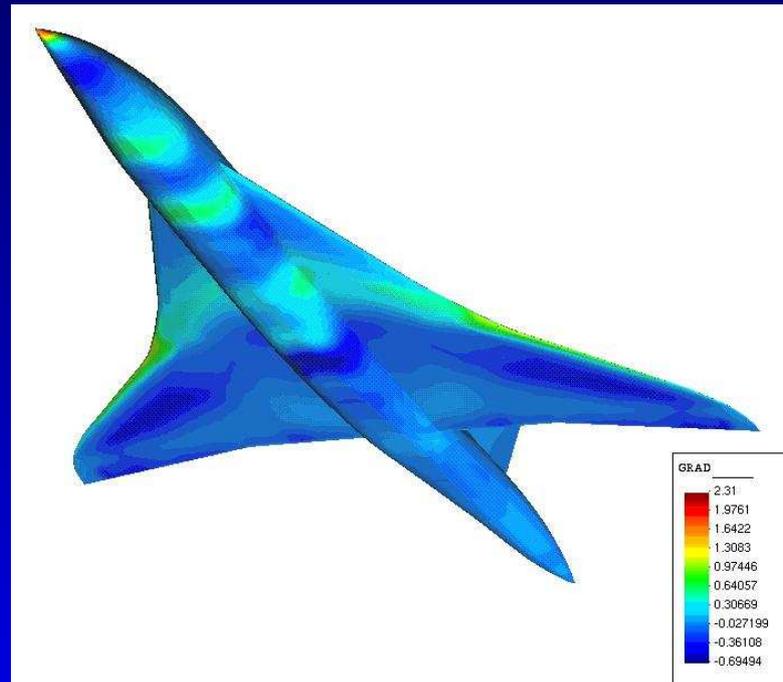


Optimisation Différentiable *en Mécanique des Fluides*

François Courty

francois.courty@sophia.inria.fr

INRIA, Sophia-Antipolis, Projet TROPICS



Formulation d'un problème d'optimisation de forme

Trouver $x_{opt} = (Y_{opt}, u_{opt})$ dans $\mathbb{R}^{N_Y} \times \mathbb{R}^{N_u}$

$$\text{tel que } J(x_{opt}) = \min_{\Psi(x) = 0} J(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(Y, u) = 0 \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial Y}(Y, u) \right)^* \Pi = \left(\frac{\partial J}{\partial Y}(Y, u) \right) \\ \left(\frac{\partial J}{\partial u}(Y, u) \right) - \left\langle \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(Y, u) \right)^* \Pi, 1 \right\rangle = 0 \end{array} \right.$$

Axes de recherche

- Calcul efficace d'un état adjoint
- Algorithmes d'optimisation:
 - —→ contexte \mathbb{R}^n : SQP one shot
 - —→ contexte fonctionnel: préconditionnement multiniveau
- Applications:
 - —→ Optimum design en aérodynamique
 - —→ Adaptation de maillages

1. Etat adjoint par Différentiation Automatique

- But: Calcul efficace d'un état adjoint stationnaire.

Mohammadi et al., 1997, Griewank et al., 2001

1. Etat adjoint par Différentiation Automatique

- But: Calcul efficace d'un état adjoint stationnaire.
- Problème ouvert: le stockage mémoire.

Mohammadi et al., 1997, Griewank et al., 2001

1. Etat adjoint par Différentiation Automatique

- But: Calcul efficace d'un état adjoint stationnaire.
- Problème ouvert: le stockage mémoire.
- État de l'art :
Modification du code généré: Mohammadi
Résolution piggy-back: Griewank

Mohammadi et al., 1997, Griewank et al., 2001

1. Etat adjoint (suite)

Classique:

```
do i = 1, N
    body(i)
end
do i = N, 1
    body(i)
end
```

⇒

Amélioré:

```
do i = 1, N
    body(i)
    body(i)
end
```

F.Courty, A.Dervieux, B.Koobus, L.Hascoet,
Optimization Methods and Software, 2003

2. Optimisations pour des grands systèmes \mathbb{R}^n

- État de l'art: Byrd, Omojokun: SQP robuste mais “n x N”

Ta'asan, 1991, Dadone, Grossman, 2000

Courty, Dervieux, A SQP-like one shot algorithm for Optimal Control problems, soumis à Mathematical Programming

2. Optimisations pour des grands systèmes \mathbb{R}^n

- État de l'art: Byrd, Omojokun: SQP robuste mais “n x N”
- État de l'art: Ta'asan, Grossman : one shot pour des algorithmes de gradient

Ta'asan, 1991, Dadone, Grossman, 2000

Courty, Dervieux, A SQP-like one shot algorithm for Optimal Control problems, soumis à Mathematical Programming

