous pouvons écrire:

$$H = L^t \cdot L ,$$

L pouvant être interprété comme l'opérateur qui, à toute condition initiale (variable de contrôle) donnée associe la projection de la solution du modèle direct dans l'espace des observations:

$$L(U) = C \cdot X(U).$$

On a aussi:

$$\lambda_{max} = \max_{\substack{U \in E_{ini} \\ U \neq 0}} \frac{U^t \cdot L^t \cdot L \cdot U}{U^t \cdot U} \quad (5.8)$$

Dans la pratique, la solution X du modèle est donnée par:

$$X = (X_0 = U, X_1, \dots, X_N)$$

où N est le nombre de pas d'intégrations en temps. Les observations sont faites aux instants k_1, k_2, \dots, k_P , selon les configurations spatiales données par les opérateurs:

$C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_P}$, et on a:

$$L(U) = (C_{k_1} \cdot X_{k_1}, C_{k_2} \cdot X_{k_2}, \dots, C_{k_P} \cdot X_{k_P}) \quad (5.9)$$

Les C_{k_j} sont des matrices diagonales d'ordre $M = N_x \times N_y$, où $N_x = N_y$ est le nombre de nœuds de discrétisation sur le côté du bassin carré. Les nœuds du maillage sont numérotés de 1 à M suivant l'application qui à un nœud (i, j) fait correspondre l'entier $(j-1)N_x + i$. Lorsque le nœud p ($p \in [1, M]$) est observé au pas de temps k_j , on a: $C_{k_j}(p, p) = 1$, et s'il n'a pas été observé, $C_{k_j}(p, p) = 0$. Ainsi, si tous les points du maillage sont observés au pas de temps k_j , on a $C_{k_j} = Id_{\mathbb{R}^M}$.

La dégradation de la densité spatio-temporelle des observations consiste à remplacer les lignes ou les colonnes des C_{k_j} $j = 1, \dots, P$ par des lignes ou des colonnes nulles. Cette dégradation se propage dans l'opérateur L selon la définition (5.9), le rendant de plus en plus singulier, i.e. son noyau ($ker L$) devenant de plus en plus grand. En effet, si nous faisons la décomposition:

$$E_{ini} = ker L \oplus ker L^\perp$$

Nous pouvons récrire (5.8) sous la forme:

$$\lambda_{max} = \max_{U \in ker L^\perp} \frac{U^t \cdot L^t \cdot L \cdot U}{U^t \cdot U}$$

Soit C une configuration et C' une dégradée de C selon le procédé décrit ci-dessus. On fait correspondre à C (resp C') les opérateurs L (resp L') qu'ils engendrent et on peut affirmer que:

$$ker L \subset ker L'$$

et donc

$$ker L'^\perp \subset ker L^\perp$$

Soit λ_{max} et λ'_{max} les valeurs propres maximales des hessiens H et H' obtenus à partir de C et C' respectivement. On a :

$$\lambda'_{max} = \max_{U \in \ker L'^{\perp}} \frac{U^t \cdot L'^t \cdot L' \cdot U}{U^t \cdot U} \leq \max_{U \in \ker L^{\perp}} \frac{U^t \cdot L^t \cdot L \cdot U}{U^t \cdot U} = \lambda_{max}$$

La valeur propre maximale du hessien décroît donc et tend vers zéro en fonction de la dégradation spatio-temporelle des observations. On en déduit que la valeur propre minimale λ_{min} est aussi décroissante et tend vers zéro avec une vitesse plus grande que celle de λ_{max} . En conséquence, le conditionnement du hessien est croissant. C'est aussi ce qui est confirmé par les résultats numériques. Nous pouvons en conclure que le conditionnement du hessien est un critère de comparaison consistant. Il en est de même pour les valeurs propres minimale et maximale.

Le calcul du conditionnement du Hessien, qui en fait revient au calcul des valeurs propres maximale et minimale du Hessien, se fait par décomposition spectrale en utilisant la méthode de Lanczos.

5.5.2 Décomposition spectrale du Hessien

La méthode de Lanczos est une méthode de recherche du spectre d'une matrice symétrique qui n'est pas forcément définie positive. C'est une méthode de type itératif. Son principe repose sur les propriétés de convergence de l'espace de Krylov engendré à partir d'un vecteur initial donné comme pour la méthode de gradient-conjugué. Rappelons la définition suivante de l'espace de Krylov associé à une matrice $H \in \mathcal{M}(n, n)$. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ donné, x_0 non nul, on définit l'espace de Krylov d'ordre k comme le sous-espace vectoriel :

$$\mathcal{K}_k \stackrel{def}{=} \mathcal{L} \langle x_0, H.x_0, \dots, H^{k-1}.x_0 \rangle.$$

Rappelons aussi que le spectre d'une matrice H symétrique est formé par des des valeurs propres, classé en ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ qui sont des quantités sup-inf :

$$\lambda_i = \sup_{\substack{V \subset \mathbb{R}^n \\ \dim V=i}} \inf_{x \in V} \frac{\langle x, H.x \rangle}{\langle x, x \rangle} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

La méthode de Lanczos, à sa $k^{\text{ième}}$ itération donne le spectre de la projection Rayleigh de H sur \mathcal{K}_k , c.-à-d. :

$$\theta_i^k = \sup_{\substack{V \subset \mathbb{R}^n \\ \dim V=i}} \inf_{x \in V} \frac{\langle x, \text{Proj}_{\mathcal{K}_k}(H.x) \rangle}{\langle x, \text{Proj}_{\mathcal{K}_k}(x) \rangle} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5.11)$$

Soit $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ une base orthonormée et qui engendre l'espace de Krylov \mathcal{K}_k d'ordre k et soit Q_k une matrice d'ordre $n \times k$ avec $k \leq n$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est

le vecteur q_j , l'opérateur de projection s'écrit $Q_k \cdot Q_k^t$. Par conséquent l'expression (5.11) devient :

$$\begin{aligned} \theta_i^k &= \sup_{\substack{V \subset \mathbb{R}^n \\ \dim V = i}} \inf_{x \in V} \frac{\langle Q_k^t \cdot x, Q_k^t \cdot H \cdot x \rangle}{\langle Q_k^t \cdot x, Q_k^t \cdot x \rangle} \\ &= \sup_{\substack{V \subset \mathcal{K}_k \\ \dim V = i}} \inf_{y \in V} \frac{\langle y, H \cdot y \rangle}{\langle y, y \rangle} \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.12)$$

L'algorithme de Lanczos repose sur l'existence d'une base $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ vérifiant en plus une relation très ingénieuse de récurrence :

$$H \cdot q_j = \beta_{j-1} q_{j-1} + \alpha_j q_j + \beta_j q_{j+1} \quad j \geq 1; \text{ et } \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

L'algorithme pour calculer une telle base est :

$$\begin{aligned} \vec{q}_0 &= \vec{0} \\ \beta_0 &= 0 \\ \vec{q}_1 &= \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} \\ \text{POUR } j &= 1, \dots, k \text{ FAIRE} \\ &\quad \vec{z}_j = H \cdot \vec{q}_j - \beta_{j-1} \vec{q}_{j-1} \\ &\quad \alpha_j = \langle \vec{z}_j, \vec{q}_j \rangle \\ &\quad \vec{v}_j = \vec{z}_j - \alpha_j \vec{q}_j \\ &\quad \beta_j = \|\vec{v}_j\| \\ &\quad \vec{q}_{j+1} = \frac{\vec{x}_j}{\|\vec{x}_j\|} \\ \text{FIN_POUR} \end{aligned}$$

et l'interprétation de (5.13) en écriture matricielle est :

$$Q_k^t \cdot H \cdot Q_k = \boxed{Q_k^t} \times \boxed{H} \times \boxed{Q_k} \quad (5.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \boxed{T_k} \quad (5.15)$$

Cette matrice T_k carrée d'ordre k et tridiagonale est celle de la projection Rayleigh de H sur l'espace \mathcal{K}_k s'écrivant dans la base $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Les k éléments propres (θ_j, \vec{y}_j) avec $1 \leq j \leq k$ de la matrice T_k , c.-à-d. :

$$T_k \cdot y_j = \theta_j \cdot y_j \quad y_j \in \mathbb{R}^k, \theta_j \in \mathbb{R}.$$

sont facilement calculables par la méthode de bisection. Les couples $(\theta_j, Q_k \cdot \vec{y}_j)$ sont appelés les éléments de Riesz de H . Ils donnent une approximation du spectre de H . En effet on a deux théorèmes suivants :

Théorème 5.5.1 *Il existe k valeurs propres $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_k^k$ de H telles que :*

$$|\lambda_j^k - \theta_j^k| \leq \beta_k |\langle y_j, e_k \rangle| \quad \forall j = 1, 2, \dots, k. \quad (5.16)$$

Théorème 5.5.2 *Les vecteurs de Rayleigh-Riesz $x_j^k \stackrel{\text{def}}{=} Q_k \cdot \vec{y}_j$ vérifient la relation suivante :*

$$\|H \cdot x_j^k - \theta_j x_j^k\| = \beta_k |\langle y_j, e_k \rangle| \quad \forall j = 1, 2, \dots, k. \quad (5.17)$$

Remarque :

- Comme $|y_j| = 1$ et $|e_k| = 1$, alors $|\langle y_j, e_k \rangle| \leq 1$.

Pour les démonstrations de ces deux théorèmes, on peut consulter KAHAN et PARLETT [36]. On remarque que l'approximation des éléments de Rayleigh-Riesz et d'autant meilleure que le « résidu » β_k est petit. Le test d'arrêt de l'algorithme porte donc sur la valeur de cette quantité β_k .

Cet algorithme est parfaitement adapté à la décomposition spectrale du hessien de la fonction coût à minimiser \mathcal{J} car, sans avoir besoin d'explicitier la matrice du hessien H , il suffit que l'on fournisse à l'algorithme le produit $H \cdot q$ avec q un vecteur donné. Cependant le grand inconvénient de la méthode de Lanczos est sa grande instabilité. Elle est donc très affectée par les phénomènes dûs aux erreurs d'arrondis. Ceci se traduit par une perte d'orthogonalité naturelle des vecteur $\{q_j\}$ calculés. B.N. PARLETT et D.S. SCOTT [84], ont montré que ce risque devient essentiel quand justement les quantités $\beta_k |\langle y_j, e_k \rangle|$ sont petites. Ils ont proposé une modification de la méthode en ajoutant un processus dit de « réorthogonalisation-sélective » qui consiste à réorthogonaliser les vecteurs $\{q_j\}$ de temps à autre, suivant un critère portant sur les quantités $\beta_k |\langle y_j, e_k \rangle|$. Notons qu'il existe dans la littérature sur le sujet toute une panoplie de différentes stratégies de réorthogonalisation. Dans notre cas nous avons choisi cette stratégie dûe à B.N. PARLETT et D.S. SCOTT [84].

5.5.3 La variance d'une forme linéaire

Notations, Définitions et Propriétés

Si $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)^t$ est un vecteur aléatoire réel et intégrable, l'espérance de \mathbf{Y} , notée $\mathbb{E}(\mathbf{Y})$ est le vecteur de composantes $\mathbb{E}(Y_i)$, et la matrice de variance-covariance

de \mathbf{Y} est notée $\Sigma_{\mathbf{Y}}$ et a pour terme général $cov(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)$. Plus généralement, si \mathbf{Y} est une matrice aléatoire réelle, l'espérance $\mathbb{E}(\mathbf{Y})$ est la matrice de terme général $\mathbb{E}(\mathbf{Y}_{ij})$.

Voici quelques propriétés des moments de vecteurs aléatoires:

– Si \mathbf{Y} est une matrice aléatoire d'ordre $p \times q$, A une matrice déterministe d'ordre $r \times p$ et B une matrice déterministe d'ordre $q \times s$, alors $\mathbb{E}(A \cdot \mathbf{Y} \cdot B) = A \cdot \mathbb{E}(\mathbf{Y}) \cdot B$.

– La matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire \mathbf{Y} est:

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = [Cov(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)] = \mathbb{E}([\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y})]^t \cdot [\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y})]) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{Y}) - \mathbb{E}(\mathbf{Y})^t \cdot \mathbb{E}(\mathbf{Y})$$

– La matrice $\Sigma_{\mathbf{Y}}$ est semi-définie positive

– pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$, on a:

$$\mathbb{E}(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{a} \rangle) = \langle \mathbb{E}(\mathbf{Y}), \mathbf{a} \rangle \quad , \quad var(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{a} \rangle) = \mathbf{a}^t \cdot \Sigma_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{a}$$

– et pour toute matrice A d'ordre $q \times p$ on a:

$$\Sigma_{A \cdot \mathbf{Y}} = A^t \cdot \Sigma_{\mathbf{Y}} \cdot A$$

– Un vecteur aléatoire Y est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est une variable aléatoire gaussienne. Ce vecteur admet alors une espérance μ et une matrice de variance-covariance Σ . On dit qu'il suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Un vecteur gaussien Y de \mathbb{R}^p , d'espérance μ et de covariance Σ inversible, admet pour densité la fonction f :

$$f_Y(x) = \left[\frac{|Det(\Sigma^{-1})|}{(2\pi)^p} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x - \mu) \right]$$

La variance d'une variable aléatoire réelle Y d'espérance μ est une mesure de la dispersion des valeurs prises par Y autour de μ : la variance de Y est d'autant plus grande que Y a "plus de chances" d'être éloigné de μ .

