



**HAL**  
open science

# Inversion de systèmes linéaires pour la simulation des matériaux ferromagnétiques. Singularités d'une configuration d'aimantation

Christophe Bonjour

► **To cite this version:**

Christophe Bonjour. Inversion de systèmes linéaires pour la simulation des matériaux ferromagnétiques. Singularités d'une configuration d'aimantation. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1990. Français. NNT: . tel-00004975

**HAL Id: tel-00004975**

**<https://theses.hal.science/tel-00004975>**

Submitted on 23 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Christophe Bonjour

10 Décembre 1996



# THÈSE

Présentée par  
Christophe BONJOUR

Pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1  
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

Inversion de systèmes linéaires  
pour la simulation des  
matériaux ferromagnétiques.

Singularités d'une  
configuration d'aimantation.

---

Date de soutenance : 30 octobre 1996

Composition du jury :

- Patrick WITOMSKI
- Fabrice BETHUEL rapporteur
- Patrick JOLY rapporteur
- Pierre BARAS directeur
- Bertrand MICHAUX

Thèse préparée au sein du laboratoire : LMC-IMAG



# THÈSE

Présentée par  
Christophe BONJOUR

Pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1  
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

Inversion de systèmes linéaires  
pour la simulation des  
matériaux ferromagnétiques.  
Singularités d'une  
configuration d'aimantation.

---

Date de soutenance : 30 octobre 1996

Composition du jury :

- Patrick WITOMSKI
- Fabrice BETHUEL rapporteur
- Patrick JOLY rapporteur
- Pierre BARAS directeur
- Bertrand MICHAUX

Thèse préparée au sein du laboratoire : LMC-IMAG



à Henri,  
à Théophile



Je voudrais remercier ici toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la rédaction de cette thèse.

Pierre Baras a été un directeur attentionné et efficace. Je le remercie pour sa disponibilité qui était toujours pleine et enrichissante.

Je remercie Fabrice Bethuel et Patrick Joly d'avoir bien voulu accepter d'établir les rapports concernant mes travaux.

Je remercie Patrick Witomski d'avoir accepté de faire partie du jury. Ses conseils et son soutien actif m'ont aidé à mener à bien cette thèse et à m'intégrer au sein du laboratoire LMC.

Je remercie Bertrand Michaux pour l'intérêt constant qu'il a manifesté pour mes travaux pour sa lecture approfondie du manuscrit qui m'a permis de l'améliorer. Il me fait le plaisir d'être membre du jury.

Ensuite j'aimerais remercier les personnes du LETI (CEA) qui m'ont accueilli très régulièrement et mon donné accès à leurs ordinateurs de 1991 à 1993. Grâce à leur collaboration j'ai pu mener à bien les travaux de simulation numérique qui font l'objet de la deuxième partie de cette thèse. Je citerai en premier lieu Jean-Baptiste Albertini qui m'a facilité pendant toutes ces années l'accès au LETI et à ses moyens informatiques; Rémi Klein responsable du groupe informatique à l'époque a également manifesté un intérêt constant à mes travaux. Mais surtout je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Marc Aid pour sa gentillesse et sa patience. Il a été mon guide dans les vicissitudes du système Unix et de Module grâce à ses compétences informatiques et à son grand sens de la programmation.

Au laboratoire LMC j'aimerais particulièrement remercier Robert Dalmasso ainsi que les autres enseignants-chercheurs qui m'ont accueilli et conseillé utilement. Anne Viallix-Bagneres m'a aidé à comprendre les phénomènes du micromagnétisme.

La joyeuse équipe des thésards a été un élément déterminant de ma bonne intégration au sein du laboratoire. Je les remercie tous chaleureusement et en particulier Hussein Khannous avec qui j'ai eu le plaisir de partager un domaine d'étude commun : le micromagnétisme.

Mille mercis à mon ami fidèle Malek Nigro pour son soutien constant.

Enfin je n'oublierai pas de remercier mon épouse Maryvonne et mes parents qui ont eu l'extrême patience de me supporter pendant ces longues années.



# Table des Matières

Notations	5
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Introduction à la simulation numérique du micromagnétisme</b>	<b>15</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2 Les matériaux ferromagnétiques</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction aux mémoires magnétiques . . . . .	21
2.2 Propriétés des grenats . . . . .	22
2.3 Les équations de Maxwell . . . . .	22
2.4 Les termes d'énergie . . . . .	24
2.5 Configurations de l'aimantation . . . . .	26
2.5.1 Structure grossière : domaines et parois . . . . .	26
2.5.2 Structure fine : lignes et points de Bloch . . . . .	26
<b>3 Un problème de minimisation</b>	<b>30</b>
3.1 Equations de Maxwell statiques . . . . .	30
3.2 Energie démagnétisante . . . . .	32
3.3 Le problème de minimisation . . . . .	34
3.4 Les équations aux dérivées partielles associées . . . . .	34
<b>4 La résolution numérique</b>	<b>36</b>
4.1 Les difficultés de la discrétisation . . . . .	36
4.2 Le calcul du potentiel scalaire . . . . .	40
4.3 La méthode de descente de l'énergie . . . . .	41
4.4 Coordonnées cartésiennes et intégration sur l'épaisseur . . . . .	44
4.5 Coordonnées sphériques . . . . .	45
4.6 Les résultats . . . . .	46
<b>5 Conclusion</b>	<b>47</b>

<b>II</b>	<b>Résolution de systèmes linéaires provenant du micromagnétisme</b>	<b>49</b>
<b>1</b>	<b>Les systèmes linéaires à résoudre</b>	<b>54</b>
1.1	Cas des coordonnées sphériques sans potentiel extérieur . . .	54
1.2	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	56
1.3	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Résolution des systèmes</b>	<b>58</b>
2.1	Cas des coordonnées sphériques sans potentiel extérieur . . .	58
2.1.1	Gradient Conjugué Préconditionné sur le système (1.3)	58
2.1.2	Gradient Conjugué Préconditionné Spécial Micromagnétisme sur le système (1.4) . . . . .	59
2.1.3	Décroissance de la fonctionnelle . . . . .	65
2.2	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	66
2.2.1	Méthode d'expansion couplée avec SMP CG . . . . .	66
2.2.2	Décroissance de la fonctionnelle . . . . .	69
2.2.3	Pénalisation couplée avec SMP CG . . . . .	70
2.3	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>75</b>
3.1	Les autres algorithmes testés . . . . .	75
3.2	Cas des coordonnées sphériques sans potentiel extérieur . . .	77
3.3	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	80
3.4	Cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	82
	<b>Annexes</b>	<b>83</b>
A	Méthodes directes . . . . .	85
A.1	La méthode de Crout . . . . .	85
A.2	La méthode de Gauss . . . . .	86
B	Méthodes de type gradient conjugué . . . . .	87
B.1	Introduction . . . . .	87
B.2	Définitions et classification . . . . .	88
B.3	Le gradient conjugué préconditionné . . . . .	91
B.4	L'algorithme du bigradient conjugué et ses dérivés . . .	92
B.5	L'algorithme du résidu minimal généralisé (GMRES)	98
C	Méthodes d'expansion . . . . .	104

---

<b>III Singularités des fonctions minimisant l'énergie du micromagnétisme</b>	<b>109</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>113</b>
1.1 Singularités . . . . .	113
1.2 Singularités d'une configuration d'aimantation . . . . .	114
1.3 Enoncé du résultat principal . . . . .	114
<b>2 Le théorème d'<math>\varepsilon</math>-régularité</b>	<b>116</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	116
2.1.1 Rappel . . . . .	116
2.1.2 Les fonctionnelles "localisées" . . . . .	117
2.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange . . . . .	120
2.2 Lemmes de changement de repère et premières inégalités . . . . .	126
2.3 La formule de "monotonie" . . . . .	129
2.4 Approximation de $w$ par des fonctions continues . . . . .	131
2.5 Inégalité fondamentale . . . . .	137
2.6 Démonstration du théorème d' $\varepsilon$ -régularité . . . . .	141
2.7 Corollaires . . . . .	143
<b>3 Résultats d'extension et de compacité</b>	<b>150</b>
3.1 Lemmes de prolongement . . . . .	150
3.2 Extension du théorème d' $\varepsilon$ -régularité . . . . .	163
3.3 Théorème de compacité . . . . .	166
<b>4 Théorème des singularités</b>	<b>171</b>
4.1 Propriétés de la mesure de Hausdorff . . . . .	171
4.2 Théorème des singularités . . . . .	172



# Notations

$|\cdot|$  désignera  $\Gamma$  selon le contexte  $\Gamma$  la valeur absolue dans  $\mathbb{R}$   $\Gamma$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$  ou dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

$\cdot$  désignera le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$  ou dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

Pour les fonctions scalaire  $\phi$  et vectorielle  $u$  (ou  $\vec{u}$ )  $\Gamma$  nous noterons :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \phi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto u(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\Delta \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^3 \nabla u_i \cdot \nabla v_i$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{rot} u = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

$$p(u) = u_1^2 + u_2^2$$

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  nous noterons :

$\operatorname{vol}(\Omega)$  le volume de  $\Omega$

$\mathcal{X}_\Omega$  la fonction caractéristique de  $\Omega$ .

- Espaces fonctionnels :

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  espace des fonctions infiniment différentiables à support compact.

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  espace des distributions sur  $\mathbb{R}^3$ .

$L^2(\Omega)$  espace des fonctions mesurables  $\Gamma$  de carré intégrable sur  $\Omega$ .

$L^2_{loc}(\Omega)$  espace des fonctions mesurables  $\Gamma$  de carré intégrable sur tout compact inclus dans  $\Omega$ .

$L^2(\Omega, S^2)$  espace des fonctions mesurables  $\Gamma$  de carré intégrable sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $S^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) / \text{les dérivées première de } f \text{ sont dans } L^2(\Omega) \}$

$H^1(\Omega, S^2)$  espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  à valeurs dans  $S^2$ .

$H^1_0(\Omega)$  adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

$W^1(\mathbb{R}^3) = \{ \phi \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) / \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \}$

$W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}$  espace quotient de  $W^1(\mathbb{R}^3)$  par  $\mathbb{R}$  (les fonctions de cet espace sont définies à une constante près).





# Introduction générale



Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux entrepris au LETI (CEA) en collaboration avec le LMC concernant la modélisation mathématique et informatique des matériaux ferromagnétique. Ces matériaux entrent dans la composition à la fois des mémoires solides (mémoires à lignes de Bloch) et des têtes d'enregistrement magnétique.

Les propriétés magnétiques de ces matériaux utilisées pour la lecture l'enregistrement ou la conservation de l'information et la taille des dispositifs de l'ordre de quelques microns font que leur étude entre dans le domaine du micromagnétisme.

La magnétisation des matériaux ferromagnétiques minimise une énergie composée de 4 termes : l'énergie d'échange l'énergie d'anisotropie l'énergie de Zeeman et l'énergie démagnétisante. Elle est de norme constante (contrainte non linéaire).

Dans cette thèse nous avons abordé deux questions. La première concerne l'inversion des systèmes linéaires qu'il est nécessaire de résoudre pour simuler numériquement les matériaux magnétiques. La deuxième question concerne la taille de l'ensemble des singularités d'une configuration d'aimantation.

Le terme d'énergie démagnétisante provient de l'existence d'un champ magnétique spontanément créé par le matériau dans tout l'espace et qui dérive d'un potentiel scalaire. Les principales difficultés de la modélisation sont dues au fait que le champ démagnétisant est présent dans tout l'espace d'une part et que la magnétisation est soumise à une contrainte quadratique (norme constante) d'autre part.

Viallix et Aid ont utilisé des modèles de simulation pratiquement identiques. Les codes de calculs qu'ils ont programmés ont nécessité la résolution de systèmes linéaires de grande taille. L'inversion de ces systèmes est le premier problème que cette thèse se propose de traiter.

La deuxième question que nous avons résolue concerne la taille de l'ensemble des singularités des configurations d'aimantation c'est-à-dire des solutions d'un problème de minimisation sous contrainte quadratique. Nous avons adapté à l'énergie du micromagnétisme la théorie développée par Schoen et Uhlenbeck pour la régularité des fonctions harmoniques minimisantes [SU82]. Ainsi nous avons démontré que les singularités situées à l'intérieur du matériau sont en nombre fini (Théorème des singularités).

La première partie de cette thèse est consacrée à une brève présentation de la modélisation physique et mathématique des matériaux ferromagnétiques. Nous y décrivons également les codes de simulation développés par Viallix et Aid afin de préciser que les inversions de systèmes linéaires se situent au niveau de la minimisation d'une certaine fonctionnelle quadratique dite de descente (chapitre 4). Cette minimisation se fait tantôt sans

contrainte (cas où Aid a utilisé les coordonnées sphériques) et tantôt avec contrainte (cas où les coordonnées cartésiennes ont été utilisées).

La deuxième partie est consacrée à la présentation des différentes méthodes que nous avons programmées pour inverser les systèmes linéaires. Notre motivation était d'obtenir une méthode d'inversion qui soit rapide et peu coûteuse et qui permette de faire décroître la fonctionnelle quadratique de descente même quand il n'y a pas convergence. Nous avons utilisé pour ce faire la méthode du gradient conjugué préconditionné pour le cas sans contrainte et la méthode d'expansion de Louh et Sameh [LS93] pour les cas avec contrainte.

La démonstration du théorème des singularités constitue le corps de la troisième partie.





# Première partie

## Introduction à la simulation numérique du micromagnétisme



---

<b>Notations</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2 Les matériaux ferromagnétiques</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction aux mémoires magnétiques . . . . .	21
2.2 Propriétés des grenats . . . . .	22
2.3 Les équations de Maxwell . . . . .	22
2.4 Les termes d'énergie . . . . .	24
2.5 Configurations de l'aimantation . . . . .	26
2.5.1 Structure grossière : domaines et parois . . . . .	26
2.5.2 Structure fine : lignes et points de Bloch . . . . .	26
<b>3 Un problème de minimisation</b>	<b>30</b>
3.1 Equations de Maxwell statiques . . . . .	30
3.2 Energie démagnétisante . . . . .	32
3.3 Le problème de minimisation . . . . .	34
3.4 Les équations aux dérivées partielles associées . . . . .	34
<b>4 La résolution numérique</b>	<b>36</b>
4.1 Les difficultés de la discrétisation . . . . .	36
4.2 Le calcul du potentiel scalaire . . . . .	40
4.3 La méthode de descente de l'énergie . . . . .	41
4.4 Coordonnées cartésiennes et intégration sur l'épaisseur . . . . .	44
4.5 Coordonnées sphériques . . . . .	45
4.6 Les résultats . . . . .	46
<b>5 Conclusion</b>	<b>47</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Avant de nous intéresser aux deux problèmes que cette thèse se propose de résoudre nous allons donner une brève description des phénomènes physiques auxquels ils se rattachent ainsi que des travaux de simulation de ces phénomènes. Il ne s'agit pas d'une description détaillée et exhaustive mais seulement de quelques points de repère essentiels pour présenter les équations statiques du micromagnétisme et l'énergie minimisée par une configuration d'aimantation. Cela nous permettra de comprendre à quelle étape de la simulation se situent les systèmes linéaires résolus dans la partie II d'une part et d'autre part d'introduire les notions utilisées dans la partie III concernant les singularités d'une configuration d'aimantation.

Nous avons en fait résumé les deux thèses auxquelles se rattachent nos travaux : la thèse de Viallix concernant les mémoires à lignes de Bloch [Via90] et celle d'Aid concernant les têtes magnétiques [Aid93].

Le chapitre 2 introduit les propriétés physiques des matériaux ferromagnétiques qui composent les dispositifs magnétiques. Nous remarquons en particulier l'existence d'une aimantation naturelle de norme constante possédant un axe de facile aimantation. Nous présentons ensuite les équations de Maxwell statiques qui régissent l'aimantation ainsi que les termes de l'énergie minimisée. Nous donnons enfin une brève description des structures de l'aimantation.

Le chapitre 3 est consacré à une présentation mathématique du problème de minimisation d'une fonctionnelle non quadratique sous contrainte non linéaire que vérifie une configuration d'aimantation. Le point essentiel est l'existence d'un champ magnétique spontané dit démagnétisant créé par le matériau dans tout l'espace.

Dans le chapitre 4 nous présentons les simulations numériques des mémoires à lignes de Bloch et des têtes magnétiques qui ont été réalisées par Viallix et Aid respectivement.

Notre but est de montrer où se situent les systèmes linéaires de grandes tailles qu'il est nécessaire de résoudre pour mener à bien ces simulations. Nous présentons brièvement les différentes simplifications utilisées par Viallix et Aid pour résoudre les difficultés de la discrétisation. En particulier pour calculer le potentiel scalaire dont dérive le champ démagnétisant. Puis nous expliquons la méthode de descente de l'énergie utilisée. Cela nous permet de situer précisément la fonctionnelle quadratique qu'il faut minimiser. En résolvant un système linéaire à chaque étape de la méthode de descente. Enfin nous précisons l'expression de cette fonctionnelle dans les différents cas envisagés dans la partie II. Pour les résultats généraux de la simulation nous renvoyons aux thèses de Viallix et Aid.

# Chapitre 2

## Les matériaux ferromagnétiques

### 2.1 Introduction aux mémoires magnétiques

Les dispositifs utilisés pour l'enregistrement la conservation et la lecture de l'information sont principalement de deux types : optique et magnétique. Nous présentons ici très brièvement les technologies utilisant le magnétisme. Elles utilisent la propriété de certains matériaux de conserver une aimantation possédant une structure très ordonnée que l'on est capable de modifier pour écrire l'information (bits) et d'analyser pour lire l'information.

Il existe actuellement 3 catégories de mémoires magnétiques : les mémoires conventionnelles les disques magnéto-optiques et les mémoires solides. La principale différence entre ces mémoires réside dans le mode d'accès à l'information qui est respectivement magnétique optique et électrique.

Dans les deux premières catégories l'accès à la zone d'écriture ou de lecture se fait par déplacement de la tête magnétique ou optique ou encore du support magnétique conservant l'information. Il y a donc nécessairement des pièces mobiles et cela induit fragilité usure mécanique et perte de temps dans la recherche des zones de mémoire.

Les mémoires solides quant à elles ont des têtes d'enregistrement et de lecture ainsi qu'un support magnétique fixes. C'est l'information qui se déplace à l'intérieur du support magnétique sans transport de matière.

Nous allons nous intéresser aux têtes magnétiques et aux mémoires à lignes de Bloch (mémoires solides). Ces deux types de dispositif sont constitués de matériaux ferromagnétiques possédant des propriétés similaires : les grenats.

Pour une description détaillée des différentes mémoires et des mécanismes d'écriture et de lecture nous recommandons le chapitre 1 de la thèse de Zimmermann [Zim91].

## 2.2 Propriétés des grenats

Les matériaux ferromagnétiques connus sous le nom générique de grenats utilisés dans la fabrication des têtes magnétiques d'une part et des mémoires à lignes de Bloch d'autre part ont une aimantation spontanée d'intensité constante et possèdent un axe de facile aimantation ou axe d'anisotropie. C'est-à-dire que l'aimantation de norme constante se dirige de préférence dans une direction privilégiée.

L'axe d'anisotropie est parallèle au plan de la tête dans le cas des têtes magnétiques couches minces simulées par Aid dans sa thèse [Aid93]. Il est perpendiculaire au plan du support dans le cas des mémoires à lignes de Bloch.

Nous allons nous restreindre à l'étude statique de ces matériaux et à l'échelle du micromagnétisme. Nous négligerons dans toute cette étude les effets de la magnétostriction et de la température. Dans la section 2.3 nous donnerons les équations de Maxwell qui régissent les configurations d'aimantation. Une configuration d'aimantation est un minimum d'une certaine énergie dite énergie du micromagnétisme. Nous donnerons les différents termes qui entrent dans cette énergie à la section 2.4. Enfin la prise en considération de ces différents termes d'énergie nous permettra de décrire dans la section 2.5 l'aspect des configurations d'aimantation.

Nous considérons par la suite une plaque ferromagnétique soumise à un champ magnétique constant. Nous noterons désormais

$$\vec{m} = u_s \vec{u}$$

l'aimantation où  $\vec{u}$  est un vecteur de norme 1 (nous le noterons le plus souvent  $u$ ) et  $u_s$  est une constante appelée aimantation à saturation exprimée en Gauss dans le système CGS. Rappelons que la dépendance de cette constante par rapport à la température a été négligée dans cette étude.

## 2.3 Les équations de Maxwell

- **Remarque :** *Toutes les notations et les équations de cette section seront précisées mathématiquement à la section 3.1. Il s'agit pour l'instant de donner une simple approche "physique" du problème.*

En statique l'aimantation  $\vec{m}$  est reliée à l'induction magnétique  $\vec{B}$  au champ magnétique  $\vec{H}$  et à la distribution de courant  $\vec{j}$  par les équations de Maxwell statiques.

$$\begin{cases} \vec{B} &= 4\pi\vec{m} + \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} \end{cases}$$

Le champ magnétique est la somme d'un champ appliqué  $\vec{H}_z$  et d'un champ démagnétisant  $\vec{H}_d$ .

$$\vec{H} = u_s (\vec{H}_z + \vec{H}_d)$$

Le champ appliqué est dû à la distribution de courant  $\vec{j}$  et vérifie :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_s \vec{H}_z &= 0 \\ \operatorname{rot} u_s \vec{H}_z &= \vec{j} \end{cases}$$

Le champ démagnétisant vérifie donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_s \vec{H}_d &= -4\pi \operatorname{div} \vec{m} \\ \operatorname{rot} u_s \vec{H}_d &= \vec{0} \end{cases}$$

Etant irrotationnel il dérive d'un potentiel scalaire  $\phi_{\vec{m}}$

$$\vec{\nabla} \phi_{\vec{m}} = u_s \vec{H}_d,$$

et pour qu'il soit physiquement acceptable son énergie  $\int_{\mathbb{R}^3} |u_s \vec{H}_d|^2 dx$  doit être finie.

Le potentiel scalaire quant à lui vérifie l'équation suivante justifiée dans la section 3.1 :

$$\Delta \phi_{\vec{m}} = -4\pi \operatorname{div} \vec{m} \chi_{\Omega} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

où  $\Omega$  est le matériau.  $\phi_{\vec{m}}$  doit aussi vérifier la condition d'énergie finie :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \phi_{\vec{m}}|^2 dx < +\infty$$

## 2.4 Les termes d'énergie

- **L'énergie d'échange**

Elle est due à l'interaction à courte portée des spins  $\vec{u}$  tendant à leur alignement les uns sur les autres.

$$E_{\text{ech}}(\vec{u}) = K_{\text{ech}} \int_{\Omega} |\vec{\nabla} \vec{u}|^2 dx$$

où  $K_{\text{ech}}$  est une constante  $\Gamma$ ne dépendant que du matériau  $\Gamma$ appelée constante d'échange (en erg/cm).

- **L'énergie d'anisotropie**

Due à l'existence d'un axe de facile aimantation  $\Gamma$ elle exprime la tendance du matériau à aligner son aimantation dans une certaine direction dépendant uniquement de sa structure cristalline.

$$E_{\text{ani}}(\vec{u}) = K_{\text{ani}} \int_{\Omega} |\vec{p}(\vec{u})|^2 dx$$

où  $K_{\text{ani}}$  est la constante d'anisotropie (erg/cm<sup>3</sup>) et  $\vec{p}$  l'opérateur de projection orthogonale sur le plan orthogonal à l'axe d'anisotropie.

- **L'énergie de Zeemann**

Elle traduit l'influence d'un champ appliqué  $\vec{H}_z$   $\Gamma$ dit champ de Zeemann  $\Gamma$  que nous supposons constant dans tout le matériau. La présence de ce champ tend à aligner l'aimantation dans sa direction. Cette propriété est utilisée dans les phases d'écriture.

$$E_z(\vec{u}) = -u_s^2 \int_{\Omega} \vec{H}_z \cdot \vec{u} dx$$

- **L'énergie démagnétisante ou énergie magnétostatique**

C'est l'une des principales caractéristiques de ces matériaux. Elle exprime l'existence d'un champ induit qui tend à empêcher la magnétisation du matériau. C'est-à-dire qu'à l'intérieur du matériau  $\Gamma$ les spins s'alignent par petites zones de sens opposés  $\Gamma$ créant ainsi des dipôles qui s'annulent mutuellement  $\Gamma$ et que  $\Gamma$ sur les bords  $\Gamma$ ils sont tangents pour éviter la formation de dipôles.

Cette énergie est en compétition avec l'énergie d'échange. Nous décrivons dans la section 2.5  $\Gamma$ la topologie des configurations créées sous l'effet de ces deux énergies.

$$E_d(\vec{u}) = \frac{u_s^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \phi_{\vec{u}}|^2 dx$$

Nous verrons au 3.1 que cette énergie peut s'exprimer sous la forme :

$$E_d(\vec{u}) = -\frac{u_s^2}{2} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi_{\vec{u}} \cdot \vec{u} dx$$

où  $\phi_u$  est le potentiel scalaire lié à  $\vec{u}$  par l'équation :

$$\Delta \phi_{\vec{u}} = -4\pi \operatorname{div} \vec{u} \mathcal{X}_{\Omega} \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3,$$

- **L'énergie totale**

C'est la somme de ces quatres énergies :

$$\tilde{E}_{\Omega}(\vec{u}) = E_{\text{ech}}(\vec{u}) + E_{\text{ani}}(\vec{u}) + E_z(\vec{u}) + E_d(\vec{u})$$

- **Ordre de grandeur des constantes**

Les valeurs numériques utilisées ici sont dans le système CGS de l'ordre de :

	Têtes magnétiques	Mémoires à lignes de Bloch
$4\pi u_s$	1 000 Gauss	410 Gauss
$K_{ani}$	10 000 erg/cm <sup>3</sup>	10 000 erg/cm <sup>3</sup>
$K_{ech}$	10 <sup>-6</sup> erg/cm	2 10 <sup>-7</sup> erg/cm

Les dimensions des têtes magnétiques sont de quelques dixièmes de microns pour l'épaisseur et de quelques dizaines de microns pour la longueur et la largeur.

Les mémoires à lignes de Bloch ont une épaisseur de l'ordre de quelques dixièmes de micron et nous avons considéré pour les autres dimensions une périodicité également de l'ordre du dixième de micron (voir 4.1).

- Dans cette étude l'influence de la température ainsi que celle de la magnétostriction ont été négligées c'est pourquoi il n'apparaît pas de termes d'énergie les faisant intervenir.

## 2.5 Configurations de l'aimantation

### 2.5.1 Structure grossière : domaines et parois

La compétition des différentes énergies citées en 2.4 crée à l'intérieur du matériau une configuration d'aimantation qui est un minimum de l'énergie totale.

L'anisotropie tend à aligner l'aimantation dans une direction privilégiée; l'énergie d'échange tend à créer des zones où l'aimantation est dans le même sens et l'énergie démagnétisante tend à combattre les effets de la précédente en créant de petites zones contigües où l'orientation est de sens opposé. En fait la combinaison de ces deux énergies favorise l'existence de zones où l'aimantation est de sens constant : les domaines séparés par des zones où l'aimantation change de sens : les parois.

Figure 2.1: Parois et domaines.

Une problématique importante de la modélisation des matériaux ferromagnétiques est constituée par la recherche de l'emplacement des domaines et parois et de leur évolution dans le temps [Kha96].

- **remarque** : La largeur d'une paroi de Bloch est donnée par la formule suivante

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{K_{ech}}{K_{ani}}}$$

[SM79].

### 2.5.2 Structure fine : lignes et points de Bloch

Le changement de sens de l'aimantation à l'intérieur d'une paroi peut se faire de multiples façons caractérisées par le plan de rotation de l'aimantation.

Ce plan  $\Gamma$  contenant l'axe de facile aimantation  $\Gamma$  est repéré par l'angle qu'il fait avec le plan de la paroi  $\Gamma$  qui varie entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

Pour fixer les idées  $\Gamma$  supposons que l'anisotropie soit verticale (cas des mémoires à lignes de Bloch).

Quand le plan de rotation fait un angle de 0 avec le plan de la paroi  $\Gamma$  la paroi est appelée : paroi de Bloch. L'aimantation tourne de façon hélicoïdale.

Figure 2.2: Parois de type Bloch vues de dessus.

Si l'angle vaut  $\frac{\pi}{2}$  il s'agit d'une paroi de Néel.

Figure 2.3: Parois de type Neel vues de dessus.

Toutes les situations intermédiaires sont possibles.

Figure 2.4: Parois de type intermédiaire vue de dessus.

La situation la plus courante est la paroi de Bloch.

En cas de changement de chiralité à l'intérieur de la paroi la zone très fine intermédiaire entre les deux chiralités est appelée ligne de Bloch.

Figure 2.5: Ligne de Bloch vue de dessus.

Ces changements de chiralité se produisent nécessairement par paires à l'intérieur d'une même paroi. C'est la présence ou l'absence d'une paire de lignes de Bloch qui constitue un bit 0 ou 1.

Figure 2.6: Paire de lignes de Bloch vue de dessus.

• **remarque** : la largeur d'une ligne de Bloch est donnée par la formule suivante :

$$\Lambda_0 = \sqrt{\frac{K_{ech}}{2\pi u_s^2}}$$

[SM79].

Lorsque l'on suit un plan vertical orthogonal à la paroi cette dernière est de type Néel sur les surfaces inférieure et supérieure du matériau avec un changement de chiralité et qu'au centre la paroi est de type Bloch de part et d'autre du plan avec aussi changement de chiralité il y a un point de discontinuité de l'aimantation au centre de la paroi. Ce point s'appelle un point de Bloch.

Vialix s'est intéressée à la modélisation de la structure fine de la paroi dans le cadre des mémoires à lignes de Bloch. Nous verrons au paragraphe 4.1 les simplifications qu'elle a utilisées pour modéliser les parois.

Figure 2.7: Point de Bloch.

# Chapitre 3

## Un problème de minimisation sous contrainte non linéaire

D'un point de vue mathématique la simulation d'une configuration de l'aimantation d'un matériau ferromagnétique placé sous l'influence d'un champ magnétique constant est un problème de minimisation d'une énergie sous la contrainte non linéaire que la norme de l'aimantation doit être constante.

Dans ce chapitre nous allons préciser l'expression mathématique des équations de Maxwell statiques section 3.1 et exprimer l'énergie démagnétisante de deux façons section 3.2. Puis nous énoncerons le problème de minimisation vérifié par une configuration de l'aimantation et nous établirons l'existence de solutions à ce problème section 3.3. Enfin nous donnerons une formulation équivalente du problème sous forme d'équations aux dérivées partielles section 3.4.

### 3.1 Equations de Maxwell statiques

- L'échantillon de matériau magnétique sera considéré comme étant un ouvert  $\Omega$  borné (et simplement connexe). L'aimantation sera  $\vec{m} = u_s \vec{u}$  avec

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 1 & \text{presque partout dans } \Omega \\ \vec{u} \in H^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

- Les équations de Maxwell statiques s'écrivent :

$\exists \vec{B} \in L^2(\mathbb{R}^3) \Gamma \vec{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \Gamma \vec{J} \in L^2(\Omega)^3$  tels que

$$\begin{cases} \vec{B} &= 4\pi \vec{m} \mathcal{X}_\Omega + \vec{H} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^3 \quad (\text{définition de } \vec{m}) \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

- Pour éliminer l'inconnue  $\vec{B}$  et la donnée  $\vec{J}$  on note :

$$\vec{H} = u_s (\vec{H}_z + \vec{H}_d)$$

avec  $\vec{H}_z \Gamma$  champ appliqué constant  $\Gamma$  vérifiant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H}_z &= 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \operatorname{rot} (u_s \vec{H}_z) &= \vec{J} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

et  $\vec{H}_d \Gamma$  champ démagnétisant  $\Gamma$  vérifiant :

$$(3.1) \quad \operatorname{div} \vec{H}_d = -4\pi \operatorname{div} (\vec{u} \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

$$(3.2) \quad \operatorname{rot} \vec{H}_d = \vec{0} \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))^3$$

- **Champ démagnétisant**

$$\begin{cases} \operatorname{rot} (\vec{H}_d) &= \vec{0} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \vec{H}_d &\in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \end{cases}$$

entraîne  $\Gamma$  grâce au lemme de Poincaré "global" dans  $\mathbb{R}^3$  [DL85, p. 266] qu'il existe  $\phi_u \in W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}$  unique tel que  $\vec{H}_d = \vec{\nabla} \phi_u$ .

L'équation 3.1 donne l'équation suivante en  $\phi_u$  :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Delta \phi_u &= -4\pi \operatorname{div} (u \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \phi_u &\in W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R} \end{cases}$$

**Théorème 3.1** *L'équation (3.3) admet une solution unique  $\phi_u = g * \operatorname{div} (u \mathcal{X}_\Omega)$*

*où  $g(x) = \frac{1}{|x|}$  pour  $x \neq 0$ .*

*De plus, l'application qui à  $u$  associe  $\phi_u$  est linéaire.*

**Démonstration :**

Ce résultat est démontré en détail dans [Sch61, p. 134 et p. 96-98] et dans [Aid93, proposition 2.3, p. 41].

■

## 3.2 Energie démagnétisante

Le théorème suivant nous permettra de donner une expression de l'énergie démagnétisante ne faisant intervenir qu'une intégrale sur  $\Omega$ . Il nous servira aussi à démontrer certaines majorations utiles à la démonstration du théorème des singularités (partie III).

### Théorème 3.2 (Théorème des potentiels "croisés")

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^3$   
Soient  $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ ,  $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ ,  $\phi_1 \in W^1(\mathbb{R}^3)$  et  $\phi_2 \in W^1(\mathbb{R}^3)$  tels que

$$(3.4) \quad \Delta \phi_1 = -4\pi \operatorname{div}(u_1 \mathcal{X}_{\Omega_1}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

$$(3.5) \quad \Delta \phi_2 = -4\pi \operatorname{div}(u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

alors

$$\int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 = \int_{\Omega_1} \nabla \phi_2 \cdot u_1$$

De plus, si  $u_1$  et  $u_2$  sont à valeurs dans  $S^2$ , nous avons :

$$(3.6) \quad \left| \int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 \right| \leq 4\pi (\operatorname{vol} \Omega_1)^{1/2} (\operatorname{vol} \Omega_2)^{1/2}$$

#### Démonstration :

- On démontre

$$\int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2$$

La deuxième égalité du théorème s'obtient de façon symétrique.

- L'identité 3.5 au sens des distributions s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi \cdot u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi \cdot \nabla \phi_2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

par définition.

- Rappelons que  $W^1(\mathbb{R}^3)$  est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  dans  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$  pour la semi-norme  $\|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ . C'est-à-dire qu'il existe une suite

$$\exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad \text{telle que} \quad \|\nabla \varphi_n - \nabla \phi_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi_n \cdot u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \phi_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2$$

Et ainsi on a démontré

$$\int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2$$

- Montrons maintenant l'inégalité 3.6 du théorème.
- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot u_1 \mathcal{X}_{\Omega_1} \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_1} |u_1|^2 \right)^{1/2}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1|^2 &\leq (\text{vol } \Omega_1)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1|^2 \right)^{1/2} \\ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1|^2 &\leq 16\pi^2 \text{vol } \Omega_1 \end{aligned}$$

- D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2} \right| &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_1|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_2} |u_2|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 4\pi (\text{vol } \Omega_1)^{1/2} (\text{vol } \Omega_2)^{1/2} \end{aligned}$$

■

On obtient immédiatement une nouvelle expression de l'énergie démagnétisante.

### Théorème 3.3

Avec les notations introduites au début de ce paragraphe, nous avons pour  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  :

$$E_d(u) = \frac{u_s^2}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 dx = -\frac{u_s^2}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi_u \cdot u dx$$

où  $\phi_u \in W^1(\mathbb{R}^3)$  vérifie :

$$\Delta \phi_u = -4\pi \text{div}(u \mathcal{X}_{\Omega}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

De plus

$$|E_d(u)| \leq 2\pi u_s^2 \text{vol } \Omega$$

### 3.3 Le problème de minimisation

• Nous décrivons dans cette section le problème de minimisation vérifié par l'aimantation normalisée  $u$ .

• Soit  $v \in H^1(\Omega)^3 \cap L^\infty(\Omega)^3$  tel que  $|v| = 1$  presque partout dans  $\Omega$  nous lui associons  $\phi_v \in W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}$  vérifiant

$$\Delta \phi_v = -4\pi \operatorname{div}(v \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

L'énergie de  $v$  est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\Omega(v) &= K_{\text{ech}} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + K_{\text{ani}} \int_\Omega |p(v(x))|^2 dx - u_s^2 \int_\Omega H_z(x) \cdot v(x) dx \\ &\quad - \frac{u_s^2}{2} \int_\Omega \nabla \phi_v(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

où les constantes et l'opérateur  $p$  sont ceux précisés dans la section 2.4 qui ne dépendent que du matériau.

• Le problème consiste à trouver  $u \in H^1(\Omega)^3 \cap L^\infty(\Omega)^3$  tel que  $|u| = 1$  presque partout dans  $\Omega$  et tel que

$$(3.7) \quad \tilde{E}_\Omega(u) = \inf \{ \tilde{E}_\Omega(v), \quad v \in H^1(\Omega)^3 \cap L^\infty(\Omega)^3 \mid |v| = 1 \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

L'existence et la non unicité des solutions de ce problème a été démontrée par Viallix [Via90, proposition 2.3.2, p. III7-19].

### 3.4 Les équations aux dérivées partielles associées

• Nous reprenons dans cette section les notations de la partie précédente.

• Les équations aux dérivées partielles vérifiées par la solution  $u$  du problème de minimisation (3.7) et par son potentiel scalaire  $\phi_u$  ont été mises en évidence par Viallix [Via90, p. II.20 à II.25 et p. II.52 à II.54] et à nouveau expliquées par Aid [Aid93, p. 23 à 31 et p. 42 à 44].

• La solution de ce problème de minimisation sous contrainte non linéaire ( $|u| = 1$ ) vérifie des équations d'Euler-Lagrange puis des équations aux dérivées partielles. Viallix a montré que la recherche de la solution de (3.7) est équivalente à la recherche d'un triplet :  $(u, \lambda, \phi_u)$  vérifiant les équations variationnelles suivantes :

Trouver  $(u, \lambda, \phi_u)$  tels que :

$$\begin{aligned} u &\in U^3 = H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)^3, \quad \lambda \in L^1(\Omega), \quad \phi_u \in W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R} \\ |u| &= 1 \text{ p.p. dans } \Omega \\ \langle \tilde{E}'_\Omega(u), v \rangle_{U^3, U^3} + 2 \int_\Omega \lambda u \cdot v \, dx &= 0, \quad \forall v \in U^3 \\ \Delta \phi_u &= -4\pi \operatorname{div}(u \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

Un tel triplet est solution des équations suivantes :

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega)^3 \cap L^\infty(\Omega)^3, \quad \lambda \in L^1(\Omega), \quad \phi_u \in W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R} \\ |u| &= 1 \text{ p.p. dans } \Omega \\ K_{ech} \Delta u - K_{ani} p(u) - \lambda u + \frac{u_s^2}{2} \nabla \phi_u + \frac{u_s^2}{2} H_z &= 0 \text{ dans } H^1(\Omega)^3 \text{ faible.} \\ \Delta \phi_u &= -4\pi \operatorname{div}(u \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $|u| = 1$ .

$$\lambda = K_{ech} |\nabla u|^2 + K_{ani} |p(u)|^2 - \frac{u_s^2}{2} (u, H_z) - \frac{u_s^2}{2} (u, \nabla \phi_u)$$

Nous donnerons dans la partie III section 2.1.3 une démonstration de ce résultat analogue à celle que donnent Schœn et Uhlenbeck [SU82] pour les fonctions minimisant l'énergie harmonique.