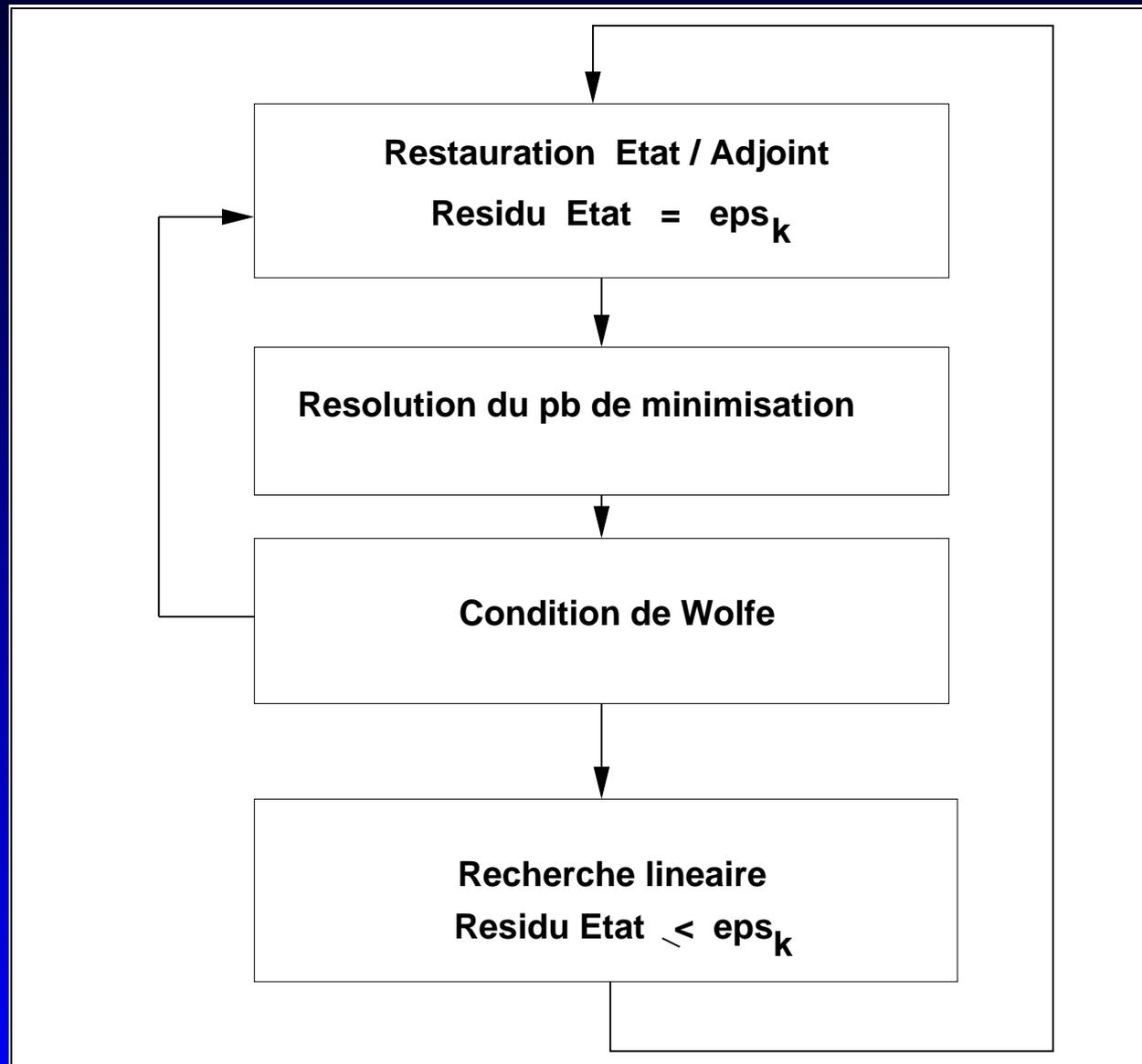
2. Optimisations pour des grands systèmes \mathbb{R}^n

- État de l'art: Byrd, Omojokun: SQP robuste mais "n x N"
- État de l'art: Ta'asan, Grossman : one shot pour des algorithmes de gradient
- But: Construire un algorithme SQP one shot.

Ta'asan, 1991, Dadone, Grossman, 2000

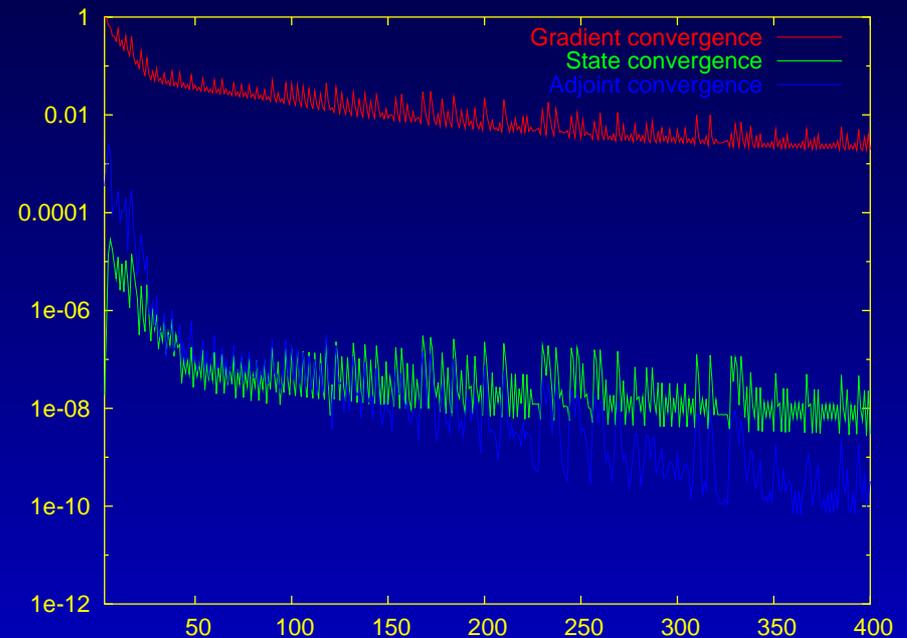
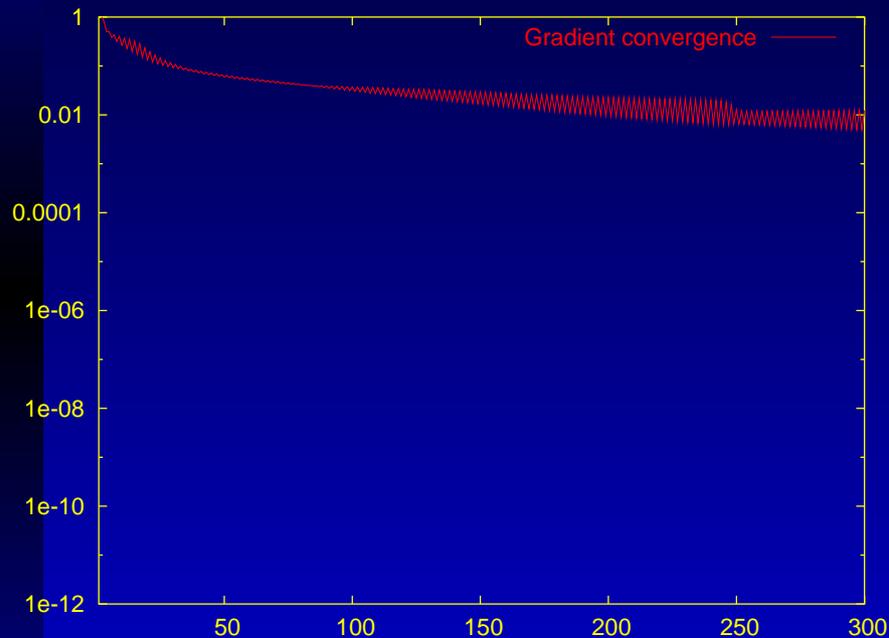
Courty, Dervieux, A SQP-like one shot algorithm for Optimal Control problems, soumis à Mathematical Programming

