



HAL
open science

Application des méthodes intégrales pour l'évaluation de la performance des puits horizontaux dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque

Valérie Moumas

► To cite this version:

Valérie Moumas. Application des méthodes intégrales pour l'évaluation de la performance des puits horizontaux dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque. Mathématiques [math]. Université de Technologie de Compiègne, 2003. Français. NNT: . tel-00004274v2

HAL Id: tel-00004274

<https://theses.hal.science/tel-00004274v2>

Submitted on 23 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE COMPIÈGNE**

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE

Discipline : Technologies de l'Information et des Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Valérie Moumas

le 7 octobre 2003

Application des méthodes intégrales pour l'évaluation de la performance des puits horizontaux dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque.

Directeur de thèse :

Jean Giroire

Jury :

M. G. Chavent	Rapporteur.
M. J.-C. Nédélec	Rapporteur.
M. J. Giroire	Directeur de thèse.
M. D.-Y. Ding	Promoteur IFP.
M. T. Ha-Duong	Examinateur.
M. T. Gallouët	Président.

Remerciements

J'adresse tout d'abord toute ma reconnaissance aux trois personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler durant ces trois années : MM. Didier-Yu Ding, Jean Giroire, et Tuong Ha-Duong.

Je remercie particulièrement M. Didier-Yu Ding pour avoir proposé et défendu ce sujet auprès du Conseil Scientifique de l'Institut Français du Pétrole. C'est un sujet très intéressant qui m'a permis de découvrir à la fois le milieu pétrolier et les méthodes intégrales. J'ai été très sensible à l'œil professionnel qu'il a porté sur mon travail, et je lui suis reconnaissante pour m'avoir appris à mieux lier les mathématiques aux phénomènes physiques.

Je remercie vivement MM. Jean Giroire et Tuong Ha-Duong pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à ce travail, pour leurs conseils, leurs encouragements, leur rigueur, mais aussi pour leur confiance et leur bonne humeur.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait MM. Guy Chavent et Jean-Claude Nédélec en acceptant le rôle de rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce manuscrit.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Thierry Gallouët et Mlle Hélène Barucq pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie l'Institut Français du Pétrole qui m'a permis de préparer cette thèse dans d'excellentes conditions.

Je n'oublie pas les ingénieurs de l'IFP, les chefs de projet, et les membres du LMAC, qui ont participé plus ou moins directement au bon déroulement de cette thèse. Je tiens aussi à saluer les secrétaires de l'IFP et de l'UTC, pour leur efficacité et tout le temps qu'elle m'ont fait économiser.

Je garde une pensée pour tous les compagnons et amis de route : les thésards de l'IFP et de l'UTC, et plus particulièrement pour Céline.

Je tiens à remercier mon frère, pour sa confiance, et mes parents, sans lesquels je ne serais jamais arrivée jusque là.

Enfin un grand merci à David, pour toute l'aide et le soutien qu'il m'a apportés au cours de ces trois années.

Table des matières

Introduction	8
Nomenclature	13
1 Du problème physique vers le modèle numérique	15
1.1 Problème physique	15
1.1.1 Caractérisation des réservoirs	15
1.1.2 Observation du milieu	17
1.1.3 Projet de développement	18
1.1.4 Des puits complexes vers les puits intelligents	19
1.2 Modèles mathématiques	20
1.2.1 Équation de diffusivité	21
1.2.2 Conditions aux bords du réservoir	22
1.2.3 Conditions aux puits	22
1.2.4 Conditions sur les fractures	26
1.2.5 Modèle mathématique pour un réservoir homogène	26
1.2.6 Modèle mathématique pour un réservoir stratifié	27
1.2.7 Autre type de modèle pour modéliser le puits	28
1.2.8 Modèle retenu	29
1.2.9 Cas particulier : écoulement permanent	29
1.2.10 À propos des dimensions	30
1.3 Conclusion du chapitre	33
2 Régime permanent	35
2.1 Problème linéaire (conductivité infinie)	35
2.1.1 Pression sur le puits donnée	36
2.1.2 Débit total du puits donné	37
2.1.3 Conclusion	43
2.2 Problème non-linéaire (conductivité finie)	43
2.2.1 Retour sur les dimensions	46
2.2.2 Estimations préliminaires	47
2.2.3 Résolution du problème de point fixe	49
2.3 Conclusion du chapitre	55
3 Formulations intégrales pour le régime permanent	57
3.1 Formulations intégrales : rappels	57
3.1.1 Généralités	57
3.1.2 Équations intégrales de première et de seconde espèce	62

3.2	Écriture des équations intégrales	62
3.2.1	Inconnues du modèle	62
3.2.2	Réservoir homogène isotrope	63
3.2.3	Réservoir homogène anisotrope	64
3.2.4	Réservoir multi-couches	65
3.3	Équivalence entre la représentation intégrale choisie et le modèle	67
3.4	Méthodes numériques pour résoudre l'équation intégrale	69
3.4.1	Méthode de collocation	69
3.4.2	Méthode de Galerkin	70
3.4.3	Méthode de Nyström	71
3.4.4	Méthode de Galerkin hybride	71
3.4.5	Méthode retenue	72
3.5	Tests numériques	72
3.5.1	Discrétisation des équations intégrales	72
3.5.2	Résultats numériques	74
3.6	Conclusion	81
3.7	Une autre manière d'appliquer les équations intégrales pour un problème pétrolier	82
4	Approximation flaire du puits	83
4.1	Discrétisation de la formulation intégrale	83
4.2	Méthode d'approximation du puits par une ligne	85
4.3	Validations pour un puits en milieu infini	89
4.4	Conclusion du chapitre	91
5	Résultats numériques	93
5.1	Réservoir homogène avec un puits	93
5.1.1	Discrétisation des intégrales mixtes	93
5.1.2	Tests numériques	95
5.2	Réservoir stratifié sans puits	100
5.3	Réservoir stratifié avec un puits	104
5.3.1	Comparaison avec un réservoir homogène	104
5.3.2	Réservoir avec pendage	105
5.3.3	Réservoir parallélépipédique avec pendage	106
5.4	Conclusion du chapitre	109
6	Régime transitoire	111
6.1	Écriture du modèle après transformation de Laplace	111
6.2	Problème linéaire (conductivité infinie)	113
6.2.1	Cas où p_{wf} est donnée, et Q inconnu	113
6.2.2	Cas où p_{wf} est inconnue, et où Q est imposé	116
6.2.3	Conclusion	118
6.3	Problème non-linéaire (conductivité finie)	119
6.3.1	Écriture du problème de point fixe	119
6.3.2	Conclusion	121
6.4	Des méthodes intégrales pour résoudre l'équation de diffusion : une bibliographie	122
6.4.1	Formulations intégrales classiques du problème	122
6.4.2	Méthodes numériques	123
6.4.3	Conclusion et méthodologie retenue	131

6.5	Conclusion du chapitre	131
Conclusion		133
Annexes		135
7	Annexe A : Calcul des intégrales discrètes sur des triangles	137
7.1	Calcul de l'intégrale S_{ij}	137
7.1.1	Calcul des termes \mathbb{P}^0	138
7.1.2	Calcul des termes \mathbb{P}^1	141
7.2	Calcul de l'intégrale H_{ij}	142
7.2.1	Calcul des termes \mathbb{P}^0	143
7.2.2	Calcul des éléments \mathbb{P}^1	145
7.3	Calcul de l'intégrale hypersingulière D_{ij}	146
7.3.1	Milieu isotrope	146
7.3.2	Milieu anisotrope	146
8	Annexe B : Calcul des intégrales sur le puits	151
8.1	Calcul de l'intégrale simple M_{ij}	151
8.2	Calcul de l'intégrale H_{ij}	152
8.2.1	Cas régulier : $i < j - 2$ ou $i > j + 2$	153
8.2.2	Cas singulier : $j - 2 \leq i \leq j + 2$	156
8.3	Calcul de l'intégrale S_{ij}	161
8.3.1	Cas régulier : $i < j - 2$ ou $i > j + 2$	161
8.3.2	Cas singulier : $j - 2 \leq i \leq j + 2$	165
8.4	Calculs d'intégrales complémentaires	170
8.4.1	Calcul de I	170
8.4.2	Calcul de I'	171
8.4.3	Calcul de I_1 et I_2	171
9	Annexe C : Calcul des intégrales mixtes	173
9.1	Calcul de H'_{ij}	173
9.2	Calcul de D_{ij}	177
9.3	Calculs d'intégrales intermédiaires	185
9.3.1	Intégrales en $1 + a^2 \sin^2 \theta$:	185
9.3.2	Intégrales en $(1 + a^2 \sin^2 \theta)^2$:	186
Bibliographie		188

Introduction

Le but de cette thèse est de simuler par des méthodes intégrales l'écoulement de pétrole dans et au voisinage des puits dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque. Ces simulations permettent aux ingénieurs pétroliers d'une part de prédire la productivité des puits, et donc d'optimiser la rentabilité du gisement en fonction de l'emplacement ou de l'architecture du puits, et d'autre part de faire des tests de puits.

Nous nous intéressons donc à deux modèles différents : le premier, en régime permanent, nous donne une évaluation de la productivité du puits, et le second, en régime transitoire, interprète les tests de puits. Le modèle en régime transitoire est associé à une équation de diffusion, qui modélise l'écoulement monophasique du pétrole dans le réservoir. Pour le modèle en régime permanent, la dépendance en temps est levée dans l'équation de diffusion.

Chacun des deux modèles comporte des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière extérieure, qui interprètent par exemple la présence d'un aquifère actif, et des conditions de Neumann homogènes sur une autre partie de la frontière, qui modélisent un flux nul, sur une barrière imperméable.

Le réservoir stratifié est décomposé en plusieurs couches homogènes mais anisotropes. Chaque couche se distingue des autres par des caractéristiques physiques qui lui sont propres, notamment par une perméabilité différente. Le modèle (permanent ou transitoire) est alors écrit dans chacune des couches. Puis des conditions de continuité de pression et de flux sont imposées aux interfaces entre les couches.

Le puits est pris en compte comme un "trou" dans le réservoir. Nous écrivons alors des conditions aux limites sur ses frontières. Dans cette thèse, nous considérons deux types de conditions aux limites sur le puits : la première, appelée physiquement condition de conductivité infinie, suppose la pression constante le long du puits, et la seconde, condition de conductivité finie, plus générale, traduit les pertes de charge dans le puits. La condition de conductivité infinie est linéaire, tandis que la condition de conductivité finie est non-linéaire et non-locale. Dans le cas où l'on travaille avec la condition de conductivité finie, on a affaire à un modèle non-linéaire. Le caractère non-linéaire du modèle provient de la condition aux limites sur le puits, et non pas de l'équation aux dérivées partielles qui le gouverne, qui, elle, est linéaire.

Enfin, le modèle est complété par une équation sur le débit total du puits.

La productivité du puits est mesurée par son indice de productivité (IP) qui est défini comme le rapport entre le débit total du puits et la différence entre la pression moyenne du réservoir et la pression au fond du puits.

Nous nous retrouvons donc avec quatre modèles différents : un pour le régime permanent, un autre pour le régime transitoire, chacun des deux pouvant être linéaire (condition de conductivité

infinie), ou non-linéaire (condition de conductivité finie). Dans le cadre de cette thèse, nous avons réussi à montrer que les deux modèles en régime permanent (linéaire et non-linéaire) étaient bien posés, ainsi que le modèle linéaire en régime transitoire. L'étude du modèle non-linéaire en régime transitoire n'a pas été menée à terme, faute de temps. Du point de vue numérique, nous nous sommes concentrés sur la résolution du modèle d'écoulement permanent linéaire.

La méthode de résolution que nous avons choisie est une méthode intégrale. Pourquoi une méthode intégrale? La difficulté principale lors des simulations de réservoirs est l'importante différence d'échelle entre la taille du réservoir, qui peut atteindre 20 à 30 km d'extension horizontale, et le rayon du puits, qui est toujours inférieur à 15 cm. Les méthodes classiques, comme les volumes finis, différences finies ou éléments finis, ne sont pas suffisamment précises au niveau du puits. Des maillages hybrides avec raffinement autour du puits peuvent améliorer la précision, mais ces maillages sont difficiles à mettre en œuvre, surtout pour des puits de géométrie complexe : le maillage doit en effet suivre la trajectoire du puits. Ce problème constitue actuellement un autre thème de recherche mené à l'Institut Français du Pétrole.

Les méthodes intégrales sont alors des candidates idéales pour lever le problème d'échelle. En effet, un de leurs gros avantages est de ramener le problème sur les frontières du réservoir. Les équations intégrales sont écrites sur les bords du réservoir, les interfaces entre les couches, et la frontière du puits. Ainsi seules les frontières nécessitent un maillage, et nous n'avons plus besoin de mailler le réservoir tout entier. D'autre part, les méthodes intégrales sont bien adaptées aux géométries complexes.

Les équations intégrales ont déjà été employées dans le milieu pétrolier, mais elles étaient généralement limitées en deux dimensions et elles étaient seulement définies sur les bords du réservoir ou aux interfaces entre les couches (voir [47], [67], [73]), les puits étant simplement modélisés par des points-sources.

Dans ce travail, nous considérons des réservoirs stratifiés en trois dimensions, à géométrie quelconque, avec des puits rectilignes. Nous proposons une nouvelle formulation intégrale, jamais utilisée dans le milieu pétrolier. Nous montrons que cette formulation donne de meilleurs résultats que la formulation classiquement utilisée dans le milieu pétrolier. Le système d'équations intégrales est résolu par une méthode de Galerkin, que nous avons choisie pour ses bonnes propriétés de régularité, et sa parfaite adaptabilité à notre nouvelle formulation intégrale.

D'autre part, nous tirons parti de la différence d'échelle entre la taille du réservoir et le rayon du puits, pour effectuer une approximation filaire du puits. La méthode que nous proposons permet de réduire les calculs des intégrales sur le puits cylindrique à un problème en une dimension. Cela implique que les puits sont modélisés par des lignes, et sont donc discrétisés par des segments. Ainsi on évite une triangulation de la frontière cylindrique du puits.

Ce mémoire de thèse comporte six chapitres. Le premier est consacré à la présentation des différents modèles. Le second est dédié à l'étude théorique du modèle en régime permanent. Puis dans les chapitres 3 à 5, nous procédons à la mise en œuvre numérique des méthodes intégrales pour le modèle linéaire en régime permanent. Enfin, le chapitre 6 aborde théoriquement le modèle en régime transitoire. Les annexes sont regroupés à la fin du mémoire.

Nous commencerons par présenter le problème physique et détailler les modèles dans le chapitre 1. Nous procéderons ensuite dans le chapitre 2 à l'étude théorique du modèle en régime permanent, linéaire et non-linéaire.

Puis nous traiterons numériquement le problème linéaire en régime permanent. Nous discu-

terons tout d'abord de manière détaillée les différentes formulations intégrales dans le chapitre 3. Cette discussion nous mènera au choix d'une nouvelle formulation intégrale. Ensuite nous passerons en revue quelques méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales, avant de choisir la méthode de Galerkin. Nous justifierons pourquoi cette méthode est bien adaptée à notre formulation. Enfin, des tests numériques montreront que cette nouvelle formulation intégrale donne de meilleurs résultats que la formulation classiquement utilisée dans le milieu pétrolier.

Le chapitre 4 sera exclusivement consacré à l'approximation filaire du puits. Nous présenterons dans ce chapitre la méthode d'approximation filaire que nous avons développée. Cette méthode nous permet d'obtenir une approximation analytique des intégrales sur le puits. Nous la validerons par des tests numériques pour un puits dans un milieu infini.

Enfin, le chapitre 5 regroupera tous les tests numériques. Nous validerons successivement les cas d'un réservoir homogène avec un puits, puis nous testerons un réservoir stratifié sans puits, et enfin un réservoir stratifié avec un puits. Dans un premier temps, nous comparerons les résultats avec un réservoir homogène : nous considérerons le réservoir homogène comme s'il se composait de trois couches, chacune ayant la même perméabilité. Cela nous permettra de valider le cas du réservoir stratifié avec un puits. Ensuite, nous testerons des réservoirs avec des géométries un peu plus compliquées : tout d'abord un réservoir comportant trois couches non-parallèles, puis un réservoir parallélépipédique avec pendage.

Le chapitre 6 est réservé au modèle d'écoulement transitoire. Le modèle d'écoulement transitoire est traité par transformée de Laplace, nous justifierons ce choix par une revue bibliographique des méthodes intégrales pour résoudre l'équation de diffusion. Dans un premier temps, nous montrerons que le problème transformé est bien posé, pour la condition linéaire de conductivité infinie. Pour la condition non-linéaire, nous poserons le problème de point fixe, qui s'apparente au problème de point fixe pour le modèle en régime permanent, mais nous n'avons pas eu le temps de le résoudre dans le cadre de cette thèse.

Tous les calculs sont regroupés en annexe à la fin du mémoire. Comme nous avons choisi la méthode de Galerkin, nous avons des intégrales doubles à calculer. L'annexe A comporte les calculs des intégrales doubles sur les frontières extérieures ou les interfaces (i.e. sur des triangles), l'annexe B les calculs des intégrales doubles sur le puits, et l'annexe C le calcul des intégrales mixtes, l'une portant sur le puits, et l'autre sur les frontières extérieures ou interfaces.

Ainsi nous validons la formulation intégrale choisie et l'approximation filaire du puits pour un réservoir stratifié à géométrie quelconque, avec un puits horizontal. Les calculs que nous avons effectués dans le cadre de cette thèse ne sont valables que pour un puits horizontal, mais la méthode intégrale peut parfaitement s'adapter à des puits de géométrie plus complexe (multi-branches). Pour cela, il suffit de généraliser les calculs des annexes B et C. Cela pourra être fait dans le prolongement de la thèse.

Nomenclature

Ω	réservoir privé du puits
$\partial\Omega$ ou Γ	frontière du réservoir
Γ_D	partie de la frontière extérieure du réservoir à laquelle on applique des conditions de Dirichlet (pression imposée)
Γ_N	partie de la frontière extérieure du réservoir à laquelle on applique des conditions de Neumann (flux imposé)
Γ_w	frontière du puits
r_w	rayon du puits
l	variable axiale le long du puits
$\Gamma_{w,l}$	voir figure 1.4 page 23
q_w	débit en une section donnée du puits
Q	débit total du puits
IP	indice de productivité du puits
Ω_r	$r^{\text{ème}}$ couche du réservoir
Γ_r	frontière de la couche Ω_r
N_R	nombre de couches dans le réservoir
$\Gamma_{rs} = \Gamma_r \cap \Gamma_s$	interface entre deux couches Ω_r et Ω_s
$\Gamma_{r,\text{ext}} = \Gamma_r \setminus \bigcup_{s \in J} \Gamma_{rs}$	frontière extérieure de Ω_r
$\Gamma_{r,D} = \Gamma_r \cap \Gamma_D$	partie de la frontière Γ_r avec des conditions de Dirichlet
$\Gamma_{r,N} = \Gamma_r \cap \Gamma_N$	partie de la frontière Γ_r avec des conditions de Neumann
$\Gamma_{r,w} = \Omega_r \cap \Gamma_w$	partie de la frontière du puits qui appartient à la couche Ω_r
$\overline{\mathbf{K}}$	tenseur de perméabilité du réservoir, en général supposé diagonal, de coefficients k_1, k_2, k_3
\mathbf{k}	coefficient de perméabilité, lorsqu'il est réel,
$\tilde{\mathbf{k}} = (k_1 k_2 k_3)^{1/3}$	
ϕ	porosité du réservoir
S	saturation d'un fluide (eau, gaz, pétrole)
ρ	masse volumique du fluide
\vec{V}	vitesse de filtration du fluide
c_f	coefficient de compressibilité du fluide
μ	viscosité dynamique du fluide
f	coefficient de friction sur le puits
C_w	constante intervenant dans la condition de conductivité finie sur le puits : $C_w = \frac{f\rho}{\pi^2 r_w^5}$.

\mathbf{k}_f coefficient de perméabilité de la fracture (supposé réel)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ variable d'espace

$\vec{\mathbf{n}}$ normale extérieure à la frontière du réservoir

t variable de temps, $t \in [0, T]$

T temps final d'observation

\mathbf{G} noyau de Green

$\mathcal{L}[\mathbf{v}] = \tilde{\mathbf{v}}$ transformée de Laplace de v

Γ_h approximation de la frontière Γ

Γ_D^h approximation de la frontière Γ_D

Γ_N^h approximation de la frontière Γ_N

Γ_{rs}^h approximation de la frontière Γ_{rs}

$\Gamma_{\text{ext}}^h = \Gamma_D^h \cup \Gamma_N^h$

ζ_i^h fonctions de base éléments finis \mathbb{P}^1

ψ_i^h fonctions de base éléments finis \mathbb{P}^1 sur des triangles

φ_i^h fonctions de base éléments finis \mathbb{P}^1 sur le puits

Chapitre 1

Du problème physique vers le modèle numérique

1.1 Problème physique

1.1.1 Caractérisation des réservoirs

Un gisement est un milieu poreux formé d'un ou plusieurs réservoirs rocheux souterrains dont les pores contiennent des hydrocarbures liquides et/ou gazeux en général d'origine sédimentaire. La roche réservoir est poreuse et perméable, et la structure est limitée par des barrières imperméables qui piègent les hydrocarbures.

La disposition verticale des fluides contenus dans la structure est régie par la pesanteur. La figure 1.1 représente une coupe donnant un exemple de gisement d'hydrocarbures.

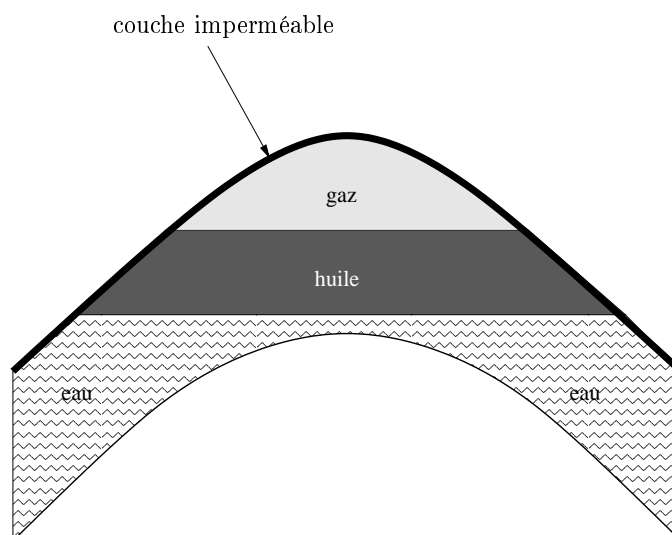


FIG. 1.1 – Coupe de gisement

Le but de l'étude d'un gisement consiste tout d'abord à déterminer les caractéristiques d'un réservoir (phase d'exploration), puis à établir un projet de développement pour optimiser la récupération des hydrocarbures. Les spécialistes gisements continuent à étudier le gisement pendant

toute la durée de vie du champ afin d'en tirer les informations nécessaires à son exploitation optimale. Il faut bien souligner que l'ingénieur gisement ne dispose que d'un nombre limité d'informations, qu'il doit interpréter au mieux afin d'obtenir une représentation la plus réaliste possible du gisement.

Caractérisation des roches Les réservoirs sont souvent hétérogènes, c'est-à-dire qu'ils sont composés de plusieurs couches de roches différentes, chacune caractérisée par sa hauteur, sa porosité, sa saturation en huile, en eau et en gaz, sa compressibilité et sa perméabilité.

- Porosité :

Si on considère un échantillon de roche, son volume total V_t est constitué d'un volume solide V_s , et d'un volume de pores V_p . La porosité ϕ (exprimée en pourcentage) est alors définie de la manière suivante :

$$\phi = \frac{V_p}{V_t}.$$

La porosité traduit la circulation des fluides se trouvant dans les pores : plus la porosité est grande, et plus le fluide s'écoule facilement. Pour donner un ordre de grandeur, on parlera de porosité faible si $\phi < 5\%$, et excellente si $\phi > 30\%$.

- Saturation :

On note respectivement V_o , V_w , et V_g les volumes en huile, eau et gaz. Les saturations S_o en huile, S_w en eau, et S_g en gaz sont définies par :

$$S_o = \frac{V_o}{V_p}, \quad S_w = \frac{V_w}{V_p}, \quad S_g = \frac{V_g}{V_p}.$$

Elles sont exprimées en pourcentage et leur somme est égale à 1.

- Compressibilité :

Le coefficient de compressibilité est défini par :

$$c_f = -\left(\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Il représente la variation du volume unitaire par rapport à la variation de pression, et a la dimension de l'inverse d'une pression.

- Perméabilité :

La perméabilité traduit l'aptitude de la roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. Elle est caractérisée par la loi de Darcy.

Considérons un échantillon de longueur dx et de section A , saturé d'un fluide de viscosité dynamique μ , traversé horizontalement par un débit Q ; en régime permanent, la pression amont est p , la pression aval est $p - dp$.

L'étanchéité est faite sur les faces latérales. S'il n'y a pas de réaction du fluide avec la roche, ce qui est en général le cas, on a :

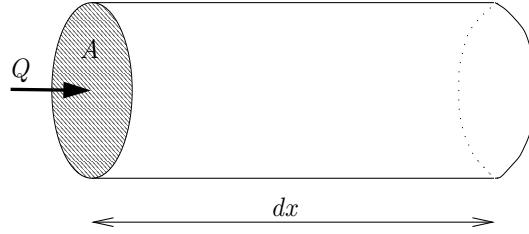


FIG. 1.2 – Echantillon considéré

$$Q = -A \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx},$$

avec k le coefficient de perméabilité indépendant du fluide considéré.

La perméabilité a la dimension d'une surface, et elle s'exprime usuellement en millidarcy (mD) :

$$1 \text{ mD} \approx 10^{-15} \text{ m}^2 \quad (1 \text{ darcy} = 10^{-12} \text{ m}^2).$$

La perméabilité peut être différente selon la direction considérée, on parle alors de milieu anisotrope.

Le coefficient de perméabilité k est un nombre réel dans le cas où le milieu est isotrope, ou un tenseur, alors noté $\overline{\overline{K}}$, dans le cas anisotrope, le plus souvent supposé diagonal :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1 La loi de Darcy découle en fait d'une loi plus générale, appelée la loi de perte de charge généralisée (cf [21]) :

$$dp = -\frac{\mu Q_m}{Ak\rho} \left(1 + \frac{\overline{u} Q_m}{\mu A} \right) dx, \quad (1.1)$$

où :

Q_m désigne le débit massique,

ρ la masse volumique du fluide,

\overline{u} est un paramètre caractérisant la forme des pores (de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-4} m).

La loi de perte de charge généralisée s'applique pour les gaz, ou encore les fluides à vitesse élevée. Pour les liquides dont la vitesse n'est pas très élevée, le terme $\frac{\overline{u} Q_m}{\mu A}$ est négligeable devant 1, et on peut supposer $\frac{Q_m}{\rho} = Q$, ce qui nous ramène à la loi de Darcy. Ces hypothèses sont raisonnables dans notre cadre d'étude et sont usuellement faites dans le milieu pétrolier.

1.1.2 Observation du milieu

On dispose de plusieurs techniques pour connaître les différentes caractéristiques d'un réservoir, à savoir sa géométrie, son architecture interne, ou encore la nature des roches dont il est constitué.

La sismique permet d'obtenir dans un premier temps une visualisation globale de la morphologie

des structures souterraines et des différentes couches qui composent le gisement.

Pour connaître plus précisément les caractéristiques des roches qui le constituent et les fluides présents dans le réservoir, on fore un puits d'exploration, à partir duquel on effectue plusieurs types d'analyses.

Les mesures sur carottes (*core analysis*) faites en laboratoire permettent d'obtenir une analyse PVT (pression-volume-température) des fluides et une caractérisation des propriétés des roches. Les diagraphies (*logging*), enregistrées pendant le forage à l'aide d'instruments descendus dans le trou au bout d'un câble, donnent des renseignements sur les caractéristiques des roches, notamment des données statiques (porosité, saturation des différents fluides...), et minéralogiques (teneur en argile, nature de la matrice poreuse...). Ces mesures s'étendent sur un rayon de l'ordre de quelques décimètres autour du puits, qui est déjà plus important que celui des carottes.

Indice de productivité du puits. Une information essentielle pour évaluer la valeur du puits est le potentiel de production du puits. Celui-ci est obtenu grâce à des essais de puits, qui consistent à mesurer les débits et les pressions des fluides en surface ou au fond du puits. Plus exactement on définit l'indice de productivité IP du puits comme le rapport du débit total du puits Q par la différence entre la pression moyenne \bar{p} dans le réservoir et la pression au point de soutirage p_{wf} :

$$IP = \frac{Q}{(\bar{p} - p_{wf})}. \quad (1.2)$$

L'IP d'un puits varie théoriquement de 0 pour un puits non producteur jusqu'à l'infini pour un puits aux caractéristiques idéalement bonnes. Pour donner un ordre de grandeur, on peut dire qu'un puits à huile très médiocre a un IP variant autour de $1 \text{ m}^3/\text{j}/\text{bar}$, alors qu'un "bon" puits aura un IP supérieur à 10, voire 100 ou 1000 $\text{m}^3/\text{j}/\text{bar}$.

La présence de fractures améliore considérablement l'indice de productivité d'un puits. En effet les hydrocarbures s'écoulent très facilement dans les fractures : la perméabilité peut varier de 1 mD dans les roches jusqu'à 10000 mD dans les fractures. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'ont été développées des techniques pour former des fractures artificielles autour des puits de production.

1.1.3 Projet de développement

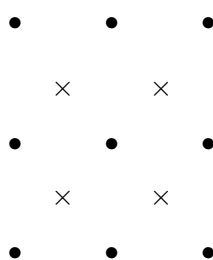
Grâce au schéma du gisement ainsi obtenu, l'ingénieur est en mesure d'établir un projet de développement qui a pour but d'optimiser la rentabilité du réservoir suivant le nombre de puits, leur emplacement, leur architecture, les procédés d'injection... Pour cela, il doit faire un certain nombre d'hypothèses en accord avec les données recueillies lors de la phase d'exploration.

Pour comparer la rentabilité en termes de production des différents types de puits envisagés, on utilise classiquement la notion d'indice de productivité (IP) du puits, ainsi que le coût de forage du puits, qui dépend de sa complexité, et de l'incertitude sur les données naturelles.

Jusqu'aux années 80, le choix de l'architecture des puits était moins complexe, puisque les compagnies pétrolières ne maîtrisaient que le forage de puits verticaux ou légèrement déviés. Il fallait alors construire un nombre assez important de puits, espacés de quelques centaines de

mètres, afin de couvrir l'ensemble du réservoir. Au bout d'un certain temps, la pression chute dans le réservoir jusqu'à atteindre en condition surface un équilibre avec la pression atmosphérique, et à ce moment-là, la production s'arrête. Ce premier temps de production est appelé la récupération primaire. On construit alors d'autres puits (puits d'injection), pour injecter un fluide peu coûteux, en général de l'eau, dans le but de maintenir la pression et de pousser le pétrole jusqu'aux puits de production.

On présente ici un schéma classique de projet de développement sur un réservoir :



où • désigne un puits producteur, et × un puits injecteur.

L'inconvénient évident de ce type de projet est la nécessité de construire une quantité importante de puits, dont le coût peut atteindre des millions de dollars par puits. C'est ce qui a motivé la réalisation de puits horizontaux, qui permettent de couvrir une partie beaucoup plus importante du réservoir, et de réduire le nombre de puits à construire.

L'intérêt des puits horizontaux est d'autant plus évident en off-shore. Par exemple, on a tout d'abord découvert un gisement, au-dessus duquel on a construit une plateforme, puis on a découvert un autre gisement 11 km plus loin. Il aurait été alors très coûteux de construire une deuxième plateforme, puis ensuite d'autres puits. Grâce aux nouvelles techniques de forage, on n'a besoin que d'un seul puits horizontal, qu'il suffit de prolonger pour arriver jusqu'au deuxième gisement. Le puits est alors seulement perforé sur la longueur sur laquelle il traverse l'un ou l'autre des deux réservoirs. C'est ainsi qu'a été construit le puits horizontal le plus long qui mesure 11 km.

1.1.4 Des puits complexes vers les puits intelligents

Pour encore améliorer la production de pétrole, de nouvelles configurations de puits ont ensuite été créées : on a construit des puits multi-branches, encore appelés puits complexes (voir figure 1.3).

Les techniques de forage de ce type de puits sont récentes, et l'implantation de puits complexes est une tendance dans l'avenir pour la production d'hydrocarbures.

Au cours de la production, il peut arriver que l'une des branches du puits complexe produise de l'eau, et non plus du pétrole. En général, la viscosité de l'eau est beaucoup plus faible que celle de l'huile, on risque alors de produire trop d'eau, ce qui est indésirable. Dans le cas de puits complexes, le problème qui se pose alors est de savoir de quelle branche provient l'eau. Ceci constitue tout l'objet de la recherche future : l'idée consiste à installer des capteurs dans chaque branche, afin de savoir ce qu'elle produit, et un système de vannes pour pouvoir fermer les branches qui produisent de l'eau. C'est ce qu'on appelle "les puits intelligents".

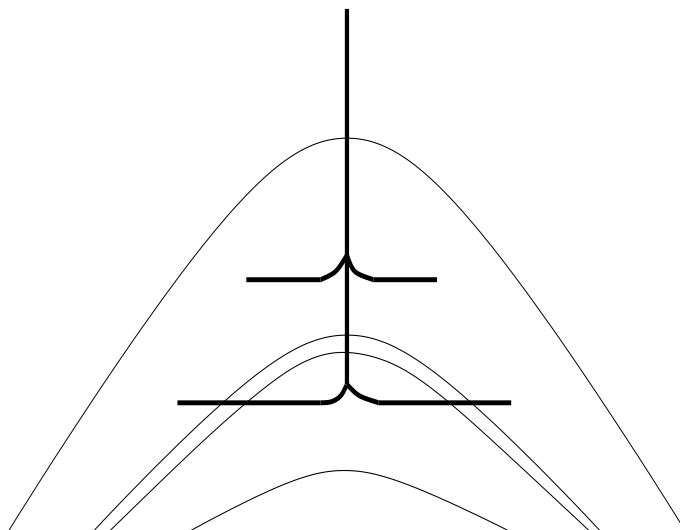


FIG. 1.3 – Exemple de puits complexe dans un réservoir hétérogène

1.2 Modèles mathématiques

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons à la modélisation de l'écoulement de l'huile pendant la récupération primaire, avec l'huile sous-saturée. Nous avons donc un seul fluide à considérer, l'huile, l'écoulement est monophasique.

Le modèle doit nous permettre d'obtenir une évaluation précise de l'écoulement dans et au voisinage du puits, selon son emplacement, mais aussi à plus long terme pour les puits complexes selon leur architecture ou encore la présence éventuelle de fractures, intersectées ou non avec le puits, dans le but final d'optimiser l'indice de productivité du puits.

Ce type de modèle peut s'appliquer à la modélisation de la récupération mais aussi aux tests de puits qui permettent de repérer les éventuelles fractures ou barrières présentes dans le gisement. Ainsi on dispose grâce aux essais de puits, et cette fois sur un rayon de l'ordre de quelques centaines de mètres autour du puits, de renseignements très importants sur le réservoir, notamment sur sa perméabilité.

Le domaine du réservoir Ω' est borné, et sa géométrie quelconque. On note $\Gamma_R = \partial\Omega'$ la frontière du réservoir, et Ω le domaine du réservoir, auquel on a retiré le puits. On notera d'autre part Γ_w la frontière du puits, et $\Gamma = \Gamma_R \cup \Gamma_w$.

Les conditions aux limites aux bords du réservoir sont des conditions de type Dirichlet ou Neumann, et seront précisées dans le paragraphe 1.2.2.

Les conditions aux limites aux bords des puits et des fractures sont des conditions non-locales, et sont décrites par les lois d'écoulement dans les puits (voir le paragraphe 1.2.3) et dans les fractures (l'écoulement darcéen avec la perméabilité des fractures, voir le paragraphe 1.2.4).

Par ailleurs, le réservoir peut être hétérogène, et dans ce cas-là, on le modélisera par plusieurs couches $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{N_R}$ homogènes ; il faudra alors établir des conditions de raccord à chaque interface entre deux couches.

1.2.1 Équation de diffusivité

Pour l'écoulement monophasique, nous négligeons l'effet gravitaire.

Dans le cas de l'huile, le mouvement du fluide est régi par la loi de Darcy valable aux faibles vitesses (nombre de Reynolds de pores < 1), qui modélise l'écoulement du fluide dans un milieu poreux à une échelle macroscopique suffisante pour pouvoir le considérer comme continu :

$$\vec{V} = \frac{\vec{Q}}{A} = -\frac{\overline{K}}{\mu} \nabla p, \quad (1.3)$$

où p est la pression, \vec{V} la vitesse de filtration, et \vec{Q} le débit.

On écrit ensuite l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) = 0. \quad (1.4)$$

On complète alors ce système par une équation d'état traduisant la compressibilité (en supposant que la roche est incompressible) :

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T. \quad (1.5)$$

Le coefficient de compressibilité c_f est supposé constant. L'équation ci-dessus peut être intégrée, et on obtient :

$$\rho = \rho_0 \exp[c_f(p - p_0)], \quad (1.6)$$

où ρ_0 est la masse volumique pour la pression de référence p_0 .

Remarque 2 *Le coefficient c_f a la dimension de l'inverse d'une pression, de sorte que l'exposant $c_f(p - p_0)$ de l'exponentielle est adimensionnel.*

On suppose que les propriétés du fluide sont constantes, que le tenseur de perméabilité \overline{K} est diagonal, et on obtient en injectant (1.6) et (1.3) dans (1.4), l'équation différentielle non linéaire suivante (voir [8]) :

$$\nabla(\overline{K} \cdot \vec{g} \text{rad } p) + c_f \overline{K} (\vec{g} \text{rad } p)^2 - (\phi \mu c_f) \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Dans le cas où le fluide mobile est l'huile, la compressibilité c_f est en général faible et constante, et les valeurs du gradient de pression sont aussi faibles, on peut donc négliger le deuxième terme de l'équation (1.7) et on obtient alors l'équation de diffusion classiquement étudiée dans le milieu pétrolier :

$$\nabla(\overline{K} \cdot \vec{g} \text{rad } p) - (\phi \mu c_f) \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1.8)$$

On impose par ailleurs une condition initiale traduisant l'équilibre hydrostatique :

$$p(x, 0) = p_0(x) \quad x \in \Omega. \quad (1.9)$$

1.2.2 Conditions aux bords du réservoir

On peut avoir des conditions aux limites différentes selon les parties de la frontière Γ du réservoir. En général, on impose deux types de conditions aux limites du réservoir :

- **condition de Dirichlet** : $p = p_D$ sur Γ_D ,

la pression est constante sur une partie Γ_D de la frontière Γ , et elle est égale à la pression initiale du réservoir : cela traduit le fait que la zone compressible atteint par exemple une zone à gaz ou un aquifère très actif qui représente une réserve d'énergie, et qui maintient ainsi une pression constante p_D au bord du réservoir.

- **condition de Neumann** : $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ sur Γ_N ,

avec n la normale extérieure à la frontière Γ_N ; cela traduit le fait que le flux est nul à la paroi : c'est le cas lorsque la zone compressible atteint une barrière imperméable, par exemple une faille, le toit ou le mur du réservoir, ...

1.2.3 Conditions aux puits

Nous considérerons dans le cadre de ce travail des puits rectilignes, cylindriques, de rayon r_w et de longueur L , et nous désignerons par Γ_w leur frontière ($\Gamma_w = [0, L] \times [0, 2\pi]$). Pour simplifier, nous supposons dans un premier temps que nous sommes en milieu isotrope : le coefficient de perméabilité k est alors un scalaire. Nous verrons à la fin du paragraphe (remarque 4) comment se généralisent les conditions aux puits pour un milieu anisotrope.

Nous commençons par définir les différentes quantités physiques qui vont intervenir dans les conditions aux limites sur le puits : la pression au fond du puits, la pression au point de soutirage, le débit total du puits, et le débit dans le puits (i.e. traversant une *cross-section* du puits).

Deux cas physiques peuvent se présenter :

- ou bien on impose la pression au point de soutirage, que l'on notera p_{wf} , et alors on cherche le débit total du puits, noté Q ,
- ou alors on impose un certain débit total Q et on cherche alors la pression p_{wf} au point de soutirage.

Dans les deux cas, on ne connaît pas non plus la distribution de débit le long du puits. En général, pour un puits horizontal, le débit est plus fort aux extrémités du puits, car l'écoulement est sphérique aux extrémités.

Les conditions de fonctionnement au puits peuvent être imposées en surface ou au fond. Si elles sont imposées en surface, cela nécessite de faire un calcul des pertes de charge entre le fond et la surface. Nous supposons donc que les pressions / débits sont imposés en condition fond.

Deux différentes lois d'écoulement peuvent être considérées dans le puits : la condition de conductivité infinie, ou la condition de conductivité finie.

Nous notons p_w la pression au puits, et nous la supposons indépendante de la variable angu-

laire $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$p(x, t) = p_w(l, t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \text{ si } x = (l, \theta), \text{ avec } l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.10)$$

Ainsi, la pression p_{wf} au point de soutirage s'écrit à l'instant t :

$$p_w(0, t) = p_{wf}(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.11)$$

et le débit total du puits Q est défini par :

$$Q(t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T]. \quad (1.12)$$

Le débit total Q à l'instant $t > 0$ est négatif lorsque le puits est en injection, positif lorsque le puits est en production.

Le débit dans le puits s'exprime, en négligeant l'effet de compressibilité, par la relation :

$$q_w(l, t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], \quad (1.13)$$

où $\Gamma_{w,l}$ désigne l'ensemble de la partie de la frontière du puits Γ_w située à droite du point axial l (voir figure 1.4). C'est le débit qui traverse à l'instant t la *cross-section* du puits au point l .

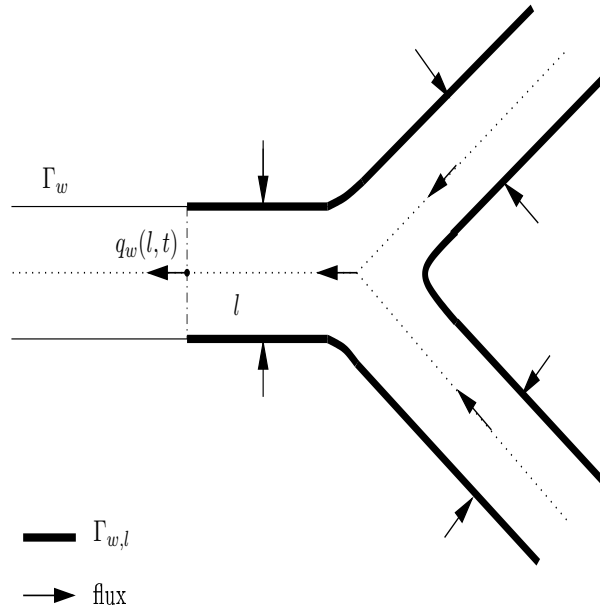


FIG. 1.4 – Partie $\Gamma_{w,l}$ de la frontière Γ_w du puits pour un puits complexe.

Cette partie du puits coïncide avec l'ensemble des branches du puits par où arrive le débit jusqu'au point axial l .

La contrainte sur les flux (1.12) correspond à l'équation (1.13) prise au point de soutirage (*production end*) : $Q(t) = q_w(L, t), t \in [0, T]$.

Nous allons maintenant donner les conditions aux limites sur le puits. Deux types de conditions peuvent intervenir : conductivité infinie et conductivité finie. La condition de conductivité infinie est une condition simplifiée.

Conductivité infinie : On suppose que la pression est constante le long du puits :

$$p_w(l, t) := p_{wf}(t) \quad l \in [0, L], t \in [0, T]. \quad (1.14)$$

Le modèle sur le puits est alors complété par les équations (1.10) et (1.12). Les conditions aux limites sur le puits s'écrivent alors, dans le cas de la conductivité infinie, et dans un réservoir isotrope :

$$\begin{cases} p(x, t) = p_{wf}(t) & \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \\ Q(t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.15)$$

Conductivité finie : Dans le cas de la conductivité finie, on ne suppose plus la pression constante le long du puits, mais on a une équation physique qui nous donne l'expression du gradient de la pression en fonction du flux dans le puits, et donc traduit les pertes de charge dans le puits.

Cette équation peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_w q_w^2(l, t), \quad t \in [0, T], \quad (1.16)$$

où q_w a été définie par (1.13).

Remarque 3 Dans les articles plus anciens, on prenait aussi en compte un coefficient α qui dépendait de la rugosité de la surface, et pouvait varier de 0 pour des surfaces très rugueuses à 0.25 pour des surfaces plus lisses. L'équation alors considérée s'écrivait sous la forme :

$$\frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_{w,\alpha} q_w^{2-\alpha}(l, t), \quad l \in [0, L], t \in [0, T].$$

Cette formule étant obtenue par expérimentation, la valeur du coefficient C_w n'est pas bien déterminée. Elle est encore discutée selon les auteurs. Elle dépend du rayon du puits, de la masse volumique, de la friction à la surface du puits (voir travaux de Govier et Aziz 1972 [36], Jain, 1976 [42], Ouyang et al 1996 [68], Dikken 1990 [24], ainsi que la thèse de V. R. Penmatcha [74]). Dans le cadre de cette thèse, nous adopterons la définition suivante pour la constante C_w :

$$C_w = \frac{f\rho}{\pi^2 r_w^5},$$

avec f le coefficient de friction, ρ la masse volumique, et r_w le rayon du puits.

La conductivité infinie est en fait un cas particulier de la conductivité finie (prendre $C_w = 0$ dans l'équation (1.16)).

La condition de conductivité finie est une condition non-linéaire, et non-locale, puisque la solution $p_w(l, \cdot)$ à la position l sur le puits dépend des solutions sur $\Gamma_{w,l}$, d'après (1.16) et la définition (1.13) de $q_w(l, \cdot)$. Pour un puits horizontal par exemple, la solution $p_w(l, \cdot)$ dépend des solutions $p_w(l', \cdot)$, pour l' variant de 0 à l sur l'axe du puits. Le fait que la condition soit non-locale est une difficulté supplémentaire à la non-linéarité.

Dans le cas de la conductivité finie, les conditions sur le puits s'écrivent alors, pour un réservoir isotrope :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, t) = p_w(l, t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \text{ si } x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ p_w(0, t) = p_{wf}(t), \quad t \in [0, T], \\ \frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_w q_w^2(l, t), \quad t \in [0, T], \\ q_w(l, t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], \\ Q(t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Remarque 4 Si on est en milieu anisotrope (la perméabilité s'exprime alors par un tenseur diagonal $\overline{\overline{K}}$), on introduit la notation suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} = \frac{1}{\tilde{k}} \overline{\overline{K}} \nabla p \cdot n, \quad \text{avec } \tilde{k} = (k_1 k_2 k_3)^{1/3}. \quad (1.18)$$

L'équation (1.12) s'écrit alors :

$$Q(t) = \frac{\tilde{k}}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} d\gamma(x), \quad (1.19)$$

De même, l'équation (1.13) devient :

$$q_w(l, t) = \frac{\tilde{k}}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} d\gamma(x), \quad t \in [0, T]. \quad (1.20)$$

Les deux systèmes d'équations (1.15) et (1.17) s'écrivent alors en milieu anisotrope en remplaçant les équations (1.13) par (1.20) et (1.12) par (1.19).

Les équations (1.15) pour la condition de conductivité infinie deviennent alors en milieu anisotrope :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, t) = p_{wf}(t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \\ Q(t) = \frac{\tilde{k}}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (1.21)$$

et les équations (1.17) pour la condition de conductivité finie deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x, t) = p_w(l, t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \text{ si } x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ p_w(0, t) = p_{wf}(t), \quad t \in [0, T], \\ \frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_w q_w^2(l, t), \quad t \in [0, T], \\ q_w(l, t) = \frac{\tilde{k}}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], \\ Q(t) = \frac{\tilde{k}}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} d\gamma(x), \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

1.2.4 Conditions sur les fractures

L'écoulement dans les fractures est modélisé comme dans les puits par un écoulement darcéen, en prenant la perméabilité de la fracture (voir [67, 73, 52]). On écrit donc une deuxième équation de diffusion pour la fracture F , qui est assimilée à une surface en $2D$ si le réservoir est en $3D$, ou à une ligne si le réservoir est en $2D$:

$$\Delta p(x, t) - \frac{\phi \mu c_f}{k_f} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = 0, \quad x \in F, t \in [0, T], \quad (1.23)$$

où k_f désigne le coefficient de perméabilité dans la fracture.

Les inconnues sont alors la pression et le débit au niveau de la fracture.

1.2.5 Modèle mathématique pour un réservoir homogène

On se place pour simplifier dans un premier temps dans le cadre d'un réservoir homogène et isotrope, sans fracture, et qui ne comprend qu'un seul puits. Le coefficient de perméabilité k ne dépend alors pas de $x \in \Omega$, et l'équation de diffusion (1.8) s'écrit plus simplement :

$$\Delta p(x, t) - \frac{\phi \mu c_f}{k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (1.24)$$

On suppose que le puits est rectiligne, et on reprend les mêmes notations que précédemment.

On suppose qu'on a une condition de Dirichlet sur une partie Γ_D de la frontière Γ du réservoir :

$$p = p_D \quad \text{sur } \Gamma_D \times [0, T], \quad (1.25)$$

et une condition de Neumann homogène sur $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \times [0, T]. \quad (1.26)$$

On impose comme condition initiale :

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.27)$$

Pour les conditions au puits, on se place dans l'hypothèse générale de conductivité finie, le système est donc complété par le système d'équations (1.17).

Nous avons donc à résoudre le modèle mathématique formé par les équations (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), (1.17).

Cas d'un réservoir anisotrope. Dans le cas d'un réservoir anisotrope, l'équation de diffusivité (1.24) se généralise sous la forme :

$$k_1 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_3^2} = \phi \mu c_f \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}, \quad (1.28)$$

pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, t \in [0, T]$.

On rajoute ensuite la même condition initiale (1.27), les mêmes conditions aux limites (1.25), (1.26), et les conditions aux puits en milieu anisotrope (1.22).

Remarque 5 On peut se ramener par un changement de variables à l'équation (1.24) avec pour perméabilité \tilde{k} (voir paragraphe 3.2.3).

1.2.6 Modèle mathématique pour un réservoir stratifié

Pour simplifier, on se place dans le cas d'un milieu isotrope, mais on peut facilement généraliser le modèle que nous allons établir à un milieu anisotrope, comme dans le paragraphe précédent.

On divise le réservoir hétérogène Ω en plusieurs domaines $\Omega_r, r = 1, \dots, N_R$, que l'on considère homogènes (d'après la référence [67]), de perméabilité k_r et de porosité ϕ_r .

Ces domaines peuvent par exemple correspondre aux strates dans le cas d'un réservoir stratifié.

Notation 6 Pour tout $r = 1, \dots, N_R$, on note Γ_r la frontière du domaine Ω_r . On désigne par Γ_{rs} la frontière commune aux domaines Ω_r et Ω_s :

$$\Gamma_{rs} = \Gamma_r \cap \Gamma_s, \quad \text{pour tout } s \in J = \{s = 1, \dots, N_R / \Gamma_r \cap \Gamma_s \neq \emptyset\}.$$

Enfin, on notera $\Gamma_{r,ext} = \Gamma_r \setminus \cup_{s \in J} \Gamma_{rs}$.