- Pour ce qui est du potentiel scalaire  $\phi_u$  Γ Aid a démontré [Aid93, proposition 2.4 p. 42] qu'il vérifie les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_u &= -4\pi \operatorname{div}(u \mathcal{X}_\Omega) \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta \phi_u &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \left[ \frac{\partial \phi_u}{\partial \eta} \right] &= 4\pi u \cdot \eta \quad \text{sur } \partial\Omega \\ [\phi_u] &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où  $[\cdot]$  désigne le saut de discontinuité à travers  $\partial\Omega$  et  $\eta$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

# Chapitre 4

## La résolution numérique

Nous abordons dans ce chapitre la résolution numérique du problème de minimisation 3.7.

La première section est réservée à la présentation des simplifications utilisées par Viallix pour les mémoires à lignes de Bloch et celles utilisées par Aid pour simuler les têtes magnétiques. Les autres sections sont consacrées à la suite de la démarche d'Aid à savoir : calcul du potentiel scalaire (section 4.2) méthode de descente de l'énergie (section 4.3) obtention des systèmes linéaires à résoudre dans le cas des coordonnées cartésiennes (section 4.4) et sphériques (section 4.5). La résolution de ces systèmes est abordée en détail dans la partie II. Les résultats de la minimisation numérique sont présentés d'une façon très succincte dans la section 4.6.

### 4.1 Les difficultés de la discrétisation

- Nous ne présentons ici que l'approche de Viallix et Aid qui est à la base des travaux présentés dans cette thèse.

On trouvera des références aux travaux antérieurs concernant la simulation numérique des mémoires à lignes de Bloch et des têtes magnétiques dans [Via90] et [Aid93].

- Les principales difficultés de la simulation des matériaux magnétiques sont les suivantes :

- très grosses différences de taille entre les domaines et les parois voire les lignes de Bloch;
- contrainte non linéaire de norme constante pour l'aimantation qui entraîne la non convexité de l'ensemble des aimantations admissibles;
- l'énergie démagnétisante dépend de la totalité du matériau. Elle doit être calculée à l'aide d'un potentiel scalaire qui existe dans tout

l'espace. Il s'agit donc  $\Gamma$  contrairement aux autres termes d'énergie  $\Gamma$  d'une énergie non locale; c'est-à-dire que son expression pour une petite parcelle du matériau dépend du potentiel démagnétisant  $\Gamma$  créé par la totalité du matériau  $\Gamma$  dans tout l'espace.

- **Périodicité, pour la simulation des mémoires à lignes de Bloch**

Les mémoires à lignes de Bloch ont des dimensions horizontales très grandes par rapport aux dimensions verticales. Nous pouvons considérer qu'une mémoire est une plaque infinie dans les directions horizontales. De plus  $\Gamma$  l'expérimentation et la technologie ont fait apparaître des structures périodiques. C'est ce qui a permis à Viallix de considérer une périodicité en  $x$  et en  $y$  et de se ramener à l'étude d'une période  $\Gamma$  constituée par une plaque rectangulaire. Les raccords étant réalisés en rajoutant des conditions de Dirichlet aux bords [Via90, ch II.2.5].

- **Maillages réguliers, éléments finis et maillages adaptés**

Etant donnée la différence de taille entre les parois et les domaines  $\Gamma$  la tentation est forte d'utiliser des maillages irréguliers plus raffinés au niveau des zones où les parois sont supposées se trouver. Mais ce procédé fait migrer les parois en dehors du raffinement pour faire décroître l'énergie [Via90]. Nous sommes donc obligés d'utiliser des maillages réguliers. Vue la géométrie des matériaux  $\Gamma$  les éléments finis de type quadrangle et de degré 1 ont été choisis dans tout les cas.

Pour étudier de plus près les parois  $\Gamma$  Viallix a utilisé  $\Gamma$  dans un deuxième temps  $\Gamma$  un maillage adapté qui lui a permis de faire apparaître d'intéressantes structures [Via90, ch V et VIII.8.3].

- **Intégration sur l'épaisseur, dans le cas des têtes magnétiques**

Considérant que les têtes magnétiques sont peu épaisses  $\Gamma$  Aid les a supposées être des cylindres minces. Il a supposé aussi que l'aimantation était constante sur l'épaisseur du matériau  $\Gamma$  ce qui est faux au niveau des parois  $\Gamma$  et il a intégré les équations sur l'épaisseur. Ce procédé lui a permis d'obtenir une simulation qu'il a baptisé "faux 2 D" et que nous décrivons un peu plus en détail dans la section 4.4.

- **Contrainte réalisée aux nœuds du maillage**

Viallix  $\Gamma$  pour les lignes de Bloch  $\Gamma$  et Aid  $\Gamma$  pour son "faux 2 D"  $\Gamma$  ont réalisé la contrainte de norme constante uniquement aux nœuds du maillage. Ce choix a l'inconvénient de ne pas réaliser la contrainte partout  $\Gamma$  mais aussi l'avantage d'autoriser la présence de singularités où la contrainte n'est pas réalisée (points de Bloch). Il va de soi que ces singularités ne peuvent pas se trouver sur un point du maillage  $\Gamma$  ce qui introduit une contrainte artificielle.

- **Utilisation des coordonnées sphériques**

Pour faire en sorte que la contrainte soit mieux réalisée  $\Gamma$  Aid a programmé une méthode 3 D utilisant les coordonnées sphériques  $\Gamma$  mais cela introduit des calculs et des difficultés nombreuses. Nous décrirons cette approche très brièvement dans la section 4.5.

- **Calcul du potentiel d'énergie démagnétisante pour les mémoires à lignes de Bloch**

Etant données les périodicités  $\Gamma$  on a

$$u \in \mathcal{A} = \{v \in H^1(P)^3 \cap L^\infty(P)^3, / \\ v \text{ périodique de période } 2a \text{ par rapport à } x \text{ et } 2b \text{ par rapport à } y \\ \text{et } |v| = 1 \text{ presque partout } \}$$

où  $P = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c]$  est la portion de mémoire comprise dans une "période".

Introduisons les espaces fonctionnels

$$W_p^1(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3), \nabla \psi \in L^2([-a, a] \times [-b, b] \times \mathbb{R})^3 \\ \text{et } \psi \text{ est périodique de période } 2a \text{ par rapport à } x \text{ et } 2b \text{ par rapport à } y \}$$

et

$$H_p = W_p^1(\mathbb{R}^3) / \mathbb{R},$$

ainsi que le noyau

$$N_p : H_p \rightarrow H^{1/2}(\partial P) \\ \phi \mapsto \frac{\partial \phi_{\epsilon x t}}{\partial \eta}$$

où  $\eta$  est la normale au bord de  $P$  dirigée vers l'extérieur.

L'équation 3.3 donnant le potentiel scalaire peut être mise sous forme variationnelle :

$$\int_P \nabla \phi \cdot \nabla \eta \, dx dy dz + \int_{\Gamma_i \cup \Gamma_s} N_p(\phi) \gamma_0(\eta) \, d\sigma + 4\pi \int_P u \cdot \nabla \eta \, dx dy dz = 0 \quad \forall \eta \in H_p$$

où  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_s$  sont les faces inférieure et supérieure de  $P$  et  $\gamma_0(\eta)$  la trace de  $\eta$  sur le bord de  $P$ .

La difficulté de la définition du potentiel  $\phi$  sur tout l'espace a été donc résolue en l'intégrant sous forme d'un noyau concentré sur les surfaces inférieure et supérieure du matériau. L'expression de ce noyau est expliquée dans [Via90, ch II.2.5.4, annexe 2.3 et ch VI].

- **Calcul du potentiel d'énergie démagnétisante pour les têtes magnétiques**

Aid a décomposé le potentiel scalaire en la somme d'un potentiel extérieur et d'un potentiel intérieur [FK90].

Dans un premier temps il a programmé le "faux 2 D" et le 3 D en négligeant le potentiel extérieur. Puis en utilisant un noyau intégré sur toutes les faces du matériaux il a programmé le "faux 2 D" avec potentiel extérieur.

- Nous donnons dans la suite du chapitre un aperçu du mode de calcul du potentiel scalaire utilisé par Aid section 4.2 puis de la méthode de descente de l'énergie utilisée pour la première fois par Vialix mais présentée selon l'approche d'Aid section 4.3.

- **Résumé des simplifications utilisées**

Mémoires à lignes de Bloch		Têtes magnétiques		
Périodicité en $x$ et $y$ . Éléments finis quadrangles de degré un.		Éléments finis quadrangles de degré un. Décomposition en $\phi_{int}$ et $\phi_{ext}$ .		
Contrainte aux nœuds du maillage. Calcul du potentiel scalaire à l'aide d'un noyau intégré sur les faces supérieure et inférieure du matériau.		Contrainte aux nœuds du maillage. Intégration sur l'épaisseur.		Coordonnées sphériques.  Potentiel extérieur négligé.
Maillage régulier.	Maillage adapté.	Potentiel extérieur négligé.	Potentiel extérieur sous forme de noyau intégré sur toutes les faces du matériau.	

## 4.2 Le calcul du potentiel scalaire

- Le potentiel a été décomposé sous la forme :

$$\phi_u = \phi_1 + \phi_2$$

où

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \Delta \phi_1 &= -4\pi \operatorname{div} u \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} &= -4\pi u \cdot \eta \text{ sur } \partial\Omega \\ \Delta \phi_2 &= 0 \text{ dans } \Omega \text{ et dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ [\phi_2] &= \phi_1 \text{ sur } \partial\Omega \\ \left[ \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right] &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

$\phi_1$  est discontinu à travers  $\partial\Omega$   $\phi_1 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$   $\phi_2 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  et  $\phi_2 \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})/\mathbb{R}$  mais pas à  $W^1(\mathbb{R}^3)/\mathbb{R}$  [Aid93, p.46].

- $\phi_1$  vérifie l'équation variationnelle :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \psi \, dx dy dz + 4\pi \int_{\Omega} u \cdot \nabla \psi \, dx dy dz = 0 \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

d'où l'existence et l'unicité de  $\phi_1$  dans  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  [Aid93, p.47].

- L'expression de  $\phi_2$  sous forme de potentiel double couche associé à  $\phi_1$  est donnée par [Aid93, proposition 2.5 p.47] et [DL84, p.351].
- L'énergie démagnétisante se décompose en 2 termes :

$$E_d(u) = E_{\phi_1}(u) + E_{\phi_2}(u)$$

avec

$$\begin{aligned} E_{\phi_1}(u) &= \frac{-u_s^2}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi_1 \cdot u \, dx \\ E_{\phi_2}(u) &= \frac{-u_s^2}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi_2 \cdot u \, dx \end{aligned}$$

- Nous avons

$$E_{\phi_1}(u) = \frac{u_s^2}{8\pi} \int_{\Omega} |\nabla \phi_1|^2 dx$$

$$E_{\phi_2}(u) = \frac{-u_s^2}{8\pi} \int_{\Omega} |\nabla \phi_2|^2 dx$$

et  $|E_{\phi_2}(u)| \leq E_{\phi_1}(u)$  [Aid93, proposition 2.6, 2.7 et 2.8 p. 48-51].

### 4.3 La méthode de descente de l'énergie

- Cette méthode itérative de minimisation de l'énergie du micromagnétisme a été mise au point par Viallix pour les mémoires à lignes de Bloch [Via90, ch IV, 4.2].

Nous présentons ici la version utilisée par Aid pour la simulation des têtes magnétiques [Aid93, II.3 p. 52-62].

- **Adimensionalisation** : Nous commençons par faire un changement de variables pour nous ramener à un cube  $[-1, 1]^3$  que nous notons encore  $\Omega$  (les nouvelles constantes de l'énergie gardent aussi leurs noms).

- **Discrétisation** : Il s'agit d'une méthode d'éléments finis de type quadrangles qui est adaptée à la forme des têtes magnétiques.

Dans la suite  $T_h$  désignera le maillage de  $[-1, 1]^3$  en parallélépipèdes rectangles  $N_h = \{a_i, i = 1, \dots, N\}$  l'ensemble des nœuds du maillage. Ils sont numérotés dans l'ordre des  $x$  croissants puis des  $y$  et des  $z$ .

On note  $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$  les fonctions continues polynômiales de degré 1 par rapport à chaque variable  $x, y, z$  sur chacun des éléments du maillage et telles que  $p_i(a_j) = \delta_{i,j}$  pour  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Les espaces d'interpolation sont notés

$$U_h = \text{Vect} \{p_i, i = 1, \dots, N\} \subset H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

de dimension finie  $N$

$$H_h = \text{Vect} \{p_i, i = 1, \dots, N, i \neq j\} \subset W^1(\mathbb{R}^3)$$

de dimension finie  $N - 1$ .

L'interpolé de  $u$  dans  $U_h$  est  $u_h = \sum_{i=1}^N u(a_i)p_i = \sum_{i=1}^N u_i p_i$  celui de  $\phi_u$

dans  $H_h$  est  $\phi_h = \sum_{i=1}^N \phi_u(a_i)p_i$  où l'on a posé  $\phi_u(a_j) = 0$  pour fixer  $\phi_u$  qui est défini à une constante près.

• Le problème de minimisation sous forme variationnelle est remplacé par le problème discret suivant :

Trouver  $(u_h, \lambda_h, \phi_h)$  tels que :

$$\begin{aligned} u_h &\in U_h^3, \lambda_h \in \mathbb{R}^N, \phi_h \in H_h \\ |u_h(a_i)| &= 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \left\langle \tilde{E}'_{\Omega}(u_h), v_h \right\rangle_{U_h^3, U_h^3} + 2\lambda_h(a_i)u_h(a_i) \cdot v_h(a_i) &= 0, \quad \forall v_h \in U_h^3, \forall i = 1, \dots, N \\ \int_{\Omega} \nabla \phi_h \cdot \nabla \psi_h dx + 4\pi \int_{\Omega} u_h \cdot \nabla \psi_h dx &= 0, \quad \forall \psi_h \in H_h \end{aligned}$$

L'énergie reste la même que celle définie au paragraphe 3.2.

Nous considérons ici le cas où  $\phi_u$  est pris en compte en entier ( $\phi_u = \phi_1 + \phi_2$ ) et où la contrainte est réalisée uniquement aux nœuds du maillage.

• Nous allons faire décroître l'énergie discrète par une méthode de descente.

Après avoir initialisé le vecteur aimantation discrète par  $u_0 = \sum_{i=1}^N u_0^i p_i$

supposons que nous connaissons l'itéré  $u_n = \sum_{i=1}^N u_n^i p_i$  et calculons l'itéré sui-

vant  $u_{n+1} = \sum_{i=1}^N u_{n+1}^i p_i$  et la direction de descente  $D_n = \sum_{i=1}^N D_n^i p_i$  à l'aide des relations suivantes :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad u_{n+1}^i = \alpha_i u_n^i + D_n^i, \quad D_n^i \cdot u_n^i = 0 \text{ et } \alpha_i = \sqrt{1 - |D_n^i|^2}$$

( Si  $|D_n^i| \geq 1$  on pose  $\rho = \min \left( 1, \frac{\rho_e}{\max_{i=1, \dots, n} \{|D_n^i|^2\}} \right)$  où  $\rho_e = \sin \theta_e \Gamma \theta_e$  angle maximal autorisé entre l'aimantation à l'itération  $n$  et celle à l'itération  $n + 1$ ; et on prend  $\tilde{\alpha}_i = \sqrt{1 - \rho |D_n^i|^2}$  et  $u_{n+1}^i = \tilde{\alpha}_i u_n^i + \rho D_n^i$  [Aid93, p.57].)

Pour simplifier les notations nous notons

$$u_{n+1} = \alpha \cdot u_n + D_n$$

$D_n$  doit être choisie de telle sorte que

$$\begin{cases} \tilde{E}_{\Omega}(\alpha \cdot u_n + D_n) \leq \tilde{E}_{\Omega}(u_n) \\ \forall i = 1, \dots, N \quad D_n^i \cdot u_n^i = 0 \end{cases}$$

En supposant  $|D_n^i|$  petite Aid montre [Aid93, II.3.1] que ces conditions sont vérifiées par une direction de descente  $D_n$  telle que :

$$\begin{cases} F_h(D_n) = \inf\{F_h(D) / D \in (U_h)^3, D^i \cdot u_n^i = 0 \forall i = 1, \dots, N\} \\ \forall i = 1, \dots, N D_n^i \cdot u_n^i = 0 \end{cases}$$

où  $F_h$  est une fonctionnelle discrète quadratiqueΓdéveloppement à l'ordre 2 de  $\tilde{E}_\Omega\Gamma$  que nous appellerons fonctionnelle de descente dans la suite.

$$F_h(D) = A_h^+(D, D) + L_h(D)$$

où

$$A_h^+(u, v) = A(u, v) + \sum_{i=1}^N \{L(u_n^i p_i) - A(u_n, u_n^i p_i)\}^+ (u^i \cdot v^i)$$

$$\{f\}^+ = \begin{cases} f & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f \leq 0 \end{cases}$$

$$L_h(v) = L(v) - A(u_n, v)$$

$$\begin{aligned} A(u, v) &= K_{\text{ech}} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + K_{\text{ani}} \int_{\Omega} p(u(x)) \cdot p(v(x)) dx \\ &\quad - \frac{u_s^2}{2} \int_{\Omega} \nabla \phi_u(x) \cdot v(x) dx \\ L(v) &= -u_s^2 \int_{\Omega} H_z(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

$D_n$  vérifie les équations variationnelles suivantes :

Trouver  $(D_n, \mu, \phi_{D_n}) \in U_h^3 \times \mathbb{R}^N \times H_h$  tels que :

$$(4.1) \quad D_n^i \cdot u_n^i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$(4.2) \quad A_h^+(D_n, v_h) + 2\mu^i D_n^i \cdot v_h^i = L_h(v_h), \quad \forall v_h \in U_h^3$$

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} \nabla D_n \cdot \nabla \eta_h dx + 4\pi \int_{\Omega} D_n \cdot \nabla \eta_h dx = 0, \quad \forall \eta_h \in H_h$$

Nous présentonsΓ dans les sections 4.4 et 4.5Γ l'écriture matricielle de la fonctionnelle de descente dans le cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseurΓ puis dans le cas des coordonnées sphériques.

La minimisation de cette fonctionnelle discrète est équivalente à l'inversion d'un système linéaireΓ problème que nous abordons dans la partie II.

La justification de cette méthode de descenteΓ ainsi que sa comparaison avec une méthode de renormalisation et le calcul du résiduΓ sont expliqués dans Aid [Aid93, p. 58-70].

## 4.4 Coordonnées cartésiennes et intégration sur l'épaisseur

- **Cas où le potentiel extérieur  $\phi_2$  est négligé**

Pour cette simulation  $\Gamma$  Aid a supposé que le matériau était un parallélépipède rectangle mince et que l'aimantation était constante selon l'épaisseur. Il a intégré le potentiel scalaire selon l'épaisseur (ce dernier n'étant pas constant sur l'épaisseur). De cette manière  $\Gamma$  il a pu se ramener à un problème de dimension 2.

Les nouvelles expressions des énergies et du potentiel scalaire sont données et justifiées dans Aid [Aid93, chIII]. Elles sont du même type que celles données au chapitre 3.

La discrétisation et la méthode de descente de l'énergie utilisées ici sont exactement celles présentées à la section 4.3. Elles nécessitent la minimisation d'une fonctionnelle de descente  $\Gamma$  dont nous donnons une forme matricielle simplifiée tirée des expressions de Aid [Aid93, ch III.3.2 p. 106-113].

$$(4.4) \quad J'(x, \phi_x) = \frac{1}{2}x^t Ax + \frac{1}{2}x^t B^t \phi_x - x^t b$$

$$(4.5) \quad \text{avec } Bx = D\phi_x \text{ et } Ux = 0$$

où  $x$  est une matrice colonne à  $3N$  lignes  $\Gamma$  contenant les coordonnées cartésiennes de la direction de descente en chaque point du maillage.

$\phi_x$  est une matrice colonne à  $N$  lignes  $\Gamma$  contenant le potentiel scalaire associé à la direction de descente  $x$  par la relation linéaire  $Bx = D\phi_x$  avec  $B$  une matrice  $N \times 3N$  et  $D$  une matrice  $N \times N$  symétrique définie positive (la relation  $Bx = D\phi_x$  correspond à l'équation 4.3).

$B = (B_1 \ B_2 \ B_3) \Gamma (B_1, B_2, B_3)$  matrices  $N \times N$  avec  $B_3 = 0$  pour ce qui est des têtes magnétiques.

$A$  est une matrice  $3N \times 3N$  symétrique définie positive qui correspond aux termes d'échange et d'anisotropie de  $F_h$ .

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \Gamma (A_1, A_2, A_3) \text{ matrices } N \times N \text{ s.d.p..}$$

$U$  est une matrice  $N \times 3N$  qui correspond à la contrainte  $u_n^i \cdot D_n^i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ .

$U = (U_x \ U_y \ U_z) \Gamma (U_x, U_y, U_z)$  matrices  $N \times N$  diagonales contenant les coordonnées de l'aimantation à l'itéré  $n$ . Dans le cas des têtes magnétiques  $\Gamma$  on a toujours  $U_z = 0$ .

$b$  est une matrice colonne à  $3N$  lignes qui correspond au terme de Zeeman de  $F_h$ .

Les matrices  $A_1 \Gamma A_2 \Gamma A_3 \Gamma B_1 \Gamma B_2 \Gamma B_3$  ont très peu de coefficients non nuls. Elles ont une structure bande. La matrice  $D \Gamma$  quoique moins creuse

du fait qu'elle correspond à un noyau intégré sur les surfaces de  $\Omega\Gamma$  a une structure bande. La largeur des bandes en question dépend de l'éloignement des nœuds voisins dans la numérotation et  $\Gamma$  en ce qui concerne  $D\Gamma$  des nœuds situés sur une même face du matériau.

- **Cas où le potentiel extérieur  $\phi_2$  n'est pas négligé**

Ici  $\Gamma$  la fonctionnelle de descente est de la forme

$$(4.6) \quad J''(x, \phi_x^1, \phi_x^2) = \frac{1}{2}x^tAx + \frac{1}{2}x^tB^t\phi_x^1 + \frac{1}{2}x^tB^t\phi_x^2 - x^tb$$

$$(4.7) \quad \text{avec } D\phi_x^1 = Bx, \quad M\phi_x^2 = K\phi_x^1 \text{ et } Ux = 0$$

où  $x\Gamma A\Gamma B\Gamma b\Gamma D$  et  $U$  sont du même type que précédemment.

$\phi_x^1$  est une matrice colonne à  $N$  lignes  $\Gamma$  contenant le potentiel scalaire intérieur associé à la direction de descente  $x$  par la relation linéaire  $D\phi_x^1 = Bx$ .

$\phi_x^2$  est une matrice colonne à  $N$  lignes contenant le potentiel scalaire extérieur relié à  $\phi_x^1$  par la relation linéaire  $M\phi_x^2 = K\phi_x^1$ .

La matrice  $M$  est  $N \times N$  s.d.p.  $\Gamma$  creuse  $\Gamma$  à structure bande tandis que la matrice  $K$  est  $N \times N$  pleine [Aid93, III p.76-88, 109-110 et Annexe II].

Nous verrons  $\Gamma$  dans la partie III  $\Gamma$  les différentes méthodes utilisées pour minimiser ces fonctionnelles ou  $\Gamma$  de manière équivalente  $\Gamma$  pour résoudre les systèmes linéaires qui leurs sont associés.

## 4.5 Coordonnées sphériques

- Ici  $\Gamma$  Aid a utilisé les coordonnées sphériques pour assurer la contrainte  $|u| = 1$  partout. Ce type de simulation nous a fourni un type de systèmes linéaires simple à résoudre par la méthode développée dans la partie II et comportant des matrices dont la bande  $\Gamma$  plus large  $\Gamma$  permet d'obtenir des tests intéressants pour les méthodes d'inversion.

- Les expressions des différents termes de l'énergie  $\Gamma$  du potentiel scalaire et le détail de la méthode de descente  $\Gamma$  adaptée à ce type de problème  $\Gamma$  sont expliqués dans Aid [Aid93, chIV].

La fonctionnelle de descente sous forme matricielle simplifiée  $\Gamma$  obtenue à partir des expressions d'Aid [Aid93 chIV p.131-136]  $\Gamma$  est la suivante  $\Gamma$  dans le cas sans potentiel extérieur :

$$(4.8) \quad J(x, \phi_x) = \frac{1}{2}x^tAx + \frac{1}{2}x^tB^t\phi_x - x^tb$$

$$(4.9) \quad \text{avec } Bx = D\phi_x$$

où  $x$  est une matrice colonne à  $2N$  lignes contenant les coordonnées sphériques de la direction de descente en chaque point du maillage.

$\phi_x$  est une matrice colonne à  $N$  lignes contenant le potentiel scalaire associé à la direction de descente  $x$  par la relation linéaire  $Bx = D\phi_x$  avec  $B$  une matrice  $N \times 2N$  et  $D$  une matrice  $N \times N$  symétrique définie positive.

$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$  matrices  $N \times N$ .

$A$  est une matrice  $2N \times 2N$  symétrique définie positive.

$b$  est une matrice colonne à  $2N$  lignes.

Là encore les matrices  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $D$  sont creuses et à structure bande.

La simulation du cas avec potentiel extérieur n'a pas pu être réalisée car elle nécessitait le calcul d'une matrice noyau  $K$  pleine qui était trop longue vue la complexité des calculs en coordonnées sphériques.

## 4.6 Les résultats

Viallix a consacré un chapitre de sa thèse [Via90, ch VIII] à l'exposé des résultats obtenus pour la simulation des mémoires à lignes de Bloch. Cette simulation a été réalisée à l'aide de la méthode de descente de l'énergie décrite dans la section 4.3 pour les structures grossière et à l'aide d'une méthode de maillage adaptée pour les structures fines.

Aid a présenté les résultats de la simulation de têtes magnétiques dans le chapitre V de sa thèse. Il a obtenu des résultats significatifs dans le cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur. Cette simulation a permis de mettre en évidence des structures physiques usuelles observées au microscope électronique.

# Chapitre 5

## Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette partie à une présentation générale de la simulation numérique de la structure de l'aimantation des matériaux ferromagnétiques. Cette présentation loin d'être exhaustive avait pour but d'introduire les deux problèmes mathématiques traités dans cette thèse.

La résolution des systèmes linéaires provenant de la minimisation de la fonctionnelle de descente apparaissant dans la minimisation de l'énergie du micromagnétisme que nous traiterons dans la partie II.

Le deuxième problème plus théorique concerne la taille de l'ensemble des singularités d'une solution du problème de minimisation de l'énergie du micromagnétisme que nous traiterons dans la partie III.

De nombreuses questions concernant la simulation des matériaux ferromagnétiques restent posées. En particulier la modélisation des structures fines au niveau des parois n'a pas été entièrement réalisée. Par ailleurs des travaux sont en cours pour ce qui concerne la localisation dynamique des domaines et des parois [Kha96].



## Deuxième partie

# Résolution de systèmes linéaires provenant du micromagnétisme



<b>1</b>	<b>Les systèmes linéaires à résoudre</b>	<b>54</b>
1.1	Cas des coordonnées sphériques $\Gamma$ sans potentiel extérieur . . .	54
1.2	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	56
1.3	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	57
<b>2</b>	<b>Résolution des systèmes</b>	<b>58</b>
2.1	Cas des coordonnées sphériques $\Gamma$ sans potentiel extérieur . . .	58
2.1.1	Gradient Conjugué Préconditionné sur le système (1.3)	58
2.1.2	Gradient Conjugué Préconditionné Spécial Microma- gnétisme sur le système (1.4) . . . . .	59
2.1.3	Décroissance de la fonctionnelle . . . . .	65
2.2	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	66
2.2.1	Méthode d'expansion couplée avec SMP CG . . . . .	66
2.2.2	Décroissance de la fonctionnelle . . . . .	69
2.2.3	Pénalisation couplée avec SMP CG . . . . .	70
2.3	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>75</b>
3.1	Les autres algorithmes testés . . . . .	75
3.2	Cas des coordonnées sphériques $\Gamma$ sans potentiel extérieur . . .	77
3.3	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur . . . . .	80
3.4	Cas des coordonnées cartésiennes $\Gamma$ avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur . . . . .	82
	<b>Annexes</b>	<b>83</b>
A	Méthodes directes . . . . .	85
A.1	La méthode de Crout . . . . .	85
A.2	La méthode de Gauss . . . . .	86
B	Méthodes de type gradient conjugué . . . . .	87
B.1	Introduction . . . . .	87
B.2	Définitions et classification . . . . .	88
B.3	Le gradient conjugué préconditionné . . . . .	91
B.4	L'algorithme du bigradient conjugué et ses dérivés . . .	92
B.5	L'algorithme du résidu minimal généralisé (GMRES) . . .	98
C	Méthodes d'expansion . . . . .	104



Dans cette partie nous nous intéressons à la résolution des systèmes linéaires qui interviennent dans les codes de calcul présenté dans la première partie. Ces systèmes apparaissent précisément à chaque étape de la méthode de descente de l'énergie au niveau de la minimisation de la fonctionnelle de descente.

Pour chacun des types de simulations réalisés par Aid nous donnons au chapitre 1 la fonctionnelle de descente discrétisée puis les systèmes linéaires qu'il est nécessaire de résoudre pour faire décroître cette fonctionnelle.

Dans le second chapitre nous présentons les méthodes que nous avons adaptées pour résoudre les différents systèmes. Le principal intérêt de ces méthodes est d'assurer la décroissance de la fonctionnelle de descente à chaque itération si bien que nous pouvons arrêter les itérations à n'importe quel moment en étant certain de faire décroître la fonctionnelle de descente.

Enfin dans le troisième chapitre nous comparons les performances de nos méthodes avec celles de quelques algorithmes classiques.

Dans toute cette partie  $n$  désigne le nombre de nœuds du maillage.

# Chapitre 1

## Les systèmes linéaires à résoudre

### 1.1 Cas des coordonnées sphériques, sans potentiel extérieur

Chronologiquement cet ensemble de simplifications plus difficile à mettre en œuvre a été utilisé par Aid après l'ensemble "coordonnées cartésiennes-intégration sur l'épaisseur-sans potentiel extérieur". Néanmoins il est plus simple à présenter d'un point de vue matriciel (3 degrés de liberté au lieu de 5) et la résolution de son système associé est à la base de la résolution des types de systèmes associés aux autres ensembles de simplifications envisagés.

Comme nous l'avons vu dans la première partie (section 4.5) la fonctionnelle de descente discrétisée qu'il faut faire décroître à chaque étape de la méthode de descente de l'énergie peut s'écrire de la façon suivante :

$$(1.1) \quad J(x, \phi_x) = \frac{1}{2}x^t Ax + \frac{1}{2}x^t B^t \phi_x - x^t b$$

avec  $Bx = D\phi_x$

où  $A$  est une matrice  $2n \times 2n$  symétrique définie positive  $B$  une matrice  $n \times 2n$   $D$  une matrice  $n \times n$  symétrique définie positive  $x$  et  $b$  les coordonnées sphériques de la direction de descente et du second membre  $\phi_x$  le potentiel scalaire associé à  $x$ .

La signification de ces matrices est donnée en (II 4.5) et pour plus de précision dans [Aid93, ch IV].

Toutes les matrices qui interviennent sont creuses.

Nous envisageons deux techniques pour minimiser cette fonctionnelle.

La première consiste à réécrire la fonctionnelle en tenant compte de la relation  $Bx = D\phi_x$  pour éliminer l'inconnue  $\phi_x$ . Nous avons alors :

$$\mathcal{J}(x) = J(x, \phi_x) = \frac{1}{2}x^t A x + \frac{1}{2}x^t B^t D^{-1} B x - x^t b$$

Le minimum de cette fonctionnelle en  $x$  est atteint en  $\bar{x}$  solution du système :

$$(1.2) \quad (A + B^t D^{-1} B)x = b$$

Pour la deuxième technique nous considérons la relation  $Bx = D\phi_x$  comme une contrainte et nous utilisons le théorème des multiplicateurs de Lagrange.

Nous obtenons alors le système :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B^t \\ 0 & D & -D \\ B & -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi_x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis nous éliminons les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et nous obtenons le système :

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont la solution minimise la fonctionnelle  $J$  sous la contrainte  $Bx = D\phi_x$ .

La résolution du système 1.2 peut se faire grâce à l'algorithme du gradient conjugué puisque la matrice  $A + B^t D^{-1} B$  est symétrique définie positive. Cette méthode a l'avantage d'assurer la décroissance de la fonctionnelle de descente  $\mathcal{J}$ . Nous verrons en (III 2.1) que cette méthode est équivalente à l'algorithme du gradient conjugué préconditionné avec un préconditionnement adapté appliquée au système 1.3 bien que la matrice de ce système ne soit pas symétrique définie positive. Là encore la décroissance de la fonctionnelle de descente  $J$  est assurée.

## 1.2 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur

La fonctionnelle de descente est ici :

$$(1.4) \quad J'(x, \phi_x) = \frac{1}{2}x^tAx + \frac{1}{2}x^tB^t\phi_x - x^tb$$

avec  $Bx = D\phi_x$  et  $Ux = 0$

où  $A$  est une matrice  $3n \times 3n$  symétrique définie positive  $B$  une matrice  $n \times 3n$   $D$  une matrice  $n \times n$  symétrique définie positive  $U$  est une matrice formée de trois blocs  $n \times n$  diagonaux dont les coefficients sont les coordonnées cartésiennes de l'aimantation à l'itéré précédent (de la méthode de descente de l'énergie)  $x$  et  $b$  les coordonnées cartésiennes de la direction de descente et du second membre  $\phi_x$  le potentiel scalaire associé à  $x$ .

La signification de ces matrices est donnée en (II.4.4) et pour plus de précision dans Aid [Aid93, ch III].

Là encore les matrices qui interviennent sont creuses.

L'utilisation du théorème des multiplicateurs de Lagrange avec les contraintes  $Bx = D\phi_x$  et  $Ux = 0$  puis l'élimination des multiplicateurs associés à  $Bx = D\phi_x$  donnent le système :

$$(1.5) \quad \begin{pmatrix} A & B^t & U^t \\ B & -D & 0 \\ U & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi_x \\ \lambda_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_x$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $Ux = 0$ .

### 1.3 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur

Quand on considère le potentiel extérieur on est obligé de faire intervenir une matrice  $K \Gamma n \times n$  pleine  $\Gamma$  qui représente le noyau intégré sur les faces du cube  $[0, 1]^3$ .

Avec les mêmes notations qu'au 1.2  $\Gamma$  nous écrivons la fonctionnelle de descente :

$$(1.6) \quad J''(x, \phi_x^1, \phi_x^2) = \frac{1}{2} x^t A x + \frac{1}{2} x^t B^t \phi_x^1 + \frac{1}{2} x^t B^t \phi_x^2 - x^t b$$

avec  $\phi_x^1 = D^{-1} B x$  le potentiel intérieur et  $\phi_x^2$  le potentiel extérieur relié à  $\phi_x^1$  par la relation  $M \phi_x^2 = K \phi_x^1 \Gamma$  où  $M$  est une matrice  $n \times n$  symétrique définie positive creuse et  $U x = 0$ .

Nous réécrivons la fonctionnelle  $J''$  :

$$\mathcal{J}''(x) = J''(x, \phi_x^1, \phi_x^2) = \frac{1}{2} x^t A x + \frac{1}{2} x^t B^t D^{-1} B x + \frac{1}{2} x^t B^t M^{-1} K D^{-1} B x - x^t b$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}''(x) = & \frac{1}{2} x^t A x + \frac{1}{2} x^t B^t D^{-1} B x \\ & + \frac{1}{2} x^t \left( \frac{1}{2} B^t M^{-1} K D^{-1} B + \frac{1}{2} B^t D^{-1} K^t M^{-1} B \right) x - x^t b \end{aligned}$$

Et après utilisation du théorème des multiplicateurs de Lagrange et élimination des multiplicateurs associés aux contraintes  $B x = D \phi_x^1$  et  $M \phi_x^2 = K \phi_x^1$  ainsi que de l'inconnue  $\phi_x^2 \Gamma$  nous obtenons le système :

$$(1.8) \quad \begin{pmatrix} A & B^t [I + \frac{1}{2} M^{-1} K + \frac{1}{2} D^{-1} K^t M^{-1} D] & U^t \\ B & -D & 0 \\ U & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi_x \\ \lambda_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_x$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $U x = 0$ .

# Chapitre 2

## Résolution des systèmes

### 2.1 Cas des coordonnées sphériques, sans potentiel extérieur

#### 2.1.1 Gradient Conjugué Préconditionné sur le système (1.3)

Le système (1.2) peut être résolu grâce à l'algorithme du gradient conjugué preconditionné car la matrice  $A + B^t D^{-1} B$  est symétrique définie positive. Nous notons  $P$  un preconditionnement de cette matrice et nous appliquons l'algorithme B.4 donné en annexe avec  $M = A + B^t D^{-1} B$ . Le preconditionneur  $P$  utilisé sera précisé dans la section 2.1.2.

Dans le code de simulation des têtes magnétiques nous avons besoin de toute façon d'inverser la matrice  $D$  pour calculer le potentiel scalaire démagnétisant de l'aimantation. Cette inversion de  $D$  est réalisée à l'aide d'une méthode directe : la décomposition de Crout complète de la matrice  $D$  (voir Annexe A.1). Nous avons donc à notre disposition la décomposition de Crout  $D = \Lambda \Delta \Lambda^t$  où  $\Lambda$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $\Delta$  est diagonale.

La multiplication de  $M$  par un vecteur  $v$  se fera de la manière suivante : calcul de  $Bv$  / calcul de  $D^{-1}Bv$  grâce à la décomposition de Crout de  $D$  / calcul de  $B^t D^{-1}Bv$  / calcul de  $Av$  / calcul de  $Av + B^t D^{-1}Bv$ .

L'algorithme obtenu est le suivant :

**Algorithme 2.1 (PCG sur (1.2))**

$$\begin{aligned}
 x_0 & \text{choisi} \\
 r_0 & = b - (A + B^t D^{-1} B)x_0 \\
 z_0 & = P^{-1}r_0 \\
 p_0 & = z_0 \\
 \alpha_i & = \frac{(r_i, z_i)}{((A + B^t D^{-1} B)p_i, p_i)} \\
 x_{i+1} & = x_i + \alpha_i p_i \\
 r_{i+1} & = r_i - \alpha_i (A + B^t D^{-1} B)p_i \\
 z_{i+1} & = P^{-1}r_{i+1} \\
 \beta_i & = \frac{(z_{i+1}, r_{i+1})}{(z_i, r_i)} \\
 p_{i+1} & = z_{i+1} + \beta_i p_i
 \end{aligned}$$

Nous démontrons dans la section 2.1.3 que la fonctionnelle de descente 1.1 décroît à chaque itération.

### 2.1.2 Gradient Conjugué Préconditionné Spécial Micromagnétisme sur le système (1.4)

Pour des raisons de commodité de programmation et de précision des calculs nous avons appliqué l'algorithme du gradient conjugué preconditionné au système 1.3 bien que sa matrice  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix}$  ne soit pas symétrique définie positive. Nous verrons que l'utilisation d'une matrice de preconditionnement  $\tilde{P}$  d'inverse  $\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} H & J^t \\ J & K \end{pmatrix}$  permet d'obtenir un algorithme algébriquement équivalent à l'algorithme 2.1.