En assimilation de données, si nous considérons le vecteur $C \cdot X - X_{obs}$ comme un vecteur d'erreurs aléatoires, alors la condition initiale optimale (celle qui minimise la norme de ce vecteur aléatoire) est aussi un vecteur aléatoire dont on peut chercher la matrice de variance-covariance A . Nous avons vu ci-dessus (section 5.4.1) que l'inverse du Hessien H^{-1} à l'optimum est une bonne approximation de A ; cette approximation est exacte dans le cas où la solution du modèle est une fonction affine des paramètres de contrôle. Mais au lieu de déterminer la matrice de variance-covariance, qui nécessite le calcul du Hessien de la fonction-coût et son inversion, nous pouvons définir une forme linéaire sur l'espace des conditions initiales E_{ini} , et calculer la variance de cette forme linéaire. En effet, si E_{ini} est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_{ini}}$, toute forme linéaire L sur E_{ini} admet une représentation vectorielle d'après le théorème de Riesz [6]:

$$\begin{aligned} L & : E_{ini} \longmapsto \mathbb{R} \\ U & \longmapsto \langle U, b \rangle_{E_{ini}} \end{aligned}$$

où b est un vecteur de E_{ini} . Si donc U est un vecteur aléatoire de matrice de variance-covariance A , alors on a :

$$var(L \cdot U) = var(\langle U, b \rangle_{E_{ini}}) = b^t \cdot A \cdot b$$

D'autre part, avec l'approximation $A = H^{-1}$ on a :

$$var(L \cdot U) = b^t \cdot H^{-1} \cdot b \tag{5.18}$$

Dès qu'on sait calculer le produit $H \cdot v$ pour un vecteur v quelconque, on peut aussi calculer $H^{-1} \cdot v$ par des algorithmes du genre gradient conjugué, et donc on peut calculer la variance de L en évitant de calculer tout le Hessien et son inversion.

La variance de L nous renseigne sur la dispersion de cette variable aléatoire par rapport à sa moyenne. b étant fixé, la variance de L ne dépend que de la structure de H^{-1} , et donc de H , de sorte que la dispersion de L peut se traduire par une bonne, moins bonne, mauvaise identification de la condition initiale (minimisation de la fonction-coût).

Mais comme nous l'avons déjà vu ci-dessus, H dépend à son tour de C . Nous pouvons alors étudier la variation de la variance de L en fonction de C . Le critère d'optimalité étant "*la variance minimale*", i.e. la "*meilleure*" configuration d'observation au sens de ce critère, est celle pour laquelle on a la plus petite variance de L , ce qui signifie que les valeurs de L sont très peu dispersées autour de sa moyenne, ou encore: "*on a bien assimilé*".

Consistance

La consistance de la variance de L en tant que critère de comparaison entre différentes configurations d'observations se traduit par sa dégradation (croissance) en fonction de la dégradation de C . On retrouve ici la même consistance décrite en (5.5.1) pour le critère du conditionnement. En effet, b étant fixé, la variance de L ne dépend que de H^{-1} et le calcul de la variance dépend fortement du conditionnement de H^{-1} qui est égal à celui de H .

5.6 Résultats numériques

Les résultats de ce chapitre étant tous basés sur le Hessien, nous présentons d'abord la validité du calcul du produit Hessien \times vecteur (par un test de Taylor), ainsi que le test de symétrie du Hessien pour des vecteurs aléatoires.

La validité du produit Hessien \times vecteur est donnée par :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(U + \alpha \cdot v) - J(U) - \alpha \langle \nabla J(U), v \rangle_v}{\frac{1}{2} \alpha^2 \langle H(U) \cdot v, v \rangle_v} = 1$$

et numériquement, on a :

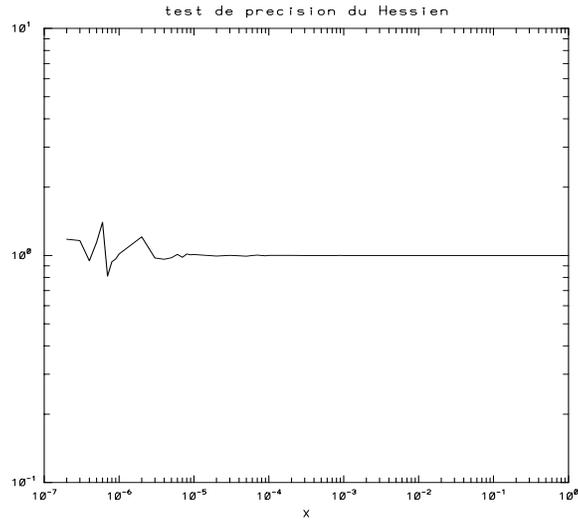


FIG. 5.37 – Précision numérique du calcul du produit Hessien \times vecteur.

Pour tester la symétrie du Hessien, on a considéré deux vecteurs aléatoires v et w et on obtenu:

$\langle H(U) \cdot v, w \rangle_V$	$9.678603447816571700E + 2$
$\langle v, H(U) \cdot w \rangle_V$	$9.678603447834100631E + 2$

La figure et le tableau ci-dessus nous permettent alors de dire que le produit Hessien \times vecteur a été bien calculé (avec une bonne précision numérique), et que Hessien est symétrique à la précision machine près.

Pour étudier la variation du conditionnement du Hessien en fonction de la configuration spatio-temporelle des observations, nous utilisons encore les deux paramètres *interv* et *modpt* introduits à la section (3.8) pour faire varier la densité spatiale (*interv*) et temporelle (*modpt*) des observations. Nous supposons que les traces sont des droites parallèles à l'intérieur du domaine. Nous supposons aussi, pour simplifier, que la configuration spatiale des observations reste fixe au cours du temps, i.e. ce sont toujours les mêmes points qui sont observés. La figure ci-dessous montre quelques exemples de configurations spatiales:

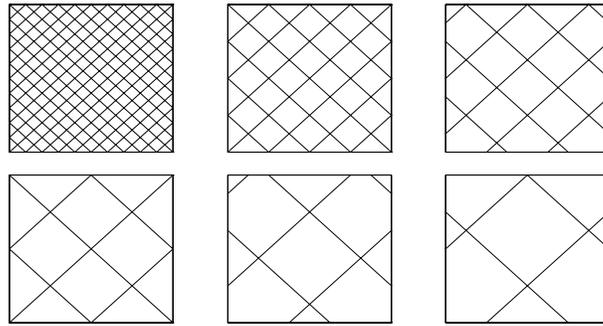


FIG. 5.38 – Exemple de dégradation spatiale de la configuration des observations: $interv = 4, 10, 15, 20, 25, 30$ respectivement

Nous avons alors calculé, dans le cas du modèle barotrope, le conditionnement du Hessien de la fonction-coût à l’optimum, par la méthode de Lanczos qui nous fournit de “bonnes” approximations des valeurs propres maximale et minimale. Notons que la valeur propre maximale converge très rapidement en fonction de la dimension du sous-espace du Krylov, contrairement à la valeur propre minimale.

L’intervalle d’assimilation a été fixé à 30 jours, et nous avons obtenu les résultats suivants:

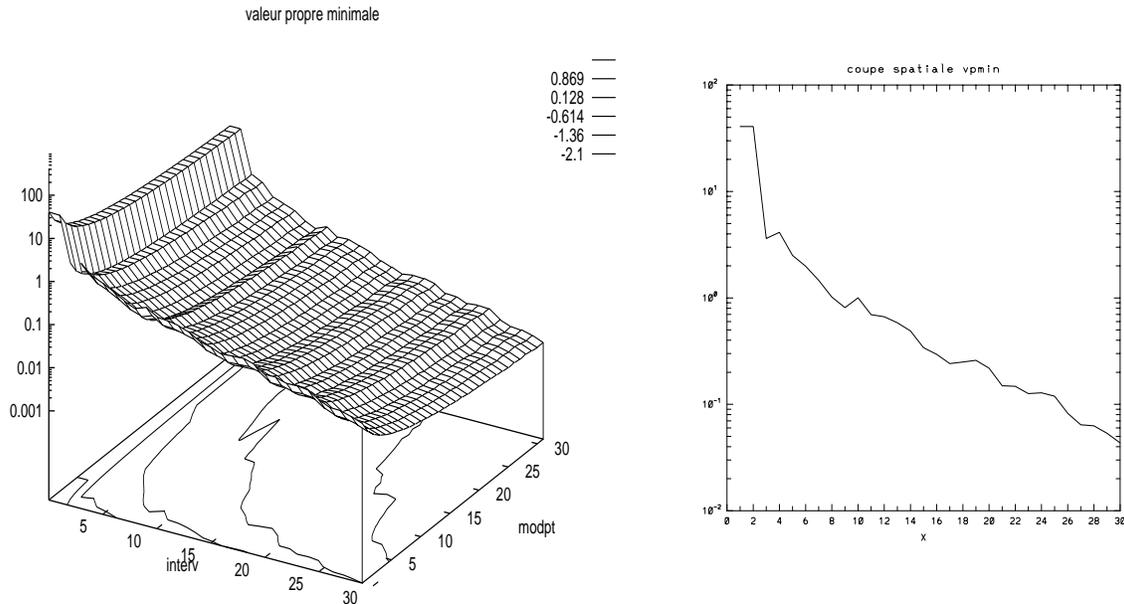


FIG. 5.39 – variations de la valeur propre minimale en fonction de la dégradation spatio-temporelle de la configuration des observations (à gauche), et à droite, une coupe suivant la dégradation spatiale.

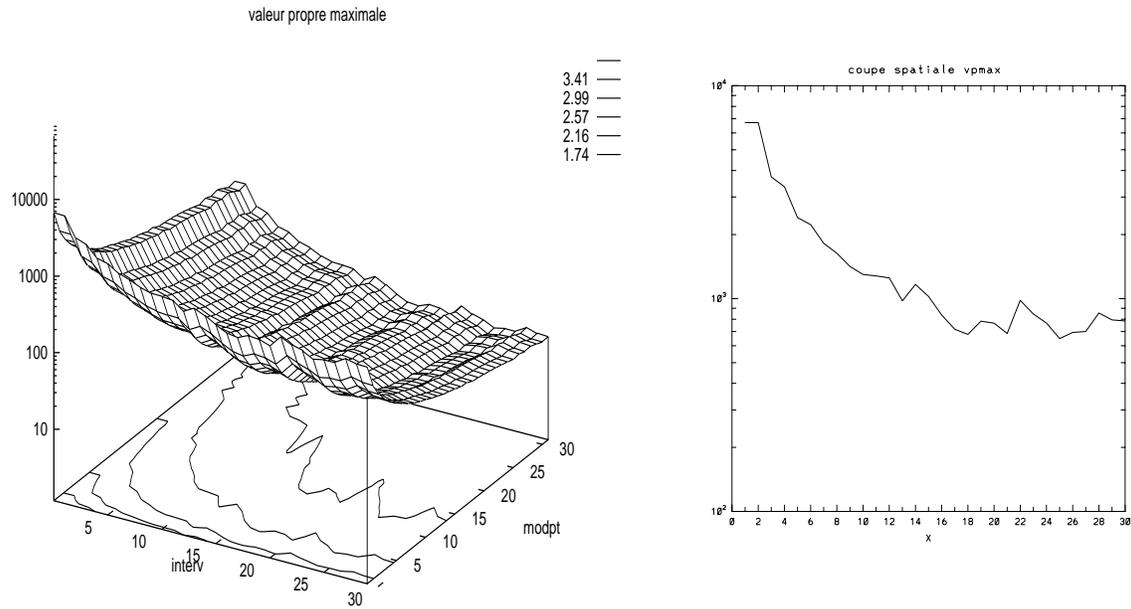


FIG. 5.40 – variations de la valeur propre maximale en fonction de la dégradation spatio-temporelle de la configuration des observations (à gauche), et à droite, une coupe suivant la dégradation spatiale

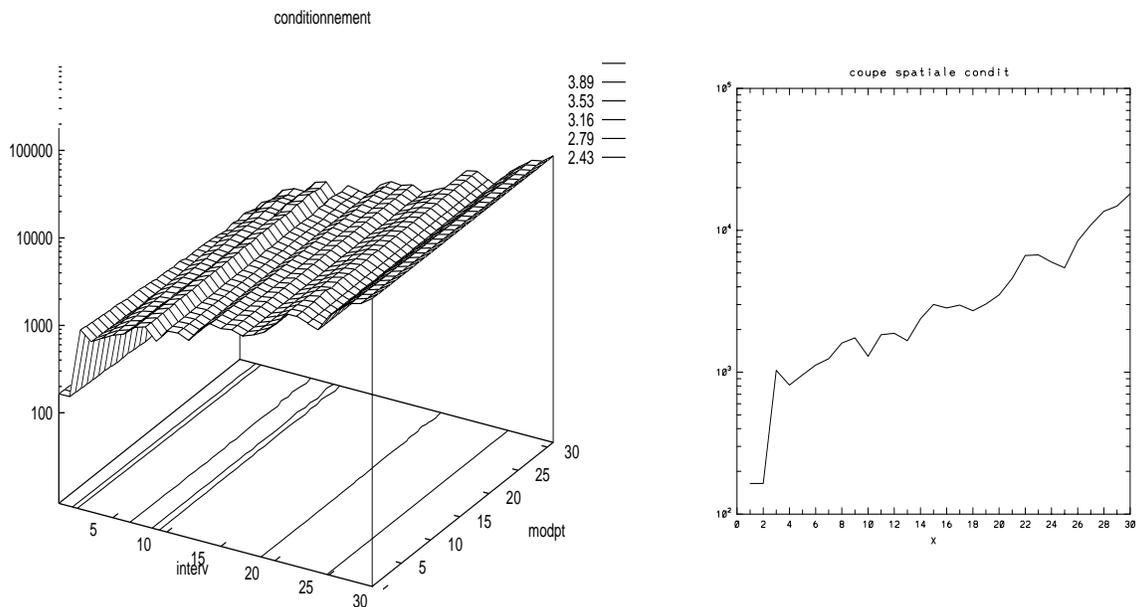


FIG. 5.41 – variations du conditionnement en fonction de la configuration spatio-temporelle des observations (à gauche), et à droite, une coupe suivant la dégradation spatiale

Des coupes suivant la variation temporelle de la densité des observations ont aussi été réalisées et ont donné les résultats suivants pour les valeurs:

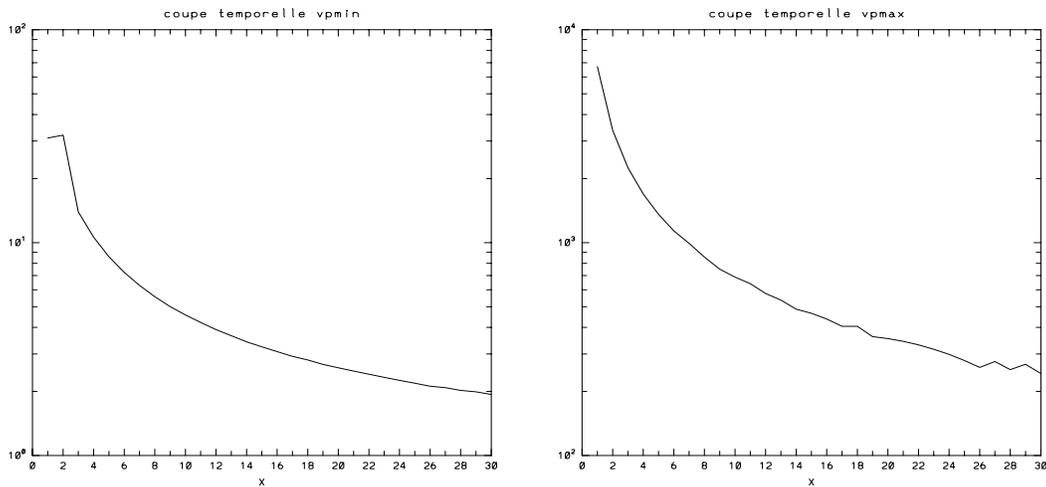


FIG. 5.42 – Variation des valeurs propres minimale (gauche) et maximale (droite) en fonction de la dégradation temporelle de la configuration des observations.

