



**HAL**  
open science

## Analyse mathématique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente

Delia Jiroveanu

► **To cite this version:**

Delia Jiroveanu. Analyse mathématique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. Français. NNT: . tel-00004466

**HAL Id: tel-00004466**

**<https://theses.hal.science/tel-00004466>**

Submitted on 4 Feb 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée par

**Delia JIROVEANU**

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I**

**et de l'Université de l'Ouest de Timișoara**

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

---

---

## Analyse théorique et numérique de certains modèles de viscosité turbulente

---

---

Soutenue le 8 mars 2002

### Composition du Jury :

<b>M. Thierry GALLAY</b>	Président du Jury
<b>Mme. Doina CIORANESCU</b>	Rapporteur
<b>Mme. Daniela ZAHARIE</b>	Rapporteur
<b>M. Georges-Henri COTTET</b>	Directeur de thèse
<b>M. Gheorghe CONSTANTIN</b>	Directeur de thèse
<b>M. Bertrand MICHAUX</b>	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul LMC-IMAG Grenoble  
et du Département de Mathématiques UV Timișoara (Roumanie)

# Remerciements

*Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mes directeurs de thèse, Messieurs Georges-Henri Cottet et Bertrand Michaux, qui ont constamment veillé, avec compétence et patience, à ce que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions, et leur dire tout le plaisir que j'ai eu à travailler sur les thèmes que j'ai pu découvrir et approfondir grâce à eux.*

*Mes plus sincères remerciements s'adressent ensuite à Mesdames Doina Cioranescu et Daniela Zaharie, pour l'intérêt qu'elles ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner et d'en être rapporteurs.*

*Je remercie également Monsieur Thierry Gallay, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.*

*Je voudrais aussi remercier Monsieur Gheorghe Constantin pour avoir accepté être codirecteur de cette thèse.*

*Mes remerciements vont encore à tous mes collègues du Laboratoire de Modélisation et Calcul de Grenoble, qui m'ont permis de passer des années très agréables et enrichissantes en leur compagnie.*

*Un Grand Merci à ma famille pour son soutien constant et chaleureux pendant tous ces années de thèse et pour son intérêt dans l'avancement de mon travail.*

*Je remercie enfin toutes les personnes qui, par un sourire ou une parole bienveillante, m'ont permis de garder le moral tout au long de ces années de thèse.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Modélisation des écoulements turbulents</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction à la turbulence . . . . .	7
1.2 Les différentes approches de la turbulence . . . . .	7
1.2.1 Approche mathématique de la turbulence . . . . .	8
1.2.2 Approche physique de la turbulence . . . . .	10
1.2.3 Approche numérique de la turbulence . . . . .	11
<b>2 La simulation des grandes structures turbulentes</b>	<b>17</b>
2.1 Principe et objectifs . . . . .	17
2.2 La simulation des grandes échelles et la cascade d'énergie . . . . .	18
2.3 Le filtrage . . . . .	20
2.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées . . . . .	22
2.5 Modélisation sous-maille . . . . .	23
2.6 Directions de recherche . . . . .	29
2.6.1 Le modèle de Smagorinsky sélectif . . . . .	29
2.6.2 Le modèle anisotrope sélectif . . . . .	31
<b>3 Analyse mathématique de quelques modèles LES</b>	<b>33</b>
3.1 Revue des résultats théoriques concernant les équations de Navier-Stokes	33
3.1.1 Existence, unicité et régularité des solutions . . . . .	33
3.1.2 Le cas des fluides parfaits . . . . .	37
3.1.3 Attracteurs et turbulence . . . . .	46
3.2 Le modèle de Smagorinsky . . . . .	47
3.2.1 Formulation du problème et cadre fonctionnel . . . . .	47
3.2.2 Résolution du problème mathématique . . . . .	49
3.2.3 Comportement asymptotique des solutions . . . . .	55
3.2.4 Le modèle de Smagorinsky sélectif . . . . .	63
3.3 Le modèle LANS . . . . .	64
3.4 Conclusion . . . . .	69

<b>4</b>	<b>Simulations numériques utilisant des modèles LES</b>	<b>71</b>
4.1	Présentation du schéma numérique . . . . .	71
4.1.1	Discrétisation spatiale . . . . .	72
4.1.2	Les équations de la LES dans l'espace de Fourier . . . . .	74
4.1.3	Discrétisation temporelle . . . . .	75
4.1.4	Discrétisation des termes sous-maille . . . . .	76
4.1.5	Remarques sur la stabilité du schéma numérique . . . . .	78
4.1.6	Quantités physiques caractéristiques . . . . .	79
4.2	Condition initiale I - Le problème de la reconnection des deux tubes de vorticité . . . . .	80
4.2.1	Description de la condition initiale . . . . .	81
4.2.2	Résultats numériques . . . . .	82
4.3	Condition initiale II - La turbulence homogène et isotrope . . . . .	91
4.3.1	écoulements homogènes, isotropes . . . . .	91
4.3.2	Le modèle de turbulence de grille . . . . .	91
4.3.3	Résultats numériques . . . . .	92
4.3.4	Résultats numériques - le modèle LANS . . . . .	96
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>101</b>
	<b>Annexes</b>	<b>102</b>
	<b>A Echelles de turbulence. Hypothèses de Kolmogorov</b>	<b>103</b>
	<b>B Erreurs de recouvrement</b>	<b>107</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>

# Introduction

Nous avons couramment l'occasion d'observer autour de nous des écoulements variés. L'eau qui s'écoule dans une rivière, le jet d'un réacteur, la fumée qui sort d'une cheminée d'usine, sont quelques exemples.

Les écoulements de fluides rencontrés dans la nature ou dans des processus industriels, sont en général instationnaires et turbulents, souvent couplés avec d'autres phénomènes physiques. La prise en considération de ces instationnarités et ces couplages est indispensable pour la compréhension et la prédiction de certains problèmes de la mécanique et de la physique, ce qui fait que l'étude de la turbulence est un des problèmes majeurs de la recherche actuelle.

L'intuition nous permet de percevoir ce qu'est la turbulence, mais il est difficile de lui donner une définition précise, d'autant plus qu'on utilise cette notion pour désigner des phénomènes variés, dans des domaines différents: hydrologie, astrophysique, météorologie... Nous reproduisons ici une photographie d'un cyclone<sup>1</sup> dans l'océan Atlantique, en vue d'illustrer le phénomène complexe, qu'est la turbulence.



*Vue satellitale du cyclone atlantique FRAN, le 4 septembre 1996 (photo NASA-NIX)*

---

1. les cyclones sont des perturbations tropicales associées à des vents très forts et dont le mouvement est une rotation spiralee; ils peuvent s'éteindre jusqu'à quelques dizaines de km au dessus de la surface océanique

La turbulence n'est pas une propriété du fluide, comme la viscosité ou la conductibilité thermique, par exemple. Elle se produit lorsque le nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement est suffisamment grand et elle est caractérisée par un nombre de propriétés physiques comme l'imprédictibilité, la capacité de mélange, la présence d'une grande gamme d'échelles qui participent au mouvement.

Les équations qui régissent les écoulements turbulents sont les équations de Navier-Stokes, qui se déduisent des lois newtoniennes dans le contexte de l'hydrodynamique. Le caractère non-linéaire du terme de convection qui apparaît dans ces équations est à l'origine des difficultés rencontrés dans la résolution de ce système. Du point de vue mathématique, on ne connaît des solutions analytiques pour le système de Navier-Stokes que dans des cas particuliers (les écoulements de Couette ou de Poiseuille). La théorie mathématique des équations de Navier-Stokes n'est pas encore complète. Il n'existe que des résultats partiels d'existence, unicité, régularité de la solution, différents selon la dimension de l'espace considéré. Ainsi, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes s'est avérée une alternative prometteuse, qui donne des résultats utiles pour les ingénieurs. Un calcul direct d'un écoulement turbulent permettrait d'avoir tous les détails des variables de l'écoulement mais il ne peut pas se concevoir pour la prévision des écoulements réels. Le traitement des configurations un peu complexes ou à des grands nombres de Reynolds impliquerait un coût de calcul (en taille mémoire et en temps CPU) trop important pour le niveau actuel des ressources informatiques. Lorsqu'on veut simuler des écoulements stationnaires turbulents (à grands nombres de Reynolds), sans faire appel à des moyens informatiques prohibitifs, la méthode de Simulation des Grandes Echelles est bien adaptée. C'est la méthode que nous avons choisi pour résoudre les problèmes traités dans cette thèse. Cette méthode de simulation consiste à modéliser l'effet dissipatif des petites échelles de la turbulence par des termes de dissipation (dite dissipation sous-maille), qui se substituent au mécanisme de cascade d'énergie des grosses structures vers celles de petite taille. L'étude de tels modèles fait l'objet de ce mémoire.

Trois principaux objectifs ont déterminé l'orientation des travaux de recherche effectués et présentés dans cette thèse :

- l'étude théorique des modèles de turbulence utilisés dans le domaine pratique de la LES ;
- le développement de modèles de turbulence, décrivant au mieux la physique, en s'appuyant sur des outils mathématiques disponibles et sur des contraintes déduites des phénomènes physiques observés ;
- l'étude des performances des différents modèles dans des configurations pratiques, pour pouvoir d'une part identifier leurs qualités et leurs faiblesses, et d'autre part pour dégager les contraintes à imposer à ces modèles en vue de les améliorer.

Pour atteindre ces objectifs, nous avons mené une analyse à la fois mathématique et numérique de quelques modèles de viscosité turbulente. Le plan proposé pour la présentation du travail réalisé est le suivant :

Dans le premier chapitre nous présentons brièvement les approches qu'on considère

essentielles pour la compréhension de la turbulence : l'approche mathématique, l'approche physique et l'approche numérique. Nous insistons plutôt sur les méthodes de prédétermination numérique qu'on peut envisager pour la simulation des écoulements turbulents.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode de Simulation des Grandes Echelles. On expose d'abord le principe et les objectifs de la méthode et on introduit le concept de cascade d'énergie. Nous présentons ensuite les modèles de turbulence classiques, basés sur le concept de viscosité turbulente, modèles utilisés pour la fermeture des équations de Navier-Stokes moyennées. Les recherches actuelles dans le domaine de la LES sont orientées vers la définition et la validation de nouveaux modèles de fermeture pour ces équations. Ainsi, deux modèles sélectifs sont proposés/présentés : le modèle de Smagorinsky sélectif (pour lequel nous nous sommes inspirés des travaux théoriques de P. Constantin et Ch. Fefferman [1993], ainsi que du modèle de structure sélectif proposé par E. David [1993]) et le modèle anisotrope sélectif (proposé par G.-H. Cottet [1997]).

Le chapitre trois est dédié principalement à l'étude théorique du modèle de Smagorinsky. Ce chapitre débute avec une revue des résultats théoriques concernant les équations de Navier-Stokes. Nous présentons ensuite un point de vue géométrique (proposé par P. Constantin et Ch. Fefferman [1993]), basé sur "les directions de vorticité" et qui permet d'aborder différemment l'étude de la régularité de la solution des équations de Navier-Stokes. Quelques notions sur les attracteurs et la connexion avec la turbulence sont exposés à la suite. En ce qui concerne l'analyse mathématique du modèle de Smagorinsky, on présente d'abord le problème à résoudre et le cadre fonctionnel où on se place et ensuite les résultats d'existence, unicité et régularité de la solution faible obtenus pour ce système. Des résultats sur le comportement asymptotique des solutions obtenues sont aussi présentés. Ainsi on montre l'existence d'un attracteur de dimension fractale finie pour le système dynamique associé. En fin, on présente brièvement la technique du lagrangien moyenné, utilisée par J. Marsden et S. Skholler [2000] pour la dérivation du modèle LANS, ainsi que quelques résultats théoriques obtenus pour ce modèle.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous évaluons les performances numériques de quatre modèles sous-maille sur deux problèmes test : la reconnection de deux tubes de vorticité et la turbulence homogène et isotrope. Les modèles choisis sont : le modèle de Smagorinsky, le modèle de Smagorinsky sélectif, le modèle anisotrope sélectif et le modèle LANS. Afin de pouvoir délimiter les domaines de validité des modèles analysés, des comparaisons de différentes quantités physiques (énergie cinétique, enstrophie ...) avec de résultats obtenus par des simulations directes, sur des grilles de discrétisation assez fines, sont présentés et commentés.

Enfin, des conclusions sur les résultats obtenus et les perspectives que nous envisageons dans ce domaine de recherche sont présentées.





# Chapitre 1

## Modélisation des écoulements turbulents

### 1.1 Introduction à la turbulence

La compréhension des phénomènes turbulents représente à l'heure actuelle un défi majeur aussi bien pour les scientifiques que pour les ingénieurs. La turbulence fait partie de notre expérience quotidienne. On la trouve un peu partout, dans les fluides qui constituent notre environnement immédiat: l'air, l'eau, comme par exemple: la circulation du sang à l'intérieur des vaisseaux sanguins, les écoulements de l'air autour d'une automobile ou d'un avion (en fait, tous les moyens de transport utilisés par l'homme sont directement confrontés à des milieux turbulents), les mouvements de "géofluides", comme le vent atmosphérique ou les courants fluviaux ou marins, les mouvements de fluides stellaires, comme la circulation gazeuse autour des planètes, jets de plasmas d'étoiles.

On pourrait dire que la turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux, où des mécanismes internes d'échanges d'énergie assurent la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques, répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques.

Bien que les équations qui décrivent les phénomènes turbulents soient bien établies, leur résolution analytique ou numérique reste peu accessible, comme on va le voir ci-après.

### 1.2 Les différentes approches de la turbulence

Il n'existe pas de théorie générale pour expliquer tous les phénomènes turbulents, mais il existe de nombreuses théories (ou approches) partielles, de niveaux de complexité différentes, ayant chacune leurs performances et leurs limitations spécifiques.

On a choisi de présenter trois de ces approches (mathématique, physique et numérique) qu'on considère essentielles pour la caractérisation de la turbulence.

### 1.2.1 Approche mathématique de la turbulence

La plupart des approches de la turbulence suppose que le mouvement d'un fluide visqueux et incompressible dans un domaine  $\Omega$  (un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$ , suffisamment régulière) est décrit par les équations de Navier-Stokes:

- équation de la dynamique :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[ \quad (1.1)$$

- équation de continuité :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[ \quad (1.2)$$

Les inconnues sont  $\mathbf{u}$  la vitesse et  $p$  la pression du fluide visqueux et incompressible qui a comme support  $\Omega$ . Toutes les quantités sont évaluées en  $(\mathbf{x}, t)$ , où  $\mathbf{x}$  désigne la position et  $t$  représente le temps.

On a supposé que la densité du fluide est constante ( $\rho = 1$ );  $f$  représente les forces volumiques appliquées au fluide et  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Le terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est le terme de transport (ou de convection) et le terme  $\nu \Delta \mathbf{u}$  est le terme de diffusion dans les équations de Navier-Stokes, ce dernier étant dû à l'existence des interactions au niveau moléculaire entre les particules, et se traduisant par une dissipation d'énergie.

**Remarque 1.2.1** *L'équation (1.1) est une adaptation de la loi de Newton  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$  au contexte de l'hydrodynamique et l'équation (1.2) traduit le fait que le fluide est incompressible (via le principe de conservation de la masse, voir [17]).*

**Remarque 1.2.2** *La réponse du fluide aux forces extérieures dépend de deux phénomènes de nature différente:*

- *la friction entre des éléments de fluide voisins qui se déplacent à des vitesses différentes; cette friction est d'autant plus importante que la viscosité du fluide est grande et*
- *l'effet d'entraînement du fluide par son propre mouvement (l'effet d'inertie); cet effet aura tendance à dominer l'évolution du fluide lorsqu'il se déplace à grande vitesse .*

*L'importance relative de ces deux effets détermine le régime dans lequel se trouve le fluide. Elle est caractérisée par un "paramètre de contrôle" appelé le nombre de Reynolds, qui est proportionnel à l'inverse de la viscosité ( $Re \approx 1/\nu$ ), dans le cas des équations de Navier-Stokes adimensionnées. Si  $Re$  est petit alors les effets de viscosité dominent les effets d'inertie et le fluide a tendance à se retrouver rapidement dans un état sans grandes*

*inhomogénéités spatiales et donc très régulier. Cette situation correspond au régime laminaire. Au contraire, si  $Re$  est grand, les effets d'inertie dominent (c'est le cas le plus souvent dans la nature) et le fluide se retrouve dans un état où son mouvement est si rapide que la viscosité n'est pas suffisamment efficace pour éliminer/diminuer les variations spatiales de la vitesse. On dit dans ce cas que le fluide est dans un régime turbulent.*

D'après la remarque (1.2.2), seul le paramètre  $Re$  fait la différence entre les deux régimes: laminaire et turbulent. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse, du point de vue mathématique, à la résolution du système de Navier-Stokes, sans ajouter d'autres contraintes sur le fait que l'écoulement soit turbulent.

Pour avoir un problème bien posé (c'est à dire existence et unicité d'une solution dans un cadre à définir) on complète les équations (1.1) et (1.2) par une condition initiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

et des conditions aux limites

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad \phi \text{ étant donnée.} \quad (1.4)$$

Si le domaine  $\Omega$  n'est pas borné (en particulier si  $\Omega = \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$ ), on considère aussi une condition à l'infini :

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) \quad \psi \text{ étant une fonction connue à divergence nulle.} \quad (1.5)$$

On peut considérer aussi des conditions aux limites périodiques

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + L_i \mathbf{e}_i, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.6)$$

où  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $L_i$  est la période dans la direction  $i$ .

Ces conditions n'ont pas vraiment une signification physique, mais elles ont le double avantage, d'une part *d'éliminer* les problèmes liés aux bords *en gardant* tous les autres qui apparaissent dans l'étude du système de Navier-Stokes et du point de vue numérique, elles sont faciles à implémenter (comme on va le voir dans le chapitre 4).

**Remarque 1.2.3** *Les termes sources, les données aux frontières et la condition initiale ne peuvent pas être totalement indépendants. Toutes ces données doivent être compatibles entre elles (par exemple: la condition initiale doit être à divergence nulle).*

**Remarque 1.2.4** *Aucune condition initiale n'est imposée sur la pression. En fait, dans ce cadre, la pression n'a plus sa signification thermodynamique habituelle, son rôle étant comparable à un multiplicateur de Lagrange qui assure à tout instant que la contrainte d'incompressibilité est satisfaite.*

Pour des raisons de nature physique, on est intéressé par des solutions  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  qui n'exploient pas à l'infini. On va supposer alors, que les données sont assez régulières, dans un sens qu'on établira ultérieurement.

**Définition 1.2.1** *On dit qu'une solution  $(\mathbf{u}, p)$  de (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) est **physiquement acceptable** si*

$$\mathbf{u}, p \in C^\infty(\Omega \times [0, \infty[)$$

et

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 dx < C \quad (\text{l'énergie est bornée}) \quad \forall t \geq 0.$$

Le problème qu'on se pose alors est *de trouver des solutions régulières, physiquement acceptables pour les équations de Navier-Stokes*.

L'étude théorique de l'existence, l'unicité et de la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes est assez technique. On peut montrer que le problème est bien posé en dimension 2 (dans un sens faible, voir Leray [62]), mais l'analyse de l'existence et de l'unicité en dimension 3 pose plus de difficultés. En principe, c'est la non-linearité du terme convectif qui est à l'origine des phénomènes de bifurcations des solutions en fonction du nombre de Reynolds, et qui, plus généralement, est à l'origine de la turbulence.

Malgré de nombreux efforts, la théorie mathématique concernant ce système est loin d'être complète. On va donc essayer de décrire et, si possible, de comprendre la turbulence par d'autres approches.

## 1.2.2 Approche physique de la turbulence

Une approche qui, on espère, nous permettra de mieux comprendre les phénomènes turbulents est l'approche physique. Il n'existe pas une définition générale et précise de la turbulence en mécanique des fluides, mais on peut la caractériser par un certain nombre de propriétés physiques observables, comme par exemple:

- **irrégularité en espace et en temps** : les variables physiques de l'écoulement (vitesse et pression), varient de façon aléatoire, ce qui rend impossible une approche déterministe (voir remarque (1.2.5)) de la turbulence; on ne peut pas décrire un mouvement turbulent, dans tous ses détails, comme une fonction du temps et de la position, mais il est possible d'en faire une description statistique en calculant, par exemple, des valeurs moyennes de la vitesse et de la pression.
- **la présence de structures de tailles différentes** qui interagissent entre elles.
- **diffusivité élevée** : est une propriété non du fluide mais du régime de l'écoulement; un champ turbulent diffuse fortement toute quantité transportable (comme par exemple

la température), mais aussi la quantité de mouvement.

- **écoulement rotationnel** : l'apparition de la turbulence est due parfois à la présence de parois ou d'obstacles, qui entraînent la création de vorticités à l'intérieur du fluide; un écoulement turbulent présente toujours des fluctuations du rotationnel de la vitesse.

- **dissipation** : la turbulence est un phénomène dissipatif, dû à la présence de forts gradients de vitesses instantanés; les taux de déformation instantané étant importants, ils contribuent à une forte conversion de l'énergie cinétique turbulente en chaleur.

- **phénomène tridimensionnel**<sup>1</sup> : dû le plus souvent à l'augmentation du nombre de Reynolds.

- **caractère chaotique** : les mouvements turbulents sont non prédictibles, c'est à dire qu'en connaissant de façon détaillée la configuration de l'écoulement à un certain instant, même si l'écoulement est régi par des équations bien déterminées (déterministes), dans la pratique, on ne peut pas prédire l'évolution ultérieure de l'écoulement pour des longs temps; la théorie du chaos a des implications très importantes en météorologie.

**Remarque 1.2.5** *Des petites variations dans les conditions initiales peuvent provoquer des variations importantes des variables de l'écoulement au cours du temps. C'est un des problèmes que soulève l'apparition de la turbulence, celui d'une perte de déterminisme physique à l'échelle macroscopique. En suivant les idées avancées par Ruelle et Takens [81], une explication pour cette perte de déterminisme pourrait justement être celle d'évolution vers le chaos du système dynamique non-linéaire et dissipatif associé à l'écoulement considéré. Selon ces auteurs, l'apparition de la turbulence peut être liée (dans certains cas) à l'existence d'un attracteur étrange dans l'espace des phases. L'étude des propriétés de tels attracteurs constitue une des possibilités d'investigation du comportement chaotique de la turbulence.*

### 1.2.3 Approche numérique de la turbulence

Comme on l'a déjà dit, la plupart des écoulements rencontrés dans le domaine de la pratique industrielle sont de nature turbulente et beaucoup de phénomènes, tels que le transfert de chaleur ou de masse, sont liés au mouvement du fluide, donc leur étude nécessite le calcul préalable de l'écoulement considéré. Ainsi, la prédétermination numérique des écoulements turbulents est très importante pour les applications pratiques.

Dans cette sous-section on présente quelques méthodes de prédétermination d'écoulements turbulents, méthodes qui permettent d'obtenir des quantités caractéristiques de

---

1. il existe aussi une turbulence dite "bidimensionnelle" que l'on rencontre dans des situations particulières; les mécanismes qui la génèrent sont différents de ceux de la turbulence tridimensionnelle.

l'écoulement, autres que celles obtenues par expérimentation directe sur la configuration étudiée.

Dans les équations de Navier-Stokes, le fluide est considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, l'idée la plus naturelle qu'on peut avoir pour *trouver les solutions turbulentes* des équations de Navier-Stokes est *de résoudre directement ces équations*, c'est à dire de calculer toutes les échelles de l'écoulement, des échelles énergétiques aux échelles dissipatives.

A partir de la loi de Kolmogorov [53], on peut montrer que le rapport entre l'échelle des gros tourbillons et l'échelle de Kolmogorov (l'échelle qui caractérise la plus petite longueur d'onde des mouvements qui peuvent se développer dans le fluide) est proportionnel à  $Re^{3/4}$ , ce qui implique que pour capturer toutes les échelles qui apparaissent dans un écoulement turbulent, il faut utiliser une grille de calcul avec un nombre de points dans chaque direction de l'espace proportionnel à  $Re^{3/4}$ , donc implicitement, le nombre de points sur une grille tridimensionnelle sera de l'ordre de  $Re^{9/4}$ . On peut aussi montrer, que le temps de calcul est proportionnel à  $Re^{11/4}$ .

Aussi, en regardant le coût de ce calcul direct (en place mémoire et en temps CPU), on comprend bien que ce type de simulation est envisageable pour des écoulements relativement simples dans l'étude de la turbulence.

On peut alors considérer, que **la simulation numérique directe (Direct Numerical Simulation ou DNS)** est une première tentative de calcul de la turbulence mais, qui est "réservée" au domaine de la recherche. Elle ne peut pas se concevoir dans les buts de prévisions numériques d'écoulements d'intérêt pratique, vu l'ampleur des ressources informatiques qui seraient nécessaires<sup>2</sup>.

Dans un écoulement turbulent on distingue trois classes d'échelles du mouvement :

- **mouvement d'ensemble** : correspondant à l'évolution "moyenne" ou "globale" de l'écoulement
- **mouvement d'agitation turbulente** : concerne les tourbillons réels qui existent dans l'écoulement
- **mouvement d'agitation moléculaire** : seuls les effets microscopique sont pris en compte.

Comme dans la plupart des problèmes réels les valeurs quantifiant statistiquement les propriétés de l'agitation turbulente suffisent, une autre idée qui peut être envisagée est de faire une prédétermination des paramètres statistiques (qui restent à définir) des variables de l'écoulement, pour lesquels il existe un déterminisme statistique [44], afin de résoudre les équations de la dynamique du fluide.

---

2. à titre d'exemple, pour un écoulement turbulent dans une conduite on trouve pour  $Re = 8 \cdot 10^4$  un nombre de points  $N^3 = 4 \cdot 10^{10}$

La décomposition des grandeurs caractéristiques instantanées d'un écoulement turbulent en une partie macroscopique et une partie turbulente, d'apparence aléatoire, permettra ensuite de développer un traitement statistique des équations du mouvement.

En suivant ce point de vue, O. Reynolds a proposé la décomposition des valeurs instantanées de la vitesse et de la pression en

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad p(\mathbf{x}, t) = \overline{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (1.7)$$

Le symbole  $\overline{(\ )}$  représente l'opérateur de moyenne et  $(\ )'$  représente les fluctuations ou les écarts par rapport aux moyennes.

Il existe principalement trois types de moyenne utilisés dans l'analyse statistique des équations de Navier-Stokes:

- **Moyenne d'ensemble** (ou moyenne statistique) : c'est la moyenne prise sur l'ensemble de toutes les réalisations possibles d'un écoulement turbulent (les mesures de vitesse et de pression à chaque moment du temps et en chaque point du domaine de calcul). On utilise ce type de moyenne pour faire le traitement statistique des résultats obtenus par simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes (*statistique après la résolution*).
- **Moyenne temporelle** : qui est définie en référence à un échantillon, et non pas sur un ensemble comme dans le cas précédent. On définit les moyennes temporelles des variables de l'écoulement par:

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds$$

$$\overline{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(\mathbf{x}, s) ds$$

où  $T$  est une échelle temporelle choisie telle qu'elle soit suffisamment grande par rapport à l'échelle temporelle de la turbulence.

Si  $T$  est assez grand, les valeurs moyennes ne dépendent pas de  $t$  et on les définit par :

$$\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds \quad \text{et}$$

$$\overline{p}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(\mathbf{x}, s) ds.$$

Dans ce cas, l'écoulement est dit stationnaire.



Utilisant la décomposition (1.7) dans les équations de Navier-Stokes, on obtient les équations pour les grandeurs moyennes, connues comme les *équations de Reynolds*:

$$(\partial_t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f} - \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \tau \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[ \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[ \quad (1.9)$$

où le terme supplémentaire  $\tau$  est le tenseur de Reynolds qui représente l'influence "énergétique" des petites échelles sur les valeurs moyennes de l'écoulement.

On procède ensuite à la résolution des équations moyennées obtenues. Mais, il faut compter qu'après le traitement statistique qu'on a fait, on a une perte d'informations sur les équations, ce qui se traduit par le fait que le système obtenu est ouvert. L'information perdue doit donc être *reconstruite*, puis *réintroduite* dans le système à l'aide de schémas de fermeture convenables (modélisant le tenseur de Reynolds qui apparaît et qui est "responsable" de toutes les fluctuations dans l'écoulement), afin d'assurer la conservation des caractères fondamentaux du modèle de Navier-Stokes (comme par exemples la non-linéarité advective, diffusion, dissipation).

Les méthodes de fermeture dans ce cas s'appellent "**méthodes de fermeture en un point**"<sup>3</sup>.

Parmi les contraintes de l'application de ces méthodes on mentionne le fait qu'on a accès uniquement aux grandeurs moyennes de l'écoulement, ainsi que parfois, selon certains auteurs [13], la résolution numérique des équations RANS peut devenir complexe.

- **Moyenne spatiale**: de façon similaire, on peut utiliser une moyenne spatiale sur une réalisation quelconque du champ turbulent:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} \quad (1.10)$$

Cette moyenne n'a de sens que pour les écoulements homogènes en espace. Pour les champs inhomogènes (surtout pour les simulations des grandes structures) on utilise une moyenne spatiale filtrée, définie par une convolution avec une fonction d'*atténuation* (un filtre) sur une largeur spatiale  $\Delta$ , autour du point  $\mathbf{x}$ :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} G_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \quad (1.11)$$

Comme dans le cas précédent, en moyennant les équations de Navier-Stokes à l'aide de (1.11) on obtient un système ouvert pour les variables  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{p}$ . Le tenseur des contraintes qui résulte de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes après avoir pris la moyenne,

---

<sup>3</sup>. ces méthodes sont désignées en anglais sous le sigle RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) équations

a une expression analogue à celui obtenu en moyennant temporellement les équations, mais il ne modélise pas la même physique. En fait, ce tenseur, que l'on appelle *tenseur de sous-maille* ne rendra compte que des fluctuations à petite échelle (plus petite que la maille de calcul, qu'on va choisir en correspondance avec la largeur du filtre utilisé) qui seront plus faciles à modéliser, ayant un caractère plus universel.

Les modèles de fermeture dans ce cas s'appellent *les modèles de sous-maille*.

La présentation de l'évolution de ces modèles, ainsi que l'analyse mathématique et numérique de quelques uns, feront l'objet des chapitres suivants.

C'est donc, le troisième type de résolution numérique, qu'on a choisi en fait pour nos simulations numériques : **la simulation des grandes échelles** (en anglais, **Large Eddy Simulation** ou **LES**).

La LES peut être vue comme une approche hybride entre la DNS et la RANS. En fait, elle consiste à faire une simulation partielle (les grandes structures turbulentes) et une modélisation partielle (les petits tourbillons). L'idée est basée sur l'observation que si les grands tourbillons sont très différents selon les géométries, leurs structures varient beaucoup avec le type d'écoulement considéré, par contre, les petits tourbillons ont un caractère beaucoup plus universel. Les simulations numériques à des nombres de Reynolds élevés, se basent donc sur un découpage des fluctuations turbulentes qui permet de ne calculer que les grandes structures énergétiques et modéliser les petites structures.

Parmi les avantages de cette méthode de simulation on mentionne le fait qu'en l'appliquant on pourrait réduire deux principaux défauts des autres méthodes mentionnées : d'une part, l'exigence en puissance de calcul requise par la simulation numérique directe et d'autre part, l'empirisme des fermetures en un point des équations moyennées temporellement. Aussi, on peut envisager des simulations pour des écoulements dans des géométries plus complexes et à des nombres de Reynolds assez élevés.

**Remarque 1.2.6** *Toutes ces méthodes sont actuellement utilisées, ce qui montre qu'aucune n'est parfaite. Le choix d'une méthode est conditionné par plusieurs facteurs: la facilité de mise en oeuvre, le coût du calcul, le degré de généralité, la souplesse d'utilisation.*



# Chapitre 2

## La simulation des grandes structures turbulentes

Ce chapitre est consacré à la présentation de la méthode de simulation des grandes échelles (LES) des écoulements turbulents.

Dans une première section on expose le principe et les principaux objectifs de la méthode. Ensuite nous présentons une description de la LES dans le cadre de l'analyse spectrale des équations de Navier-Stokes, introduisant le concept de cascade d'énergie. Quelques considérations sur les techniques de filtrage, ainsi qu'une présentation des modèles classiques de la LES font l'objet des sections suivantes. Enfin, deux modèles sélectifs sont proposés comme directions de recherche: le modèle de Smagorinsky sélectif et le modèle anisotrope sélectif.

### 2.1 Principe et objectifs

L'**idée** de la simulation des grandes structures est de calculer par résolution numérique directe les structures turbulentes de *grande taille* et de modéliser celles de *petite taille*. Le **but** est de mieux rendre compte des propriétés des grandes structures qui sont en général fortement dépendantes de la géométrie de l'écoulement et de réserver la modélisation à un niveau où l'on peut y attacher des caractéristiques plus *universelles*.

Parmi les **principaux objectifs** de la méthode de Simulation des Grandes Echelles on énumère brièvement:

- définir des modèles de fermeture qui prennent bien en compte les effets de bord;
- développer l'analyse mathématique de ces modèles (si possible);
- proposer des algorithmes compétitifs pour les simulations numériques;
- valider numériquement ces algorithmes.

Ce sont en fait les objectifs que nous avons suivi dans la réalisation de ce mémoire de thèse.

## 2.2 La simulation des grandes échelles et la cascade d'énergie

Le concept de cascade d'énergie est essentiel pour la compréhension de la méthode de simulation des grandes structures turbulentes, comme on va le voir ci-après.

Un mouvement turbulent peut être conçu comme un enchevêtrement de structures tourbillonnaires dont les vecteurs vorticités (rotationnels de la vitesse) sont orientés dans toutes les directions et sont fortement instationnaires. Lorsque les conditions aux limites le permettent (c'est à dire quand on peut faire l'hypothèse de périodicité dans les trois directions de l'écoulement), une alternative naturelle à l'analyse dans l'espace physique peut être l'analyse spectrale des équations du mouvement. Cela peut nous fournir des informations importantes concernant les mécanismes physiques de la turbulence.

Sans entrer dans les détails (on revient dans le chapitre 4 sur l'analyse *spectrale* des équations de Navier-Stokes), on rappelle juste l'expression du spectre d'énergie cinétique dans l'espace de Fourier:

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in S_{k,1/2}} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

(où  $S_{k,1/2}$  représente la couronne  $S_{k,1/2} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ tel que } |\mathbf{k}| \in [k - 1/2, k + 1/2)\}$  et  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$  sont les coefficients de Fourier du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ )

et l'équation d'évolution de l'énergie cinétique dans l'espace spectral (obtenue à partir des équations de Navier-Stokes):

$$(\partial_t + 2\nu k^2)E(k, t) = W(k, t) + T(k, t) \quad (2.2)$$

où  $W(k, t)$  est le terme qui représente la *production* d'énergie due aux forces appliquées au fluide et  $T(k, t)$  représente le *transfert* d'énergie dû aux termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes.

D'habitude on *interprète* l'équation (2.2) de la manière suivante: l'énergie est *introduite* dans le système au niveau des grandes échelles par le terme  $W(k, t)$ , ensuite elle est transférée aux échelles de plus en plus petites par le terme  $T(k, t)$  pour être enfin dissipée au niveau des plus petites échelles<sup>1</sup>, par le terme  $2\nu k^2 E(k, t)$ .

