



**HAL**  
open science

# Modélisation asymptotique de plaques : contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité

Abdou Sène

► **To cite this version:**

Abdou Sène. Modélisation asymptotique de plaques : contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1999. Français. NNT : . tel-00004849

**HAL Id: tel-00004849**

**<https://theses.hal.science/tel-00004849>**

Submitted on 18 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée par

**Abdou SÈNE**

Pour obtenir le titre de

**Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I  
et de l'Université Gaston Berger - St. Louis, Sénégal**

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées.**

---

## **Modélisation asymptotique de plaques : Contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité**

---

Soutenue le 20 janvier 1999.

Composition du jury :

<b>D. Cioranescu</b>	Directeur de Recherche CNRS	Présidente
<b>M. Bernadou</b>	Directeur de Recherche INRIA	Rapporteur
<b>E. Zuazua</b>	Professeur Université Complutense, Madrid	Rapporteur
<b>D. Caillerie</b>	Professeur INP Grenoble	Examineur
<b>M. T. Niane</b>	Professeur UGB Sénégal	Examineur
<b>A. Raoult</b>	Professeur UJF Grenoble	Examineur

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG  
et du laboratoire LANI-UGB

## Remerciements

*Je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont apporté leur soutien dans la réalisation de ce travail, en particulier à :*

*M. Mary Teuw NIANE et MM. Annie RAOULT qui ont su me proposer des sujets d'actualité très enrichissants. Dans un esprit de rigueur objective, ils m'ont initié à divers domaines de recherche. Je salue également leurs qualités humaines. Qu'ils soient assurés de ma profonde reconnaissance.*

*M. Michel BERNADOU et Enrique ZUAZUA qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce travail. Je les remercie chaleureusement pour l'effort qu'ils ont fourni et l'intérêt qu'ils ont porté à ce document.*

*M. Denis CAILLERIE et MM. Doina CIORANESCU qui ont bien voulu faire partie de ce jury, et examiner cette thèse.*

*Je remercie vivement tous mes collègues et amis de l'UFR-MAI-UGB et du LMC pour leur aide scientifique, matérielle et morale. Sans l'environnement favorable que vous avez su instaurer, faire ce travail aurait été très pénible.*

*Je remercie M. Olivier BESSON de l'Université de Neuchâtel pour avoir enrichi la bibliothèque de l'UFR-MAI d'un don d'ouvrages scientifiques des plus récents.*

*Mes remerciements vont aussi à l'Académie du tiers-monde, et à Eco-africa pour le soutien matériel qu'ils ont bien voulu apporté au laboratoire LANI.*

*Mes amis de la communauté sénégalaise de Grenoble, vous avez tous mes remerciements. Votre esprit naturel de solidarité m'a été d'un apport considérable.*

*Je tiens à témoigner ma profonde gratitude à la famille NIANE pour avoir guidé avec beaucoup d'humanité mes premiers pas à l'Université de Saint-Louis. J'avoue que sans votre soutien matériel et moral, mon séjour à Saint-Louis aurait tourné court.*

*Enfin, je ne saurais clore ces remerciements sans en adresser à ma grande famille et à ma mère. Je n'ai eu que la part facile du travail. Il est très reposant de naître dans une famille où la mère et le père ont le sens très poussé de la responsabilité, et où les frères et soeurs constituent chacun à sa façon un modèle à suivre. Je suis incapable d'exprimer tout l'amour que je vous porte, mais le bon Dieu est Témoin de Tout.*

Modélisation asymptotique de plaques : Contrôlabilité  
exacte frontière, piézoélectricité.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Contrôlabilité exacte</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Contrôlabilité exacte frontière et limite asymptotique des corps élastiques minces</b>	<b>11</b>
1.1	Introduction . . . . .	11
1.2	Equations, position du problème et résultats préliminaires . . . . .	14
1.2.1	Equations mécaniques . . . . .	14
1.2.2	Position du problème . . . . .	15
1.2.3	Résultats préliminaires . . . . .	16
1.2.4	Estimations d'énergie pour le problème tridimensionnel . . . . .	17
1.3	Quelques identités liées au système mécanique . . . . .	19
1.4	Contrôlabilité exacte du problème tridimensionnel . . . . .	26
1.4.1	Estimations d'énergie pour le problème tridimensionnel . . . . .	26
1.4.2	Formulation de la transposition . . . . .	29
1.5	L'opérateur HUM . . . . .	33
1.6	Analyse asymptotique . . . . .	35
1.6.1	Quelques résultats d'analyse asymptotique . . . . .	35
1.6.2	Identification du contrôle limite . . . . .	38

<b>II</b>	<b>Modélisation de plaques piézoélectriques</b>	<b>49</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
2.1	Piézoélectricité : généralités . . . . .	51
2.2	Modèle mathématique de la piézoélectricité . . . . .	53
2.3	Notations . . . . .	55
2.4	Objet de l'étude. Principaux résultats obtenus . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Cas statique</b>	<b>65</b>
3.1	Lois de comportement . . . . .	66
3.2	Analyse asymptotique des équations de Maxwell-Gauss . . . . .	67
3.2.1	Les équations électriques (Maxwell-Gauss) . . . . .	67
3.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	68
3.2.3	Changement d'ouvert et mise à l'échelle des inconnues . . . . .	69
3.2.4	Majoration de normes et convergences faibles . . . . .	70
3.2.5	Les espaces $\Psi_l$ et $\Psi_{l_0}$ . . . . .	72
3.2.6	Equations limites . . . . .	75
3.3	Analyse asymptotique en piézoélectricité statique . . . . .	79
3.3.1	Equations électro-mécaniques . . . . .	79
3.3.2	Changement d'ouvert et mise à l'échelle des inconnues . . . . .	81
3.3.3	Majoration de normes et convergences faibles . . . . .	83
3.3.4	Identification du problème limite . . . . .	86
3.4	Résultats de convergence forte . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Cas dynamique</b>	<b>103</b>
4.1	Electromagnétisme d'évolution . . . . .	103

---

4.2	Résultats d'existence en piézoélectricité dynamique . . . . .	117
4.3	Analyse asymptotique en piézoélectricité dynamique . . . . .	132
4.3.1	Formulation variationnelle . . . . .	133
4.3.2	Majoration de normes et convergences . . . . .	134
4.3.3	Identification du problème limite . . . . .	138
4.3.4	Résultats de convergence forte . . . . .	145
 <b>III Calcul de coefficients de singularité pour un problème elliptique</b>		<b>159</b>
<b>5</b>	<b>Une méthode de calcul des coefficients des solutions singulières. Approximation des solutions</b>	<b>161</b>
5.1	Introduction . . . . .	163
5.1.1	Objet du travail et résultats obtenus . . . . .	163
5.1.2	Plan du travail . . . . .	165
5.2	Cas de l'équation de Laplace . . . . .	166
5.2.1	Notations et position du problème . . . . .	166
5.2.2	Calcul du coefficient $\gamma$ . . . . .	168
5.2.3	Approximation numérique du coefficient $\gamma$ . . . . .	180
5.2.4	Approximation de la solution $u$ . . . . .	187





# Introduction générale

La contrôlabilité exacte d'un système dynamique consiste à l'amener d'un état à un autre fixé, par une action extérieure, en un temps  $T$  donné. Pour un système linéaire réversible, cela revient à l'amener au repos. Un exemple concret de contrôlabilité exacte est celui des systèmes régis par l'équation des ondes. Pour ce cas, une méthode a été développée par Lions [6]. C'est la méthode HUM que nous allons utiliser pour la contrôlabilité exacte de plaques élastiques. Cette méthode suggère que l'on peut amener au repos une plaque élastique vibrante en lui appliquant des forces à la surface ou à l'intérieur. Des dispositifs bien connus de contrôle sont ceux mettant en jeu des matériaux piézoélectriques, qui peuvent servir aussi bien à détecter les vibrations de la plaque qu'à lui imposer des forces de contrôle.

Le **premier chapitre** de ce mémoire est consacré à la justification, par une approche asymptotique, du modèle de contrôlabilité exacte frontière pour une plaque élastique bidimensionnelle obtenu par Niane [7] et par Zuazua [6]. Pour ce faire, on résout le problème de contrôlabilité exacte pour une plaque tridimensionnelle d'épaisseur  $h$  en contrôlant uniquement l'intérieur et la frontière latérale de la plaque. Puis, on étudie le comportement asymptotique lorsque  $h$  tend vers 0 ; les contrôles intérieurs étant choisis de telle sorte qu'ils disparaissent à la limite. Ainsi, on parvient à contrôler une plaque bidimensionnelle avec des forces appliquées uniquement à sa frontière.

Après une présentation générale au **chapitre 2** de la piézoélectricité et des équations de Maxwell qui fournissent le champ électromagnétique, dans les **chapitres 3 et 4**, on étudie le comportement d'une plaque piézoélectrique lorsque son épaisseur tend vers 0.

Tout d'abord, on fait l'analyse asymptotique des équations de Maxwell-Gauss statiques qui régissent le comportement du potentiel électrique qui intervient dans les lois de comportement des matériaux piézoélectriques. Cette étude préliminaire nous permet de dégager et d'analyser les espaces fonctionnels dans lesquels on peut chercher le potentiel électrique.

On effectue ensuite l'analyse asymptotique du modèle piézoélectrique statique, complet. D'une part, celle-ci justifie les modèles de Bernadou [4] et de Rogacheva [35] qui supposent que, sur une plaque mince, le potentiel électrique peut être assimilé à un polynôme du second degré en  $x_3$ , la coordonnée d'espace suivant l'épaisseur de la plaque. D'autre part, on retrouve les modèles de Banks [3] et Destuynder [14], qui ont conçu des modèles bidimensionnels dans lesquels les équations d'équilibre mécanique, pour les composantes horizontales du déplacement, sont liées au potentiel électrique uniquement par la différence de potentiel qui intervient dans leur second membre. On montre également la contribution des termes piézoélectriques dans l'opérateur de flexion.

Dans le **quatrième chapitre**, on traite le cas de la piézoélectricité dynamique. Ici, on considère les équations de Maxwell complètes, c'est-à-dire qu'on ne fait pas l'hypothèse quasi-électrostatique qui suppose que le champ magnétique est négligeable. Avant de s'attaquer à la résolution du problème complet, on résout le système d'équations constitué par les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère dans une plaque cylindrique. Ce dernier travail nous permet d'étudier les caractéristiques des espaces dans lesquels on cherche le potentiel vecteur magnétique dont le rotationnel est égal au champ magnétique.

Fort des études préliminaires statiques et dynamiques citées ci-dessus, on donne un théorème d'existence et d'unicité de la solution du système d'équations piézoélectriques dynamiques complet. C'est un système de trois équations aux dérivées partielles (équation d'équilibre mécanique, équation de Maxwell-Gauss, équation de Maxwell-Ampère) à trois inconnues (vecteur déplacement, potentiel vecteur magnétique, potentiel électrique). Enfin, on montre que, quand l'épaisseur de la plaque tend vers 0, la solution trouvée converge fortement vers une limite qui est solution d'un modèle bidimensionnel que l'on appelle modèle de plaque piézoélectrique.

Le **chapitre 5** est consacré au calcul de coefficients de singularité sur un ouvert bidimensionnel polygonal non convexe, coefficients qui, par exemple, dans le cas d'un ouvert fissuré, correspondent à la vitesse de propagation des fissures (voir [8]). Dans le cas de l'équation de la chaleur ou de Maxwell-Gauss, ils correspondent respectivement à l'intensité de la chaleur ou du champ électrique au sommet des angles non convexes. Nous utilisons l'équation de Laplace qui modélise une membrane chauffée ou soumise à un champ électrique. Notons que toutes les techniques utilisées dans ce chapitre peuvent être étendues à l'opérateur bilaplacien, c'est-à-dire aux plaques élastiques bidimensionnelles. Nous complétons notre étude en donnant, par une méthode d'éléments finis classique, une approximation numérique aussi bien des coefficients de singularité que de la solution de l'équation de Laplace.

Première partie

Contrôlabilité exacte



# Chapitre 1

## Contrôlabilité exacte frontière et limite asymptotique des corps élastiques minces

### 1.1 Introduction

La contrôlabilité exacte consiste à agir sur un système qui évolue au cours du temps pour l'amener d'un état à un autre fixé. Pour un système linéaire réversible, cela revient à l'amener au repos. Si les conditions initiales du système sont connues, dans le cas de l'équation des ondes, J. L. Lions [6] propose la méthode HUM ("Hilbert Uniqueness Method") que l'on peut adapter à bien d'autres situations telles que le contrôle des corps élastiques. Ici, nous nous intéressons à la justification, par une approche asymptotique, du modèle de contrôlabilité exacte frontière pour une plaque élastique bidimensionnelle obtenu par Niane [7] et par Zuazua [6]. Pour ce faire, on résout le problème de contrôlabilité exacte pour une plaque tridimensionnelle d'épaisseur  $h$  en contrôlant uniquement l'intérieur et la frontière latérale de la plaque. Puis, on étudie le comportement asymptotique, lorsque  $h$  tend vers 0, des contrôles et des solutions contrôlées ; les contrôles intérieurs étant choisis de telle sorte qu'ils disparaissent à la limite.

Notons qu'un sujet voisin a été récemment traité par Figueiredo et Zuazua [4], puis par Saint Jean Paulin et Vanninathan [13], qui ont obtenu, à la limite, un contrôle distribué à tout l'intérieur de la plaque bidimensionnelle. L'intérêt de ce présent travail se situe essentiellement à ce niveau ; ici, en faisant tendre  $h$  vers 0, nous aboutissons à

un contrôle exact n'agissant que sur le bord latéral de la plaque bidimensionnelle. Un résultat analogue est obtenu par Yan [14] dans le cas plus simple de l'équation des ondes sur un domaine de dimension  $n$  quelconque.

## Objet de l'étude. Principaux résultats obtenus

Dans la suite, nous faisons la convention de sommation sur l'indice répété, les indices latins étant dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  et les indices grecs dans  $\{1, 2\}$  par défaut. Et  $c$  représente différentes constantes indépendantes de  $h$ .

Soit un corps élastique, homogène, isotrope occupant le domaine  $\Omega^h = \omega \times (-h, h)$ , où  $\omega$  est un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\gamma$ . Notons  $\Sigma^{h+}$  la face supérieure de la plaque,  $\Sigma^{h-}$  sa face inférieure, et  $\Sigma_l^h$  la frontière latérale de  $\Omega^h$ . Définissons aussi les domaines

$$Q^h = \Omega^h \times ]0, T[, \quad \Sigma^{h\pm} = \Sigma^{h\pm} \times ]0, T[, \quad \Sigma_l^h = \Sigma_l^h \times ]0, T[.$$

Par la méthode HUM de Lions [6], on contrôle exactement les vibrations de la plaque  $\Omega^h$  avec des contrôles intérieurs et surfaciques latéraux. Autrement dit, pour des conditions initiales données, et un temps  $T$  assez grand, on trouve des contrôles  $\mathbf{f}^h$  et  $\mathbf{u}_0^h$  tels que la solution du système

$$\begin{cases} \rho^h \mathbf{u}^{h''} - \operatorname{div} \sigma^h(\mathbf{u}^h) = \mathbf{f}^h & \text{dans } Q^h, \\ \sigma^h(\mathbf{u}^h) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^{h\pm}, \\ \mathbf{u}^h = \mathbf{u}_0^h & \text{sur } \Sigma_l^h, \\ \mathbf{u}^h(0) = \mathbf{y}_0^h, \quad \mathbf{u}^{h'}(0) = \mathbf{y}_1^h & \text{dans } \Omega^h, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\sigma_{ij}^h(\mathbf{u}^h) = \lambda e_{pp}^h(\mathbf{u}^h) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^h(\mathbf{u}^h)$ , vérifie  $\mathbf{u}^h(T) = \mathbf{u}^{h'}(T) = 0$ .

Soit  $\mathbf{x}_0$  un point du plan contenant  $\omega$ . Définissons  $\mathbf{q}$  par  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, 0)$ . En utilisant la même mise à l'échelle des inconnues et des données que [11], et la méthode

HUM, nous obtenons le système contrôlé

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho u_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 2\rho h^2 \phi_\alpha(h)'' + 2\partial_3 \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \rho u_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 4\partial_3 \sigma_{33}(h)(\phi(h)) + 2\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\mathbf{u}(h)) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{u}(h) = (\mathbf{q} \cdot \nu) \partial_\nu \phi(h) & \text{sur } \Sigma_l, \\ \mathbf{u}(h)(0) = \mathbf{y}_0(h), \quad \mathbf{u}(h)'(0) = \mathbf{y}_1(h) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(h)(T) = 0, \quad \mathbf{u}(h)'(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où  $\phi(h)$  est la solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho \phi_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\phi(h)) = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho \phi_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\phi(h)) = 0 & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\phi(h)) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \phi(h) = 0 & \text{sur } \Sigma_l, \\ \phi(h)(0) = \phi^0(h), \quad \phi(h)'(0) = \phi^1(h) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

avec des conditions initiales  $\phi^0(h) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)^3$ ,  $\phi^1(h) \in L^2(\Omega)^3$  données par  $(\mathbf{y}_0(h), \mathbf{y}_1(h))$  à travers l'opérateur HUM  $\Lambda$  que nous définirons ultérieurement.

Ensuite, nous étudions le comportement asymptotique des contrôles et des déplacements lorsque  $h$  tend vers 0 en nous aidant des résultats de Ciarlet [2], Raoult [11]. Les résultats de [2] et [11] sont généralisés dans la partie II de cette thèse au cas de la piézoélectricité. Lorsque  $h$  tend vers 0, le système contrôlé (1.2) fournit le système limite contrôlé

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2\rho \xi_3'' - \partial_{\alpha\beta} \left( \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \Delta \xi_3 \delta_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha\beta} \xi_3 \right] \right) = 0 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \xi_3 = 0, \quad \partial_\nu \xi_3 = v & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\ \xi_3(0) = p_3, \quad \xi_3'(0) = q_3 & \text{dans } \omega, \\ \xi_3(T) = 0, \quad \xi_3'(T) = 0 & \text{dans } \omega \end{array} \right. \quad (1.4)$$

avec  $v = (\mathbf{q} \cdot \nu) \partial_\nu^2 \phi_3$ , où  $\phi_3$  est solution d'une équation bidimensionnelle de plaque dont les conditions initiales sont données par  $(p_3, q_3)$ .

Ainsi, en contrôlant l'intérieur et la frontière latérale d'une famille de plaques tridimensionnelles, nous aboutissons à la contrôlabilité exacte frontière pour l'équation de plaque bidimensionnelle.



## 1.2 Equations, position du problème et résultats préliminaires

Soit  $\mathbf{u}^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$  le vecteur déplacement. On note  $\sigma^h(\mathbf{u}^h)$  le tenseur des contraintes et  $\mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h)$  celui des déformations, avec  $e_{ij}^h(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^h + \partial_j u_i^h)$ .

### 1.2.1 Equations mécaniques

Soient  $\rho^h$  la densité massique du matériau élastique occupant le domaine  $\Omega^h$ ,  $\mathbf{f}^h$  la densité de force volumique qui lui est appliquée,  $\mathbf{u}_0^h$  le vecteur déplacement sur le bord latéral de  $\Omega^h$ ,  $\mathbf{y}_0^h$  le vecteur déplacement initial,  $\mathbf{y}_1^h$  le vecteur vitesse initiale et  $\nu$  le vecteur unitaire normal, extérieur à  $\Omega^h$ . Dans la suite, " ' " représente la dérivation par rapport au temps. Le système dynamique de l'élasticité linéaire est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho^h \mathbf{u}^{h''} - \operatorname{div} \sigma^h(\mathbf{u}^h) = \mathbf{f}^h & \text{dans } Q^h, \\ \sigma^h(\mathbf{u}^h) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_{\pm}^h, \\ \mathbf{u}^h = \mathbf{u}_0^h & \text{sur } \Sigma_l^h, \\ \mathbf{u}^h(0) = \mathbf{y}_0^h, \quad \mathbf{u}^{h'}(0) = \mathbf{y}_1^h & \text{dans } \Omega^h. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Ici, on étudie le cas d'un matériau isotrope, et donc

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{u}^h) = \lambda^h e_{pp}^h(\mathbf{u}^h) \delta_{ij} + 2\mu^h e_{ij}^h(\mathbf{u}^h). \quad (1.6)$$

Comme il est de coutume en analyse asymptotique, nous faisons un changement de variable pour faire porter le petit paramètre sur les opérateurs seulement et non plus sur le domaine, afin d'obtenir des résultats de convergence dans des espaces de Hilbert indépendants de  $h$ .

Nous posons  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  et lui associons  $\mathbf{x}^h = (x_1, x_2, hx_3)$ , posons aussi  $\cdot, \cdot_l = \gamma \times] -1, 1[$ ,  $\cdot^{\pm} = \cdot, \cdot^+ \cup \cdot^-$ . Nous faisons les hypothèses suivantes sur les ordres de grandeur des données du problème :

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^h(\mathbf{x}^h) &= h^2 f_{\alpha}(\mathbf{x}), & f_3^h(\mathbf{x}^h) &= h^3 f_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \Omega, \\ g_{\alpha}^h(\mathbf{x}^h) &= h^3 g_{\alpha}(\mathbf{x}), & g_3^h(\mathbf{x}^h) &= h^4 g_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \cdot, \pm. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Pour les forces appliquées, ce sont les hypothèses classiques (cf [2]). Par ailleurs, les constantes élastiques sont supposées indépendantes de  $h$ . Nous effectuons le changement

d'inconnues

$$\begin{aligned} u_\alpha^h(\mathbf{x}^h) &= h^2 u_\alpha(h)(\mathbf{x}), \\ u_3^h(\mathbf{x}^h) &= h u_3(h)(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pour les déplacements, c'est le changement d'inconnues classique utilisé en élasticité linéaire. Ainsi, le système (1.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho u_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\mathbf{u}(h)) = f_\alpha(h) & \text{dans } Q, \\ \rho u_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\mathbf{u}(h)) = f_3(h) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\mathbf{u}(h)) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{u}(h) = \mathbf{u}_0(h) & \text{sur } \Sigma_l, \\ \mathbf{u}(h)(0) = \mathbf{y}_0(h), \quad \mathbf{u}(h)'(0) = \mathbf{y}_1(h) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où  $\sigma(h)(\mathbf{u}(h))$  est le tenseur des contraintes mises à l'échelle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{u}(h)) &= \lambda \left[ e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}(h)) + \frac{1}{h^2} e_{33}(\mathbf{u}(h)) \right] \delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(h)), \\ \sigma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{u}(h)) &= 2\mu \frac{1}{h^2} e_{\alpha 3}(\mathbf{u}(h)), \\ \sigma_{33}(h)(\mathbf{u}(h)) &= \lambda \frac{1}{h^2} e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}(h)) + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{h^4} e_{33}(\mathbf{u}(h)). \end{aligned}$$

## 1.2.2 Position du problème

Le problème de contrôlabilité exacte qu'on se propose de résoudre ici consiste, pour  $(\mathbf{y}_0(h), \mathbf{y}_1(h))$  donné et pour un temps  $T$  fixé assez grand, à trouver des contrôles  $\mathbf{f}(h)$  et  $\mathbf{u}_0(h)$  tel que  $\mathbf{u}(h)(T) = \mathbf{u}(h)'(T) = 0$ . Ensuite nous allons procéder à l'analyse asymptotique de la suite de solutions contrôlées  $\mathbf{u}(h)$  et des contrôles trouvés. Nous montrerons que la suite de contrôles  $\mathbf{f}(h)$  trouvée tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Et grâce à cette dernière convergence, nous obtenons un contrôle frontière sur la plaque bidimensionnelle limite.

### 1.2.3 Résultats préliminaires

On définit les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\Omega) &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_l} \equiv 0 \}, \\ X &= \left\{ v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{v}' \in L^2\left(0, T; (H_{\Gamma_l}^1)'\right) \right\}, \end{aligned}$$

et l'opérateur  $A(h)$  par

$$\begin{aligned} A(h) : \mathbf{V}(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{V}(\Omega)', \\ \langle A(h)(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= a(h)(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

où  $a(h)(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire définie sur  $\mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{V}(\Omega)$  par

$$a(h)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(h)(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dx.$$

La forme bilinéaire  $a(h)(\cdot, \cdot)$  est  $\mathbf{V}(\Omega)$ -continue et  $\mathbf{V}(\Omega)$ -elliptique. La surface moyenne de la plaque étant de forme polygonale dans  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le domaine  $D_{A(h)}$  de l'opérateur  $A(h)$  vérifie (cf. Nicaise [8])

$$D_{A(h)} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega), A(h)(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3 \} \subset \left( H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega) \right)^3 \cap \mathbf{V}(\Omega).$$

Considérons maintenant le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho \theta_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\theta(h)) = f_\alpha(h) & \text{dans } Q, \\ \rho \theta_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\theta(h)) = f_3(h) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\theta(h)) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \theta(h) = 0 & \text{sur } \Sigma_l, \\ \theta(h)(0) = \theta^0(h), \quad \theta(h)'(0) = \theta^1(h) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Nous avons les résultats de régularité ci-dessous, dus à Nicaise [8] et Grisvard [10].

**Théorème 1.2.1** *Soient  $\theta^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\theta^1(h) \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{f}(h) \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ . Alors, il existe une unique solution  $\theta(h)$  du problème (1.10) avec la régularité*

$$\theta(h) \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap W^{2,1}(0, T; \mathbf{V}(\Omega)').$$

*De plus, si  $\theta^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\theta^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\mathbf{f}(h) \in L^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ , alors  $\theta(h)$  a la régularité*

$$\theta(h) \in \mathcal{C}^0(0, T; D_{A(h)} \cap \mathbf{V}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap W^{2,1}(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

Nous avons aussi un résultat de densité dû à Nicaise [9], qui nous sera utile dans la suite.

**Théorème 1.2.2** *Soient  $\theta^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\theta^1(h) \in L^2(\Omega)^3$ ,  $\mathbf{f}(h) \in L^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$  et soit  $\theta(h)$  la solution du problème (1.10). Alors, il existe des suites  $\theta_m^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\theta_m^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\mathbf{f}_m(h) \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ , telles que, quand  $m$  tend vers l'infini, nous avons les convergences fortes*

$$\begin{aligned}\theta_m^0(h) &\rightarrow \theta^0(h) && \text{dans } \mathbf{V}(\Omega), \\ \theta_m^1(h) &\rightarrow \theta^1(h) && \text{dans } L^2(\Omega)^3, \\ \mathbf{f}_m(h) &\rightarrow \mathbf{f}(h) && \text{dans } L^1(0, T; L^2(\Omega)^3).\end{aligned}$$

De plus, la solution  $\theta_m(h)$  de (1.10) correspondant aux données  $\theta_m^0$ ,  $\theta_m^1$  et  $\mathbf{f}_m(h)$  vérifie

$$\theta_m(h) \in \mathcal{C}^0(0, T; D_{A(h)}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2(0, T; L^2(\Omega)^3),$$

et  $\theta_m(h)$  converge fortement vers  $\theta(h)$ , dans  $\mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , quand  $m \rightarrow \infty$ .

### 1.2.4 Estimations d'énergie pour le problème tridimensionnel

Pour obtenir l'énergie du système (1.10), avec les données  $\theta^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\theta^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\mathbf{f}(h) \in L^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ , multiplions ses deux premières équations respectivement par  $\theta_\alpha(h)'$  et  $\theta_3(h)'$ . Il vient

$$\begin{aligned}& h^2 \rho \langle \theta_\alpha(h)''(t), \theta_\alpha(h)'(t) \rangle_\Omega + \rho \langle \theta_3(h)''(t), \theta_3(h)'(t) \rangle_\Omega \\ & + a(h) (\theta(h)(t), \theta(h)'(t)) \\ & = \int_\Omega f_i(h)(t) \theta_i(h)'(t) dx.\end{aligned}$$

En intégrant cette équation par rapport au temps, de 0 à  $t$ , on obtient

$$E^{\theta(h)}(t) - E^{\theta(h)}(0) = \int_0^t \int_\Omega f_i(h)(t) \theta_i(h)'(t) dx dt \quad (1.11)$$

avec

$$E^{\theta(h)}(t) = \frac{1}{2} \left[ h^2 \rho \sum_{\alpha=1}^2 |\theta_\alpha(h)'(t)|_\Omega^2 + \rho |\theta_3(h)'(t)|_\Omega^2 + a(h) (\theta(h)(t), \theta(h)(t)) \right].$$

On peut noter que si  $\mathbf{f}(h) = 0$ , alors l'énergie  $E^{\theta(h)}(t)$  ne dépend plus du temps.

L'égalité (1.11) nous permet d'établir le lemme

**Lemme 1.2.1** *Pour tout  $\theta(h)$  solution de (1.10), avec les données  $\theta^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\theta^1(h) \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{f}(h) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , nous avons la majoration*

$$E^{\theta(h)}(t) \leq c \left[ E^{\theta(h)}(0) + \frac{1}{h^2} \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^T \|f_\alpha(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|f_3(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right], \quad (1.12)$$

et si  $\mathbf{f}(h) \in X^2 \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,

$$E^{\theta(h)}(t) \leq c \left[ E^{\theta(h)}(0) + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_\alpha(h)\|_X^2 + \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right]. \quad (1.13)$$

**Preuve.** Vu le théorème 1.2.2 et la densité de  $\mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$  dans  $X^2 \times L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , il suffit de prouver (1.13) avec  $\theta^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\theta^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\mathbf{f}(h) \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ . Dans ce dernier cas, nous pouvons faire une intégration par parties et obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\Omega f_\alpha(h)(t) \theta_\alpha(h)'(t) dx dt = \\ \int_0^t \langle f_\alpha(h)'(s), \theta_\alpha(h)(s) \rangle_\Omega dt + \int_\Omega f_\alpha(h)(t) \theta_\alpha(h)(t) dx - \int_\Omega f_\alpha(h)(0) \theta_\alpha(h)(0) dx. \end{aligned}$$

Et on en déduit

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_\Omega f_i(h)(s) \theta_i(h)'(s) dx ds \right| \leq \\ \|f_\alpha(h)\|_X^2 + \int_0^t \|\theta_\alpha(h)(s)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 ds \\ + \frac{a}{2} \|f_\alpha(h)(t)\|_{[H_{\Gamma_i}^1(\Omega)]'}^2 + \frac{1}{2a} \|\theta_\alpha(h)(t)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|f_\alpha(h)(0)\|_{[H_{\Gamma_i}^1(\Omega)]'}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_\alpha(h)(0)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_3(h)'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant (1.11) et l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} E^{\theta(h)}(t) \leq E^{\theta(h)}(0) + \|f_\alpha(h)\|_X^2 + \int_0^t \|\theta_\alpha(h)(s)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 ds \\ + \frac{a}{2} \|f_\alpha(h)(t)\|_{[H_{\Gamma_i}^1(\Omega)]'}^2 + \frac{1}{2a} \|\theta_\alpha(h)(t)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|f_\alpha(h)(0)\|_{[H_{\Gamma_i}^1(\Omega)]'}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_\alpha(h)(0)\|_{H_{\Gamma_i}^1(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \|f_3(h)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_3(h)'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

et en prenant  $a$  assez grand, nous obtenons l'inégalité

$$E^{\theta(h)}(t) \leq c \left[ E^{\theta(h)}(0) + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha}(h)\|_X^2 + \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right] \\ + c \int_0^t \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \|\theta_{\alpha}(h)(s)\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega)}^2 + \|\theta_3(h)'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] ds.$$

De cette dernière équation, compte-tenu de la  $\mathbf{V}(\Omega)$ -coercivité de  $a(h)$ , on tire

$$E^{\theta(h)}(t) \leq c \left[ E^{\theta(h)}(0) + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha}(h)\|_X^2 + \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right] + c \int_0^t E^{\theta(h)}(s) ds.$$

On applique donc le lemme de Gronwall et on a

$$E^{\theta(h)}(t) \leq c(T) \left[ E^{\theta(h)}(0) + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha}(h)\|_X^2 + \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right].$$

L'inégalité (1.12) s'obtient de la même façon, en utilisant la majoration

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} f_i(h)(s) \theta_i(h)'(s) dx ds \right| \leq \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \|f_3(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_3(h)'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + \frac{1}{2h^2} \int_0^T \sum_{\alpha=1}^2 \|f_{\alpha}(h)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{h^2}{2} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^2 \|\theta_{\alpha}(h)'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

■

### 1.3 Quelques identités liées au système mécanique

Dans ce paragraphe, nous allons dégager quelques propriétés vérifiées par la solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho \phi_{\alpha}(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\phi(h)) = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho \phi_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\phi(h)) = 0 & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\phi(h)) \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^{\pm}, \\ \phi(h) = 0 & \text{sur } \Sigma_l, \\ \phi(h)(0) = \phi^0(h), \quad \phi(h)'(0) = \phi^1(h) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.14)$$

solution qui servira de contrôle.

Nous allons établir un lemme que nous utiliserons pour prouver que  $\partial_\nu \phi(h)$  est bien dans  $L^2(0, T; L^2(\cdot, l)^3)$  pour toute solution  $\phi(h)$  de (1.14) avec les données  $\phi^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\phi^1(h) \in L^2(\Omega)^3$ .

Soit  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  une fonction de  $W^{1,\infty}(\Omega)^3$ .

$$\begin{cases} w_1, w_2 & \text{sont indépendants de } x_3, \\ w_\alpha = \nu_\alpha & \text{sur } \cdot, l, \\ w_3 = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

**Lemme 1.3.1** *Soit  $\phi(h)$  solution de (1.14) avec les données  $\phi^0(h) \in D_{A(h)}$  et  $\phi^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ . Alors, nous avons l'égalité*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_l} \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) = & \\ \int_{\Omega} \rho [h^2 \phi_\alpha(h)' w_k \partial_k \phi_\alpha(h) + \phi_3(h)' w_k \partial_k \phi_3(h)] dx \Big|_0^T & \\ + \frac{1}{2} \int_Q \partial_k w_k [\rho h^2 \phi_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' + \rho (\phi_3(h)')^2 - \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h)] dx dt & \\ + \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j w_k \partial_k \phi_i(h) dx dt. & \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Preuve.** Pour obtenir (1.16), on multiplie les deux premières équations de (1.14), respectivement par  $w_k \partial_k \phi_\alpha(h)$  et  $w_k \partial_k \phi_3(h)$ , et on procède à des intégrations par parties sur  $Q$ . Il vient

$$\begin{aligned} \int_Q \partial_j \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) w_k \partial_k \phi_i(h) = & \\ - \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j w_k \partial_k \phi_i(h) + \frac{1}{2} \int_Q \partial_k w_k \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) & \\ + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_l} \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt. & \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\langle \phi_i(h)'', w_k \partial_k \phi_i(h) \rangle = - \int_Q \phi_i(h)' w_k \partial_k \phi_i(h)' dx dt + \int_{\Omega} \phi_i(h)' w_k \partial_k \phi_i(h) dx \Big|_0^T.$$

En considérant ces deux dernières équations, on trouve (1.16). ■

On peut maintenant établir le corollaire

**Corollaire 1.3.1** *Pour toute solution  $\phi(h)$  de (1.14) avec les données  $\phi^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\phi^1(h) \in L^2(\Omega)^3$ , nous avons l'inégalité*

$$\int_{\Sigma_t} \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) \leq cE^{\phi(h)}(0). \quad (1.17)$$

La fonction  $\partial_\nu \phi(h)$  est dans  $L^2(0, T; L^2(\cdot, \cdot)^3)$  et l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 &\rightarrow L^2(0, T; L^2(\cdot, \cdot)^3), \\ (\phi^0(h), \phi^1(h)) &\mapsto \partial_\nu \phi(h) \end{aligned} \quad (1.18)$$

est continue.

**Preuve.** De l'équation (1.16), on tire aisément (1.17) sachant que la majoration d'énergie (1.13) est vérifiée.

Rappelons que  $\partial_j \phi_i(h) = \nu_j \partial_\nu \phi_i(h)$  sur  $\cdot, \cdot$  puisque  $\phi_i(h)$  y est nulle. On peut donc exprimer  $\sigma_{ij}(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h)$  en fonction de  $\partial_\nu \phi(h)$  sur  $\cdot, \cdot$  :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_t} \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) \\ &= (\lambda + \mu) \|\nu_\alpha \partial_\nu \phi_\alpha(h)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 \\ &\quad + \mu \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \|\partial_\nu \phi_\alpha(h)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 + \frac{1}{h^2} \|\partial_\nu \phi_3(h)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Des inégalités (1.17) et (1.19), et de la densité de  $D_{A(h)} \times \mathbf{V}(\Omega)$  dans  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ , on déduit que  $\partial_\nu \phi(h)$  est dans  $L^2(0, T; L^2(\cdot, \cdot)^3)$  et que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 &\rightarrow L^2(0, T; L^2(\cdot, \cdot)^3), \\ (\phi_0(h), \phi_1(h)) &\mapsto \partial_\nu \phi(h) \end{aligned}$$

est continue, car

$$\int_0^T \left( \sum_{\alpha=1}^2 \|\partial_\nu \phi_\alpha(h)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 + \frac{1}{h^2} \|\partial_\nu \phi_3(h)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 \right) dt \leq cE^{\phi(h)}(0). \quad (1.20)$$

■

Soient  $\mathbf{x}_0$  un point contenu dans le plan défini par  $\omega$  et la fonction  $\mathbf{q}$  définie dans  $\Omega$  par  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, 0)$ , énonçons un important lemme que nous allons utiliser par la suite pour établir les inégalités inverse et directe de la méthode HUM.



**Lemme 1.3.2** Soient  $\theta(h)$  solution de (1.10) avec  $\theta^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\theta^1(h) \in L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{f}(h) \in X^2 \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et  $\phi(h)$  solution de (1.14) avec  $\phi^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\phi^1(h) \in L^2(\Omega)^3$ . Alors, on a l'identité

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt \\
 & + 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
 & + \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_\alpha \theta_3(h) + \partial_3 \theta_\alpha(h)) dx dt + \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) (\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \\
 & = \rho \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' q_\beta \partial_\beta \theta_\alpha(h) + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \theta_3(h)] dx \Big|_0^T \\
 & + \rho \int_\Omega [h^2 \theta_\alpha(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \theta_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
 & + \rho h^2 \int_\Omega [\phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h) + \phi_\alpha(h) \theta_\alpha(h)'] dx \Big|_0^T \\
 & + 2\rho \int_Q \phi_3(h)' \theta_3(h)' dx dt + 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt \\
 & - \int_Q f_\alpha(h) \phi_\alpha(h) dx dt - \int_Q f_i(h) q_\alpha \partial_\alpha \phi_i(h) dx dt. \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

**Preuve.** Vu le théorème de densité 1.2.2, et la continuité de l'application (1.18), il suffit d'établir cette preuve avec des données ayant la régularité suivante :  $\theta^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\theta^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$  et  $\mathbf{f}(h) \in L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$ ; et  $\phi^0(h) \in D_{A(h)}$ ,  $\phi^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ .

La démonstration de ce lemme est basée sur la méthode des multiplicateurs. Nous allons établir une identité préliminaire, pour  $\theta(h)$  et  $\phi(h)$  dans  $H^2(\Omega)^3$ , qu'on pourra étendre à  $H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)^3$  par densité. Si  $\theta(h)$  et  $\phi(h)$  sont dans  $H^2(\Omega)^3$ ,

$$\begin{aligned}
 & - \int_\Omega q_\beta [\partial_\beta \phi_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) + \partial_\beta \theta_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\phi(h))] dx \\
 & = \int_\Omega q_\beta [\partial_{\beta j} \phi_i(h) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) + \partial_{\beta j} \theta_i(h) \sigma_{ij}(h)(\phi(h))] dx \\
 & + \int_\Omega [\partial_\beta \phi_i(h) \sigma_{i\beta}(h)(\theta(h)) + \partial_\beta \theta_i(h) \sigma_{i\beta}(h)(\phi(h))] dx \\
 & - 2 \int_{\Gamma_l} (q_\beta \nu_\beta) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, .
 \end{aligned}$$

ou encore

$$- \int_\Omega q_\beta [\partial_\beta \phi_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) + \partial_\beta \theta_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\phi(h))] dx$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \theta_i(h) dx + \int_{\Omega} [\partial_{\beta} \phi_i(h) \sigma_{i\beta}(h)(\theta(h)) + \partial_{\beta} \theta_i(h) \sigma_{i\beta}(h)(\phi(h))] dx \\
&\quad - \int_{\Gamma_l} (q_{\beta} \nu_{\beta}) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, . \tag{1.22}
\end{aligned}$$

On peut maintenant multiplier les deux premières équations de (1.10) respectivement par  $\mathbf{q} \cdot \nabla \phi_{\alpha}(h)$  et  $\mathbf{q} \cdot \nabla \phi_3(h)$  et intégrer par parties. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&-\rho \int_Q [h^2 \theta_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_{\alpha}(h)' + \theta_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_3(h)'] dx dt \\
&+ \rho \int_{\Omega} [h^2 \theta_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_{\alpha}(h) dx + \theta_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
&- \int_Q q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) dx \\
&= \int_Q f_i(h) q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_i(h) dx dt. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

On fait de même en considérant les deux premières équations de (1.14) ; en les multipliant respectivement par  $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta_{\alpha}(h)$  et  $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta_3(h)$ , on a

$$\begin{aligned}
&-\rho \int_Q [h^2 \phi_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_{\alpha}(h)' + \phi_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_3(h)'] dx dt \\
&+ \rho \int_{\Omega} [h^2 \phi_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_{\alpha}(h) dx + \phi_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_3(h)] dx \Big|_0^T \\
&- \int_Q q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_i(h) \partial_j \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) dx = 0. \tag{1.24}
\end{aligned}$$

Avant de calculer la somme de ces deux dernières équations, remarquons tout d'abord l'égalité

$$\begin{aligned}
&-\rho \int_Q [h^2 \theta_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_{\alpha}(h)' + \theta_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_3(h)'] dx dt \\
&-\rho \int_Q [h^2 \phi_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_{\alpha}(h)' + \phi_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_3(h)'] dx dt \\
&= -\rho \int_Q [h^2 q_{\beta} \partial_{\beta} (\phi_{\alpha}(h)' \theta_{\alpha}(h)') + q_{\beta} \partial_{\beta} (\phi_3(h)' \theta_3(h)')] dx dt \\
&= 2\rho \int_Q [h^2 \phi_{\alpha}(h)' \theta_{\alpha}(h)' + \phi_3(h)' \theta_3(h)'] dx dt.
\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant les équations (1.23) et (1.24), et en exploitant l'identité (1.22), on obtient

$$\int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho \int_{\Omega} [h^2 \theta_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_{\alpha}(h) dx + \theta_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
 &+ \rho \int_{\Omega} [h^2 \phi_{\alpha}(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_{\alpha}(h) dx + \phi_3(h)' q_{\beta} \partial_{\beta} \theta_3(h)] dx \Big|_0^T \\
 &+ 2\rho \int_Q [h^2 \phi_{\alpha}(h)' \theta_{\alpha}(h)' + \phi_3(h)' \theta_3(h)'] dx dt \\
 &- 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_i(h) dx dt \\
 &+ \int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\theta(h)) \partial_{\beta} \phi_i(h) dx dt + \int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\phi(h)) \partial_{\beta} \theta_i(h) dx dt \\
 &- \int_Q f_i(h) q_{\beta} \partial_{\beta} \phi_i(h) dx dt. \tag{1.25}
 \end{aligned}$$

Nous allons trouver une autre expression de

$$\int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\theta(h)) \partial_{\beta} \phi_i(h) dx dt + \int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\phi(h)) \partial_{\beta} \theta_i(h) dx dt.$$

En multipliant (1.10) par  $(\phi_1(h), \phi_2(h), 0)$  et en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
 -h^2 \rho \int_Q \theta_{\alpha}(h)' \phi_{\alpha}(h)' dx dt + h^2 \rho \int_{\Omega} \theta_{\alpha}(h)' \phi_{\alpha}(h) dx \Big|_0^T + \int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_{\alpha}(h) dx dt \\
 = \int_Q f_{\alpha}(h) \phi_{\alpha}(h) dx dt. \tag{1.26}
 \end{aligned}$$

De même, on multiplie (1.14) par  $(\theta_1(h), \theta_2(h), 0)$ ; en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned}
 -h^2 \rho \int_Q \phi_{\alpha}(h)' \theta_{\alpha}(h)' dx dt + h^2 \rho \int_{\Omega} \phi_{\alpha}(h)' \theta_{\alpha}(h) dx \Big|_0^T \\
 + \int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_{\alpha}(h) dx dt = 0. \tag{1.27}
 \end{aligned}$$

On a aussi les égalités

$$\begin{aligned}
 &\int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_{\alpha}(h) dx dt + \int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\phi(h)) \partial_{\alpha} \theta_j(h) dx dt \\
 &= 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_i(h) dx dt - 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
 &- \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_{\alpha} \theta_3(h) dx dt - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_{\alpha}(h) dx dt \tag{1.28}
 \end{aligned}$$

et

$$\int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_{\alpha}(h) dx dt + \int_Q \sigma_{\alpha j}(h)(\theta(h)) \partial_{\alpha} \phi_j(h) dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt - 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt \\
&\quad - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) \partial_\alpha \phi_3(h) dx dt - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_\alpha(h) dx dt \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Des équations (1.26)-(1.29), on tire l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\theta(h)) \partial_\beta \phi_i(h) dx dt + \int_Q \sigma_{i\beta}(h)(\phi(h)) \partial_\beta \theta_i(h) dx dt \\
&= 4 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt - 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt \\
&\quad - 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
&\quad - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_\alpha \theta_3(h) dx dt - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_\alpha(h) dx dt \\
&\quad - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) \partial_\alpha \phi_3(h) dx dt - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_\alpha(h) dx dt \\
&\quad - h^2 \rho \int_Q \theta_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' dx dt + h^2 \rho \int_\Omega \theta_\alpha(h)' \phi_\alpha(h) dx \Big|_0^T \\
&\quad - \int_Q f_\alpha(h) \phi_\alpha(h) dx dt \\
&\quad - h^2 \rho \int_Q \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h)' dx dt + h^2 \rho \int_\Omega \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h) dx \Big|_0^T.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation combinée à (1.25) donne

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_t} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt \\
&+ 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\theta(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
&+ \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_\alpha \theta_3(h) + \partial_3 \theta_\alpha(h)) dx dt + \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) (\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \\
&= \rho \int_\Omega [h^2 \theta_\alpha(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) dx + \theta_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
&+ \rho \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' q_\beta \partial_\beta \theta_\alpha(h) dx + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \theta_3(h)] dx \Big|_0^T \\
&+ h^2 \rho \int_\Omega [\phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h) + \phi_\alpha(h) \theta_\alpha(h)'] dx \Big|_0^T \\
&+ 2\rho \int_Q \phi_3(h)' \theta_3(h)' dx dt + 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_i(h) dx dt \\
&- \int_Q f_i(h) q_\beta \partial_\beta \phi_i(h) dx dt - \int_Q f_\alpha(h) \phi_\alpha(h) dx dt.
\end{aligned}$$

## 1.4 Contrôlabilité exacte du problème tridimensionnel

Dans cette section, nous allons établir le résultat de contrôlabilité exacte pour le problème tridimensionnel (1.9). Pour ce faire, nous faisons d'abord une estimation de l'énergie  $E^{\phi(h)}$  communément appelée *inégalité inverse*. Cette dernière nous permettra d'appliquer la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method cf. [6]).

### 1.4.1 Estimations d'énergie pour le problème tridimensionnel

**Théorème 1.4.1** (*Inégalités inverse et directe*) *Soit  $h$  fixé,  $0 < h \leq 1$ . Alors, pour toute solution  $\phi(h)$  de (1.14), avec  $\phi^0(h) \in D_{A(h)}$  et  $\phi^1(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ , nous avons les inégalités*

$$\begin{aligned} (T - T_0)E^{\phi(h)}(0) &\leq \\ &\int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt \\ +2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \\ &+4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2h^2 \rho \int_Q \phi_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' dx dt, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt \\ +2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \\ +4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2h^2 \rho \int_Q \phi_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' dx dt \\ &\leq 4(T + T_0)E^{\phi(h)}(0) \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\text{où } T_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} R(\mathbf{x}_0)$$

**Preuve.** Considérons l'identité (1.21) où on pose  $\theta(h) = \phi(h)$ . Il vient

$$\int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt$$

$$\begin{aligned}
& +2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h))(\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt \\
& = 2\rho \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h)) + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
& + 2\rho \int_Q \phi_3(h)' \phi_3(h)' dx dt + 2 \int_Q \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt.
\end{aligned}$$

De part et d'autre de cette égalité, on rajoute

$$2h^2 \rho \int_Q \phi_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' dx dt$$

pour retrouver l'énergie  $E^{\phi(h)}$  du système (1.14) qui est indépendante du temps ; alors on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_t} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h))(\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \\
& + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2h^2 \rho \int_Q \phi_\alpha(h)' \phi_\alpha(h)' dx dt \\
& = 2\rho \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h)) + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] dx \Big|_0^T \\
& + 4T E^{\phi(h)}(0). \tag{1.32}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant majorer l'expression

$$2\rho \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h)) + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] dx \Big|_0^T.$$

Pour cela, on définit  $H(t)$  par

$$H(t) = \int_\Omega [h^2 \phi_\alpha(h)' (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h)) + \phi_3(h)' q_\beta \partial_\beta \phi_3(h)] (t) dx.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
|H(t)| & \leq \frac{ah^2}{2} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^2 (\phi_\alpha(h)')^2 + \frac{h^2}{2a} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^2 (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h))^2 \\
& + \frac{a}{2} \int_\Omega (\phi_3(h)')^2 + \frac{1}{2a} \int_\Omega (q_\beta \partial_\beta \phi_3(h))^2. \tag{1.33}
\end{aligned}$$

Or nous avons l'égalité

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) + \phi_\alpha(h))^2 dx & = \int_\Omega (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h))^2 dx + \int_\Omega (\phi_\alpha(h))^2 dx + 2 \int_\Omega q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h) \phi_\alpha(h) dx \\
& = \int_\Omega (q_\beta \partial_\beta \phi_\alpha(h))^2 dx - \int_\Omega (\phi_\alpha(h))^2 dx.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité combinée à (1.33) nous donne

$$|H(t)| \leq \frac{a}{2} \int_{\Omega} \left( h^2 \sum_{\alpha=1}^2 (\phi_{\alpha}(h)')^2 + (\phi_3(h)')^2 \right) dx \\ + \frac{R(\mathbf{x}_0)^2}{2a} \int_{\Omega} \left( h^2 \sum_{\alpha=1}^2 (\nabla_{\omega} \phi_{\alpha}(h))^2 + (\nabla_{\omega} \phi_3(h))^2 \right) dx,$$

avec  $\nabla_{\omega} = (\partial_1, \partial_2)$  et  $R(\mathbf{x}_0) = \sup_{\Omega} \sqrt{q_1(\mathbf{x})^2 + q_2(\mathbf{x})^2}$ . D'où on déduit que

$$|H(t)| \leq \frac{a}{2} \int_{\Omega} \left( h^2 \sum_{\alpha=1}^2 (\phi_{\alpha}(h)')^2 + (\phi_3(h)')^2 \right) dx \\ + \frac{R(\mathbf{x}_0)^2}{2a\mu} a(h)(\phi(h), \phi(h)),$$

grâce aux inégalités de Korn et

$$2\mu \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}(h)) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(h)) dx \leq \int_{\Omega} a(h)(\phi(h), \phi(h)) dx.$$

Maintenant, en posant  $a = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} R(\mathbf{x}_0)$ , on obtient

$$|\rho H(t)| \leq \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} R(\mathbf{x}_0) E^{\phi(h)}(0) \quad (1.34)$$

Reprenons l'égalité (1.32); combinée à (1.34), elle donne

$$(T - T_0) E^{\phi(h)}(0) \leq \\ \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_{\alpha} \phi_3(h) + \partial_3 \phi_{\alpha}(h)) dx dt \\ + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2h^2 \rho \int_Q \phi_{\alpha}(h)' \phi_{\alpha}(h)' dx dt \\ \leq 4(T + T_0) E^{\phi(h)}(0),$$

où  $T_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} R(\mathbf{x}_0)$ . ■

Maintenant pour  $h$  fixé, et pour  $T$  fixé,  $T > T_0$ , on déduit de (1.30)-(1.31) que la norme  $\| \cdot \|_h$ , avec

$$\|(\phi_0, \phi_1)\|_h = \left\{ \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \phi_i(h) dx dt \right. \\ \left. + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_{\alpha} \phi_3(h) + \partial_3 \phi_{\alpha}(h)) dx dt \right. \\ \left. + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2h^2 \rho \int_Q \phi_{\alpha}(h)' \phi_{\alpha}(h)' dx dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente, dans  $D_{A(h)} \times \mathbf{V}(\Omega)$ , à la norme de l'énergie  $E^{\phi(h)}(0)$ . Vu la densité de  $D_{A(h)} \times \mathbf{V}(\Omega)$  dans  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ , cette équivalence est encore valable dans  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ .