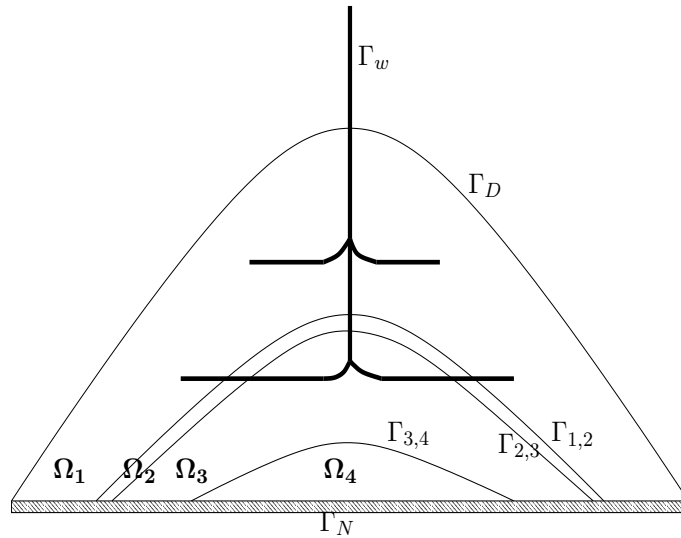


FIG. 1.5 – Application des notations pour la figure 1.3.

Pour chaque domaine Ω_r , on applique le modèle du paragraphe 1.2.5, on a donc le système d'équations pour tout $r = 1, \dots, N_R$:

$$\begin{cases} \Delta p_r(x, t) - \frac{\phi_r \mu c_f}{k_r} \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial t} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \Omega_r \times (0, T] \\ p_r = p_D & \text{sur } \Gamma_{r,D} \times [0, T] \\ \frac{\partial p_r}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{r,N} \times [0, T] \\ p_r(x, 0) = p_{0,r}(x) & \text{pour } x \in \Omega_r \end{cases} \quad (1.29)$$

avec $\Gamma_{r,D} = \Gamma_{r,ext} \cap \Gamma_D$ et $\Gamma_{r,N} = \Gamma_{r,ext} \cap \Gamma_N$.

Remarque 7 $\Gamma_{r,D}$ ou/et $\Gamma_{r,N}$ peuvent être égaux à l'ensemble vide.

Pour simplifier, on supposera par ailleurs que le réservoir ne comprend qu'un seul puits W , contenu dans une seule couche Ω_r . Pour chaque indice r_p tel que la couche Ω_{r_p} contient un puits, le système ci-dessus sera complété par les conditions aux puits (1.17).

Conditions aux interfaces Γ_{rs} Pour fermer le système, il reste à établir les conditions de raccord aux interfaces Γ_{rs} entre deux domaines Ω_r et Ω_s .

On écrit alors, pour tous $r, s = 1, \dots, N_R$ tels que $\Gamma_r \cap \Gamma_s \neq \emptyset$, les équations de continuité sur la pression et sur le flux :

$$p_r(x, t) = p_s(x, t) \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs}, t \in [0, T], \quad (1.30)$$

$$k_r \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial n_r} = -k_s \frac{\partial p_s(x, t)}{\partial n_s} \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs}, t \in [0, T], \quad (1.31)$$

avec n_r la normale à l'interface Γ_{rs} orientée vers l'extérieur de Ω_r , et n_s la normale à l'interface Γ_{rs} orientée vers l'extérieur de Ω_s .

Pour un milieu anisotrope, ces relations s'écrivent, en utilisant la notation (1.18) :

$$p_r(x, t) = p_s(x, t) \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs}, t \in [0, T], \quad (1.32)$$

$$\tilde{k}_r \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial(\overline{K}_r n_r)} = -\tilde{k}_s \frac{\partial p_s(x, t)}{\partial(\overline{K}_s n_s)} \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs}, t \in [0, T]. \quad (1.33)$$

1.2.7 Autre type de modèle pour modéliser le puits

Dans le modèle ci-dessus, le puits a été modélisé comme un “trou” dans le milieu poreux. Cette représentation est très proche de la physique, mais n'est pas en général utilisée par les ingénieurs du milieu pétrolier. Ces derniers préfèrent en effet négliger le “trou” dans Ω' formé par le puits, et modéliser le puits comme un terme source apparaissant dans l'équation de diffusion. Cela peut se justifier par la différence d'échelle entre la taille du puits et celle du réservoir. Le puits peut être alors considéré comme un point en 2D, ou comme une ligne en 3D.

Le modèle s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{\mu} \Delta p(x, t) - \phi c_f \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \mathbf{Q}(x, t) & \text{pour } (x, t) \in \Omega' \times [0, T], \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D \times [0, T], \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times [0, T], \\ p(x, 0) = p_0(x) & \text{pour } x \in \Omega'. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Le plus souvent, la fonction \mathbf{Q} est représentée par des masses de Dirac au puits, multipliées par un certain coefficient (Mohamad et Numbere [57], Liggett et Liu [54], Pecher [73], Oguztoreli et Wong [67]), d'autres auteurs, comme par exemple Kikani et Horne [46], la définissent par une fonction continue.

G. Chavent et J. Jaffré dans [18] ont démontré l'équivalence entre les deux modèles sous certaines hypothèses de régularité afin d'assurer que l'équation de diffusion est vérifiée dans Ω' tout entier quand on rajoute un terme source.

La résolution de ce modèle par méthodes intégrales n'est pas très intéressante, car le terme source amène une intégrale sur le domaine, ce qui enlève tout l'intérêt pour nous d'utiliser une méthode intégrale.

1.2.8 Modèle retenu

Dans le cadre de cette thèse, nous nous limiterons à un réservoir non fracturé.

Le modèle s'écrit alors, dans sa forme la plus générale, en prenant en compte la présence de N_W puits, dans un réservoir à géométrie quelconque, stratifié et anisotrope :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\overline{\overline{K}}_r \cdot \nabla p_r(x, t)) = \phi \mu c_f \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial t} \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega_r \times [0, T] \\ p_r = p_D \quad \text{sur } \Gamma_{r,D} \times [0, T] \\ \frac{\partial p_r}{\partial n_r} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{r,N} \times [0, T] \\ p_r(x, 0) = p_{0,r}(x) \quad \text{pour } x \in \Omega_r \\ \\ p_r = p_s \quad \text{sur } \Gamma_{rs} \times [0, T] \\ \tilde{k}_r \frac{\partial p_r}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} = -\tilde{k}_s \frac{\partial p_s}{\partial(\overline{\overline{K}}_s n_s)} \quad \text{sur } \Gamma_{rs} \times [0, T] \\ \\ p_r(x, t) = p_w(l, t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \text{ si } x = (l, \theta), \quad \begin{array}{l} l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ w = 1, \dots, N_W \end{array} \\ \\ \frac{\partial p_w(0, t)}{\partial l} = p_{wf}(t), \quad t \in [0, T], w = 1, \dots, N_W \\ \frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_w q_w^2(l, t), \quad l \in [0, L], t \in [0, T], w = 1, \dots, N_W \\ q_w(l, t) = \frac{\tilde{k}_r}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} d\gamma(x), \quad l \in [0, L], t \in [0, T], w = 1, \dots, N_W \\ Q_w(t) = \frac{\tilde{k}_r}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p_r(x, t)}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], w = 1, \dots, N_W. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Ce modèle est non-linéaire. Notons que la non-linéarité provient de la condition aux limites sur le puits, et non pas de l'équation aux dérivées partielles qui le gouverne, qui, elle, est linéaire. Si on choisit $C_w = 0$ dans le modèle ci-dessus, on travaille avec la condition de conductivité infinie sur le puits, et on a alors un modèle linéaire.

1.2.9 Cas particulier : écoulement permanent

Le modèle précédent (écoulement transitoire) modélise les essais de puits. Il est aussi très important pour les ingénieurs pétroliers de pouvoir estimer la productivité du puits. Comme on l'a rappelé dans le paragraphe 1.1.2, la productivité du puits est traduite par l'indice de productivité (IP) qui se calcule pour des temps très longs. À ces instants-là, l'écoulement est stabilisé, on parle d'écoulement permanent. Cela s'exprime mathématiquement par l'annulation de la dépendance en temps dans le modèle précédent.

Le modèle pour l'écoulement permanent s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\operatorname{div}(\overline{\overline{K}}_r \cdot \nabla p_r(x)) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega_r \\
p_r = p_D \quad \text{sur } \Gamma_{r,D} \\
\frac{\partial p_r}{\partial n_r} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{r,N} \\
p_r = p_s \quad \text{sur } \Gamma_{rs} \\
\tilde{k}_r \frac{\partial p_r}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} = -\tilde{k}_s \frac{\partial p_s}{\partial(\overline{\overline{K}}_s n_s)} \quad \text{sur } \Gamma_{rs} \\
p_r(x) = p_w(l) \quad \text{sur } \Gamma_w, \text{ si } x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\
\qquad \qquad \qquad w = 1, \dots, N_W \\
p_w(0) = p_{wf}, \quad w = 1, \dots, N_W \\
\frac{\partial p_w(l)}{\partial l} = C_w q_w^2(l), \quad l \in [0, L], w = 1, \dots, N_W \\
q_w(l) = \frac{\tilde{k}_r}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p_r(x)}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} d\gamma(x), \quad l \in [0, L], w = 1, \dots, N_W \\
Q_w = \frac{\tilde{k}_r}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p_r(x)}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} d\gamma(x), \quad w = 1, \dots, N_W.
\end{array} \right. \quad (1.36)$$

Dans le cadre de la thèse, seul le modèle d'écoulement permanent sera abordé numériquement dans les chapitres 3 à 5, mais les deux problèmes d'écoulement permanent et transitoire seront traités théoriquement respectivement dans les chapitres 2 et 6.

1.2.10 À propos des dimensions

Dans ce paragraphe, nous allons répertorier les dimensions de toutes les quantités physiques présentes dans le modèle en système S.I., et en même temps nous donnerons une idée des grandeurs physiques que peuvent prendre chacune de ces quantités. Cette partie complète la première section (1.1) de ce chapitre.

1.2.10.1 Pression

Commençons par la pression. La pression a pour dimension une force par unité de surface, soit :

$$\text{Pa} = \text{N} \times \text{m}^{-2} = (\text{kg} \times \text{m} \times \text{s}^{-2}) \times \text{m}^{-2} = \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2}. \quad (1.37)$$

Rappelons les correspondances entre diverses unités usuelles de pression :

Conversion de	en	multiplier par
atmosphere, standard (atm)	pascal (Pa)	1.01325 E+05
atmosphere, standard (atm)	kilopascal (kPa)	1.01325 E+02
atmosphere, technical (at)	pascal (Pa)	9.80665 E+04
atmosphere, technical (at)	kilopascal (kPa)	9.80665 E+01
bar (bar)	pascal (Pa)	1.0 E+05
bar (bar)	kilopascal (kPa)	1.0 E+02

Valeurs pour un écoulement Les valeurs de la pression p_D varient en fonction de la profondeur avec un rapport approximatif de 0.1 bar/m : par exemple, pour un réservoir de 2000 m de profondeur, la pression sera d'environ 200 bar, pour un réservoir de 1000 m de profondeur, la pression sera de 100 bar.

1.2.10.2 Viscosité dynamique

$$\text{Viscosité dynamique} = \text{N} \times \text{s} \times \text{m}^{-2} = \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-1} = \text{Pa} \times \text{s}. \quad (1.38)$$

Conversion de	en	multiplier par
centipoise (cP)	pascal seconde (Pa*s)	1.0 E-03
poise (P)	pascal seconde (Pa*s)	1.0 E-01

Valeurs de la viscosité Pour le pétrole, la viscosité peut varier de 1 cp à 10000 cp. Les huiles de viscosité 10000 cp sont des huiles très lourdes. Pour un gaz, la viscosité est de l'ordre de 10^{-2} , voire 10^{-1} cp.

1.2.10.3 Nombre de Reynolds

$$\text{nombre de Reynolds} = R_e = \frac{\rho v D_w}{\mu} = \text{adimensionnel}. \quad (1.39)$$

- ρ = masse volumique = kg/m³,
- v = vitesse du fluide = m/s,
- D_w = diamètre du puits = m,
- μ = viscosité dynamique = Pa × s.

$R_e < 2000$: écoulement laminaire,

$R_e > 4000$: écoulement turbulent,

Entre les deux : instable.

Calculons le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le puits. Il vient

$$v = \frac{Q}{\pi r_w^2} = \frac{10^{-3} \text{m}^3 \times \text{s}^{-1}}{\pi \times 10^{-2} \text{m}^2} = 10^{-1} \text{m} \times \text{s}^{-1}.$$

d'où

$$R_e = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{(10^3 \text{kg} \times \text{m}^{-3}) \times (10^{-1} \text{m} \times \text{s}^{-1}) \times 10^{-1} \text{m}}{10^{-3} \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-1}} = 10^4.$$

Nous sommes bien dans le domaine des écoulements turbulents.

1.2.10.4 Perméabilité

Nous avons vu que la perméabilité s'exprime en darcys, et que :

$$1 \text{ mD} = 10^{-15} \text{ m}^2 \quad (1 \text{ darcy} = 10^{-12} \text{ m}^2).$$

Conversion de	en	multiplier par
darcy	mètre carré (m ²)	9.869233 E-13

1.2.10.5 Porosité

$\phi = V_p/V_t$, quotient du volume des pores par le volume total : grandeur adimensionnelle.

1.2.10.6 Équation de diffusivité

$$\nabla(k \cdot \nabla p) + c_f k (\nabla p)^2 - (\phi \mu c_f) \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1.40)$$

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \text{Pa}^{-1}.$$

$$\nabla(k \cdot \nabla p) = \text{m}^{-1} \times \text{m}^2 \times \text{Pa} \times \text{m}^{-1} = \text{Pa}, \quad (1.41)$$

$$c_f k (\nabla p)^2 = \text{Pa}^{-1} \times \text{m}^2 \times (\text{Pa} \times \text{m}^{-1})^2 = \text{Pa}, \quad (1.42)$$

$$(\phi \mu c_f) \frac{\partial p}{\partial t} = \text{Pa} \times \text{s} \times \text{Pa}^{-1} \times \text{Pa} \times \text{s}^{-1} = \text{Pa}. \quad (1.43)$$

1.2.10.7 Équation de conductivité finie

Nous avons vu que l'équation de conductivité finie, qui relie la perte de charge au débit du puits, s'écrit :

$$\frac{\partial p_w}{\partial l}(l) = C_w q_w^2(l), \quad \forall 0 \leq l \leq L. \quad (1.44)$$

La constante C_w vérifie :

$$C_w = \frac{f \rho}{\pi^2 r_w^5}.$$

Cette constante C_w est de l'ordre de 1000 kg/m^8 . En effet :

1. f est le *coefficient de friction*, adimensionnel et de l'ordre de 10^{-4} .
2. ρ est la masse volumique, de l'ordre de 10^3 kg/m^3 .
3. r_w est le rayon du puits, de l'ordre de $0,1 \text{ m}$.
4. π^2 est adimensionnel et de l'ordre de 10 .

Par ailleurs, on sait qu'une pression p a pour dimension une force par unité de surface, soit :

$$\begin{aligned} (\text{masse} \times \text{accélération}) / \text{surface} &= \text{masse} \times (\text{longueur} / \text{temps} / \text{temps}) / \text{longueur}^2 \\ &= \text{kg} \times (\text{m} \times \text{s}^{-2}) \times \text{m}^{-2} = \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

Donc, le membre de gauche de (1.44) a pour dimension $\text{kg} \times \text{m}^{-2} \times \text{s}^{-2}$.

Par ailleurs, un débit a pour dimensions m^3/s , donc q_w^2 a pour dimension $\text{m}^6 \times \text{s}^{-2}$, multiplié par C_w , nous obtenons, pour la dimension du membre de droite de (1.44) :

$$(\text{m}^6 \times \text{s}^{-2}) \times (\text{kg} \times \text{m}^{-8}) = \text{kg} \times \text{m}^{-2} \times \text{s}^{-2}.$$

Les dimensions des deux membres coïncident bien.

1.2.10.8 Conclusion

Ce travail effectué sur les dimensions nous permet de valider que les équations de notre modèle ont bien un sens physique, et nous sera utile pour l'analyse théorique du modèle. Nous compléterons cette partie au fur et à mesure de nos besoins dans la suite du manuscrit.

1.3 Conclusion du chapitre

La modélisation du problème physique nous a permis d'obtenir deux modèles, l'un en régime permanent, l'autre en régime transitoire. Dans le cadre de cette thèse, nous nous limiterons à un réservoir sans fracture, et comprenant un seul puits.

Une des difficultés que l'on voit déjà apparaître est la condition non-linéaire et non-locale sur le puits (condition de conductivité finie). Nous montrerons dans le chapitre 2 que le modèle en régime permanent est bien posé, pour chacune des conditions (linéaire et non-linéaire) sur le puits. Le modèle linéaire en régime permanent sera implémenté numériquement dans les chapitres 3 à 5.

Le chapitre 6 montrera que le modèle en régime transitoire admet une unique solution pour la condition linéaire sur le puits.

Chapitre 2

Régime permanent

Avant d'aborder le modèle en régime transitoire, nous nous intéressons tout d'abord à l'étude théorique du modèle plus simple d'écoulement permanent. Nous rappelons que le modèle d'écoulement permanent est suffisant pour obtenir une estimation de la productivité du puits, le modèle transitoire ayant un autre champ d'applications, à savoir les tests de puits. Les modèles linéaires et non-linéaires seront traités séparément.

Dans ce chapitre, nous travaillerons seulement en milieu homogène isotrope.

2.1 Problème linéaire (conductivité infinie)

Nous nous attachons dans un premier temps à l'étude théorique du modèle d'écoulement permanent linéaire, qui correspond à la condition de conductivité infinie sur le puits. Le modèle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} (k \cdot \nabla p(x)) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \quad (i) \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D, \quad (ii) \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \quad (iii) \\ p = p_{wf} & \text{sur } \Gamma_w, \quad (iv) \\ Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x), & (v) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec p_{wf} constante.

On suppose que le domaine Ω vérifie toutes les hypothèses de régularité nécessaires, à savoir Ω est borné, de frontière Γ régulière, Ω étant localement d'un seul côté de Γ .

Pour simplifier, on suppose la perméabilité k scalaire. La première équation du modèle devient alors :

$$\Delta p(x) = 0 \text{ pour } x \in \Omega.$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1. le débit total Q est donné, et la pression p_{wf} au point de soutirage est inconnue,
2. ou la pression p_{wf} au point de soutirage est donnée, et le débit total Q est inconnu.

Le second cas, classique, sera traité dans le paragraphe 2.1.1, tandis que le premier cas, moins évident, sera étudié dans le paragraphe 2.1.2.

2.1.1 Pression sur le puits donnée

Dans le second cas, le modèle :

$$(I) \begin{cases} \Delta p(x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ p = p_{wf} & \text{sur } \Gamma_w, \end{cases} \quad (2.2)$$

qui n'est autre que le modèle (2.1) sans la condition (v) sur le débit total Q , est un modèle classique dont on connaît l'existence et l'unicité d'une solution p dans $H^1(\Omega)$. Le débit total Q sera calculé selon l'équation (2.1)-(v) une fois le modèle (2.2) résolu.

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire usuel :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx. \quad (2.3)$$

Pour montrer l'existence d'une solution au modèle (2.2), on utilise le changement de variable $u = p - p_{wf}$. Le modèle se réécrit alors :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) = p_D(x) - p_{wf} & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (2.4)$$

On introduit alors l'espace classiquement noté $H^1(\Delta, \Omega)$, défini par :

$$H^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.5)$$

Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Delta, \Omega)}$:

$$\|u\|_{H^1(\Delta, \Omega)} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

On utilise le théorème de relèvement suivant :

si $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, alors il existe un relèvement (non unique) $r \in H^1(\Delta, \Omega)$, et $\eta > 0$, tels que :

$$r(x) = \begin{cases} p_D(x) - p_{wf} & \text{sur } \Gamma_D, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_w, \end{cases}$$

et $\|r\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \leq C \|p_D - p_{wf}\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

On effectue le changement de variables : $t = u - r$, et on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \Delta t(x) = -\Delta r(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ t(x) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial t(x)}{\partial n} = -\frac{\partial r(x)}{\partial n} & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ t(x) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_w. \end{cases}$$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$a(t, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V, \quad (2.7)$$

où :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) ; v/\Gamma_D = 0, v/\Gamma_w = 0\},$$

et :

$$\begin{aligned} a(t, v) &= \int_{\Omega} \nabla t(x) \nabla v(x) dx, \\ L(v) &= - \int_{\Omega} \nabla r(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial r(x)}{\partial n} v(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

La continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ dans l'espace V sont immédiates. D'autre part, il est évident que la forme linéaire L est continue sur V . Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution t à la formulation variationnelle (2.7) pour r fixé. La formulation variationnelle (2.7) s'interprète en le problème aux limites, pour r fixé :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta t(x) & = -\Delta r(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ t(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial t(x)}{\partial n} & = -\frac{\partial r(x)}{\partial n} & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ t(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_w, \\ t \in H^1(\Omega). & & \end{array} \right.$$

Il en découle l'existence d'une solution u dans $H^1(\Omega)$ au modèle (2.4). Reste à montrer l'unicité de la solution.

Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions du modèle (2.4), on note u leur différence : $u = u_1 - u_2$. Il suffit alors de montrer que le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} & = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ u(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_w, \end{array} \right.$$

admet comme unique solution la solution nulle, ce qui est évident.

On a donc montré l'existence et l'unicité d'une solution u dans $H^1(\Omega)$ au modèle (2.4), qui implique l'existence et l'unicité d'une solution p au modèle (2.2).

Une fois le modèle (2.2) résolu, le débit total Q est calculé selon l'équation (2.1)-(v) :

$$Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x).$$

2.1.2 Débit total du puits donné

On se place maintenant dans le second cas : Q est donné, et on cherche la constante p_{wf} . On distinguera le cas où la donnée de Dirichlet p_D est constante, et le cas où p_D n'est pas constante.

2.1.2.1 Cas où p_D est constante :

Dans un premier temps, on suppose que la donnée p_D sur le bord de Dirichlet Γ_D est constante, ce qui est courant en pratique.

On effectue alors le changement de variable $u = p - p_D$ pour se ramener à une condition de Dirichlet homogène. Le modèle se réécrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = cte (= p_{wf} - p_D) & \text{sur } \Gamma_w, \\ Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

On se place dans l'espace :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_w} = cte \text{ où } cte \text{ est une constante inconnue}\}.$$

On munit V du produit scalaire usuel (2.3) dans $H^1(\Omega)$. V est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$, c'est donc un Hilbert.

La formulation variationnelle du problème (2.8) s'écrit :

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in V, \quad (2.9)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \\ L(v) = Q v|_{\Gamma_w}. \end{array} \right.$$

La forme bilinéaire a est de toute évidence continue dans $V \times V$, coercive sur V , et la forme linéaire L est continue dans V .

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'une solution u dans V à la formulation variationnelle (2.9). Cette formulation variationnelle s'interprète en le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u & = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u & = cte \text{ inconnue} & \text{sur } \Gamma_w, \\ Q & = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x), \\ u & \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Le modèle (2.8) admet donc une solution unique u dans $H^1(\Omega)$. On en déduit l'existence et l'unicité d'une solution p dans $H^1(\Omega)$ pour le modèle (2.1), dans le cas où p_D est constante.

2.1.2.2 Cas où p_D n'est pas constante :

Nous rappelons le modèle :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ p = p_{wf} & \text{sur } \Gamma_w, \\ Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x). \end{cases} \quad (2.10)$$

Ici on suppose que p_D n'est plus constante, Q est donné, et $p_{wf} \in \mathbb{R}$ inconnue. En pratique, le cas où p_D n'est pas constante correspond généralement au cas où p_D sera constante par morceaux sur Γ_D . Physiquement, cela signifie qu'on impose des conditions de pression différentes sur deux parties de la frontière Γ_D . Par exemple, on peut imposer $p = p_1$ sur $\Gamma_{D,1}$, et $p = p_2$ sur $\Gamma_{D,2}$, avec $p_1 \neq p_2$, $\Gamma_{D,1} \cup \Gamma_{D,2} = \Gamma_D$, et $\Gamma_{D,1} \cap \Gamma_{D,2} = \emptyset$. Concrètement, dans le cas d'un réservoir en forme de boîte, $\Gamma_{D,1}$ peut représenter le toit du réservoir, et $\Gamma_{D,2}$ le mur du réservoir.

Nous proposons ici deux démonstrations différentes, la première étant analogue à celle de la section 2.1.1 pour la pression donnée, et la deuxième reposant sur le principe de superposition. Ce principe sera l'un des éléments clés de la démonstration d'existence et d'unicité d'une solution au problème non-linéaire. Nous l'introduisons ici dans le cadre plus simple du modèle linéaire, afin de faciliter la compréhension du lecteur.

1. Première démonstration :

La première démonstration est analogue à celle effectuée dans la section précédente lorsque la pression p_{wf} au point de soutirage est donnée. Il suffit d'utiliser un théorème de relèvement :

si $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, alors il existe un relèvement (non unique) $r \in H^1(\Delta, \Omega)$, et $\eta > 0$, tels que :

$$r(x) = \begin{cases} p_D(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ 1 & \text{sur } \Gamma_w, \end{cases}$$

$$\text{et } \|r\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \leq C(\|p_D\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \|1\|_{H^{1/2}(\Gamma_w)}).$$

On effectue alors le changement de variables $u = p - r$. Le modèle devient alors :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -\Delta r(x) & \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = -\frac{\partial r(x)}{\partial n} & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ u(x) = p_{wf} - 1 = \text{cte inconnue} & \text{sur } \Gamma_w, \\ Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x) + \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial r(x)}{\partial n} d\gamma(x). \end{cases} \quad (2.11)$$

On se place dans l'espace :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_w} = \text{cte où cte est une constante inconnue}\}.$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que V , muni du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$, est un Hilbert. La formulation variationnelle du modèle (2.11) s'écrit alors :

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in V, \quad (2.12)$$

avec :

$$\begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \\ L(v) &= - \int_{\Omega} \nabla r(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial r(x)}{\partial n} v(x) d\gamma(x) \\ &+ \left(Q - \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial r(x)}{\partial n} d\gamma(x) \right) v|_{\Gamma_w}. \end{cases}$$

On peut facilement montrer que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue dans $V \times V$, coercive sur V , et que la forme linéaire L est continue sur V .

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution u à la formulation variationnelle (2.12) pour r fixé. Cette formulation variationnelle s'interprète en le problème aux limites :

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= -\Delta r(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= -\frac{\partial r(x)}{\partial n} \quad \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ u(x) &= \text{cte inconnue} \quad \text{pour } x \in \Gamma_w, \\ Q &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x) + \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial r(x)}{\partial n} d\gamma(x), \\ u &\in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Nous en déduisons l'existence d'une solution p au modèle (2.10). Reste à montrer l'unicité de la solution.

Soient p_1, p_2 deux solutions du modèle (2.10), on note u leur différence : $u = p_1 - p_2$. Il suffit de montrer que le modèle :

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ u(x) &= \text{cte inconnue} \quad \text{pour } x \in \Gamma_w, \\ 0 &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x), \end{cases} \quad (2.13)$$

admet comme unique solution la solution nulle.

La formulation variationnelle du modèle (2.13) s'écrit, pour $v \in V$:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial n} v(x) d\gamma(x),$$

soit :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = v|_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x),$$

or, d'après la dernière équation du modèle (2.13), on a :

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x)}{\partial n} d\gamma(x) = 0,$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = 0, \quad \text{pour tout } v \in V,$$

ce qui entraîne $u = 0$.

Nous avons bien démontré que le modèle (2.13) admet comme unique solution la solution nulle.

Nous en déduisons que le modèle (2.10) admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$, et donc le modèle (2.1) admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$, quand le débit total Q est donné. \square

2. Deuxième démonstration :

Nous proposons ici une autre démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution au modèle (2.1), basée sur le principe de superposition.

On remarque que la solution p du modèle (2.1) dépend linéairement de la constante p_{wf} . On procède en deux étapes :

1. on résout tout d'abord le modèle (2.2), qui n'est autre que le modèle (2.1) sans la condition (v) sur le débit total Q , en fonction de p_{wf} ,
2. puis on calcule la constante p_{wf} de façon à satisfaire la condition (2.1)-(v) sur le débit total Q .

Par linéarité, on peut découper le modèle (2.2) en deux morceaux :

$$(II') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } F_1 \text{ tel que :} \\ \Delta F_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_1 = p_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial F_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$(II'') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } F_2 \text{ tel que :} \\ \Delta F_2 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial F_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_2 = 1 \text{ sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Il est évident qu'alors :

$$p = F_1 + p_{wf} F_2. \quad (2.16)$$

Les modèles (II') et (II'') admettent une solution unique, respectivement F_1 et F_2 , chacune dans $H^1(\Omega)$. L'existence et l'unicité des solutions F_1 et F_2 dans $H^1(\Omega)$ sont obtenues par une démonstration analogue à celle effectuée précédemment pour le modèle (2.4). Pour F_1 , le relèvement est fait sur la fonction égale à p_D sur Γ_D , et pour F_2 , le relèvement est fait sur la fonction identiquement égale à 1 sur Γ_w .

L'existence et l'unicité de p dépendent alors de l'existence et de l'unicité de la constante p_{wf} , d'après (2.16). Or la constante p_{wf} peut être déterminée de manière unique de façon à satisfaire la condition de débit (2.1)-(v) :

$$Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x),$$

qui s'exprime en utilisant (2.16) comme :

$$Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_1(x)}{\partial n} d\gamma(x) + p_{wf} \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2(x)}{\partial n} d\gamma(x) = Q_1 + p_{wf} Q_2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{p_{wf} = \frac{Q - Q_1}{Q_2}}, \quad (2.17)$$

sous réserve que Q_2 soit non nul, ce qui est équivalent à ce que l'intégrale :

$$I_2 = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2(x)}{\partial n} d\gamma(x) (= \frac{\mu}{k} Q_2)$$

soit non nulle.

Montrons que I_2 est non nulle.

La solution F_2 admet une trace $\partial F_2 / \partial n$ parfaitement définie sur Γ . Notons g cette trace. Alors F_2 , solution de (II'') , est aussi l'unique solution du problème :

$$(II''V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \forall v \in V, \int_{\Gamma} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\gamma(x) = \langle g, v \rangle_{\Gamma}, \end{array} \right.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote la dualité $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$. Pour des données suffisamment régulières, cette dualité s'exprime par l'intégrale $\int_{\Gamma} g v d\gamma$. Mais comme g est la dérivée de F_2 , solution de (II'') , g vérifie $g = 0$ sur Γ_N . En outre, $v \in V$ vérifie $v|_{\Gamma_D} = 0$, de sorte que le second membre de $(II''V)$ se réduit à une dualité sur Γ_w . Choisissons maintenant pour v , F_2 solution de (II'') , donc de $(II''V)$, il vient :

$$\int_{\Gamma} |\nabla F_2|^2 d\gamma = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2}{\partial n} F_2 d\gamma = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2}{\partial n} d\gamma = I_2. \quad (2.18)$$

Si l'intégrale du second membre était nulle, alors $u \in V$ serait nul, puisque le premier membre de (2.18) est sur V une norme équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, mais u ne peut pas être nul, puisque cela contredirait $u|_{\Gamma_w} = 1$.

Donc l'intégrale I_2 est non nulle, et il s'ensuit que Q_2 est non nul.

On a vu que la solution p du modèle (2.2) s'exprime comme :

$$p = F_1 + p_{wf} F_2.$$

L'existence et l'unicité de F_1 et F_2 nous donnent l'existence et l'unicité de p pour p_{wf} fixée, et la condition au puits (2.1)-(v) nous permet de déterminer la constante p_{wf} de manière unique, puisque l'intégrale I_2 est non nulle. Ainsi nous avons démontré l'existence et l'unicité de p solution du modèle dans le cas de la conductivité infinie (2.1), lorsque le débit total Q est donné. \square

Cette démonstration est une alternative à la preuve que Guy Chavent et Jérôme Jaffré ont faite dans [18].

2.1.3 Conclusion

Nous avons démontré l'existence et l'unicité d'une solution au modèle (2.1) dans les cas où la pression au point de soutirage p_{wf} est donnée, et aussi dans le cas où le débit total Q est donné. Dans chacun des cas, il est facile de voir que la solution dépend linéairement des données, le modèle est alors bien posé. La démonstration par principe de superposition que nous avons introduite pour le cas où le débit total Q est donné aurait aussi pu être appliquée dans le cas où la pression p_{wf} au point de soutirage est connue. Cette méthode sera à nouveau utilisée pour le problème non-linéaire, qu'il nous reste à étudier dans la section suivante.

2.2 Problème non-linéaire (conductivité finie)

On considère le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p(x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, & (i) \\ p(x) = p_D(x) & \text{pour } x \in \Gamma_D, & (ii) \\ \frac{\partial p(x)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, & (iii) \\ p(x) = p_w(l) & \text{pour } x \in \Gamma_w, x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], & (iv) \\ p_w(0) = p_{wf}, & & (v) \\ \frac{\partial p_w(l)}{\partial l} = C_w q_w^2(l), & \text{pour } l \in [0, L], & (vi) \\ q_w(l) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x), & \text{pour } l \in [0, L], & (vii) \\ Q = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x) & (= q_w(L)), & (viii) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où Ω désigne le réservoir privé du puits, $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ désigne la frontière extérieure du réservoir, Γ_w la frontière du puits, et $\Gamma_{w,l}$ une partie de la frontière du puits ($\Gamma_{w,l}$ a été définie page 23).

Nous rappelons que la condition aux limites sur le puits est non-linéaire, et non-locale. La non-linéarité du modèle provient seulement de la condition aux limites, et non pas de l'EDP qui gouverne le modèle. On trouve une littérature abondante dans ce dernier cas. Pour le cas qui nous intéresse, nous disposons de l'analyse mathématique d'un modèle gouverné par le laplacien avec des conditions aux limites non-linéaires mais locales par Ruotsalainen et Wendland dans [76]. Dans notre cas, la condition aux limites non-linéaire est aussi non-locale, et nous ne pouvons pas utiliser les travaux de Ruotsalainen et Wendland.

Nous nous proposons donc de démontrer que notre problème (2.19) est bien posé.

On a supposé dans (2.19)-(iv) que la pression p_w sur le puits est constante par rapport à θ . On peut réécrire (2.19)-(vi) comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_w(l) = p_{wf} + g(l), \text{ car } p_{wf} = p_w(0) \text{ d'après (2.19) - (v),} \\ g(l) = C_w \int_0^l q_w^2(t) dt. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Comme pour le modèle de conductivité infinie, deux cas peuvent se présenter : ou bien on impose le débit total Q , ou bien on impose la pression au bout du puits : p_{wf} . Ici nous traiterons seulement le cas où la pression p_{wf} est donnée.

La définition de $q_w(t)$ peut se réécrire :

$$q_w(t) = \frac{kr_w}{\mu} \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial n}(t', \theta) d\theta \right) dt'. \quad (2.21)$$

On se retrouve ainsi avec le problème :

$$(\tilde{I}_g) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p \text{ tel que :} \\ \Delta p = 0 \text{ dans } \Omega, \\ p = p_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial p / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ p(x) = p_w(l) \text{ sur } \Gamma_w, (x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi]), \\ p_w(0) = p_{wf}, \\ p_w(l) = p_{wf} + g(l) \text{ sur } \Gamma_w, \\ g(l) = C_w \int_0^l q_w^2(t) dt \text{ sur } \Gamma_w, \\ q_w(t) = \frac{kr_w}{\mu} \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial n}(t', \theta) d\theta \right) dt'. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

De la même manière que pour le problème linéaire, nous allons utiliser le principe de superposition. Nous pouvons décomposer ce modèle en trois morceaux :

$$(II') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } F_1 \text{ tel que :} \\ \Delta F_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_1 = p_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_1 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad \text{Posons : } h_1 = \frac{\partial F_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.23)$$

$$(II'') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } F_2 \text{ tel que :} \\ \Delta F_2 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_2 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_2 = p_{wf} \text{ sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad \text{Posons : } h_2 = \frac{\partial F_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.24)$$

$$(II''') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } F_3 \text{ tel que :} \\ \Delta F_3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_3 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_3(l, \theta) = g(l) \text{ sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad \text{Posons : } h_3(l, \theta) = \frac{\partial F_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.25)$$

Nous introduisons l'opérateur Λ défini par :

$$\Lambda g = \frac{\partial F_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.26)$$

Avec cette notation, on peut écrire, pour le modèle (II''') , que :

$$\Lambda p_{wf} = \frac{\partial F_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.27)$$

Les frontières extérieures $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ et Γ_w étant disjointes, on peut montrer de manière classique que l'opérateur Λ (comme l'opérateur Dirichlet-Neumann) est d'ordre 1. Cela nous incite

à chercher la fonction g dans $H^1([0, L])$.

Pour le modèle (II'), nous n'avons pas affaire au même opérateur, puisque les conditions sur les frontières Γ_N et Γ_w sont homogènes, et la condition sur Γ_D ne l'est pas. Nous définissons alors un nouvel opérateur Λ_1 par :

$$\Lambda_1 p_D = \frac{\partial F_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (2.28)$$

Puisque Γ_w est disjoint de Γ_D , et F_1 est nul sur Γ_w , $\partial F_1 / \partial n$ est aussi régulier que la géométrie du puits le permet.

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}g(l) &= r_w \int_0^{2\pi} (\Lambda g)(l, \theta) d\theta, \\ \text{et } \bar{\Lambda}_1 p_D(l) &= r_w \int_0^{2\pi} (\Lambda_1 p_D)(l, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nous avons comme pour le modèle linéaire :

$$p = F_1 + F_2 + F_3, \quad \text{d'où } \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w} = h_1 + h_2 + h_3 \quad \text{et} \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3(g),$$

avec :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_1(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Lambda_1 p_D(x) d\gamma(x), \\ Q_2 &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Lambda p_{wf}(x) d\gamma(x), \\ Q_3(g) &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_3(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Lambda g(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Il en découle de même que :

$$q_w(t) = \frac{k}{\mu} \left(\underbrace{q_1(t) + q_2(t)}_{q_0(t)} + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right).$$

avec

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int_0^t \bar{\Lambda}_1(p_D)(t') dt', \\ q_2(t) &= \int_0^t \bar{\Lambda}p_{wf}(t') dt'. \end{aligned}$$

On notera de la même manière :

$$q_3(t) = \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt'.$$

Ainsi, g est solution de l'équation non linéaire :

$$g(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right)^2 dt = (Tg)(l) \quad (2.29)$$

Nous allons résoudre cette équation non linéaire par une méthode de point fixe. Nous allons pour cela utiliser le théorème de Schauder, mais les estimations que nous allons écrire n'auront de sens qu'une fois vérifiées les dimensions des deux membres de l'équation (2.29). Nous allons donc revenir sur l'étude des dimensions des grandeurs physiques de ce problème, déjà amorcée dans le chapitre 1, et nous allons la compléter afin de pouvoir traiter ce problème de point fixe.

2.2.1 Retour sur les dimensions

Nous nous attachons donc ici à l'étude des dimensions des deux membres de l'équation (2.29) :

$$g(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right)^2 dt = (Tg)(l).$$

Les dimensions du premier membre sont :

$$g = \text{Pa} = \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2}.$$

Pour le second membre, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' &= r_w \int_0^t \int_0^{2\pi} (\Lambda g)(l, \theta) d\theta dl = \int_{\Gamma_{w,t}} (\Lambda g)(x) d\gamma(x) \\ &= (\text{Pa} \times \text{m}^{-1}) \times \text{m}^2 \\ &= (\text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2}) \times \text{m}^2 = \text{kg} \times \text{s}^{-2}, \end{aligned}$$

et de même,

$$q_0 = \text{kg} \times \text{s}^{-2}.$$

Continuons

$$\begin{aligned} \frac{k}{\mu} &= \text{m}^2 \times (\text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-1})^{-1} = \text{kg}^{-1} \times \text{m}^3 \times \text{s}, \\ \frac{k^2}{\mu^2} &= \text{kg}^{-2} \times \text{m}^6 \times \text{s}^2. \\ C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right)^2 dt &= (\text{kg} \times \text{m}^{-8}) \times (\text{kg}^{-2} \times \text{m}^6 \times \text{s}^2) \times (\text{kg}^2 \times \text{s}^{-4}) \times \text{m}, \\ &= \text{kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2} = \text{Pa}. \end{aligned}$$

On obtient bien la dimension d'une pression, et $T(g) = \text{Pa}$.

2.2.1.1 Choix de la norme

Nous devons choisir une norme qui respectera les dimensions. Nous avons déjà mentionné notre intention de travailler dans $H^1([0, L])$, au vu de la régularité de l'opérateur Λ . La norme usuelle dans $H^1([0, L])$ est donnée pour une fonction $g \in H^1([0, L])$, par :

$$\|g\|_{H^1([0, L])} = \left(\|g\|_{L^2([0, L])}^2 + \left\| \frac{d}{dt}g(t) \right\|_{L^2([0, L])}^2 \right)^{1/2}.$$

Il faut vérifier que chacun des termes de droite a la même dimension pour la fonction Tg .

Commençons par regarder $\|Tg\|_{L^2([0,L])}$:

$$\begin{aligned}\|Tg\|_{L^2([0,L])}^2 &= \int_0^L (Tg(l))^2 dl \\ &= (\text{kg}^2 \times \text{m}^{-2} \times \text{s}^{-4}) \times \text{m} \\ &= \text{kg}^2 \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-4}.\end{aligned}$$

Maintenant, regardons $\|\frac{d}{dl}(Tg)(l)\|_{L^2([0,L])}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl}(Tg)(l) &= C_w \frac{k^2}{\mu^2} \left(q_0(l) + \int_0^l (\bar{\Lambda}g)(t)^2 dt \right)^2, \\ &= (\text{kg} \times \text{m}^{-8}) \times (\text{kg}^{-2} \times \text{m}^6 \times \text{s}^2) \times (\text{kg}^2 \times \text{s}^{-4}), \\ &= \text{kg} \times \text{m}^{-2} \times \text{s}^{-2}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\|\frac{d}{dl}(Tg)(l)\|_{L^2([0,L])}^2 &= \int_0^L \left| \frac{d}{dl}Tg(l) \right|^2 dl \\ &= (\text{kg}^2 \times \text{m}^{-4} \times \text{s}^{-4}) \times \text{m} \\ &= \text{kg}^2 \times \text{m}^{-3} \times \text{s}^{-4}.\end{aligned}$$

On constate que les deux normes n'ont pas la même dimension :

$$\begin{aligned}\|Tg\|_{L^2([0,L])}^2 &= \text{kg}^2 \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-4}, \\ \|\frac{d}{dl}(Tg)(l)\|_{L^2([0,L])}^2 &= \text{kg}^2 \times \text{m}^{-3} \times \text{s}^{-4},\end{aligned}$$

ce qui n'est pas surprenant, à cause de la dérivation de Tg par rapport à l dans la deuxième norme.

Pour homogénéiser les dimensions, nous allons alors travailler avec la norme notée $\|\cdot\|_1$ définie par :

$$\|u\|_1 = \left(\|u\|_{L^2([0,L])}^2 + L^2 \left\| \frac{d}{dl}u(l) \right\|_{L^2([0,L])}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.30)$$

Cette norme est équivalente à la norme classique dans $H^1([0, L])$, et le problème des dimensions est résolu.

L'espace $H^1([0, L])$, muni du produit scalaire associé à cette norme, est un Hilbert.

2.2.2 Estimations préliminaires

Avant de résoudre le problème de point fixe (2.29), nous allons faire quelques estimations préliminaires qui nous seront utiles par la suite.

Dans un premier temps, nous nous proposons d'estimer $\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right|$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right|^2 \leq \left(\int_0^t 1^2 dt' \right) \left(\int_0^t |(\bar{\Lambda}g)(t')|^2 dt' \right) = t \int_0^t |(\bar{\Lambda}g)(t')|^2 dt'.$$

Or

$$|(\bar{\Lambda}g)(t')|^2 = r_w^2 \left| \int_0^{2\pi} (\Lambda g)(t', \theta) d\theta \right|^2 \leq r_w^2 \left(\int_0^{2\pi} 1^2 d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} |(\Lambda g)(t', \theta)|^2 d\theta \right),$$

soit

$$|(\bar{\Lambda}g)(t')|^2 \leq 2\pi r_w^2 \left(\int_0^{2\pi} |(\Lambda g)(t', \theta)|^2 d\theta \right)$$

et

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right|^2 \leq 2\pi r_w^2 t \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} |(\Lambda g)(t', \theta)|^2 d\theta \right) dt'$$

soit encore

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right| \leq (2\pi r_w)^{1/2} \sqrt{t} \left(\int_{\Gamma_{w,t}} |(\Lambda g)(x)|^2 d\gamma(x) \right)^{1/2}. \quad (2.31)$$

ou :

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right| \leq (2\pi r_w)^{1/2} \sqrt{t} \|\Lambda g\|_{L^2(\Gamma_w)}.$$

Or comme l'opérateur Λ est d'ordre 1, et d'après l'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_{H^1([0,L])}$ dans $H^1([0,L])$, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\Lambda g\|_{L^2(\Gamma_w)} \leq (2\pi r_w)^{1/2} C \|g\|_1. \quad (2.32)$$

Donc :

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right| \leq (2\pi r_w) \sqrt{t} C \|g\|_1. \quad (2.33)$$

De même, on peut montrer que :

$$|q_2(t)| = \left| \int_0^t \bar{\Lambda}p_{wf}(t') dt' \right|$$

$$|q_2(t)| \leq (2\pi r_w) \sqrt{t} C \|p_{wf}\|_1. \quad (2.34)$$

et :

$$\begin{aligned} |q_1(t)| &= \left| \int_0^t \bar{\Lambda}_1(p_D)(t') dt' \right| \\ &\leq (2\pi r_w)^{1/2} \sqrt{t} C_1 \|p_D\|_{L^2(\Gamma_D)}. \end{aligned}$$

Remarque 8 Les constantes C et C_1 dépendent uniquement de la géométrie du domaine Ω des modèles (II') , (II'') , et (II''') , et non pas des paramètres physiques. On prendra le sup des deux, que l'on notera à nouveau C .

La dernière estimation sur $|q_1(t)|$ devient alors :

$$|q_1(t)| \leq (2\pi r_w)^{1/2} \sqrt{t} C \|p_D\|_{L^2(\Gamma_D)}. \quad (2.35)$$

2.2.3 Résolution du problème de point fixe

Maintenant que nous avons bien vérifié les dimensions, nous allons résoudre le problème de point fixe (2.29) par le théorème de point fixe de Schauder.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 9 *Notons :*

$$\begin{aligned} a &= (2\pi r_w)^{-1/2} \|p_D\|_{L^2(\Gamma_D)} + \|p_{wf}\|_1, \\ b &= \frac{\mu^2}{k^2 C_{geo} C_w}, \\ \text{avec } C_{geo} &= \left(\frac{92}{15}\right)^{1/2} (\pi r_w)^2 L^{5/2} C^2, \end{aligned}$$

et C la constante introduite page 48.

(i) Si $a \leq \frac{b}{4}$, alors le problème de point fixe admet une solution $g \in H^1([0, L])$.

(ii) Si de plus $a \leq \frac{b}{8}$, et $a \neq 0$, alors la solution est unique.

Preuve :

Nous allons tout d'abord montrer (i). Pour démontrer l'existence d'une solution, nous utilisons le théorème de Schauder :

Théorème de Schauder

Soit K un sous-ensemble fermé convexe d'un espace de Banach \mathcal{B} . Soit T une application continue de K dans lui-même, telle que l'image TK soit précompacte. Alors, T admet un point fixe, autrement dit il existe $x \in K$ tel que $Tx = x$.

Nous allons travailler dans l'espace de Hilbert $\mathcal{B} = H^1([0, L])$, et nous prendrons pour K une boule fermée $\bar{B}(0, M)$ de centre 0 et de rayon M , avec M réel à déterminer, qui est bien un sous-ensemble fermé convexe de l'espace de Hilbert $\mathcal{B} = H^1([0, L])$.

Nous devons donc montrer que :

- T est continue,
- $T(K)$ est précompacte,
- $T : K \rightarrow K$.

On va chercher g dans l'espace des fonctions $H^1([0, L])$.

• Montrons que l'image $T(K)$ est précompacte.

Les fonctions h_1, h_2, h_3 sont dans $L^2(\Gamma_w)$, et les fonctions q_1, q_2, q_3 sont donc dans $H^1([0, L])$, et comme $H^1(0, L) \hookrightarrow C^0[0, L]$, elles sont bornées et leurs carrés sont donc encore dans $H^1([0, L])$, et Tg est en fait une fonction de $H^2([0, L])$.

Plus précisément, on a $g \in {}_0H^1([0, L])$ (i.e. $g \in H^1([0, L])$ et $g(0) = 0$), et $Tg \in {}_0H^1([0, L]) \cap H^2([0, L])$.

Et comme l'inclusion de $H^2([0, L])$ dans $H^1([0, L])$ est compacte, on a bien que T est compact, et l'image $T(K)$ est précompacte.

• **Montrons que $\mathbf{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$.**

Autrement dit, nous voulons montrer que :
si $g \in \bar{B}(0, M)$, alors $Tg \in \bar{B}(0, M)$,
ou encore si $\|g\|_1 \leq M$, alors $\|Tg\|_1 \leq M$.

Commençons par estimer $\|Tg\|_{L^2([0, L])}$.

$$Tg(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right)^2 dt.$$

D'après les estimations (2.35) et (2.34) faites précédemment, on a :

$$|q_0(t)| \leq (2\pi r_w)^{1/2} \sqrt{t} C \left(\|p_D\|_{L^2(\Gamma_D)} + (2\pi r_w)^{1/2} \|p_{wf}\|_1 \right).$$

En utilisant la notation $a = (2\pi r_w)^{-1/2} \|p_D\|_{L^2(\Gamma_D)} + \|p_{wf}\|_1$, introduite dans le théorème 9, cette inégalité s'écrit :

$$|q_0(t)| \leq (2\pi r_w) \sqrt{t} C a. \quad (2.36)$$

Il s'ensuit d'après l'estimation (2.33), que :

$$\left| q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right| \leq (2\pi r_w) \sqrt{t} C (a + \|g\|_1), \quad (2.37)$$

et :

$$|Tg(l)| \leq 2 C_w \frac{k^2}{\mu^2} (\pi r_w)^2 l^2 C^2 (a + \|g\|_1)^2,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|Tg\|_{L^2([0, L])}^2 &= \int_0^L |Tg(l)|^2 dl \\ &\leq 4 C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} (\pi r_w)^4 \frac{L^5}{5} C^4 (a + \|g\|_1)^4. \end{aligned}$$

Maintenant procédons aux estimations de $\left\| \frac{d}{dl}(Tg)(l) \right\|_{L^2([0, L])}$.

Nous avons :

$$\frac{d}{dl}(Tg)(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \left(q_0(l) + \int_0^l (\bar{\Lambda}g)(t) dt \right)^2,$$

et d'après (2.37), il vient :

$$\left| \frac{d}{dl}(Tg)(l) \right| \leq C_w \frac{k^2}{\mu^2} (2\pi r_w)^2 l C^2 (a + \|g\|_1)^2,$$

et :

$$\left\| \frac{d}{dl}(Tg)(l) \right\|_{L^2([0, L])}^2 \leq C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} (2\pi r_w)^4 \frac{L^3}{3} C^4 (a + \|g\|_1)^4.$$

On obtient alors l'estimation suivante :

$$\|Tg\|_1 \leq C_w C_{geo} \frac{k^2}{\mu^2} (a + \|g\|_1)^2,$$

avec : $C_{geo} = \left(\frac{92}{15}\right)^{1/2} (\pi r_w)^2 L^{5/2} C^2$.

En utilisant la notation b introduite dans le théorème 9, l'inégalité s'écrit :

$$\|Tg\|_1 \leq \frac{1}{b} (a + \|g\|_1)^2, \quad (2.38)$$

Nous rappelons que nous voulons montrer que l'image TK est toujours dans K , i.e. que : si $\|g\|_1 \leq M$, alors $\|Tg\|_1 \leq M$, avec $M \in \mathbb{R}$ à déterminer.