Dans un premier temps nous obtenons l'algorithme suivant :

**Algorithme 2.2 (PCG sur (1.3))**

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_0 \\ \phi_{x_0} \\ r_0 \\ \phi_{r_0} \\ z_0 \\ \phi_{z_0} \\ p_0 \\ \phi_{p_0} \end{pmatrix} & \text{choisi} \\
\begin{pmatrix} r_0 \\ \phi_{r_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \phi_{x_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b - Ax_0 - B^t \phi_{x_0} \\ -Bx_0 + D\phi_{x_0} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{pmatrix} &= \tilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} r_0 \\ \phi_{r_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H r_0 + J^t \phi_{r_0} \\ J r_0 + K \phi_{r_0} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} p_0 \\ \phi_{p_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{pmatrix} \\
\alpha_i &= \frac{\left( \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \end{pmatrix} \right)}{\left( \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \right)} \\
&= \frac{(r_i, z_i) + (\phi_{r_i}, \phi_{z_i})}{(Ap_i + B^t \phi_{p_i}, p_i) + (Bp_i - D\phi_{p_i}, \phi_{p_i})} \\
\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \phi_{x_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_{x_i} \end{pmatrix} + \alpha_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i + \alpha_i p_i \\ \phi_{x_i} + \alpha_i \phi_{p_i} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} - \alpha_i \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i - \alpha_i (Ap_i + B^t \phi_{p_i}) \\ \phi_{r_i} - \alpha_i (Bp_i - D\phi_{p_i}) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix} &= \tilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H r_{i+1} + J^t \phi_{r_{i+1}} \\ J r_{i+1} + K \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} \\
\beta_i &= \frac{\left( \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} \right)}{\left( \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} \right)} &= \frac{(r_{i+1}, z_{i+1}) + (\phi_{r_{i+1}}, \phi_{z_{i+1}})}{(r_i, z_i) + (\phi_{r_i}, \phi_{z_i})} \\
\begin{pmatrix} p_{i+1} \\ \phi_{p_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{i+1} + \beta_i p_i \\ \phi_{z_{i+1}} + \beta_i \phi_{p_i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or nous supposant :  $\phi_{x_0} = D^{-1} B x_0$   
et :  $J = D^{-1} B H \Gamma$

nous montrons par récurrence que :

$$(2.1) \quad \phi_{x_i} = D^{-1} B x_i, \quad \phi_{p_i} = D^{-1} B p_i, \quad \phi_{z_i} = D^{-1} B z_i \text{ et } \phi_{r_i} = 0$$

Nous obtenons alors l'algorithme

**Algorithme 2.3 (SMPCG)**

$$\begin{aligned}
x_0 &= \text{choisi} \\
\phi_{x_0} &= D^{-1} B x_0 \\
\begin{pmatrix} r_0 \\ \phi_{r_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b - (A - B^t D^{-1} B) x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H r_0 \\ D^{-1} B H r_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} p_0 \\ \phi_{p_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{pmatrix} \\
\alpha_i &= \frac{(r_i, z_i)}{((A + B^t D^{-1} B) p_i, p_i)} \\
\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \phi_{x_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i + \alpha_i p_i \\ \phi_{x_i} + \alpha_i \phi_{p_i} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i - \alpha_i (A + B^t D^{-1} B) p_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H r_{i+1} \\ D^{-1} B H r_{i+1} \end{pmatrix} \\
\beta_i &= \frac{(r_{i+1}, z_{i+1})}{(r_i, z_i)} \\
\begin{pmatrix} p_{i+1} \\ \phi_{p_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{i+1} + \beta_i p_i \\ \phi_{z_{i+1}} + \beta_i \phi_{p_i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

qui est algébriquement équivalent à l'algorithme 2.1 en supposant  $H = P^{-1}$  et en faisant abstraction des  $\phi$  qui n'interviennent pas dans les calculs des autres variables.

Si nous supposons que  $P$  est symétrique définie positive l'algorithme converge donc.

Nous pouvons expliciter  $\tilde{P}$ .

Par exemple :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P - B^t D^{-1} B & B^t \\ B & -D \end{pmatrix}$$

d'inverse

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} B^t D^{-1} \\ D^{-1} B P^{-1} & D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - D^{-1} \end{pmatrix}$$

**Démonstration :**

Notons  $H = P^{-1}$ .

Nous savons que la relation  $J = D^{-1} B H = D^{-1} B P^{-1}$  est nécessaire pour établir les relations (2.1).

Donc

$$\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} B^t D^{-1} \\ D^{-1} B P^{-1} & K \end{pmatrix}$$

Nous posons :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P - L & M^t \\ M & N \end{pmatrix}$$

Avec  $\tilde{P}\tilde{P}^{-1} = I$  nous obtenons :

- a)  $I_{2n} - LP^{-1} + M^t D^{-1} B P^{-1} = I_{2n}$
- b)  $B^t D^{-1} - LP^{-1} B^t D^{-1} + M^t K = 0$
- c)  $MP^{-1} + ND^{-1} B P^{-1} = 0$
- d)  $MP^{-1} B^t D^{-1} + NK = I_n$

- a)  $L = M^t D^{-1} B$
- c)  $M = -ND^{-1} B$
- b)  $M^t (D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - K) = B^t D^{-1}$
- d)  $N (D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - K) = -I_n$

Le choix de  $K$  est libre car cette matrice n'intervient pas dans l'algorithme.

Nous pouvons par exemple poser  $D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - K = D^{-1}$

i.e.  $K = D^{-1} (B P^{-1} B^t D^{-1} - I_p)$ .

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} M^t = B^t \quad \text{i.e.} \quad M &= B \\ N &= -D \\ \text{et} \quad L &= B^t D^{-1} B \end{aligned}$$

Ainsi la matrice :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P - B^t D^{-1} B & B^t \\ B & -D \end{pmatrix}$$

d'inverse

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} B^t D^{-1} \\ D^{-1} B P^{-1} & D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - D^{-1} \end{pmatrix}$$

convient. ■

- Le préconditionnement  $P$  devrait être choisi de manière à ce que  $P$  soit proche de  $A + B^t D^{-1} B$  mais comme nous ne connaissons pas les coefficients de cette matrice nous choisissons de prendre  $P$  proche de  $A$ . Dans tous les tests du chapitre 3 nous avons pris pour  $P$  la décomposition incomplète de Crout de la matrice  $A$ .

Un simple calcul permet de constater qu'avec ce choix de  $P$  la matrice  $\tilde{P}$  est proche de  $\tilde{A}$ .

$$\tilde{P}^{-1} \tilde{A} = \begin{pmatrix} P^{-1} (A + B^t D^{-1} B) & 0 \\ D^{-1} B (P^{-1} (A + B^t D^{-1} B) - I_N) & I_N \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{A}\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} (A + B^t D^{-1} B)P^{-1} & ((A + B^t D^{-1} B)P^{-1} - I_N)B^t D^{-1} \\ 0 & I_N \end{pmatrix}$$

• En fait  $\Gamma$  pour prendre en compte le fait que les relations 2.1 ne sont pas numériquement exactes  $\Gamma$  nous calculons toujours sous cette forme :

$$\begin{aligned} ((A + B^t D^{-1} B)p_i, p_i) &= \left( \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \right) \\ (r_i, z_i) &= \left( \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \end{pmatrix} \right) \\ \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} - \alpha_i \begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En définitive l'algorithme que nous appliquons est le suivant dans lequel  $P$  désigne la factorisation incomplète de Crout de la matrice  $A$ .

**Algorithme 2.4 (SMPCG)**

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \text{choisi} \\
 \begin{pmatrix} \phi_{x_0} \\ r_0 \\ \phi_{r_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ \phi_{x_0} \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{cases} &= \begin{cases} P^{-1}r_0 \\ D^{-1}Bz_0 \end{cases} \\
 \begin{pmatrix} p_0 \\ \phi_{p_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \end{pmatrix} \\
 \alpha_i &= \frac{\left( \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \end{pmatrix} \right)}{\left( \tilde{A} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \right)} \\
 \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \phi_{x_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_{x_i} \end{pmatrix} + \alpha_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} - \alpha_i \tilde{A} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{cases} &= \begin{cases} P^{-1}r_{i+1} \\ D^{-1}Bz_{i+1} \end{cases} \\
 \beta_i &= \frac{\left( \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix} \right)}{\left( \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \end{pmatrix} \right)} \\
 \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ \phi_{p_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous montrons dans la section suivante que cet algorithme fait décroître la fonctionnelle de descente à chaque itération.

### 2.1.3 Décroissance de la fonctionnelle

Nous avons donc obtenu deux algorithmes équivalents 2.1 et 2.4 qui convergent vers la solution du problème de minimisation 1.1. Nous démontrons qu'en fait la fonctionnelle  $J$  décroît à chaque étape de l'un ou l'autre de ces deux algorithmes. C'est-à-dire que pour tout  $i \geq 0$  nous avons :

$$J(x_{i+1}, \phi_{x_{i+1}}) = \mathcal{J}(x_{i+1}) \leq J(x_i, \phi_{x_i}) = \mathcal{J}(x_i)$$

**Démonstration :**

En effet

$$\begin{aligned} J(x_{i+1}, \phi_{x_{i+1}}) &= J(x_i + \alpha_i p_i, \phi_{x_i} + \alpha_i \phi_{p_i}) \\ &= \frac{1}{2}(x_i + \alpha_i p_i)^t A (x_i + \alpha_i p_i) + \frac{1}{2}(x_i + \alpha_i p_i)^t B^t (\phi_{x_i} + \alpha_i \phi_{p_i}) \\ &\quad - (x_i + \alpha_i p_i)^t b \\ &= \frac{1}{2}x_i^t A x_i + \frac{1}{2}x_i^t B^t \phi_{x_i} - x_i^t b + \alpha_i p_i^t A x_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2 p_i^t A p_i \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_i x_i^t B^t \phi_{p_i} + \frac{1}{2}\alpha_i p_i^t B^t \phi_{x_i} + \frac{1}{2}\alpha_i^2 p_i^t B^t \phi_{p_i} - \alpha_i p_i^t b \\ &= J(x_i, \phi_{x_i}) + \alpha_i p_i^t A x_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2 p_i^t A p_i \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_i x_i^t B^t D^{-1} B p_i + \frac{1}{2}\alpha_i p_i^t B^t D^{-1} B x_i + \frac{1}{2}\alpha_i^2 p_i^t B^t D^{-1} B p_i \\ &\quad - \alpha_i p_i^t b \\ &= J(x_i, \phi_{x_i}) \\ &\quad + \alpha_i \left[ \frac{1}{2}\alpha_i p_i^t (A + B^t D^{-1} B) p_i + p_i^t (A + B^t D^{-1} B) x_i - p_i^t b \right] \\ &= J(x_i, \phi_{x_i}) + \alpha_i \left[ \frac{1}{2}r_i^t P^{-1} r_i - p_i^t r_i \right] \\ &= J(x_i, \phi_{x_i}) - \frac{1}{2}\alpha_i r_i^t P^{-1} r_i \end{aligned}$$

Or  $\alpha_i = \frac{(r_i, P^{-1} r_i)}{(\tilde{A} \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix})} > 0$  car  $\tilde{A}$  et  $P^{-1}$  sont symétriques définies positives.

Donc  $J(x_{i+1}, \phi_{x_{i+1}}) \leq J(x_i, \phi_{x_i})$ . (Pour obtenir la 6<sup>ième</sup> égalité nous avons montré par récurrence que  $\begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{A} \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_{x_i} \end{pmatrix}$  et donc  $p_i^t (A + B^t D^{-1} B) x_i - p_i^t b = - \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \end{pmatrix} = -p_i^t r_i$ ). ■

## 2.2 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur

### 2.2.1 Méthode d'expansion couplée avec SMPCG

Nous utilisons ici la méthode d'expansion de Lou et Sameh [LS93] que nous décrivons en annexe C.

Nous reprenons les notations de cette annexe.

Précisons d'abord la forme du système 1.5.

$$(2.2) \quad \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1^t & U_x \\ 0 & A_2 & 0 & B_2^t & U_y \\ 0 & 0 & A_3 & B_3^t & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & -D & 0 \\ U_x & U_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $A_1 \Gamma A_2 \Gamma A_3$  et  $D$  sont  $n \times n$  symétriques définies positives  $\Gamma U_x$  et  $U_y$  sont diagonales et  $U_{x,i}^2 + U_{y,i}^2 = 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Nous ne traitons ici que le cas où l'aimantation  $u$  n'a pas de composante verticale  $u_z \Gamma$  ce qui est le cas pour les têtes magnétiques envisagées.

Notons  $\tilde{U}_x$  et  $\tilde{U}_y$  les matrices diagonales  $n \times n \Gamma$  dont les coefficients vérifient :

$$\begin{cases} \tilde{U}_{x,i} = -\frac{1}{U_{y,i}} & \text{si } U_{x,i} = 0 \\ \tilde{U}_{y,i} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{U}_{x,i} = 0 & \text{si } U_{x,i} \neq 0 \\ \tilde{U}_{y,i} = -\frac{1}{U_{x,i}} \end{cases}$$

Nous avons fait plusieurs essais de décomposition par blocs pour trouver une matrice  $E \ 3n \times 4n \Gamma$  qui soit facile à inverser et telle que la matrice  $G$  soit calculable et facile à inverser. Nous avons finalement choisi une matrice  $E$  ne contenant que des blocs diagonaux et telle que le système de matrice  $G$  à inverser dans la méthode d'expansion soit du type 1.3. Nous pouvons donc résoudre ce système grâce à la méthode de gradient conjugué préconditionné de l'algorithme 2.4.

Finalement nous avons :

$$\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U_x & U_y & 0 & 0 \\ \tilde{U}_x & \tilde{U}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_y & -U_y & 0 & 0 \\ -\tilde{U}_x & U_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

où  $I$  est la matrice identité  $n \times n$ .

Nous remarquons que  $U_x \tilde{U}_y - U_y \tilde{U}_x = I$ .

$$(C^t \quad E^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_y & -\tilde{U}_x & 0 & 0 \\ -U_y & U_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & B_1^t \\ 0 & A_2 & 0 & B_2^t \\ 0 & 0 & A_3 & B_3^t \\ B_1 & B_2 & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

Nous pouvons calculer

$$(C^t \quad E^t)^{-1} M \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_y A_1 \tilde{U}_y + \tilde{U}_x A_2 \tilde{U}_x & -\tilde{U}_y A_1 U_y - \tilde{U}_x A_2 U_x & 0 & \tilde{U}_y B_1^t - \tilde{U}_x B_2^t \\ -U_y A_1 \tilde{U}_y - U_x A_2 \tilde{U}_x & U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 & U_x B_2^t - U_y B_1^t \\ 0 & 0 & A_3 & B_3^t \\ B_1 \tilde{U}_y - B_2 \tilde{U}_x & B_2 U_x - B_1 U_y & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

La matrice  $G$  est de la forme

$$G = \begin{pmatrix} U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 & U_x B_2^t - U_y B_1^t \\ 0 & A_3 & B_3^t \\ B_2 U_x - B_1 U_y & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que  $U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x$  est symétrique définie positive donc la matrice  $G$  est du même type que la matrice du système 1.3.

L'algorithme de la méthode d'expansion pour le système 2.2 est le suivant.

**Algorithme 2.5 (méthode d'expansion)**

$$(i) \begin{cases} v_1 = \tilde{U}_y b_1 - \tilde{U}_x b_2 \\ v_2 = -U_y b_1 + U_x b_2 \\ v_3 = b_3 \end{cases}$$

$$(ii) \text{ Résoudre le système } G \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_y b_1 + U_x b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_y \omega_1 \\ U_x \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Le système résolu à la seconde étape de l'algorithme est du type 1.3. Nous pouvons donc appliquer l'algorithme de gradient conjugué préconditionné 2.4 à sa résolution.

Il est inutile de former la matrice  $G$ . Nous formons seulement la matrice  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$  dont nous calculons la décomposition incomplète de Crout  $P$  qui servira de préconditionneur pour l'inversion du système (ii) de la méthode d'expansion. Puis nous calculons les produits des matrices  $B_2 U_x - B_1 U_y$  et  $U_x B_2^t - U_y B_1^t$  par des vecteurs en décomposant les calculs.

La méthode d'expansion avec résolution du système de matrice  $G$  par l'algorithme SMPCG 2.4 converge vers la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle  $J'$  sous les contraintes  $\phi_x = D^{-1} B x$  et  $U x = 0$ .

Nous allons voir dans la section suivante que la fonctionnelle  $J'$  décroît quel que soit le pas auquel nous nous arrêtons dans l'algorithme SMPCG d'inversion du système (ii).

### 2.2.2 Décroissance de la fonctionnelle

Nous montrons que si nous arrêtons les itérations dans l'inversion du système (ii) par l'algorithme SMPCG 2.4 à n'importe quel moment alors la fonctionnelle  $J'$  décroît. C'est-à-dire que si nous notons  $(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \phi_{x_i})$  le vecteur obtenu par la méthode d'expansion avec seulement  $i$  itérations dans l'inversion du système (ii) alors  $J'(x_{i+1}, \phi_{x_{i+1}}) \leq J'(x_i, \phi_{x_i})$ .

**Démonstration :**

En effet nous avons vu à la section 2.1.3 que si l'on note  $(\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$  le  $i^{\text{ème}}$  itéré de l'inversion du système (ii) nous avons  $J(\omega_{1,i+1}, \omega_{2,i+1}, \omega_{3,i+1}) \leq J(\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i})$  où  $J$  est la fonctionnelle définie par :

$$\begin{aligned}
 J(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}^t \tilde{A} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}^t (B_2 U_x - B_1 U_y \quad B_3)^t D^{-1} (B_2 U_x - B_1 U_y \quad B_3) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \\
 &- \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -U_y b_1 + U_x b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} (\omega_1^t (U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x) \omega_1 + \omega_2^t A_3 \omega_2 + \omega_3^t D \omega_3) \\
 &\quad - \omega_1^t (-U_y b_1 + U_x b_2) - \omega_2^t b_3 \\
 &= \frac{1}{2} (x_1^t A_1 x_1 + x_2^t A_2 x_2 + x_3^t A_3 x_3 + \phi_x^t D \phi_x) \\
 &\quad - x_1^t b_1 - x_2^t b_2 - x_3^t b_3 \\
 &= \frac{1}{2} (x^t A x + x^t B^t \phi_x) - x^t b \\
 &= J'(x, \phi_x)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$J'(x_{i+1}, \phi_{x_{i+1}}) = J(\omega_{1,i+1}, \omega_{2,i+1}, \omega_{3,i+1}) \leq J(\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) = J'(x_i, \phi_{x_i})$$

■

### 2.2.3 Pénalisation couplée avec SMPCG

Une autre façon de nous ramener à un système du type 1.3 $\Gamma$  à partir d'un système du type 1.5 $\Gamma$  consiste à pénaliser le bloc inférieur droit.

Le nouveau système à résoudre est :

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} A & B^t & U^t \\ B & -D & 0 \\ U & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \phi_x \\ \lambda_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\varepsilon$  est un réel positif.

Nous notons  $\tilde{A}_\varepsilon$  la matrice de ce système.

Comme précédemment nous exhibons une matrice de préconditionnement :

$$\tilde{P}_\varepsilon = \begin{pmatrix} P - B^t D^{-1} B - \frac{1}{\varepsilon} U^t U & B^t & U^t \\ & B & -D^{-1} & 0 \\ & U & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est :

$$\tilde{P}_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} B^t D^{-1} & \frac{1}{\varepsilon} P^{-1} U^t \\ D^{-1} B P^{-1} & D^{-1} B P^{-1} B^t D^{-1} - D^{-1} & \frac{1}{\varepsilon} D^{-1} B P^{-1} U^t \\ \frac{1}{\varepsilon} U P^{-1} & \frac{1}{\varepsilon} U P^{-1} B^t D^{-1} & \frac{1}{\varepsilon^2} U P^{-1} U^t - \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix}$$

Le calcul de ces matrices se fait comme dans la section 2.1.2.

L'algorithme SMPCG 2.4 appliqué à ce système avec la matrice de préconditionnement  $\tilde{P}_\varepsilon \Gamma$  converge algébriquement vers la solution du système 2.3.

Néanmoins le conditionnement de la matrice  $\tilde{A}_\varepsilon$  est très mauvais à cause de  $\varepsilon$  qui doit être très petit pour approcher la solution du système 1.5. La convergence est donc très lente comme nous le verrons au chapitre 3. De plus les propriétés de minimisation de la méthode précédente ne sont plus du tout vérifiées. Pour toutes ces raisons cet algorithme n'est pas intéressant. Nous en donnons tout de même une version (celle qui est utilisée dans les tests du chapitre 3) car chronologiquement c'est la première méthode "nouvelle" que nous avons utilisée pour résoudre des systèmes provenant du micromagnétisme.

**Algorithme 2.6 (SMPCG)**

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \text{choisi} \\
 \phi_{x_0} &= D^{-1} B x_0 \\
 \lambda_{x_0} &= \frac{1}{\varepsilon} U x_0 \\
 \begin{pmatrix} r_0 \\ \phi_{r_0} \\ \lambda_{r_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{A}_\varepsilon \begin{pmatrix} x_0 \\ \phi_{x_0} \\ \lambda_{x_0} \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} z_0 \\ \phi_{z_0} \\ \lambda_{z_0} \end{cases} &= \begin{cases} P^{-1} r_0 \\ D^{-1} B z_0 \\ \frac{1}{\varepsilon} U z_0 \end{cases} \\
 \begin{pmatrix} p_0 \\ \phi_{p_0} \\ \lambda_{p_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_0 \\ \phi_{z_0} \\ \lambda_{z_0} \end{pmatrix} \\
 \alpha_i &= \frac{\begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \\ \lambda_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \\ \lambda_{z_i} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \\ \lambda_{p_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \\ \lambda_{p_i} \end{pmatrix}} \\
 \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \phi_{x_{i+1}} \\ \lambda_{x_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i \\ \phi_{x_i} \\ \lambda_{x_i} \end{pmatrix} + \alpha_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \\ \lambda_{p_i} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \\ \lambda_{r_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \\ \lambda_{r_i} \end{pmatrix} - \alpha_i \tilde{A}_\varepsilon \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \\ \lambda_{p_i} \end{pmatrix} \\
 \begin{cases} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \\ \lambda_{z_{i+1}} \end{cases} &= \begin{cases} P^{-1} r_{i+1} \\ D^{-1} B z_{i+1} \\ \frac{1}{\varepsilon} U z_{i+1} \end{cases} \\
 \beta_i &= \frac{\begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \phi_{r_{i+1}} \\ \lambda_{r_{i+1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \\ \lambda_{z_{i+1}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r_i \\ \phi_{r_i} \\ \lambda_{r_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_i \\ \phi_{z_i} \\ \lambda_{z_i} \end{pmatrix}} \\
 \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ \phi_{p_{i+1}} \\ \lambda_{p_{i+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ \phi_{z_{i+1}} \\ \lambda_{z_{i+1}} \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} p_i \\ \phi_{p_i} \\ \lambda_{p_i} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 2.3 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur

Là encore nous allons utiliser la méthode d'expansion de Lou et Sameh [LS93] décrite en annexe CF couplée avec une méthode de gradient conjugué préconditionné. Mais comme la matrice du système 1.8 n'est pas symétrique nous allons devoir revoir tout le processus.

Tout d'abord remarquons que la matrice  $A + B^t[D^{-1} + \frac{1}{2}M^{-1}KD^{-1} + \frac{1}{2}D^{-1}K^tM^{-1}]B$  qui apparaît à la section 1.3 dans l'expression de la fonctionnelle  $\mathcal{J}''$  dont l'expression est donnée par 1.7 est symétrique définie positive. Cela provient du fait que la fonctionnelle  $\mathcal{J}''$  exprime une énergie positive (section I.4.3 et [Aid93, ch III]).

Précisons maintenant la forme du système 1.8.

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & Z_1 & U_x \\ 0 & A_2 & 0 & Z_2 & U_y \\ 0 & 0 & A_3 & Z_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & -D & 0 \\ U_x & U_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \phi \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec  $A_1, A_2, A_3$  et  $D$  sont  $n \times n$  symétriques définies positives  $U_x$  et  $U_y$  sont diagonales et  $U_{x,i}^2 + U_{y,i}^2 = 1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

$$Z_i = B_i^t [I + \frac{1}{2}M^{-1}K + \frac{1}{2}D^{-1}K^tM^{-1}D] = B_i^t H$$

A nouveau nous ne traitons que le cas où l'aimantation  $u$  n'a pas de composante verticale  $u_z$ .

Nous appliquons au système 2.4 la méthode d'expansion avec  $\tilde{U}_x, \tilde{U}_y$  et  $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$  définies comme dans la section 2.2.1.

La matrice  $M$  est maintenant :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & A_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & A_3 & Z_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

Nous calculons

$$(C^t \quad E^t)^{-1} M \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_y A_1 \tilde{U}_y + \tilde{U}_x A_2 \tilde{U}_x & -\tilde{U}_y A_1 U_y - \tilde{U}_x A_2 U_x & 0 & \tilde{U}_y Z_1 - \tilde{U}_x Z_2 \\ -U_y A_1 \tilde{U}_y - U_x A_2 \tilde{U}_x & U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 & U_x Z_2 - U_y Z_1 \\ 0 & 0 & A_3 & Z_3 \\ B_1 \tilde{U}_y - B_2 \tilde{U}_x & B_2 U_x - B_1 U_y & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

Donc la matrice  $G$  est de la forme

$$G = \begin{pmatrix} U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 & U_x Z_2 - U_y Z_1 \\ 0 & A_3 & Z_3 \\ B_2 U_x - B_1 U_y & B_3 & -D \end{pmatrix}$$

L'algorithme de la méthode d'expansion pour le système 2.4 est le même qu'à la section 2.2.1.

**Algorithme 2.7 (méthode d'expansion)**

$$(i) \begin{cases} v_1 = \tilde{U}_y b_1 - \tilde{U}_x b_2 \\ v_2 = -U_y b_1 + U_x b_2 \\ v_3 = b_3 \end{cases}$$

$$(ii) \text{ Résoudre le système } G \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_y b_1 + U_x b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \phi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_y \omega_1 \\ U_x \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Le système résolu à la seconde étape de l'algorithme est du type suivant :

$$(2.5) \quad G \begin{pmatrix} \omega \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la matrice  $G$  est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} \check{A} & \check{R}^t H \\ \check{R} & -D \end{pmatrix}$$

Le système 2.5 est équivalent au système

$$(2.6) \quad \begin{cases} (\check{A} + \check{R}^t H D^{-1} \check{R}) \omega = \beta \\ \psi = D^{-1} \check{R} \omega \end{cases}$$

La matrice  $\check{A} + \check{R}^t H D^{-1} \check{R}$  est symétrique définie positive. Nous pouvons donc appliquer l'algorithme du gradient conjugué préconditionné à la résolution du système 2.6 avec comme préconditionneur la décomposition incomplète de Crout de la matrice  $\check{A}$ .

Il est évidemment inutile et beaucoup trop coûteux de former les matrices  $G$  et  $H$ . Nous formons seulement la matrice  $\check{A} = \begin{pmatrix} U_y A_1 U_y + U_x A_2 U_x & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$  dont nous calculons la décomposition incomplète de Crout  $P$  qui servira de préconditionneur pour l'inversion du système 2.6. Puis nous calculons les produits matrices vecteurs nécessaires en décomposant les calculs.

Nous remarquons que la fonctionnelle qui décroît quand nous appliquons l'algorithme du gradient conjugué préconditionné au système 2.6 est

$$\frac{1}{2} \omega^t \check{A} \omega + \frac{1}{2} \omega^t \check{R}^t H \psi - \omega^t \beta = J''(x, \phi_x)$$

C'est-à-dire exactement la fonctionnelle  $J''$  que nous devons faire décroître.

Nous avons donc à notre disposition un algorithme qui converge vers le minimum de la fonctionnelle à faire décroître. De plus nous pouvons l'arrêter à n'importe quel moment au niveau de l'inversion du système 2.6 en étant assuré de faire décroître la fonctionnelle.

Par contre nous verrons au chapitre 3 qu'en pratique la convergence de cet algorithme est lente probablement à cause du mauvais conditionnement du système 2.6.

# Chapitre 3

## Tests numériques

Nous avons testé un certain nombre de méthodes d'inversion de systèmes pour comparer leurs performances avec celles de nos algorithmes. Nous les avons appliquées sur le système 1.3 pour le cas des coordonnées sphériques sans potentiel extérieur (3D); sur le système 1.5 pour le cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur (2D). Pour ce qui est du cas des coordonnées cartésiennes avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur nous ne pouvons pas former la matrice complète parce que la matrice  $K$  est pleine. Nous ne présentons donc que les résultats de la méthode d'expansion couplée avec l'algorithme du gradient conjugué préconditionné présentée dans la section 2.2.3.

Tous les tests ont été réalisés sur une machine SUN SPARK 10 au LETI. Nous avons utilisé le langage FORTRAN 77 et les réels ont été pris en double précision. Dans toutes les méthodes itératives utilisées l'initialisation est faite par le vecteur nul.

### 3.1 Les autres algorithmes testés

- Quand le maillage était suffisamment grossier nous avons pu implémenter une méthode directe : la méthode de Crout (CROUT). C'est d'ailleurs la première méthode d'inversion de système qui a été utilisée dans les codes de simulation du micromagnétisme développés au LETI. Nous décrivons cette méthode dans l'annexe A.1.

Cette méthode a le gros inconvénient de remplir le profil de la matrice ce qui pose des problèmes de place mémoire et de temps de calculs quand le maillage devient fin. En fait les problèmes se posent surtout en 3D et quand nous utilisons en 2D un maillage avec autant de mailles dans les deux dimensions du plan.

- Bien que les matrices des systèmes 1.3 et 1.5 ne soient pas symétriques définies positives nous avons programmé un algorithme de gradient conjugué préconditionné simplement par la décomposition incomplète de Crout de la matrice du système complet (PCGCROUT voir annexe B). Cet algorithme a souvent donné de bons résultats mais il a l'inconvénient de ne pas minimiser la fonctionnelle de descente à chaque itération et surtout d'avoir un résidu très irrégulier.

- Pour implémenter des méthodes pour matrices non symétriques mais à partie symétrique définie positive nous avons dû rendre les matrices des systèmes non symétriques. Cela s'est fait en multipliant les blocs inférieurs des matrices par  $-1$ . Les nouvelles matrices obtenues sont :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ -B & D \end{pmatrix} \text{ pour le 3D et } \begin{pmatrix} A & B^t & U^t \\ -B & D & 0 \\ -U & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour le 2D.}$$

Le préconditionneur utilisé est toujours une décomposition incomplète de Gauss de la matrice entière.

- Nous avons implémenté deux méthodes itératives dérivées de l'algorithme du gradient biconjugué (Bi-CG) : le gradient conjugué accéléré (CGS) [Son89] et le gradient biconjugué stabilisé (Bi-CGStab) [Vdv92]. Pour un aperçu de ces méthodes voir l'annexe B.4.

- Nous avons enfin implémenté l'algorithme du résidu minimal généralisé avec redémarrage au bout de  $k$  pas (GMRES( $k$ )) [SS86] et annexe B.5.

- Ces méthodes pour matrices non symétriques nécessitent le stockage des coefficients non nuls de la matrice sous forme non symétrique ainsi que de leur décomposition incomplète de Gauss qui prend autant de place. Pour GMRES( $k$ ) il faut rajouter le stockage de  $k$  directions de descente.

La convergence de ces algorithmes n'est pas toujours atteinte. Elle dépend énormément du conditionnement du système et probablement aussi de l'initialisation. Mis à part celui de GMRES les résidus sont très irréguliers Bi-CGStab étant réputé plus régulier que CGS. Enfin aucune de ces méthodes ne fait décroître la fonctionnelle de descente. Nous sommes donc de toute façon obligés d'attendre d'avoir atteint une précision suffisante pour être sûrs d'approcher la solution du système et donc la solution du problème de minimisation.

## 3.2 Cas des coordonnées sphériques, sans potentiel extérieur

Pour ce cas toutes les méthodes ont pu être testées.

Nous donnons un premier tableau de résultats pour un maillage 4.10.20 relativement grossier. Les explications des résultats apparaissant dans le tableau sont données ci-dessous. Tous les autres tableaux sont construits de la même façon.

Table 3.1: Maillage 4.10.20

Dimension de la matrice : 2 400

Coefficients non nuls : 74 165

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
CROUT	17 " 23 "	2024 017		1 "	$2.10^{-15}$	17 " 23 "
PCGCROUT	1 "	74 165	25	3 "	$1.10^{-8}$	4 "
SMPCG	A 0 "	A 33 280	21	3 "	$6.10^{-8}$	3 "
	D 0 "	D 34 673				
ILUBi-CGStab	26 "	145 930	16	4 "	$2.10^{-9}$	30 "
ILUCGS	26 "	145 930	18	5 "	$3.10^{-8}$	31 "
CGS		145 930	501	56 "	$6.10^{-8}$	56 "
GMRES	26 "	145 930				
( $k = 23$ )		55 200	23	4 "	$9.10^{-8}$	30 "

**préparation** Durée des étapes préliminaires à la résolution du système. Il s'agit pour CROUT d'une décomposition complète de Crout de la matrice complète pour PCGCROUT de la décomposition incomplète de Crout de la même matrice pour ILUBi-CGStab ILUCGS et GMRES de la décomposition incomplète de Gauss de la matrice non symétrique.

**élts stockés** Nombre de coefficients non nuls à stocker en plus des coefficients non nuls de la matrice elle-même : profil de la matrice pour CROUT nombre de coefficients non nuls de la matrice pour PCGCROUT nombre de coefficients non nuls de la matrice  $A$  et profil de la matrice  $D$  pour SMPCG nombre de coefficients non nuls de la matrice non symétrique pour les autres méthodes et nombre de coefficients des  $k$  directions de descente stockées pour GMRES( $k$ ). Il est à noter que nous devons de toutes façons stocker la matrice  $D$  pour calculer l'énergie démagnétisante.

**itér.** Nombre d'itérations ( $k$  fois un nombre entier pour GMRES( $k$ )).

**durée itér.** Durée des itérations.

**précision** Précision réellement atteinte ( $\frac{|b-Mx_k|}{|b|}$  où  $M$  et  $b$  sont la matrice et le second membre du système et  $x_k$  est l'approximation de la solution donnée par l'algorithme).

Le tableau suivant donne les résultats des tests pour un maillage plus fin.

Table 3.2: Maillage 5.20.40  
Dimension de la matrice : 12 000  
Coefficients non nuls : 400 723

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
CROUT	–	11 340 728				
PCGCROUT	7 "	400 723	63	43 "	$7.10^{-8}$	50 "
SMPCG	A 4 "	A 181 783	49	43 "	$8.10^{-8}$	57 "
	D 10 "	D 416 193				
ILUBi–CGStab	2 ' 40 "	789 446	41	1 ' 2 "	$5.10^{-8}$	3 ' 42 "
ILUCGS	2 ' 40 "	789 446	55	1 ' 24 "	$10^{-8}$	4 ' 4 "
CGS		789 446	924	9 ' 42 "	$8.10^{-8}$	9 ' 42 "
GMRES	2 ' 40 "	789 446				
( $k = 61$ )		732 000	61	1 ' 1 "	$7.10^{-8}$	3 ' 41 "

- Les courbes de résidus suivantes montrent que SMPCG a le comportement le plus régulier. Remarquons que les durées de chaque itération sont très différentes selon les méthodes.

Figure 3.1: Courbes de précision pour le maillage 5.20.40

- Les tables 3.1 et 3.2 montrent que PCGCROUT et SMPCG ont des temps de calculs divisés par 4 par rapport à ceux des autres méthodes préconditionnées. Le stockage est aussi bien moins important.

- La figure 3.1 nous permet de voir que SMPCG est la seule méthode dont le résidu décroît vraiment régulièrement. En particulier le résidu de PCGCROUT a un comportement très irrégulier. De plus dans de nombreux cas non illustrés ici cette méthode ne converge pas.

• Les tableaux et la figure qui suivent font ressortir l'influence sur le conditionnement du système de deux paramètres du code de calcul : l'aimantation initiale et le champ appliqué. Nous voyons que la régularité de la méthode SMPCG qui converge à coup sûr en peu d'itérations rend cette méthode plus fiable que PCGCROUT.

Table 3.3: Maillage 3.20.60

Dimension de la matrice : 10 800

Coefficients non nuls : 327 030.

Avec une magnétisation initiale constante et sans champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
PCGCROUT	5 "	327 030	48	27 "	$8.10^{-8}$	32 "
SMPCG	A 2 "	A 147 637	38	24 "	$7.10^{-8}$	29 "
	D 3 "	D 228 653				

Table 3.4: Maillage 3.20.60

Dimension de la matrice : 10 800

Coefficients non nuls : 330 583.

Avec une magnétisation initiale aléatoire et sans champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
PCGCROUT	5 "	330 583	67	38 "	$2.10^{-8}$	43 "
SMPCG	A 2 "	A 148 136	33	21 "	$6.10^{-8}$	26 "
	D 3 "	D 228 653				

Table 3.5: Maillage 3.20.60

Dimension de la matrice : 10 800

Coefficients non nuls : 330 583.

Avec une magnétisation initiale aléatoire et sans champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
PCGCROUT	5 "	330 583	43	24 "	$2.10^{-8}$	29 "
SMPCG	A 2 "	A 148 136	9	6 "	$2.10^{-8}$	11 "
	D 3 "	D 228 653				

Figure 3.2: Courbes de précision pour le maillage 3.20.60

### 3.3 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et sans potentiel extérieur

- Nous avons testé la méthode d'expansion couplée avec SMPCT qui résout le système (ii) de l'algorithme 2.5 de dimension  $3n \times 3n$  et pour les autres méthodes nous résolvons le système 1.5 de dimension  $5n \times 5n$ . Il est donc normal de constater une différence de durée des itérations entre la méthode d'expansion et les autres méthodes. Mais le gros de l'écart provient plutôt du fait que le système 1.5 est moins bien conditionné que le système (ii).

Table 3.6: Maillage 50.50

Dimension de la matrice : 12 500

Coefficients non nuls : 97 907.

Avec une magnétisation initiale constante et sans champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
CROUT	2 ' 15 "	2 528 741		2 "	$2 \cdot 10^{-14}$	2 ' 17 "
PCGCROUT	1 "	97 907	412	1 ' 22 "	$6 \cdot 10^{-7}$	1 ' 23 "
Expansion	17 "	46 726	46	12 "	$10^{-7}$	29 "
	D 2 "	D 127 399				
ILUBi-CGStab	4 "	183 314	339	2 ' 28 "	$5 \cdot 10^{-7}$	2 ' 32 "
ILUCGS	4 "	183 314	490	3 ' 36 "	$1 \cdot 10^{-6}$	3 ' 40 "
CGS		183 314	720	2 ' 15 "	$3 \cdot 10^{-7}$	2 ' 15 "

préparation Pour la méthode d'expansion nous donnons la durée de la préparation de  $GF$  de la décomposition incomplète de  $\tilde{A}$  et de la décomposition complète de  $D$ .

Nous remarquons que le temps de préparation de la matrice G est très important. Néanmoins nous pensons qu'il peut être diminué avec une programmation plus optimale.

A noter le fait que dans le tableau 3.6 la version non préconditionnée de CGS converge plus rapidement que la version préconditionnée par la décomposition incomplète de Gauss !

- Là encore l'influence des paramètres sur le conditionnement est grande. Dans de très nombreux cas la seule méthode itérative convergente est la méthode d'expansion couplée avec SMP CG.

Table 3.7: Maillage 50.50

Dimension de la matrice : 12 500

Coefficients non nuls : 97 907.

Avec une magnétisation initiale aléatoire et avec champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
CROUT	2 ' 15 "	2 528 741		2 "	$1.10^{-14}$	2 ' 17 "
PCGCROUT	1 "	97 454	nc			
Expansion	17 "	48 805	298	1 ' 20 "	$2.10^{-6}$	1 ' 37 "
	D 2 "	D 127 399				
ILUBi-CGStab	4 "	182 408	nc			
ILUCGS	4 "	182 408	nc			
CGS		182 408	1036	3 ' 15 "	$10^{-3}$	3 ' 15 "

Dans le cas d'un maillage 80.80 la méthode d'expansion couplée avec SMP CG est la seule méthode qui permette de résoudre le système.