Le transfert d'énergie des grandes échelles vers les échelles de petite taille est dû principalement au phénomène d'étirement des filets tourbillons (en anglais "*vortex stretching*"). Dans l'évolution de la turbulence, on considère que les structures turbulentes sont des éléments tourbillonnaires qui *s'étirent*, les uns les autres, produisant le transfert d'énergie à des échelles de plus en plus petites, jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives et dissipent l'énergie. Ce processus, illustré par la figure 2.1, est connu sous le

---

1. les échelles dites *dissipatives* qui correspondent aux fréquences  $k > k_d$ ,  $k_d$  étant l'échelle de Kolmogorov (voir Annexe A).

nom de *cascade d'énergie*.

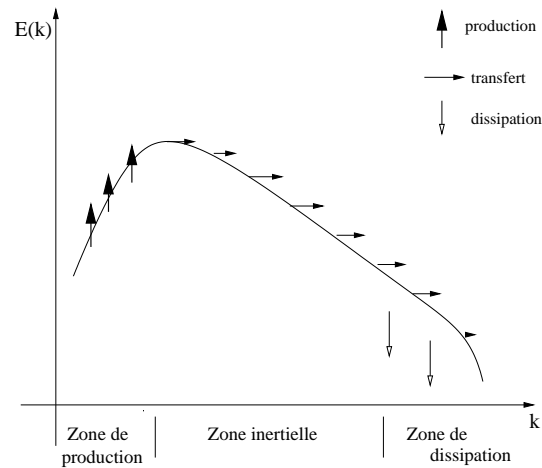


FIG. 2.1 – Schéma du spectre d'énergie turbulente

Les expériences ont montré que les régions qui correspondent au production et au dissipation ne se recouvrent pas, même pour des faibles nombres de Reynolds. De plus, on a remarqué que la largeur de la zone de séparation (la *zone inertielle*), augmente avec les valeurs de  $Re$ .

L'un des principaux résultats de la théorie de Kolmogorov (voir Annexe A), déduit d'une hypothèse d'auto-similarité et d'une analyse dimensionnelle, prédit que la pente du spectre d'énergie dans la zone inertielle est de  $-5/3$  en échelle logarithmique. Plus précisément, on a :

$$E(k) \approx C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.3)$$

où  $C_K$  est la *constante de Kolmogorov* et sa valeur, mesurée expérimentalement, est de l'ordre de 1.5 [63];  $\epsilon$  représente le taux de dissipation.

Dans le chapitre 1 on a présenté les principales méthodes de simulation numérique: la DNS, la RANS et la LES, en insistant sur les principes qui leurs sont caractéristiques. On revient ici avec une autre description, cette fois dans le contexte de l'analyse spectrale du système de Navier-Stokes (figure 2.2).

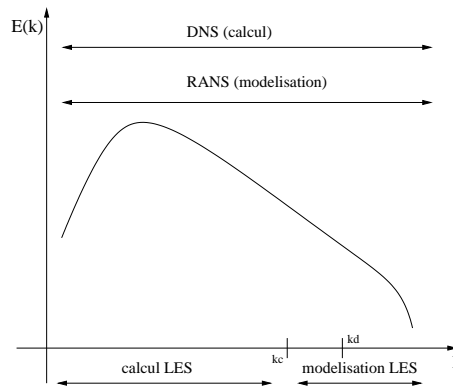


FIG. 2.2 – Spectre d'énergie et méthodes de simulation numérique

La LES *consiste* à ne simuler que les modes qui sont inférieurs à une certaine échelle  $k_c$ , dite *échelle de coupure* et qui est située dans la zone inertielle du spectre ( $k_c < k_d$ ), plutôt que de simuler numériquement tous les modes, ce qu'on fait d'ailleurs dans une simulation numérique directe. Il reste à analyser comment on *représente* l'effet des modes non-résolus sur ceux qui sont résolus. Ce problème n'est pas simple et suppose une bonne compréhension de la physique.

Dans la section 2.5 on va présenter quelques possibilités qui peuvent être envisagées pour résoudre de manière satisfaisante ce problème.

## 2.3 Le filtrage

Dans cette section on définit ce qu'on entend par *grandes structures* et *petites structures* d'un écoulement turbulent en vue d'une simulation des grandes échelles.

Comme on l'a déjà dit, une grandeur turbulente, telle que la vitesse ou la pression, peut s'écrire comme la somme d'une partie **filtrée** et d'une partie **fluctuante** (ou à petite échelle) :

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (2.4)$$

Pour isoler les contributions des grandes structures, il est habituel d'introduire un opérateur de moyenne spatiale filtrée (cf. chapitre 1, section 1.2.3).

La partie filtrée  $\bar{\psi}$  sera définie par :

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} G_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

où  $G_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  désigne le filtre appliqué à la variable instantanée au point  $\mathbf{x}$  et *détermine* la partie des fluctuations qui est incorporée dans les gros tourbillons.  $\Delta$  est un paramètre

qui représente la largeur du filtre choisi.

L'opérateur de filtrage est supposé normé :

$$\int_{\Omega} G_{\Delta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = 1$$

En turbulence homogène, la grandeur filtrée ne dépend pas de la position  $\mathbf{x}$  et donc, on peut l'écrire :

$$\bar{\psi} = \int_{\Omega} G_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

qui représente en fait un produit de convolution  $\bar{\psi} = G * \psi$  et qui sera donc facile à calculer dans l'espace spectral.

Parmi les filtres les plus souvent utilisés on mentionne :

- le filtre “**sharp cut-off**” défini dans l'espace physique par :

$$G(\zeta) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(\pi \zeta_i / \Delta)}{\pi \zeta_i}$$

où  $\Delta = \pi/k_c$  ( $k_c$  est l'échelle de coupure) et  $\zeta = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Ce filtre a l'avantage d'avoir une expression très simple dans l'espace spectral :

$$G(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\mathbf{k}| < k_c \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le choix d'un tel filtre est donc naturel quand on utilise des méthodes spectrales ou pseudo-spectrales.

- le filtre “**chapeau**” (ou en anglais **top hat filter**) défini par :

$$G(\zeta) = \begin{cases} 1/\Delta, & \text{si } |\zeta| < \Delta/2 \\ 0, & \text{si } |\zeta| \geq \Delta/2. \end{cases}$$

L'inconvénient de ce filtre est qu'il n'est pas localisé dans l'espace spectral, où il *devient* une fonction oscillante :

$$G(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin(k_i \Delta/2)}{k_i \Delta/2}.$$

- le filtre “**gaussien**” défini par :

$$G(\zeta) = \left( \frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{3/2} \exp \{ -6|\zeta|^2 / \Delta^2 \}$$

Ce filtre est utilisable aussi bien dans l'espace physique que dans l'espace spectral et il donne souvent de bons résultats.



**Remarque 2.3.1** *Si la taille du filtre est constante alors l'opérateur de filtrage spatial vérifie des propriétés de linéarité et d'indépendance relatives aux opérations de dérivation spatio-temporelle. Cependant, la taille du filtre  $\Delta$  qui correspond à l'échelle de séparation des structures de l'écoulement, peut varier dans un écoulement fortement inhomogène. Ce cas exige naturellement l'utilisation de maillages différents dans les trois directions de l'espace. Il peut y avoir des grandes disparités sur la taille du filtre  $\Delta$ , ce qui fait que l'hypothèse de commutation entre l'opération de filtrage et les dérivées spatiales ne s'applique plus, comme le montrent Ghosal et Moin [49].*

## 2.4 Les équations de Navier-Stokes filtrées

Appliquant une opération de filtrage aux équations de Navier-Stokes (1.1) et (1.2), on obtient les équations régissant les variables moyennes  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{p}$  (qu'on appelle les équations de Navier-Stokes filtrées) :

$$\partial_i \bar{\mathbf{u}} + \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}} = \bar{f} - \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

et

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.6)$$

ou sous la forme scalaire<sup>2</sup>:

$$\partial_i \bar{u}_i + \partial_j (\overline{u_i u_j}) = \bar{f}_i - \partial_i \bar{p} + \nu \partial_{jj}^2 \bar{u}_i \quad i, j = 1..3 \quad (2.7)$$

et

$$\partial_i \bar{u}_i = 0 \quad i = 1..3. \quad (2.8)$$

Le produit filtré des vitesses instantanées s'écrit :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \underbrace{\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{u'_i u_j} + \overline{u_j u'_i}}_{C_{ij}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j}}_{R_{ij}}$$

où

- le tenseur  $L$ , défini par  $L_{i,j} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  est le tenseur de Leonard ,
- le tenseur  $C$ , défini par  $C_{i,j} = \overline{u'_i u_j} + \overline{u_j u'_i}$  est le tenseur *croisé* ,
- le tenseur  $R$ , défini par  $R_{i,j} = \overline{u'_i u'_j}$  est le tenseur de Reynolds.

Le tenseur de Leonard  $L$  peut être calculé directement à partir des valeurs moyennes  $\bar{\mathbf{u}}$ , une fois qu'on connaît explicitement l'expression du filtre. Le tenseur *croisé* représente l'interaction entre les grandes échelles et les petites échelles. Le tenseur de Reynolds ne

---

2. on note  $\partial_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  et on applique la sommation d'Einstein chaque fois qu'un indice se répète

fait intervenir que les petites structures, les fluctuations. Les termes  $C_{ij}$  et  $R_{ij}$  correspondent à la fois au transfert d'énergie des échelles explicitement calculés, vers les échelles implicites de sous-maille (un transfert direct) et au transfert inverse (en anglais, “backscatter”) des échelles de sous-maille vers les grandes échelles.

Revenant à la formulation vectorielle, on peut réécrire (2.5) sous la forme:

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \bar{f} - \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \cdot T. \quad (2.9)$$

où  $T$  est le tenseur de sous-maille qui vérifie

$$\nabla \cdot T = -(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}. \quad (2.10)$$

et qui représente la somme des tenseurs de Leonard, *croisé* et de Reynolds

$$T_{i,j} = L_{i,j} + C_{i,j} + R_{i,j}$$

Après avoir obtenu les équations pour les variables moyennes (2.9) et (2.6), on passe à la “fermeture” du système obtenu. Le problème de fermeture consiste dans la modélisation du tenseur de sous maille  $T$ , par des modèles qu'on appelle des modèles de fermeture de sous-maille.

## 2.5 Modélisation sous-maille

Le terme *modélisation sous-maille* est justifié par le fait qu'on cherche à modéliser l'influence des échelles plus petites que la maille de calcul, sur la dynamique des échelles résolues (celles de grande taille).

La modélisation du tenseur  $T$  est en fait le point clé de la simulation des grandes échelles.

Un modèle de fermeture est généralement construit à partir de l'intuition et/ou expérience physique, de données théoriques et de propriétés mathématiques des équations qu'on considère comme équations de référence.

Il n'existe pas de modèles universels. Parmi la multitude de modèles existants à l'heure actuelle, un choix doit être fait pour chaque problème traité, en fonction des objectifs fixés .

Pour la modélisation du tenseur de sous-maille  $T$  on a plusieurs choix:

- modéliser toutes ses composantes ; les modèles obtenus suivant cette idée (voir le modèle de similarité des échelles proposé par Bardina & al.) se montrent en pratique trop peu dissipatifs, ce qui rend le calcul numérique instable; pour la stabilisation du calcul la solution adoptée a été de coupler ce modèle avec un modèle de viscosité turbulente (par exemple un terme de Smagorinsky);
- introduire une viscosité turbulente reliant le tenseur de contrainte sous-maille  $T$  aux

tenseur de taux de déformation filtré (fermeture au premier ordre);

- prescrire des équations de transport pour les tensions turbulentes; ces équations permettent de traiter de façon plus exacte l'anisotropie du tenseur de sous-maille, mais elles sont difficiles à mettre en oeuvre [59], [89];

- proposer une modélisation algébrique pour le tenseur  $T$ ; c'est en fait une expression simplifiée des modèles précédents, qui sont plus faciles à résoudre numériquement [82].

C'est la deuxième option qui est la plus utilisée dans la pratique. C'est celle que nous allons décrire plus en détail dans la suite.

L'hypothèse d'une dépendance linéaire entre les contraintes turbulentes et le tenseur de déformation du champ moyen (dite hypothèse de Boussinesq) :

$$T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_t\bar{S}_{ij} \quad (2.11)$$

(où  $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j\bar{u}_i + \partial_i\bar{u}_j)$  est le tenseur de déformation du champ filtré et  $\nu_t$  est un coefficient appelé *viscosité turbulente*) a été largement utilisée en vue de définir des modèles de fermeture de sous-maille.

La viscosité turbulente  $\nu_t = \nu_t(\mathbf{x}, t)$  n'est pas une propriété du fluide, mais une propriété du mouvement lui-même. Elle est déterminée en chaque point du domaine de calcul, la relation (2.11) traduisant en fait une dépendance locale, entre les grandeurs prises au même point et au même instant. Du point de vue physique, l'hypothèse (2.11) revient à conférer aux contraintes turbulentes un caractère diffusif.

Utilisant (2.11) pour la caractérisation du tenseur  $T$  et tenant compte de la remarque (2.3.1), on est amené à résoudre les équations de la LES sous la forme :

$$\partial_i\bar{u}_i + \partial_j(\bar{u}_i\bar{u}_j) = \bar{f}_i - \partial_i\bar{P} + 2\partial_j[(\nu + \nu_t)\bar{S}_{ij}] \quad i, j = 1..3 \quad (2.12)$$

et

$$\partial_i\bar{u}_i = 0 \quad i = 1..3. \quad (2.13)$$

où  $\bar{P}$  est la pression modifiée  $\bar{P} = \bar{p} - 1/3T_{kk}$ .

Les modèles de viscosité turbulente consistent donc à *modifier la viscosité* de l'écoulement de façon qu'on puisse compenser l'absence d'une partie des termes non-linéaires d'interaction liés aux petites échelles.

L'idée de la plupart des modèles de viscosité turbulente est d'évaluer  $\nu_t$  en fonction des échelles, de vitesse  $\tilde{u}$  et de longueur  $l$ , représentatives de l'agitation turbulente :

$$\nu_t \sim \tilde{u} \cdot l.$$

Ces modèles se différencient principalement par la définition de l'échelle de vitesse  $\tilde{u}$ . En général, l'échelle de longueur  $l$  est déterminée par la taille de la maille de calcul

$l = \Delta = \pi/k_c$  ( $k_c$  étant l'échelle de coupure). Pour un maillage uniforme, la valeur de  $l$  est unique, mais pour un maillage irrégulier (utilisé dans le cas des écoulements fortement inhomogènes), l'évaluation de l'échelle  $l$  peut poser parfois des problèmes.

Les différentes façons d'évaluer l'échelle de vitesse caractéristique  $\tilde{u}$  permettent de définir différents modèles sous-maille basés sur le concept de viscosité turbulente comme on va le voir ci-après.

**Le modèle de Smagorinsky** est l'un des modèles les plus utilisés dans le domaine de la LES. Il a été introduit par le météorologue J. Smagorinsky [88] en vue des simulations numériques de la circulation générale atmosphérique.

Pour ce modèle, la vitesse caractéristique  $\tilde{u}$  est une fonction de l'échelle de longueur  $l = \Delta$  et du tenseur de déformation du champ filtré  $\overline{S}$ .

Ainsi, le modèle de Smagorinsky est défini par :

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\overline{S}| \quad (2.14)$$

où  $|\overline{S}| = \sqrt{2 \sum_{i,j=1}^3 (\overline{S}_{ij}^2)}$ .  $C_s$  est la "constante" de Smagorinsky qui n'est pas en général une vraie constante, mais une fonction du filtrage et du type d'écoulement considéré.

Des simulations numériques directes dans une géométrie simple (turbulence homogène dans un cube, par exemple) et pour des nombres de Reynolds qui peuvent devenir faibles, ont montré que  $C_s$  ne peut pas être considérée comme une constante. Pour la déterminer, dans [66] on propose des approximations du type:

$$C_s = 0.128 \left( 1 + \frac{24.5}{Re_{sm}} \right)^{-1}$$

où  $Re_{sm}$  est le nombre de Reynolds de sous-maille construit sur  $\Delta$ .

Le modèle de Smagorinsky s'avère en pratique trop dissipatif, particulièrement dans les zones de transition et de proche paroi. Il ne permet pas de simuler les différentes étapes de la transition dans une couche limite, par exemple, sauf dans les cas fortement bruités ("*by-pass transition*") Voke & Yang, 1993.

Ce modèle a cependant servi comme modèle de base pour de nombreux travaux de recherche dans le domaine de la simulations des grandes échelles.

**Les modèles de viscosité spectrale** consistent à relier la viscosité turbulente à l'énergie disponible à la coupure  $E(k_c, t)$  et au nombre de cette échelle de coupure  $k_c$ , par une relation du type :

$$\nu_t(k, k_c, t) = \nu_t^+(k, k_c) \sqrt{\frac{E(k_c, t)}{k_c}}$$

où  $\nu_t^+(k, k_c)$  est une viscosité turbulente adimensionnelle et  $k_c = \pi/\Delta$ .

En se basant sur des simulations de turbulence homogène isotrope incompressible, dans

lesquelles les échelles sous-maille étaient paramétrées à l'aide de la théorie EDQNM (“Eddy Dumped Quasi-Normal Markovian”) <sup>3</sup>, Chollet et Lesieur [14] ont proposé l'expression suivante pour  $\nu_t^+$  :

$$\nu_t^+(k, k_c) = 0.267 + 9.21 \exp[-3.03(k_c/k)]$$

Le fait que  $\nu_t^+$  soit bornée *garantit* que :

$$\nu_t = 0 \Leftrightarrow E(k_c, t) = 0,$$

une propriété importante pour la modélisation sous-maille. Cette propriété traduit le fait que pendant les phases initiales (laminaires) de la transition, on a  $E(k_c, t) = 0$  et donc  $\nu_t = 0$ .

Le modèle spectral de Chollet et Lesieur a donné de bons résultats dans le cas des écoulements turbulents isotropes (Chollet et Lesieur, 1981), ainsi que dans le cas des écoulements cisailés libres (Comte, 1989; Silvestrini, 1993).

L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne tient pas compte de l'organisation en phase de l'écoulement et qu'il ne peut représenter aucun caractère local dans l'espace physique.

**Le modèle de fonction de structure (O. Metais et M. Lesieur, 1992)** a été conçu à partir d'une transposition partielle du modèle de viscosité spectrale à l'espace physique. Ainsi, on peut définir une viscosité turbulente  $\nu_t$  localement dans l'espace physique, qui répond au besoin d'une formulation pour des géométries complexes et pour des applications qui ne supposent pas des conditions limites périodiques.

Pour ce modèle, l'échelle de vitesse caractéristique est déterminée par l'intermédiaire d'une fonction de structure d'ordre 2 des vitesses résolues, évaluées à l'échelle du maillage  $\Delta$  et définie par :

$$F_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)|^2 \rangle_{|\mathbf{r}|=\Delta} . \quad (2.15)$$

L'expression de la viscosité turbulente est dans ce cas :

$$\nu_t = C_{LM} \Delta F_\Delta^{1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t)$$

avec la constante du modèle  $C_{LM} = 0.105 C_k^{-3/2}$  ( $= 0.063$  pour  $C_k = 1.4$ ).

Dans la pratique, comme on n'a pas accès aux moyennes d'ensemble, on fait appel à des moyennes locales. Ainsi, dans (2.15) la moyenne  $\langle ., . \rangle$  est calculée comme une moyenne locale de différences quadratiques de vitesses entre  $\mathbf{x}$  et les six points de maillage voisins [64]. Ce modèle a été testé dans de nombreux cas, comme par exemple: la turbulence homogène incompressible et isotrope (Metais et Lesieur, 1992), écoulement incompressible à l'aval d'une marche descendante (Silveira et al. 1992), mais on a constaté qu'en présence de grosses structures quasi-bidimensionnelles, il se montre trop dissipatif. Les travaux de David [35] et Ducros [39] sur des variantes sélectives/filtrées de ce modèle,

---

3. pour plus de détails voir Lesieur [64]

ont amélioré ce défaut pour certains types d'écoulement.

Un autre modèle classique de la LES est **le modèle de Germano M. & al. (1990)** qui est un des modèles appelés “dynamiques”, puisqu'il permet une évaluation dynamique de la “constante” de Smagorinsky à partir de la simulation elle-même. L'idée de ce modèle est d'appliquer un double filtrage, utilisant deux filtres de largeurs différentes:  $(\overline{\quad})$  le filtre réel et  $(\tilde{\quad})$  le filtre test (on suppose que le filtre test est plus grossier que le filtre réel). Soient  $T_{ij}$  le tenseur sous-maille agissant avec le filtre réel et  $T_{ij}^*$  celui agissant avec le filtre test :

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j$$

et respectivement

$$T_{ij}^* = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\overline{u}_i \overline{u}_j}.$$

Les tenseurs  $T$  et  $T^*$  ne peuvent pas être calculés directement, car on ne connaît pas les produits  $u_i u_j$ . Cependant, ces deux tenseurs sont *liés* par l'identité suivante, dite identité de Germano :

$$\widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\overline{u}_i \overline{u}_j} \equiv T_{ij}^* - \tilde{T}_{ij} = \mathcal{G}_{ij}. \quad (2.16)$$

Les  $\mathcal{G}_{ij}$  peuvent être maintenant évalués, à partir du champ  $\overline{u}$ . On suppose que pour paramétrer les tenseurs  $T$  et  $T^*$  on utilise le même modèle, ici le modèle de Smagorinsky, c'est à dire :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C \Delta^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (2.17)$$

$$T_{ij}^* - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk}^* = -2C \tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij}. \quad (2.18)$$

Remplaçant (2.17) et (2.18) dans (2.16) on trouve :

$$\mathcal{G}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{G}_{kk} = -2C [\tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - \Delta^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}] \quad (2.19)$$

qui est une équation tensorielle avec l'inconnue  $C$ . Germano et al. [48] ont proposé de contracter l'équation (2.19) par  $\overline{S}_{ij}$  obtenant ainsi l'expression suivante pour  $C$  :

$$C = - \frac{\mathcal{G}_{ij} \cdot \overline{S}_{ij}}{2[\tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - \Delta^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}] \cdot \overline{S}_{ij}} \quad (2.20)$$

Pour éviter les problèmes qui peuvent apparaître quand le dénominateur de (2.20) s'anule, on moyenne dans les directions homogènes, obtenant dans ce cas :

$$C = - \frac{\langle \mathcal{G}_{ij} \cdot \overline{S}_{ij} \rangle}{\langle 2[\tilde{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - \Delta^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}] \cdot \overline{S}_{ij} \rangle} \quad (2.21)$$

comme une fonction de la coordonnée non-homogène et de temps.

Une autre possibilité, proposée par Lilly D. K. (1992) consiste à calculer la constante  $C$  par une méthode de moindres carrés. Ainsi on calcule  $C$  tel que la somme des carrés des résidus  $E_{ij}$  :

$$E_{ij} = \mathcal{G}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathcal{G}_{ij} + 2C[\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} - \Delta^2|\widetilde{S}|\widetilde{S}_{ij}]$$

soit minimum. On obtient dans ce cas :

$$C = -\frac{\mathcal{G}_{ij} \cdot [\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} - \Delta^2|\widetilde{S}|\widetilde{S}_{ij}]}{[\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} - \Delta^2|\widetilde{S}|\widetilde{S}_{ij}] \cdot [\tilde{\Delta}^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij} - \Delta^2|\widetilde{S}|\widetilde{S}_{ij}]} \quad (2.22)$$

Avec la procédure dynamique sur le modèle de Smagorinsky, de très bons résultats ont été obtenus pour les simulations en canal plan transitionnel et turbulent (Germano & al. 1991; Piomelli, 1993).

**Les modèles de sous-maille anisotropes** ont été reconnus depuis longtemps comme une alternative naturelle au modèle de Smagorinsky isotrope. Des tests *a priori* basés à la fois sur des expériences et sur des résultats obtenus par des simulation numériques directes ont montré que ces modèles ont des corrélations<sup>4</sup> meilleures que le modèle de Smagorinsky.

Un des modèles anisotropes est le modèle connu comme **le modèle du gradient** (Vreman et al. 1997) pour lequel le tenseur de sous-maille  $T$  est défini par :

$$T_{ij} = C\Delta^2\partial_k\bar{u}_i\partial_k\bar{u}_j \quad (2.23)$$

où  $\Delta$  est la largeur du filtre choisi.

La dérivation de ce modèle, basée sur le développement de Taylor du terme de Leonard, est présentée dans [30]. C'est donc évident que le modèle (2.23) ne rend pas compte de tout le tenseur sous-maille, mais on l'accepte comme la plus simple alternative anisotrope du modèle de Smagorinsky classique, ayant la symétrie requise par rapport aux indices  $i$  et  $j$ .

Une des difficultés associées au modèle du gradient est qu'il produit en plus de la dissipation, du transfert inverse. Ce transfert peut être responsable d'instabilités numériques. Pour éviter ces instabilités, on ignore en général le terme de sous-maille là où sa contribution à la balance d'énergie est positive (technique dite de "clipping"). Le modèle ainsi obtenu se montre en général insuffisamment dissipatif. D'habitude, il est complété avec un terme de Smagorinsky, en résultant un modèle mixte. Le but de ce modèle mixte est de modéliser de façon plus précise les échanges d'énergie entre les échelles résolues et celles non-résolues. Du point de vue physique, le terme de Smagorinsky est censé modéliser les fluctuations de taille entre 0 et  $\Delta/2$ , tant que le modèle considéré sera responsable de la modélisation des échelles de taille comprise entre  $\Delta/2$  et  $\Delta$ . Un des désavantages des

---

4. au sens de l'évaluation des différences entre  $\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  calculées expérimentalement, et le tenseur sous-maille  $T$  modélisé et calculé numériquement

modèles mixtes est qu'ils ne sont pas capables de garder le gain offert par l'anisotropie du modèle original.

Il est très probable que le modèle (2.23) contient de la dissipation, ainsi que du backscatter, dans chaque point, selon les différentes directions de déformation. Il serait donc important de distinguer parmi ces directions, pour savoir ensuite dissiper les petites échelles produites dans l'écoulement.

Dans [30], Cottet et Wray proposent des formules de discrétisation pour (2.23) qui sont faciles à implémenter dans des codes différences finies (comme on va le voir dans le chapitre 4) et qui permettent de déterminer les directions qui correspondent au dissipation et celles qui correspondent au backscatter, dans chaque point du domaine de calcul.

Dans la section 2.6.2 on présente l'idée qui a conduit au modèle qu'on appelle par la suite *le modèle anisotrope sélectif* et dans la section 4.1.4 l'idée de la dérivation de ce modèle du point de vue de l'implémentation numérique.

On peut trouver un panorama d'ensemble des modèles de sous-maille dans Launder & Spalding [60]. On a choisi de présenter dans cette section, juste les modèles qu'on considère *classiques* dans le domaine de la LES.

## 2.6 Directions de recherche

Les recherches actuelles dans le domaine de la LES sont orientées vers la définition et la validation des nouveaux modèles sous-maille.

Dans cette section on propose d'abord une variante *sélective* du modèle de Smagorinsky, qui pourrait s'appliquer en fait facilement aux différents modèles de sous-maille, surtout à ceux qui se montrent en pratique trop dissipatifs, et ensuite on présente le modèle anisotrope proposé par Cottet & Wray (1997).

### 2.6.1 Le modèle de Smagorinsky sélectif

Pour mieux comprendre les mécanismes de la turbulence on va adopter maintenant le point de vue de la formulation vitesse-tourbillon pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, car c'est probablement celui qui met le mieux en évidence les possibilités de singularité en dimension 3 .

Pour celà, on introduit d'abord une des caractéristiques les plus intéressantes d'un écoulement turbulent: **la vorticité**. Elle est définie comme le rotationnel de la vitesse locale du fluide:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}.$$

En prenant le rotationnel de l'équation (1.1) on obtient l'équation dynamique pour la



vorticité:

$$\partial_t \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \quad (2.24)$$

L'équation (2.24) est une équation d'advection diffusion avec un terme  $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}$  dit *de stretching*, qui représente les effets de déformation des tourbillons dans la direction  $\omega$ .

La vorticité est perpendiculaire au plan du mouvement en dimension 2 et sa grandeur est uniformément bornée. Par contre, en dimension 3, le mécanisme non-linéaire de *stretching* pourrait produire des singularités en temps fini.

P. Constantin et Ch. Fefferman [21] ont montré que si les directions de vorticité *se comportent bien* dans les zones où les valeurs de la vorticité sont importantes, la solution des équations de Navier-Stokes est régulière.

L'hypothèse (2.25), qui caractérise en fait *le bon comportement* des directions de vorticité, repose sur les valeurs de l'angle  $\alpha$  entre deux vecteurs tourbillons suffisamment proches:

“si ces valeurs sont suffisamment petites au sens

$$|\sin \alpha(\omega(x), \omega(y), t)| < \frac{|x - y|}{\rho} \quad (2.25)$$

alors la régularité de la solution des équations de Navier-Stokes est assurée”.

Cette idée<sup>5</sup> nous a conduit à regarder les angles entre le tourbillon et le tourbillon moyen correspondant en chaque point de la grille et à chaque instant, et de choisir d'*activer* une viscosité turbulente (c-à-d. d'ajouter un terme de Smagorinsky, par exemple, aux équations de Navier-Stokes) seulement si elles ne vérifient pas l'hypothèse (2.25).

Plus précisément, la variante du modèle sélectif proposée a comme but de réduire le support de la viscosité turbulente du modèle de sous-maille considéré (en particulier, on l'a testé sur le modèle de Smagorinsky). Cela sera fait en multipliant la viscosité turbulente du modèle par une fonction filtre agissant comme un détecteur de zones d'alignement de la vorticité. Ainsi, le modèle de sous-maille ne sera appliqué que si l'écoulement est localement tridimensionnel. E. David a appliqué cette idée, proposant un filtre détecteur de petites échelles, dans le cas du modèle de la fonction de structure [35].

Dans ce sens, on calcule d'abord le vecteur tourbillon moyen  $\omega_m$  en chaque point du domaine de calcul et à chaque pas de temps par l'intégrale

$$\omega_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\int_{|\mathbf{r}|=\Delta \mathbf{x}} d\mathbf{r}} \int_{|\mathbf{r}|=\Delta \mathbf{x}} \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}.$$

qui est évaluée dans l'espace discret par une moyenne sur les six points voisins:

$$\omega_m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (\omega(\mathbf{x} + \Delta_i x_i, t) + \omega(\mathbf{x} - \Delta_i x_i, t)).$$

---

5. on présente dans le chapitre 3 le cadre mathématique qui nous a guidé dans la dérivation de ce modèle

Ensuite, on calcule l'angle  $\alpha_m$  fait entre le vecteur tourbillon local instantané  $\omega$  et le tourbillon moyen correspondant  $\omega_{\mathbf{m}}$  défini par :

$$\alpha_m(\mathbf{x}, t) = \arcsin\left(\frac{\omega(\mathbf{x}, t) \times \omega_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, t)}{|\omega(\mathbf{x}, t)| \cdot |\omega_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}, t)|}\right) \quad (2.26)$$

et on définit un filtre *détecteur de turbulence à petite échelle* de la manière suivante:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha_0 \leq \alpha_m \leq \pi - \alpha_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $\alpha_0$  est la valeur qui correspond au maximum de la courbe de densité de probabilité de la variable aléatoire *angle*  $\alpha_m$  comme on va le voir plus précisément dans les deux cas qu'on a choisi pour les simulations numériques (chapitre 4).

Physiquement, les valeurs de  $\alpha_m$  qui vérifient l'hypothèse (2.25) correspondent à l'alignement de la vorticité dans un certain voisinage (ce qui se passe dans les écoulements laminaires ou en début de transition), par contre celles qui ne la vérifient pas indiquent une variabilité de la direction du vecteur tourbillon, et donc vont correspondre   des zones de turbulence .

L'expression de la viscosité turbulente sera définie finalement par :

$$\nu_t = \Psi(\mathbf{x}, t)\nu_{smago} \quad .$$

## 2.6.2 Le modèle anisotrope sélectif

Dans cette sous-section on va utiliser les équations de Navier-Stokes dans la formulation en vorticité (2.24) et on va supposer des conditions aux limites périodiques.

On sait que le terme de *stretching*  $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est nul dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, mais il est responsable de la réorientation et de l'intensification local du tourbillon, deux des caractéristiques essentielles des écoulements tridimensionnels. Dans le cas d'un fluide parfait ( $\nu = 0$ ), ce terme agit comme un forçage quadratique sur la partie convection du tourbillon qui est susceptible de produire un excès d'enstrophie que la viscosité ne suffit pas vraiment   contre-balancer. Pour éviter l'apparition des singularités on a le choix d'ajouter des termes de dissipation (dits *dissipation sous-maille*) qui peuvent se substituer au mécanisme de cascade d'énergie. Mais on a vu qu'en ajoutant un terme de Smagorinsky (la variante tourbillon, pour cette formulation) le modèle obtenu se révèle en pratique trop dissipatif.

Tenant compte de l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} \omega \cdot \nabla \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \omega_i S_{ij} \omega_j d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \omega_i S_{ij}^+ \omega_j d\mathbf{x} \quad (2.28)$$

où  $S_{ij}^+$  représente la partie positive du tenseur de déformation, Cottet et Wray [30] proposent une *nouvelle* viscosité turbulente, définie par :

$$\nu_t^+ = C\Delta^2[S_{ij}^+].$$

Il existe évidemment d'autres choix possibles, comme par exemple, tout tenseur ayant la même *intensité* que  $S_{ij}^+$ . On sait que la condition d'incompressibilité sur le fluide considéré requiert que la somme des valeurs propres du tenseur de déformation  $S$  soit nulle, donc on peut remplacer  $S^+$  par  $-S^-$ , par exemple. La différence entre ces modèles tient des directions de dissipations qui leurs sont associées.

Pour faire le bon choix, il est utile de savoir que les petites échelles sont produites dans les directions associées aux valeurs propres négatives de  $S$ . Le schéma de la figure 2.3 permet de comprendre ce qui se passe au voisinage d'un point hyperbolique, avec deux valeurs propres de signe opposé (pour simplifier, on se place en dimension 2). Donc, c'est dans ces directions qu'il faut dissiper de l'ensrophie, ce qui justifie le choix:

$$\nu_t^- = -C\Delta^2[S_{ij}^-].$$

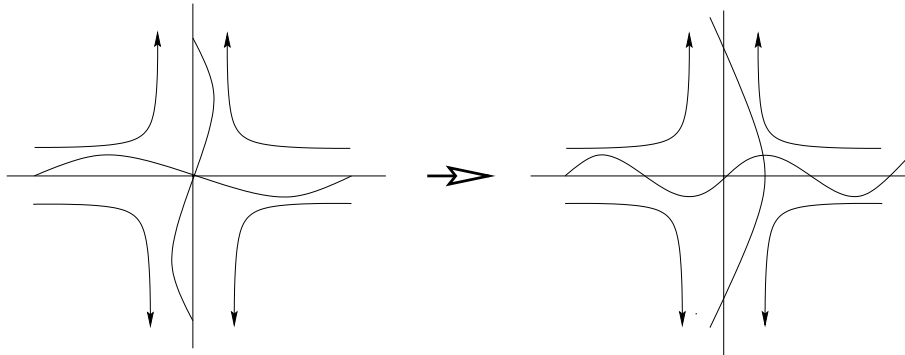


FIG. 2.3 – *Ecoulement autour d'un point hyperbolique et production des petites ou grandes échelles selon les directions de déformation.*

Le modèle final est obtenu en ajoutant un terme de pression de manière à assurer que la vorticit   reste   divergence nulle:

$$\partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{q} + \nu \Delta \omega + \mathbf{C}_+ \operatorname{div}(\mathbf{S}^+ \nabla \omega) \quad (2.29)$$

ou bien, dans la formulation vitesse-pression:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \mathbf{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{C}_+ \operatorname{div}(\mathbf{S}^+ \nabla \mathbf{u}) \quad (2.30)$$

où on a noté  $C_+ = C\Delta^2$ , avec  $\Delta$  la largeur du filtre utilisé.