D'après l'estimation (2.38), il suffit pour cela de trouver M tel que :

$$\frac{1}{b} (a + M)^2 \leq M, \quad (2.39)$$

ou encore :

$$(a + M)^2 - bM \leq 0. \quad (2.40)$$

On s'intéresse alors au trinôme du second degré :

$$x^2 + (2a - b)x + a^2 = 0. \quad (2.41)$$

Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ab.$$

Dès que $b \geq 4a$, le discriminant est positif. Les solutions du trinôme sont :

$$x_- = \frac{b - 2a - \sqrt{b^2 - 4ab}}{2}, \quad (2.42)$$

$$x_+ = \frac{b - 2a + \sqrt{b^2 - 4ab}}{2}. \quad (2.43)$$

On en déduit que : si $x_- \leq \|g\|_1 \leq x_+$, alors $\|Tg\|_1 \leq x_+$.

Cela n'est pas suffisant pour que T conserve la boule $\bar{B}(0, x_+)$. Regardons alors ce qui se passe quand $\|g\|_1 \leq x_-$ (on a bien $x_- \geq 0$).

Si $\|g\|_1 \leq x_-$, alors d'après (2.38), on a :

$$\|Tg\|_1 \leq \frac{1}{b}(a + x_-)^2.$$

Pour conclure, il faudrait montrer que $\|Tg\|_1 \leq x_+$, i.e. :

$$(a + x_-)^2 \leq bx_+.$$

Or, x_- est racine du trinôme (2.41), et donc :

$$(a + x_-)^2 = bx_-,$$

de sorte que :

$$bx_- \leq bx_+.$$

Cette inégalité est vérifiée, puisque $x_- \leq x_+$, et $b > 0$.

Conclusion : Nous avons donc montré, que dès que $b \geq 4a$, $\|g\|_1 \leq x_+$ entraîne $\|Tg\|_1 \leq x_+$. L'opérateur T conserve donc la boule fermée $\bar{B}(0, x_+)$. On prend donc $M = x_+$.

• **Montrons que T est continue.**

Pour démontrer le théorème de point fixe, il nous reste à montrer la continuité de T . En fait, nous allons démontrer que T est lipschitzien (ce qui entraîne T continu).

On veut montrer qu'il existe une constante $\gamma = \gamma(x_+) > 0$ telle que :

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_1 \leq \gamma \|g_1 - g_2\|_1,$$

pour tous $g_1, g_2 \in \bar{B}(0, x_+)$.

Posons

$$Fg(t) = \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g(t') dt' \right)^2. \quad (2.44)$$

Alors l'opérateur T s'écrit

$$Tg(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l Fg(t) dt,$$

et donc :

$$Tg_1(l) - Tg_2(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \int_0^l (Fg_1(t) - Fg_2(t)) dt,$$

avec :

$$\begin{aligned} Fg_1(t) - Fg_2(t) &= \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g_1(t') dt' \right)^2 - \left(q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}g_2(t') dt' \right)^2 \\ &= \left(\int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 - g_2)(t') dt' \right) \left(2q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 + g_2)(t') dt' \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

D'après (2.33) :

$$\left| \int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 - g_2)(t') dt' \right| \leq (2\pi r_w) C \sqrt{t} \|g_1 - g_2\|_1,$$

et :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 + g_2)(t') dt' \right| &\leq (2\pi r_w) C \sqrt{t} \|g_1 + g_2\|_1, \\ &\leq (2\pi r_w) C \sqrt{t} (\|g_1\|_1 + \|g_2\|_1). \end{aligned}$$

D'après ce qui précède et d'après l'estimation (2.36), la fonction intégrante dans Tg admet l'estimation :

$$|Fg_1(t) - Fg_2(t)| \leq (2\pi r_w)^2 C^2 t \|g_1 - g_2\|_1 \times (2a + \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1). \quad (2.46)$$

Il s'ensuit :

$$|Tg_1(l) - Tg_2(l)| \leq 2C_w \frac{k^2}{\mu^2} l^2 (\pi r_w)^2 C^2 (2a + \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1) \|g_1 - g_2\|_1,$$

et :

$$\begin{aligned} \|Tg_1 - Tg_2\|_{L^2([0,L])}^2 &= \int_0^L (Tg_1(l) - Tg_2(l))^2 dl \\ &\leq 4C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} \frac{L^5}{5} (\pi r_w)^4 C^4 (2a + \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1)^2 \|g_1 - g_2\|_1^2. \end{aligned}$$

Et comme $g_1, g_2 \in \bar{B}(0, x_+)$, on a :

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_{L^2([0,L])}^2 \leq \gamma_0^2 \|g_1 - g_2\|_1^2, \quad (2.47)$$

avec :

$$\gamma_0^2 = C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} \frac{L^5}{5} (2\pi r_w)^4 C^4 (a + x_+)^2. \quad (2.48)$$

Il nous reste maintenant à démontrer qu'il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que :

$$\left\| \frac{d}{dl}(Tg_1)(l) - \frac{d}{dl}(Tg_2)(l) \right\|_{L^2([0,L])} \leq \gamma_1 \|g_1 - g_2\|_1.$$

Nous avons :

$$\frac{d}{dl}(Tg)(l) = C_w \frac{k^2}{\mu^2} \left(q_0(l) + \int_0^l (\bar{\Lambda}g)(t) dt \right)^2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dl}(Tg_1)(l) - \frac{d}{dl}(Tg_2)(l) \\ &= C_w \frac{k^2}{\mu^2} \left(\int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 - g_2)(t') dt' \right) \left(2q_0(t) + \int_0^t \bar{\Lambda}(g_1 + g_2)(t') dt' \right) \\ &= C_w \frac{k^2}{\mu^2} (Fg_1(l) - Fg_2(l)). \end{aligned}$$

D'après (2.46), il est immédiat que :

$$\left| \frac{d}{dl}(Tg_1)(l) - \frac{d}{dl}(Tg_2)(l) \right| \leq C_w \frac{k^2}{\mu^2} (2\pi r_w)^2 C^2 l \|g_1 - g_2\|_1 \times (2a + \|g_1\|_1 + \|g_2\|_1),$$

et :

$$\left\| \frac{d}{dl}(Tg_1)(l) - \frac{d}{dl}(Tg_2)(l) \right\|_{L^2([0,L])}^2 \leq \gamma_1^2 \|g_1 - g_2\|_1^2, \quad (2.49)$$

avec :

$$\gamma_1^2 = \frac{4}{3} C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} (2\pi r_w)^4 L^3 C^4 (a + x_+)^2. \quad (2.50)$$

Les relations (2.47) et (2.49) impliquent alors que :

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_1^2 \leq (\gamma_0^2 + L^2 \gamma_1^2) \|g_1 - g_2\|_1^2.$$

Or :

$$\gamma_0^2 + L^2 \gamma_1^2 = \frac{368}{15} C_w^2 \frac{k^4}{\mu^4} L^5 (\pi r_w)^4 C^4 (a + x_+)^2.$$

Notons $C'_{geo} = \left(\frac{368}{15} \right)^{1/2} L^{5/2} (\pi r_w)^2 C^2 = 2C_{geo}$, on a alors :

$$\|Tg_1 - Tg_2\|_1 \leq \gamma \|g_1 - g_2\|_1, \quad (2.51)$$

avec :

$$\gamma = 2C_w C_{geo} \frac{k^2}{\mu^2} (a + x_+). \quad (2.52)$$

Ainsi on a montré que l'opérateur T est lipschitzien, et donc continu.

Conclusion : L'opérateur T est compact, continu et conserve la boule fermée $\bar{B}(0, x_+)$, dès que $4a \leq b$. Le théorème de Schauder nous donne alors l'existence d'un point fixe $g = Tg$, dans la boule $\bar{B}(0, x_+)$. Ainsi nous avons montré (i).

Unicité : Une condition suffisante pour avoir l'unicité de la solution est que l'opérateur T soit lipschitzien contractant. Pour cela, il faudrait que la constante de continuité γ soit strictement inférieure à 1. Essayons donc d'estimer cette constante.

En utilisant l'expression (2.43) de x_+ , on peut réécrire la constante γ comme :

$$\gamma = 2 \frac{1}{b} (a + x_+) = 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{b}}.$$

Il est alors évident que la constante γ est supérieure ou égale à 1. L'opérateur T n'est donc pas contractant, et on ne peut obtenir l'unicité sous l'hypothèse $4a \leq b$.

Nous allons montrer que nous pouvons obtenir l'unicité en élargissant l'hypothèse sur $4a \leq b$. Si au lieu de demander (2.39), on demande un peu plus, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{b} (a + M)^2 \leq \frac{M}{2},$$

alors en notant $b^* = \frac{b}{2}$, on obtient l'inégalité :

$$(a + M)^2 \leq b^* M,$$

qui donne lieu à la résolution du trinôme du second degré :

$$x^2 + (2a - b^*)x + a^2 = 0.$$

On peut alors reprendre les calculs faits précédemment en remplaçant b par b^* . Le discriminant du polynôme est positif dès que $b^* \geq 4a$, i.e. dès que $b \geq 8a$. La plus grande racine devient alors :

$$x_+^* = \frac{b^* - 2a + \sqrt{b^{*2} - 4ab^*}}{2}. \quad (2.53)$$

On peut démontrer en suivant la même démarche que précédemment que T conserve la boule fermée $\bar{B}(0, x_+^*)$.

Maintenant revenons à la constante de continuité. Elle s'écrit alors en fonction de x_+^* , de a , et de b^* :

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \frac{1}{b^*} (a + x_+^*) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{b^*}} \right). \end{aligned}$$

Regardons si la constante γ^* est strictement inférieure à 1 :

$$\begin{aligned}\gamma^* < 1 &\iff 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{b^*}} < 2, \\ &\iff -1 < 1 - \frac{4a}{b^*} < 1, \\ &\iff -2 < -\frac{4a}{b^*} < 0.\end{aligned}$$

Par définition, a est positif ou nul, et $b^* > 0$ (car $\mu \neq 0$). L'inégalité de droite est donc vérifiée dès que $a \neq 0$. L'inégalité de gauche est équivalente à $b^* > 2a$. Cette inégalité est satisfaite à condition que a soit différent de 0, puisque nous avons supposé $b^* \geq 4a$.

La constante γ^* est strictement inférieure à 1, si $a \neq 0$, et $b \geq 8a$.

L'opérateur T est donc lipschitzien contractant, si $a \neq 0$, et si $b \geq 8a$. Ceci nous donne l'unicité, et clôt la démonstration de (ii). \square

Remarque 10 *L'hypothèse que $4a \leq b$ suffit pour avoir l'existence d'une solution au problème de point fixe, mais pas l'unicité. Pour avoir l'unicité, il faut supposer que $8a \leq b$, et que $a \neq 0$, i.e. $p_D \neq 0$ ou $p_{wf} \neq 0$.*

Remarque 11 *La condition que b est suffisamment grand par rapport à a peut être donnée par l'hypothèse que le coefficient de friction f apparaissant dans la constante C_w est suffisamment petit :*

$$C_w = \frac{f\rho}{\pi^2 r_w^5}.$$

Soulignons que pour le problème linéaire (problème de conductivité infinie), le coefficient de friction est supposé nul. L'hypothèse que ce coefficient soit petit est alors tout à fait plausible physiquement.

Remarque 12 *La solution g dépend continûment des données p_D et p_{wf} (d'après le théorème de Banach), donc le problème (2.19) est bien posé, dans le cas où p_{wf} est donnée.*

Remarque 13 *Nous aimerions pouvoir lever ou améliorer la condition sur le coefficient de friction f et les données p_{wf} et p_D en utilisant pour la démonstration un autre théorème de point fixe, par exemple le théorème de Schaefer. Pour le moment, nous n'avons pas réussi à conclure.*

2.3 Conclusion du chapitre

Nous avons réussi à démontrer dans ce chapitre l'existence et l'unicité d'une solution au modèle d'écoulement permanent, dans le cas linéaire pour chacun des cas où soit la pression sur le puits est donnée, soit le débit total du puits est donné, et dans le cas non-linéaire pour une pression donnée au bout du puits.

Nous n'avons pas traité le cas où le débit total du puits est donné pour le non-linéaire. Le débit étant directement lié à la pression au puits, il y a de fortes raisons de penser que le modèle (2.19) avec Q donné admet lui-aussi une solution unique. La démonstration mathématique

constitue une des perspectives de la thèse.

Dans le chapitre 6, nous adapterons les démarches utilisées ici pour le cas plus général d'un écoulement transitoire (i.e. dépendant du temps).

Mais auparavant, comme nous savons maintenant que le modèle d'écoulement permanent admet une unique solution, nous allons mettre en œuvre une nouvelle méthode d'équations intégrales pour résoudre le modèle linéaire d'écoulement permanent.

Chapitre 3

Formulations intégrales pour le régime permanent

Ce chapitre a pour but d'écrire la formulation intégrale du modèle d'écoulement permanent linéaire (condition de conductivité infinie). Il sera organisé de la façon suivante : tout d'abord nous discuterons différentes formulations intégrales, puis une fois une représentation intégrale choisie, nous l'appliquerons successivement : à un réservoir homogène isotrope, à un réservoir homogène anisotrope, et enfin à un réservoir multi-couches. Nous montrerons que la représentation intégrale choisie est bien équivalente au modèle EDP d'écoulement permanent. Ensuite, nous discuterons les méthodes numériques pour résoudre les équations intégrales formulées. Enfin, la dernière partie de ce chapitre sera consacrée à des tests numériques validant la formulation choisie et la comparant avec d'autres formulations intégrales.

3.1 Formulations intégrales : rappels

Pour simplifier, la discussion des formulations intégrales se fera dans le cadre d'un milieu homogène, isotrope, et comprenant un seul puits. Les constantes physiques (perméabilité et viscosité) sont supposées égales à 1. On travaille donc avec le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p(x) & = 0 & \text{pour } x \in \Omega \\ p & = p_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial p}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ p & = p_w & \text{sur } \Gamma_w \\ Q & = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x)}{\partial n} d\gamma(x). \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On suppose que l'ensemble des points irréguliers (coins, arêtes) des frontières Γ_D , Γ_N , et Γ_w , est de mesure nulle.

3.1.1 Généralités

On se réfère à Nédélec ([63], [64]), Kress [48], Bonnet [12], pour toutes les notions rappelées ici.

On considère ici un ouvert Ω_i de \mathbb{R}^n , de frontière $\partial\Omega_i = \Gamma$. On définit la normale n extérieure à Ω_i . On cherche à résoudre l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0 \quad x \in \Omega_i,$$

par des équations intégrales.

Pour cela, il nous faut choisir une formulation intégrale. Choisir une formulation intégrale, c'est choisir un prolongement de la solution cherchée dans le domaine complémentaire, ici $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \Omega_i$.

On note G la fonction de Green (ou noyau de Green) associée à l'équation de Laplace :

$$G(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \quad \text{en 3D.}$$

Sa dérivée normale vérifie, pourvu que la frontière Γ soit suffisamment régulière, la **relation de l'angle solide** :

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y} d\gamma(y) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega_i, \\ -\frac{1}{2}, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in \Omega_e. \end{cases} \quad (3.2)$$

Avant de passer aux représentations intégrales, nous allons tout d'abord rappeler quelques propriétés des potentiels de simple couche et de double couche.

Potentiel de simple couche :

On sait que le potentiel de simple couche défini par :

$$L\psi(x) = \int_{\Gamma} \psi(y) G(x - y) d\gamma(y), \quad x \notin \Gamma,$$

est continu à la traversée de Γ . Par contre, sa trace normale γ_1 vérifie les relations de saut :

$$\gamma_1^-(L\psi)(x) = \frac{\psi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_x} d\gamma(y), \quad (3.3)$$

$$\gamma_1^+(L\psi)(x) = -\frac{\psi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \psi(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_x} d\gamma(y), \quad (3.4)$$

avec γ_1^- la trace normale intérieure et γ_1^+ la trace normale extérieure.

Potentiel de double couche :

Le potentiel de double couche est défini par :

$$M\varphi(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad x \notin \Gamma.$$

Il vérifie les relations de saut à la traversée de Γ :

$$\gamma_0^-(M\varphi)(x) = -\frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad (3.5)$$

$$\gamma_0^+(M\varphi)(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad (3.6)$$

avec γ_0^- la trace intérieure, et γ_0^+ la trace extérieure.

Sa dérivée normale est continue à la traversée de Γ .

Maintenant nous allons rappeler les représentations intégrales pour un domaine intérieur, puis un domaine extérieur, et enfin pour la réunion des deux, avant d'appliquer ces représentations à notre modèle.

Problème intérieur :

On cherche à résoudre :

$$\Delta u(x) = 0 \quad x \in \Omega_i.$$

• On sait que la solution généralement suffisamment régulière du problème de Laplace dans un domaine Ω_i de frontière Γ régulière peut s'écrire en fonction de ses traces selon la formule de représentation, pour $x \in \Omega_i$:

$$u(x) = L \frac{\partial u}{\partial n}(x) - Mu(x),$$

avec L et M les potentiels de simple et double couche définis plus haut.

• Dans le domaine extérieur, on a :

$$0 = L \frac{\partial u}{\partial n}(x) - Mu(x), \quad x \in \Omega_e.$$

• De plus, par passage à la limite quand x tend vers un point sur la frontière Γ , on a :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) + (1-c(x))u(x) - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y),$$

i.e.

$$c(x)u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad (3.7)$$

où $c(x)$ est défini selon l'appartenance de x à la frontière Γ ou non, et selon la régularité de Γ :

$$c(x) = \frac{\theta(x)}{4\pi}, \quad \text{avec } \theta(x) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } x \in \Omega, \\ 2\pi & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ régulière au point } x, \\ \theta & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'angle θ représente l'angle solide sous lequel x voit la frontière Γ .

Dans cette thèse, nous allons appliquer une méthode de Galerkin, qui va amener une intégration supplémentaire. Comme nous avons supposé que l'ensemble des points irréguliers est de mesure nulle, nous pouvons prendre $c(x)$ égal à $1/2$ pour tout $x \in \Gamma$.

La formule de représentation pour $x \in \Gamma$ devient alors :

$$\frac{1}{2} u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y). \quad (3.8)$$

Nous avons donc établi les formules de représentation intégrale pour la solution du problème de Laplace dans un domaine intérieur Ω_i .

Problème extérieur :

Regardons maintenant ce qui se passe dans un domaine extérieur Ω_e . On s'intéresse cette fois à la résolution du modèle :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega_e, \\ u = 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

• On sait alors que la solution de ce problème admet la représentation intégrale suivante, pour $x \in \Omega_e$:

$$u(x) = -L \frac{\partial u}{\partial n}(x) + Mu(x),$$

avec L et M les potentiels de simple couche et de double couche définis plus haut.

- On a alors :

$$0 = -L \frac{\partial u}{\partial n}(x) + Mu(x), \quad \text{pour } x \in \Omega_i.$$

- Par passage à la limite quand x tend vers un point sur Γ , on obtient la formule de représentation, pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2} u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) + \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y). \quad (3.9)$$

Réunion des deux domaines :

Maintenant considérons la solution du problème de Laplace $\Delta u = 0$ dans $\Omega_e \cup \Omega_i$. Si elle est suffisamment régulière, elle peut être représentée en fonction de ses traces par :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} [u(y)] \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad \text{pour } x \in \Omega_i \cup \Omega_e.$$

On rappelle la définition du saut $[\cdot]$:

$$[u] = u_{/\text{int } \Gamma} - u_{/\text{ext } \Gamma}.$$

Pour $x \in \Gamma$, on obtient :

$$\frac{u(x)_{/\text{int } \Gamma} + u(x)_{/\text{ext } \Gamma}}{2} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n} \right] G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} [u(y)] \frac{\partial G(x-y)}{\partial n} d\gamma(y).$$

Application à notre modèle :

Dans le cadre de notre modèle, la frontière Γ du réservoir Ω se décompose en la frontière extérieure du réservoir $\Gamma_D \cup \Gamma_N$, et la frontière du puits Γ_w .

Pour trouver une formulation intégrale, nous rappelons que nous devons choisir un prolongement de la solution dans le domaine complémentaire, donc dans notre cas dans le domaine extérieur. Nous choisissons de prolonger le problème à l'extérieur du réservoir et à l'intérieur du puits par la solution nulle.

La représentation intégrale s'écrit alors :

$$p(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad x \in \Omega, \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{2} p(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y), \quad x \in \Gamma. \quad (3.11)$$

A partir de l'équation (3.11), on peut établir une deuxième représentation intégrale (cf Bonnet [12], Nédélec [64]), pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p(x)}{\partial n_x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_x} d\gamma(y) - \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y). \quad (3.12)$$

Pour simplifier l'écriture, nous noterons désormais les différents opérateurs intégraux de la manière suivante, pour $x \in \Gamma$:

$$Sq(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)q(y) d\gamma(y), \quad (3.13)$$

$$Hp(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} p(y) d\gamma(y), \quad (3.14)$$

$$H'q(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_x} q(y) d\gamma(y), \quad (3.15)$$

$$Dp(x) = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} p(y) d\gamma(y), \quad (3.16)$$

où q désigne la dérivée normale de la pression, soit $\partial p / \partial n$. Les opérateurs sont définis dans les espaces suivants :

$$\begin{aligned} S & : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ H & : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ H' & : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ D & : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

L'opérateur H' est l'adjoint de l'opérateur H pour la norme $L^2(\Gamma)$.

Singularités des noyaux :

Ces opérateurs intégraux présentent des singularités pour x voisin de y , x et y sur Γ :

$$\begin{aligned} S & : \frac{1}{|x-y|} = O(|x-y|^{-1}), \\ H & : \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(y-x, n_y)}{|y-x|^3} = O(|y-x|^{-1}), \\ H' & : \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(y-x, n_x)}{|y-x|^3} = O(|y-x|^{-1}), \\ D & : \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(n_x, n_y)}{|x-y|^3} - 3 \frac{(x-y, n_x)(x-y, n_y)}{|x-y|^5} \\ & = O(|x-y|^{-3}). \end{aligned}$$

Ainsi les noyaux de S , H et H' sont intégrables.

Le noyau de D ne l'est pas.

Les trois premiers noyaux sont faiblement singuliers, ces noyaux donnent lieu à des opérateurs compacts sur les espaces définis précédemment, et le dernier est hypersingulier.

Nous verrons dans la suite comment traiter ces différentes singularités. Revenons maintenant aux différentes formulations intégrales.

Les formulations (3.11) et (3.12) s'écrivent respectivement :

$$\frac{1}{2} p = Sq - Hp \quad x \in \Gamma, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2} q = H'q - Dp \quad x \in \Gamma. \quad (3.18)$$

Dans le milieu pétrolier, seule la première formulation (3.17) a été employée à ce jour. Pourtant, la deuxième formulation (3.18) est très populaire dans les autres domaines, par exemple en électromagnétisme, en mécanique, en élasticité, en élastodynamique (voir Bonnet [12]).

Pour mieux comprendre dans quel cas employer l'une ou l'autre formulation, nous introduisons la notion d'équations intégrales de première espèce et de seconde espèce (voir Nédélec [64]).

3.1.2 Équations intégrales de première et de seconde espèce

Définition 14 *Une équation intégrale est dite de première espèce par rapport à une inconnue si l'inconnue n'apparaît pas en dehors du signe intégral. Sinon, l'équation intégrale est dite de seconde espèce.*

Les équations intégrales de seconde espèce sont plus stables, du fait de l'apparition de l'inconnue en dehors du signe intégral. De plus, l'analyse fonctionnelle est plus simple pour les équations de seconde espèce. Néanmoins pour les équations intégrales liées à l'équation de Laplace, on dispose de l'analyse des équations intégrales de première espèce depuis l'article de Nédélec et Planchard [65] : ils montrent via la coercivité de la forme bilinéaire associée à l'opérateur de Laplace e via les théorèmes de trace, que la forme bilinéaire associée à l'équation intégrale de frontière est coercive sur $H^{-1/2}(\Gamma)$.

L'équation (3.17) est donc de première espèce si l'inconnue est la dérivée normale $\partial p/\partial n = q$, et de seconde espèce si l'inconnue est la pression p . Inversement, l'équation (3.18) est de seconde espèce si l'inconnue est la dérivée normale $\partial p/\partial n = q$, et de première espèce si l'inconnue est la pression p .

Ainsi le fait qu'une équation intégrale soit de première ou de seconde espèce dépend de l'inconnue considérée, et donc de la frontière sur laquelle on écrit cette équation intégrale. Nous avons alors à choisir une équation intégrale pour chaque frontière, en tenant compte de l'inconnue sur la frontière.

3.2 Écriture des équations intégrales

Nous avons vu que les équations intégrales de seconde espèce étaient plus stables que les équations intégrales de première espèce. Nous préférons donc utiliser des équations intégrales de seconde espèce, dans la mesure du possible. Pour cela, il nous faut récapituler les inconnues de notre modèle sur chacune des frontières. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le paragraphe suivant. Une fois cela fait, nous aurons tous les éléments nécessaires pour écrire la formulation intégrale de notre modèle.

3.2.1 Inconnues du modèle

Dans un premier temps, nous considérons le modèle en milieu homogène (3.1).

- Sur la frontière de Dirichlet Γ_D , l'inconnue est la dérivée normale de la pression : nous la notons :

$$\alpha := \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_D.$$

- Sur la frontière de Neumann Γ_N , l'inconnue est la pression, nous la notons :

$$\beta := p \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

- Sur la frontière du puits Γ_w , hormis le cas où on connaît la valeur de la pression p_w , et où on cherche le débit total Q , nous avons deux inconnues, la pression, et sa dérivée normale :

$$\begin{aligned} \varphi &:= p && \text{sur } \Gamma_w, \\ \psi &:= \frac{\partial p}{\partial n} && \text{sur } \Gamma_w. \end{aligned}$$

De façon à recouvrir tous les cas (y compris le cas non-linéaire), nous considérerons deux inconnues sur le puits : φ et ψ définies ci-dessus.

3.2.2 Réservoir homogène isotrope

Maintenant que nous avons bien distingué toutes les inconnues du problème, nous pouvons choisir l'équation intégrale qui nous semble la mieux adaptée pour chaque frontière.

3.2.2.1 Sur les frontières extérieures :

Pour les frontières extérieures, le choix de l'équation intégrale est naturel :

- sur la frontière de Dirichlet Γ_D , nous choisissons la deuxième équation (3.18),
- sur la frontière de Neumann Γ_N , nous optons pour la première équation (3.17).

Ainsi nous avons bien des équations intégrales de seconde espèce sur les frontières extérieures du réservoir.

3.2.2.2 Sur le puits :

Il nous reste à décider quelle équation intégrale nous allons employer sur la frontière du puits Γ_w . Le choix n'est pas si immédiat que pour les frontières extérieures, puisque sur Γ_w nous avons deux inconnues : la pression φ et le flux ψ . Alors, chacune des deux équations intégrales (3.17) et (3.18) sera mixte, c'est-à-dire à la fois de première espèce pour l'une des deux inconnues, et de seconde espèce pour l'autre.

Considérons alors le cas particulier d'un puits dans un milieu infini Ω :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{dans } {}^C\Omega, \\ p = 0 & \text{à l'infini,} \\ p = 1 & \text{sur } \Gamma_w, \end{cases}$$

où ${}^C\Omega$ est le complémentaire du puits dans \mathbb{R}^3 et $\Gamma_w = \partial\Omega$. Si nous choisissons comme représentation intégrale la deuxième équation (3.18) :

$$\left(\frac{1}{2} I - H'\right) \frac{\partial p}{\partial n} = -Dp,$$

alors le second membre s'exprime, pour $x \in \Gamma_w$:

$$\begin{aligned} Dp(x) &= \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma_w} p(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y). \end{aligned}$$

Or la relation de l'angle solide (3.2) indique que :

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y) = 0,$$

et ce, pour tout $x \in^C \Omega$.

On en déduit alors que le second membre est nul si on impose une condition de Dirichlet constante sur Γ_w , et sinon, le second membre est défini à une constante près.

La solution de l'équation intégrale est alors aussi définie à une constante près, et la solution nulle est solution évidente de la deuxième représentation intégrale. Mais la solution nulle n'est pas solution du modèle EDP considéré (contradiction avec $p = 1$ sur Γ_w). Ceci montre que l'équation intégrale considérée n'est pas équivalente au modèle EDP, et donc ne constitue pas une bonne représentation intégrale du problème.

C'est pourquoi nous choisissons d'écrire plutôt la première équation intégrale (3.17) sur le puits.

3.2.2.3 Conclusion

Le système d'équations intégrales qui traduit notre modèle est donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \alpha(x) = H'q(x) - Dp(x) & x \in \Gamma_D, \\ \frac{1}{2} \beta(x) = Sq(x) - Hp(x) & x \in \Gamma_N, \\ \frac{1}{2} \varphi(x) = Sq(x) - Hp(x) & x \in \Gamma_w. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.2.3 Réservoir homogène anisotrope

Maintenant que nous avons traité un réservoir homogène isotrope, modélisé par une équation de Laplace, nous allons étendre les équations intégrales développées dans la section précédente à un milieu anisotrope. On rappelle que l'écoulement permanent en milieu anisotrope est régi par l'équation :

$$\operatorname{div} (\overline{\overline{K}} \nabla p) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.20)$$

avec $\overline{\overline{K}}$ le tenseur de perméabilité supposé diagonal :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

L'équation (3.20) s'écrit de manière équivalente :

$$k_1 \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

On se ramène à l'équation de Laplace (au coefficient $\tilde{k} = (k_1 k_2 k_3)^{1/3}$ près) par le changement

de variables suivant (cf Chalus [16], Ding [25] et Besson [11]) :

$$x' = T x, \quad \text{avec } T = \tilde{k}^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^{1/2}} \end{pmatrix} := \tilde{k}^{1/2} \overline{\overline{K}}^{-1/2}.$$

La fonction de Green associée à l'équation (3.20) est alors donnée par :

$$G(x - y) = \frac{1}{4\pi|T|^{1/2}} \frac{1}{\bar{r}},$$

où $\bar{r}^2 = (x - y)^T T (x - y)$ et $|T| = \det(T)$. On remarque que $|T| = \det(T) = 1$, ce qui nous amène :

$$G(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\bar{r}}. \quad (3.21)$$

On remarque que le noyau de Green dépend du tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K}}$ à travers la matrice T . Ainsi, pour un milieu stratifié, chaque couche Ω_r aura une fonction de Green différente dépendant du tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K}}_r$ qui lui est propre.

Rappelons la notation suivante introduite dans le chapitre 1 :

$$\frac{\partial p}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} = \frac{1}{\tilde{k}} \overline{\overline{K}} \nabla p \cdot n. \quad (3.22)$$

Les formules de représentation (3.11) et (3.12) deviennent alors, pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2} p(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(y)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_y)} G(x - y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_y)} d\gamma(y) \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p(x)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_x)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(y)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_y)} \frac{\partial G(x - y)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_x)} d\gamma(y) - \frac{\partial}{\partial(\overline{\overline{K}}n_x)} \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial G(x - y)}{\partial(\overline{\overline{K}}n_y)} d\gamma(y) \quad (3.24)$$

Pour un réservoir anisotrope, nous écrivons donc l'équation (3.23) sur Γ_N et Γ_w , et l'équation (3.24) sur Γ_D .

3.2.4 Réservoir multi-couches

Dans le cas d'un réservoir multi-couches, nous résoudrons le problème en écrivant les équations intégrales dans chacune des couches Ω_r de frontière Γ_r , puis nous couplerons les équations intégrales grâce aux conditions de continuité de pression et de flux aux interfaces Γ_{rs} entre les couches :

$$\begin{cases} p_r & = p_s & \text{sur } \Gamma_{rs}, \\ \tilde{k}_r \frac{\partial p_r}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)} & = -\tilde{k}_s \frac{\partial p_s}{\partial(\overline{\overline{K}}_s n_s)} & \text{sur } \Gamma_{rs}. \end{cases}$$

Nous noterons désormais :

$$q_r := \frac{1}{\tilde{k}_r} \frac{\partial p_r}{\partial(\overline{\overline{K}}_r n_r)}, \quad \text{pour } r = 1, \dots, N_R.$$

Par rapport au modèle pour un réservoir homogène, nous avons alors des inconnues supplémentaires sur chaque interface Γ_{rs} , à savoir la pression et le flux :

$$\begin{aligned} p_{rs} &:= p_r = p_s \quad \text{sur } \Gamma_{rs}, \\ q_{rs} &:= \frac{\partial p_r}{\partial(\overline{\overline{K_r n_r}})} = q_r = -\frac{\tilde{k}_r}{\tilde{k}_s} \frac{\partial p_s}{\partial(\overline{\overline{K_s n_s}})} = -\frac{\tilde{k}_r}{\tilde{k}_s} q_s \quad \text{sur } \Gamma_{rs}, \text{ pour } r < s. \end{aligned}$$

L'inconnue q_{rs} est choisie arbitrairement par commodité.

La fonction de Green est différente dans chaque couche Ω_r , puisqu'elle dépend de la perméabilité $\overline{\overline{K_r}}$. Elle sera indexée par r :

$$G_r(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(x-y)^T T_r (x-y)},$$

avec T_r la matrice de changement de variable définie dans le paragraphe précédent par :

$$T_r = \tilde{k}_r^{1/2} \overline{\overline{K_r}}^{-1/2}.$$

Ainsi en indexant les opérateurs intégraux :

$$S_r q(x) = \int_{\Gamma_r} G_r(x-y) q(y) d\gamma(y), \quad (3.25)$$

$$H_r p(x) = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial G_r(x-y)}{\partial(\overline{\overline{K_r n_y}})} p(y) d\gamma(y), \quad (3.26)$$

$$H'_r q(x) = \int_{\Gamma_r} \frac{\partial G_r(x-y)}{\partial(\overline{\overline{K_r n_x}})} q(y) d\gamma(y), \quad (3.27)$$

$$D_r p(x) = \frac{\partial}{\partial(\overline{\overline{K_r n_x}})} \int_{\Gamma_r} \frac{\partial G_r(x-y)}{\partial(\overline{\overline{K_r n_y}})} p(y) d\gamma(y), \quad (3.28)$$

on peut écrire, dans chaque couche Ω_r :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} q_r(x) = H'_r p_r(x) - D_r q_r(x), & x \in \Gamma_{r,D}, \\ \frac{1}{2} p_r(x) = S_r p_r(x) - H_r q_r(x), & x \in \Gamma_{r,N}, \\ \frac{1}{2} p_r(x) = S_r p_r(x) - H_r q_r(x), & x \in \Gamma_{r,w}. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à écrire une équation intégrale pour trouver p_{rs} , et une deuxième équation intégrale pour trouver q_{rs} . Nous avons plusieurs possibilités, et nous choisissons d'écrire l'équation (3.23) pour p_{rs} dans le domaine Ω_s , si $s > r$, et l'équation (3.24) pour q_{rs} dans le domaine Ω_r , si $s < r$:

$$\frac{1}{2} p_{rs}(x) = S_s q_s(x) - H_s p_s(x), \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs},$$

$$\frac{1}{2} q_{rs}(x) = H'_r q_r(x) - D_r p_r(x), \quad \text{pour } x \in \Gamma_{rs}.$$

Ainsi nous obtenons le système d'équations intégrales suivant, pour $r = 1, \dots, N_r$, et $s = 1, \dots, N_r$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} q_r(x) = H'_r q_r(x) - D_r p_r(x), & x \in \Gamma_{r,D}, \\ \frac{1}{2} p_r(x) = S_r q_r(x) - H_r p_r(x), & x \in \Gamma_{r,N}, \\ \frac{1}{2} p_r(x) = S_r q_r(x) - H_r p_r(x), & x \in \Gamma_{r,w}, \\ \frac{1}{2} p_{rs}(x) = S_s q_s(x) - H_s p_s(x) & x \in \Gamma_{rs}, \quad s > r, \\ \frac{1}{2} q_{rs}(x) = H'_r q_r(x) - D_r p_r(x) & x \in \Gamma_{rs}, \quad s < r. \end{array} \right.$$

3.3 Équivalence entre la représentation intégrale choisie et le modèle

Nous avons vu que nous avons le choix entre plusieurs formulations intégrales. Suivant le problème EDP considéré, elles peuvent être correctes ou non. Par exemple, pour le cas particulier d'un puits en milieu infini, nous avons montré qu'une des deux représentations ne convenait pas. Il nous faut donc vérifier que la formulation intégrale que nous avons choisie est bien équivalente au problème EDP considéré.

Pour simplifier, nous considérons le modèle (3.1), homogène, isotrope, et dont les constantes physiques sont supposées égales à 1. Le système d'équations intégrales que nous avons choisi pour représenter ce modèle est le système (3.19). Rappelons-le :

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \alpha(x) = H'q(x) - Dp(x) & x \in \Gamma_D, \\ \frac{1}{2} \beta(x) = Sq(x) - Hp(x) & x \in \Gamma_N, \\ \frac{1}{2} \varphi(x) = Sq(x) - Hp(x) & x \in \Gamma_w. \end{array} \right.$$

Dans un premier temps, nous allons supposer que la pression le long du puits est donnée dans le modèle (3.1). On a alors dans (3.19) $\varphi = p_w$ connue.

Il est facile de montrer que la solution du modèle EDP (on a déjà montré dans le chapitre 2 qu'elle existe et est unique), est aussi solution du système d'équations intégrales ci-dessus.

Nous allons donc montrer la réciproque, i.e. que la solution du système d'équations intégrales ci-dessus est bien solution du modèle EDP. Pour cela, nous allons montrer que le système d'équations intégrales admet une unique solution. Alors cette solution ne pourra qu'être la solution du modèle EDP.

Pour y voir plus clair, nous allons développer le système en indexant deux fois les opérateurs intégraux suivant cet exemple :

$$S_{D,N}q(x) = \int_{\Gamma_D} G(x-y)q(y) d\gamma(y), \quad x \in \Gamma_N,$$

et nous noterons respectivement I_D , I_N , I_w , l'identité sur Γ_D , Γ_N , et Γ_w .

Le système (3.19) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} I_D - H'_{D,D} \right) \alpha + D_{N,D} \beta - H'_{w,D} \psi &= -D_{D,D} p_D - D_{w,D} p_w, \\ -S_{D,N} \alpha + \left(\frac{1}{2} I_N + H_{N,N} \right) \beta - S_{w,N} \psi &= -H_{D,N} p_D - H_{w,N} p_w, \\ -S_{D,w} \alpha + H_{N,w} \beta - S_{w,w} \psi &= -H_{D,w} p_D - \left(\frac{1}{2} I_w + H_{w,w} \right) p_w. \end{cases}$$

L'opérateur matriciel associé à ce système est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_D - H'_{D,D} & D_{N,D} & -H'_{w,D} \\ -S_{D,N} & \frac{1}{2} I_N + H_{N,N} & -S_{w,N} \\ -S_{D,w} & H_{N,w} & -S_{w,w} \end{pmatrix}.$$

On va utiliser la théorie de Fredholm (l'opérateur diagonal de A jouant le rôle de l'identité). Etudions donc le noyau de l'adjoint de cet opérateur matriciel. L'opérateur adjoint s'écrit :

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_D - H_{D,D} & -S_{N,D} & -S_{w,D} \\ D_{D,N} & \frac{1}{2} I_N + H'_{N,N} & H'_{w,N} \\ -H_{D,w} & -S_{N,w} & -S_{w,w} \end{pmatrix}.$$

Résolvons $A^*x = 0$, avec $x = (\alpha, \beta, \psi)$.

Soit u défini dans Ω par :

$$\begin{aligned} u(x) &= -M_D(\alpha)(x) - L_N(\beta)(x) - L_w(\psi)(x) \\ &= - \int_{\Gamma_D} \alpha(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma(y) - \int_{\Gamma_N} \beta(y) G(x-y) d\gamma(y) - \int_{\Gamma_w} \psi(y) G(x-y) d\gamma(y). \end{aligned}$$

Les opérateurs de simple et double couche ont été indexés par la lettre qui correspond à la frontière sur laquelle ils portent.

On sait d'après les relations de saut des potentiels de simple et double couche rappelés dans la section 3.1.1 que :

$$\begin{aligned} \gamma_0^-(-M_D(\alpha)) &= \left(\frac{1}{2} I_D - H_{D,D} \right) \alpha && \text{sur } \Gamma_D, \\ \gamma_1^-(-L_N(\beta)) &= - \left(\frac{1}{2} I_N + H'_{N,N} \right) \beta && \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

En multipliant la seconde équation par -1 , et en remarquant que les autres opérateurs intégraux sont continus à la traversée de la frontière sur laquelle ils sont définis, nous pouvons réécrire le système $A^*x = 0$ en fonction des traces de u :

$$\begin{cases} \gamma_0^-(u) = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \gamma_1^-(u) = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \gamma_0^-(u) = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases}$$

De plus, u vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω , puisque u est une combinaison linéaire des potentiels de simple et double couche avec le noyau de Green associé au laplacien. On peut interpréter le système $A^*x = 0$ comme le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases}$$

Il est alors évident que ce système admet pour unique solution la solution nulle dans $H^1(\Omega)$. Donc u est nul dans Ω , et ses traces sont nulles, en particulier α, β et ψ . On en déduit alors que le noyau de A^* se réduit au vecteur nul. Donc, d'après l'alternative de Fredholm, le système d'équations intégrales admet une unique solution.

D'autre part, nous avons vu que le problème EDP admet une unique solution, et le système d'équations intégrales découle du problème EDP et admet lui aussi une unique solution. On en déduit alors l'équivalence du problème EDP et du système d'équations intégrales que nous avons choisi.

3.4 Méthodes numériques pour résoudre l'équation intégrale

Il existe plusieurs méthodes numériques pour discrétiser une équation intégrale (cf Atkinson [7], Kress [48]). Les méthodes de collocation, de Galerkin et de Nyström sont les plus connues et les plus utilisées. Citons aussi la méthode de Galerkin hybride (cf Graham, Hackbusch, Sauter [37], [38]), qui est une amélioration de la méthode de Galerkin. Nous allons présenter chaque méthode de manière générale pour la résolution de l'équation intégrale de seconde espèce suivante :

$$(\lambda I + \mathcal{K})u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma \quad (3.29)$$

où $\mathcal{K}u(x) := \int_{\Gamma} k(x, y)u(y) dy$, et $k(x, y)$ désigne le noyau.

3.4.1 Méthode de collocation

La méthode de collocation (cf Bonnet [12], Kress [48], Atkinson [7]) est la plus simple à mettre en œuvre : on se donne un ensemble de N nœuds d'interpolation x_1, \dots, x_N , et un ensemble \mathcal{T}_h d'éléments triangulaires qui approche la frontière Γ . A chaque nœud x_j , on associe une fonction d'interpolation ϕ_j , $j = 1, \dots, N$. Une approximation de la variable u est alors donnée par :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x)u_j, \quad \text{où } u_j := u(x_j). \quad (3.30)$$

On demande que l'équation intégrale (3.29) soit vérifiée exactement aux points de collocation $x'_i, i = 1, \dots, N'$.

On remplace u dans l'équation intégrale (3.29) par son approximation u_h , cela nous amène à la résolution d'un système linéaire avec pour inconnue le vecteur $U = (u_j), j = 1, \dots, N$.

Cette méthode est fréquemment utilisée dans le milieu pétrolier.

3.4.2 Méthode de Galerkin

On se donne comme pour la méthode de collocation un ensemble de fonctions de base $\phi_j, j = 1, \dots, N$, et un maillage triangulaire \mathcal{T}_h .

La méthode de Galerkin consiste à chercher une approximation de la solution

$$u_h \in \text{vect}\{\phi_j, j = 1, \dots, N\},$$

telle que :

$$((\lambda I + \mathcal{K})u_h, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.31)$$

On aboutit au système d'équations linéaires suivant :

$$(\lambda M + K) U = F, \quad (3.32)$$

où, pour $i, j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} M_{ij} &:= \int_{\Gamma} \phi_i(x) \phi_j(x) d\gamma(x), \\ K_{ij} &:= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(x, y) \phi_i(x) \phi_j(y) d\gamma(x) d\gamma(y), \\ F_j &:= \int_{\Gamma} \phi_j(x) f(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

On décompose alors la frontière Γ en somme sur les triangles $T \subset \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} M_{ij} &:= \sum_{T \subset (\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j)} \int_T \phi_i(x) \phi_j(x) d\gamma(x), \\ K_{ij} &:= \sum_{T \subset \text{supp } \phi_i} \sum_{T' \subset \text{supp } \phi_j} \int_T \int_{T'} k(x, y) \phi_i(x) \phi_j(y) d\gamma(x) d\gamma(y), \\ F_j &:= \sum_{T' \subset \text{supp } \phi_j} \int_{T'} \phi_j(x) f(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Les calculs de la matrice M et du vecteur F ne posent pas de problème a priori. Par contre, lorsque le noyau k n'est pas continu (ce qui est notre cas : le noyau est en $1/|x - y|$), l'évaluation de la matrice K est assez délicate pour les éléments situés sur la diagonale et autour de la diagonale : en effet, les points x et y sont alors proches, et l'intégrale présente des singularités en ces points-là. Des méthodes de régularisation existent pour lever cette difficulté.

La méthode de Galerkin est plus coûteuse que la méthode de collocation, puisqu'elle amène une intégrale de plus à calculer, mais elle est plus stable.

3.4.3 Méthode de Nyström

On suppose que le noyau k est continu. On applique à l'équation intégrale (3.29) la règle de quadrature suivante :

$$\int_{\Gamma} g(x) d\gamma(x) \approx \sum_{j=1}^N w_j g(x_j), \quad g \in C(\Gamma),$$

et on approche alors u par :

$$\lambda u_n(x) + \sum_{j=1}^N w_j k(x, x_j) u_n(x_j) = f(x), \quad x \in \Gamma.$$

Pour trouver les quantités $u_n(x_j)$, désormais notées u_j , on fait parcourir à x les valeurs $x_i, i = 1, \dots, n$ dans l'équation précédente. Les u_j sont alors solution du système linéaire suivant :

$$\lambda u_i + \sum_{j=1}^N w_j k(x_i, x_j) u_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

avec $f_i := f(x_i)$.

On peut alors calculer $u_n(x)$ en tout point $x \in \Omega$ par la formule :

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) - \sum_{j=1}^N w_j k(x, x_j) u_j \right].$$

Cette formule est appelée "formule d'interpolation de Nyström".

Cette méthode est aussi très stable, et peu coûteuse, mais ne permet pas de traiter les noyaux non continus en 3D (voir Atkinson [7]).

3.4.4 Méthode de Galerkin hybride

La méthode de Galerkin hybride est une nouvelle méthode de quadrature pour calculer la matrice de Galerkin, développée par I.G. Graham, W. Hackbusch et S.A. Sauter [37]. L'intérêt de cette méthode est qu'on doit effectuer beaucoup moins d'évaluations du noyau $k(x, y)$ que pour la méthode de Galerkin, ce qui réduit le coût de calcul. D'autre part, les auteurs ont montré que la méthode de Galerkin hybride est stable et possède les mêmes propriétés de convergence que la méthode de Galerkin, et le même coût que la méthode de Nyström (cf [37]).

L'idée de la méthode consiste à calculer une partie de la matrice K par les règles conventionnelles de quadrature comme on le fait habituellement pour la méthode de Galerkin, et à appliquer de nouvelles règles de quadrature beaucoup moins coûteuses pour une autre partie de la matrice, qui nécessitent en général de 10 à 100 fois moins d'estimations du noyau.

On observe que, dès que $\text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset$ (ce qui représente la plupart des cas), le noyau k est continu, et cette information n'est pas exploitée par la méthode de Galerkin classique. Ce sera donc dans ce cas-là que s'appliquera la nouvelle règle de quadrature, c'est-à-dire quand $|x_i - x_j| > \zeta$, avec $\zeta > 0$.

On considère les fonctions de base comme des poids :

$$\int_{\Gamma} F(x) \phi_i(x) d\gamma(x) \approx \sum_{j \in J_i} w_j F(x_j), \quad (3.33)$$

avec F une fonction régulière sur $\text{supp}(\phi_i)$.

Les points $x_{j,j \in J_i}$ sont sélectionnés parmi les nœuds situés près de x_i , et les poids w_j dépendent du choix de ces points. L'ensemble J_i des voisins de x_i et les poids w_i associés sont calculés de sorte que (3.33) soit vérifiée avec la précision souhaitée, ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\sum_{j \in J_i} \Pi_i(x_j) w_j = \int_{\Gamma} \Pi_i(x) \phi_p(x) d\gamma(x), \quad i = 1, \dots, \mathcal{D}(d),$$

où $\{\Pi_i : i = 1, \dots, \mathcal{D}(d)\}$ est une base de l'espace des polynômes de degré d , et $\mathcal{D}(d) = (d+1)(d+2)/2$.

D'autre part, les points $x_{j,j \in J_i}$ et les poids associés w_i , doivent vérifier des conditions supplémentaires de façon à assurer la stabilité.

Pour plus de précisions ou pour l'algorithme détaillé, on en réfère à [37].

3.4.5 Méthode retenue

Les méthodes de collocation et de Galerkin sont les plus utilisées et ont largement fait leurs preuves. La méthode de Nyström, performante en 2D, ne s'adapte pas à notre modèle, puisqu'elle ne permet pas de traiter les singularités en 3D (voir Atkinson [7]). Par contre, la méthode de Galerkin, grâce à l'intégration supplémentaire, permet de lever toutes les singularités. De plus, elle est plus stable que la méthode de collocation, mais au prix d'un coût plus élevé.

I.G. Graham, W. Hackbusch et S.A. Sauter [37] affirment que la méthode de Galerkin hybride réduit le coût de calcul de la matrice de Galerkin, tout en conservant les propriétés de stabilité et de convergence.

Notre choix va donc se porter sur la méthode de Galerkin. La méthode de Galerkin hybride dérivant de la méthode de Galerkin, nous pourrions envisager de faire quelques tests avec la méthode de Galerkin hybride.

3.5 Tests numériques

La première partie de ce chapitre nous a permis d'écrire la formulation intégrale de notre modèle, et la deuxième partie de discuter la méthode de discrétisation.

Nous avons donc choisi une nouvelle formulation intégrale, jamais utilisée dans le milieu pétrolier. La discrétisation des équations intégrales sera opérée par une méthode de Galerkin. Nous verrons pourquoi la méthode de Galerkin est particulièrement bien adaptée à notre problème.

Cette partie est destinée aux premières validations de la formulation intégrale que nous avons choisie. Ces validations seront faites sur des cas très simples, limités à un réservoir borné sans puits, pour des modèles dont on connaît une solution analytique. Les autres tests numériques seront présentés dans les chapitres 4 et 5.

Mais tout d'abord, il nous faut discrétiser les équations intégrales.

3.5.1 Discrétisation des équations intégrales

Rappelons tout d'abord la formulation adoptée pour un réservoir borné Ω de frontière $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Nous avons choisi d'écrire les équations intégrales suivantes :

$$\frac{1}{2} q = H' q - D p \quad \text{sur } \Gamma_D, \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2} p = S q - H p \quad \text{sur } \Gamma_N. \quad (3.35)$$

Chacune des quantités p et q est décomposée dans la base des fonctions éléments finis \mathbb{P}^1 sur des triangles $(\psi_i^h)_i$:

$$p(x) = \sum_j p_j \psi_j^h(x), \quad q(x) = \sum_j q_j \psi_j^h(x).$$

La frontière Γ qui se compose ici uniquement de Γ_D et Γ_N pour un réservoir homogène, et éventuellement des interfaces Γ_{rs} pour un réservoir stratifié, est approchée par :

$\Gamma_h = \Gamma_D^h \cup \Gamma_N^h \cup_{r<s} \Gamma_{rs}^h$, où Γ_h est discrétisée par des triangles.

