

***Méthodes variationnelles, domaines fictifs  
et conditions aux limites artificielles  
pour des problèmes hyperboliques linéaires.***

***Applications aux ondes dans les solides.***

**Eliane Bécache**

Projet ONDES - INRIA-Rocquencourt

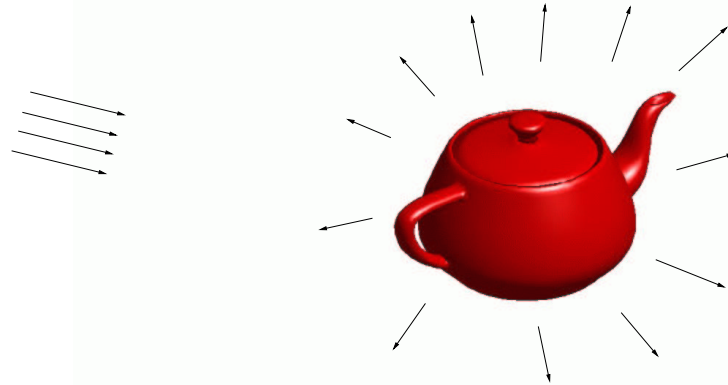
# *Problèmes de diffraction d'ondes*

Un exemple...

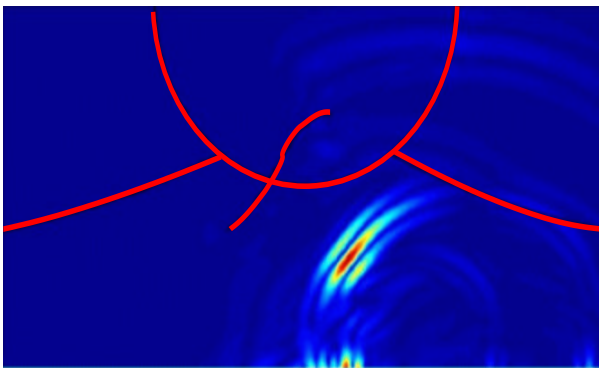


# Problèmes de diffraction d'ondes

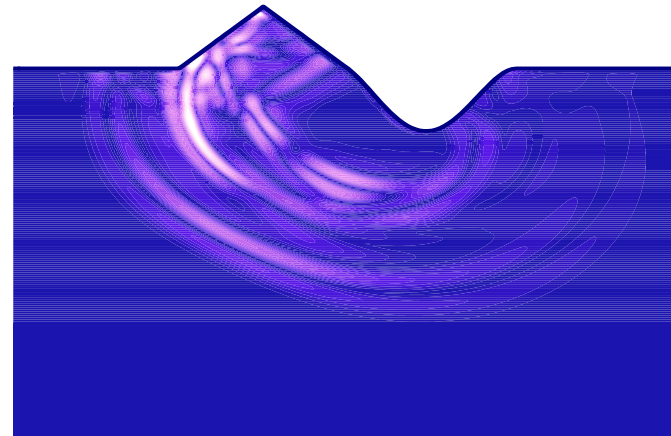
Un exemple...



Applications principales: ondes dans les solides en régime transitoire



Contrôle non destructif  
(EDF)



Sismique, Géophysique  
(SIGMA, IFREMER)

# Les méthodes numériques

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Pu = f & \text{dans } \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Approximation de modèles simplifiés (rayons, équations paraxiales)
- Méthodes surfaciques (potentiels retardés)
- Méthodes volumiques (différences finies, éléments finis)

# *Approximations de modèles simplifiés*

- Les méthodes de rayon (approximations hautes fréquences)
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Les approximations paraxiales

# Approximations de modèles simplifiés

- Les méthodes de rayon (approximations hautes fréquences)
  - ▶ Tomographie (IFP-PSI, *EB & E. Chovet & F. Delprat-Jannaud & P. Lailly* )
    - *Benamou* (GO++)
- Les approximations paraxiales

# Approximations de modèles simplifiés

- Les méthodes de rayon (approximations hautes fréquences)
  - ▶ Tomographie (IFP-PSI, *EB & E. Chovet & F. Delprat-Jannaud & P. Lailly* )
  - *Benamou* (GO++)

- Les approximations paraxiales

Direction de propagation privilégiée.

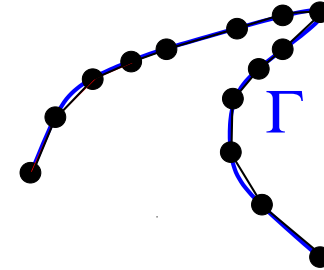
Si  $z$  est la direction privilégiée ▶ équation d'évolution en  $z$

▶ nécessite de résoudre à chaque itération en  $z$  un problème 2D.

▶ Approximations paraxiales permettant de faire du splitting sans perte de précision ▶ série de problèmes 1D (*EB & Collino & Joly*)

# Les méthodes surfaciques

En régime transitoire: **potentiels retardés**



- Méthodes variationnelles introduites par *Bamberger & Ha Duong* (86) pour l'acoustique ► cadre fonctionnel pour leur analyse.
- Premiers travaux numériques pour l'acoustique *Ding* (89)
- Cas élastique (fissures) *EB & Nédélec & Nishimura* (93), *EB* (93), *EB & Ha Duong* (94)
- Par la suite de nombreux travaux *Ha Duong & co*, *Abboud & co*, *Bachelot & co...* (codes performants développés chez IMACS, EADS, CEA-CESTA...)



# *Les méthodes surfaciques*

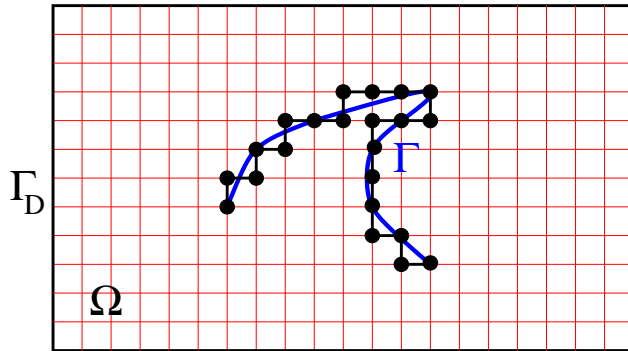
- + Bonne approximation de la géométrie (maillage surfacique)
- + Problème surfacique (1 dim de moins)
- + Pas de conditions absorbantes
- + Méthodes précises

# *Les méthodes surfaciques*

- + Bonne approximation de la géométrie (maillage surfacique)
- + Problème surfacique (1 dim de moins)
- + Pas de conditions absorbantes
- + Méthodes précises
  
- Application milieux simples
- Implémentation complexe
- Schéma non local en temps
- Stabilité

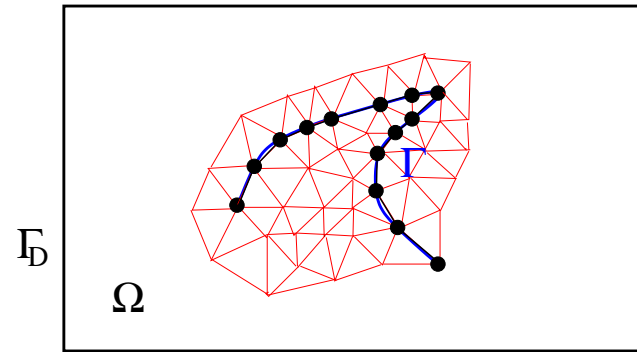
# Les méthodes volumiques

## Différences finies



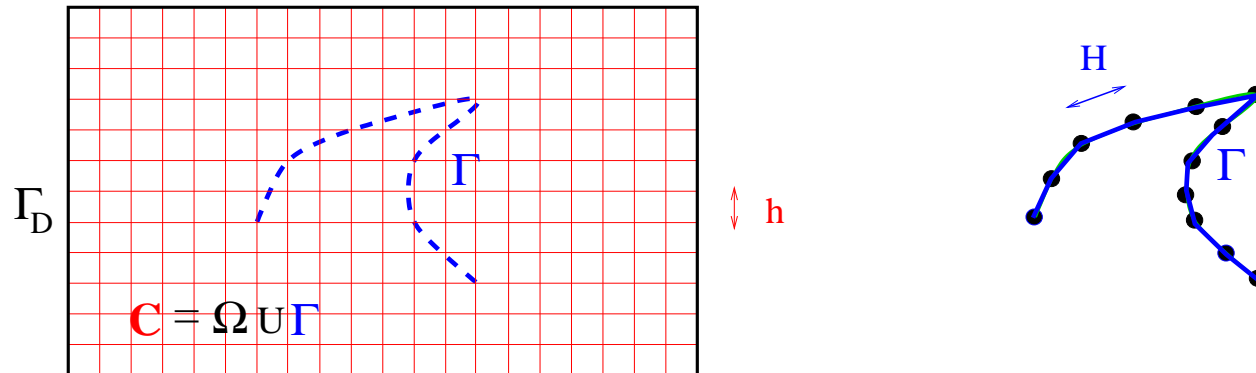
- + Facilité d'implémentation
- + Rapidité (données structurées)
- Mauvaise approximation de la géométrie (diffractions parasites)
- Ordre 1
- + CFL contrôlée

## Éléments finis



- + Géométries complexes
- Implémentation plus complexe
- Maillage (à refaire pour chaque configuration)
- + Ordres élevés
- en transitoire: CFL

# La méthode des domaines fictifs



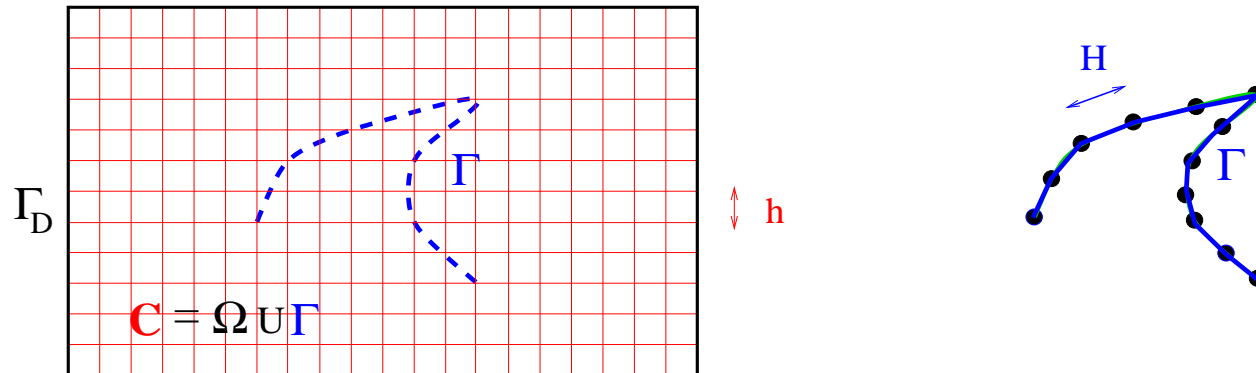
## Éléments finis avec multiplicateur de Lagrange de surface