Algorithme SQP one shot



Application au problème du bang sonique

$$j(\gamma) = \alpha_1(C_D - C_D^{target})^2 + \alpha_2(C_L - C_L^{target})^2 + \alpha_3 \int_{\Omega_B} (\nabla p)^2 dV$$



optimisation one-shot = 15 résolutions complètes état+adjoint

100 itérations: 44h

6h

3. Préconditionnement multiniveau

- Le problème d'optimisation de forme est un problème différentiel
⇒ le conditionnement augmente avec la taille des maillages

Reuther, Jameson, 1995, Arian, Ta'asan, 1999

Mohammadi, Pironneau, 2001

3. Préconditionnement multiniveau

- Le problème d'optimisation de forme est un problème différentiel
⇒ le conditionnement augmente avec la taille des maillages
- État de l'art: Jameson, Mohammadi, Arian-Ta'asan

Reuther, Jameson, 1995, Arian, Ta'asan, 1999

Mohammadi, Pironneau, 2001

3. Préconditionnement multiniveau

- Le problème d'optimisation de forme est un problème différentiel
⇒ le conditionnement augmente avec la taille des maillages
- État de l'art: Jameson, Mohammadi, Arian-Ta'asan
- Interprétation fonctionnelle pour les problèmes d'optimisation de forme: perte d'un degré de régularité (Hadamard)

Reuther, Jameson, 1995, Arian, Ta'asan, 1999

Mohammadi, Pironneau, 2001

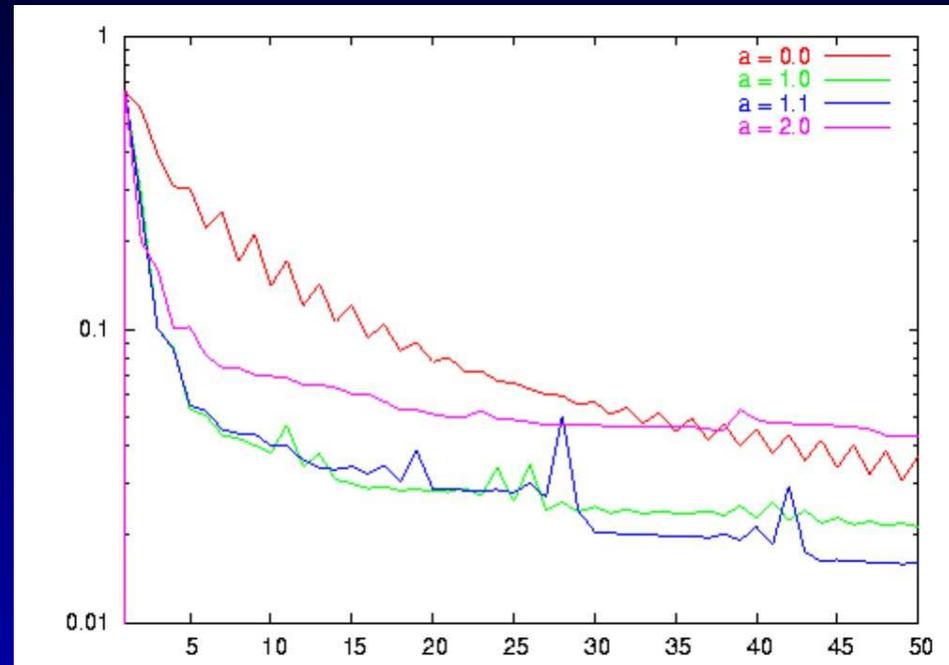
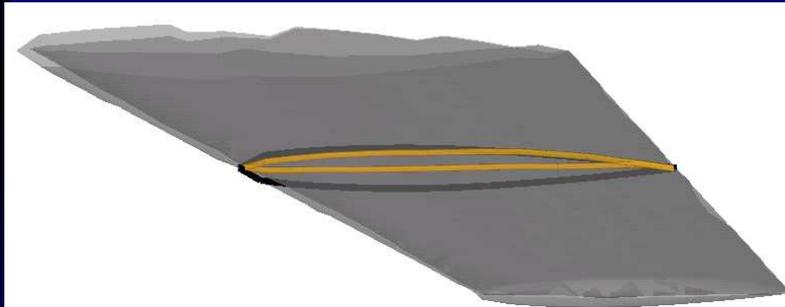
3. Préconditionnement multiniveau