### 1.4.2 Formulation de la transposition

Considérons le problème tridimensionnel

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho u_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 2\rho h^2 \phi_\alpha(h)'' + 2\partial_3 \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \rho u_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 4\partial_3 \sigma_{33}(h)(\phi(h)) + 2\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\mathbf{u}(h)) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{u}(h) = (\mathbf{q} \cdot \nu) \partial_\nu \phi(h) & \text{sur } \Sigma_l, \\ \mathbf{u}(h)(T) = 0, \quad \mathbf{u}(h)'(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.35)$$

où  $\phi(h)$  est solution de (1.14) avec les données  $\phi_0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\phi_1(h) \in L^2(\Omega)^3$ . Vu le peu de régularité qu'il y a sur les données de l'équation (1.35), sa solution sera considérée au sens de la transposition. Pour obtenir la formule de transposition, on multiplie les deux premières équations de (1.35) respectivement par  $\theta_\alpha(h)$  et  $\theta_3(h)$ , avec  $\theta(h)$  solution de (1.10), et on intègre par parties sur  $Q$  en supposant que  $\mathbf{u}(h)$  est assez régulière. Les multiplications des seconds membres de (1.35) par  $\theta(h)$  sont à comprendre au sens suivant :

$$\begin{aligned} \langle \phi_\alpha(h)'', \theta_\alpha(h) \rangle_Q &= - \int_Q \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h)' dx dt, \\ \langle \partial_3 \sigma_{33}(h)(\phi(h)), \theta_3(h) \rangle_Q &= - \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt, \\ \langle \partial_3 \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)), \theta_\alpha(h) \rangle_Q &= - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_\alpha(h) dx dt, \\ \langle \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)), \theta_3(h) \rangle_Q &= - \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) \partial_\alpha \theta_3(h) dx dt. \end{aligned}$$

Nous avons donc la formule de transposition

$$\begin{aligned} &\rho \langle (\mathbf{u}(h)'(0), -\mathbf{u}(h)(0)), (\theta^0(h), \theta^1(h)) \rangle_h - \int_Q \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(h) dx dt \\ &= 2\rho h^2 \int_Q \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h)' dx dt + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h))(\partial_3 \theta_\alpha(h) + \partial_\alpha \theta_3(h)) dx dt \\
 & + \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt,
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

avec

$$\begin{aligned}
 & \langle (\mathbf{u}(h)'(0), -\mathbf{u}(h)(0)), (\theta_0(h), \theta_1(h)) \rangle_h \\
 & = \langle \{ (h^2 u_\alpha(h))'(0), u_3(h)'(0), -(h^2 u_\alpha(h)(0), u_3(h)(0)) \}, \\
 & \quad \{ (\theta_\alpha^0(h), \theta_3^0(h)), (\theta_\alpha^1(h), \theta_3^1(h)) \} \rangle,
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit de dualité entre  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  et son dual. Et nous pouvons définir la notion de solution de (1.35) au sens de la transposition.

**Définition 1.4.1** *La fonction  $\mathbf{u}(h)$  est solution de (1.35) au sens de la transposition, si  $\mathbf{u}(h) \in L^2(0T; L^2(\Omega)^3)$ ,  $(\mathbf{u}(h)(0), \mathbf{u}(h)'(0)) \in L^2(\Omega)^3 \times \mathbf{V}(\Omega)'$  et  $\mathbf{u}(h)$  vérifie (1.36) pour tout  $\mathbf{f}(h) \in L^2(0T; L^2(\Omega)^3)$  et tout  $(\theta^0(h), \theta^1(h)) \in \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ .*

Nous allons maintenant établir le théorème d'existence de la solution de (1.35) au sens de la transposition.

**Théorème 1.4.2** *Soient  $h$  et  $T$  fixés, avec  $0 < h \leq 1$  et  $T > 0$ . Soit  $\phi(h)$  solution de (1.14) avec les données  $\phi^0(h) \in \mathbf{V}(\Omega)$ ,  $\phi^1(h) \in L^2(\Omega)^3$ . Alors, il existe une solution unique  $\mathbf{u}(h)$  de (1.35) au sens de la transposition.*

**Preuve.** Cette preuve est analogue à celle du lemme 1.5, p. 151 de [6]. On définit l'application

$$\Upsilon(h) : D_{A(h)} \times \mathbf{V}(\Omega) \times H^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}, \tag{1.38}$$

par

$$\begin{aligned}
 & \Upsilon(h)(\theta^0(h), \theta^1(h), \mathbf{f}(h)) \\
 & = 2\rho h^2 \int_Q \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h)' dx dt + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
 & + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h))(\partial_3 \theta_\alpha(h) + \partial_\alpha \theta_3(h)) dx dt \\
 & + \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\phi(h)) \partial_j \theta_i(h) d, dt.
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

L'application  $\Upsilon(h)$  est linéaire, elle est bien définie et continue - vu l'identité (1.21) et la majoration d'énergie (1.12) - pour la norme usuelle de  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 \times L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$  :

$$\Upsilon(h)(\theta^0(h), \theta^1(h), \mathbf{f}(h)) \leq c \max_{0 \leq t \leq T} [E^{\phi(h)}(t)]^{\frac{1}{2}} [E^{\theta(h)}(t)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &\leq c(h) \left[ \|\phi^1(h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi^0(h), \phi^0(h)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[ \|\theta^1(h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\theta^0(h), \theta^0(h)) + \int_0^T \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ainsi, de la densité de  $D_{A(h)} \times \mathbf{V}(\Omega)$  dans  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  et de  $H^1(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , peut-on tirer le prolongement de l'application  $\Upsilon$  en une application linéaire, continue sur  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 \times L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ . Il existe donc, par le théorème de représentation de Riesz, un unique triplet  $(w_0(h), w_1(h), \mathbf{u}(h))$  dans  $L^2(\Omega)^3 \times \mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , vérifiant l'équation (1.36), avec  $w_0(h)$  à la place de  $\mathbf{u}(h)(0)$  et  $w_1(h)$  à la place de  $\mathbf{u}(h)'(0)$ .

Il reste maintenant à prouver que  $w_0(h) = \mathbf{u}(h)(0)$  et  $w_1(h) = \mathbf{u}(h)'(0)$ . Comme dans la démonstration du lemme 1.5, p. 151 de [6], nous introduisons une fonction propre  $\mathbf{v}(h)$  de l'opérateur  $(\frac{1}{\rho h^2} \operatorname{div} \sigma_{.1}(h), \frac{1}{\rho h^2} \operatorname{div} \sigma_{.2}(h), \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \sigma_{.3}(h))$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma_{.1}(h)(\mathbf{v}(h)) = \rho h^2 \lambda(h) v_\alpha(h) & \text{dans } Q, \\ -\operatorname{div} \sigma_{.3}(h)(\mathbf{v}(h)) = \rho \lambda(h) v_3(h) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\mathbf{v}(h)) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{v}(h) = 0 & \text{sur } \Sigma_l. \end{cases} \quad (1.41)$$

Et l'on pose

$$\begin{aligned} f_\alpha(h) &= \rho h^2 g(t) v_\alpha(h), & f_3(h) &= \rho g(t) v_3(h), \\ \theta^0(h) &= a_0 \mathbf{v}(h), & \theta^1(h) &= a_1 \mathbf{v}(h), \end{aligned} \quad (1.42)$$

où  $g$  est une fonction régulière sur  $(0, T)$ ,  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Soit la fonction  $k$  définie sur  $(0, T)$ , solution de

$$\begin{cases} k''(t) + \lambda(h)k(t) = g, \\ k(0) = a_0, \quad k'(0) = a_1. \end{cases}$$

La fonction  $\theta(h) = k(t)\mathbf{v}(h)$  est donc solution de (1.10) munie des données (1.42). En conséquence puisque  $(w_1(h), w_0(h), \mathbf{u}(h))$  vérifie l'équation (1.36), avec  $w_0(h)$  à la place de  $\mathbf{u}(h)(0)$  et  $w_1(h)$  à la place de  $\mathbf{u}(h)'(0)$  nous avons l'équation

$$\begin{aligned} &\rho h^2 ((w_{1\alpha}, -w_{0\alpha}), (a_0 v_\alpha, a_1 v_\alpha))_\Omega + \rho ((w_{13}, -w_{03}), (a_0 v_\alpha, a_1 v_\alpha))_\Omega \\ &\quad - \int_Q \rho h^2 g(t) v_\alpha u_\alpha dx dt - \int_Q \rho g(t) v_3 u_3 dx dt = \int_0^T (\xi_0 k + \xi_1 k') dt, \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_0(t) &= 4 \int_{\Omega} \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 v_3(h) dx + 2 \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_{\alpha} v_3(h) + \partial_3 v_{\alpha}(h)) dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\mathbf{v}(h)) \partial_j \phi_i(h) d, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\xi_1(t) = 2\rho h^2 \int_{\Omega} \phi_{\alpha}(h)' v_{\alpha}(h) dx. \quad (1.45)$$

Rappelons que la dérivation par rapport au temps dans le second membre de (1.43) est prise au sens suivant

$$\int_0^T (\xi_0 k + \xi_1 k') dt = \int_0^T (\xi_0 k - \xi_1' k) dt. \quad (1.46)$$

Puisque  $g = k'' + \lambda(h)k$ , en choisissant  $a_0 = a_1 = 0$ , on déduit de (1.43) que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \rho h^2 k (u_{\alpha}(h), v_{\alpha})''_{\Omega} dt - \int_0^T \rho k (u_3(h), v_3)''_{\Omega} dt \\ & - \int_0^T \rho h^2 \lambda(h) k (u_{\alpha}(h), v_{\alpha})_{\Omega} dt - \int_0^T \rho \lambda(h) k (u_3(h), v_3)_{\Omega} dt = \int_0^T (\xi_0 k - \xi_1' k) dt, \end{aligned}$$

pour tout  $k$  dans  $\mathcal{D}(]0, T[)$ . D'où, l'égalité

$$\begin{aligned} & -\rho h^2 (u_{\alpha}(h), v_{\alpha})''_{\Omega} - \rho (u_3(h), v_3)''_{\Omega} \\ & -\rho h^2 \lambda(h) (u_{\alpha}(h), v_{\alpha})_{\Omega} - \rho \lambda(h) (u_3(h), v_3)_{\Omega} = \xi_0 - \xi_1'. \end{aligned}$$

On peut maintenant donner un sens à  $(u_i(h), v_i(h))(0)$  et  $(u_i(h)', v_i(h))(0)$ . En refaisant des intégrations par parties dans (1.43), avec  $a_0$  et  $a_1$  quelconques, on obtient

$$\begin{aligned} & \rho h^2 ((u'_{\alpha}(0), -u_{\alpha}(0)), (a_0 v_{\alpha}, a_1 v_{\alpha}))_{\Omega} + \rho ((u'_3(0), -u_3(0)), (a_0 v_3, a_1 v_3))_{\Omega} \\ & - \rho h^2 ((u'_{\alpha}(T), -u_{\alpha}(T)), (k(T) v_{\alpha}, k'(T) v_{\alpha}))_{\Omega} - \rho ((u'_3(T), -u_3(T)), (k(T) v_3, k'(T) v_3))_{\Omega} \\ & - \rho h^2 ((w_{1\alpha}, -w_{0\alpha}), (a_0 v_{\alpha}, a_1 v_{\alpha}))_{\Omega} - \rho ((w_{13}, -w_{03}), (a_0 v_3, a_1 v_3))_{\Omega} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour tous  $a_0, a_1$  réels,

$$\begin{aligned} & a_1 [\rho h^2 (-u_{\alpha}(0), v_{\alpha})_{\Omega} + \rho (-u_3(0), v_3)_{\Omega} - \rho h^2 (-w_{0\alpha}, v_{\alpha})_{\Omega} - \rho (-w_{03}, v_3)_{\Omega}] \\ & + a_0 [\rho h^2 (u'_{\alpha}(0), v_{\alpha})_{\Omega} + \rho (u'_3(0), v_3)_{\Omega} - \rho h^2 (w_{1\alpha}, v_{\alpha})_{\Omega} - \rho (w_{13}, v_3)_{\Omega}] = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & -\rho h^2 ((u'_{\alpha}(T), -u_{\alpha}(T)), (k(T) v_{\alpha}, k'(T) v_{\alpha}))_{\Omega} \\ & - \rho ((u'_3(T), -u_3(T)), (k(T) v_3, k'(T) v_3))_{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

d'où

$$\rho h^2 (-u_\alpha(0), v_\alpha)_\Omega + \rho (-u_3(0), v_3)_\Omega - \rho h^2 (-w_{0\alpha}, v_\alpha)_\Omega - \rho (-w_{03}, v_3)_\Omega = 0$$

$$\rho h^2 (u'_\alpha(0), v_\alpha)_\Omega + \rho (u'_3(0), v_3)_\Omega - \rho h^2 (w_{1\alpha}, v_\alpha)_\Omega - \rho (w_{13}, v_3)_\Omega = 0,$$

pour tout  $\mathbf{v}(h)$  solution de (1.41). On a donc  $w_0(h) = \mathbf{u}(h)(0)$  et  $w_1(h) = \mathbf{u}(h)'(0)$ , et (1.47) implique que  $\mathbf{u}(h)(T) = \mathbf{u}(h)'(T) = 0$ , puisque l'ensemble de ces vecteurs propres  $\mathbf{v}(h)$  forme une base hilbertienne de  $\mathbf{V}(\Omega)$ . ■

## 1.5 L'opérateur HUM

Nous allons introduire l'opérateur  $\Lambda(h)$  qui est un outil fondamental dans la contrôlabilité exacte par la méthode HUM :

$$\begin{aligned} \Lambda(h) : \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 &\rightarrow \mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3, \\ \Lambda(h) \{(\phi^0(h), \phi^1(h))\} &= (\mathbf{u}(h)'(0), -\mathbf{u}(h)(0)), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\rho \langle \Lambda(h) \{(\phi^0(h), \phi^1(h))\}, (\theta^0(h), \theta^1(h)) \rangle_h \\ &= \rho \langle ((\mathbf{u}(h)'(0), -\mathbf{u}(h)(0))), ((\theta_0(h), \theta_1(h))) \rangle_h \\ &= 2\rho h^2 \int_Q \phi_\alpha(h)' \theta_\alpha(h)' dx dt + 4 \int_Q \sigma_{33}(h)(\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\ &\quad + 2 \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) (\partial_\alpha \theta_3(h) + \partial_3 \theta_\alpha(h)) dx dt + \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h)(\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt, \end{aligned}$$

où  $\phi(h)$  et  $\theta(h)$  sont respectivement solutions de (1.14) et (1.10) avec  $(\phi^0(h), \phi^1(h))$  et  $(\theta^0(h), \theta^1(h))$  dans  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  et  $\mathbf{f}(h) = 0$ , et  $\mathbf{u}(h)$  solution de (1.35) au sens de la transposition.

**Lemme 1.5.1** *Soient  $0 < h \leq 1$  et  $T > T_0$ . L'opérateur  $\Lambda(h)$  est un isomorphisme. De plus, si pour  $(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h)) \in \mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3$ , on définit  $(\phi^0(h), \phi^1(h))$  par*

$$\Lambda(h)^{-1} \{(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h))\} = (\phi_0(h), \phi_1(h)),$$

alors

$$\begin{aligned} &\left\{ \rho \|h\phi_\alpha^1(h), \phi_3^1(h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi^0(h), \phi^0(h)) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{T - T_0} \|(\rho h^2 y_{1\alpha}(h), \rho y_{13}(h)), -(h y_{0\alpha}(h), y_{03}(h))\|_{\mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

**Preuve.** D'après l'inégalité (1.40), nous avons

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda(h) \{(\phi^0(h), \phi^1(h))\}, ((\theta^0(h), \theta^1(h))) \rangle_h \\ & \leq c \left[ \rho \| (h\phi_\alpha^1(h), \phi_{13}^1(h)) \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi^0(h), \phi^0(h)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left[ \rho \| (h\theta_{1\alpha}(h), \theta_{13}(h)) \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\theta_0(h), \theta_0(h)) \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où l'opérateur  $\Lambda(h)$  est continu, vu la continuité de la forme bilinéaire  $a(h)(\cdot)$  pour chaque  $h$  fixé.

Prenons maintenant  $(\theta_0(h), \theta_1(h)) = (\phi_0(h), \phi_1(h))$ , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(h) \{(\phi_0(h), \phi_1(h))\}, (\phi_0(h), \phi_1(h)) \rangle_h &= \|(\phi_0(h), \phi_1(h))\|_h^2 \\ &\geq (T - T_0) E^{\phi(h)}(0) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité inverse (1.30). La forme bilinéaire continue associée à l'opérateur  $\Lambda(h)$  est donc  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$ -elliptique, donc  $\Lambda(h)$  est bien un isomorphisme.

Considérons maintenant pour  $(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h)) \in \mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3$ ,

$$(\phi_0(h), \phi_1(h)) = \Lambda(h)^{-1} \{(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h))\}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & \|(\phi_0(h), \phi_1(h))\|_h^2 = \langle (\mathbf{y}_1, -\mathbf{y}_0), (\phi_0(h), \phi_1(h)) \rangle_h \\ & \leq \|(\rho h^2 y_{1\alpha}(h), \rho y_{13}(h)), -(h y_{0\alpha}(h), y_{03}(h))\|_{\mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3} \\ & \quad \times \|(\phi_0(h), (h\rho\phi_{1\alpha}(h), \rho\phi_{13}(h)))\|_{\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3} \\ & \leq c \|(\rho h^2 y_{1\alpha}(h), \rho y_{13}(h)), -(h y_{0\alpha}(h), y_{03}(h))\|_{\mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3} \\ & \quad \times \left\{ \rho \| (h\phi_{1\alpha}(h), \phi_{13}(h)) \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi_0(h), \phi_0(h)) \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Or, d'après l'inégalité inverse (1.30), nous avons

$$\begin{aligned} E^{\phi(h)}(0) &= \frac{1}{2} \left\{ \rho \| (h\phi_{1\alpha}(h), \phi_{13}(h)) \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi_0(h), \phi_0(h)) \right\} \\ &\leq \frac{c}{T - T_0} \|(\phi_0(h), \phi_1(h))\|_h^2 \end{aligned} \tag{1.50}$$

De (1.49)-(1.50), on tire donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho \| (h\phi_{1\alpha}(h), \phi_{13}(h)) \|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi_0(h), \phi_0(h)) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{c}{T - T_0} \|(\rho h^2 y_{1\alpha}(h), \rho y_{13}(h)), -(h y_{0\alpha}(h), y_{03}(h))\|_{\mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

■

On peut maintenant énoncer le théorème de contrôlabilité exacte.

**Théorème 1.5.1** *Pour tous  $h$  et  $T$  fixés,  $0 < h \leq 1$ ,  $T > T_0$ , et pour tout*

$$(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h)) \in \mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3,$$

*il existe une fonction  $\phi(h) \in C^0(0, T; \mathbf{V}(\Omega))$  telle que la solution  $\mathbf{u}(h)$  de (1.35), au sens de la transposition, vérifie  $\mathbf{u}(h)(0) = \mathbf{y}_0(h)$  et  $\mathbf{u}(h)'(0) = \mathbf{y}_1(h)$ .*

**Preuve.** D'après le lemme 1.5.1,  $\Lambda(h)$  est un isomorphisme. Il existe alors un élément  $(\phi_0(h), \phi_1(h))$  de  $\mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  tel que  $\Lambda(h) \{(\phi_0(h), \phi_1(h))\} = (\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h))$ . Soit maintenant  $\phi(h)$  solution de (1.14). Utilisons  $\phi(h)$  comme contrôle dans (1.35) et la solution  $\mathbf{u}(h)$  ainsi trouvée vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(h)(0) &= \mathbf{y}_0(h), & \mathbf{u}(h)'(0) &= \mathbf{y}_1(h) \\ \mathbf{u}(h)(T) &= 0, & \mathbf{u}(h)'(T) &= 0. \end{aligned}$$

■

## 1.6 Analyse asymptotique

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement du vecteur déplacement  $\mathbf{u}(h)$  et des contrôles trouvés dans le paragraphe précédent, quand  $h$  tend vers 0. Nous allons prouver, en particulier, que la suite de contrôles intérieurs tend vers 0 et que, par conséquent, à la limite, le déplacement de la plaque bidimensionnelle est contrôlé par un contrôle frontière.

### 1.6.1 Quelques résultats d'analyse asymptotique

**Théorème 1.6.1** *Soit  $\phi(h)$  solution de (1.14) avec les conditions initiales  $(\phi_0(h), \phi_1(h)) \in \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  vérifiant*

$$\rho \|(h\phi_{1\alpha}(h), \phi_{13}(h))\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi_0(h), \phi_0(h)) \leq c. \quad (1.51)$$

*Alors, la suite  $(\phi(h))_{h>0}$  vérifie les convergences faibles étoiles suivantes*

i) Il existe  $\phi \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$  tel que quand  $h$  tend vers 0,

$$\begin{aligned}
 \phi(h) &\overset{*}{\rightharpoonup} \phi && \text{dans } L^\infty(0, T; \mathbf{V}(\Omega)), \\
 \phi_3(h)' &\overset{*}{\rightharpoonup} \phi_3' && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
 h\phi_\alpha(h)' &\overset{*}{\rightharpoonup} 0 && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
 e_{\alpha\beta}(\phi(h)) &\overset{*}{\rightharpoonup} e_{\alpha\beta}(\phi) && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
 \frac{1}{h}e_{\alpha 3}(\phi(h)) &\overset{*}{\rightharpoonup} 0 && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
 \frac{1}{h^2}e_{33}(\phi(h)) &\overset{*}{\rightharpoonup} -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}e_{\alpha\alpha}(\phi) && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

ii) La fonction limite  $\phi = (\phi_\alpha, \phi_3)$  est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \phi_3 &\text{ est indépendant de } x_3, \\
 \phi_\alpha &= \hat{\phi}_\alpha - x_3\partial_\alpha\phi_3, \text{ avec } \hat{\phi}_\alpha \text{ indépendant de } x_3.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

De plus  $\hat{\phi}_\alpha = 0$  et  $\phi_3 \in C^0(0, T; H_0^2(\omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\omega))$  et  $\phi_3$  est la solution unique du problème de plaque bidimensionnelle

$$\begin{cases}
 2\rho\phi_3'' - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}(\phi_3) = 0 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\
 \phi_3 = \partial_\nu\phi_3 = 0 & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\
 \phi_3(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{03} dx_3, \quad \phi_3'(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{13} dx_3, & \text{dans } \omega,
 \end{cases} \tag{1.54}$$

où

$$m_{\alpha\beta}(\phi_3) = \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \Delta\phi_3\delta_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha\beta}\phi_3 \right], \tag{1.55}$$

$\phi_{03}$  est la limite faible de  $(\phi_{03}(h))_{h>0}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{03} dx_3 \in H_0^2(\omega), \tag{1.56}$$

et  $\phi_{13}$  est la limite faible de  $(\phi_{13}(h))_{h>0}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**Preuve.** La preuve de ce théorème se trouve dans Raoult [11], [12], et Ciarlet [2] dans le cas statique. Une démarche analogue à celle de ces derniers est adoptée dans la partie II de ce mémoire pour un problème plus complexe de piézoélectricité. ■

**Théorème 1.6.2** Soient  $\theta(h)$  solution de (1.10) avec les conditions initiales  $(\theta_0(h), \theta_1(h)) \in \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  et la force appliquée  $\mathbf{f}(h)$  telle que

i)  $f_\alpha(h) \in X$ ,  $f_3(h) \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , et, quand  $h$  tend vers 0, nous avons les convergences fortes

$$\begin{aligned} f_\alpha(h) &\rightarrow f_\alpha \text{ dans } X, \\ f_3(h) &\rightarrow f_3 \text{ dans } L^1(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (1.57)$$

ii) quand  $h$  tend vers 0, la suite  $(\theta_0(h))_{h>0}$  vérifie les convergences fortes

$$\begin{aligned} \theta_0(h) &\rightarrow \theta_0 && \text{dans } \mathbf{V}(\Omega), \\ \frac{1}{h}e_{\alpha 3}(\theta_0(h)) &\rightarrow 0 && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \frac{1}{h^2}e_{33}(\theta_0(h)) &\rightarrow -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}e_{\alpha\alpha}(\theta_0) && \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (1.58)$$

La fonction limite  $\theta_0 = (\theta_{0\alpha}, \theta_{03})$  est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \theta_{03} &\text{ est indépendant de } x_3, \\ \theta_{0\alpha} &= \hat{\theta}_{0\alpha} - x_3 \partial_\alpha \theta_{03}, \text{ avec } \hat{\theta}_{0\alpha} \text{ indépendant de } x_3. \end{aligned} \quad (1.59)$$

De plus  $\hat{\theta}_0 = (\hat{\theta}_{01}, \hat{\theta}_{02})$  est solution du problème bidimensionnel

$$\begin{cases} -\partial_\beta n_{\alpha\beta}(\hat{\theta}_0) = \int_{-1}^1 f_\alpha dx_3 & \text{dans } \omega, \\ \hat{\theta}_{0\alpha} = 0 & \text{sur } \gamma_l. \end{cases} \quad (1.60)$$

où  $n_{\alpha\beta}(\hat{\theta}_0)$  est défini par

$$n_{\alpha\beta}(\hat{\theta}_0) = 4\mu \left( e_{\alpha\beta}(\hat{\theta}_0) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (1.61)$$

iii) quand  $h$  tend vers 0, la suite  $(\theta_1(h))_{h>0} \subset L^2(\Omega)^3$  vérifie les convergences fortes

$$\begin{aligned} h\theta_{1\alpha}(h) &\rightarrow 0, \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \theta_{13}(h) &\rightarrow \theta_{13}, \text{ dans } L^2(\Omega), \quad \theta_{13} \in L^2(\omega). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Alors, la suite  $(\theta(h))_{h>0}$  vérifie les convergences fortes suivantes :

$$\exists \theta \in L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$$



tel que quand  $h$  tend vers  $\theta$ ,

$$\begin{aligned}
 \theta(h) &\rightarrow \theta && \text{dans } L^2(0, T; \mathbf{V}(\Omega)), \\
 \theta_3(h)' &\rightarrow \theta_3' && \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
 h\theta_\alpha(h)' &\rightarrow 0 && \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
 e_{\alpha\beta}(\theta(h)) &\rightarrow e_{\alpha\beta}(\theta) && \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
 \frac{1}{h}e_{\alpha 3}(\theta(h)) &\rightarrow 0 && \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
 \frac{1}{h^2}e_{33}(\theta(h)) &\rightarrow -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}e_{\alpha\alpha}(\theta) && \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
 h\sigma_{\alpha 3}(h)(\theta(h)) &\rightarrow 0 && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\
 h^2\sigma_{33}(h)(\theta(h)) &\rightarrow 0 && \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

La fonction limite  $\theta = (\theta_\alpha, \theta_3)$  est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \theta_3 &\text{ est indépendant de } x_3, \\
 \theta_\alpha &= \hat{\theta}_\alpha - x_3\partial_\alpha\theta_3, \text{ avec } \hat{\theta}_\alpha \text{ indépendant de } x_3.
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

De plus  $\hat{\theta}_\alpha \in L^2(0, T; H_0^1(\omega))$  et  $\theta_3 \in C^0((0, T); H_0^2(\omega)) \cap C^1((0, T); L^2(\omega))$  et  $\theta_3$  sont solutions respectives des systèmes d'équations de plaque bidimensionnelle

$$\begin{cases} -\partial_\beta n_{\alpha\beta}(\hat{\theta}) = \int_{-1}^1 f_\alpha dx_3 & \text{dans } \omega, \\ \hat{\theta}_\alpha = 0 & \text{sur } \gamma_l, \end{cases} \tag{1.65}$$

$$\begin{cases} 2\rho\theta_3'' - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}(\theta_3) = \partial_\alpha \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha dx_3 + \int_{-1}^1 f_3 dx_3 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \theta_3 = \partial_\nu\theta_3 = 0 & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\ \theta_3(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta_{03} dx_3, \quad \theta_3'(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta_{13} dx_3, & \text{dans } \omega. \end{cases} \tag{1.66}$$

**Preuve.** Voir la preuve du théorème 1.6.1. ■

## 1.6.2 Identification du contrôle limite

En tenant compte des convergences dans les théorèmes 1.6.1 et 1.6.2, on peut passer à la limite dans l'identité (1.21) et on obtient le lemme

**Lemme 1.6.1** *Si les données,  $\phi_0(h)$ ,  $\phi_1(h)$ ,  $\theta_0(h)$ ,  $\theta_1(h)$  et  $\mathbf{f}(h)$  vérifient les conditions des théorèmes 1.6.1 et 1.6.2. Alors, on a la convergence*

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Sigma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) \sigma_{ij}(h) (\theta(h)) \partial_j \phi_i(h) d, dt \right. \\
& + 2 \int_Q \sigma_{33}(h) (\theta(h)) \partial_3 \phi_3(h) dx dt + 2 \int_Q \sigma_{33}(h) (\phi(h)) \partial_3 \theta_3(h) dx dt \\
& + \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h) (\phi(h)) (\partial_\alpha \theta_3(h) + \partial_3 \theta_\alpha(h)) dx dt \\
& \left. + \int_Q \sigma_{\alpha 3}(h) (\theta(h)) (\partial_\alpha \phi_3(h) + \partial_3 \phi_\alpha(h)) dx dt \right\} \\
& = 2\rho \int_\omega (\phi'_3 q_\beta \partial_\beta \theta_3 + \theta'_3 q_\beta \partial_\beta \phi_3) d\omega \Big|_0^T \\
& + 4\rho \int_{\omega \times (0, T)} \phi'_3 \theta'_3 d\omega dt + 2 \int_{\omega \times (0, T)} m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 d\omega dt \\
& + \int_Q x_3 f_\alpha \partial_\alpha \phi_3 dx dt + \int_Q x_3 f_\beta q_\alpha \partial_{\alpha\beta} \phi_3 dx dt - \int_Q f_3 q_\alpha \partial_\alpha \phi_3 dx dt.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Etablissons aussi un lemme qui correspond à l'identité (1.21) limite, et que nous allons utiliser pour obtenir la formule de transposition limite.

**Lemme 1.6.2**

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_l \times (0, T)} (\mathbf{q} \cdot \nu) m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 d\gamma dt \\
& = 2\rho \int_\omega \phi'_3 q_\beta \partial_\beta \theta_3 + \theta'_3 q_\beta \partial_\beta \phi_3 d\omega \Big|_0^T \\
& + 4\rho \int_{\omega \times (0, T)} \phi'_3 \theta'_3 d\omega dt + 2 \int_{\omega \times (0, T)} m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 d\omega dt \\
& + \int_Q x_3 f_\alpha \partial_\alpha \phi_3 dx dt + \int_Q x_3 f_\beta q_\alpha \partial_{\alpha\beta} \phi_3 dx dt - \int_Q f_3 q_\alpha \partial_\alpha \phi_3 dx dt.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

**Preuve.** Ici, nous procédons comme dans la démonstration de l'identité (1.21). On multiplie la première équation du système (1.66) par  $q_\alpha \partial_\alpha \phi_3$  et la première équation de (1.54) par  $q_\alpha \partial_\alpha \theta_3$  où  $\phi_3$  et  $\theta_3$  sont respectivement solutions de (1.54) et (1.66). Puis on intègre par parties et on fait la somme des équations ainsi obtenues. ■

Etudions maintenant la convergence de la formule de transposition quand  $h$  tend vers 0.

**Lemme 1.6.3** *Soient  $T > 0$  et la suite  $(\mathbf{u}(h))_{h>0}$  des solutions du problème de contrôlabilité exacte (1.35) muni des données initiales  $(\mathbf{y}_0(h), \mathbf{y}_1(h))$  telles que*

$$\|(\rho h^2 y_{1\alpha}(h), \rho y_{13}(h)), -(h y_{0\alpha}(h), y_{03}(h))\|_{\mathbf{V}(\Omega)' \times L^2(\Omega)^3} \leq c, \quad (1.69)$$

$$\text{et } h^2 y_{1\alpha} \text{ tend faiblement vers } 0 \text{ dans } [H_{\Gamma_l}^1(\Omega)]'. \quad (1.70)$$

*De plus, on suppose que les suites de fonctions  $((\theta_0(h), \theta_1(h)))_{h>0} \subset \mathbf{V}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  et  $(f_\alpha(h), f_3(h)) \subset X^2 \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , satisfont les hypothèses du théorème 1.6.2, et que  $T > T_0$ .*

*Alors, il existe  $\mathbf{u}_\alpha \in X'$  et  $\mathbf{u}_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  tels que*

$$\begin{aligned} \rho \langle (y_{13}, -y_{03}), (\theta_{03}, \theta_{13}) \rangle &= \langle u_\alpha, f_\alpha \rangle_{X', X} + \int_Q u_3 f_3 \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T \int_{\gamma_l} (\mathbf{q} \cdot \nu) m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 \, d\gamma \, dt, \end{aligned} \quad (1.71)$$

où

- $(y_{03}, y_{13})$  est la limite faible dans  $L^2(\Omega) \times [H_{\Gamma_l}^1(\Omega)]'$  de  $(y_{03}(h), y_{13}(h))$ ,
- $u_\alpha$  est la limite faible dans  $X'$  de  $u_\alpha(h)$ ,  $u_3$  est la limite faible de  $u_3(h)$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,
- $(\theta_{03}, \theta_{13})$  est la limite forte dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  de  $(\theta_{03}(h), \theta_{13}(h))$  telle que  $\theta_{03}$  et  $\theta_{13}$  sont indépendants de  $x_3$  et  $\theta_{03} \in H_0^2(\omega)$ ,
- $(f_\alpha, f_3)$  est la limite forte dans  $X^2 \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$  de  $(f_\alpha(h), f_3(h))$ ,
- $\theta_3$  est solution de (1.66),
- $\phi_3$  est solution de (1.54) avec les conditions initiales  $(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{03} \, dx_3, \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi_{13} \, dx_3)$ , tel que  $\int_{-1}^1 \phi_{03} \, dx_3 \in H_0^2(\omega)$ , et  $(\phi_{03}, \phi_{13})$  est la limite faible dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  de  $(\phi_{03}(h), \phi_{13}(h))$  avec  $(\phi_0(h), \phi_1(h)) = \Lambda(h)^{-1}(\mathbf{y}_1(h), -\mathbf{y}_0(h))$ .

**Preuve.** Pour obtenir (1.71), nous passons à la limite dans la formule de transposition (1.36). Notons que la disparition de tous les termes du second membre, à l'exception du dernier, fournit la contrôlabilité exacte frontière. Soit  $\mathbf{u}(h)$  la solution contrôlée du système (1.35) avec les données initiales  $(\mathbf{y}_0(h), \mathbf{y}_1(h))$ .

Tout d'abord, on considère la formule de transposition (1.36) et la majoration

$$\begin{aligned} \Upsilon(h)(\theta^0(h), \theta^1(h), \mathbf{f}(h)) &\leq c \max_{0 \leq t \leq T} [E^{\phi(h)}(t)]^{\frac{1}{2}} [E^{\theta(h)}(t)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left[ \|\phi^1(h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\phi^0(h), \phi^0(h)) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\times \left[ \|\theta^1(h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + a(h)(\theta^0(h), \theta^0(h)) + \sum_{\alpha=1}^2 \|f_\alpha\|_X^2 + \int_0^T \|f_3\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

en supposant que

–  $f_\alpha(h) = 0$  et  $\theta_0(h) = \theta_1(h) = 0$ , il vient

$$\left| \langle u_3(h), f_3(h) \rangle_Q \right| \leq c \left( \int_0^T \|f_3(h)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

inégalité valable pour toute suite  $f_3(h) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Donc la suite  $u_3(h)$  est bornée dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , et on en extrait une sous-suite convergeant vers une limite  $u_3$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  faible.

–  $f_3(h) = f_\alpha(h) = 0$  et  $\theta_0(h) = \theta_1(h) = 0$ , il vient

$$\left| \langle u_\beta(h), f_\beta(h) \rangle_{X', X} \right| \leq c \|f_\beta(h)\|_X, \quad \text{pour } \beta \neq \alpha,$$

inégalité valable pour toute suite  $(f_\beta(h))_{h>0} \in X$ . Donc la suite  $(u_\beta(h))_{h>0}$  est bornée dans  $X'$ , et on en extrait une sous-suite convergeant faiblement vers une limite  $u_\beta$  dans  $X'$ .

Au total, nous avons donc les convergences

$$\begin{aligned} \langle u_3(h), f_3(h) \rangle_Q &\rightarrow \langle u_3, f_3 \rangle_Q, & \text{quand } h \rightarrow 0, \\ \langle u_\beta(h), f_\beta(h) \rangle_{X', X} &\rightarrow \langle u_\beta, f_\beta \rangle_{X', X}, & \text{quand } h \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Nous avons, d'après la majoration (1.69) et la convergence (1.70), l'existence d'une sous-suite  $(\mathbf{y}_0(h), \mathbf{y}_1(h))$  telle que

$$\begin{aligned} &\rho h^2 \langle (y_{1\alpha}(h), -y_{0\alpha}(h)), (\theta_{0\alpha}(h), \theta_{1\alpha}(h)) \rangle_{(H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega))', H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &+ \rho \langle (y_{13}(h), -y_{03}(h)), (\theta_{03}(h), \theta_{13}(h)) \rangle_{(H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega))', H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow \rho \langle (y_{13}, -y_{03}), (\theta_{03}, \theta_{13}) \rangle_{(H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega))', H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Enfin, compte tenu des lemmes 1.6.1 et 1.6.2 et de (1.72)-(1.73) nous avons l'identité (1.71). ■

Nous allons maintenant prouver que le déplacement limite  $\mathbf{u}$  est un déplacement de Kirchhoff-Love.

**Lemme 1.6.4** *Le vecteur déplacement limite  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{u}(h)$  est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} u_3 & \text{ est indépendant de } x_3, \\ u_\alpha & = \hat{u}_\alpha - x_3 \partial_\alpha u_3, \text{ avec } \hat{u}_\alpha \text{ indépendant de } x_3. \end{aligned} \tag{1.74}$$

De plus,  $\hat{u}_\alpha = 0$  dans  $\omega \times (0, T)$ .

**Preuve.**

i) Prouvons d'abord que  $u_3$  est indépendant de  $x_3$ , c'est-à-dire  $\partial_3 u_3 = 0$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ . Dans la formule de transposition (1.36), posons

$$\begin{aligned} \theta_0(h) & = \theta_1(h) = 0 \\ \mathbf{f}(h) & = (0, 0, -\partial_3 f) \text{ avec } f \in \mathcal{D}(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite, nous obtenons

$$\int_Q \partial_3 f u_3 \, dx \, dt = \int_{\Sigma_t} (\mathbf{q} \cdot \nu) m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 \, d\gamma \, dt,$$

où  $\theta_3$  est solution du problème bidimensionnel

$$\begin{cases} 2\rho\theta_3'' - \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\theta_3) = \int_{-1}^1 \partial_3 f \, dx_3 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \theta_3 = \partial_\nu \theta_3 = 0 & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\ \theta_3(0) = 0, \quad \theta_3'(0) = 0, & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Or,  $f$  est dans  $\mathcal{D}(Q)$  implique que  $\int_{-1}^1 \partial_3 f \, dx_3$  est nul, d'où  $\theta_3 = 0$ . Il vient donc que  $\int_Q \partial_3 f u_3 \, dx \, dt = 0$ , et ce pour tout  $f$  dans  $\mathcal{D}(Q)$ ; ce qui signifie que  $\partial_3 u_3 = 0$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ .

ii) Pour prouver que  $u_\alpha = \hat{u}_\alpha - x_3 \partial_\alpha u_3$  avec  $\hat{u}_\alpha$  est indépendant de  $x_3$ , il suffit de montrer que  $\partial_3 u_\alpha + \partial_\alpha u_3 = 0$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ .

Ici, on choisit, dans (1.36), les fonctions test comme suit :

$$\begin{aligned} \theta_0(h) & = \theta_1(h) = 0, \\ f_\alpha(h) & = -\partial_3 g_\alpha, \quad f_\beta(h) = 0, \quad \beta \neq \alpha, \quad f_3(h) = -\partial_\alpha g_\alpha, \text{ avec } g_\alpha \in \mathcal{D}(Q); \end{aligned} \tag{1.75}$$

en faisant tendre  $h$  vers 0, nous obtenons

$$\langle u_\alpha, \partial_3 g_\alpha \rangle_{X', X} + \int_Q \partial_\alpha g_\alpha u_3 \, dx \, dt = \int_{\gamma \times (0, T)} (\mathbf{q} \cdot \nu) m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 \, d\gamma \, dt,$$

où  $\theta_3$  est solution de

$$\begin{cases} 2\rho\theta_3'' - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}(\theta_3) = -\int_{-1}^1 x_3\partial_3(\partial_\alpha g_\alpha) dx_3 - \int_{-1}^1 \partial_\alpha g_\alpha dx_3 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \theta_3 = \partial_\nu\theta_3 = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, T), \\ \theta_3(0) = 0 dx_3, \quad \theta_3'(0) = 0 dx_3, & \text{dans } \omega. \end{cases} \quad (1.76)$$

Or,  $-\int_{-1}^1 x_3\partial_3(\partial_\alpha g_\alpha) dx_3 - \int_{-1}^1 \partial_\alpha g_\alpha dx_3 = 0$ . Tout le second membre du système d'équations précédent est donc nul, d'où  $\theta_3 = 0$ . Et il vient

$$\langle u_\alpha, \partial_3 g_\alpha \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} + \langle u_3, \partial_\alpha g_\alpha \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle \partial_3 u_\alpha + \partial_\alpha u_3, g_\alpha \rangle_{\mathcal{D}'(Q), \mathcal{D}(Q)} = 0,$$

pour tout  $g_\alpha \in \mathcal{D}(Q)$ , donc  $\partial_3 u_\alpha + \partial_\alpha u_3 = 0$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$ .

iii) Enfin, pour montrer que  $\hat{u}_\alpha = 0$ , considérons dans (1.36),  $\theta_0(h) = \theta_1(h) = 0$ ,  $f_3 = 0$  et  $f_\alpha \in \mathcal{D}(\omega \times (0, T))$ , indépendant de  $x_3$ . Ainsi, par passage à la limite,  $\theta_3 = 0$  et on a

$$\begin{aligned} \langle u_\alpha, f_\alpha \rangle_{X', X} &= \langle \hat{u}_\alpha - x_3\partial_\alpha u_3, f_\alpha \rangle_{X', X} = 0 \\ &= \langle \hat{u}_\alpha, f_\alpha \rangle_{X', X} - \langle x_3\partial_\alpha u_3, f_\alpha \rangle_{X', X} = 0 \\ &= \langle \hat{u}_\alpha, f_\alpha \rangle_{X', X} + \int_0^T \int_\omega \left( \int_{-1}^1 x_3 u_3 \partial_\alpha f_\alpha dx_3 \right) d\omega dt = 0 \\ &= \langle \hat{u}_\alpha, f_\alpha \rangle_{X', X} = 0, \end{aligned}$$

puisque  $\hat{u}_\alpha$  et  $f_\alpha$  sont indépendants de  $x_3$ . Il en résulte que  $\hat{u}_\alpha = 0$  dans  $\omega \times (0, T)$ . ■

Nous allons enfin prouver que, pour tout  $(y_{03}, y_{13}) \in L^2(\omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ , il existe un contrôle  $v$  appliqué uniquement sur le bord  $\gamma$  tel que, à l'instant  $T$ , le problème

$$\begin{cases} 2\rho\zeta_3'' - \partial_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = 0 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \zeta_3 = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, T), \\ \partial_\nu\zeta_3 = v & \text{sur } \gamma \times (0, T), \\ \zeta_3(0) = y_{03}, \quad \zeta_3'(0) = y_{13} & \text{dans } \omega, \\ \zeta_3(T) = 0, \quad \zeta_3'(T) = 0 & \text{dans } \omega \end{cases} \quad (1.77)$$

admet une solution unique au sens de la transposition. Et que cette solution est la limite, quand l'épaisseur  $h$  de la plaque tend vers 0, d'une suite de solutions (au sens de la transposition) contrôlées de problèmes tridimensionnels.

Pour obtenir la formule de transposition, on multiplie la première équation de (1.77) par  $\theta_3$  et on effectue des intégrations par parties, en supposant que  $\zeta_3$  est assez régulier, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\omega \times ]0, T[} \zeta_3'' \theta_3 \, dx \, dt &= \int_{\omega \times ]0, T[} \zeta_3 \theta_3'' \, dx \, dt + \int_{\omega} y_{13} \theta_{03} \, dx - \int_{\omega} y_{03} \theta_{13} \, dx \\ \int_{\omega \times ]0, T[} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \theta_3 &= \int_{\omega \times ]0, T[} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\theta_3) \zeta_3 + \int_{\gamma \times (0, T)} m_{\alpha\beta}(\theta_3) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} v \, d\gamma \, dt. \end{aligned}$$

Donnons alors la définition de la solution de (1.77) au sens de la transposition.

**Définition 1.6.1** *La fonction  $\zeta_3$  est solution du problème bidimensionnel de plaque (1.77) au sens de la transposition si  $\zeta_3 \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  et*

$$\begin{aligned} \rho \langle (y_{13}, -y_{03}), (\theta_{03}, \theta_{13}) \rangle_{H^{-2}(\omega) \times L^2(\omega), H_0^2(\omega) \times L^2(\omega)} \\ = \int_Q \zeta_3 f_3 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\gamma} m_{\alpha\beta}(\theta_3) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} v \, d\gamma \, dt, \end{aligned} \quad (1.78)$$

pour tout  $f_3 \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ ,  $(\theta_{03}, \theta_{13}) \in H_0^2(\omega) \times L^2(\omega)$  et  $\theta_3$  est solution du problème de plaque

$$\begin{cases} 2\rho\theta_3'' - \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\theta_3) = 2f_3 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \theta_3 = \partial_{\nu} \theta_3 = 0 & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\ \theta_3(0) = \theta_{03}, \quad \theta_3'(0) = \theta_{13}, & \text{dans } \omega. \end{cases} \quad (1.79)$$

**Théorème 1.6.3** *Pour tout  $(y_{03}, y_{13}) \in L^2(\omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$ , il existe  $(\phi_{03}, \phi_{13}) \in H_0^2(\omega) \times L^2(\omega)$  et un contrôle  $v = \partial_{\nu}^2 \phi_3$ , où  $\phi_3$  est la solution de*

$$\begin{cases} 2\rho\phi_3'' - \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\phi_3) = 0 & \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \phi_3 = \partial_{\nu} \phi_3 = 0 & \text{sur } \gamma_l \times (0, T), \\ \phi_3(0) = \phi_{03}, \quad \phi_3'(0) = \phi_{13} & \text{dans } \omega, \end{cases}$$

tel que le problème (1.77) admet une solution unique au sens de la transposition.

De plus, cette solution  $\zeta_3$  est égale à  $u_3$ , la limite faible, lorsque  $h$  tend vers 0, de la suite de solutions  $(u_3(h))_{h>0}$  des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{ll} h^2 \rho u_\alpha(h)'' - \partial_j \sigma_{\alpha j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 2\rho h^2 \phi_\alpha(h)'' + 2\partial_3 \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \rho u_3(h)'' - \partial_j \sigma_{3j}(h)(\mathbf{u}(h)) = 4\partial_3 \sigma_{33}(h)(\phi(h)) + 2\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}(h)(\phi(h)) & \text{dans } Q, \\ \sigma(h)(\mathbf{u}(h)) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{u}(h) = (\mathbf{q} \cdot \nu) \partial_\nu \phi(h) & \text{sur } \Sigma_l, \\ \mathbf{u}(h)(T) = 0, \quad \mathbf{u}(h)'(T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(h)(0) = (0, 0, y_{03}), \quad \mathbf{u}(h)'(0) = (0, 0, y_{13}) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $\phi(h)$  est solution de (1.14) avec les données

$$(\phi_0(h), \phi_1(h)) = \Lambda(h)^{-1} \{(0, 0, y_{13}), -(0, 0, y_{03})\}.$$

**Preuve.** Pour prouver ce théorème, vu la densité de  $H_0^3(\omega)$  dans  $H_0^2(\omega)$ , il suffit de prendre les fonctions  $(\theta_{03}, \theta_{13}) \in H_0^3(\omega) \times L^2(\omega)$  et  $f_3 \in L^2(0, T; L^2(\omega))$ . Dans la formule de transposition (1.36), on pose

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(h) &= (0, 0, f_3), \\ \theta_0(h) &= (-x_3 \partial_1 \theta_{03}, -x_3 \partial_2 \theta_{03}, \theta_{03} + h^2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} x_3 \Delta \theta_{03}) \\ \theta_1(h) &= (0, 0, \theta_{13}). \end{aligned}$$

On remarque que les suites ainsi définies vérifient les hypothèses du théorème 1.6.2. Donc la suite de solutions  $\theta(h)$  converge fortement vers une limite  $\theta$ .

Pour chaque  $h$  fixé, soit

$$(\phi_0(h), \phi_1(h)) = \Lambda(h)^{-1} \{(0, 0, y_{13}), -(0, 0, y_{03})\},$$

où l'opérateur  $\Lambda(h)$  est défini au paragraphe 1.5. Soit la suite  $(\phi(h))_{h>0}$  des solutions de (1.14). D'après le lemme 1.6.3, en passant à la limite dans (1.36), nous obtenons

$$\begin{aligned} & 2\rho \langle (y_{13}, -y_{03}), (\theta_{03}, \theta_{13}) \rangle_{H^{-2}(\omega) \times L^2(\omega), H_0^2(\omega) \times L^2(\omega)} \\ &= 2 \int_{\omega \times ]0, T[} u_3 f_3 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\gamma (q_i \nu_i) m_{\alpha\beta}(\theta_3) \partial_{\alpha\beta} \phi_3 \, d\gamma \, dt. \end{aligned}$$

Il en résulte, si l'on choisit le contrôle  $v = (q_i \nu_i) \partial_\nu^2 \phi_3$ , que  $\zeta_3 = u_3$  est solution du problème (1.77) au sens de la transposition, car  $\phi_3 = \partial_\nu \phi_3 = 0$  implique que

$$\nu_\alpha \nu_\beta \partial_\nu^2 \phi_3 = \nu_\alpha \nu_\beta \partial_\nu (\partial_\nu \phi_3) = \nu_\alpha \partial_\beta (\partial_\nu \phi_3) = \partial_\beta (\nu_\alpha \partial_\nu \phi_3) = \partial_{\beta\alpha} \phi_3$$



sur chaque arête de  $\gamma$ . ■

**Commentaire 1.6.1** *Nous avons donc résolu un problème de contrôlabilité exacte d'une plaque bidimensionnelle, où le contrôle agit uniquement sur la frontière, par une analyse asymptotique.*

*Si le contrôle limite dans [4] et [13] est distribué sur tout l'intérieur de la plaque, c'est parce que la famille de plaques tridimensionnelles n'y a été contrôlée qu'en agissant sur la frontière, notamment sur les faces  $,^+$  et  $,^-$ . Or, le contrôle sur ces parties de la frontière subsiste à la limite et devient un contrôle intérieur pour la plaque bidimensionnelle.*

*Donc, pour obtenir un contrôle limite frontière, en n'agissant que sur la frontière des plaques tridimensionnelles, il a fallu contrôler seulement sur le bord latéral. Or pour une plaque tridimensionnelle, si le contrôle est appliqué uniquement sur le bord latéral, la contrôlabilité exacte s'avère impossible (voir Bardos, Lebeau et Rauch [2]).*

*Ainsi, au lieu de contrôler sur les faces  $,^\pm$  des plaques tridimensionnelles, nous leur appliquons un contrôle intérieur qui tend vers 0 quand l'épaisseur  $h$  de la plaque tend vers 0. Il s'ensuit que le déplacement limite s'identifie à la solution d'un problème de plaque élastique bidimensionnelle contrôlée exactement, uniquement à la frontière.*

# Bibliographie

- [1] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation or control, and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Cont. Optim.* Vol. **30**, N. 5, p. 1024-1065, 1992.
- [2] P. G. Ciarlet, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures*, RMA, Masson, Paris, 1990.
- [3] R. Dautray, J. L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques*, Masson, 1984-1988.
- [4] I. Figueiredo et E. Zuazua, Exact controlability and asymptotic limit for thin plates, *Asymptotic Analysis* 12, 213-252, North-Holland, 1996.
- [5] J.L. Lions, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lectures Notes in Math., 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [6] J. L. Lions, *Contrôlabilité Exacte, Perturbation et Stabilisation de Systèmes Distribués, 1*, Contrôlabilité exacte, Masson, RMA 8, Paris.
- [7] M. T. Niane Contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes dans un polygone, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 307, Série I, p. 517-521, 1988.
- [8] S. Nicaise, About the Lamé system in a polygonal or polyhedral domain and a coupled problem between the Lamé system and the plate equation, 1: Regularity of solutions, *Annali della Scuola Normale Superiori di Pisa*, 19, (1992) p. 327-361.
- [9] S. Nicaise, Exact controlability of a pluridimensional coupled problem, *Pub. Irma, Lille* **20** (4), 1990.
- [10] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités, *J. Math. Pures et Appli.* 68, 215-259, 1989.

- [11] A. Raoult, *Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multiples* (thèse de troisième cycle), Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [12] A. Raoult, Asymptotic modeling of the elastodynamics of a multi-structure, *Asymptotic Analysis*, 6, 73-108, 1992.
- [13] J. Saint Jean Paulin et M. Vanninathan, Contrôlabilité exacte de vibrations de corps élastiques minces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, Série I, p. 889-894, Problèmes mathématiques de la mécanique, 1996.
- [14] J. Yan, Contrôlabilité exacte pour des domaines minces, *Asymptotic Analysis* 5, 461-471, North-Holland, 1992.