2 maillages “indépendants” : une grille uniforme + un maillage surfacique

- + Bonne approximation de la géométrie
- + Implémentation type différences finies + petit surcoût
- + CFL : idem que pour différences finies

**Inconvénients ?...**

# La méthode des domaines fictifs



## Éléments finis avec multiplicateur de Lagrange de surface

- Méthode apparue dans les années 70' ! (*Babuska, Pitkäranta, Astrakhantsev*) pour des problèmes elliptiques, développée par la suite (*Glowinski & co, Kuznetsov & co ...*)
- pour les problèmes d'ondes
  - *Collino & Joly & Millot, Garces, Rhaouti*
  - ▶ *EB & Joly & Tsogka, EB & Joly & Scarella, EB & Chaigne & Derveaux & Joly, EB & Rodriguez & Tsogka*

# Autres approches

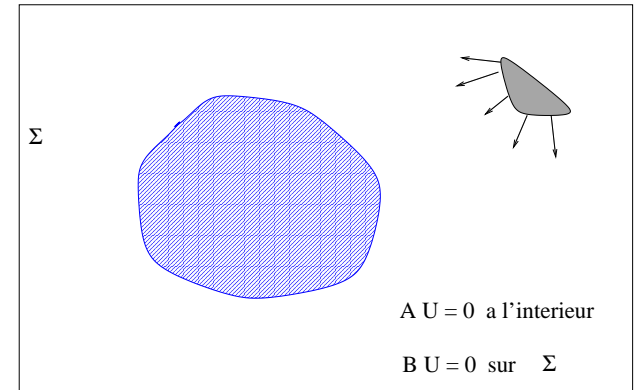
- Domaines fictifs avec multiplicateur distribué (*Glowinski, Kuznetsov...*)
- Méthode Chimera (DD avec recouvrement) (*Brezzi & J.L. Lions & Pironneau...*)
- Fat Boundary Method (*Maury*)
- Méthodes hybrides (différences finies-éléments finis...) (*Fornberg, Edelvik & Ledfelt, Rylander & Bondeson...*)
- Galerkin discontinu, volumes finis (*Hesthaven, Piperno...*)
- ...

# ***Comment borner le domaine de calcul ?***

# Comment border le domaine de calcul ?

## ● Conditions aux limites absorbantes (CLA)

*Engquist & Majda, Halpern, Bayliss & Turkel,  
Higdon, Bendali, Collino, Joly, Hagstrom, Grote  
& Keller,.....*





# Comment border le domaine de calcul ?

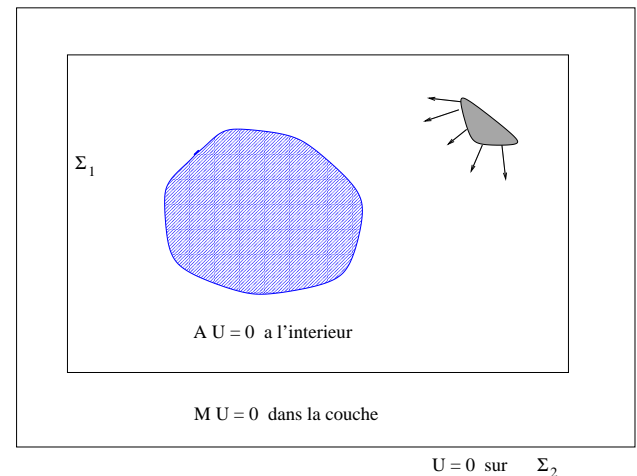
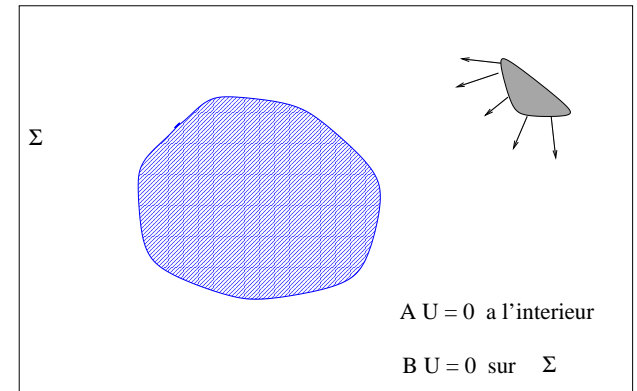
## ● Conditions aux limites absorbantes (CLA)

*Engquist & Majda, Halpern, Bayliss & Turkel, Higdon, Bendali, Collino, Joly, Hagstrom, Grote & Keller,.....*

## ● Couches absorbantes parfaitement adaptées (PML)

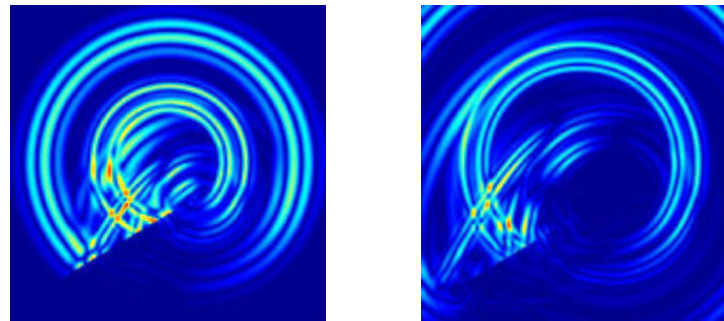
● *Bérenger, Rappaport, Collino & Monk, Chew, Zhao & Cangellaris, Rahmouni, Abarbanel, Gottlieb, Hesthaven.....*

▶ *EB & Joly, EB & Fauqueux & Joly, EB & Petropoulos & Gedney, EB & Bonnet & Legendre*

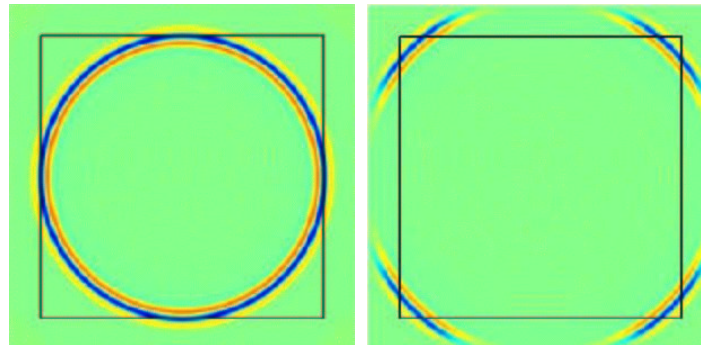


# *Plan de l'exposé*

## I - Éléments finis mixtes et domaines fictifs pour les ondes élastiques



## II - Couches absorbantes PML



## *Éléments finis mixtes et domaines fictifs pour les ondes élastiques*

**Objectif:** Simuler numériquement en **régime transitoire** la **diffraction** d'ondes élastiques par une fissure ou en présence d'une topographie de géométrie **quelconque** dans des milieux **hétérogènes anisotropes**.

## *Éléments finis mixtes et domaines fictifs pour les ondes élastiques*

**Objectif:** Simuler numériquement en **régime transitoire** la **diffraction** d'ondes élastiques par une fissure ou en présence d'une topographie de géométrie **quelconque** dans des milieux **hétérogènes anisotropes**.

**Critères :**

- Utiliser des **schémas explicites en temps**
  - ▶ **Condensation de masse**

## *Éléments finis mixtes et domaines fictifs pour les ondes élastiques*

**Objectif:** Simuler numériquement en **régime transitoire** la **diffraction** d'ondes élastiques par une fissure ou en présence d'une topographie de géométrie **quelconque** dans des milieux **hétérogènes anisotropes**.

**Critères :**

- Utiliser des **schémas explicites en temps**
  - ▶ **Condensation de masse**
- S'appuyer sur un **maillage uniforme en espace**

# *Éléments finis mixtes et domaines fictifs pour les ondes élastiques*

**Objectif:** Simuler numériquement en **régime transitoire** la **diffraction** d'ondes élastiques par une fissure ou en présence d'une topographie de géométrie **quelconque** dans des milieux **hétérogènes anisotropes**.