## Chapitre 3

# Analyse mathématique de quelques modèles LES

Dans ce chapitre on présente d'abord une revue des résultats théoriques concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible, puis une analyse mathématique du modèle de Smagorinsky et enfin quelques résultats concernant un nouveau modèle de turbulence proposé par Marsden et Skholler utilisant une technique de dérivation géométrique.

### 3.1 Revue des résultats théoriques concernant les équations de Navier-Stokes

#### 3.1.1 Existence, unicité et régularité des solutions

**Position du problème. Les espaces fonctionnels**

On considère les équations de Navier-Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide newtonien, incompressible dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \{2, 3\}$ ):

$$(\partial_t + u(x, t) \cdot \nabla)u(x, t) = f(x, t) - \nabla p(x, t) + \nu \Delta u(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[, \quad \nu > 0 \quad (3.1)$$

et

$$\operatorname{div} u(x, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[ \quad (3.2)$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

et

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad \phi \text{ donnée.} \quad (3.4)$$

**Le problème** qu'on se pose est **de trouver**  $u$  et  $p$  tels que (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) aient lieu.

Pour la résolution mathématique de ce problème on considère les espaces :

- $\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$  l'espace des fonctions test, où  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  représente l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ ,
  - $H =$  l'adhérence de  $\mathcal{V}$  dans  $L^2(\Omega)^n$  et
  - $V =$  l'adhérence de  $\mathcal{V}$  dans  $H_0^1(\Omega)^n$
- $n \in \{2, 3\}$  étant la dimension de l'espace considéré.

$H$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert munis respectivement de la norme  $|\cdot|_{L^2}$  et de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  et on peut les caractériser comme suit :

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0, v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$$

D'autres propriétés des espaces  $H$  et  $V$  sont présentées dans Temam [92].

On note par  $A$  l'opérateur linéaire non borné dans  $H$  associé au produit scalaire de  $V^1$ :

$$(Au, v) = ((u, v)) \quad \forall u, v \in V.$$

Le domaine de l'opérateur  $A$  est noté par  $D(A)$  et d'après la théorie sur les systèmes linéaires elliptiques on a

$$D(A) = (H^2(\Omega))^n \cap V.$$

Soit  $V'$  l'espace dual de  $V$ . Alors, on a :

$$D(A) \subset V \subset H \subset V',$$

où toutes les inclusions sont continues, chaque espace est dense dans le suivant et de plus l'inclusion  $V \hookrightarrow H$  est compacte. De plus :

$$Au = -P\Delta u,$$

où  $P$  est le projecteur orthogonal dans  $(L^2(\Omega))^n$  sur l'espace  $H$  (dans le cas périodique  $Au = -\Delta u, \quad \forall u \in D(A)$ ).

L'opérateur  $A$  est autoadjoint, positif et d'inverse compact dans  $H$ . Il existe une suite  $\lambda_i$  telle que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$$

et une base orthonormale dans  $H$ ,  $\{w_k\}_{k \in \mathbf{N}^*}$  tel que :

$$Aw_k = \lambda_k w_k, k \in \mathbf{N}^*$$

Les quantités  $\frac{1}{2}|u|^2$  et  $\|u\|^2$  représente l'énergie cinétique et l'enstrophie respectivement.

---

1. on utilise les notations standard pour les produits scalaires et les normes dans  $L^2$  et dans  $H_0^1$  :  $(u, v) = \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx, ((u, v)) = \int_\Omega \nabla u(x) : \nabla v(x) dx, |u| = (u, u)^{1/2}$  et  $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$

### Formulation faible. Résultats d'existence et d'unicité

La formulation faible des équations de Navier-Stokes (due à J. Leray) ne dépend que de la vitesse  $u$ . Elle est obtenue en multipliant l'équation (3.1) avec une fonction test  $v \in \mathcal{V}$ , puis en intégrant sur  $\Omega$ .

Si on note  $u(t)$  l'application

$$x \in \Omega \longmapsto u(x, t)$$

alors le problème à résoudre dans la formulation faible est de trouver les solutions  $u(t) \in V$  pour presque tout  $t$  telles que l'équation:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, \quad (3.5)$$

soit vérifiée au sens de distributions sur  $]0, T[$  ou  $]0, \infty[$ .

Le terme  $b$  est donné par:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot w_j dx \quad (3.6)$$

(dans un domaine où les intégrales ont un sens).

On appelle **solution faible** des équations de Navier-Stokes sur  $[0, T]$  un champ de vecteurs de divergence nulle

$$u \in L^2((0, T); V) \cap L^\infty((0, T); H) \text{ pour } T > 0$$

et qui vérifie l'équation (3.5) au sens des distributions, et **solution forte**, la solution qui appartient à :

$$L^2((0, T); D(A)) \cap L^\infty((0, T); V) \text{ pour } T > 0.$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions sont différents selon la dimension de l'espace considéré.

L'existence de la solution est généralement obtenue par une méthode constructive: on construit d'abord une solution approchée (par une méthode de Galerkin par exemple) et ensuite on passe à la limite à l'aide d'estimations *a priori* sur la solution construite. On peut aussi utiliser les théorèmes de point fixe de Leray-Schauder ou bien de Banach, qui donnent les solutions sur un "petit" intervalle de temps  $]0, T^*[$ . La partie *délicate* dans ce type de démonstration est la dérivation des estimations *a priori*. Celles-ci dépendent de l'évaluation du terme  $b$ . Il existe plusieurs estimations de ce terme, obtenues en combinant l'inégalité de Hölder avec d'autres inégalités, comme par exemple: celles de Sobolev, d'interpolation, de Gagliardo-Nirenberg.

On résume maintenant les résultats connus concernant l'existence et l'unicité dans le contexte de la théorie des espaces  $L^2$ :

• **en dimension 2**, la théorie mathématique concernant les équations de Navier-Stokes est assez satisfaisante, le problème étant bien posé, au sens qu'on connaît l'existence et l'unicité de la solution faible; on a le même type de résultat pour les solutions fortes, mais pour celles-ci, seulement dans le cas où la donnée initiale est *suffisamment régulière*.

Plus précisément on énonce ici un théorème qui regroupe en fait ces résultats :

**Théorème 3.1.1** *i) Si  $f$  et  $u_0$  sont données telles que*

$$f \in L^2(0, T; V') \quad \text{et} \quad u_0 \in H \quad (3.7)$$

*alors il existe **une unique solution faible** des équations de Navier-Stokes qui est dans  $\mathcal{C}([0, T]; H)$  et qui vérifie*

$$u' \in L^2(0, T; V').$$

*ii) Si  $f$  et  $u_0$  sont données telles que*

$$f \in L^\infty(0, T; H) \quad \text{et} \quad u_0 \in V \quad (3.8)$$

*alors il existe **une unique solution forte** des équations de Navier-Stokes qui est dans  $\mathcal{C}([0, T]; V)$ .*

• **en dimension 3**, on a seulement des résultats partiels : l'existence et l'unicité des solutions fortes sur un interval  $]0, T^*[$  (le temps de *blow-up*  $T^*$  dépendant de la condition initiale (Ladyshzenskaya [54])), ainsi que l'existence globale des solutions faibles.

On peut énoncer dans ce cas :

**Théorème 3.1.2** *i) Si  $f$  et  $u_0$  sont données telles que (3.7) alors il existe **une solution faible** des équations de Navier-Stokes qui est continue au sens faible sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $H$  et qui vérifie*

$$u' \in L^{4/3}(0, T; V').$$

*ii) Si  $f$  et  $u_0$  sont données telles que (3.8) alors il existe  $T^* = T^*(u_0)$  tel que sur l'intervalle  $[0, T^*]$  les équations de Navier-Stokes admettent **une unique solution forte**.*

**Remarque 3.1.1** *Actuellement on ne sait pas si la solution faible des équations de Navier-Stokes 3D est unique, ou quelles sont les hypothèses qui peuvent la rendre unique, ainsi que l'existence de la solution forte pour tout  $T$ .*

### Singularités. Blow-up

La première tentative de relier les équations de Navier-Stokes et la turbulence est due à J. Leray [62], qui a conjecturé l'apparition de singularités dans les solutions des équations de Navier-Stokes et a introduit la notion de *solution turbulente* (au sens de la définition de la solution faible présentée auparavant). Alors, si les solutions faibles des équations de Navier-Stokes présentent des singularités, il est naturel de penser à étudier les possibilités d'apparition de ces singularités, ainsi que leur nature. Concernant le deuxième point, d'après Mandelbrot (voir Temam [92]), les singularités qui peuvent apparaître sont localisées dans des ensembles de dimension de Hausdorff inférieure à 4. On peut trouver dans [92] une présentation de quelques résultats concernant la structure des ensembles de singularités, ainsi que des résultats concernant l'estimation de la dimension Hausdorff de ces ensembles.

Nous, on va *regarder* plutôt, dans les deux sections qui suivent, quels sont les *facteurs* qui *contrôlent* l'apparition de ces singularités (le *blow-up* des solutions), d'abord dans le cas des fluides parfaits et ensuite dans le cas des fluides visqueux.

#### 3.1.2 Le cas des fluides parfaits

Dans cette sous-section on présente quelques problèmes liés à l'apparition des singularités dans le cas des équations d'Euler 3D.

Les équations d'Euler 3D incompressible (les équations de Navier-Stokes avec  $\nu = 0$ ) dans la formulation en vorticit   s'  crivent :

$$(\partial_t + u(x, t) \cdot \nabla)\omega(x, t) = \mathbf{S}(x, t)\omega(x, t) \quad (3.9)$$

et

$$\nabla \cdot u(x, t) = 0, \quad u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.10)$$

o    $u(x, t)$  est obtenue    partir de  $\omega(x, t) = \nabla \times u(x, t)$  (appliquant la loi de Biot-Savart) :

$$u(x, t) = -\frac{1}{4} \int \nabla \left( \frac{1}{|y|} \right) \times \omega(x + y, t) dy \quad (3.11)$$

et  $\mathbf{S}(x, t)$  est donn   par la formule<sup>2</sup> :

$$\mathbf{S}(x, t) = \frac{3}{4\pi} P.V. \int M(\hat{y}, \omega(x + y, t)) \frac{dy}{|y|^3} \quad (3.12)$$

La matrice  $M$  est une fonction de deux variables (d'un vecteur unit   et d'un vecteur) et elle est donn  e par la formule :

$$M(\hat{y}, \omega) = \frac{1}{2} [\hat{y} \otimes (\hat{y} \times \omega) + (\hat{y} \times \omega) \otimes \hat{y}] \quad (3.13)$$

---

2. cette formule s'obtient d'apr  s une diff  rentiation de la loi de Biot-Savart qui donne le gradient de la vitesse en fonction de  $\omega$  et ensuite par une d  composition du gradient de la vitesse dans sa partie sym  trique  $\mathbf{S}$  et sa partie anti-sym  trique  $\omega$



où  $\hat{y} = y/|y|$ .

On sait qu'en dimension trois, le problème d'Euler est localement bien posé dans  $H^s(\mathbb{R}^3)$  pour  $s > 3$  au sens qu'on connaît l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.9) pour des données dans un espace de Sobolev suffisamment régulier ( $H^s$  avec  $s > 5/2$ ), la solution étant continue et définie dans le même espace pour un interval de temps  $(0, T)$  avec

$$T \geq \frac{C}{\|u(\cdot, 0)\|_{H^s}}.$$

Cependant, le problème de l'existence de la solution pour tous les temps est encore un problème ouvert.

Le problème de montrer qu'une solution régulière au moment initial reste régulière au cours du temps nous amène au problème de l'étude des singularités qui peuvent se développer dans l'écoulement.

À cause du mécanisme de stretching, il peut exister des solutions de (3.9) qui correspondent à des conditions initiales régulières, mais qui peuvent développer des singularités en temps fini. Cela correspond à une perte de régularité de la solution. Du point de vue physique, il semble *naturel* d'associer cette perte de régularité de la solution à un certain temps à l'*explosion* de la *norme-sup* de la vorticité.

Dans ce sens, Beale, Kato et Majda [6] ont établi une relation mathématique rigoureuse entre *l'accumulation de la vorticité* et *la formation des singularités* dans le cas des équations d'Euler 3D :

**Théorème 3.1.3** (Beale, Kato & Majda)

Soit  $u \in C^0([0, T[; H^3(\mathbb{R}^3))$  une solution des équations d'Euler incompressible. On suppose qu'il existe un temps  $T_*$  tel que la solution n'est plus continue au-delà de  $T_*$  et que celui-ci est le premier temps avec cette propriété. Alors on a

$$\int_0^{T_*} \|\omega(t)\|_{L^\infty} dt = \infty, \quad (3.14)$$

et en particulier,

$$\limsup_{t \nearrow T_*} \|\omega(t)\|_{L^\infty} = \infty. \quad (3.15)$$

Autrement dit, d'après le théorème (3.1.3) seule la norme-sup de la vorticité contrôle le *breakdown* des solutions régulières des équations d'Euler 3D : donc si  $\|\omega\|_\infty$  reste bornée au cours du temps, la solution reste régulière (si on part avec une condition initiale régulière).

Un point de vue différent de celui adopté par Beale-Kato-Majda en ce qui concerne l'étude de l'apparition des singularités est, d'après Constantin [19], de *regarder* les directions de

vorticité dans les zones où la vorticité est *importante*.

On présente plus en détail ce point de vue parce que c'est celui que l'on a suivi dans nos recherches de nouveaux modèles sous-maille.

On sait qu'**en dimension deux**, le vecteur vorticité ne change pas de direction et sa grandeur reste bornée, donc il ne peut pas apparaître de singularités si on part avec des conditions initiales *assez régulières*, mais **en dimension trois** on n'a plus la même situation. Comme on l'a déjà dit, c'est le mécanisme non-linéaire de stretching qui peut *produire* des singularités en temps fini. Donc, il faut procéder à l'analyse de ce mécanisme, pour pouvoir ensuite proposer des solutions en vue d'obtenir des résultats de régularité satisfaisants.

Dans ce cas, Constantin propose *d'analyser* le **facteur de stretching** défini par

$$\alpha(x, t) = (\mathbf{S}(x, t)\xi(x, t))\xi(x, t) \quad (3.16)$$

où  $\xi$  est le vecteur **direction de vorticité** défini par :

$$\xi(x, t) = \begin{cases} \frac{\omega(x, t)}{|\omega(x, t)|}, & \text{si } \omega(x, t) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \omega(x, t) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

**Remarque 3.1.2**  $\alpha$  et  $\xi$  sont définis dans des régions où "il y a de la vorticité", c'est à dire dans des régions :

$$\{x : |\omega(x, t)| > 0\}.$$

La formule de calcul suivante pour le terme  $\alpha$  est essentielle pour l'analyse mathématique proposée par Constantin dans [19] :

$$\alpha(x, t) = \frac{3}{4\pi} P.V. \int D(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t)) \cdot |\omega(x+y, t)| \frac{dy}{|y|^3} \quad (3.18)$$

où  $\hat{y} = \frac{y}{|y|}$  et le facteur  $D$  est défini par

$$D(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \cdot e_3) (\text{Det}(e_1, e_2, e_3))$$

où les  $e_i$  sont trois vecteurs unités et  $\text{Det}(e_1, e_2, e_3)$  représente le déterminant de ces trois vecteurs. Du point de vue géométrique,  $D$  représente le volume du parallélépipède de côtés  $\hat{y}$ ,  $\xi(x+y)$  et  $\xi(x)$  et en particulier il dépend de  $\xi(x+y)$  seulement par la projection orthogonale de celui-ci sur  $\xi(x)$  (notée par  $P_{\xi(x)}^\perp \xi(x+y)$ ).

On peut prouver que :

$$|D(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t))| < |P_{\xi(x, t)}^\perp \xi(x+y, t)|$$

et encore, si on note par  $\theta$  l'angle formé par les vecteurs  $\xi(x, t)$  et  $\xi(x+y, t)$  respectivement, qu'on a :

$$|D(\hat{y}, \xi(x+y, t), \xi(x, t))| < |\sin \theta| \quad .$$

**Remarque 3.1.3** *D'après l'estimation :*

$$|\sin \theta| \leq 2 |\sin (\theta/2)| = |\xi(x+y, t) - \xi(x, t)|$$

on déduit que le déterminant  $D$  s'annule si les directions de vorticité dans les points  $x$  et  $x+y$  sont soit parallèles soit antiparallèles.

Revenons maintenant   l'équation pour la grandeur de la vorticité  $|\omega(x, t)|$  :

$$\underbrace{(\partial_t + u(x, t) \cdot \nabla)}_{D_t} |\omega(x, t)| = \alpha(x, t) |\omega(x, t)|. \quad (3.19)$$

Cette équation *exprime* bien le rôle joué par  $\alpha(x, t)$  : en fait  $\alpha$  est *la dérivée logarithmique* du module de la vorticité. Donc, d'après le théorème de Beale, Kato et Majda (3.1.3) et de l'équation (3.19) il est évident que la condition

$$\int_0^T \|\alpha(\cdot, t)\|_{L^\infty} dt < \infty$$

est suffisante pour avoir la régularité de la solution sur  $[0, T]$ .

Constantin et Majda ont analysé le problème de la régularité de la solution des équations d'Euler suivant la voie *des directions de vorticité*. Ils ont considéré deux cas correspondant respectivement aux hypothèses suivantes :

H1)

$$|P_{\xi(x,t)}^\perp \xi(x+y, t)| \leq \frac{|y|}{R(t)}$$

pour  $|y| \leq L$  ( $L$  fixé) et  $x$  et  $x+y$  étant dans des *zones de vorticité*,  
et H2)

$$|\xi(x+y, t) - \xi(x, t)| \leq \frac{|y|}{\rho} \quad \text{pour } |y| \leq L.$$

Les résultats obtenus dans ces deux cas sont présentés dans [25].

Nous nous sommes intéressés plutôt aux résultats obtenus pour les fluides visqueux, ce que nous présentons dans la section suivante.

### Résultats de régularité pour les équations de Navier-Stokes 3D

En passant maintenant au cas des équations de Navier-Stokes, on mentionne que des résultats de régularité ont été obtenus, comme par exemple :

i) Si les données initiales appartiennent à  $H^k(\mathbb{R}^3)$ , avec  $k > 5/2$  alors la solution est régulière sur un intervalle  $]0, T[$ , où  $T$  est indépendant de la viscosité  $\nu$ .

ii) Si à l'instant  $t_1$  la solution faible appartient à  $H^1$ , alors elle reste régulière sur l'intervalle  $[t_1, T_\nu]$ , où  $T_\nu (> t_1 > 0)$  dépend de  $\nu$  et de  $\|u(t_1)\|_{H^1}$ .

Mais, on a choisi ici de ne présenter que le résultat de régularité obtenu par Constantin et Fefferman [21], parce que c'est celui qui nous a inspiré pour le modèle sélectif qu'on présente dans la section 2.6.1.

En fait, l'idée de regarder les directions de vorticité présentée dans le cas des équations d'Euler est essentielle pour la compréhension du phénomène physique et aussi pour le déroulement de la démonstration mathématique du théorème suivant :

**Théorème 3.1.4** (Constantin et Fefferman)

1) Pour toute solution faible des équations de Navier-Stokes 3D on a :

$$\int_0^T \int_{\{(x,t); |\omega(x,t)| > \tilde{\Omega}\}} |\nabla \xi(x,t)|^2 dx dt \leq \frac{C}{\nu \tilde{\Omega}} \int_{\Omega} \{|u_0(x)|^2 + |\nabla \times u_0(x)|^2\} dx \quad (3.22)$$

2) On suppose qu'il existe des constantes  $\tilde{\Omega}$  et  $r$  telles que

$$|P_{\xi(x,t)}^\perp \xi(x+y,t)| \leq \frac{|y|}{r} \quad (3.23)$$

pour  $|\omega(x,t)| > \tilde{\Omega}$ ,  $|\omega(x+y,t)| > \tilde{\Omega}$  et  $t \in [0, T]$ . Alors, la solution des équations de Navier-Stokes 3D est une solution forte sur  $[0, T]$ .

**Remarque 3.1.4** La relation (3.22) signifie que dans les régions avec une forte vorticité, la direction de la vorticité est régulière uniformément par rapport à la donnée initiale, avec une dépendance de la viscosité, en facteur  $\frac{1}{\nu}$ .

On présente ici un **schéma de démonstration** du théorème de Constantin et Fefferman, parce qu'on se servira de ce résultat pour la justification mathématique du modèle de Smagorinsky sélectif.

L'idée de la démonstration est de régulariser la vitesse de convection par convolution avec une fonction régulière  $\phi_\delta$ , ensuite d'obtenir des estimations *a posteriori* pour les solutions obtenues en vue de montrer la régularité de ces solutions. L'intérêt est de trouver des bornes qui ne dépendent pas de  $\delta$  et de passer à la limite pour  $\delta \rightarrow 0$ , utilisant des résultats classiques de compacité.

Dans **une première étape** on procède à la régularisation de la vitesse de convection et on cherche une estimation de la norme  $L^1$  de la vorticité. Ainsi, en absence de forces extérieures ( $f = 0$ ), l'équation (3.1) devient :

$$(\partial_t + u_\delta(x, t) \cdot \nabla - \nu \Delta)u(x, t) + \nabla p(x, t) = 0 \quad (3.24)$$

avec

$$u_\delta = \Phi_\delta * u$$

où  $\Phi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^3} \Phi(\frac{x}{\delta})$ ,  $\delta > 0$  et  $\Phi$  est une fonction régulière   support compact et qui vérifie  $\int \Phi = 1$ .

Si on multiplie (3.24) par  $u$  et qu'on intègre par rapport   la variable d'espace et par rapport au temps on obtient l'inégalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \int |u(x, t)|^2 dx + \nu \int_0^t \int |\nabla u(x, s)|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \int |u_0(x)|^2 dx \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

Pour trouver l'estimation de la norme  $|\omega(x, t)|_{L^1}$  on prend le rotationnel de l'équation (3.24) et on pose  $u_\delta = u - v_\delta$  obtenant ainsi :

$$(\partial_t + u(x, t) \cdot \nabla - \nu \Delta)\omega(x, t) = \mathbf{S}(x, t)\omega(x, t) + \nabla \times (v_\delta(x, t) \cdot \nabla u(x, t)) \quad (3.26)$$

Maintenant en multipliant (3.26) par  $\xi(x, t) = \frac{\omega(x, t)}{|\omega(x, t)|}$  on trouve :

$$\begin{aligned} (\partial_t + u(x, t) \cdot \nabla - \nu \Delta)|\omega(x, t)| + \nu|\omega(x, t)||\nabla \xi(x, t)|^2 = \\ = \xi(x, t) \cdot [\mathbf{S}(x, t)\omega(x, t) + \nabla \times (v_\delta(x, t) \cdot \nabla u(x, t))] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{C}^2$  qui s'annule dans un voisinage de 0. En particulier, on choisit

$$f(x) = \int_0^x (x - y)\Psi(y)dy$$

où la fonction  $\Psi$  vérifie  $\Psi(y) > 0$ ,  $\Psi = 0$  si  $y$  est dans un voisinage de 0 ou  $y > \Omega_0$  et

$$\int_0^{\Omega_0} \Psi dy = 1.$$

Alors, on a  $f'' \geq 0$ ,  $0 \leq f' \leq 1$  et

$$xf'(x) = x \int_0^x \Psi(y)dy = x \quad \text{pour } x \geq \Omega_0.$$

Après une multiplication de (3.27) par  $f'(|\omega(x, t)|)$  suivie d'une intégration sur  $\{x : |\omega| > \Omega_0\}$  et d'une intégration sur  $[0, t]$  (utilisant les propriétés de  $f$  et l'inégalité de l'énergie (3.25)) on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} f(|\omega(x, t)|)dx + \nu \int_0^t \int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} |\omega(x, s)| |\nabla \xi(x, s)|^2 dx ds &\leq \\ &\leq \int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} |\nabla \times u_0(x)| dx + \frac{2}{\nu} |u_0(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le terme de droite  $Q = \int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} |\nabla \times u_0(x)| dx + \frac{2}{\nu} |u_0(x)|^2 dx$  ne dépend pas de  $\Omega_0$ , donc de cette équation on peut obtenir deux estimations importantes, en faisant :

I.  $\Omega_0 \rightarrow 0$  (et donc  $f(x) \rightarrow x$ ) nous avons :

$$\int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} |\omega(x, t)| dx + \nu \int_0^t \int_{\{x:|\omega|>\Omega_0\}} |\omega(x, s)| |\nabla \xi(x, s)|^2 dx ds \leq Q$$

et donc ,

$$|\omega(x, t)|_{L^1} \leq Q \quad (3.29)$$

II.  $\Omega_0 = \tilde{\Omega} > 0$  on trouve :

$$\int_0^t \int_{\{x:|\omega|>\tilde{\Omega}\}} |\nabla \xi(x, s)|^2 dx ds \leq \frac{Q}{\nu \tilde{\Omega}} \quad (3.30)$$

On remarque que les bornes qu'on a obtenu dans (3.29) et (3.30) ne dépendent pas de  $\delta$ , ce qui nous permettra de passer à la limite quand  $\delta \rightarrow 0$ .

Maintenant, on passe à **la deuxième étape**, où on cherche à estimer l'enstrophie  $|\omega|^2$ .

Pour obtenir l'équation d'évolution de l'enstrophie, on multiplie l'équation (3.26) par  $\omega$  et on l'intègre par rapport à la variable d'espace :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\omega(x, t)|^2 dx + \nu \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx &= \\ &= \int (\mathbf{S}(x, t) \omega(x, t)) \omega(x, t) dx + \int [\nabla \times (v_\delta(x, t) \cdot \nabla u(x, t))] \omega(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.31)$$

À l'aide de la fonction  $\chi$  (**bump function**) définie par :

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in [0, 1] \\ 0, & \text{si } z \geq 2 \\ \lambda \in [0, 1], & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.32)$$

en posant  $z = |\omega|/\tilde{\Omega}$ , on peut décomposer la vorticit    $\omega$  en fonction des zones de l'espace o   elle est plus ou moins *active*. On a ainsi :

$$\omega(x, t) = \begin{cases} \omega^{(1)}(x, t), & \text{si } |\omega| \in [0, \tilde{\Omega}] \\ \omega^{(2)}(x, t), & \text{si } |\omega| \geq 2\tilde{\Omega} \\ \omega^{(1)}(x, t) + \omega^{(2)}(x, t), & \text{si } |\omega| \in [\tilde{\Omega}, 2\tilde{\Omega}] \end{cases} \quad (3.33)$$

o   on a not    $\omega^{(1)}(x, t) = \chi(|\omega|/\tilde{\Omega})\omega(x, t)$  et  $\omega^{(2)}(x, t) = [1 - \chi(|\omega|/\tilde{\Omega})]\omega(x, t)$ .

Comme on a vu que  $\mathbf{S}$  est d  fini    partir de  $\omega$ , on d  duit que la d  composition (3.33) induit une d  composition analogue de  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{S}^{(1)}(x, t) + \mathbf{S}^{(2)}(x, t) \quad (3.34)$$

Alors on peut   crire :

$$(\mathbf{S}(x, t)\omega(x, t))\omega(x, t) = \sum_{i,j,k=1}^2 (\mathbf{S}^{(i)}(x, t)\omega^{(j)}(x, t))\omega^{(k)}(x, t) \quad (3.35)$$

ou bien :

$$(\mathbf{S}(x, t)\omega(x, t))\omega(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x, t) + T_3(x, t)$$

avec les notations :

$$\begin{aligned} T_1(x, t) &= \sum_{(j,k) \neq (2,2)} (\mathbf{S}^{(i)}(x, t)\omega^{(j)}(x, t))\omega^{(k)}(x, t) \\ T_2(x, t) &= (\mathbf{S}^{(1)}(x, t)\omega^{(2)}(x, t))\omega^{(2)}(x, t) \\ T_3(x, t) &= (\mathbf{S}^{(2)}(x, t)\omega^{(2)}(x, t))\omega^{(2)}(x, t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

On note encore :

$$T_4(x, t) = [\nabla \times (v_\delta \cdot \nabla u)]\omega \quad (3.37)$$

et la partie *la plus d  licate* qui reste    faire maintenant est de trouver *de bonnes estimations* pour les termes  $T_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

Sans entrer dans les d  tails techniques des d  rivations de toutes ces estimations<sup>3</sup>, on trouve pour les termes  $T_1, T_2$  et  $T_4$  respectivement :

$$\left| \int T_1(x, t) dx \right| \leq C\tilde{\Omega} \int |\omega(x, t)|^2 dx, \quad (3.38)$$

$$\left| \int T_2(x, t) dx \right| \leq \frac{\nu}{8} \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx + 2^7 \nu^{-3} (\tilde{\Omega} Q)^2 \int |\omega(x, t)|^2 dx, \quad (3.39)$$

---

3. la d  rivation de ces estimations ne pose pas de difficult  s, n  cessitant en principe l'application des in  galit  s *ad  quates* de Young et de Galiardo-Niremberg

$$\left| \int T_4(x, t) dx \right| \leq \frac{\nu}{8} \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx + C \delta^2 \nu^{-7} \left( \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx \right)^5. \quad (3.40)$$

On a choisi de présenter ici juste la dérivation de l'estimation pour le terme  $T_3$  parce que c'est là où intervient l'hypothèse (3.23).

Donc, pour l'estimation du terme  $T_3$  on a :

$$\begin{aligned} T_3(x, t) &= (\mathbf{S}^{(2)}(x, t) \omega^{(2)}(x, t)) \omega^{(2)}(x, t) \\ &= \frac{3}{4\pi} |\omega^{(2)}(x, t)|^2 \text{ P.V.} \int D(\hat{y}, \xi^{(2)}(x + y, t), \xi^{(2)}(x, t)) \cdot |\omega^{(2)}(x + y, t)| \frac{dy}{|y^3|} \\ &\stackrel{(3.23)}{\leq} \frac{C}{\rho} |\omega(x, t)|^2 \int |\omega(x + y, t)| \frac{dy}{|y^3|}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

On note

$$I(x, t) = \int |\omega(x + y, t)| \frac{dy}{|y^3|}.$$

Après une intégration spatiale de (3.41), appliquant les inégalités de Young et Galiardo-Nirenberg, on obtient :

$$\left| \int T_3(x, t) dx \right| \leq \frac{\nu}{8} \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx + C \nu^{-3} |\omega|_{L^1}^{8/3} \rho^{-4} \left( \int |\omega(x, t)|^2 dx \right)^{5/3} \quad (3.42)$$

À l'aide de l'estimation (3.29) pour la norme  $L^1$  de la vorticit   on trouve finalement :

$$\left| \int T_3(x, t) dx \right| \leq \frac{\nu}{8} \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx + C \nu^{-3} Q^{8/3} \rho^{-4} \left( \int |\omega(x, t)|^2 dx \right)^{5/3}. \quad (3.43)$$

Maintenant on utilise les estimations (3.38) - (3.43) dans l'  quation (3.31) pour avoir :

$$\frac{d}{dt} \int |\omega(x, t)|^2 dx \leq k(t) \int |\omega(x, t)|^2 dx + C_0 \delta^2 \nu^{-7} \left( \int |\omega(x, t)|^2 dx \right)^5 \quad (3.44)$$

o    $k(t) = k(\Omega, \nu, Q, \rho, |\omega|_{L^2})$ .

Quelques calculs simples permet enfin d'obtenir :

$$\int |\omega(x, t)|^2 dx \leq 2^{1/4} |\nabla \times u_0(x)|_{L^2}^2 \exp \left( \int_0^t k(s) ds \right), \quad \text{pour } t \in [0, T] \quad (3.45)$$

En passant au *sup* pour  $t \in [0, T]$  on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int |\omega(x, t)|^2 dx \leq \Gamma_1 \int |\nabla \times u_0(x)|^2 dx \quad (3.46)$$

avec  $\Gamma_1 = \Gamma_1(\nu, T, \rho, |u_0(x)|_{L^2}, |\omega(x, t)|_{L^1}, |\omega(x, t)|_{L^2})$ .



On peut obtenir une autre estimation importante si on intègre (3.44) entre 0 et  $T$  et qu'on utilise l'estimation (3.46) :

$$\int_0^T \int |\nabla \omega(x, t)|^2 dx dt \leq \Gamma_2 \quad (3.47)$$

où  $\Gamma_2$  dépend des mêmes paramètres que  $\Gamma_1$ .

Les estimations (3.46) et (3.47) constituent *le coeur* de la démonstration. Pour la suite on applique les techniques classiques de passage à la limite (voir Lions [65]) et on obtient finalement que la solution des équations de Navier-Stokes 3D est :

$$u \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)).$$

### 3.1.3 Attracteurs et turbulence

L'une des approches pour la description mathématique de la turbulence est l'approche basée sur la théorie des systèmes dynamiques. Cette façon d'aborder les équations de la dynamique des fluides consiste à les considérer comme un système dynamique de dimension infinie. Il est possible d'étendre au cas de la dimension infinie des idées et des notions issues de la théorie des systèmes dynamiques en dimension finie. Ainsi a été définie la notion d'un attracteur global :

**Définition 3.1.1** *Soit  $H$  un espace de Banach. On appelle attracteur global pour un semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  un ensemble  $\mathcal{A} \subset H$  qui satisfait les propriétés suivantes :*

- $a_1.$   $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad (\forall)t \geq 0$
- $a_2.$   $\mathcal{A}$  est un ensemble compact
- $a_3.$   $\delta(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$  pour tout borné  $\mathcal{B}$  de  $H$  où

$$\delta(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) := \sup_{u \in \mathcal{A}} \inf_{v \in \mathcal{B}} |u - v|_H.$$

**Remarque 3.1.5** *L'attracteur global est l'unique ensemble connexe qui est maximal (par rapport à l'inclusion) parmi les ensembles invariants par le semi-groupe.*

**Définition 3.1.2** *Un sous-ensemble  $B$  de  $H$  est dit absorbant si on a :*

$$\forall \mathcal{B} \text{ borné } \subset H, \exists t(\mathcal{B}) \text{ tel que } \forall t \geq t(\mathcal{B}), S(t)\mathcal{B} \subset B.$$

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'attracteur global :

**Théorème 3.1.5** *Soit  $B_\rho$  une boule dans une topologie qui s'injecte de façon compacte dans celle de  $H$ . Si  $B_\rho$  est un ensemble absorbant dans  $H$  alors,*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} S(s)B_\rho}$$

*est l'attracteur global pour le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$ .*

L'ensemble  $\mathcal{A}$ , dont la structure peut être très compliquée (fractale, par exemple), décrit toutes les dynamiques que le système considéré peut y produire. Dans beaucoup de cas, il est possible d'étudier la dimension de l'attracteur global au sens de la dimension de Hausdorff ou de la dimension fractale. On donne ici la définition de la dimension fractale et pour une présentation plus détaillée de tout ce qui concerne la dimension de Hausdorff et fractale on renvoie le lecteur à Constantin et al. [24].