## Deuxième partie

# Modélisation de plaques piézoélectriques



# Chapitre 2

## Introduction

### 2.1 Piézoélectricité : généralités

Bien qu'ayant été prédit par Coulomb, et découvert par Becquerel en 1819, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Une présentation des débuts de la piézoélectricité peut être trouvée dans [7].

La piézoélectricité est une interaction électromécanique : les matériaux piézoélectriques sont des diélectriques qui se déforment sous l'effet d'un champ électrique et qui produisent une polarisation sous l'effet de déformations. Ce dernier phénomène est appelé "effet direct", pour une raison purement historique vu son aspect réversible. On traduit ce comportement par des lois liant le tenseur des contraintes et le vecteur champ électrique d'une part, et le tenseur des déformations et le vecteur polarisation ou le vecteur déplacement électrique d'autre part.

Soient  $\sigma = (\sigma_{ij})$  et  $\mathbf{e} = (e_{ij})$  les tenseurs de contraintes mécaniques et de déformations du matériau,  $\mathbf{E} = (E_k)$  et  $\mathbf{P} = (P_k)$  les vecteurs champ électrique et polarisation. Les caractéristiques d'un matériau piézoélectrique donné sont décrites par le tenseur de raideur  $C = (C_{ijkl})$ , le tenseur des constantes piézoélectriques  $P = (P_{kij})$ , et le tenseur de susceptibilité électrique  $\epsilon' = (\epsilon'_{ij})$ . Les relations

$$\begin{cases} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}e_{kl} - P_{kij}E_k, \\ P_k &= P_{kij}e_{ij} + \epsilon'_{kl}E_l \end{cases} \quad (2.1)$$

sont établies dans [23], [16] et [26] en considérant l'énergie libre de Gibbs. Soit  $\mathbf{D}$  le vecteur déplacement électrique, on sait qu'il est lié à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  par la relation

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.2)$$

où  $\epsilon_0$  est un scalaire appelé permittivité électrique du vide. En posant  $\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \epsilon'_{ij}$ , on obtient le système équivalent à (2.1),

$$\begin{cases} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl} - P_{kij} E_k, \\ D_k &= P_{kij} e_{ij} + \epsilon_{kl} E_l. \end{cases} \quad (2.3)$$

C'est ce système de lois de comportement que nous utiliserons désormais. Notons qu'on peut aussi en inversant la deuxième équation ci-dessus exprimer le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  en fonction du vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et du tenseur des déformations  $\mathbf{e}$  : c'est la modélisation choisie dans [15], qui utilise des lois de comportement analogues dans un modèle bidimensionnel.

Les lois (2.3) expliquent bien l'utilisation des matériaux piézoélectriques comme capteurs (effet direct) et actionneurs (effet inverse). Par exemple, une plaque, ou des pastilles piézoélectriques, adhérant à un matériau élastique en détectent les déformations par l'effet direct, et peuvent servir pour déformer le matériau par l'effet inverse ; d'où la possibilité de contrôler les vibrations dans des structures élastiques, en particulier les plaques et les coques. Les matériaux piézoélectriques tels que la céramique et le PVDF (PolyVinil-Di-Fluor) sont, en général, de masse négligeable par rapport à la structure à contrôler et peuvent être très flexibles dans le cas du PVDF. Ce dernier, qui est un polymère, présente aussi l'avantage de pouvoir être coupé en très fine pellicule ; par contre, ses constantes piézoélectriques sont moins élevées que celles des piézo-céramiques.

Les matériaux piézoélectriques sont aussi utilisés dans le contrôle de forme (ailes d'avion, miroirs des télescopes), ainsi que dans la conception d'organes artificiels en biomécanique. Bien d'autres applications sont données dans [23], [39] et [3]. On trouve aussi dans [3] une modélisation mathématique de leur mise en oeuvre.

Terminons en indiquant une première application de l'effet piézoélectrique qui est due à Paul Langevin. Lors de la première guerre mondiale, Langevin eut l'idée d'utiliser des plaques de quartz piézoélectriques pour l'émission et la réception d'ondes sonores sous-marines de haute fréquence. Depuis lors le quartz est largement utilisé dans le domaine des télécommunications en tant que filtre, contrôleur ou générateur de fréquence.

## 2.2 Modèle mathématique de la piézoélectricité

### Equations de Maxwell

En élasticité pure, la loi de comportement liant le tenseur des contraintes à celui des déformations

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}$$

et la loi fondamentale de la dynamique ou de Newton, qui dit que, dans un corps, la somme des forces est égale à la force d'inertie, nous permettent de trouver le vecteur de déformation  $\mathbf{u}$ ; nous rappelons que le tenseur linéarisé des déformations  $\mathbf{e}$  est lié à  $\mathbf{u} = (u_k)$  par  $e_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_k u_l + \partial_l u_k)$ . Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, la loi de comportement contient une nouvelle inconnue, le champ électrique  $\mathbf{E}$ , d'où la nécessité d'introduire une autre équation d'équilibre pour la gérer. C'est l'**équation de Maxwell-Gauss**

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q,$$

où  $\mathbf{D}$  est le vecteur déplacement électrique et  $q$  est la densité volumique de charge au sein du matériau. Cette équation est valable dans un milieu non aimanté. Dans la suite de ce travail,  $q$  sera nulle car le matériau considéré ici est un isolant.

Soit  $\rho$  la masse volumique du matériau piézoélectrique occupant le domaine  $\Omega$  et  $\mathbf{f}$  la densité de force volumique qui lui est appliquée. Les équations de Newton et de Maxwell-Gauss ci-dessus forment le système

$$\begin{cases} \rho \mathbf{u}'' - \operatorname{div} \sigma = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

auquel sont associées des conditions limites et des conditions initiales. Les lois de comportement (2.3), que nous reprenons ci-dessous,

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} - P_{kij}E_k, \\ D_k = P_{kij}e_{ij} + \epsilon_{kl}E_l. \end{cases}$$

complètent le système. Nous avons rappelé que, dans ces équations, le tenseur  $\mathbf{e}$  d'ordre 2 ne dépend en fait que du vecteur  $\mathbf{u}$ ; de même, le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}$  dérive d'autres quantités, en particulier du potentiel scalaire électrique (et de ce dernier seul



dans le cas statique). Plus précisément, on sait qu'un champ électrique variant en fonction du temps, induit un champ magnétique  $\mathbf{B}$  et vice-versa ; ce phénomène se traduit par les **équations de Maxwell-Ampère**

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_1 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

et de **Maxwell-Faraday**

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

où  $\mu_1$  désigne la perméabilité magnétique du matériau. La **quatrième équation de Maxwell** s'ajoute aux équations déjà citées (Maxwell-Gauss, Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday) et traduit la loi de conservation du flux magnétique,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Pour la construction et l'étude de ces équations, nous renvoyons à [30], et à [10] (vol. 1, 5) et [17] pour une approche plutôt mathématique. La loi de conservation (2.6) implique l'existence d'un vecteur  $\mathbf{A}$  appelé potentiel vecteur, tel que

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.7)$$

Cette dernière équation combinée avec l'équation de Maxwell-Faraday implique que la somme de vecteurs  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  admet un rotationnel nul, donc dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Les inconnues du système de la piézoélectricité ainsi écrit sont donc maintenant le déplacement  $\mathbf{u}$ , le potentiel scalaire  $\varphi$  et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . Dans le cas dynamique, afin de gérer l'inconnue  $\mathbf{A}$ , nous utilisons l'équation de Maxwell-Ampère (2.4) qui n'a pas été utilisée jusqu'ici.

Dans beaucoup d'applications, on peut se restreindre à l'approximation quasi-électrostatique, qui revient à négliger la partie magnétique dans l'équation de Maxwell-Faraday (2.5). Alors, on a

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

et les inconnues se réduisent à  $\mathbf{u}$  et  $\varphi$ . Précisons dans quelles conditions l'approximation quasi-électrostatique est loisible. Comme dans [26], il suffit de réaliser une analyse dimensionnelle. Supposons, comme c'est le cas qui nous intéressera, que le corps est une plaque

de longueur  $L$ . Considérons, dans une oscillation électromagnétique, un mode propre de longueur d'onde  $\lambda$  et de vitesse de phase  $v$ . Rappelons que la vitesse de phase correspond à la vitesse de la lumière dans le milieu considéré. La période d'oscillation  $T$  est donnée par  $T = \frac{\lambda}{v}$ . Si  $\mathbf{x}$  est la variable d'espace et  $t$  la variable temps, faisons le changement de variable

$$\xi = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tau = \frac{2\pi t}{T}.$$

Dans ces nouvelles coordonnées adimensionnelles, l'équation de Maxwell-Faraday devient

$$\operatorname{rot}_\xi \mathbf{E} = -\frac{2\pi L}{T} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = -2\pi v \frac{L}{\lambda} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau}. \quad (2.9)$$

Il se dégage donc un critère pour l'approximation quasi-électrostatique : si la longueur d'onde de l'oscillation électromagnétique est très grande par rapport à la longueur de la plaque, on peut faire l'approximation quasi-électrostatique, et ignorer l'inconnue  $\mathbf{A}$ . Un autre procédé serait l'utilisation des équations de Maxwell harmoniques (voir [29]) où la dérivée par rapport au temps est remplacée par la pulsation  $-\frac{i}{T}$  (avec  $i^2 = -1$ ) :

$$\operatorname{rot}_\xi \tilde{\mathbf{E}} = 2i\pi v \frac{L}{\lambda} \tilde{\mathbf{B}}.$$

Cette dernière équation fournit le même critère d'approximation quasi-électrostatique que (2.9). Nous donnerons à nouveau au chapitre 3 (resp. 4) l'écriture complète du système de la piézoélectricité statique (resp. dynamique), et y adjoindrons les cadres fonctionnels permettant d'obtenir des résultats d'existence.

## 2.3 Notations

Nous résumons ici les notations utilisées dans cette partie du mémoire.

**Notations sur  $\Omega$ .** On désigne par  $\Omega^h$  un domaine cylindrique de  $\mathbb{R}^3$  d'épaisseur  $2h$ , et de surface moyenne  $\omega$ , domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Plus précisément, on pose

$$\Omega^h = \omega \times ]-h, h[, \quad \Omega = \omega \times ]-1, 1[.$$

Les faces supérieure et inférieure sont notées

$$\omega^{h\pm} = \omega \times \{\pm h\}, \quad \omega^\pm = \omega \times \{\pm 1\}.$$

Les bords latéraux sont notés  $\omega_l^h = \gamma \times ]-h, h[$ ,  $\omega_l = \gamma \times ]-1, 1[$ . De même, on pose  $\omega^{h,} = \partial\Omega^h$ ,  $\omega^{,} = \partial\Omega$ .

L'ouvert  $\Omega^h$  sera la configuration de référence d'une plaque constituée d'un matériau piézoélectrique. On appelle  $\mathbf{u}^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)$  le vecteur déplacement,  $\mathbf{A}^h$  le potentiel vecteur magnétique,  $\varphi^h$  le potentiel électrique au sein du matériau  $\Omega^h$ . On note  $\sigma^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h)$  le tenseur des contraintes et  $\mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h)$  celui des déformations, avec  $e_{ij}^h(\mathbf{u}^h) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^h + \partial_j u_i^h)$ ,  $\mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h)$  le vecteur déplacement électrique et  $\mathbf{E}^h(\varphi^h)$  le vecteur champ électrique, avec  $E_i^h(\varphi^h, \mathbf{A}^h) = -\partial_i \varphi^h - \frac{\partial \mathbf{A}^h}{\partial t}$ .

Soient  $\gamma$  la frontière de  $\omega$ ,  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_{e0}$  et  $\gamma_{e1}$ ) deux parties de  $\gamma$  telles que  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$  et  $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$  (resp.  $\gamma = \gamma_{e0} \cup \gamma_{e1}$  et  $\gamma_{e0} \cap \gamma_{e1} = \emptyset$ ). La partie  $\gamma_0$  est supposée de mesure non nulle.

Des conditions de Dirichlet sur le déplacement seront imposées sur la partie  $,_D^h$  du bord avec

$$,_D^h = \gamma_0 \times ] -h, h[, \quad ,_D = \gamma_0 \times ] -1, 1[.$$

La partie complémentaire du bord est

$$,_N^h = ,_1^h \cup ,^{h+} \cup ,^{h-}, \quad ,_N = ,_1 \cup ,^+ \cup ,^-,$$

où

$$,_1^h = \gamma_1 \times ] -h, h[, \quad ,_1 = \gamma_1 \times ] -1, 1[.$$

Enfin, le potentiel électrique sera imposé sur  $,_{eD}^h = ,^{h\pm} \cup (\gamma_{e0} \times ] -h, h[)$ ; dans l'étude du cas dynamique, on supposera que  $\gamma_{e0} = \emptyset$ . Dans la suite, sauf mention du contraire, on utilise la convention de sommation sur l'indice répété, les indices latins étant dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  et les indices grecs dans  $\{1, 2\}$ . La lettre  $c$  représente différentes constantes indépendantes de  $h$ .

### Notations sur les espaces de fonctions.

$(\cdot)_\Omega$  produit scalaire usuel dans  $L^2(\Omega)$ ,

$\langle \cdot \rangle_{X', X}$  produit de dualité entre  $X$  et son dual  $X'$ ,

$\|\cdot\|_X$  norme usuelle sur  $X$ ,

$|\cdot|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ ,

$H_Y^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_Y \equiv 0\}$ .

## 2.4 **Objet de l'étude. Principaux résultats obtenus**

On se propose, dans ce mémoire, d'étudier le comportement asymptotique d'une plaque piézoélectrique mince. L'objectif est de déduire des systèmes de la piézoélectricité statique ou dynamique, que l'on a décrits au paragraphe 2.1, des modèles bidimensionnels plus simples à utiliser, en particulier pour l'approximation numérique. Leur construction même est une justification de ces modèles, obtenus sans simplification a priori sur la forme des inconnues. D'autres procédés d'approximation du système, bien connus dans le cas purement élastique, reposent sur une approximation polynomiale. Cette technique de modélisation a été utilisée par Reissner [34], Mindlin [27], et a donné lieu récemment à de nombreuses publications, par exemple Babuška, d'Harcourt et Schwab [2], Schwab [37], Alessandrini, Arnold, Falk et Madureira [1], Delfour et Zolésio [12]. La cohérence asymptotique de l'approximation polynomiale a été étudiée par Paumier et Raoult [28].

Nous utilisons ici le procédé asymptotique développé par Ciarlet et Destuynder [9], et mis en œuvre par Raoult [32] dans le cas de l'élasticité dynamique. Dans ce travail, nous suivons la même démarche que Raoult [33] où une analyse asymptotique a été réalisée pour une multi-structure contenant une plaque mince.

On se donne une famille de plaques d'épaisseur  $h$  et de configuration de référence  $\Omega^h = \omega \times ]-h, h[$ , où  $\omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Notre but est d'étudier le comportement du vecteur déplacement  $\mathbf{u}^h$  des plaques lorsque  $h$  tend vers 0, ainsi que celui des autres inconnues : le potentiel scalaire électrique, et le potentiel vecteur dans le cas dynamique. A cet effet, nous effectuons une dilatation de l'ordre de  $h^{-1}$ , dans le sens de l'épaisseur, sur chaque plaque de sorte que le domaine d'étude soit indépendant de  $h$  : c'est l'ouvert  $\Omega = \omega \times ]-1, 1[$ . Avec un tel changement de variable, nous pouvons étudier la convergence de la suite des déplacements mis à l'échelle  $\mathbf{u}(h)$ , ainsi que des potentiels scalaires  $\varphi(h)$  ou potentiels vecteurs  $\mathbf{A}(h)$  dans un espace fonctionnel indépendant  $h$ .

Nous donnons ci-dessous le résumé des principaux résultats obtenus. Dans le mémoire, les caractéristiques mécaniques et électriques des plaques seront supposées indépendantes de  $h$  à l'exception de la masse volumique qui est supposée d'ordre  $h^2$ , voir [32].

Le **chapitre 3** est consacré à l'étude du **cas statique**. Cependant, avant les équations de la piézoélectricité, nous analysons tout d'abord le comportement du potentiel électrique mis à l'échelle  $\varphi(h)$  lorsque  $h$  tend vers 0, dans le cas d'un problème purement électrique. Ce potentiel résout un problème de perturbations singulières classique naturellement posé dans l'espace  $H^1(\Omega)$ . Nous vérifions que l'espace limite n'est pas  $H^1(\Omega)$ ,

mais l'espace

$$\Psi_l = \{\psi \in L^2(\Omega), \partial_3 \psi \in L^2(\Omega)\},$$

et donnons le problème limite. On remarque que la limite forte  $\varphi$  de  $\varphi(h)$  dans  $\Psi_l$  est une fonction affine de la variable verticale.

Ensuite, nous rappelons un théorème d'existence pour le problème de la piézoélectricité statique et étudions son comportement asymptotique. Nous supposons que le potentiel électrique mis à l'échelle  $\varphi(h)$  est égal à une fonction  $\varphi_0$  donnée sur une partie  $,_{eD}$  du bord qui contient les faces supérieure  $,^+$  et inférieure  $,^-$ . Autrement dit, le potentiel électrique obéit à une condition de Dirichlet sur  $,_{eD} = (\gamma_{e0} \times ]-1, 1[) \cup ,^+ \cup ,^-$ , où  $\gamma_{e0}$  est une partie de  $\partial\omega$  qui peut être de mesure nulle. Imposer ainsi le potentiel électrique sur les faces  $,^+$  et  $,^-$  correspond à des dispositifs expérimentaux habituels. Le déplacement mis à l'échelle  $\mathbf{u}(h)$  est supposé nul sur la partie  $,_D = \gamma_0 \times ]-1, 1[$  du bord latéral, où  $\gamma_0$  est une partie de mesure non nulle de  $\partial\omega$ .

Introduisant les espaces fonctionnels

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} \equiv 0\} \text{ et} \quad (2.10)$$

$$\Psi = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_{eD}} \equiv 0\}, \quad (2.11)$$

et effectuant la translation  $\bar{\varphi}(h) = \varphi(h) - \varphi_0$ , nous obtenons l'écriture variationnelle du système de la piézoélectricité statique

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)) \in \mathbf{V} \times \Psi, \text{ tel que} \\ &\forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V} \times \Psi, \quad a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) = l(h)(\mathbf{v}, \psi) \end{aligned}$$

où  $a(h)$  est une forme bilinéaire coercive sur  $\mathbf{V} \times \Psi$ . Elle est la somme de la forme bilinéaire sur  $\mathbf{V}$ , étudiée dans les travaux consacrés par de nombreux auteurs à l'analyse asymptotique du problème de l'élasticité linéaire, de la forme bilinéaire correspondant au problème électrique seul étudié au début du chapitre et de termes croisés déplacement-potentiel. Plus précisément,

$$\begin{aligned} a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) &= \int_{\Omega} C\kappa(h) : \kappa(h)(\mathbf{v}) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi \, dx + h^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \bar{\varphi}(h) \partial_{\beta} \psi \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h \int_{\Omega} [\epsilon_{3\alpha} (\partial_{\alpha} \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi + \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_{\alpha} \psi)] dx + \\
& + \int_{\Omega} [P_{3kl} (\partial_3 \bar{\varphi}(h) \kappa_{kl}(h)(\mathbf{v}) - \partial_3 \psi \kappa_{kl}(h))] dx \\
& +h \int_{\Omega} [P_{\alpha kl} (\partial_{\alpha} \bar{\varphi}(h) \kappa_{kl}(h)(\mathbf{v}) - \partial_{\alpha} \psi \kappa_{kl}(h))] dx,
\end{aligned}$$

où nous avons adopté la notation suivante

$$\kappa_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{v}) = e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}), \quad \kappa_{\alpha 3}(h)(\mathbf{v}) = h^{-1} e_{\alpha 3}(\mathbf{v}), \quad \kappa_{33}(h)(\mathbf{v}) = h^{-2} e_{33}(\mathbf{v})$$

et avons posé  $\kappa(h) = \kappa(h)(\mathbf{u}(h))$ . Selon la convention habituelle, les indices grecs prennent les valeurs 1, 2 et les indices latins les valeurs 1, 2, 3. On note que l'expression développée de  $a(h)$  contient des puissances négatives de  $h$ . L'expression de la forme linéaire  $l(h)$  est donnée au chapitre 3.

Ainsi écrit, le problème piézoélectrique se prête à une analyse asymptotique qui généralise les résultats connus (Ciarlet [8], Ciarlet et Destuynder [9], Destuynder [13]) dans le cas purement élastique et les résultats obtenus dans l'étude préliminaire du cas purement électrique. En particulier, et dit de manière rapide, les termes contenant les puissances négatives de  $h$  sont à l'origine d'un "gouffre" (voir Sanchez-Palencia [36]) qui attire le déplacement  $\mathbf{u}(h)$ . Ainsi on démontre que la suite  $\mathbf{u}(h)$  admet dans  $\mathbf{V}$  une limite  $\mathbf{u}$  qui est un déplacement de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
u_3 &= \zeta_3 \text{ où } \zeta_3 \text{ est indépendant de } x_3, \\
u_{\alpha} &= \zeta_{\alpha} - x_3 \partial_{\alpha} \zeta_3, \text{ avec } \zeta_{\alpha} \text{ indépendant de } x_3.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

On montre simultanément que la suite des potentiels électriques  $\varphi(h)$  (rappelons que nous avons posé  $\varphi(h) = \varphi_0 + \bar{\varphi}(h)$ ) converge dans  $\Psi_l$  vers un potentiel limite  $\varphi$  qui est un polynôme du second degré en  $x_3$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^2 \varphi^i(x_1, x_2) x_3^i, \tag{2.13}$$

explicite en  $\zeta_3$  puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} - \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3, \\
\varphi^1 &= \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2}, \\
\varphi^2 &= \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3,
\end{aligned}$$

où  $\varphi_0^+$  et  $\varphi_0^-$  sont les potentiels imposés sur  $,^+$  et  $,^-$ , et les constantes  $p_{3\alpha\beta}$  et  $p_{33}$  s'obtiennent à partir des coefficients d'élasticité, de piézoélectricité et de susceptibilité électrique.

De plus, cette limite vérifie le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \int_{-1}^1 (x_3 \partial_\alpha f_\alpha + f_3) dx_3 + g_3^+ + g_3^- + \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) & \text{dans } \omega, \\ \zeta_3 = 0, \quad \partial_\nu \zeta_3 = 0 & \text{sur } \gamma_0, \\ m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\alpha \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma_1, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\beta + \partial_\tau \{ m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\beta \tau_\alpha \} = \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha \nu_\alpha dx_3 + (g_\alpha^- - g_\alpha^-) \nu_\alpha & \text{sur } \gamma_1, \end{array} \right.$$

où

$$m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} \Delta \zeta_3 + \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right] + \frac{2p_{3\alpha\beta} p_{3\iota\ell}}{3p_{33}} \partial_{\iota\ell} \zeta_3 ;$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-) - p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) & \text{dans } \omega, \\ n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \nu_\alpha = \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 + p_{3\alpha\beta} (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \nu_\alpha & \text{sur } \gamma_1, \\ \zeta_1 = \zeta_2 = 0 & \text{sur } \gamma_0, \end{array} \right.$$

où

$$n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = 2\mu \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} e_{\ell\ell}(\zeta) + e_{\alpha\beta}(\zeta) \right].$$

On constate que les composantes horizontales sont solutions d'un système elliptique d'ordre 2, d'opérateur identique à celui du problème limite de l'élasticité pure ; au second membre s'ajoute une contribution des potentiels électriques surfaciques imposés. Par contre, pour la composante verticale, l'opérateur est modifié : à l'opérateur d'ordre 4 de l'élasticité pure s'ajoute une autre contribution d'ordre 4 due aux coefficients de piézoélectricité et de susceptibilité électrique. Nous donnons des indications sur la comparaison de ce modèle avec ceux utilisés par Banks [3], Bernadou [4] et Destuynder [15]

Au **chapitre 4**, nous traitons le cas dynamique. Nous posons  $Q^h = \Omega^h \times ]0, T[$  et  $\Sigma^h = \partial\Omega^h \times ]0, T[$ . La partie du bord à déplacement nul imposé est notée  $,^h_D$ , son complémentaire est noté  $,^h_N$ , on pose  $\Sigma_D^h = ,^h_D \times ]0, T[$ ,  $\Sigma_N^h = ,^h_N \times ]0, T[$ . Le potentiel électrique

est imposé sur  $\gamma_{\epsilon 0}^{h+} \cup \gamma_{\epsilon 0}^{h-}$  (par rapport au cas statique, nous simplifions en choisissant  $\gamma_{\epsilon 0} = \emptyset$ ). Dans la suite, les indices “+” et “-” correspondent respectivement aux faces supérieure et inférieure de la plaque, et l'indice “l” correspond à son bord latéral. Nous avons trois systèmes d'équations couplés :

les équations mécaniques

$$\begin{cases} \rho^h \mathbf{u}^{h''} - \operatorname{div}^h \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h) = \mathbf{f}^h & \text{dans } Q^h, \\ \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{g}^h & \text{sur } \Sigma_N^h, \\ \mathbf{u}^h = 0 & \text{sur } \Sigma_D^h, \\ \mathbf{u}^h(0) = \mathbf{p}^h, \quad \mathbf{u}^{h'}(0) = \mathbf{q}^h & \text{dans } \Omega^h, \end{cases}$$

les équations de Maxwell-Gauss

$$\begin{cases} \operatorname{div}^h \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h) = 0 & \text{dans } Q^h, \\ \varphi^h = \varphi_0^h & \text{sur } \Sigma_{\pm}^h, \\ \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \mathbf{A}^h, \varphi^h) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_l^h, \end{cases}$$

les équations de Maxwell-Ampère

$$\begin{cases} \operatorname{rot}^h \operatorname{rot}^h \mathbf{A}^h = \mu_1 \mathbf{D}^{h'} & \text{dans } Q^h, \\ \operatorname{rot}^h \mathbf{A}^h \wedge \boldsymbol{\nu} = \mu_1 \mathbf{j}^h & \text{sur } \Sigma^h, \\ \mathbf{A}^h(0) = \mathbf{A}_0^h, \quad \mathbf{A}^{h'}(0) = \mathbf{A}_1^h & \text{dans } \Omega^h, \end{cases}$$

où  $\mathbf{j}^h$  est la densité de charge surfacique. Nous résolvons ces systèmes couplés qui admettent une infinité de solutions dans l'espace  $\mathbf{V} \times H(\Omega, \operatorname{rot}) \times \Psi$ , où  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  est le sous-espace de  $L^2(\Omega)^3$  des fonctions à rotationnel dans  $L^2(\Omega)^3$ . Pour obtenir l'unicité de la solution, on rajoute au système de Maxwell-Ampère les conditions de jauge “ $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) = 0$  et  $(\epsilon \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ ”. Ensuite, par le même procédé d'analyse asymptotique qu'au chapitre 3, nous établissons, sous des conditions initiales convenables, des résultats de convergence faible, puis forte, sur les solutions mises à l'échelle lorsque le petit paramètre  $h$  tend vers 0. Ces solutions tendent vers le triplet  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi)$  qui vérifie :

- $\mathbf{u}$  est un déplacement de Kirchhoff-Love et s'écrit comme dans (2.12),
- $\varphi$  appartient à  $\Psi_l$  et s'écrit comme en (2.13), c'est un polynôme de degré 2 explicite en  $x_3$ ,
- $\mathbf{A}$  est indépendant de  $x_3$ .





des équations quasi-statiques en  $(\zeta_1, \zeta_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2, A_1, A_2) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-) \\ \qquad \qquad \qquad -p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \qquad \qquad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2, A_1, A_2) \nu_\alpha = \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 + p_{3\alpha\beta} \nu_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \quad \text{sur } \gamma_1 \times (0, T), \\ (\zeta_1, \zeta_2) = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \gamma_0 \times (0, T), \end{array} \right.$$

et des équations d'évolution du deuxième ordre en  $(A_1, A_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ p_{\alpha 1} - \frac{p_{31} p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_\alpha'' + \frac{1}{\mu_1} \partial_2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \qquad \qquad \qquad + \left[ p_{1\alpha\beta} - \frac{p_{31} p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta_1', \zeta_2') = -(j_1^+ + j_1^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \left[ p_{\alpha 2} - \frac{p_{32} p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_\alpha'' - \frac{1}{\mu_1} \partial_1 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \qquad \qquad \qquad + \left[ p_{2\alpha\beta} - \frac{p_{32} p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta_1', \zeta_2') = -(j_2^+ + j_2^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \gamma \times (0, T), \\ A_\alpha(0) = A_{0\alpha}, \quad A_\alpha'(0) = A_{1\alpha} \qquad \qquad \qquad \text{dans } \omega. \end{array} \right.$$

Il est clair que le problème quasi-statique permet d'exprimer  $(\zeta_1, \zeta_2)$  en fonction de  $\mathbf{A}$ . Injectant  $(\zeta_1, \zeta_2)$  dans le deuxième système, on est ramené à un problème d'évolution en  $(A_1, A_2)$  du second ordre en temps, muni des conditions limites appropriées.



# Chapitre 3

## Cas statique

L'objet de ce chapitre est l'obtention de modèles bidimensionnels pour une plaque piézoélectrique en équilibre mécanique et électrique. On souhaite, en effet, prendre en compte la faible épaisseur de cet élément pour simplifier le modèle tridimensionnel qui décrit son comportement. Nous avons rappelé dans l'introduction que les matériaux piézoélectriques sont couramment utilisés aujourd'hui ; par exemple, des pastilles piézoélectriques collées à des structures servent d'actionneurs ou capteurs.

La construction que nous choisissons est la méthode asymptotique initiée par les travaux de Goldenveizer [20] et Friedrichs [18], et introduite dans un contexte moderne par Ciarlet et Destuynder [9]. Certaines de nos démonstrations suivent Raoult [33]. Dans cette construction, on considère une plaque de faible épaisseur comme élément d'une famille de plaques de même surface moyenne  $\omega$ , où  $\omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$ , dont l'épaisseur  $h$  tend vers 0 ; toutes les plaques auront ici les mêmes constantes mécaniques et électriques. On effectue un choix convenable des ordres de grandeur des données correspondant à chaque plaque (forces appliquées, densités de charge) et on détermine le comportement limite des inconnues mécaniques ou électriques : déplacements, contraintes, potentiel électrique. Ces comportements limites font apparaître des fonctions définies sur l'ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , et fournissent les modèles bidimensionnels recherchés.

Pour l'analyse mathématique des convergences, on effectue sur le domaine de référence  $\Omega^h = \omega \times ]-h, h[$  de la plaque de hauteur  $2h$ , une dilatation d'ordre  $h^{-1}$  afin de la transformer en  $\Omega = \omega \times ]-1, 1[$ . Nous renvoyons à Ciarlet [8] pour un exposé de différents travaux relatifs à la méthode asymptotique.

Au paragraphe 3.1, nous rappelons les lois de comportement d'un matériau piézo-

électrique que nous avons données dans l'introduction. En 3.2, à titre d'exemple, nous simplifions le modèle en n'en considérant que la partie électrique, et en effectuons l'analyse asymptotique. Ceci nous permet d'introduire l'espace limite convenable pour le potentiel électrique. En 3.3, nous donnons l'analyse asymptotique du modèle piézoélectrique complet.

Signalons qu'une liste des notations a été donnée dans l'introduction, que les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, et les indices latins les valeurs 1, 2, 3 et que nous utilisons la convention de l'indice répété.

### 3.1 Lois de comportement

Soit une famille de plaques de domaines de référence  $\Omega^h = \omega \times ]-h, h[$  toutes constituées du même matériau piézoélectrique. Nous notons  $C = (C_{ijkl})$  le tenseur des constantes d'élasticité,  $P = (P_{ijkl})$  le tenseur des constantes piézoélectriques,  $\epsilon = (\epsilon_{ij})$  celui des constantes diélectriques. Nous supposons que le matériau est mécaniquement isotrope; les constantes d'élasticité s'écrivent donc

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.1)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé. Les tenseurs  $C$ ,  $P$ ,  $\epsilon$  vérifient les relations suivantes :

- $\exists c > 0$  tel que, pour toute matrice  $M$  d'ordre 3 réelle et symétrique, on a

$$C_{ijkl} M_{kl} M_{ij} \geq c \sum_{i,j=1}^3 (M_{ij})^2. \quad (3.2)$$

L'inégalité (3.2) est une conséquence de la condition classique sur les constantes de Lamé :  $\mu > 0$ ,  $\lambda > 0$ . De plus, on a les symétries

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}.$$

- $\exists c > 0$  tel que, pour tout vecteur  $\theta \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$\epsilon_{kl} \theta_k \theta_l \geq c \sum_{j=1}^3 \theta_j^2. \quad (3.3)$$

De plus, on a les symétries :  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$

- Les coefficients piézoélectriques vérifient

$$P_{mkl} = P_{mlk}. \quad (3.4)$$

Nous avons donné dans l'introduction les lois de comportement mécanique et électrique. Elles expriment le tenseur des contraintes  $\sigma^h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}^9$ , et le vecteur déplacement électrique  $\mathbf{D}^h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}^3$  en fonction du tenseur linéaire des déformations et du champ électrique. De façon plus précise, on note  $\mathbf{u}^h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}^3$  le déplacement et  $\varphi^h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel électrique. Alors, le tenseur linéaire des déplacements est  $\mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h)$  où, pour tout champ de vecteurs  $\mathbf{v}^h$  suffisamment régulier défini sur  $\Omega^h$ , on a

$$\mathbf{e}^h(\mathbf{v}^h) = \frac{1}{2}(\nabla^h \mathbf{v}^h + (\nabla^h \mathbf{v}^h)^\top) \text{ ou } e_{ij}^h(\mathbf{v}^h) = \frac{1}{2}(\partial_i^h v_j^h + \partial_j^h v_i^h), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

l'exposant  $h$  rappelant que les fonctions sont définies sur  $\Omega^h$ . Dans le cas statique, qui nous intéresse ici, le vecteur champ électrique  $\mathbf{E}^h : \Omega^h \rightarrow \mathbb{R}^3$  s'exprime au moyen de  $\varphi^h$  seul par

$$\mathbf{E}^h(\varphi^h) = -\nabla^h \varphi^h, \text{ ou encore } E_i^h(\varphi^h) = -\partial_i^h \varphi^h, \quad i = 1, 2, 3,$$

Les lois de comportement sont alors

$$\begin{cases} \sigma^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = C\mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h) - P\mathbf{E}^h(\varphi^h) & \text{dans } \Omega^h, \\ \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = P\mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h) + \epsilon\mathbf{E}^h(\varphi^h) & \text{dans } \Omega^h. \end{cases}$$

## 3.2 Analyse asymptotique des équations de Maxwell-Gauss

Avant de traiter le cas des matériaux piézoélectriques, nous allons tout d'abord procéder à une analyse asymptotique des équations de Maxwell-Gauss pour une plaque à coefficients de piézoélectricité nuls. Ceci nous permet d'étudier sans considérations mécaniques l'espace fonctionnel dans lequel se trouve le potentiel limite. L'analyse asymptotique effectuée dans ce paragraphe est simple et le problème limite élémentaire. Les équations de comportement ci-dessus sont ici découplées, et la partie électrique en est

$$\mathbf{D}^h(\varphi^h) = \epsilon\mathbf{E}^h(\varphi^h) = -\epsilon\nabla^h \varphi^h \quad \text{dans } \Omega^h. \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Les équations électriques (Maxwell-Gauss)

Nous supposons le milieu à densités de charge surfacique et volumique nulles, comme c'est le cas pour tout diélectrique parfait. De plus, nous supposons qu'un potentiel élec-

trique donné  $\varphi_0^h$  est appliqué sur une partie  $,^h_{\epsilon D}$  contenant les faces supérieure et inférieure. Autrement dit, le potentiel électrique vérifie une condition de Dirichlet sur

$$,^h_{\epsilon D} = (\gamma_{\epsilon 0} \times] - h, h[) \cup ,^{h+} \cup ,^{h-},$$

où  $,^{h+}$ ,  $,^{h-}$  sont les faces supérieure et inférieure, où  $\gamma_{\epsilon 0}$  est une partie, peut-être vide, de  $\partial\Omega$ . Nous notons  $,^h_{\epsilon N}$  la partie complémentaire de  $\partial\Omega^h$ . On a

$$,^h_{\epsilon N} = \gamma_{\epsilon 1} \times] - h, h[ \quad \text{où} \quad \gamma_{\epsilon 1} = \partial\omega \setminus \gamma_{\epsilon 0}.$$

L'équation d'équilibre de Maxwell-Gauss munie des conditions aux limites s'écrit

$$\begin{cases} \operatorname{div}^h \mathbf{D}^h(\varphi^h) = 0 & \text{dans } \Omega^h, \\ \mathbf{D}^h(\varphi^h) \cdot \nu = 0 & \text{sur } ,^h_{\epsilon N}, \\ \varphi^h = \varphi_0^h & \text{sur } ,^h_{\epsilon D}, \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $\nu$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Omega^h$ . Elle s'ajoute à (3.5) pour former un système qui a une solution unique, comme on le rappelle en 3.2.2. Les équations (3.5)-(3.6) s'écrivent encore

$$\begin{cases} \operatorname{div}^h (\epsilon \nabla^h \varphi^h) = 0 & \text{dans } \Omega^h, \\ \epsilon \nabla^h \varphi^h \cdot \nu = 0 & \text{sur } ,^h_{\epsilon N}, \\ \varphi^h = \varphi_0^h & \text{sur } ,^h_{\epsilon D}. \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace

$$\Psi^h = \{\psi \in H^1(\Omega^h), \psi|_{\Gamma_{\epsilon D}^h} \equiv 0\}, \quad (3.8)$$

que l'on munit de la norme  $\|\psi\|_{\Psi^h} = \|\nabla^h \psi\|_{L^2(\Omega^h)}$  qui est équivalente à la norme usuelle de  $H^1(\Omega^h)$ . On suppose que

$$\varphi_0^h \in H^{\frac{1}{2}}(,^h_{\epsilon D}). \quad (3.9)$$

Il existe donc un relèvement de  $\varphi_0^h$  dans  $H^1(\Omega^h)$ , encore noté  $\varphi_0^h$  (voir [22]). Si nous posons  $\bar{\varphi}^h = \varphi^h - \varphi_0^h$ , le problème variationnel associé à (3.7) est

$$\text{Trouver } \bar{\varphi}^h \in \Psi^h \text{ tel que } \forall \psi^h \in \Psi^h, \quad a_e^h(\bar{\varphi}^h, \psi^h) = l_e^h(\psi^h) \quad (3.10)$$

où la forme bilinéaire  $a_e^h(\cdot, \cdot)$  traduisant le comportement électrique est donnée par

$$a_e^h(\bar{\varphi}^h, \psi^h) = \int_{\Omega^h} \epsilon_{ij} \partial_i^h \bar{\varphi}^h \partial_j^h \psi^h dx^h,$$

et la forme linéaire  $l_e^h(\cdot)$  est définie par

$$l_e^h(\psi^h) = - \int_{\Omega^h} \epsilon_{ij} \partial_i^h \varphi_0^h \partial_j^h \psi^h dx^h.$$

Grâce à la propriété de coercivité (3.3) des constantes d'électricité, nous avons la  $\Psi^h$ -coercivité de la forme bilinéaire  $a_e^h(\cdot, \cdot)$ . Elle est aussi  $\Psi^h$ -continue. La  $\Psi^h$ -continuité de la forme linéaire  $l_e^h(\cdot)$  est évidente. Utilisant le lemme de Lax-Milgram, nous obtenons le théorème d'existence et d'unicité ci-dessous.

**Théorème 3.2.1** *Le problème (3.10) admet une solution unique.*

### 3.2.3 Changement d'ouvert et mise à l'échelle des inconnues

Jusqu'à présent, les équations ont été écrites dans des domaines  $\Omega^h$  dépendant de  $h$ , le petit paramètre appelé à tendre vers 0. Il importe donc de faire un changement de variable qui va faire porter le petit paramètre sur les opérateurs et non plus sur le domaine. Ainsi nous pourrions obtenir des résultats de convergence dans des espaces de Hilbert indépendants de  $h$ .

Rappelons dès maintenant les notations. On pose

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega \times ]-1, 1[, \quad \Omega^+ = \omega \times \{1\}, \quad \Omega^- = \omega \times \{-1\}, \\ \Gamma_{\epsilon D} &= (\gamma_{\epsilon 0} \times ]-1, 1[) \cup \Omega^+ \cup \Omega^-, \quad \Gamma_{\epsilon N} = \gamma_{\epsilon 1} \times ]-1, 1[. \end{aligned}$$

Nous devons préciser le comportement des données lorsque  $h$  varie. A l'élément  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ , on associe l'élément  $\mathbf{x}^h = (x_1, x_2, hx_3)$  de  $\Omega^h$ . Nous supposons désormais qu'il existe  $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$  tel que pour tout  $h$

$$\varphi_0^h(\mathbf{x}^h) = h \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.11)$$

Nous effectuons alors le changement d'inconnues

$$\bar{\varphi}^h(\mathbf{x}^h) = h \bar{\varphi}(h)(\mathbf{x}). \quad (3.12)$$



Enfin, nous définissons l'espace  $\Psi$  par

$$\Psi = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_{eD}} \equiv 0\} \quad (3.13)$$

et le munissons de la norme  $\|\psi\|_{\Psi} = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}$ .

Le problème variationnel peut alors être posé sur le domaine fixe  $\Omega$ . La formulation variationnelle s'obtient immédiatement :

$$\text{Trouver } \bar{\varphi}(h) \in \Psi \text{ tel que } \forall \psi \in \Psi, \quad a_e(h)(\bar{\varphi}(h), \psi) = l_e(h)(\psi) \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} a_e(h)(\bar{\varphi}(h), \psi) &= \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi \, dx + h \int_{\Omega} [\epsilon_{3\alpha} (\partial_{\alpha} \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi + \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_{\alpha} \psi)] \, dx \\ &\quad + h^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \bar{\varphi}(h) \partial_{\beta} \psi \, dx, \\ \text{et } l_e(h)(\psi) &= - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi \, dx - h \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} [\partial_{\alpha} \varphi_0 \partial_3 \psi + \partial_3 \varphi_0 \partial_{\alpha} \psi] \, dx \\ &\quad - h^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \varphi_0 \partial_{\beta} \psi \, dx. \end{aligned}$$

Avec des notations évidentes, la forme bilinéaire  $a_e(h)$  se décompose en la somme

$$a_e(h) = a_e^0 + h a_e^1 + h^2 a_e^2. \quad (3.15)$$

L'étude du comportement asymptotique des solutions d'une suite de problèmes variationnels elliptiques dont les formes bilinéaires  $a(h)$  se décomposent en une somme de deux termes  $a^0(h) + h^2 a^2(h)$ , ou en une somme de trois termes comme en (3.15), fait l'objet de [36] et [6]. La nature du gouffre, c'est-à-dire du noyau de la forme  $a^0$ , y joue un rôle essentiel. Pour une étude plus générale des perturbations singulières, on peut se référer à [24].

Nous donnons ci-dessous une analyse directe de (3.14) et reviendrons dans une remarque à l'utilisation de [36] et [6].

### 3.2.4 Majoration de normes et convergences faibles

Dans la suite  $c$  représente diverses constantes positives indépendantes de  $h$ , et  $|\cdot|_{\Omega}$  et  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  désignent respectivement la norme et le produit scalaire usuels dans  $L^2(\Omega)$ .

Nous obtenons tout d'abord un résultat de majoration uniforme dont se déduit facilement un résultat de convergence faible. Posons

$$\Psi_l = \{ \psi \in L^2(\Omega), \partial_3 \psi \in L^2(\Omega) \}. \quad (3.16)$$

**Proposition 3.2.1** *Il existe  $c > 0$  tel que  $\forall h, 0 < h < 1$ ,*

$$|h \partial_1 \bar{\varphi}(h)|_\Omega^2 + |h \partial_2 \bar{\varphi}(h)|_\Omega^2 + |\partial_3 \bar{\varphi}(h)|_\Omega^2 < c. \quad (3.17)$$

*De plus, il existe  $\bar{\varphi} \in \Psi_l$  tel que, quitte à extraire une sous-suite, les convergences faibles suivantes sont satisfaites :*

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (3.18)$$

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) \rightharpoonup (0, 0, \partial_3 \bar{\varphi}) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.19)$$

**Preuve.** Définissons les vecteurs

$$\begin{aligned} (\theta_1(h), \theta_2(h), \theta_3(h)) &= (h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)), \\ (\hat{\theta}_1(h), \hat{\theta}_2(h), \hat{\theta}_3(h)) &= (h \partial_1 \varphi_0, h \partial_2 \varphi_0, \partial_3 \varphi_0) \end{aligned}$$

et prenons dans (3.14)  $\psi = \bar{\varphi}(h)$ . On obtient,

$$\int_\Omega \epsilon_{ij} \theta_i(h) \theta_j(h) dx = - \int_\Omega \epsilon_{ij} \hat{\theta}_i(h) \theta_j(h) dx. \quad (3.20)$$

La propriété de coercivité (3.3) nous permet de minorer le premier membre de (3.20) :

$$c |\theta(h)|_\Omega^2 \leq \int_\Omega \epsilon_{ij} \theta_i(h) \theta_j(h) dx. \quad (3.21)$$

Par ailleurs, posant  $\varepsilon = \sup_{1 \leq i, j \leq 3} \{|\epsilon_{ij}|\}$ , et  $m$  étant un nombre réel positif quelconque, on démontre aisément la majoration du second membre :

$$\left| \int_\Omega \epsilon_{ij} \hat{\theta}_i(h) \theta_j(h) dx \right| \leq \frac{3m}{2} \varepsilon^2 |\hat{\theta}(h)|_\Omega^2 + \frac{3}{2m} |\theta(h)|_\Omega^2 \leq c m + \frac{3}{2m} |\theta(h)|_\Omega^2, \quad (3.22)$$

car  $\hat{\theta}(h)$  est borné dans  $L^2(\Omega)^3$ . Choissant  $m$  assez grand dans l'inégalité (3.22), on obtient la majoration (3.17). Comme dans un espace de Banach réflexif - il en est ainsi pour  $L^2(\Omega)$  - toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement, nous avons, d'après la majoration des normes (3.17), l'existence de  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in (L^2(\Omega))^3$  tel que

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) \rightharpoonup (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.23)$$

Pour obtenir une majoration de la suite  $(\bar{\varphi}(h))_{0 < h < 1}$ , utilisons celle de  $(\partial_3 \bar{\varphi}(h))_{0 < h < 1}$  donnée par (3.17) ; comme  $\bar{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a, dans  $L^2(\Omega)$ , l'égalité

$$\bar{\varphi}(h)(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^{x_3} \partial_3 \bar{\varphi}(h)(x_1, x_2, s) ds.$$

On en déduit aisément que

$$\|\bar{\varphi}(h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|\partial_3 \bar{\varphi}(h)\|_{L^2(\Omega)},$$

et donc que la suite  $(\bar{\varphi}(h))_{0 < h < 1}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi, il existe  $\bar{\varphi} \in L^2(\Omega)$  tel que

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.24)$$

Or, de (3.23)-(3.24), on tire des convergences dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$  :

$$\bar{\varphi}(h) \longrightarrow \bar{\varphi} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.25)$$

$$\partial_i \bar{\varphi}(h) \longrightarrow \partial_i \bar{\varphi} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3.26)$$

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) \longrightarrow (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^3. \quad (3.27)$$

Compte-tenu de (3.26)-(3.27), nous obtenons

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, \partial_3 \bar{\varphi}) \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^3,$$

donc dans  $(L^2(\Omega))^3$ , et la proposition 3.2.1 est ainsi démontrée.  $\blacksquare$

### 3.2.5 Les espaces $\Psi_l$ et $\Psi_{l0}$

Nous avons vu à la proposition 3.2.1 que  $\bar{\varphi}$  limite d'une suite extraite de  $(\bar{\varphi}(h))$  appartient à l'espace

$$\Psi_l := \{\psi \in L^2(\Omega), \partial_3 \psi \in L^2(\Omega)\}.$$

Donnons quelques propriétés de cet espace. Il est évident que l'application

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \langle \varphi, \psi \rangle_{\Psi_l} = \int_{\Omega} \varphi \psi dx + \int_{\Omega} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi dx \quad (3.28)$$

définit un produit scalaire sur  $\Psi_l$  et en fait un espace de Hilbert. Notons  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$  la norme associée,

$$\|\psi\|_{\Psi_l} = (|\psi|_{\Omega}^2 + |\partial_3 \psi|_{\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace  $\Psi_l$  muni de  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$  s'identifie à l'espace  $H^1(-1, 1; L^2(\omega))$  muni de sa norme canonique. Pour la définition et l'étude des espaces  $H^m(a, b; X)$  où  $X$  est un espace de Hilbert, on peut se référer à [25]. En particulier, on sait que  $H^1(-1, 1; L^2(\omega))$  s'injecte continûment dans  $C^0([-1, 1]; L^2(\omega))$ . Par conséquent, la trace sur  $\cdot^+$  (resp.  $\cdot^-$ ) d'un élément de  $\Psi_l$  est bien définie dans  $L^2(\cdot^+)$  (resp.  $L^2(\cdot^-)$ ). De plus, l'application qui à  $\psi$  associe sa trace est continue de  $\Psi_l$  dans  $L^2(\cdot^+)$  (resp.  $L^2(\cdot^-)$ ). Notant  $\psi|_{\Gamma^+}$  (resp.  $\psi|_{\Gamma^-}$ ) cette trace, on pose maintenant

$$\Psi_{l_0} = \{\psi \in L^2(\Omega), \partial_3\psi \in L^2(\Omega); \psi|_{\Gamma^+} = \psi|_{\Gamma^-} = 0\}.$$

**Proposition 3.2.2** *L'espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $\Psi_l$  muni de  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$ . L'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\Psi_{l_0}$ .*

**Preuve.** Soit  $\varphi \in \Psi_l$ , orthogonal à  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{\Psi_l} = \int_{\Omega} \varphi \psi \, dx + \int_{\Omega} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi \, dx = 0. \quad (3.29)$$

Prenant  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , on obtient l'égalité

$$\partial_{33}\varphi = \varphi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

qui est aussi valable dans  $L^2(\Omega)$ . S'appuyant sur des résultats classiques (voir [10], [38]), on en déduit qu'il existe  $\psi_0$  et  $\psi_1$  dans  $L^2(\omega)$  tels que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi_0(x_1, x_2) \exp(x_3) + \psi_1(x_1, x_2) \exp(-x_3).$$

Reportant dans (3.29), on a, pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} (\psi_0 \exp(x_3) + \psi_1 \exp(-x_3)) \psi \, dx + \int_{\Omega} (\psi_0 \exp(x_3) - \psi_1 \exp(-x_3)) \partial_3 \psi \, dx = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2), \int_{-1}^1 \exp(x_3) \partial_3 \psi \, dx_3 &= - \int_{-1}^1 \exp(x_3) \psi \, dx_3 + \exp(1) \psi(x_1, x_2, 1) \\ &\quad - \exp(-1) \psi(x_1, x_2, -1). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2), \int_{-1}^1 \exp(-x_3) \partial_3 \psi \, dx_3 &= \int_{-1}^1 \exp(-x_3) \psi \, dx_3 + \exp(-1) \psi(x_1, x_2, 1) \\ &\quad - \exp(1) \psi(x_1, x_2, -1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \psi_0(\exp(1)\psi(x_1, x_2, 1) - \exp(-1)\psi(x_1, x_2, -1)) d\omega \\ & - \int_{\omega} \psi_1(\exp(-1)\psi(x_1, x_2, 1) - \exp(1)\psi(x_1, x_2, -1)) d\omega = 0, \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} \exp(1)\psi_0 - \exp(-1)\psi_1 &= 0, \\ -\exp(-1)\psi_0 + \exp(1)\psi_1 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que  $\psi_0 = \psi_1 = 0$ . L'orthogonal de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  dans  $\Psi_l$  est donc réduit à  $\{0\}$ , et étant donné que  $\Psi_l$  est la somme directe de l'adhérence de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et de son orthogonal, on a

$$\Psi_l = \overline{\mathcal{D}(\bar{\Omega})}^{\Psi_l}.$$

La démonstration de la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\Psi_{l_0}$  est analogue à la précédente. En prenant  $\varphi \in \Psi_{l_0}$  dans l'orthogonal de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\Psi_l$ , on trouve que

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \psi_0(x_1, x_2) \exp(x_3) + \psi_1(x_1, x_2) \exp(-x_3).$$

Or  $\varphi(x_1, x_2, 1) = \varphi(x_1, x_2, -1) = 0$ , d'où  $\psi_0(x_1, x_2) = \psi_1(x_1, x_2) = 0$ . Et par les mêmes arguments que pour la démonstration de densité précédente, on a

$$\Psi_{l_0} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\Psi_l}.$$

■

**Proposition 3.2.3** *L'application  $\psi \mapsto |\partial_3 \psi|_{\Omega}$  définit une norme sur  $\Psi_{l_0}$  équivalente à la norme associée au produit scalaire (3.28).*

**Preuve.** Soit  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} |\psi|_{\Omega}^2 &= 2 \int_{\Omega} \left( \int_{-1}^{x_3} \psi(x_1, x_2, s) \partial_3 \psi(x_1, x_2, s) ds \right) dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left( \int_{-1}^1 |\psi(x_1, x_2, s)| |\partial_3 \psi(x_1, x_2, s)| ds \right) dx \\ &\leq 2 \int_{-1}^1 \left( \int_{\Omega} |\psi(x)| |\partial_3 \psi(x)| dx \right) ds \\ &\leq 2 \int_{-1}^1 |\psi|_{\Omega} |\partial_3 \psi|_{\Omega} ds \leq 4 |\psi|_{\Omega} |\partial_3 \psi|_{\Omega}, \end{aligned}$$

d'où

$$|\psi|_{\Omega} \leq 4|\partial_3\psi|_{\Omega}. \quad (3.30)$$

Cette dernière inégalité peut être étendue à  $\Psi_{l_0}$  d'après la densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\Psi_{l_0}$  (démontrée ci-dessus). Ainsi nous avons l'équivalence des normes recherchée. ■

**Remarque 3.2.1** *De la proposition 3.2.2 on déduit que  $\mathcal{D}(-1, 1 ; L^2(\omega))$  est dense dans  $\Psi_{l_0}$ , ce qui est une manière de voir que  $\Psi_{l_0} = H_0^1(-1, 1 ; L^2(\omega))$ . La proposition 3.2.3 n'est autre que l'inégalité de Poincaré généralisée aux espaces de Sobolev à valeurs vectorielles.*

### 3.2.6 Equations limites

Revenons maintenant à l'étude asymptotique du problème (3.14). Notons que, grâce à la continuité de l'application trace de  $\Psi_l$  dans  $L^2(\cdot, +)$  (resp.  $L^2(\cdot, -)$ ), le potentiel limite  $\bar{\varphi}$  est dans  $\Psi_{l_0}$ .