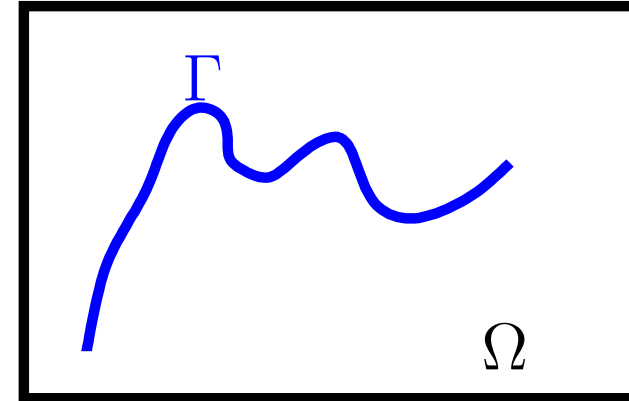
## Critères :

- Utiliser des **schémas explicites en temps**
  - ▶ **Condensation de masse**
- S'appuyer sur un **maillage uniforme en espace**
- Respecter la **géométrie de l'obstacle**
  - ▶ **domaines fictifs**

# Domaines fictifs pour le problème de surface libre

(EB, P. Joly, C. Tsogka)

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega \\ \sigma n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$



Formulation variationnelle mixte “usuelle”:

$$\underline{\underline{X}}(\Omega) = H(\operatorname{div}, \Omega)^2 \quad (\iff (\tau_{11}, \tau_{12})^t \in H(\operatorname{div}) \text{ et } (\tau_{21}, \tau_{22})^t \in H(\operatorname{div}))$$

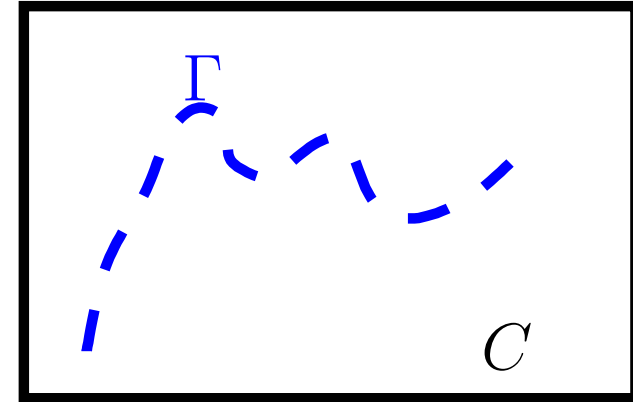
$$\underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega) = \{ \tau \in H(\operatorname{div}, \Omega)^2, \tau \text{ est symétrique} \},$$

$$\sigma \in \underline{\underline{X}}_0^{sym}(\Omega) = \{ \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\Omega), \tau \vec{n} = 0, \text{ sur } \Gamma \},$$

$$v \in \underline{\underline{M}}(\Omega) = (L^2(\Omega))^2$$

## Domaines fictifs pour le problème de surface libre

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(v) = \delta_{|\Gamma}(\lambda \otimes n) \quad \text{dans } C \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } C \\ \sigma n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$



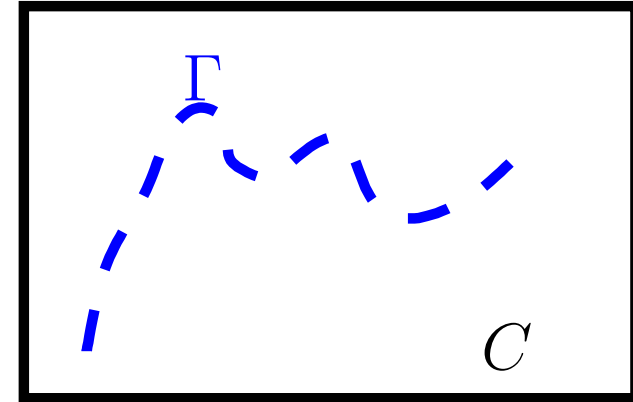
- $(\sigma, v) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(C) \times \underline{\underline{M}}(C)$ .
- $\lambda = [v] \in \left( H_{(00)}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2 = S(\Gamma)$ .

avec  $(\vec{\nu} \otimes \vec{n})_{ij} = (\nu_i n_j + \nu_j n_i) / 2$



## Domaines fictifs pour le problème de surface libre

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \varepsilon(\boldsymbol{v}) = \delta_{|\Gamma}(\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{n}) \quad \text{dans } C \\ \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = f \quad \text{dans } C \\ \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$



•  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(C) \times \underline{\underline{M}}(C).$

•  $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{v}] \in \left( H_{(00)}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2 = S(\Gamma).$

avec  $(\vec{\nu} \otimes \vec{n})_{ij} = (\nu_i n_j + \nu_j n_i) / 2$

► Analogie avec les équations intégrales

# Formulation variationnelle.

Trouver  $(\sigma(t), v(t), \lambda(t)) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(C) \times \underline{M}(C) \times S(\Gamma)$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a(\sigma, \tau) + d(v, \tau) - b_{\Gamma}(\tau, \lambda) = 0, \quad \forall \tau \in \underline{\underline{X}}^{sym} \\ \frac{d}{dt} c(v, w) - d(w, \sigma) = (f, w), \quad \forall w \in \underline{M} \\ b_{\Gamma}(\sigma, \mu) = 0, \quad \forall \mu \in S \end{array} \right.$$

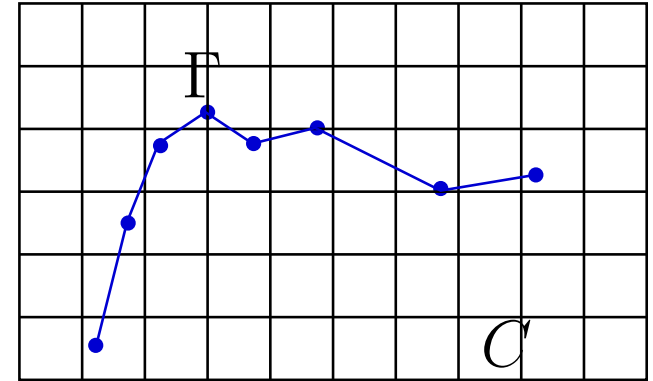
avec

$$\left\| \begin{array}{ll} c(v, w) = \int_C \rho v \cdot w \, dx, & a(\sigma, \tau) = \int_C A \sigma : \tau \, dx, \\ d(w, \sigma) = \int_C w \cdot \operatorname{div} \sigma \, dx, & b_{\Gamma}(\mu, \tau) = \langle \tau \vec{n}, \mu \rangle_{\Gamma} \end{array} \right.$$

Conservation de l'énergie:  $\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad E(t) = \frac{1}{2}(\rho v, v)_C + \frac{1}{2}(A\sigma, \sigma)_C.$

# Discrétisation en espace

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym} \subset \underline{\underline{X}}^{sym}, \quad \underline{M}_h \subset \underline{M}, \quad S_H \subset S$$



Trouver  $(\sigma_h(t), v_h(t), \lambda_H(t)) \in \underline{\underline{X}}_h^{sym} \times \underline{M}_h \times S_H$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a(\sigma_h, \tau_h) + d(v_h, \tau_h) - b_\Gamma(\tau_h, \lambda_H) = 0, \quad \forall \tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym} \\ \frac{d}{dt} c(v_h, w_h) - d(w_h, \sigma_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in \underline{M}_h \\ b_\Gamma(\sigma_h, \mu_H) = 0, \quad \forall \mu_H \in S_H \end{array} \right.$$

## Formulation matricielle.

- Problème bien posé sous condition inf-sup discrète:

$$\exists k_h > 0, \quad \inf_{\mu_H \in \mathcal{S}_H} \sup_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \frac{b_\Gamma(\tau_h, \mu_H)}{\|\mu_H\|_S \|\tau_h\|_{\underline{\underline{X}}}} \geq k_h$$

- Convergence ? condition inf-sup discrète uniforme

En pratique  $H \geq \alpha h$  ?

(*Babuska, Girault & Glowinski, Joly & Rhaouti*)

- Écriture matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{d\Sigma_h}{dt} + D_h^* V_h - B_h^\Gamma \Lambda_H = 0 \quad (i) \\ M_v \frac{dV_h}{dt} - D_h \Sigma_h = F_h \quad (ii) \\ (B_h^\Gamma)^* \Sigma_h = 0 \quad (iii) \end{array} \right.$$

# Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* \Sigma_h^{n+1/2} = 0 \end{array} \right.$$

## Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

## Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

► “petit” système à résoudre en  $\Lambda$  (nombre de DL sur  $\Gamma$ )

## Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

► “petit” système à résoudre en  $\Lambda$  (nombre de DL sur  $\Gamma$ )

► **Stabilité** du schéma : même condition CFL que sans la fissure ( $\Delta t/h \leq C$ ) (conservation d’une énergie discrète)



# Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

- ▶ “petit” système à résoudre en  $\Lambda$  (nombre de DL sur  $\Gamma$ )
- ▶ Stabilité du schéma
- ▶ schéma explicite en  $V$  et  $\Sigma$  si matrices de masse diagonales

## Discretisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

- ▶ “petit” système à résoudre en  $\Lambda$  (nombre de DL sur  $\Gamma$ )
- ▶ Stabilité du schéma
- ▶ schéma explicite en  $V$  et  $\Sigma$  si matrices de masse diagonales
- $M_v$  toujours diagonale par blocs (approximation par fonctions discontinues par élément)

## Discrétisation totale

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\sigma \frac{\Sigma_h^{n+1/2} - \Sigma_h^{n-1/2}}{\Delta t} + D_h^* V_h^n - B_h^\Gamma \Lambda_H^n = 0 \\ M_v \frac{V_h^{n+1} - V_h^n}{\Delta t} - D_h \Sigma_h^{n+1/2} = F_h^{n+1/2} \\ (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} B_h^\Gamma \Lambda_H^{n+1} = (B_h^\Gamma)^* M_\sigma^{-1} D_h^* V_h^{n+1} \end{array} \right.$$

- ▶ “petit” système à résoudre en  $\Lambda$  (nombre de DL sur  $\Gamma$ )
- ▶ Stabilité du schéma
- ▶ schéma explicite en  $V$  et  $\Sigma$  si matrices de masse diagonales
  - $M_v$  toujours diagonale par blocs (approximation par fonctions discontinues par élément)
  - $M_\sigma$  : choix de  $\underline{\underline{X}}_h$  ?

***Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher  $\underline{\underline{X}}^{sym}$  ?***

Deux difficultés :

## *Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher $\underline{\underline{X}}^{sym}$ ?*

Deux difficultés :

- Condensation de masse

## *Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher $\underline{X}^{sym}$ ?*

Deux difficultés :

- Condensation de masse
  - ▶ même question pour un problème d'ondes anisotropes scalaire (approximation de  $\underline{X} = H(\text{div } \cdot)$ )

## *Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher $\underline{X}^{sym}$ ?*

Deux difficultés :

- Condensation de masse
  - ▶ même question pour un problème d'ondes anisotropes scalaire (approximation de  $\underline{X} = H(\text{div } \cdot)$ )
- Prise en compte de la symétrie

## *Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher $\underline{X}^{sym}$ ?*

Deux difficultés :

- Condensation de masse
  - ▶ même question pour un problème d'ondes anisotropes scalaire (approximation de  $\underline{X} = H(\text{div } \cdot)$ )
- Prise en compte de la symétrie
  - ▶ verrouillage numérique avec les éléments de Raviart-Thomas



# Pourquoi un nouvel élément fini pour approcher $\underline{\underline{X}}^{sym}$ ?

Deux difficultés :

## ● Condensation de masse

▶ même question pour un problème d'ondes anisotropes scalaire  
(approximation de  $\underline{X} = H(\text{div } \cdot)$ )

## ● Prise en compte de la symétrie

▶ verrouillage numérique avec les éléments de Raviart-Thomas

Problème connu en éléments finis mixtes pour l'élasticité

- Relaxation de la symétrie (PEERS, *Arnold & Brezzi & Douglas, Amara & Thomas, Stenberg...*)
- Éléments finis "composites" (*Johnson & Mercier...*)
- Nouvelle formulation mixte des équations (*Arnold & Falk*)

# L'élément $Q_1^{div}$ pour les contraintes

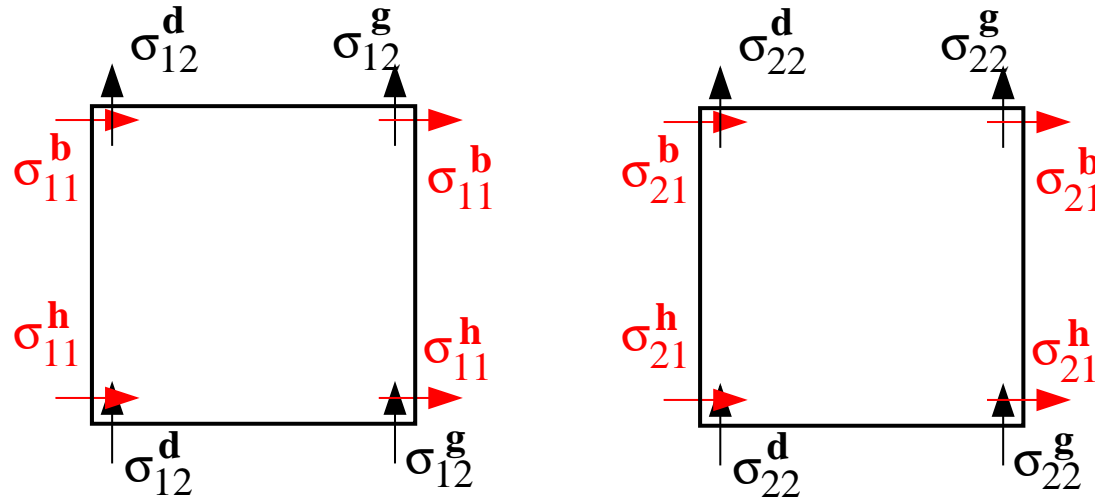
- Condensation de masse: les DDL regroupés aux noeuds de quadrature

$$\underline{X}_h = \{p_h \in H(\mathbf{div}) \mid p_h|_K \in Q_1(K)\} \supset \underline{X}_h^{RT}, \quad \underline{\underline{X}}_h = \underline{X}_h \times \underline{X}_h$$

# L'élément $Q_1^{div}$ pour les contraintes

- Condensation de masse: les DDL regroupés aux noeuds de quadrature

$$\underline{X}_h = \{p_h \in H(\mathbf{div}) \mid p_h|_K \in Q_1(K)\} \supset \underline{X}_h^{RT}, \quad \underline{\underline{X}}_h = \underline{X}_h \times \underline{X}_h$$



- ▶ Deuxième famille d'éléments finis mixtes de Nédélec
- ▶ Analyse pour un problème d'ondes anisotropes, *EB & PJ & CT*, *SINUM*, 2000 (Extension aisée aux ordres élevés et au 3D)

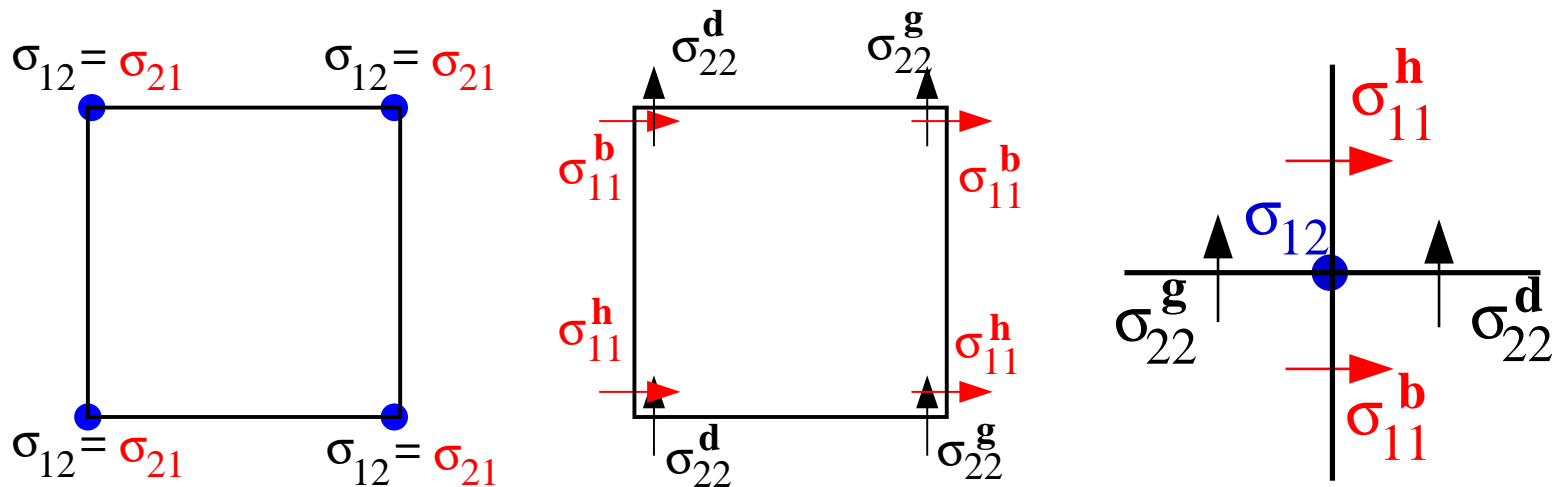
# L'élément $Q_1^{div}$ pour les contraintes

- Condensation de masse: les DDL regroupés aux noeuds de quadrature

$$\underline{X}_h = \{p_h \in H(\mathbf{div}) \mid p_h|_K \in Q_1(K)\} \supset \underline{X}_h^{RT}, \quad \underline{\underline{X}}_h = \underline{X}_h \times \underline{X}_h$$

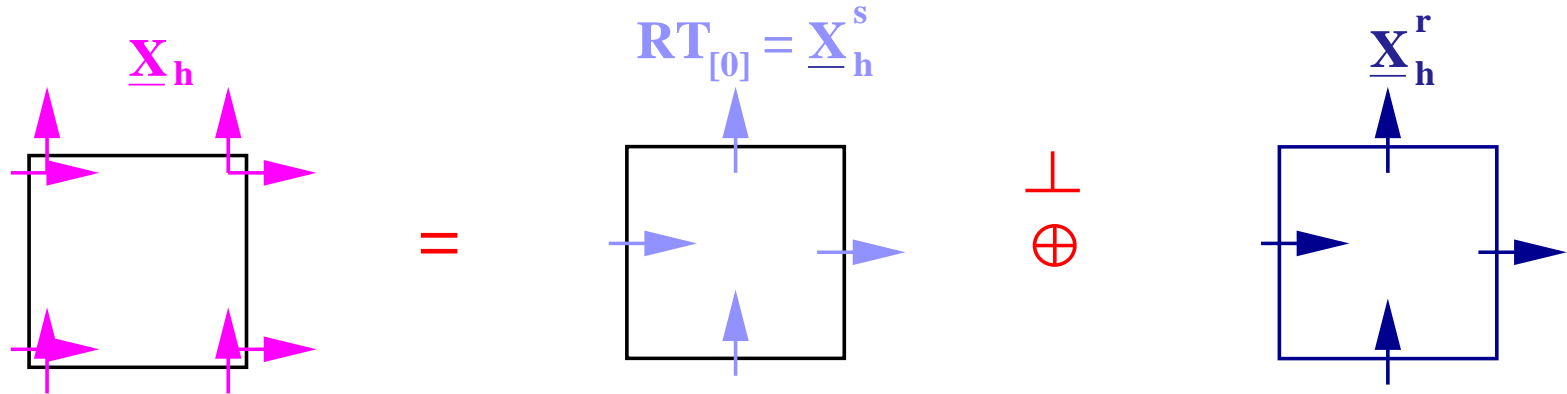
- Prise en compte de la symétrie forte:

$$\underline{\underline{X}}_h^{sym} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h \mid \mathbf{as}(\sigma_h) = 0\}$$



# Propriétés de $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$

$$\underline{\underline{X}}_h = \underline{X}_h^2, \quad \underline{X}_h = \{p_h \in H(\text{div}) \mid p_h|_K \in Q_1(K)\}$$



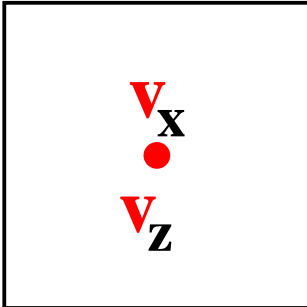
$$p_h = p_h^s + p_h^r, \quad (p_h^s, p_h^r)_{L^2} = 0, \quad (\text{div } p_h^r, w_h)_{L^2} = 0, \quad \forall w_h \in Q_0$$

$$\sigma_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym} \iff (\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in \underline{X}_h, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \in Q_1^{cont}$$

# Choix de l'espace $\underline{M}_h$ pour les vitesses

Premier choix:

$$\underline{M}_h = \{v_h \in (L^2)^2 \mid v_h|_K \in (Q_0(K))^2\} \not\neq \operatorname{div} \underline{\underline{X}}_h^{sym}$$



● Sans domaines fictifs : OK

analyse non standard ► *EB & PJ & CT, SINUM, 2002*

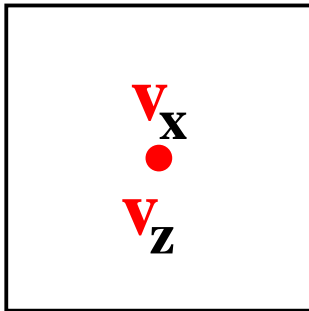
# Choix de l'espace $\underline{M}_h$ pour les vitesses

Premier choix:

$$\underline{M}_h = \{v_h \in (L^2)^2 \mid v_h|_K \in (Q_0(K))^2\} \not\subseteq \text{div } \underline{\underline{X}}_h^{sym}$$