**Définition 3.1.3** *Soit  $H$  un espace de Banach et  $\mathcal{A} \subset H$  un ensemble invariant par le semi-groupe  $S_t : H \rightarrow H$ . La dimension fractale de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est définie par*

$$d_f(\mathcal{A}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log n_\epsilon(\mathcal{A})}{\log 1/\epsilon}$$

où  $n_\epsilon$  représente le nombre minimum de boules de rayon  $\epsilon$  nécessaires pour le recouvrement de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

Pour une large classe d'équations, comprenant aussi les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, l'existence de l'attracteur globale de dimension finie a été établie (Ladishenskaya[1973, 1975]). Hors du problème d'existence, des contributions importantes sont celles qui montrent que l'attracteur *trouvé* est de dimension finie et celles concernant l'estimation de cette dimension. En fait, l'estimation de la dimension de l'attracteur permet d'avoir des informations sur le nombre de degrés de liberté du système et donc du nombre de paramètres nécessaires pour les simulations numériques. Il est important d'obtenir des estimations qui aient un sens physique. Dans le cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles avec des conditions aux limites périodiques, Constantin, Foias et Temam ont obtenu dans [24] une borne supérieure de la dimension de l'attracteur en fonction du nombre de Grashof<sup>4</sup>. En dimension trois la théorie n'est pas complète. Comme l'unicité des solutions faibles et l'existence pour tous temps des solutions régulières ne sont pas connues, l'existence de l'attracteur global n'est pas non plus connue...

## 3.2 Le modèle de Smagorinsky

### 3.2.1 Formulation du problème et cadre fonctionnel

Le problème de l'unicité de la solution faible pour les équations de Navier-Stokes en dimension 3 étant un problème ouvert, on ne peut pas prouver l'existence d'un ensemble absorbant pour ce système dissipatif.

---

4. c'est un nombre adimensionnel qui dépend de la viscosité, de la dimension du domaine de calcul et de la grandeur des forces appliquées au fluide :  $G = L^2 |A^{-1/2} f| / \nu^2$  (l'opérateur  $A$  a été défini dans la section 3.1.1 et  $L$  est la taille de la boîte de calcul)

Mais on peut se demander si, ajoutant aux équations de Navier-Stokes un terme de dissipation du type Smagorinsky<sup>5</sup>, c'est-à-dire du type

$$2 \operatorname{div} (\nu_t \mathbf{S}) \quad \text{avec} \quad \nu_t = \underbrace{(C\Delta)^2}_{\nu_1} |\mathbf{S}| \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{S}$  est la partie symétrique du tenseur de déformation, on arrive à démontrer l'unicité de la solution du modèle obtenu, en se posant encore le problème de l'existence d'un ensemble absorbant et d'un attracteur pour ce système.

Le système qu'on va analyser dans cette section est alors :

$$(\partial_t + u\nabla)u = f - \nabla p + \operatorname{div} \tau \quad (3.49)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (3.50)$$

où  $\tau$  est donné par

$$\tau = 2[(\nu + \nu_1 |\mathbf{S}|)\mathbf{S}],$$

avec les conditions aux limites et initiales (3.4) et (3.3) respectivement.

Soit la fonction  $\theta : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\theta(\mathbf{S}) = \int_0^{|\mathbf{S}|^2} (\nu + \nu_1 y^{1/2}) dy.$$

Il est facile de vérifier que  $\tau$  dérive du potentiel scalaire  $\theta$ , c'est-à-dire que :

$$\tau_{ij}(\mathbf{S}) = \frac{\partial \theta(\mathbf{S})}{\partial S_{ij}} \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

On suppose que

$$\begin{aligned} \theta(o) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta(o)}{\partial S_{ij}} = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \\ c_1(1 + |\mathbf{S}|)|\xi|^2 \leq \frac{\partial^2 \theta(\mathbf{S})}{\partial S_{kl} \partial S_{ij}} \xi_k^l \xi_i^j \leq c'_1(1 + |\mathbf{S}|)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^9. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Suivant Malek et Nečas [69], voir aussi Michaux [75], on montre dans cette section que le problème (3.49)-(3.50) est bien posé et possède un attracteur global de dimension fractale finie.

On commence par fixer le cadre fonctionnel dans lequel on va travailler.

Soit  $1 < p < \infty$  et  $p'$  son exposant conjugué. On note  $|\cdot|_p$  la norme dans  $L^p(\Omega)^3$ ,  $\|\cdot\|_{m,p}$  la norme de l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)^3$  et par  $|\nabla \cdot|_p$  la norme dans  $W_0^{1,p}(\Omega)^3$ .

---

5. on a présenté dans le chapitre 1 l'idée d'ajouter ce term du point de vue physique

On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^3, \operatorname{div} \varphi = 0\}, \\ H &= \text{l'adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } L^2(\Omega)^3, \\ V &= \text{l'adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } W^{1,3}(\Omega)^3, \\ V_s &= \text{l'adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } H^s(\Omega)^3\end{aligned}$$

et on note  $V'$  l'espace dual de  $V$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité entre  $V$  et  $V'$ ,  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $H$  et  $(\cdot, \cdot)_{V_s}$  celui dans  $V_s$ .

On rappelle que si  $X$  est un espace de Banach de norme  $|\cdot|_X$  alors on dénote par  $C([0, T]; X)$  l'espace des fonctions continues  $u : [0, T] \rightarrow X$  et par  $L^p(0, T; X)$ , l'espace des fonctions mesurables  $u : ]0, T[ \rightarrow X$  dont la norme

$$|u|_{L^p(0, T; X)}^p := \int_0^T |u(t)|_{L^p(X)}^p dt$$

est finie. Pour  $p = \infty$  la norme est définie par

$$|u|_{L^\infty(0, T; X)} := \sup_{t \in ]0, T[} \operatorname{ess} |u(t)|_X.$$

**Remarque 3.2.1** *Comme les injections  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$  sont continues, on a l'injection continue suivante*

$$\{u \in L^p(0, T; V); \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0, T; V')\} \hookrightarrow C([0, T]; H).$$

et aussi le lemme de compacité suivant dû à J.P. Aubin et J.L. Lions :

**Lemme 3.2.1** *Soit  $X$  un espace de Banach,  $X_0, X_1$  des espaces de Banach réflexifs et séparables. On suppose que*

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1.$$

Alors

$$\{v \in L^\alpha(0, T; X_0), \frac{dv}{dt} \in L^\beta(0, T; X_1)\} \hookrightarrow L^\alpha(0, T; X),$$

où  $1 < \alpha, \beta < \infty$ .

### 3.2.2 Résolution du problème mathématique

Soient  $u_0$  et  $f$  données telles que ,

$$u_0 \in H \text{ et } f \in L^{3/2}(0, T; V') \tag{3.52}$$

On note par  $(NS)_{sg}$  le problème (3.49)-(3.50) avec les conditions initiales (3.3) et aux limites (3.4).

**Définition 3.2.1** On appelle solution faible du problème  $(NS)_{sg}$  une fonction

$$u \in C([0, T]; H) \cap L^3(0, T; V) \quad (3.53)$$

avec

$$\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(0, T; V') \quad (3.54)$$

qui vérifie

$$\left\langle \frac{du(t)}{dt}, v(t) \right\rangle + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\mathbf{S}(u(t))) S_{ij}(v(t)) dx + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla) u(t) \cdot v(t) dx = \langle f(t), v(t) \rangle \quad (3.55)$$

pour presque tout  $t \in ]0, T[$  et pour tout  $v \in V$ .

**Définition 3.2.2** On définit:

(i) l'opérateur  $T$  par:

$$\int_0^T \langle T(u)(t), v(t) \rangle dt = \int_0^T \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\mathbf{S}(u(x, t))) S_{ij}(v(x, t)) dx dt$$

et

(ii) l'opérateur  $B$  par

$$\int_0^T \langle B(u)(t), v(t) \rangle dt = \int_0^T \int_{\Omega} (u(x, t) \cdot \nabla) u(x, t) \cdot v(x, t) dx dt.$$

**Lemme 3.2.2** Soient les opérateurs  $T$  et  $B$  définis par la définition (3.2.2). Alors, on a

(i)

$$T \text{ applique } L^3(0, T; V) \text{ dans } L^{3/2}(0, T; V') \quad \text{et}$$

(ii)

$$B : L^3(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \rightarrow L^{3/2}(0, T; V') \text{ est continu .}$$

La démonstration de ce lemme est basée sur le lemme 2.8 présenté dans [69].

**Remarque 3.2.2** Le lemme (3.2.2) nous permet de réécrire la formulation faible du problème  $(NS)_{sg}$  sous la forme

$$\frac{du}{dt} + T(u) + B(u) = f$$

avec

$$\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(0, T; V').$$

**Remarque 3.2.3** Grâce à l'injection

$$\{u \in L^p(0, T; V); \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0, T; V')\} \hookrightarrow C([0, T]; H)$$

la condition initiale  $u(0) = u_0$  a un sens sous l'hypothèse  $u_0 \in H$ .

**Théorème 3.2.1** Si  $u_0 \in H$  et  $f \in L^{3/2}(0, T; V')$ , alors le problème  $(NS)_{sg}$  possède une unique solution

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^3(0, T; V)$$

avec

$$\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(0, T; V').$$

Si  $u_0 \in V$  alors  $(NS)_{sg}$  a une unique solution dans  $L^\infty(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$ .

**Démonstration :**

On montre d'abord l'**existence** de la solution par une méthode de monotonie et compacité pour les problèmes non-linéaires et ensuite l'unicité de cette solution.

I. Dans une première étape on construit une solution approchée  $u_m$  par une méthode de Faedo-Galerkin avec une base spéciale puis on cherche des estimations a priori pour cette solution.

Soit  $s > 5/2$ . Alors, si  $v \in H^s(\Omega)^3$ , on a

$$\nabla v \in H^{s-1}(\Omega)^3 \subset L^\infty(\Omega)^3, \quad \text{car } \frac{1}{2} - \frac{s-1}{3} < 0.$$

En particulier,  $\nabla v \in L^3(\Omega)^3$  et donc

$$V_s \subset V \subset H \subset V' \subset V'_s.$$

( $H$  est identifié avec son dual).

Soit  $\{w_l\}$  une base de  $V_s$  constituée des fonctions propres définies par:

$$(w_l, v)_{V_s} = \lambda_l (w_l, v), \quad \forall v \in V_s, \quad \forall l \geq 1.$$

Pour chaque entier  $m$ , on considère  $W_m = \text{Span} \{w_1, \dots, w_m\}$  et on construit  $u_m \in W_m$  solution de

$$\left\langle \frac{du_m}{dt}, w_l \right\rangle + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \tau_{ij}(\mathbf{S}(u_m)) S_{ij}(w_l) dx + \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla) u_m \cdot w_l dx = \langle f, w_l \rangle \quad (3.56)$$

et

$$u_m(0) = P_m u_0 \quad (3.57)$$

où  $P_m$  désigne l'opérateur de projection dans  $H$  (ou  $V_s'$ ) sur le sous-espace  $W_m$ . Comme  $u_m \in W_m$ , on peut l'écrire sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{l=1}^m g_{lm}(t) w_l.$$

En multipliant l'équation (3.56) par  $g_{lm}$ , puis sommant ces équations pour  $l = 1, \dots, m$  on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m|_2^2 + \nu C_2^2 |\nabla u_m|_2^2 + \nu_1 C_3^3 |\nabla u_m|_3^3 \leq |f|_{3/2} |\nabla u_m|_3 \quad (3.58)$$

et comme  $f \in L^{3/2}(0, T; V')$  on déduit que

$$u_m \text{ reste borné dans } L^\infty(0, T; H) \cap L^3(0, T; V). \quad (3.59)$$

On remarque que la relation (3.56) est aussi équivalente à

$$\frac{du_m}{dt} + P_m T(u_m) + P_m B(u_m) = P_m f \quad (3.60)$$

Les opérateurs  $P_m$  sont uniformément bornés dans  $\mathcal{L}(H; H)$ ,  $\mathcal{L}(V_s, V_s)$  et  $\mathcal{L}(V_s'; V_s')$ , donc, d'après (3.59) on a

$$T(u_m) \text{ et } P_m T(u_m) \text{ restent bornés dans } L^{3/2}(0, T; V') \text{ et} \quad (3.61)$$

$$B(u_m) \text{ et } P_m B(u_m) \text{ restent bornés dans } L^{3/2}(0, T; V'). \quad (3.62)$$

Enfin, comme  $P_m f$  est borné dans  $L^{3/2}(0, T; V')$  on a d'après (3.60)

$$\frac{du_m}{dt} \text{ reste borné dans } L^{3/2}(0, T; V'). \quad (3.63)$$

II. Maintenant on peut passer à la limite utilisant des résultats de compacité (pour plus de détails concernant les résultats de compacité et de monotonie pour les EDP voir [65]). On déduit du lemme de compacité (3.2.1)<sup>6</sup> qu'on peut extraire une sous suite (notée encore)  $u_m$  telle que

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \text{ dans } L^3(0, T; V) \text{ faible et dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible étoile} \\ u_m &\rightarrow u \text{ dans } L^3(0, T; H) \text{ fort et presque partout dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \frac{du_m}{dt} &\rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^{3/2}(0, T; V') \text{ faible.} \end{aligned} \quad (3.64)$$

---

6. avec  $X_0 = V, X = H, X_1 = V', \alpha = 3, \beta = 3/2$  et l'injection compacte  $V \hookrightarrow \hookrightarrow H$

et de plus il existe  $\chi \in L^{3/2}(0, T; V')$  tel que

$$T(u_m) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^{3/2}(0, T; V') \text{ faible.} \quad (3.65)$$

Donc on peut passer à la limite dans l'équation variationnelle approchée obtenant:

$$\left\langle \frac{du}{dt}, w_l \right\rangle + \langle \chi, w_l \rangle + \langle B(u), w_l \rangle = \langle f, w_l \rangle \quad \text{pour } l = 1, \dots, m. \quad (3.66)$$

Comme  $V_s$  est dense dans  $V$  on a

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \langle \chi, v \rangle + \langle B(u), v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (3.67)$$

La convergence faible de  $u_m$  vers  $u$  et de  $\frac{du_m}{dt}$  vers  $\frac{du}{dt}$  entraîne

$$u_m \rightharpoonup u \text{ dans } V' \text{ et même dans } H, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.68)$$

Donc en particulier  $u(0) = u_0$  dans  $H$ .

On vérifie maintenant que

$$\chi = T(u).$$

En prenant  $u$  comme fonction test dans (3.67), après intégration en temps entre 0 et  $T$  on trouve

$$\frac{1}{2}|u(T)|_2^2 + \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt = \int_0^T \langle f, u \rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_2^2 \quad (3.69)$$

Soit

$$X_m = \int_0^T \langle T(u_m) - T(v), u_m - v \rangle dt + \frac{1}{2}|u_m(T)|_2^2 \quad (3.70)$$

ou sous la forme équivalente

$$X_m = \int_0^T \langle T(u_m), u_m \rangle dt - \int_0^T \langle T(v), u_m - v \rangle dt - \int_0^T \langle T(u_m), v \rangle dt + \frac{1}{2}|u_m(T)|_2^2 \quad (3.71)$$

Utilisant la monotonie de  $T$  on déduit que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} X_m \geq \frac{1}{2}|u(T)|_2^2 \quad (3.72)$$

Grâce à (3.56) on a

$$X_m = \int_0^T \langle f, u_m \rangle dt + \frac{1}{2}|u_{m0}|_2^2 - \int_0^T \langle T(v), u_m - v \rangle dt - \int_0^T \langle T(u_m), v \rangle dt$$

et par passage à la limite on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = \int_0^T \langle f, u \rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|_2^2 - \int_0^T \langle T(v), u - v \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt \quad (3.73)$$



En utilisant maintenant (3.69) on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} X_m &= \frac{1}{2}|u(T)|_2^2 + \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt - \int_0^T \langle T(v), u - v \rangle dt \\ &= \frac{1}{2}|u(T)|_2^2 + \int_0^T \langle \chi - T(v), u - v \rangle dt\end{aligned}$$

et avec (3.72)

$$\int_0^T \langle \chi - T(v), u - v \rangle dt \geq 0.$$

d'où

$$\chi = T(u). \quad (3.74)$$

Donc, on a démontré l'existence de la solution du problème  $(NS)_{sg}$

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^3(0, T; V)$$

avec

$$\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(0, T; V').$$

On montre maintenant l'**unicité** de la solution obtenue précédemment.

Supposons l'existence de deux solutions faibles  $u$  et  $v$  du problème  $(NS)_{sg}$ , avec la même condition initiale  $u_0 \in H$  on pose  $w = u - v$ . Après soustraction de la formulation faible pour  $v$  de celle pour  $u$  et prenant  $w$  comme fonction test, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_2^2 + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} [\tau_{ij}(\mathbf{S}(u)) - \tau_{ij}(\mathbf{S}(v))] \mathbf{S}_{ij}(w) dx = - \int_{\Omega} (w \cdot \nabla) u w dx. \quad (3.75)$$

D'autre part, il résulte de l'inégalité (3.51) que :

$$\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} [\tau_{ij}(\mathbf{S}(u)) - \tau_{ij}(\mathbf{S}(v))] \mathbf{S}_{ij}(w) dx \geq c_1 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |\mathbf{S}_{ij}(w)|^2 dx, \quad c_1 > 0 \quad (3.76)$$

Alors, à l'aide des inégalités de Korn<sup>7</sup> et de Hölder, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_2^2 + c_2 |\nabla w|_2^2 \leq \int_{\Omega} |w|_2^2 |\nabla u|_2 dx \leq |\nabla u|_3 |w|_3^2, \quad c_2 = c_1 C_2^2. \quad (3.77)$$

---

7.  $(\int_{\Omega} |\mathbf{S}(u)|^p dx)^{1/p} \geq C_p |\nabla u|_p, C_p > 0$  dans  $W_0^{1,p}$

Comme  $|w|_3 \leq |w|_2^{1/2} |w|_6^{1/2} \leq c_3 |w|_2^{1/2} |\nabla w|_2^{1/2}$  (car  $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ ) et grâce à l'inégalité de Young on a

$$\frac{d}{dt} |w|_2^2 + c_4 |\nabla w|_2^2 \leq c_5 |\nabla u|_3^2 |w|_2^2. \quad (3.78)$$

Puisque la fonction  $g(t) := |\nabla u|_3^2$  est intégrable sur  $]0, T[$  et que  $w(0) = 0$  appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$|w(t)|_2^2 = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Donc, on conclut que le problème  $(NS)_{sg}$  est bien posé et qu'il admet une unique solution

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^3(0, T; V)$$

avec

$$\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(0, T; V').$$

Pour démontrer le résultat de régularité  $L^\infty(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$  annoncé, on va procéder à une analyse du comportement asymptotique du système analysé (dans la section suivante), afin de conclure avec la remarque (3.2.6).

**Remarque 3.2.4** *D'après la remarque (3.2.1) la solution du problème  $(NS)_{sg}$  est dans  $\mathcal{C}([0, T]; H)$ .*

**Remarque 3.2.5** *Si on considère des conditions aux limites périodiques pour le système  $(NS)_{sg}$ , le résultat énoncé dans le théorème (3.2.1) peut être obtenu de manière analogue que dans le cas présenté auparavant.*

### 3.2.3 Comportement asymptotique des solutions

Soit  $u_0 \in H$  et  $f \in L^2(\Omega)^3$ .

Le théorème (3.2.1) nous donne l'existence et l'unicité de la solution du problème  $(NS)_{sg}$  dans

$$L^\infty(0, T; H) \cap L^3(0, T; V)$$

et d'après la remarque (3.2.4) on a

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; H) \quad (3.79)$$

Alors, on peut définir une famille d'opérateurs  $(S(t))_{t \geq 0}$  par

$$\begin{aligned} S(t) : H &\rightarrow H \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \quad \text{solution de } (NS)_{sg}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

**Lemme 3.2.3** (i) La famille d'opérateurs  $(S(t))_{t \geq 0}$  définie par (3.80) est un semi-groupe, c'est à dire  $S(t)$  vérifie les axiomes (a1) -(a3) de la définition (3.1.1).

(ii) L'application  $S(t) : H \rightarrow H$  est continue  $\forall t \geq 0$ .

**Démonstration :**

(i) est une conséquence de l'unicité et de (3.79).

(ii) se déduit de (3.78) après application du lemme de Gronwall.

On peut démontrer alors le lemme suivant :

**Lemme 3.2.4** Il existe une boule

$$B_\rho = \{u(t) \in V; \quad |\nabla u(t)|_3 \leq \rho\}$$

qui absorbe les ensembles bornés de  $H$ .

**Démonstration :**

On considère la formulation du problème  $(NS)_{sg}$  sous la forme

$$\frac{du}{dt} + T(u) + B(u) = f. \quad (3.81)$$

Si on multiplie cette équation par  $u$  et on utilise la propriété d'orthogonalité

$$\langle B(u), u \rangle = 0, \quad \forall u \in V$$

on a

$$\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \langle T(u), u \rangle = \langle f, u \rangle \quad (3.82)$$

et utilisant l'inégalité (3.51) on trouve :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}|u|_2^2 + \nu c_1 C_2^2 |\nabla u|_2^2 + \nu_1 c_1 C_3^3 |\nabla u|_3^3 \leq \langle f, u \rangle. \quad (3.83)$$

Utilisant l'inégalité de Hölder suivie de l'inégalité de Poincaré  $|u|_2 \leq \lambda_1^{-1/2} |\nabla u|_2$  ( $\lambda_1$  est la première valeur propre de l'opérateur de Stokes) et de l'inégalité

$$\lambda_1^{-1/2} |f|_2 |\nabla u|_2 \leq \frac{\nu c_1 C_2^2}{2} |\nabla u|_2^2 + \frac{1}{\nu c_1 C_2^2 \lambda_1} |f|_2^2$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \nu c_1 C_2^2 |\nabla u|_2^2 + 2\nu_1 c_1 C_3^3 |\nabla u|_3^3 \leq \frac{|f|_2^2}{\nu c_1 C_2^2 \lambda_1}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \nu\lambda_1c_1C_2^2|u|_2^2 + 2\nu_1c_1C_3^3|\nabla u|_3^3 \leq \frac{|f|_2^2}{\nu c_1C_2^2\lambda_1} \quad (3.84)$$

Grâce au lemme de Gronwall classique on obtient

$$|u|_2^2 \leq |u_0|_2^2 \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t) + \frac{|f|_2^2}{\nu^2c_1^2C_2^4\lambda_1^2}(1 - \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t)) \quad (3.85)$$

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup |u|_2 \leq \rho_0, \quad \text{où } \rho_0 = \frac{|f|_2}{\nu c_1 C_2^2 \lambda_1}.$$

De l'équation (3.85) on déduit que les boules de rayon  $\rho$  dans  $H$  sont des ensembles absorbants pour le semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  pour tout  $\rho \geq \rho_0$ .

En effet soit  $\rho > \rho_0$ . Notons par  $B_0$  la boule  $B_H(0, \rho)$ . Soit aussi  $B$  un ensemble borné dans  $H$ , il résulte alors qu'il existe  $R > 0$  tel que:  $B \subset B(0, R) \subset H$ . Alors on a:

$$|u(t)|^2 \leq R^2 \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t) + \rho_0^2(1 - \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t)). \quad (3.86)$$

On déduit facilement que si on pose la condition:

$$R^2 \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t) + \rho^2(1 - \exp(-\nu\lambda_1c_1C_2^2t)) < \rho^2$$

on obtient pour

$$t > t_0(B, \rho) = t_0 = \frac{1}{\nu\lambda_1c_1C_2^2} \log \frac{R^2}{\rho^2 - \rho_0^2}, \quad S(t)B \subset B_0, \quad (3.87)$$

ce qui prouve que  $B_0$  est un ensemble absorbant dans  $H$ .

Si de plus on intègre l'équation (3.84) entre  $t$  et  $t+1$ , pour  $t \geq t_0$ , on a:

$$2\nu_1C_3^3 \int_t^{t+1} |\nabla u(s)|_3^3 ds \leq \frac{|f|_2^2}{\nu\lambda_1c_1C_2^2} + |u(t)|_2^2 \quad (3.88)$$

$$\leq \frac{|f|_2^2}{\nu\lambda_1c_1C_2^2} + \rho_0^2 = C_0(\rho_0) \quad (3.89)$$

On note  $C(\rho) = \frac{C_0(\rho_0)}{2\nu_1c_1C_3^3}$ .

Si on prend  $\frac{du}{dt}$  comme fonction test dans la formulation faible du problème  $(NS)_{sg}$  on obtient

$$\left| \frac{du}{dt} \right|_2^2 + \left\langle T(u), \frac{du}{dt} \right\rangle + \left\langle B(u), \frac{du}{dt} \right\rangle = \left\langle f, \frac{du}{dt} \right\rangle \quad (3.90)$$

d'où<sup>8</sup>

$$\frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt} \right|_2^2 + \frac{d}{dt} |\theta(\mathbf{S})|_1 \leq |f|_2^2 + |\nabla u|_3^2 \cdot |u|_6^2 \quad (3.91)$$

---

8. à l'aide des inégalités de Hölder et de Young

Comme

$$|u|_6 \leq K_1 |\nabla u|_3^{2/3} \cdot |u|_2^{1/3} \quad (3.92)$$

et

$$K_2 |\nabla u|_3^3 \leq |\theta(\mathbf{S})|_1 \leq K_3 (1 + |\nabla u|_3^3) \quad (3.93)$$

on estime le term  $|\nabla u|_3^3 \cdot |u|_6^2$  par

$$|\nabla u|_3^3 \cdot |u|_6^2 \leq K_1 |u|_2^{2/3} \cdot |\nabla u|_3^{10/3} \stackrel{(3.93)}{\leq} K_4 |u|_2^{2/3} \cdot |\nabla u|_3^{1/3} \cdot |\theta(\mathbf{S})|_1 \quad (3.94)$$

On obtient donc l'inégalité suivante:

$$\frac{d}{dt} |\theta(\mathbf{S})|_1 \leq |f|_2^2 + K_4 |u|_2^{2/3} \cdot |\nabla u|_3^{1/3} \cdot |\theta(\mathbf{S})|_1 \quad (3.95)$$

Si on pose

$$y = |\theta(\mathbf{S})|_1, \quad g = K_4 |u|_2^{2/3} \cdot |\nabla u|_3^{1/3}, \quad h = |f|_2^2$$

on a pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$\int_t^{t+1} y(s) ds \stackrel{(3.93)}{\leq} K_3 (1 + C(\rho)) := \alpha_3 \quad (3.96)$$

$$\int_t^{t+1} g(s) ds \leq \rho^{2/3} \int_t^{t+1} |\nabla u|_3^{1/3} ds \stackrel{(3.89)}{\leq} K_5 \rho^{2/3} C(\rho) := \alpha_1 \quad (3.97)$$

$$|f|_2^2 := \alpha_2. \quad (3.98)$$

Alors, grâce au lemme de Gronwall uniforme<sup>9</sup> on obtient

$$|\theta(\mathbf{S})|_1 \leq (\alpha_3 + \alpha_2) \exp \alpha_1 \quad \text{pour tout } t \geq t_0 + 1.$$

Mais d'après (3.93) on a

$$|\nabla u|_3^3 \leq K(\alpha_3 + \alpha_2) \exp \alpha_1 := \alpha^3. \quad (3.99)$$

Puisque  $\alpha = \alpha(\rho)$  on vérifie facilement que les boules  $B_\rho = \{u(t) \in V; |\nabla u(t)|_3 \leq \rho\}$  absorbent tous les ensembles bornés de  $H$  si  $\rho \geq \alpha$ .

**Remarque 3.2.6** *Ce résultat justifie donc la régularité  $L^\infty(0, T; W^{1,3}(\Omega)^3)$  annoncée par le théorème (3.2.1).*

On peut ainsi appliquer le théorème (3.1.5) au problème  $(NS)_{sg}$  et on a:

**Théorème 3.2.2** *Le système dynamique associé au problème  $(NS)_{sg}$  possède un attracteur global dans  $H$ .*

---

9. Soient  $y, g, h \in L^1_{loc}(t_0, \infty)$  positives, telles que  $y' \in L^1_{loc}(t_0, \infty), y' \leq gy + h, \int_t^{t+1} g(t) dt \leq \alpha_1; \int_t^{t+1} h(t) dt \leq \alpha_2; \int_t^{t+1} y(t) dt \leq \alpha_3$ , où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^+$ . Alors  $y(t+1) \leq (\alpha_3 + \alpha_2) \exp \alpha_1, \forall t \geq t_0$ .

D'habitude, pour montrer que le comportement chaotique de la solution du problème  $(NS)_{sg}$  est caractérisé par un nombre fini de degrés de liberté, on prouve que la dimension de Hausdorff ou la dimension fractale de l'attracteur  $\mathcal{A}$  est finie. Pour cela on a plusieurs méthodes.

La méthode basée sur la théorie des exposants de Lyapunov demande la régularité de la solution faible du système linéarisé. Dans notre cas, dû en principe à la présence du terme supplémentaire de Smagorinsky, qui est non-linéaire, on ne sait pas comment on pourrait exprimer  $S'_t(v_0)(u_0 - v_0)$ , qui représente la solution du système linéarisé avec la condition initiale  $u_0 - v_0$  et donc, comment estimer

$$|S_t u_0 - S_t v_0 - S'_t(v_0)(u_0 - v_0)|_2.$$

Une autre possibilité serait d'appliquer la méthode proposée par Ladyzhenskaya [57] qui repose sur le théorème suivant :

“Un ensemble borné  $M$  d'un espace de Hilbert  $H$ , invariant par rapport à une transformation  $\mathcal{T}$ , possédant les propriétés : pour tout  $u_0, v_0 \in M$  il existe des constantes  $l$  et  $\delta < 1$  telles que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}u_0 - \mathcal{T}v_0| &\leq l|u_0 - v_0| \\ |Q_N \mathcal{T}u_0 - Q_N \mathcal{T}v_0| &\leq \delta|u_0 - v_0| \end{aligned}$$

a une dimension fractale finie.”

On a noté par  $Q_N = I - P_N$ , où  $I$  est l'identité et  $P_N$  est l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace engendré par les  $N$  premiers vecteurs propres de l'opérateur de Stokes. Dans le cas du problème  $(NS)_{sg}$ , avec  $\mathcal{T} = S_t$ , on n'arrive pas à démontrer la deuxième inégalité, donc on est obligé de procéder différemment.

La méthode qu'on applique pour notre problème consiste à définir d'abord l'ensemble des *trajectoires courtes* qui partent de l'attracteur  $\mathcal{A}$  et de montrer que cet ensemble a une dimension fractale finie dans la topologie de  $L^2(0, \tau; H)$ .

**Définition 3.2.3** Soit  $\tau > 0$  fixé. On définit l'ensemble des trajectoires courtes partant de l'attracteur  $\mathcal{A}$  par :

$$\mathcal{A}_\tau = \{[\eta(t, u_0)]_{t \in [0, \tau]} : u_0 \in \mathcal{A} \text{ et } \eta(t, u_0) = S_t u_0, \forall t \in [0, \tau]\}.$$

On considère les espaces :

$$\begin{aligned} Y &= W^{3,2}(\Omega)^3 \cap V_2, \\ W &= \{u \in L^3(0, \tau; V); du/dt \in L^{3/2}(0, \tau; V')\} \end{aligned}$$

où  $V_2 =$  l'adhérence de  $\mathcal{V}$  dans  $H^2(\Omega)^3$  et on note :

$$\begin{aligned} \|u\|_0^2 &= \int_0^\tau |u|_2^2 dt \\ \|u\|_1^2 &= \int_0^\tau |u|_{1,2}^2 dt + \int_0^\tau |du/dt|_{Y^*}^2 dt \end{aligned}$$

On désigne par :

$$B_\rho^0 = \{u : \|u - u_0\|_0 \leq \rho\}$$

la boule de rayon  $\rho$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_0$ , et par

$$B_\rho^1 = \{u : \|u - u_0\|_1 \leq \rho\}$$

celle par rapport à la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Nous présentons maintenant deux lemmes qui seront utiles par la suite :

**Lemme 3.2.5** *L'ensemble  $\mathcal{A}_\tau$  est invariant par le semi-groupe  $(S_t)_{t \geq 0}$ , c'est-à-dire :*

$$S_t \mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_\tau \quad \forall t \geq 0. \quad (3.100)$$

**Démonstration :**

On démontre cette égalité par *double inclusion*. On commence par l'inclusion :

$$\mathcal{A}_\tau \subset S_t \mathcal{A}_\tau \quad (3.101)$$

Soit  $\eta(\cdot, u_0) \in \mathcal{A}_\tau$  et  $t > 0$  arbitraire fixé. Comme  $u_0 \in \mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}$  est invariant par  $S_t$ , il existe  $u \in \mathcal{A}$  tel que

$$S_t u = u_0.$$

Mais,

$$\eta(t', u_0) = S_{t'} u_0 = S_{t'}(S_t u) = S_t S_{t'} u, \quad \forall t' \in [0, \tau].$$

Soit maintenant  $\tilde{\eta}(\cdot, u)$  la trajectoire courte qui part de  $u$ . Alors on a

$$\eta(\cdot, u_0) = S_t \tilde{\eta}(\cdot, u)$$

et comme  $\tilde{\eta}(\cdot, u) \in \mathcal{A}_\tau$  on trouve que

$$\eta(\cdot, u_0) \in S_t \mathcal{A}_\tau.$$

L'inclusion réciproque se démontre par la même technique. Donc, on conclut qu'on a bien l'égalité (3.100).