Les équations intégrales (3.34) et (3.35) sont multipliées par la fonction test ψ_i^h et sont ensuite intégrées sur Γ_h .

On note :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \psi_j^h(x) d\gamma_h(x), \\ S_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \psi_j^h(y) G(x-y) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\ H_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \psi_j^h(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\ D_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma_h} \psi_j^h(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\ H'_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \psi_j^h(y) \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_x} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x). \end{aligned}$$

On obtient alors le système discrétisé suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j q_j M_{ij} - \sum_j q_j H'_{ij} + \sum_j p_j D_{ij} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{1}{2} \sum_j p_j M_{ij} - \sum_j q_j S_{ij} + \sum_j p_j H_{ij} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à calculer les différentes intégrales discrètes. Nous avons déjà vu que ces intégrales présentent des singularités quand $x \rightarrow y$. Les intégrales S_{ij} , H_{ij} , et H'_{ij} sont faiblement singulières, et l'intégrale D_{ij} est hypersingulière.

Ici nous nous limitons au calcul de ces intégrales sur des triangles, ce qui est bien connu dans le milieu des méthodes intégrales. Des méthodes classiques, telles que la méthode de De Hoop (voir [6], [10]) sont utilisées pour lever les singularités pour les intégrales S_{ij} , H_{ij} , et H'_{ij} . Pour l'intégrale D_{ij} , J.-C. Nédélec dans [64] a démontré que l'on pouvait reformuler l'intégrale D_{ij} par la formule analytique suivante :

$$D_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(x)) \cdot \vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(y))}{|x-y|} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \quad (3.36)$$

où le rotationnel tangentiel $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}$ s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h} u = \vec{\text{rot}} u \times n.$$

Cette formule est très peu coûteuse en temps de calcul : en effet, les fonctions de base ψ_i^h et ψ_j^h étant des polynômes de degré 1, les termes $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(\cdot))$ et $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(\cdot))$ sont des constantes. Le calcul de D_{ij} revient alors au calcul de S_{ij} à une constante près.

On obtient cette formule en transformant par dualité la dérivée normale $\partial/\partial n_x$ portant sur le noyau en une dérivée tangentielle portant sur la fonction de base ψ_i^h . Ainsi la singularité est levée grâce à l'intégration supplémentaire amenée par la méthode de Galerkin : c'est là tout l'intérêt d'utiliser une méthode de Galerkin.

Tous les calculs sont développés en annexe A.

Cas d'un réservoir anisotrope

Dans le cas d'un réservoir anisotrope, les intégrales discrètes s'écrivent en remplaçant la dérivée normale $\partial/\partial n$ par $\partial/\partial(\overline{\overline{K}}n)$. Pour les intégrales faiblement singulières S_{ij} , H_{ij} , et H'_{ij} , la méthode de calcul est la même. Pour l'intégrale D_{ij} , nous avons obtenu une formule analytique en utilisant les mêmes techniques que Nédélec ([64]) pour le calcul de l'intégrale D_{ij} en milieu isotrope (voir annexe A, paragraphe 7.3.2) :

$$D_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(x)) \cdot \vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(y)) G(x-y) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x),$$

avec :

$$\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}[u] = \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} \nabla u \right) \wedge \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} n \right),$$

et :

$$\overline{\overline{K}}^{1/2} = \begin{pmatrix} k_1^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

3.5.2 Résultats numériques

Nous sommes maintenant prêts à procéder à des tests sur un réservoir borné sans puits. Ainsi nous validerons les calculs effectués en annexe A. Les systèmes linéaires sont résolus grâce à la librairie Sparse Lib, par une méthode de gradient conjugué stabilisé (préconditionné).

3.5.2.1 Premier test : écoulement linéaire

Nous résolvons ici le modèle :

$$\begin{cases} \Delta p & = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p & = 1 & \text{sur } \Gamma_{D,1}, \\ p & = 2 & \text{sur } \Gamma_{D,2}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où le domaine Ω est représenté par la figure 3.1.

Le domaine Ω est donc un cube dont les arêtes mesurent 500 m. Le bord $\Gamma_{D,1}$ est représenté sur la figure 3.1 par la face verte (à gauche), et le bord $\Gamma_{D,2}$ est représenté par la face opposée en rouge. La frontière Γ_N , sur laquelle nous avons appliqué une condition de Neumann homogène, désigne l'ensemble des quatre autres faces du réservoir.

La solution de ce problème est évidente : on doit obtenir un écoulement linéaire entre les faces

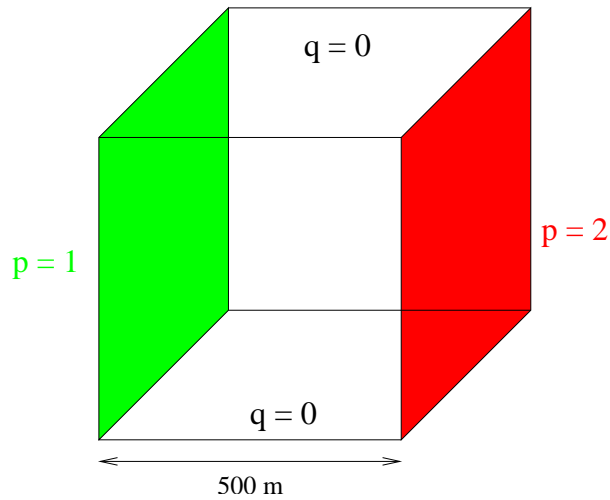


FIG. 3.1 – Problème d'écoulement linéaire.

$\Gamma_{D,1}$ et $\Gamma_{D,2}$.

Nous avons effectué ce test avec différents maillages : le premier (voir Figure 3.3) est assez grossier, et le deuxième (Figure 3.4) un peu plus fin. Ces maillages ont été obtenus grâce au logiciel SIMAIL.

La figure 3.2 représente les résultats que nous avons obtenu pour la face du haut. Comme la solution est linéaire et que la géométrie est plane, la solution approchée est exacte. Seules les erreurs d'arrondi interviennent, et le maillage fin donne un résultat sensiblement meilleur.

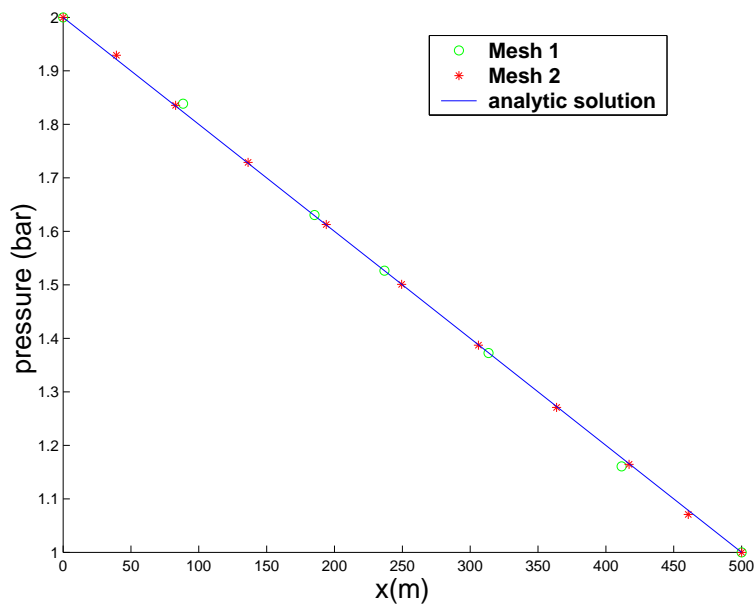


FIG. 3.2 – Pression le long de l'axe des x pour la face 2.

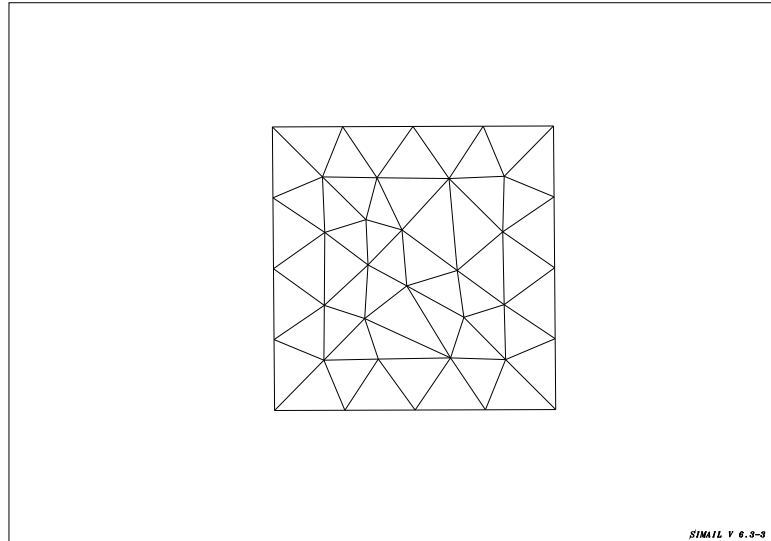


FIG. 3.3 – Maillage 1.

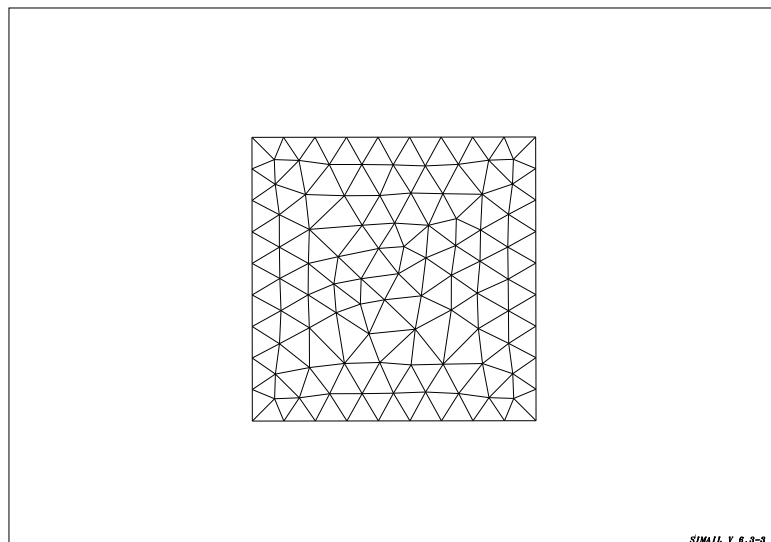


FIG. 3.4 – Maillage 2.

3.5.2.2 Deuxième test

Pour le second test, nous nous proposons de résoudre le modèle :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p = u & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

où la fonction u est définie par : $u(x, y, z) = \sin(x) \cosh(y)$.

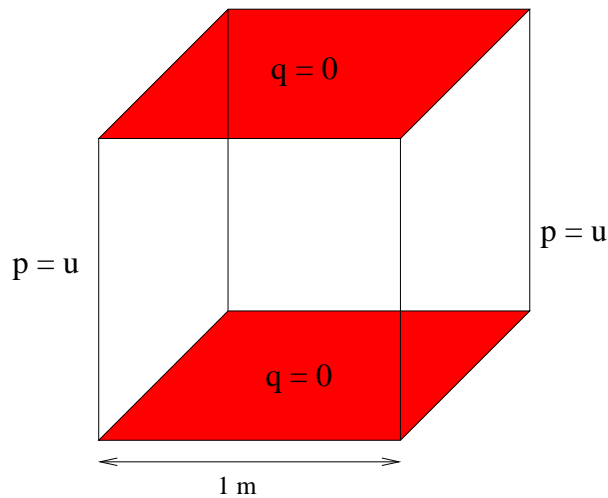


FIG. 3.5 – Problème traité pour le deuxième test.

Nous travaillons ici dans le cube unité $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ (voir figure 3.5). Nous choisissons pour Γ_N l'union des deux faces $z = 0$ et $z = 1$, ainsi nous pouvons récupérer une condition homogène sur Γ_N : $\partial p / \partial n = \partial u / \partial n = 0$. La frontière Γ_D est alors constituée des quatre autres faces du cube unité.

La fonction u vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω , donc u est (l'unique) solution du modèle précédent. Sur les deux faces constituant Γ_N , nous devons retrouver $p = u$, et sur les faces constituant Γ_D , nous devons retrouver $\partial p / \partial n = \partial u / \partial n$.

Nous présentons sur la figure 3.6(a) la solution exacte $p_{ex} = u$ sur la face $z = 1$, et sur la figure 3.6(b) l'erreur entre la pression calculée p_h et la solution exacte p_{ex} . Nous constatons que les résultats sont très satisfaisants. Les résultats ont exactement la même allure sur la face $z = 0$.

Maintenant penchons-nous sur les faces composant Γ_D , où nous cherchions le flux. La solution exacte dépend de chaque face. Regardons par exemple la figure 3.7(a) : cette figure représente la solution exacte $q_{ex} = \partial u / \partial n$ sur la face $x = 1$. La figure 3.7(b) représente l'erreur entre le flux calculé q_h et le flux exact q_{ex} .

Nous remarquons que l'erreur est plus importante aux coins et aux arêtes : ceci est un problème bien connu des méthodes intégrales. En effet, aux coins et aux arêtes, la normale n'est pas bien définie, ce qui cause des erreurs d'approximation plus importantes qu'à l'intérieur des faces. Il existe certaines méthodes pour remédier à ce problème, comme par exemple le raffinement

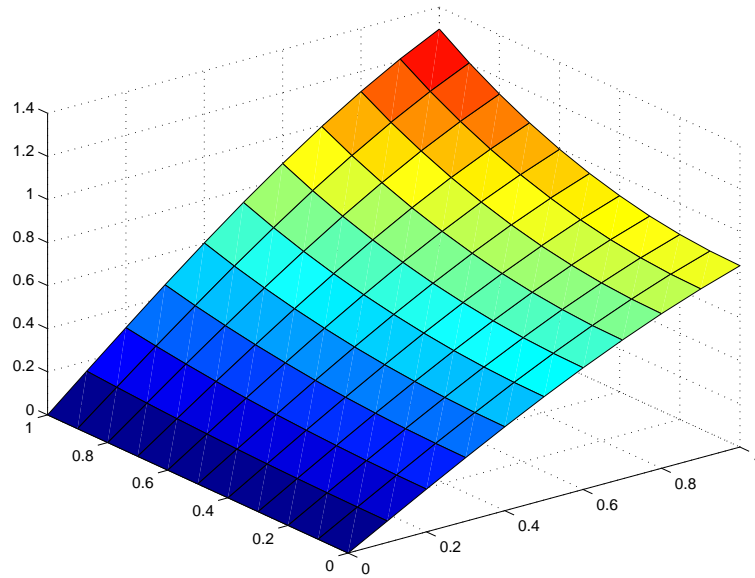
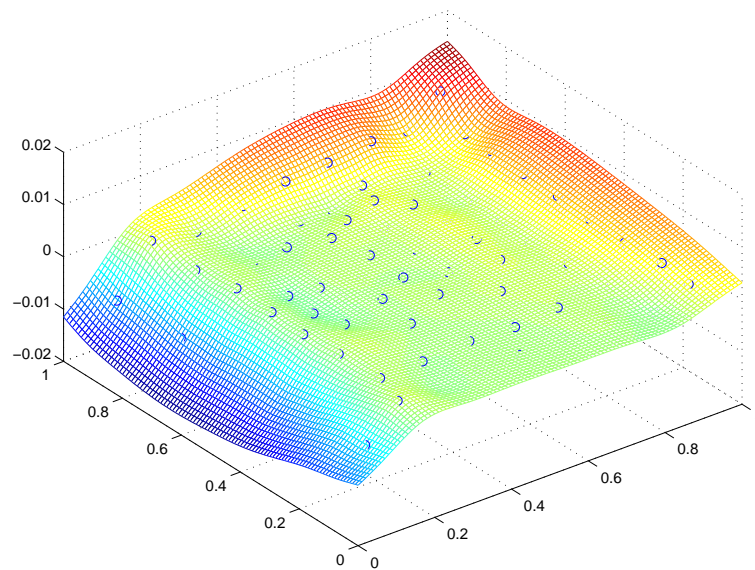
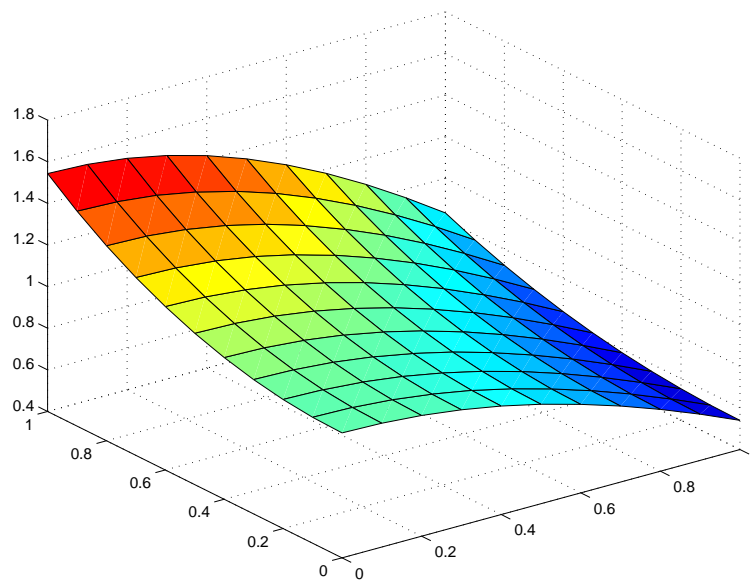
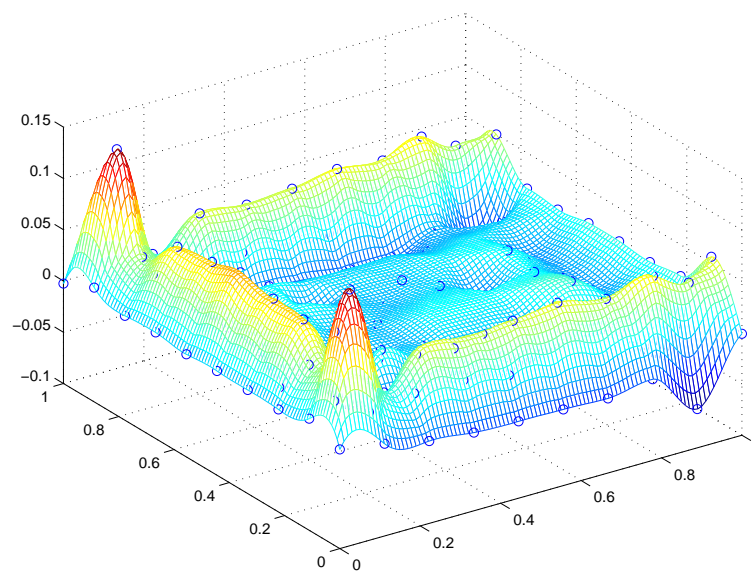
(a) Solution exacte : $p_{ex} = u$ (b) Erreur : $p_{ex} - p_h$

FIG. 3.6 – Résultats pour la pression.



(a) Solution exacte : $q_{ex} = \frac{\partial u}{\partial n}$



(b) Erreur : $q_{ex} - q_h$

FIG. 3.7 – Résultats pour le flux.

de maillage dans les coins et aux arêtes, ou encore l'utilisation de fonctions de base prenant en compte les singularités aux coins ou aux arêtes, mais cette dernière solution est plus difficile à mettre en œuvre.

Toutefois, les résultats à l'intérieur des faces restent très satisfaisants.

D'autres tests ont été effectués pour prendre en compte l'effet du maillage sur la précision de l'approximation de la solution. Le tableau 3.1 donne quelques caractéristiques des trois maillages utilisés. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 3.2.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre de nœuds	162	556	2244
Nombre de mailles	320	1108	4484

TAB. 3.1 – Caractéristiques des trois maillages.

	Inconnue	Equation de la face	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Face 1	q	$z = 0$	1.2294	0.545146	0.193371
Face 2	q	$z = 1$	1.56532	0.555443	0.180762
Face 3	p	$x = 1$	8.71629	5.49797	3.84947
Face 4	p	$y = 1$	13.6128	10.6227	7.20709
Face 5	p	$x = 0$	11.1993	7.28276	5.03085
Face 6	p	$x = 1$	13.4936	16.3035	22.4072

TAB. 3.2 – Erreurs relatives (en %) en norme L^2 selon le maillage utilisé.

Nous constatons que l'approximation de la solution devient plus précise en raffinant le maillage, excepté pour la face 6. Nous ne savons pas expliquer pourquoi l'erreur augmente sur cette face.

3.5.2.3 Comparaison des formulations intégrales

Nous rappelons que les modèles présentés dans les sections précédentes ont été résolus par la représentation intégrale mixte :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}p = Sq - Hp & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{1}{2}q = H'q - Dp & \text{sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (3.38)$$

Lorsque nous avons formulé cette représentation intégrale, nous pensions qu'elle serait plus stable, et plus précise que la formulation habituellement utilisée dans le milieu pétrolier :

$$\frac{1}{2}p = Sq - Hp \quad \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_D. \quad (3.39)$$

D'autre part, nous aurions pu aussi appliquer la deuxième formulation :

$$\frac{1}{2}q = H'q - Dp \quad \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_D, \quad (3.40)$$

excepté dans le cas d'un problème de Dirichlet (i.e. si $\Gamma_N = \emptyset$), car dans ce cas-là comme pour le puits en milieu infini, la solution serait définie à une constante près, et donc cette formulation intégrale ne représente pas de manière équivalente le modèle EDP.

Des tests numériques (voir tableau 3.3) ont été consacrés à la comparaison des trois formulations pour le deuxième cas-test, et il s'avère que la formulation mixte est effectivement plus précise que la formulation (3.39) ci-dessus.

	Formulation mixte (3.38)	Formulation classique pétrolière (3.39)	Formulation (3.40)
Face 1	0.545146	0.607804	0.474172
Face 2	0.555443	0.593708	0.481075
Face 3	5.49797	7.82536	5.553705
Face 4	10.6227	13.6228	10.6013
Face 5	7.28276	9.73262	7.34073
Face 6	16.3035	23.2279	16.2668

TAB. 3.3 – Erreurs relatives (en %) en norme L^2 selon la formulation utilisée.

Ceci s'explique par le fait que la formulation mixte est une équation intégrale de 2^{ème} espèce à la fois sur Γ_D et Γ_N , tandis que la formulation (3.39) est de 2^{ème} espèce sur Γ_N , mais seulement de 1^{ère} espèce sur Γ_D , et les équations intégrales de 2^{ème} espèce sont plus stables.

Peut-être aurions-nous pu nous attendre à une plus importante différence entre l'erreur obtenue avec la formulation mixte et l'erreur obtenue avec la formulation (3.40). Nous pensons que cette différence est réduite par le fait que pour les deux différentes représentations, une méthode de Galerkin a été employée. L'erreur donnée par la formulation (3.39) aurait probablement été plus grande si nous avions employé une méthode de collocation.

Ces résultats confortent donc notre choix de représentation intégrale.

3.6 Conclusion

Après avoir discuté différentes représentations intégrales, nous avons choisi une nouvelle formulation intégrale pour notre modèle, jamais utilisée dans le milieu pétrolier. Les équations intégrales ont été discrétisées par une méthode de Galerkin, bien adaptée à notre problème et à la formulation que nous avons choisie, puisqu'elle permet de lever facilement l'hypersingularité du noyau dans l'intégrale D . La formulation intégrale a pu être étendue sans grande difficulté à un milieu anisotrope et à un milieu stratifié.

Les premiers tests numériques montrent que notre nouvelle formulation intégrale s'avère plus précise que la formulation intégrale classiquement employée dans le milieu pétrolier.

Il nous reste bien sûr à tester la formulation intégrale pour un réservoir avec un puits. Pour cela, il nous faudra calculer les intégrales sur le puits, et nous verrons que nous pouvons employer une méthode d'approximation filaire. Cette méthode sera développée dans le chapitre suivant, et pour la valider, nous considérerons le cas particulier d'un puits dans un milieu infini. Un réservoir complet (stratifié et anisotrope) sera traité dans le chapitre 5.

3.7 Une autre manière d'appliquer les équations intégrales pour un problème pétrolier

Les méthodes intégrales peuvent être appliquées non plus seules, mais couplées avec des méthodes de volumes finis ou d'éléments finis, afin de tirer les avantages de chacune des méthodes. Les méthodes intégrales sont parfaitement adaptées à des géométries complexes mais sont limitées à des milieux homogènes, tandis que les méthodes de volumes finis ou d'éléments finis traitent bien les hétérogénéités. Ainsi, les méthodes intégrales peuvent être appliquées autour des objets de géométrie complexe (puits, fractures, interfaces ou frontières extérieures), et les méthodes de volumes finis ou d'éléments finis dans le reste du réservoir. Ce couplage de volumes finis ou éléments finis avec les méthodes intégrales a été traité en deux dimensions dans ([43], [44]) et donne des résultats prometteurs. Il reste à le généraliser en trois dimensions.

Chapitre 4

Approximation filaire du puits

Ce chapitre est consacré au traitement du puits, et notamment au calcul des intégrales sur le puits. Nous avons mentionné notre intention de faire une approximation filaire sur le puits. Pourquoi une approximation filaire sur le puits ? Nous savons qu'il existe une importante différence d'échelle entre le rayon du puits et la taille du réservoir, et cela implique une importante différence d'échelle entre le rayon du puits r_w et sa longueur L (le puits est en général creusé sur toute la longueur du réservoir). Etant donnée cette différence d'échelle, il est naturel de représenter la surface du puits non plus par un cylindre, mais par une ligne.

Le problème qui se pose alors est l'expression des intégrales sur le puits : il faudrait passer d'une intégrale 2D sur un cylindre $([0, L] \times [0, 2\pi r_w])$ à une intégrale 1D sur une ligne $([0, L])$. Nous verrons dans ce chapitre comment effectuer ce passage d'une intégrale 2D à une intégrale 1D, et nous montrerons qu'ainsi nous pouvons obtenir une formule analytique pour chacune des intégrales sur le puits, que nous validerons par des tests numériques, mais tout d'abord, nous allons discrétiser la formulation intégrale sur le puits.

4.1 Discrétisation de la formulation intégrale

L'équation intégrale que nous devons discrétiser sur le puits est donc la suivante :

$$\frac{1}{2} p = S q - H p.$$

Nous avons choisi comme méthode de discrétisation la méthode de Galerkin. Nous considérons la famille $(\varphi_i^h)_i$ de fonctions de base éléments finis \mathbb{P}^1 .

Nous faisons l'hypothèse que la pression et le flux sont constants sur une section du puits. Ceci implique que les fonctions de base sont choisies constantes par rapport à l'angle θ considéré, $\theta \in [0, 2\pi]$. Les fonctions de base dépendent alors seulement de la variable axiale l le long du puits :

$$\varphi_i^h(l, \theta) = \varphi_i^h(l), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Le puits est donc discrétisé en segments de longueur Δl_i tels que :

$$\Delta l_i = l_{i+1} - l_i, \quad i = 1, \dots, N_W \text{ avec } L = \sum_{i=1}^{N_W-1} \Delta l_i.$$

Les fonctions de base sont alors définies comme suit :

Pour $i = 1$:

$$\varphi_i^h(l) = \begin{cases} \frac{l - l_{i+1}}{l_i - l_{i+1}} & \text{si } l \in [l_i, l_{i+1}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $i = 2, \dots, N_W - 1$:

$$\varphi_i^h(l) = \begin{cases} \frac{l - l_{i-1}}{l_i - l_{i-1}} & \text{si } l \in [l_{i-1}, l_i], \\ \frac{l - l_{i+1}}{l_i - l_{i+1}} & \text{si } l \in [l_i, l_{i+1}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $i = N_W$:

$$\varphi_i^h(l) = \begin{cases} \frac{l - l_{i-1}}{l_i - l_{i-1}} & \text{si } l \in [l_{i-1}, l_i], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Dans notre cas particulier, la pression est connue le long du puits, mais dans le cas général, la pression, aussi bien que le débit, seront tous les deux inconnus. En vue du cas général, nous écrirons les équations intégrales comme si la pression était inconnue, et nous rajouterons ensuite N_W équations pour compléter le système, écrites sous la forme :

$$p(l_i) = p_w, \quad i = 1, \dots, N_W,$$

ou bien :

$$p(l_1) = p_w, \quad \text{et } p(l_{i+1}) = p(l_i), \quad i = 1, \dots, N_W - 1.$$

Les deux inconnues p et q seront désormais notées dans ce chapitre conformément aux notations adoptées dans le chapitre 2, respectivement φ et ψ . On exprime les deux inconnues dans la base $(\varphi_i^h)_{i=1, N_W}$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{j=1}^{N_W} \varphi_j \varphi_j^h(x), \\ \psi(x) &= \sum_{j=1}^{N_W} \psi_j \varphi_j^h(x). \end{aligned}$$

On reporte ces expressions dans l'équation intégrale, que l'on multiplie ensuite par une fonction de base φ_i^h , et on intègre à nouveau sur Γ_w . On obtient alors le système discrétisé suivant :

$$\left(\frac{1}{2} M_{ij} + H_{ij}\right) p_j - S_{ij} q_j = 0,$$

avec la convention de sommation d'Einstein, et avec :

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(x) d\gamma(x), \\ S_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{1}{|x - y|} d\gamma(y) d\gamma(x), \\ H_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\gamma(y) d\gamma(x). \end{aligned}$$

L'intégrale M_{ij} est facile à calculer, mais les intégrales S_{ij} et H_{ij} sont faiblement singulières. Dans la section suivante, nous verrons parmi les principales étapes du calcul, comment s'effectue le passage de l'intégrale sur le cylindre Γ_w à une intégrale sur une ligne. Ce n'est pas la frontière Γ_w qui est approchée par un segment (c'est pourquoi nous notons toujours Γ_w , et non pas Γ_w^h), mais l'intégrale sur la frontière cylindrique Γ_w qui est approchée analytiquement. Les calculs complets de ces trois intégrales figurent en annexe B.

4.2 Méthode d'approximation du puits par une ligne

Le puits de rayon r_w et de longueur L va être discrétisé en morceaux cylindriques de rayon r_w et de longueur $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$, pour $k = 1, \dots, N_W - 1$, tels que $\sum_{k=1}^{N_W-1} \Delta l_k = L$. Nous allons approcher ces morceaux cylindriques par des segments.

La principale difficulté pour passer d'un cylindre à une ligne est que la normale n'est pas définie en 1D.

La méthode d'approximation repose d'une part sur l'hypothèse que les fonctions de base φ_i^h , $i = 1, \dots, N_W$, sont indépendantes de l'angle θ , $\theta \in [0, 2\pi]$, et d'autre part sur l'hypothèse suivante :

$$(H1) \quad r_w \ll \Delta l_k, \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, N_W - 1.$$

L'hypothèse $(H1)$ est physiquement justifiée par l'importante différence d'échelle entre le rayon du puits r_w et la longueur du puits L (on rappelle que le rayon du puits est de l'ordre de quelques centimètres alors que la longueur du puits se mesure en kilomètres). Cette différence d'échelle est tellement importante que le rayon r_w du puits est aussi négligeable par rapport aux éléments de longueur Δl_k , $k = 1, \dots, N_W - 1$, pourvu que la discrétisation le long du puits ne soit pas trop fine.

Nous allons voir comment appliquer l'hypothèse $(H1)$ dans les principales étapes du calcul. La méthode étant exactement la même pour les deux intégrales S_{ij} et H_{ij} , nous l'exposerons ici uniquement pour le calcul de H_{ij} . Le lecteur trouvera en annexe B tous les détails des calculs des deux intégrales. Nous présentons aussi cette méthode dans [29] et [58].

Dans un premier temps, nous nous limitons au cas d'un puits horizontal. Les calculs peuvent s'adapter aux puits complexes.

Nous nous proposons donc de calculer :

$$H_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma(y) d\gamma(x).$$

On a :
$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = -\frac{n_y \cdot (x-y)}{|x-y|^3}.$$

Après être passés en coordonnées polaires, et après quelques simplifications (voir annexe B), l'intégrale H_{ij} s'écrit :

$$H_{ij} = 2 r_w \int_0^L \varphi_i^h(l') dl' \int_0^L \varphi_j^h(l) dl \int_0^{\pi/2} \frac{2 r_w^2 \sin^2 \theta d\theta}{[4 r_w^2 \sin^2 \theta + (l-l')^2]^{3/2}}.$$

Pour des raisons purement techniques, il est plus aisé d'intégrer tout d'abord par rapport aux variables l et l' , et ensuite par rapport à θ .

Commençons donc par calculer :

$$I_{H_{ij}}(\theta) = \int_0^L \varphi_i^h(l') dl' \int_0^L \varphi_j^h(l) dl \frac{2r_w^2 \sin^2 \theta}{[4r_w^2 \sin^2 \theta + (l-l')^2]^{3/2}}.$$

Si $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, cette intégrale ne présente aucune singularité.

Nous traiterons tout d'abord le cas où $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, puis dans un second temps le cas où $j - 2 \leq i \leq j + 2$.

4.2.0.4 1^{er} cas : $i < j - 2$ ou $i > j + 2$

Intégration par rapport à l et l' : On commence par intégrer par rapport à l et l' , et on note : $a^2 = 2r_w^2 \sin^2 \theta$.

D'après l'hypothèse (H_1), et comme $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, le terme $2a^2$ est ici négligeable devant $(l-l')^2$. On peut donc approcher l'intégrale $I_{H_{ij}}$ par :

$$\begin{aligned} I_{H_{ij}}(a) &\approx \int_0^L \varphi_i^h(l') dl' \int_0^L \varphi_j^h(l) dl \frac{a^2}{|l-l'|^3} \\ &= \sum_{k=1}^{N_W-1} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l') dl' \sum_{m=1}^{N_W-1} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_j^h(l) dl \frac{a^2}{|l-l'|^3}. \end{aligned}$$

Comme la matrice H_{ij} est symétrique, on se place par exemple dans le cas où $i < j - 2$. Ceci nous permet de lever la valeur absolue de $l - l'$.

Notre intégrale devient alors :

$$I_{H_{ij}}(a) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}(a) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l') dl' \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_j^h(l) dl \frac{a^2}{(l-l')^3},$$

avec :

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \{i-1, i\}, & \text{si } 2 \leq i \leq N_W - 2, \\ \{i\}, & \text{si } i \in \{1, N_W - 1\}, \end{cases}, \quad \mathcal{J} = \begin{cases} \{j-1, j\}, & \text{si } 2 \leq j \leq N_W - 2, \\ \{j\}, & \text{si } j \in \{1, N_W - 1\}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que chacune des intégrales I_{ikjm} peut se réécrire (au signe près) par un changement de variables sous la forme :

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds ds'}{(s-s'+c_{ikjm})^3}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } b_{ik} &= l_i - (\delta_{ik} l_{k+1} + \delta_{ik+1} l_k), & b_{jm} &= l_j - (\delta_{jm} l_{m+1} + \delta_{jm+1} l_m), \\ c_{ikjm} &= (\delta_{jm} l_{m+1} + \delta_{jm+1} l_m) - (\delta_{ik} l_{k+1} + \delta_{ik+1} l_k), \end{aligned}$$

et δ la fonction de Kronecker.

On remarque que $c_{ikjm} \neq 0$ pour $i < j - 2$ et $i > j + 2$, et $b_{ik} \neq 0$, $b_{jm} \neq 0$.

On obtient alors après calculs :

$$\begin{aligned} I_{ikjm}(a) &= \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \left(\frac{a^2 c_{ikjm}}{2} \left\{ \ln |b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}| - \ln |c_{ikjm} - b_{ik}| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln |c_{ikjm}| - \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \right\} - \frac{a^2 b_{ik} b_{jm}}{2(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})} \right). \end{aligned}$$

Intégration par rapport à θ : Maintenant il nous reste à intégrer par rapport à θ :

$$\int \frac{a^2}{2} = \int_0^{\pi/2} r_w^2 \sin^2(\theta) d\theta = \left[r_w^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = r_w^2 \frac{\pi}{4}.$$

On obtient finalement, pour $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, au signe près :

$$H_{ij} = r_w^2 \frac{\pi}{4} \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \left\{ c_{ikjm} \ln \left| \frac{(b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) c_{ikjm}}{(c_{ikjm} - b_{ik})(b_{jm} + c_{ikjm})} \right| - \frac{b_{ik} b_{jm}}{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})} \right\}.$$

4.2.0.5 2^{ème} cas : $j - 2 \leq i \leq j + 2$

Le cas où $j - 2 \leq i \leq j + 2$ est un cas singulier : nous ne pouvons plus négliger le terme $2a^2$ devant $(l - l')$, car ici $(l - l')$ peut être très petit, ou même nul. De la même manière que précédemment, on peut se placer dans le cas $j - 2 \leq i$, et écrire :

$$I_{H_{ij}}(a) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}(a),$$

où $I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds ds'}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{3/2}}.$

La fonction I_{ikjm} est calculée en annexe A, elle vaut :

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} (\zeta(a) + \zeta_1(a) + \zeta_2(a) + \zeta_3(a) + \zeta_4(a))$$

avec :

$$\begin{aligned} \zeta(a) &= -f(a, b_{jm} + c_{ikjm}) - f(a, c_{ikjm} - b_{ik}) \\ &\quad + f(a, b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + f(a, c_{ikjm}) \\ \zeta_1(a) &= f_1(2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_2(a) &= f_2(2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_3(a) &= f_3(2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_4(a) &= f_4(2a^2 + c_{ikjm}^2) \end{aligned}$$

et les fonctions f, f_1, f_2, f_3 , et f_4 sont définies dans l'annexe A.

Intégration par rapport à θ Nous devons maintenant intégrer chacun des termes $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, et ζ_4 , par rapport à θ .

Pour effectuer cette intégration, nous allons utiliser l'hypothèse (H_1).

On va employer la même méthode pour chacun des termes $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, et ζ_4 . Le terme ζ sera traité à part.

On peut montrer que chacune des quantités $b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}, b_{jm} + c_{ikjm}, -b_{ik} + c_{ikjm}, c_{ikjm}$ est soit nulle, soit supérieure en valeur absolue au minimum des Δ_k , pour $k = 1, \dots, N_W$.

Alors, dans le cas où l'une des quantités est non nulle, on peut négliger le terme $2a^2 = 4r_w^2 \sin^2(\theta)$

devant la quantité concernée, d'après l'hypothèse (H_1). Alors chacune des fonctions peut être approchée par :

$$\begin{array}{llll} \text{Si } b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm} \neq 0, & \zeta_1(a) \approx f_1((b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2) & = \zeta_1(0), \\ \text{si } b_{jm} + c_{ikjm} \neq 0, & \zeta_2(a) \approx f_2((b_{jm} + c_{ikjm})^2) & = \zeta_2(0), \\ \text{si } -b_{ik} + c_{ikjm} \neq 0, & \zeta_3(a) \approx f_3((-b_{ik} + c_{ikjm})^2) & = \zeta_3(0), \\ \text{si } c_{ikjm} \neq 0, & \zeta_4(a) \approx f_4(c_{ikjm}^2) & = \zeta_4(0). \end{array}$$

Maintenant, si l'une des quantités $b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}$, $b_{jm} + c_{ikjm}$, $-b_{ik} + c_{ikjm}$, c_{ikjm} est nulle, alors il est facile d'intégrer directement par rapport à θ (voir annexe B).

Il nous reste à intégrer la fonction ζ par rapport à θ .

Pour cela, regardons comment s'écrit la fonction f :

$$f(a, s) = \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right).$$

Notons que s peut prendre les valeurs $b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}$, $b_{jm} + c_{ikjm}$, $-b_{ik} + c_{ikjm}$, ou c_{ikjm} . Ici nous devons distinguer trois différents cas selon le signe de la quantité s : on considère les cas où $s > 0$, $s < 0$, et $s = 0$.

- Si $s > 0$, nous pouvons négliger $2a^2$ dans l'expression $\left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right)$ d'après (H_1), et donc :

$$f(a, s) \approx \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln (2s).$$

- Si $s = 0$, on intègre par parties.
- Si $s < 0$, on ne peut pas directement négliger $2a^2$ dans l'expression $\left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right)$, alors on multiplie par l'expression conjuguée :

$$f(a, s) = \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left(\frac{2a^2}{-s + \sqrt{2a^2 + s^2}} \right) = 2f(a, 0) - f(a, -s),$$

et comme $-s$ est positif, on peut maintenant approcher $f(a, -s)$ de la même manière que précédemment, et on obtient :

$$f(a, s) \approx 2f(a, 0) - \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln (-2s).$$

Conclusion :

L'hypothèse (H_1) est utilisée de manière différente selon qu'on se situe dans le cas régulier ($i < j - 2$ ou $i > j + 2$), ou dans le cas singulier ($j - 2 \leq i \leq j + 2$). Le cas régulier est évidemment le plus simple : la quantité $(l - l')$ est toujours assez grande pour que l'on puisse appliquer l'hypothèse (H_1) directement et avant toute intégration.

Dans le second cas, la quantité $(l - l')$ peut s'annuler, ce qui ne nous permet pas de négliger tout de suite le rayon r_w devant $(l - l')$. Nous sommes obligés d'intégrer tout d'abord par rapport aux deux variables de longueur l et l' , et c'est ensuite qu'on pourra terme à terme regarder si on peut appliquer l'hypothèse (H_1) ou non.

Finalement, grâce à l'hypothèse (H_1) et grâce au fait qu'on suppose les fonctions de base constantes par rapport à θ , on obtient une approximation analytique de toutes les intégrales sur le puits. Ainsi nous pouvons réduire le puits à une ligne.

Cas d'un puits en milieu anisotrope.

Dans le cas d'un puits en milieu anisotrope, il faudrait prendre en compte dans tous les calculs faits précédemment (et en annexe B) le tenseur de perméabilité. Une autre possibilité serait de transformer le milieu anisotrope en milieu isotrope, mais le puits cylindrique deviendrait alors une ellipsoïde, et tous les calculs seraient à reprendre. J. Besson dans [11], simplifie le problème en passant effectivement à un milieu isotrope, et en modélisant l'ellipsoïde représentant le puits par un cylindre de rayon équivalent. Le choix de ce rayon équivalent a été discuté dans la littérature, notamment par Brigham dans [15] : ses conclusions sont valides quelle que soit la géométrie du puits, le rayon équivalent est obtenu comme la moyenne arithmétique entre les longueurs du plus grand et du plus petit axe de la section elliptique. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [11].

Dans notre cas, pour traiter les intégrales portant sur le puits en milieu anisotrope, nous appliquerons donc les calculs effectués précédemment à un cylindre en choisissant pour r_w non plus le rayon réel du puits, mais son rayon équivalent défini dans [11].

4.3 Validations pour un puits en milieu infini

Dans cette section, nous présentons les résultats numériques obtenus pour le cas d'un puits horizontal seul en milieu infini. Le puits est choisi de rayon 10.8 cm et de longueur 1000 m. Le réservoir est homogène, isotrope de perméabilité $k = 1$ mD.

Nous imposons une condition de conductivité infinie sur le puits, à savoir la pression le long du puits est supposée constante et égale à 1 bar.

Nous résolvons donc le modèle suivant :

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{dans } {}^C\Omega, \\ p = 0 & \text{à l'infini,} \\ p = 1 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases}$$

Nous ne disposons pas de solution analytique pour résoudre ce système, alors nous comparons nos résultats à ceux obtenus par Y. Ding en appliquant la même formulation intégrale mais en discrétisant par une méthode de collocation.

Le puits est discrétisé en $N_W - 1 = 8$ segments, et en raffinant le maillage à ses extrémités, selon la formule :

$$l_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{(i-1)\pi}{N_W - 1} \right) \right) L, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N_W. \quad (4.1)$$

La figure 4.1 montre donc le flux le long de l'axe du puits obtenu avec les deux méthodes.

Nous pouvons constater sur ce graphe que les résultats semblent concorder, notre approximation est donc satisfaisante.

Maintenant nous nous proposons de tester la convergence de notre modèle. Nous effectuons donc exactement le même test, mis à part que cette fois-ci, le maillage le long du puits est régulier : le puits est tour à tour discrétisé en 8 segments de même longueur, puis 10, puis 20 et enfin 50. Nous pouvons observer sur la figure 4.2 que la méthode converge bien. Les quelques irrégularités aux extrémités du puits sont dues au fait que la discrétisation du puits est uniforme, si nous raffinons le maillage aux extrémités du puits par la formule (4.1), nous obtenons des courbes plus régulières comme dans le premier test.

Ces résultats figurent dans [58] et [29].

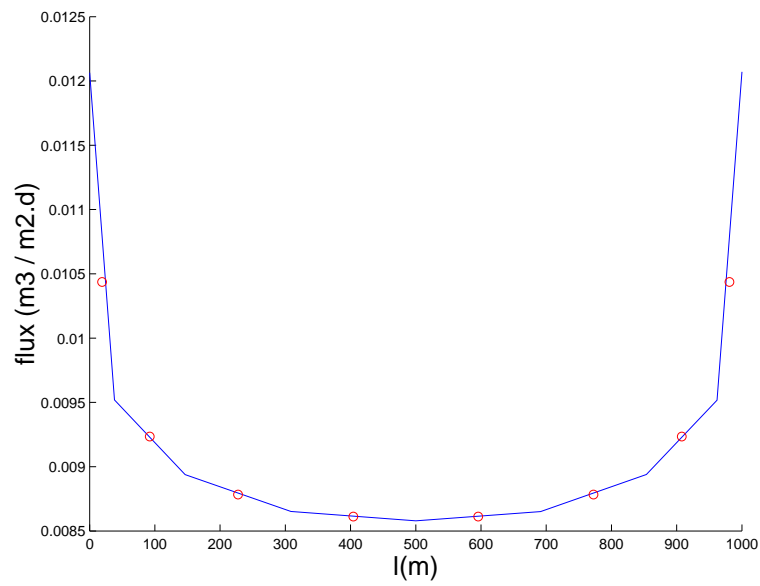


FIG. 4.1 – - : méthode de Galerkin - o : méthode de collocation

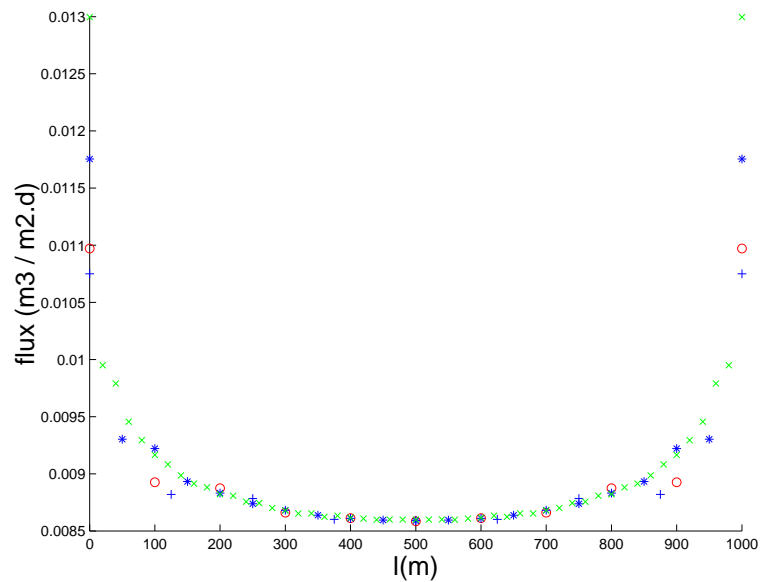


FIG. 4.2 – + : $N=8$ - o : $N=10$ - * : $N=20$ - x : $N=50$

4.4 Conclusion du chapitre

Nous avons mis en œuvre une approximation filaire du puits, et nous avons montré qu'elle donne des résultats numériques tout à fait satisfaisants.

La question de l'approximation filaire dans le contexte des méthodes intégrales se pose dans de nombreux problèmes physiques, comme en électromagnétisme avec les antennes ou les fils électriques. L'approximation filaire intéresse de nombreux chercheurs, et tout un travail théorique sur les approximations filaires reste à faire, y compris pour notre problème.

Chapitre 5

Résultats numériques

Ce chapitre est consacré à tous les tests numériques effectués pour valider la formulation intégrale choisie, et pour montrer la convergence de la méthode. Certains de ces tests ont été publiés dans [29]. Nous avons déjà validé l'approximation filaire du puits, ainsi que la formulation intégrale dans le cas particulier d'un réservoir sans puits. Nous allons ici compléter ces résultats par des tests numériques pour un réservoir homogène avec un puits, ensuite pour un réservoir stratifié sans puits, et enfin pour un réservoir stratifié avec un puits.

5.1 Réservoir homogène avec un puits

Nous allons dans un premier temps traiter le cas d'un réservoir homogène avec un puits. Nous rappelons la formulation choisie pour traduire le modèle (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} q = H' q - D p & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{1}{2} p = S q - H p & \text{sur } \Gamma_N, \\ \frac{1}{2} p = S q - H p & \text{sur } \Gamma_w. \end{array} \right.$$

5.1.1 Discrétisation des intégrales mixtes

En discrétisant ce système d'équations intégrales par une méthode de Galerkin, on obtient alors le système discrétisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{1}{2} M_{ij} - H'_{ij}\right) q_j = -D_{ij} p_j & \text{sur } \Gamma_D, \\ \left(\frac{1}{2} M_{ij} + H_{ij}\right) p_j = S_{ij} q_j & \text{sur } \Gamma_N, \\ \left(\frac{1}{2} M_{ij} + H_{ij}\right) p_j = S_{ij} q_j & \text{sur } \Gamma_w, \end{array} \right.$$

avec :

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \zeta_i^h(x) \zeta_j^h(x) d\gamma_h(x), \\
S_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \zeta_i^h(x) \zeta_j^h(y) \frac{1}{|x-y|} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\
H_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \zeta_i^h(x) \zeta_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\
H'_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \zeta_i^h(x) \zeta_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x), \\
D_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\int_{\Gamma_h} \zeta_i^h(x) \zeta_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) \right) d\gamma_h(x),
\end{aligned}$$

où ζ_i^h désigne la fonction de base associée au sommet numéro i , c'est-à-dire soit φ_i^h si le sommet i appartient au puits, soit ψ_i^h si le sommet i appartient à une frontière extérieure du réservoir (ou à une interface pour le cas plus général d'un réservoir multi-couches). La normale est orientée vers l'extérieur du réservoir, elle est donc orientée en particulier pour le puits vers l'intérieur du puits.

Nous allons décomposer les quantités M_{ij} , S_{ij} , H_{ij} , H'_{ij} et D_{ij} en décomposant la frontière Γ_h . On notera $\Gamma_{ext}^h = \Gamma_D^h \cup \Gamma_N^h$, les frontières extérieures Γ_D^h et Γ_N^h étant de même nature (approchées par une triangulation contrairement au puits qui est discrétisé par des segments). Nous soulignons toutefois que ce n'est pas la frontière cylindrique du puits que nous approchons par une ligne, mais nous faisons une approximation analytique de l'intégrale sur le puits cylindrique en utilisant l'hypothèse (H1), et en supposant la pression et le flux indépendants de θ . C'est pourquoi nous notons toujours Γ_w , et non pas Γ_w^h .

Pour l'intégrale M_{ij} , il est facile de voir que :

$$M_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_{ext}^h} \psi_i^h(x) \psi_j^h(x) d\gamma_h(x) & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ appartiennent} \\ & \text{à des frontières extérieures,} \\ \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(x) d\gamma(x) & \text{si les sommets } i \text{ et } j \text{ appartiennent} \\ & \text{au puits,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère ici que le puits ne rencontre pas les frontières extérieures (ni les interfaces pour le cas d'un réservoir multi-couches), l'intersection des supports des fonctions de base ψ_i^h et φ_j^h est donc nulle.

On suppose par ailleurs que le puits est suffisamment éloigné des interfaces et des bords extérieurs.