Table 3.8: Maillage 80.80

Dimension de la matrice : 32 000

Coefficients non nuls : 252 968.

Avec une magnétisation initiale aléatoire et sans champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
Expansion	1 ' 55 "	126 085	210	3 ' 28 "	$2.10^{-6}$	5 ' 23 "
	D 10 "	D 518 239				

Table 3.9: Maillage 80.80 $\Gamma$ Dimension de la matrice : 32 000 $\Gamma$ 

Coefficients non nuls : 252 968.

Avec une magnétisation initiale aléatoire et avec champ appliqué.

méthode	préparation	élts stockés	itér.	durée itér.	précision	durée totale
Expansion	1 ' 55 "	126 085	140	2 ' 26 "	$1.10^{-8}$	4 ' 21 "
	D 10 "	D 518 239				

### 3.4 Cas des coordonnées cartésiennes, avec intégration sur l'épaisseur et avec potentiel extérieur

• La matrice  $K$  étant pleine $\Gamma$ nous ne pouvons pas calculer la matrice du système 1.8. Donc $\Gamma$ la méthode d'expansion couplée avec SMP CG est la seule que nous puissions appliquer dans ce cas.

Nous nous contenterons de faire des comparaisons d'une simulation $\Gamma$ ayant des paramètres donnés et avec calcul du potentiel extérieur $\Gamma$ avec une simulation $\Gamma$ ayant les même paramètres mais sans calcul du potentiel extérieur. Nous donnons $\Gamma$ pour ce qui concerne le stockage $\Gamma$ uniquement le nombres d'éléments de la matrice  $K$  qui $\Gamma$ rappelons le $\Gamma$ est pleine  $n \times n$ .

Table 3.10: Maillage 20.20 $\Gamma$ Dimension de la matrice : 2 000 $\Gamma$ Nombre d'éléments de  $K$  : 160 000.

Simulation	préparation	itér.	durée itér.
Avec potentiel extérieur et sans champ appliqué	0 "	121	26 "
Sans potentiel extérieur et sans champ appliqué	0 "	119	4 "
Avec potentiel extérieur et avec champ appliqué	0 "	3	1 "
Sans potentiel extérieur et avec champ appliqué	0 "	1	0 "

Table 3.11: Maillage 40.40  
 Dimension de la matrice : 8 000  
 Nombre d'éléments de  $K$  : 2 560 000.

Simulation	préparation	itér.	durée itér.
Avec potentiel extérieur et sans champ appliqué	0 "	68	4 ' 4 "
Sans potentiel extérieur et sans champ appliqué	0 "	66	12 "
Avec potentiel extérieur et avec champ appliqué	0 "	9	37 "
Sans potentiel extérieur et avec champ appliqué	0 "	51	9 "

Là encore la durée de l'inversion est très dépendante du conditionnement du problème. Il est beaucoup plus long de résoudre le problème quand nous considérons le potentiel extérieur car à chaque itération nous sommes obligés d'effectuer plusieurs multiplications de la matrice  $K$  par un vecteur. Cependant la méthode converge et fait décroître la fonctionnelle de descente.



# Annexe A

## Méthodes directes

Nous considérons un système inversible de dimension  $dim$  :  $Mx = b$  .

### A.1 La méthode de Crout

La méthode de factorisation de Crout est réservée aux *systèmes symétriques*. Elle consiste à calculer les coefficients d'une factorisation de la matrice  $M$  sous la forme :

$$M = LDL^t$$

où  $L$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $D$  est diagonale.

Les coefficients se calculent de la manière suivante :

$$(A.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_{ij} = (m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} d_{kk} \ell_{jk}) / d_{jj} \quad 1 \leq j < i \leq dim \\ d_{ii} = m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}^2 d_{kk} \quad 1 \leq i \leq dim \end{array} \right.$$

Cette méthode a l'inconvénient de remplir le profil de la matrice. Elle convient donc à l'inversion de matrices bandes dont la bande n'est "pas très large". La notion de "pas très large" dépendant de l'ordinateur utilisé (place mémoire/nécessité d'utiliser les mémoires secondaires/..).

## A.2 La méthode de Gauss

Bien que nous n'ayons pas utilisé cette méthode pour inverser des systèmes nous la décrivons car elle nous servira à décrire un préconditionnement pour des matrices non symétriques. C'est une méthode éprouvée pour inverser tout type de matrice particulièrement les *matrices non symétriques*.

Nous ne décrivons pas les méthodes à pivot partiel ou total bien qu'elles soient plus fiables.

Il s'agit de calculer la décomposition  $LU$  de la matrice  $M$  :

$$M = LU$$

$L$  triangulaire inférieure à diagonale unité

$U$  triangulaire supérieure.

Les coefficients se calculent de la manière suivante :

$$(A.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \ell_{ij} = (m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & 1 \leq j < i \leq \dim \\ u_{ij} = m_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} & 1 \leq i \leq j \leq \dim \end{array} \right.$$

# Annexe B

## Méthodes de type gradient conjugué

### B.1 Introduction

La *méthode du gradient conjugué* *CG* a été décrite pour la première fois en 1952 par Hestenes et Stiefel en collaboration avec Lanczos [HS52]. A l'époque la méthode avait été testée sur des matrices de dimension 12 avec du matériel IBM. D'abord considérée comme une *méthode directe* elle a été rapidement utilisée en temps que *méthode itérative* la vitesse de convergence dépendant du conditionnement de la matrice.

Dans les années 50 et 60 cet algorithme et ses variantes sont souvent utilisés et étudiés mais il faut attendre les années 70 pour voir les techniques de gradient conjugué largement évoluer particulièrement en ce qui concerne le préconditionnement. Dorénavant la vitesse de convergence de ces algorithmes est très satisfaisante pour les matrices *symétriques définies positives* (s.d.p.).

En 1975 Paige et Saunders [PS75] donnent la première extension de l'algorithme à des matrices *non symétriques* mais à *partie symétrique définie positive*. Depuis lors un certain nombre de généralisations ont été tentées. Elles ont abouti systématiquement à des algorithmes valables uniquement sur certaines classes de matrices et qui convergent à condition d'utiliser de bons préconditionnements. A notre connaissance aucune méthode de préconditionnement générale et systématique n'existe pour le moment. Néanmoins bon nombre de tests voire d'applications industrielles sont résolus aujourd'hui grâce à ces méthodes.

Plusieurs classifications des méthodes de gradient conjugué ont été proposées dès les années 50. Deux articles récents ont retenu notre attention.

“Méthodes de gradient conjugué” de Pascal Joly [Jol88b] propose deux algorithmes généraux équivalents : un algorithme de minimisation et un algorithme d’orthogonalisation caractérisés par deux matrices  $H$  et  $K$  qui permettent de différencier les algorithmes dérivés. L’algorithme du double gradient conjugué (BiCG) est ensuite déduit de CG.

Nous avons choisi d’utiliser les algorithmes de base de l’article de Ashby Manteuffel et Saylor [AMS90] parce qu’ils donnent une définition claire du gradient conjugué et fournissent une caractérisation simple des méthodes.

Pour plus de détails sur l’historique des méthodes de gradient conjugué se reporter à [GO89].

## B.2 Définitions et classification

Il s’agit de résoudre le système :  $Mx = b$   
 $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien.

### Définition B.1 (Méthode de gradient conjugué)

*C’est une méthode de gradient :*

$$\begin{cases} x_0 & \text{choisi} \\ x_{i+1} = x_i + d_i & \text{où } d_i \in K_{i+1}^{espace\ de\ Krylov}(r_0, M) = Vect\{r_0, Mr_0, \dots, M^i r_0\} \end{cases}$$

*qui minimise l’erreur  $e_i = x - x_i$  par rapport à la norme d’un certain produit scalaire dont la matrice est notée  $B$ .*

$$i.e. : d_i \in K_{i+1} \text{ minimise } |x - x_{i+1}|_B = (Be_{i+1}, e_{i+1})^{1/2} \text{ sur } K_{i+1}$$

*Nous pouvons aussi dire que  $e_{i+1}$  est orthogonale à  $K_{i+1}$  pour le produit scalaire de matrice  $B$ .*

L'algorithme le plus général nécessite le stockage de toutes les directions de descente :

**Algorithme B.1 (CG(B,M))**

$$\begin{aligned}
 x_0 & \text{ choisi} \\
 r_0 & = b - Mx_0 \\
 p_0 & = r_0 \\
 \alpha_i & = \frac{(Be_i, p_i)}{(Bp_i, p_i)} \\
 x_{i+1} & = x_i + \alpha_i p_i \\
 r_{i+1} & = r_i - \alpha_i M p_i \\
 \sigma_{ij} & = \frac{(B M p_i, p_j)}{(B p_j, p_j)} \quad 0 \leq j \leq i \\
 p_{i+1} & = M p_i - \sum_{j=0}^i \sigma_{ij} p_j
 \end{aligned}$$

Il est nécessaire de restreindre la place mémoire occupée en ne retenant que les  $s$  dernières directions de descente (méthode  $s$ -termes). Une autre possibilité est donnée par GMRES (voir B.5)

[FM84] et [AMS90] donnent une condition nécessaire et suffisante sur la matrice  $M$  pour que la méthode 3-termes CG(BIM) soit convergente. Cette CNS est supposée remplie dans la suite.

Si nous ajoutons un préconditionnement  $P$  dont nous notons  $C = P^{-1}$  l'inverse les méthodes sont maintenant caractérisées par 2 matrices  $B$  et  $C$ .

Il existe deux versions de l'algorithme 3-termes :

**Algorithme B.2 (Odir(B,C,M))**

$$\begin{aligned}
 x_0 & \text{ choisi} \\
 r_0 & = b - Mx_0 \\
 p_0 & = Cr_0 \\
 \alpha_i & = \frac{(Be_i, p_i)}{(Bp_i, p_i)} \\
 x_{i+1} & = x_i + \alpha_i p_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{i+1} &= r_i - \alpha_i M p_i \\
\gamma_i &= \frac{(BCM p_i, p_i)}{(B p_i, p_i)} \\
\sigma_i &= \frac{(BCM p_i, p_{i-1})}{(B p_{i-1}, p_{i-1})} \\
p_{i+1} &= C M p_i - \gamma_i p_j - \sigma_i p_{i-1}
\end{aligned}$$

**Algorithme B.3 (Omin(B,C,M))**

$$\begin{aligned}
x_0 & \text{ choisi} \\
r_0 &= b - M x_0 \\
\hat{p}_0 &= r_0 \\
\hat{\alpha}_i &= \frac{(B e_i, \hat{p}_i)}{(B \hat{p}_i, \hat{p}_i)} \\
x_{i+1} &= x_i + \hat{\alpha}_i \hat{p}_i \\
r_{i+1} &= r_i - \hat{\alpha}_i M \hat{p}_i \\
s_{i+1} &= C r_{i+1} \\
\beta_i &= -\frac{(BCM e_{i+1}, \hat{p}_i)}{(B \hat{p}_i, \hat{p}_i)} = -\frac{(B s_{i+1}, \hat{p}_i)}{(B \hat{p}_i, \hat{p}_i)} \\
p_{i+1} &= s_{i+1} + \beta_i \hat{p}_i
\end{aligned}$$

Ce dernier algorithme converge dans les mêmes conditions que Odir(BICIM) si la matrice  $BCM$  est définie.

Pour que l'une ou l'autre des méthodes soit utilisable il faut en outre que  $(B e_i, p_i)$  soit calculable sans utiliser  $e_i$  qui est évidemment inconnu.

Dans [AMS90] les auteurs classifient ensuite selon leurs critères un certain nombre de méthodes connues et donnent le domaine de validité de chacune d'entre elles ainsi que les calculs de  $\alpha_i$  et  $\hat{\alpha}_i$ .

Dans le paragraphe suivant nous rattachons l'algorithme du gradient conjugué préconditionné classique (PCG) à cette théorie. L'algorithme du bigradient conjugué accéléré de Sonneveld (CGS) [Son89] et le bigradient conjugué stabilisé de Van der Vorst (BiCGStab) [Vdv92] proviennent de l'application de CG à un autre système. Enfin GMRES de Saad et Schultz [SS86] se rattache à l'algorithme B.1.

## B.3 Le gradient conjugué préconditionné

Il est obtenu à partir de Omin(BICIM) en posant :

$$B = M \quad \text{et} \quad C = P^{-1}$$

où  $P$  est la matrice de préconditionnement.

D'après les critères de [AMS90] la convergence est assurée si  $M$  est s.d.p. ainsi que  $P$  et dans ce cas la fonctionnelle minimisée est  $|e_k|_M = (r_k, M^{-1}r_k)$ .

### Algorithme B.4 (PCG)

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ choisi} \\ r_0 & = b - Mx_0 \\ z_0 & = P^{-1}r_0 \\ p_0 & = z_0 \\ \alpha_i & = \frac{(r_i, z_i)}{(Mp_i, p_i)} \\ x_{i+1} & = x_i + \alpha_i p_i \\ r_{i+1} & = r_i - \alpha_i M p_i \\ z_{i+1} & = P^{-1}r_{i+1} \\ \beta_i & = \frac{(z_{i+1}, r_{i+1})}{(z_i, r_i)} \\ p_{i+1} & = z_{i+1} + \beta_i p_i \end{aligned}$$

## B.4 L'algorithme du bigradient conjugué et ses dérivés

### B.4.1 Le bigradient conjugué

Pour généraliser CG à des matrices *non symétriques*  $\Gamma$  nous pouvons essayer de conserver la récurrence à 3 termes en réinterprétant l'algorithme. Nous suivons pour ce faire [Son89].

En utilisant la définition B.1 de la méthode du gradient conjugué pour le cas particulier de l'algorithme B.4 sans préconditionnement ( $P = I$ )  $\Gamma$  nous pouvons donner deux interprétations :

- La fonctionnelle  $(r_k, M^{-1}r_k)$  est minimisée à chaque pas.
- Les erreurs sont  $M$ -orthogonales : i.e.  $(e_n, Mr_i) = (e_n, Mr_n)\delta_{i,n}$  pour  $i = 1$  à  $n$   
 $M$  étant symétrique nous avons en fait  $(r_n, r_i) = (r_n, r_n)\delta_{i,n}$  pour  $i = 1$  à  $n$ .

Par récurrence  $\Gamma$  nous pouvons aussi montrer que les directions de descente sont  $M$ -conjuguées :  $(p_n, Mp_i) = (p_n, Mp_n)\delta_{i,n}$  pour  $i = 1$  à  $n$ .

$\delta_{i,j}$  désigne le symbole de Kronecker.

En posant :

$$\begin{aligned} r_n &= \varphi_n(M)r_0 \\ p_n &= \psi_n(M)r_0 \end{aligned}$$

où  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sont des polynômes de degré  $\leq n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

Nous pouvons réinterpréter l'algorithme B.4 en un algorithme générant des polynômes.

#### Algorithme B.5

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 \\ \psi_0 &= 1 \\ \alpha_n &= \frac{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}{\langle \psi_n, \mathcal{V}\psi_n \rangle} \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n - \alpha_n \mathcal{V}\psi_n \\ \beta_n &= \frac{\langle \varphi_{n+1}, \varphi_{n+1} \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \\ \psi_{n+1} &= \varphi_{n+1} + \beta_n \psi_n \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}(X) = X$

et  $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi(M)r_0, \psi(M)r_0)$  est un produit scalaire du moment que  $M$  est s.d.p..

Sonneveld démontre le théorème suivant :

**Théorème B.1** *Cet algorithme, tant qu'il ne dégénère pas (division par 0), produit une double suite de polynômes vérifiant :*

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \delta_{n,m} \\ \langle \psi_n, \mathcal{V}\psi_m \rangle &= \langle \psi_n, \mathcal{V}\psi_n \rangle \delta_{n,m}\end{aligned}$$

*La forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  pouvant être remplacée par n'importe quel autre forme bilinéaire symétrique.*

Nous allons utiliser une autre forme bilinéaire pour obtenir l'algorithme du double gradient conjugué (BiCG).

Nous posons :

$$[\varphi, \psi] = (\varphi(M^t)\tilde{r}_0, \psi(M)r_0)$$

où  $\tilde{r}_0$  est choisi tel que  $(\tilde{r}_0, r_0) \neq 0$ .

$$\begin{cases} r_n = \varphi_n(M)r_0 \\ p_n = \psi_n(M)r_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{r}_n = \varphi_n(M^t)\tilde{r}_0 \\ \tilde{p}_n = \psi_n(M^t)\tilde{r}_0 \end{cases}$$

**Algorithme B.6 (BiCG)**

$$\begin{aligned}x_0 & \text{choisi} \\ r_0 &= b - Mx_0 \\ \tilde{r}_0 & \text{choisi tel que } (\tilde{r}_0, r_0) \neq 0 \\ p_0 &= r_0 \\ \tilde{p}_0 &= \tilde{r}_0 \\ \alpha_n &= \frac{(\tilde{r}_n, r_n)}{(\tilde{p}_n, Mp_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \alpha_n p_n \\ r_{n+1} &= r_n - \alpha_n Mp_n \\ \tilde{r}_{n+1} &= \tilde{r}_n - \alpha_n M^t \tilde{p}_n \\ \beta_n &= \frac{(\tilde{r}_{n+1}, r_{n+1})}{(\tilde{r}_n, r_n)} \\ p_{n+1} &= r_{n+1} + \beta_n p_n \\ \tilde{p}_{n+1} &= \tilde{r}_{n+1} + \beta_n \tilde{p}_n\end{aligned}$$

Cet algorithme produit une suite  $x_n$  avec  $r_n = b - Mx_n$  qui converge vers la solution  $x$  de  $Mx = b$ .

Il peut être obtenu différemment en appliquant CG au système :

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Voir [Jol88b].

Nous n'allons pas l'utiliser directement mais sous deux formes dérivées.

### B.4.2 Le bigradient conjugué accéléré (CGS)

Nous suivons le cheminement de [Son89].

En introduisant les polynômes :

$$\Phi_n = \varphi_n^2, \quad \Theta_n = \varphi_n \psi_{n-1}, \quad \text{et} \quad \Psi_n = \psi_n^2,$$

nous obtenons un algorithme plus rapide qualifié de “squared” en anglais car il utilise le carré des polynômes :

#### Algorithme B.7

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 \\ \Psi_0 &= 1 \\ \Upsilon_0 &= 1 \\ \alpha_n &= \frac{[1, \Phi_n]}{[1, \mathcal{V}\Psi_n]} \\ \Theta_{n+1} &= \Upsilon_n - \alpha_n \mathcal{V}\Psi_n \\ \Phi_{n+1} &= \Phi_n - \alpha_n \mathcal{V}(\Upsilon_n + \Theta_{n+1}) \\ \beta_n &= \frac{[1, \Phi_{n+1}]}{[1, \Phi_n]} \\ \Upsilon_{n+1} &= \Phi_{n+1} + \beta_n \Theta_{n+1} \\ \Psi_{n+1} &= \Upsilon_{n+1} + \beta_n (\Theta_{n+1} + \beta_n \Psi_n) \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} r_n &= \Phi_n(M)r_0 \\ q_n &= \Theta_n(M)r_0 \\ p_n &= \Psi_n(M)r_0 \\ u_n &= \Upsilon_n(M)r_0 \end{aligned}$$

et en modifiant l'ordre du calcul des termes pour calculer  $x_{n+1}$  seulement en dernier nous obtenons :

**Algorithme B.8 (CGS)**

$$\begin{array}{ll}
 x_0 & \text{choisi} \\
 r_0 & = b - Mx_0 \\
 \tilde{r}_0 & \text{choisi tel que } (\tilde{r}_0, r_0) \neq 0 \\
 q_0 & = p_{-1} = 0 \\
 \rho_{-1} & = 1 \\
 \rho_n & = (\tilde{r}_0, r_n) \\
 \beta_n & = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \\
 u_n & = r_n + \beta_n q_n \\
 p_n & = u_n + \beta_n (q_n + \beta_n p_{n-1}) \\
 v_n & = Mp_n \\
 \sigma_n & = (\tilde{r}_0, v_n) \\
 \alpha_n & = \frac{\rho_n}{\sigma_n} \\
 q_{n+1} & = u_n - \alpha_n v_n \\
 r_{n+1} & = r_n - \alpha_n M(u_n + q_{n+1}) \\
 x_{n+1} & = x_n + \alpha_n (u_n + q_{n+1})
 \end{array}$$

Une fois préconditionné avec une matrice de préconditionnement  $P$  nous obtenons.

**Algorithme B.9 (PCGS)**

$$\begin{array}{ll}
 x_0 & \text{choisi} \\
 r_0 & = b - Mx_0 \\
 z_0 & = P^{-1}r_0 \\
 \tilde{r}_0 & \text{choisi tel que } (\tilde{r}_0, r_0) \neq 0 \\
 q_0 & = p_{-1} = 0 \\
 \rho_{-1} & = 1 \\
 \rho_n & = (\tilde{r}_0, z_n) \\
 \beta_n & = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \\
 u_n & = r_n + \beta_n q_n \\
 p_n & = u_n + \beta_n (q_n + \beta_n p_{n-1}) \\
 v_n & = P^{-1}Mp_n \\
 \sigma_n & = (\tilde{r}_0, v_n) \\
 \alpha_n & = \frac{\rho_n}{\sigma_n} \\
 q_{n+1} & = u_n - \alpha_n v_n \\
 v_n & = \alpha_n (u_n + q_{n+1}) \\
 x_{n+1} & = x_n + v_n \\
 r_{n+1} & = r_n - Mv_n \\
 z_{n+1} & = P^{-1}r_{n+1}
 \end{array}$$

La convergence de cet algorithme dépend très fortement du préconditionnement. De plus le résidu  $|r_n|$  subit des brusques variations.

Pour éviter ce dernier inconvénient Van der Vorst a proposé une méthode de bigradient conjugué stabilisé (BiCGStab).

### B.4.3 Le bigradient conjugué accéléré stabilisé (BiCGStab)

Nous nous référons à l'article de Van der Vorst [Vdv92].

Revenons à l'algorithme B.5 et à la définition B.1. Au lieu de considérer que :

$$r_n \in Vect^\perp\{r_0, \dots, r_{n-1}\}$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_n(M)r_0 \in Vect^\perp\{\varphi_0(M)r_0, \dots, \varphi_{n-1}(M)r_0\} = Vect^\perp\{r_0, Mr_0, \dots, M^{n-1}r_0\}$$

nous allons prendre une autre suite de polynômes  $\tilde{\varphi}_i$  de degré  $i$ .

Nous aurons toujours :

$$Vect\{\varphi_0(M)r_0, \dots, \varphi_{n-1}(M)r_0\} = Vect\{\tilde{\varphi}_0(M)r_0, \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}(M)r_0\}$$

Donc nous allons pouvoir trouver :

$$\varphi_n(M)r_0 \in Vect^\perp\{\tilde{\varphi}_0(M)r_0, \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}(M)r_0\}$$

Nous choisissons de prendre des polynômes  $\tilde{\varphi}_i$  tels que :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_0 &= 1 \\ \tilde{\varphi}_i(X) &= (1 - \omega_1 X) \cdots (1 - \omega_i X)\end{aligned}$$

où les  $\omega_i$  sont choisis de telle manière que  $(\tilde{\varphi}_i(M)\varphi_i(M)\tilde{r}_0, \tilde{\varphi}_i(M)\varphi_i(M)r_0) = [\tilde{\varphi}_i\varphi_i, \tilde{\varphi}_i\varphi_i]$  soit minimale.

L'algorithme donnant les trois suites :  $\varphi_n \Gamma \tilde{\varphi}_n \Gamma \psi_n$  est :

#### Algorithme B.10

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1 \\ \psi_0 &= 1 \\ \tilde{\varphi}_0 &= 1 \\ \alpha_n &= \frac{\langle \tilde{\varphi}_n, \varphi_n \rangle}{\langle \tilde{\varphi}_n, \mathcal{V}\psi_n \rangle} \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n - \alpha_n \mathcal{V}\psi_n \\ \omega_{n+1} &= \frac{\langle \tilde{\varphi}_n \varphi_{n+1}, \mathcal{V}\tilde{\varphi}_n \varphi_{n+1} \rangle}{\langle \mathcal{V}\tilde{\varphi}_n \varphi_{n+1}, \mathcal{V}\tilde{\varphi}_n \varphi_{n+1} \rangle} \\ \tilde{\varphi}_{n+1} &= \tilde{\varphi}_n - \omega_{n+1} \mathcal{V}\tilde{\varphi}_n \\ \beta_n &= -\frac{\langle \varphi_{n+1}, \mathcal{V}\psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \mathcal{V}\psi_n \rangle} = \frac{\langle \varphi_{n+1}, \varphi_{n+1} \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \\ \psi_{n+1} &= \varphi_{n+1} + \beta_n \psi_n\end{aligned}$$

Introduisons ensuite les polynômes :

$$\Phi_n = \tilde{\varphi}_n \varphi_n \quad \text{et} \quad \Psi_n = \tilde{\varphi}_n \psi_n$$

### Algorithme B.11

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 \\ \Psi_0 &= 1 \\ \alpha_n &= \frac{[1, \Phi_n]}{[1, \mathcal{V}\Psi_n]} \\ \Upsilon_n &= \Phi_n - \alpha_n \mathcal{V}\Psi_n \\ \omega_{n+1} &= \frac{[\Upsilon_n, \mathcal{V}\Upsilon_n]}{[\mathcal{V}\Upsilon_n, \mathcal{V}\Upsilon_n]} \\ \Phi_{n+1} &= \Upsilon_n - \omega_{n+1} \mathcal{V}\Upsilon_n \\ \beta_n &= \frac{[1, \Phi_{n+1}]}{[1, \Phi_n]} \frac{\alpha_n}{\omega_{n+1}} \\ \Psi_{n+1} &= \Phi_{n+1} + \beta_n (\Psi_n - \omega_{n+1} \mathcal{V}\Psi_n) \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} r_n &= \Phi_n(M)r_0 \\ p_n &= \Psi_n(M)r_0 \\ s_n &= \Upsilon_n(M)r_0 \end{aligned}$$

et en modifiant à nouveau l'ordre des calculs nous obtenons :

### Algorithme B.12 (BiCGStab)

$$\begin{aligned} x_0 & \text{choisi} \\ r_0 &= b - Mx_0 \\ \tilde{r}_0 & \text{choisi tel que } (\tilde{r}_0, r_0) \neq 0 \\ v_{-1} &= p_{-1} = 0 \\ \rho_{-1} &= \alpha_{-1} = \omega_0 = 1 \\ \rho_n &= (\tilde{r}_0, r_n) \\ \beta_n &= \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_n} \\ p_n &= r_n + \beta_n (p_{n-1} - \omega_n v_{n-1}) \\ v_n &= Mp_n \\ \sigma_n &= (\tilde{r}_0, v_n) \\ \alpha_n &= \frac{\rho_n}{\sigma_n} \\ s_n &= r_n - \alpha_n v_n \\ t_n &= Ms_n \\ \omega_{n+1} &= \frac{(t_n, s_n)}{(t_n, t_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \alpha_n p_n + \omega_{n+1} s_n \\ r_{n+1} &= s_n - \omega_{n+1} t_n \end{aligned}$$

L'algorithme préconditionné est :

**Algorithme B.13 (PBiCGStab)**

$$\begin{array}{ll}
 x_0 & \text{choisi} \\
 r_0 & = b - Mx_0 \\
 \tilde{r}_0 & \text{choisi tel que } (\tilde{r}_0, r_0) \neq 0 \\
 v_{-1} & = p_{-1} = 0 \\
 \rho_{-1} & = \alpha_{-1} = \omega_0 = 1 \\
 \rho_n & = (\tilde{r}_0, r_n) \\
 \beta_n & = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \frac{\alpha_{n-1}}{\omega_n} \\
 p_n & = r_n + \beta_n(p_{n-1} - \omega_n v_{n-1}) \\
 y_n & = P^{-1}p_n \\
 v_n & = My_n \\
 \sigma_n & = (\tilde{r}_0, v_n) \\
 \alpha_n & = \frac{\rho_n}{\sigma_n} \\
 s_n & = r_n - \alpha_n v_n \\
 z_n & = P^{-1}s_n \\
 t_n & = Mz_n \\
 \omega_{n+1} & = \frac{(t_n, s_n)}{(t_n, t_n)} \\
 x_{n+1} & = x_n + \alpha_n y_n + \omega_{n+1} z_n \\
 r_{n+1} & = s_n - \omega_{n+1} t_n
 \end{array}$$

Van der Vorst a constaté un comportement plus régulier du résidu  $\Gamma$  quand il utilisait cette méthode plutôt que PCGS.

La convergence de ces méthodes dépend beaucoup du choix de  $\tilde{r}_0$ . En général  $\Gamma$  nous choisissons de prendre  $\tilde{r}_0 = r_0$  qui assure  $(\tilde{r}_0, r_0) \neq 0$ .

## B.5 L'algorithme du résidu minimal généralisé (GMRES)

Nous suivons ici l'article de Saad et Schultz [SS86].

Reprenons l'algorithme B.1 et la définition B.1. Nous posons :  $B = I\Gamma$  c'est-à-dire que le produit scalaire utilisé est le produit scalaire euclidien. Nous nous intéressons à la génération des directions de descente  $p_i$  pour  $i = 0$  à  $k - 1$ .

$$\begin{array}{ll}
 p_0 & = r_0 \\
 i & = 0 \text{ à } k - 1 \\
 \sigma_{i,j} & = (Mp_i, p_j) \quad 0 \leq j \leq i \\
 p_{i+1} & = Mp_i - \sum_{j=0}^i \sigma_{i,j} p_j
 \end{array}$$

En changeant les notations comme suit :

$$v_{i+1} = \frac{p_i}{|p_i|}$$

nous pouvons réécrire l'algorithme précédent.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{r_0}{|r_0|} \\ j &= 1 \text{ à } k \\ h_{i,j} &= (Mv_j, v_i) \quad 1 \leq i \leq j \\ \hat{v}_{j+1} &= Mv_j - \sum_{i=0}^j h_{i,j} v_i \\ h_{j+1,j} &= |\hat{v}_{j+1}| \\ v_{j+1} &= \frac{\hat{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}} \end{aligned}$$

Nous avons  $K_k = Vect\{v_1, \dots, v_k\} = Vect\{r_0, Mr_0, \dots, M^{k-1}r_0\}$  et puisque nous minimisons le résidu sur  $K_k$  nous avons  $r_k \perp K_k$ .

Définissons alors  $z_k$  en posant :  $x_k = x_0 + z_k$ .

Nous avons alors :  $r_k = r_0 - Mz_k$ .

$$(r_k, v_i) = 0 \quad i = 1 \text{ à } k$$

$$\begin{aligned} (Mz_k, v_1) &= (r_0, v_1) = |r_0| \\ (Mz_k, v_i) &= 0 \quad i = 2 \text{ à } k \end{aligned}$$

Si nous notons  $P_k$  le projecteur orthogonal sur  $K_k$  nous avons donc  $P_k Mz_k = |r_0| v_1$ .

Soit  $y_k$  tel que  $V_k y_k = z_k$  où  $V_k$  est une matrice dont les colonnes sont les coordonnées des  $v_i$  dans la base canonique.  $y_k$  représente les coordonnées de  $z_k$  dans la base  $(v_i)_{i=1} \text{ à } k$  de  $K_k$ .

Nous avons  $V_k^t M V_k = H_k = (h_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, k\}}$  calculés par l'algorithme précédent qui est la matrice de l'application linéaire associée à  $M_k = P_k M$  dans la base  $(v_i)_{i=1} \text{ à } k$  de  $K_k$ .

Alors :

$$\begin{aligned} P_k M V_k y_k &= |r_0| v_1 \\ V_k^t P_k M V_k y_k &= |r_0| V_k^t v_1 \\ \text{or } V_k^t P_k M V_k &= V_k^t M V_k \end{aligned}$$

donc  $H_k y_k = |r_0| e_1$  où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique.

Finalement :

$$\begin{aligned} y_k &= H_k^{-1} |r_0| e_1 \\ x_k &= x_0 + V_k y_k \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver  $z_k$  tel que :

$$|b - M(x_0 + z_k)| = \inf_{z \in K_k} |b - M(x_0 + z)|$$

Or l'image de  $MV_k$  est incluse dans  $K_{k+1}\Gamma$  donc il existe une matrice  $\overline{H}_k$  telle que :

$$MV_k = V_{k+1} \overline{H}_k$$

$$\text{Nous vérifions que : } \overline{H}_k = \underbrace{\left( \begin{array}{c} H_k \\ 0 \dots 0 \quad h_{k+1,k} \end{array} \right)}_k \Bigg\}_{k+1}$$

Et donc en posant  $z = V_k y \Gamma$  puisque  $z \in K_k \Gamma$  nous avons :

$$\begin{aligned} J(y) &= |b - M(x_0 + z)| \\ &= ||r_0| v_1 - MV_k y| \\ &= |V_{k+1} (|r_0| e_1 - \overline{H}_k y)| \\ &= ||r_0| e_1 - \overline{H}_k y| \end{aligned}$$

Reformulons le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 + V_k y_k \\ \text{où } y_k &\text{ minimise } J(y) \text{ sur } \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

Finalement nous obtenons l'algorithme suivant :

**Algorithme B.14 (GMRES)**

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \text{choisi} \\
 r_0 &= b - Mx_0 \\
 v_1 &= \frac{r_0}{|r_0|} \\
 j &= 1 \text{ à } k \\
 h_{i,j} &= (Mv_j, v_i) \quad 1 \leq i \leq j \\
 \hat{v}_{j+1} &= Mv_j - \sum_{i=0}^j h_{i,j} v_i \\
 h_{j+1,j} &= |\hat{v}_{j+1}| \\
 v_{j+1} &= \frac{\hat{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}} \\
 x_k &= x_0 + V_k y_k \\
 \text{où } y_k & \text{ minimise } \left| |r_0| e_1 - \overline{H}_k y \right| \text{ sur } \mathbb{R}^k \\
 r_k &= b - Mx_k
 \end{aligned}$$

Cet algorithme impose la sauvegarde de toutes les directions de descente  $(v_i)_{i=1} \text{ à } k$ . C'est un inconvénient majeur pour les systèmes de grande taille. nous préférons utiliser un algorithme à redémarrage tous les  $m$  pas qui nécessite la sauvegarde de seulement  $m$  directions :



avec :

$$c_j = \frac{-h_{j+1,j}}{\sqrt{h_{j,j}^2 + h_{j+1,j}^2}}$$

$$s_j = \frac{h_{j,j}}{\sqrt{h_{j,j}^2 + h_{j+1,j}^2}}$$

Finalement :

$$F_m \cdots F_1 \overline{H}_m = R_m$$

avec  $R_m = \begin{pmatrix} \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Notons alors  $Q_m = F_m \cdots F_1$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} \||r_0| e_1 - \overline{H}_m y| &= |Q_m(|r_0| e_1 - \overline{H}_m y)| \\ &= |Q_m |r_0| e_1 - R_m y| \end{aligned}$$

Nous calculons :  $y_m = R_m^{-1} Q_m |r_0| e_1$  où nous ne prenons que les  $m$  premières coordonnées de  $Q_m |r_0| e_1$ .

Nous avons alors  $|r_m| = |(Q_m |r_0| e_1)_{m+1}|$ .

# Annexe C

## Méthodes d'expansion

- Nous décrivons ici la méthode d'expansion définie par Lou et Sameh [LS93].

- Il s'agit de minimiser une fonctionnelle :

$$(C.1) \quad J(x) = \frac{1}{2}x^t Mx - x^t b$$

sous la contrainte linéaire :

$$(C.2) \quad Cx = 0$$

où  $M$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,  $C$  est une matrice  $k \times n$  de rang  $k \leq n$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Après application du théorème des multiplicateurs de Lagrange à ce problème de minimisation sous contrainte linéaire nous obtenons le système suivant à résoudre :

$$(C.3) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M + M^t) & C^t \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda$  représente le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $Cx = 0$ .

- Maintenant si  $k = n$  et  $\tilde{C}$  est une matrice  $n \times n$  inversible le système :

$$(C.4) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M + M^t) & \tilde{C}^t \\ \tilde{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix}$$

a pour solution :

$$(C.5) \quad \begin{aligned} x &= \tilde{C}^{-1}\tilde{\omega} \\ \tilde{\mu} &= \tilde{C}^{-t}(b - \frac{1}{2}(M + M^t)x) \end{aligned}$$

• Pour résoudre le système C.3 nous allons rajouter des contraintes pour nous ramener à inverser un système du type C.4. Précisément nous rajoutons la contrainte :

$$(C.6) \quad Ex = \omega$$

où  $E$  est une matrice  $n - k \times n$  et  $\omega \in \mathbb{R}^{n-k}$ . La matrice  $E$  est choisie de manière à ce que la matrice  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$  est inversible.

Après avoir à nouveau utilisé le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous obtenons le système :

$$(C.7) \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(M + M^t) & C^t & E^t \\ C & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

où  $\mu \in \mathbb{R}^{n-k}$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $Ex = \omega$ .

• Le second membre de la contrainte est à déterminer dans un premier temps de façon à ce que si  $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$  est solution du système C.7 alors  $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$  soit solution du système C.3.

Mais la solution du système C.7 est donnée par

$$(C.8) \quad x = \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$(C.9) \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = (C^t \ E^t)^{-1} \left[ b - \frac{1}{2}(M + M^t) \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \right]$$

Or  $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$  est solution de C.3  $\iff \frac{1}{2}(M + M^t)x + C^t\lambda = b$  et  $Cx = 0$

Donc comme  $Cx = 0$  est donnée par C.8 nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ est solution de C.3} &\iff \mu = 0 \\ &\iff G\omega = (0 \ I)(C^t \ E^t)^{-1}b \end{aligned}$$

où  $G = (0 \ I)(C^t \ E^t)^{-1} \frac{1}{2}(M + M^t) \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$  est une matrice  $n - k \times n - k$  inversible.

Cela nous impose donc de prendre

$$\omega = G^{-1} (0 \ I)(C^t \ E^t)^{-1} \frac{1}{2}(M + M^t) \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

et nous obtenons la solution de C.3 sous la forme

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ G^{-1} (0 \ I)(C^t \ E^t)^{-1} b \end{pmatrix} \\ \lambda &= (I \ 0)(C^t \ E^t)^{-1} \left( b - \frac{1}{2}(M + M^t)x \right) \end{aligned}$$

L'algorithme général de la méthode d'expansion s'écrit donc :

**Algorithme C.1 (méthode d'expansion)**

- (i) Résoudre le système  $(C^t \ E^t)v = b$
- (ii) Résoudre le système  $G\omega = (0 \ I)v$
- (iii) Résoudre le système  $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$
- (iv) Calculer  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = b - \frac{1}{2}(M + M^t)x$

Cet algorithme peut s'appliquer à condition que les matrices  $\begin{pmatrix} C \\ E \end{pmatrix}$ ,  $(C^t \ E^t)$  et  $G$  soient calculables et facilement inversibles.