**Lemme 3.2.6** *Soient  $\eta^1(\cdot, u_0)$  et  $\eta^2(\cdot, v_0)$  deux trajectoires courtes qui partent de  $u_0 \in \mathcal{A}$  et de  $v_0 \in \mathcal{A}$ . Si  $\tau$  satisfait (3.107) alors il existe une constante  $K$  telle que pour  $t \geq \tau$  arbitraire on a :*

$$\|S_t \eta^1(\cdot, u_0) - S_t \eta^2(\cdot, v_0)\|_1^2 \leq K \|\eta^1(\cdot, u_0) - \eta^2(\cdot, v_0)\|_0^2.$$

**Démonstration :**

Soient  $u(t) = S_t u_0$  et  $v(t) = S_t v_0$ . Si l'on note  $w = u - v$ , alors on a vu dans la section 3.2.2 que  $w$  vérifie

$$\frac{d}{dt}|w|_2^2 + c_4|\nabla w|_2^2 \leq c_5|\nabla u|_3^2|w|_2^2. \quad (3.102)$$

En intégrant cette inégalité entre  $t - s$  et  $t + r$ , où  $s \in [0, \tau/2]$ ,  $r \in [0, \tau]$  et  $t \geq \tau$ , on obtient :

$$|w(t+r)|_2^2 - |w(t-s)|_2^2 + c_4 \int_{-s}^r |\nabla w(t+\zeta)|_2^2 d\zeta \leq c_5 \int_{-s}^r |w(t+\zeta)|_2^2 |\nabla u(t+\zeta)|_3^2 d\zeta \quad (3.103)$$

Soit

$$\beta(t) = \sup_{r \in [-\tau/2, \tau]} |w(t+r)|_2^2.$$

Alors, en passant au sup dans l'inéquation (3.103) pour  $r \in [-\tau/2, \tau]$  on trouve :

$$\beta(t) + c_4 \int_0^\tau |\nabla w(t+\zeta)|_2^2 d\zeta \leq c_5 \beta(t) \int_{-\tau/2}^\tau |\nabla u(t+\zeta)|_3^2 d\zeta + |w(t-s)|_2^2 \quad (3.104)$$

D'après l'estimation (3.99) et utilisant le fait que  $\mathcal{A}$  est invariant par  $S_t$  on obtient :

$$|\nabla u(t+\zeta)|_3 \leq \alpha \quad (3.105)$$

De (3.104) en utilisant (3.105) on a l'inégalité :

$$\beta(t)(1 - \tau c_5 \alpha^2 / 2) + c_4 \int_0^\tau |\nabla w(t+\zeta)|_2^2 d\zeta \leq |w(t-s)|_2^2 \quad (3.106)$$

Maintenant si **on suppose** que

$$\tau c_5 \alpha^2 / 2 \leq 1 \quad (3.107)$$

on déduit de (3.106) que

$$c_4 \int_0^\tau |\nabla w(t+\zeta)|_2^2 d\zeta \leq |w(t-s)|_2^2. \quad (3.108)$$

Soit maintenant  $\phi \in L^2(t, t + \tau; Y)$  avec  $|\phi|_{L^2(t, t + \tau; Y)} \leq 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \left( \frac{dw}{dt}(t+\zeta), \phi(t+\zeta) \right) d\zeta = \\ & - \int_0^\tau \int_\Omega [\tau_{ij}(S(u(t+\zeta))) - \tau_{ij}(S(v(t+\zeta)))] \cdot S_{ij}(\phi(t+\zeta)) dx d\zeta - \\ & - \int_0^\tau \int_\Omega (u_j \partial_j u_i - v_j \partial_j v_i)(t+\zeta) \cdot \phi_i(t+\zeta) dx d\zeta \end{aligned}$$



On note

$$I_1 = - \int_0^\tau \int_\Omega [\tau_{ij}(S(u(t+\zeta))) - \tau_{ij}(S(v(t+\zeta)))] \cdot S_{ij}(\phi(t+\zeta)) dx d\zeta$$

et

$$I_2 = - \int_0^\tau \int_\Omega (u_j \partial_j u_i - v_j \partial_j v_i)(t+\zeta) \cdot \phi_i(t+\zeta) dx d\zeta.$$

On peut estimer le terme  $I_1$  par :

$$|I_1| \leq \int_0^\tau \int_\Omega (1 + |\nabla u(t+\zeta)| + |\nabla v(t+\zeta)|) \cdot |S(w(t+\zeta))| |S(\phi(t+\zeta))| dx d\zeta \leq \\ \int_0^\tau \|\phi(t+\zeta)\|_{3,2} |\nabla w(t+\zeta)|_2 \left( \int_\Omega (1 + |\nabla u(t+\zeta)| + |\nabla v(t+\zeta)|)^2 dx \right)^{1/2} d\zeta$$

Utilisant (3.105) on obtient

$$|I_1| \leq f(\alpha) \left( \int_0^\tau |\nabla w(t+\zeta)|_2^2 d\zeta \right)^{1/2} \leq \\ \leq \hat{f}(\alpha) \left( \int_0^\tau |w(\zeta)|_2^2 d\zeta \right)^{1/2}.$$

Pour l'intégrale  $I_2$  on trouve le même type d'estimation, d'où on conclut qu'on a bien le résultat annoncé.

On peut prouver maintenant le théorème suivant :

**Théorème 3.2.3** *Si  $\tau$  vérifie (3.107) alors l'ensemble  $\mathcal{A}_\tau$  a une dimension fractale finie.*

**Démonstration :**

Du fait que  $\mathcal{A}_\tau$  est borné on déduit qu'il existe  $R > 0$  tel que

$$\mathcal{A}_\tau \subset B_R^0.$$

Donc, utilisant les lemmes (3.2.5) et (3.2.6) on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{A}_\tau = S_t \mathcal{A}_\tau \subset S_t B_R^0 \subset B_{KR}^1 \quad \forall t \geq \tau.$$

Mais, d'après le lemme (3.2.1),  $B_{KR}^1$  est relativement compact dans  $L^2(0, \tau; H)$  et donc il existe un recouvrement de cet ensemble par un nombre fini  $N$  de boules de rayon  $R/2$  :

$$\mathcal{A}_\tau \subset \cup_{i=1}^N B_{R/2}^0(x_i)$$

Par un procédé itératif avec  $\epsilon_j = R/2^j$  on trouve

$$\mathcal{A}_\tau \subset \cup_{i=1}^N B_{\epsilon_j}^0(x_i)$$

d'où l'on déduit l'estimation :

$$\frac{\log n_{\epsilon_j}(\mathcal{A}_\tau)}{\log 1/\epsilon_j} \leq \frac{j \log N}{j \log 2 - \log R} \quad (3.109)$$

Pour  $j \rightarrow \infty$  on obtient :

$$d_f(\mathcal{A}_\tau) \leq \frac{\log N}{\log 2}. \quad (3.110)$$

**Remarque 3.2.7** Comme  $\mathcal{A}_\tau$  est de dimension fractale finie et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\tau$  on déduit que l'attracteur global  $\mathcal{A}$  pour le problème  $(NS)_{sg}$  a aussi une dimension fractale finie.

### 3.2.4 Le modèle de Smagorinsky sélectif

Le modèle de Smagorinsky sélectif présenté dans la section 2.6.1 repose sur l'idée des *directions de vortacité* proposée par Constantin et Fefferman [21]. Ce modèle a été conçu en vue d'assurer une *certaine* régularité de la solution en ajoutant un terme de dissipation dans les zones d'*activité tourbillonnaire*.

Le problème à résoudre du point de vue mathématique est dans ce cas :

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)u + \nabla p = f + \operatorname{div} [(\nu + \Psi \nu_t) \nabla u] \quad (3.111)$$

où  $\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t)$  est une fonction filtre scalaire qui permet de détecter les *zones de turbulence* et  $\nu_t$  est la viscosité turbulente pour laquelle on prescrit dans ce cas la formule qui nous permet d'avoir le modèle de Smagorinsky :

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\overline{S}|$$

Evidemment, on complète (3.111) par les conditions d'incompressibilité (3.2), initiales (3.3) et aux limites (3.4).

L'action du filtre  $\Psi$ <sup>10</sup> sur la viscosité  $\nu_t$  implique l'analyse à la fois du système de Navier-Stokes 3D sous l'hypothèse (3.23) (si  $\Psi = 0$ ) et du système de Smagorinsky (si  $\Psi = 1$ ). Donc, pour une résolution mathématique *formelle* de ce problème, on a d'une part la régularité de la solution assuré par le théorème de Constantin & Fefferman dans les zones où l'hypothèse (3.23) est satisfaite, ce qui correspond à un alignement des lignes de vortacité, et sinon, c'est à dire dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifié, on a le résultat trouvé dans la section 3.48 pour le modèle de Smagorinsky.

Une analyse mathématique rigoureuse de ce modèle ne semble pas immédiate...c'est en fait une des nos perspectives de recherche.

---

10. ce filtre a été défini explicitement dans la section 2.6.1

### 3.3 Le modèle LANS

Il existe dans la nature des fluides qui n'obéissent pas aux équations classiques de Navier-Stokes. Dans ce sens, des modèles plus compliqués ont dû être développés pour les étudier. Ainsi, Rivlin et Ericksen [79] ont introduit la notion de *fluide de type différentiel*. Un cas particulier de ces fluides est constitué par les fluides de grade 2. L'analyse de Dunn et Fosdick [40] montre que l'équation d'un tel fluide est donnée par :

$$\partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \sum_j (u - \alpha \Delta u)_j \nabla u_j + u \cdot \nabla (u - \alpha \Delta u) = -\nabla p + f \quad (3.112)$$

où  $\alpha \geq 0$  est une constante matérielle,  $\nu > 0$  est la viscosité du fluide,  $u$  le champ de vitesse et  $p$  la pression. Pour  $\alpha = 0$  on obtient les équations classiques de Navier-Stokes, de sorte que l'équation du fluide de grad 2 est une généralisation simple des équations de Navier-Stokes.

Ce système a été largement étudié dans la littérature mathématique (voir [11] par exemple, et les références cités dedans), la présence des termes non-linéaires apportant des difficultés supplémentaires dans l'application des techniques analytiques traditionnelles. Appliquant des techniques de géométrie différentielle, Skholler [85], Marsden et Skholler [70] ont étudié les problèmes d'existence, unicité des solutions régulières pour le cas non-visqueux en dimension 3, ainsi que l'existence des limites régulières quand  $\nu \rightarrow 0$  dans des domaines bornés.

L'intérêt pour le problème (3.112) vient du fait que ce système est identique du point de vue de la formulation mathématique avec le système LANS proposé par Marsden et Skholler [70] comme étant un modèle de turbulence (modèle LES).

La différence entre les deux modèles est donnée par l'interprétation du paramètre  $\alpha$  : dans les équations des fluides de grade 2,  $\alpha$  est un paramètre qui mesure la réponse élastique du fluide, alors que pour les équations LANS il représente un paramètre d'échelle.

Pour le modèle LANS on adopte par la suite une formulation différente de celle décrite par l'équation (3.112) :

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)u = -(1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} \text{grad } p + \nu \Delta u - \mathcal{U}^\alpha(u) \quad (3.113)$$

où

$$\mathcal{U}^\alpha(u) = \alpha^2 (1 - \alpha^2 \Delta)^{-1} \text{div} [\nabla u \cdot \nabla u^T + \nabla u \cdot \nabla u - \nabla u^T \cdot \nabla u] \quad (3.114)$$

qui est complétée avec les conditions d'incompressibilité, aux limites et initiale respectivement :

$$\text{div } u = 0 \quad (3.115)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (3.116)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.117)$$

On a choisi cette formulation parce qu'elle ressemble plus à une formulation classique pour les équations de la LES.

**Remarque 3.3.1** *D'après Marsden et Shkoller, les solutions du problème (3.113) - (3.117), pour des  $\alpha$  suffisamment petits, sont capables de reproduire le comportement des grandes échelles produites dans un écoulement turbulent (plus grandes que  $\alpha$ ), le filtrage des petites échelles étant fait par une méthode différente de ce qu'on a vu jusqu'à présent : c'est la méthode du lagrangien moyenné qu'on présente ci-après.*

### La technique du Lagrangien moyenné

On résume maintenant l'approche introduite par Marsden et Shkoller (2000), en vue de définir le modèle de fermeture sous-maille LANS.

Soit  $X$  l'espace vectoriel constitué des vitesses initiales pour lesquelles les équations d'Euler sont bien posées.

On note par  $u(x, t)$  la solution correspondant à la condition initiale  $u_0(x) \in X$  et  $u^\epsilon(x, t)$  celle qui correspond à  $u_0^\epsilon(x) \in X$ , où :

$$u_0^\epsilon = u_0 + \epsilon w, \quad \text{avec } w \in \mathcal{B}(X, 1), \epsilon \in [0, \alpha]$$

pour  $\alpha$  suffisamment petit. On a noté par  $\mathcal{B}(X, 1)$  la boule unité dans  $X$ .

On définit l'opération de moyenne d'ensemble sur  $[0, \alpha] \times \mathcal{B}(X, 1)$  par :

$$\langle f(\epsilon, w) \rangle = \frac{\bar{t}}{\alpha} \int_0^\alpha \int_{\mathcal{B}(X, 1)} f(\epsilon, w) d\mu d\epsilon$$

où  $d\mu$  est la mesure choisie sur la boule  $\mathcal{B}(X, 1)$  et  $\bar{t}$  est un temps caractéristique.

Soit  $\eta$  l'écoulement lagrangien correspondant au champ de vitesse  $u$ , qui vérifie :

$$\partial_t \eta(x, t) = u(\eta(x, t), t) \quad (3.118)$$

et

$$\eta(x, 0) = x. \quad (3.119)$$

Par similarité, on considère  $\eta^\epsilon$  l'écoulement lagrangien correspondant à  $u^\epsilon$ .

On définit le difféomorphisme "fluctuation lagrangienne" qui conserve l'élément de volume  $\xi^\epsilon$  par :

$$\xi^\epsilon(x, t) := \eta^\epsilon(\eta^{-1}(x, t)). \quad (3.120)$$

Comme  $\eta^{\epsilon=0}(x, t) = \eta(x, t) \quad \forall t \geq 0$  on déduit que  $\xi^0(x, t) = x$ .  
Soit la fluctuation de la vitesse eulerienne :

$$u'(x, t) = \left. \frac{d}{d\alpha} u^\alpha(x, t) \right|_{\alpha=0}$$

et la fluctuation lagrangienne correspondante :

$$\xi'(x, t) = \left. \frac{d}{d\alpha} \xi^\alpha(x, t) \right|_{\alpha=0}$$

On peut définir de la même manière

$$u''(x, t) = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} u^\alpha(x, t) \right|_{\alpha=0} \quad \text{et} \quad \xi''(x, t) = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi^\alpha(x, t) \right|_{\alpha=0}$$

Le but est de moyennner d'après l'ensemble de toutes les solutions possibles des équations d'Euler qui correspondent à la condition initiale  $\bar{u}_0^\epsilon$  sur une boule  $\mathcal{B}_X(\bar{u}, \alpha)$ .

Soit l'intégrale d'action moyennée définie par :

$$\bar{S} = \left\langle \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \partial_t u^\epsilon dx dt \right\rangle . \quad (3.121)$$

Par un développement de  $u^\epsilon$  autour de  $\epsilon = 0$  on trouve :

$$u^\epsilon(x, t) = \bar{u}(x, t) + \epsilon u'(x, t) + \frac{1}{2} \epsilon^2 u''(x, t) + O(\epsilon^3) \quad (3.122)$$

Comme  $u$  ne dépend ni de  $\epsilon$  ni de  $w$  on vérifie que  $\langle u \rangle = u$ . Donc on peut considérer  $u := \bar{u}$  comme une moyenne.

En différentiant (3.120) on obtient les relations entre les fluctuations euleriennes et celles lagrangiennes :

$$u' = \partial_t \xi' + (\bar{u} \cdot \nabla) \xi' - (\xi' \cdot \nabla) \bar{u} \quad (3.123)$$

et

$$u'' = \partial_t \xi'' + (\bar{u} \cdot \nabla) \xi'' - 2(\xi' \cdot \nabla) u' - \nabla \nabla \bar{u}(\xi', \xi') \quad (3.124)$$

où  $\nabla \nabla u(\xi', \xi') = \bar{u}_{,jk}^i \xi'^j \xi'^k$  (ici on a utilisé les notations classiques de la géométrie différentielle [91]).

On accepte les deux hypothèses suivantes sur le comportement des fluctuations lagrangiennes à l'ordre 1 et à l'ordre 2 :

$H_1$  :

$$\partial_t \xi' + (\bar{u} \cdot \nabla) \xi' - (\xi' \cdot \nabla) \bar{u} = 0 \quad (3.125)$$

ce qui signifie que la fluctuation lagrangienne de premier ordre  $\xi'$  est transportée par le champ moyen  $\bar{u}$ ,

et  $H_2$  :

$$\partial_t \xi'' + (\bar{u} \cdot \nabla) \xi'' = 0 \quad (3.126)$$

ce qui signifie que la fluctuation lagrangienne d'ordre 2,  $\xi''$  est transportée isométriquement ou parallèlement par l'écoulement moyen  $\bar{u}$  et donc à l'ordre 2 il n'y a pas d'étirement pour  $\xi''$ .

Maintenant si on remplace (3.123) et (3.124) dans (3.122) en utilisant les hypothèses (3.125) et (3.126) on trouve :

$$u^\epsilon = \bar{u} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \nabla \nabla \bar{u}(\xi', \xi') + O(\epsilon^3) \quad (3.127)$$

et si on substitue (3.127) dans (3.121) on trouve la formule qui nous donne l'intégrale du lagrangien moyenné :

$$\bar{S}^\alpha = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega [|\bar{u}^\alpha|^2 + \alpha^2 \langle \nabla \nabla \bar{u}^\alpha : F, \bar{u}^\alpha \rangle + O(\alpha^3)] dx dt \quad (3.128)$$

où  $F$  est le tenseur de covariance défini par

$$F = \langle \xi' \otimes \xi' \rangle .$$

On suppose ici que

$$F = c Id \quad (\text{Id est l'identité})$$

ce qui nous permettra de trouver les équations LANS isotropiques. Pour le cas anisotropique on renvoie à Marsden et Skholler [2001].

Le principe de Hamilton (le principe de moindre action) affirme que les écoulements de fluide parfait sont les géodésiques de la métrique invariante à droite décrite sur un groupe de difféomorphismes, dans notre cas sur  $\mathcal{D}_\mu^s$ , le groupe de difféomorphismes de  $H^s$  qui conservent le volume. Les techniques de réduction d'Euler-Poincaré (pour des détails concernant ces techniques voir à Marsden [71]) montrent que ce principe variationnel peut être réduit à un autre principe, en termes des vitesses euleriennes, qui dit qu'il faut considérer les points stationnaires de l'intégrale d'action  $\bar{S}^\alpha$

$$\delta \bar{S}^\alpha = 0$$

pour les variations du type :

$$\delta \bar{u} = \partial_t v + (u \cdot \nabla) v - (v \cdot \nabla) u$$

où  $v$  représente le déplacement infinitésimal de la particule.

Ce principe permet d'obtenir les équations d'Euler moyennées au sens du lagrangien (abr. LAE). Maintenant la question est : d'où vient le terme de dissipation  $\nu Au$  dans les équations LANS ?

Ce terme apparaît d'après une *interprétation stochastique* de l'écoulement lagrangien, si on soumet la trajectoire lagrangienne à une marche aléatoire (voir Chorin [15]). Du point de vue des ODE stochastiques, les dérivées temporelles déterministes sont remplacées par des dérivées temporelles stochastiques moyennées à gauche et par l'application de la formule de Itô, il apparaît naturellement le terme de diffusion et donc on obtient finalement les équations LANS.

Des travaux théoriques sur le système LANS ont été faits par Marsden, Ratiu, Coutand, Skholler... En **dimension 2**, cas où les équations de Navier-Stokes sont bien-posées, Oliver et Skholler [77] ont démontré que pour une vorticit   initiale  $\omega_0 \in L^\infty$  les solutions de LANS convergent globalement en temps vers les solutions des   quations de Navier-Stokes quand  $\alpha \rightarrow 0$  et pour  $\nu > 0$  fix  . On a aussi la convergence des solutions classiques mais sur des intervalles de temps courts.

**En dimension 3** dans le cas des domaines non-born  s, Marsden et Skholler [70] montrent que le probl  me (3.113) est bien pos   dans  $H^s$ , pour  $s \geq 0$ .

Plus pr  cis  ment, soient les espaces :

$$\mathcal{V}^s = H_0^1 \cap H^s \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\mu^s = \{u \in \mathcal{V}^s \mid \operatorname{div} u = 0\}.$$

Pour  $s > 3/2$ ,  $\mathcal{V}_\mu^s$  contient les vecteurs    divergence nulle dans  $H^s(\Omega)$  et qui s'annulent sur la fronti  re du domaine  $\Omega$ .

Dans ce cadre, on peut prouver [70] le th  or  me suivant concernant l'existence globale de la solution des   quations LANS dans un domaine non-born    $\Omega$  :

**Th  or  me 3.3.1** *Si  $u_0 \in \mathcal{V}_\mu^s$  et  $s > 6.5$  alors il existe une unique solution  $u(x, t)$  pour le probl  me (3.113), (3.2) qui est dans*

$$\mathcal{C}^0([0, \infty), \mathcal{V}_\mu^s) \cap \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \Omega).$$

D'apr  s Barenblatt et Chorin [5], les solutions des   quations de Navier-Stokes ne convergent pas en g  n  ral vers les solutions des   quations d'Euler quand  $\nu \rightarrow 0$ , dans des domaines born  s, mais les solutions des   quations LANS ont cette propri  t  , comme le montre le th  or  me suivant :

**Th  or  me 3.3.2** *On consid  re les   quations LANS et LAE isotropiques et soient  $\alpha > 0$  fix   et  $s > 6.5$ . Pour une solution initiale  $u_0(x, t)$  soit  $u^\nu(x, t)$  la solution des   quations LANS et on suppose que la solution  $u(x, t)$  des   quations LAE existe sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Alors,  $u^\nu(x, t)$  converge dans  $H^s$  vers  $u(x, t)$  quand  $\nu \rightarrow 0$ .*

En ce qui concerne la convergence quand  $\alpha \rightarrow 0$ , Foias, Holm et Titi montre dans [46] que les solutions des   quations LANS convergent vers les solutions faibles des   quations

de Navier-Stokes 3D.

Dans le cas des domaines bornés, Marsden et Skholler [70] prouvent que les équations LANS sont bien posées et possèdent des solutions régulières dans un domaine  $\Omega$  de frontière régulière  $\partial\Omega$ . On a dans ce cas :

**Théorème 3.3.3** *Si  $u_0 \in \dot{\mathcal{V}}_\mu^s$  et  $s \in [3, 5)$  alors il existe une unique solution de (3.113) dans :*

$$\mathcal{C}([0, \infty), \dot{\mathcal{V}}_\mu^s) \cap \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \Omega)$$

où  $\dot{\mathcal{V}}_\mu^s = \{u \in H_0^1 \cap H^s : \operatorname{div} u = 0 \text{ et } Au = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ .

Pour  $\alpha > 0$ , ils montrent aussi la convergence dans  $L^\infty(0, T; D(A^{s/2}))$  des solutions des équations de LANS vers les solutions des équations d'Euler pour  $s \in (2.5, 3)$ , même en présence de bords, et sur des intervalles de temps gouvernés par les équations d'Euler.

Coutand et al [32] prouvent que le problème (3.113) est globalement bien posé pour des données  $u_0 \in H_0^1$  avec  $\operatorname{div} u_0 = 0$ . Pour une telle condition initiale, il démontre aussi l'existence d'un attracteur global compact dans l'ensemble  $\{u \in H_0^1 : \operatorname{div} u = 0\}$ , ce qui étend les résultats obtenus par Foias et al [46] dans des domaines non-bornés, dans le cas des domaines bornés.

## 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré qu'avec un terme de Smagorinsky ajouté aux équations de Navier-Stokes, on obtient l'existence et l'unicité des solutions régulières pour tout temps, ainsi que l'existence d'un attracteur de dimension finie pour le système dynamique associé. L'excès de dissipation constaté pour ce modèle amène cependant à se poser la question :

“quel modèle minimal doit-on ajouter aux équations de Navier-Stokes, pour assurer l'existence des solutions régulières pour tout temps ? “

Un candidat possible peut être la variante sélective du modèle de Smagorinsky, par exemple. Le problème de la régularité de la solution d'un tel modèle est à l'heure actuelle un problème ouvert ...

Le modèle LANS a été proposé comme un modèle de turbulence, étant obtenu par une méthode géométrique. Les techniques utilisées pour montrer les résultats théoriques concernant ce modèle sont très intéressantes, supposant des bonnes connaissances dans le domaine de géométrie différentielle.





## Chapitre 4

# Simulations numériques utilisant des modèles LES

Ce chapitre est consacré à l'évaluation numérique des quelques modèles sous-maille présentés dans les chapitres précédents, dans deux cas de référence pour les écoulements turbulents : le problème de la reconnection de deux tubes de vorticité et la turbulence homogène et isotrope (THI).

Les modèles analysés sont : le modèle de Smagorinsky, le modèle de Smagorinsky sélectif, le modèle anisotrope sélectif et le modèle LANS.

Le code utilisé pour obtenir les résultats numériques présentés dans cette thèse repose sur un code spectral, développé au laboratoire LMC, code bien adapté pour calculer les structures des plus petites échelles résolues qui existent au sein des écoulements turbulents. Dans les deux cas on suppose des conditions aux limites périodiques dans les trois directions de l'espace, ce qui nous permettra d'utiliser des développements dans l'espace de Fourier des variables de l'écoulement.

On présente d'abord le schéma numérique utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes   des grands nombres de Reynolds, ainsi que les particularités d'implémentation des modèles sous-maille considérés. Ensuite sont présentées les deux problèmes test choisis et une analyse comparative des modèles sous-maille dans ces deux cas.

### 4.1 Présentation du schéma numérique

On considère les équations de la LES 3D dans le cas incompressible et dans un domaine  $\Omega = [0, 2\pi]^3$  :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t)\nabla\mathbf{u}] \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

et les conditions initiales et aux limites :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + 2\pi, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse,  $\mathbf{f}$  représente les forces appliquées au fluide (on considère dans nos simulations le cas  $\mathbf{f} = 0$ ),  $p$  est la pression,  $\nu$  la viscosité cinématique et  $\nu_t$  la viscosité turbulente pour laquelle on prescrit des formules de calcul en fonction du modèle de sous-maille utilisé.

Utilisant le fait que

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est la vorticité, on peut réecrire l' equation (4.1) de la manière suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla P + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t)\nabla \mathbf{u}] \quad (4.5)$$

où la pression totale  $P$  est donnée par  $P = p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$ .

C'est la formulation que nous avons choisi pour la r esolution numérique des  equations de Navier-Stokes, pr esent e par la suite.

### 4.1.1 Discr etisation spatiale

Pour la discr etisation spatiale des  equations (4.1)-(4.2) on utilise une m ethode de Galerkin spectrale dans le domaine de calcul  $\Omega$ .

Dans les techniques spectrales de discr etisation spatiale, les fonctions du mouvement sont prises sous forme de d eveloppements en s erie de fonctions orthogonales. Les trois principaux types de fonction de base sont les polyn omes de Tchebyshev, de Legendre et les fonctions trigonométriques des s eries de Fourier. Le choix de la d ecomposition d epend des conditions aux limites de l'écoulement, les deux premi eres bases étant plus particulièrement adapt ees au cas des mouvements en pr esence de parois solides avec condition d'adh erence.

Les s eries de Fourier sont recommandées pour des écoulements qui pr esente une "p eriodicit " spatiale. Lorsque cette condition ne r esulte pas directement de la g eom trie on peut envisager un traitement de Fourier en usant du concept *d'écoulement en boite*. Ce concept s'applique s'il est possible de d efinir dans l'espace physique de l'écoulement étudié (qui n'est pas n ecessairement cin ematiquement homog ene) un cube de coté  $L$  qui *capture* toutes les structures spatiales significatives de la turbulence consid er e. La p eriodicit  spatiale est alors obtenue par un *pavage* de tout l'espace en une infinité de boites identiques selon les trois directions.

Les diff erentes bases peuvent également être combinées pour traiter des probl emes où la p eriodicit  spatiale peut être invoquée suivant deux directions par exemple, la troisième restant contrainte par des conditions d'adh erence, situation typique des écoulements en canal.

On considère par la suite des configurations avec périodicité spatiale tridimensionnelle. Dans ce cas, toute fonction réelle  $f(x, t)$  d'une variable d'espace  $x$  et du temps  $t$  est représentée par une approximation discrète  $\tilde{f}(x_p, t)$  sur un nombre fini  $N$  de points de collocation  $x_p, p = 1$  à  $N$ .

La décomposition en série de Fourier de cette approximation discrète s'écrit :

$$\tilde{f}(x_p, t) = \sum_{n=1}^N \hat{f}(k_n, t) e^{ik_n x_p} \quad \text{avec} \quad \hat{f}(k_n, t) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \tilde{f}(x_p, t) e^{-ik_n x_p} \quad (4.6)$$

où  $k_n$  est le nombre d'onde relatif à la boîte de périodicité spatiale  $L$  ( $k_n = 2\pi n/L$ ).

L'emploi d'une telle représentation des solutions des équations de Navier-Stokes présente :

- **l'avantage** qu'elle permet un calcul facile de toute dérivée spatiale de la fonction. Ce calcul est également très précis, car on peut montrer (Canuto et al. [10]) que l'erreur sur la valeur de la dérivée décroît plus vite que n'importe quelle puissance de  $N$ , pour  $N$  suffisamment grand ;
- **l'inconvénient** dû au terme d'advection des équations de Navier-Stokes, dont la non-linéarité introduit un produit de convolution et aussi dû au terme non-linéaire de sous-maille ajouté. L'évaluation de ces termes par sommation des contributions des transformées de Fourier requiert un nombre d'opérations de l'ordre de  $N^6$  pour un calcul tridimensionnel.

Comme l'évaluation directe par des algorithmes aux différences finies se fait avec  $N^3$  opérations, on choisit de ne pas appliquer une méthode spectrale *pure*, mais une méthode pseudo-spectrale où les produits de convolution sont calculés dans l'espace réel à partir des valeurs des fonctions obtenues par transformée de Fourier rapide (FFT) de leurs équivalents spectraux. Avec ce procédé, l'ordre de grandeur du nombre d'opérations requis est réduit à  $(N \log_2(N))^3$ . Cette technique introduit en contrepartie des *erreurs de recouvrement* (erreurs d'*aliasing*, en anglais). Pour les réduire, il faut appliquer une troncature du nombre de points intervenant dans le calcul des produits (voir Annexe B).

La non-linéarité du terme de transport est à l'origine d'un terme d'interaction entre les vecteurs d'onde  $p$  et  $q$  formant une *triade* (c'est-à-dire le vecteur  $k$  tel que  $k = p + q$ ). Ces interactions peuvent impliquer des vecteurs d'onde dont le module peut être supérieur ou inférieur à celui du vecteur  $k$  (voir figure 4.1). Dans le cas *a*), l'interaction triadique sera associée à des échanges avec des structures de taille inférieure à l'échelle locale de turbulence, le cas *b*) correspondant au transfert vers les gros tourbillons.

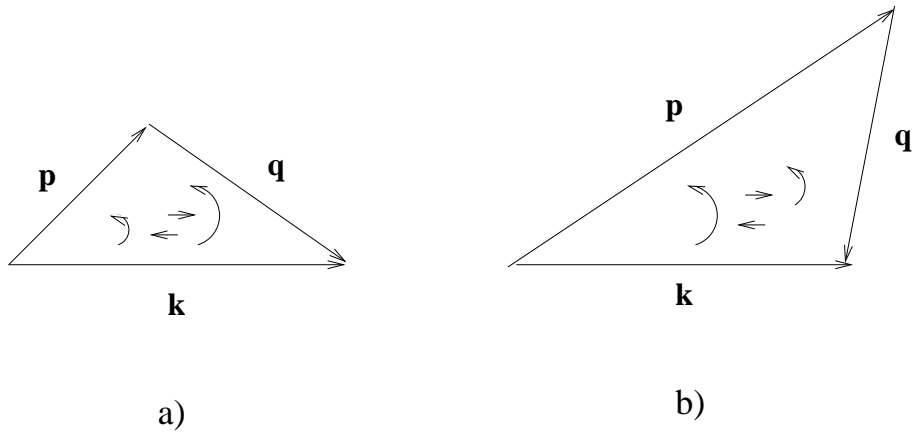


FIG. 4.1 – Interaction triadique et sens des transferts entre les structures

### 4.1.2 Les équations de la LES dans l'espace de Fourier

Soient le champ de vitesse (moyenne<sup>1</sup>)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  d'un écoulement turbulent et la pression  $p(x, t)$  pour lesquelles on considère des développements en séries de Fourier tronquées conformément aux relations (4.6)<sup>2</sup>.

Utilisant ces développements dans (4.5) et (4.2) on obtient :

$$(\partial_t + \nu |\mathbf{k}|^2) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + \widehat{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})}(\mathbf{k}) - \widehat{LES}(\mathbf{k}) + i\mathbf{k} \hat{P}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) \quad (4.7)$$

et

$$i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0 \quad (4.8)$$

avec les conditions initiales

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, 0) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{k}) \text{ et } \hat{\mathbf{u}}(0, t) = 0 \quad (4.9)$$

pour tout  $\mathbf{k}$  appartenant à la "sphère" qui décrit la troncature utilisée dans l'espace de Fourier. On a noté par  $LES$  le terme de sous-maille qui sera défini pour chaque modèle analysé.

On projète l'équation (4.7) sur le sous espace des fonctions périodiques à divergence nulle en utilisant le projecteur de Leray-Helmholtz défini dans le cas périodique par la formule :

$$Pf(x) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\hat{f}(\mathbf{k}) - \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} (\mathbf{k} \cdot \hat{f}(\mathbf{k}))] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.10)$$

Cette projection permet d'éliminer la pression et d'obtenir l'équation suivante :

$$(\partial_t + \nu |\mathbf{k}|^2) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) + \widehat{NL}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \widehat{LES}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3. \quad (4.11)$$

1. on oublie partout la notation  $\bar{(\cdot)}$

2. on va noter par la suite encore  $\mathbf{u}$  et  $P$  ces approximations, pour éviter d'avoir trop de notations

où on a noté

$$\begin{aligned}\widehat{NL}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= P(\widehat{(\omega \times \mathbf{u})}(\mathbf{k})) \\ \widehat{LES}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= P(\widehat{LES}(\mathbf{k}))\end{aligned}$$

et

$$\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = P(\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})).$$

Si on multiplie l'équation (4.11) par  $e^{\nu|\mathbf{k}|^2 t}$  et on regroupe les termes de manière convenable on obtient l'équation :

$$\partial_t(e^{\nu|\mathbf{k}|^2 t} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})) = e^{\nu|\mathbf{k}|^2 t} (\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) - \widehat{NL}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \widehat{LES}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}, \mathbf{u})) \quad (4.12)$$

formulation qui permet de procéder à une intégration temporelle exacte du terme linéaire. Pour le terme non-linéaire on applique un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, décrit dans la section suivante.

### 4.1.3 Discrétisation temporelle

Dans la plupart des applications des méthodes spectrales à des équations aux dérivées partielles on utilise pour la discrétisation temporelle des schémas de différences-finies. Ainsi, la discrétisation temporelle dans notre code est assurée par un schéma du type Runge-Kutta d'ordre trois (une variante proposée par Williamson [97]) pour les termes convectifs et par un schéma directe pour les termes linéaires.

L'algorithme proposé pour résoudre une équation du type :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = f(\mathbf{u}, t), \quad t > 0 \quad (4.13)$$

où  $f$  est en général un opérateur non-linéaire, est : connaissant  $u^n = u(t_n)$  on calcule  $u^{n+1} = u(t_n + \Delta t)$  comme suit :

$$\begin{aligned}q_1 &= f(u^n, t_n) \\ u_{1/3}^n &= u^n + b_1 \Delta t q_1 \\ q_2 &= f(u_{1/3}^n, t_n + \frac{1}{3} \Delta t) + a_2 q_1 \\ u_{3/4}^n &= u_{1/3}^n + b_2 \Delta t q_2 \\ q_3 &= f(u_{3/4}^n, t_n + \frac{3}{4} \Delta t) + a_3 q_2 \\ u^{n+1} &= u_{3/4}^n + b_3 q_3 \quad .\end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un algorithme à stockage réduit qui ne demande donc aucune place supplémentaire en mémoire. Les valeurs des coefficients  $a_j$  et  $b_j$  pour le schéma utilisé sont :

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{1}{3} \\ a_2 &= -\frac{5}{9} \quad b_2 = \frac{15}{16} \\ a_3 &= -\frac{153}{128} \quad b_3 = \frac{8}{15} \quad .\end{aligned}$$

#### 4.1.4 Discrétisation des termes sous-maille

Concernant la discrétisation des différents termes de la LES que nous avons implémenté, on mentionne que pour le modèle de Smagorinsky et le modèle LANS on a utilisé une méthode pseudo-spectrale “pure”, c’est-à-dire sans d’autres particularités, et pour le modèle de Smagorinsky sélectif un schéma qui suit l’algorithme proposé dans la section 2.6.1.

On présente par la suite le schéma de discrétisation du modèle anisotrope proposé par Cottet [30], parce qu’il comporte une technique spécifique de discrétisation.

Dans le cas du modèle anisotrope les équations à résoudre sont les équations (4.5)-(4.2) avec  $\nu_t$  donné par

$$\nu_t(\mathbf{x}, t) = C_+^2 \Delta^2 [\mathbf{S}^+] \quad (4.14)$$

où  $C_+$  est la constante du modèle,  $\Delta$  représente la maille utilisée et  $[\mathbf{S}^+]$  représente la partie positive du tenseur de déformation qui sera définie par la suite.

La mise en oeuvre du modèle anisotrope dans un schéma eulérien (par exemple différences finies) semble délicate, car elle suppose la diagonalisation d’un tenseur  $3 \times 3$  en chaque point de la grille, ce qui peut s’avérer coûteux.