- Le problème d'optimisation de forme est un problème différentiel
⇒ le conditionnement augmente avec la taille des maillages
- État de l'art: Jameson, Mohammadi, Arian-Ta'asan
- Interprétation fonctionnelle pour les problèmes d'optimisation de forme: perte d'un degré de régularité (Hadamard)
- Préconditionnement multiniveau additif : réglage avec un seul paramètre a

Reuther, Jameson, 1995, Arian, Ta'asan, 1999

Mohammadi, Pironneau, 2001

Application à l'optimum design



Convergences du gradient pour différentes valeurs de α

Gradient conjugué (Gain de 4)

Courty, F. et Dervieux A. soumis à Numerische Mathematik.

4. Maillages optimaux

- Adaptation de maillages = problème de minimisation
- Représenter un maillage 2D par une fonction (la métrique)

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}_{\mathcal{M}}^{-1} \begin{pmatrix} (m_{\xi})^{-2} & 0 \\ 0 & (m_{\eta})^{-2} \end{pmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{M}} \quad (0)$$

- Fonctionnelle = modèle d'erreur (\mathcal{M})
- \longrightarrow Interpolation adaptative
- \longrightarrow Adaptation pour EDP

4.1 Interpolation adaptative

- But: construire des maillages optimaux pour interpoler une fonction u donnée analytiquement.

George et al., 1999, Habashi et al., 1997

4.1 Interpolation adaptative

- But: construire des maillages optimaux pour interpoler une fonction u donnée analytiquement.
- État de l'art: George et al., Habashi et al.: équirépartition

George et al., 1999, Habashi et al., 1997

4.1 Interpolation adaptative

- But: construire des maillages optimaux pour interpoler une fonction u donnée analytiquement.
- État de l'art: George et al., Habashi et al.: équirépartition
- Construire systématiquement des modèles continus et les étudier à l'aide du calcul des variations

George et al., 1999, Habashi et al., 1997

Modélisation de l'erreur

$$\min_{\mathcal{M}} \int \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right| \cdot m_\xi^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right| \cdot m_\eta^2 \right)^2 dx dy$$

sous la contrainte $\int m_\xi^{-1} m_\eta^{-1} dx dy = N.$

Courty, Leservoisier, George, Dervieux, Continuous Metrics and Mesh optimization soumis à Applied Numerical Mathematics

La métrique optimale, 2D

$$\mathcal{M}_{opt} = \frac{C_2}{N} \mathcal{R}_u^{-1} \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|^{-1/2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|^{1/2} & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|^{-1/2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{R}_u .$$

avec:

$$C_2 = \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right| \right)^{\frac{1}{2} - \beta} \int \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right| \right)^{\beta - \frac{1}{2}} dx dy .$$