Définissons la forme bilinéaire,  $a_\epsilon(\cdot, \cdot)$  dans  $\Psi_{l_0}$  par

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in \Psi_{l_0}, \quad a_\epsilon(\psi_1, \psi_2) = \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \psi_1 \partial_3 \psi_2 \, dx. \quad (3.31)$$

Elle est continue pour  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$  et d'après la proposition 3.2.3, elle est coercive sur  $\Psi_{l_0}$ .

Pour obtenir l'équation limite, faisons tout d'abord tendre  $h$  vers 0 dans l'équation (3.14). Grâce aux résultats de convergence faible de la proposition 3.2.1, on obtient

$$\forall \psi \in \Psi, \quad a_\epsilon(\bar{\varphi}, \psi) = - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi \, dx. \quad (3.32)$$

Or pour tout  $\psi$  dans  $\Psi_{l_0}$ , il existe une suite  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\Psi$  qui tend fortement dans  $\Psi_l$  vers  $\psi$ ; comme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_\epsilon(\bar{\varphi}, \psi_n) &= a_\epsilon(\bar{\varphi}, \psi), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi_n \, dx &= \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi \, dx, \end{aligned}$$

on obtient

$$\forall \psi \in \Psi_{l_0}, \quad a_\epsilon(\bar{\varphi}, \psi) = - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi \, dx. \quad (3.33)$$

**Proposition 3.2.4** *L'équation (3.33) admet dans  $\Psi_{l_0}$  une solution unique  $\bar{\varphi}$ .*

**Preuve.** L'existence de la solution de l'équation (3.33) est obtenue par construction, puisqu'elle admet  $\bar{\varphi}$  limite faible de  $\bar{\varphi}(h)$  comme solution. L'unicité est une conséquence de la coercivité de  $a_e$ . ■

Il est clair que, si l'on pose  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi_0$ , alors la proposition 3.2.4 a pour corollaire

**Corollaire 3.2.1** *Il existe un unique  $\varphi$  dans l'espace  $\{\psi \in \Psi_l ; \psi|_{\Gamma^+} = \varphi_0^+, \psi|_{\Gamma^-} = \varphi_0^-\}$  solution de l'équation*

$$\forall \psi \in \Psi_{l_0} \quad a_e(\varphi, \psi) = 0. \quad (3.34)$$

**Théorème 3.2.2** *Les convergences faibles obtenues à la proposition 3.2.1 peuvent être étendues à toute la suite  $(\bar{\varphi}(h))$ . De plus, cette dernière vérifie les convergences fortes ci-dessous :*

$$\bar{\varphi}(h) \rightarrow \bar{\varphi} \text{ dans } \Psi_{l_0}, \quad (3.35)$$

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h)) \rightarrow (0, 0) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.36)$$

**Preuve.** Nous avons vu ci-dessus que toutes les sous-suites de  $(\bar{\varphi}(h))$  qui convergent faiblement ont la même limite  $\bar{\varphi}$ , l'unique solution de (3.33). De plus d'après la majoration (3.17), nous savons que de toute sous-suite de  $(\bar{\varphi}(h))$ , on peut encore extraire une sous-suite qui converge. Il en résulte que toute la suite converge faiblement.

Montrons maintenant la convergence forte de  $\theta(h) := (h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h))$  vers  $\theta := (0, 0, \partial_3 \bar{\varphi})$  dans  $(L^2(\Omega))^3$ . Pour  $X = (X_1, X_2, X_3) \in L^2(\Omega)^3$ , posons

$$\|X\| = \left( \int_{\Omega} \epsilon_{ij} X_i X_j dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est clairement une norme hilbertienne sur  $(L^2(\Omega))^3$ , équivalente à la norme usuelle. D'après l'équation (3.14), on a

$$\|\theta(h)\|^2 = a_e(h)(\bar{\varphi}(h), \bar{\varphi}(h)) = l_e(h)(\bar{\varphi}(h)).$$

Grâce à la convergence faible

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) \rightharpoonup (0, 0, \partial_3 \bar{\varphi}) \text{ dans } L^2(\Omega)^3,$$

on a

$$l_e(h)(\bar{\varphi}(h)) \rightarrow - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx$$

et donc

$$|||\theta(h)|||^2 \rightarrow - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx.$$

Par ailleurs, on a, d'après (3.31) et (3.33),

$$|||\theta|||^2 = a_e(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}) = - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx.$$

On obtient donc la convergence de  $|||\theta(h)|||$  vers  $|||\theta(0)|||$ . On a donc prouvé la convergence des normes en plus de la convergence faible, d'où la convergence forte. ■

Posant  $\varphi(h) = \bar{\varphi}(h) + \varphi_0$  et rappelant que  $\varphi$  est la solution de (3.34), nous obtenons le corollaire ci-dessous.

**Corollaire 3.2.2** *La suite  $(\varphi(h))$  converge fortement vers  $\varphi$  dans  $\Psi_l$ .*

Etablissons les équations aux limites associées à l'équation variationnelle (3.34).

**Théorème 3.2.3** *La solution  $\varphi$  de l'équation variationnelle (3.34) est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} \varphi \in \Psi_l, \\ \partial_{33}\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur } ,^{\pm}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Ce problème se résout de façon explicite. On a

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_3 \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} + \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2}, \quad (3.38)$$

où  $\varphi_0^+$  (resp.  $\varphi_0^-$ ) désigne le potentiel appliqué à la partie  $,^+$  (resp.  $,^-$ ) de la frontière de la plaque.

**Preuve.** La résolution est élémentaire. Prenons tout d'abord  $\psi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , dans (3.34), on obtient :

$$\partial_{33}\varphi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega); \quad (3.39)$$

il existe donc des distributions  $d^0$  et  $d^1$  dans  $\mathcal{D}'(\omega)$  telles que

$$\varphi = x_3 d^1 + d^0. \quad (3.40)$$



Les distributions  $d^0$  et  $d^1$  sont déterminées grâce aux conditions limites de Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi_0^+ = \varphi|_{\Gamma^+} &= d^1 + d^0 \\ \varphi_0^- = \varphi|_{\Gamma^-} &= -d^1 + d^0 ;\end{aligned}$$

d'où on tire  $d^0$  et  $d^1$  :

$$\begin{aligned}d^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} \\ d^1 &= \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2}.\end{aligned}$$

■

**Remarque 3.2.2** 1. Le potentiel  $\varphi$  est une fonction affine en  $x_3$ . De plus, puisque  $\varphi_0^\pm$  est dans  $H^{\frac{1}{2}}(\cdot, \pm)$ ,  $\varphi$  est dans  $C^\infty([-1, 1[; H^{\frac{1}{2}}(\omega))$ .

2. Les conditions aux limites sur la surface latérale n'apparaissent pas dans le problème limite. On voit bien sur l'expression (3.38) de  $\varphi$  que celle-ci ne peut, sauf dans le cas particulier où  $\varphi_0$  est affine, satisfaire la condition  $\varphi = \varphi_0$  sur  ${}_\epsilon D$ . Il s'agit d'un problème de perturbations singulières. Par contre, les conditions aux limites sur  ${}^+ \cup {}^-$  sont conservées, ce qui est traduit par la convergence dans l'espace  $\Psi_1$ .

3. Définissons le "gouffre"

$$G = \left\{ \psi \in \Psi ; \forall \varphi \in \Psi, \int_{\Omega} \partial_3 \psi \partial_3 \varphi \, dx = 0 \right\}.$$

Nous sommes ici dans le cas inhibé, c'est-à-dire  $G = \{0\}$  selon le vocabulaire de [36], [6]. Vérifions que nos résultats sont en concordance avec ceux que l'on peut déduire de ces articles. Tout d'abord, pour appliquer [36], supposons que les coefficients  $\epsilon_{3\alpha}$  sont nuls. Alors  $a_\epsilon(h) = a_\epsilon^0 + h^2 a_\epsilon^2$  est la somme de deux formes bilinéaires et non de trois. De même,  $l_\epsilon^0 + h^2 l_\epsilon^2$  avec des notations évidentes. En toute rigueur, [36] traite du cas où le second membre ne dépend pas de  $h$ . L'hypothèse qui y est faite est que le second membre est continu pour la norme définie par  $a_\epsilon^0$ ; c'est bien le cas ici pour  $l_\epsilon^0$  et on peut vérifier que l'ajout du terme d'ordre inférieur  $h^2 l_\epsilon^2$  ne modifie pas les résultats. Suivant [36], nous construisons le complété de  $\Psi$  pour la norme induite par  $a_0$ ; c'est  $\Psi_{10}$ . Alors, appliquant [36], nous obtenons le résultat de convergence faible

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ dans } \Psi_{10},$$

où  $\bar{\varphi}$  est l'unique solution de (3.33). Une extension immédiate des démonstrations de [36] donne la convergence forte et on a alors une démonstration directe du théorème 3.2.2.

Dans [6], les résultats de [36] cités ci-dessus sont étendus à des formes bilinéaires  $a(h) = a^0 + ha^1 + h^2a^2$  sommes de trois termes ; c'est le cadre convenable pour (3.14). Le résultat de convergence faible donné par [6] coïncide avec le nôtre ; là aussi, on peut prolonger le travail des auteurs en complétant dans leur cadre abstrait leur résultat par une convergence forte.

Le travail préparatoire que nous avons effectué sur le problème électrique est donc une extension simple de résultats récents. Cependant, les travaux [36], [6] ne peuvent remplacer l'étude du problème piézoélectrique complet que nous allons effectuer dans la suite.

### 3.3 Analyse asymptotique en piézoélectricité statique

#### 3.3.1 Equations électro-mécaniques

Dans un matériau piézoélectrique, nous avons deux systèmes d'équations qui ne sont pas indépendants : les équations mécaniques comme en élasticité pure et les équations électriques.

##### 3.3.1.1 Les équations d'équilibre mécanique

Soit  $\mathbf{f}^h$  (resp.  $\mathbf{g}^h$ ) la densité de force volumique (resp. surfacique) appliquée au matériau et  $\nu$  le vecteur unitaire normal, extérieur à  $\Omega^h$ . Nous désignons par  $\gamma_D^h = \gamma_0 \times ]-h, h[$  la partie du bord à déplacement nul imposé où  $\gamma_0$  est de mesure non nulle, et  $\gamma_N^h$  la partie complémentaire ; on a  $\gamma_N^h = \gamma_1^+ \cup \gamma_1^-$  où  $\gamma_1^+ = \gamma_1 \times ]-h, h[$ ,  $\gamma_1^- = \gamma_1 \times ]-h, h[$ . L'équilibre mécanique s'écrit

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = \mathbf{f}^h & \text{dans } \Omega^h, \\ \sigma^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h)\nu = \mathbf{g}^h & \text{sur } \gamma_N^h, \\ \mathbf{u}^h = 0 & \text{sur } \gamma_D^h. \end{cases} \quad (3.41)$$

On suppose désormais que

$$\mathbf{f}^h \in (L^2(\Omega^h))^3, \quad \mathbf{g}^h \in (L^2(\gamma_N^h))^3. \quad (3.42)$$

### 3.3.1.2 L'équation de Maxwell-Gauss

On suppose que  $\Omega^h$  est un milieu diélectrique parfait, donc à densités de charges surfacique et volumique nulles. On note  $\varphi_0^h$  le potentiel électrique appliqué à la partie  $,^h_{\epsilon D}$  du bord de  $\Omega^h$ . L'équation de Maxwell-Gauss, qui a déjà fait l'objet du paragraphe 3.2.1, est

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = 0 & \text{dans } \Omega^h, \\ \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) \cdot \nu = 0 & \text{sur } ,^h_{\epsilon N}, \\ \varphi^h = \varphi_0^h & \text{sur } ,^h_{\epsilon D}. \end{cases} \quad (3.43)$$

La partie  $,^h_{\epsilon D}$  du bord est toujours supposée contenir  $,^{h+} \cup ,^{h-}$ . Comme au paragraphe 3.2.1, nous supposons que  $\varphi_0^h \in H^{\frac{1}{2}}(,^h_{\epsilon D})$ .

### 3.3.1.3 Formulation variationnelle

Aux équations (3.41)-(3.43), on adjoint les lois de comportement

$$\begin{cases} \sigma^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = C \mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h) - P \mathbf{E}^h(\varphi^h) & \text{dans } \Omega^h, \\ \mathbf{D}^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = P \mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h) + \epsilon \mathbf{E}^h(\varphi^h) & \text{dans } \Omega^h. \end{cases}$$

Nous allons établir la formulation variationnelle du problème de piézoélectricité. Elle est classique, voir Bernadou [4]. On définit les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^h &= \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^h))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_D^h} \equiv 0 \} \text{ et} \\ \Psi^h &= \{ \psi \in H^1(\Omega^h), \psi|_{\Gamma_{\epsilon D}^h} \equiv 0 \}. \end{aligned}$$

Nous posons  $\bar{\varphi}^h = \varphi^h - \varphi_0^h$ . Le problème variationnel associé à (3.41)-(3.43) s'écrit

Trouver  $(\mathbf{u}^h, \bar{\varphi}^h) \in \mathbf{V}^h \times \Psi^h$  tel que

$$\forall (\mathbf{v}^h, \psi^h) \in \mathbf{V}^h \times \Psi^h \quad a^h((\mathbf{u}^h, \bar{\varphi}^h), (\mathbf{v}^h, \psi^h)) = l^h(\mathbf{v}^h, \psi^h), \quad (3.44)$$

où

$$a^h((\mathbf{u}^h, \bar{\varphi}^h), (\mathbf{v}^h, \psi^h)) = \int_{\Omega^h} C \mathbf{e}^h(\mathbf{u}^h) : \mathbf{e}^h(\mathbf{v}^h) dx^h + \int_{\Omega^h} \epsilon_{ij} \partial_i^h \bar{\varphi}^h \partial_j^h \psi^h dx^h$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega^h} P_{mij} (\partial_m^h \bar{\varphi}^h e_{ij}^h(\mathbf{v}^h) - \partial_m^h \psi^h e_{ij}^h(\mathbf{u}^h)) dx^h, \quad (3.45) \\
l^h(\mathbf{v}^h, \psi^h) & = \int_{\Omega^h} \mathbf{f}^h \cdot \mathbf{v}^h dx^h + \int_{\Gamma_N^h} \mathbf{g}^h \cdot \mathbf{v}^h d, \\
& - \int_{\Omega^h} \epsilon_{ij} \partial_i^h \varphi_0^h \partial_j^h \psi^h dx^h - \int_{\Omega^h} P_{mij} \partial_m^h \varphi_0^h e_{ij}^h(\mathbf{v}^h) dx^h.
\end{aligned}$$

Grâce aux propriétés (3.2) et (3.3) des constantes d'élasticité et d'électricité, nous avons la  $\mathbf{V}^h \times \Psi^h$ -coercivité de la forme bilinéaire  $a^h(\cdot, \cdot)$  : en effet,

$$a^h((\mathbf{v}^h, \psi^h), (\mathbf{v}^h, \psi^h)) = \int_{\Omega^h} C \mathbf{e}^h(\mathbf{v}^h) : \mathbf{e}^h(\mathbf{v}^h) dx^h + \int_{\Omega^h} \epsilon_{ij} \partial_i^h \psi^h \partial_j^h \psi^h dx^h. \quad (3.46)$$

**Remarque 3.3.1** Dans l'équation ci-dessus les termes liés aux constantes piézoélectriques ont disparu. Ceci est dû à la réversibilité du phénomène de la piézoélectricité.

La forme bilinéaire  $a^h(\cdot, \cdot)$  est aussi  $\mathbf{V}^h \times \Psi^h$ -continue. La  $\mathbf{V}^h \times \Psi^h$ -continuité de la forme linéaire  $l^h(\cdot)$  est évidente. Ainsi une application directe du lemme de Lax-Milgram fournit le théorème d'existence et d'unicité suivant

**Théorème 3.3.1** *Le problème (3.44) admet une solution unique.*

### 3.3.2 Changement d'ouvert et mise à l'échelle des inconnues

Comme au paragraphe 3.2.3, nous faisons un changement de variable pour faire porter le petit paramètre sur les opérateurs seulement et non plus sur le domaine, afin d'obtenir des résultats de convergence dans des espaces de Hilbert indépendants de  $h$ .

Nous posons  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  et lui associons  $\mathbf{x}^h = (x_1, x_2, hx_3)$ , posons aussi  $\cdot_1 = \gamma_1 \times ]-1, 1[$ ,  $\cdot_N = \cdot_1 \cup \cdot^\pm$ . Nous faisons les hypothèses suivantes sur les ordres de grandeur des données du problème :

$$\begin{aligned}
f_\alpha^h(\mathbf{x}^h) & = h^2 f_\alpha(\mathbf{x}), & f_3^h(\mathbf{x}^h) & = h^3 f_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} & \in \Omega, \\
g_\alpha^h(\mathbf{x}^h) & = h^2 g_\alpha(\mathbf{x}), & g_3^h(\mathbf{x}^h) & = h^3 g_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} & \in \cdot_1, \\
g_\alpha^h(\mathbf{x}^h) & = h^3 g_\alpha(\mathbf{x}), & g_3^h(\mathbf{x}^h) & = h^4 g_3(\mathbf{x}), & \mathbf{x} & \in \cdot^\pm, \\
\varphi_0^h(\mathbf{x}^h) & = h^3 \varphi_0(\mathbf{x}), & & & \mathbf{x} & \in \Omega.
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Pour les forces appliquées, ce sont les hypothèses classiques (cf [8]). Par ailleurs, les constantes élastiques, électriques et piézoélectriques sont supposées indépendantes de  $h$ .

Nous effectuons le changement d'inconnues

$$\begin{aligned} u_\alpha^h(\mathbf{x}^h) &= h^2 u_\alpha(h)(\mathbf{x}), \\ u_3^h(\mathbf{x}^h) &= h u_3(h)(\mathbf{x}), \\ \bar{\varphi}^h(\mathbf{x}^h) &= h^3 \bar{\varphi}(h)(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Pour les déplacements, c'est le changement d'inconnues classique utilisé en élasticité linéaire. Notons que pour le potentiel  $\varphi^h$ , nous ne faisons pas la même mise à l'échelle qu'au paragraphe 3.2. Cette modification nous est dictée par la mise à l'échelle des inconnues mécaniques. En effet, nous souhaitons obtenir simultanément la convergence de  $\mathbf{u}(h)$  et la convergence de  $\bar{\varphi}(h)$  vers des limites non nulles. Les hypothèses (3.47)-(3.48) nous le permettent. D'ailleurs, dans le paragraphe précédent, on aurait pu effectuer le changement (3.48) sur le potentiel électrique et le résultat serait analogue.

Définissons les espaces  $\mathbf{V}$  et  $\Psi$  par

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} \equiv 0\}, \tag{3.49}$$

$$\Psi = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma_{eD}} \equiv 0\}. \tag{3.50}$$

Nous munissons  $\mathbf{V}$  de la norme  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} = \|\nabla \mathbf{v}\|_{(L^2(\Omega))^9}$ . D'après l'inégalité de Poincaré, cette norme est équivalente à la norme usuelle de  $(H^1(\Omega))^3$ . Et nous munissons  $\Psi$  de la norme  $\|\psi\|_{\Psi} = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)^3}$ . Ainsi le problème variationnel peut être posé sur le domaine fixe  $\Omega$ .

## Formulation variationnelle

Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , on définit

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{v}) &= e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta), \\ \kappa_{\alpha 3}(h)(\mathbf{v}) &= \frac{1}{h} e_{\alpha 3}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2h}(\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3), \\ \kappa_{33}(h)(\mathbf{v}) &= \frac{1}{h^2} e_{33}(\mathbf{v}) = \frac{1}{h^2} \partial_3 v_3. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Afin d'alléger l'écriture, nous poserons, en ce qui concerne  $\mathbf{u}(h)$ ,  $\kappa(h) = \kappa(h)(\mathbf{u}(h))$ . Nous définissons une forme bilinéaire  $a(h)$  et une forme linéaire  $l(h)$  par

$$\begin{aligned} a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) &= \\ &= \int_{\Omega} C\kappa(h) : \kappa(h)(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi \, dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [P_{3kl} (\partial_3 \bar{\varphi}(h) \kappa_{kl}(h)(\mathbf{v}) - \partial_3 \psi \kappa_{kl}(h))] dx + \\
& h \int_{\Omega} [\epsilon_{3\alpha} (\partial_\alpha \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi + \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_\alpha \psi)] dx + \\
& h \int_{\Omega} [P_{\alpha kl} (\partial_\alpha \bar{\varphi}(h) \kappa_{kl}(h)(\mathbf{v}) - \partial_\alpha \psi \kappa_{kl}(h))] dx + h^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\varphi}(h) \partial_\beta \psi dx, \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(h)(\mathbf{v}, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi dx \\
& - h \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} [\partial_\alpha \varphi_0 \partial_3 \psi + \partial_3 \varphi_0 \partial_\alpha \psi] dx - h^2 \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_0 \partial_\beta \psi dx \\
& - \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \kappa_{ij}(\mathbf{v}) dx - h \int_{\Omega} P_{\alpha ij} \partial_\alpha \varphi_0 \kappa_{ij}(\mathbf{v}) dx. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Des calculs élémentaires montrent que le problème (3.44) est équivalent à

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)) \in \mathbf{V} \times \Psi \text{ tel que} \\
& \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V} \times \Psi, \quad a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) = l(h)(\mathbf{v}, \psi). \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de  $(\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h))$ , nous suivons maintenant un plan analogue à celui du paragraphe 3.2.4.

### 3.3.3 Majoration de normes et convergences faibles

**Proposition 3.3.1** *Il existe  $c > 0$  tel que  $\forall h, 0 < h < 1$ ,*

$$\|\mathbf{u}(h)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_{\Omega} \kappa(h) : \kappa(h) dx + |h \partial_1 \varphi(h)|_{\Omega}^2 + |h \partial_2 \varphi(h)|_{\Omega}^2 + |\partial_3 \varphi(h)|_{\Omega}^2 < c. \quad (3.55)$$

*De plus, il existe*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\in (H^1(\Omega))^3, \\
\kappa &\in (L^2(\Omega))^9, \\
\varphi &\in L^2(\Omega),
\end{aligned}$$

*et des sous-suites encore notées  $(\mathbf{u}(h))_{h>0}$ ,  $(\kappa(h))_{h>0}$  et  $(h \partial_1 \varphi(h), h \partial_2 \varphi(h), \partial_3 \varphi(h))_{h>0}$  telles que les convergences faibles suivantes soient satisfaites :*

$$\mathbf{u}(h) \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } (H^1(\Omega))^3, \quad (3.56)$$

$$\kappa(h) \rightharpoonup \kappa \text{ dans } (L^2(\Omega))^9, \quad (3.57)$$

$$\varphi(h) \rightharpoonup \varphi \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (3.58)$$

$$(h \partial_1 \varphi(h), h \partial_2 \varphi(h), \partial_3 \varphi(h)) \rightharpoonup (0, 0, \partial_3 \varphi) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.59)$$

**Preuve.** Définissons les vecteurs

$$\begin{aligned} (\theta_1(h), \theta_2(h), \theta_3(h)) &= (h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)), \\ (\hat{\theta}_1(h), \hat{\theta}_2(h), \hat{\theta}_3(h)) &= (h \partial_1 \varphi_0, h \partial_2 \varphi_0, \partial_3 \varphi_0) \end{aligned}$$

et posons  $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{u}(h), \bar{\varphi})$  dans (3.54). On obtient, de manière analogue à (3.46),

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} C \kappa(h) : \kappa(h) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \theta_i(h) \theta_j(h) dx = \\ &\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(h) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(h) d, - \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \hat{\theta}_i(h) \theta_j(h) dx - \int_{\Omega} P_{mij} \hat{\theta}_m(h) \kappa_{ij}(h) dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour obtenir la majoration (3.55), nous allons utiliser les propriétés de coercivité (3.2) et (3.3), ainsi que les propriétés rappelées ci-dessous :

1. pour tout  $(a, b, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$2ab \leq ma^2 + \frac{1}{m}b^2, \quad (3.61)$$

2. la continuité de l'application trace de  $\mathbf{V}$  dans  $(L^2(\cdot, N))^3$ ,

3. l'inégalité de Poincaré,

4. l'inégalité de Korn (cf. [17]) :  $\exists c > 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx$ .

Majorons tout d'abord le second membre de (3.60). Posons  $\varepsilon = \sup_{1 \leq i, j \leq 3} \{|\epsilon_{ij}|\}$ ,  $p = \sup_{1 \leq i, j, m \leq 3} \{|P_{mij}|\}$ . La propriété (3.61) nous donne les inégalités

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(h) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(h) d, \right| &\leq \frac{m}{2} \{|\mathbf{f}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{g}|_{\Gamma_N}^2\} + \\ &\frac{1}{2m} \{|\mathbf{u}(h)|_{\Omega}^2 + |\mathbf{u}(h)|_{\Gamma_N}^2\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\left| \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \hat{\theta}_i(h) \theta_j(h) dx \right| \leq \frac{3m}{2} \varepsilon^2 |\hat{\theta}(h)|_{\Omega}^2 + \frac{3}{2m} |\theta(h)|_{\Omega}^2, \quad (3.63)$$

$$\left| \int_{\Omega} P_{mij} \hat{\theta}_m(h) \kappa_{ij}(h) dx \right| \leq \frac{9m}{2} p^2 |\hat{\theta}(h)|_{\Omega}^2 + \frac{3}{2m} \int_{\Omega} \kappa(h) : \kappa(h) dx. \quad (3.64)$$

Appliquant la continuité de l'application trace et l'inégalité de Poincaré à (3.62), on a

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(h) dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(h) d, \right| \leq m \{ |\mathbf{f}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{g}|_{\Gamma_N}^2 \} + \frac{c}{m} \|\mathbf{u}(h)\|_{\mathbf{V}}^2. \quad (3.65)$$

Puisque  $\hat{\theta}(h)$  est borné dans  $(L^2(\Omega))^3$  indépendamment de  $h$ , les inégalités (3.63)-(3.64) donnent

$$\left| \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \hat{\theta}_i(h) \theta_j(h) dx \right| \leq cm + \frac{3}{2m} |\theta(h)|_{\Omega}^2, \quad (3.66)$$

$$\left| \int_{\Omega} P_{mij} \hat{\theta}_m(h) \kappa_{ij}(h) dx \right| \leq cm + \frac{3}{2m} \int_{\Omega} \kappa(h) : \kappa(h) dx. \quad (3.67)$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Korn et comme  $0 < h < 1$ , on a

$$c \|\mathbf{u}(h)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{u}(h)) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(h)) dx \leq \int_{\Omega} \kappa(h) : \kappa(h) dx.$$

L'inégalité ci-dessus combinée aux propriétés de coercivité (3.2)-(3.3) permet d'obtenir la minoration du premier membre de (3.60)

$$c \left\{ \|\mathbf{u}(h)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_{\Omega} \kappa(h) : \kappa(h) dx + |\theta(h)|_{\Omega}^2 \right\} \leq \int_{\Omega} C\kappa(h) : \kappa(h) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \theta_i(h) \theta_j(h) dx. \quad (3.68)$$

En prenant  $m$  assez grand dans les inégalités (3.65)-(3.67), on obtient la majoration (3.55). Dans  $L^2(\Omega)$  et dans  $\mathbf{V}$ , toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement. Il y a donc, d'après la majoration des normes (3.55), convergence faible de sous-suites  $(\mathbf{u}(h))_{0 < h < 1}$  et  $(\kappa(h))_{0 < h < 1}$  lorsque  $h$  tend vers 0 et l'existence de  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in (L^2(\Omega))^3$  tel que

$$(h \partial_1 \bar{\varphi}(h), h \partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) \rightharpoonup (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.69)$$

Rappelons que  $\cdot_{\epsilon D}$  contient toujours  $\cdot_{\cdot}$ . La majoration de la suite  $(\bar{\varphi}(h))_{0 < h < 1}$  et l'égalité

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, \partial_3 \bar{\varphi}) \text{ dans } (\mathcal{D}'(\Omega))^3$$

sont obtenues en adoptant la même démarche que dans la démonstration de la proposition 3.2.1. Sachant que  $\varphi(h) = \bar{\varphi}(h) + \varphi_0$ , la proposition 3.3.1 est ainsi démontrée.  $\blacksquare$

Donnons les lois de comportement mises à l'échelle. On pose



$$\left\{ \begin{array}{l} E_\alpha(h)(\varphi(h)) = h^{-2} E_\alpha^h(\varphi^h) = -h \partial_\alpha \varphi(h), \\ E_3(h)(\varphi(h)) = h^{-2} E_3^h(\varphi^h) = -\partial_3 \varphi(h), \\ \sigma_{ij}(h)(\mathbf{u}(h), \varphi(h)) = h^{-2} \sigma_{ij}^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) \\ \qquad \qquad \qquad = \lambda \kappa_{kk}(h)(\mathbf{u}(h)) \delta_{ij} + 2\mu \kappa_{ij}(h)(\mathbf{u}(h)) - P_{kij} E_k(h)(\varphi(h)), \\ D_i(h)(\mathbf{u}(h), \varphi(h)) = h^{-2} D_i^h(\mathbf{u}^h, \varphi^h) = \epsilon_{ij} E_j(h)(\varphi(h)) + P_{ikl} \kappa_{kl}(h)(\mathbf{u}(h)), \end{array} \right. \quad (3.70)$$

Les convergences obtenues à la proposition 3.3.1 fournissent le corollaire

**Corollaire 3.3.1** *Il existe  $\sigma \in (L^2(\Omega))^9$  et  $\mathbf{D} \in (L^2(\Omega))^3$  tels que le tenseur des contraintes et le vecteur déplacement mis à l'échelle vérifient les convergences faibles*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_{ij}(h)(\mathbf{u}(h), \varphi(h)) &= \sigma_{ij} = \lambda \kappa_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \kappa_{ij} + P_{3ij} \partial_3 \varphi, \\ \lim_{h \rightarrow 0} D_i(h)(\mathbf{u}(h), \varphi(h)) &= D_i = -\epsilon_{i3} \partial_3 \varphi + P_{ikl} \kappa_{kl}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

### 3.3.4 Identification du problème limite

Introduisons l'espace

$$\mathbf{V}_{KL} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = 0, e_{i3}(\mathbf{v}) = 0 \right\}. \quad (3.72)$$

D'après [8], l'espace  $V_{KL}$  défini en (3.72) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{KL} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \exists (\eta_1, \eta_2) \in V_H(\omega), \eta_3 \in V_3(\omega), \right. \\ \left. v_\alpha(x) = \eta_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_\alpha \eta_3(x_1, x_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

avec

$$V_H(\omega) = \left\{ \eta \in (H^1(\omega))^2, \eta|_{\gamma_0} = 0 \right\}, \quad (3.74)$$

$$V_3(\omega) = \left\{ \eta \in H^2(\omega), \eta|_{\gamma_0} = 0, \partial_\nu \eta|_{\gamma_0} = 0 \right\}. \quad (3.75)$$

C'est l'espace des déplacements de Kirchhoff-Love.

**Lemme 3.3.1** *Les limites  $\mathbf{u}$ ,  $\kappa$  et  $\varphi$  trouvées à la proposition 3.3.1 sont respectivement dans  $\mathbf{V}_{KL}$ ,  $(L^2(\Omega))^9$  et  $\Psi_1$ , et vérifient les équations suivantes :*

$$\kappa_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (3.76)$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \quad C_{i3kl} \kappa_{kl} + P_{3i3} \partial_3 \varphi = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (3.77)$$

L'équation (3.77) équivaut à

$$\begin{cases} \kappa_{33} = -\frac{1}{\lambda+2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda \kappa_{\beta\beta}) & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \kappa_{\alpha 3} = -\frac{1}{2\mu} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.78)$$

De plus,  $\varphi$  satisfait la condition au bord  $\varphi|_{\Gamma^\pm} = \varphi_0$ .

**Preuve.** Nous avons vu précédemment que les  $\kappa_{i3}(h)$  étaient bornés dans  $L^2(\Omega)$ , d'où  $e_{\alpha 3}(\mathbf{u}(h)) (= h\kappa_{\alpha 3}(h))$  et  $e_{33}(\mathbf{u}(h)) (= h^2\kappa_{33}(h))$  tendent fortement vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ . Nous avons donc  $e_{i3}(\mathbf{u}) = 0$ , d'où  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_{KL}$ . L'égalité (3.76) est une conséquence des convergences (3.56)-(3.57).

Pour prouver (3.77), nous utilisons une démarche analogue à celle de [8]. On multiplie l'équation (3.54) par  $h^2$ , on y pose  $\psi \equiv 0$ , puis on fait tendre  $h$  vers 0, et on obtient :

$$C_{33kl} \kappa_{kl} + P_{333} \partial_3 \bar{\varphi} = -P_{333} \partial_3 \varphi_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega); \quad (3.79)$$

ensuite dans l'équation (3.54) toujours, on pose  $(v_3, \psi) \equiv 0$ , on la multiplie par  $h$ , puis on fait tendre  $h$  vers 0. Ainsi on a :

$$C_{\alpha 3kl} \kappa_{kl} + P_{3\alpha 3} \partial_3 \bar{\varphi} = -P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (3.80)$$

Puisque le matériau est supposé mécaniquement isotrope, on a

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

et l'on obtient aisément (3.78). Rappelons que  $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi_0$  et le lemme est démontré. ■

Le lemme 3.3.1 nous permet d'exprimer le tenseur des contraintes limite  $\sigma$  et le vecteur déplacement électrique limite  $\mathbf{D}$  en fonction du déplacement limite  $\mathbf{u}$  et du potentiel limite  $\varphi$ .

**Corollaire 3.3.2** *Les lois de comportement limites (3.71) sont explicites en  $\mathbf{u}$  et  $\varphi$  :*

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = 2\mu \left[ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{i\rho} + \delta_{\alpha i} \delta_{\beta\rho} \right] \kappa_{i\rho} - \left[ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \delta_{\alpha\beta} P_{333} - P_{3\alpha\beta} \right] \partial_3 \varphi, \\ \sigma_{i3} = 0, \\ D_i = - \left[ \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \delta_{\alpha\beta} P_{i33} - P_{i\alpha\beta} \right] \kappa_{\alpha\beta} - \left[ \frac{P_{i\alpha 3} P_{3\alpha 3}}{\mu} + \frac{P_{i33} P_{333}}{\lambda+2\mu} + \epsilon_{i3} \right] \partial_3 \varphi. \end{cases} \quad (3.81)$$

**Remarque 3.3.2** *Dans [3], il est admis que la contribution du potentiel imposé aux faces de la plaque piézoélectrique dans le tenseur des contraintes est donnée par :*

$$(\sigma_{11})_{pe} = (\sigma_{22})_{pe} = \frac{d}{h} (\varphi^+ - \varphi^-) \quad (3.82)$$

où  $d$  est appelé constante de déformation piézocéramique. En redimensionnalisant dans (3.81), en faisant l'approximation

$$\partial_3^h \varphi^h \approx \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{h},$$

et en supposant que l'effet piézoélectrique est le même dans les directions  $0x_1$  et  $0x_2$ , (c'est-à-dire  $P_{311} = P_{322}$ ), on retrouve la structure de (3.82). De plus, notre méthode fournit la valeur de  $d$ .

Définissons une forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$ , et une forme linéaire  $l(\cdot)$  dans  $\mathbf{V}_{KL} \times \Psi_l$ , qui vont servir dans la définition des équations limites, par

$$\forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Psi_l,$$

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) &= 2\mu \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\rho i} \delta_{\alpha \beta} + \delta_{\alpha \rho} \delta_{i \beta} \right) e_{\rho i}(\mathbf{u}) e_{\alpha \beta}(\mathbf{v}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} p_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi dx \\ &\quad + \int_{\Omega} p_{3\alpha\beta} [e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \psi - \partial_3 \varphi e_{\alpha\beta}(\mathbf{v})] dx, \\ l(\mathbf{v}, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, . \end{aligned}$$

avec les constantes  $p_{33}$  et  $p_{3\alpha\beta}$  définies comme suit

$$\begin{aligned} p_{33} &= \frac{1}{\mu} P_{3\alpha 3} P_{3\alpha 3} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} P_{333} + \epsilon_{33} \\ p_{3\alpha\beta} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} \delta_{\alpha\beta} - P_{3\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

**Lemme 3.3.2** *La limite  $(\mathbf{u}, \varphi)$  est l'unique solution de l'équation variationnelle*

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Psi_l, \\ &\forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Psi_{l_0}, \quad a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = l(\mathbf{v}, \psi). \end{aligned} \quad (3.84)$$

**Preuve.** Prenons tout d'abord  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{V}_{KL}$ ,  $\psi$  dans  $\Psi$  dans l'équation (3.54) et faisons tendre  $h$  vers 0. Grâce aux résultats de convergence faible de la proposition 3.3.1, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(h) ((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) =$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{\alpha\beta kl} \kappa_{kl} \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi} \partial_3 \psi \, dx + \\ & \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \bar{\varphi} \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} P_{3kl} \partial_3 \psi \kappa_{kl} \, dx, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} l(h)(\mathbf{v}, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d, - \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi_0 \partial_3 \psi \, dx - \\ & \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \varphi_0 \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx. \end{aligned} \quad (3.86)$$

En remplaçant  $\kappa_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  par les expressions obtenues au lemme 3.3.1 dans (3.85), on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) &= \\ & \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\rho\iota} \kappa_{\rho\iota} \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\rho 3} \left[ -\frac{1}{2\mu} P_{3\rho 3} \partial_3 \varphi \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right] \, dx + \\ & \int_{\Omega} C_{\alpha\beta 33} \left[ -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda \kappa_{\rho\rho}) \right] \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi} \partial_3 \psi \, dx + \\ & \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \bar{\varphi} \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \psi \kappa_{\alpha\beta} \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha 3} \partial_3 \psi \left[ -\frac{1}{2\mu} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi \right] \, dx - \\ & \int_{\Omega} P_{333} \partial_3 \psi \left( -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda \kappa_{\beta\beta}) \right) \, dx \end{aligned} \quad (3.87)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) &= \\ & \int_{\Omega} (\lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\iota} + \mu(\delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\iota} + \delta_{\alpha\iota} \delta_{\beta\rho})) e_{\rho\iota} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx + \\ & \int_{\Omega} \lambda \left[ -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda e_{\rho\rho}) \right] e_{\alpha\alpha}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi} \partial_3 \psi \, dx + \\ & \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \bar{\varphi} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \psi e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha 3} \partial_3 \psi \left[ -\frac{1}{2\mu} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi \right] \, dx - \\ & \int_{\Omega} P_{333} \partial_3 \psi \left( -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda e_{\beta\beta}) \right) \, dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Enfin, en faisant l'égalité

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(h)((\mathbf{u}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \psi)) = \lim_{h \rightarrow 0} l(h)(\mathbf{v}, \psi)$$

et en tenant compte de ce que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi - \varphi_0, \\ e_{\rho\rho} e_{\alpha\alpha} &= \delta_{\rho\iota} \delta_{\alpha\beta} e_{\rho\iota} e_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

on a

$$\forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \Psi, \quad a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = l(\mathbf{v}, \psi).$$

De plus, d'après la proposition 3.2.2, pour toute fonction  $\psi$  de  $\Psi_{l_0}$ , il existe une suite  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\Psi$  qui tend fortement vers  $\psi$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$ . Comme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi_n)) &= a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} l(\mathbf{v}, \psi_n) &= l(\mathbf{v}, \psi), \end{aligned}$$

nous obtenons  $a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi)) = l(\mathbf{v}, \psi)$ .

Pour obtenir l'unicité de la solution de l'équation (3.84), supposons qu'il y en a deux,  $(\mathbf{u}^1, \varphi^1)$  et  $(\mathbf{u}^2, \varphi^2)$  et posons  $\mathbf{w} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ ,  $\psi = \varphi^1 - \varphi^2$ . On a donc

$$\begin{aligned} a((\mathbf{w}, \psi), (\mathbf{w}, \psi)) &= 2\mu \int_{\Omega} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\rho\ell} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\ell\beta} \right] e_{\rho\ell}(\mathbf{w}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) dx + \\ &\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} P_{3\alpha 3} P_{3\alpha 3} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} P_{333} + \epsilon_{33} \right] \partial_3 \psi \partial_3 \psi dx = 0, \end{aligned}$$

d'où  $\mathbf{w} = 0$  dans  $\mathbf{V}_{KL}$ , et  $\partial_3 \psi = 0$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc  $\psi$  est nul dans  $\Psi_{l_0}$ . Ainsi nous avons l'unicité de la solution de l'équation (3.84).  $\blacksquare$

**Remarque 3.3.3** *On aurait pu établir directement la coercivité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur l'espace  $\mathbf{V}_{KL} \times \Psi_{l_0}$ , et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution.*

Nous allons maintenant écrire, le problème variationnel trouvé au lemme 3.3.2 sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Comme le vecteur déplacement limite  $\mathbf{u}$  est dans  $\mathbf{V}_{KL}$ , il peut s'écrire

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(x) &= \zeta_{\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \partial_{\alpha} \zeta_3(x_1, x_2) \\ u_3 &= \zeta_3, \end{aligned} \tag{3.89}$$

où  $\zeta_{\alpha} \in V_H(\omega)$  et  $\zeta_3 \in V_3(\omega)$ .

**Théorème 3.3.2** *Le potentiel électrique  $\varphi$  est un polynôme du second degré en  $x_3$  :*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^2 \varphi^i(x_1, x_2) x_3^i, \tag{3.90}$$

dont les coefficients  $\varphi^i(x_1, x_2)$  sont donnés en fonction de  $\zeta_3$  par

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} - \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3, \\ \varphi^1 &= \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2}, \\ \varphi^2 &= \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3. \end{aligned} \tag{3.91}$$

**Preuve.** Prenant  $\mathbf{v} = 0$  dans l'équation (3.84), nous obtenons le système d'équations limites électriques. En effet,

$$\forall \psi \in \Psi_{l_0}, \int_{\Omega} D_3(\mathbf{u}, \varphi) \partial_3 \psi \, dx = 0, \quad (3.92)$$

où  $D_3$  est la troisième composante du vecteur déplacement limite donné en (3.81) et s'écrit

$$D_3(\mathbf{u}, \varphi) = -p_{33} \partial_3 \varphi - p_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}). \quad (3.93)$$

Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $\Psi_{l_0}$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\Psi_l}$ , l'équation (3.92) est équivalente à

$$\partial_3 D_3(\mathbf{u}, \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (3.94)$$

Il existe donc une distribution  $d^1$  dans  $\mathcal{D}'(\omega)$ , en fait dans  $L^2(\omega)$  d'après la régularité de  $\mathbf{u}$  et de  $\varphi$ , telle que  $D_3(\mathbf{u}, \varphi) = d^1$ . De (3.93), on tire que

$$\partial_3 \varphi = -\frac{p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} [e_{\alpha\beta}(\zeta) - x_3 \partial_{\alpha\beta} \zeta_3] - \frac{1}{p_{33}} d^1. \quad (3.95)$$

Intégrons à nouveau; il existe  $d^0$  dans  $L^2(\omega)$  tel que

$$\varphi = -\frac{p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \left[ x_3 e_{\alpha\beta}(\zeta) - \frac{x_3^2}{2} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right] - \frac{x_3}{p_{33}} d^1 + d^0. \quad (3.96)$$

Il reste à choisir  $d^0$  et  $d^1$  de sorte que  $\varphi$  satisfasse les conditions aux limites de Dirichlet  $\varphi|_{\Gamma^+} = \varphi_0^+$  et  $\varphi|_{\Gamma^-} = \varphi_0^-$ . On obtient

$$\begin{aligned} d^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} - \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3, \\ d^1 &= -p_{33} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} - p_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\zeta). \end{aligned}$$

On en tire immédiatement les expressions (3.90)-(3.91). ■

**Théorème 3.3.3** *On fait sur les données les hypothèses de régularité suivantes :*

- la densité de force volumique  $\mathbf{f}$  appliquée vérifie  $f_\alpha \in H^1(\Omega)$ ,  $f_3 \in L^2(\Omega)$ ,
- les forces surfaciques  $g_\alpha$  sont dans  $(H^1(\cdot, N))^3$ ,
- le potentiel au bord est tel que  $(\varphi_0^+ - \varphi_0^-)$  est dans  $H^1(\omega)$ .

Les déplacements  $\zeta_3$  et  $(\zeta_1, \zeta_2)$  sont alors solutions de deux systèmes d'équations aux dérivées partielles découplés.

– *Système d'inconnue  $\zeta_3$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \int_{-1}^1 (x_3 \partial_\alpha f_\alpha + f_3) dx_3 + g_3^+ + g_3^- + \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) & \text{dans } \omega, \\ \zeta_3 = 0, \quad \partial_\nu \zeta_3 = 0 & \text{sur } \gamma_0, \\ m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\alpha \nu_\beta = 0 & \text{sur } \gamma_1, \\ \partial_\alpha m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\beta + \partial_\tau \{m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_\beta \tau_\alpha\} = \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha \nu_\alpha dx_3 + (g_\alpha^- - g_\alpha^-) \nu_\alpha & \text{sur } \gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.97)$$

où

$$m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} \Delta \zeta_3 + \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right] + \frac{2p_{3\alpha\beta} p_{3i\ell}}{3p_{33}} \partial_{i\ell} \zeta_3 ;$$

– *Système d'inconnues  $(\zeta_1, \zeta_2)$*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-) - p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) & \text{dans } \omega, \\ (\zeta_1, \zeta_2) = 0 & \text{sur } \gamma_0, \\ n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \nu_\alpha = \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 + p_{3\alpha\beta} (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \nu_\alpha & \text{dans } \gamma_1, \end{array} \right. \quad (3.98)$$

où

$$n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = 2\mu \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} e_{\ell\ell}(\zeta) + e_{\alpha\beta}(\zeta) \right]. \quad (3.99)$$

**Commentaire 3.3.1** *Comme en élasticité pure, les  $m_{\alpha\beta}$  correspondent aux limites des moments des forces de contrainte*

$$m_{\alpha\beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 x_3 \sigma_{\alpha\beta}(h) dx_3, \quad (3.100)$$

et les  $n_{\alpha\beta}$  à la moyenne sur l'épaisseur de la plaque des forces de contrainte

$$n_{\alpha\beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sigma_{\alpha\beta}(h) dx_3. \quad (3.101)$$

**Preuve.** En posant successivement, dans l'équation (3.84),

$$\begin{aligned} v_\alpha(x) &= -x_3 \partial_\alpha \eta_3(x_1, x_2), \quad v_3 = \eta_3 \quad \text{et} \quad \psi = 0, \\ v_\alpha(x) &= \eta_\alpha(x_1, x_2), \quad v_3 = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0, \end{aligned}$$

et en procédant par intégration par parties, nous obtenons le système d'équations limites mécaniques.

Le théorème 3.3.2 nous permet d'éliminer l'inconnue  $\varphi$  dans l'équation variationnelle (3.84), de découpler les équations vérifiées par les déplacements verticaux et celles vérifiées par les déplacements horizontaux, et de poser les équations aux limites sur le domaine bidimensionnel  $\omega$ .

Nous allons reformuler l'équation variationnelle (3.84) sans les équations électriques déjà résolues : nous prenons  $\psi = 0$  et remplaçons  $\varphi$  par  $\sum_{i=0}^2 \varphi^i(x_1, x_2)x_3^i$ . Nous obtenons l'équation

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{KL}, \quad a_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_M(\mathbf{v}) \quad (3.102)$$

où

$$\begin{aligned} a_M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2\mu \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{i\ell} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\ell} \delta_{i\beta} \right) e_{i\ell}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \frac{p_{3\alpha\beta} p_{3i\ell}}{p_{33}} x_3^2 \partial_{i\ell} u_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 dx, \end{aligned}$$

$$l_M(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, + \int_{\Omega} p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dx.$$

Le problème (3.102) est proche du problème limite que l'on obtient dans l'analyse asymptotique du système de l'élasticité linéarisée. Nous suivons pour sa résolution la démarche classique.