## Troisième partie

# Singularités des fonctions minimisant l'énergie du micromagnétisme



---

<b>Notations</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>113</b>
1.1 Singularités . . . . .	113
1.2 Singularités d'une configuration d'aimantation . . . . .	114
1.3 Enoncé du résultat principal . . . . .	114
<b>2 Le théorème d'<math>\varepsilon</math>-régularité</b>	<b>116</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	116
2.1.1 Rappel . . . . .	116
2.1.2 Les fonctionnelles "localisées" . . . . .	117
2.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange . . . . .	120
2.2 Lemmes de changement de repère et premières inégalités . . . . .	126
2.3 La formule de "monotonie" . . . . .	129
2.4 Approximation de $w$ par des fonctions continues . . . . .	131
2.5 Inégalité fondamentale . . . . .	137
2.6 Démonstration du théorème d' $\varepsilon$ -régularité . . . . .	141
2.7 Corollaires . . . . .	143
<b>3 Résultats d'extension et de compacité</b>	<b>150</b>
3.1 Lemmes de prolongement . . . . .	150
3.2 Extension du théorème d' $\varepsilon$ -régularité . . . . .	163
3.3 Théorème de compacité . . . . .	166
<b>4 Théorème des singularités</b>	<b>171</b>
4.1 Propriétés de la mesure de Hausdorff . . . . .	171
4.2 Théorème des singularités . . . . .	172



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Singularités

**Définition 1.1** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $u \in H^1(\Omega, S^2)$ . Un point  $x \in \Omega$  est dit régulier, si  $u$  est continue sur un voisinage de  $x$  dans  $\Omega$ . L'ensemble des points singuliers de  $u$  est l'ensemble des points de  $\Omega$  qui ne sont pas réguliers.

Des résultats de régularité pour des fonctions harmoniques à valeurs dans une variété riemannienne possédant certaines propriétés et qui minimise l'énergie  $E_\Omega(u) = \int_\Omega |u|^2 dx$  ont été démontrés par Morrey [Mor48], Eells et Simpson [ES64], Hildebrandt et Widman [HW77], Hildebrandt, Kaul et Widman [HKW70] et Giaquinta et Giusti [GG82], [GG84].

D'autre part, il a été établi de longue date que si  $u$  est continue sur une boule incluse dans  $\Omega$  alors  $u$  est régulière (de classe  $C^\infty$ ) sur cette même boule (voir [BG80] par exemple).

En 1982, Schoen et Uhlenbeck ont établi une théorie de la régularité des fonctions harmoniques minimisant une énergie de type plus général [SU82]. Ils ont montré en particulier que si  $u$  est une fonction minimisant une énergie  $E_\Omega(u) + V_\Omega(u)$  où  $V_\Omega$  contient des termes d'énergie du premier ordre vérifiant certaines conditions alors l'ensemble des points singuliers de  $u$  situés à l'intérieur de  $\Omega$  est discret [SU82, th. II]. Ils ont montré de la même façon en 1983 qu'il en est de même pour l'ensemble des points singuliers situés sur le bord de  $\Omega$  [SU83].

Cette théorie s'applique directement aux cristaux liquides. Brezis, Coron et Lieb ont démontré en 1986 [BCL86] et toujours pour les fonctionnelles du type cristaux liquides que les singularités de  $u$  ont un degré topologique de  $\pm 1$  et qu'au voisinage d'une singularité  $x_0$   $u(x) \simeq \pm R \left( \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right)$  où  $R$  est une rotation.

## 1.2 Singularités d'une configuration d'aimantation

• Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  l'énergie de  $u$  s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\Omega(u) &= K_{ech} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + K_{ani} \int_\Omega |p(u(x))|^2 dx - u_s^2 \int_\Omega H_z(x) \cdot u(x) dx \\ &\quad - \frac{u_s^2}{2} \int_\Omega \nabla \phi_u(x) \cdot u(x) dx \end{aligned}$$

avec  $\Delta \phi_u = -4\pi \operatorname{div}(u \mathcal{X}_\Omega)$  dans  $\mathbb{R}^3$  (voir I.3.3).

Pour simplifier les notations nous travaillerons avec :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\Omega(u) &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + K_1 \int_\Omega |p(u(x))|^2 dx - 2K_2 \int_\Omega H_z(x) \cdot u(x) dx \\ &\quad - K_2 \int_\Omega \nabla \phi_u(x) \cdot u(x) dx \end{aligned}$$

Nous dirons que  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante si

$$\forall v \in H^1(\Omega, S^2) / u - v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \tilde{E}_\Omega(u) \leq \tilde{E}_\Omega(v)$$

• Les termes d'énergie d'anisotropie et de Zeemann peuvent être traités directement grâce à la théorie de Schoen et Uhlenbeck. Par contre le terme d'énergie démagnétisante  $-K_2 \int_\Omega \nabla \phi_u(x) \cdot u(x) dx$  a un caractère non local car le potentiel  $\phi_u$  créé par une portion de matériau existe dans tout l'espace  $\mathbb{R}^3$  et influence tout le matériau.

Il nous faut donc adapter la théorie de Schoen et Uhlenbeck au cas de cette énergie en introduisant des termes d'énergie "localisée" (section 2.1.2) et en utilisant le théorème des potentiels croisés (th. 2.2) qui fournit une majoration de l'énergie démagnétisante par le volume du matériau qui la crée.

## 1.3 Énoncé du résultat principal

Nous démontrons le même résultat que pour le cas traité par Schoen et Uhlenbeck :

**Théorème 1.1** *Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante et soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de ses points singuliers.*

*Alors  $\mathcal{S}$  est un ensemble discret.*

---

Pour démontrer ce résultat nous suivons précisément la démarche de Schœn et Uhlenbeck [SU82]. Nous commençons dans le chapitre 2 par démontrer un premier résultat de régularité pour des fonctions d'énergie faible sur une boule  $B_\sigma(a)$  : le théorème d' $\varepsilon$ -régularité. Puis au chapitre 3 nous établissons quelques lemmes de prolongement (section 3.1) en vue de démontrer un théorème d'extension du théorème d' $\varepsilon$ -régularité à des fonctions d'énergie quelconque (section 3.2) et des résultats de convergence de suites minimisantes (section 3.3). Ceci nous permettra de démontrer le résultat principal au chapitre 4.

# Chapitre 2

## Le théorème d' $\varepsilon$ -régularité

Ce chapitre a pour objet la démonstration d'un premier théorème de régularité :

**Théorème 2.1 (d' $\varepsilon$ -régularité)** *Il existe  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\Omega)$  tel que si  $u \in H^1(\Omega, S^2)$ , une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante,  $0 < \sigma < 1$  et  $a \in \Omega$  vérifient*

$$\sigma^{1/2} \leq \bar{\varepsilon} \text{ et } \frac{1}{\sigma} \int_{B_\sigma(a)} |\nabla u|^2 dx \leq \bar{\varepsilon},$$

*alors  $u$  est Hölderienne sur  $B_{\sigma/2}(a)$ . Plus précisément,  $\exists \alpha = \alpha(\Omega) > 0$  et  $c = c(\Omega) > 0$  tels que  $\forall x, y \in B_{\sigma/2}(a) \quad |u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ .*

### 2.1 Préliminaires

#### 2.1.1 Rappel

Nous rappelons l'énoncé du théorème des potentiels croisés  $\Gamma$ démontré dans la première partie à la section 3.1.

**Théorème 2.2** *Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^3$   
Soit  $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ ,  $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ ,  $\phi_1 \in W^1(\mathbb{R}^3)$  et  $\phi_2 \in W^1(\mathbb{R}^3)$  tels que*

$$(2.1) \quad \Delta \phi_1 = -4\pi \operatorname{div}(u_1 \mathcal{X}_{\Omega_1}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

$$(2.2) \quad \Delta \phi_2 = -4\pi \operatorname{div}(u_2 \mathcal{X}_{\Omega_2}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

*alors*

$$\int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_2 = \int_{\Omega_1} \nabla \phi_2 \cdot u_1$$

*De plus, si  $u_1$  et  $u_2$  sont à valeurs dans  $S^2$ , nous avons :*

$$(2.3) \quad \left| \int_{\Omega_2} \nabla \phi_1 \cdot u_2 \right| \leq 4\pi (\operatorname{vol} \Omega_1)^{1/2} (\operatorname{vol} \Omega_2)^{1/2}$$

### 2.1.2 Les fonctionnelles “localisées”

• Par la suite  $\Gamma$  nous aurons besoin de considérer des fonctionnelles définies pour des fonctions allant de boules incluses dans  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$   $\Gamma a \in \Omega$  et  $\sigma > 0$ .

Pour  $s \in H^1(B_\sigma(a), S^2)$   $\Gamma$  nous définissons :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_{a,\sigma}(s) &= \int_{B_\sigma(a)} |\nabla s|^2 dx + K_1 \int_{B_\sigma(a)} |p(s)|^2 dx - 2 K_2 \int_{B_\sigma(a)} H_z \cdot s dx \\ &- K_2 \int_{B_\sigma(a)} \nabla \phi_s \cdot s dx - 2 K_2 \int_{B_\sigma(a)} \nabla \phi_{\Omega,\sigma} \cdot s dx \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta \phi_s &= -4\pi \operatorname{div} (s \mathcal{X}_{B_\sigma(a)}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \Delta \phi_{\Omega,\sigma} &= -4\pi \operatorname{div} (u (\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma(a)})) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

Remarquons que  $\phi_{\Omega,\sigma}$  dépend de  $a$ ,  $\sigma$ ,  $u$  et  $\Omega$  mais pas de  $s$ .

Pour  $s = u \mathcal{X}_{B_\sigma(a)}$  :

$$(2.5) \quad \tilde{E}_\Omega(u) = \tilde{E}_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}}(\bar{s}) + \tilde{E}_{a,\sigma}(s)$$

où  $\bar{s} = u (\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma(a)})$ .

**Démonstration :**

- Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$ .

Soit  $\phi_{\Omega,\sigma}$  et  $\phi_{u_\sigma}$  définis par :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{\Omega,\sigma} &= -4\pi \operatorname{div} (u (\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma})) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \\ \Delta \phi_{u_\sigma} &= -4\pi \operatorname{div} (u \mathcal{X}_{B_\sigma}) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

$$\phi_u = \phi_{\Omega,\sigma} + \phi_{u_\sigma}.$$

Pour simplifier  $\Gamma$  notons

$$\begin{aligned} u_1 &= u (\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma}) \\ u_2 &= u \mathcal{X}_{B_\sigma} \\ u &= u_1 + u_2 \\ \phi_1 &= \phi_{\Omega,\sigma} \\ \phi_2 &= \phi_{u_\sigma} \\ \phi_u &= \phi_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

$$\int_\Omega \nabla \phi_u \cdot u = \int_\Omega \nabla \phi_1 \cdot u_1 + \int_\Omega \nabla \phi_1 \cdot u_2 + \int_\Omega \nabla \phi_2 \cdot u_1 + \int_\Omega \nabla \phi_2 \cdot u_2$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\Omega(u) &= \int_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}} |\nabla u_1|^2 dx + K_1 \int_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}} |p(u_1)|^2 dx \\
&\quad - 2 K_2 \int_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}} H_z \cdot u_1 dx - K_2 \int_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}} \nabla \phi_1 \cdot u_1 dx \\
&\quad + \int_{B_\sigma(a)} |\nabla u_2|^2 dx + K_1 \int_{B_\sigma(a)} |p(u_2)|^2 dx \\
&\quad - 2 K_2 \int_{B_\sigma(a)} H_z \cdot u_2 dx - K_2 \int_{B_\sigma(a)} \nabla \phi_2 \cdot u_2 dx \\
&\quad - K_2 \int_{\Omega} \nabla \phi_1 \cdot u_2 dx - K_2 \int_{\Omega} \nabla \phi_2 \cdot u_1 dx
\end{aligned}$$

Or  $\Gamma$  d'après le théorème 2.2  $\Gamma$  nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_1 \cdot u_2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_2 \cdot u_1 dx$$

L'égalité voulue en découle. ■

Nous noterons aussi

$$E_{a,\sigma}(s) = \int_{B_\sigma(a)} |\nabla s|^2 dx$$

• A une fonction  $s \in H^1(B_\sigma(a), S^2)$  correspond une fonction  $w \in H^1(B_1, S^2)$  par le changement de variable :  $x = a + \sigma y$  ( $w(y) = s(a + \sigma y)$ ).

Définissons

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^{a,\sigma}(w) &= \int_{B_1} |\nabla w|^2 dy + K_1 \int_{B_1} \sigma^2 |p(w)|^2 dy - 2 K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot w dy \\
&\quad - K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \nabla \phi_w \cdot w dy - 2 K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \nabla \phi_u \cdot w dy \\
&= \frac{1}{\sigma} \tilde{E}_{a,\sigma}(s)
\end{aligned}$$

où  $\tilde{H}_z(y) = H_z(a + \sigma y) \Gamma$

$\tilde{u}(y) = u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma(a)})(a + \sigma y)$  (le support de  $\tilde{u}$  est inclus dans  $\frac{\Omega-a}{\sigma} \Gamma$ )

$\Delta \phi_u = -4\pi \operatorname{div}(\tilde{u})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \Gamma$

et  $\Delta \phi_w = -4\pi \operatorname{div}(w \mathcal{X}_{B_1})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

**Démonstration :**

• Effectuons le changement de variable  $x = a + \sigma y$ .

Pour  $s \in H^1(B_\sigma(a), S^2) \Gamma$  notons  $w \in H^1(B_1, S^2) \Gamma$  la fonction telle que  $w(y) = s(a + \sigma y)$ .

Nous avons

$$\nabla w(y) = \sigma (\nabla s)(a + \sigma y)$$

$$\operatorname{div}(w(y)) = \sigma \operatorname{div}(s)(a + \sigma y)$$

En posant

$$\phi_w(y) = \frac{1}{\sigma} \phi_s(a + \sigma y),$$

nous obtenons

$$\Delta \phi_w = -4\pi \operatorname{div}(w)$$

et

$$\nabla \phi_w(y) = (\nabla \phi_s)(a + \sigma y)$$

De même en notant  $\tilde{u}(y) = u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_{\sigma(a)}})(a + \sigma y)$

nous avons

$$\operatorname{div}(\tilde{u}(y)) = \sigma \operatorname{div}(u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_{\sigma(a)}}))(a + \sigma y)$$

Et en posant

$$\phi_{\tilde{u}}(y) = \frac{1}{\sigma} \phi_{\Omega, \sigma}(a + \sigma y)$$

nous obtenons

$$\Delta \phi_{\tilde{u}} = -4\pi \operatorname{div}(\tilde{u})$$

et

$$\nabla \phi_{\tilde{u}}(y) = (\nabla \phi_{\Omega, \sigma})(a + \sigma y)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{a, \sigma}(s) &= \int_{B_1} \sigma |\nabla w(y)|^2 dy + K_1 \int_{B_1} \sigma^3 |p(w(y))|^2 dy \\ &\quad - 2K_2 \int_{B_1} \sigma^3 H_z(a + \sigma y) \cdot w(y) dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_1} \sigma^3 \nabla \phi_w(y) \cdot w(y) dy - 2K_2 \int_{B_1} \sigma^3 \nabla \phi_{\tilde{u}}(y) \cdot w(y) dy \blacksquare \end{aligned}$$

Nous notons encore  $\Gamma$  pour  $0 < \lambda \leq 1$  :

$$E_\lambda(w) = \int_{B_\lambda} |\nabla w|^2 dx$$

où  $B_\lambda$  est la boule de centre 0 et de rayon  $\lambda$ .

Nous avons

$$E_1(w) = \frac{1}{\sigma} E_{a, \sigma}(s)$$

Enfin  $\Gamma$  définissons

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\lambda(w) &= \int_{B_\lambda} |\nabla w|^2 dy + K_1 \int_{B_\lambda} \sigma^2 |p(w)|^2 dy - 2 K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot w dy \\ &\quad - 2 K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{\tilde{u}} \cdot w dy - 2 K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{où } \tilde{H}_z(y) &= H_z(a + \sigma y)\Gamma \\ \tilde{u}(y) &= u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_{\sigma(a)}})(a + \sigma y)\Gamma \\ \Delta \phi_{\tilde{u}} &= -4\pi \operatorname{div}(\tilde{u}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\Gamma \\ \Delta \phi_{\lambda,1} &= -4\pi \operatorname{div}(w(\mathcal{X}_{B_1} - \mathcal{X}_{B_\lambda})) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3). \\ \Delta \phi_{w,\lambda} &= -4\pi \operatorname{div}(w \mathcal{X}_{B_\lambda}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).\end{aligned}$$

### 2.1.3 Les équations d'Euler-Lagrange

**Proposition 2.1 (Equation d'Euler-Lagrange pour  $\tilde{E}_\Omega$ )** Si  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante, alors  $u$  satisfait les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$(2.6) \quad \begin{aligned}\Delta u - K_1 p(u) + [|\nabla u|^2 + K_1(u_1^2 + u_2^2) - K_2(u, H_z) \\ - K_2(u, \nabla \phi)]u + K_2 \nabla \phi + K_2 H_z = 0\end{aligned}$$

dans  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  faible.

**Démonstration :**

- Une preuve de ce résultat se trouve dans Viallix [Via90, II20-23]
- Nous donnons ici une démonstration inspirée par celle de Schoën et Ühlenbeck pour le cas des fonctions harmoniques minimisantes.
- Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante. Alors  $u$  est stationnaire pour  $\tilde{E}_\Omega$ . C'est-à-dire :

$$\forall U : \begin{array}{l} ] - \varepsilon, \varepsilon[ \longrightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ différentiable telle que :} \\ t \longmapsto U(t) \end{array}$$

$$\begin{cases} U(t) \in H^1(\Omega, S^2) \quad \forall t \in ] - \varepsilon, \varepsilon[ \\ U(0) = u \\ U(t) - u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \forall t \in ] - \varepsilon, \varepsilon[ \end{cases}$$

$$\text{nous avons } \left. \frac{d \tilde{E}_\Omega(U(t))}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

- Soit  $\mathcal{O}$  une couronne sphérique autour de  $S^2$  et  $\pi$  la projection sur  $S^2$  :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{O} &\longrightarrow S^2 \\ y &\longmapsto \frac{y}{|y|} \end{aligned}$$

Rapellons que  $\forall h \in \mathbb{R}^3$  et  $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  nous avons :

$$d\pi(y) \cdot h = \frac{h}{|y|} - \frac{(y, h)}{|y|^3} y$$

et

$$d^2\pi(y)(h, k) = 3 \frac{(y, h)(y, k)}{|y|^5} y - \frac{(y, h)}{|y|^3} k - \frac{(y, k)}{|y|^3} h - \frac{(h, k)}{|y|^3} y$$

Si  $|y| = 1$

$$\begin{aligned} d\pi(y) \cdot h &= h - (y, h) y \\ d^2\pi(y)(h, k) &= 3(y, h)(y, k) y - (y, h) k - (y, k) h - (h, k) y \end{aligned}$$

- Soit  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$  et  $U$  définie par  $U(t)(x) = \pi(u(x) + t\varphi(x))$ .  $U$  vérifie les hypothèses ci-dessus et donc :

$$\left. \frac{d\tilde{E}_\Omega(U(t))}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

- Nous allons calculer la dérivée évaluée en 0 de chaque terme de l'énergie  $\tilde{E}_\Omega(U(t))$ .

- $\left. \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla U|^2 dx \right|_{t=0} = 2 \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \left. \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_i}}{\partial t} \right|_{t=0} dx$

Or

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x) = d\pi(u(x) + t\varphi(x)) \cdot \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right]$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x)}{\partial t} \right|_{t=0} &= d^2\pi(u(x) + t\varphi(x)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \varphi(x) \right] \\ &\quad + d\pi(u(x) + t\varphi(x)) \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x) \right|_{t=0} = d\pi(u(x)) \cdot \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right]$$

Comme  $|u(x)| = 1$  nous avons  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot u(x) = 0$  p.p.  $x \in \Omega$  donc

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x) \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= d^2 \pi(u(x)) \left[ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \varphi(x) \right] + d \pi(u(x)) \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right] \\ &= - (u(x), \varphi(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \varphi(x) \right) u(x) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - \left( u(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right) u(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x) \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial x_i}(t)(x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = - (u(x), \varphi(x)) \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right)$$

donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx \Big|_{t=0} = 2 \int_{\Omega} - (\nabla u(x), \nabla u(x)) (u(x), \varphi(x)) + (\nabla u, \nabla \varphi) dx$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 dx \Big|_{t=0} = 2 \langle -|\nabla u|^2 u - \Delta u, \varphi \rangle$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |p(U)|^2 dx \Big|_{t=0} &= 2 \int_{\Omega} p(U(t)(x)) \cdot p \left( \frac{\partial U(t)(x)}{\partial t} \right) dx \Big|_{t=0} \\ &= 2 \int_{\Omega} p(u(x)) \cdot p(d \pi(u(x)) \cdot \varphi(x)) dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } p(u(x)) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$p(d \pi(u(x)) \cdot \varphi(x)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) - (u(x), \varphi(x)) u_1(x) \\ \varphi_2(x) - (u(x), \varphi(x)) u_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |p(U)|^2 dx \Big|_{t=0} &= 2 \int_{\Omega} \varphi_1(x) u_1(x) + \varphi_2(x) u_2(x) \\
&\quad - (u(x), \varphi(x)) (u_1^2(x) + u_2^2(x)) dx \\
&= 2 \int_{\Omega} [p(u(x)) - (u_1^2(x) + u_2^2(x)) u(x)] \cdot \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} H_z \cdot U dx \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega} H_z(x) \cdot \frac{\partial U(t)(x)}{\partial t} dx \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} H_z(x) \cdot d\pi(u(x)) \cdot \varphi(x) dx \\
&= \int_{\Omega} d\pi(u(x)) \cdot H_z(x) \cdot \varphi(x) dx \\
&= \int_{\Omega} (H_z - (u, H_z) u) \cdot \varphi dx
\end{aligned}$$

- Notons  $u_t(x) = U(t)(x)$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot u_t dx \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial \nabla \phi_t(x)}{\partial t} \cdot u_t(x) + \nabla \phi_t(x) \cdot \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} dx \Big|_{t=0}$$

avec  $\Delta \phi_t = -4\pi \operatorname{div} u_t$  c'est-à-dire  $\nabla \phi_t = B u_t$  où  $B$  est une application linéaire ne dépendant que de  $\Omega$ .

Nous avons  $\frac{\partial \nabla \phi_t}{\partial t} = B \frac{\partial u_t}{\partial t}$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot u_t dx \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega} B \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} \cdot u_t + B u_t \cdot \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} dx \Big|_{t=0} \\
&= \int_{\Omega} B d\pi(u) \cdot \varphi \cdot u + B u \cdot d\pi(u) \cdot \varphi dx \\
&= \int_{\Omega} {}^t u B d\pi(u) \varphi + {}^t \varphi {}^t d\pi(u) B u dx \\
&= \int_{\Omega} {}^t \varphi ({}^t d\pi(u) {}^t B + {}^t d\pi(u) B) u dx \\
&= \int_{\Omega} d\pi(u) ({}^t B + B) u \cdot \varphi dx \\
&= 2 \int_{\Omega} d\pi(u) \nabla \phi_u \cdot \varphi dx
\end{aligned}$$

Car  ${}^t B = B$  :

En effet  $\forall u, v \quad \int_{\Omega} \nabla \phi_u \cdot v = \int_{\Omega} \nabla \phi_v \cdot u$

c'est-à-dire :

$$\int_{\Omega} B u \cdot v = \int_{\Omega} B v \cdot u = \int_{\Omega} {}^t B u \cdot v$$

donc  ${}^t B = B$ .

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot u_t dx \Big|_{t=0} = 2 \int_{\Omega} (\nabla \phi_u - (u, \nabla \phi_u) u) \cdot \varphi dx$$

- Donc la dérivée de l'énergie totale s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_\Omega(U(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left\langle \left[ 2(-\Delta u - |\nabla u|^2 u + K_1 p(u) - K_1(u_1^2 + u_2^2)u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2K_2 H_z + 2K_2(u, H_z)u - 2K_2(\nabla \phi_u - (u, \nabla \phi_u)u) \right], \varphi \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tels que  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ . ■

**Proposition 2.2 (Equation d'Euler-Lagrange pour  $\tilde{E}^{a,\sigma}$ )** Si  $w \in H^1(B_1, S^2)$  est  $\tilde{E}^{a,\sigma}$ -minimisante, alors  $w$  satisfait les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta w &= [ -|\nabla w|^2 - K_1 \sigma^2 (w_1^2 + w_2^2) + K_2 \sigma^2 (w, \widetilde{H}_z) \\ &\quad + K_2 \sigma^2 (w, \nabla \phi_u) + K_2 \sigma^2 (w, \nabla \phi_w) ] w \\ (2.7) \quad &+ K_1 \sigma^2 p(w) - K_2 \sigma^2 \widetilde{H}_z - K_2 \sigma^2 \nabla \phi_u - K_2 \sigma^2 \nabla \phi_w \\ &= f(w, \sigma) \end{aligned}$$

dans  $H^1(B_1, \mathbb{R}^3)$  faible.

**Démonstration :**

- Soit  $w \in H^1(B_1, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}^{a,\sigma}$ -minimisante.

En reprenant les mêmes calculs que pour la démonstration de la proposition précédente avec  $B_1 \Gamma w$  et  $W$  au lieu de  $\Omega \Gamma u$  et  $U \Gamma$  nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} |\nabla W|^2 dy \Big|_{t=0} = 2 \left\langle (-\Delta w - |\nabla w|^2 w), \varphi \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} |p(W)|^2 dy \Big|_{t=0} = 2 \int_{B_1} [p(w(y)) - (w_1^2(y) + w_2^2(y))w(y)] \cdot \varphi(y) dy$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} H_z \cdot W dx \Big|_{t=0} = \int_{B_1} (\widetilde{H}_z - (w, \widetilde{H}_z)w) \cdot \varphi dy$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} \nabla \phi_t \cdot w_t dy \Big|_{t=0} = 2 \int_{B_1} (\nabla \phi_w - (w, \nabla \phi_w)w) \cdot \varphi dy$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} \nabla \phi_u \cdot W dy \Big|_{t=0} = \int_{B_1} (\nabla \phi_u - (w, \nabla \phi_u)w) \cdot \varphi dy$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}^{a,\sigma}(W(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \left\langle \left[ 2(-\Delta w - |\nabla w|^2)w \right. \right. \\ &\quad + 2K_1\sigma^2 p(w) - 2K_1\sigma^2(w_1^2 + w_2^2)w \\ &\quad - 2K_2\sigma^2 \widetilde{H}_z + 2K_2\sigma^2(w, \widetilde{H}_z)w \\ &\quad - 2K_2\sigma^2 \nabla \phi_w + 2K_2\sigma^2(w, \nabla \phi_w)w \\ &\quad \left. \left. - 2K_2\sigma^2 \nabla \phi_u + 2K_2\sigma^2(w, \nabla \phi_u)w \right], \varphi \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  tels que  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ . ■

**Proposition 2.3** *Avec les hypothèses et les notations de la proposition 2.2, nous avons la majoration suivante :*

$$\int_{B_1} |f(w(y), \sigma)| dy \leq c_1 (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

où  $c_1$  est une constante qui ne dépend que du domaine  $\Omega$  et des constantes magnétiques du matériau.

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} |f(w, \sigma)| &\leq |\nabla w|^2 + K_1\sigma^2 + K_2\sigma^2 |\widetilde{H}_z| + K_2\sigma^2 |\nabla \phi_u| + K_2\sigma^2 |\nabla \phi_w| \\ &\quad + K_1\sigma^2 + K_2\sigma^2 |\widetilde{H}_z| + K_2\sigma^2 |\nabla \phi_u| + K_2\sigma^2 |\nabla \phi_w| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |f(w, \sigma)| dx &\leq \int_{B_1} |\nabla w|^2 dx + d_1\sigma^2 + 2K_2\sigma^2 \int_{B_1} |\nabla \phi_w| dx \\ &\quad + 2K_2\sigma^2 \int_{B_1} |\nabla \phi_u| dx \\ &\leq E_1(w) + d_1\sigma^2 + d_2\sigma^2 \left[ \left( \int_{B_1} |\nabla \phi_w|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{B_1} |\nabla \phi_u|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\ &\leq E_1(w) + d_3\sigma^2 \left[ 1 + d_4 + d_5 \left( \frac{\text{vol}(\Omega - a)}{\sigma} \right)^{1/2} \right] \\ &\leq E_1(w) + d_3\sigma^2 \left[ 1 + d_4 + d_6\sigma^{-3/2} \right] \\ &\leq c_1 (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.2 et le fait que  $\sigma < 1$ . ■

## 2.2 Lemmes de changement de repère et premières inégalités

**Lemme 2.1** *Soit  $\sigma > 0$  et  $a \in \Omega$ .*

*Si  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante, alors  $w(y) = u(a + \sigma y) \in H^1(B_1, S^2)$  est  $\tilde{E}^{a,\sigma}$ -minimisante.*

**Démonstration :**

Supposons que  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante  $\Gamma$  c'est-à-dire :

$$\forall v \in H^1(\Omega, S^2) / u - v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \tilde{E}_\Omega(u) \leq \tilde{E}_\Omega(v).$$

Pour  $a \in \Omega$  et  $\sigma > 0$  notons  $s = u|_{\mathcal{X}_{B_\sigma(a)}}$  et  $\bar{s} = u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_\sigma(a)})$ . Nous avons :

$$\forall t \in H^1(B_\sigma(a), S^2) / s - t \in H_0^1(B_\sigma(a), \mathbb{R}^3) \quad \tilde{E}_{a,\sigma}(s) \leq \tilde{E}_{a,\sigma}(t).$$

En effet si nous prolongeons  $t$  par  $u$  en dehors de  $B_\sigma(a)$  pour obtenir  $v \in H^1(\Omega, S^2)$  nous avons :

$$\tilde{E}_\Omega(u) \leq \tilde{E}_\Omega(v)$$

donc

$$\tilde{E}_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}}(\bar{s}) + \tilde{E}_{a,\sigma}(s) \leq \tilde{E}_{\Omega \setminus \overline{B_\sigma(a)}}(\bar{s}) + \tilde{E}_{a,\sigma}(t)$$

d'après l'identité 2.5.

Ensuite nous posons  $w(y) = s(a + \sigma y)$   $\Gamma$  et pour  $v' \in H^1(B_1, S^2)$  tel que  $w - v' \in H_0^1(B_1)$   $\Gamma$   $t(a + \sigma y) = v'(y)$ .

Or

$$v' - w \in H_0^1(B_1) \iff t - s \in H_0^1(B_\sigma(a))$$

Alors  $\Gamma$

$$\tilde{E}^{a,\sigma}(w) = \frac{1}{\sigma} \tilde{E}_{a,\sigma}(s) \leq \frac{1}{\sigma} \tilde{E}_{a,\sigma}(t) = \tilde{E}^{a,\sigma}(v')$$

Donc  $w$  est  $\tilde{E}^{a,\sigma}$ -minimisante. ■

**Lemme 2.2** *Soit  $\sigma > 0$  et  $a \in \Omega$ .*

*Si  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante, alors, si nous notons  $w(y) = u(a + \sigma y) \in H^1(B_1, S^2)$ , nous avons pour  $0 < \lambda \leq 1$*

$$\forall v' \in H^1(B_1, S^2) \quad \text{tel que } v' = w \quad \text{sur } B_1 \setminus B_\lambda$$

$$\tilde{E}_\lambda(w) \leq \tilde{E}_\lambda(v')$$

**Démonstration :**

D'après le lemme précédent 2.1Γ comme  $v' - w \in H_0^1(B_1)$  nous avons

$$\tilde{E}^{a,\sigma}(w) \leq \tilde{E}^{a,\sigma}(v')$$

Or

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{a,\sigma}(w) &= \tilde{E}_\lambda(w) + \int_{B_1 \setminus B_\lambda} |\nabla w|^2 dy + K_1 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 |p(w)|^2 dy \\ &\quad - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot w dy - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_u^\sim \cdot w dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \nabla \phi_w \cdot w \mathcal{X}_{B_1} dy + 2 K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy \\ &\quad + K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy \\ &= \tilde{E}_\lambda(w) + \int_{B_1 \setminus B_\lambda} |\nabla v'|^2 dy + K_1 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 |p(v')|^2 dy \\ &\quad - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot v' dy - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_u^\sim \cdot v' dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_1} dy - K_2 \int_{B_1} \sigma^2 \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_1} dy \\ &\quad + K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy + K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w (\mathcal{X}_{B_1} - \mathcal{X}_{B_\lambda}) dy \\ &\quad + K_2 \int_{B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dy \end{aligned}$$

car  $\nabla \phi_w = \nabla \phi_{\lambda,1} + \nabla \phi_{w,\lambda}$  et grâce au théorème 2.2.

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{a,\sigma}(w) &= \tilde{E}_\lambda(w) + \int_{B_1 \setminus B_\lambda} |\nabla v'|^2 dy + K_1 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 |p(v')|^2 dy \\ &\quad - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot v' dy - 2 K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_u^\sim \cdot v' dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_1 \setminus B_\lambda} \sigma^2 \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot v' (\mathcal{X}_{B_1} - \mathcal{X}_{B_\lambda}) dy \end{aligned}$$

Et comme  $\nabla \phi_{\lambda,1}$  ne dépend que de  $w$  ( $\mathcal{X}_{B_1} - \mathcal{X}_{B_\lambda}$ ) =  $v'(\mathcal{X}_{B_1} - \mathcal{X}_{B_\lambda})\Gamma$  nous avons démontré le lemme. ■

**Lemme 2.3** Soit  $0 < \sigma < 1$  et  $a \in \Omega$ ,  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante et  $0 < \lambda \leq 1$ .

Alors  $\exists c_2 = c_2(\Omega) > 0$  tel que  $\forall w \in H^1(B_1, S^2)$  nous avons l'inégalité suivante :

$$(2.8) \quad |E_\lambda(w) - \tilde{E}_\lambda(w)| \leq c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
|E_\lambda(w) - \tilde{E}_\lambda(w)| &\leq K_1 \sigma^2 \int_{B_\lambda} |p(w)|^2 dy + 2 K_2 \sigma^2 \int_{B_\lambda} |\tilde{H}_z| |w| dx \\
&\quad + 2 K_2 \sigma^2 \left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{\tilde{u}} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right| \\
&\quad + 2 K_2 \sigma^2 \left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right| \\
&\quad + K_2 \sigma^2 \left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right|
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème 2.2

$$\left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{w,\lambda} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right| \leq 4\pi \text{vol } B_\lambda \leq 4\pi \lambda^3$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{\lambda,1} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right| &\leq 4\pi (\text{vol } B_\lambda)^{1/2} (\text{vol } B_1)^{1/2} \\
&\leq 4\pi \lambda^{3/2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_\lambda} \nabla \phi_{\tilde{u}} \cdot w \mathcal{X}_{B_\lambda} dx \right| &\leq 4\pi \left( \text{vol } \frac{\Omega}{\sigma} \right)^{1/2} (\text{vol } B_\lambda)^{1/2} \\
&\leq 4\pi (\text{vol } \Omega)^{1/2} \sigma^{-3/2} \lambda^{3/2}
\end{aligned}$$

Par conséquent  $\exists d = d(\Omega) > 0$  telle que

$$|E_\lambda(w) - \tilde{E}_\lambda(w)| \leq d(\sigma^2 \lambda^3 + \sigma^2 \lambda^{3/2} + \sigma^{1/2} \lambda^{3/2})$$

et nous avons  $c_2 = c_2(\Omega)$  tel que

$$|E_\lambda(w) - \tilde{E}_\lambda(w)| \leq c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2}$$

■

**Lemme 2.4** Soit  $0 < \sigma < 1$  et  $a \in \Omega$ ,  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante.

Soit  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ , alors  $\exists c_3 = c_3(\Omega)$  constante /  $\forall \lambda \in ]0, 1]$

$$E_\lambda(w) \leq E_\lambda(v') + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2}$$

$\forall v' \in H^1(B_1, S^2)$  avec  $v' = w$  sur  $B_1 \setminus B_\lambda$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
E_\lambda(w) &\leq \tilde{E}_\lambda(w) + c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} \\
&\text{inégalité 2.8} \\
&\leq \tilde{E}_\lambda(v') + c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} \\
&\text{lemme 2.2} \\
&\leq E_\lambda(v') + c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} + c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} \\
&\text{inégalité 2.8} \\
&\leq E_\lambda(v') + 2c_2 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2}
\end{aligned}$$

■

## 2.3 La formule de “monotonie”

**Proposition 2.4** Soit  $0 < \sigma < 1$  et  $a \in \Omega$ ,  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante.

Soit  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ , alors  $\exists c_4 = c_4(\Omega)$  constante telle que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} E_{x,\lambda}(w) &\leq \left[ \frac{1}{\rho} E_{x,\rho}(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2} \right] \\
\forall x \in B_{1/2} \quad \text{et} \quad 0 < \lambda \leq \rho \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**Démonstration :**

• Soit  $0 < \sigma < 1$ ,  $a \in \Omega$  et  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ .

Soit  $x \in B_{1/2}$  et  $0 < \lambda \leq \rho \leq \frac{1}{2}$ , nous voulons montrer que :

$$\frac{1}{\lambda} E_{x,\lambda}(w) \leq \left[ \frac{1}{\rho} E_{x,\rho}(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2} \right]$$

• Après changement d’origine nous nous contentons de montrer :

$$(2.9) \quad \frac{1}{\lambda} E_\lambda(w) \leq \left[ \frac{1}{\rho} E_\rho(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2} \right]$$

En effet si nous notons  $w^x(t) = w(x + t)$  nous avons  $E_{x,\lambda}(w) = E_\lambda(w^x)$  et  $w^x(t) = u(a + \sigma x + \sigma t)$ . Nous pourrions donc utiliser 2.9 avec  $w^x$  au lieu de  $w$  et  $a + \sigma x$  au lieu de  $a$ .

• Pour presque tout  $\lambda \in ]0, \frac{1}{2}] \Gamma$  nous avons  $\int_{|x|=\lambda} |\nabla w|^2 d\xi(x) < \infty$  où  $\xi$  est la mesure sur la sphère.

Introduisons la fonction de comparaison :

$$\begin{cases} v_\lambda(x) = w(x) & \text{si } |x| \geq \lambda \\ v_\lambda(x) = w\left(\frac{\lambda x}{|x|}\right) & \text{si } |x| \leq \lambda \end{cases}$$

Notons  $\nabla_\xi w$  la composante tangentielle du gradient le long des sphères  $|x| = r$ .

$$\text{Ainsi } |\nabla w|^2 = |\nabla_\xi w|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 \text{ où } |\nabla_\xi w|^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left| \frac{\partial w}{\partial \theta} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right|^2.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} E_\lambda(v_\lambda) &= \int_{B_\lambda} |\nabla v_\lambda|^2 dx \\ &= \int_{r \leq \lambda} \left( \int_{|x|=r} \left| \nabla w\left(\frac{\lambda x}{r}\right) \right|^2 d\xi(x) \right) dr \\ &\text{Changement de variable } y = \frac{\lambda x}{r} \\ &= \int_{r \leq \lambda} \left( \int_{|y|=\lambda} \frac{r^2 \lambda^2}{\lambda^2 r^2} |\nabla_\xi w(y)|^2 d\xi(y) \right) dr \\ &= \int_{r \leq \lambda} \left( \int_{|y|=\lambda} |\nabla_\xi w(y)|^2 d\xi(y) \right) dr \\ &= \lambda \int_{|y|=\lambda} |\nabla_\xi w(y)|^2 d\xi(y) \\ &= \lambda \left( \int_{|x|=\lambda} |\nabla w|^2 d\xi(x) - \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d E_\lambda(w)}{d \lambda} &= \frac{d}{d \lambda} \left( \int_{r \leq \lambda} \left( \int_{|x|=r} |\nabla w|^2 d\xi(x) \right) dr \right) \\ &= \int_{|x|=\lambda} |\nabla w|^2 d\xi(x) \end{aligned}$$

Donc

$$E_\lambda(v_\lambda) = \lambda \left( \frac{d E_\lambda(w)}{d \lambda} - \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \right)$$

Le lemme 2.4 implique l'inégalité suivante.

$$\begin{aligned} E_\lambda(w) &\leq E_\lambda(v_\lambda) + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} \\ &\leq \lambda \left( \frac{d E_\lambda(w)}{d \lambda} - \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \right) + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2} \end{aligned}$$

Cela implique

$$\lambda \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \leq \lambda \frac{d E_\lambda(w)}{d \lambda} - E_\lambda(w) + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{3/2}$$

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \leq \frac{1}{\lambda} \frac{d E_\lambda(w)}{d \lambda} - \frac{1}{\lambda^2} E_\lambda(w) + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{-1/2}$$

$$(2.10) \quad 0 \leq \frac{1}{\lambda} \int_{|x|=\lambda} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi(x) \leq \frac{d}{d \lambda} \left( \frac{1}{\lambda} E_\lambda(w) \right) + c_3 \sigma^{1/2} \lambda^{-1/2}$$

Nous pouvons intégrer l'inégalité entre  $\lambda$  et  $\rho$  (sans prendre en compte le terme en  $\frac{\partial w}{\partial r}$ ).

$$(2.11) \quad \frac{1}{\lambda} E_\lambda(w) \leq \frac{1}{\rho} E_\rho(w) + 2 c_3 \sigma^{1/2} (\rho^{1/2} - \lambda^{1/2})$$

et finalement

$$\frac{1}{\lambda} E_\lambda(w) \leq \frac{1}{\rho} E_\rho(w) + 2 c_3 \sigma^{1/2} \rho^{1/2}$$

C'est l'inégalité 2.11 qui donne son nom à la formule. ■

## 2.4 Approximation de $w$ par des fonctions continues

- Dans cette section nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \bar{\varepsilon} > 0 \Gamma u \in H^1(\Omega, S^2) \text{ une fonction } \tilde{E}_\Omega\text{-minimisante} \Gamma \\ 0 < \sigma < 1 \text{ et } a \in \Omega. \text{ Soit } w \in H^1(B_1, S^2) \text{ définie par} \\ w(y) = u(a + \sigma y). \\ \text{Nous supposons} \\ \sigma^{1/2} \leq \bar{\varepsilon} \text{ et } E_1(w) \leq \bar{\varepsilon} \end{array} \right.$$

• Nous allons montrer que si  $\bar{\varepsilon}$  est suffisamment petit il est possible d'approcher  $w$  par des fonctions régulières à valeurs dans  $S^2$ .