● Sans domaines fictifs : OK

analyse non standard ► EB & PJ & CT, SINUM, 2002

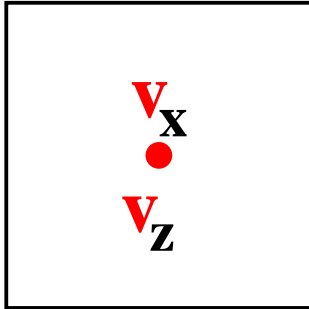


- Condition inf-sup OK
- $\ker D_h \not\subseteq \ker D \Rightarrow$  pas de coercivité de  $a(., .)$  sur  $\ker D_h$
- Convergence en norme  $L^2$ :  $|\sigma - \sigma_h|_{L^2} + \|v - v_h\|_M \rightarrow 0$ 
  - Technique de macroéléments

# Choix de l'espace $\underline{M}_h$ pour les vitesses

Premier choix:

$$\underline{M}_h = \{v_h \in (L^2)^2 \mid v_h|_K \in (Q_0(K))^2\} \not\subseteq \text{div } \underline{\underline{X}}_h^{sym}$$



- Sans domaines fictifs : OK

analyse non standard ► *EB & PJ & CT, SINUM, 2002*

- Avec domaines fictifs

analyse : ? ouverte

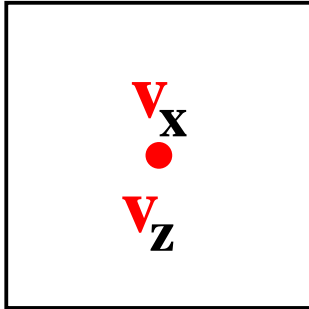
numériquement : ? ça dépend !



# Choix de l'espace $\underline{M}_h$ pour les vitesses

Premier choix:

$$\underline{M}_h = \{v_h \in (L^2)^2 \mid v_h|_K \in (Q_0(K))^2\} \not\supset \text{div } \underline{\underline{X}}_h^{sym}$$



● Sans domaines fictifs : OK

analyse non standard ► *EB & PJ & CT, SINUM, 2002*

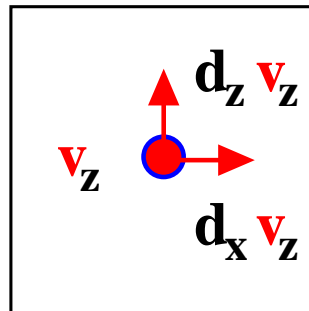
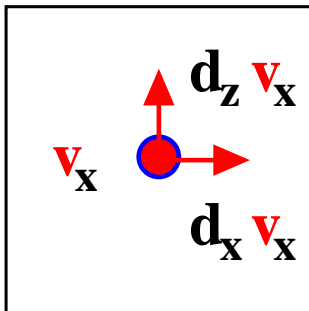
● Avec domaines fictifs

analyse : ? ouverte

numériquement : ? ça dépend !

Deuxième choix :

$$\underline{M}_h = \{v_h \in (L^2)^2 \mid v_h|_K \in (P_1(K))^2\} \supset \text{div } \underline{\underline{X}}_h^{sym}$$



● Sans domaines fictifs : OK

analyse plus standard ► *EB & JR & CT, en cours...*

● Avec domaines fictifs

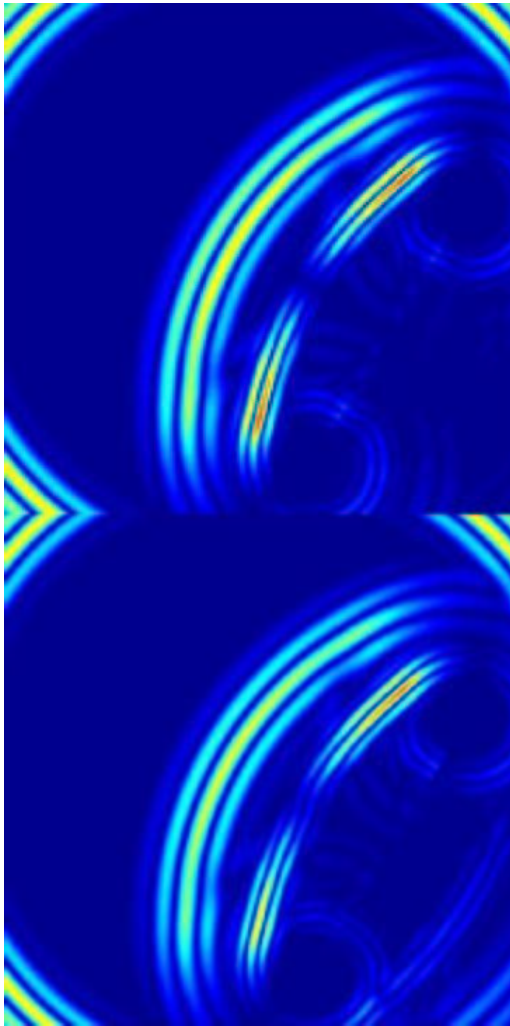
- analyse : OK pour modèle simplifié scalaire

- cas élastique : ? ► *EB & JR & CT, en cours...*

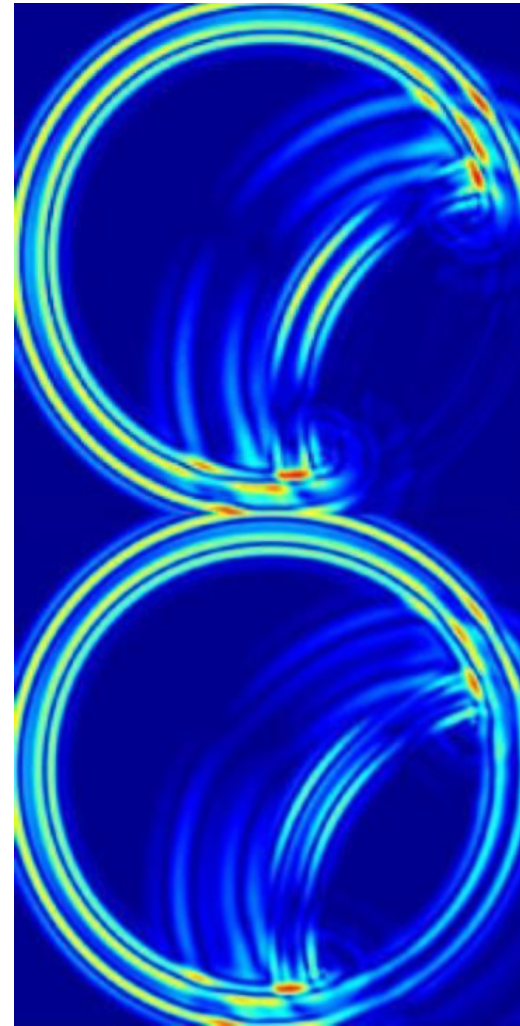
- numériquement : OK si  $H \geq 1.5h$

# Illustration des questions de convergence

(J. Rodriguez)



$$\mathcal{Q}_1^{\text{div}} \times \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{P}_1^{\text{cont}} \quad \mathcal{Q}_1^{\text{div}} \times \mathcal{P}_1^{\text{disc}} \times \mathcal{P}_1^{\text{cont}}$$



● Onde P incidente.

● Onde S incidente.

# Convergence avec domaines fictifs pour $Q_1^{div} - P_1^{disc} - P_1^{cont}$

Technique de Babuska, Joly & Rhaouti : ► Construction d'un opérateur d'interpolation ?

$$\|\sigma - \Pi_h \sigma\|_X \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym}$$

$$\|\sigma - \Pi_h \sigma\|_X \leq Ch^s |\sigma|_{s,div}, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym} \cap H^s(div)$$

On a seulement :

$$\inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{W}}$$

avec  $\underline{\underline{W}} = \{\tau_{11} \in H^{1,0}, \tau_{22} \in H^{0,1}, \tau_{12} = \tau_{21} \in H^1\}$ .

► Densité de  $\underline{\underline{W}}$  dans  $\underline{\underline{X}}^{sym}$  ?

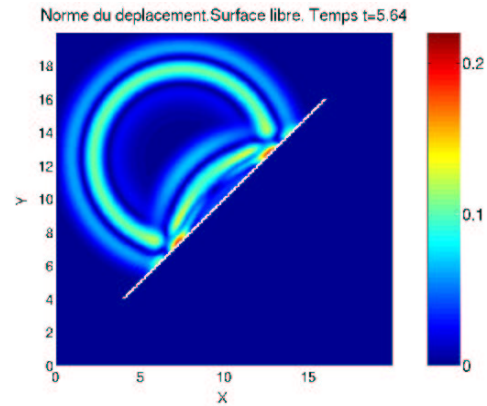
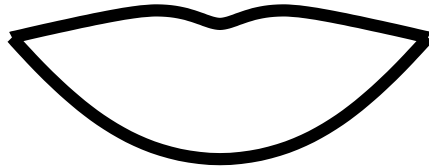
# *Limitations de la méthode des domaines fictifs*

- **Ordre de la méthode** : limité par la régularité de la solution
  - ▶ **ordre 1**
- **Autres conditions aux limites**
  - conditions aux limites de **transmission**
  - conditions aux limites de **Robin**
  - conditions aux limites **mixtes**

# Extensions - Modélisation de la fissure

SURFACE LIBRE (Thèse de *C. Tsogka*, EDF)