Soit  $\eta_3$  un élément de  $V_3$  défini en (3.75), posons

$$v_{\alpha}(x) = -x_3 \partial_{\alpha} \eta_3(x_1, x_2), \quad v_3 = \eta_3$$

dans l'équation (3.102). Nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{4\mu}{3} \int_{\omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{i\ell} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\ell} \delta_{i\beta} \right) \partial_{i\ell} \zeta_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 d\omega + \frac{2}{3} \int_{\Omega} \frac{p_{3i\ell} p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \partial_{i\ell} \zeta_3 \partial_{\alpha\beta} \eta_3 d\omega \\ &= - \int_{\Omega} x_3 f_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3 dx + \int_{\Omega} f_3 \eta_3 dx - \int_{\Gamma_{\pm}} x_3 g_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3 d, + \int_{\Gamma_{\pm}} g_3 \eta_3 d, \quad ; \quad (3.103) \end{aligned}$$

d'où, en choisissant  $\eta_3$  dans  $\mathcal{D}(\omega)$ , l'égalité

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) &= \partial_{\alpha} \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} dx_3 + \int_{-1}^1 f_3 dx_3 + \\ &\quad \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-) + g_3^+ + g_3^- \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\omega), \quad (3.104) \end{aligned}$$



avec

$$m_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \frac{4\mu}{3} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} \Delta \zeta_3 + \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right] + \frac{2p_{3\alpha\beta} p_{3i\ell}}{3p_{33}} \partial_{i\ell} \zeta_3.$$

Supposons, par exemple, que le domaine  $\omega$  est polygonal. Les conditions au bord étant mêlées, des singularités peuvent apparaître au niveau des sommets singuliers, c'est-à-dire des sommets non convexes de  $\omega$ , et des sommets où il y a un changement de condition au bord. Ainsi, il n'y a pas assez de régularité sur  $\zeta_3$  pour que l'on puisse appliquer la formule d'intégration par parties de Green. Cependant, nous savons que  $\zeta_3$  est dans  $H^4(\tilde{\omega})$  où  $\tilde{\omega}$  est  $\omega$  amputé d'un voisinage de l'ensemble des sommets singuliers. Pour plus de détails sur l'étude des singularités, on peut se référer à Grisvard [21]. Soit  $\{\mathbf{s}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  l'ensemble des sommets singuliers, soit l'ouvert  $\omega_\varepsilon = \omega \setminus \cup_{i=1}^n \overline{B(\mathbf{s}_i, \varepsilon)}$ , où  $B(\mathbf{s}_i, \varepsilon)$  est la boule de centre  $\mathbf{s}_i$  et de rayon  $\varepsilon$ , on définit  $\gamma_{1\varepsilon} = \gamma_1 \cap \bar{\omega}_\varepsilon$ . Soit  $\eta_3 \in V_3$  à support dans  $\bar{\omega}_\varepsilon$ ,  $\zeta_3$  étant dans  $H^4(\omega_{\frac{\varepsilon}{2}})$ , nous pouvons appliquer la formule de Green à (3.103) :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \eta_3 \, d\omega - \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\beta} \eta_3 \, d\gamma + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \partial_{\beta} \eta_3 \, d\gamma = \\ & \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha} \left( \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} \, dx_3 \right) \eta_3 \, d\omega - \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} \, dx_3 \right) \nu_{\alpha} \eta_3 \, d\gamma \\ & + \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 f_3 \, dx_3 \right) \eta_3 \, d\omega + \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) \eta_3 - \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) \nu_{\alpha} \eta_3 \\ & + \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} (g_3^{+} + g_3^{-}) \eta_3 \, d\omega. \end{aligned}$$

Ainsi d'après (3.104), nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\beta} \eta_3 \, d\gamma - \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \partial_{\beta} \eta_3 \, d\gamma &= \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} \, dx_3 \right) \nu_{\alpha} \eta_3 \, d\gamma \\ &+ \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) \nu_{\alpha} \eta_3. \end{aligned}$$

Or

$$\partial_{\beta} \eta_3 = \tau_{\beta} \partial_{\tau} \eta_3 + \nu_{\beta} \partial_{\nu} \eta_3,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\alpha} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\beta} \eta_3 \, d\gamma + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_{\tau} \{ m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \tau_{\beta} \} \eta_3 \, d\gamma - \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} m_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} \partial_{\nu} \eta_3 \, d\gamma = \\ \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} \right) \nu_{\alpha} \eta_3 \, dx_3 \, d\gamma + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) \nu_{\alpha} \eta_3, \end{aligned}$$

et, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par identification, on a

$$\begin{aligned} \partial_\alpha m_{\alpha\beta}(\zeta_3)\nu_\beta + \partial_\tau\{m_{\alpha\beta}(\zeta_3)\nu_\alpha\tau_\beta\} &= \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha \nu_\alpha dx_3 + (g_\alpha^+ - g_\alpha^-)\nu_\alpha, \text{ sur } \gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}, \\ m_{\alpha\beta}(\zeta_3)\nu_\alpha\nu_\beta &= 0, \text{ sur } \gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

Il en résulte les deux dernières conditions au bord de (3.97). Choisissons maintenant  $(\eta_1, \eta_2)$  dans  $V_H$  défini en (3.74) et posons

$$v_\alpha(x) = \eta_\alpha(x_1, x_2), \quad v_3 = 0 \quad (3.105)$$

dans l'équation (3.102). Nous obtenons

$$\begin{aligned} 4\mu \int_\omega \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\rho\iota} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\iota\beta} \right) e_{\rho\iota}(\zeta) e_{\alpha\beta}(\eta) d\omega \\ = \int_\Omega f_\beta \eta_\beta dx + \int_\Omega p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} e_{\alpha\beta}(\eta) dx + \int_{\Gamma^\pm} g_\beta \eta_\beta d, \end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$-\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 - p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) + g_\beta^+ + g_\beta^- \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega) \quad (3.106)$$

avec

$$n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) = 4\mu \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\alpha\beta} e_{\rho\rho}(\zeta) + e_{\alpha\beta}(\zeta) \right].$$

Ici aussi, pour des raisons de non régularité du domaine  $\omega$ , et de conditions aux limites mêlées, on procède comme précédemment. Soit  $(\eta_1, \eta_2) \in V_H$  à support dans  $\bar{\omega}_\varepsilon$ ,  $(\eta_1, \eta_2)$  est alors dans  $H^2(\omega_{\frac{\varepsilon}{2}})$ . En appliquant la formule de Green à (3.102), on a

$$\begin{aligned} - \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \eta_\beta d\omega + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \nu_\alpha \eta_\beta d\gamma = \\ \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \int_{-1}^1 f_\beta \eta_\beta dx_3 d\omega - \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \eta_\beta d\omega + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} p_{3\alpha\beta} (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \nu_\alpha \eta_\beta d\gamma \\ + \int_{\omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 \right) \eta_\beta d\omega + \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} \left( \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 \right) \eta_\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Ainsi d'après l'égalité (3.106), nous avons, pour tout  $\varepsilon > 0$  l'égalité

$$\int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \nu_\alpha \eta_\beta d\gamma = \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} p_{3\alpha\beta} (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \nu_\alpha \eta_\beta d\gamma + 2 \int_{\gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}} g_\beta \eta_\beta d\gamma.$$

D'où, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2)\nu_\alpha = p_{3\alpha\beta}(\varphi_0^+ - \varphi_0^-)\nu_\alpha + \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 \text{ sur } \gamma_{1\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Il en résulte les condition de Neumann de (3.98) Ceci achève la démonstration du théorème 3.3.3.  $\blacksquare$

**Remarque 3.3.4** 1. Il faut noter que Bernadou et Haenel [4] avaient été amenés à supposer pour l'écriture directe d'un modèle bidimensionnel de coque piézoélectrique ce que nous avons justifié ici par l'analyse asymptotique :  $\varphi$  est un polynôme de degré 2 en  $x_3$ . Nous retrouvons aussi la même hypothèse dans Rogacheva [35] qui, de plus, suppose que le vecteur déplacement électrique vérifie  $\partial_3 D_3 = 0$ , hypothèse que nous avons justifiée en (3.94).

2. L'influence de la piézoélectricité et de la différence de potentiel se situent pour le problème de membrane uniquement dans le second membre ; elle est assimilable à une force extérieure. Par contre, c'est l'opérateur du problème de flexion qui est modifié.

3. Le théorème 3.3.3 justifie, dans le cas des plaques, le modèle bidimensionnel de Destuynder [14] et de Destuynder et Saidi [15], qui admet que le potentiel n'agit dans les équations d'équilibre mécanique qu'à travers la différence de potentiel entre les faces horizontales. Dans [14] et [15] est étudié le comportement d'une plaque ou d'une coque élastique  $\mathcal{C}$  sur laquelle est collée une coque piézoélectrique  $\Omega^h$ , d'épaisseur  $2h$  ; ceci, dans le but de contrôler  $\mathcal{C}$ . En nous plaçant dans un cadre statique, nous déduisons de [15] le modèle adimensionnel :

$$\forall \eta_\alpha \in V_H(\omega), \eta_3 \in V_3(\omega), \quad \tilde{a}(\mathbf{u}, \eta) = \tilde{l}(\eta),$$

où  $\tilde{a}(\cdot)$  est une forme bilinéaire incluant l'influence des contraintes de la coque  $\mathcal{C}$  et

$$\tilde{l}(\eta) = -\frac{h_{\alpha\beta}}{c}V \int_{\Omega^h} e_{\alpha\beta}(\eta) dx^h + h \frac{h_{\alpha\beta}}{c}V \int_{\Omega^h} \partial_{\alpha\beta}\eta_3 dx^h, \quad (3.107)$$

avec  $V$  différence de potentiel entre les deux faces du patch piézoélectrique,  $h_{\alpha\beta}$  coefficients de piézoélectricité et  $c$  constante diélectrique. Plus précisément, [15] suppose les composantes  $E_\alpha$  du champ électrique nulles, considère un déplacement de Kirchhoff-Love, et utilise les lois de comportement

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta\rho i} e_{\rho i} + h_{\alpha\beta} D_3, \\ E_3 &= h_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + c D_3, \end{cases} \quad (3.108)$$

où  $R_{\alpha\beta\varrho i}$  correspond au tenseur des constantes élastiques. En considérant le second membre de l'équation variationnelle (3.102),

$$l_M(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d, + \int_{\Omega} p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, dx, \quad (3.109)$$

on constate que l'effet piézoélectrique  $y$  est le même que dans le modèle de [14] et [15] si l'on se place dans les mêmes conditions, c'est-à-dire :

- si l'on annule dans (3.109) les densités de force intérieure et surfacique ;
- si l'on redimensionnalise les variables et inconnues :

$$l_M^h(\mathbf{v}^h) = \int_{\Omega^h} p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} e_{\alpha\beta}^h(\mathbf{v}^h) \, dx^h ;$$

- si l'on considère que le déplacement est de Kirchhoff-Love, c'est-à-dire  $v_3 = \eta_3$ ,  $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3^h \eta_3$ , où les  $\eta_i$  sont indépendants de  $x_3^h$  :

$$l_M^h(\mathbf{v}^h) = \int_{\Omega^h} p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} e_{\alpha\beta}^h(\eta) \, dx^h - \int_{\Omega^h} x_3^h p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \, dx^h ;$$

- si l'on fait les approximations de [15], c'est-à-dire :
  - . la différence de potentiel  $\varphi_0^+ - \varphi_0^-$  est indépendante des variables  $x_\alpha^h$ ,
  - . dans  $v_\alpha = \eta_\alpha - x_3^h \partial_\alpha \eta_3$ , on suppose que l'on peut approcher la variable  $x_3^h$  par  $h$ .

Il vient alors

$$l_M^h(\mathbf{v}^h) = p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} \int_{\Omega^h} e_{\alpha\beta}(\eta) \, dx^h - h p_{3\alpha\beta} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} \int_{\Omega^h} \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \, dx^h ,$$

où

$$p_{3\alpha\beta} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} \delta_{\alpha\beta} - P_{3\alpha\beta} ;$$

- si l'on ne considère pas les effets mécaniques du matériau piézoélectrique ; dans ce cas, en comparant les lois de comportement (3.108) et (3.81), on a

$$p_{3\alpha\beta} = -\frac{h_{\alpha\beta}}{c}.$$

4. Il faut noter que l'analyse asymptotique montre que l'effet mécanique  $\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} P_{333} \delta_{\alpha\beta}$  dans la constante  $p_{3\alpha\beta}$  ne peut être négligé que si  $\lambda$  est très petit par rapport à  $\mu$ .
5. On voit que la régularité de  $\varphi$  ne dépend que de celles des potentiels  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  et du déplacement  $\zeta_3$ .

### 3.4 Résultats de convergence forte

Dans le théorème suivant, nous allons démontrer que toutes les convergences que nous avons obtenues au sens faible sont fortes.

**Théorème 3.4.1** *Gardons les notations de la proposition 3.3.1. Nous avons les résultats de convergence forte suivants :*

$$\mathbf{u}(h) \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{V}, \quad (3.110)$$

$$\kappa(h) \longrightarrow \kappa \text{ dans } (L^2(\Omega))^9, \quad (3.111)$$

$$\varphi(h) \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (3.112)$$

$$(h \partial_1 \varphi(h), h \partial_2 \varphi(h), \partial_3 \varphi(h)) \longrightarrow (0, 0, \partial_3 \varphi) \text{ dans } (L^2(\Omega))^3. \quad (3.113)$$

**Preuve.** De l'unicité de la solution du problème (3.84), nous déduisons classiquement que les convergences faibles sont toutes valables pour la suite entière. Pour toute matrice  $\mathbf{A} \in L^2(\Omega)^9$  et pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$ ,

$$\|(\mathbf{A}, \mathbf{v})\| = \left\{ \int_{\Omega} C \mathbf{A} : \mathbf{A} \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{ij} v_i v_j \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur  $L^2(\Omega)^9 \times L^2(\Omega)^3$  grâce aux propriétés de coercivité (3.2)-(3.3). Soit  $X(h)$  la norme de  $(\kappa(h), h \partial_1 \varphi(h), h \partial_2 \varphi(h), \partial_3 \varphi(h))$  dans  $L^2(\Omega)^{12}$ . On a

$$\begin{aligned} X(h) = & \left\{ \int_{\Omega} C \kappa(h) : \kappa(h) \, dx + \right. \\ & \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} (h \partial_{\alpha} \varphi(h)) (h \partial_{\beta} \varphi(h)) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi(h) \partial_3 \varphi(h) \, dx + \\ & \left. \int_{\Omega} \epsilon_{3\alpha} [(h \partial_{\alpha} \varphi(h)) \partial_3 \varphi(h) + \partial_3 \varphi(h) (h \partial_{\alpha} \varphi(h))] \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous savons d'après l'équation variationnelle (3.54) que  $(\mathbf{u}(h), \varphi(h))_{h>0}$  vérifie l'équation

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C \kappa(h) : \kappa(h) \, dx + \\ & \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} (h \partial_{\alpha} \varphi(h)) (h \partial_{\beta} (\varphi(h) - \varphi_0)) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi(h) \partial_3 (\varphi(h) - \varphi_0) \, dx + \\ & \int_{\Omega} \epsilon_{3\alpha} [(h \partial_{\alpha} \varphi(h)) \partial_3 (\varphi(h) - \varphi_0) + \partial_3 \varphi(h) (h \partial_{\alpha} (\varphi(h) - \varphi_0))] \, dx = \\ & \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}(h) \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(h) \, d, - \int_{\Omega} P_{3kl} \kappa_{kl}(h) \partial_3 \varphi_0 \, dx - \\ & \int_{\Omega} P_{\alpha kl} \kappa_{kl}(h) (h \partial_{\alpha} \varphi_0) \, dx. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Grâce aux majorations et aux résultats de convergence faible obtenus à la proposition 3.3.1, nous avons donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (X(h))^2 = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 \, dx - \int_{\Omega} P_{3kl} \kappa_{kl} \partial_3 \varphi_0 \, dx. \quad (3.115)$$

La convergence faible de  $(\kappa(h), h\partial_1\varphi(h), h\partial_2\varphi(h), \partial_3\varphi(h))$  dans  $L^2(\Omega)^{12}$  étant déjà connue, il suffit de montrer que la limite de sa norme tend vers la norme de sa limite faible pour obtenir sa convergence forte. Notons

$$X = \left( \int_{\Omega} C\kappa : \kappa \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} (\partial_3 \varphi)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.116)$$

la norme de  $(\kappa, 0, 0, \partial_3 \varphi)$ . Pour évaluer  $X$ , reprenons l'équation variationnelle limite (3.84), posons-y  $(\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{u}, \varphi - \varphi_0)$ . On obtient

$$\begin{aligned} & 2\mu \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta_{\ell i} \delta_{\alpha \beta} + \delta_{\alpha \ell} \delta_{i \beta} \right) e_{\ell i}(\mathbf{u}) e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} P_{3\alpha 3} P_{3\alpha 3} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} P_{333} + \epsilon_{33} \right) \partial_3 \varphi \partial_3 (\varphi - \varphi_0) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} \delta_{\alpha \beta} - P_{3\alpha \beta} \right) [e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \partial_3 (\varphi - \varphi_0) - \partial_3 \varphi e_{\alpha \beta}(\mathbf{u})] \, dx \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & 2\mu \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} e_{\ell \ell}(\mathbf{u}) e_{\alpha \alpha}(\mathbf{u}) \, dx + 2\mu \int_{\Omega} e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi \, dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} \partial_3 \varphi P_{333} \partial_3 \varphi \, dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} e_{\alpha \alpha}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi \, dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha \beta} e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi \, dx \\ & - \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} e_{\alpha \alpha}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi \, dx + \int_{\Omega} P_{3\alpha \beta} e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi \, dx \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 \, dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu} P_{3\alpha 3} P_{3\alpha 3} + \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} P_{333} \right) \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 \, dx \\ & + \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{333} \delta_{\alpha \beta} - P_{3\alpha \beta} \right) e_{\alpha \beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi_0 \, dx, \end{aligned}$$

ou encore, en utilisant les égalités

$$\begin{cases} \kappa_{33} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi + \lambda \kappa_{\beta \beta}) & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \kappa_{\alpha 3} = -\frac{1}{2\mu} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\right) e_{\varrho\varrho}(\mathbf{u}) (\lambda e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u})) dx + 2\mu \int_{\Omega} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi dx \\
& + 4\mu \int_{\Omega} \kappa_{\alpha 3} \kappa_{\alpha 3} dx - \int_{\Omega} P_{333} \kappa_{33} \partial_3 \varphi dx - \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda + 2\mu} P_{333} \partial_3 \varphi (\lambda e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u})) dx + \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi dx \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 dx - \int_{\Omega} P_{3kl} e_{kl}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi_0 dx,
\end{aligned}$$

puis en rassemblant certains termes on a

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\Omega} e_{\varrho\varrho}(\mathbf{u}) e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) dx + 2\mu \int_{\Omega} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi dx \\
& + 4\mu \int_{\Omega} \kappa_{\alpha 3} \kappa_{\alpha 3} dx - \int_{\Omega} P_{333} \kappa_{33} \partial_3 \varphi dx + \int_{\Omega} \kappa_{33} (\lambda e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u})) dx \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 dx - \int_{\Omega} P_{3kl} e_{kl}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi_0 dx.
\end{aligned}$$

Or, on sait que

$$-P_{333} \kappa_{33} \partial_3 \varphi = \kappa_{33} [(\lambda + 2\mu) \kappa_{33} + \lambda \kappa_{\beta\beta}],$$

on a alors

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\Omega} e_{\varrho\varrho}(\mathbf{u}) e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u}) dx + 2\mu \int_{\Omega} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi dx \\
& + 4\mu \int_{\Omega} \kappa_{\alpha 3} \kappa_{\alpha 3} dx + \int_{\Omega} \kappa_{33} ((\lambda + 2\mu) \kappa_{33} + \lambda \kappa_{\beta\beta}) dx + \int_{\Omega} \kappa_{33} (\lambda e_{\alpha\alpha}(\mathbf{u})) dx \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 dx - \int_{\Omega} P_{3kl} e_{kl}(\mathbf{u}) \partial_3 \varphi_0 dx
\end{aligned}$$

Enfin, on tient compte de ce que

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

On obtient

$$\begin{aligned}
(X)^2 &= \int_{\Omega} C \kappa : \kappa dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} (\partial_3 \varphi)^2 dx = \\
& \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d, + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi_0 dx - \int_{\Omega} P_{3kl} \kappa_{kl} \partial_3 \varphi_0 dx.
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} X(h) = X,$$

d'où les convergences fortes

$$\kappa(h) \longrightarrow \kappa \text{ dans } L^2(\Omega)^9, \quad (3.117)$$

$$\varphi(h) \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (3.118)$$

$$(h \partial_1 \varphi(h), h \partial_2 \varphi(h), \partial_3 \varphi(h)) \longrightarrow (0, 0, \partial_3 \varphi) \text{ dans } L^2(\Omega)^3. \quad (3.119)$$

D'après (3.117), et puisque  $e_{i3}(\mathbf{u}) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , on a

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}(h)) \longrightarrow \mathbf{e}(\mathbf{u}) \text{ dans } L^2(\Omega)^9, \quad (3.120)$$

ce qui implique la convergence forte de  $\mathbf{u}(h)$  vers  $\mathbf{u}$  dans  $H^1(\Omega)^3$ . De même, puisque  $\varphi(h) - \varphi$  est dans  $\Psi_{l_0}$ , l'équivalence sur cet espace de normes  $\|\psi\|_{\Psi_l}$  et  $\psi \rightarrow |\partial_3 \psi|_\Omega$  prouve que  $\varphi(h)$  tend vers  $\varphi$  dans  $L^2(\Omega)$ . ■





# Chapitre 4

## Cas dynamique

Nous allons, dans ce chapitre, effectuer l'analyse asymptotique du problème piézo-électrique pour une plaque en régime dynamique. Auparavant, nous donnons un résultat d'existence, tout d'abord dans le cas simplifié des équations de l'électromagnétisme dynamique, puis pour le modèle piézoélectrique dynamique complet.

### 4.1 Electromagnétisme d'évolution

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un problème électromagnétique d'évolution, sans terme piézoélectrique, pour lequel nous donnons un résultat d'existence. Soient  $\varphi$  le potentiel électrique,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  le potentiel vecteur magnétique au sein d'un matériau occupant un domaine cylindrique  $\Omega = \omega \times ]-1, 1[$ . On note  $\mathbf{D}(\varphi, \mathbf{A})$  le vecteur déplacement électrique et  $\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A})$  le vecteur champ électrique donné par

$$\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A}) = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ils sont liés par la loi

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}. \tag{4.1}$$

Rappelons que le potentiel vecteur magnétique est lié au champ magnétique par la relation

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

conséquence de l'équation de Maxwell,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

## Equations électromagnétiques

On suppose que le milieu occupant  $\Omega$  est à densité de charge volumique nulle. Un potentiel électrique  $\varphi_0$  est appliqué sur les faces supérieure et inférieure. On suppose qu'il n'y a pas de charge sur le bord latéral de  $\Omega$ . Le système d'équations électriques (équations de Maxwell-Gauss) est un système quasi-statique qui s'écrit

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D}(\varphi, \mathbf{A}) = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{D}(\varphi, \mathbf{A}) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_l, \end{cases}$$

où on a posé

$$Q = \Omega \times ]0, T[, \quad \Sigma^\pm = , \pm \times ]0, T[, \quad \Sigma_l = , l \times ]0, T[.$$

Utilisant (4.1), on écrit les équations ci-dessus sous la forme

$$\begin{cases} \operatorname{div} [\epsilon(\nabla\varphi + \mathbf{A}')] = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \epsilon(\nabla\varphi + \mathbf{A}') \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Passons aux équations magnétiques. Une condition de transmission d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  entre deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de frontière commune  $, ,$  et de perméabilités respectives  $\mu_1$  et  $\mu_2$  s'écrit (voir [5], [30])

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}^1 \wedge \nu - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}^2 \wedge \nu = -\mathbf{j} \quad \text{sur } , ,$$

où  $\nu$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega_1$ ,  $\mathbf{j}$  est le vecteur densité de courant surfacique ; ici c'est la densité du courant circulant sur les électrodes situées sur  $, ^+$  et  $, ^-$ , que nous supposons constituées d'une fine pellicule d'un matériau conducteur. L'épaisseur des électrodes est très petite par rapport au déplacement des électrons. De plus, elles sont entourées d'isolants (l'air et le diélectrique piézoélectrique). Il en résulte que le courant ne circule pas dans la direction perpendiculaire à la surface moyenne de la pellicule, c'est-à-dire que

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, 0) \quad \text{sur } , ^\pm. \quad (4.3)$$

En tenant compte de ce qu'il n'y a pas de charge électrique sur le bord latéral de  $\Omega$ , on a

$$\mathbf{j} = 0 \quad \text{sur } , l. \quad (4.4)$$

Par ailleurs, si  $\rho$  représente la densité de charge,  $\mathbf{j}$  vérifie l'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.5)$$

Lorsque nous nous plaçons dans un cadre statique, nous utilisons (4.5) sous la forme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (4.6)$$

On note  $\mu_1$  la perméabilité du milieu  $\Omega$  et on suppose que le milieu extérieur à  $\Omega$  est dépourvu de champ magnétique. Le système d'équations magnétiques (équation de Maxwell-Ampère) dans  $\Omega$  est

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_1 \mathbf{D}' & \text{dans } Q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

où les vecteurs initiaux  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{A}_1$  sont des relèvements du champ magnétique imposé  $(\mathbf{B}(0), \mathbf{B}'(0))$  à l'instant 0, qui vérifie  $\operatorname{div} \mathbf{B}(0) = \operatorname{div} \mathbf{B}'(0) = 0$ .

Exprimant  $\mathbf{D}$  en fonction de  $\varphi$  et  $\mathbf{A}$ , et utilisant (4.1), nous pouvons écrire l'équation (4.7) sous la forme

$$\begin{cases} \epsilon \mathbf{A}'' + \frac{1}{\mu_1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\epsilon \nabla \varphi' & \text{dans } Q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous aurons donc à résoudre le système magnétique d'évolution constitué par (4.2) et (4.8), dont les inconnues sont  $\varphi$  et  $\mathbf{A}$ .

### Espaces fonctionnels.

Étudions tout d'abord le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler par la suite. Il est classique de définir les espaces de Hilbert  $(H(\Omega, \operatorname{rot}), \|\cdot\|_{H(\Omega, \operatorname{rot})})$  et

$(H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon), \|\cdot\|_{H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)})$  par

$$\begin{aligned}
H(\Omega, \operatorname{rot}) &= \{\mathbf{A} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{rot} \mathbf{A} \in L^2(\Omega)^3\}, \\
\|\mathbf{A}\|_{H(\Omega, \operatorname{rot})} &= \left[ \|\operatorname{rot} \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon) &= \{\mathbf{A} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) \in L^2(\Omega)^3\}, \\
\|\mathbf{A}\|_{H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)} &= \left[ \|\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A})\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\epsilon \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Des propriétés importantes des espaces  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  et  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)$  sont établies dans [10] et [19]. Nous utilisons les résultats ci-dessous :

**Théorème 4.1.1** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 3$  ou  $2$ , de frontière  $\Gamma$ , bornée et lipschitzienne. Alors :*

- i) l'espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^n$  est dense dans  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  ;*
- ii) l'application trace tangentielle :  $\mathbf{A} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^n \longrightarrow \mathbf{A} \wedge \nu|_\Gamma$  s'étend par continuité en une application linéaire continue de  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  si  $n = 3$  et sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  si  $n = 2$ .*

**Théorème 4.1.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 3$  ou  $2$ , de frontière  $\Gamma$ , bornée et lipschitzienne. Alors :*

- i) l'espace  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^n$  est dense dans  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)$  ;*
- ii) l'application trace normale :  $\mathbf{A} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^n \longrightarrow (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu|_\Gamma$  s'étend par continuité en une application linéaire continue de  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)$  sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .*

Revenons à  $\Omega$  ouvert cylindrique de  $\mathbb{R}^3$ . On sait que la formule de Green peut être étendue à  $H(\Omega, \operatorname{rot}) \times H^1(\Omega)^3$  et à  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon) \times H^1(\Omega)$  par

$$\begin{aligned}
\forall (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) \in H(\Omega, \operatorname{rot}) \times H^1(\Omega)^3, \\
\int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \, dx = \int_\Omega \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} \, dx - \langle \mathbf{A} \wedge \nu, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall (\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) \in H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon) \times H^1(\Omega), \\
\int_\Omega \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) \tilde{q} \, dx = - \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla \tilde{q} \, dx + \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, \tilde{q} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Pour l'étude du problème dynamique, introduisons les espaces

$$H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0) = \left\{ \mathbf{A} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) = 0, \right. \\ \left. \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0 \quad \forall q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega) \right\}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{W}_{dyn} = H(\Omega, \operatorname{rot}) \cap H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0),$$

munis respectivement des normes des espaces  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)$  et  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  qui en font des espaces de Hilbert. Pour prouver que  $\mathbf{W}_{dyn}$  est un espace de Hilbert, il suffit de montrer qu'il est un sous-ensemble fermé de l'espace de Hilbert  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ , ce que nous allons faire dans le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.1.1** *Le sous-espace  $\mathbf{W}_{dyn}$  est fermé dans  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbf{A}_n$  une suite de  $\mathbf{W}_{dyn}$  qui converge dans  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  vers  $\mathbf{A}$ . On sait que  $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}_n) = 0$ , or  $\mathbf{A}_n$  tend vers  $\mathbf{A}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ . D'où  $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) = 0$ . On a donc la convergence de  $\mathbf{A}_n$  dans  $H(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon)$ . D'où, par la continuité de l'application trace du théorème 4.1.2, on a :

$$\forall q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega), \quad \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\epsilon \mathbf{A}_n) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0.$$

On en déduit que  $\mathbf{A} \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$ . ■

Enonçons un théorème de décomposition en somme directe de l'espace  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ .

**Théorème 4.1.3 (décomposition)** *L'espace  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  se décompose en la somme directe*

$$H(\Omega, \operatorname{rot}) = \mathbf{W}_{dyn} \oplus \{ \nabla q, q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega) \}. \quad (4.13)$$

**Preuve.** Introduisons sur  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  le produit scalaire

$$\langle \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_\epsilon = \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} \, dx + \int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} \, dx,$$

équivalent au produit scalaire usuel de  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ , et notons  $\perp$  l'orthogonalité par rapport à ce produit scalaire. Sachant que si  $X$  est un sous-espace de  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ , alors  $H(\Omega, \operatorname{rot}) = \bar{X} \oplus X^\perp$ , montrons tout d'abord que l'espace  $X$  défini par

$$X = \{ \nabla q, q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega) \} \quad (4.14)$$

est un sous-espace fermé de  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ . Soit  $(\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X$  convergente vers  $\mathbf{A}$  dans  $H(\Omega, \operatorname{rot})$ . Montrons que  $\mathbf{A}$  est dans  $X$ . Soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de  $H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$  définie

par  $\mathbf{A}_n = \nabla q_n$ . Nous savons que  $\|\nabla q_n\|_{H(\Omega, \text{rot})} = \|\nabla q_n\|_{L^2(\Omega)^3}$  est une norme pour  $q_n$  sur  $H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$  équivalente à la norme  $H^1(\Omega)$ . Donc, la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ , elle admet alors une sous-suite  $(q_{n'})$  qui converge faiblement vers une fonction  $q$  dans  $H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ . Il s'ensuit la convergence faible dans  $L^2(\Omega)^3$

$$\nabla q_{n'} \rightharpoonup \nabla q.$$

Comme  $\nabla q_{n'} \rightarrow \mathbf{A}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , on a donc  $\nabla q = \mathbf{A}$ . Il en résulte que  $\mathbf{A}$  est dans  $X$ .

Montrons maintenant que  $\mathbf{W}_{dyn} = X^\perp$ .

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbf{W}_{dyn}$ , soit  $\tilde{\mathbf{A}}$  un élément quelconque de  $X$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = \nabla q$  avec  $q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_\epsilon &= \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx + \int_\Omega \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } (\nabla q) \, dx = \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx \\ &= - \int_\Omega \text{div}(\epsilon \mathbf{A}) q \, dx + \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc l'inclusion  $\mathbf{W}_{dyn} \subset X^\perp$ . Il reste à montrer l'inclusion inverse. Soit  $\mathbf{A} \in X^\perp$ , pour tout élément  $q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ ,

$$0 = \langle \mathbf{A}, \nabla q \rangle_\epsilon = \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx + \int_\Omega \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } (\nabla q) \, dx = \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx.$$

Donc

$$\forall q \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx = 0,$$

c'est-à-dire  $\text{div}(\epsilon \mathbf{A}) = 0$ . Donc  $\mathbf{A} \in H(\Omega, \text{div}_\epsilon)$  et

$$\forall q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega), \quad 0 = \int_\Omega (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx = \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

D'où  $\mathbf{A} \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon)$ . ■

## Résultats d'existence.

**Magnétostatique.** En guise de travail préliminaire à la résolution du problème d'électromagnétisme dynamique, étudions le problème statique qui lui est associé.

En supposant, dans les systèmes d'équations (4.2) et (4.8), que ni les inconnues, ni les données ne dépendent du temps, on obtient d'une part le système de Maxwell-Gauss

résolu dans le chapitre précédent, et d'autre part le système de Maxwell-Ampère statique :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.15)$$

où le vecteur densité de courant vérifie (4.3)-(4.4) et (4.6).

Soit l'espace  $H_\Gamma(\Omega, \operatorname{div} 0)$  défini par

$$H_\Gamma(\Omega, \operatorname{div} 0) = \{\mathbf{A} \in H(\Omega, \operatorname{div}), \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{A} \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Nous allons chercher la solution variationnelle du système (4.15) dans l'espace

$$\mathbf{W}_{stat} = H(\Omega, \operatorname{rot}) \cap H_\Gamma(\Omega, \operatorname{div} 0)$$

muni de la norme  $\|\cdot\|_{H(\Omega, \operatorname{rot})}$  qui en fait un espace de Hilbert, de manière analogue à ce que l'on a vu pour  $\mathbf{W}_{dyn}$ . D'après [19], l'espace  $\mathbf{W}_{stat}$  s'injecte de façon continue dans  $H^1(\Omega)^3$ , ce qui donne un sens à la trace des éléments de  $\mathbf{W}_{stat}$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ .

**Théorème 4.1.4** *Soit  $\mathbf{j} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ , le problème variationnel*

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{A} \in \mathbf{W}_{stat}, \quad \forall \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{stat}, \\ & \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} \, dx = -\langle \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \end{aligned} \quad (4.16)$$

admet une solution unique  $\mathbf{A}$ . De plus, si  $\mathbf{j} \in C^0(\Gamma)^3$  et vérifie (4.3)-(4.4) et (4.6), alors  $\mathbf{A}$  s'interprète comme solution du système d'équations aux dérivées partielles (4.15).

**Preuve.** Soient  $b(\cdot, \cdot)$  la forme bilinéaire définie sur  $\mathbf{W}_{stat}$  par

$$b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} \, dx, \quad (4.17)$$

et  $l(\cdot)$  la forme linéaire définie par

$$l(\tilde{\mathbf{A}}) = -\langle \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}.$$

D'après [19],  $\exists c > 0$  tel que

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{W}_{stat}, \quad \|\mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)^3} \leq c \|\operatorname{rot} \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)^3}.$$



On en déduit la  $\mathbf{W}_{stat}$ -coercivité de  $b(., .)$ . La forme linéaire  $l(.)$  est  $\mathbf{W}_{stat}$  continue puisque

$$\begin{aligned} |l(\tilde{\mathbf{A}})| &\leq \|\mathbf{j}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \\ &\leq \|\mathbf{j}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq \|\mathbf{j}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{H(\Omega, \text{rot})} \end{aligned}$$

d'après l'injection continue de  $\mathbf{W}_{stat}$  dans  $H^1(\Omega)^3$ .

Il en résulte que, d'après le lemme de Lax-Milgram, le problème (4.16) admet une solution unique.

Passons maintenant à l'interprétation du problème (4.16). Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que, si  $\mathbf{A}$  est solution de (4.16), il est aussi solution du problème

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{A} \in \mathbf{W}_{stat}, \quad \forall \tilde{\mathbf{A}} \in H^1(\Omega)^3, \\ \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx = -\langle \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

D'après [19], nous avons la décomposition

$$L^2(\Omega)^3 = H_{\Gamma}(\Omega, \text{div } 0) \oplus \{\nabla q, q \in H^1(\Omega)\}.$$

En appliquant cette décomposition à un élément  $\tilde{\mathbf{A}} \in H^1(\Omega)^3$ , nous obtenons d'abord

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla q \quad \text{où } \tilde{\mathbf{A}} \in H_{\Gamma}(\Omega, \text{div } 0) \text{ et } q \in H^1(\Omega).$$

Alors  $\text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}$  est un élément de  $L^2(\Omega)^3$  et on a la régularité supplémentaire  $\tilde{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \text{rot})$  et donc  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{stat}$ . On en tire que  $\tilde{\mathbf{A}}$  est en fait dans  $H^1(\Omega)^3$  et donc que  $\nabla q \in H^1(\Omega)^3$ , c'est-à-dire que  $q \in H^2(\Omega)$ . Calculons maintenant  $b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}})$ , où on a prolongé de manière évidente la forme bilinéaire  $b(., .)$ . On obtient

$$b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx = \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx = -\langle \mathbf{j}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}.$$

Pour prouver que  $\mathbf{A}$  est solution de (4.18), il suffit de montrer que

$$\forall q \in H^2(\Omega), \quad \langle \mathbf{j}, \nabla q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = 0.$$

En considérant que  $\mathbf{j} \in \mathcal{C}^0(., .)^3$  et vérifie (4.3)-(4.4) et (4.6), on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}, \nabla q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} &= \int_{\Gamma} \mathbf{j} \cdot \nabla q \, d, &= \int_{\Gamma^{\pm}} \mathbf{j} \cdot \nabla q \, d, &= \int_{\Gamma^{\pm}} j_{\alpha} \partial_{\alpha} q \, d, \\ &= - \int_{\Gamma^{\pm}} \partial_{\alpha} j_{\alpha} q \, d, &+ \langle j_{\alpha} \nu_{\alpha}, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial(\Gamma^{\pm})), H^{\frac{1}{2}}(\partial(\Gamma^{\pm}))} &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\mathbf{A}$  est solution de (4.18). On peut maintenant prendre  $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  dans (4.18), on obtient

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (4.19)$$

Ensuite, on prend  $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}$  dans  $H^1(\Omega)^3$ ; en appliquant la formule de Green à (4.18), on a

$$\int_{\Omega} \text{rot rot } \mathbf{A} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} dx + \langle [(\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu], \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = - \int_{\Gamma} \mu_1 \mathbf{j} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} d, .$$

Vu l'identité (4.19), on a

$$\langle [(\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu], \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = - \int_{\Gamma} \mu_1 \mathbf{j} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} d, .$$

Or, pour tout  $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ , il existe  $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \in H^1(\Omega)^3$  tel que  $\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}|_{\Gamma} = g$ . Il vient alors la condition aux limites

$$(\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} \text{ sur } \Gamma, .$$

■

**Electromagnétisme dynamique.** Passons maintenant à la résolution des équations dynamiques de l'électromagnétisme.

**Remarque 4.1.1** *La condition “ $\text{div}(\epsilon \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}) = 0$ ”, que nous avons imposée dans la définition de l'espace  $\mathbf{W}_{dyn}$ , est la condition de jauge de Coulomb habituellement écrite “ $\text{div } \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = 0$ ” dans le cas d'un matériau électriquement isotrope. Elle permet de découpler les systèmes (4.2) et (4.8) : on peut résoudre le système (4.2) indépendamment de l'inconnue  $\mathbf{A}$  si cette dernière est dans l'espace  $\mathbf{W}_{dyn}$ .*

Avant de nous attaquer à la résolution du système constitué par (4.2) et (4.8), résolvons le sous-problème analogue à (4.8)

$$\begin{cases} \epsilon \mathbf{A}'' + \frac{1}{\mu_1} \text{rot rot } \mathbf{A} = \epsilon \mathbf{h} & \text{dans } Q, \\ \text{rot } \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.20)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &\in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_{\epsilon} 0)), \\ \mathbf{j} &\in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3), \text{ et vérifie les conditions (4.3) – (4.4),} \\ \mathbf{A}_0 &\in \mathbf{W}_{dyn}, \quad \mathbf{A}_1 \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_{\epsilon} 0). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Définissons le vecteur  $\bar{\mathbf{j}}$  par

$$\begin{aligned} \bar{j}_1 &= -j_2, & \bar{j}_2 &= j_1, & \bar{j}_3 &= 0 \text{ sur } , +, \\ \bar{j}_1 &= j_2, & \bar{j}_2 &= -j_1, & \bar{j}_3 &= 0 \text{ sur } , -, \end{aligned}$$

et, par exemple,  $\bar{\mathbf{j}} = 0$  sur  $, \iota$ . Ceci nous permet d'écrire  $\mathbf{j}$  sur  $, \iota$  sous la forme

$$\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}} \wedge \nu$$

et on peut établir que  $\bar{\mathbf{j}} \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(, )^3)$ . Pour obtenir la formulation faible du système (4.8), définissons la forme bilinéaire  $b(., .)$  et la forme linéaire  $l(., .)$  sur  $H(\Omega, \text{rot})$  par

$$\begin{aligned} b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) &= \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx, \\ l(\tilde{\mathbf{A}}) &= \int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{h}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} \, dx + \langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}} \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \end{aligned}$$

et considérons le problème variationnel

Trouver  $\mathbf{A}$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{W}_{dyn}), \\ \mathbf{A}' \in \mathcal{C}^0(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_{\epsilon} 0)), \end{cases} \quad (4.22)$$

$\forall \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{dyn}, \quad \left[ \epsilon \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \right]_{\Omega}'' + b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = l(\tilde{\mathbf{A}}), \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[),$

$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1.$

Nous pouvons énoncer le théorème

**Théorème 4.1.5** *Sous les conditions (4.21), le problème (4.22) admet une solution unique  $\mathbf{A}$ .*

*De plus, si on fait les hypothèses*

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &\in H^1(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_{\epsilon} 0)), \\ \mathbf{j} &\in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(, )^3) \cap L^2(0, T; \mathcal{C}^0(, )^3), \quad \text{div } \mathbf{j} \in H^1(0, T; L^2(, \pm)), \\ \epsilon^{-1}(\text{rot rot } \mathbf{A}_0) &\in H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_{\epsilon} 0), \quad \mathbf{A}_1 \in \mathbf{W}_{dyn}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

*alors  $\mathbf{A}$  s'interprète comme solution du système d'équations aux dérivées partielles (4.20).*

Enonçons tout d'abord un lemme utile dans la démonstration du théorème ci-dessus.

**Lemme 4.1.2** *L'espace  $\mathbf{W}_{dyn}$  est dense dans  $H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$ .*

**Preuve.** Il suffit de montrer que l'orthogonal de  $\mathbf{W}_{dyn}$  dans  $H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$  est nul. Soit  $\mathbf{A}$  un élément de  $H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$  orthogonal à  $\mathbf{W}_{dyn}$ , c'est-à-dire, pour tout  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{dyn}$ ,

$$\int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} \, dx = 0.$$

Nous savons aussi que pour tout  $q \in H_{\Gamma_\pm}^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nabla q \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) q \, dx + \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0,$$

puisque  $\mathbf{A} \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$ . Or, d'après le théorème de décomposition, pour tout  $\bar{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \operatorname{rot})$ , il existe  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{dyn}$  et  $q \in H_{\Gamma_\pm}^1(\Omega)$  tels que  $\bar{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla q$ . Il vient alors

$$\forall \bar{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \operatorname{rot}), \quad \int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{A}} \, dx = 0.$$

Sachant que  $H(\Omega, \operatorname{rot})$  est dense dans  $L^2(\Omega)^3$ , on a

$$\forall \bar{\mathbf{A}} \in L^2(\Omega)^3, \quad \int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \bar{\mathbf{A}} \, dx = 0.$$

d'où  $\mathbf{A} = 0$ . ■

**Preuve du théorème 4.1.5.** Rappelons que l'espace  $\mathbf{W}_{dyn}$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{H(\Omega, \operatorname{rot})}$  qui en fait un espace de Hilbert. La forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $\mathbf{W}_{dyn}$ , et vérifie la propriété de coercivité élargie

$$b(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}) + \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \geq c \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{H(\Omega, \operatorname{rot})}^2 = c \|\tilde{\mathbf{A}}\|_{\mathbf{W}_{dyn}}^2.$$

La forme linéaire  $l(\cdot)$  est continue sur  $\mathbf{W}_{dyn}$ , et l'espace  $\mathbf{W}_{dyn}$  est dense dans  $H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)$  d'après le lemme 4.1.2. Le problème (4.22) admet donc une solution unique  $\mathbf{A}$  (voir [25]).

Montrons maintenant que, sous les conditions supplémentaires (4.23),  $\mathbf{A}$  est solution du système d'équations aux dérivées partielles (4.20). Pour ce faire, on montre d'abord que l'on peut étendre dans (4.22) l'espace des fonctions  $\tilde{\mathbf{A}}$  et que  $\mathbf{A}$  vérifie l'équation

$$\forall \tilde{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \operatorname{rot}), \quad \left[ \epsilon \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}} \right]_{\Omega}'' + b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) = l(\tilde{\mathbf{A}}). \quad (4.24)$$

On sait, d'après le théorème 4.1.3, que pour tout  $\tilde{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \text{rot})$ , il existe  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{dyn}$ , et  $q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$  tels que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla q.$$

Donc, pour montrer que  $\mathbf{A}$  vérifie (4.24), il suffit de prouver que :  $\forall q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ ,

$$[\epsilon \mathbf{A}, \nabla q]_{\Omega}'' + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot}(\nabla q) dx = \int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{h}) \cdot \nabla q dx + \langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla q \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}. \quad (4.25)$$

Le deuxième terme est clairement nul. De plus, d'une part, puisque  $\mathbf{A}$  est dans  $\mathbf{W}_{dyn}$ , on a

$$[\epsilon \mathbf{A}, \nabla q]_{\Omega}'' = - \left[ \int_{\Omega} \text{div}(\epsilon \mathbf{A}) q dx \right]'' + \langle (\epsilon \mathbf{A}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}'' = 0.$$

et d'autre part

$$\int_{\Omega} (\epsilon \mathbf{h}) \cdot \nabla q dx = - \int_{\Omega} \text{div}(\epsilon \mathbf{h}) q dx + \langle (\epsilon \mathbf{h}) \cdot \nu, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0,$$

puisque  $\mathbf{h} \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0))$ . Enfin,

$$\langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla q \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = 0$$

car si  $q \in H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)$ , il existe une suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  qui tend vers  $q$  dans  $H^1(\Omega)$ . D'où  $\nabla q_n$  tend vers  $\nabla q$  dans  $H(\Omega, \text{rot})$  et

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla q \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla q_n \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma^\pm} \mathbf{j} \cdot \nabla q_n d, = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma^\pm} \text{div } \mathbf{j} q_n d, \end{aligned} \quad (4.26)$$

car d'après la régularité imposée sur  $\mathbf{j}$  et l'hypothèse (4.4), on a  $\mathbf{j} = 0$  sur  $\partial, \pm$ . D'où

$$\langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla q \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = \int_{\Gamma^\pm} \text{div } \mathbf{j} q d, = 0, \quad (4.27)$$

car  $q|_{\Gamma^\pm} = 0$ . L'égalité (4.25) est donc vérifiée et, par conséquent,  $\mathbf{A}$  satisfait l'équation (4.24).

En prenant maintenant  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$ , dans l'équation variationnelle (4.24), on obtient

$$\epsilon \mathbf{A}'' + \frac{1}{\mu_1} \text{rot rot } \mathbf{A} = \epsilon \mathbf{h} \text{ dans } Q. \quad (4.28)$$

Il reste à établir les conditions aux limites de (4.20). Notons que la formule de Green n'est applicable dans l'équation (4.24) que si  $\text{rot rot } \mathbf{A} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$ . Pour obtenir cette dernière condition, remarquons d'abord la régularité en temps de  $\mathbf{A}''$ .

Puisque  $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)^3)$  et  $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0))$ , on a

$$-\frac{1}{\mu_1}(\text{rot rot } \mathbf{A}) + \epsilon \mathbf{h} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{D}'(\Omega)^3).$$

D'après (4.28),  $\mathbf{A}''$  est donc dans  $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{D}'(\Omega)^3)$  et pour  $t = 0$

$$\mathbf{A}''(0) = -\frac{1}{\mu_1}\epsilon^{-1}(\text{rot rot } \mathbf{A}_0) + \mathbf{h}(0) \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0),$$

grâce à l'hypothèse (4.23) sur  $\mathbf{A}_0$ . Il s'ensuit donc que le problème (4.22) dérivé

$$\text{Trouver } \bar{\mathbf{A}} \text{ tel que } \begin{cases} \bar{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{W}_{dyn}), \\ \bar{\mathbf{A}}' \in \mathcal{C}^0(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0)), \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\forall \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}_{dyn}, \quad \left[ \epsilon \bar{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}} \right]_{\Omega}'' + b(\bar{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}) = l'(\tilde{\mathbf{A}}), \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[)$$

$$\bar{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{A}_1, \quad \bar{\mathbf{A}}'(0) = \mathbf{A}''(0).$$

admet une solution unique  $\bar{\mathbf{A}}$  qui n'est autre que  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}'$ . Ce qui entraîne que  $\mathbf{A}''$  est dans  $\mathcal{C}^0(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0))$ , d'où  $\text{rot rot } \mathbf{A}$  est dans  $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)^3)$ . Prenons  $\tilde{\mathbf{A}} \in H^1(\Omega)$  dans (4.24), et appliquons la formule de Green (4.10). On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \epsilon \mathbf{A}'' + \frac{1}{\mu_1} \text{rot rot } \mathbf{A} \right) \tilde{\mathbf{A}} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dx \\ &+ \langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}} \wedge \nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} - \frac{1}{\mu_1} \langle (\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}. \end{aligned}$$

En considérant l'égalité (4.28), on a, pour tout  $\tilde{\mathbf{A}} \in H^1(\Omega)$ ,

$$\langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}} \wedge \nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = \frac{1}{\mu_1} \langle (\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3},$$

c'est-à-dire

$$\langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} = -\frac{1}{\mu_1} \langle (\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu, \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}.$$

On a donc  $(\text{rot } \mathbf{A}) \wedge \nu = -\mu_1 \bar{\mathbf{j}}$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$  puisque à tout élément de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ , on peut associer un relèvement dans  $H^1(\Omega)$ . ■

Pour en déduire la solution du système électromagnétique (4.2), (4.8), nous établissons d'abord un résultat de régularité par rapport au temps, de la solution du problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ (\epsilon \nabla \varphi) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_l. \end{cases} \quad (4.30)$$

On fait l'hypothèse  $\varphi_0 \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\cdot))$ . Le problème (4.30) est le système de Maxwell-Gauss déjà résolu dans le cas statique. Soit  $\varphi_0 \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ , un relèvement de  $\varphi_0$ . En posant  $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ , nous savons que  $\bar{\varphi}$  est solution de l'équation variationnelle

$$\forall \psi \in \Psi, \quad \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \partial_i \bar{\varphi} \partial_j \psi \, dx = - \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \partial_i \varphi_0 \partial_j \psi \, dx. \quad (4.31)$$

**Lemme 4.1.3** *Sous l'hypothèse  $\varphi_0 \in H^m(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , le problème (4.31) admet une solution unique  $\bar{\varphi}$  dans  $H^m(0, T; H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega))$ .*

**Preuve.** Tout d'abord, on suppose que  $m \geq 1$  pour que le problème ait un sens pour chaque  $t$  fixé. Nous avons déjà vu au chapitre 3 que le problème (4.31) admet une solution dans  $\Psi$  pour chaque  $t$  fixé puisque  $\varphi_0 \in \mathcal{C}^0(0, T; H^1(\Omega))$ . En posant  $\psi = \bar{\varphi}$  dans (4.31), et en intégrant l'équation obtenue de 0 à  $T$ , on démontre aisément que

$$\|\nabla \bar{\varphi}\|_{L^2(0, T; \Psi)} \leq c \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \quad (4.32)$$

d'où  $\bar{\varphi}$  est dans  $L^2(0, T; \Psi)$ , puisque  $\varphi_0$  est dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Puis on dérive (4.31) par rapport au temps et on y pose  $\psi = \bar{\varphi}'$ , on obtient que  $\bar{\varphi}'$  est dans  $L^2(0, T; \Psi)$  puisque  $\varphi_0'$  est dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Plus généralement, en dérivant (4.31)  $k$  fois ( $k \leq m$ ) par rapport au temps et en posant  $\psi = \bar{\varphi}^{(k)}$ , on obtient que  $\bar{\varphi}^{(k)}$  est dans  $L^2(0, T; \Psi)$ . Il reste à démontrer le lemme pour  $m = 0$ . On obtient le résultat pour  $m = 0$  en utilisant l'inégalité (4.32) et la densité de  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . ■

Donc si  $\varphi_0 \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\cdot))$ , on peut résoudre le système de Maxwell-Ampère (4.20) avec

$$\mathbf{h} = -\nabla \varphi' \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0)).$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  ainsi trouvé étant dans  $\mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{W}_{dyn}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0))$ , il est immédiat que si  $\varphi$  est solution (4.30), alors le couple  $(\mathbf{A}, \varphi)$  est solution du système de Maxwell-Ampère (4.2). Ainsi, le système (4.2), (4.8) se découple en (4.30), (4.8). Et, il vient le théorème

**Théorème 4.1.6** *Si  $\varphi_0 \in H^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\cdot, \pm))$ , et si  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{j}$  vérifient les conditions (4.23), le système (4.2), (4.8) admet une solution unique  $(\mathbf{A}, \varphi)$  telle que*

$$\begin{aligned}\varphi &\in H^2(0, T; H_{\Gamma^\pm}^1(\Omega)), \\ \mathbf{A} &\in \mathcal{C}^0(0, T; \mathbf{W}_{dyn}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0)).\end{aligned}$$

*De plus,  $\varphi$  et  $\mathbf{A}$  sont respectivement solution de (4.30) et (4.8).*

## 4.2 Résultats d'existence en piézoélectricité dynamique

Nous adjoignons maintenant au modèle étudié en 4.1, les termes mécaniques afin de pouvoir traiter la piézoélectricité. Nous utilisons les mêmes notations pour ces termes qu'au chapitre 3.

### Lois de comportement et équations

Soient  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  le vecteur déplacement,  $\varphi$  le potentiel électrique,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  le potentiel vecteur magnétique au sein du matériau  $\Omega$ . On note  $\sigma(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A})$  le tenseur des contraintes et  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  celui des déformations, avec

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

Les vecteurs déplacement électrique et champ électrique sont respectivement notés  $\mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A})$  et  $\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A})$ . On a, comme en 4.1,

$$\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A}) = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Soient  $C$  le tenseur des constantes d'élasticité,  $P$  le tenseur des constantes piézoélectriques, et  $\epsilon$  celui des constantes électriques. Les lois de comportement mécanique et électromagnétique généralisent celles du chapitre 3 et s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) = C\mathbf{e}(\mathbf{u}) - P\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) = P\mathbf{e}(\mathbf{u}) + \epsilon\mathbf{E}(\varphi, \mathbf{A}) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.33)$$

où les tenseurs  $C$ ,  $\epsilon$  et  $P$  vérifient (3.2)-(3.4).



### Equations mécaniques.

Soient  $\rho$  la densité massique du matériau piézoélectrique occupant le domaine  $\Omega$ ,  $\mathbf{f}$  (resp.  $\mathbf{g}$ ) la densité de force volumique (resp. surfacique) qui lui est appliquée,  $\mathbf{p}$  le vecteur déplacement initial, et  $\mathbf{q}$  le vecteur vitesse initiale. Le système mécanique est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \mathbf{u}'' - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) = \mathbf{f} & \text{dans } Q, \\ \sigma(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) \nu = \mathbf{g} & \text{sur } \Sigma_N, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Sigma_D, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{q} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (4.34)$$

où  $\Sigma_N = \cdot, N \times ]0, T[$  et  $\Sigma_D = \cdot, D \times ]0, T[$ , avec  $\cdot, N \subset \cdot, \cdot$ , et  $\cdot, D \subset \cdot, \cdot$ .