Le calcul des intégrales puits / puits et bords / bords est le même que précédemment, il ne

nous reste donc qu'à calculer les intégrales mixtes puits / bords et bords / puits :

$$\begin{aligned}
 S_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_{ext}^h} \varphi_i^h(x) \psi_j^h(y) \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) d\gamma(x), \\
 H_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_{ext}^h} \varphi_i^h(x) \psi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) d\gamma(x), \\
 H'_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_{ext}^h} \varphi_i^h(x) \psi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) d\gamma(x), \\
 D_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\int_{\Gamma_{ext}^h} \psi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma_h(y) \right) d\gamma(x).
 \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que le puits était suffisamment éloigné des autres frontières, les noyaux respectifs de chacune de ces intégrales ne seront pas singuliers, et en particulier, on peut faire rentrer le $\partial/\partial n_y$ à l'intérieur de l'intégrale sur Γ_{ext}^h pour l'intégrale D_{ij} .

Nous pouvons donc, sous cette hypothèse, calculer les deux premières intégrales doubles S_{ij} et H_{ij} par intégration numérique. Pour le calcul des intégrales H'_{ij} et D_{ij} , un calcul numérique est plus délicat, puisqu'intervient la normale au puits. Le calcul numérique ne sera précis que si l'on considère suffisamment de directions de la normale pour chacune des sections du puits. Or cela risque de devenir très coûteux numériquement. Nous calculerons donc ces intégrales par une approximation analytique, toujours en appliquant l'hypothèse (H1) que le rayon du puits est très petit devant la longueur du puits et la taille du réservoir, et que les fonctions de base sur le puits sont indépendantes de l'angle θ , $\theta \in [0, 2\pi]$.

L'approximation analytique de ces diverses intégrales est détaillée en annexe C.

Une fois ces calculs faits, nous sommes en mesure de tester un réservoir homogène avec un puits, et ensuite un réservoir stratifié avec un puits.

5.1.2 Tests numériques

5.1.2.1 Premier test

Nous considérons ici un réservoir homogène, anisotrope, de dimensions $1500 \text{ m} \times 500 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ (voir figure 5.1). On place au centre du réservoir un puits de longueur 1000 m et de rayon 0.108 m . Le tenseur de perméabilité $\overline{\overline{K}}$ est donné par :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{pmatrix} 100 \text{ mD} & 0 & 0 \\ 0 & 100 \text{ mD} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \text{ mD} \end{pmatrix}.$$

On impose une pression de 200 bar sur chacune des faces $x = 0 \text{ m}$ et $x = 1500 \text{ m}$, et une condition de Neumann homogène (flux nul) sur les quatre autres faces. Le débit total du puits est fixé à $100 \text{ m}^3/\text{j}$.

Le puits est discrétisé en 20 segments, et les frontières extérieures en 4400 mailles (30 mailles dans la direction x , 10 mailles dans la direction y , et 20 dans la direction z - voir figure 5.2) .

Les résultats sont comparés avec les résultats obtenus par une méthode semi-analytique, développée par Rémy Basquet ([9]). La figure 5.3 montre la répartition des flux selon le long de l'axe du puits.

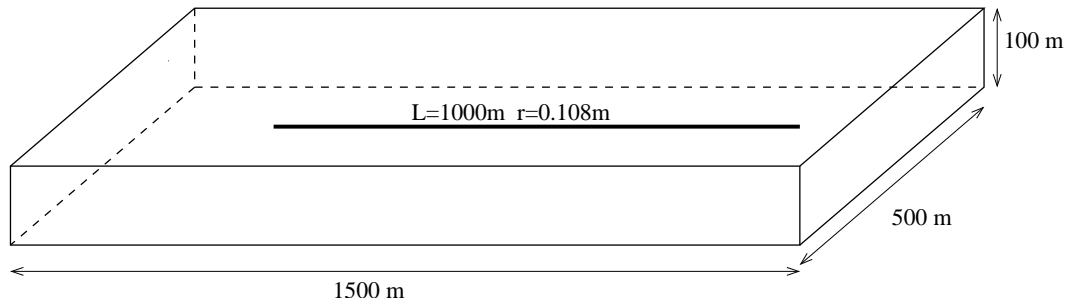


FIG. 5.1 – Réservoir homogène en forme de boîte.

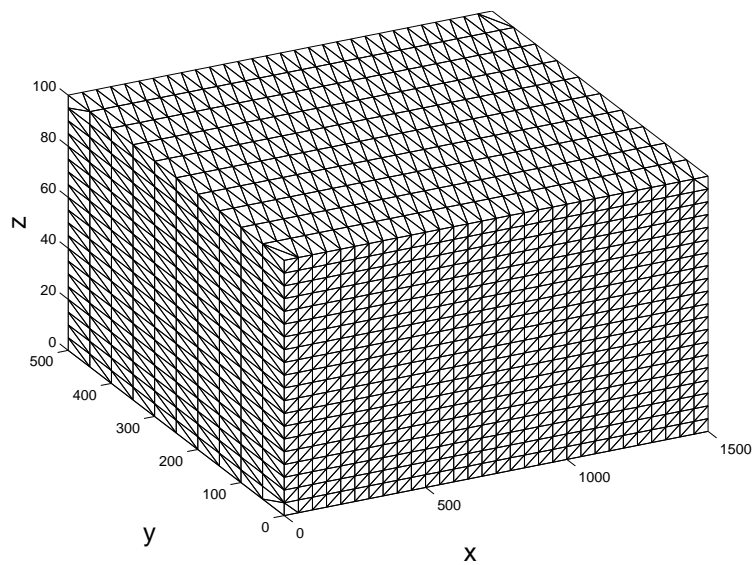


FIG. 5.2 – Maillage du réservoir.

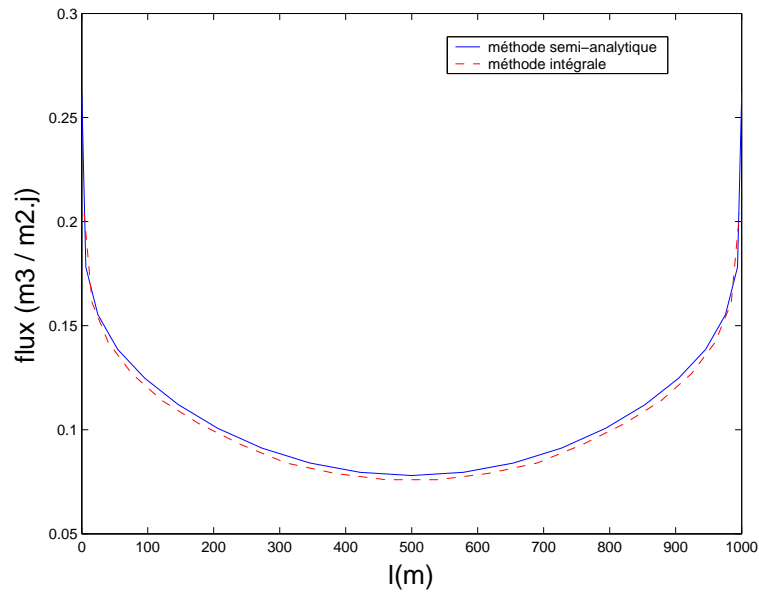


FIG. 5.3 – Flux le long de l'axe du puits.

Calcul de l'indice de productivité du puits : Le but de ce test numérique est le calcul de l'indice de productivité du puits, dont on rappelle la définition :

$$IP = \frac{Q}{\bar{p} - p_w}$$

Ici, nous trouvons : $p_w = 199,1745$ bars. L' IP du puits vaut alors :

$$IP = \frac{100}{200 - 199,1745} = 121,14 \text{ m}^3/\text{j}/\text{bar}.$$

Avec la méthode semi-analytique, on obtient un IP de $120,77 \text{ m}^3/\text{j}/\text{bar}$.

On obtient donc une erreur de 0,3 % sur l' IP du puits.

5.1.2.2 Second test

Nous reprenons exactement le même cas que précédemment, mais en changeant la hauteur du réservoir : on considère maintenant un réservoir de hauteur 300 m et non plus un réservoir de hauteur 100 m.

Nous allons maintenant étudier l'influence du maillage sur les bords extérieurs sur l' IP .

La solution semi-analytique est de $180.180 \text{ m}^3/\text{j}/\text{bar}$.

Influence du maillage des bords extérieurs : Examinons tout d'abord l'influence du maillage extérieur sur l'indice de productivité trouvé.

Les différents maillages utilisés sont représentés par les figures 5.4 à 5.7 à la fin de la section.

On observe bien la convergence de la méthode lorsque l'on raffine le maillage, et on obtient à partir de 2700 mailles, une erreur inférieure à 1%.

Nombre de mailles	Figure	Nombre de segments	IP	Erreur (en %)
300	5.4	20	184,54	2,4
1200	5.5	20	182,27	1,2
2700	5.6	20	181,935	0,9
12400	5.7	20	181,54	0,7

TAB. 5.1 – Influence du maillage des bords extérieurs sur le calcul de l' IP .

Maillages utilisés : Nous avons construit le maillage de telle sorte que chaque coin soit le sommet d'un seul triangle, et non pas de deux triangles. Ainsi on amoindrit les erreurs bien connues des méthodes intégrales aux coins.

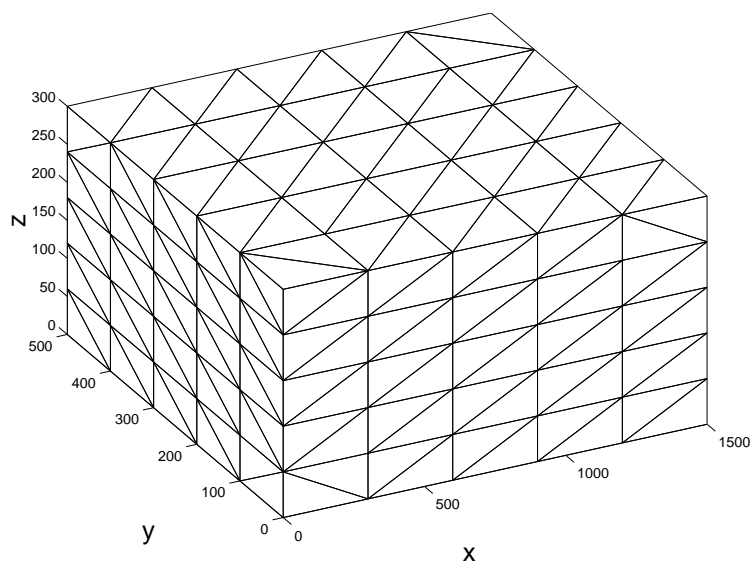


FIG. 5.4 – Maillage 1 : 300 mailles.

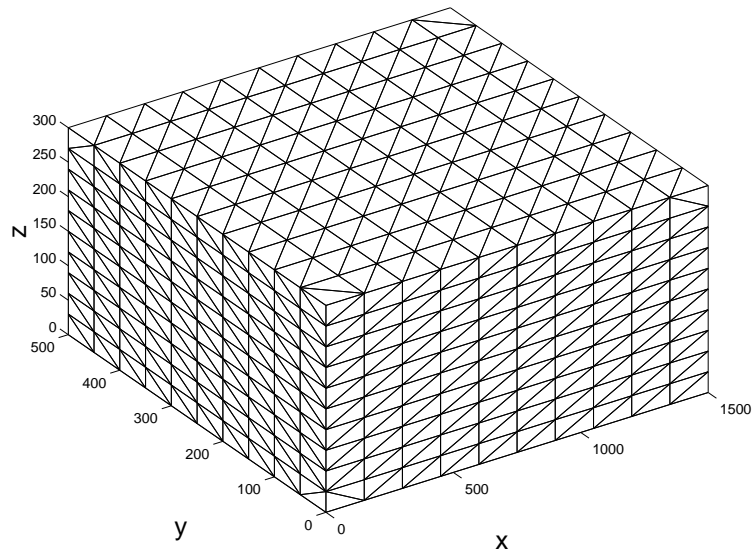


FIG. 5.5 – Maillage 2 : 1200 mailles.

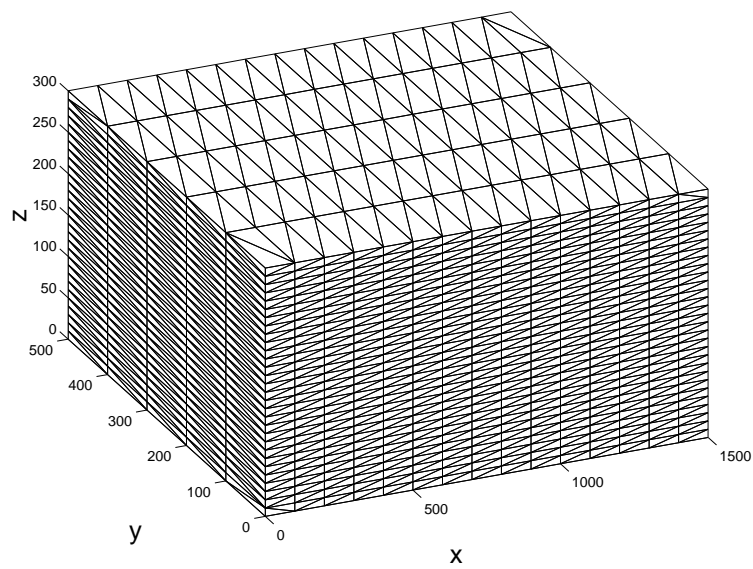


FIG. 5.6 – Maillage 3 : 2700 mailles.

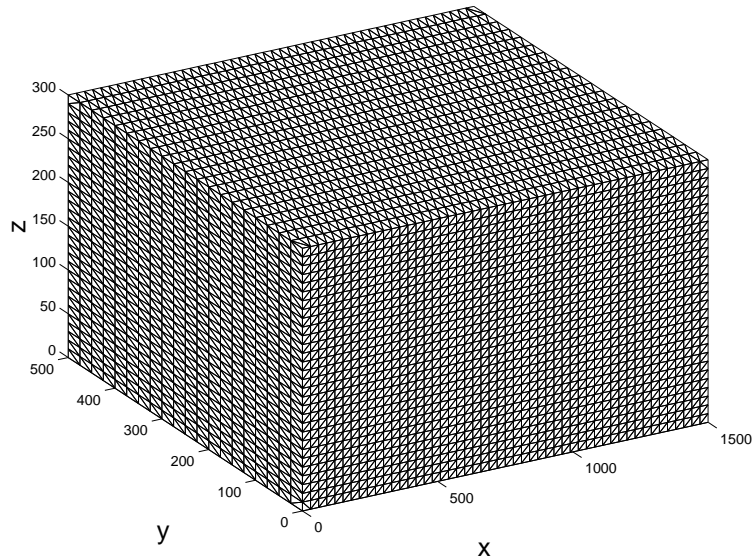


FIG. 5.7 – Maillage 4 : 12400 mailles.

5.2 Réservoir stratifié sans puits

Avant de valider le cas d'un réservoir stratifié avec un puits, nous allons tout d'abord valider le cas d'un réservoir stratifié sans puits. Pour cela, nous allons considérer un réservoir bicouche (voir figure 5.8), avec une perméabilité différente par couche, et nous allons simuler un écoulement linéaire vertical. Nous imposons une pression de 1 bar sur le mur du réservoir (face $z = 0$ m), et

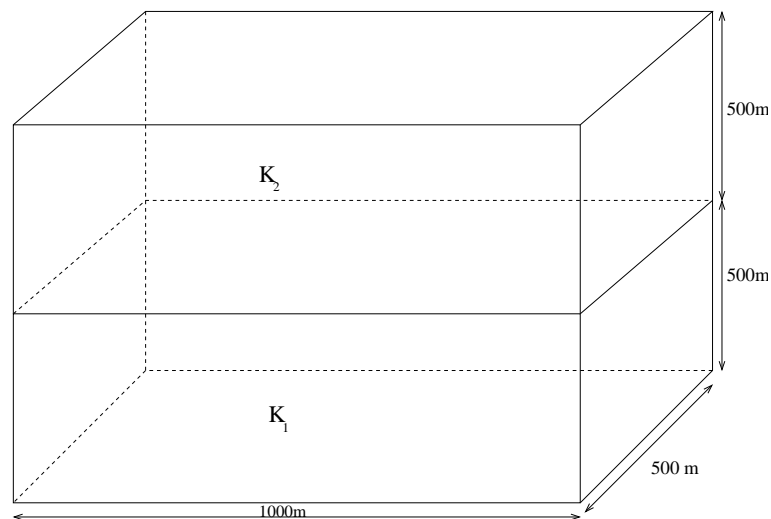
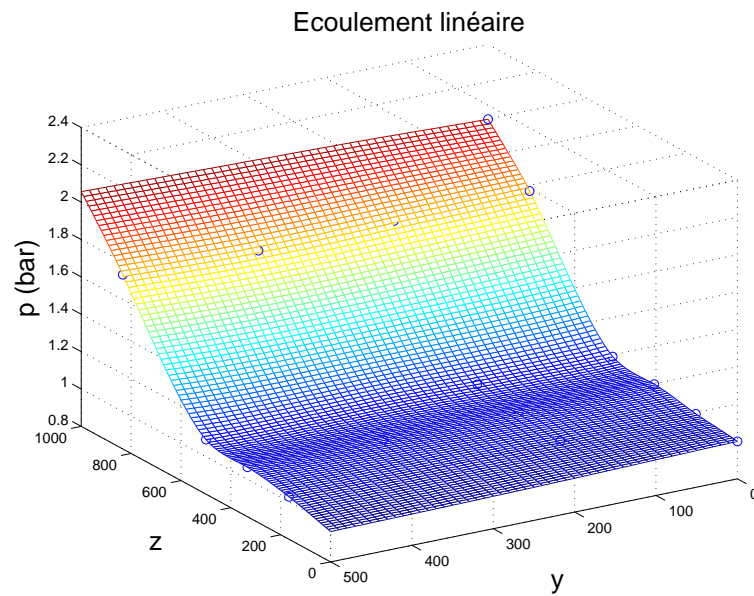


FIG. 5.8 – Réservoir bicouche sans puits.

une pression de 2 bar sur le toit du réservoir (face $z = 500$ m).

Nous observons les résultats sur la face $x = 0$ m : l'écoulement est bien linéaire par couche (voir figure 5.9). Les figures 5.10 montrent que l'erreur relative reste toujours en dessous de 2%.

Ces tests ont été effectués avec un maillage comprenant 550 mailles (représenté par la figure

FIG. 5.9 – Ecoulement sur la face $x = 0$ m.

5.11(b)), ce qui nous donne une erreur relative en norme L^2 de 0,61%. Avec un maillage plus grossier (198 mailles - voir figure 5.11(a)), nous obtenons une erreur relative en norme L^2 de 1,38%.

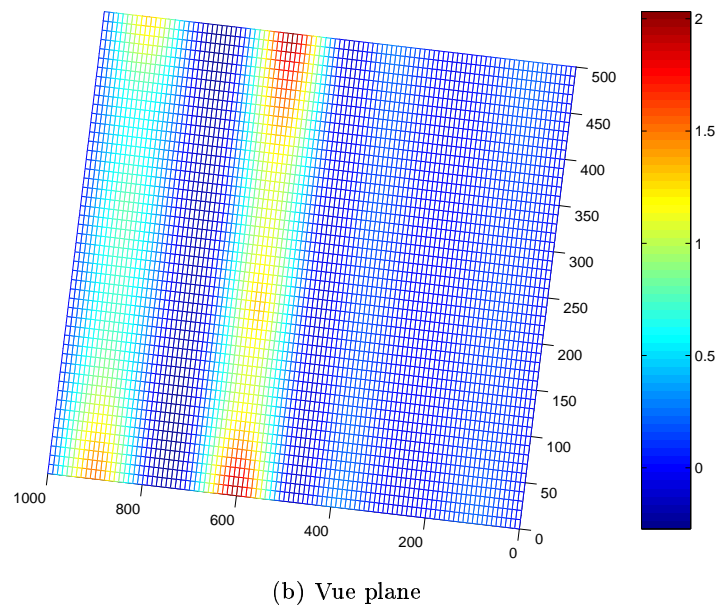
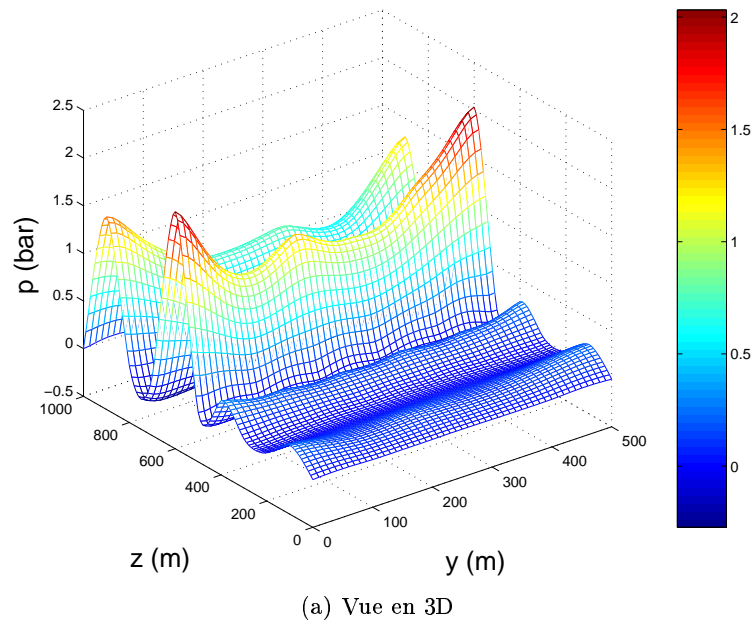
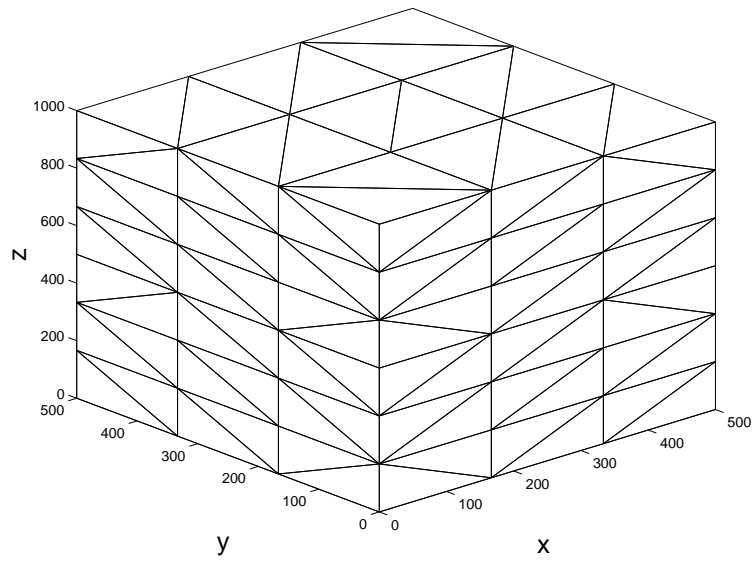
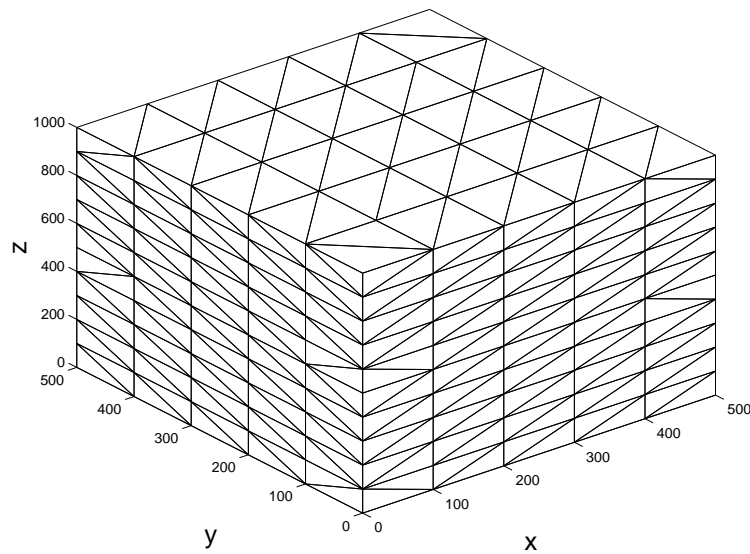


FIG. 5.10 – Erreur relative (en %).



(a) Maillage 1 : 198 mailles.



(b) Maillage 2 : 550 mailles.

FIG. 5.11 – Maillages utilisés.

5.3 Réservoir stratifié avec un puits

Maintenant que nous savons traiter un réservoir stratifié sans puits, et un réservoir homogène avec un puits, il ne nous reste plus qu'à traiter un réservoir stratifié avec un puits.

Dans un premier temps, nous allons considérer un réservoir homogène auquel nous allons ajouter des couches artificielles. Ainsi nous pourrons comparer la précision des résultats suivant si l'on considère le réservoir comme étant homogène, ou multi-couches.

Ensuite, nous effectuerons des tests pour un réservoir stratifié avec des perméabilités différentes par couche.

5.3.1 Comparaison avec un réservoir homogène

Nous reprenons le second cas test du paragraphe 5.1.2. Introduisons des couches artificielles, horizontales, d'équations $z = 100$ m, et $z = 200$ m, comme sur la figure 5.12.

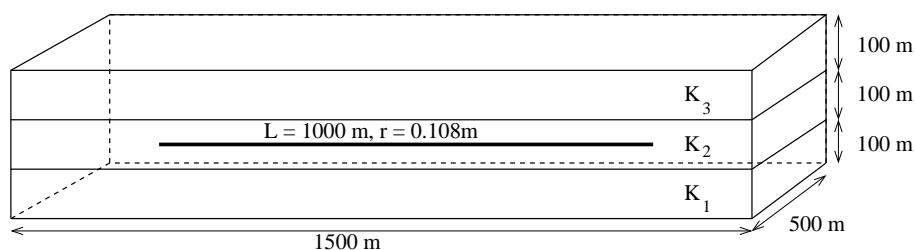


FIG. 5.12 – Réservoir homogène considéré comme un réservoir comprenant trois couches.

Le réservoir homogène est maillé par 2700 triangles, soit 15 dans la direction x , 5 dans la direction y , et 30 dans la direction z . Pour le réservoir stratifié, le maillage est le même : les interfaces $z = 100$ m et $z = 200$ m sont maillées exactement de la même façon que les faces $z = 0$ m et $z = 300$ m ; on obtient ainsi 3000 triangles. Si nous traçons les courbes représentant la répartition des flux obtenues dans un réservoir homogène et dans un réservoir stratifié, elles sont confondues (voir figure 5.13).

On peut donc remarquer que les couches artificielles dans un réservoir homogène n'altèrent pas la précision des résultats.

Maintenant regardons ce qu'il en est pour l' IP dans le tableau 5.2.

Nombre de mailles	Nombre de segments	IP	Erreur (en %)
800	20	183,98	2,1
3000	20	181,81	0,9
7200	20	181,52	0,74
16400	20	181,46	0,71

TAB. 5.2 – Influence du maillage sur le calcul de l' IP .

On remarque tout d'abord que pour 3000 mailles, on obtient la même erreur relative que pour le cas homogène avec 2700 mailles. Cela signifie que le fait d'ajouter deux interfaces artificielles ne modifie pas la précision du résultat. Seule la taille des mailles influe, et l'on peut voir à travers le tableau que plus le nombre de mailles augmente, plus l'erreur sur l' IP diminue.

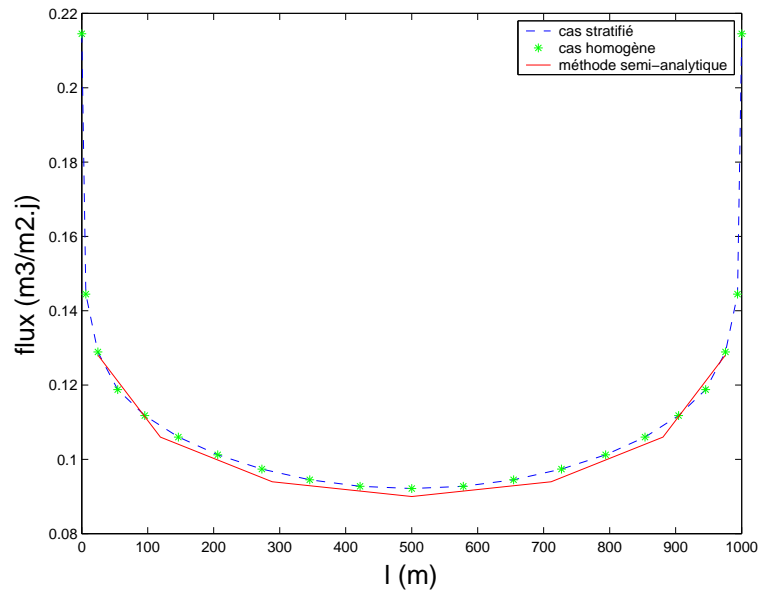


FIG. 5.13 – Flux le long de l’axe du puits.

5.3.2 Réservoir avec pendage

Dans cette section, nous nous intéressons à un réservoir comprenant trois couches, et dont les interfaces ne sont pas horizontales (voir figure 5.14).

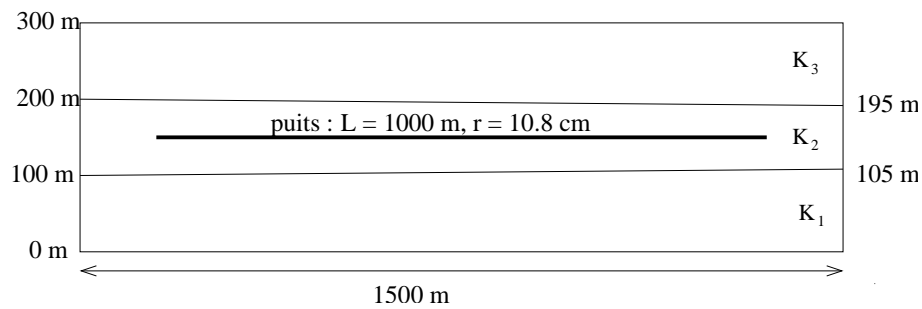


FIG. 5.14 – Réservoir avec pendage.

Les dimensions du réservoir sont $1500 \text{ m} \times 500 \text{ m} \times 300 \text{ m}$, et les tenseurs de perméabilité sont donnés par :

- $\overline{\overline{K}}_1 : k_{1,1} = k_{1,2} = 50 \text{ mD}, k_{1,3} = 5 \text{ mD},$
- $\overline{\overline{K}}_2 : k_{2,1} = k_{2,2} = 100 \text{ mD}, k_{2,3} = 10 \text{ mD},$
- $\overline{\overline{K}}_3 : k_{3,1} = k_{3,2} = 1000 \text{ mD}, k_{3,3} = 100 \text{ mD}.$

Un puits est placé au centre du réservoir, de longueur 1000 m et de rayon 0.108 m. Le puits est discrétisé en 20 segments, avec un raffinement aux extrémités du puits. Un débit de $100 \text{ m}^3/\text{j}$

est imposé pour le puits. Les maillages du réservoir ont été construits de la même manière que pour les tests précédents.

Par ailleurs, on suppose la pression $p_D = 200$ bar sur les faces $x = 0$ m, et $x = 1500$ m. Sur les autres faces, une condition de flux nul est appliquée.

Pour ce cas-test, nous n'avons aucune solution de référence, car les codes dont nous disposons jusqu'à présent ne peuvent traiter le pendage des couches. Alors nous avons effectué un test de convergence, tout d'abord pour la répartition des débits le long du puits, sur la figure 5.15.

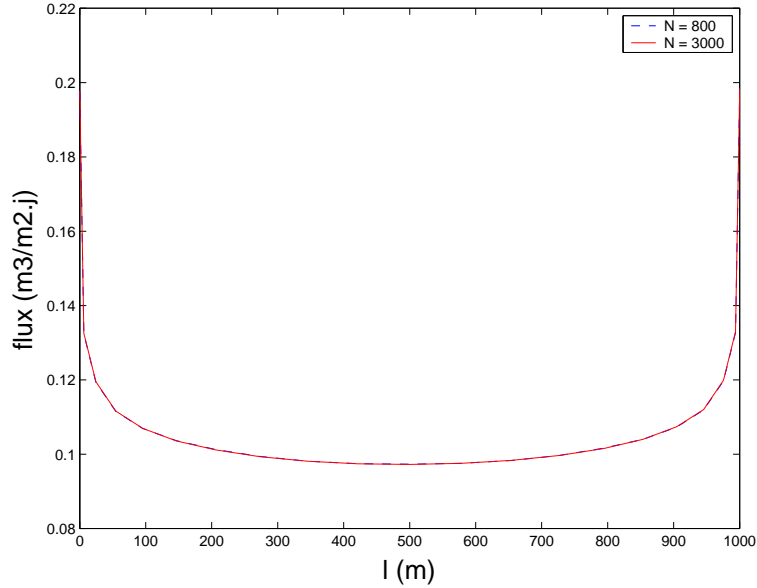


FIG. 5.15 – Flux le long de l'axe du puits.

Nous pouvons constater qu'avec un maillage de 800 mailles, ou bien un maillage de 3000 mailles, les courbes donnant la répartition des flux sont quasiment confondues.

D'autre part, pour l'*IP*, le premier test avec 800 mailles nous donne un *IP* de 219,71 m³/j/bar, et le deuxième un *IP* de 218,67 m³/j/bar.

Ces résultats, très similaires, démontrent l'efficacité de notre méthode pour le cas d'un réservoir stratifié avec une géométrie quelconque.

5.3.3 Réservoir parallélépipédique avec pendage

Nous considérons ici un réservoir parallélépipédique avec pendage, comprenant trois couches de hauteur 30 m, et de dimensions 1500 m × 500 m × 90 m (voir figure 5.16).

Les tenseurs de perméabilité sont donnés par :

- $\overline{\overline{K}}_1 : k_{1,1} = k_{1,2} = 50$ mD, $k_{1,3} = 5$ mD,
- $\overline{\overline{K}}_2 : k_{2,1} = k_{2,2} = 100$ mD, $k_{2,3} = 10$ mD,
- $\overline{\overline{K}}_3 : k_{3,1} = k_{3,2} = 1000$ mD, $k_{3,3} = 100$ mD.

Ici la méthode semi-analytique ne peut pas s'appliquer : cette méthode est limitée à des réservoirs en forme de boîte. Alors nous utilisons pour la validation un code de volumes finis de



FIG. 5.16 – Réservoir parallélépipédique avec pendage.

l'Institut Français du Pétrole, qui nous donne pour ce cas-là un IP de $200,5 \text{ m}^3/\text{j}/\text{bar}$.

Le tableau suivant montre les résultats obtenus en raffinant le maillage :

Nombre de mailles	Nombre de segments	Figure	IP	Erreur (en %)
800	20	5.17	205,93	2,71
3000	20	5.18	201,40	0,45
7200	20	5.19	201,23	0,36

TAB. 5.3 – Influence du maillage sur le calcul de l' IP .

En général, il est difficile de modéliser les puits, surtout les puits complexes, par la méthode de volumes finis. La difficulté provient du fait que le maillage de volumes finis ne suit pas toujours la trajectoire du puits et il faut un traitement particulier pour modéliser l'écoulement singulier au voisinage du puits. Dans cet exemple, le puits est parallèle aux axes principaux de maillage du réservoir parallélépipédique. Par ailleurs, un traitement particulier basé sur une approche intégrale dans un milieu infini, est considéré pour la modélisation d'écoulement singulier au voisinage du puits dans le code volumes finis de l'IFP. Pour ces raisons, la méthode de volumes finis donne une bonne précision pour cet exemple, ce qui n'est pas le cas en général.

Ce code de volumes finis nous sert uniquement pour valider la précision de notre méthode intégrale. Les temps de calcul ne sont pas comparés. En effet, le code de l'IFP est un code industriel optimisé, contrairement au nôtre qui est à l'état académique. Les conditions de comparaison des performances ne sont pas remplies.

Les différents maillages sont représentés par les figures ci-après :

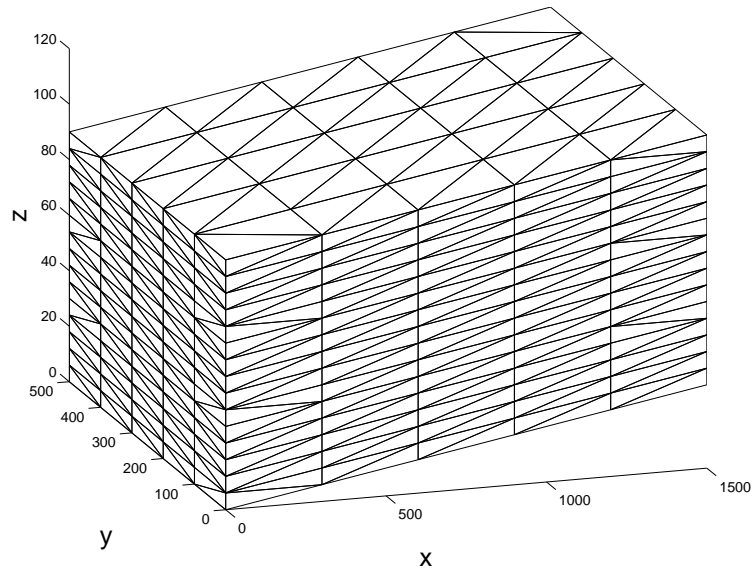


FIG. 5.17 – Maillage 1 : 800 mailles.

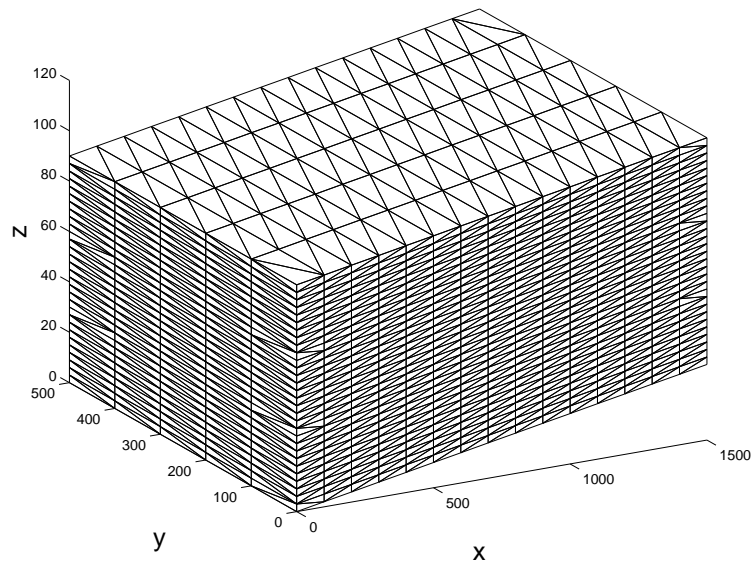


FIG. 5.18 – Maillage 2 : 3000 mailles.

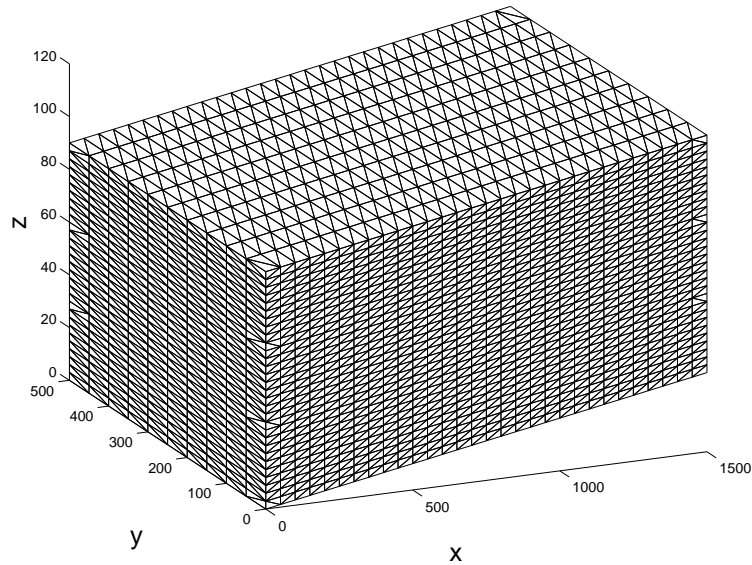


FIG. 5.19 – Maillage 3 : 7200 mailles.

5.4 Conclusion du chapitre

Nous avons montré dans ce chapitre que notre méthode intégrale permet de calculer l'*IP* du puits à 1% près, pour des réservoirs parallélépipédiques avec ou sans pendage, multicouches, anisotropes, et exploités par des puits rectilignes (horizontaux ou déviés).

Il est bien connu que la méthode des équations intégrales permet de réduire la taille des matrices, mais leur donne en contre-partie une structure pleine. De plus, il faut compter le coût de calcul des coefficients. A l'état actuel, notre code n'est pas optimisé, ni sur le plan purement informatique, ni sur le plan de la méthodologie pour les calculs des intégrales (pour ce dernier point, on peut signaler la méthode multipôles [23] qui permettrait sans doute une sensible amélioration du temps de calcul). Nous n'avons donc pas d'élément comptable pour pousser plus loin la comparaison avec d'autres méthodes.

Chapitre 6

Régime transitoire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution au modèle d'écoulement transitoire. Le modèle en temps sera traité par une transformation de Laplace. Nous motiverons ce choix dans le paragraphe 6.4, consacré à une étude bibliographique des différentes méthodes intégrales pour traiter l'équation de diffusion.

Après cette transformation, nous obtenons à la place de l'équation de diffusion un système d'équations de Helmholtz avec des fréquences complexes. Nous présentons dans le paragraphe 6.1 l'écriture du modèle obtenu avec transformation des conditions aux limites. Dans le second paragraphe, nous donnons les démonstrations d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème linéaire (conductivité infinie). Le modèle non-linéaire n'a pas été traité, néanmoins nous présentons dans le paragraphe 6.3 son écriture sous forme d'un problème de point fixe.

6.1 Écriture du modèle après transformation de Laplace

Pour simplifier, nous travaillerons dans un milieu homogène, isotrope, et nous fixerons toutes les constantes physiques (perméabilité, porosité, viscosité, et coefficient de compressibilité) à 1. Rappelons le modèle transitoire dans le cas le plus général de la conductivité finie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \quad \text{pour } x \in \Omega, t \in [0, T], \\ p(x, 0) = p_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega, \\ p = p_D \quad \text{sur } \Gamma_D \times [0, T], \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \times [0, T], \\ p(x, t) = p_w(l, t) \quad \text{sur } \Gamma_w \times [0, T], \text{ si } x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ p_w(0, t) = p_{wf}(t), \quad t \in [0, T], \\ \frac{\partial p_w(l, t)}{\partial l} = C_w q_w^2(l, t), \quad t \in [0, T], \\ q_w(l, t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T], \\ Q(t) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial p(x, t)}{\partial n} d\gamma(x), \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Gardons à l'esprit que le modèle linéaire s'écrit de la même façon, avec $C_w = 0$.

Commençons par rappeler la définition de la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace d'une fonction v , $\mathcal{L}[v]$, si elle existe, est définie par :

$$\tilde{v}(x, s) := \mathcal{L}[v](x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x, t) dt \quad s \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

Désormais, nous désignerons la transformée de Laplace d'une fonction v par \tilde{v} .

Dans le problème initial, la pression p n'est définie que jusqu'à un certain temps $T > 0$, on la prolonge alors par 0 pour $t > T$, afin de pouvoir définir sa transformée de Laplace.

D'autre part, on sait que la transformée de Laplace n'est définie que dans un demi-plan de \mathbb{C} : il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\tilde{p}(x, s)$ est définie pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > \alpha$. On peut supposer $\alpha > 0$.

Si l'on applique la transformée de Laplace à l'équation de diffusion, on obtient alors un système d'équations de Helmholtz, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \alpha$:

$$\Delta \tilde{p}(x, s) - s \tilde{p}(x, s) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega. \quad (6.3)$$

• **Modèle linéaire :**

Le modèle linéaire s'écrit donc dans l'espace de Laplace comme un système de modèles de Helmholtz, pour un ensemble de $s \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(s) > \alpha$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{p}(x, s) - s \tilde{p}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_w(s) & \text{sur } \Gamma_w, \\ \tilde{Q}(s) = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x). \end{array} \right. \quad (6.4)$$

• **Modèle non-linéaire :**

De la même manière, le modèle non-linéaire s'écrit dans l'espace de Laplace comme un système de modèles de Helmholtz, pour un ensemble de $s \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(s) > \alpha$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{p}(x, s) - s \tilde{p}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_w(l, s) & \text{pour } x \in \Gamma_w, x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ \tilde{p}_w(0, s) = \tilde{p}_{wf}(s), \\ \frac{\partial \tilde{p}_w(l, s)}{\partial l} = C_w \tilde{q}_w(l, \cdot) *_s \tilde{q}_w(l, \cdot) & \text{sur } [0, L], \\ \tilde{q}_w(l, s) = \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x), & \text{sur } [0, L], \\ \tilde{Q}(s) = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x). \end{array} \right. \quad (6.5)$$

On suppose que le domaine Ω vérifie toutes les hypothèses de régularité nécessaires, à savoir Ω est borné, de frontière Γ régulière, Ω étant localement d'un seul côté de Γ .

Dans ce chapitre, tous les espaces fonctionnels seront à valeurs dans \mathbb{C} .

6.2 Problème linéaire (conductivité infinie)

On considère ici le modèle (6.4) pour s fixé. Les démonstrations reposent sur les mêmes raisonnements que pour le problème de régime permanent. On considère tout d'abord le cas où p_{wf} est donnée, et Q inconnu, puis le cas où Q est donné, et où on cherche p_{wf} .

6.2.1 Cas où p_{wf} est donnée, et Q inconnu

Etudions tout d'abord le cas le plus simple où la pression p_{wf} est donnée et où on cherche le débit total Q .

La pression p_{wf} étant donnée, on connaît sa transformée de Laplace \tilde{p}_{wf} pour tout s convenable. Considérons le modèle sans la condition sur \tilde{Q} :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{p}(x, s) - s \tilde{p}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{p}(l, \theta, s) = \tilde{p}_w(s) & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.6)$$

Le nombre complexe s étant fixé, $\tilde{p}_{wf}(s)$ est une constante. Nous pouvons donc procéder au changement de variable : $\tilde{u} = \tilde{p} - \tilde{p}_{wf}$. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}(x, s) - s \tilde{u}(x, s) = s \tilde{p}_{wf}(s) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{u}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) - \tilde{p}_{wf}(s) & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{u}(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{u}(l, \theta, s) = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.7)$$

Existence : On utilise le théorème de relèvement :

si $\tilde{p}_D(\cdot, s) \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, alors il existe un relèvement (non unique) $\tilde{r}(\cdot, s) \in H^1(\Delta, \Omega)$ (où l'espace $H^1(\Delta, \Omega)$ a été défini par (2.5), mais est cette fois à valeurs complexes), et $\eta > 0$, tels que :

$$\tilde{r}(x, s) = \begin{cases} \tilde{p}_D(x, s) - \tilde{p}_{wf}(s) & \text{sur } \Gamma_D \\ 0 & \text{sur } \Gamma_w \end{cases}$$

et $\|\tilde{r}(\cdot, s)\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \leq C \|\tilde{p}_D(\cdot, s) - \tilde{p}_{wf}(\cdot, s)\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

On procède alors au changement de variables : $\tilde{U} = \tilde{u} - \tilde{r}$, et on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{U}(x, s) - s \tilde{U}(x, s) = -\Delta \tilde{r}(x, s) + s \tilde{r}(x, s) & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{U}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{U}(x, s)}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{r}(x, s)}{\partial n} & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{U}(x, s) = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.8)$$

On se place dans l'espace V :

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_w} = 0\},$$

muni du produit scalaire usuel dans $H^1(\Omega)$ (complexe) :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx. \quad (6.9)$$

V est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$, c'est donc un Hilbert.

La formulation variationnelle du modèle (6.8) s'écrit :

$$a(\tilde{U}, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V,$$

où :

$$\begin{cases} a(\tilde{U}, v) = \int_{\Omega} \nabla \tilde{U}(x, s) \nabla \bar{v}(x) dx + s \int_{\Omega} \tilde{U}(x, s) \bar{v}(x) dx, \\ L(v) = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{r}(x, s) \nabla \bar{v}(x) dx - s \int_{\Omega} \tilde{r}(x, s) \bar{v}(x) dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \tilde{r}(x, s)}{\partial n} \bar{v}(x) d\gamma(x). \end{cases}$$

Il nous faut maintenant montrer que la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est continue dans $V \times V$, et coercive dans V , puis que la forme antilinéaire L est continue dans V .

- La forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est continue dans $V \times V$:
pour tout $(u, v) \in V \times V$, on a :

$$|a(u, v)| \leq \max(1, |s|) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- $a(.,.)$ est coercive sur V : on veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que, pour tout $v \in V$, l'on ait :

$$|a(v, v)| \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

6.2.1.1 Cas où $\Im m(s) \neq 0$

Par l'absurde, on suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists v_n \in V, \quad |a(v_n, v_n)| < \frac{1}{n} \|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (6.10)$$

On peut choisir v_n telle que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant bornée dans l'espace de Hilbert V , on peut en extraire une sous-suite, encore notée (v_n) , telle que :

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{faible dans } H^1(\Omega),$$

et, comme Ω est borné, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc cette même suite converge fortement dans $L^2(\Omega)$, i.e. :

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{fort dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, on a, d'après (6.10) :

$$|a(v_n, v_n)| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty, \quad (6.11)$$

or :

$$|a(v, v)| \geq \frac{1}{2} (|\Re e a(v, v)| + |\Im m a(v, v)|) \quad \text{pour tout } v \in V,$$

d'où :

$$\Re e a(v_n, v_n) \longrightarrow 0, \quad (6.12)$$

$$\Im a(v_n, v_n) \longrightarrow 0, \quad (6.13)$$

avec :

$$\Re a(v_n, v_n) = \int_{\Omega} |\nabla v_n(x)|^2 dx + \Re(s) \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx \quad (6.14)$$

$$\Im a(v_n, v_n) = \Im(s) \int_{\Omega} |v_n(x)|^2 dx. \quad (6.15)$$

On déduit alors de (6.13) et (6.15) que :

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

puisqu'on a supposé que $\Im(s) \neq 0$.

Il s'ensuit, d'après (6.12) et (6.14), que :

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$$

et finalement, $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$, donc $v_n \longrightarrow 0$ fort dans $H^1(\Omega)$, ce qui implique que $v = 0$.

Mais d'autre part, l'hypothèse $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ entraîne que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$, ce qui est contradictoire avec $v = 0$.

6.2.1.2 Cas où $\Im(s) = 0$

Le cas où $\Im(s) = 0$ correspond en fait au cas où $s \in \mathbb{R}^{+,*}$, puisqu'on a supposé que $\Re(s) > 0$. La coercivité de $a(.,.)$ est alors immédiate : on a, pour tout v dans V :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + s \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \quad \text{avec } s > 0 \\ &\geq \min(1, s) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

La forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est donc continue et coercive sur $V \times V$.

- Montrons maintenant que L est une forme antilinéaire continue sur V :

$$L(v) = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{r}(x, s) \nabla \bar{v}(x) dx - s \int_{\Omega} \tilde{r}(x, s) \bar{v}(x) dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \tilde{r}(x, s)}{\partial n} \bar{v}(x) d\gamma(x), \quad \text{pour } v \in V.$$

L'antilinéarité de L est évidente, reste à montrer la continuité. Pour tout $v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \|\nabla \tilde{r}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |s| |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \|\tilde{r}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \frac{\partial \tilde{r}(x, s)}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} \\ &\leq \left(1 + (1 + |s|) |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \right) \|\tilde{r}\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \left(1 + (1 + |s|) |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \right) \|\tilde{p}_D - \tilde{p}_{wf}\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Conclusion : Le théorème de Lax-Milgram nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution \tilde{U} dans V au modèle (6.8) pour r fixé, donc l'existence d'une solution \tilde{u} au modèle (6.7),

sous l'hypothèse que $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. Reste à montrer l'unicité de la solution \tilde{u} .