Le second critère choisi pour analyser l'influence de la configuration spatio-temporelle des observations est la variance d'une forme linéaire définie sur l'espace de contrôle V . Nous avons vu ci-dessus que cette variance est donnée par

$$\text{var}(L) = \langle H^{-1} \cdot b, b \rangle_V \quad \text{si} \quad L(U) = \langle b, U \rangle_V$$

En fixant le vecteur $b = (1, 1, \dots, 1)^t$, nous avons calculé la variance en faisant varier la configuration spatio-temporelle des observations par le moyen des paramètres *interv* et *modpt*, comme cela a été fait pour le conditionnement.

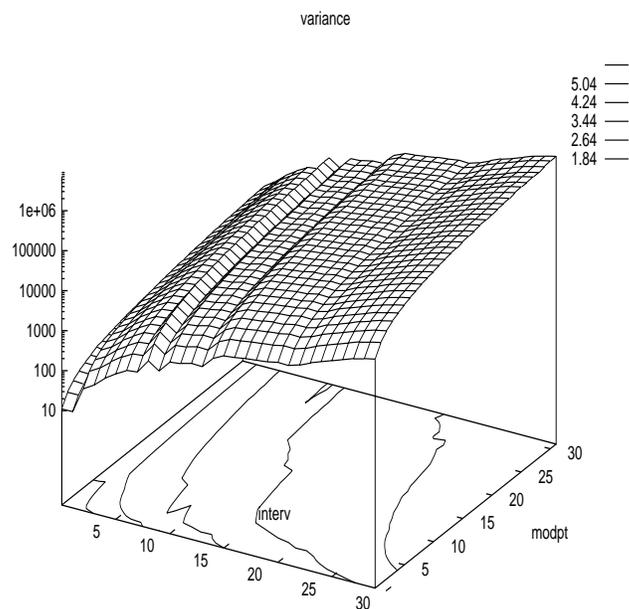


FIG. 5.43 – variations de la variance en fonction de la configuration spatio-temporelle des observations.

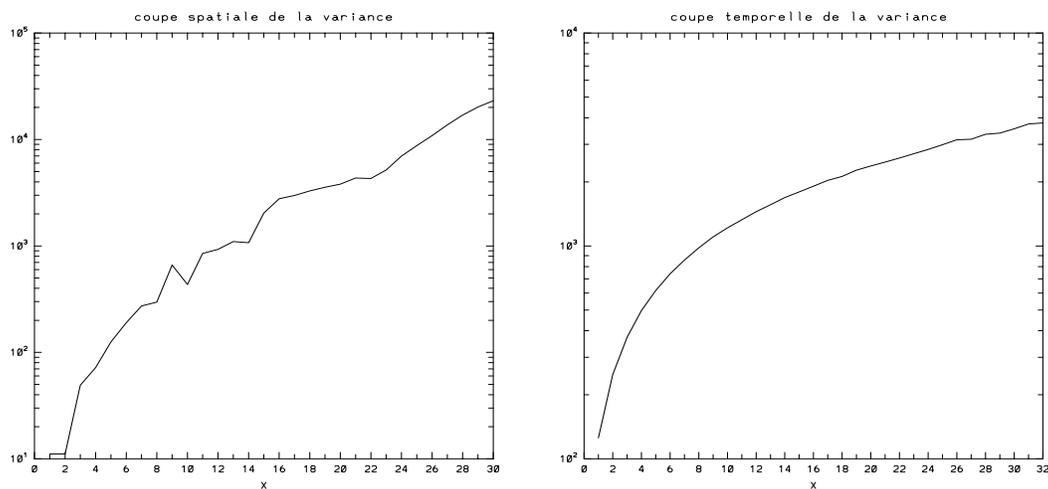


FIG. 5.44 – Coupe de la variance en fonction de la dégradation spatiale (gauche) et temporelle (droite) de la configuration des observations.

Commentaires

On peut constater à partir de ces résultats que la dégradation spatiale de la configuration des observations affecte beaucoup plus les valeurs propres (et donc le conditionne-

ment), que la dégradation temporelle. Il en est de même pour la variance. On en conclut qu'il est plus important d'augmenter (favoriser) la densité spatiale des observations. Mais ceci ne reste vrai que par rapport aux critères choisis.

5.7 Sensibilité de la prédictibilité par rapport à C

Les exposants de Lyapunov, permettent d'étudier les phénomènes de divergence exponentielle des trajectoires provenant des points initiaux voisins, dans les systèmes dynamiques classiques. Définis par Oseledec [79], les Exposants Classiques de Lyapunov (ECL) mesurent la moyenne à long-terme du taux de divergence ou convergence des trajectoires initiales voisines dans l'espace des phases, sur un attracteur. Ils sont donc une quantification des propriétés de prédictibilité moyenne, selon Nese [76]. Un exposant de Lyapunov positif indique un comportement chaotique, de petites erreurs sur l'état initial pouvant mener à de grandes erreurs de prévision. Le plus grand exposant classique de Lyapunov donne une estimation du temps moyen au-delà duquel la prédiction devient insignifiante en raison de la propagation des erreurs initiales, et une croissance du plus grand ECL se traduit par une perte du temps moyen de prédictibilité. Nous pouvons alors quantifier la prédictibilité d'un système dynamique par son plus grand ECL.

Le système d'optimalité étant aussi un système dynamique, nous pouvons étudier sa prédictibilité, et en utilisant la quantification de la prédictibilité par le plus grand exposant de Lyapunov, nous pouvons établir un critère de comparaison entre différents paramètres indépendants dans le système d'optimalité, notamment: les observations, la configuration des observations,...etc.

Mais avant de passer à la détermination des ECL d'un système dynamique et à son application au système d'optimalité, commençons par donner leur définition.

Définition 5.7.1 *Soit E_x un espace "assez régulier" sur lequel est défini un système dynamique classique:*

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{5.19}$$

où F est une fonction vectorielle "régulière." Désignons par $S(t) \cdot X$ l'état à l'instant t du système qui à l'instant 0 était en X . Ceci définit une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ d'applications sur E_x :

$$S(t) : X \mapsto X(t) = S(t) \cdot X$$

Soit e un vecteur non nul de l'espace tangent en X à l'espace des phases, qui évolue suivant la différentielle $D_x S(t)$ en X . En supposant que E_x est normé, on définit le plus grand exposant classique de Lyapunov par:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \| D_x S(t) \cdot e \| \tag{5.20}$$

En général, un système dynamique admet plusieurs ECL. Nous verrons dans la suite comment sont définis les autres ECL et comment les calculer.

5.7.1 Exposants Classiques de Lyapunov en dimension finie

On se place dans le cas où E_x est un espace de dimension finie. Dans plusieurs applications pratiques, après discrétisation spatiale des variables d'état, on a: $E_x = \mathbb{R}^N$ et le système dynamique prend la forme:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N$$

La matrice $D_x S(t)$ qui représente l'application linéaire tangente au voisinage du point X (différentielle en X) est la jacobienne $J_x(t)$ dont les éléments sont les dérivées partielles:

$$\frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, N \quad .$$

Notons $j_1(t) \geq j_2(t) \geq \dots \geq j_N(t)$ les valeurs propres de $J_x(t)$ dans l'ordre décroissant. Alors les ECL en dimension finie sont définis par:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |j_i(t)|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.21)$$

5.7.2 Calcul pratique des ECL

Supposons qu'après avoir discrétisé par un schéma d'intégration numérique, notre système dynamique se présente sous la forme:

$$X^{n+1} = F(X^n) \quad (5.22)$$

les $X^k \in \mathbb{R}^N$. Le système linéaire tangent s'écrit alors:

$$Y^{n+1} = J_n \cdot Y^0 \quad (5.23)$$

avec

$$J_n = J(X^n) \cdot J(X^{n-1}) \cdot \dots \cdot J(X^0)$$

$$J(X^k) = \left[\frac{\partial F_i(X^k)}{\partial x_j} \right]$$

Les N valeurs propres de J_n s'écrivent alors:

$$\lambda_{i,n} = \lambda_i^{(n)} \cdot \lambda_i^{(n-1)} \cdot \dots \cdot \lambda_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Elles ont une croissance exponentielle dans laquelle la plus grande valeur propre sera $\lambda_{1,+\infty}$. Si nous désignons par $e_i^{(n)}$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{i,n}$, l'équation (5.23) se présente alors sous la forme:

$$Y_{n+1} = c_1(n)\lambda_{1,n}e_1^{(n)} + c_2(n)\lambda_{2,n}e_2^{(n)} + \dots + c_N(n)\lambda_{N,n}e_N^{(n)}$$

après avoir développé

$$Y_0 = c_1(n)e_1^{(n)} + c_2(n)e_2^{(n)} + \dots + c_N(n)e_N^{(n)} \quad \text{dans la base } \left(e_i^{(n)} \right), i = 1, \dots, N.$$

Pour des valeurs de n tendant vers l'infini, le vecteur Y_{n+1} s'alignerait alors sur la direction propre correspondant à la plus grande valeur propre, et ceci quel que soit le vecteur d'origine Y_0 choisi. Nous pouvons ainsi définir le plus grand exposant classique de Lyapunov (en dimension finie) sous la forme:

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|Y_n\| \quad (5.24)$$

Pour obtenir les N exposants de Lyapunov, Benettin et al. [1] choisissent un ensemble de N vecteurs orthogonaux quelconques $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_N^{(0)}$, de normes assez petites, et leur appliquent la matrice $J(X^0)$. Les N vecteurs $e_1^{(0')}, e_2^{(0')}, \dots, e_N^{(0')}$ obtenus sont orthonormalisés selon la procédure classique de Gram-Schmidt afin de conserver N directions indépendantes $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_N^{(1)}$ définies par:

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= \frac{e_1^{(0')}}{\|e_1^{(0')}\|} = e_1^{(0')} / a_1^1 \\ e_k^{(1)} &= \left[e_k^{(0')} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k^{(0')}, e_j^{(1)} \rangle e_j^{(1)} \right] / a_k^1 \\ a_k^1 &= \left\| e_k^{(0')} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k^{(0')}, e_j^{(1)} \rangle e_j^{(1)} \right\|, \quad k = 2, \dots, N \end{aligned}$$

Ils itèrent le procédé jusqu'à la convergence des vecteurs propres et des ECL qui sont donnés par:

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln (a_k^j), \quad k = 1, \dots, N \quad (5.25)$$

Dans la définition des ECL, on fait tendre le temps vers l'infini. Mais il est difficile (voire impossible) de faire tendre le temps vers l'infini dans le cadre de l'assimilation de données, les observations n'étant disponibles que sur un intervalle de temps borné. Nous introduisons alors la définition des exposants de Lyapunov sur un intervalle borné.

5.7.3 Exposants Locaux de Lyapunov

Les ECL donnent une description globale du comportement à long-terme des trajectoires voisines à l'instant initial. Dans certaines applications, on aimerait décrire ce comportement à court-terme, i.e. dans un intervalle de temps $[t_0, T]$, avec $T < +\infty$ donné.