### Equations électriques et magnétiques.

On considère le même dispositif que celui étudié à la section 4.1. Nous faisons donc les mêmes hypothèses, (4.3)-(4.4), sur le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$ . Les systèmes d'équations électriques (équations de Maxwell-Gauss) et magnétiques (équations de Maxwell-Ampère) sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) = 0 & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A}) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Sigma_l, \end{array} \right. \quad (4.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_1 \mathbf{D}' & \text{dans } Q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

**Remarque 4.2.1** *Notons que, si le système d'équations aux dérivées partielles (4.34)-(4.36) admet une solution, il en admet une infinité. En effet, si un triplet  $(\mathbf{u}, \varphi, \mathbf{A})$  est solution du système d'équations (4.34)-(4.36), alors pour tout  $g \in \mathcal{D}(\Omega \times ]0, T[)$ ,  $(\mathbf{u}, \varphi - g', \mathbf{A} + \nabla g)$  en est aussi une solution. Les conditions de jauge permettent d'obtenir une unicité. Il y a, par exemple, la condition de jauge de Lorentz où l'on choisit une fonction  $g$  vérifiant une équation des ondes pour que  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  soit proportionnelle à  $\varphi''$ . Ici, nous utilisons les conditions de jauge  $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{A}) = 0$  sur  $\Omega$ .*

Une écriture plus explicite de (4.35)-(4.36) est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\epsilon \nabla \varphi) = -\operatorname{div}(P \mathbf{e}(\mathbf{u})) - \epsilon \mathbf{A}' & \text{dans } Q, \\ \varphi = \varphi_0 & \text{sur } \Sigma^\pm, \\ (\epsilon \nabla \varphi) \cdot \nu = (P \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \epsilon \mathbf{A}') \cdot \nu & \text{sur } \Sigma_l, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \epsilon \mathbf{A}'' + \frac{1}{\mu_1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = P \mathbf{e}(\mathbf{u}') - \epsilon \nabla \varphi' & \text{dans } Q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} \wedge \nu = -\mu_1 \mathbf{j} & \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.38)$$

### Formulation variationnelle.

Pour la commodité de la lecture, rappelons la définition des espaces associés au déplacement et au potentiel scalaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{v}|_{\Gamma_D} \equiv 0 \}, \\ \Psi &= \{ \psi \in H^1(\Omega), \psi|_{\Gamma^\pm} \equiv 0 \}. \end{aligned}$$

On fait les hypothèses suivantes sur les données du problème :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \mathbf{g} \in H^1(0, T; L^2(\cdot, N)^3), \\ \mathbf{p} &\in \mathbf{V}, \quad \mathbf{q} \in L^2(\Omega)^3, \\ \varphi_0 &\in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)), \\ \mathbf{j} &\in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)), \quad \text{et vérifie les conditions (4.3) - (4.4)} \\ \mathbf{A}_0 &\in \mathbf{W}_{dyn}, \quad \mathbf{A}_1 \in H_{\Gamma_l}(\Omega, \operatorname{div}_\epsilon 0). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Etablissons la formulation faible des systèmes (4.34), (4.37)-(4.38). Pour ce faire, de façon formelle, on multiplie les équations aux dérivées partielles de (4.34), (4.37) et (4.38) respectivement par  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ ,  $\psi \in \Psi$  et  $\tilde{\mathbf{A}} \in H(\Omega, \operatorname{rot})$ , puis on intègre par parties.

Soit  $\varphi_0$  une fonction de  $H^1(0, T; H^1(\Omega))$  telle que  $\varphi_0|_{\Gamma^\pm} = \varphi_0$ . Posons  $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi_0$ . On définit les formes bilinéaires  $c_0(\cdot, \cdot)$  et  $c_1(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $l(\cdot)$  sur  $\mathbf{V} \times H(\Omega, \operatorname{rot}) \times \Psi$  par :

$$c_0\left((\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi)\right) = a((\mathbf{u}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \psi)) + b(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}), \quad (4.40)$$

où la forme bilinéaire  $a(., .)$  correspond à la forme (3.45) écrite au chapitre 3, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a((\mathbf{u}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \psi)) &= \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \bar{\varphi}) \cdot \nabla \psi dx \\ &+ \int_{\Omega} P(\nabla \bar{\varphi} \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \nabla \psi \mathbf{e}(\mathbf{u})) dx, \end{aligned}$$

et la forme bilinéaire  $b(., .)$  est donnée par (4.17) ;

$$\begin{aligned} c_1((\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi)) &= \int_{\Omega} P \left\{ \mathbf{A} \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{A}} \right\} dx \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon \left( \nabla \bar{\varphi} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \nabla \psi \right) dx ; \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \\ &- \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi_0) \cdot \nabla \psi dx - \int_{\Omega} (P \nabla \varphi_0) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx \\ &- \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi_0') \cdot \tilde{\mathbf{A}} dx + \langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}} \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} \end{aligned} \quad (4.42)$$

**Remarque 4.2.2** Lorsque  $\mathbf{A}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont dans  $\mathbf{W}_{dyn}$ , alors le dernier terme de la forme bilinéaire  $c_1(., .)$  est nul, et  $c_1(., .)$  se réduit à

$$c_1((\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi)) = \int_{\Omega} P \left( \mathbf{A} \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{A}} \right) dx.$$

La forme  $c_1(., .)$  est donc indépendante de  $(\bar{\varphi}, \psi)$ . Et dans la suite, si on est dans cette hypothèse, on note  $c_1((\mathbf{u}, \mathbf{A}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}))$  au lieu de  $c_1((\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi))$ .

Aux équations (4.34), (4.37) et (4.38), on associe ainsi le problème variationnel par des calculs élémentaires que l'on ne détaille pas ici

Trouver  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi})$  tel que

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}) \in L^\infty(0, T; \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi), \\ (\mathbf{u}', \mathbf{A}') \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0)), \\ \forall (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi, \end{cases} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \rho \langle \mathbf{u}'' , \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \langle \epsilon \mathbf{A}'' , \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{(\mathbf{W}_{dyn})', \mathbf{W}_{dyn}} \\ & + \frac{d}{dt} c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}) \right) + c_0 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) \\ & = l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi), \text{ dans } D'([0, T[) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}, \mathbf{u}'(0) = \mathbf{q}, \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1.$$

Avant d'étudier le problème (4.43), examinons en quoi il diffère des problèmes usuels. Pour cela, regroupons les inconnues  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{A}$  en  $U = (\mathbf{u}, \mathbf{A})$ , et posons

$$\mathcal{V} = \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \text{ et } \mathcal{H} = L^2(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0).$$

On a donc un problème équivalent à (4.43)

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (U, \bar{\varphi}) \text{ tel que } (U, \bar{\varphi}) \in L^\infty(0, T; \mathcal{V} \times \Psi), U' \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}), \\ & \forall (V, \psi) \in \mathcal{V} \times \Psi, \quad \frac{d^2}{dt^2} (U, V)_{\mathcal{H}} + \frac{d}{dt} c_1(U, V) + c_0((U, \bar{\varphi}), (V, \psi)) = l(V, \psi), \quad (4.44) \\ & U(0) = U_0, \quad U'(0) = U_1. \end{aligned}$$

Ce problème présente les particularités ci-dessous :

- L'opérateur de dérivation temporelle " $\frac{d^2}{dt^2}$ " n'agit que sur  $U$  et non sur le couple  $(U, \bar{\varphi})$ .
- La forme bilinéaire  $c_1(\cdot, \cdot)$  n'est pas coercive. Cependant, elle vérifie la propriété  $c_1(U, U) = 0$ .
- La forme bilinéaire  $c_0(\cdot, \cdot)$  n'est pas symétrique.

A cause de l'absence de symétrie de la forme bilinéaire  $c_0(\cdot, \cdot)$ , on n'obtient pas la majoration d'énergie a priori de façon usuelle, c'est-à-dire en posant  $(V, \psi) = (U', \bar{\varphi}')$  dans (4.44). Cependant, en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss variationnelle dérivée par rapport au temps, on obtient une estimation de l'énergie. On pose  $V = 0$  dans (4.44), puis on dérive l'équation obtenue par rapport au temps, puis on pose  $\psi = \bar{\varphi}$ , il vient :

$$c_0((U', \bar{\varphi}'), (0, \bar{\varphi})) = l'(0, \bar{\varphi}).$$

On annule maintenant  $\psi$  dans (4.44) et on y pose  $V = U'$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (U', U')_{\mathcal{H}} + c_1(U', U') + c_0((U, \bar{\varphi}), (U', 0)) = l(U', 0).$$

En sommant ces deux dernières équations, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (U', U')_{\mathcal{H}} + c_0((U, \bar{\varphi}), (U', 0)) + c_0((U', \bar{\varphi}'), (0, \bar{\varphi})) = l(U', 0) + l'(0, \bar{\varphi}). \quad (4.45)$$

Il est facile de constater l'égalité

$$c_0((U, \bar{\varphi}), (U', 0)) + c_0((U', \bar{\varphi}'), (0, \bar{\varphi})) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dx + \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \bar{\varphi}) \cdot \nabla \bar{\varphi} dx \right], \quad (4.46)$$

et, pour tout  $m > 0$ , l'inégalité

$$\left| \int_0^t [l(U', 0) + l'(0, \bar{\varphi})] ds \right| \leq \frac{c}{m} (\|(\mathbf{u}', \mathbf{A}')\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{A})\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\bar{\varphi}\|_{\Psi}^2) + c \int_0^t (\|(\mathbf{u}', \mathbf{A}')\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{A})\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\bar{\varphi}\|_{\Psi}^2) ds + c(m). \quad (4.47)$$

En combinant (4.45)-(4.47), et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$(\|(\mathbf{u}', \mathbf{A}')\|_{\mathcal{H}}^2 + \|(\mathbf{u}, \mathbf{A})\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\bar{\varphi}\|_{\Psi}^2) \leq c$$

où  $c$  dépend uniquement des données du problème. Des calculs plus détaillés permettant d'obtenir cette dernière estimation sont effectués dans la démonstration du théorème

**Théorème 4.2.1** *Le problème (4.43) admet une solution unique.*

**Preuve.** Nous allons utiliser la méthode de Galerkin qui consiste à résoudre le problème dans une suite d'espaces vectoriels de dimension finie convergeant vers  $\mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi$ . Soient  $\{v^n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ,  $\{\mathbf{w}^n, n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\{\psi^n, n \in \mathbb{N}^*\}$  des bases hilbertiennes respectivement de  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{W}_{dyn}$  et  $\Psi$ . Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_N &= (\text{vect}\{v^n, 1 \leq n \leq N\})^3, \\ \mathbf{W}_N &= \text{vect}\{\mathbf{w}^n, 1 \leq n \leq N\}, \\ \Psi_N &= \text{vect}\{\psi^n, 1 \leq n \leq N\}. \end{aligned}$$

Soient  $(\mathbf{p}^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\mathbf{q}^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  des suites de  $\mathbf{V}$  convergeant fortement respectivement vers  $\mathbf{p}$  dans  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{q}$  dans  $L^2(\Omega)^3$ , et telles que  $\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N \in \mathbf{V}_N$ . Soit  $(\tilde{\mathbf{A}}_0^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\tilde{\mathbf{A}}_1^N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  des suites de  $\mathbf{W}_{dyn}$  convergeant fortement vers  $\mathbf{A}_0$  dans  $\mathbf{W}_{dyn}$ ,  $\mathbf{A}_1$  dans  $H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0)$  et telles que  $\tilde{\mathbf{A}}_0^N, \tilde{\mathbf{A}}_1^N \in \mathbf{W}_N$ . Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^N(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbf{d}_0^n v^n(\mathbf{x}), & \mathbf{q}^N(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbf{d}_1^n v^n(\mathbf{x}). \\ \tilde{\mathbf{A}}_0^N(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq n \leq N} b_0^n \mathbf{w}^n(\mathbf{x}), & \tilde{\mathbf{A}}_1^N(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq n \leq N} b_1^n \mathbf{w}^n(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

et on cherche les inconnues  $(\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N)$  sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \mathbf{d}^n(t) v^n(\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}^N(\mathbf{x}, t) &= \sum_{1 \leq n \leq N} b^n(t) \mathbf{w}^n(\mathbf{x}), \\ \varphi^N(\mathbf{x}, t) &= \sum_{1 \leq n \leq N} c^n(t) \psi^n(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Nous allons poser le système d'équations différentielles ordinaires dont les inconnues sont le vecteur  $\mathbf{d}^n = (d_1^n, d_2^n, d_3^n)$ , et les scalaires  $b^n$  et  $c^n$  pour  $1 \leq n \leq N$ . Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (d_i^n, b^n, c^n) \in \mathcal{C}^1(0, T)^3, \quad 1 \leq n \leq N \text{ tels que} \\ \forall k, i, \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ \rho(u_i^{N''}, v^k)_\Omega + \frac{d}{dt} c_1((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N), (\mathbf{e}_i v^k, 0)) \\ \quad + c_0((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (\mathbf{e}_i v^k, 0, 0)) = l(\mathbf{e}_i v^k, 0, 0), \\ (\epsilon \mathbf{A}^{N''}, \mathbf{w}^k)_\Omega + \frac{d}{dt} c_1((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N), (0, \mathbf{w}^k)) \\ \quad + c_0((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (0, \mathbf{w}^k, 0)) = l(0, \mathbf{w}^k, 0), \\ c_0((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (0, 0, \psi^k)) = l(0, 0, \psi^k), \\ (\mathbf{d}^n(0), b^n(0)) = (\mathbf{d}_0^n, b_0^n), \quad (\mathbf{d}^{n'}(0), b^{n'}(0)) = (\mathbf{d}_1^n, b_1^n). \end{array} \right. \quad (4.48)$$

En introduisant les coordonnées des inconnues  $\mathbf{u}^N$ ,  $\mathbf{A}^N$  et  $\varphi^N$  ( $\mathbf{d}^n$ ,  $b^n$  et  $c^n$ ), nous obtenons un problème équivalent à (4.48) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (d_i^n, b^n, c^n) \in \mathcal{C}^1(0, T)^3 \text{ tel que, } \forall k, i, 1 \leq k \leq N, 1 \leq i \leq 3, \\ \rho d_i^{n''}(t)(v^n, v^k)_\Omega + c_1 ((\mathbf{d}^{n'}(t) v^n, b^{n'}(t) \mathbf{w}^n), (\mathbf{e}_i v^k, 0)) \\ \quad + c_0 ((\mathbf{d}^n(t) v^n, b^n(t) \mathbf{w}^n, c^n(t) \psi^n), (\mathbf{e}_i v^k, 0, 0)) = l(\mathbf{e}_i v^k, 0, 0), \\ b^{n''}(t)(\epsilon \mathbf{w}^n, \mathbf{w}^k)_\Omega + c_1 ((\mathbf{d}^{n'}(t) v^n, b^{n'}(t) \mathbf{w}^n), (0, \mathbf{w}^k)) \\ \quad + c_0 ((\mathbf{d}^n(t) v^n, b^n(t) \mathbf{w}^n, c^n(t) \psi^n), (0, \mathbf{w}^k, 0)) = l(0, \mathbf{w}^k, 0), \\ c_0 ((\mathbf{d}^n(t) v^n, b^n(t) \mathbf{w}^n, c^n(t) \psi^n), (0, 0, \psi^k)) = l(0, 0, \psi^k), \\ (\mathbf{d}^n(0), b^n(0)) = (\mathbf{d}_0^n, b_0^n), \quad (\mathbf{d}^{n'}(0), b^{n'}(0)) = (\mathbf{d}_1^n, b_1^n). \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que dans le système ci-dessus, les équations de Maxwell-Gauss variationnelles

$$c_0 ((\mathbf{d}^n(t) v^n, b^n(t) \mathbf{w}^n, c^n(t) \psi^n), (0, 0, \psi^k)) = l(0, 0, \psi^k),$$

peuvent se simplifier comme suit :  $\forall k, 1 \leq k \leq N$ ,

$$c^n (\epsilon \nabla \psi^n, \nabla \psi^k)_\Omega - (P \nabla \psi^k, \mathbf{e}(\mathbf{u}^N))_\Omega = - (\epsilon \nabla \varphi_0, \nabla \psi^k)_\Omega.$$

La matrice  $((\epsilon \nabla \psi^n, \nabla \psi^k)_\Omega)_{1 \leq n, k \leq N}$  est inversible parce que les vecteurs  $(\psi^k)_{1 \leq k \leq N}$  sont linéairement indépendants. D'où les  $c_n$  peuvent s'exprimer en fonction des  $\mathbf{d}^n$ , c'est-à-dire  $\varphi^N$  en fonction de  $\mathbf{u}^N$ . Ainsi, on peut résoudre les équations variationnelles mécanique et magnétique (Maxwell-Ampère) indépendamment de  $\varphi^N$ . En écrivant les  $c_n$  en fonction

des  $\mathbf{d}^n$ , nous obtenons :  $\forall k, 1 \leq k \leq N$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{d}^{n''}(t) (v^n, v^k)_\Omega + \mathbf{F}_1^k \left( d_1^{1'}, d_2^{1'}, d_3^{1'}, \dots, d_1^{N'}, d_2^{N'}, d_3^{N'}, b^{1'}, \dots, b^{N'} \right) \\ \quad + \mathbf{F}_0^k \left( d_1^1, d_2^1, d_3^1, \dots, d_1^N, d_2^N, d_3^N, b^1, \dots, b^N \right) = \mathcal{F}^k(t), \\ b^{n''}(t) (\epsilon \mathbf{w}^n, \mathbf{w}^k)_\Omega + G_1^k \left( d_1^{1'}, d_2^{1'}, d_3^{1'}, \dots, d_1^{N'}, d_2^{N'}, d_3^{N'}, b^{1'}, \dots, b^{N'} \right) \\ \quad + G_0^k \left( d_1^1, d_2^1, d_3^1, \dots, d_1^N, d_2^N, d_3^N, b^1, \dots, b^N \right) = \mathcal{G}^k(t), \\ (\mathbf{d}^n(0), b^n(0)) = (\mathbf{d}_0^n, b_0^n), \quad (\mathbf{d}^{n'}(0), b^{n'}(0)) = (\mathbf{d}_1^n, b_1^n), \end{array} \right. \quad (4.50)$$

où  $\mathbf{F}_0^k, \mathbf{F}_1^k, G_0^k$  et  $G_1^k$  sont des fonctions linéaires définies sur  $L^2(0, T)^{4N}$ , et  $\mathcal{F}^k$  et  $\mathcal{G}^k$  sont respectivement dans  $L^2(0, T)^3$  et  $L^2(0, T)$ .

Les matrices

$$\left( (v^n, v^k)_\Omega \right)_{1 \leq n, k \leq N} \quad \text{et} \quad \left( (\epsilon \mathbf{w}^n, \mathbf{w}^k)_\Omega \right)_{1 \leq n, k \leq N}$$

étant inversibles, le problème (4.50) admet une solution unique (voir [31]).

Montrons maintenant que la suite  $(\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N)$  converge faiblement étoile dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi)$ . Pour ce faire, il suffit de majorer les normes de la suite. On multiplie les deux premières équations de (4.49) respectivement par  $d_i^{k'}$  et  $b^{k'}$ , puis on dérive la dernière par rapport au temps et on la multiplie par  $c^k$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{u}^{N''}, \mathbf{u}^{N'})_\Omega + c_1((\mathbf{u}^{N'}, \mathbf{A}^{N'}), (\mathbf{u}^{N'}, 0)) \\ & \quad + c_0((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (\mathbf{u}^{N'}, 0, 0)) = l(\mathbf{u}^{N'}, 0, 0), \\ & (\epsilon \mathbf{A}^{N''}, \mathbf{A}^{N'})_\Omega + c_1((\mathbf{u}^{N'}, \mathbf{A}^{N'}), (0, \mathbf{A}^{N'})) \\ & \quad + c_0((\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (0, \mathbf{A}^{N'}, 0)) = l(0, \mathbf{A}^{N'}, 0), \\ & c_0((\mathbf{u}^{N'}, \mathbf{A}^{N'}, \varphi^{N'}), (0, 0, \varphi^N)) = l'(0, 0, \varphi^N). \end{aligned}$$



En sommant ces trois équations, on obtient, dans  $L^2(0, T)$ , l'égalité

$$\begin{aligned}
& \rho(\mathbf{u}^{N''}, \mathbf{u}^{N'})_{\Omega} + (\epsilon \mathbf{A}^{N''}, \mathbf{A}^{N'})_{\Omega} + \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{u}^N) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{N'}) \\
& + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A}^N \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}^{N'} + \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi^{N'}) \cdot \nabla \varphi^N dx = \\
& \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{N'} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^{N'} d, - \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi'_0) \cdot \nabla \varphi^N dx \\
& - \int_{\Omega} (P \nabla \varphi_0) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^{N'}) dx - \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi'_0) \cdot \mathbf{A}^{N'} dx + \langle \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{A}^{N'} \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

et une intégration de 0 à  $t$  nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} X^N(t) &= \frac{1}{2} X^N(0) + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^{N'} dx - \int_0^t \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{u}^N d, + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^N d, \Big|_0^t \\
&- \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi'_0) \cdot \mathbf{A}^{N'} dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \varphi'_0) \cdot \nabla \varphi^N dx dt \\
&+ \int_0^t \int_{\Omega} (P \nabla \varphi'_0) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^N) dx dt - \int_{\Omega} (P \nabla \varphi_0) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^N) dx \Big|_0^t \\
&+ \int_0^t \langle \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{A}^N \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt - \langle \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{A}^N \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big|_0^t,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

où

$$\begin{aligned}
X^N(t) &= \rho |\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + (\epsilon \mathbf{A}^{N'}, \mathbf{A}^{N'})_{\Omega} + (\epsilon \nabla \varphi^N, \nabla \varphi^N)_{\Omega} + \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{u}^N) : \mathbf{e}(\mathbf{u}^N) dx \\
&+ \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{A}^N \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}^N dx.
\end{aligned}$$

On utilise les propriétés de coercivité (3.2)-(3.3) et l'inégalité de Korn pour minorer le premier membre  $M_1$  de l'équation (4.52) :

$$|\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 + |\nabla \varphi^N|_{\Omega}^2 + |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{A}^N|_{\Omega}^2 \leq c M_1. \tag{4.53}$$

Par ailleurs, sachant que les suites de conditions initiales  $(\mathbf{p}^N)$ ,  $(\mathbf{q}^N)$ ,  $(\tilde{\mathbf{A}}_0^N)$  et  $(\tilde{\mathbf{A}}_1^N)$  sont respectivement bornées dans  $\mathbf{V}$ ,  $L^2(\Omega)^3$ ,  $\mathbf{W}_{dyn}$  et  $L^2(\Omega)^3$ , et en utilisant la continuité de l'application trace du théorème 4.1.1, nous majorons le second membre  $M_2$  de l'équation (4.52) :  $\forall m \in \mathbb{R}_+^*$

$$M_2 \leq c + \int_0^t \{|\mathbf{f}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{g}'|_{\Gamma_N}^2\} dt + \int_0^t \{|\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2\} dt$$

$$\begin{aligned}
& +m|\mathbf{g}|_{\Gamma_N}^2 + \frac{1}{m}\|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 + c \int_0^t |\nabla\varphi'_0|_{\Omega}^2 dt + c \int_0^t |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 dt \\
& +c \int_0^t |\nabla\varphi'_0|_{\Omega}^2 dt + c \int_0^t |\nabla\varphi^N|_{\Omega}^2 dt \\
& +c \int_0^t |\nabla\varphi'_0|_{\Omega}^2 dt + c \int_0^t \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 dt + cm|\nabla\varphi_0|_{\Omega}^2 + \frac{c}{m}\|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 \\
& +cm \int_0^t \|\bar{\mathbf{j}}'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 dt + \frac{c}{m} \int_0^t \|\mathbf{A}^N\|_{H(\Omega, \text{rot})}^2 dt \\
& +cm\|\bar{\mathbf{j}}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \frac{c}{m}\|\mathbf{A}^N\|_{H(\Omega, \text{rot})}^2.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Prenons  $m$  assez grand dans cette dernière inégalité. D'après (4.52)-(4.54) et l'inégalité

$$|\mathbf{A}^N|_{\Omega}^2 \leq 2T \int_0^T |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 dt + 2|\mathbf{A}_0^N|_{\Omega}^2,$$

il vient

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{A}^N\|_{H(\Omega, \text{rot})}^2 + |\nabla\varphi^N|_{\Omega}^2 \leq \\
& c + c \int_0^T \left\{ |\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{A}^N\|_{H(\Omega, \text{rot})}^2 + |\nabla\varphi^N|_{\Omega}^2 \right\} dt.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Gronwall et obtenir la majoration

$$|\mathbf{u}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^N\|_{\mathbf{V}}^2 + |\mathbf{A}^{N'}|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{A}^N\|_{H(\Omega, \text{rot})}^2 + |\nabla\varphi^N|_{\Omega}^2 \leq c. \tag{4.56}$$

Les espaces  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $L^\infty(0, T; \mathbf{V})$ ,  $L^\infty(0, T; \mathbf{W}_{dyn})$  et  $L^\infty(0, T; \Psi)$  étant de Banach, il existe une sous-suite encore notée  $(\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N)$  et des fonctions  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\varphi}$  telles qu'on a les convergences faibles étoile

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^N & \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} & \text{dans } L^\infty(0, T; \mathbf{V}), \\
\mathbf{u}^{N'} & \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u}' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \\
\mathbf{A}^N & \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{A} & \text{dans } L^\infty(0, T; \mathbf{W}_{dyn}), \\
\mathbf{A}^{N'} & \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{A}' & \text{dans } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_l}(\Omega \text{div}_\epsilon 0)), \\
\varphi^N & \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\varphi} & \text{dans } L^\infty(0, T; \Psi),
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Pour montrer que la limite faible ci-dessus est solution de (4.43), on introduit (comme dans [25], vol. 1, p. 289) l'espace

$$\mathcal{C}_T^1[0, T] = \{ \phi \in \mathcal{C}^1([0, T]), \phi(T) = \phi'(T) = 0 \} \tag{4.58}$$

et, pour  $N_0$  fixé dans  $\mathbb{N}$ , on considère les fonctions  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\psi$  définies par

$$v_i = \sum_{j=1}^{N_0} \phi_j^i \otimes v^j, \quad \phi_j^i \in \mathcal{C}_T^1[0, T], \quad (4.59)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{N_0} \phi_j \otimes \mathbf{w}^j, \quad \phi_j \in \mathcal{C}_T^1[0, T], \quad (4.60)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{N_0} \phi_j \otimes \psi^j, \quad \phi_j \in \mathcal{C}^1([0, T]). \quad (4.61)$$

Pour obtenir le système (4.43), pour  $N \geq N_0$ , on se sert des égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \int_0^T (u_i^{N'}, v_i')_{\Omega} dt - \rho (q_i^N, v_i(0))_{\Omega} - \int_0^T (\epsilon \mathbf{A}^{N'}, \tilde{\mathbf{A}}')_{\Omega} dt - (\epsilon \tilde{\mathbf{A}}_1^N, \tilde{\mathbf{A}}(0))_{\Omega} \\ - \int_0^T c_1 \left( (\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N), (\mathbf{v}', \tilde{\mathbf{A}}') \right) dt - c_1 \left( (\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}) \right) \Big|_{t=0} \\ + \int_0^T c_0 \left( (\mathbf{u}^N, \mathbf{A}^N, \varphi^N), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) dt = \int_0^T l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) dt \end{array} \right.$$

obtenues à partir de (4.48), en intégrant par parties par rapport au temps. En faisant tendre  $N$  vers l'infini dans ces dernières équations, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \int_0^T (u_i', v_i')_{\Omega} dt - \rho (q_i, v_i(0))_{\Omega} - \int_0^T (\epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}}')_{\Omega} dt - (\epsilon \mathbf{A}_1, \tilde{\mathbf{A}}(0))_{\Omega} \\ - \int_0^T c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}), (\mathbf{v}', \tilde{\mathbf{A}}') \right) dt - c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}) \right) \Big|_{t=0} \\ + \int_0^T c_0 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) dt = \int_0^T l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) dt \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Or, les  $v^j$ , les  $\mathbf{w}^j$  et les  $\psi^j$  forment respectivement des bases de  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}_{dyn}$  et  $\Psi$ , donc l'ensemble des fonctions de la forme (4.59) est dense dans l'espace de fonctions

$$E_1 = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbf{v}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \mathbf{v}(T) = 0 \right\},$$

l'ensemble des fonctions de la forme (4.60) est dense dans l'espace des fonctions  $\tilde{\mathbf{A}} \in L^2(0, T; \mathbf{W}_{dyn})$  telles que

$$E_2 = \left\{ \tilde{\mathbf{A}} \in L^2(0, T; \mathbf{W}_{dyn}), \quad \tilde{\mathbf{A}}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad \tilde{\mathbf{A}}(T) = 0 \right\},$$

et l'ensemble des fonctions de la forme (4.61) est dense dans l'espace  $H^1(0, T; \Psi)$ . Donc l'équation (4.62) est vérifiée pour

$$\begin{cases} \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)^3), \text{ avec } \mathbf{v}(T) = 0, \\ \tilde{\mathbf{A}} \in L^2(0, T; \mathbf{W}_{dyn}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega)^3), \text{ avec } \tilde{\mathbf{A}}(T) = 0, \\ \psi \in H^1(0, T; \Psi). \end{cases}$$

On en déduit que  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi)$  est solution de (4.43)

### Unicité de la solution du problème (4.43)

L'unicité de la solution  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi)$  est obtenue si l'on montre que pour des données nulles,  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi)$  est nécessairement nulle. Supposons que les données du problème (4.43) sont toutes nulles. Soit  $s \in ]0, T[$ , définissons  $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\varphi})$  par :

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{u}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{A}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} - \int_t^s \bar{\varphi}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s. \end{cases} \quad (4.65)$$

Rappelons que

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi) = P \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \epsilon \nabla \varphi - \epsilon \mathbf{A}'.$$

L'équation de Maxwell-Gauss,

$$\forall \tilde{\psi} \in \Psi, \quad \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}) \cdot \nabla \tilde{\psi} dx = 0$$

implique que  $(\mathbf{v}, \psi)$  défini ci-dessus vérifie l'équation variationnelle :  $\forall \tilde{\psi} \in \Psi$ ,

$$\int_{\Omega} (P \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \epsilon \nabla \psi) \cdot \nabla \tilde{\psi} dx = 0, \quad (4.66)$$

Définissons  $(\psi_n)$  une suite de  $H^1(0, T; \Psi)$  qui tend vers  $\psi = \bar{\varphi}$  dans  $L^2(0, T; \Psi)$ . Cette suite vérifie

$$\int_{\Omega} (P \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \epsilon \nabla \psi) \cdot \nabla \psi_n \, dx = 0,$$

d'où

$$\int_{\Omega} (P \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \epsilon \nabla \psi) \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx = 0 \quad (4.67)$$

Considérons les fonctions test (4.63)-(4.64) dans l'équation (4.62), on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^s (u_i', u_i)_{\Omega} \, dt - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}', \mathbf{A})_{\Omega} \, dt \\ & + \int_0^s \left( \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{v}') : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}' \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx \right) dt \\ & + \int_0^s \int_{\Omega} (P \nabla \bar{\varphi}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx \, dt = 0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

En faisant la somme des équations (4.67) et (4.68), on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^s (u_i', u_i)_{\Omega} \, dt - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}', \mathbf{A})_{\Omega} \, dt \\ & + \int_0^s \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{v}') : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx \, dt + \frac{1}{\mu_1} \int_0^s \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{A}}' \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx \, dt \\ & + \int_0^s \int_{\Omega} (P \nabla \bar{\varphi}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx \, dt - \int_0^s \left( \int_{\Omega} (P \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \epsilon \nabla \psi) \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (4.69)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \int_0^s \frac{d}{dt} \left\{ -\rho (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} - (\epsilon \mathbf{A}, \mathbf{A})_{\Omega} + \int_{\Omega} \epsilon \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, dx \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx \right\} dt = 0, \end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned} & \{ \rho (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\epsilon \mathbf{A}, \mathbf{A})_{\Omega} \} (s) \\ & + \left\{ \int_{\Omega} \epsilon \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} C \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \cdot \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} \, dx \right\} \Big|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit  $\mathbf{u}(s) = 0$ ,  $\mathbf{A}(s) = 0$  et  $\psi(0) = \int_0^s \bar{\varphi}(r) \, dr = 0$ , pour tout  $s \in ]0, T[$ , d'où  $\bar{\varphi} = 0$ . Ceci achève la démonstration de l'unicité de la solution.  $\blacksquare$

Rappelons que la forme bilinéaire  $c_1(., .)$  est définie sur  $\mathbf{V} \times H(\Omega, \text{rot}) \times \Psi$  comme suit

$$\begin{aligned} c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) &= \int_{\Omega} P \left\{ \mathbf{A} \mathbf{e}(\mathbf{v}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}) \tilde{\mathbf{A}} \right\} dx \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon \left\{ \nabla \bar{\varphi} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \nabla \psi \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.70)$$

On peut, dans le problème (4.43), étendre l'espace des fonctions test  $\tilde{\mathbf{A}}$ , d'après le théorème de décomposition 4.1.3, comme le montre le lemme ci-dessous

**Lemme 4.2.1** *Le problème (4.43) est équivalent au problème*

*Trouver  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi})$  tel que*

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}) \in L^\infty(0, T; \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi), \\ (\mathbf{u}', \mathbf{A}') \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3 \times H_{\Gamma_l}(\Omega, \text{div}_\epsilon 0)), \\ \forall (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \in \mathbf{V} \times H(\Omega, \text{rot}) \times \Psi, \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} &\rho \langle \mathbf{u}'' , \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \langle \epsilon \mathbf{A}'' , \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H(\Omega, \text{rot})', H(\Omega, \text{rot})} \\ &+ \frac{d}{dt} c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) + c_0 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi}), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) \\ &= l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi), \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}, \mathbf{u}'(0) = \mathbf{q}, \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1.$$

**Preuve.** Tout élément  $\tilde{\mathbf{A}}$  de  $H(\Omega, \text{rot})$  se décompose en la somme  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{w} + \nabla p$  avec  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_{dyn}$  et  $p \in \Psi$ . Posons tout d'abord  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = 0$ , et  $\psi \in \Psi$  dans (4.43), on a le système variationnel de Maxwell-Gauss :

$$\forall \tilde{\psi} \in \Psi, \quad \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi) \cdot \nabla \tilde{\psi} dx = 0. \quad (4.72)$$

Posons maintenant  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\psi = 0$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = \nabla p$  avec  $p \in \Psi$  dans (4.43), et montrons que l'équation est encore vérifiée : il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\epsilon \mathbf{A}', \nabla p)_\Omega + \frac{d}{dt} c_1 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi), (0, \nabla p, 0) \right) + c_0 \left( (\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi), (0, \nabla p, 0) \right) \\ &= \langle \tilde{\mathbf{j}}, \nabla p \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \varphi) \cdot \nabla \psi \, dx = \langle \bar{\mathbf{j}}, \nabla p \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}.$$

Or, d'après (4.72) le premier membre de cette égalité est nul, et nous avons déjà montré que le second membre est nul (voir (4.27)). On en déduit que toute solution de (4.43) est aussi solution de (4.71). La réciproque est évidente. Ce lemme sera utile dans la preuve du lemme 4.3.3 dans lequel on établit le problème limite. ■

### 4.3 Analyse asymptotique en piézoélectricité dynamique

Comme au chapitre précédent, nous faisons des changements de variables et d'inconnues pour faire porter le petit paramètre  $h$  sur les opérateurs. Ceci permet de se ramener dans le cadre des équations paramétrées dont une théorie générale a été développée dans [24]. Pour les équations de l'élasticité pure, l'analyse asymptotique est faite dans [32] et [8].

Conservons les mêmes notations (sauf mention contraire) et les mêmes hypothèses (3.47) sur les ordres de grandeur des données du problème et effectuons les mêmes changements d'inconnues (3.48) que dans le chapitre précédent. De plus nous supposons que la masse volumique est d'ordre 2 par rapport à  $h$ ,  $\rho^h = h^2 \rho$ , et le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(h)$  et le vecteur densité de courant surfacique  $\mathbf{j}$  sont mis à l'échelle comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^h(\mathbf{x}) &= h^2 \mathbf{A}(h)(\mathbf{x}), \\ \mathbf{j}^h(\mathbf{x}) &= h^3 \mathbf{j}(h)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi un problème variationnel posé sur le domaine fixe  $\Omega$ .

### 4.3.1 Formulation variationnelle

Pour alléger les écritures, donnons d'abord quelques notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}), \quad \kappa_{\alpha 3}(\mathbf{v}) = \frac{1}{h} e_{\alpha 3}(\mathbf{v}), \quad \kappa_{33}(\mathbf{v}) = \frac{1}{h^2} e_{33}(\mathbf{v}), \\ \kappa(h)(\mathbf{u}(h)) = \kappa(h), \\ \left( \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}} \right)_1 = \partial_2 \tilde{A}_3 - \frac{1}{h} \partial_3 \tilde{A}_2, \\ \left( \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}} \right)_2 = -(\partial_1 \tilde{A}_3 - \frac{1}{h} \partial_3 \tilde{A}_1), \\ \left( \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}} \right)_3 = \partial_1 \tilde{A}_2 - \partial_2 \tilde{A}_1, \\ (h\partial_1 \bar{\varphi}(h), h\partial_2 \bar{\varphi}(h), \partial_3 \bar{\varphi}(h)) = (\theta_1(h), \theta_2(h), \theta_3(h)), \\ (h\partial_1 \varphi_0, h\partial_2 \varphi_0, \partial_3 \varphi_0) = (\theta_1^0(h), \theta_2^0(h), \theta_3^0). \end{array} \right. \quad (4.73)$$

Nous définissons aussi les formes bilinéaires mises à l'échelle :

$$\begin{aligned} c_0(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) &= \int_{\Omega} C \kappa(h) : \kappa(h)(\mathbf{v}) \, dx \\ &+ \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot}(h) \mathbf{A}(h) \cdot \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}} \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon_{33} \theta_3(h) \partial_3 \psi \, dx + \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} \{ \theta_3(h) (h\partial_{\alpha} \psi) + \theta_{\alpha}(h) \partial_3 \psi \} \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \theta_{\alpha}(h) (h\partial_{\beta} \psi) \, dx + \int_{\Omega} P_{3ij} \{ \theta_3(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) - \partial_3 \psi \kappa_{ij}(h) \} \, dx \\ &+ \int_{\Omega} P_{\alpha ij} \{ \theta_{\alpha}(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) - (h\partial_{\alpha} \psi) \kappa_{ij}(h) \} \, dx \\ c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h)), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}) \right) &= \int_{\Omega} P \left( \mathbf{A}(h) \kappa(h)(\mathbf{v}) - \tilde{\mathbf{A}} \kappa(h) \right) \, dx \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} l(h)(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d, \\ &- \int_{\Omega} \epsilon_{33} \theta_3^0 \partial_3 \psi \, dx - \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} (\theta_3^0 (h\partial_{\alpha} \psi) + \theta_{\alpha}^0(h) \partial_3 \psi) \, dx \\ &- \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \theta_{\alpha}^0(h) (h\partial_{\beta} \psi) \, dx - \int_{\Omega} P \theta^0(h) \kappa(h)(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} (\epsilon \theta^0(h))' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \, dx \\ &+ \langle \tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{A}} \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3}. \end{aligned} \quad (4.75)$$



Des calculs élémentaires montrent que le problème (4.43) est équivalent à

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h), \bar{\varphi}(h)) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}_{dyn} \times \Psi \text{ tel que} \\
& \forall (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \in \mathbf{V} \times H(\Omega, \text{rot}) \times \Psi, \\
& \rho \langle (h^2 u_\alpha(h), u_3(h))'', \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} + \langle \epsilon \mathbf{A}(h)'', \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{H(\Omega, \text{rot})', H(\Omega, \text{rot})} \\
& + \frac{d}{dt} c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h)), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}) \right) \\
& + c_0(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h), \bar{\varphi}(h)), (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \right) \\
& = l(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[), \\
& \mathbf{u}(h)(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{u}(h)'(0) = \mathbf{q}, \quad \mathbf{A}(h)(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}(h)'(0) = \mathbf{A}_1.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

### 4.3.2 Majoration de normes et convergences

On suppose que les données du problème mises à l'échelle vérifient

$$\begin{aligned}
f_\alpha & \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), & f_3 & \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\
\mathbf{g} & \in H^1(0, T; L^2(, N)^3), & \mathbf{p} & \in \mathbf{V}, \quad \mathbf{q} \in L^2(\Omega)^3, \\
\varphi_0 & \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(, )^3), \\
\mathbf{j} & \in H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}}(, )), & \mathbf{A}_0 & \in \mathbf{W}_{dyn}, \quad \mathbf{A}_1 \in L^2(\Omega)^3.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

On suppose aussi que les conditions initiales sont telles que la suite  $(N_0(h))_{h>0}$  définie par

$$\begin{aligned}
N_0(h) & = \left[ |hu_\alpha(h)'|_\Omega^2 + |u_3(h)'|_\Omega^2 + |\mathbf{A}(h)'|_\Omega^2 + |\theta(h)|_\Omega^2 + \int_\Omega C\kappa(h) : \kappa(h) dx \right. \\
& \quad \left. + \int_\Omega \text{rot}(h) \mathbf{A}(h) \cdot \text{rot}(h) \mathbf{A}(h) dx \right]_{t=0}
\end{aligned}$$

est bornée. Nous avons le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.3.1** *Il existe  $c > 0$  tel que nous avons la majoration*

$$\begin{aligned} & \| (hu_1(h)', hu_2(h)', u_3(h)') \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|\kappa(h)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^9)} \\ & + \|\mathbf{A}(h)'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|\text{rot}(h) \mathbf{A}(h)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} \\ & + \|(h\partial_1\varphi(h), h\partial_2\varphi(h), \partial_3\varphi(h))\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} < c. \end{aligned} \quad (4.78)$$

De plus, il existe  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\kappa = (\kappa_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ ,  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  et  $\varphi$  tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} & \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^3), \\ u_3' & \in L^\infty(0, T; L^2(\omega)), \\ \kappa & \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^9), \\ \mathbf{A}' & \in L^\infty(0, T; L^2(\omega)^3), \\ (\text{rot} \mathbf{A})_3 & \in L^\infty(0, T; L^2(\omega)), \end{aligned}$$

et des sous suites  $(\mathbf{u}(h))_{h>0}$ ,  $(\kappa(h))_{h>0}$ ,  $(\mathbf{A}(h))_{h>0}$  et  $(\varphi(h))_{h>0}$  telles que nous avons les convergences faibles étoiles

$$\mathbf{u}(h) \xrightarrow{*} \mathbf{u} \text{ dans } L^\infty(0, T; \mathbf{V}), \quad (4.79)$$

$$\kappa(h) \xrightarrow{*} \kappa \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^9), \quad (4.80)$$

$$\mathbf{A}(h)' \xrightarrow{*} \mathbf{A}' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3), \quad (4.81)$$

$$\varphi(h) \xrightarrow{*} \varphi \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3), \quad (4.82)$$

$$(h\partial_1\varphi(h), h\partial_2\varphi(h), \partial_3\varphi(h)) \xrightarrow{*} (0, 0, \partial_3\varphi) \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega)^3)^3), \quad (4.83)$$

$$((\text{rot} \mathbf{A}(h))_\alpha, (\text{rot} \mathbf{A}(h))_3) \xrightarrow{*} (0, (\text{rot} \mathbf{A})_3) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3). \quad (4.84)$$

**Preuve.** Pour majorer la norme de la solution  $(\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h), \varphi(h))$ , nous utilisons la suite  $(\mathbf{u}^N(h), \mathbf{A}^N(h), \varphi^N(h))_{N \in \mathbb{N}^*}$  construite dans la démonstration du théorème d'existence 4.2.1. Donnons d'abord quelques notations permettant d'alléger les écritures :

$$(h\partial_1\bar{\varphi}^N(h), h\partial_2\bar{\varphi}^N(h), \partial_3\bar{\varphi}^N(h)) = (\theta_1^N(h), \theta_2^N(h), \theta_3^N(h)),$$

$$(h\partial_1\varphi_0(h), h\partial_2\varphi_0(h), \partial_3\varphi_0(h)) = (\theta_1^0(h), \theta_2^0(h), \theta_3^0(h)).$$

Ecrivons l'égalité (4.52) mise à l'échelle

$$\begin{aligned}
X^N(h)(t) &= X^N(h)(0) - \int_0^t \int_{\Omega} f'_\alpha u_\alpha^N(h) dx + \int_{\Omega} f_\alpha u_\alpha^N(h) dx \Big|_0^t \\
&\quad + \int_0^t \int_{\Omega} f_3 u_3^N(h)' dx \\
&\quad - \int_0^t \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{u}^N(h) d, + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}^N(h) d, \Big|_0^t \\
&\quad - \int_0^t \int_{\Omega} \epsilon \theta^0(h)' \mathbf{A}^N(h)' dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} \epsilon \theta^0(h)' \nabla \varphi^N(h) dx dt \\
&\quad + \int_0^t \int_{\Omega} P \theta^0(h)' \kappa(h)(\mathbf{u}^N(h)) dx dt - \int_{\Omega} P \theta^0(h)' \kappa(h)(\mathbf{u}^N(h)) dx \Big|_0^t \\
&\quad - \int_0^t \langle \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{A}^N(h) \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \langle \bar{\mathbf{j}}, \mathbf{A}^N(h) \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \Big|_0^t
\end{aligned} \tag{4.85}$$

où

$$\begin{aligned}
X^N(h)(t) &= \frac{1}{2} \left[ \rho h^2 \sum_{\alpha=1}^2 |u_\alpha^N(h)'|_\Omega^2 + \rho |u_3^N(h)'|_\Omega^2 + \int_{\Omega} C \kappa(\mathbf{u}^N(h)) : \kappa(\mathbf{u}^N(h)) dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ (\epsilon \mathbf{A}^N(h)', \mathbf{A}^N(h)')_\Omega + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} \text{rot}(h) \mathbf{A}^N(h) \cdot \text{rot}(h) \mathbf{A}^N(h) dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (\epsilon \theta^N(h), \theta^N(h))_\Omega.
\end{aligned}$$

Pour tout  $m > 0$ , le second membre  $M_2$  de (4.85) peut être majoré comme suit

$$M_2 \leq \frac{c}{m} X^N(h)(t) + c \int_0^t X^N(h)(s) ds + c(m).$$

On prend  $m$  assez grand et on obtient

$$X^N(h)(t) \leq c \int_0^t X^N(h)(s) ds + c(m),$$

on applique le lemme de Gronwall, ce qui fournit la majoration de  $X^N(h)(t)$  indépendamment de  $h$ , de  $N$  et de  $t$  :

$$\begin{aligned}
&\rho \| (h u_1^N(h)', h u_2^N(h)', u_3^N(h)') \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \| \kappa(h)(\mathbf{u}^N(h)) \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^9)} \\
&+ \| \mathbf{A}^N(h)' \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \| \text{rot}(h) \mathbf{A}^N(h) \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} \\
&+ \| \theta^N(h) \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} \leq c.
\end{aligned}$$

D'autre part, on utilise les convergences faibles (4.57) lorsque  $N$  tend vers l'infini, on a la majoration (4.78) :

$$\begin{aligned} & \rho \|(h u_1(h)', h u_2(h)', u_3(h)')\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|\kappa(h)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^9)} \\ & + \|\mathbf{A}(h)'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} + \|\text{rot}(h) \mathbf{A}(h)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} \\ & + \|\theta(h)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)} \leq c. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que toute suite bornée d'un espace de Banach admet une sous-suite convergente pour la topologie faible étoile ; de (4.78), et par application de l'inégalité de Korn, on déduit donc (4.79)-(4.82) et l'existence de  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$  tels que

$$((\text{rot}(h) \mathbf{A}(h))_\alpha, (\text{rot} \mathbf{A}(h))_3) \xrightarrow{*} (\phi_\alpha, \phi_3) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2). \quad (4.86)$$

Pour obtenir (4.84), posons  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\psi = 0$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = (w_1(x)m(t), 0, 0)$  avec  $w_1 \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et  $m \in \mathcal{D}(]0, T[)$  dans (4.76), on obtient

$$\begin{aligned} & \epsilon_{1\beta} \int_0^T m''(t) (A_\beta(h), w_1)_\Omega dt + \epsilon_{13} \int_0^T m''(t) (A_3(h), w_1)_\Omega dt \\ & + \int_0^T m'(t) \int_\Omega P_{1ij} w_1 \kappa_{ij}(h) dx dt - \int_0^T m'(t) \int_\Omega \epsilon_{i1} \theta_i(h) \omega_1(x) dx dt \\ & + \frac{1}{h\mu_1} \int_0^T m(t) \int_\Omega (\text{rot}(h) \mathbf{A}(h))_2 \partial_3 w_1 dx dt - \frac{1}{\mu_1} \int_0^T m(t) \int_\Omega (\text{rot} \mathbf{A}(h))_3 \partial_2 w_1 \\ & = - \int_0^T m(t) \int_\Omega \epsilon_{13} \partial_3 \varphi'_0 w_1 dx dt - h \int_0^T m(t) \int_\Omega \epsilon_{\alpha 1} \partial_\alpha \varphi'_0 w_1 dx dt \\ & \quad - \int_0^T m(t) \int_{\Gamma^\pm} j_1 w_1 d, dt. \end{aligned}$$

En multipliant l'équation précédente par  $h$  et en passant à la limite, il vient

$$\int_0^T m(t) \int_\Omega \phi_2 \partial_3 w_1 dx dt = \int_\Omega \left( \int_0^T m(t) \phi_2 dt \right) \partial_3 w_1 dx = 0.$$

Il en résulte que  $\phi_2 = 0$  (cf. [8]). De façon analogue, on démontre que  $\phi_1 = 0$ .

Nous allons maintenant démontrer que les  $A_i$  sont indépendants de  $x_3$ . Nous avons déjà obtenu, les convergences faibles étoile des  $A_i(h)$  et  $(\frac{1}{h} \partial_3 A_\alpha(h) - \partial_\alpha A_3(h))$ , dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  donc dans  $\mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$ . Il en résulte que  $\partial_3 A_\alpha(h)$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$ , d'où  $\partial_3 A_\alpha = 0$ . Pour  $A_3$ , nous utilisons la condition "div<sup>h</sup>( $\epsilon \mathbf{A}^h$ ) = 0" qui, mise à l'échelle, devient  $h \epsilon_{\alpha j} \partial_\alpha A_j(h) + \epsilon_{3j} \partial_3 A_j(h) = 0$ . Le passage à la limite dans cette dernière égalité donne  $\epsilon_{3j} \partial_3 A_j = 0$ , d'où  $\epsilon_{3j} A_j(h)$  est indépendant de  $x_3$ . Or, les  $A_\alpha$  sont indépendants de  $x_3$ , et le tenseur  $\epsilon$  est symétrique défini positif donc  $\epsilon_{33}$  est différent de 0, d'où  $A_3$  ne dépend pas de  $x_3$ . ■

### 4.3.3 Identification du problème limite

Ici, on considère les espaces fonctionnels déjà définis au paragraphe 3.3.4.

**Lemme 4.3.2** *Les limites  $\mathbf{u}$ ,  $\kappa$  et  $(A_1, A_2, A_3)$  trouvées au lemme 4.3.1 sont respectivement dans  $L^2(0, T ; \mathbf{V}_{KL})$ ,  $L^2(0, T ; L^2(\Omega)^9)$  et  $L^2(0, T ; L^2(\omega)^3)$  et vérifient les équations suivantes :*

$$C_{i3kl}\kappa_{kl} + P_{3i3}\partial_3\varphi + P_{mi3}A'_m = 0 \text{ dans } L^2(0, T ; L^2(\Omega)), \quad (4.87)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \text{ dans } L^2(0, T ; L^2(\Omega)). \quad (4.88)$$

On se place désormais dans le cas d'un matériau mécaniquement isotrope, comme dans (3.1). Alors on a

$$\begin{cases} \kappa_{33} = -\frac{1}{\lambda + 2\mu}(P_{333}\partial_3\varphi + P_{i33}A'_i + \lambda\kappa_{\beta\beta}) & \text{dans } L^2(0, T ; L^2(\Omega)) \\ \kappa_{\alpha 3} = -\frac{1}{2\mu}(P_{3\alpha 3}\partial_3\varphi + P_{i\alpha 3}A'_i) & \text{dans } L^2(0, T ; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (4.89)$$

**Preuve.** La démonstration de la première partie de ce lemme est analogue à celle du lemme 3.3.1.

Si on remplace  $C_{ijkl}$  par sa valeur (3.1), on trouve (4.89). Le vecteur déplacement limite  $\mathbf{u}$  étant dans  $\mathbf{V}_{KL}$ , il s'écrit

$$\begin{aligned} u_\alpha(x) &= \zeta_\alpha(x_1, x_2) - x_3\partial_\alpha\zeta_3(x_1, x_2) \\ u_3 &= \zeta_3, \end{aligned} \quad (4.90)$$

où  $\zeta_\alpha \in V_H(\omega)$  et  $\zeta_3 \in V_3(\omega)$ , les espaces  $V_H(\omega)$  et  $V_3(\omega)$  étant définis en (3.74)-(3.75). ■

De même qu'au chapitre 3, (voir 3.83), nous définissons les constantes  $p_{ij}$ ,  $p_{i\alpha\beta}$  et  $c_{\rho i\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{1}{\mu}P_{i\alpha 3}P_{j\alpha 3} + \frac{1}{\lambda + 2\mu}P_{i33}P_{j33} + \epsilon_{ij}, \\ p_{i\alpha\beta} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}P_{i33}\delta_{\alpha\beta} - P_{i\alpha\beta}, \\ c_{\rho i\alpha\beta} &= \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}\delta_{\rho i}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\delta_{\alpha\rho}\delta_{i\beta}. \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{W}_{dyn}^l$  le sous-espace de  $L^2(\omega)^3$  défini par

$$\mathbf{W}_{dyn}^l = \{\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3) \in L^2(\omega)^3, \quad (\partial_1\tilde{A}_2 - \partial_2\tilde{A}_1) \in L^2(\omega)\}.$$

**Lemme 4.3.3** *La limite  $(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \bar{\varphi})$  est l'unique solution de l'équation*

$$\begin{aligned}
& \text{Pour tout } (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \psi) \in \mathbf{V}_{KL} \times \mathbf{W}_{dyn}^l \times \Psi_{l_0}, \\
& \rho \langle u_3'', v_3 \rangle_{V_3', V_3} + \langle p \mathbf{A}'', \tilde{\mathbf{A}} \rangle_{(\mathbf{W}_{dyn}^l)', \mathbf{W}_{dyn}^l} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} p_{i\alpha\beta} \left[ e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \tilde{A}_i - A_i e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right] dx \\
& + \int_{\Omega} c_{\rho i \alpha \beta} e_{\rho i}(\mathbf{u}) e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{A})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_{\Omega} p_{33} \partial_3 \varphi \partial_3 \psi dx \\
& + \int_{\Omega} p_{3\alpha\beta} [e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \partial_3 \psi - \partial_3 \varphi e_{\alpha\beta}(\mathbf{v})] dx \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \\
& - \int_{\omega} (j_{\alpha}^{+} + j_{\alpha}^{-}) \tilde{A}_{\alpha} d\omega - \int_{\omega} p_{i3} \frac{\varphi_0^{+'} - \varphi_0^{-'}}{2} \tilde{A}_i d\omega, \\
& u_3(0) = p_3, \quad u_3'(0) = q_3, \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}'(0) = \mathbf{A}_1.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

**Preuve.** Rappelons que le lemme 4.2.1 nous permet de prendre  $\tilde{\mathbf{A}}$  dans  $H^1(\omega)^3$ . Prenons tout d'abord  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{V}_{KL}$ ,  $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3)$  dans  $H^1(\omega)^3$  et  $\psi$  dans  $\Psi$  dans l'équation (4.76) et faisons tendre  $h$  vers 0. Grâce aux résultats de convergence faible du lemme 4.3.1, il vient l'équation (4.91), sachant que  $H^1(\omega)^3$  et  $\Psi$  sont respectivement denses dans  $\mathbf{W}_{dyn}^l$  et  $\Psi_{l_0}$  (voir proposition 3.2.2 et théorème 4.1.1).