Unicité : Soient \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 deux solutions du modèle, on note \tilde{u} leur différence : $\tilde{u} = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$. Il suffit alors de montrer que le modèle suivant :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}(x, s) - s\tilde{u}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{u}(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{u}(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{u}(x, s) = 0 & \text{sur } \Gamma_w, \end{cases}$$

admet comme unique solution la solution nulle, ce qui est évident.

Ceci clôt la démonstration d'existence et d'unicité d'une solution \tilde{U} dans $H^1(\Omega)$ au modèle (6.8), et donc d'une solution \tilde{p} dans $H^1(\Omega)$ au modèle (6.6), pourvu que $p_D \in H^{1/2}(\Gamma_D)$. \square

6.2.2 Cas où p_{wf} est inconnue, et où Q est imposé

Nous allons maintenant considérer deux cas différents selon que la pression \tilde{p}_D imposée sur Γ_D est constante ou non.

6.2.2.1 1^{er} cas : \tilde{p}_D constante.

On fait le changement de variables $u = \tilde{p} - \tilde{p}_D$ pour avoir une condition de Dirichlet homogène. Le modèle se réécrit alors, pour s convenable :

$$\begin{cases} \Delta u - su = s\tilde{p}_D & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u = cte (= p_{wf} - \tilde{p}_D), & \text{sur } \Gamma_w, \\ \tilde{Q}(s) = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x, s)}{\partial n} d\gamma(x). \end{cases} \quad (6.16)$$

On se place dans l'espace :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_D} = 0, v|_{\Gamma_w} = cte \text{ où } cte \text{ est une constante inconnue}\}.$$

On munit V du produit scalaire usuel dans $H^1(\Omega)$:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx. \quad (6.17)$$

V est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$, c'est donc un Hilbert.

La formulation variationnelle du problème ci-dessus s'écrit :

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in V, \quad (6.18)$$

avec :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \bar{v}(x) dx + s \int_{\Omega} u(x) \bar{v}(x) dx, & u, v \in V, \\ L(v) = -s\tilde{p}_D \int_{\Omega} \bar{v}(x) dx + \tilde{Q} \bar{v}|_{\Gamma_w}, & v \in V. \end{cases}$$

On va montrer par le théorème de Lax-Milgram que ce problème admet une unique solution.

- Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que la forme sesquilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$ et coercive sur V .

- Montrons maintenant que la forme antilinéaire L est continue sur V :

$$L(v) = s \tilde{p}_D \int_{\Omega} \bar{v}(x) dx + \tilde{Q} \bar{v}/_{\Gamma_w} \quad \text{pour } v \in V.$$

Pour tout $v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq |s| |\tilde{p}_D| |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\tilde{Q}| |v|_{\Gamma_w} \\ &\leq |s| |\tilde{p}_D| |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\tilde{Q}| \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(|s| |\tilde{p}_D| |\text{mes}(\Omega)|^{1/2} + |\tilde{Q}| \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Conclusion : La formulation variationnelle (6.18) admet une solution unique u dans l'espace V , et s'interprète comme le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u - su & = s \tilde{p}_D & \text{dans } \Omega, \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u & = \text{cte inconnue} & \text{sur } \Gamma_w, \\ \tilde{Q}(s) & = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial u(x, s)}{\partial n} d\gamma(x), \\ u \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

On a donc montré l'existence et l'unicité d'une solution u dans $H^1(\Omega)$ au modèle (6.16), ce qui entraîne l'existence et l'unicité d'une solution \tilde{p} au modèle (6.4), si \tilde{p}_D est constante (i.e. si p_D est constante). \square

6.2.2.2 2^{ème} cas : \tilde{p}_D n'est pas constante

Tout comme pour le problème d'écoulement permanent dans le chapitre 2, si \tilde{p}_D n'est plus constante, nous pouvons montrer l'existence et l'unicité d'une solution au modèle (6.5), soit par un théorème de relèvement, soit par principe de superposition. Le principe de superposition aurait aussi bien pu être appliqué pour les démonstrations précédentes, et nous sera utile pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au modèle non-linéaire. Nous nous proposons donc de l'introduire ici.

La démonstration par principe de superposition sera analogue à celle effectuée pour le modèle d'écoulement permanent dans le cas où p_D n'est pas constante. La solution \tilde{p} du modèle (6.4) dépendant linéairement de la constante \tilde{p}_{wf} , on découpe le modèle (6.6) par linéarité en deux morceaux, pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à ces deux modèles, puis on détermine la constante \tilde{p}_{wf} de manière unique pour satisfaire la condition sur le débit total \tilde{Q} .

On décompose par linéarité le modèle (6.6) (qui n'est autre que le modèle (6.5) sans la condition sur le débit total Q), en deux modèles de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{F}_1(x, s) - s \tilde{F}_1(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{F}_1(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{F}_1(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{F}_1(x, s) = 0 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \tilde{F}_2(x, s) - s \tilde{F}_2(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{F}_2(x, s) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{F}_2(x, s)}{\partial n} = 0 & \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{F}_2(x, s) = 1 & \text{sur } \Gamma_w. \end{cases}$$

Il est évident qu'alors : $\tilde{p} = \tilde{F}_1 + \tilde{p}_{wf} \tilde{F}_2$.

On peut facilement démontrer en suivant la même démarche que pour le modèle (6.7) que les deux modèles ci-dessus admettent une solution unique \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 dans $H^1(\Omega)$. Pour obtenir l'existence et l'unicité de \tilde{p} , il nous reste à déterminer \tilde{p}_{wf} de façon à satisfaire la condition de débit total imposé :

$$\tilde{Q}(s) = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x).$$

On obtient alors :

$$\tilde{p}_{wf} = \frac{\tilde{Q}(s) - \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{F}_1(x, s)}{\partial n} d\gamma(x)}{\int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{F}_2(x, s)}{\partial n} d\gamma(x)}, \quad (6.19)$$

sous réserve que l'intégrale :

$$\tilde{I}_2 = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{F}_2(x, s)}{\partial n} d\gamma(x)$$

soit non nulle.

La non-nullité de l'intégrale \tilde{I}_2 s'obtient par une démonstration analogue à celle de la non-nullité de l'intégrale I_2 dans le chapitre précédent, en travaillant dans le nouvel espace $V = H^1(\Omega)$. \square

6.2.3 Conclusion

Nous avons réussi à étendre les résultats d'existence et d'unicité du cas permanent au cas transitoire. De plus, il est évident que la solution dépend continûment des données, le modèle linéaire en régime transitoire est donc bien posé dans l'espace de Laplace. Nous aurions pu aussi appliquer les mêmes démonstrations directement dans l'espace en temps. Il nous reste maintenant à étudier le cas transitoire avec la condition de conductivité finie.

6.3 Problème non-linéaire (conductivité finie)

Nous considérons le modèle (6.5) dans l'espace de Laplace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{p}(x, s) - s\tilde{p}(x, s) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) \quad \text{pour } x \in \Gamma_D \\ \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} = 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_N \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_w(l, s) \quad \text{pour } x \in \Gamma_w, x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ \tilde{p}_w(0, s) = \tilde{p}_{wf}(s), \\ \frac{\partial \tilde{p}_w(l, s)}{\partial l} = C_w \tilde{q}_w(l, \cdot) *_s \tilde{q}_w(l, \cdot) \quad \text{sur } \Gamma_w \\ \tilde{q}_w(l, s) = \int_{\Gamma_{w,l}} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x), \quad \text{sur } \Gamma_w \\ \tilde{Q}(s) = \int_{\Gamma_w} \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} d\gamma(x). \end{array} \right.$$

L'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce modèle n'a pas encore été traitée, mais nous pensons que nous pouvons l'obtenir par une méthode analogue que pour le cas permanent, par le théorème de Schauder.

La difficulté supplémentaire est l'apparition d'un produit de convolution dans l'équation de perte de charge.

6.3.1 Écriture du problème de point fixe

Nous allons poser le problème de point fixe dans le cas où la pression au bout du puits p_{wf} est donnée. Cela correspond donc au cas où on cherche le débit total Q .

L'équation de perte de charge peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_w(l, s) = \tilde{p}_{wf}(s) + \tilde{g}(l, s), \\ \tilde{g}(l, s) = C_w \int_0^l \left(\tilde{q}_w(t, \cdot) *_s \tilde{q}_w(t, \cdot) \right) dt, \end{array} \right. \quad (6.20)$$

avec $\tilde{p}_{wf}(s) = \tilde{p}_w(0, s)$ indépendante de θ .

Le modèle devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{p}(x, s) - s\tilde{p}(x, s) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_D(x, s) \quad \text{pour } x \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial \tilde{p}(x, s)}{\partial n} = 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_N, \\ \tilde{p}(x, s) = \tilde{p}_w(l, s) \quad \text{pour } x \in \Gamma_w, x = (l, \theta), l \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi], \\ \tilde{p}_w(0, s) = \tilde{p}_{wf}(s), \\ \tilde{p}_w(l, s) = \tilde{p}_{wf}(s) + \tilde{g}(l, s) \quad \text{sur } \Gamma_w, \\ \tilde{g}(l, s) = C_w \int_0^l \left(\tilde{q}_w(t, \cdot) *_s \tilde{q}_w(t, \cdot) \right) dt \quad \text{sur } \Gamma_w. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

De la même manière que pour le problème linéaire (et que pour le problème d'écoulement

permanent non-linéaire), on peut décomposer ce modèle en trois morceaux :

$$(II') \quad \begin{cases} \text{Trouver } F_1 \text{ tel que :} \\ \Delta F_1 - sF_1 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_1 = p_D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_1 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_1(x, s) = 0 \text{ sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\text{Posons : } h_1 = \frac{\partial F_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}.$$

$$(II'') \quad \begin{cases} \text{Trouver } F_2 \text{ tel que :} \\ \Delta F_2 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_2 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_2(x, s) = \tilde{p}_{wf}(s) \text{ sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\text{Posons : } h_2 = \frac{\partial F_2(s)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}.$$

$$(III'') \quad \begin{cases} \text{Trouver } F_3 \text{ tel que :} \\ \Delta F_3 = 0 \text{ dans } \Omega, \\ F_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial F_3 / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ F_3(l, \theta, s) = \tilde{g}(l, s) \text{ sur } \Gamma_w. \end{cases} \quad (6.24)$$

Posons : $h_3(l, \theta, s) = \frac{\partial F_3(s)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}$. Nous introduisons l'opérateur Υ défini par :

$$\Upsilon \tilde{g} = \frac{\partial F_3}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (6.25)$$

Cette notation peut aussi s'appliquer pour le modèle (II'') :

$$\Upsilon \tilde{p}_{wf} = \frac{\partial F_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}.$$

Comme les frontières $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ et Γ_w sont disjointes, on peut montrer de manière classique que l'opérateur Υ est d'ordre 1.

Pour le modèle (II') , l'opérateur est différent, nous le noterons Υ_1 :

$$\Upsilon_1 \tilde{p}_D = \frac{\partial F_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w}. \quad (6.26)$$

Les frontières Γ_w et Γ_D étant disjointes, et F_1 étant nul sur Γ_w , l'opérateur Υ_1 est aussi régulier que le permet la géométrie du puits.

Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon} \tilde{g}(l, s) &= r_w \int_0^{2\pi} (\Upsilon \tilde{g})(l, \theta, s) d\theta, \\ \tilde{\Upsilon}_1 \tilde{p}_D(l, s) &= r_w \int_0^{2\pi} (\Upsilon_1 \tilde{p}_D)(l, \theta, s) d\theta. \end{aligned}$$

Nous avons comme pour le modèle linéaire :

$$\tilde{p} = F_1 + F_2 + F_3, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n|_{\Gamma_w}} = h_1 + h_2 + h_3 \quad \text{et} \quad \tilde{Q} = Q_1 + Q_2 + Q_3(g),$$

avec :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_1(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Upsilon_1 \tilde{p}_D(x) d\gamma(x), \\ Q_2 &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_2(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Upsilon \tilde{p}_{wf}(x) d\gamma(x), \\ Q_3(g) &= \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \frac{\partial F_3(x)}{\partial n} d\gamma(x) = \frac{k}{\mu} \int_{\Gamma_w} \Upsilon \tilde{g}(x) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Il en découle de même que :

$$\tilde{q}_w(t, s) = \underbrace{q_1(t, s) + q_2(t, s)}_{q_0(t, s)} + \int_0^t \tilde{\Upsilon} \tilde{g}(t', s) dt'.$$

avec

$$\begin{aligned} q_1(t, s) &= \int_0^t \tilde{\Upsilon}_1 p_D(t', s) dt', \\ q_2(t, s) &= \int_0^t \tilde{\Upsilon} p_{wf}(t', s) dt'. \end{aligned}$$

Ainsi, \tilde{g} est solution de l'équation non linéaire :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(l, s) &= C_w \int_0^l \tilde{F}(\tilde{g})(t, s) dt = (U\tilde{g})(l) \\ \tilde{F}(\tilde{g})(t, s) &= \left(q_0(t, \cdot) + \int_0^t \tilde{\Upsilon} \tilde{g}(t', \cdot) dt' \right)_s * \left(q_0(t, \cdot) + \int_0^t \tilde{\Upsilon} \tilde{g}(t', \cdot) dt' \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nous espérons pouvoir obtenir à partir de cette équation non-linéaire, le même genre d'estimations que pour le problème non-linéaire dans le cas de l'écoulement permanent. Les estimations restent à écrire, la principale difficulté provient des estimations des produits de convolution.

6.3.2 Conclusion

Une généralisation possible du théorème 9 page 49 démontré dans le cas du régime permanent est d'essayer d'appliquer le théorème de Schauder pour démontrer l'existence et si possible l'unicité d'une solution au modèle (6.21), en utilisant une démarche similaire à celle adoptée dans le cas de l'écoulement permanent.

Nous clôturons ici la partie théorique pour le problème transitoire. La dernière section de ce chapitre sera consacrée à une revue bibliographique des différentes méthodes intégrales pour résoudre l'équation de diffusion, y compris bien sûr la transformation de Laplace. Ainsi nous justifierons dans cette section les raisons qui nous ont conduits à choisir la méthode de la transformée de Laplace.

6.4 Des méthodes intégrales pour résoudre l'équation de diffusion : une bibliographie

Ce chapitre a pour but de passer en revue les méthodes intégrales existantes pouvant s'appliquer à notre type de problème. Pour simplifier, ces méthodes seront présentées dans le cadre d'un milieu homogène et isotrope. On s'intéresse donc à la résolution de l'équation de diffusion par différentes méthodes intégrales, avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann :

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \text{ dans } \Omega \times [0, T]. \quad (6.28)$$

6.4.1 Formulations intégrales classiques du problème

On utilise classiquement la méthode des solutions fondamentales pour résoudre l'équation de diffusion. On peut utiliser ou bien la solution fondamentale de l'équation de Laplace, indépendante du temps, ou bien la solution fondamentale de l'équation de diffusion, qui dépend du temps. On présentera ici la deuxième approche, qui est la plus utilisée dans le milieu pétrolier.

Définition 15 *On appelle solution fondamentale de l'équation de la chaleur, ou encore fonction de Green, la solution notée G obtenue pour un terme source unitaire, soit une masse de Dirac, sans imposer de condition aux limites ni de condition initiale :*

$$\frac{\partial G(x-y, t-\tau)}{\partial t} - \Delta G(x-y, t-\tau) = \delta(x-y)\delta(t-\tau). \quad (6.29)$$

L'expression de G est alors donnée en dimension d par :

$$G(x-y, t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right), \quad t > \tau.$$

On rencontre deux différents types de formulation : le premier, qui est le plus utilisé dans la littérature (cf Kikani et Horne [46], Koh et Tiab [47], Brebbia et al., Partridge [71], Nowak [66], Pasquetti et al. [72], Pecher et Stanislav [73]), est obtenu en intégrant l'équation de diffusion (6.28) après l'avoir multipliée par la solution fondamentale de l'équation de diffusion G , puis en appliquant deux fois le théorème de divergence de Green, et enfin en intégrant en temps :

$$\begin{aligned} c(x)u(x, t) &= - \int_0^t \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y, \tau)}{\partial n} G(x-y, t-\tau) - u(y, \tau) \frac{\partial G(x-y, t-\tau)}{\partial n} \right) d\gamma(y) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u_0(y) G(x-y, t) dy. \end{aligned} \quad (6.30)$$

avec n la normale extérieure à la frontière.

Rappelons que le coefficient $c(x)$ dépend de la géométrie du domaine considéré et de l'appartenance de x à la frontière Γ ou non (voir Pecher et Stanislav [73]) :

$$c(x) = \frac{\theta(x)}{4\pi}, \text{ avec } \theta(x) = \begin{cases} 4\pi & \text{si } x \in \Omega, \\ 2\pi & \text{si } x \in \Gamma \text{ et } \Gamma \text{ régulière au point } x, \\ \theta & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ représente l'angle solide sous lequel x voit la frontière Γ . Si la condition initiale est nulle, l'intégrale sur le domaine ne pose aucun problème, puisqu'elle s'annule. Dans le cas où u_0 est

constante, il suffit de faire un changement d'inconnue en posant $\tilde{u} = u - u_0$ pour se ramener à une condition initiale homogène.

Le second type de formulation s'exprime sous la forme de potentiels (cf Kress [48] et Nédélec [63, 64]), et cette fois-ci pour tout $x \in \Omega$. On note φ la fonction de densité du problème (cf Kress [48]). Les potentiels de simple couche et double couche s'écrivent de manière analogue que pour le problème permanent.

- Si on suppose u continue à la traversée de la frontière Γ , on définit le potentiel de simple couche :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} G(x - y; t - \tau) \varphi(y, \tau) d\gamma(y) d\tau, \quad x \in \Omega. \quad (6.31)$$

- Si par contre on suppose la dérivée normale $\partial u / \partial n$ continue à la traversée de Γ , on définit le potentiel de double couche :

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x - y; t - \tau)}{\partial n_y} \varphi(y, \tau) d\gamma(y) d\tau, \quad x \in \Omega. \quad (6.32)$$

La principale difficulté rencontrée est le terme de convolution en temps. On dispose de différentes méthodes numériques pour traiter ce problème.

6.4.2 Méthodes numériques

6.4.2.1 La méthode directe

La méthode la plus naturelle pour traiter l'intégrale en temps consiste à la discrétiser en découpant l'intervalle $[0, T]$ en N instants $(t_m)_{m=0, \dots, N-1}$, de sorte que $\sum_{m=0}^{N-1} t_m = T$ et $t_m - t_{m-1} = \Delta t_m$. C'est une méthode directe.

Par exemple pour le potentiel de simple couche, on obtient une équation discrétisée de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{\Gamma} G(x - y; t - \tau) \varphi(y, \tau) d\gamma(y) d\tau, \quad \text{pour } t_n \leq t < t_{n+1}.$$

Pour calculer la solution à un instant t_n , on a donc besoin de stocker tout l'historique, c'est-à-dire toutes les valeurs des fonctions φ à chaque instant précédent. Pour éviter d'avoir à conserver tous ces termes, on peut avoir l'idée de reformuler le problème à chaque instant t_n en prenant comme condition initiale la solution à l'instant précédent t_{n-1} , mais on introduit alors une intégrale sur le domaine, et on perd ainsi tout l'intérêt de la méthode intégrale.

Les méthodes directes présentent un inconvénient supplémentaire : les erreurs s'accumulent au cours du temps (Kikani [46]).

6.4.2.2 La transformée de Laplace

Une solution pour éviter le terme de convolution en temps est d'utiliser la transformée de Laplace $\mathcal{L}[u](s)$ de la fonction $u(x, t)$:

$$\mathcal{L}[u](x, s) = \tilde{u}(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt. \quad (6.33)$$

On élimine ainsi la dépendance en temps du problème.

Cependant, une fois le problème résolu dans l'espace de Laplace, il reste encore à l'inverser, ce qui peut aussi coûter cher du point de vue numérique mais on dispose aujourd'hui d'algorithmes qui ont largement prouvé leur efficacité, en particulier l'algorithme de Stehfest, qui est habituellement utilisé dans le milieu pétrolier. Par contre, aucun auteur n'indique quelles valeurs de la variable de Laplace s on doit employer, ni combien. Liggett et Liu, 1983, [54] donnent quelques indications sur ces choix, mais pour la méthode de Schapery. Davies et Martin, 1979, dans [22] ont comparé plusieurs méthodes pour inverser la transformée de Laplace, ils concluent qu'en fait les résultats dépendent aussi de la fonction considérée, ils confirment que la méthode de Stehfest donne de bons résultats, donc si nous choisissons la méthode de la transformée de Laplace, nous opterons probablement pour l'algorithme de Stehfest, conformément à ce qui est fait dans le milieu pétrolier jusqu'à présent.

6.4.2.3 Approximation directe de la dérivée en temps par différences finies

Une autre solution consiste à discrétiser directement en temps l'équation de diffusion (6.28) par des différences finies, et de se ramener ainsi à l'équation de Helmholtz (6.34) non homogène. Le caractère non homogène de l'équation de Helmholtz entraîne la présence d'une intégrale sur le domaine, lourde à calculer. Ce type de méthodes, employées par Chapko et Kress [17], puis par S. Langdon [51, 49, 50], est développé ce paragraphe.

Les deux méthodes présentées dans ce paragraphe (méthode de Rothe et "domain embedding method") consistent à approcher directement la dérivée en temps par des différences finies :

$$\frac{1}{k} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \Delta u_{n+1}.$$

L'erreur commise sur l'approximation de la dérivée en temps est en $O(\Delta t)$, ce qui implique que le pas de temps devra être choisi suffisamment petit pour obtenir une bonne précision.

On se ramène alors à un système d'équations de Helmholtz non homogènes : pour $n = 0, \dots, N$, on a :

$$-\Delta u_{n+1} + \alpha^2 u_{n+1} = \alpha^2 u_n, \quad (6.34)$$

$$\text{avec } \alpha^2 = \frac{1}{k\Delta t}.$$

1. Méthode de Rothe : Elle consiste à utiliser un schéma linéaire multi-pas pour approcher la dérivée en temps (cf Lubich et Schneider [55], qui l'appliquent au terme de convolution en temps). Chapko et Kress [17] l'ont appliquée dans le cas particulier du schéma d'Euler explicite, ce qui les conduit au système d'équations d'Helmholtz (6.34) ci-dessus.

La condition initiale est supposée homogène, et pour simplifier, on se place dans le cadre de conditions de Dirichlet. On peut écrire le problème sous forme matricielle :

$$A\tilde{u} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (6.35)$$

$$\tilde{u} = \tilde{g} \text{ sur } \gamma \quad (6.36)$$

avec $\tilde{u} = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$, $\tilde{g} = (g_0, \dots, g_{N-1})^T$,

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} -\Delta + \alpha_0^2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -\alpha_1^2 & -\Delta + \alpha_1^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -\alpha_2^2 & -\Delta + \alpha_2^2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{N-1}^2 & -\Delta + \alpha_{N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

On construit tout d'abord une solution fondamentale de ce système :

$$\Psi(x, y) = (\Psi_0, \dots, \Psi_{N-1})^T. \quad (6.37)$$

On sait que la fonction $\Psi_0(x, y) = cK_0(\alpha_0|x - y|)$, avec $c > 0$ et K_0 la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0, vérifie l'équation de Helmholtz pour $n = 0$, $x \neq y$. Les propriétés des dérivées des fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 nous amènent alors à chercher les solutions Ψ_n , $n = 1, \dots, N - 1$, sous la forme :

$$\Psi_n(x, y) = K_0(\alpha_0|x - y|)v_n(|x - y|) + K_1(\alpha_0|x - y|)w_n(|x - y|), \quad x \neq y \quad (6.38)$$

où v_n et w_n sont des polynômes à déterminer.

En substituant l'expression de Ψ_n dans (6.35), on est alors ramené à un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre :

$$\begin{aligned} -v_n'' - \frac{1}{r}v_n' + 2\alpha_0w_n' + (\alpha_n^2 - \alpha_0^2)v_n &= \alpha_n^2v_{n-1} \\ 2\alpha_0v_n' - w_n'' + \frac{1}{r}w_n' - \frac{1}{r^2}w_n + (\alpha_n^2 - \alpha_0^2)w_n &= \alpha_n^2w_{n-1} \end{aligned}$$

où $r = |x - y|$.

Dans l'article de Chapko et Kress [17], ce système n'est résolu que dans le cas où le pas de temps reste constant. On note alors $\alpha := \alpha_0 := \dots := \alpha_{N-1}$. La solution est donnée par :

$$v_n(r) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2k} r^{2k}, \quad w_n(r) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2k+1} r^{2k+1}, \quad (6.39)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre et les coefficients $a_{n,k}$ vérifient :

$$a_{n,n} = \frac{\alpha}{2n} a_{n-1,n-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (6.40)$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{2\alpha k} \left\{ 4 \left[\frac{k+1}{2} \right]^2 a_{n,k+1} + \alpha^2 a_{n-1,k-1} \right\}, \quad k = n-1, \dots, 1. \quad (6.41)$$

On peut choisir arbitrairement les coefficients $a_{n,0}$, par exemple Chapko et Kress les prennent égaux à 1. Pour chaque n , on doit d'abord calculer tous les coefficients $a_{n,k}$, ce qui peut devenir très coûteux.

Pour remédier à cela, S. Langdon fait remarquer dans sa thèse que si l'on choisit de faire varier le pas de temps, les expressions de v_n et w_n se simplifient énormément, et par là-même celle de Ψ .

On considère par exemple le cas où $\alpha_n \neq \alpha_0$, pour tout $n = 1, \dots, N - 1$. Dans ce cas, il est clair

que $w_n = 0$ satisfait le système pour tout $n = 1, \dots, N - 1$ et v_n est une fonction constante pour chaque n définie de la manière suivante :

$$v_n = v_0 \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j^2}{\alpha_j^2 - \alpha_0^2}, \quad n = 1, \dots, N - 1.$$

Pour résoudre le système (6.35)-(6.36), S. Langdon préfère utiliser le potentiel de double couche W_n défini ci-dessous, plutôt que le potentiel de simple couche, car l'analyse mathématique de l'erreur est plus développée pour le potentiel de double couche.

$$W_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} q_m(y) \frac{\partial \Psi_{n-m}(x, y)}{\partial n(y)} d\gamma(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (6.42)$$

La suite W_n satisfait la condition aux limites (6.36) si et seulement si les fonctions de densité q_n vérifient la relation suivante :

$$\begin{aligned} q_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} q_n(y) \frac{\partial \Psi_0(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = \\ g_n(x) - \sum_{m=0}^n q_m(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_{\Gamma} q_m(y) \frac{\partial \Psi_{n-m}(x, y)}{\partial n(y)} d\gamma(y), \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Il faut souligner qu'à chaque pas de temps, l'opérateur intégral à inverser reste le même, et seul le second membre change.

Si on utilise un pas de temps variable, chaque Ψ_n devient tout simplement un multiple de Ψ_0 , et on n'a besoin de calculer qu'une seule intégrale sur tout le domaine, ainsi cette méthode pourrait considérablement réduire le coût du schéma. Malheureusement, aucun test numérique n'a été réalisé à ce jour à notre connaissance pour confirmer ce point.

Remarque 16 *Il est prouvé dans la thèse de S. Langdon que cette méthode mène en fait à la même solution que la méthode de Lubich et Schneider. Leur approche est pourtant différente : ils approchent l'intégrale de convolution en temps par une méthode de quadrature, puis ils utilisent un schéma linéaire multi-pas et la transformée de Laplace.*

2. Domain embedding method : C'est la méthode utilisée par S. Langdon dans sa thèse. Pour résoudre l'équation de Helmholtz, il procède en trois étapes : la première consiste à trouver une solution particulière, puis à résoudre le problème homogène correspondant sur les frontières, et enfin à résoudre le problème dans tout le domaine.

- Première étape : trouver une solution particulière u_P :

Il utilise ce qu'il appelle "the domain embedding method", c'est-à-dire qu'il étend le problème sur un domaine rectangulaire fictif R tel que $\Omega \subset R$. Le terme u_n est prolongé par 0 sur $R \setminus \Omega$. Alors il peut facilement appliquer des méthodes de différences finies et de transformées de Fourier (Fast Fourier Transforms). La seule difficulté rencontrée est l'approximation de la solution aux points qui se situent autour de la frontière $\gamma = \partial R$. Elle est levée en apportant au membre de droite un terme de correction.

- Deuxième étape : résoudre le problème homogène correspondant :
On pose $v = u - u_P$, on doit alors résoudre le système suivant :

$$-\Delta v + \alpha^2 v = 0 \text{ dans } \Omega \quad (6.43)$$

$$v = f - u_P \text{ sur } \gamma. \quad (6.44)$$

Les méthodes de collocation classiquement employées pour résoudre l'équation de Helmholtz (voir par exemple Kress [48]) sont limitées aux cas où α n'est pas trop grand, i.e. elles ne convergent pas si le pas de temps Δt est choisi trop proche de zéro.

S. Langdon propose dans sa thèse une nouvelle méthode de collocation qui converge quand $\alpha \rightarrow \infty$ (i.e. $\Delta t \rightarrow 0$). Elle consiste à transformer les intégrales par un changement de variables puis à les approcher par une variante de la formule du trapèze sur un maillage adapté. Il obtient ainsi une convergence qui ne dépend plus de α .

- Troisième étape : évaluer la solution dans tout le domaine :
On peut utiliser directement la formule suivante :

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n}(y) G(x, y) - v(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right\} d\gamma(y) \text{ pour } x \in \Omega, \quad (6.45)$$

mais le coût numérique de calcul de cette intégrale est très cher, vu que cette intégrale doit être évaluée à chaque point du domaine, d'autant plus que dans notre cas, la taille du domaine est très importante.

S. Langdon remédie à ce problème en utilisant une méthode basée sur celle de Mayo : l'idée consiste à évaluer la solution directement pour un petit nombre de points bien choisis près de la frontière, puis d'étendre la solution au reste du domaine par un fast solver. Pour traiter les singularités des intégrales aux points x situés près de la frontière γ , il emploie une méthode d'extraction (Schulz, Schwab et Wendland [77]) basée sur une représentation en série de Taylor à partir des dérivées normales.

Conclusion : Ce type de méthodes consistant à approcher directement la dérivée en temps par différences finies pour obtenir l'équation de Helmholtz nécessite le calcul d'une intégrale sur le domaine, qu'il faut alors mailler. Ceci présente un inconvénient majeur dans notre cadre d'application : il faudrait raffiner le maillage autour du puits comme pour les méthodes d'éléments finis, de volumes finis et de différences finies, afin de respecter au mieux les singularités de la pression au voisinage du puits. On perd alors les avantages de la méthode intégrale, en particulier la précision au niveau du puits. On perd aussi du temps CPU pour calculer l'intégrale sur le domaine.

6.4.2.4 Méthodes de Réciprocité Duale et de Multi-Réciprocité

Ces méthodes ont pour but d'exprimer les intégrales sur le domaine comme des intégrales sur les frontières.

1. Méthode de Réciprocité Duale : Cette méthode a tout d'abord été introduite en 1985 par Nardini et Brebbia (voir [60, 61, 62]) puis développée par Brebbia et Wrobel [14]. Son but est d'éliminer l'intégrale sur le domaine.

On rappelle la formulation intégrale de l'équation de la chaleur :

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\gamma + \frac{1}{k} \times \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u^* d\Omega, \quad (6.46)$$

où u^* est la solution fondamentale de l'équation de Laplace et q^* le flux associé : $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$.

Nouvelle formulation du problème :

La présence de l'intégrale (notée D) sur le domaine Ω n'est pas conforme à la formulation intégrale du problème, et affecte sa précision. L'idée consiste donc à exprimer cette intégrale comme une intégrale aux frontières.

Pour cela, on écrit la dérivée en temps sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N+P} f^j(x) \frac{\partial \alpha^j(t)}{\partial t} := \sum_{j=1}^{N+P} f^j(x) \dot{\alpha}^j(t), \quad (6.47)$$

avec N le nombre de nœuds sur la frontière et P le nombre de nœuds à l'intérieur du domaine (P peut être nul).

Les fonctions f^j sont à préciser ultérieurement.

L'intégrale D devient alors :

$$D = c \times \sum_{j=1}^{N+P} \frac{\partial \alpha^j(t)}{\partial t} \int_{\Omega} f^j(x) u^*(x, t) d\Omega, \quad (6.48)$$

où c est un coefficient réel.

L'astuce consiste alors à trouver des fonctions \hat{u}^j telles que :

$$f^j(x) = \Delta \hat{u}^j(x). \quad (6.49)$$

En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$D = c \times \sum_{j=1}^{N+P} \frac{\partial \alpha^j(t)}{\partial t} \left\{ c_i \hat{u}_i^j + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}^j(t)}{\partial n} u^* d\gamma - \int_{\Gamma} \hat{u}^j \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma \right\}. \quad (6.50)$$

Il vient alors la nouvelle formulation intégrale de l'équation de diffusion :

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} (u q^* - u^* q) d\gamma = c \times \sum_{j=1}^{N+P} \frac{\partial \alpha^j(t)}{\partial t} \left\{ c_i \hat{u}_i^j + \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial n} u^* d\gamma - \int_{\Gamma} \hat{u}^j \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma \right\}. \quad (6.51)$$

Discrétisation de l'équation :

Il reste maintenant à discrétiser cette équation : pour cela, on procède de manière classique en subdivisant la frontière γ en plusieurs éléments γ_k , et sur chacun de ces éléments, on exprime les fonctions u et q dans une base de fonctions de forme donnée.

On peut alors écrire le système sous forme matricielle :

$$HU - GQ = c[H\hat{U} - G\hat{Q}]\dot{\alpha}, \quad (6.52)$$

or, d'après (6.47), on peut écrire :

$$\dot{U} = F\dot{\alpha} \quad \text{d'où} \quad \dot{\alpha} = F^{-1}\dot{U}, \quad (6.53)$$

en supposant F inversible.

On obtient alors :

$$HU - GQ = C\dot{U}. \quad (6.54)$$

avec $C = c \times [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1}$. La dérivée en temps est alors approchée par un schéma de différences finies :

$$\frac{\partial u(x, t^{m+1})}{\partial t} = \frac{u(x, t^{m+1}) - u(x, t^m)}{\Delta t^m}, \quad (6.55)$$

et on aboutit enfin au système suivant :

$$\left(\frac{1}{\Delta t^m}C + H - G\right)U^{m+1} - GQ^{m+1} = \frac{1}{\Delta t^m}CU^m. \quad (6.56)$$

Si on choisit un pas de temps constant, la matrice à inverser reste la même, et seul le second membre doit être recalculé à chaque itération de temps.

Choix des fonctions f^j :

Les fonctions f^j doivent être choisies de telle sorte que l'approximation (6.47) soit la plus précise possible, qu'on puisse trouver analytiquement les fonctions \hat{u}^j qui vérifient (6.49), et telles que la matrice F soit inversible.

Il existe plusieurs ensembles de fonctions qui satisfont toutes ces conditions. On utilisait dans les premiers papiers des fonctions de la distance géométrique du point considéré x_j à tout autre point du domaine x , puis ce choix a été discuté par M.A. Golberg, C.S. Chen, et H. Power, notamment dans les articles [34, 33].

Remarque 17 *D'après la formule (6.47), il est naturel d'écrire :*

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{N+P} f^j(x)\alpha^j(t), \quad (6.57)$$

et en utilisant (6.47) et (6.28), on obtient :

$$\sum_{j=1}^{N+P} \left(\Delta f^j(x)\alpha^j(t) - \frac{1}{k}f^j(x)\dot{\alpha}^j(t) \right) = 0, \quad (6.58)$$

et ceci pour tout x et pour tout t , d'où :

$$\Delta f^j(x)\alpha^j(t) - \frac{1}{k}f^j(x)\dot{\alpha}^j(t) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, N + P. \quad (6.59)$$

On a alors :

$$\frac{\Delta f^j(x)}{f^j(x)} = \frac{1}{k} \frac{\dot{\alpha}^j(t)}{\alpha^j(t)} := -\mu^2 \text{ pour tout } j = 1, \dots, N + P. \quad (6.60)$$

On aboutit alors à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta f^j(x) + \mu^2 f^j(x) = 0. \quad (6.61)$$

Le choix des fonctions f^j pour le cas particulier de l'équation de Helmholtz est discuté dans l'article de Aral et Tang [5].

La méthode de Réciprocité Duale est aussi utilisée pour résoudre l'équation de diffusion, mais après un passage dans l'espace de Laplace, par S. Zhu, H.W. Liu, X.P. Lu et P. Satravaha [84, 86, 85, 83].

D'autre part, cette méthode a déjà été appliquée aux problèmes pétroliers dans les travaux de R. Archer et R. Horne [4, 1, 2], qui la comparent en temps de calcul et en précision à la méthode appelée "Green Element Method" proposée dans les années 90 par Taigbenu [78] (voir aussi Archer [3]). Il s'agit d'une implémentation élément par élément de la méthode intégrale, un peu dans l'esprit des méthodes d'éléments finis.

2. Méthode de Multi-Réciprocité : A la fin des années 80, une extension de la méthode de Réciprocité Duale a été proposée par Nowak et Brebbia. Le but est toujours d'exprimer l'intégrale sur le domaine Ω comme une intégrale sur la frontière. On a :

$$D := D_0 = \int_{\Omega} \dot{u} u_0^* d\Omega, \quad (6.62)$$

où u_0^* désigne la solution fondamentale. On introduit alors la fonction u_1^* et sa dérivée normale q_1^* qui vérifient :

$$\Delta u_1^* = u_0^* \quad (6.63)$$

$$q_1^* = -k \frac{\partial u_0^*}{\partial n}. \quad (6.64)$$

En appliquant le théorème de Green, on trouve :

$$D_0 = c \times \int_{\Gamma} (u_1^* \frac{\partial q}{\partial t} - q_1^* \frac{\partial u}{\partial t}) d\gamma + D_1, \quad (6.65)$$

où :

$$D_1 = c \times \int_{\Omega} u_1^* \Delta \dot{u} d\Omega.$$

On inverse alors les dérivées en temps et en espace, D_1 peut alors s'écrire :

$$D_1 = c \times \int_{\Omega} u_1^* \ddot{u} d\Omega.$$

On peut alors réitérer le procédé jusqu'à l'infini :

$$\Delta u_{j+1}^* = u_j^* \quad (6.66)$$

$$q_{j+1}^* = -k \frac{\partial u_j^*}{\partial n}, \quad (6.67)$$

et on obtient :

$$D_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \int_{\Gamma} (u_j^* \frac{\partial^j q}{\partial t^j} - q_j^* \frac{\partial^j u}{\partial t^j}) d\gamma. \quad (6.68)$$

En reportant cette expression dans l'équation (6.46), on obtient alors la formulation intégrale **exacte** du problème :

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \int_{\Gamma} q_j^* \frac{\partial^j u}{\partial t^j} d\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \int_{\Gamma} u_j^* \frac{\partial^j q}{\partial t^j} d\gamma. \quad (6.69)$$

Les discrétisations en temps et en espace sont analogues à celles effectuées dans le cadre de la méthode de Réciprocité Duale, bien entendu la série est tronquée. La précision de la méthode dépend essentiellement de la convergence de la série. Pour des temps longs, la convergence est rapide, et pour des temps courts, on n'obtient pas de résultats satisfaisants pour des pas de temps Δt trop petits.

Cette méthode est plus précise que la méthode de Réciprocité Duale, mais son coût numérique est plus élevé.

Conclusion sur ces deux méthodes : Les méthodes de Réciprocité Duale ou de Multi-Réciprocité semblent très attractives pour notre problème, du fait qu'elles permettent une écriture du problème exclusivement grâce à des intégrales sur les frontières.

Cependant, nous émettons quelques réserves quant à l'utilisation de ces méthodes, car bien qu'elles soient apparues dans les années 80, leur analyse mathématique est très peu développée à ce jour.

6.4.3 Conclusion et méthodologie retenue

Chacune des méthodes présentées dans ce chapitre a été appliquée dans le milieu pétrolier, exceptée la méthode de S. Langdon.

Cette dernière méthode, désignée sous le nom de "domain embedding method", semble théoriquement intéressante du point de vue temps CPU, mais lourde à implémenter. Par ailleurs, l'application numérique à l'équation de la chaleur n'a pas été poursuivie, ce qui ne nous garantit pas de bons résultats.

D'autre part, nous avons déjà exposé les raisons qui nous poussent à écarter les méthodes de Réciprocité Duale et de Multi-Réciprocité, pourtant attrayantes au premier abord.

La méthode de la transformée de Laplace, quant à elle, est aujourd'hui devenue une approche classique et efficace du problème de la diffusion dans le domaine pétrolier. Elle se détache largement de la méthode directe au niveau temps de calcul, et fournit une bonne précision. C'est pourquoi notre choix s'est orienté vers cette méthode.

6.5 Conclusion du chapitre

Nous venons donc de justifier par une revue bibliographique des méthodes intégrales existantes pour traiter le problème de diffusion notre choix de la méthode de la transformée de Laplace.

Nous avons par ailleurs démontré que le modèle en régime transitoire était bien posé pour la condition de conductivité infinie sur le puits (condition linéaire). Nous avons posé le problème de point fixe pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au modèle non-linéaire, mais ce travail n'a pas pu être réalisé pendant la thèse, faute de temps. Ceci figure parmi les perspectives de la thèse.

Conclusion

L'objectif de la thèse a donc majoritairement été rempli : nous avons développé et implémenté une nouvelle méthode intégrale pour simuler l'écoulement dans les puits horizontaux dans des réservoirs stratifiés de géométrie quelconque.

Au niveau théorique, nous avons réussi à démontrer que les modèles linéaires (en régime permanent ou transitoire) sont bien posés. Pour les modèles non-linéaires, nous avons montré que le modèle en régime permanent admet une unique solution, si le coefficient de friction est suffisamment petit.

Du point de vue mise en œuvre numérique, la discussion des différentes formulations intégrales nous a conduits au choix d'une nouvelle formulation, jamais utilisée dans le milieu pétrolier. Nous avons par ailleurs montré que cette nouvelle formulation donne de meilleurs résultats que celle classiquement utilisée dans le milieu pétrolier. D'autre part, nous avons mis en évidence l'efficacité de la méthode de Galerkin, notamment pour le traitement des intégrales hypersingulières, et nous avons généralisé pour le cas anisotrope la formule analytique pour l'intégrale hypersingulière développée par Nédélec.

La différence d'échelle entre la taille du réservoir et le rayon du puits nous a permis de faire une approximation filaire du puits. La méthode non-usuelle d'approximation filaire du puits donne de très bons résultats, et présente un double avantage. Elle permet d'une part de réduire les calculs des intégrales sur le puits à un problème en une dimension, et d'autre part de discrétiser tout simplement les puits par des segments, ce qui évite de trianguler la surface cylindrique du puits.

Les tests numériques ont été concluants pour un puits dans un milieu infini, pour un réservoir homogène anisotrope, ou encore pour un réservoir stratifié. Pour chacun des tests, on obtient une bonne évaluation de l'*IP*, ce qui est très important pour les ingénieurs pétroliers, et les résultats restent tout à fait satisfaisants, même avec des maillages grossiers.

Cependant, les tests effectués dans le cadre de cette thèse ne concernent pas des réservoirs à géométrie trop compliquée, par défaut de mailleur. Le mailleur utilisé a été développé par nous-mêmes, et nous nous sommes limités à des cas assez simples (couches non-parallèles ou réservoirs parallélépipédiques avec ou sans pendage). Il serait intéressant de disposer d'un mailleur plus puissant afin de pouvoir prendre en compte des géométries de réservoirs plus complexes, et plus proches de la réalité.

D'autre part, le cas pratique des puits complexes n'a pas été traité dans le cadre de cette thèse, faute de temps. La méthode intégrale, comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, est bien adaptée à des géométries complexes, et la méthode d'approximation filaire reste aussi valable dans ce cas-là. La généralisation aux puits multi-branches reste un problème technique de calculs. Une des difficultés que l'on pourrait rencontrer est le puits qui traverse une couche. Dans cette situation, la méthode intégrale reste applicable, mais la régularité géométrique pose problème, tant au niveau théorique qu'au niveau numérique. Son traitement pourrait constituer

un prolongement de cette thèse.

D'autre part, pour perfectionner notre méthode, il est envisageable d'appliquer une méthode multipôles ([23]), qui permet de réduire les temps de calculs des coefficients et des produits matrice-vecteur. Ensuite, nous pourrions implémenter le problème non-linéaire. Du point de vue pétrolier, l'hypothèse de conductivité finie permet de prendre en compte les pertes de charge sur le puits, et est donc plus réaliste que l'hypothèse de conductivité infinie (pression constante le long du puits) du modèle linéaire. Enfin, tous ces résultats pourront être généralisés au modèle transitoire par transformation de Laplace et résolution d'un système d'équations de Helmholtz, puis par retour dans l'espace réel par transformation inverse. Une méthode directe reste envisageable, mais il faudra alors stocker tout l'historique.

Du point de vue théorique, plusieurs questions se posent encore. Tout d'abord, pour la démonstration d'existence et d'unicité d'une solution au problème non-linéaire d'écoulement permanent, il serait intéressant de pouvoir lever la condition sur le coefficient de friction et les données, ou du moins l'affaiblir. Il reste aussi à montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème non-linéaire transitoire. Nous avons posé le problème de point fixe, et nous pensons qu'il peut être résolu suivant le même schéma que pour le problème permanent, en adaptant les estimations avec les produits de convolution. Une autre solution consisterait à faire la démonstration directement dans l'espace temps.

Enfin, nous envisageons de mettre à jour une justification mathématique de l'approximation filaire du puits. Il serait vraiment intéressant de le faire, car ce problème d'approximation filaire est souvent rencontré dans d'autres problèmes physiques, notamment en électromagnétisme, par les chercheurs qui travaillent sur des méthodes intégrales, et reste un problème ouvert.

Annexes

Chapitre 7

Annexe A : Calcul des intégrales discrètes sur des triangles

Cet annexe est consacré au calcul des intégrales discrètes faiblement singulières et hypersingulières, portant sur des triangles.

7.1 Calcul de l'intégrale S_{ij}

Il s'agit dans cette section de calculer :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \int_{\Gamma_h} G(x-y) \psi_j^h(y) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x) \\ &= \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\psi_i^h(x) \psi_j^h(y)}{4\pi|x-y|} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x). \end{aligned}$$

Cette intégrale est faiblement singulière. Plusieurs méthodes existent pour lever la singularité (pour une revue de ces méthodes, voir [23]). Nous choisissons d'appliquer la méthode de Hoop utilisée dans [10], [6].

Ici nous rappellerons les principales étapes du calcul sans en développer tous les détails.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la frontière Γ_h se compose de triangles :

$$\Gamma_h = \sum_k T_k.$$

On est donc ramenés au calcul des termes :

$$\int_{T_k} \int_{T_m} \frac{\psi_i^h(x) \psi_j^h(y)}{|x-y|} dT_m(y) dT_k(x).$$

L'intégrale intérieure est calculée analytiquement par la méthode de De Hoop quand les triangles T_k et T_m sont proches, et numériquement quand les triangles T_k et T_m sont suffisamment éloignés.

L'intégration numérique est faite par une quadrature de Gauss, avec en pratique 7 points de Gauss par triangle.

Remarque 18 *Il faut établir un critère pour décider si les triangles sont suffisamment éloignés ou non. Le critère que nous avons adopté est le suivant : les triangles sont déclarés proches s'ils ont au moins un sommet commun.*

Dans ce qui suit, nous allons calculer analytiquement l'intégrale intérieure. Nous verrons ainsi comment est levée la singularité. Les fonctions de base ψ_i^h étant des polynômes de degré 1, nous aurons deux types d'intégrales à calculer, le premier correspondant aux termes \mathbb{P}^0 de la fonction de base, l'autre correspondant aux termes \mathbb{P}^1 .

7.1.1 Calcul des termes \mathbb{P}^0

On doit donc calculer, à un coefficient près :

$$\int_{T_k} \int_{T_m} \frac{1}{|x-y|} dT_m(y) dT_k(x).$$

On inverse les notations entre x et y pour respecter les notations du cours de J. Giroire [32]. Les calculs déjà faits dans ce cours ne seront pas redétaillés ici.

On calcule analytiquement l'intégrale intérieure :

$$I(y) = \int_{T_m} \frac{1}{|x-y|} dT_m(x).$$

Première étape : on projette y dans le plan de T_m . Soit P le projeté de y dans le plan du triangle T_m . On obtient les coordonnées de P par la relation :

$$\begin{aligned} y\vec{P} &= \lambda \vec{n} \\ \lambda &= y\vec{S}_1 \cdot \vec{n}, \end{aligned}$$

avec \vec{n} la normale extérieure au triangle T_m :

$$\vec{n} = \frac{S_1\vec{S}_2 \wedge S_1\vec{S}_3}{\|S_1\vec{S}_2 \wedge S_1\vec{S}_3\|},$$

et S_1, S_2, S_3 les sommets du triangle T_m .

On pose : $h = |y\vec{P}|$. On doit alors calculer :

$$I(y) = \int_T \frac{1}{\sqrt{h^2 + |x-P|^2}} dT(y).$$

On va décomposer cette intégrale en une somme algébrique d'intégrales du même intégrande sur des triangles issus de P . On verra dans la prochaine section comment calculer l'intégrale issue de P .

Plusieurs cas particuliers se présentent alors :

1. le point P est à l'extérieur du triangle,
2. le point P est à l'intérieur du triangle,
3. le point P appartient à l'une des droites engendrées par les arêtes,
4. le point P est un des sommets.

Si le point P est l'un des sommets, on a une seule intégrale à calculer.

Si le point P est à l'extérieur du triangle (fig. 7.1), on a trois intégrales à calculer. Deux cas de figure se présentent alors selon qu'un des sommets, par exemple S_1 , est intérieur ou non au triangle (PS_2S_3). Si aucun sommet n'est intérieur au triangle issu de P (fig. 7.1(a)), alors on aura une intégrale à soustraire des deux autres. Sinon (voir fig. 7.1(b)), on aura deux intégrales à soustraire à une autre.

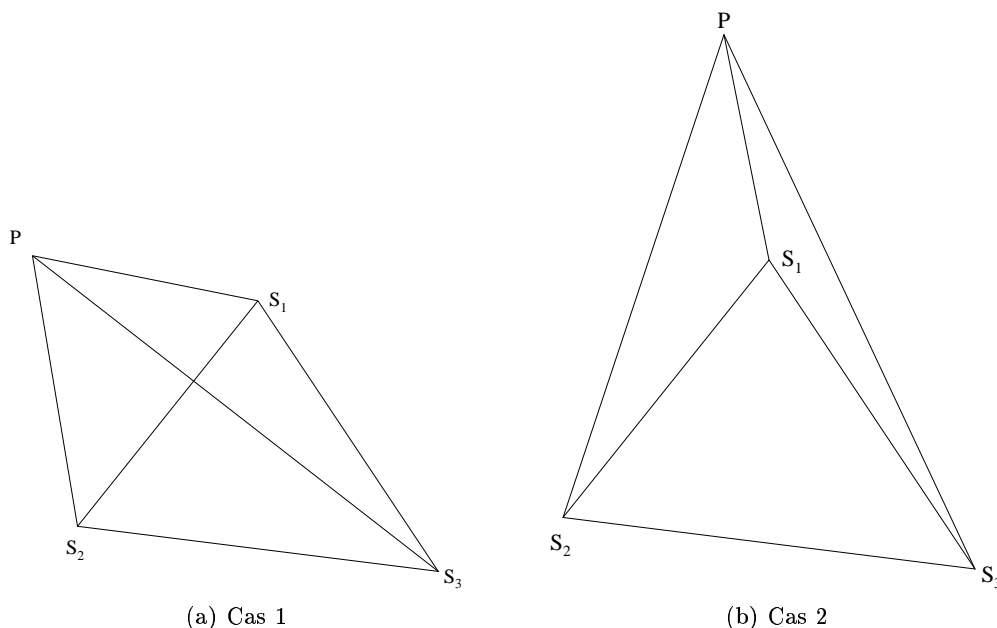


FIG. 7.1 – Cas où P est extérieur au triangle

Si le point P est à l'intérieur du triangle (fig. 7.2), on a encore trois intégrales à calculer, et ici les trois contributions s'ajoutent.