On introduit alors la notion d'exposants de Lyapunov en temps fini (Yoden [108]), encore appelés exposants locaux de Lyapunov (ELL). Nous pouvons aussi citer dans ce cadre, les travaux de Lacarra et Talagrand [37] et Farell [23] qui ont étudié l'évolution à court-terme de petites perturbations dans un modèle barotrope de l'atmosphère

L'idée de base qui conduit à l'analyse des ELL (voire des ECL), est l'étude des *taux de divergence locale*: Nese [76], Grassberger et Procaccia [34], Farmer et Sidorowich [24], Dutton et Wells [16], Nicolis et al. [77]

Définition 5.7.2 *On suppose que le temps est discrétisé par $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$. On définit alors le taux de divergence locale entre les instants $k\tau$ et $(k + 1)\tau$ par:*

$$L(X(k\tau)) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|Z((k + 1)\tau)\|}{\|Z(k\tau)\|} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

où $Z(t)$ est une perturbation infinitésimale (de la trajectoire $X(t)$ du système dynamique), donnée par le système linéaire tangent

Proposition 5.7.1 *on a:*

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n L(X(k\tau)) \quad (5.26)$$

Preuve

On a :

$$\sum_{k=0}^n \ln \frac{\|Z((k + 1)\tau)\|}{\|Z(k\tau)\|} = \ln \frac{\|Z((n + 1)\tau)\|}{\|Z(0)\|} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} \ln \frac{1}{\|Z(0)\|} = 0$$

Nous pouvons alors reformuler la définition (5.7.1) comme suit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|Z(t)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{k=0}^n \ln \frac{\|Z((k + 1)\tau)\|}{\|Z(k\tau)\|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n L(X(k\tau)) \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition (5.7.1), nous pouvons définir une troncature de λ_1 dans un intervalle $[t_0, T]$, $T < +\infty$ fixé:

Définition 5.7.3 *Soit $[t_0, T]$ un intervalle borné. Supposons que $T = M\tau$, $M \in \mathbb{N}$. On définit le plus grand exposant local de Lyapunov λ_{1T} du système dynamique (5.19) par:*

$$\lambda_{1T} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M L(X(k\tau)) \quad (5.27)$$

Le principe de la définition des autres ELL est exactement le même que celui décrit à la section (5.7.1), puisque les ELL ne sont autre qu'une troncature des ECL. De même, le calcul pratique des ELL est identique à celui des ECL, avec troncature au bout de l'intervalle de temps fixé. D'autre part, il est évident par la définition (5.26) que les ELL convergent vers les ECL respectifs lorsque la borne de troncature T tend vers l'infini.

Etant définis en fonction des taux de divergences locales, les ELL donnent une analyse locale de la prédictibilité, contrairement aux ECL qui donnent une analyse globale. En outre, les ELL dépendent de la trajectoire de référence $X(t)$, $t \in [t_0, T]$ et fournissent alors un renseignement sur les régions de l'attracteur où l'on a une bonne, moins bonne ou mauvaise prédictibilité. C'est par ce moyen que Nese [76] a pu subdiviser l'attracteur donné par le modèle de Lorenz en zones *fortement prédictible*, *prédictible*, *non prédictible* et *fortement non prédictible*. Les ELL nous permettent ainsi de savoir si nous sommes sur une partie *prédictible* ou *non* de l'attracteur du système dynamique, s'il en possède un. Ceci est d'une grande importance en assimilation de données où on ajuste les modèles aux données en vue la prédiction, notamment dans le domaine de l'environnement.

Les ELL dépendent aussi du système indépendant de vecteurs (dans la méthode de Benettin et al. [1]) Dans les applications numériques, nous fixerons une fois pour toutes ce système de vecteurs pour annuler cette dépendance

5.7.4 Exposants de Lyapunov d'une série temporelle de données

Les données expérimentales consistent typiquement en des mesures discrètes d'une (ou plusieurs) quantité(s) physique(s) du système.

Nous venons de décrire ci-dessus la détermination des exposants de Lyapunov (classiques et locaux) dans le cas où les équations régissant le système dynamique sont connues. Mais cette méthode ne peut pas directement s'appliquer à des données expérimentales (Wolf et al. [106]), parce qu'on ne connaît pas les équations d'évolution du système dynamique, et par conséquent, on n'a pas accès à la matrice jacobienne qui est le support de base dans le calcul des exposants.

Il est néanmoins possible d'estimer les exposants de Lyapunov (du moins le plus grand) à partir d'une série de données. Deux méthodes sont proposées dont l'une consiste à essayer d'obtenir une approximation de la jacobienne à partir des données (Eckmann et Ruelle [17]), et l'autre à obtenir le plus grand exposant λ_1 en suivant l'évolution au cours du temps de deux portions de trajectoires voisines (Wolf et al. [106]). Notons que la série temporelle étant donnée pour un temps fini, les exposants ainsi calculés sont des ELL. Pour décrire ces méthodes, nous considérons une série temporelle de données: $X(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Méthode de Wolf et al

On suit l'évolution dans le temps d'un point X de la trajectoire et d'un point Y appartenant à une portion différente de la trajectoire. Lorsque la distance $d = \|X - Y\|$ devient trop grande, on remplace le point $Y(t_1)$ par un point $Y'(t_1)$ en essayant de garder au vecteur $X_1 - Y'_1$ la même orientation que $X_1 - Y_1$: voir la figure

(5.45). Le remplacement peut se faire à des intervalles de temps réguliers t_1, t_2, \dots, t_n , ou variables et choisis lorsque la distance devient plus grande qu'une distance fixée d'avance. On obtient par cette méthode (proposée anciennement par Benettin et al [1] pour les systèmes mathématiques) le plus grand exposant de Lyapunov comme:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{d(t_k)}{d'(t_{k-1})} \right) \quad (5.28)$$

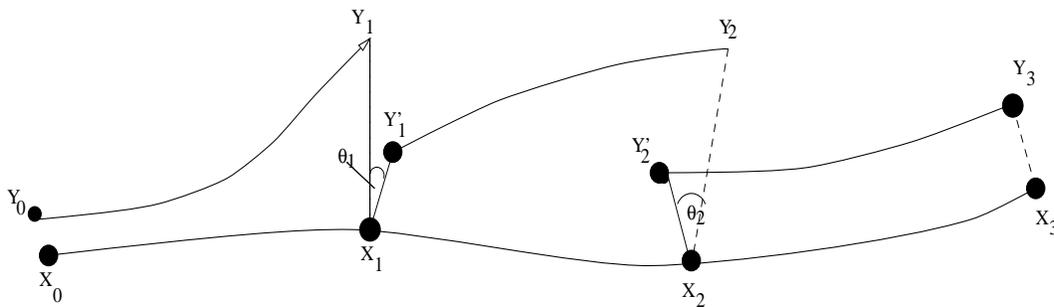


FIG. 5.45 – Schéma montrant le principe du calcul du plus grand exposant de Lyapunov. Celui-ci est calculé à partir de la croissance au cours du temps de la distance entre deux points voisins. Lorsque cette distance devient trop grande, un nouveau point est choisi au voisinage de la trajectoire de façon à minimiser la distance de remplacement $\|X_1 - Y_1'\|$ et l'angle θ_1 d'après Wolf et al [106].

Des détails et des exemples pratiques sont donnés dans Wolf *et al.* [106] et P. Bergé [2] et [3]. Une extension de cette méthode à des triades de points déterminant une surface permet alors d'obtenir la somme $\lambda_1 + \lambda_2$. En principe, une généralisation à la somme de tous les exposants positifs est possible, mais très difficile à mettre en œuvre, et très instable.

Méthode de Eckmann et Ruelle

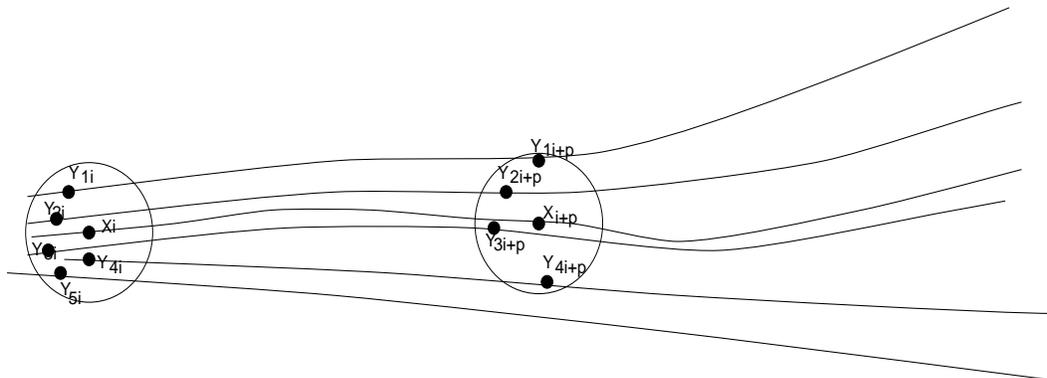


FIG. 5.46 – Schéma montrant l'évolution au cours du temps d'un ensemble de points situés à l'intérieur d'une sphère de rayon r centrée en un point de la trajectoire suivie et permettant de déterminer la matrice jacobienne D_{X_i} d'après Eckmann et Ruelle [17].

On cherche à obtenir une approximation de la matrice jacobienne D_{X_i} à partir des données. Pour cela, on considère l'évolution des points X_{i_j} situés dans une sphère de rayon r autour d'un point donné X_i de la trajectoire, et l'on ne considère que les points tels que leurs images X_{i_j+p} sont restés à la distance $\leq r$ de X_{i+p} à un instant $t = p\tau$ ($\tau = \Delta t$) ultérieur (figure 5.46); on détermine alors la matrice D_{X_i} par une approximation par moindres carrés sur l'ensemble des points X_{i_j} choisis de façon que

$$D_{X_i} \cdot Y_i = Y_{i+p} \quad (5.29)$$

où les vecteurs Y_i et Y_{i+p} sont définis par:

$$Y_i = \{X_{i_j} - X_i; |X_{i_j} - X_i| \leq r\}, \quad Y_{i+p} = \{X_{i_j+p} - X_{i+p}; |X_{i_j+p} - X_{i+p}| \leq r\}$$

Le rayon r est pris assez petit pour que l'approximation linéaire soit valable, mais cependant suffisamment grand pour avoir un nombre de points X_{i_j} permettant une bonne approximation de D_{X_i} . (Il faut au moins n points si l'espace des phases est de dimension n , mais dans la pratique, il en faut un nombre plus grand). On détermine de la même façon les matrices $D_{X_{i+p}}, D_{X_{i+2p}}, \dots$

Eckmann et Ruelle proposent une méthode de triangulation de Householder. La matrice D_{X_1} est décomposée suivant le produit $D_{X_1} = Q_1 R_1$ où Q_1 est une matrice orthogonale et R_1 une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls. si D_{X_1} est inversible, cette décomposition est unique. Puis, le produit $D_{X_{1+p}} Q_1$ est décomposé de la même façon en $Q_2 R_2$ et ainsi de suite. On obtient alors

$$D_{X_{1+np}} \cdot D_{X_{1+(n-1)p}} \dots D_{X_1} = Q_n \cdot R_n \cdot R_{n-1} \dots R_2 \cdot R_1$$

et les exposants de Lyapunov sont alors donnés par:

$$\lambda_k = \frac{1}{np\tau} \sum_{j=1}^n \log(R_j)_{kk}$$

Les exposants λ_k étant ainsi rangés par ordre décroissant, si l'on ne s'intéresse qu'aux l premiers, il suffit de se restreindre à la sous-matrice supérieure $l \times l$ dans la décomposition.

Des détails et des exemples pratiques sont donnés dans Eckmann et Ruelle [17] et P. Bergé [2] et [3].

A partir des matrices D_{X_i} , on pourrait appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt proposée par Benettin et al. [1] (voir section 5.7.1). C'est ce que font Sano et Sawada [89] qui ont proposé indépendamment de Eckmann et Ruelle la même méthode de détermination par une approximation aux moindres carrés des D_{X_i} . C'est ce que font aussi Vastano et Kostelich [103] dans leur comparaison entre cette méthode et celle de Wolf et al.

5.7.5 Détermination pratique des D_{X_i}

Soient X et Y deux vecteurs appartenant à un espace de dimension finie n . L'approximation par moindres carrés de l'application linéaire (la matrice carrée $n \times n$) A qui transforme X en Y i.e. $A \cdot X = Y$ consiste à trouver le minimum de la fonctionnelle

$$S(B) = \frac{1}{2} \|B \cdot X - Y\|^2$$

sur l'ensemble des matrices carrées $n \times n$, et la matrice A est alors caractérisée par

$$\frac{\partial S}{\partial B}(A) = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial S}{\partial b_{kl}}(a_{kl}) = 0, \quad 1 \leq k, l \leq n \quad (5.30)$$

ce qui donne les relations explicites: $A \cdot V = C$ où V et C sont des matrices carrées $n \times n$ définies par: $V_{kl} = X_k X_l$ et $C_{kl} = Y_k X_l$, $1 \leq k, l \leq n$, et A est alors obtenue par une inversion de matrice. Ceci fait cependant intervenir deux difficultés pratiques non négligeables:

- La matrice V est de rang 1
- Toute matrice B telle que $B \cdot X = Y$ réalise le minimum de S , et donc la caractérisation (5.30) n'est que nécessaire mais pas suffisante.

Ces deux problèmes font la limitation des méthodes de Eckmann et Ruelle et de Sano et Sawada. Dans ce qui suit, nous proposons une amélioration de l'approximation de la jacobienne par la technique de pseudo-inverse ou inverse généralisée, encore connue sous le nom de *inverse de Moore-Penrose*.

Inverse généralisée

Soient E et F deux espaces vectoriels réels normés et f une application linéaire de E dans F .

A tout $y \in F$, on fait correspondre l'unique élément $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\}) = \{x \in E | f(x) = y_0\}$ et défini par:

$$\|x_0\| = \min_{x \in f^{-1}(\{y_0\})} \|x\|$$

où $y_0 \in F$ est la projection orthogonale de y sur le sous-espace $f(E)$ de F . On définit ainsi l'application:

$$\begin{aligned} f^+ : F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^+(y) = x_0 \end{aligned}$$

L'application f^+ est appelée pseudo-inverse de f et vérifie plusieurs propriétés (voir P. J. Laurent [38]) dont nous ne retenons que les deux suivantes, qui suffisent dans le cadre de ce paragraphe.