- Posons :

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

une fonction régularisante régulière et radiale.

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp } \varphi \subset B_1 \\ \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx = 1 \\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ \varphi(x) = g(r) \quad \text{où } r = |x| \end{array} \right.$$

Remarquons que si  $w^* = \int_{B_1} \varphi(x) w(x) dx$  nous pouvons appliquer une version de l'inégalité de Poincaré [DL84, p. 636] pour affirmer qu'il existe une constante  $d_1 = d_1(\varphi)$  telle que :

$$\int_{B_1} |w - w^*|^2 dx \leq d_1 E_1(w) \leq d_1 \bar{\varepsilon}$$

Ceci implique en particulier que  $w^*$  est proche de beaucoup de valeurs de  $w(x)$  pour  $x \in B_1$ .

Plus précisément il existe une constante  $c_5 = c_5(\varphi)$  telle que :

$$(2.13) \quad \text{dist}(w^*, S^2) \leq c_5 \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

En effet :

$$\text{dist}(w^*, S^2) = \min_{y \in S^2} |w^* - y| \leq \min_{x \in B_1} |w^* - w(x)|$$

or

$$\int_{B_1} |w - w^*|^2 dx \geq d_2 \min_{x \in B_1} |w - w^*|^2$$

donc

$$\text{dist}(w^*, S^2) \leq d_3 \left( \int_{B_1} |w - w^*|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_5 \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

- Si  $x \in B_{1/2}$  considérons la boule  $B_h(x)$  où  $0 < h \leq \frac{1}{4}$  et la fonction :

$$w_{x,h} : B_1 \longrightarrow S^2 \quad / \quad w_{x,h}(y) = w(x - hy)$$

Par la proposition 2.4 nous avons :

$$E_1(w_{x,h}) = \frac{1}{h} E_{x,h}(w) \leq \left[ \frac{1}{\rho} E_{x,\rho}(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2} \right] \quad \forall x \in B_{1/2} \quad \text{et} \quad 0 < h \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

Comme nous pouvons fixer  $\rho = \frac{1}{4}$  et  $E_{x,\rho}(w) \leq E_1(w)$  il existe  $d_1 = d_1(\varphi)$  et  $c_6 = c_6(\varphi)$  qui vérifient :

$$(2.14) \quad E_1(w_{x,h}) = \frac{1}{h} E_{x,h}(w) \leq \begin{array}{l} d_1 E_1(w) + d_1 \sigma^{1/2} \\ \leq c_6 \bar{\varepsilon} \end{array}$$

d'après les hypothèses 2.12.

- Posons  $\varphi^{(h)}(y) = h^{-3}\varphi(\frac{y}{h})$  et :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} w^{(h)}(x) &= \int_{B_1} \varphi(y) w(x - hy) dy \\ &= \int_{B_h(x)} \varphi^{(h)}(x - z) w(z) dz = \int_{B_1} \varphi^{(h)}(x - z) w(z) dz \end{aligned}$$

car  $\text{supp } \varphi^{(h)}(x - z) \subset B_h(x)$ . La fonction  $w^{(h)} \in \mathcal{C}^\infty(B_{1/2}, \mathbb{R}^3)$  car c'est le produit de convolution d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  et d'une fonction  $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

- Il existe  $c_7 = c_7(\varphi)$  telle que :

$$(2.16) \quad \text{dist}(w^{(h)}(x), S^2) \leq c_7 \bar{\varepsilon}^{1/2} \quad \forall (x, h) \in B_{1/2} \times ]0, \frac{1}{4}]$$

Car  $\int_{B_1} \varphi(y) dy = \int_{B_h(x)} \varphi^{(h)}(x - z) dz = 1$  et en posant  $\psi(z) = \varphi^{(h)}(x - z)$  nous pouvons appliquer 2.13 avec  $\psi$  au lieu de  $\varphi$ .

- Soit  $\mathcal{O}$  une couronne sphérique de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $S^2$  et telle que  $\forall y \in S^2$  nous ayons  $\text{dist}(y, \mathcal{O}) < \varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$  donné. Soit  $\Pi : \mathcal{O} \rightarrow S^2$  la projection radiale sur  $S^2$ .  $\Pi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, S^2)$ .

Par l'inégalité 2.16 si  $\bar{\varepsilon}$  est choisi suffisamment petit nous aurons  $w^{(h)}(x) \in \mathcal{O} \quad \forall x \in B_{1/2}$  et nous pouvons définir une fonction régulière :  $w_h : B_{1/2} \rightarrow S^2$  par  $w_h(x) = \Pi \circ w^{(h)}(x)$ .

**Lemme 2.5** *Supposons à nouveau que les hypothèses 2.12 sont vérifiées et, pour  $\bar{h} = \bar{\varepsilon}^{1/4}$  et  $h \in ]0, \bar{h}]$ , définissons  $w^{(h)}$  et  $w^{(\bar{h})}$  comme en 2.15.*

*Alors il existe une constante  $c_8 = c_8(\varphi) > 0$  telle que :*

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w^{(h)}|^2 dx \leq c_8 E_1(w)$$

et

$$\sup_{x \in B_{1/2}} |w^{(\bar{h})}(x) - w^{(\bar{h})}(0)|^2 \leq c_8 \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

**Démonstration :**

- **Première inégalité :**

Par définition nous avons  $\forall x \in B_{1/2}$  :

$$w^{(h)}(x) = \int_{B_1} \varphi(y) w(x - hy) dy$$

donc  $\Gamma$

$$\nabla w^{(h)}(x) = \int_{B_1} \varphi(y) \nabla w(x - hy) dy = \int_{B_h(x)} \varphi^{(h)}(x - z) \nabla w(z) dz$$

et

$$| \nabla w^{(h)}(x) |^2 \leq \int_{B_h(x)} \varphi^{(h)}(x - z)^2 dz \int_{B_h(x)} | \nabla w(z) |^2 dz \leq d_1(\varphi) E_1(w)$$

Ainsi  $\Gamma$

$$\int_{B_{1/2}} | \nabla w^{(h)} |^2 dx \leq c_8 E_1(w)$$

• **Deuxième inégalité :**

Nous avons  $\forall x \in B_{1/2}$  :

$$\begin{aligned} | \nabla w^{(\bar{h})}(x) |^2 &= \left| \int_{B_1} \varphi^{(\bar{h})}(x - y) \nabla w(y) dy \right|^2 \\ &\leq \int_{B_1} \varphi^{(\bar{h})}(x - y) dy \int_{B_1} \varphi^{(\bar{h})}(x - y) | \nabla w(y) |^2 dy \\ &= \int_{B_1} \varphi^{(\bar{h})}(x - y) | \nabla w(y) |^2 dy \\ &= \int_{B_{\bar{h}}(x)} \bar{h}^{-3} \varphi\left(\frac{x - y}{\bar{h}}\right) | \nabla w(y) |^2 dy \\ &\leq \bar{h}^{-3} \sup \varphi \int_{B_{\bar{h}}(x)} | \nabla w(y) |^2 dy \\ &\leq d_2(\varphi) \bar{h}^{-3} E_{B_{\bar{h}}(x)}(w) \\ &\leq d_3(\varphi) \bar{h}^{-2} \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité 2.14

$$= d_3(\varphi) \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

D'après le théorème des accroissements finis  $\exists \theta \in ]0, 1[$  tel que :

$$| w^{(\bar{h})}(x) - w^{(\bar{h})}(0) |^2 \leq d_4 | \nabla w^{(\bar{h})}(\theta x) |^2$$

d'où

$$\sup_{x \in B_{1/2}} | w^{(\bar{h})}(x) - w^{(\bar{h})}(0) |^2 \leq c_8 \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

■

• Pour comparer les fonctions approchantes avec  $w$  nous devons les faire coïncider avec  $w$  sur le bord d'une petite boule. Pour  $x$  quelconque fixé l'inégalité 2.16 est valable pour tout  $h \in ]0, \bar{h}]$  Elle est donc préservée si nous choisissons  $h = h(x)$  dépendant de  $x$ . Nous avons alors :

**Lemme 2.6** *Toujours sous les hypothèses 2.12, posons  $\tau = \bar{\varepsilon}^{1/8}$ ,  $\theta \in ]\tau, \frac{1}{4}]$  et choisissons :  $h = h(r)$ , où  $r = |x|$ , une fonction décroissante de  $r$ , régulière, telle que :*

$$(2.17) \quad \begin{cases} h(r) = \bar{h} = \bar{\varepsilon}^{1/4} & \text{pour } r \leq \theta \\ h(\theta + \tau) = 0 \\ |h'(r)| \leq 2\bar{\varepsilon}^{1/8} \end{cases}$$

Posons :

$$w^{(h(x))}(x) = \int_{B_1} \varphi^{(h(x))}(x-y) w(y) dy$$

et, par 2.16,

$$(w_h)(x) = w_{h(x)}(x) = \Pi \circ w^{(h(x))}(x)$$

Alors la fonction  $w_h$  est dans  $H^1(B_{1/2}, S^2)$  et satisfait  $w_h = w$  sur  $B_{1/2} \setminus B_{\theta+\tau}$ ,  $w_h = w_{\bar{h}}$  sur  $B_{\theta}$  et  $\exists c_9 = c_9(\varphi)$  telle que

$$\int_{B_{\theta+\tau} \setminus B_{\theta}} |\nabla w_h|^2 dx \leq c_9 \int_{B_{\theta+2\tau} \setminus B_{\theta-\tau}} |\nabla w|^2 dx$$

**Démonstration :**

• Comme  $w_{h(x)}(x) = \Pi \circ w^{(h(x))}(x)$  et que  $\Pi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, S^2) \Gamma$  si  $w^{(h)} \in H^1(B_{1/2}, S^2) \Gamma$  nous avons  $w_h \in H^1(B_{1/2}, S^2)$ .

De plus  $\Gamma w_h = w^{(h)} = w$  sur  $B_{1/2} \setminus B_{\theta+\tau}$ ,  $\Gamma w_h = w_{\bar{h}} \Gamma w^{(h)} = w(\bar{h})$  sur  $B_{\theta}$  et :

$$\int_{B_{\theta+\tau} \setminus B_{\theta}} |\nabla w_h|^2 dx \leq d_1 \int_{B_{\theta+\tau} \setminus B_{\theta}} |\nabla w^{(h)}|^2 dx$$

Donc il suffit de montrer le lemme avec  $w^{(h)}$  au lieu de  $w_h$ .

• Remarquons que

$$w^{(h)}(x) = \int_{B_1} \varphi(y) w(x - h(x)y) dy$$

et donc que  $w^{(h)}$  est régulière si  $w$  l'est.

• Supposons dans un premier temps que  $w : B_{3/4} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est régulière. Si  $\Xi$  est un domaine contenu dans  $B_{3/4} \Gamma$  p. p.  $x \in \Xi$  :

$$\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x^\alpha} = \int_{B_1} \varphi(y) \left[ \frac{\partial w}{\partial x^\alpha}(x - h(x)y) - \frac{\partial h(x)}{\partial x^\alpha} y \cdot \nabla w(x - h(x)y) \right] dy$$

- Il s'en suit qu'il existe  $d_2 = d_2(\varphi, \bar{\varepsilon})$  tel que :

$$\int_{\Xi} |\nabla w^{(h)}|^2 dx \leq d_2 \int_{\Xi} \left( \int_{B_1} \varphi(y) |\nabla w|^2(x - hy) dy \right) dx$$

( expression de  $\nabla w$  et majoration de Cauchy–Schwartz )

- Pour  $x \in \Xi$  nous posons  $z = x - h(x)y$ . Cela définit une fonction  $F_y : \Xi \rightarrow \Xi_\tau$  où  $\Xi_\tau = \{x / \text{dist}(x, \Xi) < \tau\}$  car  $\bar{h} = \bar{\varepsilon}^{1/4} \leq \tau = \bar{\varepsilon}^{1/8}$ .
- Par 2.17  $F_y$  est un difféomorphisme sur  $F_y(\Xi)$  de jacobien proche de 1 ( parce que  $h'(r) \leq 2\bar{\varepsilon}^{1/8}$  ). Ainsi par un changement de variables

$$\int_{\Xi} |\nabla w|^2(x - h(x)y) dx \leq 2 \int_{\Xi_\tau} |\nabla w|^2 dx$$

D'où l'existence d'une constante  $d_3 = d_3(\varphi, \bar{\varepsilon})$  telle que :

$$(2.18) \quad \int_{\Xi} |\nabla w^{(h)}|^2 dx \leq d_3 \int_{\Xi_\tau} |\nabla w|^2 dx$$

- Maintenant si  $w_i$  est une suite de fonctions régulières de  $B_{3/4}$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui converge fortement vers  $w$  dans  $H^1(B_{3/4})$  nous avons

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_i^{(h)} - \nabla w_j^{(h)}|^2 dx \leq d_3 \int_{B_{3/4}} |\nabla w_i - \nabla w_j|^2 dx$$

grâce à ce qui précède avec  $\Xi = B_{1/2}$ .

Donc  $w_i^{(h)}$  est de Cauchy dans  $H^1(B_{1/2}, \mathbb{R}^3)$ .

- $\lim_{i \rightarrow \infty} w_i^{(h)} = w^{(h)}$  dans  $H^1(B_{1/2}, \mathbb{R}^3)$  et presque partout. De plus  $w^{(h)} = w$  sur  $B_{1/2} \setminus B_{\theta+\tau}$  car  $h(x) = 0$  si  $|x| \geq \theta + \tau$  et alors  $w_i^{(h)}(x) = w_i(x)$ .

Finalement  $w^{(h)} \in H^1(B_{1/2}, \mathbb{R}^3)$  et en appliquant 2.18 avec  $\Xi = B_{\theta+\tau} \setminus B_\theta$  nous obtenons le lemme 2.6. ■

## 2.5 Inégalité fondamentale

**Proposition 2.5** *Il existe une constante  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\Omega) > 0$  telle que si  $0 < \sigma < 1$ ,  $a \in \Omega$ ,  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante et  $w \in H^1(B_1, S^2)$ , la fonction définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ , vérifient :*

$$\sigma^{1/2} \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{et} \quad E_1(w) \leq \bar{\varepsilon}$$

alors  $\exists \bar{\theta} = \bar{\theta}(\bar{\varepsilon}) \in ]0, 1]$  tel que

$$\frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\theta}^{1/2} \sigma^{1/2} \leq \frac{1}{2} (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

**Démonstration :**

- Soit  $v$  la solution du problème de Dirichlet linéaire :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } B_{1/2} \\ v = w^{(\bar{h})} & \text{sur } \partial B_{1/2} \end{cases}$$

alors  $\Gamma v : B_{1/2} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application harmonique régulière  $\Gamma$  puisque  $w^{(\bar{h})}$  est régulière [DL84, p. 389].

Nous observons  $\Gamma$  d'après le lemme 2.5  $\Gamma$  que

$$w^{(\bar{h})}(B_{1/2}) \subset B_{d_{\bar{\varepsilon}^{1/4}}}(w^{(\bar{h})}(0))$$

Il s'en suit  $\Gamma$  d'après le principe du maximum  $\Gamma$  que l'image de  $v$  est aussi dans cette boule [DL1  $\Gamma$  p. 289].

En particulier il existe  $d_1 = d_1(\Omega)$  telle que :

$$(2.19) \quad \sup_{B_{1/2}} |v - w^{(\bar{h})}|^2 \leq d_1 \bar{\varepsilon}^{1/2}$$

Le théorème de la moyenne pour les fonctions sous-harmoniques [Mor66, th. 2.2.7, p. 41] implique l'existence d'une constante  $d_2$  telle que :

$$\sup_{B_{1/4}} |\nabla v|^2 \leq d_2 \int_{B_{1/2}} |\nabla v|^2 dx$$

Comme  $v$  minimise l'énergie sur  $B_{1/2} \Gamma$  pour les fonctions qui coïncident avec elle sur son bord  $\Gamma$  nous avons :

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla v|^2 dx \leq \int_{B_{1/2}} |\nabla w^{(\bar{h})}|^2 dx \leq c_8 E_1(w)$$

d'après Dautray-Lions [DL84, p. 633] et le lemme 2.5.

Finalement il existe  $d_3 = d_3(\Omega)$  telle que :

$$(2.20) \quad \sup_{B_{1/4}} |\nabla v|^2 \leq d_3 E_1(w)$$

• Pour tout  $\theta \in ]0, \frac{1}{4}]$  nous pouvons estimer  $\Gamma$  grâce à l'inégalité 2.16 et à la régularité de  $\Pi \Gamma$

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\theta} E_\theta(w_{\bar{h}}) &\leq d_4 \frac{1}{\theta} E_\theta(w^{(\bar{h})}) \\ &\leq 2 d_4 \frac{1}{\theta} \int_{B_\theta} (|\nabla(w^{(\bar{h})} - v)|^2 + |\nabla v|^2) dx \end{aligned}$$

où  $d_4$  est une constante.

• Par 2.20 nous avons  $\Gamma$  pour  $\theta \in ]0, \frac{1}{4}]$  :

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\theta} \int_{B_\theta} |\nabla v|^2 dx &\leq \sup_{B_{1/4}} |\nabla v|^2 \frac{1}{\theta} \int_{B_\theta} dx \\ &\leq d_5 \theta^2 E_1(w) \end{aligned}$$

où  $d_5$  dépend seulement de  $\Omega$ .

• En intégrant par parties :

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla(w^{(\bar{h})} - v)|^2 dx = - \int_{B_{1/2}} (w^{(\bar{h})} - v) \cdot \Delta(w^{(\bar{h})} - v) dx$$

(Une intégration par parties est possible car  $w^{(\bar{h})}$  et  $v$  sont régulières et coïncident sur  $\delta B_{1/2}$ .)

En utilisant 2.19 et le fait que  $v$  est harmonique nous obtenons :

$$(2.23) \quad \int_{B_{1/2}} |\nabla(w^{(\bar{h})} - v)|^2 dx \leq d_6 \bar{\varepsilon}^{1/4} \int_{B_{1/2}} |\Delta w^{(\bar{h})}| dx$$

où  $d_6$  dépend seulement de  $\Omega$ .

L'équation d'Euler de la proposition 2.2 pour  $w$  donne  $\Delta w = f(w, \sigma)$  donc :

$$\begin{aligned} \Delta w^{(\bar{h})}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \varphi^{(\bar{h})}(x-y)) w(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^{(\bar{h})}(x-y) \Delta w(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^{(\bar{h})}(x-y) f(w(y), \sigma) dy \end{aligned}$$

La majoration de la proposition 2.3 permet  $\Gamma$  après intégration sur  $B_{1/2}$   $\Gamma$  d'obtenir :

$$\int_{B_{1/2}} |\Delta w^{(\bar{h})}(x)| dx \leq \int_{B_{1/2}} \int_{B_1} |\varphi^{(\bar{h})}(x-y) f(w(y), \sigma)| dy dx$$

$$\begin{aligned} &\leq d_7 \int_{B_1} |f(w(y), \sigma)| dy \\ &\leq d_8 [E_1(w) + \sigma^{1/2}] \end{aligned}$$

où  $d_8$  est une constante.

- En combinant 2.21Γ2.22Γ2.23 et l'inégalité précédente nous obtenons :

$$\frac{1}{\theta} E_\theta(w_h) \leq 2 d_4 \frac{1}{\theta} d_6 \bar{\varepsilon}^{1/4} d_8 [E_1(w) + \sigma^{1/2}] + 2 d_4 d_5 \theta^2 E_1(w)$$

donc

$$(2.24) \frac{1}{\theta} E_\theta(w_h) \leq d_9 \frac{1}{\theta} \bar{\varepsilon}^{1/4} [E_1(w) + \sigma^{1/2}] + d_9 \theta^2 E_1(w) \quad \forall \theta \in ]0, \frac{1}{4}]$$

où  $d_9 = d_9(\Omega)$ .

- Soit  $\mu \in ]0, \frac{1}{16}]$ . Prenons  $\bar{\theta} = \bar{\varepsilon}^\mu \Gamma \tau = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{8}} \Gamma p$  l'entier tel que  $p \leq \frac{\bar{\theta}}{3\tau} < p+1$ .

Nous notons  $[\bar{\theta}, \bar{\theta} + 3p\tau] = \bigcup_{i=1}^p I_i$  ( $\subset [\bar{\theta}, 2\bar{\theta}]$ ) où  $I_i$  est un intervalle fermé de longueur  $3\tau$ .

$$\text{Comme } \mu \leq \frac{1}{16} \Gamma \text{ nous avons } p \geq \frac{\bar{\varepsilon}^\mu}{3 \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{8}}} - 1 \geq \frac{1}{3} \bar{\varepsilon}^{-\frac{1}{16}} - 1.$$

$$\text{De plus } \Gamma \int_{r \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + 3p\tau]} |\nabla w|^2 dx = \sum_{i=1}^p \int_{r \in I_i} |\nabla w|^2 dx \leq E_1(w).$$

- Nous pouvons choisir  $I_j$  tel que :

$$(2.25) \quad \int_{r \in I_j} |\nabla w|^2 dx \leq p^{-1} E_1(w) \leq d_{10} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w)$$

où  $d_{10} = d_{10}(\Omega)$ .

Soit  $\theta$  tel que  $I_j = [\theta - \tau, \theta + 2\tau]$  et  $h(x)$  comme donné par 2.17.

$w_{h(x)}(x) \in H^1(B_{1/2}, S^2) \Gamma w_h = w$  pour  $r \geq \theta + \tau$  et

$$\int_{r \in [\theta, \theta + \tau]} |\nabla w_h|^2 dx \leq d_{11} \int_{r \in I_j} |\nabla w|^2 dx$$

d'après le lemme 2.6.

Par 2.25 il existe  $d_{12} = d_{12}(\Omega, \varphi)$  telle que :

$$(2.26) \quad \int_{r \in [\theta, \theta + \tau]} |\nabla w_h|^2 dx \leq d_{12} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w)$$

- Par le lemme 2.4 il existe  $d_{13} = d_{13}(\Omega)$  telle que :

$$E_{\theta+\tau}(w) \leq E_{\theta+\tau}(w_h) + d_{13} \sigma^{1/2} \bar{\theta}^{3/2}$$

En effet  $\Gamma\theta + \tau \leq 2\bar{\theta}$  et

$$\begin{aligned} E_{\theta+\tau}(w) &\leq E_{\theta+\tau}(w_h) + c_3 \sigma^{1/2} (\theta + \tau)^{3/2} \\ &\leq E_{\theta+\tau}(w_h) + d_{13} \sigma^{1/2} \bar{\theta}^{3/2} \end{aligned}$$

où  $c_3$  est la constante du lemme 2.4.

- L'inégalité 2.26 implique :

$$\begin{aligned} E_{\theta}(w) &\leq E_{\theta+\tau}(w) \\ &\leq E_{\theta+\tau}(w_h) + d_{13} \sigma^{1/2} \bar{\theta}^{3/2} \\ &\leq E_{\theta}(w_{\bar{h}}) + d_{12} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w) + d_{13} \sigma^{1/2} \bar{\theta}^{3/2} \end{aligned}$$

car  $w_h = w_{\bar{h}}$  sur  $B_{\theta}$ .

Finalemnt il existe  $d_{14} = d_{14}(\Omega, \varphi)$  telle que :

$$E_{\theta}(w) \leq E_{\theta}(w_{\bar{h}}) + d_{14} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w) + d_{14} \sigma^{1/2} \bar{\theta}^{3/2}$$

- En combinant cette inégalité avec 2.24 on obtient : où  $\theta \in [\bar{\theta}, 2\bar{\theta}]$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} E_{\theta}(w) &\leq \frac{1}{\theta} E_{\theta}(w_{\bar{h}}) + d_{14} \frac{1}{\theta} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w) + d_{14} \sigma^{1/2} \frac{1}{\theta} \bar{\theta}^{3/2} \\ &\leq d_9 \frac{1}{\theta} \bar{\varepsilon}^{1/4} (E_1(w) + \sigma^{1/2}) + d_{14} \frac{1}{\theta} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} E_1(w) \\ &\quad + d_9 \theta^2 E_1(w) + d_{14} \theta^{1/2} \sigma^{1/2} \\ &\leq d_{15} \left( \frac{1}{\theta} \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{16}} + \bar{\theta}^{1/2} \right) (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \end{aligned}$$

où  $d_{15} = d_{15}(\Omega, \varphi)$ .

Comme  $\bar{\theta} = \bar{\varepsilon}^{\mu}$  l'inégalité précédente avec  $\theta = \bar{\theta}$  donne :

$$\frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) \leq d_{15} \left( \bar{\varepsilon}^{\left(\frac{1}{16}-\mu\right)} + \bar{\varepsilon}^{\frac{\mu}{2}} \right) (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

Nous voulons montrer que

$$\frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\theta}^{1/2} \sigma^{1/2} \leq \frac{1}{2} (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

Or  $\sigma^{1/2} \leq \bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\theta} = \bar{\varepsilon}^{\mu}$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\theta} \sigma^{1/2} &= \frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\varepsilon}^{\mu} \sigma^{1/2} \\ &\leq d_{15} \left( \bar{\varepsilon}^{\left(\frac{1}{16}-\mu\right)} + \bar{\varepsilon}^{\frac{\mu}{2}} + \bar{\varepsilon}^{\mu} \right) (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \end{aligned}$$

Prenons  $\mu$  tel que  $\frac{1}{16} - \mu > 0$ . C'est-à-dire  $\mu < \frac{1}{16}$ . Et nous prenons  $\bar{\varepsilon}$  assez petit pour que  $d_{15} \left( \bar{\varepsilon}^{\left(\frac{1}{16}-\mu\right)} + \bar{\varepsilon}^{\frac{\mu}{2}} + \bar{\varepsilon}^{\mu} \right) \leq \frac{1}{2}$ . Nous obtenons ainsi la conclusion de la proposition. Remarquons que  $\mu$  est une constante totalement indépendante de  $\Gamma$  par exemple  $\mu = \frac{1}{17}$  et que  $\bar{\varepsilon}$  ne dépend que de  $\Omega$  car sa dépendance en  $\varphi$  est éliminée en fixant  $\varphi$ . ■

## 2.6 Démonstration du théorème d' $\varepsilon$ -régularité

**Démonstration :**

Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante  $\Gamma a \in \Omega$  et  $0 < \sigma < 1$  et soit  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ .

Soit  $\bar{\varepsilon} > 0$  donné par la proposition 2.5.

Supposons  $\sigma^{1/2} \leq \bar{\varepsilon}$  et  $\frac{1}{\sigma} E_{a,\sigma}(u \chi_{B_{\sigma(a)}}) = E_1(w) \leq \bar{\varepsilon}$ .

D'après la proposition 2.5  $\Gamma \exists \bar{\theta} \in ]0, 1]$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\theta}^{1/2} \sigma^{1/2} &\leq \frac{1}{2} (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \\ &\leq \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

D'autre part  $\Gamma$  en posant

$$w_{\bar{\theta}}(y) = w(\bar{\theta} y) = u(a + \sigma \bar{\theta} y)$$

nous avons

$$\frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w) = E_1(w_{\bar{\theta}}) \leq \bar{\varepsilon}$$

Nous pouvons à nouveau appliquer la proposition 2.5  $\Gamma$  avec  $w_{\bar{\theta}}$  au lieu de  $w$  et  $\bar{\theta} \sigma$  au lieu de  $\sigma$ . Et  $\Gamma$  pour le même  $\bar{\theta} \in ]0, 1]$   $\Gamma$

$$\frac{1}{\bar{\theta}} E_{\bar{\theta}}(w_{\bar{\theta}}) + \bar{\theta} \sigma^{1/2} \leq \frac{1}{2} (E_1(w_{\bar{\theta}}) + \bar{\theta}^{1/2} \sigma^{1/2})$$

C'est-à-dire

$$\bar{\theta}^{-2} E_{\bar{\theta}^2}(w) + \bar{\theta} \sigma^{1/2} \leq \frac{1}{2} (\bar{\theta}^{-1} E_{\bar{\theta}}(w) + \bar{\theta}^{1/2} \sigma^{1/2})$$

En appliquant la proposition 2.5 à droite nous obtenons

$$\bar{\theta}^{-2} E_{\bar{\theta}^2}(w) + \bar{\theta} \sigma^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

Par récurrence  $\Gamma$

$$\bar{\theta}^{-i} E_{\bar{\theta}^i}(w) + \bar{\theta}^{i/2} \sigma^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

- Étant donné  $r \in ]0, 1[$  quelconque  $\Gamma \exists i \in \mathbb{N} \quad / \quad r \in [\bar{\theta}^{i+1}, \bar{\theta}^i]$ .

En posant  $\alpha = \frac{\ln 2}{2 \ln(\bar{\theta}^{-1})}$   $\Gamma$  nous avons :

$$\bar{\theta}^{-i} E_r(w) + r^{1/2} \sigma^{1/2} \leq \bar{\theta}^{i(2\alpha)} (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

car

$$\bar{\theta}^{-i} E_r(w) + r^{1/2} \sigma^{1/2} \leq \bar{\theta}^{-i} E_{\bar{\theta}^i}(w) + \bar{\theta}^{i/2} \sigma^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i (E_1(w) + \sigma^{1/2})$$

et

$$\bar{\theta}^{i(2\alpha)} = \bar{\theta}^{i\left(\frac{\ln 2}{\ln(\bar{\theta}-1)}\right)} = 2^{-i}$$

- Cela implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} E_r(w) &\leq \frac{\bar{\theta}^{i(2\alpha)}}{\bar{\theta}^{-i}} \frac{1}{r} (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \\ &\leq \bar{\theta}^{-1-2\alpha} \left(\frac{\bar{\theta}^{i+1}}{r}\right)^{2\alpha+1} r^{2\alpha} (E_1(w) + \sigma^{1/2}) \\ &\leq c r^{2\alpha} \end{aligned}$$

où  $c$  et  $\alpha$  ne dépendent que de  $\Omega$ .

Pour  $x \in B_{1/2}$  et  $r \in ]0, \frac{1}{4}]$  notons  $w^x(t) = w(x+t) = u(a + \sigma x + \sigma t)$ .

$$\frac{1}{r} E_{x,r}(w) = \frac{1}{r} E_r(w^x)$$

Nous pouvons reprendre le même raisonnement avec  $a + \sigma x$  au lieu de  $a$  et  $w^x$  au lieu de  $w$ .

Nous démontrons ainsi que

$$\forall x \in B_{1/2} \quad \forall r \in ]0, \frac{1}{4}] \quad \frac{1}{r} E_{x,r}(w) \leq c r^{2\alpha}$$

Nous appliquons alors le lemme de Morrey [LU68 lemme 4.1, p.53] pour conclure que  $w$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$  sur la boule  $B_{1/2}$ .

Donc  $u$  est höldérienne d'exposant  $\alpha$  sur la boule  $B_{\sigma/2}(a)$ . ■

## 2.7 Corollaires

**Lemme 2.7** Soit  $u$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante,  $a \in \Omega$ ,  $0 < \sigma < 1$  et  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ .

Alors, il existe une suite  $\lambda_i \in ]0, 1]$  telle que  $\lambda_i \rightarrow 0$  et que la suite des fonctions  $w_{\lambda_i}$ , définies par  $w_{\lambda_i}(t) = w(\lambda_i t)$ , converge faiblement dans  $H^1(B_1, S^2)$  vers une fonction  $w_0 \in H^1(B_1, S^2)$ , harmonique, vérifiant  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  p.p. dans  $B_1$ .

### Démonstration :

• Soit  $u$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante  $a \in \Omega$   $0 < \sigma < 1$  et  $w \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w(y) = u(a + \sigma y)$ . Soit  $w_\lambda \in H^1(B_1, S^2)$  définie par  $w_\lambda(t) = w(\lambda t) = u(a + \sigma \lambda t)$ .

Du fait que  $E_1(w_\lambda) = \frac{1}{\lambda} E_\lambda(w)$  et grâce à la proposition 2.4 nous avons

$$E_1(w_\lambda) \leq \frac{1}{\rho} E_\rho(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2} \quad \text{pour } 0 < \lambda \leq \rho \leq \frac{1}{2}$$

donc  $E_1(w_\lambda)$  est borné quand  $\lambda$  devient petit.

• Comme  $H^1(B_1, \mathbb{R}^3)$  est un espace de Banach réflexif il existe une sous-suite qui converge faiblement dans  $H^1(B_1, \mathbb{R}^3)$  et comme  $H^1(B_1, S^2)$  est faiblement fermé dans  $H^1(B_1, \mathbb{R}^3)$  la limite faible  $w_0 \in H^1(B_1, S^2)$ .

En résumé

$$w_{\lambda_i} \xrightarrow{\lambda_i \rightarrow 0} w_0 \in H^1(B_1, S^2)$$

Pour simplifier notons  $w_\lambda$  pour  $w_{\lambda_i}$ .

• Or  $w_\lambda(t) = u(a + \sigma \lambda t)$  donc d'après le lemme 2.1  $w_\lambda$  est  $\tilde{E}^{a, \sigma \lambda}$ -minimisante. D'après la proposition 2.2  $w_\lambda$  satisfait l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \Delta w_\lambda = & [ - |\nabla w_\lambda|^2 - K_1 (\sigma \lambda)^2 (w_{\lambda,1}^2 + w_{\lambda,2}^2) + K_2 (\sigma \lambda)^2 (w_\lambda, \tilde{H}_z) \\ & + K_2 (\sigma \lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_{\tilde{u}}) + K_2 (\sigma \lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda}) ] w_\lambda \\ & + K_1 (\sigma \lambda)^2 p(w_\lambda) - K_2 (\sigma \lambda)^2 \tilde{H}_z - K_2 (\sigma \lambda)^2 \nabla \phi_{\tilde{u}} - K_2 (\sigma \lambda)^2 \nabla \phi_{w_\lambda} \end{aligned}$$

où  $\tilde{H}_z(t) = H_z(a + \sigma \lambda t)$

$\tilde{u}(t) = u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_{\sigma(a)}})(a + \sigma \lambda t)$  (Le support de  $\tilde{u}$  est inclus dans  $\frac{\Omega-a}{\sigma \lambda}$ )

$\Delta \phi_{\tilde{u}} = -4\pi \operatorname{div}(\tilde{u})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

et  $\Delta \phi_{w_\lambda} = -4\pi \operatorname{div}(w_\lambda \mathcal{X}_{B_1})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

- Notons  $H^1 = H^1(B_1, \mathbb{R}^3) \Gamma L^2 = L^2(\mathbb{R}^3)$ .
- Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{H^1} w_0 \\ |w_\lambda| = 1 \text{ presque partout.} \\ \Delta w_\lambda = -|\nabla w_\lambda|^2 w_\lambda + \varepsilon_\lambda \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \text{ avec } \|\varepsilon_\lambda\|_{L^2} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} 0 \end{array} \right.$$

En effet

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda = & [-K_1 (\sigma\lambda)^2 (w_{\lambda,1}^2 + w_{\lambda,2}^2) + K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \widetilde{H}_z) \\ & + K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_u^\sim) + K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda}) ] w_\lambda \\ & + K_1 (\sigma\lambda)^2 p(w_\lambda) - K_2 (\sigma\lambda)^2 \widetilde{H}_z - K_2 (\sigma\lambda)^2 \nabla \phi_u^\sim - K_2 (\sigma\lambda)^2 \nabla \phi_{w_\lambda} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \circ \quad |K_1 (\sigma\lambda)^2 (w_{\lambda,1}^2 + w_{\lambda,2}^2) w_\lambda| & \leq K_1 (\sigma\lambda)^2 (w_{\lambda,1}^2 + w_{\lambda,2}^2) |w_\lambda| \\ & \leq K_1 (\sigma\lambda)^2 \end{aligned}$$

donc  $K_1 (\sigma\lambda)^2 (w_{\lambda,1}^2 + w_{\lambda,2}^2) w_\lambda \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \circ \quad |K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \widetilde{H}_z) w_\lambda| & \leq K_2 (\sigma\lambda)^2 |w_\lambda| |\widetilde{H}_z| |w_\lambda| \\ & \leq K_2 (\sigma\lambda)^2 |\widetilde{H}_z| \end{aligned}$$

donc  $K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \widetilde{H}_z) w_\lambda \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \circ \quad |K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_u^\sim) w_\lambda| & \leq K_2 (\sigma\lambda)^2 |w_\lambda| |\nabla \phi_u^\sim| |w_\lambda| \\ & \leq K_2 (\sigma\lambda)^2 |\nabla \phi_u^\sim| \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u^\sim|^2 dx \leq 4\pi \text{vol} \left( \frac{\Omega - a}{\sigma\lambda} \right) \leq \frac{c}{\sigma^3 \lambda^3}$$

d'après le théorème 2.2.

Et ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_u^\sim) w_\lambda|^2 dx \leq d_1 \sigma \lambda$$

D'où  $K_2 (\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_u^\sim) w_\lambda \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\circ \quad |K_1 (\sigma\lambda)^2 p(w_\lambda)| \leq K_1 (\sigma\lambda)^2 |w_\lambda|$$

donc  $K_1 (\sigma\lambda)^2 p(w_\lambda) \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\circ \quad |K_2 (\sigma\lambda)^2 \widetilde{H}_z| = K_2 (\sigma\lambda)^2 |\widetilde{H}_z|$$

donc  $K_2 (\sigma\lambda)^2 \widetilde{H}_z \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

$$\circ \quad |K_2 (\sigma\lambda)^2 \nabla \phi_u^\sim| = K_2 (\sigma\lambda)^2 |\nabla \phi_u^\sim|$$

donc  $K_2 (\sigma\lambda)^2 \nabla \phi_u^\sim \in L^2$  et sa norme tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

- o Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_{w_\lambda}|^2 dx = 4\pi \text{vol } B_1 \leq 4\pi$$

d'après le théorème 2.2.