On peut s’affranchir de ce calcul en commençant par approcher le terme  $\text{div}(S\nabla u)$  par une intégrale puis en faisant un bilan d’énergie local sur les contributions des points de quadrature.

Nous commençons par présenter le schéma de dérivation du modèle anisotrope sélectif et ensuite le schéma de différences finies proposé pour la discrétisation de ce modèle.

Soit  $\zeta$  une fonction filtre qui vérifie :

$$\int x_k x_l \zeta(x) dx = \delta_{kl} \quad (4.15)$$

où  $k, l \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x_k$  représente les composantes du vecteur  $x$  et  $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker. Une telle fonction filtre peut être construite par une remise à l’échelle d’une fonction positive qui vérifie des propriétés de symétrie (par exemple, des fonctions à une symétrie sphérique ou des fonctions construites par produit tensoriel de fonctions 1D paires).  $\zeta$  est un filtre numérique qui ne coïncide pas nécessairement avec le filtre dont on a parlé dans la section dédiée à la description de la modélisation sous-maille 2.5.

A l’aide de (4.15) on peut écrire :

$$\Delta^2 D_{ik} u(x) D_{jk} u(x) = \Delta^{-3} \int D_{ik} u(x) D_{jl} u(x) (y_k - x_k) (y_l - x_l) \zeta\left(\frac{y - x}{\Delta}\right) dy \quad (4.16)$$

(on utilise ici la sommation d’Einstein pour les indices qui se répètent). Le paramètre  $\Delta$  qui apparaît dans la formule (4.16) désigne la largeur du filtre numérique  $\zeta$ , qu’on

considère par la suite constante. Utilisant des développements de Taylor standards de  $u_i$  et  $u_j$  autour de  $x$  on obtient :

$$\Delta^2 D_{ik} u(x) D_{jk} u(x) = \Delta^{-3} \left\{ \int [u_j(y) - u_j(x)] [u_i(y) - u_i(x)] \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) dy + O(\Delta^2) \right\} \quad (4.17)$$

En prenant la divergence de (4.17) et après l'annulation du terme qui contient  $\operatorname{div} u$  on a :

$$\partial_j (\Delta^2 D_{ik} u(x) D_{jk} u(x)) \approx A_i + B_i \quad (4.18)$$

où

$$A_i = -\Delta^{-3} \int [u_j(y) - u_j(x)] \partial_j u_i(x) \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) dy$$

$$B_i = -\Delta^{-4} \int [u_j(y) - u_j(x)] [u_i(y) - u_i(x)] \partial_j \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) dy.$$

On voit bien que les termes  $A_i$  sont les termes de convections : si on prend  $\lambda = \int \zeta(y) dy$  et

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\lambda \Delta^3} \int u(y) \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) dy$$

alors on peut réécrire  $A_i$  comme  $(\hat{u} - u) \nabla u_i$ . Donc, il ne contribue pas à la balance de l'énergie. Le but des modèles de sous-maille étant de permettre le transfert d'énergie entre les grandes et les petites échelles, on est intéressé seulement par l'analyse du terme  $B_i$ . Ainsi, on obtient le modèle sous-maille donné par :

$$\operatorname{div} (S \nabla u) \approx -\Delta^6 \int [u_j(y) - u_j(x)] [u_i(y) - u_i(x)] \partial_j \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) dy \quad (4.19)$$

Si maintenant on multiplie par  $u$  l'équation (4.19) et utilisant les propriétés de symétrie de  $\zeta$  on peut écrire :

$$\int S \nabla u \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \Delta^{-6} \int [u(y) - u(x)] \cdot \nabla \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) |u(y) - u(x)|^2 dx dy \quad (4.20)$$

Comme on est intéressé que par la contribution dissipative du tenseur  $S$ , on ne va garder que les points d'intégration qui vérifient :

$$[u(y) - u(x)] \cdot \nabla \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) \geq 0.$$

Le terme de dissipation sous-maille devient dans ce cas :

$$C \Delta^{-4} \int \{ [u(y) - u(x)] \cdot \nabla \zeta \left( \frac{y-x}{\Delta} \right) \}_+ [u(x) - u(y)] dy \quad (4.21)$$

où on désigne par  $a_+ = \max(0, a)$ .



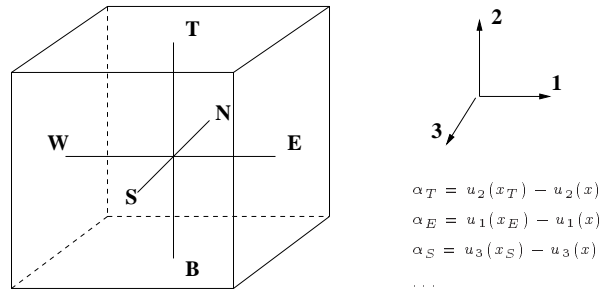


FIG. 4.2 – Schéma aux différences finies correspondant au modèle sous-maille anisotrope dans le cas d’une grille uniforme.

En pratique on choisit une fonction filtre à symétrie sphérique et on discrétise l’intégrale ci-dessus sur les points de la grille les plus proches. Pour une grille cartésienne uniforme et une fonction filtre linéaire par morceaux on obtient un schéma de différences finies symbolisé par la figure (4.2). On voit que, dans le cas de l’écoulement schématisé dans la figure (2.3), la dissipation ne s’exercera que dans la direction E-W, qui correspond bien aux valeurs propres négatives de  $S$ .

#### 4.1.5 Remarques sur la stabilité du schéma numérique

Pour assurer la stabilité du schéma numérique qu’on vient de présenter, on utilise une condition CFL définie par :

$$\text{CFL} = \max \left[ \Delta t \left( \left| \frac{u_1}{\Delta x} \right|, \left| \frac{u_2}{\Delta y} \right|, \left| \frac{u_3}{\Delta z} \right| \right) \right] \quad (4.22)$$

où  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  sont les pas d’espace (nous travaillons avec une grille uniforme, donc le pas d’espace est le même dans les trois directions) et  $\Delta t$  est le pas de temps.

La limite théorique pour la stabilité numérique d’un schéma de Runge-Kutta d’ordre 3 est de  $\sqrt{3}$ . Pour les calculs réalisés et présentés dans ce mémoire, nous avons utilisé une condition CFL= 1.

### 4.1.6 Quantités physiques caractéristiques

Le but des simulations numériques est de retrouver les caractéristiques des écoulements turbulents. On calcule ainsi différentes quantités *physiques* qui nous fournissent des informations concernant le degré de précision que l'on atteint dans nos calculs. On définit ici les principales caractéristiques qu'on suit : l'énergie cinétique, les spectres d'énergie, les spectres directionnels, l'enstrophie .

- **le spectre d'énergie** (densité d'énergie dans l'espace de Fourier)

$$E(l) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in S_{l,1/2}} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

où  $S_{l,1/2}$  représente la couronne

$$S_{l,1/2} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3 \text{ tel que } |\mathbf{k}| \in [l - 1/2, l + 1/2)\}.$$

Utilisant ces spectres on peut définir

- **l'énergie cinétique**

$$E = \sum_{l=0}^{\infty} E(l)$$

ou encore, via l'identité de Parseval :

$$E = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2.$$

Si on prend maintenant le produit scalaire de (4.5) par  $\mathbf{u}$  on obtient l'équation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\omega\|^2 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (4.23)$$

**Remarque 4.1.1** Pour arriver à la forme (4.23) de l'équation de l'énergie cinétique on a tenu compte des relations suivantes :

$$(\omega \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\nabla P \cdot \mathbf{u} = P(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Dans l'équation (4.23) le terme

$$\epsilon = \nu \|\omega\|^2$$

représente le **taux de dissipation d'énergie** et  $\|\omega\|^2$  représente l'**enstrophie**.

Si on veut faire une analyse plus précise des résultats numériques obtenus, on peut aussi examiner (en fonction de la condition analysée) les **spectres d'énergie** dans chaque direction de l'espace. On donne ici juste la définition du spectre dans la direction  $x_1$  :

$$E(k_1) = \sum_{k_2, k_3} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (4.24)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$  représente la transformée de Fourier de  $\mathbf{u}$  :

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \int_{[0,2\pi]^3} \mathbf{u} \cdot e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (4.25)$$

On peut définir de manière similaire les spectres dans les autres deux directions de l'espace  $x_2$  et  $x_3$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ). On va utiliser ce genre de spectres surtout pour analyser la condition initiale concernant le problème de la reconnexion des deux tubes de vorticité (section 4.2).

## 4.2 Condition initiale I - Le problème de la reconnexion des deux tubes de vorticité

Le phénomène de la reconnexion des deux tubes de vorticité est considéré une des thèmes de recherche d'intérêt les dernières années.

Ce phénomène peut être observé, par exemple, dans le sillage généré derrière un avion. On peut remarquer dans ce sillage un enroulement de l'écoulement   partir des extrémités des voilures d'un avion, qui met en évidence deux tourbillons contrarotatifs principaux.



FIG. 4.3 – *Tourbillons contrarotatifs derrière un Boeing 727 (photo NASA)*

Crow (1970) a été le premier   analyser l'instabilité initiale qui conduit   la reconnexion de ces deux tourbillons. Des nombreux travaux expérimentaux et numériques ont été effectués en vue d'étudier ce problème ([47], [74], [73]).

Nous avons choisi ce problème pour valider d'abord les modèles sous-maille sur un écoulement laminaire. Dans ce cas, il ne s'agit pas de simulations des grandes échelles   proprement parler, mais des simulations directes avec une viscosité artificielle. On se propose ici de comparer différentes quantités physiques caractéristiques   cet écoulement, calculées utilisant les quatre modèles choisis.

### 4.2.1 Description de la condition initiale

Le domaine de calcul est un cube  $[0, 2\pi]^3$ . La condition initiale utilisée dans cette section consiste dans une perturbation sinusoïdale de deux tubes de vortacité contrarotatifs de section circulaires, parallèles, situés d'une part et de l'autre du plan  $y = \pi$  (voir figure 4.4).

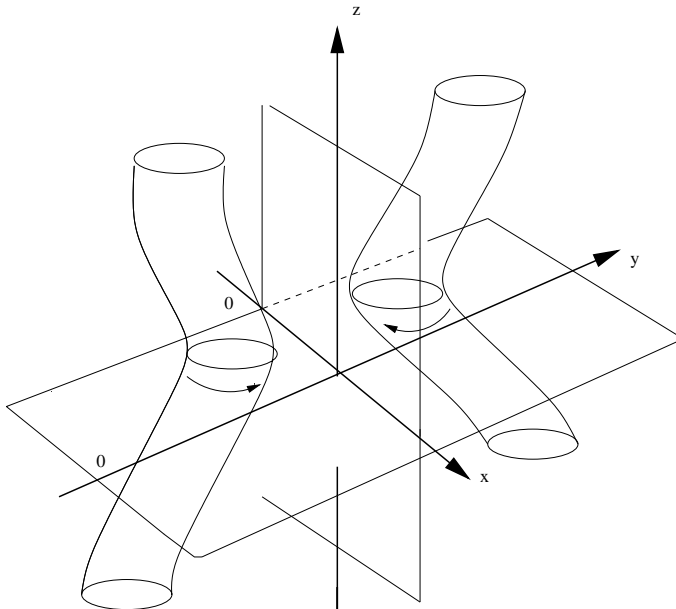


FIG. 4.4 – *Le problème de la reconnection*

Pour un tube non-perturbé, le tourbillon est axisymétrique par rapport au centre du tube et possède seulement une composante suivant la direction  $z$ . Donc, pour un tourbillon non-perturbé ayant le centre en  $x = y = 0$  on a :

$$\omega = \omega(r)\mathbf{k} \quad \text{où} \quad r = x^2 + y^2 \quad (4.26)$$

On utilise ici une distribution de la vortacité compacte et de classe  $\mathcal{C}^{\infty 3}$  donnée par :

$$\omega(r) = \begin{cases} -20[1 - f(3r/2)], & \text{si } r < 2/3 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.27)$$

avec

$$f(\eta) = \exp\left(\frac{-K}{\eta} \exp\left(\frac{1}{\eta-1}\right)\right)$$

et

$$K = \frac{1}{2}e^2 \ln 2$$

---

3. pour plus de détails voir [83]

La condition initiale considérée ici est :

$$\omega = [\omega(r - r_+(z)) - \omega(r - r_-(z))]\mathbf{k} \quad (4.28)$$

où

$$\begin{aligned} r_+ &= [\pi - \epsilon(1 - \cos z) \sin(\pi/3)]\mathbf{i} + [\pi + b - \epsilon(1 - \cos z) \cos(\pi/3)]\mathbf{j} \\ r_- &= [\pi - \epsilon(1 - \cos z) \sin(\pi/3)]\mathbf{i} + [\pi - b + \epsilon(1 - \cos z) \cos(\pi/3)]\mathbf{j} \end{aligned}$$

$2b$  est l'écartement entre les centres de deux tubes non-perturbés. Dans nos simulations on choisit  $2b = 1.73$ .

Après la perturbation auquel on a soumis les tubes de vorticité, le champ  $\omega$  n'est pas   divergence nulle. Pour remédier cette situation on projete  $\omega$  sur le champ   divergence nulle en définissant la vitesse initiale par :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \nabla \times (\nabla^2)^{-1}\omega \quad (4.29)$$

et finalement la vorticité initiale par :

$$\omega_i(x, 0) = \nabla \times \mathbf{u}(x, 0). \quad (4.30)$$

Enfin, on définit le nombre de Reynolds par :

$$\text{Re} = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (4.31)$$

où  $\Gamma$  est la circulation dans une section transversale d'un seul tube de vorticité non-perturbé. Pour nos calculs on prend  $\Gamma = 7.665$  et on examine l'évolution temporelle de l'état initial considéré, donné par (4.28), pour un nombre de Reynolds de 3500.

Une analyse physique assez complète du phénomène de la reconnection est décrite dans [83].

## 4.2.2 Résultats numériques

Pour illustrer le problème que nous analysons dans cette section, nous commençons par présenter deux images qui représentent les isosurfaces du module de la vorticité, au moment initial ( $t = 0$ ) et au moment de la reconnection ( $t = 1.5$ ) des deux tubes de vorticité considérés.

L'isosurface colorée en rouge correspond   une valeur plus forte que celle colorée en bleu.

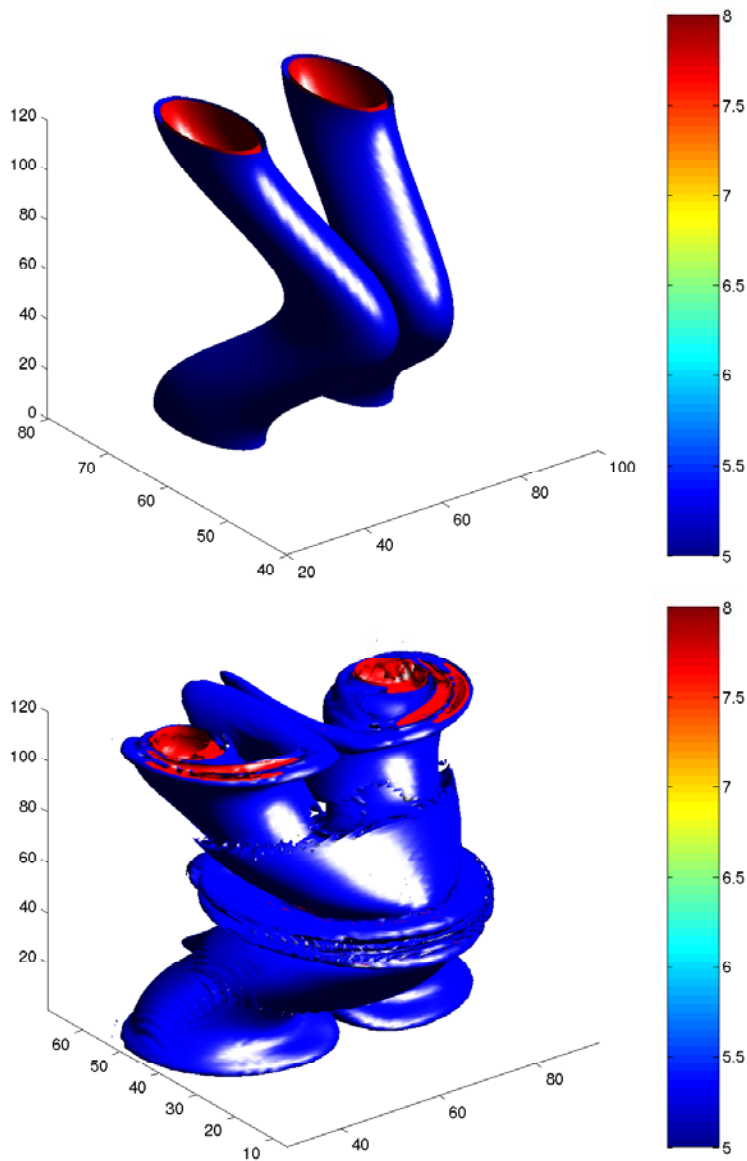


FIG. 4.5 – Problème de la reconnection : les isosurfaces du module de la vorticité    $t=0$  et    $t=1.5$  obtenues par une Simulation Numérique Directe ( $N=240$ )

Nous allons faire dans la suite une analyse comparative   la fois quantitative (en suivant le comportement de l'énergie cinétique, de l'enstrophie, des spectres d'énergie dans les trois directions de l'espace) et qualitative (en considérant les coupes du tourbillon dans le plan de reconnection) des modèles sous-maille considérés.

Nous nous sommes intéressés d'abord à l'évolution de l'énergie cinétique et de l'enstrophie. Le comportement de ces quantités constitue un premier indice dans la validation des modèles sous-maille choisis. Les figures 4.6 montrent que dans le cas de l'écoulement considéré ici, qui est laminaire, comme nous l'avons déjà signalé, une simulation numérique directe sur une grille  $120^3$  donne des résultats proches des ceux obtenus avec une grille deux fois plus fine (dans la suite on va considérer comme référence, les résultats obtenus par une simulation numérique directe sur une grille  $240^3$ , qui sera appelée DNS-référence). La constante pour le modèle de Smagorinsky a été volontairement choisie tel que le modèle soit un peu trop dissipatif. Dans ce cas, considérant la variante sélective de ce modèle (présentée dans la section 2.6.1) on observe que la dissipation du modèle de Smagorinsky est bien réduite.

Pour le modèle sélectif nous avons considéré une valeur  $\alpha_0 = 5^0$  (dans la section 4.3.2 nous présentons plus de détails concernant le choix d'une telle valeur).

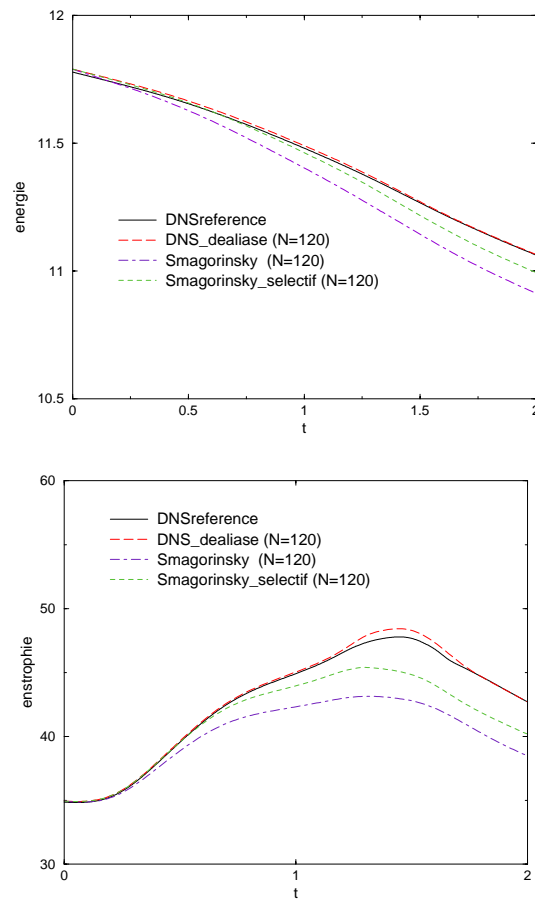


FIG. 4.6 – Courbes d'énergie (en haut) et d'enstrophie (en bas)

Des comparaisons de spectres directionnels d'énergie nous permettent de faire une analyse plus précise du problème de la reconnection. Les figures ci-dessous révèlent encore une fois une décroissance correcte des spectres l'énergie obtenus par une DNS120 par rapport a ceux obtenus par une DNS 240, ainsi que le caractère dissipatif du modèle de Smagorinsky. On remarque aussi au niveau de spectres l'effet de la reduction de l'intensité turbulente dans le cas du modèle de Smagorinsky sélectif.

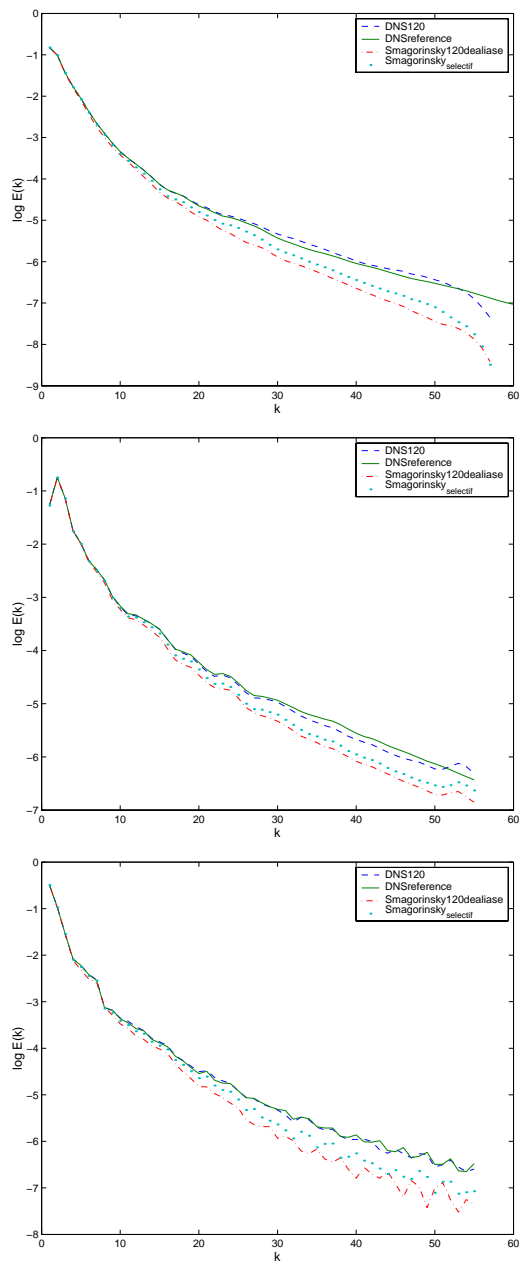


FIG. 4.7 – Spectres d'énergie dans les directions  $x$ ,  $y$  et respectivement  $z$ ,    $t=2$



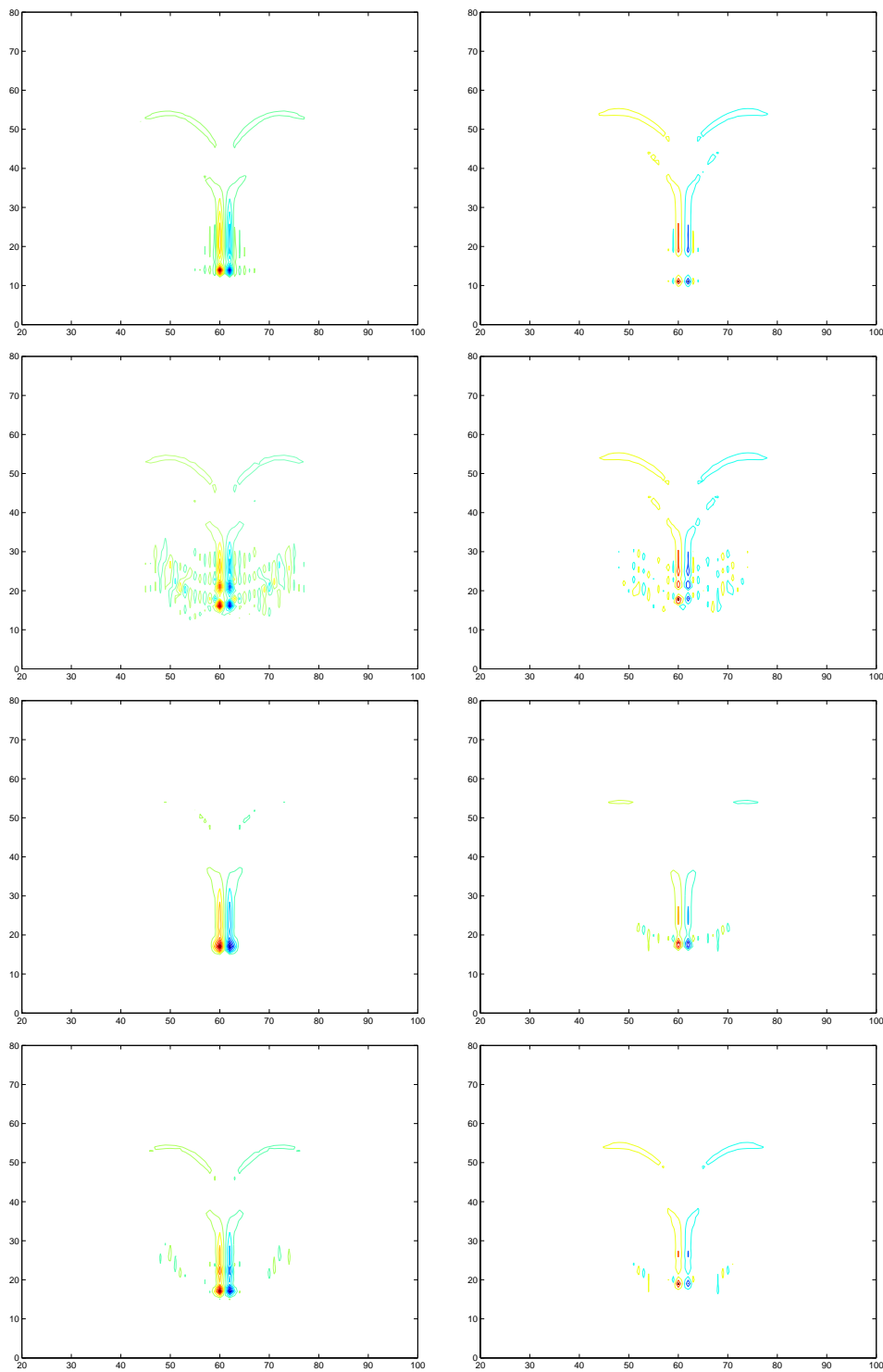


FIG. 4.8 – Isovaleurs de la composante verticale de la vorticité dans le plan de reconnection: à gauche, à  $t = 1.5$ , à droite, à  $t = 1.75$ ; de haut en bas: *DNS240*, *DNS120*, *LES-Smagorinsky120*, *LES-Smagorinsky sélectif120*

La figure 4.8 montre les isovaleurs de  $\omega_z$  dans le plan de reconnection, au moment de la reconnection ( $t=1.5$ ) et respectivement peu temps après ( $t=1.75$ ). Cette analyse qualitative, nous indique que même si au niveau de courbes d'énergie, d'ensrophie et de spectres d'énergie, la DNS120 reproduit bien la DNS240, au niveau de coupes on remarque que la DNS120 produit un bruit numérique, dû probablement   une accumulation d'énergie dans les petites échelles. Avec le modèle de Smagorinsky classique nous observons qu'on perd trop des détails,   cause de sa dissipation excessive. Par contre, le modèle de Smagorinsky sélectif semble le mieux adapté   reproduire les calculs obtenus avec la simulation de référence DNS240.

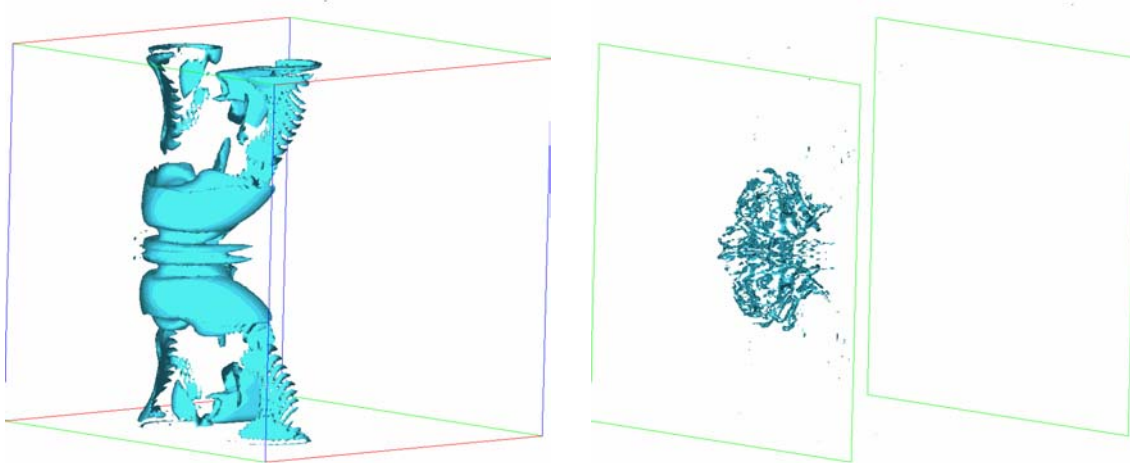


FIG. 4.9 – Intensités turbulentes  $\nu_t$ : le modèle de Smagorinsky (  gauche); le modèle de Smagorinsky sélectif (  droite)    $t=1.75$ ; isolavaleur 0.0015

Une comparaison des intensités turbulentes  $\nu_t$  correspondantes au modèle de Smagorinsky classique et   sa variante sélective est présentée dans la figure 4.9. Pour le modèle sélectif nous avons utilisé un seuil  $\alpha_0 = 15^\circ$ . La raison a été qu'une valeur du seuil  $\alpha_0 = 5^\circ$ , ne permettait pas de distinguer clairement les zones de turbulence dans cet écoulement. Dans le cas présenté, on remarque que c'est dans la zone de reconnection où on active la viscosité turbulente du modèle de Smagorinsky, zone qui correspond   une forte activité tourbillonnaire.

Nous avons fait les mêmes types des comparaisons avec les autres deux modèles sous-mailles : le modèle anisotrope sélectif et le modèle LANS. On remarque que le modèle anisotrope sélectif considéré avec une constante *adequate* a un comportement très proche de celui obtenu avec une DNS120, pour toutes les quantités évaluées (énergie cinétique, enstrophie, spectres d'énergie, coupes). Par contre, nous avons trouvé que le modèle LANS a un comportement "similaire" au modèle de Smagorinsky, même si on le considère avec une constante *assez petite* (0.05). Il est probablement dû à une dissipation excessive dans les grandes échelles, fait confirmé par l'évolution de toutes les caractéristiques physiques calculées (les figures 4.10, 4.11, 4.12, 4.13).

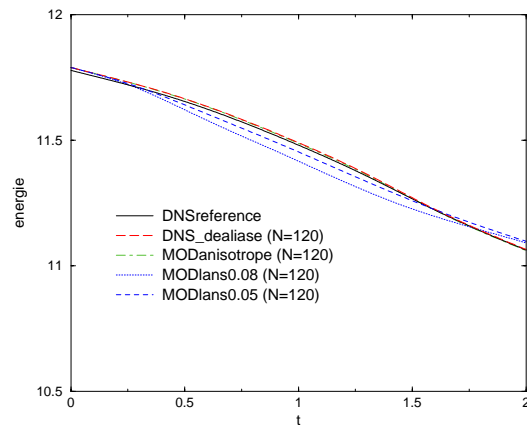


FIG. 4.10 – Courbes d'énergie

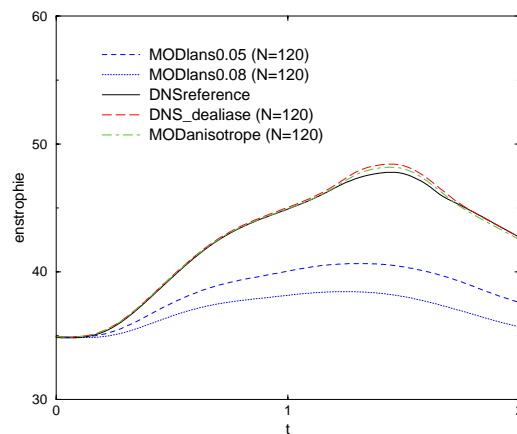


FIG. 4.11 – Courbes d'enstrophie

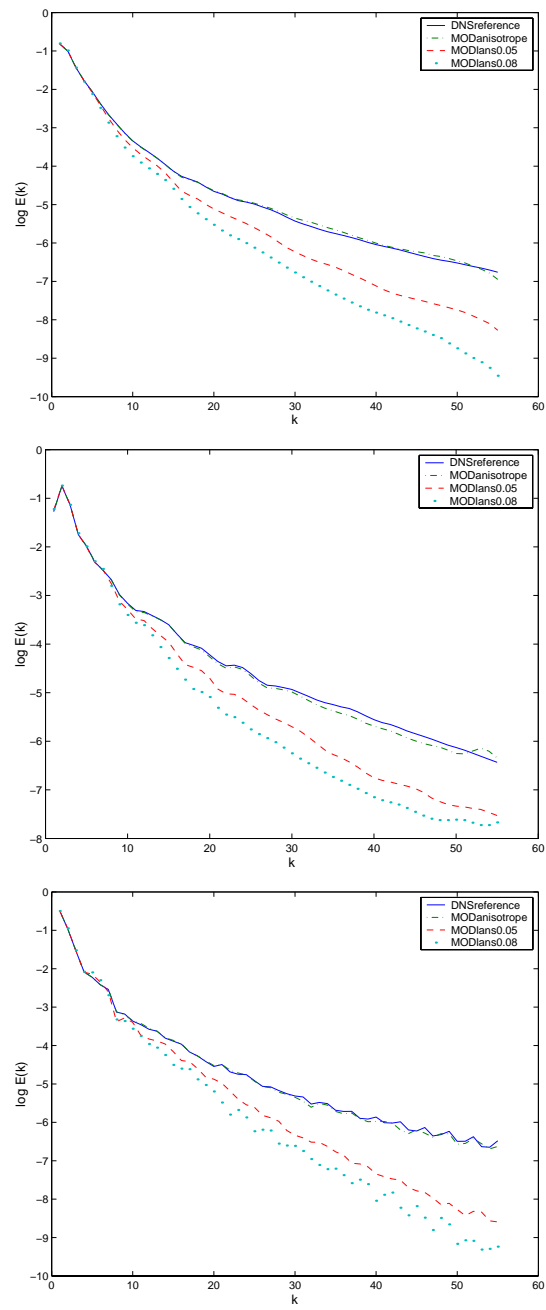


FIG. 4.12 – Spectres d'énergie dans les directions  $x$ ,  $y$  et respectivement  $z$ ,    $t=2$

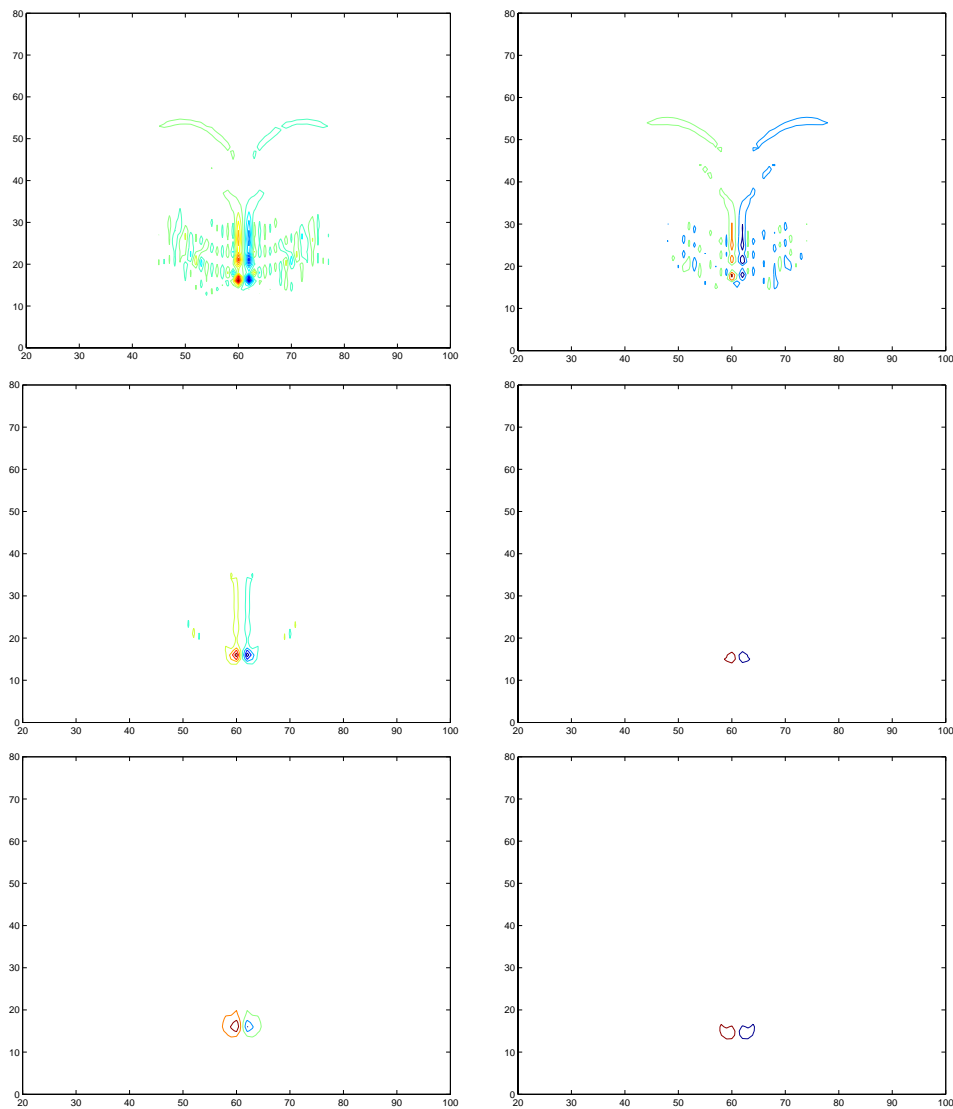


FIG. 4.13 – Isovaleurs de la composante verticale de la vorticité dans le plan de reconnection: à gauche, à  $t = 1.5$ , à droite, à  $t = 1.75$ ; de haut en bas: *AnisotropeSélectif120*, *LANS120*( $\alpha = 0.05$ ), *LANS120*( $\alpha = 0.08$ )

Quelques **remarques** s'imposent à la fin de cette section. Après la série des tests réalisés, nous avons vu que dans le cas d'un écoulement laminaire, les modèles sous-mailles choisis se comportent de manière assez satisfaisante. La variante sélective du modèle de Smagorinsky semble bien fonctionner dans ce cas. Concernant le modèle anisotrope sélectif, on a trouvé que les simulations avec ce modèle se comportent comme des simulations directes. En ce qui concerne le modèle LANS, on pourrait penser qu'il fallait lui appliquer un filtre sélectif, comme pour le modèle de Smagorinsky, en vue de diminuer la dissipation sous-maille qu'il lui produit...c'est une des nos perspectives ...