$$\beta = \frac{5}{6}$$

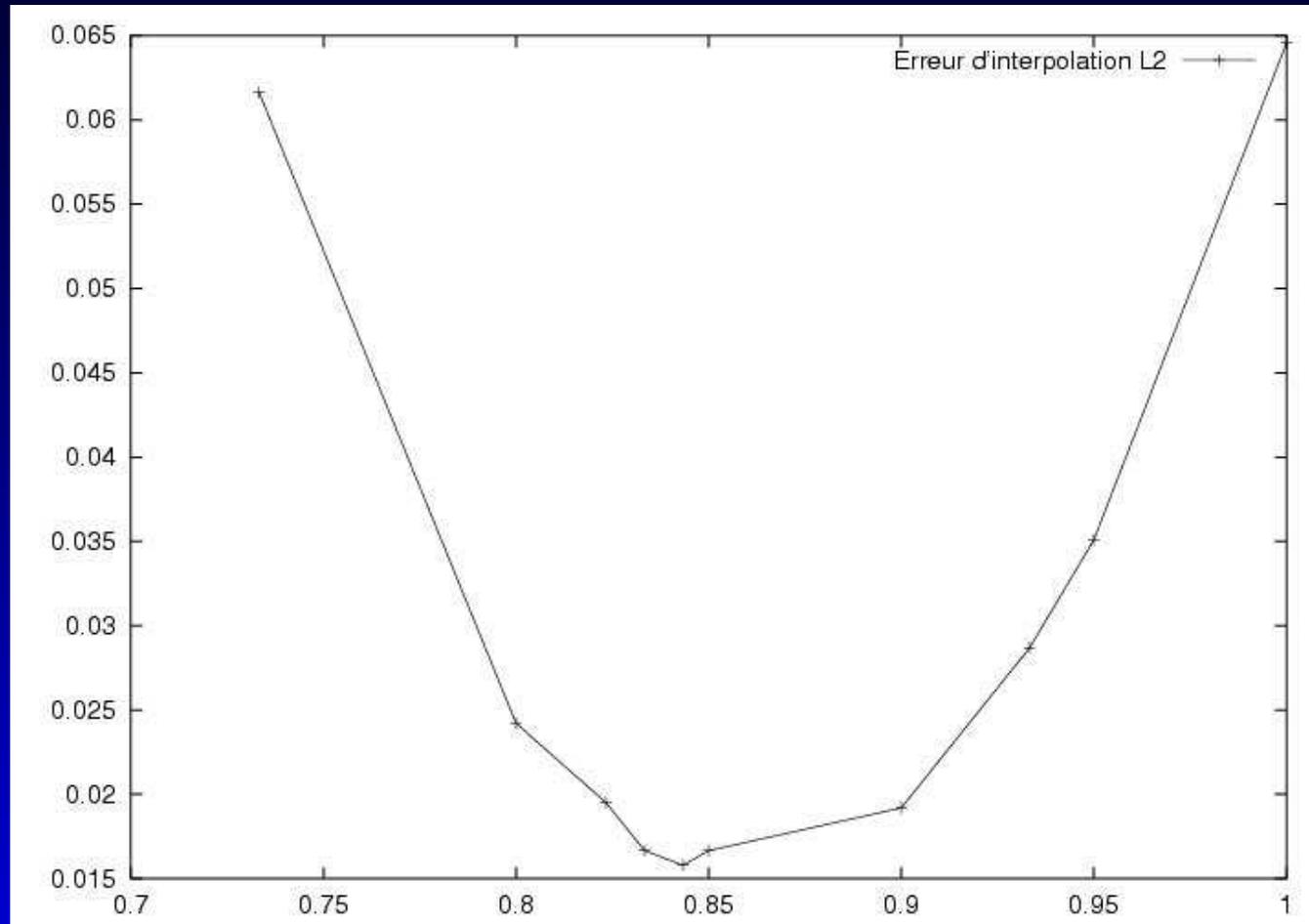
$$\text{Erreur minimale: } \mathcal{E}_{opt} = \frac{C}{N} \left(\int \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|^{\frac{1}{3}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|^{\frac{1}{3}} \right) dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ordre de convergence sur des discontinuités

Ordre de conv.	Isotrope	Anisotrope
Maximum Théorique	$\leq 1^*$	≤ 2
Métrique Optimale Théorie	1	2
Métrique Optimale Vérif. Numérique Heavyside 2D	1	2

(*) Coudière, Dervieux, Leservoisier, Palmerio, 2001

Une certaine optimalité de la métrique



Erreur d'interpolation L^2 en fonction de β

4.2 Méthodes d'adjoint pour l'adaptation d'EDP

But: calculer une fonctionnelle scalaire $j(u) = (g, u)$ dépendant de l'EDP $a(u, \Phi) = (f, \Phi)$.

Équation d'état adjoint: $a(z, \Phi) = (g, \Phi)$

$$j(u) = j(\tilde{u}) + a(\tilde{u}, \tilde{z}) - (f, \tilde{z}) + a(u - \tilde{u}, z - \tilde{z}) \quad \forall \tilde{u}, \tilde{z}$$

État de l'art :

- superconvergence (Giles, Pierce, ...)
- estimations a posteriori: Becker, Rannacher, ...
- Formaggia, Perotto, Kunert...

Giles, Pierce, 2002, Becker, Rannacher et al. 1999

Formaggia, Perotto, 2002, Kunert, 2000

Notre démarche

$$(Au, v)_{V', V} = (f, v) \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega)$$

L'erreur d'approximation totale est séparée en deux composantes comme suit:

$$\begin{aligned} u - u_h &= (u - \Pi_h u) + (\Pi_h u - u_h) \\ &= \text{erreur d'interpolation} + \text{erreur implicite} \end{aligned}$$

Lemme

$$u_h - \Pi_h u = \left(\widetilde{\Pi_h^* A} \right)^{-1} \Pi_h^* A (u - \Pi_h u).$$

ou de manière équivalente:

$$(A(u_h - \Pi_h u), \phi_h) = (\nabla(\phi_h), \nabla(u - \Pi_h u)) . \square$$

Modèles isotropes et anisotropes

Modèle isotrope: $m_\xi = m_\eta$

$$\hat{U}_h^{iso} = (u_{xxxx} + 4u_{xxyy} + u_{yyyy})(m_\xi)^2$$

Modèle anisotrope:

$$\hat{U}_h^{aniso} = \mathcal{R}_u (u_{\xi\xi\xi\xi} m_\xi^2 + 2u_{\xi\xi\eta\eta} (m_\xi^2 + m_\eta^2) + u_{\eta\eta\eta\eta} m_\eta^2) \mathcal{R}_u^T$$

Problème de contrôle optimal

$$d = m_\xi^{-1} m_\eta^{-1}$$

Trouver $d = \text{Argmin} \frac{1}{2} |\nabla \hat{Y}(d)|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} |\nabla d|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{2} |d^{-1}|_{L^2}^2$

avec $(\nabla \hat{Y}(d), \nabla \phi) = (\phi, \hat{U}(d)) \quad \forall \phi$ et $\int_{\Omega} d \, dx dy = N.$

$$-\varepsilon \Delta d + \frac{\hat{U}(d)}{d} A^{-1} \hat{U}(d) - \eta d^{-3} = C$$