Pour prouver l'unicité de la solution, il suffit de montrer que pour des données nulles, la solution est nécessairement nulle. Nous pouvons procéder comme dans la démonstration de l'unicité de la solution du problème (4.43). On suppose que le second membre de l'équation (4.91) est nul, on démontre, comme dans la preuve de l'unicité de la solution du problème (4.43), que  $\mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{A} = 0$  et  $\bar{\varphi} = 0$ . ■

Nous allons maintenant établir les équations aux dérivées partielles correspondant à l'équation variationnelle limite (4.91).

**Théorème 4.3.1** *Le potentiel électrique  $\varphi$  est un polynôme du second degré en  $x_3$  :*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^2 \varphi^i(x_1, x_2) x_3^i, \tag{4.92}$$

dont les coefficients  $\varphi^i(x_1, x_2)$  sont donnés en fonction de  $\zeta_3$  par

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} - \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3, \\ \varphi^1 &= \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2}, \\ \varphi^2 &= \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3.\end{aligned}\tag{4.93}$$

**Preuve.** Prenant  $\mathbf{v} = 0$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = 0$  dans l'équation (4.91), nous obtenons l'équation limite électrique :

$$\forall \psi \in \Psi_{I_0}, \quad \int_{\Omega} D_3(\mathbf{u}, \varphi) \partial_3 \psi \, dx = 0,\tag{4.94}$$

où  $D_3$  est donné par :

$$D_3(\mathbf{u}, \varphi) = -p_{33} \partial_3 \varphi - p_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\mathbf{u}),\tag{4.95}$$

d'où

$$\partial_3 D_3(\mathbf{u}, \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Il existe donc une distribution  $d^1$  dans  $\mathcal{D}'(\omega)$ , (en fait dans  $L^2(\omega)$  d'après la régularité de  $\mathbf{u}$  et de  $\varphi$ ) telle que  $D_3(\mathbf{u}, \varphi) = d^1$ . Utilisant l'expression (4.95), on tire que

$$\partial_3 \varphi = -\frac{p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} [e_{\alpha\beta}(\zeta) - x_3 \partial_{\alpha\beta} \zeta_3] - \frac{1}{p_{33}} d^1.$$

Intégrons à nouveau ; il existe  $d^0$  dans  $L^2(\omega)$  tel que

$$\varphi = -\frac{p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \left[ x_3 e_{\alpha\beta}(\zeta) - \frac{x_3^2}{2} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \right] - \frac{x_3}{p_{33}} d^1 + d^0.$$

Il reste à choisir  $d^0$  et  $d^1$  de sorte que  $\varphi$  satisfasse les conditions aux limites de Dirichlet  $\varphi|_{\Gamma^+} = \varphi_0^+$  et  $\varphi|_{\Gamma^-} = \varphi_0^-$ . On obtient

$$\begin{aligned}d^0 &= \frac{\varphi_0^+ + \varphi_0^-}{2} - \frac{p_{3\alpha\beta}}{2p_{33}} \partial_{\alpha\beta} \zeta_3, \\ d^1 &= -p_{33} \frac{\varphi_0^+ - \varphi_0^-}{2} - p_{3\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\zeta).\end{aligned}$$

On en tire immédiatement les expressions (4.92)-(4.93). ■

**Théorème 4.3.2** Gardons les mêmes notations qu'en (4.90) et faisons les hypothèses





Le quadruplet  $(\zeta_1, \zeta_2, A_1, A_2)$  est alors l'unique solution du système couplé formé des équations quasi-statiques en  $(\zeta_1, \zeta_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2, A_1, A_2) = \int_{-1}^1 f_\beta dx_3 + (g_\beta^+ + g_\beta^-) \\ \qquad \qquad \qquad -p_{3\alpha\beta} \partial_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \qquad \qquad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ n_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2, A_1, A_2) \nu_\alpha = \int_{-1}^1 g_\beta dx_3 + p_{3\alpha\beta} \nu_\alpha (\varphi_0^+ - \varphi_0^-) \qquad \text{sur } \gamma_1 \times (0, T), \\ (\zeta_1, \zeta_2) = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \gamma_0 \times (0, T), \end{array} \right. \quad (4.98)$$

et des équations d'évolution du deuxième ordre en  $(A_1, A_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ p_{\alpha 1} - \frac{p_{31} p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_\alpha'' + \frac{1}{\mu_1} \partial_2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \qquad \qquad \qquad + \left[ p_{1\alpha\beta} - \frac{p_{31} p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta'_1, \zeta'_2) = -(j_1^+ + j_1^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \left[ p_{\alpha 2} - \frac{p_{32} p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_\alpha'' - \frac{1}{\mu_1} \partial_1 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \qquad \qquad \qquad + \left[ p_{2\alpha\beta} - \frac{p_{32} p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta'_1, \zeta'_2) = -(j_2^+ + j_2^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \gamma \times (0, T), \\ A_\alpha(0) = A_{0\alpha}, \quad A_\alpha'(0) = A_{1\alpha} \qquad \qquad \qquad \text{dans } \omega. \end{array} \right. \quad (4.99)$$

**Remarque 4.3.1** Comme dans le cas statique, les déplacements verticaux ne dépendent pas du potentiel (d.d.p.) imposé aux faces de la plaque. Cependant, ils dépendent des constantes piézoélectriques et électriques du matériau.

Par contre, les déplacements horizontaux sont fonction de la différence de potentiel  $(\varphi_0^+ - \varphi_0^-)$ . De plus, ils sont couplés à la variation en fonction du temps du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}'$ .

L'analyse asymptotique des plaques minces piézoélectriques nous permet d'obtenir les équations de Maxwell bidimensionnelles. Nous pouvons, en particulier, déduire du système (4.99) ci-dessus les équations de Maxwell-Ampère bidimensionnelles; il suffit d'y annuler les coefficients de piézoélectricité.

**Preuve du théorème 4.3.2.** Pour établir les équations mécaniques verticales, on pose dans (4.91),  $v_\alpha = -x_3 \partial_\alpha \eta_3$ ,  $v_3 = \eta_3$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& 2\rho\langle\zeta_3'', v_3\rangle_{V_3', V_3} + \frac{2}{3} \int_{\omega} c_{\ell i \alpha \beta} \partial_{\ell i} \zeta_3 \partial_{\alpha \beta} \eta_3 \, d\omega + \frac{2}{3} \int_{\omega} \frac{p_{3\alpha\beta} p_{3\ell i}}{p_{33}} \partial_{\ell i} \zeta_3 \partial_{\alpha \beta} \eta_3 \, d\omega \\
& = - \int_{\omega} \left( \int_{-1}^1 x_3 f_{\alpha} \, dx_3 \right) \partial_{\alpha} \eta_3 \, d\omega + \int_{\omega} \left( \int_{-1}^1 f_3 \, dx_3 \right) \eta_3 \, d\omega \\
& \quad + \int_{\omega} (g_{\alpha}^{-} - g_{\alpha}^{+}) \partial_{\alpha} \eta_3 \, d\omega + \int_{\gamma_1} \left( \int_{-1}^1 g_3 \, dx_3 \right) \eta_3 \, d\gamma. \tag{4.100}
\end{aligned}$$

Prenons  $\eta_3$  dans  $\mathcal{D}(\omega)$  et multiplions l'équation (4.100) par  $g \in \mathcal{D}([0, T])$ , on a :

$$\begin{aligned}
& 2\rho\zeta_3'' + \frac{2}{3} \left( c_{\ell i \alpha \beta} + \frac{p_{3\alpha\beta} p_{3\ell i}}{p_{33}} \right) \partial_{\alpha \beta} \partial_{\ell i} \zeta_3 \\
& = \int_{-1}^1 (x_3 \partial_{\alpha} f_{\alpha} + f_3) \, dx_3 + \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^{+} - g_{\alpha}^{-}) + g_3^{+} + g_3^{-}
\end{aligned}$$

Pour obtenir les conditions au bord, on reconduit la même méthode que pour établir le système (3.97). Méthode qui permet d'appliquer la formule de Green en tenant compte des singularités.

Pour établir les équations mécaniques horizontales, on pose dans (4.91),  $v_{\alpha} = \eta_{\alpha}$ ,  $v_3 = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{A}} = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{\omega} c_{\ell i \alpha \beta} e_{\ell i}(\zeta_1, \zeta_2) e_{\alpha \beta}(\eta_1, \eta_2) \, d\omega - 2 \int_{\omega} p_{i\alpha\beta} A_i' e_{\alpha \beta}(\eta_1, \eta_2) \, d\omega \\
& = \int_{\omega} \left( \int_{-1}^1 f_{\alpha} \, dx_3 \right) \eta_{\alpha} \, d\omega + \int_{\omega} (g_{\alpha}^{+} + g_{\alpha}^{-}) \eta_{\alpha} \, d\omega \\
& \quad + \int_{\gamma_1} \left( \int_{-1}^1 g_{\alpha} \, dx_3 \right) \eta_{\alpha} \, d\gamma + \int_{\omega} p_{3\alpha\beta} (\varphi_0^{+} - \varphi_0^{-}) e_{\alpha \beta}(\eta_1, \eta_2) \, d\omega.
\end{aligned}$$

Il en résulte, en utilisant la même démarche que pour établir (3.98)), le système (4.98).

Prenons  $\mathbf{v} = 0$  et  $\psi = 0$  dans (4.91),  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{D}(\omega)$ , il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ p_{\alpha 1} - \frac{p_{31}p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_{\alpha}'' + \frac{1}{\mu_1} \partial_2 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \quad + \left[ p_{1\alpha\beta} - \frac{p_{31}p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta'_1, \zeta'_2) = -(j_1^+ + j_1^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \\ \left[ p_{\alpha 2} - \frac{p_{32}p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] A_{\alpha}'' - \frac{1}{\mu_1} \partial_1 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ \quad + \left[ p_{2\alpha\beta} - \frac{p_{32}p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} \right] e_{\alpha\beta}(\zeta'_1, \zeta'_2) = -(j_2^+ + j_2^-) \quad \text{dans } \omega \times (0, T), \\ \\ A_3'' = -\frac{p_{\alpha 3}}{p_{33}} A_{\alpha}'' - \frac{p_{3\alpha\beta}}{p_{33}} e_{\alpha\beta}(\zeta'_1, \zeta'_2) - \frac{\varphi_0^{+'} - \varphi_0^{-'}}{2}, \quad \text{dans } \omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

Maintenant, nous allons montrer que  $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0$  sur  $\gamma$ . Pour ce faire, on montre d'abord que

$$\forall g \in \mathcal{D}(0, T), \quad \int_0^T (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) g dt \in H^1(\omega),$$

pour pouvoir appliquer la formule de Green.

Posons  $\mathbf{v} = 0$ , et  $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_3 = 0$ , et prenons  $\tilde{A}_1 \in \mathcal{D}(\omega)$  dans (4.91), soit  $g \in \mathcal{D}(]0, T[)$ , on a

$$\begin{aligned} & -p_{i1} \int_{\omega} \tilde{A}_1 \int_0^T A_i' g' dt d\omega + \frac{1}{\mu_1} \langle \partial_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt, \tilde{A}_1 \rangle_{\mathcal{D}'(\omega), \mathcal{D}(\omega)} \\ & - p_{1\alpha\beta} \int_{\omega} \tilde{A}_1 \int_0^T e_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) g' dt dx \\ & = - \int_{\omega} \tilde{A}_1 \int_0^T (j_1^+ + j_1^-) g dt d\omega - p_{13} \int_{\omega} \tilde{A}_1 \int_0^T \frac{\varphi^{+'} - \varphi^{-'}}{2} g dt d\omega. \end{aligned}$$

Nous avons alors, dans  $\mathcal{D}(\omega)'$ , l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} \partial_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt & = p_{1\alpha\beta} \int_0^T e_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) g' dt + p_{i1} \int_0^T A_i' g' dt \\ & \quad - \int_0^T (j_1^+ + j_1^-) g dt - p_{13} \int_0^T \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} g' dt. \quad (4.101) \end{aligned}$$

Or, le second membre de cette dernière égalité est dans  $L^2(\omega)$ . Donc, pour tout  $g \in \mathcal{D}(]0, T[)$ ,  $\partial_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt \in L^2(\omega)$ . Il en est de même pour  $\partial_1 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt$ . Sachant, alors, que pour tout  $g$  fixé dans  $\mathcal{D}(]0, T[)$ ,  $\int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt$  est dans  $H^1(\omega)$ , on

multiplie (4.91) par  $g \in \mathcal{D}(]0, T[)$ , puis par un élément  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_1, 0, 0) \in H^1(\omega)^3$ , en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & -p_{i1} \int_{\omega} \int_0^T A_i' \tilde{A}_1 g' dt d\omega \\ & + \frac{1}{\mu_1} \int_{\omega} \left( \partial_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt \right) \tilde{A}_1 dx - \frac{1}{\mu_1} \int_{\gamma} \left( \nu_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt \right) \tilde{A}_1 d\gamma \\ & + \int_{\omega} \int_0^T p_{1\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \tilde{A}_1 g' dt d\omega \\ & = - \int_{\omega} \int_0^T (j_1^+ + j_1^-) g \tilde{A}_1 dt d\omega + p_{13} \int_0^T \int_{\omega} \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} g' \tilde{A}_1 dt d\omega. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (4.101), on obtient

$$\int_{\gamma} \left( \nu_2 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt \right) \tilde{A}_1 d\gamma = 0$$

pour tout  $\tilde{A}_1 \in H^1(\omega)$ . De même, on démontre que

$$\int_{\gamma} \left( \nu_1 \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt \right) \tilde{A}_2 d\gamma = 0$$

pour tout  $\tilde{A}_2 \in H^1(\omega)$ . On en déduit que

$$\forall g \in \mathcal{D}(]0, T[), \quad \int_0^T (\text{rot } \mathbf{A})_3 g dt = 0 \quad \text{sur } \gamma,$$

d'où  $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = 0$  sur  $\gamma$ . ■

#### 4.3.4 Résultats de convergence forte

Dans ce paragraphe, nous établissons les résultats de convergence forte pour la solution du problème (4.76). Soit  $s \in ]0, T[$ , dans la suite, les fonctions  $(\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), \tilde{\varphi}(h), \tilde{\kappa}(h))$  et  $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\kappa})$  sont définies par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(h)(t) &= \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{u}(h)(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} & \mathbf{v}(t) &= \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{u}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \\ \tilde{\mathbf{A}}(h)(t) &= \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{A}(h)(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} & \tilde{\mathbf{A}}(t) &= \begin{cases} - \int_t^s \mathbf{A}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}(h)(t) = \begin{cases} -\int_t^s \bar{\varphi}(h)(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} -\int_t^s \bar{\varphi}(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases}$$

$$\tilde{\kappa}(h)(t) = \begin{cases} -\int_t^s \kappa(h)(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \quad \tilde{\kappa}(t) = \begin{cases} -\int_t^s \kappa(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

De même, on définit  $\tilde{\varphi}_0(h)$  et  $\tilde{\varphi}_0$  par

$$\tilde{\varphi}_0(h)(t) = \begin{cases} -\int_t^s \varphi_0(h)(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_0(t) = \begin{cases} -\int_t^s \varphi_0(r) dr & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{si } t \geq s. \end{cases}$$

**Théorème 4.3.3** *Supposons que les conditions initiales vérifient les convergences fortes*

$$\begin{aligned} (h q_1(h), h q_2(h), q_3(h)) &\longrightarrow (0, 0, q_3) && \text{dans } L^2(\Omega)^3, \\ \mathbf{p}(h) &\longrightarrow \mathbf{p} && \text{dans } \mathbf{V}, \\ \kappa_{\alpha 3}(\mathbf{p}(h)) &\longrightarrow -\frac{1}{2\mu} (P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi(0) + P_{i\alpha 3} A_{1i}) && \text{dans } L^2(\Omega), \\ \kappa_{33}(\mathbf{p}(h)) &\longrightarrow -\frac{1}{\lambda + 2\mu} (P_{333} \partial_3 \varphi(0) + P_{i33} A_{1i} + \lambda e_{\beta\beta}(\mathbf{p})) && \text{dans } L^2(\Omega), \\ (\mathbf{A}_0(h), \mathbf{A}_1(h)) &\longrightarrow (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) && \text{dans } L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3. \end{aligned}$$

Alors, nous avons les résultats de convergence forte ponctuelle : pour tout  $s \in ]0, T[$ ,

$$\begin{aligned} (h u_1(h), h u_2(h), u_3(h))(s) &\longrightarrow (0, 0, u_3)(s) && \text{dans } L^2(\Omega)^3, \\ \mathbf{v}(h)(0) &\longrightarrow \mathbf{v}(0) && \text{dans } \mathbf{V}, \\ \tilde{\kappa}(h)(0) &\longrightarrow \tilde{\kappa}(0) && \text{dans } L^2(\Omega)^9, \\ A(h)(s) &\longrightarrow \mathbf{A}(s) && \text{dans } L^2(\Omega)^3, \\ \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h)(0) &\longrightarrow \left(0, 0, (\text{rot} \tilde{\mathbf{A}})_3\right)(0) && \text{dans } L^2(\Omega)^3, \\ (h \partial_1 \tilde{\varphi}(h), h \partial_2 \tilde{\varphi}(h), \partial_3 \tilde{\varphi}(h))(0) &\longrightarrow (0, 0, \partial_3 \tilde{\varphi})(0) && \text{dans } L^2(\Omega)^3. \end{aligned}$$

**Preuve.** Soit l'équation (4.62) mise à l'échelle, où l'on annule  $\psi$ , on a :

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s h^2 (u_\alpha(h)', v_\alpha(h)')_\Omega dt - \rho h^2 (q_\alpha(h), v_\alpha(h)(0))_\Omega - \rho \int_0^s (u_3(h)', v_3(h)')_\Omega dt \\
& -\rho (q_3(h), v_3(h)(0))_\Omega - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}(h)', \mathbf{A}(h))_\Omega dt - \left( \epsilon \mathbf{A}_1(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)(0) \right)_\Omega \\
& - c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h)), (\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)) \right) \Big|_{t=0} \\
& + \int_0^s \int_\Omega C \kappa(h) (\mathbf{v}(h))' : \kappa(h) (\mathbf{v}(h)) dx dt \\
& + \frac{1}{\mu_1} \int_0^s \int_\Omega \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h)' \cdot \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) dx dt \\
& + \int_0^s \left\{ \int_\Omega P_{3ij} \partial_3 \bar{\varphi}(h) \kappa_{ij}(h) (\mathbf{v}) dx + h \int_\Omega P_{\alpha ij} \partial_\alpha \bar{\varphi}(h) \kappa_{ij}(h) (\mathbf{v}) dx \right\} dt \\
& = \int_0^s l(h) (\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), 0) dt.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

De l'équation variationnelle de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi dx + h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \{ \partial_3 \bar{\varphi}(h) \partial_\alpha \psi + \partial_\alpha \bar{\varphi}(h) \partial_3 \psi \} dx \\
& + h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha \beta} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\beta \psi dx - \int_\Omega P_{3ij} \partial_3 \psi \kappa_{ij}(h) dx - h \int_\Omega P_{\alpha ij} \partial_\alpha \psi \kappa_{ij}(h) dx \\
& = - \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \bar{\varphi}_0(h) \partial_3 \psi dx - h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \{ \partial_3 \bar{\varphi}_0(h) \partial_\alpha \psi + \partial_\alpha \bar{\varphi}_0(h) \partial_3 \psi \} dx \\
& - h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha \beta} \partial_\alpha \bar{\varphi}_0 \partial_\beta \psi dx,
\end{aligned}$$

on tire l'équation

$$\begin{aligned}
& \int_0^s \left\{ \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \psi dx + h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \{ \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_\alpha \psi + \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \psi \} dx \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha \beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi} \partial_\beta \psi dx - \int_\Omega P_{3ij} \partial_3 \psi \tilde{\kappa}_{ij}(h) dx - h \int_\Omega P_{\alpha ij} \partial_\alpha \psi \tilde{\kappa}_{ij}(h) dx \right\} dt \\
& = - \int_0^s \left\{ \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0(h) \partial_3 \psi dx + h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \{ \partial_3 \tilde{\varphi}_0(h) \partial_\alpha \psi + \partial_\alpha \tilde{\varphi}_0(h) \partial_3 \psi \} dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha \beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}_0 \partial_\beta \psi dx \right\} dt.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

En sommant les équations (4.102) et (4.103) où on a posé  $\psi = \bar{\varphi}(h)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s h^2 (u_\alpha(h)', v_\alpha(h)')_\Omega dt - \rho h^2 (q_\alpha(h), v_\alpha(h)(0))_\Omega - \rho \int_0^s (u_3(h)', v_3(h)')_\Omega dt \\
& -\rho (q_3(h), v_3(h)(0))_\Omega - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}(h)', \mathbf{A}(h))_\Omega dt - \left( \epsilon \mathbf{A}_1(h), \tilde{\mathbf{A}}_i(h)(0) \right)_\Omega \\
& - c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h)), (\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)) \right) \Big|_{t=0} \\
& + \int_0^s \left\{ \int_\Omega C \kappa(h)(\mathbf{v}(h))' : \kappa(h)(\mathbf{v}(h)) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h)' \cdot \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) dx \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \bar{\varphi}(h) dx + h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} (\partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_\alpha \bar{\varphi}(h) + \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \bar{\varphi}(h)) dx \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) \partial_\beta \bar{\varphi}(h) dx \right\} dt = \int_0^s l(h)(\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), \bar{\varphi}(h)) dt.
\end{aligned}$$

Rappelons que dans l'intervalle  $]0, s[$ , on a

$$\mathbf{v}(h)'(t) = \mathbf{u}(h)(t), \quad \tilde{\mathbf{A}}(h)'(t) = \mathbf{A}(h)(t), \quad \tilde{\varphi}(h)'(t) = \bar{\varphi}(h)(t).$$

L'équation précédente est alors équivalente à

$$\begin{aligned}
& -\frac{\rho}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\{ h^2 (u_\alpha(h), u_\alpha(h))_\Omega dt + (u_3(h), u_3(h))_\Omega \right\} dt \\
& -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\{ (\epsilon \mathbf{A}(h), \mathbf{A}(h))_\Omega \right\} dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\{ \int_\Omega C \kappa(h)(\mathbf{v}(h)) : \kappa(h)(\mathbf{v}(h)) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) \cdot \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) dx \right. \\
& \quad + \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \bar{\varphi}(h) dx + 2h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_\alpha \bar{\varphi}(h) dx \\
& \quad \left. + h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) \partial_\beta \bar{\varphi}(h) dx \right\} dt \\
& = \int_0^s l(h)(\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), \bar{\varphi}(h)) dt + \rho h^2 (q_\alpha, v_\alpha(h)(0))_\Omega \\
& \quad + \rho (q_3, v_3(h)(0))_\Omega + \left( \epsilon \mathbf{A}_1(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)(0) \right)_\Omega \\
& \quad + c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h)), (\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)) \right) \Big|_{t=0}.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Soit  $N_h(s)$  la norme du vecteur  $\left(\mathbf{u}(h)(s), \mathbf{A}(h)(s), \mathbf{v}(h)(0), \tilde{\mathbf{A}}(h)(0), \tilde{\varphi}(h)(0)\right)$  définie par

$$\begin{aligned} N_h(s) = & \frac{1}{2} \left[ \rho h^2 (u_\alpha(h), u_\alpha(h))_\Omega + \rho (u_3(h), u_3(h))_\Omega + (\epsilon \mathbf{A}(h), \mathbf{A}(h))_\Omega \right]_{t=s} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \int_\Omega C \kappa(h)(\mathbf{v}(h)) : \kappa(h)(\mathbf{v}(h)) dx + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega \operatorname{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) \cdot \operatorname{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}(h) dx \right. \\ & + \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \tilde{\varphi}(h) dx + 2h \int_\Omega \epsilon_{\alpha 3} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) dx \\ & \left. + h^2 \int_\Omega \epsilon_{\alpha \beta} \partial_\alpha \tilde{\varphi}(h) \partial_\beta \tilde{\varphi}(h) dx \right]_{t=0}. \end{aligned}$$

L'équation (4.104) est équivalente à :

$$\begin{aligned} N_h(s) = & - \int_0^s l(h)(\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), \tilde{\varphi}(h)) dt - \rho h^2 (q_\alpha(h), v_\alpha(h)(0))_\Omega \\ & - \rho (q_3, v_3(h)(0))_\Omega - \left( \epsilon \mathbf{A}_1(h), \tilde{\mathbf{A}}(h)(0) \right)_\Omega \\ & - c_1(h) \left( (\mathbf{u}(h), \mathbf{A}(h), 0), (\mathbf{v}(h), \tilde{\mathbf{A}}(h), 0) \right) \Big|_{t=0} \\ & \frac{1}{2} \left[ \rho h^2 (p_\alpha(h), p_\alpha(h))_\Omega + \rho (p_3(h), p_3(h))_\Omega + (\epsilon \mathbf{A}_0(h), \mathbf{A}_0(h))_\Omega \right], \end{aligned}$$

et par passage à la limite, d'après les résultats de convergence du lemme 4.3.1, et la définition (4.75), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} N_h(s) = & - \int_0^s \left\{ \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, - \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \tilde{\varphi} dx \right. \\ & - \int_\Omega P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{ij} dx - \int_\Omega \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi'_0 \tilde{A}_i dx \\ & \left. - \int_\omega (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega \right\} dt \\ & - \rho (q_3, v_3(0))_\Omega - \epsilon_{ij} \left( A_{1j}, \tilde{A}_i(0) \right)_\Omega \\ & - \int_\Omega P_{mij} \left( A_{0m} \tilde{\kappa}_{ij}(0) - \tilde{A}_m(0) \kappa_{ij}(\mathbf{p}) \right) dx \\ & \frac{1}{2} \left\{ \rho (p_3, p_3)_\Omega + \epsilon_{ij} (A_{0j}, A_{0i})_\Omega \right\}. \end{aligned} \tag{4.105}$$



Soit  $N(s)$  la norme du vecteur  $(\mathbf{u}(s), \mathbf{A}(s), \mathbf{v}(0), \tilde{\mathbf{A}}(0), \tilde{\varphi}(0))$  définie par

$$N(s) = \frac{1}{2} [\rho(u_3, u_3)_\Omega + (\epsilon \mathbf{A}, \mathbf{A})_\Omega]_{t=s} \\ + \frac{1}{2} \left[ \int_\Omega C \tilde{\kappa} : \tilde{\kappa} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \tilde{\varphi}(h) dx \right]_{t=0}.$$

Montrons que la norme  $N_h(s)$  tend vers  $N(s)$  lorsque  $h$  tend vers 0. La convergence faible ayant été déjà obtenue, la convergence des normes implique la convergence forte. Soit  $\tilde{\mathbf{A}}^n$  une suite de  $H^1(0, T; H^1(\omega)^3)$  qui tend vers  $\tilde{\mathbf{A}}$  dans  $H^1(0, T; \mathbf{W}_{dyn}^l)$ , et qui est nul sur l'intervalle de temps  $]s, T[$ . En annulant  $\psi$  dans l'équation (4.76), on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^s ((h^2 u_\alpha(h), u_3(h))', \mathbf{v}')_\Omega dt - ((h^2 u_\alpha(h), u_3(h))', \mathbf{v})_\Omega(0) \\ & - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}(h)', \tilde{\mathbf{A}}^{n'})_\Omega dt - (\epsilon \mathbf{A}(h)', \tilde{\mathbf{A}}^n)_\Omega(0) \\ & \int_0^s \int_\Omega (C \kappa(h))_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{v}) dx dt + \frac{1}{\mu_1} \int_0^s \int_\Omega \text{rot}(h) \mathbf{A}(h) \cdot \text{rot}(h) \tilde{\mathbf{A}}^n dx dt \\ & + \int_0^s \left\{ \int_\Omega P_{3ij} \theta_3(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) dx + \int_\Omega P_{\alpha ij} \theta_\alpha(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) dx \right\} dt \\ & - \int_0^s \int_\Omega P_{mij} (A_m(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}') - \tilde{A}_m^{n'} \kappa_{ij}(h)) dx dt - \int_0^s \int_\Omega \epsilon_{ij} \theta_j(h) \tilde{A}_i^{n'} dx dt \\ & - \int_\Omega P_{mij} (A_m(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) - \tilde{A}_m^n \kappa_{ij}(h)) (0) dx - \int_\Omega (\epsilon_{ij} \theta_j(h) \tilde{A}_i^n) (0) dx \\ & = \int_0^s \left\{ \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\ & - \int_0^s \left\{ \int_\Omega P_{mij} \theta_m^0(h) \kappa_{ij}(h)(\mathbf{v}) dx - \int_\Omega \epsilon_{ij} \theta_j^0(h)' \tilde{A}_i^n dx \right\} dt \\ & + \int_0^s \langle \bar{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{A}}^n \wedge \nu \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3} dt. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, puis  $n$  vers l'infini dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s (u_3', v_3')_{\Omega} dt - (u_3', v_3)_{\Omega}(0) \\
& - \int_0^s \left( \epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}}' \right)_{\Omega} dt - \left( \epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}} \right)_{\Omega}(0) + \int_0^s \int_{\Omega} (C\kappa)_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx dt \\
& + \frac{1}{\mu_1} \int_0^s \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{A})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx dt \\
& + \int_0^s \int_{\Omega} P_{m33} A_m \kappa_{33} dx dt + 2 \int_0^s \int_{\Omega} P_{m\alpha 3} A_m \kappa_{\alpha 3} dx dt - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \bar{\varphi} A_i dx dt \\
& - \int_{\Omega} P_{m\alpha\beta} (A_m \tilde{\kappa}_{\alpha\beta})(0) dx + \int_{\Omega} P_{mij} (\tilde{A}_m \kappa_{ij})(0) dx - \int_{\Omega} (\epsilon_{i3} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{A}_i)(0) dx \\
& = \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx - \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\omega} (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Soit  $\psi^n$  une suite de  $H^1(0, T; \Psi)$  qui tend vers  $\bar{\varphi}$  dans  $H^1(0, T; \Psi)$ . En utilisant l'équation (4.76) où on annule  $\mathbf{v}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$ , on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \psi^n dx + \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} \{ \partial_3 \tilde{\varphi}(h) (h \partial_{\alpha} \psi^n) + \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}(h) \partial_3 \psi^n \} dx \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}(h) (h \partial_{\beta} \psi^n) dx - \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \psi^n \tilde{\kappa}_{ij}(h) dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\Omega} P_{\alpha ij} (h \partial_{\alpha} \psi^n) \tilde{\kappa}_{ij}(h) dx dt \\
& = - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \psi^n dx + \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha 3} (\partial_3 \tilde{\varphi}_0 (h \partial_{\alpha} \psi^n) + \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \psi^n) dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}_0 (h \partial_{\beta} \psi^n) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.107}$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, puis  $n$  vers l'infini, on obtient

$$\int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \bar{\varphi} dx dt - \int_0^s \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{\kappa}_{ij} dx dt = - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt. \tag{4.108}$$

En sommant les équations (4.109)-(4.108), on obtient

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s (u_3', v_3')_{\Omega} dt - \rho (u_3', v_3)_{\Omega}(0) - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}}')_{\Omega} dt - (\epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}})_{\Omega}(0) \\
& + \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} (C\kappa)_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{A})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \bar{\varphi} dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{333} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{\kappa}_{33} dx + 2 \int_{\Omega} P_{3\alpha 3} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{\kappa}_{\alpha 3} dx \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{m33} A_m \kappa_{33} dx + 2 \int_{\Omega} P_{m\alpha 3} A_m \kappa_{\alpha 3} dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \bar{\varphi} A_i dx dt - \int_{\Omega} P_{m\alpha\beta} (A_m \tilde{\kappa}_{\alpha\beta})(0) dx \\
& + \int_{\Omega} P_{mij} (\tilde{A}_m \kappa_{ij})(0) dx - \int_{\Omega} (\epsilon_{i3} \partial_3 \bar{\varphi} \tilde{A}_i)(0) dx \\
& = \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx - \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\omega} (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Utilisant le fait que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{A}, \quad \tilde{\varphi}' = \bar{\varphi}$$

sur l'intervalle ]0, s[, on a

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s (u_3', u_3)_{\Omega} dt - \rho (u_3', v_3)_{\Omega}(0) - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}', \mathbf{A})_{\Omega} dt - (\epsilon \mathbf{A}', \tilde{\mathbf{A}})_{\Omega}(0) \\
& + \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} (C\kappa)_{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}}')_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \bar{\varphi} dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{333} \partial_3 \varphi \tilde{\kappa}_{33} dx + 2 \int_{\Omega} P_{3\alpha 3} \partial_3 \varphi \tilde{\kappa}_{\alpha 3} dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{m33} A'_m \tilde{\kappa}_{33} dx + 2 \int_{\Omega} P_{m\alpha 3} A'_m \tilde{\kappa}_{\alpha 3} dx \right\} dt \\
& - \left\{ \int_{\Omega} P_{m33} A_m \tilde{\kappa}_{33} dx + 2 \int_{\Omega} P_{m\alpha 3} A_m \tilde{\kappa}_{\alpha 3} dx \right\} (0) \\
& - \int_{\Omega} P_{m\alpha\beta} (A_m \tilde{\kappa}_{\alpha\beta})(0) dx + \int_{\Omega} P_{mij} (\tilde{A}_m \kappa_{ij})(0) dx \\
& = \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{ij} dx - \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\omega} (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Sachant que

$$(C\kappa)_{i3} \tilde{\kappa}_{i3} = -(P_{3i3} \partial_3 \varphi + P_{ji3} A'_j) \tilde{\kappa}_{i3},$$

on a

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_0^s (u_3', u_3)_{\Omega} dt - \int_0^s (\epsilon \mathbf{A}', \mathbf{A})_{\Omega} dt \\
& \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} C \tilde{\kappa}' : \tilde{\kappa} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \tilde{\varphi}' dx \right\} dt \\
& = \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{ij} dx - \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\omega} (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt \\
& + \rho (q_3, v_3(0))_{\Omega} + (\epsilon \mathbf{A}_1, \tilde{\mathbf{A}}(0))_{\Omega} + \int_{\Omega} P_{mij} (A_m \tilde{\kappa}_{ij} - \tilde{A}_m \kappa_{ij})(0) dx.
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Cette dernière égalité est équivalente à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left\{ -\rho (u_3, u_3)_{\Omega} dt - (\epsilon \mathbf{A}, \mathbf{A})_{\Omega} + \int_{\Omega} C \tilde{\kappa} : \tilde{\kappa} dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Omega} (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \tilde{\varphi} dx \right\} dt \\
& = \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\
& - \int_0^s \left\{ \int_{\Omega} P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{ij} dx - \int_{\Omega} \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \\
& - \int_0^s \int_{\omega} (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt - \int_0^s \int_{\Omega} \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt \\
& + \rho (q_3, v_3(0))_{\Omega} + (\epsilon \mathbf{A}_1, \tilde{\mathbf{A}}(0))_{\Omega} + \int_{\Omega} P_{mij} (A_{1m} \tilde{\kappa}_{ij}(0) - \tilde{A}_m(0) \kappa_{ij}(\mathbf{p})) dx.
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Enfin, il vient l'égalité

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \{ \rho (u_3, u_3)_\Omega + (\epsilon \mathbf{A}, \mathbf{A})_\Omega \} (s) \\
& + \frac{1}{2} \left[ \int_\Omega C \tilde{\kappa} : \tilde{\kappa} dx + \frac{1}{\mu_1} \int_\Omega (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 (\text{rot } \tilde{\mathbf{A}})_3 dx + \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi} \partial_3 \tilde{\varphi} dx \right]_{t=0} \\
& = - \int_0^s \left\{ \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d, \right\} dt \\
& + \int_0^s \left\{ \int_\Omega P_{3ij} \partial_3 \varphi_0 \tilde{\kappa}_{ij} dx - \int_\Omega \epsilon_{i3} \partial_3 \varphi_0' \tilde{A}_i dx \right\} dt \tag{4.112} \\
& + \int_0^s \int_\omega (\mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-) \cdot \tilde{\mathbf{A}} d\omega dt + \int_0^s \int_\Omega \epsilon_{33} \partial_3 \tilde{\varphi}_0 \partial_3 \bar{\varphi} dx dt \\
& - \rho (q_3, v_3(0))_\Omega - (\epsilon \mathbf{A}_1, \tilde{\mathbf{A}}(0))_\Omega - \int_\Omega P_{mij} (A_{0m} \tilde{\kappa}_{ij}(0) - \tilde{A}_m(0) \kappa_{ij}(\mathbf{p})) dx \\
& + \frac{1}{2} \rho (p_3, p_3)_\Omega + \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_0)_\Omega,
\end{aligned}$$

ce qui, vu l'égalité (4.105), fournit la convergence des normes :  $N_h(s) \rightarrow N(s)$  pour tout  $s \in ]0, T[$ . ■

# Bibliographie

- [1] S. M. Alessandrini, D. N. Arnold, R. S. Falk, and A. Madureira, *Derivation and justification of plate models by variational methods*, in Proc. and Lect. Notes Series, AMS Publications, Providence, R. I., to appear.
- [2] I. Babuška, J. M. d'Harcourt and C. Schwab, Optimal shear correction factors in hierarchical plate modelling, *Math. Model. Sci. Comput. 1-2*, 1-30, 1993.
- [3] H. T. Banks, R. C. Smith, Y. Wang, *Smart material structures, Modeling, Estimation and Control*, RAM, Wiley, Chichester, Masson, Paris, 1996.
- [4] M. Bernadou, C. Haenel, Numerical analysis of piezoelectric shells, to appear in *Proceedings of the Summer Seminar on Plates and Shells*, Québec, 1996.
- [5] E. Boridy, *Electromagnétisme, théorie et applications*, Presses de l'Université du Québec, 1992.
- [6] D. Caillerie, E. Sanchez-Palencia, A new kind of singular stiff problems and application to thin elastic shells, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5, 1995, 47-66.
- [7] W. G. Cady, *Piezoelectricity, An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, Mc Graw-Hill, New York, 1946.
- [8] P. G. Ciarlet, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures*, RMA, Masson, Paris, 1990.
- [9] P. G. Ciarlet, P. Destuynder, A justification of the two-dimensional plate model, *J. Mécanique*, 18, 1979, p. 315-344.
- [10] R. Dautray, J. L. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et Techniques*, Masson, Paris, Vol 1, 1984, Vol 5, 1988.

- 
- [11] M. C. Delfour, J. P. Zolésio, *Intrinsic differential geometry and theory of thin shells*, Lectures Notes, Scuola Normale Superiore, Pisa (Italy), August 1996.
- [12] M. C. Delfour, J. P. Zolésio, *Convergence of the linear  $P(1,1)$  and  $P(2,1)$  thin shells to the asymptotic shells*, in “Proc. Plates and Shells: from theory to practice”, M. Fortin, ed., CRM, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1997.
- [13] P. Destuynder, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [14] P. Destuynder, I. Legrain, L. Castel, N. Richard, Theoretical, numerical and experimental discussion on the use of piezoelectric devices for control-structure interaction, *Eur. J. Mech. Solids*, 11, 1992, 181-213.
- [15] P. Destuynder, A. Saidi, Smart materials and flexible structures, paraître dans *Eur. J. Mech. Solids*.
- [16] E. Dieulesaint, *Ondes élastiques dans les solides*, Masson, Paris, 1974.
- [17] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1973.
- [18] K. O. Friedrichs, R. F. Dressler, A boundary layer theory for elastic plates, *Comm. Pure Appl. Math.* **14**, 1-33, 1961.
- [19] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [20] A. L. Goldenveizer, Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity, *Prikl. Mat. Mech.* **26**, 668-686 (English translation: *J. Appl. Math. Mech.*, 1000-1025, 1964), 1962
- [21] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, London, 1985.
- [22] W. Hackbusch, *Elliptic Differential Equations, Theory and Numerical Treatment*, Springer Series in Computational Mathematics, 18, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [23] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, 1990.
- [24] J.L. Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lectures Notes in Mathematics, 323, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

- [25] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [26] G. A. Maugin, *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [27] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *J. Appl Mech.* **18**, 31-38, 1951.
- [28] J. C. Paumier, A. Raoult, Asymptotic consistency of the polynomial approximation in the linearized plate theory, Application to the Reissner-Mindlin model, ESAIM Proceedings, Elasticity, Viscoelasticity and Optimal Control, J. Blum, A. Raoult, J. Baranger ed., **2**, 203-213, 1998.
- [29] R. Petit, *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*, Masson, Paris, 1993.
- [30] L. Pinchard, *Electromagnétisme classique et théorie des distributions*, Ellipses, 1990.
- [31] L. Pontriaguine, *Equations Différentielles Ordinaires*, Editions Mir, Moscou, 1969.
- [32] A. Raoult, *Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multiples*, Thèse de troisième cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.
- [33] A. Raoult, Asymptotic modeling of the elastodynamics of a multi-structure, *Asymptotic Analysis*, **6**, 1992, 73-108.
- [34] E. Reissner, On the theory of bending of elastic plates, *J. Math. and Phys.* **23**, 184-191, 1944.
- [35] N. N. Rogacheva, **The Theory of Piezoelectric Shells and Plates**, Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 1994.
- [36] E. Sanchez-Palencia, Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems, *J. Math. Pures Appl.*, **71**, 1992, 379-406.
- [37] C. Schwab, A posteriori modelling error estimation for hierarchic plate models, *Numer. Math.*, **2**, 221-259, 1996.
- [38] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
- [39] G. W. Taylor, J. J. Gagnepain, T. R. Meeker, T. Nakamura, L. A. Shvalov, *Piezoelectricity*, Vol. 4 Gordon and Breach, New York, 1985.





## Troisième partie

### Calcul de coefficients de singularité pour un problème elliptique



# Chapitre 5

Une méthode de calcul des  
coefficients des solutions singulières.

Approximation des solutions



## 5.1 Introduction

### 5.1.1 Objet du travail et résultats obtenus

Dans l'approximation des solutions d'un problème elliptique par éléments finis, l'erreur d'approximation dépend des éléments finis et du maillage utilisés aussi bien que de la régularité des solutions. Or, il est connu que si le domaine dans lequel est posé le problème n'est pas assez régulier (par exemple polygone non convexe), ou si les conditions au bord présentent une discontinuité (par exemple conditions mêlées en un point régulier), la solution peut présenter des singularités.

Considérons pour illustrer cela l'équation de Laplace dans un polygone  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  :

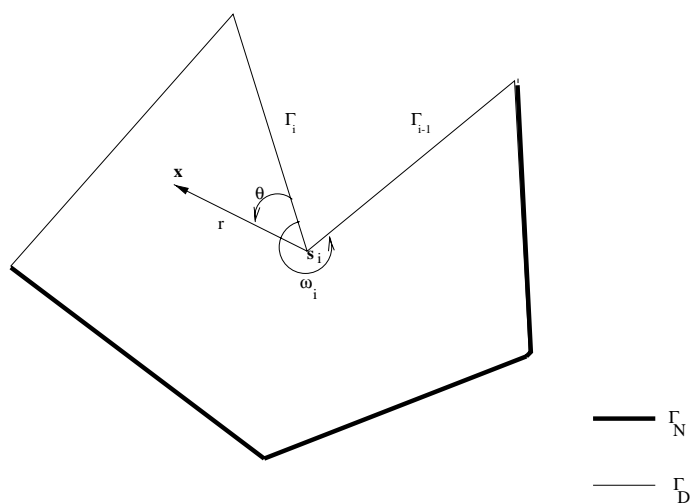


FIG. 5.1:  $\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } , D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } , N. \end{cases} \quad (5.1)$$

Si  $f$  est un élément de  $L^2(\Omega)$ , et si  $\Omega$  est convexe, et si les angles au niveau des points de changement de condition au bord sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , il est connu que (5.1) admet une solution unique dans  $H^2(\Omega)$ . Par contre, si  $\Omega$  est un polygone non convexe, même si  $f$  est dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $u$  n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ , en général. Elle s'écrit sous la forme

$$u = u_R + \gamma r^\alpha \cos(\alpha \theta + \theta_0), \quad 0 < \alpha < 1$$

où  $u_R$ , la partie régulière est dans  $H^2(\Omega)$ , et on remarque que  $r^\alpha \cos(\alpha \theta + \theta_0)$  n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ .

Considérons maintenant un schéma d'approximation de la solution de (5.1) par la méthode des éléments finis (MEF) classique. Soit  $V$  défini par

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}$$

muni de la norme usuelle de  $H^1(\Omega)$ . Soit  $V_h$  l'espace de dimension finie, des éléments finis  $P_1$  classique. Soient  $u \in V$ ,  $u_h \in V_h$  solutions respectives de

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

$$\forall v \in V_h \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Il est alors connu que (Ciarlet [4]) si  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$ ,

$$\|u - u_h\|_V \leq ch,$$

où  $h$  est l'ordre de grandeur des diamètres des éléments de la triangulation du domaine  $\Omega$ .

Cependant, pour un domaine polygonal non convexe, selon [13], la MEF classique fournit seulement l'approximation

$$\|u - u_h\|_V \leq ch^{\frac{\pi}{\omega}},$$

si les arêtes qui forment l'angle  $\omega$  sont toutes les deux dans  $,_D$  ou  $,_N$ . Rappelons que  $\pi < \omega \leq 2\pi$  et que, par conséquent, la présence de singularités provoque une diminution de l'ordre de convergence. Pour remédier à cette perte de convergence, plusieurs méthodes de calcul ont été proposées parmi lesquelles :

- l'adjonction des singularités à l'espace  $V_h$ , cf. [3],
- l'utilisation des espaces de Sobolev avec poids et raffinement de maillage au niveau des angles non convexes, cf. [12],
- la séparation de l'ouvert en sous-domaines, cf. [2],
- l'utilisation des solutions duales, cf. [9].

Les méthodes citées ci-dessus fournissent un ordre de convergence équivalent à celui obtenu dans le cas où  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$ .

Ici, nous proposons une méthode utilisant seulement les éléments finis classiques, et ne tenant pas compte des solutions duales dans le cas d'une fissure, pour calculer des coefficients de singularité  $\gamma$  : nous montrons que  $\gamma$  s'écrit

$$\gamma = \int_{\Omega} [F_0^S u + F_1^S f], \quad (5.2)$$

où les  $F_i^S$  dépendent de la solution singulière " $r^\alpha \cos(\alpha\theta + \theta_0)$ ". Par ailleurs, nous obtenons un ordre d'approximation de la solution  $u$  équivalent à celui du cas où  $\Omega$  est un polygone convexe.

Si  $,_N = \emptyset$ , cette méthode fournit, pour le coefficient de singularité  $\gamma$ , une approximation d'ordre  $h^{2-\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  pouvant être arbitrairement petit. Notons que, jusqu'à maintenant, la meilleure approximation avec les éléments finis  $P_1$ , est obtenue par [3]. Elle est de d'ordre  $h^{1+\frac{\pi}{\omega}}$ .

Une expression du coefficient de singularité  $\gamma$  similaire à (5.2) est obtenue par Grisvard [21], mais l'ordre d'approximation de  $\gamma$  y est  $O(h)$ , tandis qu'ici, nous obtenons une approximation d'ordre  $O(h^{2-\varepsilon})$ , avec  $\varepsilon > 0$  quelconque, en utilisant simplement les éléments finis classiques.

De plus nos résultats s'étendent aux domaines fissurés, c'est-à-dire  $\omega = 2\pi$ .

### 5.1.2 Plan du travail

Nous nous plaçons dans le cas où la solution  $u$  de (5.1) comporte une seule singularité  $S$ . Nous calculons tout d'abord le coefficient de singularité  $\gamma$ , en fonction de  $u$ , dans le cas



d'une fissure, puis dans le cas d'une singularité d'angle quelconque  $\omega < 2\pi$ . Les méthodes utilisées dans ces deux cas diffèrent dans le choix du multiplicateur.

Ensuite nous calculons une approximation  $\gamma_h$  de  $\gamma$  en fonction de la solution approchée  $u_h$  de  $u$  obtenue par la méthode des éléments finis classique  $P_1$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\gamma - \gamma_h| \leq C(\varepsilon) h^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon},$$

et, si  $D = \cdot, \cdot$ , on a la majoration

$$|\gamma - \gamma_h| \leq C(\varepsilon) h^{2-\varepsilon}.$$

Soit  $V_h$  l'espace des éléments finis classiques  $P_1$ . Nous calculons une nouvelle approximation  $\tilde{u}_h$  de  $u$  en fonction de la solution  $\tilde{u}_R^h$  de l'équation

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_R^h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx + \gamma_h \int_{\Omega} \Delta S v_h \, dx,$$

en posant

$$\tilde{u}_h = \tilde{u}_R^h + \gamma_h r^\alpha \cos(\alpha \theta + \theta_0),$$

où  $\alpha$  est inversement proportionnel à l'angle  $\omega$ . Enfin, nous établissons la majoration

$$\|\nabla(u - \tilde{u}_h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C h.$$

## 5.2 Cas de l'équation de Laplace

### 5.2.1 Notations et position du problème

Soit  $\Omega$  un domaine borné non vide polygonal (cf. fig. 5.1), on note  $(\mathbf{s}_i)_{0 \leq i \leq n}$  les sommets des arêtes de  $\Omega$  auxquels on a ajouté les points de changement de conditions au bord ; soit pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  (resp.  $i = n$ ),  $\cdot, \cdot_i$  l'arête comprise entre  $\mathbf{s}_i$  et  $\mathbf{s}_{i+1}$  (resp.  $\cdot, \cdot_n$  l'arête comprise entre  $\mathbf{s}_n$  et  $\mathbf{s}_0$ ) ; soit pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\tau_i$  le vecteur unitaire tangent à  $\Omega$  porté par  $\cdot, \cdot_i$  dirigé vers  $\mathbf{s}_{i+1}$  (resp.  $\tau_0$  le vecteur unitaire tangent à  $\Omega$  porté par  $\cdot, \cdot_n$  dirigé vers  $\mathbf{s}_0$ ) ; soit  $\nu_i$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Omega$  sur  $\cdot, \cdot_i$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $(r_i, \theta_i)$  les coordonnées polaires locales en  $\mathbf{s}_i$  où  $\theta_i$  est l'angle mesuré par rapport à  $\cdot, \cdot_i$ . Soit enfin  $\omega_i$  l'angle que fait  $\cdot, \cdot_{i-1}$  avec  $\cdot, \cdot_i$  mesuré dans le sens trigonométrique à partir de  $\cdot, \cdot_i$ .