Problème linéaire

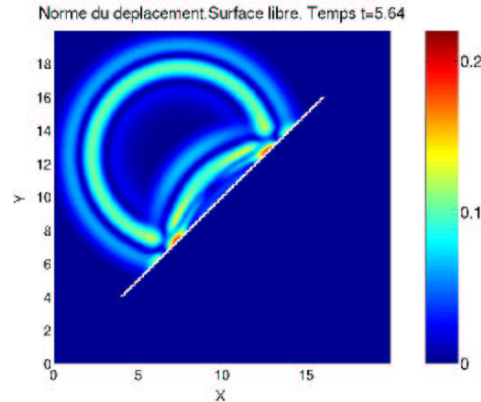
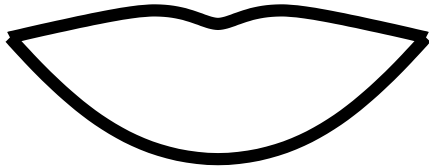


$$\sigma \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

# Extensions - Modélisation de la fissure

**SURFACE LIBRE** (Thèse de *C. Tsogka*, EDF)

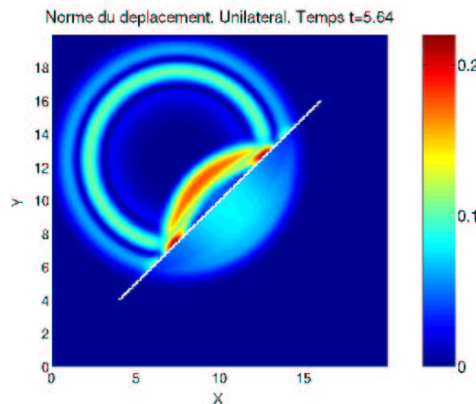
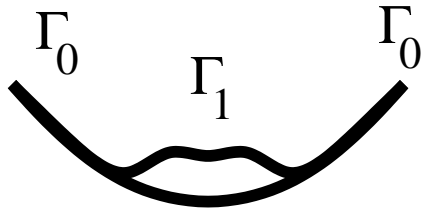
Problème linéaire



$$\sigma \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

**CONTACT UNILATÉRAL** (Thèse de *G. Scarella*, en cours, EDF-LMA)

Problème non linéaire



pas de frottement :

$$\sigma \vec{n} \times \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

contact sur  $\Gamma_0$  :

$$[u \cdot \vec{n}] = 0, \sigma \vec{n} \cdot \vec{n} \leq 0$$

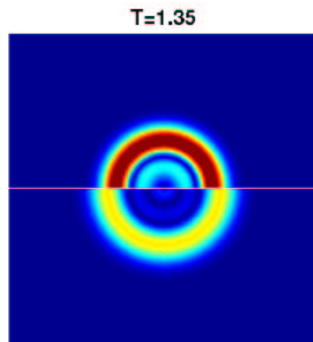
pas contact sur  $\Gamma_1$  :

$$[u \cdot \vec{n}] > 0, \sigma \vec{n} \cdot \vec{n} = 0$$

► **inéquations variationnelles** d'évolution

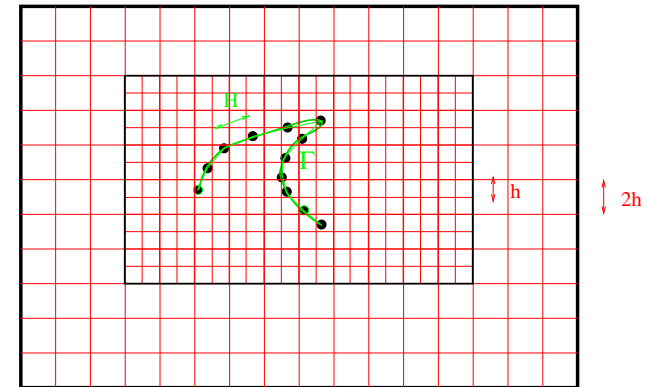
# Autres ...

## ● Extensions de la méthode pour les ondes dans les solides



Milieu visco-élastique

Thèse de **A. Ezziani** (en cours)



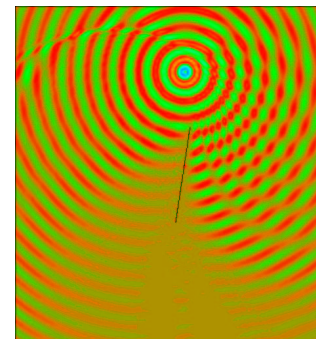
Raffinement espace-temps

Thèse de **J. Rodriguez** (en cours, EDF)

## ● Domaines fictifs

Guitare

Thèse de **G. Derveaux**



Obstacles mobiles

*EB & Ben Hadj Yedder  
& Joly & Komech*

# Couches absorbantes PML

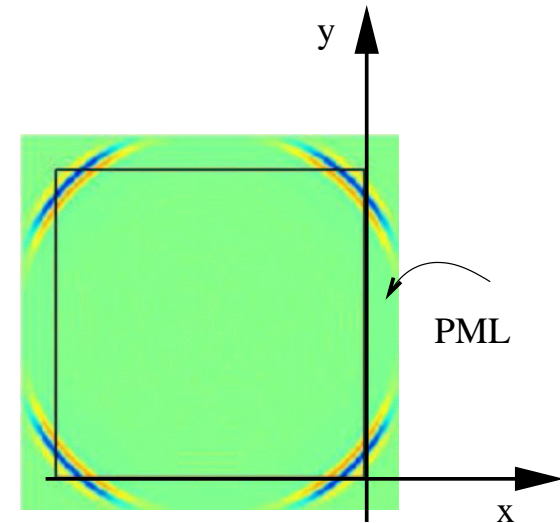
## Construction formelle (Collino & Tsogka)

- Le modèle de propagation

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} + A_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

- La décomposition du champ

$$\left\{ \begin{array}{l} U = U^x + U^y, \\ \frac{\partial U^x}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U^y}{\partial t} + A_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$



- Le modèle PML pour une couche parallèle à Oy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^x}{\partial t} + \zeta U^x + A_x \frac{\partial}{\partial x} (U^x + U^y) = 0, \\ \frac{\partial U^y}{\partial t} + A_y \frac{\partial}{\partial y} (U^x + U^y) = 0, \\ U = U^x + U^y, \quad \zeta = \zeta(x) \geq 0. \end{array} \right.$$



# PML en régime harmonique

- Les PML peuvent être interprétées comme un **changement de variable** (*Collino-Monk, Rappaport, Chew-Weedon*)

$$x \rightarrow x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \zeta(\xi) d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{avec} \quad 1/\alpha = 1 - \frac{\zeta}{i\omega}$$

- Parfaitement adaptées pour tout  $\alpha$ .

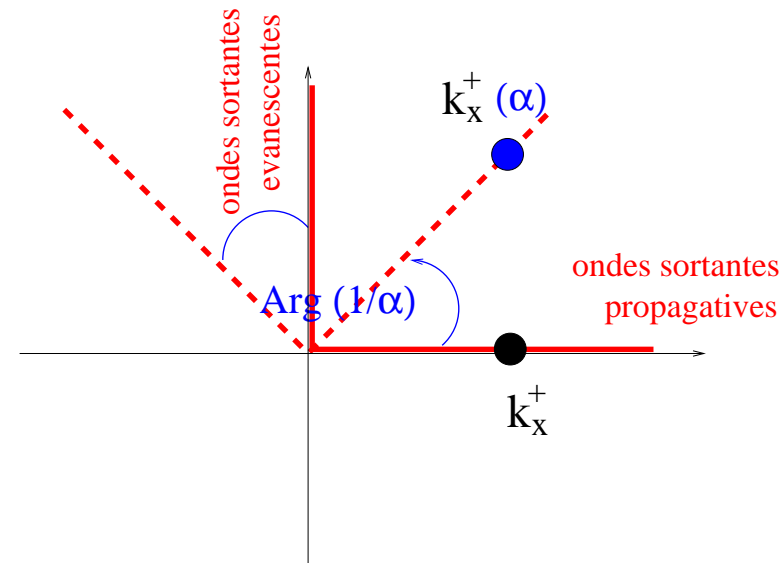
- Exemple des ondes acoustiques : Analyse par ondes planes

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{ik_x^+ x} e^{i(k_y y - \omega t)} \longrightarrow e^{ik_x^+(\alpha) x} e^{i(k_y y - \omega t)}, \\ k_x^+(\alpha) = \frac{k_x^+}{\alpha} \end{array} \right.$$

( $k_x^+$  : solution sortante de  $k_x^2 = \omega^2 - k_y^2$ )

- Milieu absorbant si  $\Im m k_x^+(\alpha) > 0, \quad \forall k_x^+$

donc si  $\Im m(\alpha) < 0, \Re e(\alpha) > 0$ .



# PML en régime harmonique

- Les PML peuvent être interprétées comme un **changement de variable** (*Collino-Monk, Rappaport, Chew-Weedon*)

$$x \rightarrow x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \zeta(\xi) d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \alpha \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{avec} \quad 1/\alpha = 1 - \frac{\zeta}{i\omega}$$

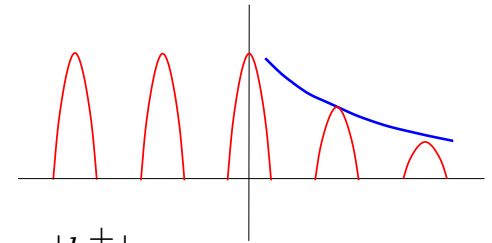
- ▶ **Parfaitement adaptées pour tout  $\alpha$ .**

- Exemple des ondes acoustiques : Analyse par ondes planes

- Choix de **Bérenger**: amortissement **indépendant de  $\omega$**

- Onde propagative d'incidence  $\beta$ : devient:

$$e^{i(\cos \beta x + \sin \beta y - \omega t)} \times e^{-\zeta \cos \beta x}$$



- Onde incidente évanescence: amortissement inchangé:  $e^{-|k_x^+|x}$ .

- Alternatives pour problème transitoire : changement de variable CFS

$$1/\alpha = 1 + \frac{\zeta}{\gamma - i\omega}$$

(*Kuzuoglu & Mittra, Gedney*, ▶ *EB & Petropoulos & Gedney*)

# Questions mathématiques

## ● Problème de Cauchy bien posé ?

Maxwell : *Abarbanel & Gottlieb, Zhao & Cangellaris, Métral & Vacus, Rahmouni*

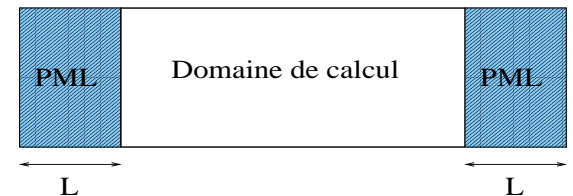
Autres : *Rahmouni*

## ● Système dissipatif ? stabilité ?

Maxwell : ► *EB & Joly, EB & Petropoulos & Gedney*

Autres : ► *EB & Fauqueux & Joly*

## ● Convergence ? Pour problème harmonique



Helmholtz : *Lassas & Somersalo, Hohage & Schmidt & Zschiedrich*

Helmholtz convecté : ► *EB & Bonnet & Legendre*

# Analyse hautes fréquences pour $\zeta$ constant

( EB & Fauqueux & Joly )

- Relation de dispersion dans le milieu physique (ondes planes  $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$ ):

$$F(\omega, k_x, k_y) = 0 \quad \blacktriangleright \quad \omega = \omega_0(k) \in \mathbb{R}$$

- Relation de dispersion dans le modèle PML :

$$F\left(\omega, k_x \left(\frac{i\omega}{i\omega + \zeta}\right), k_y\right) = 0.$$

Pour  $\zeta/|k|$  petit ( $K = k / |k|$ ) :  $\omega(k, \zeta) = \omega_0(k) + i\rho(K) \zeta + O(1/|k|)$ .