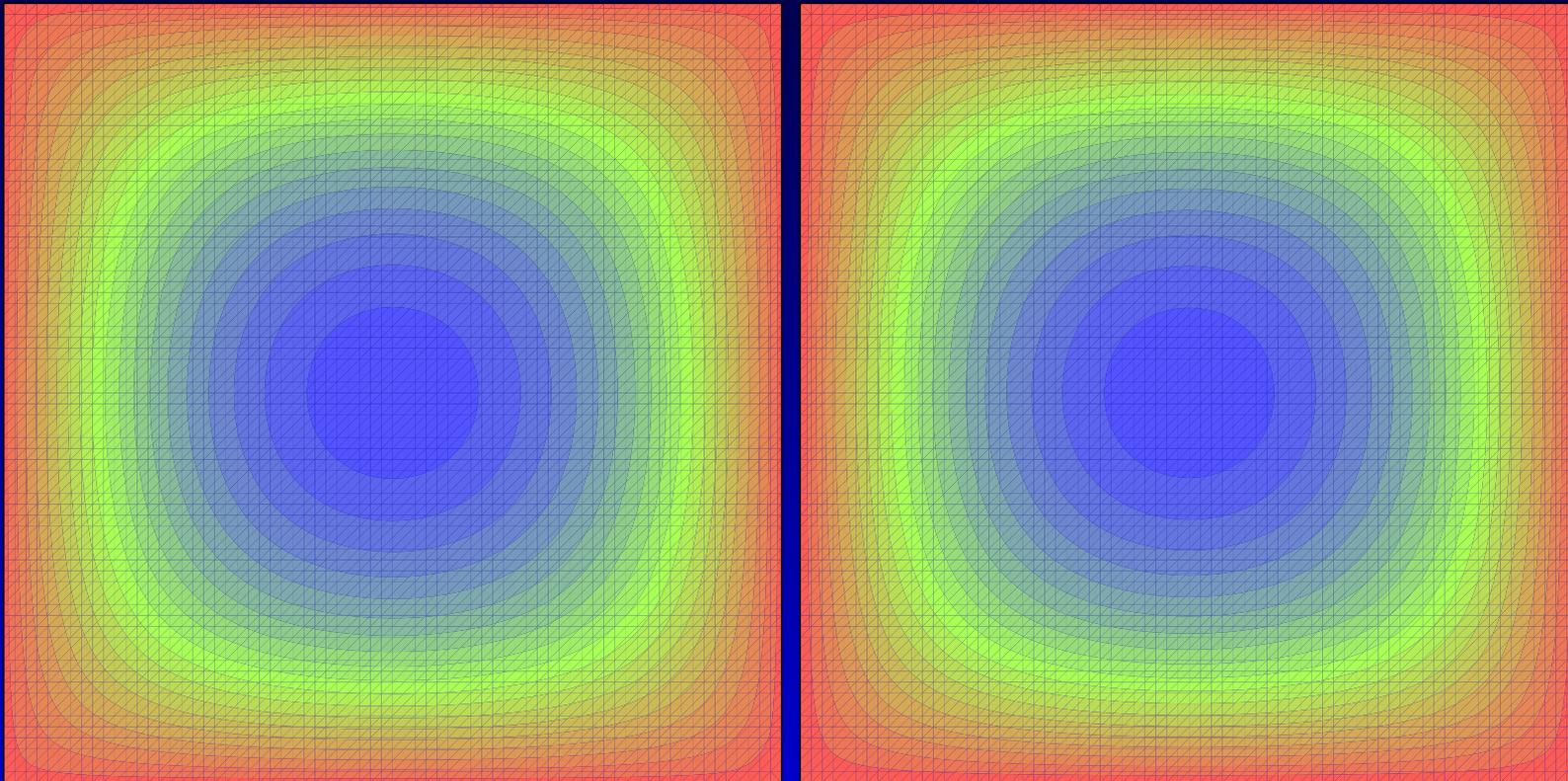
avec $\frac{\partial d}{\partial n} = 0$ et C constant sur $\Omega.$