D'où

$$\|K_2(\sigma\lambda)^2 \nabla \phi_{w_\lambda}\|_{L^2} \leq d_2 \sigma^2 \lambda^2$$

- o Enfin  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |(w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda}) w_\lambda|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |(w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda})|^2 |w_\lambda|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |(w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda})|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |w_\lambda|^2 |\nabla \phi_{w_\lambda}|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_{w_\lambda}|^2 dx \\ &\leq d_3 \end{aligned}$$

Donc

$$\|K_2(\sigma\lambda)^2 (w_\lambda, \nabla \phi_{w_\lambda}) w_\lambda\|_{L^2} \leq d_4 \sigma^2 \lambda^2$$

Ce qui termine la démonstration de

$$\|\varepsilon_\lambda\|_{L^2} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

- Nous voulons montrer

$$\begin{cases} |w_0| = 1 \text{ presque partout.} \\ \Delta w_0 = -|\nabla w_0|^2 w_0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

- $w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{H^1} w_0 \iff \forall \varphi \in H^1 \quad \int_{B_1} (\nabla w_\lambda - \nabla w_0) \cdot \nabla \phi + \int_{B_1} (w_\lambda - w_0) \cdot \phi \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} 0$

- $w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{H^1} w_0$  implique que  $\|w_\lambda\|_{H^1}$  est bornée (Brézis p. 35).

Or l'injection  $H^1 \hookrightarrow L^2$  est compacte  $\Gamma$  donc il existe une suite extraite de  $w_\lambda$  que nous notons toujours  $w_\lambda$  et qui vérifie

$$\begin{cases} w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{L^2} w_0 \\ w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} w_0 \text{ presque partout} \end{cases}$$

(Brézis p. 169 et p. 58)

Comme  $|w_\lambda| = 1$  presque partout  $\Gamma$   $|w_0| = 1$  presque partout.

Nous avons aussi

$$\forall \varphi \in H^1 \quad \int_{B_1} (\nabla w_\lambda - \nabla w_0) \cdot \nabla \varphi \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

- $H^1 \longrightarrow H^{-1}$  est linéaire et continu
- $u \longmapsto \Delta u$

donc  $\Delta w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{H^{-1}} \Delta w_0$

- Soit  $v \in H_0^1$  nous avons  $\nabla(v \wedge w_\lambda) = \nabla v \wedge w_\lambda + v \wedge \nabla w_\lambda$  et  $v \wedge w_\lambda \in H_0^1$ .

Nous en déduisons

$$\int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot \nabla(v \wedge w_\lambda) = \int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot \nabla v \wedge w_\lambda$$

et

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot \nabla(v \wedge w_\lambda) &= -\langle \Delta w_\lambda, v \wedge w_\lambda \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= -\langle -|\nabla w_\lambda| w_\lambda + \varepsilon_\lambda, v \wedge w_\lambda \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= \int_{B_1} -\varepsilon_\lambda \cdot (v \wedge w_\lambda) \end{aligned}$$

Comme  $w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} w_0$  et  $|w_\lambda| = 1$  presque partout, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\begin{cases} v \wedge w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{L^2} v \wedge w_0 \\ \nabla v \wedge w_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{L^2} \nabla v \wedge w_0 \end{cases}$$

Or  $\|\nabla w_\lambda\|_{L^2}$  est bornée.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot \nabla v \wedge w_\lambda - \int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla v \wedge w_0 \right| &\leq \left| \int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot (\nabla v \wedge w_\lambda - \nabla v \wedge w_0) \right| \\ &\quad + \left| \int_{B_1} (\nabla w_\lambda - \nabla w_0) \cdot \nabla v \wedge w_0 \right| \\ &\leq \|\nabla w_\lambda\|_{L^2} \|\nabla v \wedge w_\lambda - \nabla v \wedge w_0\|_{L^2} \\ &\quad + \left| \int_{B_1} (\nabla w_\lambda - \nabla w_0) \cdot \nabla(v \wedge w_0) \right| \end{aligned}$$

donc

$$\int_{B_1} \nabla w_\lambda \cdot \nabla v \wedge w_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla v \wedge w_0$$

Nous avons aussi

$$\int_{B_1} \varepsilon_\lambda \cdot v \wedge w_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Ainsi nous avons démontré

$$\int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla v \wedge w_0 = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

c'est-à-dire

$$\int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla(v \wedge w_0) = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

• Soit  $f \in H_0^1$ . Si nous posons  $v = w_0 \wedge f$  nous avons  $v \in H_0^1$  et  $f = (f \cdot w_0) w_0 + v \wedge w_0$ .

D'où

$$\int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla f = \int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla((f \cdot w_0) w_0)$$

Mais  $\nabla((f \cdot w_0) w_0) = \nabla(f \cdot w_0) \cdot w_0 + (f \cdot w_0) \nabla w_0$  et  $\nabla w_0 \cdot w_0 = 0$  puisque  $w_0 \in S^2\Gamma$  donc

$$\int_{B_1} \nabla w_0 \cdot \nabla f = \int_{B_1} (f \cdot w_0) |\nabla w_0|^2 \quad \forall f \in H_0^1$$

Ainsi  $\Delta w_0 = -|\nabla w_0|^2 w_0$  dans  $H^{-1}$ .

$w_0$  est harmonique.

• Il reste à démontrer que  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  p.p. dans  $B_1$ .

L'inégalité 2.11 de la démonstration de la proposition 2.4 implique pour  $\eta \leq \rho$  :

$$\frac{1}{\eta} E_\eta(w) + c_4 \sigma^{1/2} \eta^{1/2} \leq \frac{1}{\rho} E_\rho(w) + c_4 \sigma^{1/2} \rho^{1/2}$$

Donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} E_\eta(w) + c_4 \sigma^{1/2} \eta^{1/2} \text{ existe.}$$

et par suite

$$(2.27) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} E_\eta(w) = \lim_{\eta \rightarrow 0} E_1(w_\eta) = L_0$$

• Si nous intégrons à nouveau l'inégalité 2.10 en considérant ce terme en  $\frac{\partial w}{\partial r}$  nous obtenons :

$$\int_{\eta \leq \lambda} \frac{1}{\eta} \left( \int_{|x|=\eta} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 d\xi \right) d\eta \leq \int_{\eta \leq \lambda} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\eta} E_\eta(w) \right) d\eta + \frac{c_4}{2} \sigma^{1/2} \lambda^{1/2}$$

$$\int_{B_\lambda} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 dx \leq \left[ \frac{1}{\lambda} E_\lambda(w) - L_0 \right] + \frac{c_4}{2} \sigma^{1/2} \lambda^{1/2}$$

$$\text{Mais } \int_{B_1} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial w_\lambda}{\partial r} \right|^2 dx = \int_{B_\lambda} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 dx$$

d'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{B_1} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial w_\lambda}{\partial r} \right|^2 dx = 0$$

Ce qui implique  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  p.p. dans  $B_1 \Gamma$  car la semi-continuité inférieure donne :

$$\int_{B_1} \frac{1}{r} \left| \frac{\partial w_0}{\partial r} \right|^2 dx = 0$$

■

**Corollaire 2.1** *Soit  $u$   $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante, soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de ses points singuliers, nous avons  $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = 0$ .*

**Démonstration :**

- Soit  $u$   $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante  $\Gamma$  soit  $\bar{\varepsilon} > 0$  la constante du théorème 2.1.
- Soit  $x \in \mathcal{S} \Gamma$  soit  $0 < \lambda < 1$  tel que  $\lambda^{1/2} \leq \bar{\varepsilon}$ .

Notons  $w_{x,\lambda}(y) = u(x + \lambda y)$ .

$$(2.28) \quad \bar{\varepsilon} < E_1(w_{x,\lambda}) = \frac{1}{\lambda} E_{x,\lambda}(u \mathcal{X}_{B_{\lambda(x)}})$$

car sinon  $\Gamma$  d'après le théorème 2.1  $u$  serait continue en  $x$ .

Soit  $\delta \in ]0, \bar{\varepsilon}^2[ \Gamma$  soit  $\{B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_l)\}$  une famille de  $l = l(\delta)$  boules disjointes de rayon  $\delta$  et de centre  $x_i \in \mathcal{S}$  telle que  $\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^l B_{2\delta}(x_i)$ .

L'inégalité 2.28 permet de montrer que

$$l \bar{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta} \int_{\bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} |\nabla u|^2 dx$$

ce qui implique

$$l \delta \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}} E_\Omega(u)$$

Rappelons que la mesure de Hausdorff de dimension  $k$   $\mathcal{H}^k$  est définie par :

$$\phi_\delta(A) = \inf_G \sum_{S \subset G} \xi(S) = \inf_G \sum_{S \in G} \alpha(k) 2^{-k} (\text{diam } S)^k$$

l'inf étant pris pour tous les  $G$  dénombrables tels que  $G \subset \{S \subset \mathbb{R}^n / \text{diam } S \leq \delta\}$  et  $A \subset \bigcup_{S \in G} S$ .  $\alpha(k)$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^k$ .

$$\text{Et } \mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(A).$$

Ici pour  $k = 1$  nous avons  $\phi_\delta(\mathcal{S}) \leq 4l\delta$ .

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \leq 4\bar{\varepsilon}^{-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} |\nabla u|^2 dx$$

Or

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^3\left(\bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)\right) &\leq \alpha(3) l \delta^3 \\ &\leq c \delta^2 E_\Omega(u) \end{aligned}$$

et la 3-mesure de Hausdorff est équivalente à la mesure de Lebesgue. Par le théorème de convergence dominée nous avons :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\bigcup_{i=1}^l B_\delta(x_i)} |\nabla u|^2 dx = 0$$

Donc

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = 0$$

■

# Chapitre 3

## Résultats d'extension et de compacité

### 3.1 Lemmes de prolongement

- Soit  $V \subset \mathbb{R}^2$  et  $O \subset V$  ouvert dans  $V$ .

Pour  $u \in H^1(V, \mathbb{R}^3)$  et  $u^* \in \mathbb{R}^3$  fixés notons  $E_O(u) = \int_O |\nabla u|^2 dx$  et  $W_O(u) = \int_O |u - u^*|^2 dx$  où  $dx$  est l'élément de surface dans  $\mathbb{R}^2$ .

- Soit  $V \subset \mathbb{R}^3$  et  $O \subset V$  ouvert dans  $V$ .

Pour  $u \in H^1(V, \mathbb{R}^3)$  et  $u^* \in \mathbb{R}^3$  fixés notons  $E_O(u) = \int_O |\nabla u|^2 dx$  et  $W_O(u) = \int_O |u - u^*|^2 dx$  où  $dx$  est l'élément de volume dans  $\mathbb{R}^3$ .

Notons encore  $E_{\partial O}(u) = \int_{\partial O} |\nabla u|^2 d\sigma$  et  $W_{\partial O}(u) = \int_{\partial O} |u - u^*|^2 d\sigma$  où  $d\sigma$  est l'élément de surface sur le bord de  $O$ .

Quand  $O$  est l'ensemble de définition de la fonction  $u$  notons simplement

$$E(u) = E_O(u) \quad W(u) = W_O(u)$$

- Pour  $n \geq 2$  et  $\sigma \in ]0, 1[$   $C_\sigma^n = B_\sigma^{n-1} \times [-\sigma, \sigma]$ .

**Lemme 3.1** Soit  $u \in H^1(\partial C_\sigma^n, S^2)$  tel que

$$\text{pour } x \in B_\sigma^{n-1} \quad \begin{cases} u(x, -\sigma) = u_1(x) \\ u(x, \sigma) = u_2(x) \end{cases} \quad \text{avec } u_1, u_2 \in H^1(B_\sigma^{n-1}, S^2)$$

et pour  $(x, t) \in S_\sigma^{n-2} \times [-\sigma, \sigma]$   $u(x, t) = {}^\circ u(x)$  avec  ${}^\circ u \in H^1(S_\sigma^{n-2}, S^2)$ .

( En particulier, nous avons  $u_1 = u_2 = {}^\circ u$  sur  $\partial B_\sigma^{n-1} = S_\sigma^{n-2}$  ) Alors, il existe une extension de  $u$ ,  $\bar{u} \in H^1(C_\sigma^n, S^2)$ , telle que  $\bar{u} = u$  sur  $\partial C_\sigma^n$  et :

$$E(\bar{u}) \leq c_{10} \sigma [E(u_1) + E(u_2) + \sigma E({}^\circ u)]$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{10} \sigma [W(u_1) + W(u_2) + \sigma W({}^\circ u)]$$

où  $c_{10}$  est une constante ne dépendant que de  $n$ .

**Démonstration :**

- Nous montrons d'abord que nous pouvons nous ramener à  $\sigma = 1$  :

Pour  $u \in H^1(\partial C_\sigma^n, S^2)$  et  $w \in H^1(\partial C_1^n, S^2)$  tels que  $w(y, z) = u(\sigma y, \sigma z)$  nous notons  $\bar{w} \in H^1(C_1^n, S^2)$  l'extension de  $w$  obtenue pour  $\sigma = 1$  et  $\bar{u} \in H^1(C_\sigma^n, S^2)$  définie par  $\bar{u}(\sigma y, \sigma z) = \bar{w}(y, z)$ .

$w_1$  et  ${}^\circ w$  étant définis de façon analogue nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &= \sigma^{n-2} E(\bar{w}) \\ E(u_i) &= \sigma^{n-3} E(w_i) \\ E({}^\circ u) &= \sigma^{n-4} E({}^\circ w) \end{aligned}$$

Or  $E(\bar{w}) \leq c_{10} [E(w_1) + E(w_2) + E({}^\circ w)]$  entraîne :

$$E(\bar{u}) \leq c_{10} \sigma [E(u_1) + E(u_2) + \sigma E({}^\circ u)]$$

De même si  $W(\bar{w}) \leq c_{10} [W(w_1) + W(w_2) + W({}^\circ w)]$  nous avons  $W(\bar{u}) \leq c_{10} \sigma [W(u_1) + W(u_2) + \sigma W({}^\circ u)]$ .

Nous supposons donc à partir de maintenant que  $\sigma = 1$ .

- Considérons un homéomorphisme bi-lipschitzien  $f : \partial B_1^n \rightarrow \partial C_1^n$  qui s'étend à un homéomorphisme bi-lipschitzien  $\bar{f} : B_1^n \rightarrow C_1^n$  où  $\bar{f}(x) = |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ .

- Soit  $\Pi : B_1^n \setminus \{0\} \rightarrow \partial B_1^n$  la projection radiale  $x \mapsto \frac{x}{|x|}$

$$\hat{\Pi} : C_1^n \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \partial C_1^n$$

Avec  $\hat{\Pi} = f \circ \Pi \circ \bar{f}^{-1}$

- Soit  $\bar{u} = u \circ \hat{\Pi} : C_1^n \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^2$ .

Nous avons  $\bar{u} \circ \bar{f} = u \circ f \circ \Pi$ .

- Nous démontrons de la même façon que dans la proposition 2.4 que

$$E(\bar{u} \circ \bar{f}) \leq (n-2)^{-1} E(u \circ f).$$

En effet pour  $x \in B_1^n$   $\bar{u} \circ \bar{f}(x) = u \circ f \circ \Pi(x) = u\left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$ .

$$\begin{aligned}
E(\bar{u} \circ \bar{f}) &= \int_{B_1^n} \left| \nabla u\left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) \right|^2 dx \\
&= \int_{r \leq 1} \left( \int_{|y|=1} \frac{r^{n-1}}{r^2} \left| \nabla_{\xi} u(f(y)) \right|^2 d\xi(y) \right) dr \\
&= (n-2)^{-1} \int_{|y|=1} \left| \nabla_{\xi} u(f(y)) \right|^2 d\xi(y) \\
&= (n-2)^{-1} \left( \int_{\partial B_1^n} \left| \nabla u(f(y)) \right|^2 d\xi(y) - \int_{\partial B_1^n} \left| \frac{\partial u(f(y))}{\partial r} \right|^2 d\xi(y) \right) \\
&\leq (n-2)^{-1} E(u \circ f)
\end{aligned}$$

- De plus

$$\begin{aligned}
E(\bar{u}) &= \int_{C_1^n} \left| \nabla \bar{u} \right|^2 dx \\
&= \int_{B_1^n} \left| J(\bar{f}^{-1}) \right| \left| \nabla(\bar{u} \circ \bar{f}) \right|^2 dy \\
&\quad \text{Changement de variable } y = \bar{f}^{-1}(x) \\
&\leq K \int_{B_1^n} \left| \nabla(\bar{u} \circ \bar{f}) \right|^2 dy \\
&\quad \text{inégalité de Lipschitz} \\
&\leq K E(\bar{u} \circ \bar{f})
\end{aligned}$$

- Nous obtenons  $\Gamma$  de la même façon  $\Gamma E(u \circ f) \leq K E(u)$ .
- Alors :

$$E(\bar{u}) \leq K E(\bar{u} \circ \bar{f}) \leq (n-2)^{-1} K E(u \circ f) \leq d E(u)$$

- D'autre part

$$\begin{aligned}
E(u) &= \int_{\partial C_1^n} \left| \nabla u \right|^2 dx \\
&= \int_{B_1^{n-1}} \left| \nabla u_1 \right|^2 dx + \int_{B_1^{n-1}} \left| \nabla u_2 \right|^2 dx + \int_{S_1^{n-2} \times [-1,1]} \left| \nabla^{\circ} u(x) \right|^2 dx dt \\
&= E(u_1) + E(u_2) + 2 E(u^{\circ})
\end{aligned}$$

- Pour ce qui concerne  $W\Gamma$  nous faisons le même raisonnement  $\Gamma$  la première inégalité étant remplacée par :

$$W(\bar{u} \circ \bar{f}) = \int_{B_1^n} \left| u\left(f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) - u^* \right|^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{r \leq 1} \left( \int_{|y|=1} r^{n-1} |u(f(y)) - u^*|^2 d\xi(y) \right) dr \\
&= n^{-1} \int_{\partial B_1^n} |u(f(y)) - u^*|^2 d\xi(y) \\
&= n^{-1} W(u \circ f)
\end{aligned}$$

■

**Lemme 3.2**  $\exists \delta_1$  tel que si  $u \in H^1(S_\sigma^1, S^2)$  et si  $E(u)W(u) \leq \delta_1^2$ , alors, il existe  $\bar{u} \in H^1(B_\sigma^2, S^2)$ , avec  $\bar{u} = u$  sur  $\partial B_\sigma^2$  et :

$$E(\bar{u}) \leq c_{11} (E(u)W(u))^{1/2}$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{11} \sigma W(u)$$

où  $c_{11}$  est une constante indépendante.

**Démonstration :**

- Nous pouvons à nouveau supposer  $\sigma = 1$ .
- Soit  $u \in H^1(S^1, S^2)$  soit  $\delta^2 = E(u)W(u)$ .
- Si  $S^1$  est paramétrée par  $\theta \in [0, 2\pi]$  supposons  $\Gamma$  dans un premier temps que  $u^* = u_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) d\theta = u(\alpha)$  avec  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned}
|u(\theta) - u^*|^2 &= \int_\alpha^\theta 2(u(s) - u^*, u'(s)) ds + |u(\alpha) - u^*|^2 \\
&\leq \int_0^{2\pi} 2 |u(s) - u^*| |u'(s)| ds \\
&\leq 2(E(u)W(u))^{1/2} \\
&\leq 2\delta
\end{aligned}$$

Donc si  $\delta_1$  est petit  $\max |u - u^*|$  est petit.

- Soit  $\bar{u}$  la fonction harmonique minimisant  $E$  sur  $B_1^2$  pour des valeurs au bord données par  $u$  [Mor66].

Nous avons  $\|\bar{u} - u^*\|_\infty \leq \sqrt{2} \delta^{1/2}$  d'après le principe du maximum.

- L'équation d'Euler-Lagrange pour  $\bar{u}$  est  $\Delta \bar{u} = -|\nabla \bar{u}|^2 \bar{u}$ .

Cela implique :

$$(-|\nabla \bar{u}|^2 \bar{u}, \bar{u} - u^*) = (\Delta \bar{u}, \bar{u} - u^*) = \frac{1}{2} \Delta |\bar{u} - u^*|^2 - |\nabla u|^2$$

$$\frac{1}{2} \Delta |\bar{u} - u^*|^2 - |\nabla u|^2 \geq -\|\bar{u} - u^*\|_\infty |\nabla u|^2$$

Si  $\delta_1$  est petit nous avons  $\Delta |\bar{u} - u^*|^2 \geq 0$  donc par le théorème de la moyenne pour les fonctions surharmoniques  $W(\bar{u}) \leq \frac{1}{2} W(u)$  [GT83].

- Pour obtenir la majoration de  $E(\bar{u})$  nous comparons  $\bar{u}$  à  $\Pi \circ v$  où  $v : B_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la solution du problème de Dirichlet linéaire avec valeurs au bord  $u$  et  $\Pi$  est la projection d'un voisinage normal de  $S^2$  dans  $S^2$ .

- De plus  $E(v) \leq \delta^{1/2}$ .
- Comme  $\bar{u}$  est minimisante nous avons

$$E(\bar{u}) \leq E(\Pi \circ v) \leq d_1 E(v) \leq d_1 \delta^{1/2}$$

- Nous avons donc montré que :

$$\int_{B_1^2} |\nabla \bar{u}|^2 dx \leq d_2 \left( \int_{\partial B_1^2} |\nabla u|^2 dx \int_{\partial B_1^2} |u - u_m|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\int_{B_1^2} |\bar{u} - u_m|^2 dx \leq d_2 \int_{\partial B_1^2} |u - u_m|^2 dx$$

- Nous avons

$$\int_{\partial B_1^2} |u - u_m|^2 dx \leq \int_{\partial B_1^2} |u - u^*|^2 dx$$

Supposons que  $u^* \neq u_m$  et que  $E(u) W(u) \leq \delta_1^2$  alors nous avons encore  $E(u) \int_{\partial B_1^2} |u - u_m|^2 dx \leq \delta_1^2$ . Et donc les inégalités précédentes restent valables.

Nous avons immédiatement

$$\int_{\partial B_1^2} |\nabla \bar{u}|^2 dx \leq d_2 \left( \int_{\partial B_1^2} |\nabla u|^2 dx \int_{\partial B_1^2} |u - u^*|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_1^2} |\bar{u} - u^*|^2 dx \right)^{1/2} &\leq \left( \int_{B_1^2} |\bar{u} - u_m|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \int_{B_1^2} |u_m - u^*|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq d_3 \left[ \left( \int_{\partial B_1^2} |u - u_m|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{\partial B_1^2} |u_m - u^*|^2 dx \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1^2} |u_m - u^*|^2 dx &= \int_{\partial B_1^2} (u_m - u + u - u^*, u_m - u + u - u^*) dx \\
&= \int_{\partial B_1^2} (u_m - u, u_m - u^*) + (u - u^*, u_m - u) dx \\
&\quad + \int_{\partial B_1^2} |u - u^*|^2 dx \\
&= \int_{\partial B_1^2} (u - u_m, u_m - u^*) dx \\
&\quad + \int_{\partial B_1^2} (u_m - u^*, u_m - u) dx \\
&\quad + \int_{\partial B_1^2} |u - u^*|^2 dx \\
&\leq \int_{\partial B_1^2} |u - u^*|^2 dx
\end{aligned}$$

Donc

$$E(\bar{u}) \leq c_{11} (E(u) W(u))^{1/2}$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{11} \sigma W(u)$$

■

**Lemme 3.3** Pour  $n = 2$  ou  $n = 3$   $\exists \delta = \delta(n)$  et  $\exists q = q(n)$  tels que, pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$  si  $u \in H^1(\partial B_\sigma^n, S^2)$  satisfait  $\sigma^{4-2n} E(u) W(u) \leq \delta^2 \varepsilon^q$ .

Alors, il existe  $\bar{u} \in H^1(B_\sigma^n, S^2)$ , avec  $\bar{u} = u$  sur  $\partial B_\sigma^n$  et :

$$E(\bar{u}) \leq c_{12} (\varepsilon \sigma E(u) + \varepsilon^{-q} \sigma^{-1} W(u))$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{12} \varepsilon^{-q} \sigma W(u)$$

**Lemme 3.4** Pour  $\sigma \in ]0, \frac{1}{2}[$ , nous notons  $A_\sigma = S^2 \times [-\sigma, \sigma]$ .

Supposons que le lemme 3.3 soit vrai pour  $n = 2$ .

Soit  $v \in H^1(S^2, S^2)$ , tel que  $E(v) W(v) \leq \sigma^2 (\delta')^2$  où  $\delta'$  dépend des constantes qui apparaissent au lemme 3.3 pour  $n = 2$ .

Alors  $\exists \alpha < 1$ ,  $K$  et  $\bar{v} \in H^1(A_\sigma, S^2)$  tels que

$$\bar{v} = v \text{ sur } S^2 \times \{\sigma\},$$

$$\bar{v} = v' \text{ sur } S^2 \times \{-\sigma\}, \text{ où } v' \in H^1(S^2, S^2), \text{ et :}$$

$$E(\bar{v}) \leq K \sigma E(v) + K \sigma^{-1} W(v)$$

$$W(\bar{v}) \leq K \sigma W(v)$$

$$E(v') \leq \alpha E(v) + K \sigma^{-2} W(v)$$

$$W(v') \leq K W(v)$$

**Démonstration :**

- Nous pouvons à nouveau supposer  $\sigma = 1$ .

**Démonstration de lemme 3.2  $\implies$  lemme 3.3 pour  $n = 2$  :**

- Soit  $\delta^2 = \delta_1^2 \Gamma q = 1 \Gamma$  soit  $\varepsilon \in ]0, 1[ \Gamma$  et soit  $u \in H^1(S^1, S^2) \Gamma u^* \in \mathbb{R}^3$  tels que  $E(u) W(u) \leq \delta^2 \varepsilon$ .

Nous avons  $E(u) W(u) \leq \delta_1^2$ .

Donc  $\exists \bar{u} \in H^1(B_1^2, S^2) \Gamma$  avec  $\bar{u} = u$  sur  $\partial B_1^2$  et :

$$E(\bar{u}) \leq c_{11} (E(u) W(u))^{1/2}$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{11} W(u)$$

D'où

$$E(\bar{u}) \leq \frac{c_{11}}{\sqrt{2}} (E(u) \varepsilon + W(u) \varepsilon^{-1})$$

$$W(\bar{u}) \leq c_{11} \varepsilon^{-1} W(u)$$

car  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . ■

**Démonstration de lemme 3.3 pour  $n = 2 \implies$  lemme 3.4 :**

• Pour  $\sigma \in ]0, \frac{1}{2}[$  notons  $A_\sigma = S^2 \times [-\sigma, \sigma]$ . (attention : il ne s'agit pas du  $\sigma$  du lemme 3.3)

Supposons que le lemme 3.3 soit vrai pour  $n = 2$ .

Soit  $v \in H^1(S^2, S^2)$  tel que  $E(v)W(v) \leq \sigma^2(\delta')^2$  où  $\delta'$  est une constante qui dépend des constantes apparaissant au lemme 3.3 pour  $n = 2$  et que nous déterminerons à la fin de la démonstration.

• Soit  $x_1, \dots, x_l$  un ensemble de points de  $S^2$  satisfaisant  $|x_i - x_j| \geq \sigma$  pour  $i \neq j$  et  $S^2 \subset \bigcup_{i=1}^l B_\sigma^2(x_i)$ .

Pour  $i \leq l$  soit  $\sigma_i \in [\sigma, 2\sigma]$  choisi tel que  $v_i = v|_{\partial B_{\sigma_i}^2(x_i)}$  soit dans  $H^1(\partial B_{\sigma_i}^2(x_i), S^2)$  et

$$\begin{aligned} E(v_i) &\leq 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |\nabla v|^2 d\mu \\ W(v_i) &\leq 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |v - u^*|^2 d\mu \end{aligned}$$

De tels  $\sigma_i$  existent car si nous notons :

$$A = \left\{ \tau \in [\sigma, 2\sigma] / E(v_\tau) > 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}} |\nabla v|^2 d\mu \right\},$$

nous avons

$$\int_A E(v_\tau) d\tau \geq 3 \frac{\text{mes } A}{\sigma} \int_{B_{2\sigma}} |\nabla v|^2 d\mu$$

donc

$$3 \frac{\text{mes } A}{\sigma} \leq 1 \quad \text{mes } A \leq \frac{\sigma}{3}.$$

De même en notant

$$B = \left\{ \tau \in [\sigma, 2\sigma] / W(v_\tau) > 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}} |v - u^*|^2 d\mu \right\},$$

nous avons

$$\text{mes } B \leq \frac{\sigma}{3}.$$

D'où

$$\text{mes}(A \cup B) \leq \frac{2\sigma}{3}.$$

Ce qui entraîne qu'il existe  $\sigma_i \in [\sigma, 2\sigma]$  tel que  $\sigma_i \notin A \cup B$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E(v_i) &\leq 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |\nabla v|^2 d\mu \\ W(v_i) &\leq 3\sigma^{-1} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |v - u^*|^2 d\mu \end{aligned}$$

- Notons  $B_i = B_{\sigma_i}^2(x_i) \subset S^2$ .

Nous avons

$$E(v_i)W(v_i) \leq d_1 \sigma^{-2} E(v)W(v)$$

Donc si  $\sigma^{-2} E(v)W(v) \leq \bar{\delta}^2 \varepsilon^{\bar{q}} \Gamma$  pour  $\varepsilon$  à choisir  $\bar{\delta} = \delta(2) = \delta_1$  et  $\bar{q} = q(2) = 1$  nous pouvons appliquer le lemme 3.3 pour  $n = 2$  sur  $B_i$ .

Nous obtenons alors  $v'_i \in H^1(B_i, S^2)$  tel que

$$\begin{aligned} E(v'_i) &\leq c_{12} (\varepsilon \sigma_i E(v_i) + \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma_i^{-1} W(v_i)) \\ &\leq d_2 (\varepsilon \sigma E(v_i) + \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma^{-1} W(v_i)) \\ W(v'_i) &\leq d_2 \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma W(v_i) \end{aligned}$$

Le choix des  $\sigma_i$  donne :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} E(v'_i) &\leq d_2 (\varepsilon \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |\nabla v|^2 d\mu + \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma^{-2} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |v - u^*|^2 d\mu) \\ W(v'_i) &\leq d_2 \varepsilon^{-\bar{q}} \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |v - u^*|^2 d\mu \end{aligned}$$

- Étant donné que tout point  $x \in S^2$  est contenu dans un nombre fini de boules  $B_{2\sigma}^2(x_i)$  nous avons :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^l \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |\nabla v|^2 d\mu &\leq d_3 E(v) \\ \sum_{i=1}^l \int_{B_{2\sigma}^2(x_i)} |v - u^*|^2 d\mu &\leq d_3 W(v) \end{aligned}$$

- Le choix des  $x_i$  permet de trouver un entier fixé  $l$  et des familles de boules  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_l$  tels que :

$$\bigcup_{j=1}^l \mathcal{B}_j = \{B_i : i = 1, \dots, l\}$$

et chaque  $\mathcal{B}_j$  est une famille de boules disjointes.

Comme  $S^2 \subset \bigcup_{i=1}^l B_i$  nous avons  $\sum_{i=1}^l E(v|_{B_i}) \geq E(v)$ .

Par conséquent pour une certaine famille  $\mathcal{B}_j$  ( $\mathcal{B}_1$  pour fixer les idées) nous avons

$$(3.3) \quad \sum_{B_i \in \mathcal{B}_1} E(v|_{B_i}) \geq I^{-1} E(v)$$

• Soit  $\mathcal{O} = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}_1} B_i$ . Nous définissons l'extension  $\bar{v}$  sur  $(S^2 \setminus \mathcal{O}) \times [-\sigma, \sigma]$  par  $\bar{v}(x, t) = v(x)$ .

• Sur chaque cylindre  $B_i \times [-\sigma, \sigma]$  nous appliquons le lemme 3.1 pour avoir  $\bar{v} \in H^1(B_i \times [-\sigma, \sigma], S^2)$  satisfaisant :

$$\begin{cases} \bar{v}(x, \sigma) = v(x) \\ \bar{v}(x, -\sigma) = v'_i(x) \\ \bar{v}(x, t) = v_i(x) \end{cases} \quad \text{pour } (x, t) \in \partial B_i \times [-\sigma, \sigma].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} E(\bar{v}|_{B_i \times [-\sigma, \sigma]}) &\leq c_{10} \sigma [E(v|_{B_i}) + E(v'_i) + \sigma E(v_i)] \\ W(\bar{v}|_{B_i \times [-\sigma, \sigma]}) &\leq c_{10} \sigma [W(v|_{B_i}) + W(v'_i) + \sigma W(v_i)] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} E(\bar{v}|_{(S^2 \setminus \mathcal{O}) \times [-\sigma, \sigma]}) &= 2 \sigma E(v|_{S^2 \setminus \mathcal{O}}) \\ W(\bar{v}|_{(S^2 \setminus \mathcal{O}) \times [-\sigma, \sigma]}) &= 2 \sigma W(v|_{S^2 \setminus \mathcal{O}}) \end{aligned}$$

• Donc en utilisant 3.1 et 3.2 nous obtenons :

$$\begin{aligned} E(\bar{v}) &\leq \sum_{B_i \in \mathcal{B}_1} E(\bar{v}|_{B_i \times [-\sigma, \sigma]}) + E(\bar{v}|_{(S^2 \setminus \mathcal{O}) \times [-\sigma, \sigma]}) \\ &\leq d_4 \sigma \left[ \sum_{B_i \in \mathcal{B}_1} (E(v|_{B_i}) + E(v'_i) + \sigma E(v_i)) + E(v|_{S^2 \setminus \mathcal{O}}) \right] \\ &\leq d_4 \sigma [E(v) + \varepsilon E(v) + \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma^{-2} W(v) + \sigma E(v) + E(v)] \\ &\leq d_5 \sigma E(v) + d_5 \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma^{-1} W(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\bar{v}) &\leq \sum_{B_i \in \mathcal{B}_1} W(v|_{B_i \times [-\sigma, \sigma]}) + W(\bar{v}|_{(S^2 \setminus \mathcal{O}) \times [-\sigma, \sigma]}) \\ &\leq d_4 \sigma \left[ \sum_{B_i \in \mathcal{B}_1} (W(v|_{B_i}) + W(v'_i) + \sigma W(v_i)) + W(v|_{S^2 \setminus \mathcal{O}}) \right] \\ &\leq d_4 \sigma [W(v) + \varepsilon^{-\bar{q}} W(v) + \sigma W(v) + W(v)] \\ &\leq d_5 \varepsilon^{-\bar{q}} W(v) \end{aligned}$$

car  $\varepsilon < 1$ .

- Soit  $v' = \bar{v}_{|_{S^2 \times \{-\sigma\}}}$  tel que par 3.1Γ3.2 et 3.3 nous ayons :

$$\begin{aligned} E(v') &\leq \sum_{i=1}^l E(v'_i) + E(v_{|_{S^2 \setminus \sigma}}) \\ &\leq (1 - I^{-1}) E(v) + d_6 \varepsilon E(v) + d_6 \varepsilon^{-\bar{q}} \sigma^{-2} W(v) \\ W(v') &\leq d_6 \varepsilon^{-\bar{q}} W(v) \end{aligned}$$

Fixons maintenant  $\varepsilon$  assez petit pour avoir  $\alpha = 1 - I^{-1} + d_6 \varepsilon < 1$ . Soit  $\delta'^2 = d_1 \bar{\delta}^2 \varepsilon^{-\bar{q}} \Gamma K = \max(d_6 \varepsilon^{-\bar{q}}, d_6 \varepsilon^{-\bar{q}})$ .

Par conséquentΓsupposant  $E(v) W(v) \leq \sigma^2 (\delta')^2 \Gamma$  nous arrivons à la conclusion du lemme 3.4Γc'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E(\bar{v}) &\leq K \sigma E(v) + K \sigma^{-1} W(v) \\ W(\bar{v}) &\leq K \sigma W(v) \\ E(v') &\leq \alpha E(v) + K \sigma^{-2} W(v) \\ W(v') &\leq K W(v) \end{aligned}$$

■

**Démonstration de lemme 3.4  $\implies$  lemme 3.3 pour  $n = 3$**

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[ \Gamma$  soit  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $s \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \alpha} < s + 1$  où  $\alpha$  est la constante définie par le lemme 3.4.

- Soit un cylindre de hauteur  $2\sigma = \varepsilon$  noté  $A_\sigma = S^2 \times [-\sigma, \sigma]$ . (attention : ce n'est pas le  $\sigma$  de l'énoncé du lemme 3.3Γque nous supposons une fois de plus égal à 1)

- $A_{i,\sigma} = \{x \in B_1^3 / 1 - 2i\sigma \leq |x| \leq 1 - 2(i-1)\sigma\}$  pour  $i = 1$  à  $s$ .
- Appliquons le lemme 3.4 sur chaque cylindre  $A_{i,\sigma} \Gamma$  en prenant  $v = v_1 = u$  sur le bord extérieur de  $A_{1,\sigma} \Gamma$  et à chaque pas  $v = v_i = v'_{i-1} \Gamma$  où  $v'_{i-1}$  est la valeur sur le bord intérieur obtenue par le lemme 3.4 au pas précédent.

Remarquons queΓtant que  $2s\sigma = \varepsilon s < \frac{1}{2} \Gamma$  chaque anneau  $A_{i,\sigma}$  est uniformément équivalent au cylindre  $A_\sigma$ .

- Pour appliquer le lemme 3.4Γnous devons avoir :

$$E(v_i) W(v_i) \leq \sigma^2 (\delta')^2$$

mais

$$\begin{cases} E(v_i) &\leq \alpha E(v_{i-1}) + K \sigma^{-2} W(v_{i-1}) \\ W(v_i) &\leq K W(v_{i-1}) \end{cases}$$

En supposant  $K \geq 2\Gamma$  nous démontrons par récurrence que pour  $i \geq 2$

$$\begin{cases} E(v_i) \leq \alpha^{i-1} E(u) + 2\sigma^{-2} K^i W(u) \\ W(v_i) \leq K^{i-1} W(u) \end{cases}$$

En effet

$$\begin{cases} E(v_2) \leq \alpha E(u) + K\sigma^{-2} W(u) \\ W(v_2) \leq K W(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(v_{i+1}) \leq \alpha E(v_i) + K\sigma^{-2} W(v_i) \\ W(v_{i+1}) \leq K W(v_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(v_{i+1}) \leq \alpha^i E(u) + 2\alpha\sigma^{-2} K^{i-1} W(u) + K^i \sigma^{-2} W(u) \\ W(v_{i+1}) \leq K^i W(u) \end{cases}$$

Or  $2\alpha \leq K$  car  $\alpha < 1$  et  $K \geq 2$ .

Ainsi  $\Gamma$  nous avons démontré la formule.

• Nous vérifions  $\Gamma$  maintenant  $\Gamma$  que nous pouvons appliquer  $s$  fois le lemme 3.4.

Pour  $i = 1$   $\Gamma$  nous devons avoir  $E(u)W(u) \leq \sigma^2(\delta')^2$ . Or  $E(u)W(u) \leq \sigma^2\delta^2 \varepsilon^q \leq \sigma^2\delta^2$ . Nous aboutissons au résultat en posant  $\delta = \delta'$ .

Pour  $i > 1$

$$\begin{aligned} E(v_i)W(v_i) &\leq (\alpha^{i-1} E(u) + 2\sigma^{-2} K^i W(u)) K^{i-1} W(u) \\ &\leq \alpha^{i-1} K^{i-1} (E(u)W(u)) + 2\sigma^{-2} K^{2i-1} (W(u))^2 \\ &\leq K^i (E(u)W(u)) + 2\sigma^{-2} K^{2i-1} (W(u))^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer  $s$  fois le lemme 3.4 si

$$(3.4) \quad \begin{cases} K^s (E(u)W(u)) \leq \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta')^2 \\ 2\sigma^{-2} K^{2s-1} (W(u))^2 \leq \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta')^2 \end{cases}$$

- Nous avons  $K^s = \alpha^s \frac{\ln K}{\ln \alpha} \approx \varepsilon^{\frac{\ln K}{\ln \alpha}}$  et  $\sigma = \frac{\varepsilon}{2}$ .
- La première inégalité de 3.4 est équivalente à

$$E(u)W(u) \leq 2^{-3} \varepsilon^{2 - \frac{\ln K}{\ln \alpha}} (\delta')^2$$

En prenant  $\delta' = 2^{\frac{3}{2}-3} \delta$  et  $q = 2 - \frac{\ln K}{\ln \alpha}$  dans le lemme 3.3  $\Gamma$  nous obtenons l'inégalité désirée.