Proposition 5.7.2 *En notant f^t l'application transposée de f , on a:*

$$1.) (f^+)^t = (f^t)^+$$

2.) si f est continue et univoque, alors $f^+ = (f^t f)^{-1} f^t$

Pour les démonstrations, on peut se référer à P. J. Laurent [38] (pp 202 – 208)

Nous appliquons alors cette notion de pseudo-inverse pour l'approximation des jacobiniennes D_{X_i} . Sans nuire à la généralité, nous pouvons considérer que $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Nous cherchons donc une matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$ telle que $A \cdot X = Y$ et de norme minimale. Pour cela, nous définissons l'application

$$\begin{aligned} T : \mathcal{M}(n, n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ B &\longmapsto B \cdot X \end{aligned}$$

et le problème revient à calculer $A = T^+ \cdot Y$ puisque T n'est pas forcément inversible. Nous utiliserons les notations matricielles suivantes, en commettant un abus de notation entre l'application linéaire T et la matrice qui la représente.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad X^t = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 0^t = (0, 0, \dots, 0)$$

pour $B \in \mathcal{M}(n, n)$, on note:

$$L_{i_B} = (B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{in}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad L_B = (L_{1_B}, L_{2_B}, \dots, L_{n_B}), \quad L_B^t = \begin{pmatrix} L_{1_B}^t \\ L_{2_B}^t \\ \vdots \\ L_{n_B}^t \end{pmatrix}$$

$L_B^t \in \mathbb{R}^{n^2}$. On a alors:

$$T(B) = B \cdot X = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n B_{1j} X_j \\ \sum_{j=1}^n B_{2j} X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n B_{nj} X_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^t & 0^t & \dots & 0^t \\ 0^t & X^t & \dots & 0^t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0^t & \dots & 0^t & X^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_{1_B}^t \\ L_{2_B}^t \\ \vdots \\ L_{n_B}^t \end{pmatrix} = T_1^t \cdot L_B^t \quad (5.31)$$

De plus, si l'on munit \mathbb{R}^{n^2} et $\mathcal{M}(n, n)$ de leur norme euclidienne

$$\|Z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2} |Z_i|^2}, \quad \|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^2}, \quad \forall Z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad \forall B \in \mathcal{M}(n, n)$$

alors on peut identifier B à L_B^t par le moyen de l'isomorphisme:

$$\begin{aligned} I : \mathcal{M}(n, n) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ B &\longmapsto L_B^t, \end{aligned}$$

ce qui permet aussi de faire l'identification: $T = T_1^t$.

On a alors:

$$T^+ = (T_1^t)^+ = (T_1^+)^t = \left((T_1^t \cdot T_1)^{-1} \cdot T_1^t \right)^t = T_1 \cdot (T_1^t \cdot T_1)^{-1} = T^t \cdot (T \cdot T^t)^{-1} \quad (5.32)$$

En développant le dernier membre de la suite d'égalités (5.32), on a :

$$(T \cdot T^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|X\|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|X\|^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\|X\|^2} \end{pmatrix}, \quad (T \cdot T^t)^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} \frac{Y_1}{\|X\|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{Y_2}{\|X\|^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{Y_n}{\|X\|^2} \end{pmatrix}$$

or :

$$L_A^t = \begin{pmatrix} L_{1A}^t \\ L_{2A}^t \\ \vdots \\ L_{nA}^t \end{pmatrix} = T^+ \cdot Y = T^t \cdot (T \cdot T^t)^{-1} \cdot Y$$

en développant on a :

$$L_{1A}^t = \begin{pmatrix} X & 0_{\mathbb{R}^n} & \cdots & 0_{\mathbb{R}^n} \\ 0_{\mathbb{R}^n} & X & \cdots & 0_{\mathbb{R}^n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \cdots & 0_{\mathbb{R}^n} & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{Y_1}{\|X\|^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{Y_2}{\|X\|^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{Y_n}{\|X\|^2} \end{pmatrix}$$

on en déduit :

$$L_{1A}^t = \left(\frac{X_1 Y_1}{\|X\|^2}, \frac{X_2 Y_1}{\|X\|^2}, \dots, \frac{X_n Y_1}{\|X\|^2} \right)$$

et de façon générale :

$$L_{kA}^t = \left(\frac{X_1 Y_k}{\|X\|^2}, \frac{X_2 Y_k}{\|X\|^2}, \dots, \frac{X_n Y_k}{\|X\|^2} \right), \quad 1 \leq k \leq n$$

Puisque les $(L_{kA})_{1 \leq k \leq n}$ sont les lignes A , on en déduit que :

$$A_{ij} = \frac{X_j Y_i}{\|X\|^2} \tag{5.33}$$

On a en plus :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot X_j = \sum_{j=1}^n \frac{X_j Y_i X_j}{\|X\|^2} = Y_i$$

Pour calculer les approximations des jacobiniennes D_{X_i} , il suffit d'appliquer la méthode ci-dessus avec $X = Y_i$ et $Y = Y_{i+p}$ (cf égalité (5.29)). On obtient alors :

$$(D_{X_i})_{kl} = \frac{(Y_i)_l \cdot (Y_{i+p})_k}{\|Y_i\|^2} \tag{5.34}$$

Une fois les (D_{X_i}) connus, on peut alors utiliser la méthode de Eckmann et Ruelle ou bien celle de Sano et Sawada.

Il nous a paru plus plausible d'utiliser celle de Sano et Sawada par soucis de conformité (en ce qui concerne la procédure de Gram-Schmidt) de méthodes de calcul entre le cas des équations linéaires tangentes et les données uniquement.

5.7.6 Application à l'assimilation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous essayons de donner une réponse à la question:

Peut-on utiliser la prédictibilité (dans le contexte de l'assimilation variationnelle de données) comme critère de comparaison entre différentes configurations?

Nous avons déjà vu ci-dessus que la prédictibilité d'un système dynamique peut être quantifiée par son plus grand exposant de Lyapunov. Dans le contexte de l'assimilation variationnelle, nous sommes limités à un intervalle de temps borné (la fenêtre d'assimilation), et nous utiliserons alors la caractérisation de la prédictibilité par les exposants de Lyapunov locaux. Le système dynamique à considérer est le système d'optimalité:

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} F(X) \\ - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \cdot P + C^t(C \cdot X - X_{obs}) \end{pmatrix}$$

dont la variable d'état est $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$. Une perturbation $\tilde{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{P} \end{pmatrix}$ de \mathcal{X} est donnée par le système linéaire tangent:

$$\frac{d\tilde{\mathcal{X}}}{dt} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{X}}(\mathcal{X}) \right] \cdot \tilde{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right] \bullet & 0 \\ - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(X) \right] \bullet \cdot P + C^t C \bullet & - \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X) \right]^t \bullet \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{P} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons formellement écrire (pour assouplir la notation):

$$\frac{d\tilde{\mathcal{X}}}{dt} = T(t) \cdot \tilde{\mathcal{X}} \tag{5.35}$$

où:

$$T(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ B(t) & -A^t(t) \end{bmatrix}$$

On discrétise l'équation (5.35) en temps et en espace et on a:

$$\tilde{\mathcal{X}}^{n+1} = \mathcal{R}_n \cdot \tilde{\mathcal{X}}^0, \quad n \geq 0$$

$$\tilde{\mathcal{X}}^k = \begin{pmatrix} \tilde{X}^k \\ \tilde{P}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \text{car} \quad \tilde{X}^k \text{ et } \tilde{P}^k \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathcal{R}_n = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_0, \quad T_k = \begin{bmatrix} A(t_k) & 0 \\ B(t_k) & -A^t(t_k) \end{bmatrix}$$

$A(t_k)$ et $B(t_k)$ étant des matrices carrées d'ordre N pour tout $k \geq 0$. Des calculs algébriques simples montrent que:

$$\mathcal{R}_{n-1} = \begin{bmatrix} A(t_{n-1}) \cdot A(t_{n-2}) \cdot \dots \cdot A(t_0) & 0 \\ B'(t_{n-1}) & (-1)^n \cdot A^t(t_{n-1}) \cdot A^t(t_{n-2}) \cdot \dots \cdot A^t(t_0) \end{bmatrix} \quad \forall n \geq 1,$$

où la matrice $B'(t_{n-1})$ dépend (en produits et sommes) des matrices $B(t_i)$ et $A^t(t_i)$ pour $i = 1, \dots, n-1$, et de $A(t_i)$ pour $i = 1, \dots, n-2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= \begin{bmatrix} A(t_n) & 0 \\ B(t_n) & -A^t(t_n) \end{bmatrix} \cdot \mathcal{R}_{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} A(t_n) \cdot A(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot A(t_0) & 0 \\ B'(t_n) & (-1)^n \cdot A^t(t_n) \cdot A^t(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot A^t(t_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$B'(t_n) = B(t_n) \cdot A(t_{n-1}) \cdot A(t_{n-2}) \cdot \dots \cdot A(t_0) - A^t(t_n) \cdot B'(t_{n-1})$$

■

On peut donc distinguer deux cas:

- i) Si n est pair, \mathcal{R}_n étant triangulaire par blocs, ses valeurs propres sont celles de $A(t_n) \cdot A(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot A(t_0)$, avec une double multiplicité. Or $A(t_k)$ est l'opérateur discrétisé du système linéaire tangent au modèle direct, i.e. $J_n = A(t_n) \cdot A(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot A(t_0)$ est la résolvante du système linéaire tangent au pas de temps t_n . \mathcal{R}_n et J_n ayant les mêmes valeurs propres, on en déduit par définition que les exposants de Lyapunov du système d'optimalité sont égaux à ceux du modèle direct à l'optimum, et donc la prédictibilité du système d'optimalité est égale à celle du modèle direct à l'optimum.
- ii) Si n est impair, le spectre de \mathcal{R}_n est constitué du spectre de J_n doublé de son opposé, i.e.: $\{sp(\mathcal{R}_n)\} = \{sp(J_n)\} \cup -\{sp(J_n)\}$. Dans ce cas, la valeur propre maximale de

\mathcal{R}_n est donnée par $\lambda_{max}(\mathcal{R}_n) = \max\{\lambda_{max}(J_n), -\lambda_{min}(J_n)\}$.

Si donc $\lambda_{max}(J_n) \geq -\lambda_{min}(J_n)$, alors la prédictibilité du système d'optimalité est la même que celle du modèle direct. Sinon, il y a perte de prédictibilité. Mais n étant l'indice d'intégration en temps du modèle, on peut éviter ce problème par une mise à jour des exposants de Lyapunov tous les deux pas de temps (n pair), et garder la conclusion du i). En général, on met à jour les exposants de Lyapunov à des intervalles réguliers d'intégration en temps du modèle.

Pour un modèle direct linéaire, la jacobienne $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{1 \leq i, j \leq N}$ est une matrice constante qui ne dépend pas de la variable d'état X . Dans ce cas, les exposants de Lyapunov du système d'optimalité sont égaux à ceux du modèle direct, sans qu'on ait besoin de se placer à l'optimum. Dans le cas non linéaire, la jacobienne dépend de la variable d'état et nous ne pouvons plus affirmer l'égalité des exposants de Lyapunov pour les deux systèmes. Par contre, les exposants de Lyapunov du système d'optimalité sont égaux à ceux du modèle direct dans lequel la variable d'état est prise à l'optimum. Et ces derniers peuvent être très différents de ceux du modèle direct tout court.

D'autre part, puisque la variable d'état du modèle direct à l'optimum dépend des observations (et de la configuration des observations), il n'est pas erroné de penser que les exposants de Lyapunov du système d'optimalité dépendent à leur tour des observations (et de la configuration des observations), de sorte que nous pouvons établir comme critère de comparaison entre différentes configurations: le plus grand exposant de Lyapunov du système d'optimalité. Les meilleures configurations (observations) au sens de ce nouveau critère étant celles qui réalisent:

$$\lambda_{max}(X_{obs}^*) = \min_{X_{obs} \in E_{obs}} \lambda_{max}(X_{obs}) \quad (5.36)$$

où $\lambda_{max}(X_{obs})$ désigne le plus grand exposant de Lyapunov du système d'optimalité résolu avec les observations X_{obs} .

Disposant des observations qui sont une série temporelle de données, nous pouvons aussi calculer les exposants de Lyapunov à partir des observations uniquement, selon les méthodes décrites ci-dessus. Ce qui nous permet non seulement de quantifier la prédictibilité (à partir) des observations, mais en plus de la comparer à celle obtenu par les équations du modèle après assimilation de données.

5.7.7 Résultats numériques

Nous simulons à partir du modèle QG, des observations sur des pseudo-traces de satellite. Dans un premier temps, le modèle est considéré barotropique. Le temps d'intégration du modèle (et donc de génération des observations) est de quatre mois. Nous introduisons deux paramètres pour déterminer la densité spatio-temporelle des données:

- *modpt*: intervalle régulier de temps séparant deux prises d'observations.
- *interv*: intervalle régulier de séparation spatiale de deux traces consécutives.

Par exemple, ($modpt = 3, interv = 18$) signifie que les observations sont prises tous les 3 pas de temps (à partir de l’instant initial) sur des traces séparées de 18 pas de discrétisation spatiale. C’est le cadre des expériences numériques ci-dessous. Nous avons calculé les ELL du modèle qui a généré les observations, et ceux donnés par la méthode de Eckmann et Ruelle et celle de Wolf et *al.* respectivement. Le tableau ci-dessous montre, pour un même vecteur d’observations X_{obs} , le plus grand ELL calculé par ces trois méthodes :

	modèle tangent: λ_{mt}	Eckmann et Ruelle λ_{ER}	Wolf et <i>al.</i> λ_{Wa}
ELL _{max}	$5.50596312 \times 10^{-3}$	$4.97028089 \times 10^{-3}$	$2.63886243 \times 10^{-3}$

Les observations ayant été simulées à partir du modèle, nous disposons de la jacobienne exacte (autour du vrai état de référence) pour le calcul des ELL. Nous pouvons donc considérer λ_{mt} comme l’ELL exact. Nous pouvons aussi dire que λ_{ER} est une “*meilleure approximation*” de λ_{mt} que λ_{Wa} , ce qui montre que la méthode de Wolf et *al.*, basée sur l’utilisation des taux de divergences locales, n’est pas bien adaptée au problème. En effet, les taux de divergences locales ne suffisent pas pour estimer le plus grand ELL, il faut en plus avoir une connaissance (approximation) de la jacobienne.