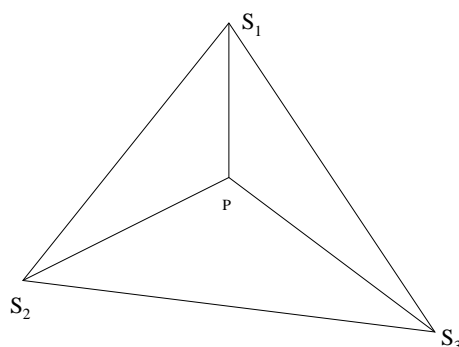


FIG. 7.2 – Cas où P est intérieur au triangle

Si le point P appartient à l'une des droites engendrées par les arêtes du triangle (fig. 7.3), on a deux intégrales à calculer. On les somme si P appartient à l'arête (fig. 7.3(a)), mais on en

soustrait une si P est extérieur à l'arête (fig. 7.3(b) et 7.3(c)).

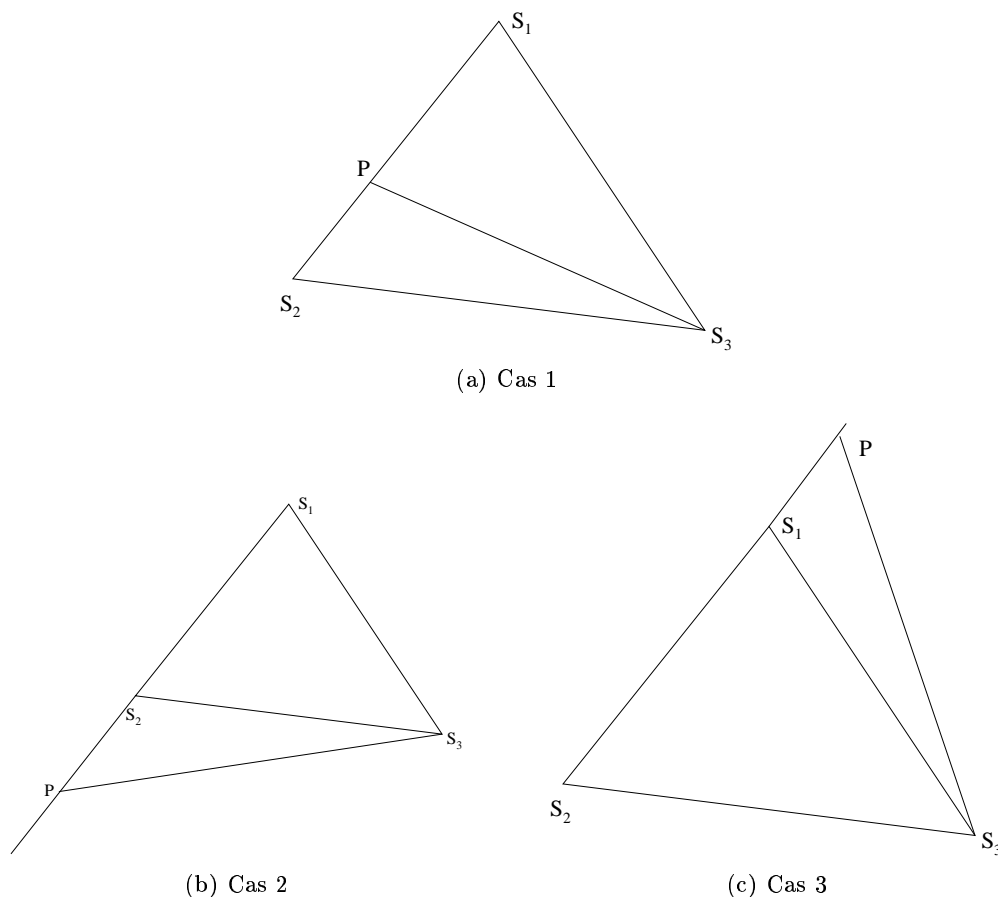


FIG. 7.3 – Cas où P appartient à la droite engendrée par une arête du triangle.

Comment déterminer chacun de ces cas particuliers ?

Si l'on souhaite déterminer chacun de ces cas particuliers, on devra procéder à une série de tests assez coûteuse numériquement. Une solution consiste à chercher les coordonnées barycentriques $\alpha_i(P)$, $i = 1, 2, 3$ du point P dans le triangle $(S_1S_2S_3)$. Le signe des coordonnées barycentriques par rapport à chacun des sommets donne alors le signe de l'intégrale correspondante :

$$I(y) = \text{sgn}(\alpha_1(P))I(PS_2S_3) + \text{sgn}(\alpha_2(P))I(PS_3S_1) + \text{sgn}(\alpha_3(P))I(PS_1S_2),$$

où la fonction sgn est définie par :

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

et l'intégrale $I(PS_iS_{i+1})$ désigne l'intégrale sur le triangle de sommets P, S_i, S_{i+1} , $i = 1, 2, 3$.

2^{ème} étape : calcul de l'intégrale de sommet P. On note T le triangle de sommet P . On suppose par exemple que T est le triangle de sommets P, S_1, S_2 .

On projette P sur la droite (S_1S_2) . Soit H cette projection. On obtient le point H par les relations :

$$\begin{aligned} S_1\vec{H} &= \mu S_1\vec{S}_2, \\ \mu &= \frac{S_1\vec{S}_2 \cdot S_1\vec{P}}{|S_1\vec{S}_2|^2}. \end{aligned}$$

Le point H peut se situer entre les points S_1 et S_2 , ou bien à l'extérieur du segment $[S_1S_2]$, ou encore coïncider avec l'un des sommets S_1 ou S_2 .

Sa position va déterminer les signes des contributions des deux intégrales (l'une portant sur le triangle (PS_1H) , l'autre sur le triangle (PS_2H)). Pour obtenir les signes des contributions des intégrales, on utilise de la même manière que pour les intégrales de sommet P le signe des coordonnées barycentriques de H par rapport à S_1 et S_2 .

On exprime alors en coordonnées polaires de centre P l'intégrale à calculer :

$$J_i = \int_0^{\theta_i} \int_0^{\frac{\rho}{\cos\theta}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

où $\rho = |P\vec{H}|$.

Le calcul de cette intégrale est détaillé dans [32], on obtient :

$$\begin{aligned} J_i &= K_i - h\theta_i \\ \text{avec } K_i &= \left[\rho \ln \left(\sqrt{h^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2\theta} + \rho \tan\theta \right) + h \text{Arc sin} \left(\frac{h \sin \theta}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \right) \right]_0^{\theta_i}. \end{aligned}$$

7.1.2 Calcul des termes \mathbb{P}^1

On ne calcule que l'intégrale intérieure :

$$\int_{T_m} x_\alpha \frac{1}{|x-y|} dT_m(x).$$

On décompose cette intégrale en somme de deux intégrales :

$$\int_{T_m} (x_\alpha - y_\alpha) \frac{1}{|x-y|} dT_m(x) + y_\alpha \int_{T_m} \frac{1}{|x-y|} dT_m(x).$$

La deuxième intégrale a déjà été calculée dans la précédente section.

Reste maintenant à calculer :

$$\int_{T_m} (x_\alpha - y_\alpha) \frac{1}{|x-y|} dT_m(x).$$

Pour cela, on écrit que :

$$\frac{x-y}{|x-y|} = \nabla(|x-y|) = \nabla_T(|x-y|) + \frac{\partial}{\partial n_x}(|x-y|) \cdot n_x.$$

On est alors ramenés au calcul de deux intégrales, que l'on peut trouver dans [32].

Calcul de l'intégrale en $\frac{\partial}{\partial n_x}$:

$$\frac{\partial}{\partial n_x} (|x - y|) = \frac{(x - y, n_x)}{|x - y|}.$$

Or $(x - y, n_x) = (x - P, n_x) + (P - y, n_x) = (P - y, n_x) = d$ avec d constante, donc :

$$\int_{T_m} \frac{\partial}{\partial n_x} (|x - y|) dT_m(x).n_x = d \int_{T_m} \frac{1}{|x - y|} dT_m(y).n_x.$$

Calcul du gradient tangentiel :

$$\int_{T_m} \partial_l (|x - y|) dT_m(x) = \sum_{i=0}^2 \int_{S_i}^{S_{i+1}} |x - y| \nu_l^{i+2} d(S_i S_{i+1}).$$

7.2 Calcul de l'intégrale H_{ij}

On veut calculer :

$$\int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \int_{\Gamma_h} \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y} \psi_j^h(y) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x).$$

Pour rester en accord avec les notations de [32], on exprime l'intégrale intérieure en x et l'intégrale extérieure en y :

$$\int_{\Gamma_h} \psi_i^h(y) \int_{\Gamma_h} \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_x} \psi_j^h(x) d\gamma_h(x) d\gamma_h(y).$$

Et comme on a :

$$\frac{\partial G(x - y)}{\partial n_x} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x - y, n_x)}{|x - y|^3},$$

on doit calculer :

$$- \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(y) \psi_j^h(x) \frac{(x - y, n_x)}{4\pi |x - y|^3} d\gamma_h(x) d\gamma_h(y).$$

On est donc ramenés au calcul des termes :

$$- \int_{T_k} \int_{T_m} \psi_i^h(x) \psi_j^h(y) \frac{(x - y, n_x)}{|x - y|^3} dT_m(x) dT_k(y).$$

Cette intégrale est comme l'intégrale S_{ij} faiblement singulière, on va procéder de la même manière que pour le calcul de l'intégrale S_{ij} . On utilise la méthode de De Hoop, avec les mêmes projections, et donc les mêmes cas particuliers.

On reprend donc seulement les calculs, et les cas particuliers supplémentaires.

7.2.1 Calcul des termes \mathbb{P}^0

On doit calculer :

$$\int_{T_k} \int_{T_m} \frac{-(x-y, n_x)}{|x-y|^3} dT_m(x) dT_k(y).$$

On va calculer analytiquement l'intégrale intérieure :

$$I_0^{DN}(y) = \int_{T_m} \frac{-(x-y, n_x)}{|x-y|^3} dT_m(x).$$

Première étape : on projette y dans le plan de T_m . Soit P le projeté de y dans le plan du triangle T_m . On a alors :

$$(x-y, n_x) = (x-P, n_x) + (P-y, n_x) = (P-y, n_x).$$

Ici on peut noter un cas particulier que l'on n'avait pas besoin de considérer pour l'intégrale S_{ij} : si $y = P$ (i.e. $h = 0$), alors l'intégrande est nulle car $(x-y, n_x) = 0$.

On suppose donc dans la suite que $h \neq 0$.

Deuxième étape : calcul dans chacun des triangles issus de P . On remarque que $(P-y, n_x) = h$. On doit donc calculer :

$$J_i = - \int_0^{\theta_i} \int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{h r dr d\theta}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

On intègre tout d'abord par rapport à r :

$$\int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right]_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} = \frac{-1}{\sqrt{h^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2(\theta)}}} + \frac{1}{h},$$

d'où :

$$J_i = - \left(\int_0^{\theta_i} \frac{-h}{\sqrt{h^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2(\theta)}}} d\theta + \theta_i \right) = - (h K_i + \theta_i).$$

Calcul de K_i

$$\begin{aligned} K_i &= - \int_0^{\theta_i} \left(h^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2(\theta)} \right)^{-1/2} d\theta \\ &= - \int_0^{\theta_i} (h^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2(\theta))^{-1/2} d\theta \\ &= - (h^2 + \rho^2)^{-1/2} \int_0^{\theta_i} \left(1 + \frac{\rho^2}{\rho^2 + h^2} \tan^2 \theta \right)^{-1/2} d\theta. \end{aligned}$$

On fait le même changement de variable que dans [32] :

$$\tan u = \frac{\rho}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} d(\tan \theta),$$

et on obtient :

$$K_i = -\frac{1}{\rho} \int_0^{u_i} \frac{du}{\cos u \left(1 + \frac{h^2 + \rho^2}{\rho^2} \tan^2 u \right)}.$$

Posons $a = \frac{\sqrt{h^2 + \rho^2}}{\rho}$. K_i s'exprime alors :

$$\begin{aligned} K_i &= -\frac{1}{\rho} \int_0^{u_i} \frac{du}{\cos u (1 + a^2 \tan^2 u)} \\ &= -\frac{1}{\rho} \int_0^{u_i} \frac{\cos u du}{\cos^2 u + a^2 \sin^2 u} \\ &= -\frac{1}{\rho} \int_0^{u_i} \frac{\cos u du}{1 + (a^2 - 1) \sin^2 u}. \end{aligned}$$

Posons $v = \sin u$. On a alors :

$$K_i = -\frac{1}{\rho} \int_0^{v_i} \frac{dv}{1 + (a^2 - 1)v^2} = -\frac{\rho}{h^2} \int_0^{v_i} \frac{dv}{\frac{\rho^2}{h^2} + v^2} = -\frac{1}{h} \left[\text{Arctan} \left(\frac{h}{\rho} v \right) \right]_0^{v_i}.$$

On revient aux variables initiales de la même manière que cela a été fait dans [32] :

$$K_i = -\frac{1}{h} \left[\text{Arctan} \left(\frac{h \tan \theta}{\sqrt{h^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2(\theta)}} \right) \right]_0^{\theta_i}.$$

On peut alors remplacer le Arctan par un Arcsin :

$$K_i = -\frac{1}{h} \left[\text{Arcsin} \left(\frac{h \sin \theta}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \right) \right]_0^{\theta_i}.$$

7.2.2 Calcul des éléments \mathbb{P}^1

On ne calcule que l'intégrale intérieure :

$$\int_{T_m} x_\alpha \frac{-(x-y, n_x)}{|x-y|^3} dT_m(x).$$

On remarque pour tout x parcourant la facette T_m , on a :

$$(x-y, n_x) = (P-y, n_x) = d \text{ constante.}$$

On va donc calculer :

$$-d \int_{T_m} \frac{x_\alpha}{|x-y|^3} dT_m(x) = -d \int_{T_m} \frac{(x_\alpha - y_\alpha)}{|x-y|^3} dT_m(x) + y_\alpha \int_{T_m} \frac{-(x-y, n_x)}{|x-y|^3} dT_m(x).$$

On a déjà calculé la deuxième intégrale (I_0^{DN}).

Il nous reste donc à calculer :

$$\int_{T_m} \frac{(x_\alpha - y_\alpha)}{|x-y|^3} dT_m(x).$$

Pour cela, écrivons que :

$$\frac{x-y}{|x-y|^3} = \vec{\nabla}_x \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) = \vec{\nabla}_T \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) + \frac{\partial}{\partial n_x} \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) \vec{n}_x.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) \vec{n}_x = \frac{(x-y, n_x)}{|x-y|^3} \vec{n}_x,$$

on obtient alors :

$$\vec{n}_x \int_{T_m} \frac{\partial}{\partial n_x} \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) dT_m(x) = -\vec{n}_x I_0^{DN}.$$

Calcul du gradient tangentiel :

$$\int_{T_m} \partial_i \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) dT_m(x) = \sum_{i=0}^2 \int_{S_i}^{S_{i+1}} \frac{-1}{|x-y|} \nu_i^{i+2} d(S_i S_{i+1}).$$

D'après ce qui a été fait pour l'intégrale de noyau G , on obtient tout de suite l'expression du gradient tangentiel pour y n'appartenant pas à $(S_i S_{i+1})$:

$$\int_{T_m} \partial_i \left(-\frac{1}{|x-y|} \right) dT_m(x) = \sum_{i=0}^2 -\log \left(\frac{R_{i+1} + \vec{R}_{i+1} \cdot \vec{\tau}}{R_i + \vec{R}_i \cdot \vec{\tau}} \right) \nu_i^{i+2}$$

et pour y appartenant à $(S_i S_{i+1})$, le log devient :

$\log \left(\frac{M}{m} \right)$, où $M = \max(R_{i+1}, R_i)$, $m = \min(R_{i+1}, R_i)$.

Remarque 19 (Calcul de l'intégrale H'_{ij}) Comme les opérateurs H et H' sont adjoints l'un de l'autre, on déduit facilement H'_{ij} de H_{ij} :

$$H_{ij} = \langle H \psi_i^h, \psi_j^h \rangle = \langle \psi_i^h, H' \psi_j^h \rangle = H'_{ji} = {}^t H'_{ij}.$$

7.3 Calcul de l'intégrale hypersingulière D_{ij}

L'intégrale D_{ij} est la plus difficile à calculer. Nédélec dans [64] a établi une formule simplifiée de cette intégrale pour la cas d'un milieu isotrope. Nous avons généralisé cette formule pour un milieu anisotrope.

7.3.1 Milieu isotrope

L'intégrale D_{ij} s'exprime par :

$$D_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\int_{\Gamma_h} \frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y} \psi_j^h(y) d\gamma_h(y) \right) d\gamma_h(x).$$

Le fait est que cette intégrale est hypersingulière. En effet, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(n_x, n_y)}{|x-y|^3} - 3 \frac{(x-y, n_x)(x-y, n_y)}{|x-y|^5}.$$

Le second terme du noyau est bien intégrable car $(x-y, n_x) = O(|x-y|^2)$, mais par contre, le premier terme du second membre n'est pas intégrable. C'est pour cette raison que nous ne pouvons pas faire passer le $\partial/\partial n_x$ à l'intérieur de l'intégrale, sinon cette intégrale ne serait pas définie. Alors il nous faut trouver un moyen de lever l'hypersingularité afin de pouvoir trouver une expression de cette intégrale. Ce moyen a été trouvé par Nédélec dans [64] qui a établi la formule suivante :

$$D_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(x)) \cdot \vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(y))}{|x-y|} d\gamma_h(y) d\gamma_h(x)$$

où l'opérateur $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}$ est défini par :

$$\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h} u = \nabla u \wedge n$$

avec n la normale extérieure à Γ_h .

La démonstration de cette relation figure dans [64], [32].

Soulignons que cette formule est très simplifiée : les fonctions de base ψ_i^h , $i = 1, \dots, N$ étant des polynômes de degré 1, les termes $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(x))$ et $\vec{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(y))$ sont constants sur chaque triangle. Nous sommes donc réduits au calcul de S_{ij} à un coefficient près, et ce calcul a déjà été effectué.

7.3.2 Milieu anisotrope

Cependant, dans le cas d'un milieu anisotrope, les choses se compliquent, du fait qu'il faut prendre en compte le tenseur $\overline{\overline{K}}$. Nous rappelons que l'intégrale D_{ij} s'exprime pour un milieu anisotrope (voir chapitre 2) par :

$$D_{ij}^a = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \psi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial (\overline{\overline{K}} n_x)} \left(\int_{\Gamma_h} \frac{\partial}{\partial (\overline{\overline{K}} n_y)} G^a(x-y) \psi_j^h(y) d\gamma_h(y) \right) d\gamma_h(x),$$

avec :

$$G^a(x-y) = -\frac{1}{(a^2(x_1-y_1)^2 + b^2(x_2-y_2)^2 + c^2(x_3-y_3)^2)^{1/2}},$$

$$\text{et } a = \frac{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}}{k_1^{1/2}}, \quad b = \frac{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}}{k_2^{1/2}}, \quad c = \frac{(k_1 k_2 k_3)^{1/6}}{k_3^{1/2}}.$$

Nous avons réussi à généraliser la démonstration de Nédélec à un milieu anisotrope et nous avons obtenu la relation suivante :

$$D_{ij}^a = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \tilde{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_i^h(x)) \cdot \tilde{\text{rot}}_{\Gamma_h}(\psi_j^h(y)) G^a(x-y) d\gamma_h(y) d\gamma_h(x)$$

avec :

$$\tilde{\text{rot}}_{\Gamma_h}[u] = \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} \nabla u \right) \wedge \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} n \right)$$

et :

$$\overline{\overline{K}}^{1/2} = \begin{pmatrix} k_1^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Preuve :

La preuve se décompose en plusieurs étapes. Nous revenons dans un premier temps en continu. Tout d'abord, nous introduisons la notation suivante :

$$\begin{aligned} b(u, v) &= \left\langle u, \frac{\partial v}{\partial(\overline{\overline{K}}n)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial(\overline{\overline{K}}n_x)} \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial(\overline{\overline{K}}n_y)} G^a(x-y) v(y) d\gamma(y) \right) d\gamma(x). \end{aligned}$$

Soit Ω le domaine dans lequel nous résolvons notre système d'EDP, et Ω' le complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^3 .

• Première étape :

Nous pouvons écrire :

$$b(u, v) = \int_{\Omega \cup \Omega'} (k_i^{1/2} \partial_i u) \cdot (k_i^{1/2} \partial_i v) dx.$$

Introduisons \hat{u} défini par :

$$\begin{cases} \partial_i \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^3) \\ \partial_i \hat{u} = \partial_i u \text{ dans } \Omega \text{ et } \Omega', \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire :

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} (k_i^{1/2} \partial_i \hat{u}) \cdot (k_i^{1/2} \partial_i \hat{v}) dx.$$

Nous notons désormais $\tilde{\partial}_i = k_i^{1/2} \partial_i$.

• Deuxième étape :

Calculons $\tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i \hat{u})$ dans \mathbb{R}^3 . Il vient :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \langle \tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i \hat{u}), \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\partial}_i \hat{u} \cdot \tilde{\partial}_i \phi \, dx = - \int_{\Omega \cup \Omega'} \tilde{\partial}_i u \cdot \tilde{\partial}_i \phi \, dx.$$

Or :

$$\begin{cases} - \int_{\Omega} \tilde{\partial}_i u \cdot \tilde{\partial}_i \phi \, dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\overline{K} \cdot \nabla u) \phi \, dx - \langle \overline{K} \nabla u \cdot n, \phi \rangle \\ - \int_{\Omega'} \tilde{\partial}_i u \cdot \tilde{\partial}_i \phi \, dx &= \int_{\Omega'} \operatorname{div}(\overline{K} \cdot \nabla u) \phi \, dx - \langle \overline{K} \nabla u \cdot n, \phi \rangle \end{cases}$$

d'où :

$$\tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i \hat{u}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

i.e.

$$\operatorname{div}(\tilde{\nabla} u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

avec $\operatorname{div} u = \tilde{\partial}_i u$, et $(\tilde{\nabla} u)_i = \tilde{\partial}_i u$.

Donc il existe un $\vec{\phi}$ tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\tilde{\nabla} u) &= \operatorname{rot} \phi \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(\vec{\phi}) &= \vec{0} \text{ dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

avec $\operatorname{rot} u = \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_j u \tilde{\partial}_k u$,

d'où il découle que :

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot} \phi \cdot \operatorname{rot} \Psi \, dx.$$

• Troisième étape :

Calculons maintenant la différence entre $\tilde{\partial}_i u$ et $\tilde{\partial}_i \hat{u}$. C'est évidemment un terme de bord. Il vient :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \langle \tilde{\partial}_i \hat{u}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\partial}_i \hat{u} \phi \, dx = \int_{\Omega \cup \Omega'} \tilde{\partial}_i u \phi \, dx$$

mais

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \tilde{\partial}_i u \phi \, dx &= - \int_{\Omega} u \tilde{\partial}_i \phi \, dx + \langle u k_i^{1/2} n_i, \phi \rangle \\ \int_{\Omega'} \tilde{\partial}_i u \phi \, dx &= - \int_{\Omega'} u \tilde{\partial}_i \phi \, dx - \langle u k_i^{1/2} n_i, \phi \rangle \end{cases}$$

d'où :

$$\int_{\Omega \cup \Omega'} \tilde{\partial}_i u \phi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} u \tilde{\partial}_i \phi \, dx + \langle [u] k_i^{1/2} n_i, \phi \rangle$$

et :

$$\tilde{\partial}_i \hat{u} = \tilde{\partial}_i u + [u] k_i^{1/2} n_i \delta_{\Gamma} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

• Quatrième étape : Les relations de compatibilité de $\partial_i u$ sont bien connues :

$$\partial_{12} u = \partial_{21} u, \quad \partial_{23} u = \partial_{32} u, \quad \partial_{31} u = \partial_{13} u \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

d'où :

$$\tilde{\partial}_{12} u = \tilde{\partial}_{21} u, \quad \tilde{\partial}_{23} u = \tilde{\partial}_{32} u, \quad \tilde{\partial}_{31} u = \tilde{\partial}_{13} u \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

donc on a :

$$\operatorname{rot}(\tilde{\nabla} u) = 0$$

en effet : $\text{rôt}(\tilde{\nabla}u) = \varepsilon_{ijk}\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_k u = 0..$

Il s'ensuit que :

$$\text{rôt}(\tilde{\nabla}\hat{u} - [u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma) = \vec{0}.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\text{rôt}(\tilde{\nabla}\hat{u}) &= \text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma) \\ \text{et } \text{rôt}(\text{rôt}\vec{\phi}) &= \text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma).\end{aligned}$$

Or on peut montrer la relation suivante :

$$\widetilde{\text{div}}(\tilde{\nabla}\vec{\phi}) = \tilde{\nabla}(\widetilde{\text{div}}\vec{\phi}) - \text{rôt}\text{rôt}\vec{\phi}.$$

$$\begin{aligned}\text{en effet : } \text{rôt}(\text{rôt}\vec{\psi})_i &= \varepsilon_{ijk}\tilde{\partial}_j U_k \quad \text{avec } U_k = \varepsilon_{klm}\tilde{\partial}_l\psi_m \\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_l\psi_m \\ &= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_l\psi_m \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_l\psi_m - \delta_{im}\delta_{jl}\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_l\psi_m \\ &= \tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_i\psi_j - \tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_j\psi_i \\ &= \tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_j\psi_j - \tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_j\psi_i \\ &= \tilde{\nabla}(\widetilde{\text{div}}\vec{\psi})_i - \widetilde{\text{div}}(\tilde{\nabla}\vec{\psi})_i,\end{aligned}$$

et comme $\widetilde{\text{div}}\vec{\phi} = 0$, on a :

$$\widetilde{\text{div}}(\tilde{\nabla}\vec{\phi}) = -\text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma) \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

et donc :

$$\vec{\phi} = \frac{1}{4\pi r}\text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

• Cinquième étape :

Exprimons maintenant la forme bilinéaire b :

$$\begin{aligned}b(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^3} \text{rôt}\vec{\phi}.\text{rôt}\vec{\Psi} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \text{rôt}\text{rôt}\vec{\phi}.\vec{\Psi} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma)\frac{1}{4\pi r}\text{rôt}([v]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma) \, dx\end{aligned}$$

Posons :

$$\text{rôt}_\Gamma[u] = \text{rôt}([u]\overline{K}^{1/2}n\delta_\Gamma).$$

On obtient finalement :

$$b(u, v) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{\text{rôt}_\Gamma u(x).\text{rôt}_\Gamma v(y)}{(a^2(x_1 - y_1)^2 + b^2(x_2 - y_2)^2 + c^2(x_3 - y_3)^2)^{1/2}} d\gamma(y) d\gamma(x). \quad (7.2)$$

• Sixième étape :

Il nous faut maintenant expliciter $\tilde{\text{rot}}_{\Gamma} u$. On a :

$$\begin{aligned} \forall \vec{\phi} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^3))^3, \\ \langle \tilde{\text{rot}}_{\Gamma}[u], \vec{\phi} \rangle &= \langle \tilde{\text{rot}}([u] \overline{\overline{K}}^{1/2} n \delta_{\Gamma}), \vec{\phi} \rangle \\ &= \langle [u] \overline{\overline{K}}^{1/2} n \delta_{\Gamma}, \tilde{\text{rot}} \vec{\phi} \rangle \\ &= \langle [u] \delta_{\Gamma}, k_i^{1/2} n_i \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_j \phi_k \rangle. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \cup \Omega'} \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \phi_k u \, dx \\ &= - \int_{\Omega \cup \Omega'} \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_j \phi_k \tilde{\partial}_i u \, dx + \langle \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_j \phi_k, k_i^{1/2} n_i [u] \rangle_{\Gamma} \\ &= \int_{\Omega \cup \Omega'} \varepsilon_{ijk} \phi_k \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_i u \, dx - \langle \varepsilon_{ijk} \phi_k, [\tilde{\partial}_i u] k_j^{1/2} n_j \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

or : $\varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \phi_k = 0$, et :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \phi_k \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_i u &= \tilde{\partial}_1 \tilde{\partial}_2 u \phi_3 - \tilde{\partial}_1 \tilde{\partial}_3 u \phi_2 \\ &\quad + \tilde{\partial}_2 \tilde{\partial}_3 u \phi_1 - \tilde{\partial}_2 \tilde{\partial}_1 u \phi_3 \\ &\quad + \tilde{\partial}_3 \tilde{\partial}_1 u \phi_2 - \tilde{\partial}_3 \tilde{\partial}_2 u \phi_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$0 = 0 - \langle \varepsilon_{ijk} \phi_k, [\tilde{\partial}_i u] k_j^{1/2} n_j \rangle_{\Gamma} + \langle \varepsilon_{ijk} \tilde{\partial}_j \phi_k, k_i^{1/2} n_i [u] \rangle_{\Gamma},$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ijk} [\tilde{\partial}_i u] k_j^{1/2} n_j, \phi_k \rangle_{\Gamma} &= \langle k_i^{1/2} n_i [u], \varepsilon_{jk} \tilde{\partial}_j \phi_k \rangle \\ \text{i.e. } \langle [\tilde{\nabla} u] \wedge \overline{\overline{K}}^{1/2} n, \vec{\phi} \rangle_{\Gamma} &= \langle \overline{\overline{K}}^{1/2} n [u], \tilde{\text{rot}} \vec{\phi} \rangle_{\Gamma} \\ &= \langle \tilde{\text{rot}}_{\Gamma}[u], \vec{\phi} \rangle. \end{aligned}$$

Donc :

$$\tilde{\text{rot}}_{\Gamma}[u] = \tilde{\nabla} u \wedge \overline{\overline{K}}^{1/2} n = \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} \nabla u \right) \wedge \left(\overline{\overline{K}}^{1/2} n \right). \quad (7.3)$$

□

Ainsi nous savons expliciter l'intégrale hypersingulière pour un milieu anisotrope.

Chapitre 8

Annexe B : Calcul des intégrales sur le puits

8.1 Calcul de l'intégrale simple M_{ij}

Calcul de $\int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(\mathbf{x}) \varphi_j^h(\mathbf{x}) d\gamma(\mathbf{x})$

On fait un changement de variable pour passer en coordonnées cylindriques :

$$\int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(x) d\gamma(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l) \varphi_j^h(l) dl r_w d\theta.$$

Cette intégrale s'annule si $\text{supp } \varphi_i^h \cap \text{supp } \varphi_j^h = \emptyset$, c'est-à-dire si $i < j - 1$ ou si $i > j + 1$. D'autre part, la symétrie de la matrice M est évidente. Nous calculerons donc seulement les termes M_{ij} pour $i = j$ et $i = j - 1$.

- Si $i = j$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(x) d\gamma(x) &= 2\pi r_w \left\{ \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{(l - l_{i-1})^2}{(l_i - l_{i-1})^2} dl + \int_{l_i}^{l_{i+1}} \frac{(l - l_{i+1})^2}{(l_i - l_{i+1})^2} dl \right\} \\ &= 2\pi r_w \left[\frac{(l - l_{i-1})^3}{3(l_i - l_{i-1})^2} \right]_{l=l_{i-1}}^{l=l_i} + 2\pi r_w \left[\frac{(l - l_{i+1})^3}{3(l_i - l_{i+1})^2} \right]_{l=l_i}^{l=l_{i+1}} \\ &= \frac{2\pi r_w}{3} \{(l_i - l_{i-1}) - (l_i - l_{i+1})\}. \end{aligned}$$

- Si $i = j - 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(x) d\gamma(x) &= 2\pi r_w \int_{l_i}^{l_{i+1}} \varphi_i^h(l) \varphi_{i+1}^h(l) dl \\ &= 2\pi r_w \int_{l_i}^{l_{i+1}} \frac{(l - l_{i+1})}{(l_i - l_{i+1})} \frac{(l - l_i)}{(l_{i+1} - l_i)} dl \\ &= \frac{2\pi r_w}{6} (l_{i+1} - l_i). \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{2\pi r_w}{3} \{(l_i - l_{i-1}) - (l_i - l_{i+1})\} & \text{si } i = j, \\ \frac{2\pi r_w}{6} (l_{i+1} - l_i) & \text{si } i = j - 1, \\ \frac{2\pi r_w}{6} (l_i - l_{i-1}) & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

8.2 Calcul de l'intégrale H_{ij}

$$H_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_T \varphi_j^h(y) \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma(x) dT(y)$$

$$\text{On a : } \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = -\frac{n_y \cdot (x-y)}{|x-y|^3}$$

On fait un changement de variable selon la figure 8.1.

La normale est orientée vers l'intérieur du puits (car elle est orientée vers l'extérieur du réservoir

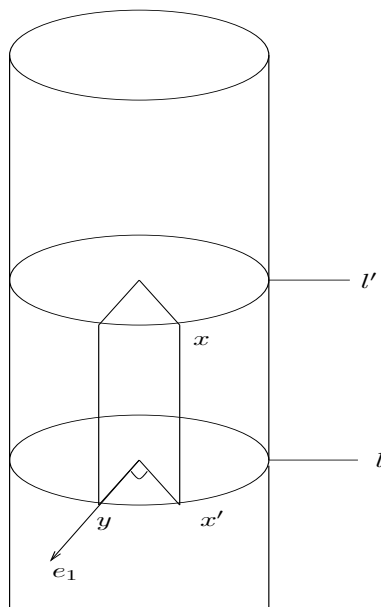


FIG. 8.1 – Section du puits

Ω), donc :

$$n_y = -e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, $x - y = (x - x') + (x' - y)$, avec x' = projeté de x dans le plan de y , et :

$$y = \begin{pmatrix} r_w \\ 0 \\ l \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} r_w \cos \theta \\ r_w \sin \theta \\ l' \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} r_w \cos \theta \\ r_w \sin \theta \\ l \end{pmatrix},$$

$$x - y = \begin{pmatrix} r_w(\cos \theta - 1) \\ r_w \sin \theta \\ l' - l \end{pmatrix}, \quad n_y \cdot (x - y) = r_w(\cos \theta - 1),$$

$$\frac{1}{|x - y|^3} = \frac{1}{[2r_w^2(1 - \cos \theta) + (l - l')^2]^{3/2}}.$$

On rappelle qu'on suppose que $\psi(l, \theta) = \psi(l)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall l \in [0, L]$. On doit donc calculer :

$$H_{ij} = \frac{r_w^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l') \varphi_j^h(l) \frac{r_w(1 - \cos \theta) dl dl' d\theta d\theta'}{[2r_w^2(1 - \cos \theta) + (l - l')^2]^{3/2}}.$$

L'intégrande ne dépendant pas de θ' , et après réduction par symétrie et formules trigonométriques sur l'intégrale sur 2π par rapport à θ , puis changement de variable, l'intégrale H_{ij} peut se réécrire :

$$H_{ij} = 2r_w \int_0^L \varphi_i^h(l') dl' \int_0^L \varphi_j^h(l) dl \int_0^{\pi/2} \frac{2r_w^2 \sin^2 \theta d\theta}{[4r_w^2 \sin^2 \theta + (l - l')^2]^{3/2}}.$$

Pour de simples raisons techniques, on va commencer par intégrer par rapport à l et l' . On écrit donc :

$$H_{ij} = 2r_w \int_0^{\pi/2} I_{H_{ij}}(\theta) d\theta \quad (8.1)$$

avec :

$$I_{H_{ij}}(\theta) = \int_0^L \varphi_i^h(l') dl' \int_0^L \varphi_j^h(l) dl \frac{2r_w^2 \sin^2 \theta}{[4r_w^2 \sin^2 \theta + (l - l')^2]^{3/2}}.$$

Notons :

$$a^2 = 2r_w^2 \sin^2 \theta.$$

Si $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, l'intégrale $I_{H_{ij}}$ ne présente aucune singularité.

Nous traiterons tout d'abord le cas où $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, et dans un second temps le cas où $j - 2 \leq i \leq j + 2$.

8.2.1 Cas régulier : $i < j - 2$ ou $i > j + 2$

Intégration par rapport à l et l' : calcul de $\mathbf{I}_{H_{ij}}(\mathbf{a})$. On reprend les notations du chapitre 4 :

$$I_{H_{ij}}(\mathbf{a}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}(\mathbf{a}) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l') dl' \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_j^h(l) dl \frac{a^2}{|l - l'|^3} \quad (8.2)$$

avec :

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \{i-1, i\}, & \text{si } 2 \leq i \leq N_W - 2, \\ \{i\}, & \text{si } i \in \{1, N_W - 1\}, \end{cases} \quad \mathcal{J} = \begin{cases} \{j-1, j\}, & \text{si } 2 \leq j \leq N_W - 2, \\ \{j\}, & \text{si } j \in \{1, N_W - 1\}. \end{cases}$$

On peut écrire d'une manière générale les fonctions de base φ_i^h , $i = 1, \dots, N_W$ sur un intervalle quelconque $[l_k, l_{k+1}]$, $k = 1, \dots, N_W - 1$, par :

$$\varphi_i^h(l) = \frac{l - b_{ik}}{l_i - b_{ik}},$$

avec $b_{ik} = l_i - (\delta_{ik}l_{k+1} + \delta_{ik+1}l_k)$, et δ la fonction de Kronecker.

On effectue le changement de variable suivant :

$$s = l - b_{ik}, \quad s' = l' - b_{jm},$$

où b_{jm} est défini de la même façon que b_{ik} : $b_{jm} = l_j - (\delta_{jm}l_{m+1} + \delta_{jm+1}l_m)$. Nous devons alors calculer :

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds ds'}{(s - s' + c_{ikjm})^3}$$

avec $c_{ikjm} = (\delta_{jm}l_{m+1} + \delta_{jm+1}l_m) - (\delta_{ik}l_{k+1} + \delta_{ik+1}l_k)$. Nous remarquons que $c_{ikjm} \neq 0$ pour $i < j - 2$ et $i > j + 2$, $b_{ik} \neq 0$, $b_{jm} \neq 0$.

- Première étape : intégration par rapport à s .

Par changement de variable, on peut écrire :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds}{(s - s' + c_{ikjm})^3} = \int_{-s' + c_{ikjm}}^{b_{jm} - s' + c_{ikjm}} \frac{a^2 s'(t + s' - c_{ikjm}) dt}{t^3}.$$

Puis, en décomposant l'intégrande en deux parties, l'une fonction de $1/t^2$, et l'autre fonction de $1/t^3$, et en intégrant, on obtient :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds}{(s - s' + c_{ikjm})^3} = \lambda_1(a, s') + \lambda_2(a, s') + \lambda_3(a, s') + \lambda_4(a, s')$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1(a, s') &= \frac{a^2 s'}{(b_{jm} - s' + c_{ikjm})}, & \lambda_3(a, s') &= \frac{a^2 s'}{(-s' + c_{ikjm})}, \\ \lambda_2(a, s') &= \frac{a^2 s'(s' - c_{ikjm})}{2(b_{jm} - s' + c_{ikjm})^2}, & \lambda_4(a, s') &= \frac{a^2 s'(s' - c_{ikjm})}{2(-s' + c_{ikjm})^2}. \end{aligned}$$

- Deuxième étape : intégration par rapport à s' .

Les fonctions λ_1 et λ_3 , ainsi que λ_2 et λ_4 , sont identiques, à la constante b_{jm} près au dénominateur. Une fois calculées les intégrales des fonctions λ_1 et λ_2 , nous pourrions en déduire facilement les valeurs des intégrales des fonctions λ_3 et λ_4 .

Pour le calcul des intégrales des fonctions λ_1 et λ_3 , nous allons procéder de la même manière que pour l'intégrale par rapport à s' . Nous effectuons un changement de variable,

et nous décomposons la fraction à intégrer en plusieurs morceaux de même ordre, puis nous intégrons. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{ik}} \lambda_1(a, s') ds' &= \int_{b_{jm}+c_{ikjm}-b_{ik}}^{b_{jm}+c_{ikjm}} \frac{a^2 (b_{jm} + c_{ikjm} - t) dt}{t} \\ &= -a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln |b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}| \\ &\quad + a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| - a^2 b_{ik}. \end{aligned}$$

Les fonctions λ_1 et λ_3 étant identiques à la constante b_{jm} près au dénominateur, on en déduit que :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_3(a, s') ds' = -a^2 c_{ikjm} \ln |c_{ikjm} - b_{ik}| + a^2 c_{ikjm} \ln |c_{ikjm}| - a^2 b_{ik}.$$

Pour l'intégrale de λ_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{ik}} \lambda_2(a, s') ds' &= - \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}+c_{ikjm}-b_{ik}} \frac{a^2 (b_{jm} + c_{ikjm} - t) (b_{jm} - t) dt}{2 t^2} \\ &= \frac{a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) b_{jm}}{2 (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})} + \frac{a^2 (2 b_{jm} + c_{ikjm})}{2} \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad - \frac{a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) b_{jm}}{2 (b_{jm} + c_{ikjm})} - \frac{a^2 (2 b_{jm} + c_{ikjm})}{2} \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \\ &\quad + \frac{a^2}{2} b_{ik}. \end{aligned}$$

L'intégrale de λ_4 se déduit alors de l'intégrale de λ_2 , de la même manière que l'intégrale de λ_3 se déduit de celle de λ_1 :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_4(a, s') ds' = \frac{a^2}{2} b_{ik} + \frac{a^2 c_{ikjm}}{2} \ln |b_{ik} - c_{ikjm}| - \frac{a^2 c_{ikjm}}{2} \ln |c_{ikjm}|.$$

Maintenant que nous avons intégré l'intégrande de $I_{ikjm}(a)$ par rapport à s et à s' , nous pouvons en déduire, après simplifications, que :

$$\begin{aligned} I_{ikjm}(a) &= \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \left\{ \frac{a^2 c_{ikjm}}{2} \left(\ln |b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}| - \ln |c_{ikjm} - b_{ik}| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln |c_{ikjm}| - \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \right) - \frac{a^2 b_{ik} b_{jm}}{2 (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})} \right\}. \end{aligned}$$

La valeur de $I_{ikjm}(a)$ nous donne alors la valeur de l'intégrale $I_{H_{ij}}(\theta)$ selon l'équation (8.2). Pour obtenir la valeur de l'intégrale H_{ij} , il ne nous reste plus qu'à intégrer $I_{H_{ij}}(\theta)$, et donc I_{ikjm} , par rapport à θ .

Intégration par rapport à θ : D'après l'expression de l'intégrale I_{ikjm} , nous avons seulement besoin de calculer :

$$\int \frac{a^2}{2} = \int_0^{\pi/2} r_w^2 \sin^2(\theta) d\theta = \left[r_w^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = r_w^2 \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit finalement d'après les relations (8.1) et (8.2), que, pour $i < j - 2$ ou $i > j + 2$, au signe près :

$$H_{ij} = r_w^3 \frac{\pi}{2} \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \left\{ c_{ikjm} \ln \left| \frac{(b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) c_{ikjm}}{(c_{ikjm} - b_{ik})(b_{jm} + c_{ikjm})} \right| - \frac{b_{ik} b_{jm}}{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})} \right\}.$$

8.2.2 Cas singulier : $j - 2 \leq i \leq j + 2$

Ce cas est singulier. Ici on ne peut plus négliger le terme $2a^2$ devant $(l - l')$, car ici $(l - l')$ peut être très petit, ou même nul. Pour le cas singulier, l'approximation ne se fait donc pas directement au début du calcul avant toute intégration comme pour le cas régulier, mais elle se fera au niveau de l'intégration par rapport à θ . Dans un premier temps, il nous faut donc intégrer de manière exacte par rapport à l et l' .

De la même manière que pour le cas régulier, on peut se placer dans le cas $j - 2 \leq i$, et écrire :

$$H_{ij} = 2r_w \int_0^{\pi/2} I_{H_{ij}}(\theta) d\theta, \text{ avec } I_{H_{ij}}(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}(a), \quad (8.3)$$

et :

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds ds'}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{3/2}}.$$

Nous allons commencer par calculer l'intégrale I_{ikjm} , puis nous intégrerons I_{ikjm} par rapport à θ pour obtenir la valeur de H_{ij} .

- Première étape : intégration par rapport à s .

Les méthodes de calcul sont les mêmes que pour le cas régulier : on fait un changement de variable, puis on décompose l'intégrale en plusieurs morceaux de même nature, et on intègre. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{3/2}} &= \int_{-s' + c_{ikjm}}^{b_{jm} - s' + c_{ikjm}} \frac{a^2 (t + s' - c_{ikjm}) s' dt}{[2a^2 + t^2]^{3/2}} \\ &= \lambda_1(a, s') + \lambda_2(a, s') + \lambda_3(a, s') + \lambda_4(a, s') \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1(a, s') &= -\frac{a^2 s'}{\sqrt{2a^2 + (b_{jm} - s' + c_{ikjm})^2}}, & \lambda_3(a, s') &= \frac{a^2 s'}{\sqrt{2a^2 + (-s' + c_{ikjm})^2}}, \\ \lambda_2(a, s') &= -\frac{(b_{jm} - s' + c_{ikjm}) s' (-s' + c_{ikjm})}{2\sqrt{2a^2 + (b_{jm} - s' + c_{ikjm})^2}}, & \lambda_4(a, s') &= \frac{s' (-s' + c_{ikjm})^2}{2\sqrt{2a^2 + (-s' + c_{ikjm})^2}}. \end{aligned}$$

- Deuxième étape : on intègre chacune des fonctions λ_1 , λ_2 , λ_3 , et λ_4 , par rapport à s' . Comme pour le cas régulier, on remarque que les fonctions λ_1 et λ_3 , ainsi que λ_2 et λ_4 ,

sont identiques à la constante b_{jm} près sous la racine carrée du dénominateur. Ainsi on peut déduire facilement les valeurs des intégrales de λ_3 et λ_4 à partir de celles des intégrales de λ_1 et λ_2 . Le calcul des intégrales de λ_1 et λ_3 se fait par changement de variable, puis par décomposition de l'intégrande en morceaux de même ordre, et enfin par intégration. On obtient alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{b_{ik}} \lambda_1(a, s') ds' \\
= & -a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln \left((b_{jm} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \right) \\
& + a^2 \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \\
& + a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln \left((b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik})^2} \right) \\
& - a^2 \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik})^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{b_{ik}} \lambda_2(a, s') ds' \\
= & a^2 c_{ikjm} \ln \left(c_{ikjm} + \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \right) - a^2 \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \\
& - a^2 c_{ikjm} \ln \left((c_{ikjm} - b_{ik}) + \sqrt{2a^2 + (c_{ikjm} - b_{ik})^2} \right) + a^2 \sqrt{2a^2 + (c_{ikjm} - b_{ik})^2}.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{b_{ik}} \lambda_3(a, s') ds' \\
= & \frac{1}{6} (2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
& - \frac{1}{6} (2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2)^{3/2} + a^2 \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \\
& - (b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2}) \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})}{2} \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
& + (b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2}) a^2 \ln \left((b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \right) \\
& + (b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2}) \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})}{2} \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \\
& - (b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2}) a^2 \ln \left((b_{jm} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \right) \\
& + \frac{b_{jm}}{2} (b_{jm} + c_{ikjm}) \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
& - \frac{b_{jm}}{2} (b_{jm} + c_{ikjm}) \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_{ik}} \lambda_4(a, s') ds' &= \frac{1}{6} (2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2)^{3/2} - a^2 \sqrt{2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
&\quad - \frac{1}{6} (2a^2 + c_{ikjm}^2)^{3/2} + a^2 \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \\
&\quad - \frac{c_{ikjm}}{2} \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})}{2} \sqrt{2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
&\quad + \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left((-b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2} \right) \\
&\quad + \frac{c_{ikjm}}{2} \frac{c_{ikjm}}{2} \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \\
&\quad - \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left(c_{ikjm} + \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \right).
\end{aligned}$$

Après simplifications, on aboutit finalement à :

$$\begin{aligned}
I_{ikjm}(a) &= \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{a^2 s s' ds ds'}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{3/2}} \\
&= \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} (\lambda_1(a, s') + \lambda_2(a, s') + \lambda_3(a, s') + \lambda_4(a, s')) ds'
\end{aligned}$$

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} (\zeta(a) + \zeta_1(a) + \zeta_2(a) + \zeta_3(a) + \zeta_4(a))$$

avec :

$$\begin{cases}
\zeta(a) &= -f(a, b_{jm} + c_{ikjm}) - f(a, c_{ikjm} - b_{ik}) \\
&\quad + f(a, b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) + f(a, c_{ikjm}) \\
\zeta_1(a) &= f_1(2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\
\zeta_2(a) &= f_2(2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2) \\
\zeta_3(a) &= f_3(2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\
\zeta_4(a) &= f_4(2a^2 + c_{ikjm}^2)
\end{cases}$$

et :

$$\begin{cases}
f(a, s) &= \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right) \\
f_1(s) &= -\frac{1}{6} (s^2)^{3/2} + \left(\frac{c_{ikjm}^2}{4} + \frac{c_{ikjm}}{4} (b_{jm} - b_{ik}) - \frac{b_{ik} b_{jm}}{2} \right) \sqrt{s^2} \\
f_2(s) &= \frac{1}{6} (s^2)^{3/2} - \frac{c_{ikjm}}{2} \frac{b_{jm} + c_{ikjm}}{2} \sqrt{s^2} \\
f_3(s) &= \frac{1}{6} (s^2)^{3/2} - \frac{c_{ikjm}}{2} \frac{-b_{ik} + c_{ikjm}}{2} \sqrt{s^2} \\
f_4(s) &= -\frac{1}{6} (s^2)^{3/2} + \frac{c_{ikjm}^2}{4} \sqrt{s^2}.
\end{cases}$$

Intégration par rapport à θ . Maintenant que nous connaissons la valeur de I_{ikjm} , il ne nous reste plus qu'à intégrer I_{ikjm} par rapport à θ pour trouver l'expression de H_{ij} d'après l'équation (8.3).

On note respectivement I_{t1} , I_{t2} , I_{t3} , I_{t4} , I_t les intégrales par rapport à θ de ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 , ζ , de sorte que :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} I_{ikjm}(\theta) d\theta = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3} + I_{t4})}. \quad (8.4)$$

Jusqu'ici, nous n'avons pas encore fait d'approximation : les calculs que nous avons effectué jusqu'à présent sont exacts. C'est maintenant, lors de l'intégration par rapport à θ , que nous allons pouvoir approcher certains termes en utilisant la méthode d'approximation que nous avons proposée.

En appliquant l'hypothèse (H1) (page 85) et la méthode décrite dans le chapitre 4, on obtient :

1. Intégration de ζ_1 :

- Si $(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H1) :

$$I_{t1} \approx -\frac{\pi}{2} \frac{1}{6} |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}|^3 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{c_{ikjm}^2}{4} + \frac{c_{ikjm}}{4} (b_{jm} - b_{ik}) - \frac{b_{ik} b_{jm}}{2} \right) |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}|.$$

- Si $(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre tel quel par rapport à θ . On obtient :

$$I_{t1} = -\frac{1}{6} I_1 + \left(\frac{c_{ikjm}^2}{4} + \frac{c_{ikjm}}{4} (b_{jm} - b_{ik}) - \frac{b_{ik} b_{jm}}{2} \right) I_2,$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int (2a^2)^{3/2} = \frac{16}{3} r_w^3, \\ I_2 &= \int (2a^2)^{1/2} = 2r_w, \end{aligned}$$

les intégrales I_1 et I_2 étant calculées dans le paragraphe 8.4.3.