## 4.3 Condition initiale II - La turbulence homogène et isotrope

### 4.3.1 Écoulements homogènes, isotropes

Dans la pratique industrielle on rencontre en général des écoulements turbulents qui sont non homogènes et non isotropes. La théorie de l'isotropie locale admet que la structure fine d'une turbulence non isotrope *s'approche* de l'isotropie, ce qui justifie l'utilité de la turbulence homogène et isotrope (THI). Cela peut être obtenue expérimentalement, par exemple, par turbulence de grille, par la déformation pure plane, ou par le cisaillement homogène.

Les hypothèses que nous faisons dans le cas des écoulements périodiques tridimensionnels traités dans cette section de la thèse sont:

- l'hypothèse **d'homogénéité** : ce qui signifie l'invariance des quantités moyennées par toute translation en espace et
- l'hypothèse **d'isotropie** : ce qui signifie l'invariance des quantités moyennées par rotations et symétries.

Autrement dit, on suppose qu'aucune direction de l'espace n'est privilégiée.

### 4.3.2 Le modèle de turbulence de grille

On se propose d'analyser numériquement les modèles LES présentés auparavant sur un écoulement plus turbulent que celui qu'on a vu dans la section précédente, plus précisément sur *la turbulence de grille*. Cela s'obtient expérimentalement par passage d'un fluide à travers un obstacle ajouré, placé transversalement dans un écoulement permanent.

L'écoulement turbulent incompressible qu'on considère ici, est analogue celui obtenu par voie expérimentale par Comte-Bellot et Corrsin [18]. Ce cas test est en fait une simulation numérique directe sur une grille  $512^3$  obtenue par A. Wray et rapportée dans [1]. Les résultats qu'on présente par la suite sont obtenus pour une valeur de la viscosité moléculaire  $\nu = 3.5 \cdot 10^{-4}$ , ce qui correspond à un nombre de Taylor-Reynolds  $Re_\lambda = 104.5$  (voir la définition de ce nombre dans l'Annexe A).

Nous considérons comme référence la DNS calculée sur une grille  $512^3$  et pour les simulations LES nous prenons comme condition initiale la DNS de référence tronquée dans l'espace de Fourier à une grille avec  $32^3$  et respectivement  $64^3$  points.

Pour avoir une idée de la condition de turbulence de grille, on présente d'abord quelques "images" qui représentent les isosurfaces du module de la vorticité (dont la valeur est supérieure à un certain seuil, figure 4.14) au cours du temps.

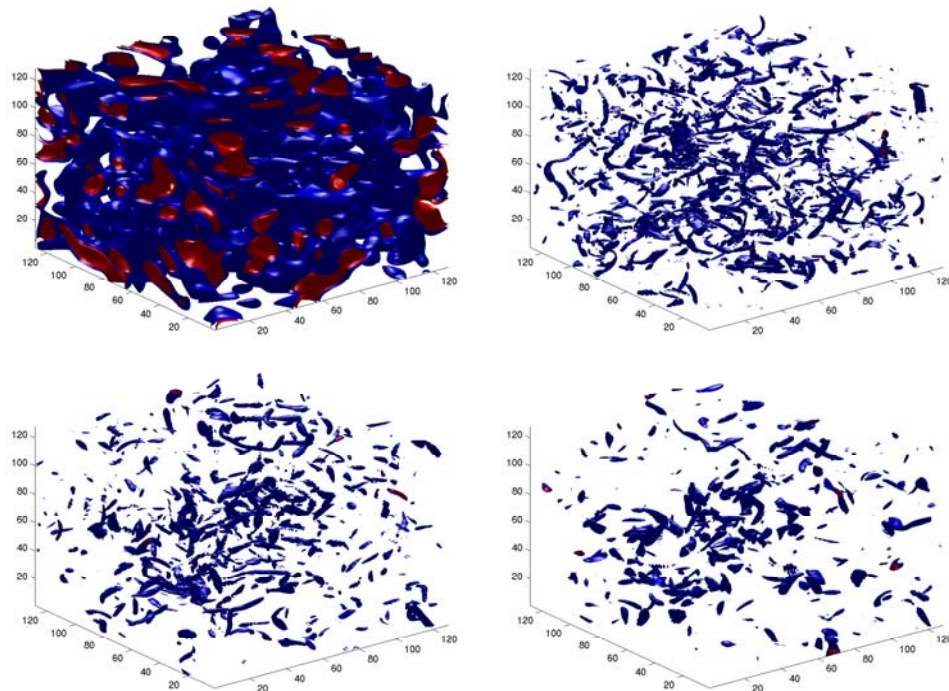


FIG. 4.14 – La turbulence homogène : isosurfaces de la vorticité calculées par une DNS128 à  $t=0$  ('bleu':isovaleur 8, 'rouge':isovaleur 10),  $t=2$  ('bleu':isovaleur 20, 'rouge':isovaleur 25),  $t=3$  ('bleu':isovaleur 12, 'rouge':isovaleur 15) et  $t=4$  ('bleu':isovaleur 8, 'rouge':isovaleur 10)

On remarque la présence dans l'écoulement considéré des structures cohérentes qui sont de vorticité intense ( $t = 2$ ). Ces structures ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche durant les derniers trente ans, travaux qui répondent en fait au souhait *de trouver de l'ordre dans l'apparent désordre* qu'est la turbulence.

Sans entrer dans les détails concernant la formation où les critères de détermination de tourbillons cohérents, on remarque juste que la vorticité d'une particule de fluide est étirée jusqu'à ce que la diffusion visqueuse est suffisamment active pour équilibrer l'étirement de la vorticité.

### 4.3.3 Résultats numériques

On passe maintenant à une analyse qualitative des modèles sous-maille considérés, sur cette condition de turbulence homogène. On montre d'abord la nécessité d'utiliser des modèles de turbulence, si on veut simuler des écoulements à grands nombres de Reynolds. En fait, d'après les figures 4.15 et 4.16, qui représentent dans les deux cas, à gauche l'évo-

lution de l'énergie cinétique<sup>4</sup> et à droite les spectres d'énergie pour différentes résolutions directes ( $512^3$ ,  $32^3$  et respectivement  $64^3$ ), on voit bien que la simulation numérique directe sur des grilles *grossières* n'est pas capable de faire une prédiction correcte de la décroissance de l'énergie de l'écoulement.

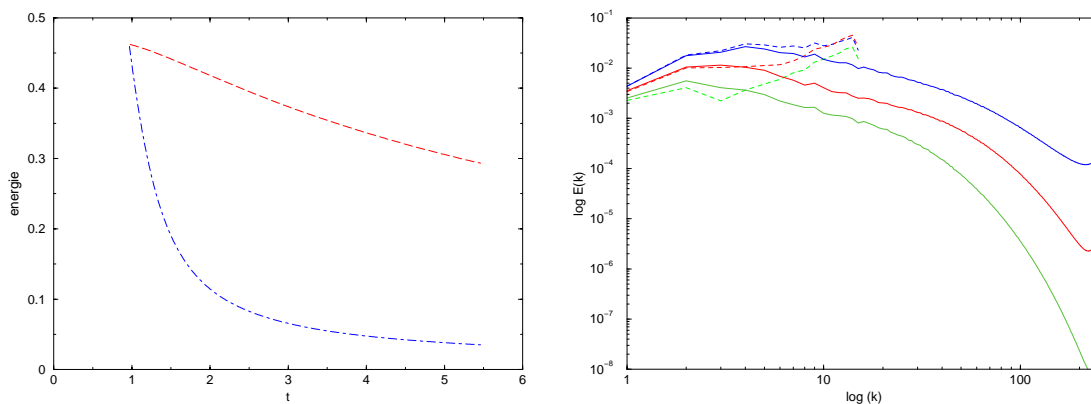


FIG. 4.15 – Gauche: énergie cinétique  $DNS_{filt32}$  (-.-) et  $DNS_{32}$  (- -); Droite: spectres d'énergie pour différents temps : 1.28, 2.45 et 5.46;  $DNS_{512}$  (-) et  $DNS_{32}$  (- -)

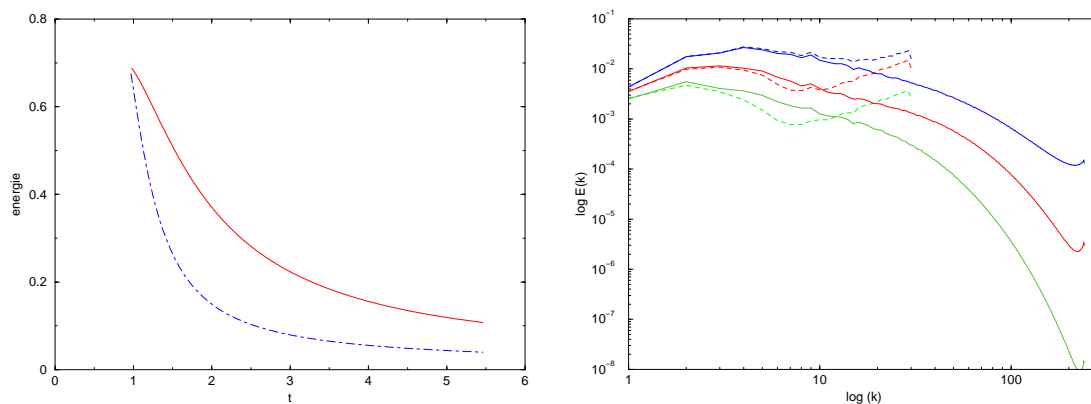


FIG. 4.16 – Gauche: énergie cinétique  $DNS_{filt64}$  (-.-) et  $DNS_{64}$  (- -); Droite: spectres d'énergie pour différents temps : 1.28, 2.45 et 5.46;  $DNS_{512}$ (-) et  $DNS_{64}$  (- -)

---

4. l'énergie cinétique filtrée sur un nombre de modes en conformité avec la grille utilisée pour les calculs LES; la troncature qu'on utilise est suffisamment *importante* pour ne pas espérer retrouver *toute* l'énergie cinétique de l'écoulement.



Pour ce cas de turbulence de grille, on sait que le modèle de Smagorinsky et le modèle anisotrope donnent de bons résultats [30]. Les figures (4.17) révèlent ainsi le bon comportement de ces deux modèles.

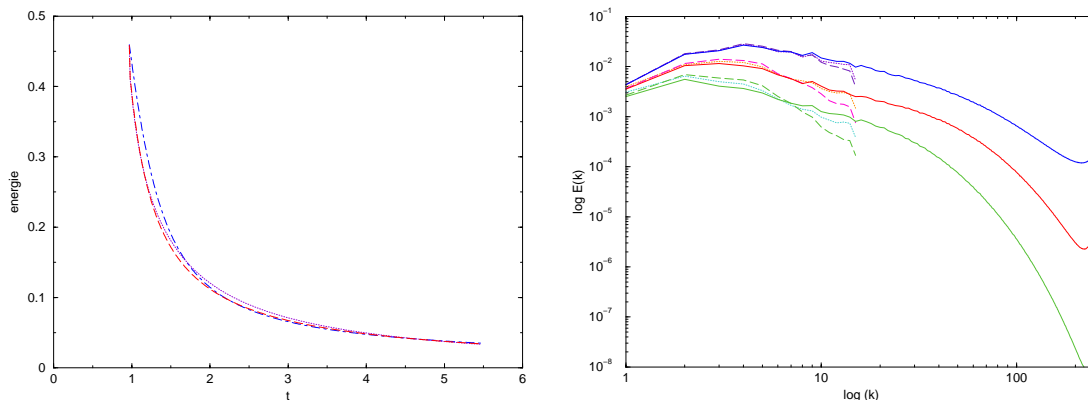


FIG. 4.17 – Gauche: énergie cinétique DNSfilt32(-.-), LES-Smagorinsky(- -), LES-Anisotrope(..); Droite: spectres d'énergie pour différents temps: 1.28, 2.45 et 5.46; DNS512(-), LES-Smagorinsky(- -), LES-Anisotrope(..)

On a choisi les “constantes” pour ces modèles de manière à obtenir une décroissance correcte d'énergie. Le problème revient dans ce cas à retrouver un bon comportement des spectres d'énergie, ce qu'on obtient en fait avec les deux modèles choisis. On remarque que le modèle anisotrope est moins dissipatif que le modèle de Smagorinsky dans les nombres d'onde proches de l'échelle de coupure.

On regarde maintenant ce qui se passe si on suppose que le modèle de Smagorinsky dissipe trop (on augmente volontairement la constante du modèle), étant motivés dans ce cas à utiliser la variante sélective de ce modèle. Tous les résultats présentés concernant le modèle de Smagorinsky sélectif sont obtenus utilisant l'algorithme décrit dans la section 2.6.1. On a calculé le seuil  $\alpha_0$  comme étant le maximum de la courbe de densité de probabilité de la variable aléatoire *angle*, d'abord utilisant pour les calculs de ces angles une DNS sur une grille  $32^3$  (comme dans [35]) et ensuite une DNS  $128^3$ . On a trouvé pour les deux cas les valeurs  $5^\circ$  et respectivement  $15^\circ$  (fig. 4.18). Ces valeurs sont suffisamment “petits” pour être acceptées comme seuils qui respectent les conditions de l'hypothèse de Constantin et Fefferman.

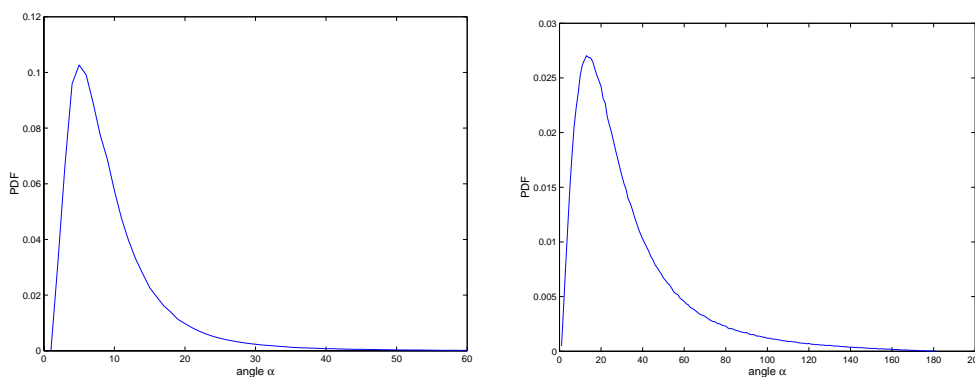


FIG. 4.18 – Densité de probabilité de l'angle  $\alpha$  : à gauche, pour des angles calculés par une DNS  $32^3$  et à droite, pour des angles calculés par une DNS  $128^3$

Ensuite, nous avons procédé à des simulations numériques avec le modèle de Smagorinsky sélectif, utilisant les deux valeurs  $\alpha_0 = 5^\circ$  et  $\alpha_0 = 15^\circ$ .

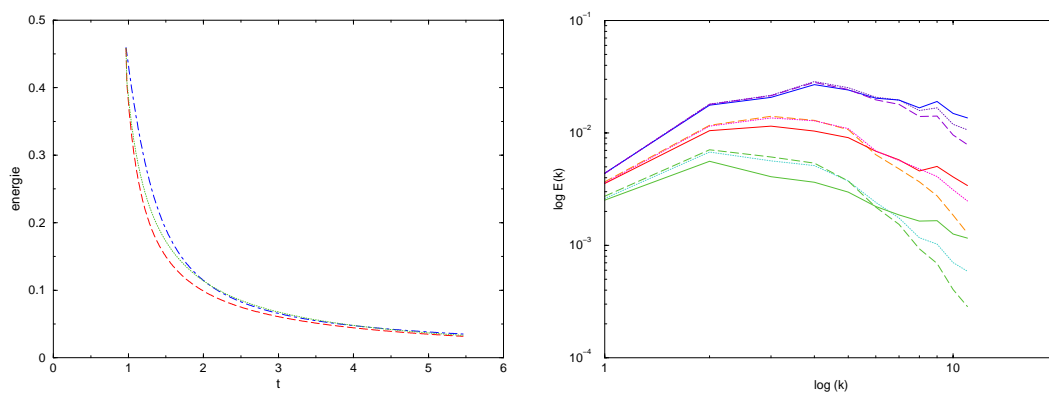


FIG. 4.19 – Gauche: énergie cinétique DNSfilt32(-.-), LES-Smagorinsky(- -), LES-Smagorinsky sélectif (..) ( $\alpha_0 = 5^\circ$ ); Droite: spectres d'énergie pour différents temps : 1.28, 2.45 et 5.46; DNS512(-), LES-Smagorinsky(- -), LES-Smagorinsky sélectif (..) ( $\alpha_0 = 5^\circ$ )

Les résultats obtenus (figures 4.19 et 4.20) confirment que le modèle sélectif est efficace dans les situations où le modèle de Smagorinsky classique se montre trop dissipatif. Surtout dans le deuxième cas, on remarque l'action du filtre sélectif sur le modèle de Smagorinsky, la dissipation excessive étant visiblement corrigée.

On espère qu'un ajustement de la constante du modèle sélectif ou peut être du seuil  $\alpha_0$  nous permettra d'obtenir avec ce modèle des résultats comparables avec ceux obtenus avec le modèle anisotrope sélectif...

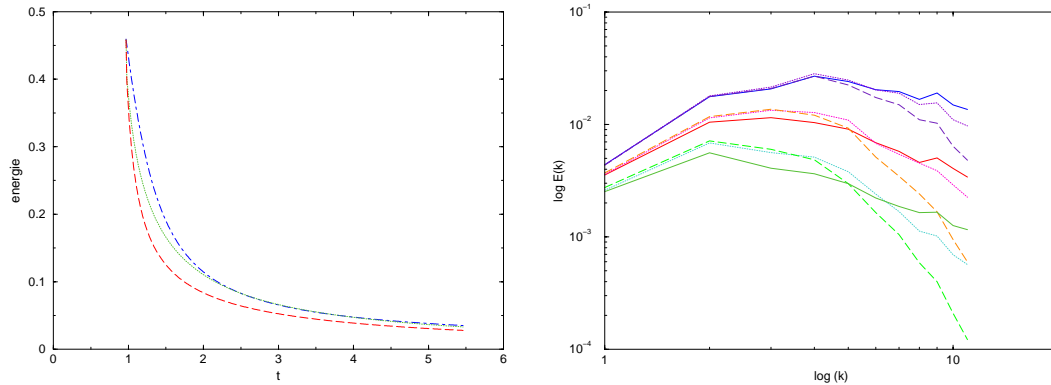


FIG. 4.20 – Gauche: énergie cinétique *DNSfilt32*(-.-), *LES-Smagorinsky*(- -), *LES-Smagorinsky sélectif*(..) ( $\alpha_0 = 15^\circ$ ); Droite: spectres d'énergie pour différents temps : 1.28, 2.45 et 5.46; *DNS512*(-), *LES-Smagorinsky*(- -), *LES-Smagorinsky sélectif*(..) ( $\alpha_0 = 15^\circ$ )

#### 4.3.4 Résultats numériques - le modèle LANS

Dans cette sous-section on présente des résultats numériques obtenus avec le modèle LANS, présenté dans la section 3.3. Nous avons considéré d'abord une condition initiale de turbulence homogène utilisée par G. Vanderlinden [95] et ensuite la condition de A. Wray dont nous avons parlé dans la section 4.3.2.

Dans le premier cas, le champ de vitesse initial utilisé par Vanderlinden a été construit tel que le spectre d'énergie initiale soit donné par une relation du type :

$$E(k, 0) \approx k^4 \exp \{-k^2/8\}.$$

La figure 4.21 présente le spectre initial considéré ici, ainsi que son évolution en temps.

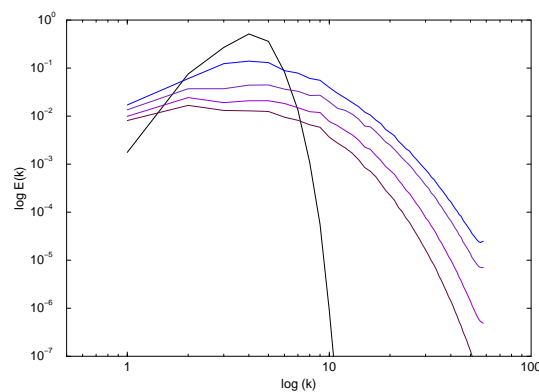


FIG. 4.21 – Spectres d'énergie pour différents temps : 0, 1, 2, 3 et 4 obtenus par une *DNS128*

Les paramètres des simulations que nous avons utilisé dans ce cas sont :

- nombres de points de discrétisation :  $N^3 = 128^3$  pour la DNS de référence et  $N^3 = 64^3$  pour la LES utilisant LANS;
- coefficient de viscosité moléculaire :  $\nu = 0.005$ ;
- nombre de Reynolds-Taylor :  $Re_\lambda = 97.7$ ;
- pas de temps :  $\Delta t = 0.01$ .

Les figures 4.22 et 4.23 illustrent le bon comportement du modèle LANS (au niveau de spectres d'énergie) sur cette condition de turbulence homogène. Nous avons considéré ce modèle avec deux constantes : 0.05 et 0.0625.

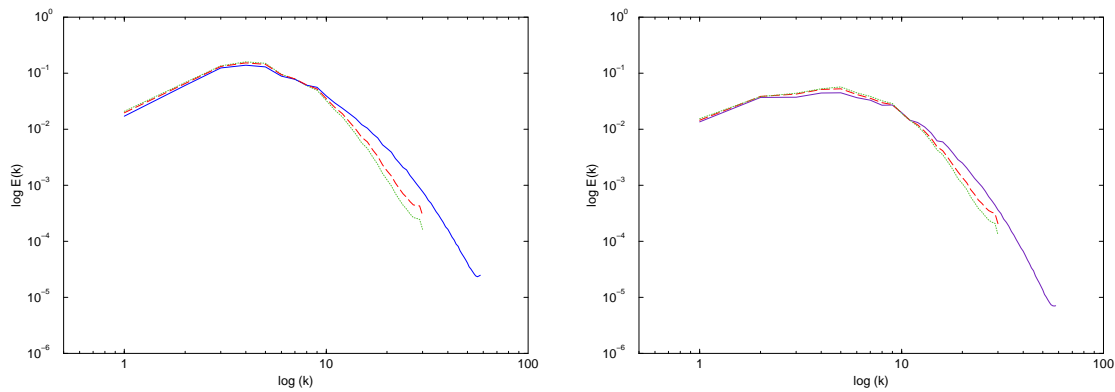


FIG. 4.22 - Spectres d'énergie à  $t = 1$  et  $t = 2$ ; DNS128 (-), LANS $\alpha$ 0.05(--), LANS $\alpha$ 0.0625(..)

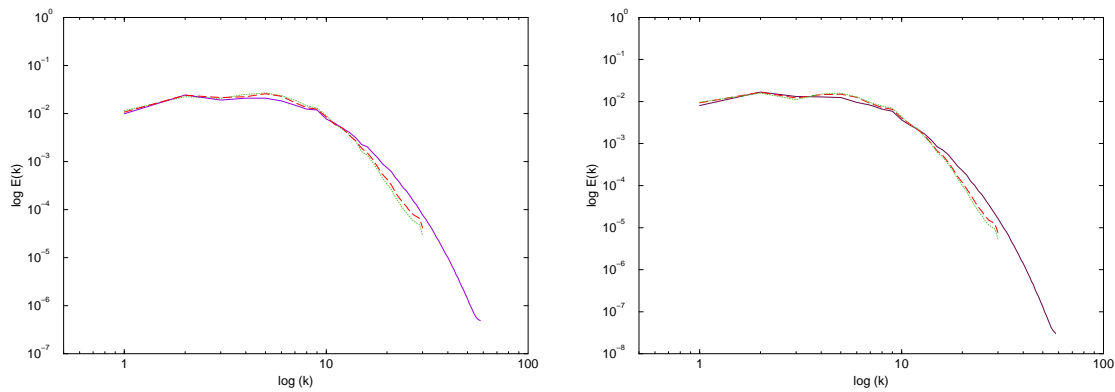


FIG. 4.23 - Spectres d'énergie à  $t = 3$  et  $t = 4$ ; DNS128 (-), LANS $\alpha$ 0.05(--), LANS $\alpha$ 0.0625(..)

On remarque aussi, que pour ces constantes, les courbes d'énergie obtenues avec le modèle LANS ont une décroissance correcte par rapport à la courbe d'énergie de référence (figure 4.24).

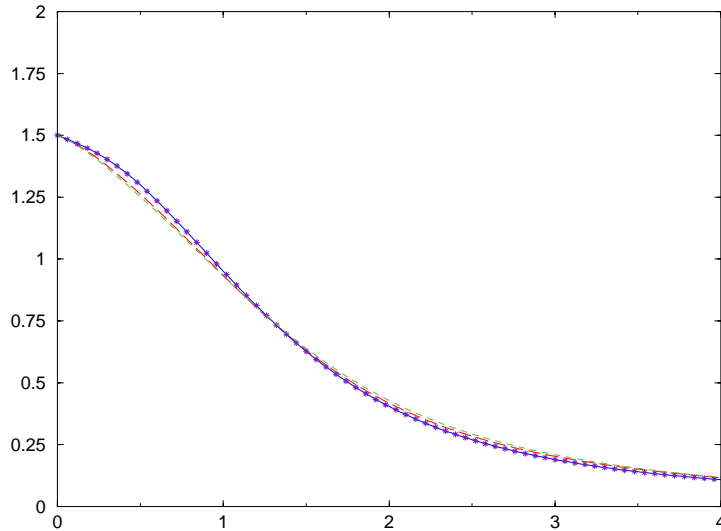


FIG. 4.24 – Energie cinétique :  $DNS_{128}(-)$ ,  $DNS_{filt64}(*), LANS_{\alpha 0.05}(- -), LANS_{\alpha 0.0625}(\dots)$

Dans ce premier cas-test, on peut dire que le modèle LANS donne des résultats satisfaisants en ce qui concerne la modélisation des échelles non-résolues sur celles qui sont résolues.

Mosheini et al. [76] ont déjà rapporté des bons résultats<sup>5</sup> avec ce modèle. Ils ont utilisé une condition de turbulence homogène proposé par A. Wray et un nombre de Reynolds-Taylor = 72, montrant qu'une résolution  $64^3$  est suffisante pour retrouver le comportement de la DNS de référence (calculée sur une grille  $512^3$ ).

Motivés par leurs résultats, on a essayé de tester ce modèle sur un écoulement plus turbulent que celui qu'ils ont considéré et que celui de Vanderlinden.

Dans ce sens, on a repris la condition de turbulence de grille de A. Wray et les paramètres de simulation présentés dans la section 4.3.2.

Nous avons considéré d'abord une résolution  $64^3$  pour la simulation LES. Regardant les spectres d'énergie à  $t = 2.45$  (par exemple), nous nous sommes aperçu que cette résolution

---

<sup>5</sup>. des comparaisons des spectres d'énergie et d'énergie cinétique

est insuffisante pour simuler correctement l'écoulement choisi (figure 4.25).

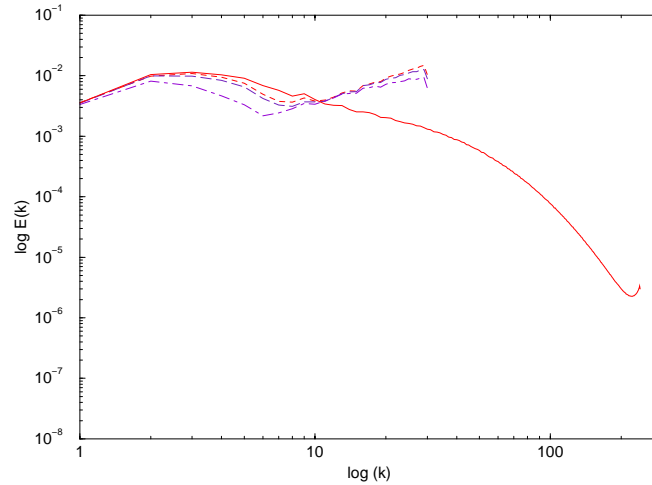


FIG. 4.25 - Spectres d'énergie à  $t = 2.45$ :  $DNS_{512}(-)$ ,  $DNS_{64}(..)$ ,  $LANS_{\alpha 0.02}(- -)$ ,  $LANS_{\alpha 0.05}(-. -)$

Utilisant une grille plus fine ( $128^3$ ), pour deux valeurs de la constante du modèle 0.05 et 0.5, nous avons obtenus les spectres d'énergie suivantes à  $t = 1.28$  et à  $t = 5.46$  respectivement (figure 4.26) :

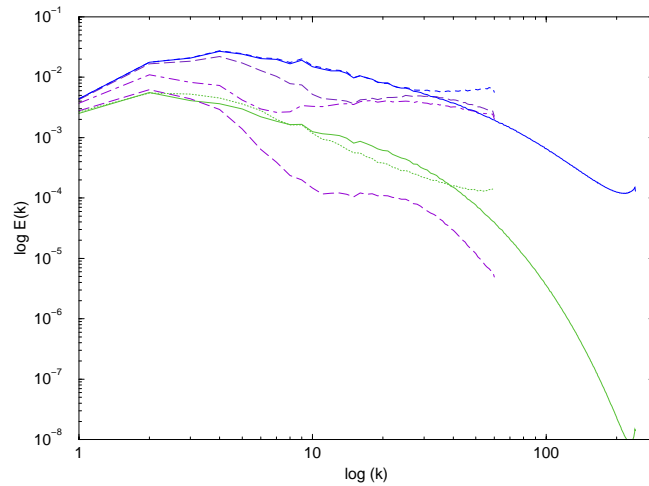


FIG. 4.26 - Spectres d'énergie à  $t = 1.28$  et  $t = 5.46$ :  $DNS_{512}(-)$ ,  $DNS_{128}(..)$ ,  $LANS_{\alpha 0.05}(- -)$ ,  $LANS_{\alpha 0.5}(-. -)$

Nous observons que dans ce cas, le modèle LANS ne fournit pas de bons résultats. Si pour la DNS  $128^3$ , l'accumulation d'énergie en queue du spectre est explicable, étant due

à la sous-résolution, le modèle LANS considéré avec ces deux constantes se montre trop dissipatif. Pour une constante relative “grande”  $\alpha = 0.5$  la dissipation est excessive même à partir de  $t = 1.28$ . Pour  $\alpha = 0.05$ , à  $t = 1.28$ , on avait remarqué un “bon” comportement jusqu’au mode 4, aussi qu’en fin du spectre. Cela nous a encouragé à laisser l’écoulement évoluer jusqu’à  $t = 5.46$ . La courbe d’énergie cinétique (figure 4.27), ainsi que le spectre au moment final de la simulation ont révélé le caractère dissipatif du modèle (figure 4.26).

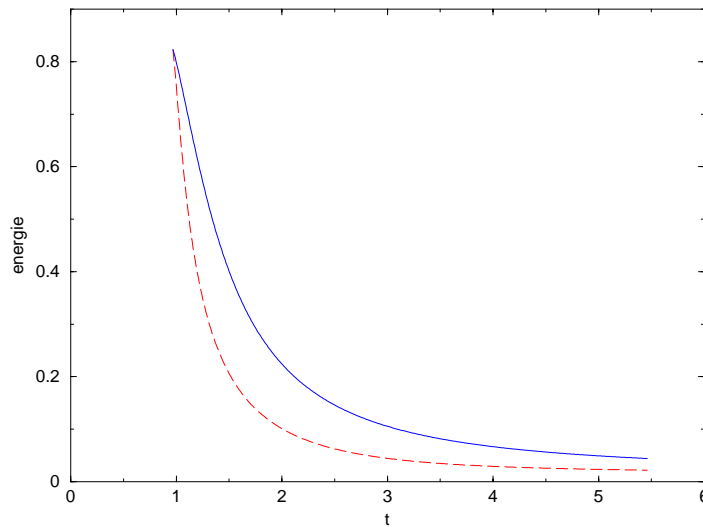


FIG. 4.27 – *Energie cinétique : DNS128(-), LANS $\alpha$ 0.05(—)*

Il est possible que dans ce cas de turbulence homogène, la résolution  $128^3$  est insuffisante pour mettre en évidence les performances du modèle LANS. D’après les résultats que nous avons obtenus avec ce modèle, il nous semble que pour avoir de bons résultats, dans le cas des écoulements turbulents, il faut utiliser des grilles *assez* fines, ce qui n’est pas vraiment le but quand on veut faire de la LES ...