Vérification du modèle d'erreur: u_1

$$u_1(x, y) = (x^2 - x)(y^2 - y)$$

pb_2d

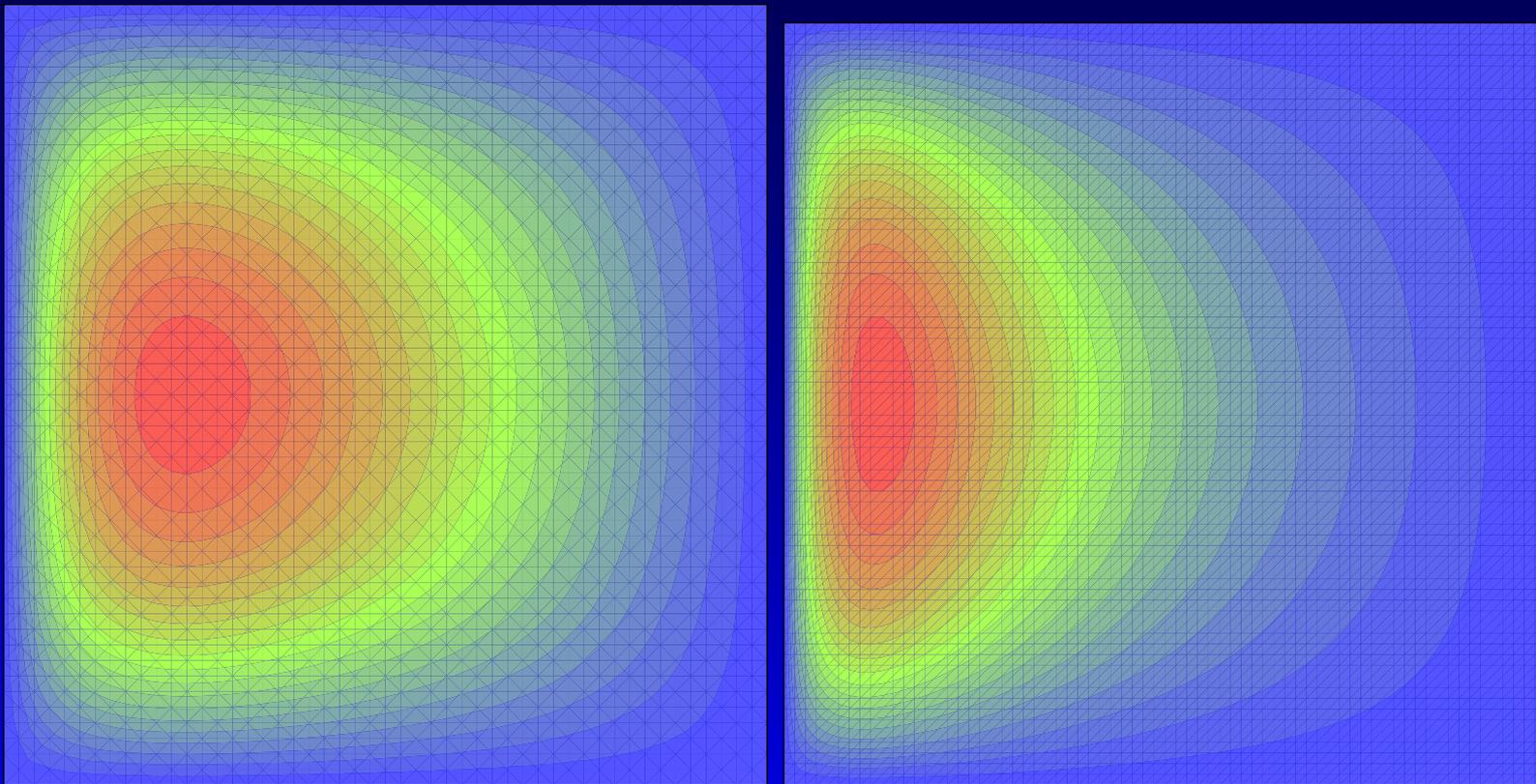
pb_2d



Comparaison entre erreur implicite exacte et modèle d'erreur

Vérification du modèle d'erreur: u_2

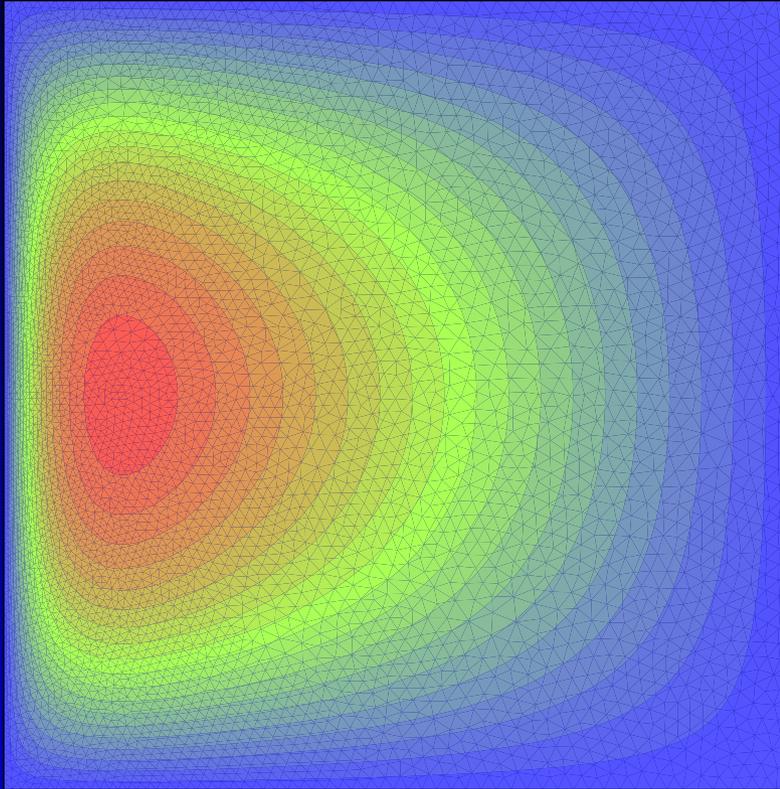
$$u_2(x, y) = (1 - \exp(-\alpha x) - (1 - \exp(-\alpha))x)4y(1 - y) \text{ avec } \alpha = 10.0$$