- $\Im m \omega(k, \zeta)$  borné lorsque  $|k| \rightarrow +\infty$   $\blacktriangleright$  problème toujours **faiblement bien posé**, quelque soit  $\zeta$
- Signe de  $\Im m \omega(k, \zeta)$  ?

$$\rho(K) = \frac{K_x (V_g(K))_x}{\omega_0(K)}, \quad \blacktriangleright \text{CN de stabilité : } (V_L(K))_x (V_g(K))_x \geq 0$$

Interprétation géométrique à l'aide des surfaces de lenteur

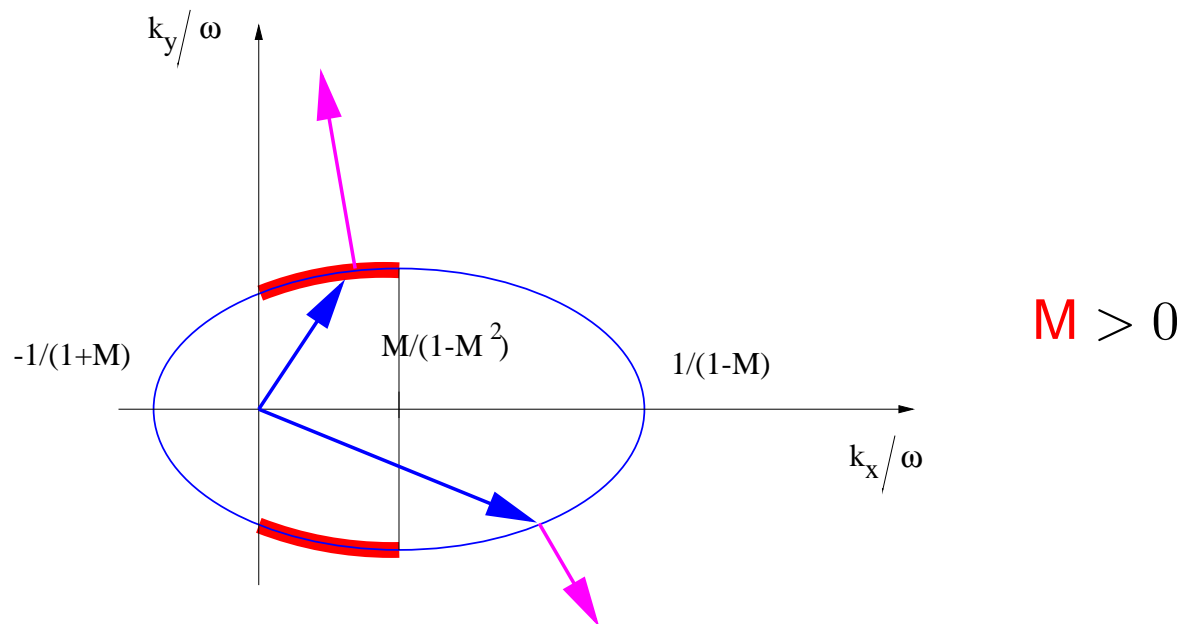
# Illustration de la condition nécessaire de stabilité

## L'acoustique en écoulement

Relation de dispersion :

$$(\omega + M k_x)^2 - k_x^2 - k_y^2 = 0 \longrightarrow \text{ellipse}$$

Le modèle PML associé est **instable** pour  $M \neq 0$  ( $M$  = nombre de Mach).

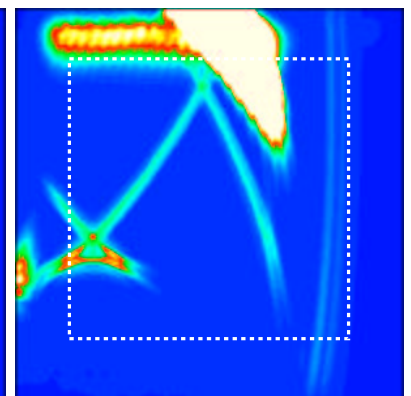
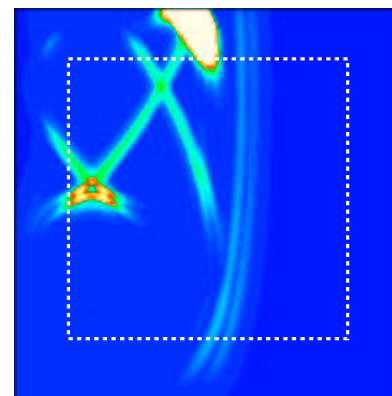
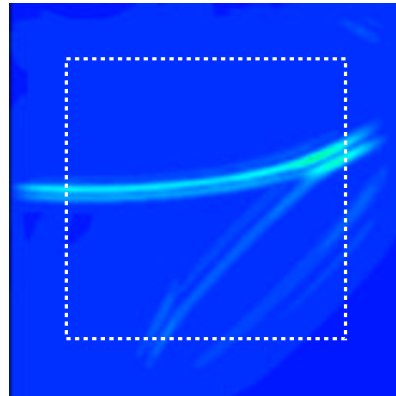
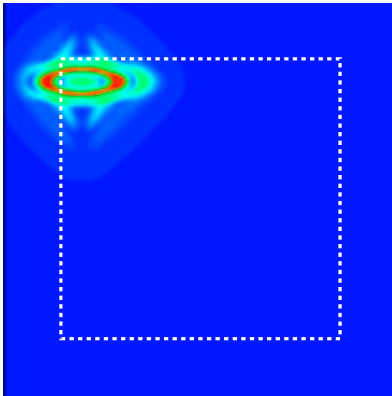
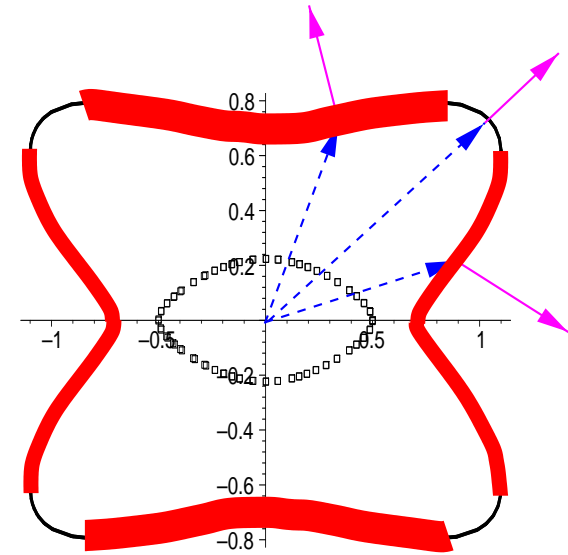
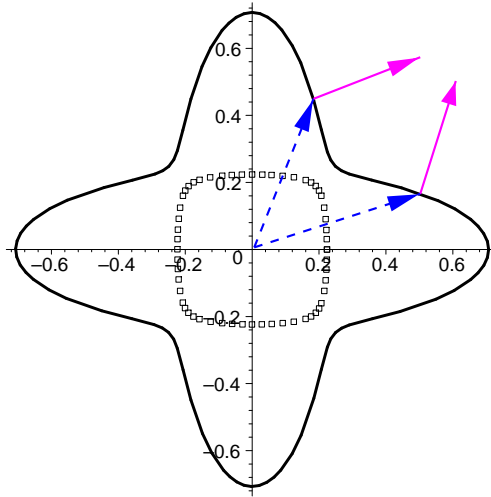


*Abarbanel & Gottlieb & Hesthaven, Hagstrom, Hu, Diaz & Joly*

► *EB & Bonnet & Legendre*

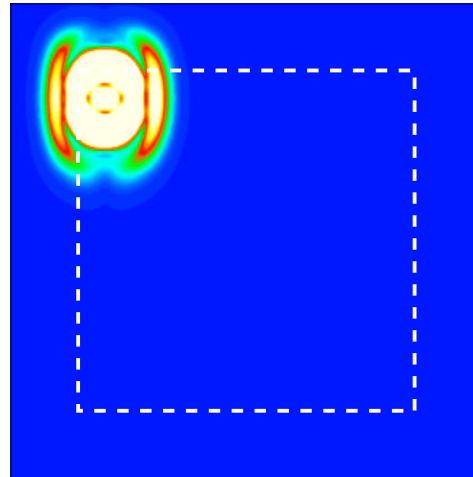
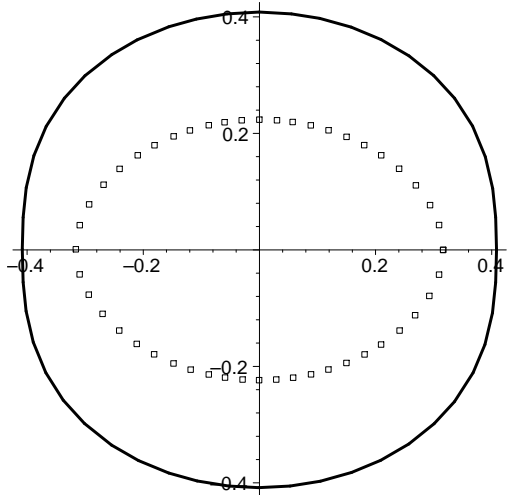
# Illustration de la condition nécessaire de stabilité