• Nous raisonnons ensuite  $\Gamma$  de deux manières différentes  $\Gamma$  selon que la deuxième inégalité est vérifiée ou non.

• Si nous supposons que la deuxième inégalité de 3.4 n'est pas vérifiée nous avons :

$$E(u)W(u) \leq K^{-s} \frac{1}{2} \sigma^2 (\delta')^2 \leq 2 \sigma^{-2} K^{s-1} (W(u))^2$$

donc

$$E(u) \leq 2 \sigma^{-2} K^{s-1} W(u)$$

Dans ce cas nous n'avons pas besoin d'appliquer le lemme 3.4 car nous pouvons directement étendre  $u$  de façon homogène à  $B_1$  par  $\bar{u}(x) = u(\frac{x}{|x|})$  en appliquant le lemme 3.1 avec  $\sigma = 1$  et nous avons :

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &\leq d_1 E(u) \\ W(\bar{u}) &\leq d_1 W(u) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &\leq d_1 (\varepsilon E(u) + E(u)) \\ &\leq d_1 (\varepsilon E(u) + 2 \sigma^{-2} K^{s-1} W(u)) \\ &\leq d_1 (\varepsilon E(u) + 8 \varepsilon^{-2 + \frac{\ln K}{\ln \alpha}} K^{-1} W(u)) \\ &\leq d_1 (\varepsilon E(u) + \varepsilon^{-q} K^{-1} W(u)) \\ W(\bar{u}) &\leq d_1 \varepsilon^{-q} W(u) \end{aligned}$$

car  $\varepsilon^{-q} > 1$ .

Dans ce cas nous avons fini de démontrer le lemme 3.3 pour  $n = 3$ .

• Maintenant si nous supposons que les deux inégalités 3.4 sont vérifiées nous appliquons le lemme 3.4  $s$  fois.

Posons ensuite  $\bar{u}|_{A_i, \sigma} = \bar{v}_i$  et étendons  $\bar{u}$  à  $B_{1-s\varepsilon}$  en posant  $\bar{u}(x) = v'_s(\frac{(1-s\varepsilon)x}{|x|})$ .

Cela donne une fonction  $\bar{u} \in H^1(B_1^3, S^2)$  avec  $\bar{u}|_{\partial B_1^3} = u$ .

Par le lemme 3.4 nous avons :

$$\begin{aligned} E(\bar{u}|_{A_i, \sigma}) = E(\bar{v}_i) &\leq K (\sigma E(v_i) + \sigma^{-1} W(v_i)) \\ &\leq K (\sigma \alpha^{i-1} E(u) + 2 \sigma^{-1} K^i W(u) + \sigma^{-1} K^{i-1} W(u)) \\ &\leq K (\sigma \alpha^{i-1} E(u) + 3 \sigma^{-1} K^i W(u)) \\ W(\bar{u}|_{A_i, \sigma}) = W(\bar{v}_i) &\leq K \sigma W(v_i) \\ &\leq \sigma K^i W(u) \end{aligned}$$

Pour ce qui est de  $B_{1-s\varepsilon}^3$

$$\begin{aligned} E(\bar{u}_{B_{1-s\varepsilon}^3}) &= E(v'_s) = E(v_{s+1}) \leq \alpha^s E(u) + 2\sigma^{-2} K^s W(u) \\ W(\bar{u}_{B_{1-s\varepsilon}^3}) &= W(v'_s) = W(v_{s+1}) \leq K^s W(u) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &\leq (\alpha^s + \sum_{i=1}^s K \sigma \alpha^{i-1}) E(u) + d_2 \sigma^{-2} K^s W(u) \\ W(\bar{u}) &\leq 4 K^s W(u) \end{aligned}$$

Comme  $\alpha^s + \sum_{i=1}^s K \sigma \alpha^{i-1} = \alpha^s + K \sigma \frac{1-\alpha^s}{1-\alpha} \approx \varepsilon + \frac{K}{2} \varepsilon \frac{1-\varepsilon}{1-\alpha} \leq d_3 \varepsilon$  et  $K^s \approx \varepsilon^{\frac{\ln K}{\ln \alpha}} \leq \varepsilon^{-q}$  nous avons finalement

$$\begin{aligned} E(\bar{u}) &\leq d_4 \varepsilon E(u) + d_4 \varepsilon^{\frac{\ln K}{\ln \alpha} - 2} W(u) \\ &\leq d_4 (\varepsilon E(u) + \varepsilon^{-q} W(u)) \\ W(\bar{u}) &\leq d_4 \varepsilon^{-q} W(u) \end{aligned}$$

■

## 3.2 Extension du théorème d' $\varepsilon$ -régularité

**Proposition 3.1** *Soit  $B > 0$ , il existe  $\epsilon_0 = \epsilon_0(B)$  constant, tel que, si  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  est  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante,  $a \in \Omega$ ,  $0 < \sigma < 1$  et  $\exists u^* \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\sigma^{1/2} \leq \epsilon_0$ ,  $\frac{1}{\sigma} \int_{B_\sigma(a)} |\nabla u|^2 dx \leq B$  et  $\frac{1}{\sigma^3} \int_{B_\sigma(a)} |u - u^*|^2 dx \leq \epsilon_0$ .*

*Alors  $u$  est Hölderienne sur  $B_{3\sigma/8}(a)$  et  $|u(x) - u(y)| \leq c |x - y|^\alpha$   $\forall x, y \in B_{3\sigma/8}(a)$  avec des constantes  $\alpha$  et  $c$  ne dépendant que de  $\Omega$ .*

**Démonstration :**

- Nous allons utiliser le théorème d' $\varepsilon$ -régularité 2.1 pour  $u$  et une boule  $B_{\sigma h}(a)$  avec  $h$  bien choisi de manière à ce que  $(\sigma h)^{1/2} \leq \bar{\varepsilon}$  et  $\frac{1}{\sigma h} \int_{B_{\sigma h}(a)} |\nabla u|^2 dx \leq \bar{\varepsilon}$  où  $\bar{\varepsilon}$  est la constante du théorème 2.1.

- Tout d'abord  $\Gamma$  montrons qu'il existe  $h \in [\frac{3}{4}, 1]$  tel que :

$$\begin{aligned} W(w|_{\partial B}) &\leq 8\varepsilon_0 \\ E(w|_{\partial B}) &\leq 8B \end{aligned}$$

où  $w \in H^1(B_1, S^2)$  est définie par  $w(y) = u(a + \sigma y) \forall y \in B_1$ .  
En effet  $\Gamma$  en notant

$$A = \{ h \in [\frac{3}{4}, 1] / \int_{\partial B_h} |w(y) - u^*|^2 dy > 8 \int_{B_1} |w(y) - u^*|^2 dy \},$$

nous avons

$$\int_{B_1} |w(y) - u^*|^2 dy \geq \int_A \int_{\partial B_h} |w(y) - u^*|^2 dy > 8 \text{mes } A \int_{B_1} |w(y) - u^*|^2 dy$$

donc

$$\text{mes } A < \frac{1}{8}.$$

De même  $\Gamma$  en notant

$$B = \{ h \in [\frac{3}{4}, 1] / \int_{\partial B_h} |\nabla w(y)|^2 dy > 8 \int_{B_1} |\nabla w(y)|^2 dy \},$$

nous avons

$$\text{mes } B < \frac{1}{8}.$$

D'où

$$\text{mes } (A \cup B) < \frac{1}{4}.$$

Ce qui entraîne l'existence d'un  $h \in [\frac{3}{4}, 1] \Gamma$  tel que  $h \notin A \cup B$ .  
C'est-à-dire  $\Gamma$  tel que :

$$\begin{aligned} \text{et } \int_{\partial B_h} |w(y) - u^*|^2 dy &\leq 8 \int_{B_1} |w(y) - u^*|^2 dy = \frac{8}{\sigma^3} \int_{B_{\sigma(a)}} |u - u^*|^2 dx \leq 8\varepsilon_0 \\ \int_{\partial B_h} |\nabla w(y)|^2 dy &\leq 8 \int_{B_1} |\nabla w(y)|^2 dy = \frac{8}{\sigma} \int_{B_{\sigma(a)}} |\nabla u|^2 dx \leq 8B \end{aligned}$$

- Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[ \Gamma$  supposons que  $W(w|_{\partial B_h}) \leq \frac{1}{8B} h^2 \delta^2 \varepsilon^q \Gamma$  où  $\delta$  est la constante du lemme 3.3.

Nous avons

$$E(w|_{\partial B_h}) W(w|_{\partial B_h}) \leq h^2 \delta^2 \varepsilon^q$$

Nous appliquons alors le lemme 3.3 avec  $w|_{\partial B_h}$  et  $h$  au lieu de  $u$  et  $\sigma$  :  
 $\exists \bar{w} \in H^1(B_h, S^2)$  telle que  $\bar{w}|_{\partial B_h} = w$  et

$$E_h(\bar{w}) \leq c_{12} (\varepsilon h E(w|_{\partial B_h}) + \varepsilon^{-q} h^{-1} W(w|_{\partial B_h})) \leq 8c_{12} (\varepsilon h B + \varepsilon^{-q} h^{-1} \varepsilon_0)$$

- D'après le lemme 2.4 :

$$E_h(w) \leq E_h(\bar{w}) + c_3 \sigma^{1/2} h^{3/2}$$

où nous avons prolongé  $\bar{w}$  par  $w$  sur  $B_1 \setminus B_h$ .

Donc

$$E_h(w) \leq 8c_{12} [\varepsilon h B + \varepsilon^{-q} h^{-1} \varepsilon_0] + c_3 \sigma^{1/2} h^{3/2}$$

- Cette dernière inégalité étant valable pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  nous allons pouvoir fixer  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(B)$  de manière à ce que

$$\begin{cases} W(w|_{\partial B_h}) \leq 8\varepsilon_0 \leq \frac{1}{8B} h^2 \delta^2 \varepsilon^q \\ (\sigma h)^{1/2} \leq \bar{\varepsilon} \\ \frac{1}{\sigma h} \int_{B_{\sigma h}(a)} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{h} \int_{B_h} |\nabla w|^2 dy \leq 8c_{12} [\varepsilon h B + \varepsilon^{-q} h^{-1} \varepsilon_0] + c_3 \sigma^{1/2} h^{3/2} \leq \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'appliquer le théorème 2.1 et d'obtenir que  $u$  est höldérienne sur  $B_{\frac{\sigma h}{2}}(a)$  donc sur  $B_{\frac{3\sigma}{8}}(a)$  avec des constantes d'Hölder ne dépendant que de  $\Omega$ .

- En effet

$$8c_{12} [\varepsilon h B + \varepsilon^{-q} h^{-1} \varepsilon_0] + c_3 \sigma^{1/2} h^{3/2} \leq d_5 [\varepsilon B + \varepsilon^{-q} \varepsilon_0 + \varepsilon_0]$$

car  $h \in [\frac{3}{4}, 1]$ .

Et donc nous pouvons prendre  $\varepsilon$  tel que  $d_5 \varepsilon B \leq \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}$  puis  $\varepsilon_0$  tel que

$$\begin{cases} 8\varepsilon_0 \leq \frac{1}{8B} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \delta^2 \varepsilon^q \leq \frac{1}{8B} h^2 \delta^2 \varepsilon^q \\ d_5 (\varepsilon^{-q} + 1) \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

pour pouvoir appliquer le théorème 2.1 (la dernière inégalité assurant  $(\sigma h)^{1/2} \leq \sigma^{1/2} \leq \varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$ ). ■

### 3.3 Théorème de compacité

Nous regroupons dans le théorème suivant les propriétés de convergence de suites minimisantes qui seront utiles pour démontrer le théorème des singularités.

**Théorème 3.1** *Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante,  $a \in \Omega$ ,  $0 < \sigma < 1$ .*

*Soit  $\lambda_i$  une suite de réels telle que  $\lambda_i \in ]0, \frac{1}{2}]$  et  $\lambda_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ . Notons  $w_i \in H^1(B_1, S^2)$  la suite des fonctions définies par  $w_i(t) = w(\lambda_i t) = u(a + \lambda_i \sigma t)$ .*

*Alors, il existe une suite extraite de  $\lambda_i$ , encore notée  $\lambda_i$ , qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $w_i$  converge faiblement vers  $w_0$  dans  $H^1(B_1, S^2)$ .
- (ii)  $w_i$  converge fortement vers  $w_0$  dans  $H^1(B_{1/2}, S^2)$ .
- (iii)  $w_0 \in H^1(B_1, S^2)$  est harmonique sur  $B_1$ .
- (iv)  $w_0$  est localement höldérienne sur  $\overline{B_1} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$ .
- (v)  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  presque partout dans  $B_1$ .
- (vi)  $w_i$  converge uniformément sur les compacts de  $\overline{B_{1/2}} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$ , où  $\tilde{\mathcal{S}}_0$  est un ensemble fermé de 1-mesure de Hausdorff nulle ( $\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{S}}_0) = 0$ ).
- (vii) Pour tout compact  $K \subset \overline{B_{1/2}} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$ ,  $w_j$  est höldérienne sur  $K$  pour  $j$  suffisamment grand.
- (viii) Si de plus  $\tilde{\mathcal{S}}_0 = \{0\}$ ,  $w_0$  est  $E_1$ -minimisante.

**Démonstration :**

- Le lemme 2.7 donne (i)Γ(iii) et (v).
- La formule de monotonie permet d'affirmer qu'il existe une constante  $d_1 > 0$  telle que

$$\forall i \quad E_1(w_i) = \frac{1}{\lambda_i} E_{\lambda_i}(w) \leq d_1$$

- Comme  $w_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{H^1(B_1)} w_0$  et que l'injection de  $H^1(B_1)$  dans  $L^2(B_1)$  est compacte nous avons  $w_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{L^2(B_1)} w_0$ .

- Grâce à la semi-continuité inférieure de  $E_1\Gamma$  nous avons  $E_1(w_0) \leq d_1$ .
- D'après la formule de monotonie

$$\exists B > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall i \quad \frac{1}{h} E_{B_h(x)}(w_i) = \frac{1}{\lambda_i \sigma h} E_{B_{\lambda_i \sigma h}(x)}(u) \leq B.$$

- Soit  $\varepsilon_0$  la constante définie à la proposition 3.1 et  $d_2$  la constante de l'inégalité de Poincaré.

$$\text{Soit } x \in B_{1/2} \text{ et } h \in ]0, \frac{1}{4}] \Gamma \text{ avec } (h \sigma)^{1/2} \leq \varepsilon_0 \text{ et } \frac{1}{h} E_{B_h(x)}(w_0) < \frac{\varepsilon_0}{d_2}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré  $\Gamma$  et en notant  $w^*$  la moyenne de  $w_0$  sur  $B_h(x)\Gamma$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} W_{B_h(x)}(w_0) &= h^3 \int_{B_1} |w_0(x + h t) - w^*|^2 dt \\ &\leq d_2 h^3 \int_{B_1} h^2 |\nabla w_0(x + h t)|^2 dt \\ &< h^3 \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Comme  $(h \sigma)^{1/2} \leq \varepsilon_0 \Gamma$  nous avons pour tout  $i$

$$(h \lambda_i \sigma)^{1/2} \leq \varepsilon_0.$$

Enfin  $\Gamma$  d'après la convergence forte dans  $L^2(B_1)$  de  $w_i$  vers  $w_0 \Gamma$  nous avons

$$W_{B_h(x)}(w_i) \leq \varepsilon_0 h^3$$

pour  $i$  grand.

Nous pouvons ainsi appliquer la proposition 3.1  $\Gamma$  avec  $a + \lambda_i \sigma x$  et  $\lambda_i \sigma h$  au lieu de  $a$  et  $\sigma$ .

Donc  $w_i$  est hölderienne sur  $B_{3h/8}(x)\Gamma$  avec des constantes d'hölderianité indépendantes de  $x \Gamma h$  et  $i$ .

Un argument classique de compacité permet de conclure que  $w_i$  converge uniformément sur  $B_{3h/8}(x)$  vers  $w_0$  et  $w_0$  est hölderienne sur cette boule.

- Notons  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des points singuliers de  $w_0$  et

$$(3.5) \quad \tilde{\mathcal{S}}_0 = \left\{ x \in \overline{B}_{1/2} \quad / \quad \forall h \in ]0, \frac{1}{4}] \quad \frac{1}{h} E_{B_h(x)}(w_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{d_2} \right\}.$$

Remarquons que  $\mathcal{S}_0 \cap \overline{B}_{1/2} \subset \tilde{\mathcal{S}}_0$ .

- En utilisant l'argument de la démonstration du corollaire 2.1  $\Gamma$  avec  $u$  à la place de  $w_0 \Gamma$  nous obtenons que  $\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{S}}_0) = 0$ . Nous avons également démontré que  $w_i$  converge uniformément vers  $w_0$  sur les compacts de  $\overline{B}_{1/2} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$

(vi); que  $\Gamma$  pour tout compact  $K \subset \overline{B}_{1/2} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0 \Gamma w_j$  est höldérienne sur  $K$  pour  $j$  assez grand (vii)  $\Gamma$  et que  $w_0$  est localement höldérienne sur  $\overline{B}_{1/2} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0 \Gamma$  donc sur  $\overline{B}_1 \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$  puisque  $w_0$  est radiale (iv).

**Démonstration de (ii) :**

• Pour montrer la convergence forte de  $w_i$  vers  $w_0$  dans  $H^1(B_{1/2}) \Gamma$  nous démontrons que  $\{w_i\}$  est de Cauchy dans  $H^1(B_{1/2})$ .

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{tel que} \quad j \geq k \geq N \implies \|w_j - w_k\|_{H^1(B_{1/2})}^2 \leq \varepsilon$$

En fait il suffit de majorer

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla(w_j - w_k)|^2 dx$$

• Recouvrons  $\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}$  par des boules  $\{B_{r_i}(x_i)\}$  telles que  $\sum_i r_i < \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  donné.

Si  $\mathcal{O} = \bigcup_i B_{r_i}(x_i) \Gamma$  nous avons d'après la formule de monotonie 2.4

$$E_{\mathcal{O}}(w_j) \leq \sum_i E_{x_i, r_i}(w_j) \leq d_3 \sum_i r_i \leq d_3 \varepsilon \quad \forall j$$

Donc

$$\int_{\mathcal{O}} |\nabla(w_j - w_k)|^2 dx \leq 2 d_3 \varepsilon \quad \forall j, k$$

• D'autre part  $\Gamma w_j$  converge uniformément vers  $w_0$  sur  $B_{1/2} \setminus \mathcal{O} \Gamma$  donc  $\Gamma$  en soustrayant les équations d'Euler pour  $w_j$  et  $w_k$   $\Gamma$  en multipliant le résultat par  $w_j - w_k$  et en introduisant une fonction cutoff  $\Gamma$  nous obtenons

$$\int_{B_{1/2} \setminus \mathcal{O}} |\nabla(w_j - w_k)|^2 dx \leq d_4(\mathcal{O}, \sigma) \sup_{\overline{B}_{1/2} \setminus \mathcal{O}} |w_j - w_k|$$

Ainsi

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla(w_j - w_k)|^2 dx \leq 2 d_3 \varepsilon + d_4 \sup_{\overline{B}_{1/2} \setminus \mathcal{O}} |w_j - w_k|$$

Donc  $\{w_j\}$  est de Cauchy dans  $H^1(B_{1/2}) \Gamma$  elle converge vers  $w_0$  dans  $H^1(B_{1/2})$ .

**Démonstration de (viii) :**

- D'après le lemme 2.1  $w_i$  est  $\tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}$ -minimisante. C'est-à-dire que :

$$\forall v \in H^1(B_1, S^2) / w_i - v \in H_0^1(B_1, \mathbb{R}^3) \quad \tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}(w_i) \leq \tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}(v)$$

- Soit  $v \in H^1(B_1, S^2)$  tel que  $w_0 - v \in H_0^1(B_1, \mathbb{R}^3)$  nous allons montrer que :  $E_1(w_0) \leq E_1(v)$ .
- Définissons  $\tilde{v} \in H^1(B_1, S^2)$  par

$$\begin{cases} \tilde{v}(x) = v(2x) & \forall x \in B_{1/2} \\ \tilde{v}(x) = w_0(x) & \forall x \in B_1 \setminus B_{1/2} \end{cases}$$

Prenons encore  $v_i = \tilde{v} + w_i - w_0$  nous avons  $v_i \in H^1(B_1, S^2)$  et  $v_i - w_i = 0$  sur  $B_1 \setminus B_{1/2}$ .

Donc

$$(3.6) \quad \tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}(w_i) \leq \tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}(v_i)$$

Nous avons aussi bien pour  $w = w_i$  que pour  $w = v_i$

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{a,\lambda_i\sigma}(w) &= \int_{B_1} |\nabla w|^2 dy + K_1 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 |p(w)|^2 dy - 2 K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot w dy \\ &\quad - K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \nabla \phi_w \cdot w dy - 2 K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \nabla \phi_{\tilde{u}} \cdot w dy \end{aligned}$$

où  $\tilde{H}_z(y) = H_z(a + \lambda_i \sigma y)$

$\tilde{u}(y) = u(\mathcal{X}_\Omega - \mathcal{X}_{B_{\lambda_i \sigma(a)}})(a + \lambda_i \sigma y)$  (Le support de  $\tilde{u}$  est inclus dans  $\frac{\Omega - a}{\lambda_i \sigma}$ )

$$\Delta \phi_{\tilde{u}} = -4\pi \operatorname{div}(\tilde{u}) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

et  $\Delta \phi_w = -4\pi \operatorname{div}(w \chi_{B_1})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

De plus

$$\begin{aligned} K_1 \lambda_i^2 \sigma^2 \int_{B_1} |p(w)|^2 dy &\xrightarrow{\lambda_i \rightarrow 0} 0 \\ 2 K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \tilde{H}_z \cdot w dy &\xrightarrow{\lambda_i \rightarrow 0} 0 \\ K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \nabla \phi_w \cdot w dy &\leq d_1 \lambda_i^2 \xrightarrow{\lambda_i \rightarrow 0} 0 \\ 2 K_2 \int_{B_1} \lambda_i^2 \sigma^2 \nabla \phi_{\tilde{u}} \cdot w dy &\leq d_2 \lambda_i^{3/2} \xrightarrow{\lambda_i \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités sont obtenues à l'aide du théorème des potentiels croisés 2.2.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\nabla w|^2 dy &= \int_{B_1} |\nabla(\tilde{v} + w_i - w_0)|^2 dy \\ &= \int_{B_{1/2}} |\nabla \tilde{v}|^2 dy + \int_{B_{1/2}} |\nabla(w_i - w_0)|^2 dy \\ &\quad + 2 \int_{B_{1/2}} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla(w_i - w_0) dy + \int_{B_1 \setminus B_{1/2}} |\nabla w_i|^2 dy \end{aligned}$$

L'inégalité 3.6 entraîne alors

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_i|^2 dy + f_i \leq \int_{B_{1/2}} |\nabla \tilde{v}|^2 dy + g_i$$

où  $f_i$  et  $g_i$  sont des termes qui tendent vers 0 lorsque  $\lambda_i \rightarrow 0$  grâce à la convergence forte de  $w_i$  vers  $w_0$  dans  $H^1(B_{1/2}, S^2)$ .

Toujours pour la même raison nous avons donc :

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/2}} |\nabla w_0|^2 dy &\leq \int_{B_{1/2}} |\nabla \tilde{v}|^2 dy \\ \int_{B_{1/2}} 4|\nabla w_0|^2(2y) dy &\leq \int_{B_{1/2}} 4|\nabla v|^2(2y) dy \end{aligned}$$

donc comme  $w_0$  est radiale :

$$\int_{B_1} |\nabla w_0|^2(x) dx \leq \int_{B_1} |\nabla v|^2(x) dx$$

■

# Chapitre 4

## Théorème des singularités

### 4.1 Propriétés de la mesure de Hausdorff

- Définissons pour  $E \subset \mathbb{R}^3$  et  $s \geq 0$  la fonction

$$\varphi^s(E) = \inf_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} r_i^s / E \subset \bigcup_{i \in I} B_{r_i}(x_i) \right\}$$

D'après Federer [Fed69, 2.10.2, p 171]  $\Gamma$

$$\varphi^s(E) = 0 \iff \mathcal{H}^s(E) = 0$$

Nous utiliserons aussi le résultat de densité suivant [Fed69, 2.10.19(2), p 181] :

si  $\varphi^s(E) > 0$   $\Gamma$

$$(4.1) \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-s} \varphi^s(E \cap B_\lambda(x)) \geq d_1 > 0 \quad \text{pour } \varphi^s \text{ presque tout } x \in E$$

où  $d_1$  est une constante.

**Lemme 4.1** Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante,  $a \in \Omega$ ,  $0 < \sigma < 1$  et  $\lambda_i \in ]0, \frac{1}{2}]$  une suite telle que  $\lambda_i \rightarrow 0$ .

Soit  $\{w_i\} \subset H^1(B_1, S^2)$ , la suite de fonctions définies par  $w_i(y) = u(a + \sigma \lambda_i y)$ .

Supposons que cette suite converge faiblement dans  $H^1(B_1)$  vers une limite  $w_0$ .

Soit  $\mathcal{S}_{\lambda_i}$ , l'ensemble singulier de  $w_i$  pour  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_0$  l'ensemble défini dans la démonstration du théorème 3.1 (3.5).

Alors nous avons pour tout  $s \geq 0$  :

$$\varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \varphi^s(\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap B_{1/2})$$

**Démonstration :**

• Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\{B_{r_i}(x_i)\}$  un recouvrement de  $\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}$  par des boules satisfaisant

$$\sum_i r_i^s \leq \varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}) + \varepsilon$$

• L'ensemble  $K = \overline{B_{1/2}} \setminus \bigcup_i B_{r_i}(x_i)$  est compact dans  $B_{1/2} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$ . Donc  $\Gamma$  par le théorème 3.1 (vii) il existe un  $j$  assez grand pour lequel la fonction  $w_j$  est continue sur  $K$ .

• Donc  $\mathcal{S}_{\lambda_j} \cap B_{1/2} \subset \bigcup_i B_{r_i}(x_i)$  pour  $j$  grand.

En particulier

$$\varphi^s(\mathcal{S}_{\lambda_j} \cap B_{1/2}) \leq \sum_i r_i^s \leq \varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}) + \varepsilon$$

pour  $j$  grand.

Ainsi  $\Gamma$  nous avons effectivement

$$\varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{1/2}) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \varphi^s(\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap B_{1/2})$$

■

## 4.2 Théorème des singularités

**Théorème 4.1** *Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante et soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de ses points singuliers.*

*Alors  $\mathcal{S}$  est un ensemble discret.*

**Démonstration :**

• Soit  $u \in H^1(\Omega, S^2)$  une fonction  $\tilde{E}_\Omega$ -minimisante  $0 < \sigma \leq 1$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points singuliers de  $u$ .

• Nous démontrons  $\Gamma$  d'abord  $\Gamma$  que la dimension de Hausdorff de  $\mathcal{S}$  est nulle.

• Soit  $0 < s < 1$  tel que  $\varphi^s(\mathcal{S}) > 0$  (s'il n'en existe pas  $\Gamma$  nous avons  $\mathcal{H}^0(\mathcal{S}) = 0$  donc  $\dim(\mathcal{S}) = 0$ ).

• Grâce à 4.1  $\Gamma$  nous pouvons choisir  $p_0 \in \mathcal{S}$  tel que

$$(4.2) \quad \lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \lambda_i^{-s} \varphi^s(\mathcal{S} \cap B_{\frac{\lambda_i}{2}}(p_0)) > 0$$

pour une suite  $\lambda_i \rightarrow 0$  choisie.

Soit  $\lambda_i \in ]0, \frac{1}{2}]$  la sous-suite choisie comme dans le théorème 3.1  $\Gamma$  avec  $p_0$  à la place de  $a$  et soit  $w_i \in H^1(B_1, S^2)$  la suite de fonction définies par  $w_i(t) = u(p_0 + \sigma \lambda_i t)$ . Cette suite  $w_i$  converge faiblement dans  $H^1(B_1, S^2)$  et fortement dans  $H^1(B_{1/2}, S^2)$  vers une fonction harmonique  $w_0$   $\Gamma$  telle que  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  presque partout.

- Si nous notons  $\mathcal{S}_{\lambda_i}$  l'ensemble singulier de  $w_i$  dans  $B_1 \Gamma$  nous avons

$$\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap B_{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{x - p_0}{\lambda_i \sigma} / x \in \mathcal{S} \cap B_{\frac{\lambda_i \sigma}{2}}(p_0) \right\}$$

$$\varphi^s(\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap B_{\frac{1}{2}}) = \lambda_i^{-s} \sigma^{-s} \varphi^s(\mathcal{S} \cap B_{\frac{\lambda_i \sigma}{2}}(p_0))$$

et donc 4.2 implique  $\lim_{\lambda_i \rightarrow 0} \varphi^s(\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap B_{\frac{1}{2}}) > 0$

- Par le lemme 4.1 nous avons  $\varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{\frac{1}{2}}) > 0$

Comme  $\frac{\partial w_0}{\partial r} = 0$  presque partout  $\Gamma$  nous avons  $\lambda \tilde{\mathcal{S}}_0 \subset \tilde{\mathcal{S}}_0$  pour tout  $\lambda \geq 0$ .

Comme nous avons supposé  $0 < s < 1$  et que  $\varphi^s(\tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{\frac{1}{2}}) > 0$   $\Gamma$  il existe  $x_1 \in \tilde{\mathcal{S}}_0 \cap B_{\frac{1}{2}} \setminus \{0\}$ . Mais dans ce cas  $\forall \lambda \in [0, 1] \Gamma \lambda x_1 \in \tilde{\mathcal{S}}_0$  et donc  $\mathcal{H}^1(\tilde{\mathcal{S}}_0) = 0$  est contredit.

Donc  $s = 0$  et ainsi  $\dim(\mathcal{S}) = 0$ . Nous avons aussi démontré que  $\tilde{\mathcal{S}}_0 = \{0\}$ .

- Supposons qu'il y ait une suite  $p_i \in \mathcal{S}$  telle que  $p_i \rightarrow p_0 \in \Omega$ .

$$\text{Soit } s_i = \frac{p_i - p_0}{|p_i - p_0|} \in S^2.$$

En extrayant une sous-suite de  $s_i \Gamma$  nous pouvons supposer que  $s_i \rightarrow s_0 \in S^2$ .

Soit  $\lambda_i = \frac{4|p_i - p_0|}{\sigma}$  et  $w_i(t) = u(p_0 + \sigma \lambda_i t)$  définie comme précédemment. La fonction  $w_i$  présente une singularité en  $\frac{s_i}{4}$ .

Mais  $\tilde{\mathcal{S}}_0 = \{0\}$   $\Gamma$  ainsi  $\Gamma$  d'après le théorème 3.1 (vii)  $\Gamma w_i$  est continue sur les compacts de  $B_{1/2} \setminus \tilde{\mathcal{S}}_0$ . Ce qui exclue la présence d'une singularité de  $w_i$  en  $\frac{s_i}{4} \in \delta B_{1/4}$ .

Donc  $\mathcal{S}$  est discret.

■



# Bibliographie

## Micromagnétisme, simulation

- [Aid93] M. AID. *Simulation de la répartition en domaines des pièces polaires des têtes d'enregistrement magnétique couches minces*. Thèse, Institut national Polytechnique de Grenoble (INPG), LMC/IMAG, LETI/CEA, 1993.
- [Kha96] H. KHANNOUS. *Simulation de la dynamique des parois de Bloch*. Thèse, Université Joseph-Fourier, Grenoble 1, 1996.
- [SM79] J. C. SLONCZESKI and A. P. MALOZEMOFF. *Magnetic domain walls in bubble materials*. Academic Press, 1979.
- [Via90] A. VIALLIX. *Simulation de la structure de parois dans un matériau magnétique*. Thèse, Institut national Polytechnique de Grenoble (INPG), LMC/IMAG, LETI/CEA, 1990.
- [Zim91] L. ZIMMERMANN. *Nucléation et stabilité des lignes de Bloch dans les grenats ferrimagnétiques à anisotropie uniaxiale : Application aux mémoires à lignes de Bloch*. Thèse, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1991.

## Inversion des systèmes linéaires

- [AMS90] S. F. ASHBY, T. A. MANTEUFFEL, and P. E. SAYLOR. A taxonomy for conjugate gradient methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, **27**, 1542–1568, 1990.
- [Cia88] P.G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise sous la direction de P. G. Ciarlet et J.-L. Lyons. Masson, Paris, 1988.
- [CGO76] P. CONCUS, G. H. GOLUB, and D. P. O'LEARY. A generalised conjugate gradient method for the numerical solution of elliptic

- partial differential equations. In J. R. Bunch and D. J. Rose, editors, *Sparse Matrix Computations*, pages 309–332. Academic press, New-York, 1976.
- [FM84] V. FABER and T. MANTEUFFEL. Necessary and sufficient conditions for the existence of a conjugate gradient methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**, 352–362, 1984.
- [GO89] G. H. GOLUB and D. P. O’LEARY. Some history of the conjugate gradient and lanczos algorithms: 1948-1976. *SIAM Review*, **31**, 50–102, 1989.
- [HS52] M. R. HESTENES and E. STIEFFEL. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **49**, 409–435, 1952.
- [Jol82] P. JOLY. Résolution de systèmes linéaires non symétriques par des méthodes de gradient conjugué. Publications du Laboratoire d’analyse numérique 82045, Université P. et M. Curie, 1982.
- [Jol84] P. JOLY. Méthodes de gradient conjugué. Publications du Laboratoire d’analyse numérique 84016, Université P. et M. Curie, 1984.
- [Jol88a] P. JOLY. Analyse numérique matricielle avancée. Publications du Laboratoire d’analyse numérique A 89001, Université P. et M. Curie, 1988.
- [Jol88b] P. JOLY. Méthodes de gradient conjugué ( 2 photocopies). Publications du laboratoire d’analyse numérique, Université P. et M. Curie, 1988.
- [Jol88c] P. JOLY. Méthodes de gradient conjugué pour résoudre des systèmes linéaires non symétriques. Document MODULEF 102, INRIA, 1988.
- [LS93] F. G. LOU and A. SAMEH. An expansion method for solving saddle–point problems. Preprint, University of Minnesota, 1993.
- [PS75] C. C. PAIGE and M. A. SAUNDERS. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, 617–629, 1975.
- [SS86] Y. SAAD and M.H. SCHULTZ. Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 856–869, 1986.

- [Sau89] M. A. SAUNDERS. Routines symmlq. Technical Report CA 94305-4022, Stanford, 1989.
- [Son89] P. SONNEVELD. Cgs, a fast lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **10**, 36–52, 1989.
- [TL87] R. THEODOR et T. LASCAUX. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson, Paris, 1987.
- [Vdv92] H. A. VAN DER VORST. Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, 631–644, 1992.

## Singularités

- [BG80] H. J. BORCHERS and W. J. GARBER. Analyticity of solutions of the  $O(N)$  non-linear  $\sigma$ -model. *Comm. Math. Phys.*, **71**:299–309, 1980.
- [BCL86] H. BREZIS, J. M. CORON and E. H. LIEB. Harmonic maps with defects. *Comm. Math. Phys.*, **107**:649–705, 1986.
- [DL84] R. DAUTRAY et J. L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques, tome 1*. Collection Commissariat à l'Energie Atomique, Masson, Paris, 1984.
- [DL85] R. DAUTRAY et J. L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques, tome 2*. Collection Commissariat à l'Energie Atomique, Masson, Paris, 1985.
- [ES64] J. EELLS and J. H. SAMPSON. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, **86**:109–160, 1964.
- [Fed69] H. FEDERER. *Geometric Measure Theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 153, Springer Verlag, Berlin and New-York, 1969.
- [FK90] D. R. FREDKIN and T. R. KØHLER. Hybrid method for computing demagnetizing fields. *IEEE Trans. Magn.*, Vol **26**, No 2, 1990.
- [GG82] M. GIAQUINTA and E. GIUSTI. On regularity of the minima of variational integrals. *Acta Math.*, **148**:31–40, 1982.
- [GG84] M. GIAQUINTA and E. GIUSTI. The singular set of the minima of certain quadratic functionals. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV)*, **XI**, 1:45–55, 1984.

- [GT83] D. GILBARG and N. S. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order, second edition*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [HKW70] S. HILDEBERANDT, H. KAUL and K. O. WIDMAN. An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Acta Math.*, **138**:550–569, 1970.
- [HW77] S. HILDEBERANDT and K. O. WIDMAN. On the Hölder continuity of weak solutions of quasilinear elliptic systems of second order. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV)*, **4**:145–178, 1977.
- [LU68] O. A. LADYŽENSKAJA and N. N. URAL'CEVA. *Equations aux dérivées partielles du type elliptique*. Monographies universitaires de mathématiques, directeur H. Hierche, Dunod, Paris, 1968.
- [Mor48] C. B. MORREY. The problem of Plateau on a Riemannian manifold. *Ann. of Math.*, **49**:807–851, 1948.
- [Mor66] C. B. MORREY. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 130, Springer Verlag, Berlin and New-York, 1966.
- [SU82] R. SCHØEN and K. UHLENBECK. A regularity theory for harmonic maps. *J. Diff. Geom.*, **17**:307–335, 1982.
- [SU83] R. SCHØEN and K. UHLENBECK. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. *J. Diff. Geom.*, **18**:253–268, 1983.
- [Sch61] L. SCHWARTZ. *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Hermann, Paris, 1961.

## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions deux problèmes mathématiques concernant les équations du micromagnétisme.

Ces équations régissent la configuration de la magnétisation dans les matériaux ferromagnétiques qui entrent dans la fabrication des têtes d'enregistrement magnétique et des mémoires à lignes de Bloch.

Dans la première partie, nous décrivons les propriétés physiques de ces matériaux et nous donnons une description sommaire de deux codes de simulation numérique qui ont été développés au LETI-CEA.

Une configuration d'aimantation est un minimum d'une énergie composée de quatre termes : les énergies d'échange, d'anisotropie, démagnétisante et de Zeeman. De plus, l'aimantation est de norme constante. Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle, sous contrainte non linéaire. Le terme d'énergie démagnétisante est non local, ce qui introduit des difficultés tant du point de vue théorique que numérique.

La deuxième partie est consacrée à la présentation des méthodes que nous avons développées pour résoudre les systèmes linéaires qui apparaissent dans les codes de simulation. Nous avons utilisé une méthode de type gradient conjugué préconditionné et une méthode d'expansion couplée à la première méthode.

Dans la troisième partie, nous démontrons que les singularités d'une configuration d'aimantation sont en nombre fini à l'intérieur du matériau. Nous utilisons, pour cela, la théorie introduite par Schoen et Uhlenbeck pour les fonctions minimisant l'énergie de Dirichlet sur la sphère unité. Nous avons dû adapter cette théorie à l'énergie du micromagnétisme. Il a fallu, en particulier, tenir compte du caractère non local de l'énergie démagnétisante.

## Mots clés

micromagnétisme  
matériaux ferromagnétiques  
mémoires à lignes de Bloch  
têtes magnétiques  
systèmes linéaires  
gradient conjugué  
singularités d'une fonction minimisante  
minimisation sous contrainte non linéaire