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\eta_i \in H^3(\mathbb{R}^2)$  est égal à 1 sur un voisinage de  $\mathbf{s}_i$  et de plus  $\text{Supp}(\eta_i) \cap ,_j = \emptyset$  pour tout  $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ , si  $i \neq 0$  et  $\text{Supp}(\eta_0) \cap ,_j = \emptyset$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Enfin on note  $,_N$  la partie du bord de  $\Omega$  portant la condition de Neumann et  $,_D$  celle portant la condition de Dirichlet. On suppose que  $,_D \neq \emptyset$ . Soit

$$V = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (5.3)$$

Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on considère le système d'équations

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } ,_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } ,_N. \end{cases} \quad (5.4)$$

Cette équation admet une et une seule solution variationnelle  $u \in V$ , celle du problème suivant :

Trouver  $u \in V$  telle que :

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (5.5)$$

Nous savons que si  $\Omega$  est un polygone convexe, et si les angles se trouvant aux intersections entre  $,_D$  et  $,_N$  sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , alors la solution  $u$  de cette dernière équation est dans  $H^2(\Omega)$ . S'il existe un angle  $\omega_i > \pi$ , alors nous savons, d'après [21], que

$$u = u_R + \gamma_i S_i(r_i, \theta_i), \quad (5.6)$$

où  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\gamma_i$  est le coefficient de la solution singulière  $S_i$  définie par

$$S_i(r_i, \theta_i) = \eta_i r_i^{\frac{\pi}{\omega_i}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega_i} \theta_i + \phi_{i+1}\right), \quad (5.7)$$

avec

$$S_i(r_i, \theta_i) = \begin{cases} \eta_i r_i^{\frac{\pi}{\omega_i}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega_i} \theta_i\right) & \text{si } ,_{i-1}, ,_i \subset ,_N, \\ -\eta_i r_i^{\frac{\pi}{\omega_i}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega_i} \theta_i\right) & \text{si } ,_{i-1}, ,_i \subset ,_D, \\ -\eta_i r_i^{\frac{\pi}{2\omega_i}} \cos\left(\frac{\pi}{2\omega_i} \theta_i\right) & \text{si } ,_{i-1} \subset ,_D \text{ et } ,_i \subset ,_N, \\ -\eta_i r_i^{\frac{\pi}{2\omega_i}} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega_i} \theta_i\right) & \text{si } ,_{i-1} \subset ,_N \text{ et } ,_i \subset ,_D. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on calcule  $\gamma_i$  en fonction de  $f$  et  $u$ , sans faire intervenir les solutions singulières duales dans le cas d'une fissure. On utilise le multiplicateur  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S_i$  si

$\omega_i = 2\pi$ , ou  $\frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega_i}}} \cdot \nabla S_i$ , si  $\pi < \omega_i < 2\pi$ , en exploitant les calculs effectués par Niane et Seck [10], [11], dans les problèmes de contrôlabilité exacte dans des domaines présentant des solutions singulières. Le calcul consiste à appliquer la formule de Green sur  $\Omega$  amputé d'une boule de centre le sommet singulier et de rayon  $\varepsilon$ , et d'étudier la convergence lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ensuite, on donne une méthode d'approximation numérique du coefficient de singularité  $\gamma_i$  et de la solution  $u$ . Dans toute la suite, on supposera que la singularité se situe au sommet  $\mathbf{s}_i$  défini par les arêtes  $,_{i-1}$  et  $,_i$ , et on se passera de l'indice  $i$ .

## 5.2.2 Calcul du coefficient $\gamma$

### 5.2.2.1 Cas d'une fissure ou d'une condition mêlée "régulière"

**5.2.2.1.1 Conditions de Dirichlet ou de Neumann sur une fissure.** Soit  $\mathbf{x}_0$  un point de  $\mathbb{R}^2$  situé sur la droite portant la fissure, tel que  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{s}$ . On choisit le repère  $(\mathbf{s}, -\tau, \nu)$ . On a le théorème

**Théorème 5.2.1** *Si  $\mathbf{s}$  est le sommet de la fissure portant une condition de Dirichlet ou une condition de Neumann, alors le coefficient de singularité  $\gamma$  de la solution  $u$  de (5.4) associé à la fissure s'écrit*

$$\gamma = \frac{2}{\pi x_{01}} \int_{\Omega} [f \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + F(\eta) u] dx. \quad (5.8)$$

où

$$F(\eta) = 2 \operatorname{div} [\nabla \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S] + \eta \operatorname{div} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Delta S] - \Delta \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S. \quad (5.9)$$

**Preuve.** Soit  $\mathbf{s}$  le sommet d'une fissure sur laquelle porte une condition de Dirichlet, c'est-à-dire  $,_{i-1} \cup ,_i \subset ,_D$ . On a

$$\begin{cases} -\Delta(\eta u) = \eta f - 2\nabla \eta_i \cdot \nabla u - (\Delta \eta) u & \text{dans } \Omega \\ \eta u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

avec

$$\eta u = \eta u_R + \gamma \eta S(r, \theta), \quad (5.11)$$

où  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\gamma$  est le coefficient de la solution singulière

$$S(r, \theta) = -\eta \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (5.12)$$

On pose

$$\begin{aligned} v &= \eta u, & v_R &= \eta u_R \text{ et} \\ g &= \eta f - 2\nabla\eta \cdot \nabla u - (\Delta\eta)u. \end{aligned} \quad (5.13)$$

On a donc

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.14)$$

où

$$v = v_R + c\eta^2 \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (5.15)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , tel que la boule  $B(0, \varepsilon)$  vérifie  $\text{dist}(B(0, \varepsilon), \setminus (,_{i-1} \cup ,_i)) > 0$ , on pose

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \Omega \setminus B'(0, \varepsilon), \\ \gamma_\varepsilon &= \partial B(0, \varepsilon), \\ ,_\varepsilon &= \partial\Omega_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.16)$$

On définit

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S(-\Delta v) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v(-\Delta S)\} dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \{g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v(-\Delta S)\} dx. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Le second membre de cette identité vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = - \int_{\Omega} \{g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla S + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla v(-\Delta S)\} dx. \quad (5.18)$$

D'autre part, par intégration par parties, le premier membre donne

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial S}{\partial \nu} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \nabla S \cdot \nabla v d\sigma. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Puisque sur  $,_\varepsilon$ ,  $v = S = 0$ , et que  $\mathbf{x}_0$  est sur la droite portant la fissure, on a  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu = 0$ ,  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial S}{\partial \nu}$  sur  $,_\varepsilon$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial S}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma \\ &\quad - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial S}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma. \end{aligned} \quad (5.20)$$

On remplace  $v$  par son expression (5.15) dans  $I_\varepsilon$ , et lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, la limite de  $I_\varepsilon$  est donnée par la limite de  $J_\varepsilon$  qui est définie par

$$J_\varepsilon = \gamma \left[ - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \left( \frac{\partial S}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma + \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \left( \frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 d\sigma - 2 \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial S}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma \right];$$

d'où en passant en coordonnées polaires :

$$J_\varepsilon = \gamma \left[ - \int_0^{2\pi} (-\varepsilon + x_{01} \cos \theta + x_{02} \sin \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon d\theta + \int_0^{2\pi} (-\varepsilon + x_{01} \cos \theta + x_{02} \sin \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon d\theta + 2 \int_0^{2\pi} (x_{01} \sin \theta - x_{02} \cos \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \varepsilon d\theta \right];$$

ce qui donne

$$J_\varepsilon = \frac{\pi x_{01}}{2} \gamma.$$

Donc en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient

$$\gamma = \frac{2}{\pi x_{01}} I,$$

où  $I$  est la limite de  $I_\varepsilon$  donnée en (5.18). On remplace  $g$  et  $v$  par leurs valeurs et on a :

$$I = \int_{\Omega} (\eta f - 2\nabla\eta \cdot \nabla u - u\Delta\eta)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S dx - \int_{\Omega} (\Delta S)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla(\eta u) dx.$$

Comme  $\Delta S, \nabla\eta, \Delta\eta$  sont dans  $H^1(\Omega)$ , on a, en intégrant par parties :

$$I = \int_{\Omega} \eta f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S dx + \int_{\Omega} [(2\operatorname{div}(\nabla\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S) - \Delta\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + \eta \operatorname{div}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\Delta S))] u dx,$$

d'où (5.8).

Pour une fissure portant une condition de Neumann, la même technique que dans le cas Dirichlet convient. ■

**5.2.2.1.2 Conditions mêlées** Dans le cas d'une condition mêlée "régulière", c'est-à-dire telle que  $\Gamma_{i-1}$  et  $\Gamma_i$  sont parallèles et portent des conditions aux limites de nature différente. On a deux situations :

a)

$$\Gamma_{i-1} \subset \Gamma_D \text{ et } \Gamma_i \subset \Gamma_N,$$

d'où

$$\eta_i u = \eta_i u_R - \gamma_i \eta_i \sqrt{r_i} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right); \quad (5.21)$$

b)

$$\Gamma_{i-1} \subset \Gamma_N \text{ et } \Gamma_i \subset \Gamma_D,$$

d'où

$$\eta_i u = \eta_i u_R - \gamma_i \eta_i \sqrt{r_i} \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right), \quad (5.22)$$

Soit le point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  situé sur la droite portant  $\Gamma_{i-1}$  et  $\Gamma_i$ .

**Théorème 5.2.2** Soit  $\mathbf{s}$  un point "régulier" de changement de condition au bord, c'est-à-dire  $\Gamma_{i-1}$  est parallèle à  $\Gamma_i$ , et  $\Gamma_{i-1} \in \Gamma_D$  et  $\Gamma_i \in \Gamma_N$  ou  $\Gamma_{i-1} \in \Gamma_N$  et  $\Gamma_i \in \Gamma_D$ . Soit  $F(\eta)$  défini en (5.9). Alors, le coefficient de singularité de la solution  $u$  de (5.4), associé à  $\mathbf{s}$  s'écrit

$$\gamma = \frac{4\alpha}{\pi x_{01}} \int_{\Omega} [f \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + F(\eta) u] dx, \quad (5.23)$$

où  $\alpha = +1$  si  $\mathbf{s}$  est en aval de  $\Gamma_D$  et  $\alpha = -1$  si  $\mathbf{s}$  est en aval de  $\Gamma_N$ .

**Preuve.** Soit  $\mathbf{s}$  un point de changement de conditions aux limites au bord de type (5.21).

On pose

$$\begin{aligned} v &= \eta u, & v_R &= \eta u_R, \\ S &= -\eta \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \\ g &= \eta f - 2\nabla \eta \cdot \nabla u - (\Delta \eta) u. \end{aligned} \quad (5.24)$$

On a donc

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{dans } \Gamma_{i-1} \setminus \Gamma_i \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \Gamma_i \end{cases} \quad (5.25)$$

$$v = v_R + \gamma S. \tag{5.26}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , assez petit pour que  $B(0, \varepsilon)$  vérifie  $dist(B(0, \varepsilon), \setminus (, i_{-1} \cup , i)) > 0$ . On pose

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \Omega \setminus B'(0, \varepsilon) \\ \gamma_\varepsilon &= \partial B(0, \varepsilon) \cap \Omega \\ , N_\varepsilon &= , N \setminus B(0, \varepsilon) \text{ et } , D_\varepsilon = , D \setminus B(0, \varepsilon). \end{aligned} \tag{5.27}$$

On a :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla S (-\Delta v) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla v (-\Delta S)\} dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \{g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla S + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla v (-\Delta S)\} dx. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Le second membre de cette identité vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{\Omega} \{g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla S + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \nabla v (-\Delta S)\} dx. \tag{5.29}$$

D'autre part, le premier membre donne par integration par parties

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= - \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \nu} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S d\sigma - \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial S}{\partial \nu} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \nabla S \nabla v d\sigma. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Grâce au choix du support de  $\eta$ , nous avons,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial S}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } , N_\varepsilon,$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu &= 0, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial S}{\partial \nu}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla v &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \end{aligned} \right\} \text{ sur } , D_\varepsilon \cap Supp(\eta),$$

puisque le point  $\mathbf{x}_0$  est sur la droite portant  $, i_{-1}$  et  $, i$ . On a alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial S}{\partial \nu} d\sigma + \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma \\ &\quad - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial S}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial v}{\partial \nu} \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma. \end{aligned}$$

Du fait que

$$v_R \in \{v \in H^2(\Omega), v|_{\Gamma_D} \equiv 0, \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\Gamma_N} \equiv 0\},$$

le terme significatif dans  $I_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$  est

$$J_\varepsilon = \gamma \left[ - \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \left( \frac{\partial S}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma + \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nu \left( \frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 d\sigma - 2 \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \tau \frac{\partial S}{\partial \nu} \frac{\partial S}{\partial \tau} d\sigma \right];$$

d'où en passant en coordonnées polaires et en supposant que  $\eta|_{B(0,\varepsilon)} \equiv 1$ , on a

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \gamma \left[ - \int_0^\pi (-\varepsilon + x_{01} \cos \theta + x_{02} \sin \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \cos^2 \frac{\theta}{2} \varepsilon d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^\pi (-\varepsilon + x_{01} \cos \theta + x_{02} \sin \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \sin^2 \frac{\theta}{2} \varepsilon d\theta \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\pi (-x_{01} \sin \theta + x_{02} \cos \theta) \frac{1}{4\varepsilon} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \varepsilon d\theta \right]; \end{aligned}$$

d'où

$$J_\varepsilon = -\frac{\pi x_{01}}{4} \gamma;$$

ce qui donne le résultat pour le cas (5.21). La même démonstration est valable pour le cas (5.22). ■

### 5.2.2.2 Cas d'une singularité quelconque

Soit  $s$  le sommet de la singularité d'angle  $\omega$ , sur laquelle porte une condition de Dirichlet ou une condition de Neumann, on a d'après [21],

$$u = u_R + \gamma S(r, \theta), \tag{5.31}$$

où  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\gamma$  est le coefficient de la solution singulière

$$\begin{aligned} S(r, \theta) &= -\eta r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \text{ pour une condition de Dirichlet,} \\ S(r, \theta) &= \eta r^{\frac{\pi}{\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \text{ pour une condition de Neumann.} \end{aligned} \tag{5.32}$$



Si  $\mathbf{s}$  est le sommet de la singularité d'angle  $\omega$ , sur laquelle portent des conditions mêlées, on a

$$\begin{aligned} S(r, \theta) &= -\eta r^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) \text{ si} \\ &, i_{-1} \text{ porte une condition de Neumann et } , i \text{ porte une condition de Dirichlet,} \\ S(r, \theta) &= -\eta r^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) \text{ si} \\ &, i_{-1} \text{ porte une condition de Dirichlet et } , i \text{ porte une condition de Neumann.} \end{aligned} \tag{5.33}$$

### 5.2.2.2.1 Condition de Dirichlet ou de Neumann

**Théorème 5.2.3** *Si  $\mathbf{s}$  est un sommet d'un angle  $\omega$ ,  $\pi < \omega < 2\pi$ , portant une condition de Dirichlet ou une condition de Neumann, alors le coefficient de singularité  $\gamma$  de la solution  $u$  du système (5.4) associé à  $\omega$  s'écrit*

$$\gamma = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx - \frac{\omega}{\pi^2} \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}}\right) \cdot \nabla S \, u \, dx. \tag{5.34}$$

**Preuve.**

i) **Le cas Dirichlet**

Supposons que  $, i_{-1} \cup , i$  porte une condition de Dirichlet. On ramène le sommet  $\mathbf{s}$  à l'origine. Soit  $\varepsilon > 0$ , assez petit, pour que  $B(0, \varepsilon)$  ne rencontre aucune arête de  $\Omega$  différente de  $, i_{-1}$  et  $, i$ . On pose

$$\begin{aligned} \Omega_{\varepsilon} &= \Omega \setminus B'(0, \varepsilon), \\ \gamma_{\varepsilon} &= \partial B(0, \varepsilon) \cap \Omega, \\ , \varepsilon &= \partial\Omega_{\varepsilon} \setminus \gamma_{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit

$$I_{\varepsilon} = \int_{\Omega_{\varepsilon}} \frac{\mathbf{x}}{r^{\lambda}} \cdot \nabla S(\Delta u) \, dx = - \int_{\Omega_{\varepsilon}} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\lambda}} \cdot \nabla S \, dx \tag{5.36}$$

En effectuant des intégrations par parties, on obtient

$$I_{\varepsilon} = \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^{\lambda}}\right) \cdot \nabla S \, u \, dx + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^{\lambda}} \cdot \nabla S \, d\sigma - \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^{\lambda}}\right) \cdot \nabla S \, u \, d\sigma. \tag{5.37}$$

Puisque  $S = 0$  sur  $, \varepsilon \cap (, i_{-1} \cup , i)$ , nous y avons

$$\mathbf{x} \cdot \nabla S = (\mathbf{x} \cdot \nu) \frac{\partial S}{\partial \nu} = 0. \tag{5.38}$$

De plus,  $[\varepsilon \setminus (, i_{-1} \cup , i)] \cap \text{supp}(\eta) = \emptyset$ . On remplace alors  $u$  par  $u_R + \gamma S$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) u \, dx \\ &+ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \, d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) u_R \, d\sigma \\ &+ \gamma \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial S}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \, d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) S \, d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) u \, dx + \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\pi}{\omega} \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega} - \lambda + 1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta \\ &- \int_0^\omega \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{\pi}{\omega} - \lambda \right) \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega} - \lambda} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) u_R \, d\theta - \gamma \left( \frac{\pi}{\omega} \lambda \right) \int_0^\omega \varepsilon^{2\frac{\pi}{\omega} - \lambda} \sin^2\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer  $\gamma$ , on pose

$$\lambda = 2\frac{\pi}{\omega}, \quad q = \left[ 2 \left( \frac{\pi}{\omega} \right)^2 \int_0^\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta \right]^{-1} = \frac{\omega}{\pi^2},$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{q} &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx \\ &+ \varepsilon^{1 - \frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\pi}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta + \varepsilon^{-\frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \left( \frac{\pi}{\omega} \right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) u_R(\varepsilon, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Nous allons maintenant calculer la limite de cette dernière expression quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S &= \frac{\pi}{\omega} r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) \\ \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) &= 0 \quad \text{dans } \{\eta = 1\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx \right\} &= \\ \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx - \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx. \end{aligned} \quad (5.41)$$

De plus,  $u_R \in H^2(\Omega)$ , donc il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon), \\ \left\| \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Il en résulte la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu}(\varepsilon, \theta) \frac{\pi}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) d\theta = 0. \quad (5.42)$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) u_R(\varepsilon, \theta) d\theta = 0. \quad (5.43)$$

Pour ce faire, nous utilisons l'injection continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ ,  $0 < \mu < 1$  (cf. [1]). La fonction  $u_R$  est dans  $H^2(\Omega)$ , donc on a

$$\|u_R\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\bar{\Omega})} = \|u_R\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u_R(x) - u_R(y)|}{|x - y|^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}.$$

Il s'ensuit qu'il existe un réel  $h_0$  tel que : pour tout  $0 < \theta < \omega$ ,

$$\sup_{0 < h < h_0} \frac{|u_R(\varepsilon + h, \theta) - u_R(h, \theta)|}{\varepsilon^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)},$$

or,  $u_R$  est continue sur  $\bar{\Omega}$  et  $u_R(0, \theta) = 0$  impliquent qu'en faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient

$$\frac{|u_R(\varepsilon, \theta)|}{\varepsilon^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}.$$

D'où la majoration

$$\frac{|u_R(\varepsilon, \theta)|}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}}} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)} \varepsilon^{\mu - \frac{\pi}{\omega}},$$

qui, en choisissant  $\frac{\pi}{\omega} < \mu < 1$  et en appliquant le théorème de la convergence dominée, fournit la convergence (5.43). L'égalité (5.40) et les convergences (5.41)-(5.43) nous donnent

$$\gamma = q \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx + q \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}}\right) \cdot \nabla S \, u \, dx.$$

## ii) Le cas Neumann

La démonstration est presque analogue dans le cas où  $\gamma_{i-1} \cup \gamma_i$  porte une condition de Neumann. Cependant, dans ce dernier cas, nous n'avons plus les égalités (5.38), mais nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\omega} - \lambda - 1} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) = 0, \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon \cap (\gamma_{i-1} \cup \gamma_i).$$

Ce qui donne encore l'égalité (5.39). En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S \right) u \, dx + \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\pi}{\omega} \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega} - \lambda + 1} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta \\ &- \int_0^\omega \frac{\pi}{\omega} \left(\frac{\pi}{\omega} - \lambda\right) \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega} - \lambda} \cos\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) u_R \, d\theta - \gamma \left(\frac{\pi}{\omega} \lambda\right) \int_0^\omega \varepsilon^{2\frac{\pi}{\omega} - \lambda} \cos^2\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) d\theta. \end{aligned}$$

Dans la suite, le seul argument du cas Dirichlet que nous n'avons pas ici est la nullité de  $u_R$  sur  $\varepsilon$  utilisée dans la démonstration de la convergence (5.42). Nous allons donc démontrer la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) u_R(\varepsilon, \theta) \, d\theta = 0. \quad (5.44)$$

Pour ce faire nous scindons l'intégrale en deux parties, " $\int_0^\omega = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^\omega$ ", et nous appliquons la seconde formule de la moyenne : il existe  $\theta_\varepsilon^-$  et  $\theta_\varepsilon^+$ ,  $0 \leq \theta_\varepsilon^- \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{\varepsilon}{2} \leq \theta_\varepsilon^+ \leq \omega$  tels que

$$\varepsilon^{-\frac{\pi}{\omega}} \int_0^\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{\omega} \theta\right) u_R(\varepsilon, \theta) \, d\theta = \frac{\pi}{\omega \varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}}} [u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^-) - u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^+)].$$

En considérant la majoration

$$\|u_R\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})} = \|u_R\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u_R(x) - u_R(y)|}{|x - y|^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)},$$

on a : il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , et pour tout  $\mu \in ]\frac{\pi}{\omega}, 1[$ ,

$$\frac{|u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^-) - u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^+)|}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}}} \leq c [(\cos \theta_\varepsilon^- - \cos \theta_\varepsilon^+)^2 + (\sin \theta_\varepsilon^- - \sin \theta_\varepsilon^+)^2]^{\frac{\mu}{2}} \varepsilon^{\mu - \frac{\pi}{\omega}}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^-) - u_R(\varepsilon, \theta_\varepsilon^+)|}{\varepsilon^{\frac{\pi}{\omega}}} = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 5.2.3. ■

### 5.2.2.2.2 Conditions mêlées

**Théorème 5.2.4** *Si  $s$  est un sommet d'un angle  $\omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < 2\pi$ , portant des conditions mêlées, alors le coefficient de singularité  $\gamma$  de la solution  $u$  du système (5.4) associé à  $\omega$  s'écrit :*

$$\gamma = \frac{4\omega}{\pi^2} \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx + \frac{4\omega}{\pi^2} \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx.$$

**Preuve.** Supposons que  $\gamma_{i-1}$  porte une condition de Neumann et que  $\gamma_i$  porte une condition de Dirichlet. On ramène le sommet  $\mathbf{s}$  à l'origine. Soit  $\varepsilon > 0$ , assez petit, pour que  $B(0, \varepsilon)$  ne rencontre aucune arête de  $\Omega$  différente de  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma_i$ . On pose

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \Omega \setminus B(0, \varepsilon), \\ \gamma_\varepsilon &= \partial B(0, \varepsilon) \cap \Omega, \\ \gamma_\varepsilon &= \partial\Omega_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S(\Delta u) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S dx \quad (5.46)$$

En effectuant des intégrations par parties, on obtient :

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) u dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S d\sigma - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) u d\sigma. \quad (5.47)$$

Puisque  $S = 0$  sur  $\gamma_\varepsilon \cap \gamma_i$ , nous y avons

$$\mathbf{x} \cdot \nabla S = (\mathbf{x} \cdot \nu) \frac{\partial S}{\partial \nu} = 0. \quad (5.48)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 r^{\frac{\pi}{2\omega} - \lambda - 1} \cos\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) = 0. \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_\varepsilon \cap \gamma_{i-1},$$

De plus,  $[\gamma_\varepsilon \setminus (\gamma_{i-1} \cup \gamma_i)] \cap \text{supp}(\eta) = \emptyset$ . On remplace alors  $u$  par  $u_R + \gamma S$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) u dx \\ &+ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) u_R d\sigma \\ &+ \gamma \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial S}{\partial \nu} \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S d\sigma - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) S d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

En passant en coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^\lambda} \cdot \nabla S\right) u dx + \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\pi}{2\omega} \varepsilon^{\frac{\pi}{2\omega} - \lambda + 1} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) d\theta \\ &- \int_0^\omega \frac{\pi}{2\omega} \left(\frac{\pi}{2\omega} - \lambda\right) \varepsilon^{\frac{\pi}{2\omega} - \lambda} \sin\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) u_R d\theta - \gamma \left(\frac{\pi}{2\omega}\lambda\right) \int_0^\omega \varepsilon^{\frac{\pi}{2\omega} - \lambda} \sin^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\theta\right) d\theta \end{aligned}$$

Pour calculer  $\gamma$ , on pose

$$\lambda = \frac{\pi}{\omega}, \quad q = \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2\omega} \right)^2 \int_0^\omega \sin^2 \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) d\theta \right]^{-1} = \frac{4\omega}{\pi^2}$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{q} &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx \\ &+ \varepsilon^{1-\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \frac{\pi}{2\omega} \sin \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) d\theta + \varepsilon^{-\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^\omega \left( \frac{\pi}{2\omega} \right)^2 \sin \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) u_R(\varepsilon, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Nous allons maintenant calculer la limite de cette dernière expression quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S &= \frac{\pi}{2\omega} r^{-\frac{\pi}{2\omega}} \sin \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) \\ \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) &= 0 \quad \text{dans } \{\eta \equiv 1\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx \right\} = \\ \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx - \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx \end{aligned} \quad (5.51)$$

De plus,  $u_R \in H^2(\Omega)$ , donc il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon), \\ \left\| \frac{\partial u_R}{\partial \nu} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Il en résulte la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^\omega \frac{\partial u_R}{\partial \nu}(\varepsilon, \theta) \frac{\pi}{\omega} \sin \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) d\theta = 0. \quad (5.52)$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\frac{\pi}{2\omega}} \int_0^\omega \left( \frac{\pi}{2\omega} \right)^2 \sin \left( \frac{\pi}{2\omega} \theta \right) u_R(\varepsilon, \theta) d\theta = 0. \quad (5.53)$$

Pour ce faire, nous utilisons l'injection continue de  $H^2(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ ,  $0 < \mu < 1$  (cf. [1]). La fonction  $u_R$  est dans  $H^2(\Omega)$ , donc on a

$$\|u_R\|_{\mathcal{C}^{0,\mu}(\bar{\Omega})} = \|u_R\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u_R(x) - u_R(y)|}{|x - y|^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}.$$

Il s'ensuit qu'il existe un réel  $h_0$  tel que

$$\sup_{0 < h < h_0} \frac{|u_R(\varepsilon + h, \theta) - u_R(h, \theta)|}{\varepsilon^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)},$$

or  $u_R$  est continue sur  $\bar{\Omega}$  et  $u_R(0, \theta) = 0$  impliquent qu'en faisant tendre  $h$  vers 0, on obtient

$$\frac{|u_R(\varepsilon, \theta)|}{\varepsilon^\mu} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)}.$$

D'où la majoration

$$\frac{|u_R(\varepsilon, \theta)|}{\varepsilon^{\frac{\pi}{2\omega}}} \leq c \|u_R\|_{H^2(\Omega)} \varepsilon^{\mu - \frac{\pi}{2\omega}},$$

qui, en choisissant  $\frac{\pi}{2\omega} < \mu < 1$  et en appliquant le théorème de la convergence dominée, fournit la convergence (5.53). L'égalité (5.50) et les convergences (5.51)-(5.53) nous donnent

$$\gamma = q \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \, dx + q \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S \right) u \, dx.$$

■

### 5.2.3 Approximation numérique du coefficient $\gamma$

On se propose d'approcher  $\gamma$  via une approximation de la solution  $u$  du problème (5.5) par la méthode des éléments finis (MEF).

Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  vérifiant les conditions suivantes : il existe une constante  $c$  telle qu'on a

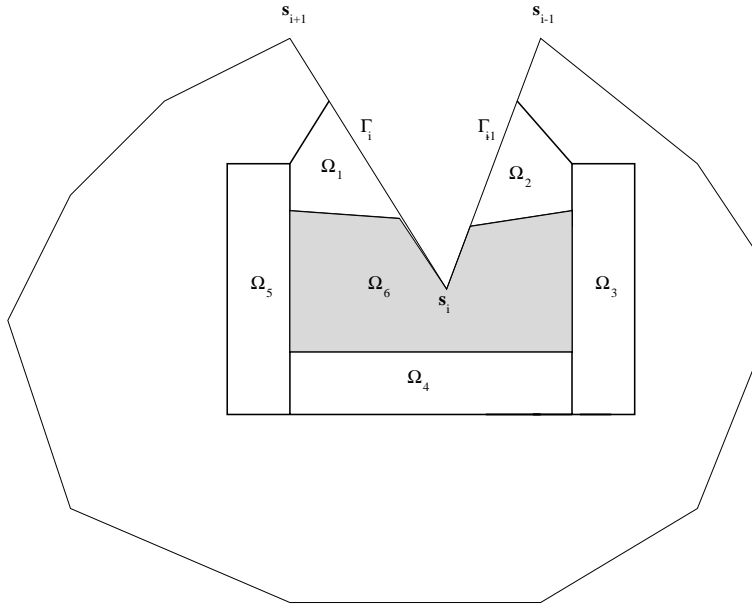
$$\forall K \in T_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq c,$$

où

$$\begin{aligned} h_K &= \text{diamètre de } K \text{ et} \\ \rho_K &= \text{diamètre du cercle inscrit dans } K. \end{aligned}$$

Posons  $h = \sup_{K \in T_h} h_K$  et introduisons l'espace

$$V_h = \{v_h \in V \cap C^0(\Omega), v_h|_K \in P_1 \, \forall K \in T_h\}, \tag{5.54}$$

FIG. 5.2:  $\Omega$ 

où  $P_1$  désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à 1.

Le problème approché associé à (5.5) consiste à trouver  $u_h$  dans  $V_h$  tel que :

$$\forall v \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (5.55)$$

Soient  $\Omega_k$  des sous-domaines polygonaux de  $\Omega$  (voir figure 5.2),  $\tilde{\Omega} = \text{int}(\cup_{k=1}^6 \bar{\Omega}_k)$ , et  $\tilde{\Omega}_6 = \tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_6$ . On suppose que  $\text{supp}(\eta) \cap \Omega$  est dans l'ouvert  $\tilde{\Omega}$  et que  $\eta$  vaut 1 dans  $\Omega_6$ . Nous allons tout d'abord donner quelques estimations d'erreur entre  $u$  et  $u_h$ .

**Proposition 5.2.1** *Soit  $u$  et  $u_h$  respectivement solutions des problèmes (5.5) et (5.55). Supposons que*

$$u = u_R + \gamma r^\alpha \varphi(\theta)$$

où  $u_R \in H^2(\Omega)$ ,  $\varphi \in C^\infty[0, 2\pi]$  et  $0 < \alpha < 1$ . On a alors,  $\forall \varepsilon > 0$ , les majorations :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}, \quad (5.56)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} \leq C_\varepsilon h^{1+\alpha-\varepsilon}, \quad (5.57)$$

où  $C_\varepsilon$  ne dépend pas de  $h$ .

De plus, si  $\gamma = 0$ , on obtient les majorations

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\tilde{\Omega})^3} \leq C_\varepsilon h^{1-\varepsilon}, \quad (5.58)$$



$$\|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} \leq C_\varepsilon h^{2-\varepsilon}. \quad (5.59)$$

**Preuve.**

i) **Cas où** ,  $D \neq$  ,

Soit  $u_I$  l'interpolé de  $u$  dans  $V_h$ , c'est-à-dire  $u_I$  est une fonction de  $V_h$  telle que pour tout noeud  $a$  de  $T_h$ , on a  $u_I(a) = u(a)$ . On sait, d'après le théorème 7.1 de [13] que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon$  telle que

$$\|\nabla(u - u_I)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}. \quad (5.60)$$

Nous savons aussi que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_h) dx = \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - u_I) dx ;$$

et que, par conséquent, l'inégalité de Schwarz donne

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla(u - u_I)\|_{L^2(\Omega)^3},$$

d'où la majoration (5.56) :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|\nabla(u - u_I)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C_\varepsilon h^{\alpha-\varepsilon}.$$

Si  $u$  porte une condition de Dirichlet sur tout le bord de  $\Omega$ , la majoration (5.58) est obtenue dans [13] (p. 78). Il reste donc à démontrer (5.57) et (5.59).

a) On se place d'abord dans le cas où ,  $i_{-1} \cup$  ,  $i$  porte une condition de Dirichlet. Pour majorer la norme  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ , pour toute fonction  $g \in L^2(\tilde{\Omega}_6)$ , nous introduisons les fonctions  $v_k$ ,  $1 \leq k \leq 5$  solutions variationnelles respectives des systèmes d'équations

$$\begin{cases} -\Delta v^1 = g & \text{dans } \Omega_1, \\ \frac{\partial v^1}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus , i, \\ v^1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap , i, \end{cases} \quad (5.61)$$

$$\begin{cases} -\Delta v^2 = g & \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial v^2}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus , i_{-1}, \\ v^2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap , i_{-1}, \end{cases} \quad (5.62)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta v^l + \lambda v^l = g & \text{dans } \Omega_l, \\ \frac{\partial v^l}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_l, \end{cases} \quad l = 3, 4, 5, \quad (5.63)$$

où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

On définit aussi  $v_h^k$ , des éléments de  $V_h$ , comme suit : pour tout noeud  $a$  de  $T_h$ ,

$$v_h^k(a) = \begin{cases} v^k(a) & \text{si } a \in \bar{\Omega}_k \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, 5. \quad (5.64)$$

Nous avons les égalités

$$\int_{\Omega_\beta} (u - u_h)g \, dx = - \int_{\Omega_\beta} (u - u_h)\Delta v^\beta \, dx = \int_{\Omega_\beta} \nabla(u - u_h)\nabla v^\beta \, dx, \quad \beta = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_l} (u - u_h)g \, dx &= - \int_{\Omega_l} (u - u_h)\Delta v^l \, dx + \lambda \int_{\Omega_l} (u - u_h)v^l \, dx \\ &= \int_{\Omega_l} \nabla(u - u_h)\nabla v^l \, dx + \lambda \int_{\Omega_l} (u - u_h)v^l \, dx, \quad l = 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_{\Omega_k} \nabla(u - u_h)\nabla v_h^k \, dx = 0 \quad k = 1, \dots, 5,$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} (u - u_h)g \, dx &= \sum_{k=1}^5 \int_{\Omega_k} \nabla(u - u_h)\nabla(v^k - v_h^k) \, dx \\ &\quad + \sum_{l=3}^5 \lambda \int_{\Omega_l} (u - u_h)v^l \, dx. \end{aligned} \quad (5.65)$$

D'après l'inégalité de Schwarz, pour  $k = 1, \dots, 5$ , nous avons

$$\left| \int_{\Omega_k} \nabla(u - u_h)\nabla(v^k - v_h^k) \, dx \right| \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega_k)^3} \|\nabla(v^k - v_h^k)\|_{L^2(\Omega_k)^3}, \quad (5.66)$$

Les ouverts  $\Omega_k$  sont des polygones convexes dont les angles où sont posés des conditions mêlées sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$  (voir figure 5.2, (5.61)-(5.63)), les solutions  $v^k$  sont respectivement dans les espaces  $H^2(\Omega_k)$  (cf. [21]). D'après le théorème 3.4.1 de [6], nous avons les majorations

$$\|\nabla(v^k - v_h^k)\|_{L^2(\Omega_k)} \leq C_\varepsilon h |v^k|_{H^2(\Omega_k)}, \quad (5.67)$$

Nous avons enfin, dans [21], les inégalités

$$\|v^k\|_{H^2(\Omega_k)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega_k)}. \quad (5.68)$$

Les inégalités (5.56) et (5.65)-(5.68) fournissent la majoration

$$\frac{\left| \int_{\tilde{\Omega}_6} (u - u_h) g \, dx \right|}{\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)}} \leq C_\varepsilon h^{1+\alpha-\varepsilon} + \lambda \|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} \quad \forall g \in L^2(\tilde{\Omega}_6). \quad (5.69)$$

Or, on sait que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} = \sup_{g \in L^2(\tilde{\Omega}_6)} \frac{\int_{\tilde{\Omega}_6} (u - u_h) g \, dx}{\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)}}. \quad (5.70)$$

D'où, en prenant  $0 < \lambda < 1$ , nous avons la majoration

$$\|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} \leq C_\varepsilon h^{1+\alpha-\varepsilon}. \quad (5.71)$$

b) Si  $\Gamma_{i-1} \cup \Gamma_i$  porte une condition de Neumann, pour obtenir (5.71) nous reproduisons la même démonstration avec les fonctions  $v^k$  et  $v_h^k$  définies par

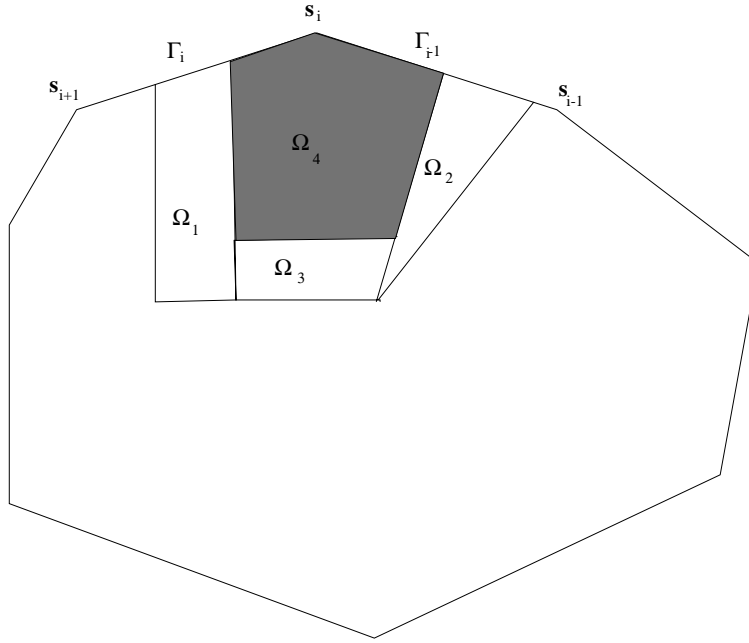
$$\begin{cases} -\Delta v^k + \lambda v^k = g & \text{dans } \Omega_k, \\ \frac{\partial v^k}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_k. \end{cases} \quad (5.72)$$

et

$$v_h^k(a) = \begin{cases} v^k(a) & \text{si } a \in \bar{\Omega}_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.73)$$

c) Si on se place dans le cas de conditions mêlées portées par deux arêtes  $\Gamma_{i-1}$  et  $\Gamma_i$  telles que  $\frac{\pi}{2} < \omega_i \leq \pi$ . Par exemple,  $\Gamma_{i-1}$  porte une condition de Dirichlet et  $\Gamma_i$  porte une condition de Neumann, on considère la figure 5.3. Alors, on fait la même démonstration que précédemment avec des fonctions  $v^k$  et  $v_h^k$ , définies par

$$\begin{cases} -\Delta v^2 = g & \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial v^2}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_{i-1}, \\ v^2 = 0 & \text{sur } \Gamma_{i-1}, \end{cases} \quad (5.74)$$

FIG. 5.3:  $\Omega$ 

$$\begin{cases} -\Delta v^l + \lambda v^l = g & \text{dans } \Omega_l, \\ \frac{\partial v^l}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_l, \end{cases} \quad l = 1, 3, \quad (5.75)$$

et

$$v_h^k(a) = \begin{cases} v^k(a) & \text{si } a \in \bar{\Omega}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.76)$$

Et comme dans le cas Dirichlet, on obtient la majoration (5.71).

Si on est dans le cas de conditions mêlées portées par deux arêtes,  $i_{-1}$  et  $i$  telles que  $\pi < \omega_i \leq 2\pi$ , on considère la figure 5.2 et les fonctions  $v^k$  et  $v_h^k$  définies par

$$\begin{cases} -\Delta v^2 = g & \text{dans } \Omega_2, \\ \frac{\partial v^2}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_2 \setminus i_{-1}, \\ v^2 = 0 & \text{sur } i_{-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta v^l + \lambda v^l = g & \text{dans } \Omega_l, \\ \frac{\partial v^l}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_l, \end{cases} \quad l = 1, 3, 4, 5$$

et

$$v_h^k(a) = \begin{cases} v^k(a) & \text{si } a \in \bar{\Omega}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et on reconduit la démonstration effectuée dans le cas où  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma_i$  portent des conditions de Dirichlet.

ii) **Cas où**  $\gamma_D = \gamma$ ,

Si une condition de Dirichlet est mise sur tout le bord de  $\Omega$ , [13] (p. 78) donne la majoration (5.58). Pour obtenir (5.59), on peut reconduire la même preuve que dans le cas où  $\gamma_{i-1} \cup \gamma_i \subset \gamma_D$ , en utilisant la majoration (5.58). Ceci achève la démonstration de la proposition 5.2.1. ■

Pour  $F$  défini par (5.9), on donne une approximation  $\gamma_h$  du coefficient de singularité  $\gamma$  calculé dans la section précédente :

$$\gamma_h = \begin{cases} \frac{2}{\pi x_{01}} \int_{\Omega} [f\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + F(\eta) u_h] dx & \text{si } \omega = 2\pi, \\ \frac{\pi}{\omega^2} \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S dx + \frac{\pi}{\omega^2} \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^{2\frac{\pi}{\omega}}}\right) \cdot \nabla S u_h dx & \text{si } \pi < \omega < 2\pi, \end{cases} \quad (5.77)$$

dans le cas où la singularité porte une condition de Dirichlet uniquement ou une condition de Neumann uniquement ;

$$\gamma_h = \begin{cases} \frac{4\alpha}{\pi x_{01}} \int_{\Omega} [f\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla S + F(\eta) u_h] dx & \text{si } \omega = \pi, \\ \frac{4\pi}{\omega^2} \int_{\Omega} f \frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}} \cdot \nabla S dx + \frac{4\pi}{\omega^2} \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{\mathbf{x}}{r^{\frac{\pi}{\omega}}}\right) \cdot \nabla S u_h dx & \text{si } \frac{\pi}{2} < \omega < 2\pi, \end{cases} \quad (5.78)$$

dans le cas où la singularité porte des conditions mêlées. Soit la fonction  $\eta \in H^3(\mathbb{R}^2)$ , telle que  $\text{supp}(\eta) \cap \Omega \subset \tilde{\Omega}$  et  $\eta|_{\Omega_6} \equiv 1$  dans le cas de la figure 5.2 ( $\pi < \omega < 2\pi$ ), et  $\eta|_{\Omega_4} \equiv 1$  dans le cas de la figure 5.3. Dans la pratique, on peut le prendre comme un polyôme de degré 3 par morceaux. Nous pouvons maintenant établir le théorème

**Théorème 5.2.5** *Si  $\gamma$  est le coefficient de la singularité de  $u$  solution de (5.5) au sommet  $s$  d'angle  $\omega$ , et  $\gamma_h$  l'expression définie dans (5.77)-(5.78), on a :  $\forall \varepsilon > 0$ ,*

$$|\gamma - \gamma_h| \leq C(\eta, \varepsilon) h^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}, \quad (5.79)$$

où  $C(\eta, \varepsilon)$  désigne une constante ne dépendant pas de  $h$ .

De plus, si  $\gamma_D = \gamma$ , nous avons la majoration

$$|\gamma - \gamma_h| \leq C(\eta, \varepsilon) h^{2-\varepsilon} \quad (5.80)$$

**Preuve.** La démonstration du théorème repose sur la proposition 5.2.1. On applique l'inégalité de Schwartz à

$$\gamma - \gamma_h = \frac{2}{\pi x_{01}} \int_{\tilde{\Omega}_6} F(\eta) \{u - u_h\} dx, \quad (5.81)$$

on obtient

$$|\gamma - \gamma_h| \leq \|F(\eta)\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)} \|u - u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega}_6)}, \quad (5.82)$$

et en utilisant la proposition 5.2.1, on complète la preuve du théorème.  $\blacksquare$

### 5.2.4 Approximation de la solution $u$

Soit  $\tilde{u}_R^h$  solution de l'équation

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_R^h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx + \gamma_h \int_{\Omega} \Delta S v_h dx. \quad (5.83)$$

Posons  $\tilde{u}_h = \tilde{u}_R^h + \gamma_h S$ . Nous obtenons le théorème

**Théorème 5.2.6** *Soit  $u$  solution du problème (5.5), nous avons la majoration*

$$\|\nabla(u - \tilde{u}_h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C h. \quad (5.84)$$

**Preuve.** En utilisant l'écriture  $u = u_R + \gamma S$ , nous avons

$$u - \tilde{u}_h = u_R - \tilde{u}_R^h + (\gamma - \gamma_h) S. \quad (5.85)$$

Sachant que  $|\gamma - \gamma_h| \leq C h$  (voir théorème 5.2.5) et que  $S$  est dans  $H^1(\Omega)$ , il suffit de prouver que

$$\|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C h.$$

Des équations (5.5) et (5.83), on tire

$$\forall v \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla v_h dx = (\gamma - \gamma_h) \int_{\Omega} \Delta S v_h dx.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 &= \int_{\Omega} \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla u_R dx - (\gamma - \gamma_h) \int_{\Omega} \Delta S \tilde{u}_R^h dx. \end{aligned}$$

Il s'ensuit l'égalité

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 = \int_{\Omega} \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla(u_R - v_h) dx - (\gamma - \gamma_h) \int_{\Omega} \Delta S (\tilde{u}_R^h - v_h) dx.$$

D'où, en prenant  $v_h = u_R^h$  solution de l'équation

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_R^h \cdot \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx + \gamma \int_{\Omega} \Delta S v_h dx, \quad (5.86)$$

on a

$$\|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 = \int_{\Omega} \nabla(u_R - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla(u_R - u_R^h) dx + (\gamma - \gamma_h) \int_{\Omega} \Delta S (u_R^h - \tilde{u}_R^h) dx.$$

En appliquant respectivement les inégalités de Schwarz et Poincaré à cette dernière équation, on obtient la majoration

$$\frac{1}{2} \|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla(u_R - u_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + C |\gamma - \gamma_h| \|\nabla(u_R^h - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3}. \quad (5.87)$$

Rappelons que  $u_R$  est solution de l'équation

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u_R \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \gamma \int_{\Omega} \Delta S v dx,$$

et que  $u_R \in H^2(\Omega)$ . Nous avons alors la majoration

$$\|\nabla(u_R - u_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C h. \quad \text{voir [6]}. \quad (5.88)$$

De plus, des équations (5.83) et (5.86) on tire

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla(u_R^h - \tilde{u}_R^h) \cdot \nabla v_h dx = (\gamma - \gamma_h) \int_{\Omega} \Delta S v_h dx,$$

d'où, en posant  $v_h = u_R^h - \tilde{u}_R^h$ , et en appliquant respectivement les inégalités de Schwarz et Poincaré au second membre, on obtient

$$\|\nabla(u_R^h - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C |\gamma - \gamma_h| \leq C h. \quad (5.89)$$

Les inégalités (5.87)-(5.89) et  $|\gamma - \gamma_h| \leq C h$  impliquent

$$\|\nabla(u_R - \tilde{u}_R^h)\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C h. \quad (5.90)$$

Enfin la majoration (5.84) est donnée par les inégalités (5.90) et  $|\gamma - \gamma_h| \leq C h$ . ■

- Commentaire 5.2.1** 1. Dans le cas d'une fissure, une expression de  $\gamma$  ne faisant pas intervenir les solutions duales a été obtenue dans [5], mais la majoration de l'erreur  $|\gamma - \gamma_h|$  est seulement d'ordre  $h$  avec l'espace d'approximation  $V_h$  (voir 5.54). Des majorations d'ordre  $C_\varepsilon h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}$  sont obtenues à condition d'utiliser des éléments finis  $P_2$ . Par une méthode d'adjonction de solutions singulières, d'après [3], on peut construire une suite  $(\gamma_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont la limite  $\gamma_h$  vérifie  $|\gamma - \gamma_h| \leq C_\varepsilon h^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}$ .
2. L'intérêt du présent travail consiste à obtenir une expression très simple du coefficient de singularité  $\gamma$ ; puis une majoration de  $|\gamma - \gamma_h|$  d'ordre  $h^{1+\frac{\pi}{\omega}-\varepsilon}$ , ou  $h^{2-\varepsilon}$  (dans le cas où  $\omega = \pi$ ), en travaillant seulement avec l'espace d'approximation (5.54) de fonctions affines par morceaux, et en n'utilisant que les fonctions singulières  $S = r^{\frac{\pi}{\omega}} \cos(\frac{\pi}{\omega}\theta + \phi)$  déjà connues. De plus, nous obtenons une approximation  $\tilde{u}_h$  de  $u$  d'ordre équivalent à celui obtenu dans le cas où la solution  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$  :  $\|\nabla(u - \tilde{u}_h)\| \leq ch$ .





# Bibliographie

- [1] R. A. Adams *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1994.
- [2] C. Bardos, J. C ea, P. Grisvard, Calcul numérique de solutions singulières de problèmes aux limites, Séminaires Université de Nice, 1977.
- [3] M. Boulard, M. Dauge, M. Lubuma, S. Nicaise, Coefficients of the singularities for elliptic boundary value problems on domains with conical points. III : finite element methods on polygonal domains, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 29, No. 1, pp. 136-155, 1992.
- [4] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Studies in Math. and its Appl., 4, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] P. Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure, Une nouvelle méthode de calcul de la singularité pour un problème elliptique posé sur un ouvert avec fente, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 293, 1981.
- [6] A. Fulvia, E. Tiziana *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, London, 1985.
- [8] P. Grisvard, *Singularities in Boundary Value Problems*, RMA, Springer-Verlag, 1992.
- [9] M. A. Moussaoui, *In singularities and constructive methods for their treatment*, Lecture Notes in Math., 1121, Springer-Verlag, 1984.
- [10] M. T. Niane, O. Seck, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes en présence de fissures par adjonction de contrôles internes au voisinage des sommets des fissures, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 316, p. 695-700, 1993.
- [11] M. T. Niane, O. Seck, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation des ondes avec conditions mêlées, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 318, p. 945-948, 1994.
- [12] G. Raugel, *Résolution numérique de problèmes elliptiques dans des domaines avec coins*, Thèse, Université de Rennes, Rennes, France, 1978.

- [13] A. L. Schatz, V. Thomée, W. L. Wendland, *Mathematical Theory of Finite and Boundary Elements Methods*, Birkhauser Verlag, 1990.

## RÉSUMÉ

Le mémoire est consacré à divers aspects de la modélisation de plaques : contrôlabilité frontière de structures bidimensionnelles et construction de modèles de plaques piézoélectriques, en relation avec des situations technologiques d'actualité, puis étude de singularités.

Dans le **premier chapitre** on obtient un résultat de contrôlabilité exacte frontière pour une plaque élastique bidimensionnelle. On résout d'abord le problème de contrôlabilité exacte pour une plaque tridimensionnelle d'épaisseur  $h$  en contrôlant uniquement l'intérieur et la frontière latérale de la plaque ; le choix effectué des contrôles tridimensionnels permet de faire disparaître les contrôles intérieurs lorsque  $h$  tend vers 0.

On étudie, dans les **chapitres 2, 3 et 4**, le comportement d'une plaque piézoélectrique lorsque son épaisseur tend vers 0, notamment, dans le cas complet où la contribution magnétique dans les équations de Maxwell n'est pas négligeable.

Ainsi, d'une part, on justifie les modèles qui supposent que dans une plaque mince le potentiel électrique peut être assimilé à un polynôme du second degré en la coordonnée d'espace suivant l'épaisseur. Et, d'autre part, on explique pourquoi dans les modèles bidimensionnels les équations d'équilibre mécanique, ou les équations d'évolution, sont liées au potentiel électrique uniquement par la différence de potentiel entre les deux faces horizontales. De plus, on exhibe de manière précise la contribution des termes piézoélectriques dans l'opérateur de flexion.

Le **chapitre 5** est consacré au calcul de coefficients de singularité sur un ouvert bidimensionnel polygonal non convexe.

**Mots clés** : *Elasticité, Piézoélectricité, Plaques, Analyse asymptotique, Contrôlabilité exacte, Coefficients de singularité.*

## ABSTRACT

This dissertation deals with various aspects of plate modelling : boundary exact controllability of 2D structures, construction of models for piezoelectric plates, and analysis of singularities.

The first chapter presents a result of boundary exact controllability for a 2D elastic plate. First, we solve an exact controllability problem for a plate with thickness  $h$ , by controlling only its interior and its lateral boundary. We choose interior controls that vanish as  $h$  tends to 0.

In **Chapters 2, 3, 4**, we study the behavior of a piezoelectric plate when its thickness tends to 0. Particularly, in the dynamic case where the magnetic contribution is taken into account in the Maxwell equations.

So, in one hand, we justify the thin plate models which assume that the electric potential is a second order polynomial in the thickness direction. On the other hand, we prove that in 2D models, the equilibrium equations depend on the electric potential only through the difference of potential between the horizontal faces. Moreover, we obtain the very contribution of the piezoelectric constants in the bending operator.

In **Chapter 5**, we give a simple way to compute the singularity coefficients in a 2D none convex open domain.

**Keywords** : *Elasticity, Piezoelectricity, Plates, Asymptotic analysis, Exact controllability, Singularity coefficients .*