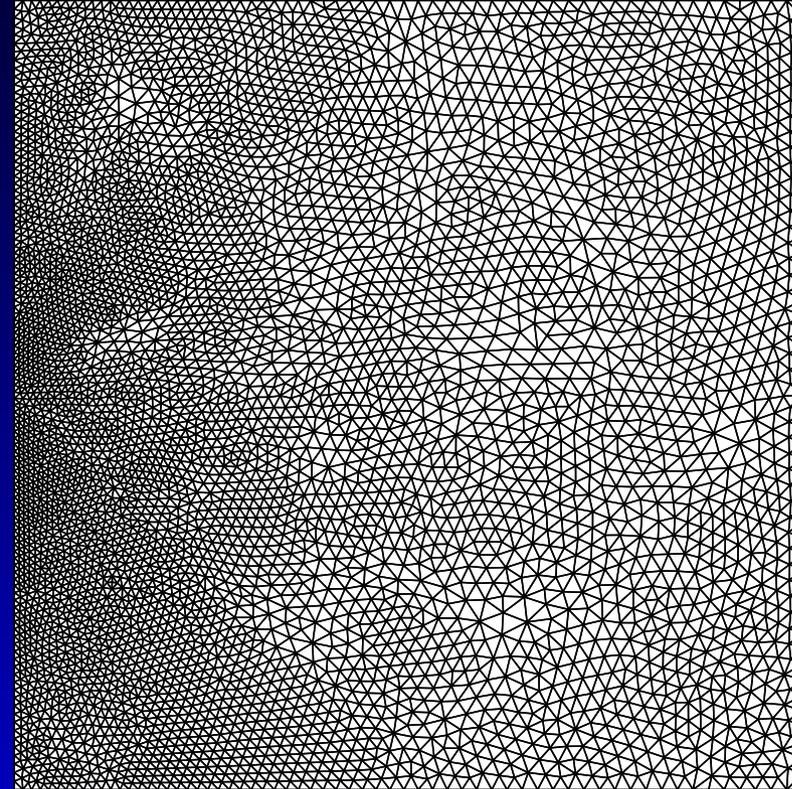
Comparaison entre erreur implicite exacte et modèle d'erreur

Maillage optimisé: u_2

pb_2d

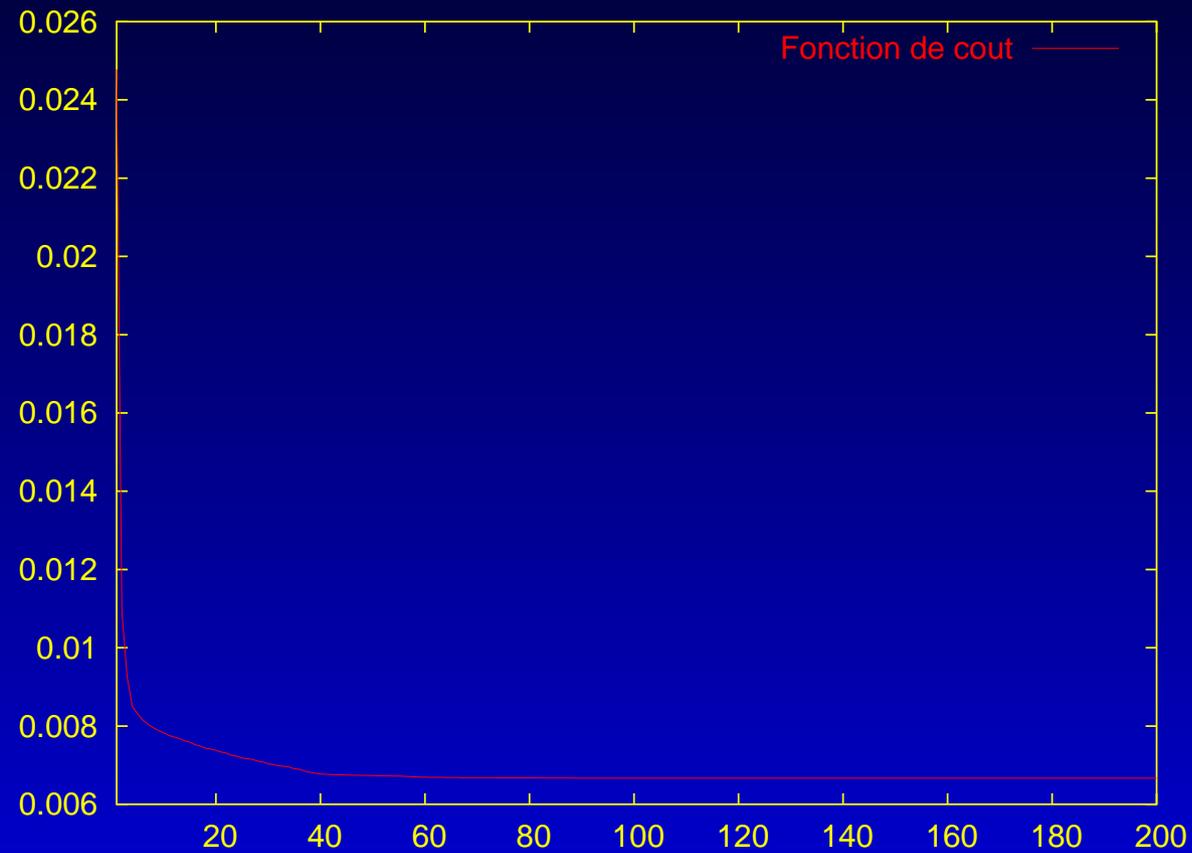


pb_2d



Nouvelle solution et nouveau maillage

Décroissance de l'erreur modélisée: u_2



Convergence de la fonction de coût

Bilan

- Mise au point d'une méthode de D.A. pour éliminer automatiquement les stockages mémoires dus aux boucles parallèles.
- Algorithme SQP One Shot.
- Préconditionneur multiniveau.
- Application à un problème réel de minimisation du bang sonique.
- Métrique continue pour l'interpolation adaptative.
- Adaptation pour EDP.

L'avenir ...

- Automatisation par directives.
- Extension de l'algorithme SQP One Shot aux contraintes inégalités.
- Résolution EDP à l'aide du préconditionneur multiniveau
- Coupler Optimisation et Adaptation de maillages en aérodynamique.
- Extension de Métrique EDP à Euler.