## Ondes élastiques

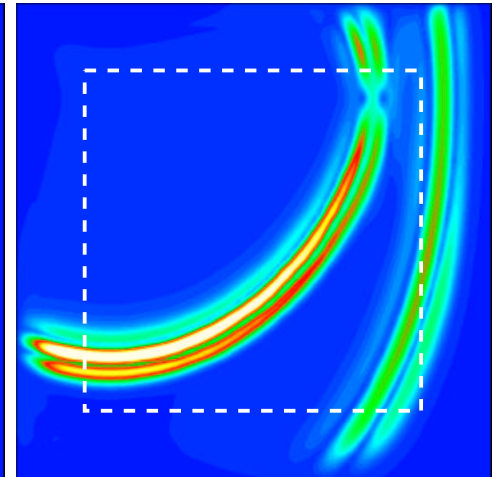


# Illustration de la condition nécessaire de stabilité

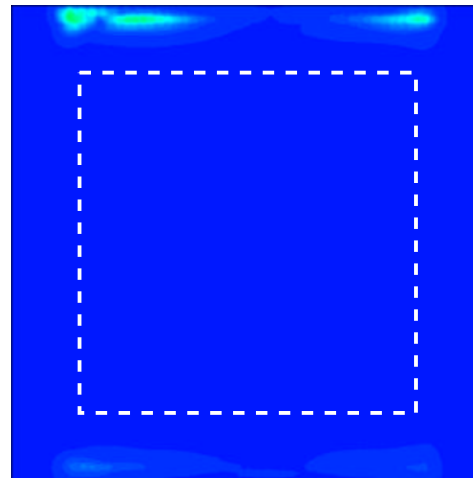
Ondes élastiques : une autre instabilité



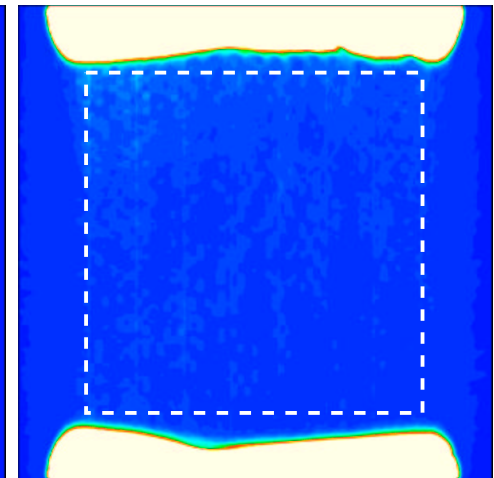
t=2s



t=9s



t=400s



t=800s

# Quelques perspectives...

- Extensions en cours + analyse domaines fictifs ...
- domaines fictifs pour d'autres conditions aux limites
- Obstacles mobiles
  
- Nouvelle collaboration avec Shell sur propagation en milieux poro-élastiques (Thèse de [A. Ezziani](#))
- Projet de collaboration NSF/INRIA sur les PML en transitoire avec [J. Hesthaven](#) & [P. Petropoulos](#)
- Collaboration Ensta ([A.S. Bonnet](#) &...) sur PML en harmonique (acoustique en écoulement, ondes de Lamb)
- Problème inverse (avec [H. Haddar](#) & [T. Ha Duong](#))
- ...



**C'est fini!...**

## Ce à quoi vous avez échappé...

Convergence sans domaines fictifs pour  $Q_1^{div} - Q_0$ :  $\ker D_h \not\subset \ker D \Rightarrow$  pas de coercivité de  $a(.,.)$  sur  $\ker D_h$ .

$$\begin{aligned}
 a(\tau, \tau) &\geq \alpha |\tau|_H^2 \\
 \text{avec } \underline{H} &= (L^2)^4 \\
 &|\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M \leq \inf_{\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}} \sup_{w_h \in \underline{M}_h} \frac{d(w_h, \tau_h)}{\|w_h\|_M \|\tau_h\|_X} \geq k \\
 &\quad + \inf_{\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}} \sup_{w_h \in \underline{M}_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\|v - w_h\|_M \|\tau_h\|_X} \\
 &\quad + \inf_{\tau_h \in \underline{X}_h^{sym}} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{\alpha |\tau_h|_H}{\|\sigma - \tau_h\|_X} \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{W}
 \end{aligned}$$

Propriétés des éléments Raviart-Thomas sur maillage régulier  $\underline{Q}_1^{cont}$ :

avec  $\underline{W} = \{ \tau_{11} \in H^{1,0}, \tau_{22} \in H^{0,1}, \tau_{12} = \tau_{21} \in H^1 \}$

$$\inf_{w_h \in \underline{M}_h} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\alpha |\tau_h|_H} \rightarrow 0, \quad \forall w \in (H_0^1)^2$$

Convergence des domaines fictifs: Analyse de Girault & Glowinski: sous la condition  $H \geq 3h$ , il

$$b_\Gamma(v - \Pi_h v, \mu_H) = 0, \quad \|\Pi_h v\|_1 \leq C \|v\|_1$$

## **Convergence sans domaines fictifs pour $Q_1^{div} - Q_0$**

$\ker D_h \not\subset \ker D \Rightarrow$  pas de coercivité de  $a(., .)$  sur  $\ker D_h$ .

# Convergence sans domaines fictifs pour $Q_1^{div} - Q_0$

$$a(\tau, \tau) \geq \alpha |\tau|_H^2$$

$$\text{avec } \underline{\underline{H}} = (L^2)^4$$

+

$$\exists k > 0, \quad \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \frac{d(w_h, \tau_h)}{\|w_h\|_M \|\tau_h\|_X} \geq k$$

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M &\leq \inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X + \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \|v - w_h\|_M \\ &+ \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\alpha |\tau_h|_H} \end{aligned}$$

# Convergence sans domaines fictifs pour $Q_1^{div} - Q_0$

$$a(\tau, \tau) \geq \alpha |\tau|_H^2$$

$$\text{avec } \underline{\underline{H}} = (L^2)^4$$

+

$$\exists k > 0, \quad \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \frac{d(w_h, \tau_h)}{\|w_h\|_M \|\tau_h\|_X} \geq k$$

$$|\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M \leq \boxed{\inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X} + \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \|v - w_h\|_M$$

$$+ \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\alpha |\tau_h|_H}$$

Propriétés des éléments Raviart-Thomas sur maillage régulier +  $Q_1^{cont}$ :

$$\inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{W}}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{W}} = \{ \tau_{11} \in H^{1,0}, \tau_{22} \in H^{0,1}, \tau_{12} = \tau_{21} \in H^1 \}$$

# Convergence sans domaines fictifs pour $Q_1^{div} - Q_0$

$$a(\tau, \tau) \geq \alpha |\tau|_H^2$$

$$\text{avec } \underline{\underline{H}} = (L^2)^4$$

+

$$\exists k > 0, \quad \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \frac{d(w_h, \tau_h)}{\|w_h\|_M \|\tau_h\|_X} \geq k$$

$$|\sigma - \sigma_h|_H + \|v - v_h\|_M \leq \inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X + \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \|v - w_h\|_M$$

$$+ \inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\alpha |\tau_h|_H}$$

Technique de macroéléments:

$$\inf_{w_h \in \underline{\underline{M}}_h} \sup_{\tau_h \in \ker D_h} \frac{d(v - w_h, \tau_h)}{\alpha |\tau_h|_H} \rightarrow 0, \quad \forall w \in (H_0^1)^2$$

# Convergence des domaines fictifs

(pour  $\Delta$  avec CL de Dirichlet)

- Analyse *Girault & Glowinski* : sous la condition  $H \geq 3h$ , il existe un opérateur  $\Pi_h : H^1(C) \rightarrow X_h$  tel que

$$b_{\Gamma}(v - \Pi_h v, \mu_H) = 0, \quad \|\Pi_h v\|_1 \leq C \|v\|_1$$

Construction à partir de l'**opérateur de Clément**

► ne s'étend pas à  $H(\text{div})$  (*Garces* pour  $H(\text{rot})$ )

# Convergence des domaines fictifs

(pour  $\Delta$  avec CL de Dirichlet)

- Analyse *Girault & Glowinski* : sous la condition  $H \geq 3h$ , il existe un opérateur  $\Pi_h : H^1(C) \rightarrow X_h$  tel que

$$b_{\Gamma}(v - \Pi_h v, \mu_H) = 0, \quad \|\Pi_h v\|_1 \leq C \|v\|_1$$

Construction à partir de l'opérateur de Clément

► ne s'étend pas à  $H(\text{div})$  (*Garces* pour  $H(\text{rot})$ )

- Analyse *Babuska* :

- Relèvement continu (pour condition inf-sup continue) :

$$\mu_H \in S_H \subset H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow v^H \in H^{1+s}(C), \quad b_{\Gamma}(v^H, \mu_H) \geq C |\mu_H|_{-1/2}^2$$

- $\Pi_h : H^{1+s}(C) \rightarrow X_h, \quad \|v - \Pi_h v\|_1 \leq Ch^s \|v\|_{1+s}$

- $$b_{\Gamma}(\Pi_h v^H, \mu_H) = \underbrace{b_{\Gamma}(v^H, \mu_H)}_{\geq C |\mu_H|_{-1/2}^2} - \underbrace{b_{\Gamma}(v^H - \Pi_h v^H, \mu_H)}_{\leq (h/H)^s |\mu_H|_{-1/2}^2}$$



# Convergence avec domaines fictifs pour $Q_1^{div} - P_1^{disc} - P_1^{cont}$

- Cas scalaire: problème en  $(p, \lambda) \in \underline{X} \times H_{(00)}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

$\underline{X}_h \supset \underline{X}_h^{RT}$ , condition inf-sup OK (Joly & Rhaouti)

- Cas élastique: Construction d'un opérateur d'interpolation ?

$$\|\sigma - \Pi_h \sigma\|_X \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym}$$

$$\|\sigma - \Pi_h \sigma\|_X \leq Ch^s |\sigma|_{s, div}, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{X}}^{sym} \cap H^s(div)$$

On a seulement :

$$\inf_{\tau_h \in \underline{\underline{X}}_h^{sym}} \|\sigma - \tau_h\|_X \rightarrow 0, \quad \forall \sigma \in \underline{\underline{W}}$$

avec  $\underline{\underline{W}} = \{\tau_{11} \in H^{1,0}, \tau_{22} \in H^{0,1}, \tau_{12} = \tau_{21} \in H^1\}$ .

► Densité de  $\underline{\underline{W}}$  dans  $\underline{\underline{X}}^{sym}$  ?