D’autre part, les valeurs positives du plus grand ELL obtenues par ces trois méthodes montrent un manque de prédictibilité, i.e. un comportement chaotique aussi bien pour le modèle que pour les observations.

Dans la suite, nous ne retiendrons que la méthode par les équations tangentes et celle de Eckmann et Ruelle.

Pour appliquer le calcul des ELL à l’optimisation de l’opérateur C via l’assimilation variationnelle de données , nous simulons des données par un état de référence et nous les assimilons, puis nous calculons le plus grand ELL à l’optimum. Nous pouvons ensuite le comparer à ceux calculés directement à partir de l’état de référence et à partir des observations (Eckmann et Ruelle).

exact	ap. assim	Eck. et Rue.
5.505963×10^{-3}	5.501056×10^{-3}	4.970280×10^{-3}

On constate dans ce tableau que l’ELL calculé après assimilation est plus proche de l’ELL exact que celui calculé à partir des données. Ceci s’explique par le fait que l’assimilation de données permet de retrouver la trajectoire “*la plus proche possible*” des données, et de cette trajectoire reconstruite on déduit une jacobienne qui est une meilleure approximation de la jacobienne exacte par rapport à la méthode de Eckmann et Ruelle. Même en mettant à jour la jacobienne (après assimilation) uniquement aux instants où les observations ont été faites, on retrouve encore des ELL plus proches des ELL exacts que ceux obtenus par la méthode de Eckmann et Ruelle.

Nous présentons ci-dessous l’évolution au cours du temps des ELL obtenus par ces deux méthodes, ainsi que le logarithme de l’erreur relative commise dans la convergence de chaque méthode :

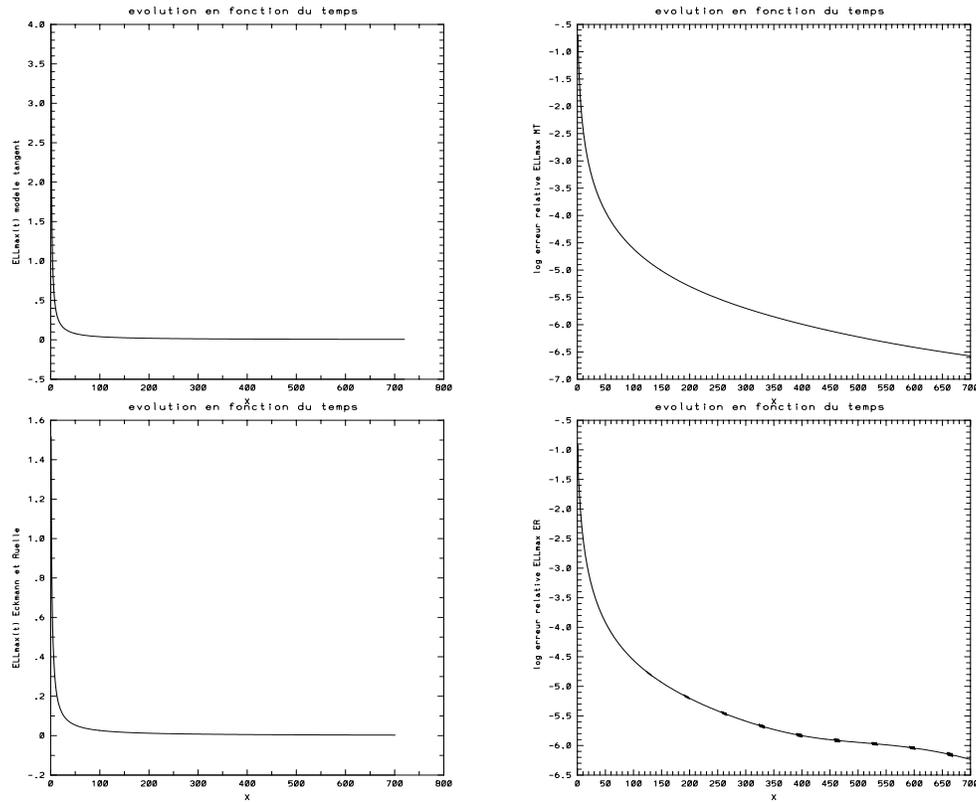


FIG. 5.47 – Comparaison de la convergence du plus grand ELL calculé par les équations tangentés (en haut) et par la méthode de Eckmann et Ruelle (en bas).

La notion de prédictibilité locale (définie par le plus grand ELL) d'un modèle n'a de sens que si l'on s'est fixé une trajectoire de référence, ou plus précisément un état initial. Or le grand handicap dans les modèles des problèmes d'environnement est justement le manque de connaissance de l'état initial, en sorte qu'on ne peut parler d'une prédictibilité locale dans l'absolu. Ceci est mis en évidence dans le tableau ci-dessous, où nous avons calculé le plus grand ELL pour six états initiaux différents.

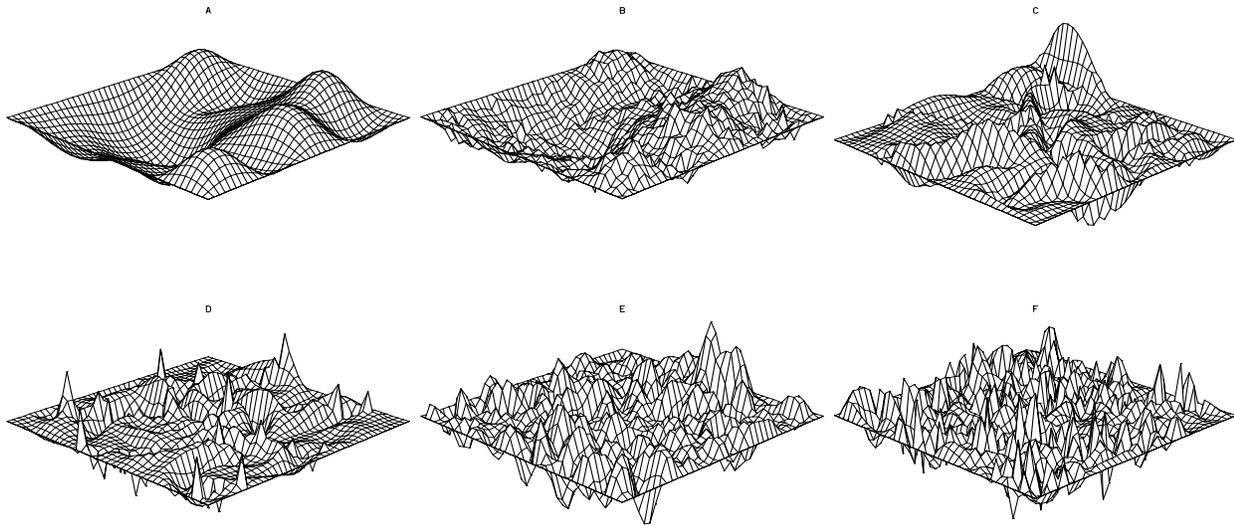


FIG. 5.48 – Les six différents états initiaux (choisis de façon aléatoire) pour montrer la dépendance des ELL par rapport à la condition initiale de modèle.

A	$5.50596311 \times 10^{-3}$
B	$5.51425611 \times 10^{-3}$
C	$5.76216335 \times 10^{-3}$
D	$5.74938271 \times 10^{-3}$
E	$5.75795069 \times 10^{-3}$
F	$5.73397652 \times 10^{-3}$

Les valeurs de ce tableau montrent que le plus grand ELL varie très peu en fonction de la condition initiale (et donc de l'état de référence). On pourrait penser que ceci a pour cause la durée de la période d'intégration du modèle, qui est de 45 jours dans les expériences ci-dessus. On a alors réduit l'intervalle de temps d'intégration pour voir plus clairement l'influence de la trajectoire de référence sur le plus grand ELL.

	$5j$	$10j$	$15j$	$20j$	$25j$
A	4.9707×10^{-2}	2.4767×10^{-2}	1.6470×10^{-2}	1.23289×10^{-2}	9.8522×10^{-3}
B	4.9711×10^{-2}	2.4763×10^{-2}	1.6465×10^{-2}	1.23287×10^{-2}	9.8578×10^{-3}
C	4.9635×10^{-2}	2.4650×10^{-2}	1.6350×10^{-2}	1.2239×10^{-2}	9.8159×10^{-3}
D	4.9644×10^{-2}	2.4660×10^{-2}	1.63563×10^{-2}	1.2237×10^{-2}	9.8048×10^{-3}
E	4.9640×10^{-2}	2.4659×10^{-2}	1.6361×10^{-2}	1.2251×10^{-2}	9.8268×10^{-3}
F	4.9639×10^{-2}	2.4656×10^{-2}	1.63562×10^{-2}	1.2243×10^{-2}	9.8174×10^{-3}

	30j	35j	40j	45j
A	8.2110×10^{-3}	7.0472×10^{-3}	6.1794×10^{-3}	5.5059×10^{-3}
B	8.2215×10^{-3}	7.0600×10^{-3}	6.1910×10^{-3}	5.5142×10^{-3}
C	8.2405×10^{-3}	7.1496×10^{-3}	6.3582×10^{-3}	5.7621×10^{-3}
D	8.2211×10^{-3}	7.1247×10^{-3}	6.3306×10^{-3}	5.7493×10^{-3}
E	8.2488×10^{-3}	7.1537×10^{-3}	6.3674×10^{-3}	5.7579×10^{-3}
F	8.2383×10^{-3}	7.1422×10^{-3}	6.3449×10^{-3}	5.7339×10^{-3}

Nous constatons alors que même pour des durées d'intégration du modèle assez petites, les différents ELL restent très proches, pourtant les trajectoires de référence sont très différentes (leurs conditions initiales respectives étant souvent très distantes). Ceci nous montre qu'on est déjà sur l'attracteur du modèle (la phase de spin-up est passée.)

Nous pouvons maintenant faire varier la configuration spatio-temporelle des observations et calculer le plus grand ELL (ELL_{\max}) correspondant à chaque configuration après assimilation de données et directement à partir des données. La "configuration optimale" étant celle pour laquelle on a le plus petit ELL_{\max} . Mais les résultats des tableaux précédents montrent que ce critère de comparaison n'est pas adéquat, car l'assimilation de données fournit des états initiaux relativement proches les uns des autres (pour différentes configurations des observations) et il est difficile de déceler la variation (dégradation) du plus grand ELL en fonction de la configuration des observations. On pourrait alors dire que la quasi-totalité de l'information contenue dans la configuration des observations est prise en compte pendant l'assimilation. La figure ci-dessous montre la variation du plus grand ELL lorsqu'on dégrade la configuration des observations, en faisant varier le paramètre *interv* (intervalle de séparation entre deux traces consécutives) de 1 à 30 et *modpt* est fixé à 1.

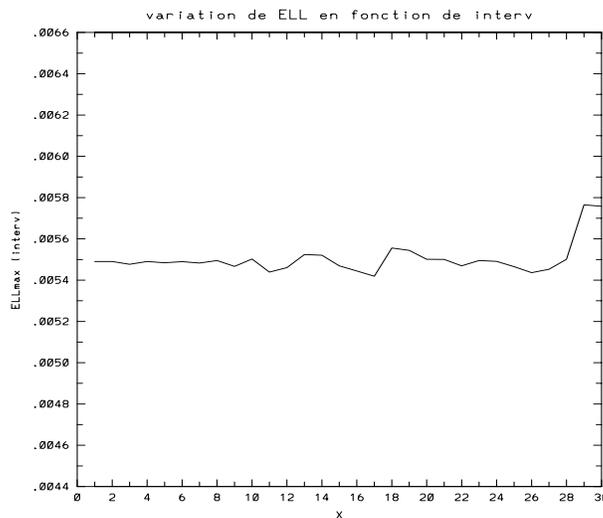


FIG. 5.49 – Variation du plus grand ELL en fonction de *interv*.

Conclusion

Pour une observation fixée, l'assimilation de données est le moyen par excellence qui nous fournit une bonne approximation de l'état initial qui donne l'état de référence "*le plus proche possible*" des observations. De ce point de vue, l'assimilation de données permet d'améliorer la prédictibilité du modèle (par la connaissance de l'état initial); elle permet aussi d'améliorer la prédictibilité des observations.

Conclusion.

L'assimilation variationnelle basée sur les méthodes de contrôle optimal a montré son efficacité en ce qui concerne la reconstitution des champs à partir d'un modèle et des observations, et son application dans les problèmes géophysiques, notamment en météorologie et en océanographie, a déjà donné de nombreux résultats concrets.

L'analyse de sensibilité appliquée à l'assimilation variationnelle nous a permis de faire une analyse *a posteriori* (du processus d'assimilation) qui nous a fourni des informations sur:

- La prise en compte du bruit sur les observations dans le processus d'assimilation, et sa propagation sur les champs reconstitués. Nous avons ainsi calculé la sensibilité de l'état initial optimal (variable de contrôle) par rapport au bruit des observations. De la même façon, nous avons calculé la sensibilité de certaines réponses (l'énergie cinétique et l'enstrophie) qui sont des quantités diagnostiques du modèle.

Nous avons montré qu'une approche au premier ordre ne suffit pas pour évaluer la sensibilité d'une réponse dans le cadre de l'assimilation variationnelle (même dans le cas d'un modèle linéaire très simple). Nous avons donc poussé plus loin l'analyse en allant au second ordre. Ceci étant le résultat du fait qu'en assimilation de données nous avons étendu la notion de modèle au système d'optimalité. Nous avons obtenu la sensibilité en inversant le Hessien (de la fonction coût) dont le produit par un vecteur est fourni par la technique de l'adjoint au second ordre.