Concernant les autres modèles sous-maille considérés, on remarque les bons résultats obtenus en les utilisant, sur des grilles *assez grossières* et pour un nombre de Reynolds *assez grand*. Dans ce cas, la variante sélective du modèle de Smagorinsky a été validée *en supposant* que le modèle de Smagorinsky dissipe un peu trop... mais on compte la valider sur l’écoulement dans un canal, par exemple, où la présence des parois pose de problèmes quand on utilise le modèle de Smagorinsky classique. Ainsi, des comparaisons avec les résultats obtenus avec le modèle anisotrope sélectif (qui a été validé sur ce genre d’écoulements [30], [31]) sont envisagées.

# Conclusions et perspectives

Dans le travail présenté, on a suivi deux directions de recherche : l'analyse mathématique des modèles de turbulence et la validation numérique de ces modèles sur différents problèmes test pour la simulation des écoulements turbulents.

Après avoir exposé les approches couramment utilisées dans l'étude de la turbulence, nous avons présenté plus en détail la méthode de simulation des grandes échelles (LES). De nombreux modèles de turbulence ont été proposés au fil des années, pour assurer la fermeture des équations de Navier-Stokes moyennées. Ainsi, on a présenté dans le deuxième chapitre de ce mémoire quelques modèles classiques de la LES. Ces modèles et leurs diverses améliorations ont été largement utilisés et ont permis, malgré leurs limitations théoriques, de reproduire assez bien les mesures expérimentales. Nous avons remarqué que le modèle de Smagorinsky, qui est un des modèles les plus simples, mais qui sert encore comme base pour les modèles modernes, est trop dissipatif, particulièrement dans des zones proches des parois, là où les gradients de vitesse deviennent importants. Pour remédier à ce défaut, on a proposé une variante sélective qui consiste à n'ajouter du modèle sous-maille que dans les zones de turbulence. Pour définir de telles zones, nous avons utilisé un critère qui permet de détecter les zones d'alignement des lignes de vorticité. L'idée qui en résulte recoupe celle développée autour du modèle de fonction de structure au LEGI et les travaux théoriques de Constantin et Fefferman [21], qui montrent que dans des zones d'alignement des lignes de vorticité, on a des solutions fortes pour les équations de Navier-Stokes 3D. Un autre modèle sélectif présenté est le modèle anisotrope sélectif, qui a été proposé par Cottet [1997]. Nous avons vu que ce modèle permet de distinguer entre les directions de dissipation qui correspondent au transfert direct et celles qui correspondent au transfert inverse, donnant une bonne alternative aux modèles isotropiques.

Dans le troisième chapitre on a montré que le fait d'ajouter des termes de dissipation aux équations de Navier-Stokes permet d'obtenir l'existence de solutions régulières pour tout temps. On sait que cette propriété est un problème ouvert pour les équations de Navier-Stokes. On a vu qu'avec un terme de Smagorinsky on la démontre assez facilement, utilisant des méthodes classiques dans le domaine des EDP. On a montré aussi l'existence d'un attracteur de dimension fractale finie pour le système dynamique associé. Comme le modèle de Smagorinsky se montre en pratique trop dissipatif pour certains problèmes, la question est de trouver un modèle minimal qui peut assurer l'existence des solutions



régulières pour tout temps. La régularité pour ce modèle est un résultat qui semble naturel, mais sa démonstration reste un problème ouvert.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons illustré par des résultats numériques, les grandes perspectives offerts par les simulations des grandes échelles, où la modélisation des mouvements à petite échelle par une viscosité turbulente locale permet des réductions considérables en temps de calcul par rapport aux simulations directes et pour des performances équivalentes. Ainsi, le bon comportement des modèles sous-maille analysés a été mis en évidence par des comparaisons de différentes quantités physiques caractéristiques avec des résultats obtenus par des simulations directes sur des grilles très fines. Le modèle de Smagorinsky sélectif proposé a été testé sur deux écoulements périodiques tridimensionnels. Dans ces deux cas, nous avons vu que ce modèle détecte efficacement les zones d'activité tourbillonnaire existantes dans les écoulements considérés. La réduction de l'intensité turbulente a été mieux mise en évidence dans le cas du problème de reconnection. On peut remarquer dans la figure 4.9, qu'avec ce modèle on ajoute de la dissipation principalement dans "l'anneau de reconnection", là où il y a plus de vorticité, ce qui était en fait notre but. Les résultats obtenus au niveau de courbes d'énergie, d'entrophie, des spectres d'énergie et de coupes (dans le plan de la reconnection) confirment ce modèle comme un modèle viable pour des simulations des écoulements turbulents.

Le modèle anisotrope sélectif s' st avéré un bon modèle de turbulence pour le deux cas traités dans ce mémoire, ce qui confirme les bons résultats déjà rapportés avec ce modèle.

Concernant le modèle LANS, il provient, comme le modèle de Smagorinsky sélectif et le modèle anisotrope sélectif, d'un argument mathématique, mais au niveau des simulations numériques des écoulements turbulents, nous avons vu qu'il ne donne pas de bons résultats (en tout cas dans certains cas, cas que nous avons implémenté).

Une prochaine étape serait d'étudier plus en détail le comportement de ces modèles sous-maille dans des configurations plus complexes et pour des nombres de Reynolds plus élevés.

Un des problèmes envisagés est la simulation de l'écoulement dans un canal, en utilisant le modèle de Smagorinsky sélectif. On sait que pour ce type d'écoulement, le modèle de Smagorinsky classique ne donne pas de bons résultats et que des modèles dynamiques ont été proposés et testés avec succès, mais que dans des géométries simples. Ainsi, des comparaisons avec des résultats obtenus par la procédure dynamique sont envisagées.

D'autres variantes sélectives pour des modèles qui se montrent trop dissipatifs (par exemple pour le modèle LANS,   des grands nombres de Reynolds) peuvent être construites, prenant en considération le fait que dans les vraies zones de turbulence la grandeur de la vorticité est supérieure   un certain seuil, qui reste   définir.

## Annexe A

# Echelles de turbulence. Hypothèses de Kolmogorov

La notion d'échelle est un instrument privilégié de la mécanique des fluides. Elle permet de cataloguer les différentes structures qui coexistent dans un écoulement et de leur assigner une certaine importance au sein de l'écoulement.

Un écoulement turbulent est la superposition de tout un ensemble de structures d'échelles très variées. C'est le phénomène d'étirement tourbillonnaire qui contribue à la création des structures des échelles de longueur de plus en plus petites, qui est accompagnée d'un transfert d'énergie cinétique dont le mécanisme est assez complexe. Au cours de ce processus, le nombre de Reynolds associé aux structures successives<sup>1</sup> diminue et lorsqu'il est assez faible (de l'ordre de l'unité), les effets visqueux deviennent prépondérants.

Cependant, il existe une limite inférieure pour la taille des structures turbulentes, qui est liée à la viscosité. Elle correspond aux échelles dites dissipatives.

Dans cette annexe, on se propose d'abord de donner les expressions des échelles de temps  $\tau$ , de vitesse  $v$  et de longueur  $\eta$ , caractéristiques pour ces structures dissipatives, les plus petites structures qui peuvent se développer dans un écoulement. Ensuite, nous présentons quelques aspects de la théorie de Kolmogorov concernant la turbulence.

Evidemment, on a la relation suivante entre les trois échelles  $\tau$ ,  $v$  et  $\eta$  :

$$\eta = v\tau \quad (\text{A.1})$$

et on admet que la viscosité du fluide joue pleinement son rôle, si le nombre de Reynolds associé aux petites structures est de l'ordre de l'unité :

$$\frac{v\eta}{\nu} \sim 1 \quad . \quad (\text{A.2})$$

---

1. pour un corps de dimension  $l$  placé dans un écoulement à vitesse  $U$ , le nombre de Reynolds associé est  $Re_l = \frac{Ul}{\nu}$ ;  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide

On sait que le taux de dissipation  $\epsilon$  est proportionnel à l'inverse du temps  $\tau$  (voir [34]):

$$\epsilon \sim \frac{\nu}{\tau^2} \quad . \quad (\text{A.3})$$

En combinant les relations (A.1), (A.2) et (A.3) on obtient les échelles des structures dissipatives :

$$\tau = (\nu/\epsilon)^{1/2}, \quad \eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad v = (\nu\epsilon)^{1/4}$$

Ces échelles sont appelées aussi les **échelles de Kolmogorov**.

**L'échelle de Taylor** est souvent utilisée dans des études de turbulence homogène et isotrope. Cette échelle est définie à partir du taux de dissipation  $\epsilon$  et d'une échelle de vitesse caractéristique des grandes structures  $\mathcal{U}$  :

$$\lambda^2 = 15\nu \frac{\mathcal{U}^2}{\epsilon} \quad (\text{A.4})$$

Le nombre de Reynolds associé à cette échelle (le nombre de Taylor-Reynolds) est :

$$Re_\lambda = \frac{\mathcal{U}\lambda}{\nu}$$

et représente le rapport des temps caractéristiques des grosses structures  $\mathcal{L}/\mathcal{U}$  et des petites structures  $\lambda/\mathcal{U}$ , car :

$$\frac{\mathcal{L}/\mathcal{U}}{\lambda/\mathcal{U}} = (\mathcal{U}\mathcal{L}/\nu)^{1/2} = \frac{\mathcal{U}\lambda}{\nu} = Re_\lambda \quad .$$

**Remarque A.0.1** Pour l'estimation du taux de dissipation  $\epsilon$ , nous avons utilisé l'expression suivante :

$$\epsilon = \frac{\mathcal{U}^3}{\mathcal{L}},$$

qui est vérifiée, si le nombre de Reynolds est suffisamment grand pour que les grandes et les petites échelles soient bien séparées (les deux gammes d'échelles s'écartent d'autant plus que le nombre de Reynolds est grand).

**L'échelle de longueur intégrale**  $L$  est définie par :

$$L = \frac{3\pi}{4} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^{-1} E(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} E(k)} \quad (\text{A.5})$$

On associe aux échelles  $\eta$  et  $L$  les nombres d'onde définis respectivement par :

$$k_d = [\eta^{-1}] \quad \text{et} \quad k_L = [L^{-1}]$$

où  $[\cdot]$  représente la partie entière.

Une présentation plus détaillée des échelles utilisées dans l'étude des phénomènes turbulents peut être trouvée dans [34].

La description de la turbulence comme un processus où l'énergie injectée aux grandes échelles est transférée aux échelles de plus en plus petites jusqu'aux échelles de Kolmogorov, niveau où elle est dissipée en chaleur, a été observée dans des expériences depuis longtemps.

Cette description est basée sur la théorie de Kolmogorov (1941), qui fait appel au concept d'isotropie locale. Ce concept stipule que dans un petit domaine de l'espace et du temps, l'écoulement est localement isotrope, ce qui signifie que les mouvements à petite échelle ont une structure isotrope en moyenne, indépendante de l'orientation imposée aux grandes structures par l'écoulement moyen. D'autre part, elle implique que l'échelle de temps des petites structures est très petite par rapport à celle de l'écoulement moyen, qui permet aux petites structures de s'adapter rapidement à toute modification imposée par le champ moyen. On dit que les "petites" structures sont en équilibre pour signifier leur indépendance des grosses structures.

Les hypothèses de Kolmogorov ont été formulées dans l'espace physique, mais ce sont en effet leurs implications sur le spectre d'énergie (dans l'espace spectral) qui sont plus utilisées.

- La première hypothèse de Kolmogorov suppose que dans un domaine où la turbulence est localement homogène et isotrope (c'est à dire pour les structures à petite échelle), les moments statistiques en deux points ne dépendent que de la distance entre ces deux points, de la viscosité  $\nu$  et du taux de dissipation d'énergie  $\epsilon$ .

Si on suppose alors, que toute l'énergie du système est introduite au niveau de l'échelle  $k_L$  (où  $k_L$  représente le nombre d'onde associé à l'échelle intégrale), alors pour  $k \gg k_L$ , le spectre dépend seulement de la viscosité  $\nu$  et du taux de dissipation d'énergie  $\epsilon$ . Une analyse dimensionnelle donne le profil du spectre d'énergie dans le domaine d'équilibre<sup>2</sup>:

$$E(k) = \nu^{5/4} \epsilon^{1/4} f\left(k \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}}\right) \quad . \quad (\text{A.6})$$

- La deuxième hypothèse suppose que pour des grandes distances de séparation entre les structures, la viscosité n'intervient pas.

L'énergie  $E(k)$  dévient donc indépendante de la viscosité  $\nu$ , quand  $Re \rightarrow \infty$ . Cela implique que la fonction  $f$  qui apparaît dans l'équation (A.6) est de la forme :

$$f\left(k \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}}\right) \sim \left(k \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}}\right)^{-5/3} \quad (\text{A.7})$$

---

<sup>2</sup>. zone inertielle ( $k_L < k < k_d$ ) et zone de dissipation ( $k > k_d$ )

En substituant (A.7) dans (A.6) on obtient l'expression du spectre d'énergie (le spectre de Kolmogorov):

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (\text{A.8})$$

où  $C_K$  est la constante de Kolmogorov, qui est déterminée expérimentalement. Elle vaut environ 1.5.

Cette loi est appelée **la loi inertielle universelle**. Elle a été remarquablement bien vérifiée dans des expériences très variées. Un grand nombre de résultats sont présentés dans Chapman [12].

## Annexe B

### Erreurs de recouvrement

Cette annexe est dédiée à la présentation des erreurs de recouvrement<sup>1</sup> qui apparaissent dans le calcul des termes non-linéaires par une méthode de Fourier-Galerkin. On expose aussi, brièvement, une des méthodes qui permet de supprimer ces erreurs, méthode que nous avons utilisée pour tous les calculs numériques présentés dans ce mémoire.

Pour simplifier la présentation on se place dans le cas 1 dimensionnel et on se propose de calculer par une méthode de Fourier-Galerkin le produit :

$$w(x) = u(x)v(x). \quad (\text{B.1})$$

Le calcul de ce produit (et en général des termes non-linéaires) amène à évaluer des sommes de convolution du type :

$$\hat{w}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n \quad (\text{B.2})$$

où  $\hat{u}_m, \hat{v}_n$  sont les coefficients de Fourier des fonctions  $u(x)$  et  $v(x)$  respectivement, et

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-ikx} dx.$$

Si on considère que  $u, v$  et  $w$  sont approximées par leurs séries de Fourier tronquées de degré  $N/2$ , alors (B.2) devient :

$$\hat{w}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n \quad \text{pour } k \text{ vérifiant } |k| \leq N/2 \quad . \quad (\text{B.3})$$

En dimension 1, l'évaluation directe de ces coefficients se fait en  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations (en dimension 3, le coût est de l'ordre  $\mathcal{O}(N^6)$ ). Cependant, utilisant une méthode pseudo-spectrale ([78], [43]) pour le calcul des coefficients  $\hat{w}_k$ , le nombre d'opérations effectuées

---

1. en anglais "aliasing errors"

est de  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$  en 1D (et de  $\mathcal{O}(N^3 \log_2 N)$  en 3D). Nous avons choisi cette dernière méthode pour la discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles traitées dans cette thèse. Elle consiste à évaluer les sommes (B.3) en transformant d'abord les  $\hat{u}_m$  et  $\hat{v}_n$  dans l'espace physique (par FFT inverse), puis d'effectuer les multiplications dans cet espace et ensuite d'utiliser une FFT directe pour obtenir  $\hat{w}_k$ . La méthode pseudo-spectrale est plus rapide qu'une méthode spectrale pure, mais il faut tenir compte qu'elle introduit dans les calculs des erreurs, dites *erreurs de recouvrement*.

On explique plus en détails l'apparition de ces erreurs. Soient les transformées de Fourier discrètes :

$$U_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{u}_k e^{ikx_j} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.4})$$

$$V_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{v}_k e^{ikx_j} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.5})$$

où  $x_j = 2\pi j/N$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . On calcule dans l'espace réel les produits :

$$W_j = U_j V_j \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.6})$$

et ensuite les coefficients de Fourier :

$$\hat{W}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} W_j e^{-ikx_j} \quad k = -N/2, \dots, N/2-1. \quad (\text{B.7})$$

Ces coefficients s'écrivent :

$$\hat{W}_k = \sum_{\substack{m+n=k \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{\substack{m+n=k+N \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{\substack{m+n=k-N \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n$$

ou de façon équivalente :

$$\hat{W}_k = \hat{w}_k + \sum_{\substack{m+n=k+N \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{\substack{m+n=k-N \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n \quad (\text{B.9})$$

Les derniers termes dans (B.9) proviennent du fait que pour tout  $l \equiv k \pmod{N}$  on a :

$$e^{ilx_j} = e^{ikx_j} \quad \forall j = 0, \dots, N-1 \quad .$$

Ces termes génèrent les erreurs de recouvrement, erreurs données par la relation :

$$R(w) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left( \sum_{\substack{m+n=k+N \\ |m|, |n| \leq N/2}} \hat{u}_m \hat{v}_n \right) e^{ikx} \quad (\text{B.10})$$

Une des techniques utilisées pour supprimer ces erreurs (technique de déaliasing) est celle connue sous le nom de “la règle des 3/2”. Cette règle consiste à utiliser la FFT avec  $M \geq \frac{3N}{2}$  points plutôt que  $N$  points. Dans ce cas nous avons :

$$\tilde{W}_k = \tilde{w}_k + \sum_{m+n=k+M} \tilde{u}_m \tilde{v}_n + \sum_{m+n=k-M} \tilde{u}_m \tilde{v}_n \quad (\text{B.11})$$

où  $\tilde{W}_k$  sont les coefficients de Fourier du produit  $w = uv$ , calculés par une méthode pseudo-spectrale avec  $M$  points,  $\tilde{w}_k$  les coefficients de Fourier exactes de  $w$  ( $k \in \{-M/2, \dots, M/2 - 1\}$ ),

$$\tilde{u}_m = \begin{cases} \hat{u}_m, & \text{si } |m| \leq N/2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} \hat{v}_n, & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On est intéressé par les  $\tilde{W}_k$  correspondants aux  $k$  qui vérifient  $|k| \leq N/2$ . Il faut donc choisir  $M$  tel que les termes responsables des erreurs de recouvrement dans (B.11) s’annulent pour ces  $k$ . Un simple calcul montre que pour  $M \geq \frac{3N}{2}$  cette condition est satisfaite.

Dans le cas des problèmes analysés dans ce mémoire de thèse, nous avons choisi de déaliaser en utilisant cette règle des 3/2.

Pour illustrer l’effet du déaliasing sur les résultats numériques obtenus, nous présentons des comparaisons de courbes d’entrophie et de coupes à  $t = 1.5$ , pour le problème de la reconnection de deux tubes de vorticité (présenté dans la section 4.2), obtenues par une simulation numérique directe, avec et sans suppression des erreurs de recouvrement. On peut remarquer ainsi la nécessité du déaliasing...

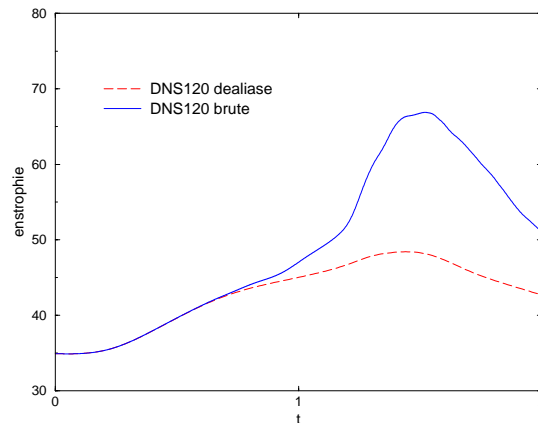


FIG. B.1 – Les courbes d’entrophie : DNS dealias e (–), DNS avec aliasing (—)



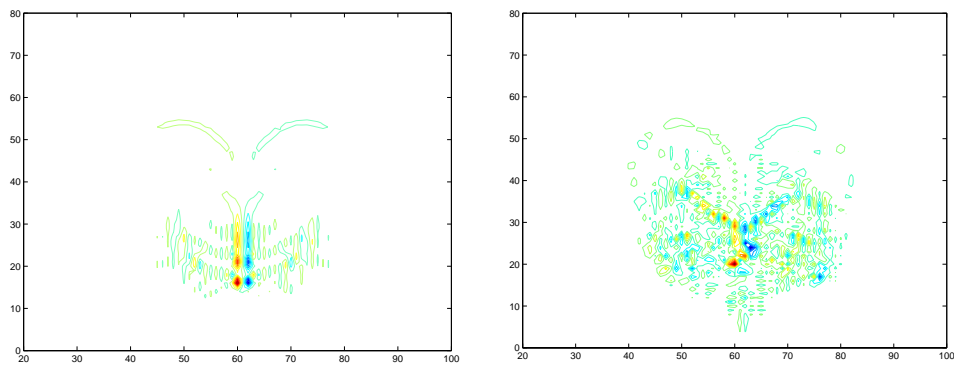


FIG. B.2 – Les coupes à  $t=1.5$ , à gauche DNS déaliasée, à droite DNS avec aliasing ( $N=120$ )

Une présentation plus détaillée des techniques de déaliasing peut être trouvée dans [10], ainsi que les notions de base concernant les méthodes spectrales.

# Bibliographie

- [1] **AGARD** A selection of test cases for the evaluation of large-eddy simulations of turbulent flows, *advisory report no. 345*, 1998
- [2] **A. Adams** *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975
- [3] **V. Arnold** *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, edition MIR, Moscou, 1976
- [4] **A. V. Babin, M. I. Vishik** *Attractors of Evolution Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1992
- [5] **G. I. Barenblatt, A. J. Chorin** New Perspectives in Turbulence : Scaling Laws, Asymptotics and Intermittency, *SIAM Review*, 40, 1998
- [6] **J. T. Beale, T. Kato, A. Majda** Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3D Euler Equations, *Communications in Mathematical Physics* 94, Springer-Verlag, 1984
- [7] **F. Bouchon** *Modèles sous-maille et schéma multi-niveaux. Application à la simulation des grandes échelles d'écoulements turbulents*, Thèse, Univ. Blaise Pascal Clermont Ferrand, 1999
- [8] **H. Brezis** *Analyse fonctionnelle. Théory et applications*, Masson, 1983
- [9] **C. Canuto, A. Quarteroni** Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces, *Math. of Computations*, Vol 38, No. 157, 1982
- [10] **C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang** *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1988
- [11] **D. Cioranescu, E. H. Ouazar** Existence and Uniqueness for Fluids of Second Grade, *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, College de France vol VI*, 1982
- [12] **D. R. Chapman** Computational aerodynamics development and outlook, *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 12, 1979

- [13] **P. Chassaing** *Turbulence en mécanique des fluides : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*, Collection Polytech., 2000
- [14] **J. P. Chollet, M. Lesieur** Parametrisation of Small Scales of the Three-Dimensional Isotropic Turbulence Utilising Spectral Closures, *J. Atmos.Sci.* 38, 1981
- [15] **A. Chorin** Numerical Study of Slightly Viscous Flow, *J. Fluid Mech.* 57, 1973
- [16] **A. Chorin** *Vorticity and Turbulence*, Springer Verlag, 1994
- [17] **R. Comolet** *Mécanique des fluides*, Masson, 1985
- [18] **G. Comte-Bellot, S. Corrsin** Simple Eulerian time correlation of full and narrow-band velocity signals in grid-generated isotropic turbulence, *J. of Fluid Mechanics*, no. 48, 1971
- [19] **P. Constantin** Geometric Statistic in turbulence, *SIAM Review*, vol. 36 no. 1, 1994
- [20] **P. Constantin** Navier-Stokes Equations and Fluid Turbulence, *Preprint arXiv:math.AP/0003235*, 2000
- [21] **P. Constantin, Ch. Fefferman** Direction of Vorticity and the Problem of Global Regularity for The Navier-Stokes Equations, *Indiana Univ. Mathematics Journal*, vol. 42, no. 3, 1993
- [22] **P. Constantin, Ch. Fefferman, A. Majda** Geometric Constraints on Potentially Singular Solutions for the 3-D Euler Equations, *Comm. in Part. Diff. Equations*, 21, 1996
- [23] **P. Constantin, C. Foias** *Navier-Stokes Equations*, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1989
- [24] **P. Constantin, C. Foias, R. Temam** Attractors Representing Turbulent Flows, *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 53, 1985
- [25] **P. Constantin, C. Fefferman, A. Majda** Manuscript, 1994
- [26] **G.-H. Cottet** Anisotropic Subgrid-Scale Models for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows, *Center for Turbulence Research, NASA*, 1997
- [27] **G.-H. Cottet, D. Jiroveanu, B. Michaux** Simulation des grandes échelles : aspects mathématiques et numériques, *Conférence invité, Canum 2000, ESAIM Proceedings*, Vol. 11, pp. 85-95, 2002
- [28] **G.-H. Cottet, D. Jiroveanu, B. Michaux** Some theoretical and numerical results on models of Large Eddy Simulation, *Proceedings of the 9<sup>th</sup> Symposium of Mathematics and Its Applications*, Politehnica University of Timișoara, pp. 53-60 2001

- [29] **G.-H. Cottet, B. Michaux, S. Ossia, G. Vanderlinden** A Comparaison of Spectral and Vortex Methods in Three Dimensional Incompressible Flow, *J. Comp. Phys*, 175 , 2002
- [30] **G.-H. Cottet, A. A. Wray** Anisotropic grid-based formulas for subgrid-scale models, *Annual Research Brief, Center for Turbulence Research, Stanford University and NASA Ames Research Center*,1997
- [31] **G.-H. Cottet, O. V. Vasilyev** Comparaison of Dynamic Smagorinsky and Anisotropic Subgrid-Scale Models, *Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program*, 1998
- [32] **D. Coutand, J. Peirce, S. Skholler** Global Attractors for the Three Dimensional Lagrangian Averaged Navier-Stokes Equations on Bounded Domains, *Preprint*, 2001
- [33] **S. Crow** Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices, *AIAA J.*, no. 8, 1970
- [34] **J. Cousteix** *Turbulence et couche limite*, Cepadues- Editions, 1989
- [35] **E. David** *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques: une approche instationnaire*, Thèse, LEGI - Grenoble, 1993
- [36] **F. Delcayre** *Etude par simulation des grandes échelles d'un 'écoulement décollé: la marche descendante*, Thèse, LEGI - Grenoble, 1998
- [37] **T. Dubois** *Simulation numérique d'écoulements homogènes et non-homogènes par des méthodes multi-résolution*, Thèse, Univ. Paris 11, 1993
- [38] **T. Dubois, F. Bouchon** Subgrid-scale models based on incremental unknowns for large eddy simulations, *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University and NASA Ames Research Center*, 1998
- [39] **F. Ducros** *Simulations numériques directes et des grandes échelles de couches limites compressibles*, Thèse, LEGI - Grenoble, 1995
- [40] **J. E. Dunn, R. L. Fosdick** Thermodynamics, Stability and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade, *Arch. Rational Mech. Anal*, 56, 1974
- [41] **D. G. Ebin, J. Marsden** Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid, *Ann. of Math*, 92, 1970
- [42] **M. El Hamraoui** *Contributions à la simulation d'écoulement tridimensionnel par méthode de vortex*, Thèse, Univ. Paul Sabatier, Toulouse III, 1999
- [43] **E. Eliassen, B. Machenhauer, E. Rasmussen** On a Numerical Method for Integration of the Hydrodynamical Equations with a Spectral Representation of the Horizontal Fields, *Rep. no. 2, Institut for Teoretisk Meteorologi, Univ. Copenhagen*, 1970

- [44] **A. Favre** Corrélations spatio-temporelles, déterminisme et chaos, *Acad. Sci. et Acad. Nationale de l'Air et de l'Espace*, 1991
- [45] **R. Friedrich** DNS and LES of Incompressible Turbulent Flows, *Report*, 1995
- [46] **C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi** The Three Dimensional Viscous Camassa-Holm Equations and their Relation to the Navier-Stokes Equations and Turbulence Theory , *submitted*, 2001
- [47] **T. Fohl, J. S. Turner** Colliding Vortex Rings, *Phys. Fluids*, 18, 1975
- [48] **M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W. H. Cabot** A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model, *Phys. Fluids A*, 3, 1991
- [49] **S. Ghosal, P. Moin** The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry, *J. Comput. Phys.* 118, no1, 1995
- [50] **D. Gottlieb, M. Y. Hussaini, S. A. Orszag** Theory and Application of Spectral Methods, *SIAM*, 1984
- [51] **D. Gottlieb, S. A. Orszag** Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications, *SIAM*, 1977
- [52] **F. Jauberteau** *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires par méthodes spectrales*, Thèse , Univ. Paris 11, 1990
- [53] **A. N. Kolmogorov** The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30, 1941
- [54] **O. A. Ladyszenskaya** *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breasch, New York, 1969
- [55] **O. A. Ladyszenskaya** On the Dynamical System Generated by the Navier-Stokes Equations, *english translation in Journal Sov. Math.* 3, 1975
- [56] **O. A. Ladyszenskaya** *Attractors for Semi-groups and Evolution Equations*, Cambridge Univ. Press, 1991
- [57] **O. A. Ladyszenskaya** On finite dimensionality of bounded invariant sets for the Navier-Stokes equations and some other dissipative systems, *Zapi. Nauchn. Semi. LOMI* 115, 1982
- [58] **O. A. Ladyszenskaya , V. A. Solonnikov** *Linear and Quasi-linear Parabolic Equations*, American Mathematical Society, 1967
- [59] **B. E. Launder** Second moment closure: present and future?, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, vol. 10, no. 4, 1989
- [60] **B. E. Launder, D. B. Spalding** The numerical computation of turbulent flows, *Comput. methods in applied mechanics and energy*, vol. 3, 1974

- [61] **A. Leonard** Energy Cascade in Large Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows, *Adv. Geophys.* 18, 1974
- [62] **J. Leray** Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, 63, 1934
- [63] **M. Lesieur** *La turbulence*, Collection Grenoble Science, 1994
- [64] **M. Lesieur** *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997
- [65] **J. L. Lions** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod, Paris, 1969
- [66] **O. J. MacMillan, J. H. Ferziger** Direct tests of subgrid scale models, *AIAA J.*, vol. 17, 1979
- [67] **Y. Maday, A. Quarteroni** Pseudo-spectral Approximations of the Navier-Stokes Equations, *SIAM, Num. An.* 1981
- [68] **A. Majda** Vorticity and Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow, *Comm. on Pure and Applied Math.*, 1996
- [69] **J. Malek, J. Nečas** A Finite-Dimensional Attractor for Three-Dimensional Flow of Incompressible Fluids, *J. of Diff. Eq.* 127, 1996
- [70] **J. Marsden, S. Skholler** Global Well-posedness for the Lagrangian Averaged Navier-Stokes (LANS) Equations on Bounded Domains, *Meeting of Royal Society London*, 2000
- [71] **J. Marsden, T. Ratiu, S. Skholler** The Geometry and Analysis of the Averaged Euler Equations and a New Diffeomorphism Group, *Geom. Funct. Anal.* 10, 2000
- [72] **J. Marsden, S. Skholler** The Anisotropic lagrangian Averaged Navier-Stokes and Euler Equations, *Arch. Rat. Mech. An.*, 2001
- [73] **M. V. Melander, N. Zabusky** Three Dimensional Vortex Tube Reconnection; Morphology for orthogonally Offset Tubes, *Physica D*, 37, 1989
- [74] **D. Meiron, M. Shelley, W. T. Ashurst, S. A. Orszag** Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, *In Numerical Studies of Vortex Reconnection, SIAM*, 1989
- [75] **B. Michaux** Sur un modèle de simulation des grandes échelles d'un fluide incompressible, *séminaire LAMA, Université de Savoie*, 2000
- [76] **K. Mosheini, S. Skholler, B. Kosovič, J. Marsden, D. Caratti, A. Wray, R. Rogallo** Numerical Simulations of Homogeneous Turbulence Using the Lagrangian Averaged Navier-Stokes Equations, *Proc. CTR summer school*, 2000
- [77] **M. Oliver, S. Skholler** The Vortex Blob Method as a Second-Grade Non-Newtonian Fluid, *E-print*, <http://xyz.lanl.gov/abs/math.AP/9910088/>.

- [78] **S. A. Orszag** Transform Method for Calculation of Vector Coupled Sums: Application to the Spectral Form of the Vorticity Equation, *J. Atmosph. Sci.* 27, 1970
- [79] **R. S. Rivlin, J. L. Ericksen** Stress-deformation Relations for Isotropic Materials, *Journal of Rational Mech. Anal.*, 4, 1955
- [80] **D. Ruelle** *Hasard et chaos*, Ed. J. Odile, 1991
- [81] **D. Ruelle, F. Takens** On the Nature of the Turbulence, *Comm. Math. Phys.*, 20, 1971
- [82] **W. Rodi** A new algebraic relation for calculating the Reynolds stress, *ZAMM* 56, 1976
- [83] **M. J. Shelley, D. I. Meiron, S. A. Orszag** Dynamical Aspects of Vortex reconnection of Perturbed Anti-parallel Vortex Tubes, *J. of Fluids Mech.* 246, 1993
- [84] **J. H. Silvestrini** *Simulation des Grandes échelles des zones de mélange; Application à la propulsion solide des lanceurs spatiaux*, Thèse, LEGI - Grenoble, 1996
- [85] **S. Skholler** Smooth Global Lagrangian Flow for the 2D Euler and Second-Grade Fluid Equations, *E-print*, [http://xyz.lanl.gov/abs/math.AP/0007027/.](http://xyz.lanl.gov/abs/math.AP/0007027/), 2000
- [86] **S. Skholler** On Averaged Incompressible Lagrangian Hydrodynamics; *E-print*, [http://xyz.lanl.gov. abs/math.AP/9908109/.](http://xyz.lanl.gov. abs/math.AP/9908109/), 2000
- [87] **S. Skholler** Analysis on Groups of Diffeomorphisms on Manifolds with Boundaries and the Averaged Motion of Fluids, *J. Diff. Geom.*, 2001
- [88] **J. Smagorinsky** General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, *Monthly Weather Review* 91, 1963
- [89] **C. G. Speziale, S. Sarkar, T. B. Gatski** Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach, *J. of Fluid Mechanics*, vol. 227, 1991
- [90] **R. Schiestel** *Les écoulements turbulents. Modélisation et simulation*, Ed. Hermes, 1998
- [91] **Y. Talpaert** *Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique*, Cépadues Editions, 1993
- [92] **R. Temam** *Navier Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis* (second edition), CBMS-NSF, 1995
- [93] **R. Temam** *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1997(2 ed.)
- [94] **H. Tennekes, J. L. Lumley** *A first course in turbulence*, Cambridge, MIT Press, 1972

- 
- [95] **G. Vanderlinden** Simulation de la turbulence par méthode particulaire, *Rapport Intern LMC-IMAG*, 1998
- [96] **P. Voke, M. Collins** Large-Eddy Simulation: Retrospect and Prospect, *PCH PhysicoChemicalHydrodynamics vol. 4*, 1983
- [97] **J. H. Williamson** Low-storage Runge-Kutta schemes, *J. of Computat. Physics*, 35, 1980
- [98] **E. Zeidler** *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, 1990