Dans la deuxième partie du travail portant sur la sensibilité par rapport à la configuration spatio-temporelle des observations, nous avons relevé l'importance de l'opérateur C de projection sur l'espace des observations, et son influence dans le processus d'assimilation, notamment dans la structure du Hessien de la fonction coût. Nous avons calculé la variation du conditionnement du Hessien et de la variance d'une forme linéaire définie sur les variables de contrôle en fonction de la dégradation de C , et les résultats montrent que ces critères de comparaison entre différentes configurations sont consistants, car ils se dégradent tous les deux lorsqu'on dégrade la configuration. Les résultats numériques nous montrent que la dégradation spatiale de la configuration affecte beaucoup plus la structure du Hessien que la dégradation temporelle. On a donc intérêt à privilégier la densité spatiale des observations par rapport à la densité temporelle. Mais cette question reste ouverte à la suggestion d'autres critères d'optimisation de la configuration.

Toute cette étude repose sur un élément central: le Hessien de la fonction coût, qui contient plusieurs informations qualitatives concernant l'assimilation:

- le conditionnement du Hessien définit la convergence plus ou moins rapide du processus d'assimilation.
- La qualité de l'assimilation: les parties du champ initial bien reconstruites (identifiées) et celles mal reconstruites sont données par les directions propres associées aux plus grandes et aux plus petites valeurs propres du Hessien respectivement.
- Les propriétés de “*symétrie*” et de “*positivité*” du Hessien garantissent l'existence et l'unicité locale de l'optimum.

Numériquement, nous avons appliqué l'analyse de sensibilité développé dans cette étude à l'assimilation de données dans le modèle QG. Beaucoup d'expériences ont été réalisées avec le barotrope (monocouche), car nous voulions d'abord exhiber la faisabilité du problème. Ceci étant maintenant acquis, nous pouvons envisager des expériences plus réalistes avec le modèle multicouches.

Cette étude reste très transparente par rapport au modèle choisi. Elle peut donc être appliquée à de vastes domaines, pourvu que l'on se place dans le cadre de l'assimilation variationnelle de données, notamment en météorologie.

L'analyse de sensibilité nous a donné une meilleure connaissance de l'erreur d'identification de la condition initiale (variable de contrôle) en fonction du bruit sur les observations, ce qui est d'une grande importance pour les prévisions numériques.

L'analyse au second ordre, basée sur l'utilisation du Hessien, se montre un outil bien performant pour toute étude *a posteriori* de l'assimilation variationnelle. Néanmoins, elle a l'inconvénient d'être très coûteuse du point de vue du calcul en temps et en mémoire. En effet, le calcul du produit Hessien \times vecteur nécessite le calcul et le stockage du modèle direct non linéaire, du modèle direct linéarisé, du modèle adjoint et de l'adjoint au second ordre.

Un moyen de baisser ce coût élevé est éventuellement de réduire la dimension de l'espace de contrôle, notamment par une paramétrisation au moyen d'une base d'ondelettes par exemple. Cette perspective semble prometteuse, d'autant plus qu'avec un petit nombre (n) de paramètres à identifier, on pourra se permettre l'obtention de toute la matrice hessienne par n intégrations de l'adjoint au second ordre, et obtenir des informations inaccessibles par le produit Hessien \times vecteur.

L'étude de la prédictibilité du système d'optimalité nous a montré que ce système n'apporte pas d'information supplémentaire en ce qui concerne la prédictibilité. Nous avons vu théoriquement que les exposants de Lyapunov du système d'optimalité sont exactement ceux du modèle direct pris à l'optimum, mais avec une double multiplicité algébrique par rapport à ceux du modèle direct. Cependant, pour étudier la variation de la prédictibilité par rapport à la configuration des observations et/ou aux observations elles-mêmes, il faut considérer le système d'optimalité.

Bibliographie

- [1] G. BENETTIN, L. GALGANI, A. GIORGILLI, and J.M. STRELCYN. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them: theory and numerical applications. *Meccanica*, 15:9–30, 1980.
- [2] P. BERGÉ, Y. POMEAU, and Ch. VIDAL. *L'ordre dans le chaos: vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, Jouve, 18, rue St-Denis, 75001 Paris, 1984. Collection Enseignement des Sciences.
- [3] Pierre BERGÉ. *Le Chaos: théorie et expériences*. Eyrolles, 61, Boulevard St-Germain 75240, Paris 5^e, 1988. Collection du Commissariat à l'énergie atomique.
- [4] C. BERNIER. *Étude et parallélisation d'un code d'éléments finis pour la modélisation quasi-géostrophique des circulations océaniques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990. Thèse de doctorat.
- [5] E. BLAYO. *Développement d'un modèle quasi-géostrophique de circulation océanique: application à l'océan Atlantique Nord*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I et INPG, 1992. Thèse de doctorat.
- [6] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Masson, Paris, 1983. collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. sous la direction de P.G. Ciarlet et J.J. Lions.
- [7] R. BUZZIA. Sensitivity of optimal unstable structures. *Q.J. Roy. Met. Soc.*, 120:429 – 451, 1994.
- [8] D. G. CACUCI. Sensitivity theory for nonlinear systems. I. nonlinear functional analysis approach. *J. Math. Phys.*, 22(12):2794 – 2802, 1981.
- [9] D. G. Cacuci. Sensitivity theory for nonlinear systems. II. extensions to additional classes of responses. *J. Math. Phys.*, 22(12):2803 – 2812, 1981.
- [10] D.G. CACUCI, P.J. MAUDLIN, and C.V. PARKS. Adjoint sensitivity analysis of extremum-type responses in reactor safety. *Nuc. Sci. Eng.*, 83:112 – 135, 1983.

- [11] G. CHAVENT. Newsize \times curvature conditions for strict quasi-convexity of sets. *SIAM J. Control and Optimization*, 29(6):pp 11348–1372, 1991.
- [12] G. CHAVENT. Quasi-convex sets and size \times curvature condition, application to non-linear inversion. *Appl. Math. Optim.*, 24:pp 129–169, 1991.
- [13] P. DE MEY and R.A. MORROW. An adjoint assimilation of altimetric, surface drifter and hydrographic data in a QG model of the azores current. *Geophys. Res.*, 1995.
- [14] N.R. DRAPER and H. SMITH. *Applied Regression Analysis*. John Wiley, New York, 1966.
- [15] K.K. DROEGEMEIER and J.J. LEVIT. The sensitivity of numerically-simulated storm evolution to initial conditions. In *17th Conf. on Severe Local Storms*, pages 431–435, St. Louis, Missouri, 1993. Amer. Met. Soc.
- [16] J.A. DUTTON and R. WELLS. *Predictability of Fluid Motions: p. 11*. Am. Inst. of Physics, New York, 1984. G. Hollway and B.J. West, eds.
- [17] J.P. ECKMANN and D. RUELLE. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57:617–, 1985.
- [18] R.M. ERRICO and T. VUKICEVIC. Sensitivity analysis using an adjoint of the PSU-NCAR mesoscale model. *Mon. Wea. Rev.*, 120:1644–1660, 1992.
- [19] G. EVENSEN. Using the extended kalman filter with multilayer quasi-geostrophic ocean model. *J. Geophys. Res.*, 97(C11):17905–17924, 1992.
- [20] G. EVENSEN. Open boundary conditions for the extended kalman filter with a quasi-geostrophic ocean model. *J. Geophys. Res.*, 98(C9):16529–16546, 1993.
- [21] G. EVENSEN. Inverse methods and data assimilation in nonlinear ocean models. *Physica, D* 77:108–129, 1994.
- [22] G. EVENSEN. Sequential data assimilation with nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99(C5):10143–10162, 1994.
- [23] B. F. FARELL. Small error dynamics and the predictability of atmospheric flows. *Am. Meteor. Soc*, 47(20):2409–2416, 1990.
- [24] J.D. FARMER and J.J. SIDOROWICH. *Phys. Rev. Lett*, 59:845–, 1987.
- [25] I. FUKUMORI, J. BENVENISTE, WUNSCH C, and D.B. HAIDVOGEL. Assimilation of sea surface topography into an ocean circulation model using a steady-state smoother. *J. Phys. Oceanogr.*, 23:1831–1855, 1993.

-
- [26] I. FUKUMORI and P. MALANOTTE-RIZZOLI. An approximate kalman filter for ocean data assimilation: An example with an idealized gulf stream model. *J. Geophys. Res.*, 100(C4):6777–6793, 1995.
- [27] A.R GALLANT. Nonlinear regression. *Am. Stat.*, 29:73–81, 1975.
- [28] A. GANDINI. *Journal of Nuclear Energy*, (21):755, 1967.
- [29] M. GHIL. Meteorological data assimilation for oceanographers. part I: Description and theoretical framework. *Dyn. Atmos. Oceans*, 13((3-4)):171–218, 1989.
- [30] M. GHIL. Sequential estimation in meteorology and oceanography. Lecture notes, International summer school on assimilation of observations in Meteorology and Oceanography, Toulon, France, 1993.
- [31] M. GHIL, S. COHN, J. TAVANTZIS, K. BUBE, and E. ISAACSON. Applications of estimation theory to numerical weather prediction. In L. BENGTSSON, M. GHIL, and E. KALLÉN, editors, *Dynamic Meteorology: Data assimilation methods*, pages 139–224, New York, 1881. Springer.
- [32] M. GHIL and P. MALANOTTE-RIZZOLI. *Data assimilation in meteorology and oceanography*. edited by B. SALTZMANN, 1991. *Adv. Geophys.* 33, 141-266.
- [33] J.C. GILBERT and C. LEMARÉCHAL. Some numerical experiments with variable storage quasi-newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45:407–435, 1989.
- [34] P. GRASSBERGER and I. PROCACCIA. *Physica*, D 13:34–, 1984.
- [35] M.C.G. HALL, D.G. CACUCI, and M.E. SCHLESINGER. Sensitivity analysis of a radiative-convective model by the adjoint method. *J. Atmos. Sci.*, 39:2038–2050, 1982.
- [36] W. KAHAN and B.N PARLETT. *How far should you go with the Lanczos process*. sparse Matrix Computations, Academic Press, New York, 1976. pages 131-144.
- [37] J. F. LACARRA and O. TALAGRAND. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 40 A:81–95, 1988.
- [38] P. J. LAURENT. *Approximation et Optimisation*. Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 156, boulevard St-Germain, Paris 6^e, 1972. Université scientifique et médicale de Grenoble.
- [39] F.-X. LE DIMET. A global approach of variational objective analysis. Report, LAMP, Université de Clermont II, BP 45 63170 Aubière France, 1979.
- [40] F.-X. LE DIMET. Une étude générale d’analyse objective variationnelle des champs météorologiques. Rapport Scientifique 28, LAMP, Université de Clermont II, BP 45 63170 Aubière France, 1980.

- [41] F.-X. LE DIMET. Problèmes d'optimisation liés à la modélisation en météorologie. *Revue du CETHEDDEC-Ondes et Signal* 77-1983, Université de Clermont-Ferrand, 63170 Aubière France, 1983.
- [42] F.-X. LE DIMET. Slow manifold and initialization. Report, CIMMS, Norman, Oklahoma 73019, 1983.
- [43] F.-X. LE DIMET. Quelques problèmes mathématiques en météorologie. *Gazette des Mathématiciens, Société mathématiques de France*, 32:68–74, 1987.
- [44] F.-X. LE DIMET. Initialization and data assimilation in meteorological models. In HIROSHI NIKI and MUTSUO KAWAHARA, editors, *Computational methods in flow analysis*, number 1, pages 79–86, Okayama, 5-8 September 1988. Okayama University of Science. Volume 1.
- [45] F.-X. LE DIMET. Optimization and optimal control in atmospheric sciences. In K.H. PHUA, C.M. WANG, W.Y. YEONG, T.Y. LEONG, H.T. LOH, K.C. TAN, and F.S. CHOU, editors, *Optimization: Techniques and applications*, pages 1220–1229, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1992. World Scientific. Volume 2.
- [46] F.-X. LE DIMET. Optimal control methods and data assimilation. Lecture notes, International summer school on data assimilation in meteorology and oceanography, Toulon, France, 1993.
- [47] F.-X. LE DIMET and H. E. NGODOCK. Sensitivity analysis in the presence of observations. In *ICIAM*, Hamburg, 1995.
- [48] F.-X. LE DIMET and H. E. NGODOCK. Sensitivity in presence on data. In *SIAM Meeting on Geosciences*, San Antonio, 1995.
- [49] F.-X. LE DIMET and H. E. NGODOCK. Variational data assimilation and sensitivity studies. In *AMCA International Symposium*, Novossibirsk, 1995.
- [50] F.-X. LE DIMET, H. E. NGODOCK, B. LUONG, and J. VERRON. Variational data assimilation and sensitivity analysis. *Submitted to J.M.S.J.*, 1995.
- [51] F.-X. LE DIMET, H. E. NGODOCK, and J. VERRON. Sensitivity analysis in variational data assimilation. In *19th General Assembly of the European Geophysical Society*, Grenoble, France, March 1994. EGS.
- [52] F.-X. LE DIMET, H. E. NGODOCK, and J. VERRON. Sensitivity analysis in variational data assimilation. In *Second International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography*, Tokyo, March 1995. WMO.
- [53] F.-X. LE DIMET, H. E. NGODOCK, and J. VERRON. Sensitivity analysis in variational data assimilation. *Submitted to Tellus*, 1995.

-
- [54] F.-X. LE DIMET, H.E. NGODOCK, and I.M. NAVON. A general approach to sensitivity analysis. Technical Report FSU-SCRI-95T-103, Supercomputer Computations Research Institute, Florida State University, Tallahassee, Florida, 1995.
- [55] F.-X. LE DIMET and A. NOUAILLER. Variational analysis of dynamical data: an application to the study of a squall line. Technical Report FSU-SCRI-87-50, Supercomputer Computations Research Institute, Florida State University, Tallahassee, Florida, 1987.
- [56] F.-X. LE DIMET and A. NOUAILLER. Data assimilation using optimal control methods: application to shallow-water equations. In F.-X. LE DIMET and O. TALAGRAND, editors, *Assimilation of observations in meteorology and oceanography*, pages 349–354, Clermont-Ferrand, France, July 1990. WMO.
- [57] F.-X. LE DIMET and M. OUBERDOUS. Retrieval of balanced meteorological fields: an approach using optimal control technique. In F.-X. LE DIMET and O. TALAGRAND, editors, *Assimilation of observations in meteorology and oceanography*, pages 209–214, Clermont-Ferrand, France, July 1990. WMO.
- [58] F.-X. LE DIMET and M. OUBERDOUS. *Mathematics Climate and Environment*. J.-I. DIAZ and J.-L. LIONS MASSON, 1993. Research Notes in Applied Mathematics, RMA 27.
- [59] F.-X. LE DIMET, Y. K. SASAKI, and L. WHITE. Dynamic initialization with filtering of gravity waves. Report and Contribution 40, CIMMS, Norman, Oklahoma 73019, 1983.
- [60] F.X. LE DIMET. A general formalism of variational analysis. Report OK 73091.22, CIMMS, Norman, OK, 1986.
- [61] F.X. LE DIMET. Determination of the adjoint of a numerical weather prediction model. Tech.Rep FSU-SCRI-88-79, FSU, FSU. Tallahassee, Florida 32306-4052, 1988.
- [62] F.X. LE DIMET and A. NOUAILLER. *Assimilation of dynamics in geosciences*. Elsevier, Amsterdam, 1986. In Sasaki, Y.K ed.
- [63] F.X. LE DIMET and O. TALAGRAND. variational assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus*, 38A:97–110, 1986.
- [64] H. LEVINE and J. SCHWINGER. *Phys. Rev.*, 75:1423–, 1949.
- [65] J.L. LIONS. *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [66] J.L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.

- [67] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes*. Dunod, 1968. Volume 1.
- [68] B. LUONG. *Techniques de contrôle optimal pour un modèle quasi-géostrophique de circulation océanique: Application à l'assimilation variationnelle de données altimétriques satellitaires*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1995. Thèse de doctorat.
- [69] B. LUONG, J. BLUM, and J. VERRON. Variational assimilation of altimeter data in a non-linear ocean model. In *Second International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography*, Tokyo, March 1995. WMO.
- [70] A.M. MOORE. Data assimilation in a quasi-geostrophic open ocean model of the gulf-stream region using the adjoint method. *J. of Physical Oceanography*, (21):398–427, 1991.
- [71] I.M. NAVON. A survey of the status of efficient minimization algorithms for variational data assimilation. In F.-X. LE DIMET and O. TALAGRAND, editors, *International Symposium: Assimilation of observations in meteorology and oceanography*, pages 202–207, Clermont-Ferrand, France, July 1990. World Meteorological Organization.
- [72] I.M. NAVON and D.M. LEGLER. Conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology. *Mon. Wea. Rev.*, 115:1479–1502, 1987.
- [73] I.M. NAVON and M.K. RAMAMURTHY. Application of a conjugate-gradient method to variational assimilation of meteorological fields. In F.-X. LE DIMET and O. TALAGRAND, editors, *International Symposium: Assimilation of observations in meteorology and oceanography*, pages 202–207, Clermont-Ferrand, France, July 1990. World Meteorological Organization.
- [74] I.M. NAVON and X. ZOU. Application of the adjoint model in meteorology. In A. GRIEWANNEK and G. CORLISS, editors, *Automatic differentiation of algorithms: theory, implementation and application*, pages 202–207, Philadelphia, 1991. SIAM.
- [75] I.M. NAVON, X. ZOU, K. JOHNSON, J. DERBER, and J. SELA. Variational real-data assimilation with the N.M.C. spectral model: Part I: adiabatic model tests. In F.-X. LE DIMET and O. TALAGRAND, editors, *International Symposium: Assimilation of observations in meteorology and oceanography*, pages 202–207, Clermont-Ferrand, France, July 1990. World Meteorological Organization.
- [76] J. M. NESE. Quantifying local predictability in phase space. *Physica*, D35:237–250, 1989.
- [77] J. NICOLIS and G. MEYER-KRESS. *Z. Naturforsch.*, 38a:1157–, 1983.

-
- [78] E.M. OBLow. Sensitivity theory for reactor thermal-hydraulics problems. *Nucl. Sci. Eng.*, 68:322 – 337, 1978.
- [79] V. I. OSELEDEC. A multiplicative ergodic theorem : Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–210, 1968.
- [80] M. OUBERDOUS. *Une application du contrôle optimal à l'assimilation de données météorologiques par l'équation de balance*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, 63170 Aubière, France, 1991. Thèse de Doctorat.
- [81] A. OUNSY. *Méthode d'analyse de sensibilité adjointe: application à un code de thermohydraulique des réacteurs nucléaires*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France, 1992.
- [82] S. K. PARK and K.K. DROEGEMEIER. On the use of automatic differentiation to assess parametric sensitivity in convective-scale variational data assimilation. In *International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography*, Tokyo, Japan, March 1995. World Meteorological Organization.
- [83] S.K. PARK, K.K. DROEGEMEIER, C. BISCHOF, and T. KNAUFF. Sensitivity analysis of numerically-simulated convective storms using direct and adjoint methods. In *10th Conference on Numerical Weather Prediction*, pages 457 – 459, Portland, Oregon, July 1994. American Meteorological Society.
- [84] B.N PARLETT and D.S. SCOTT. The lanczos algorithm with selective orthogonalization. *Mathematics of computation*, 33(145):217–238, 1979.
- [85] J. PEDLOSKY. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [86] F. RABIER, P. COURTIER, M. HERVEOU, B. STRAUSS, and A. PERSSON. Sensitivity of forecast error to initial condition using the adjoint model. Tec. Memo. Reading 197, ECMWF, 1993.
- [87] F. RABIER, P. COURTIER, and O. TALAGRAND. An application of adjoint model to sensitivity analysis. Contributions to atmospheric physics, 1993.
- [88] R. ROUSSOPOLOS. *C.R. Acad. Sci.*, 236:1858, 1953.
- [89] M. SANO and Y. SAWADA. Measurement of the lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phy. Rev. Lett.*, 55(10):1082–1085, 1985.
- [90] Y.K. SASAKI. An objective analysis based on the variational method. *J. Met. Soc. Jap.*, II(36):77–88, 1958.
- [91] J. SCHRÖTER, U. SEILER, and M. WENZEL. Variational assimilation of Geosat data into an eddy-resolving model of the gulf-stream extension area. *J. of Physical Oceanography*, (23):925–953, 1993.

- [92] O. TALAGRAND. A study of mathematics of four dimensional data assimilation. *Tellus*, 33:43–60, 1981-a.
- [93] O. TALAGRAND. On the mathematics of data assimilations. *Tellus*, 33:321–339, 1981-b.
- [94] O. TALAGRAND. The use of adjoint equations in numerical modelling of the atmospheric circulation. In *Workshop on “Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation and Application.”*, Beckenridge, Colorado, 7-9 January 1991. SIAM.
- [95] O. TALAGRAND. Assimilation of observations: An introduction. Lecture notes, International summer school on assimilation of observations in Meteorology and Oceanography, Toulon, France, 1993.
- [96] O. TALAGRAND. Statistical linear estimation, part I and II. Lecture notes, International summer school on assimilation of observations in Meteorology and Oceanography, Toulon, France, 1993.
- [97] O. TALAGRAND and P. COURTIER. Formalisation de la méthode du modèle adjoint. applications météorologiques. EERM internal report 117, CNRM, Météo-France, 42, av. Coriolis, 31057 Toulouse France, 1985.
- [98] O. TALAGRAND and P. COURTIER. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation I: theory. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 113:1311–1328, 1987.
- [99] W.C. THACKER. The role of the hessian matrix in fitting models to measurements. *J. Geophys. Res*, 94(C5):6177–6196, 1989.
- [100] J.-N. THÉPAUT and P. COURTIER. Four-dimensional data assimilation using the adjoint of multilevel primitive-equation model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 117:1225–1254, 1991.
- [101] J.-N. THÉPAUT, R. HOFFMAN, and P. COURTIER. Interactions of dynamics and observations in four-dimensional variational assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, 121:3393–3414, 1993.
- [102] J.-N. THÉPAUT, D. VASILJEVIC, P. COURTIER, and J. PAILLEUX. Variational assimilation of conventional meteorological observations with a multilevel primitive-equation model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 119:153–186, 1993.
- [103] J.A. VASTANO and E.J. KOSTELICH. *Dimensions and entropies for chaotic systems*. Springer Verlag, 1986. ed Mayer-Kress.
- [104] R.A. WIGGINS. The general linear inverse problem: Implications of surface waves and free oscillations for earth structure. *Rev. Geophys.*, 10:251–285, 1972.

- [105] E.P. WIGNER. Effects of small perturbations on pile period. Technical Report CP - G - 3048, Chicago Report, 1945.
- [106] A. WOLF, J.B. SWIFT, H.L. SWINNEY, and J.A. VASTSANO. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 16D:285–317, 1985.
- [107] C. WUNSCH. The north atlantic general circulation west of 50°w determined by inverse methods. *Rev. Geophys.*, 16:583–620, 1978.
- [108] S. YODEN and M. NOMURA. Finite-time lyapunov stability and its application to atmospheric predictability. *Am. Meteor. Soc*, 50(11):1531–1543, 1993.
- [109] X. ZOU, A. BARCILON, I.M. NAVON, J. WHITAKER, and D.G. CACUCI. An adjoint sensitivity study of blocking in a two-layer isentropic model. *Mon. Wea. Rev.*, 121:2833 – 2857, 1993.
- [110] X. ZOU, I. M. NAVON, M. BERGER, K. H. PHUA, T. SCHLICK, and F.-X. LE DIMET. Numerical experience with limited-memory quasi-newton and truncated newton methods. *Siam J. Optimization*, 3(3):582–608, 1993.
- [111] X.L. ZOU, I.M. NAVON, and F.X. LE DIMET. Incomplete observations and control of gravity waves in variational data assimilation. *Tellus*, 44A:273–296, 1992.
- [112] Milija ZUPANSKI. Nonlinear sensitivity using the adjoint method. *Mon. Wea. Rev.* (*Submitted*), 1995.
- [113] Z.WANG, I.M.NAVON, F.X LE DIMET, and X.L. ZOU. The second order adjoint analysis: theory and applications. *Met.Atmos.Phys*, 50:3–20, 1992.

Resumé

Le travail mené dans cette thèse porte sur l'étude "*a posteriori*" de l'assimilation variationnelle de données. Il s'agit d'une démarche de faisabilité pour la mise au point des outils permettant de faire une analyse diagnostique (qualitative et quantitative) du processus d'assimilation variationnelle, notamment en ce qui concerne l'influence du bruit des observations sur le processus d'assimilation ainsi que sa propagation sur les champs reconstitués (nous sommes alors amenés à faire une étude de sensibilité), et l'influence de la configuration spatio-temporelle des observations sur le processus d'assimilation.

L'application usuelle des équations adjointes pour l'analyse de sensibilité est révisée, car dans le contexte de l'assimilation variationnelle, nous avons montré par un exemple simple qu'il faut s'y prendre différemment. Nous proposons alors une méthode pour mener correctement cette analyse de sensibilité. Cette méthode est basée sur l'utilisation des équations adjointes au second ordre, obtenues en prenant l'adjoint du système d'optimalité. La sensibilité en est déduite par inversion du Hessien de la fonction coût via la minimisation d'une fonctionnelle quadratique. L'application est faite sur un modèle de circulation générale océanique de type quasi-géostrophique, et nous faisons aussi l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation adjointe au second ordre du modèle considéré, pour justifier l'utilisation du Hessien et l'applicabilité de notre méthode. Nous étudions aussi l'influence de la configuration spatio-temporelle des observations sur le processus d'assimilation au travers du Hessien (à l'optimum) dont les éléments propres varient lorsqu'on fait varier la configuration. Enfin, nous étudions la prédictibilité du système d'optimalité.

Mots Clés: assimilation variationnelle de données, modèle adjoint, système d'optimalité, adjoint au second ordre, analyse de sensibilité, Hessien, prédictibilité.

Abstract

This thesis deals with "*a posteriori*" study of variational data assimilation. It concerns feasibility approach in order to settle tools for diagnostic (qualitative and quantitative) analysis of variational assimilation process, namely about: the influence of data noise on the assimilation process together with its propagation over the retrieved fields (this leads to sensitivity analysis); and the influence of spatial and temporal sampling of the data on the assimilation process.

The traditional use of adjoint equations in sensitivity analysis is reviewed in the context of variational data assimilation. By a simple example, we show that sensitivity analysis should be carried out in a different way. We propose a method enabling to derive the sensitivity correctly. This method is based on the use of second order adjoint equations obtained by the adjoint of the optimality system. The sensitivity is deduced from the second order adjoint variables by inverting the Hessian matrix of the cost function through the minimization of a quadratic functional. Application is made on a quasi-geostrophic general circulation ocean model, and we study the existence and uniqueness of the solution of the second order adjoint equations of the model used, in order to justify the use of the Hessian and the applicability of our method. We also study the influence of data sampling on the assimilation process through the Hessian matrix whose eigenvalues vary with the data sampling at the optimum. Finally, we study the predictability of the optimality system.

Key Words: variational data assimilation, adjoint model, optimality system, second order adjoint, sensitivity analysis, Hessian matrix, predictability.