2. Intégration de ζ_2 :

- Si $(b_{jm} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H1) :

$$I_{t2} \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{6} |b_{jm} + c_{ikjm}|^3 - \frac{c_{ikjm}(b_{jm} + c_{ikjm})}{4} |b_{jm} + c_{ikjm}| \right).$$

- Si $(b_{jm} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t2} = \frac{1}{6} I_1.$$

3. Intégration de ζ_3 :

- Si $(-b_{ik} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H1) :

$$I_{t3} \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{6} |-b_{ik} + c_{ikjm}|^3 - \frac{c_{ikjm}(-b_{ik} + c_{ikjm})}{4} |-b_{ik} + c_{ikjm}| \right).$$

- Si $(-b_{ik} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t3} = \frac{1}{6} I_1.$$

4. Intégration de ζ_4 :

- Si $c_{ikjm} \neq 0$: on applique (H_1) :

$$I_{t4} \approx \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{6} |c_{ikjm}|^3 + \frac{c_{ikjm}^2}{4} |c_{ikjm}| \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{12} |c_{ikjm}|^3.$$

- Si $c_{ikjm} = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t4} = -\frac{1}{6} I_1.$$

5. Intégration de ζ :

$$I_t = \frac{c_{ikjm}}{2} \left(I(b_{jm} + c_{ikjm}) + I(c_{ikjm} - b_{ik}) - I(b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) - I(c_{ikjm}) \right),$$

avec :

$$\begin{aligned} I(s) &= -\int a^2 \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right) \\ &= \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln \left(s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2 \theta + s^2} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale I est détaillé dans la section 8.4.1. Nous reportons ici le résultat :

- Si $s > 0$:

$$I(s) = -2r_w^2 \ln(2s) \frac{\pi}{4}.$$

- Si $s < 0$:

$$I(s) = 2r_w^2 \ln(-2s) \frac{\pi}{4} + 2 \left(-r_w^2 \ln(2r_w) \frac{\pi}{2} - r_w^2 \frac{\pi}{4} + r_w^2 \frac{\pi}{2} \ln(2) \right).$$

- Si $s = 0$:

$$I(s) = -r_w^2 \ln(2r_w) \frac{\pi}{2} - r_w^2 \frac{\pi}{4} + r_w^2 \frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Les valeurs approchées des intégrales I_{t1} à I_{t4} , et I_t ci-dessus, les équations (8.2) et (8.4) nous donnent alors une approximation analytique de l'intégrale H_{ij} dans le cas singulier.

8.3 Calcul de l'intégrale S_{ij}

$$\text{Calcul de } S_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) d\gamma(x).$$

La méthodologie est exactement la même que pour le calcul de H_{ij} , on adoptera les mêmes notations.

On effectue le même changement de variable que pour l'intégrale H_{ij} , ce qui donne :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \varphi_j^h(y) \frac{1}{|x-y|} d\gamma(y) d\gamma(x) \\ &= \frac{2\pi r_w^2}{4\pi} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\varphi_i^h(l') \varphi_j^h(l) dl dl' d\theta}{[2r_w^2(1-\cos\theta) + (l-l')^2]^{1/2}}, \end{aligned}$$

et après réduction par symétrie, formules trigonométriques puis changement de variable dans l'intégrale sur θ , on peut écrire :

$$S_{ij} = 2r_w^2 \int_0^L \int_0^{\pi/2} \int_0^L \frac{\varphi_i^h(l') \varphi_j^h(l) dl dl' d\theta}{[4r_w^2 \sin^2\theta + (l-l')^2]^{1/2}}.$$

Le cas où l'intégrale S_{ij} est singulière est le même que pour H_{ij} : c'est le cas où $j-2 \leq i \leq j+2$. Nous commencerons donc par traiter le cas où $i < j-2$ ou $i > j+2$.

La méthode d'approximation filaire va se mettre en place exactement de la même manière que pour l'intégrale H_{ij} : pour les termes réguliers, l'approximation peut se faire d'emblée, et pour les termes singuliers, l'approximation se fera lors de l'intégration en θ , une fois que les intégrations par rapport à l et l' seront calculées de manière exacte.

8.3.1 Cas régulier : $i < j-2$ ou $i > j+2$

D'après l'hypothèse (H_1) (page 85), on peut négliger le terme $2a^2 = 4r_w^2 \sin^2\theta$ au dénominateur de l'intégrande de S_{ij} . On remarque alors que l'intégrale S_{ij} , dans le cas régulier, ne dépend plus de θ , puisque θ n'intervenait que dans le terme négligé. Nous devons donc seulement intégrer par rapport à l et l' .

On doit donc évaluer :

$$\begin{aligned} S_{ij} &\approx \pi r_w^2 \int_0^L \int_0^L \frac{\varphi_i^h(l') \varphi_j^h(l) dl dl'}{|l-l'|} \\ &= \pi r_w^2 \sum_{k \in \mathcal{I}} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l') \sum_{m \in \mathcal{J}} \int_{l_m}^{l_{m+1}} \varphi_j^h(l) \frac{1}{|l-l'|} dl dl'. \end{aligned}$$

La matrice S_{ij} étant symétrique, on peut se placer dans le cas où $i < j-2$. Par le même changement de variable que pour l'intégrale H_{ij} , il vient :

$$S_{ij} = \pi r_w^2 \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}$$

avec :

$$I_{ikjm} = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds ds'}{(s - s' + c_{ikjm})}.$$

8.3.1.1 Calcul de I_{ikjm}

- Première étape : intégration par rapport à s .

Par changement de variable, on peut écrire :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds}{|s - s' + c_{ikjm}|} = \int_{-s'+c_{ikjm}}^{b_{jm}-s'+c_{ikjm}} \frac{s'(t + s' - c_{ikjm}) dt}{t}.$$

Après décomposition de l'intégrande en deux morceaux puis intégration, on obtient :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds}{|s - s' + c_{ikjm}|} = \lambda_1(s') + \lambda_2(s') + \lambda_3(s'),$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1(s') &= s' b_{jm}, \\ \lambda_2(s') &= s' (s' - c_{ikjm}) \ln |b_{jm} - s' + c_{ikjm}|, \\ \lambda_3(s') &= -s' (s' - c_{ikjm}) \ln |-s' + c_{ikjm}|. \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur de I_{ikjm} , et donc de S_{ij} , il ne nous reste donc plus qu'à intégrer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par rapport à s' .

- Deuxième étape : intégration par rapport à s' .

Il est immédiat que :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_1(s') ds' = \frac{b_{ik}^2 b_{jm}}{2}.$$

Les fonctions λ_2 et λ_3 diffèrent par la présence pour λ_2 du coefficient b_{jm} à l'intérieur de la valeur absolue du logarithme népérien. Si nous savons calculer l'intégrale de λ_2 , nous pourrions alors en déduire la valeur de l'intégrale de λ_3 .

Commençons donc par calculer l'intégrale de λ_2 . Par changement de variable, nous pouvons nous ramener à :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_2(s') ds' = - \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} (b_{jm} + c_{ikjm} - t) (b_{jm} - t) \ln |t| dt,$$

et en développant l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{ik}} \lambda_2(s') ds' &= - \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} t^2 \ln |t| dt + \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} (2b_{jm} + c_{ikjm}) t \ln |t| dt \\ &\quad - \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} b_{jm} (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln |t| dt. \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} H_0 &= \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} \ln |t| dt, \\ H_1 &= \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} t \ln |t| dt, \\ H_2 &= \int_{b_{jm}+c_{ikjm}}^{b_{jm}-b_{ik}+c_{ikjm}} t^2 \ln |t| dt. \end{aligned}$$

Les intégrales H_0 , H_1 et H_2 s'intègrent par parties, et valent :

$$\begin{aligned} H_0 &= (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| + b_{ik} - (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln |b_{jm} + c_{ikjm}|, \\ H_1 &= -\frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{4} + \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{2} \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{4} - \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{2} \ln |b_{jm} + c_{ikjm}|, \\ H_2 &= -\frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3}{9} + \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3}{3} \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^3}{9} - \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^3}{3} \ln |b_{jm} + c_{ikjm}|. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{b_{ik}} \lambda_2(s') ds' &= -H_2 + (2b_{jm} + c_{ikjm}) H_1 - b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm}) H_0 \\ &= \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3}{9} - \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3}{3} \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad - \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^3}{9} + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^3}{3} \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \\ &\quad - (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{4} \\ &\quad + (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{2} \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad + (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{4} \\ &\quad - (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{2} \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \\ &\quad - b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm})(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &\quad - b_{ik} b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm}) + b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm})^2 \ln |b_{jm} + c_{ikjm}|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_{ik}} \lambda_3(s') ds' &= \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik}+c_{ikjm}} (c_{ikjm} - t) t \ln |t| dt \\
&= - \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik}+c_{ikjm}} t^2 \ln |t| dt + \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik}+c_{ikjm}} c_{ikjm} t \ln |t| dt \\
&= \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^3}{9} - \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^3}{3} \ln |-b_{ik} + c_{ikjm}| \\
&\quad - \frac{c_{ikjm}^3}{9} + \frac{c_{ikjm}^3}{3} \ln |c_{ikjm}| \\
&\quad - c_{ikjm} \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^2}{4} + c_{ikjm} \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^2}{2} \ln |-b_{ik} + c_{ikjm}| \\
&\quad + c_{ikjm} \frac{c_{ikjm}^2}{4} - c_{ikjm} \frac{c_{ikjm}^2}{2} \ln |c_{ikjm}|.
\end{aligned}$$

On en déduit alors, après simplifications, que :

$$\begin{aligned}
I_{ikjm} &= \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \times \\
&\quad \left\{ \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3 - (b_{jm} + c_{ikjm})^3 - (-b_{ik} + c_{ikjm})^3 + c_{ikjm}^3}{9} \right. \\
&\quad + \frac{b_{ik} b_{jm} c_{ikjm}}{2} \\
&\quad + \left(- \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^3}{3} + (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{2} \right. \\
&\quad \quad \left. - b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm})(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \right) \times \ln |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\
&\quad + \left(\frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^3}{3} - (2b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{2} + b_{jm}(b_{jm} + c_{ikjm})^2 \right) \\
&\quad \quad \times \ln |b_{jm} + c_{ikjm}| \\
&\quad + \left(\frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^3}{3} - c_{ikjm} \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})^2}{2} \right) \ln |-b_{ik} + c_{ikjm}| \\
&\quad \left. + \frac{c_{ikjm}^3}{6} \ln |c_{ikjm}| \right\}
\end{aligned}$$

et par la relation :

$$S_{ij} = \pi r_w^2 \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm} \quad (8.5)$$

nous obtenons finalement une valeur approchée de S_{ij} pour le cas régulier.

8.3.2 Cas singulier : $j - 2 \leq i \leq j + 2$

Traisons maintenant le cas singulier. On ne peut plus négliger le terme $2a^2$ au dénominateur de l'intégrande de S_{ij} . On se place dans le cas où $j - 2 \leq i$. On peut écrire :

$$S_{ij} = 2r_w^2 \int_0^{\pi/2} I_{S_{ij}}(\theta) d\theta, \text{ avec } I_{S_{ij}}(\theta) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{J}} I_{ikjm}(a) \quad (8.6)$$

et :

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds ds'}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{1/2}}.$$

Cette fois-ci, I_{ikjm} dépend de a , et donc de θ . Nous allons calculer de manière exacte l'intégrale $I_{ikjm}(a)$, puis nous utiliserons la méthode d'approximation filaire pour intégrer $I_{ikjm}(a)$ par rapport à a (ou à θ), et ainsi obtenir une évaluation de l'intégrale S_{ij} dans le cas singulier.

8.3.2.1 Calcul de $I_{ikjm}(a)$

- Première étape : intégration par rapport à s .

Après changement de variable, on peut écrire :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{1/2}} = \int_{-s' + c_{ikjm}}^{b_{jm} - s' + c_{ikjm}} \frac{s' (t + s' - c_{ikjm}) dt}{[2a^2 + t^2]^{1/2}},$$

puis en décomposant l'intégrande en deux morceaux, et en intégrant, on a :

$$\int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{1/2}} = \lambda_1(a, s') + \lambda_2(a, s') + \lambda_3(a, s') + \lambda_4(a, s'),$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1(a, s') &= s' \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - s' + c_{ikjm})^2}, \\ \lambda_2(a, s') &= s' (s' - c_{ikjm}) \ln \left((b_{jm} - s' + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - s' + c_{ikjm})^2} \right), \\ \lambda_3(a, s') &= -s' \sqrt{2a^2 + (-s' + c_{ikjm})^2}, \\ \lambda_4(a, s') &= -s' (s' - c_{ikjm}) \ln \left((-s' + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (-s' + c_{ikjm})^2} \right). \end{aligned}$$

- Deuxième étape : intégration par rapport à s' .

Nous remarquons ici encore la similitude entre les fonctions λ_1 et λ_3 d'une part, et entre les fonctions λ_2 et λ_4 d'autre part. Le calcul des intégrales de λ_1 et λ_3 paraît plus simple que celui des intégrales de λ_2 et λ_4 . Commençons donc par le calcul de l'intégrale de λ_1 . Par changement de variable, on peut écrire :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_1(a, s') ds' = - \int_{b_{jm} + c_{ikjm}}^{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}} (b_{jm} + c_{ikjm} - t) \sqrt{2a^2 + t^2} dt.$$

En développant l'intégrande, et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_{ik}} \lambda_1(a, s') ds' &= \frac{-(b_{jm} + c_{ikjm})}{2} (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
&\quad - a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln \left((b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{3} (2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2)^{3/2} + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})^2}{2} \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \\
&\quad + a^2 (b_{jm} + c_{ikjm}) \ln \left((b_{jm} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} (2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2)^{3/2}.
\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour λ_3 :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{b_{ik}} \lambda_3(a, s') ds' \\
&= - \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik} + c_{ikjm}} (-t + c_{ikjm}) \sqrt{2a^2 + t^2} dt \\
&= \frac{1}{3} (2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2)^{3/2} - \frac{c_{ikjm}}{2} (-b_{ik} + c_{ikjm}) \sqrt{2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2} \\
&\quad - a^2 c_{ikjm} \ln \left((-b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} (2a^2 + c_{ikjm}^2)^{3/2} + \frac{c_{ikjm}^2}{2} \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} + a^2 c_{ikjm} \ln \left(c_{ikjm} + \sqrt{2a^2 + c_{ikjm}^2} \right).
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale de λ_2 , on commence par un changement de variable :

$$\int_0^{b_{ik}} \lambda_2(a, s') ds' = - \int_{b_{jm} + c_{ikjm}}^{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}} (b_{jm} + c_{ikjm} - t) (b_{jm} - t) \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt.$$

On développe ensuite l'intégrande :

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_{ik}} \lambda_2(a, s') ds' &= -b_{jm} (b_{jm} + c_{ikjm}) \int_{b_{jm} + c_{ikjm}}^{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}} \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt \\
&\quad + (2b_{jm} + c_{ikjm}) \int_{b_{jm} + c_{ikjm}}^{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}} t \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt \\
&\quad - \int_{b_{jm} + c_{ikjm}}^{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}} t^2 \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt.
\end{aligned}$$

Finalement, les trois primitives suivantes :

$$\begin{aligned}
\int \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt &= t \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) - \sqrt{2a^2 + t^2}, \\
\int t \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2a^2}{4} \right) \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) - \frac{t \sqrt{2a^2 + t^2}}{4}, \\
\int t^2 \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt &= \frac{t^3}{3} \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) - \frac{1}{9} (2a^2 + t^2)^{3/2} + \frac{2a^2}{3} \sqrt{2a^2 + t^2},
\end{aligned}$$

nous permettent de trouver la valeur de l'intégrale de λ_2 .

De même, la valeur de l'intégrale de λ_4 s'obtient après changement de variable et développement de l'intégrande, en fonction des trois primitives ci-dessus par la formule :

$$\begin{aligned} & \int_0^{b_{ik}} \lambda_4(a, s') ds' \\ = & c_{ikjm} \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik}+c_{ikjm}} t \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt - \int_{c_{ikjm}}^{-b_{ik}+c_{ikjm}} t^2 \ln \left(t + \sqrt{2a^2 + t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} I_{ikjm}(a) &= \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} \int_0^{b_{jm}} \frac{s s' ds ds'}{[2a^2 + (s - s' + c_{ikjm})^2]^{1/2}}, \\ &= \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} \int_0^{b_{ik}} (\lambda_1(a, s') + \lambda_2(a, s') + \lambda_3(a, s') + \lambda_4(a, s')) ds', \end{aligned}$$

$$I_{ikjm}(a) = \frac{1}{|b_{ik}b_{jm}|} (\zeta(a) + \zeta_1(a) + \zeta_2(a) + \zeta_3(a) + \zeta_4(a))$$

avec :

$$\begin{cases} \zeta(a) = -f(a, b_{jm} + c_{ikjm}) - f(a, c_{ikjm} - b_{ik}) \\ \quad + f(a, b_{jm} + c_{ikjm} - b_{ik}) + f(a, c_{ikjm}) \\ \zeta_1(a) = f_1(a, 2a^2 + (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_2(a) = f_2(a, 2a^2 + (b_{jm} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_3(a) = f_3(a, 2a^2 + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2) \\ \zeta_4(a) = f_4(a, 2a^2 + c_{ikjm}^2) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} f_1(a, s) &= \frac{4}{9} (s^2)^{3/2} + \left(-\frac{3c_{ikjm}}{4} (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + b_{ik} b_{jm} - \frac{2a^2}{3} \right) \sqrt{s^2} \\ &+ (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \left(-b_{ik} b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2} (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) - \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{3} \right) \\ &\times \ln \left((b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{s^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(a, s) &= -\frac{4}{9} (s^2)^{3/2} + \left((b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{3c_{ikjm}}{4} + \frac{2a^2}{3} \right) \sqrt{s^2} \\ &+ (b_{jm} + c_{ikjm})^2 \left(-\frac{c_{ikjm}}{2} + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})}{3} \right) \ln \left((b_{jm} + c_{ikjm}) + \sqrt{s^2} \right) \end{aligned}$$

$$f_3(a, s) = -\frac{4}{9} (s^2)^{3/2} + \left(\frac{3c_{ikjm}}{4} (-b_{ik} + c_{ikjm}) + \frac{2a^2}{3} \right) \sqrt{s^2} \\ + (-b_{ik} + c_{ikjm})^2 \left(-\frac{c_{ikjm}}{2} + \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})}{3} \right) \ln \left((-b_{ik} + c_{ikjm}) + \sqrt{s^2} \right)$$

$$f_4(a, s) = \frac{4}{9} (s^2)^{3/2} + \left(-\frac{3c_{ikjm}^2}{4} - \frac{2a^2}{3} \right) \sqrt{s^2} + \frac{c_{ikjm}^3}{6} \ln \left(c_{ikjm} + \sqrt{s^2} \right)$$

$$f(a, s) = \frac{c_{ikjm}}{2} a^2 \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right).$$

On remarque qu'ici la fonction f correspond exactement à la fonction f pour le calcul de H_{ij} et que le terme ζ est identiquement égal au terme ζ de H_{ij} .

Comme pour le calcul des termes singuliers de l'intégrale H_{ij} , nous allons faire l'approximation filaire lors de l'intégration par rapport à θ .

8.3.2.2 Intégration par rapport à θ :

On introduit les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int (2a^2)^{3/2} da = \frac{16}{3} r_w^3, \\ I_2 = \int (2a^2)^{1/2} da = 2r_w, \\ I_3 = \int (a^2) da = r_w^2 \frac{\pi}{2}, \\ I(s) = \int -a^2 \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right) da, \\ I'(s) = \int \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right) da.$$

L'intégration par rapport à θ se fait exactement sur le même principe que pour l'intégrale S_{ij} , à savoir : on applique l'hypothèse (H_1) et on néglige la quantité $2a^2$ devant s , avec $s \in \{b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}, b_{jm} + c_{ikjm}, -b_{ik} + c_{ikjm}, c_{ikjm}\}$, à condition que $s \neq 0$, et si $s = 0$, alors on intègre directement par rapport à θ .

Par ailleurs, on reprend les mêmes notations que pour l'intégrale H_{ij} , à savoir :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} I_{ikjm}(\theta) d\theta = \frac{1}{|b_{ik} b_{jm}|} (I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3} + I_{t_4}).} \quad (8.7)$$

1. Intégration de ζ_1 :

- Si $(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H_1) :

$$\begin{aligned} I_{t1} &\approx \frac{\pi}{2} \frac{4}{9} |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}|^3 \\ &+ \frac{\pi}{2} \left(-\frac{3c_{ikjm}}{4} (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) + b_{ik} b_{jm} \right) |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &- \frac{2}{3} I_3 |b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &+ (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) \left(-b_{ik} b_{jm} + \frac{c_{ikjm}}{2} (b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) - \frac{(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm})^2}{3} \right) \\ &\times I'(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}). \end{aligned}$$

- Si $(b_{jm} - b_{ik} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre tel quel par rapport à θ . On obtient :

$$I_{t1} = \frac{4}{9} I_1 + b_{ik} b_{jm} I_2 - \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{9} I_1 + b_{ik} b_{jm} I_2.$$

2. Intégration de ζ_2 :

- Si $(b_{jm} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H_1) :

$$\begin{aligned} I_{t2} &\approx -\frac{\pi}{2} \frac{4}{9} |b_{jm} + c_{ikjm}|^3 + \frac{\pi}{2} \left((b_{jm} + c_{ikjm}) \frac{3c_{ikjm}}{4} \right) |b_{jm} + c_{ikjm}| + \frac{2}{3} I_3 |b_{jm} + c_{ikjm}| \\ &+ (b_{jm} + c_{ikjm})^2 \left(-\frac{c_{ikjm}}{2} + \frac{(b_{jm} + c_{ikjm})}{3} \right) I'(b_{jm} + c_{ikjm}). \end{aligned}$$

- Si $(b_{jm} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t2} = -\frac{4}{9} I_1 + \frac{1}{3} I_1 = -\frac{1}{9} I_1.$$

3. Intégration de ζ_3 :

- Si $(-b_{ik} + c_{ikjm}) \neq 0$: on applique (H_1) :

$$\begin{aligned} I_{t3} &\approx -\frac{\pi}{2} \frac{4}{9} |-b_{ik} + c_{ikjm}|^3 + \frac{\pi}{2} \left((-b_{ik} + c_{ikjm}) \frac{3c_{ikjm}}{4} \right) |-b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &+ \frac{2}{3} I_3 |-b_{ik} + c_{ikjm}| \\ &+ (-b_{ik} + c_{ikjm})^2 \left(-\frac{c_{ikjm}}{2} + \frac{(-b_{ik} + c_{ikjm})}{3} \right) I'(-b_{ik} + c_{ikjm}). \end{aligned}$$

- Si $(-b_{ik} + c_{ikjm}) = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t3} = -\frac{4}{9} I_1 + \frac{1}{3} I_1 = -\frac{1}{9} I_1.$$

4. Intégration de ζ_4 :

- Si $c_{ikjm} \neq 0$: on applique (H_1) :

$$\begin{aligned} I_{t4} &\approx \frac{\pi}{2} \frac{4}{9} |c_{ikjm}|^3 - \frac{\pi}{2} \frac{3c_{ikjm}^2}{4} |c_{ikjm}| - \frac{2}{3} I_3 |c_{ikjm}| \\ &+ \frac{c_{ikjm}^3}{6} I'(c_{ikjm}). \end{aligned}$$

- Si $c_{ikjm} = 0$: on intègre directement par rapport à θ :

$$I_{t4} = \frac{4}{9} I_1 - \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{9} I_1.$$

Maintenant nous avons obtenu une approximation de l'intégrale S_{ij} pour les termes singuliers d'après les équations (8.6) et (8.7), et les valeurs des intégrales ci-dessus, et pour les termes réguliers selon l'équation (8.5).

8.4 Calculs d'intégrales complémentaires

8.4.1 Calcul de I

$$I(s) = \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln \left(s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2 \theta + s^2} \right) d\theta.$$

- Si $s > 0$: on néglige $4r_w^2 \sin^2 \theta$. On calcule :

$$I(s) = \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln (2s) d\theta.$$

Et comme l'intégrale de $\sin^2 \theta$ pour θ compris entre 0 et $\pi/2$ vaut $\pi/4$, on obtient :

$$I(s) = -r_w^2 \ln (2s) \frac{\pi}{2}.$$

- Si $s = 0$: on doit calculer :

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln \left(\sqrt{4r_w^2 \sin^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln (2r_w \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$I(0) = -r_w^2 \ln (2r_w) \frac{\pi}{2} - r_w^2 \frac{\pi}{4} + r_w^2 \frac{\pi}{2} \ln(2).$$

- Si $s < 0$: on ne peut pas négliger directement le terme $4r_w^2 \sin^2 \theta$. On multiplie par l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} I(s) &= \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln \left(\frac{4r_w^2 \sin^2 \theta}{-s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2 \theta + s^2}} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} -2r_w^2 \sin^2 \theta \ln (4r_w^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} 2r_w^2 \sin^2 \theta \ln \left(-s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2 \theta + s^2} \right) d\theta. \end{aligned}$$

On remarque que le premier terme vaut $2I(0)$, et le deuxième terme est en fait $-I(-s)$. Comme $-s > 0$, on a déjà calculé $I(-s)$, et on en déduit que :

$$\begin{aligned} I(s) &= 2I(0) - I(-s) \\ &\approx 2 \left(-r_w^2 \ln (2r_w) \frac{\pi}{2} - r_w^2 \frac{\pi}{4} + r_w^2 \frac{\pi}{2} \ln(2) \right) + 2r_w^2 \ln (-2s) \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

8.4.2 Calcul de I'

On note :

$$\begin{aligned} I'(s) &= \int \ln \left(s + \sqrt{2a^2 + s^2} \right) da \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln \left(s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2(\theta) + s^2} \right) d\theta. \end{aligned}$$

On adopte le même raisonnement que pour le calcul de l'intégrale I .

• Si $s > 0$:

$$I'(s) \approx \frac{\pi}{2} \ln(2s).$$

• Si $s < 0$:

$$\begin{aligned} I'(s) &= \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{4r_w^2 \sin^2\theta}{-s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2\theta + s^2}} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(4r_w^2 \sin^2\theta) d\theta - \int_0^{\pi/2} \ln \left(-s + \sqrt{4r_w^2 \sin^2\theta + s^2} \right) d\theta \\ &\approx \pi \ln(r_w) - \frac{\pi}{2} \ln(-2s). \end{aligned}$$

car en utilisant les propriétés du logarithme népérien :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(4r_w^2 \sin^2\theta) d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} \ln(2r_w) d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta) d\theta \\ &= \pi \ln(2r_w) - \pi \ln(2) \\ &= \pi \ln(r_w). \end{aligned}$$

Remarque 20 *Le cas $s = 0$ ne se présente pas.*

8.4.3 Calcul de I_1 et I_2

Les calculs de I_1 et I_2 s'obtiennent facilement en intégrant $\sin^3(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

$$I_1 = \int (2a^2)^{3/2} da = \int_0^{\pi/2} 8r_w^3 \sin^3(\theta) d\theta = \frac{16}{3} r_w^3.$$

$$I_2 = \int (2a^2)^{1/2} da = \int_0^{\pi/2} 2r_w \sin(\theta) d\theta = 2r_w.$$

Chapitre 9

Annexe C : Calcul des intégrales mixtes

Les intégrales S_{ij} et H_{ij} étant calculées numériquement, nous nous intéresserons ici seulement à l'approximation analytique des intégrales H'_{ij} et D_{ij} , l'intégrale H'_{ij} étant celle associée à la dérivée normale du noyau de Green sur la frontière du puits Γ_w .

9.1 Calcul de H'_{ij}

$$H'_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{T \in \text{supp } \psi_j^h} \int_T \psi_j^h(y) \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma(x) dT(y).$$

L'intégrale extérieure sera calculée numériquement par une quadrature de Gauss. On s'intéresse donc au calcul de l'intégrale intérieure, que l'on note $\mathcal{H}'_{ij}(y)$:

$$\mathcal{H}'_{ij}(y) = \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) d\gamma(x) = \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{-(x-y, n_x)}{|x-y|^3} d\gamma(x),$$

avec y fixé dans un triangle T . On a alors :

$$\boxed{H'_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{T \in \text{supp } \psi_j^h} \int_T \mathcal{H}'_{ij}(y) dT(y).} \quad (9.1)$$

La normale au puits n_x est orientée vers l'intérieur du puits, car elle doit être orientée vers l'extérieur du domaine.

On passe en coordonnées cylindriques. On choisit le repère ayant pour origine le point O' origine de la branche du puits sur laquelle se situe x , les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 déterminent le plan d'une section du puits x et \vec{e}_3 est dirigé suivant l'axe du puits, selon la figure 9.1.

y' est le projeté de y dans le plan de x .

On a alors :

$$x = \begin{pmatrix} r_w \cos \theta \\ r_w \sin \theta \\ l \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_x = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} r \cos \theta_y \\ r \sin \theta_y \\ l_y \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} r \cos \theta_y \\ r \sin \theta_y \\ l \end{pmatrix}.$$

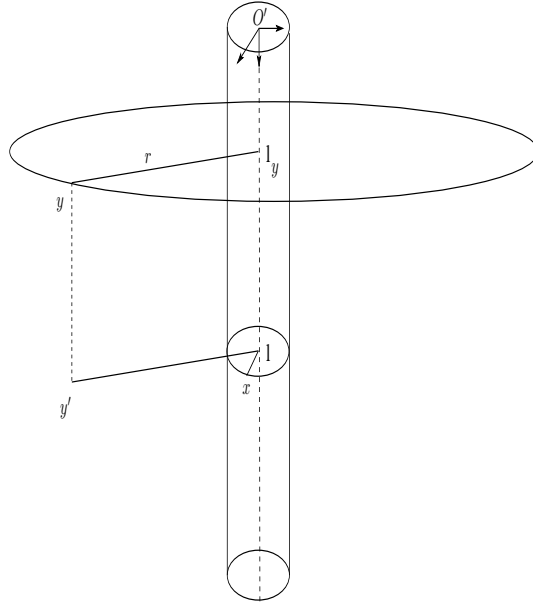


FIG. 9.1 – Section du puits

On a : $(x - y) = (x - y') + (y' - y)$, donc :

$$x - y = \begin{pmatrix} r_w \cos \theta - r \cos \theta_y \\ r_w \sin \theta - r \sin \theta_y \\ l - l_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{et } (x - y, \vec{n}_x) &= -r_w + r \cos \theta_y \cos \theta + r \sin \theta_y \sin \theta \\ &= -r_w + r \cos (\theta - \theta_y). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |x - y| &= \sqrt{(l - l_y)^2 + (r_w \cos \theta - r \cos \theta_y)^2 + (r_w \sin \theta - r \sin \theta_y)^2} \\ &= \sqrt{(l - l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos (\theta - \theta_y)}. \end{aligned}$$

On doit donc calculer :

$$\mathcal{H}'_{ij}(y) = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \varphi_i^h(l) \frac{r_w - r \cos (\theta - \theta_y)}{[(l - l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos (\theta - \theta_y)]^{3/2}} r_w d\theta dl,$$

qui peut s'écrire, après réduction par symétrie, relations trigonométriques puis changement de variable sur l'intégrale sur 2π , comme :

$$-4 \int_0^L \int_{-\theta_y/2}^{(\pi - \theta_y)/2} \varphi_i^h(l) \frac{r_w (r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{[(l - l_y)^2 + (r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)]^{3/2}} d\theta dl.$$

On peut choisir $\theta_y = 0$. L'intégrale devient alors :

$$\mathcal{H}'_{ij}(y) = -4 \int_0^L \int_0^{\pi/2} \varphi_i^h(l) \frac{r_w (r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{[(l - l_y)^2 + (r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)]^{3/2}} d\theta dl.$$

Cette intégrale est bien définie. On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} N(\theta) &= r_w (r_w - r) + 2 r r_w \sin^2(\theta), \\ D^2(\theta) &= (r_w - r)^2 + 4 r_w r \sin^2(\theta) \\ &= r^2 - 2 r r_w + r_w^2 + 4 r_w r \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

- Première étape : intégration par rapport à l .

On va commencer par intégrer par rapport à l , et on terminera par l'intégration par rapport à θ . Soit :

$$I(\theta) = \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{N(\theta)}{[(l - l_y)^2 + D^2(\theta)]^{3/2}} dl.$$

On découpe l'intervalle $[0, L]$ en N_w segments :

$$I(\theta) = \sum_{k=1}^{N_w-1} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l) \frac{N(\theta)}{[(l - l_y)^2 + D^2(\theta)]^{3/2}} dl = \sum_{k=1}^{N_w-1} I_k(\theta).$$

Notons $l_{ik} = \delta_{ik} l_{k+1} + \delta_{i,k+1} l_k$. Rappelons que la fonction de base φ_i^h s'exprime de manière générale sur un intervalle $[l_k, l_{k+1}]$ pour $k = 1, \dots, N_w - 1$ par :

$$\varphi_i^h(l) = \frac{l - l_{ik}}{l_i - l_{ik}}.$$

On s'intéresse donc au calcul de $I_k(\theta)$:

$$I_k(\theta) = \int_{l_k}^{l_{k+1}} \varphi_i^h(l) \frac{N(\theta)}{[(l - l_y)^2 + D^2(\theta)]^{3/2}} dl.$$

Par changement de variable, puis décomposition de l'intégrale en morceaux de même ordre et intégration, on obtient :

$$I_k(\theta) = \frac{N(\theta)}{l_i - l_{ik}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(l_k - l_y)^2 + D^2(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{(l_{k+1} - l_y)^2 + D^2(\theta)}} \right. \\ \left. + \frac{(l_y - l_{ik})(l_{k+1} - l_y)}{D^2(\theta) \sqrt{(l_{k+1} - l_y)^2 + D^2(\theta)}} - \frac{(l_y - l_{ik})(l_k - l_y)}{D^2(\theta) \sqrt{(l_k - l_y)^2 + D^2(\theta)}} \right\}.$$

Maintenant que nous avons intégré par rapport à l , il nous reste à intégrer par rapport à θ .

- Deuxième étape : intégration par rapport à θ .

On rencontre alors deux types d'intégrales par rapport à θ à calculer :

$$\begin{aligned}
 H_1(s) &= \int_0^{\pi/2} \lambda_1(s, \theta) d\theta, \\
 H_2(s) &= \int_0^{\pi/2} \lambda_2(s, \theta) d\theta, \\
 \text{avec } \lambda_1(s, \theta) &= \frac{r_w(r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{\sqrt{s^2 + (r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)}}, \\
 \text{et } \lambda_2(s, \theta) &= s \times \frac{r_w(r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{((r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)) \sqrt{s^2 + (r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)}}.
 \end{aligned}$$

L'intégrale intérieure $\mathcal{H}'_{ij}(y)$ s'écrit alors en fonction des intégrales H_1 et H_2 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}'_{ij}(y) &= -4 \sum_{k=1}^{N_w-1} \frac{1}{(l_i - l_{ik})} \left(H_1(l_k - l_y) - H_1(l_{k+1} - l_y) \right. \\
 &\quad \left. + (l_y - l_{ik}) \{ H_2(l_{k+1} - l_y) - H_2(l_k - l_y) \} \right).
 \end{aligned}$$

Le calcul des intégrales H_1 et H_2 va dépendre de la position du puits par rapport au bord, i.e. par rapport au triangle considéré. Ici nous nous limiterons au cas où le puits est suffisamment éloigné du bord.

Regardons maintenant de plus près les fonctions λ_1 et λ_2 que nous devons intégrer par rapport à θ , pour voir s'il est possible de faire une approximation de leur intégrale. La racine carrée du dénominateur de λ_1 et λ_2 peut s'écrire, en utilisant la notation $D^2(\theta)$ et en développant le carré :

$$\sqrt{s^2 + D^2(\theta)} = \sqrt{s^2 + r^2 + 2r_w r + r_w^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)}.$$

Si le puits est suffisamment éloigné du bord, alors la quantité $s^2 + r^2$ est grande devant r_w . On peut donc approcher la quantité $s^2 + D^2(\theta)$ par $s^2 + r^2$.

Remarque 21 *On ne peut pas approcher directement $D^2(\theta)$ par r^2 , car r^2 peut devenir très petit dans le cas où le point y se trouve sur un triangle qui rencontre le prolongement du puits, mais en ce cas-là s^2 (qui représente la distance l'une des extrémités du segment $[l_k, l_{k+1}]$ sur lequel on intègre, et la coordonnée l_y du point y sur l'axe du puits) est grand par rapport à r^2 : c'est donc la quantité $s^2 + D^2(\theta)$ qui peut être approchée par $s^2 + r^2$, et non pas directement $D^2(\theta)$ par r^2 .*

Ainsi, nous pouvons approcher les intégrales H_1 et H_2 par :

$$\begin{aligned}
 H_1(s) &\approx \int_0^{\pi/2} \frac{r_w(r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{\sqrt{s^2 + r^2}} d\theta, \\
 H_2(s) &\approx s \int_0^{\pi/2} \frac{r_w(r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{D^2(\theta) \sqrt{s^2 + r^2}} d\theta.
 \end{aligned}$$

Le calcul de l'approximation de l'intégrale H_1 ne pose alors aucune difficulté, et on trouve finalement :

$$H_1(s) \approx \frac{\pi}{2} \frac{r_w^2}{\sqrt{s^2 + r^2}}.$$

Le calcul de l'approximation de H_2 pose un peu plus de difficultés, à cause du $D^2(\theta)$ qui intervient au dénominateur. Si on remplace $D^2(\theta)$ par sa valeur, on voit que l'on doit intégrer :

$$H_2(s) \approx s \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{r_w(r_w - r) + 2r r_w \sin^2(\theta)}{((r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta))} d\theta.$$

On décompose cette intégrale en deux intégrales de la manière suivante :

$$H_2(s) \approx \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \left(\frac{r_w}{(r_w - r)} \mathcal{I}_1 + \frac{2r r_w}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_2 \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + a^2 \sin^2(\theta))} d\theta, \\ \mathcal{I}_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(\theta)}{(1 + a^2 \sin^2(\theta))} d\theta, \end{aligned}$$

et toujours $a^2 = \frac{4r r_w}{(r - r_w)^2}$.

Les valeurs des deux intégrales \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont données dans la section 9.3.

Ainsi nous obtenons une approximation de l'intégrale intérieure $\mathcal{H}'_{ij}(y)$ en fonction de H_1, H_2 et \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 . L'intégrale H'_{ij} est finalement obtenue par intégration numérique sur l'équation (9.1).

9.2 Calcul de D_{ij}

Comme nous ne considérons que le cas où le puits est suffisamment loin du bord ou des interfaces, le noyau de Green n'est pas singulier, et on peut faire rentrer la dérivée normale $\partial/\partial n_x$ dans l'intégrale intérieure :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\sum_{T \in \text{supp } \psi_j^h} \int_T \psi_j^h(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) dT(y) \right) d\gamma(x) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{T \in \text{supp } \psi_j^h} \int_T \psi_j^h(y) \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\gamma(x) dT(y). \end{aligned}$$

De la même manière que pour l'intégrale H'_{ij} , on note $\mathcal{D}_{ij}(y)$ l'intégrale intérieure :

$$\mathcal{D}_{ij}(y) = \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) d\gamma(x),$$

de sorte que :

$$D_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{T \in \text{supp } \psi_j^h} \int_T \mathcal{D}_{ij}(y) dT(y). \quad (9.2)$$

L'intégrale intérieure $\mathcal{D}_{ij}(y)$ est calculée analytiquement, tandis que l'intégrale extérieure sera ensuite calculée numériquement.

Le noyau de l'intégrale $\mathcal{D}_{ij}(y)$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) = \frac{(n_x, n_y)}{|x-y|^3} - 3 \frac{(x-y, n_x)(x-y, n_y)}{|x-y|^5}.$$

On peut alors décomposer $\mathcal{D}_{ij}(y)$ de la façon suivante :

$$\mathcal{D}_{ij}(y) = D_1(y) - 3D_2(y)$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1(y) &= \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{(n_x, n_y)}{|x-y|^3} d\gamma(x), \\ D_2(y) &= \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{(x-y, n_x)(x-y, n_y)}{|x-y|^5} d\gamma(x). \end{aligned}$$

• **Calcul de $D_1(y)$:**

Nous pouvons écrire :

$$D_1(y) = \left(\int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{n_x}{|x-y|^3} d\gamma(x) \right) \cdot n_y.$$

L'intégrale sur le puits ci-dessus est alors un vecteur de \mathbb{R}^3 , et on note ses composantes : $(D_{1,1}(y), D_{1,2}(y), D_{1,3}(y))$.

Or nous avons vu précédemment que la normale au puits n_x s'écrit :

$$n_x = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

et $|x-y| = \sqrt{(l-l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos(\theta)}$.

La dernière coordonnée de n_x valant 0, l'intégrale $D_{1,3}(y)$ est nulle. Pour obtenir D_1 , il nous faut donc calculer les deux intégrales :

$$\begin{aligned} D_{1,1}(y) &= - \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{\cos \theta}{[(l-l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos(\theta)]^{3/2}} r_w dl d\theta, \\ D_{1,2}(y) &= - \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{\sin \theta}{[(l-l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos(\theta)]^{3/2}} r_w dl d\theta. \end{aligned}$$

Calcul de $D_{1,1}(y)$:

Après réduction par symétrie, formules trigonométriques et changement de variable pour l'intégrale sur 2π , on remarque que le calcul $D_{1,1}(y)$ revient au calcul de $\mathcal{H}'_{ij}(y)$ à quelques coefficients près :

$$D_{1,1}(y) = -4r_w \int_0^{\pi/2} \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{[(l - l_y)^2 + (r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)]^{3/2}} dl d\theta.$$

On reprend les mêmes approximations que pour le calcul de $\mathcal{H}'_{ij}(y)$, et on trouve :

$$\begin{aligned} D_{1,1}(y) \approx & -4r_w \sum_{k=1}^{N_w-1} \frac{1}{(l_i - l_{ik})} \left(H'_1(l_k - l_y) - H'_1(l_{k+1} - l_y) \right. \\ & \left. + (l_y - l_{ik}) \{ H'_2(l_{k+1} - l_y) - H'_2(l_k - l_y) \} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$H'_1(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sqrt{s^2 + r^2}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{s^2 + r^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{4} \right) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} H'_2(s) &= s \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{((r_w - r)^2 + 4r_w r \sin^2(\theta)) \sqrt{s^2 + r^2}} d\theta \\ &= \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}} \frac{1}{(r_w - r)^2} (\mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2), \end{aligned}$$

la valeur des intégrales \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 figurant dans le paragraphe 9.3.

On obtient finalement l'approximation suivante de $D_{1,1}(y)$:

$$D_{1,1}(y) \approx -4r_w \sum_{k \in \mathcal{I}} \frac{(l_y - l_{ik})}{(l_i - l_{ik})} \frac{1}{(r_w - r)^2} (\mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2) \left(\frac{(l_{k+1} - l_y)}{\sqrt{(l_{k+1} - l_y)^2 + r^2}} - \frac{(l_k - l_y)}{\sqrt{(l_k - l_y)^2 + r^2}} \right)$$

Calcul de $D_{1,2}(y)$:

L'intégrale $D_{1,2}(y)$ est nulle. En effet, en divisant l'intervalle $[0, 2\pi]$ en 2, on peut écrire, pour toute fonction f de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta.$$

On effectue ensuite le changement de variable : $t = 2\pi - \theta$ dans le seconde intégrale, et par relation trigonométrique, on obtient alors :

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi} f(\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) dt = \int_0^{\pi} f(\cos(t), -\sin(t)) dt,$$

d'où, en sommant les intégrales sur $[0, \pi]$ et sur $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = \int_0^\pi (f(\cos(\theta), \sin(\theta)) + f(\cos(\theta), -\sin(\theta))) d\theta. \quad (9.3)$$

Or la fonction f qui nous intéresse est :

$$f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta = -\varphi_i^h(l) r_w \frac{\sin \theta}{[(l - l_y)^2 + r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos(\theta)]^{3/2}},$$

et cette fonction est impaire par rapport à $\sin(\theta)$. On en déduit donc d'après (9.3) que :

$$D_{1,2}(y) = 0.$$

Ainsi on obtient finalement que :

$$D_1(y) = D_{1,1}(y) n_y^1,$$

où n_y^1 désigne la première composante de la normale n_y .

• Calcul de $D_2(y)$:

Rappelons l'expression de $D_2(y)$:

$$D_2(y) = \int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{(x - y, n_x)(x - y, n_y)}{|x - y|^5} d\gamma(x).$$

Comme pour l'intégrale $D_1(y)$, on écrit :

$$D_2(y) = \left(\int_{\Gamma_w} \varphi_i^h(x) \frac{(x - y, n_x)x - y}{|x - y|^5} d\gamma(x) \right) \cdot n_y.$$

On rappelle que :

$$x - y = \begin{pmatrix} r_w \cos \theta - r \\ r_w \sin \theta \\ l - l_y \end{pmatrix},$$

et $(x - y, n_x) = -(r_w - r \cos \theta)$, et $D^2(\theta) = r_w^2 + r^2 - 2r_w r \cos \theta$.

On pose alors :

$$\begin{aligned} N_1(l, \theta) &= N_1(\theta) = (r_w - r \cos \theta)(r_w \cos \theta - r) = (r_w^2 + r^2) \cos \theta - r r_w (1 + \cos^2 \theta), \\ N_2(l, \theta) &= N_2(\theta) = (r_w - r \cos \theta) r_w \sin \theta, \\ N_3(l, \theta) &= (r_w - r \cos \theta)(l - l_y). \end{aligned}$$

On note :

$$D_{2,p}(y) = -r_w \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{N_p(l, \theta)}{[(l - l_y)^2 + D^2]^{5/2}} dl d\theta, \text{ pour } p = 1, 2, 3.$$

On voit tout de suite que $D_{2,2}(y) = 0$, pour les mêmes raisons que $D_{1,2}(y) = 0$.

Il nous reste donc $D_{2,1}(y)$, puis $D_{2,3}(y)$ à calculer.

Calcul de $D_{2,1}(y)$:

Le numérateur N_1 est indépendant de l , on va tout d'abord intégrer par rapport à l :

$$\int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{1}{[(l - l_y)^2 + D^2(\theta)]^{5/2}} dl.$$

Après découpage de l'intervalle $[0, L]$ en N_w segments, changement de variable, puis intégration, on obtient :

$$D_{2,1}(y) = -r_w \sum_{k=1}^{N_w-1} \frac{1}{(l_i - l_{ik})} \left(D_{2,1,1}(l_{k+1} - l_y) - D_{2,1,1}(l_k - l_y) \right. \\ \left. + (l_y - l_{ik}) (D_{2,1,2}(l_{k+1} - l_y) - D_{2,1,2}(l_k - l_y) + D_{2,1,3}(l_{k+1} - l_y) - D_{2,1,3}(l_k - l_y)) \right)$$

avec :

$$D_{2,1,1}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{-N_1(\theta)}{3 [s^2 + D^2(\theta)]^{3/2}} d\theta,$$

$$D_{2,1,2}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{s N_1(\theta)}{3 D^2(\theta) [s^2 + D^2(\theta)]^{3/2}} d\theta,$$

$$D_{2,1,3}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{2 s N_1(\theta)}{3 D^4(\theta) \sqrt{s^2 + D^2(\theta)}} d\theta.$$

Calcul de $D_{2,1,1}(s)$

Comme le puits est supposé ici loin du bord, on adopte le même raisonnement que pour l'intégrale H_{ij} , et on approche $s^2 + D^2(\theta)$ par $s^2 + r^2$, d'où :

$$D_{2,1,1}(s) \approx \int_0^{2\pi} \frac{-N_1(\theta)}{3 [s^2 + r^2]^{3/2}} d\theta.$$

Après intégration, on trouve :

$$D_{2,1,1}(s) \approx \frac{\pi r r_w}{[s^2 + r^2]^{3/2}}.$$

Calcul de $D_{2,1,2}(s)$

De la même manière que précédemment, on peut approcher $s^2 + D^2(\theta)$ par $s^2 + r^2$, d'où :

$$D_{2,1,2}(s) \approx \int_0^{2\pi} \frac{s N_1(\theta)}{3 D^2(\theta) [s^2 + r^2]^{3/2}} d\theta.$$

Après réduction par symétrie de l'intégrale sur 2π , développement du numérateur $N_1(\theta)$, et remplacement de $D^2(\theta)$ par sa valeur, on a :

$$D_{2,1,2}(s) \approx \frac{2s}{3 [s^2 + r^2]^{3/2}} \times \left((r_w^2 + r^2) \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} - r r_w \int_0^\pi \frac{(1 + \cos^2 \theta) d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} \right).$$

La première intégrale se réécrit après réduction par symétrie de l'intégrale sur π :

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta) d\theta}{((r_w - r)^2 + 4r r_w \sin^2 \theta)},$$

puis se calcule en fonction des intégrales \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 figurant dans le paragraphe 9.3 :

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} = \frac{2}{(r_w - r)^2} (\mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2).$$

Quant à la seconde intégrale, sa première partie s'exprime aussi en fonction de \mathcal{I}_1 après réduction par symétrie, de telle sorte que :

$$-r r_w \int_0^\pi \frac{(2 - \sin^2 \theta) d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} = -\frac{4r r_w}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_1 + r r_w \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)}.$$

Il nous reste donc à calculer :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)}.$$

Par relation trigonométrique, et changement de variable, on a :

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)} = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{((r_w - r)^2 + 4r r_w \sin^2 \theta)} = \frac{8}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_3,$$

avec :

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{(1 + a^2 \sin^2 \theta)}, \quad \text{et } a^2 = \frac{4r r_w}{(r_w - r)^2}.$$

Le calcul de l'intégrale \mathcal{I}_3 figure dans le paragraphe 9.3.

On en déduit $D_{2,1,2}(s)$, après regroupement de tous les termes, et simplifications :

$$D_{2,1,2}(s) \approx \frac{4s}{3 [s^2 + r^2]^{3/2}} \left(\mathcal{I}_1 - \frac{2(r_w^2 + r^2)}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_2 + \frac{4r r_w}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_3 \right).$$

Calcul de $D_{2,1,3}(s)$

On fait les mêmes approximations que précédemment, à savoir : $s^2 + D^2(\theta)$ est approché par $s^2 + r^2$, donc :

$$D_{2,1,3}(s) \approx \frac{2s}{3 \sqrt{s^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} \frac{N_1(\theta)}{D^4(\theta)} d\theta.$$

Après développement de $N_1(\theta)$, remplacement de $D^2(\theta)$ par sa valeur, puis réduction par symétrie, on peut écrire :

$$D_{2,1,3}(s) \approx \frac{4s}{3\sqrt{s^2+r^2}} \left\{ (r_w^2 + r^2) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{D^4(\theta)} d\theta - r r_w \int_0^\pi \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{D^4(\theta)} d\theta \right\}.$$

Arrivés à ce stade, nous devons calculer les deux intégrales :

$$I_{3,1} = \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)^2} d\theta,$$

$$I_{3,2} = \int_0^\pi \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{(r_w^2 + r^2 - 2r r_w \cos \theta)^2} d\theta.$$

Par formules trigonométriques, puis changement de variable, l'intégrale $I_{3,1}$ peut se réécrire :

$$I_{3,1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2 \sin^2(\theta)) d\theta}{[(r_w - r)^2 + 4r r_w \sin^2(\theta)]^2} = \frac{2}{(r_w - r)^4} \mathcal{I}_5,$$

avec :

$$\mathcal{I}_5 = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta) d\theta}{[1 + a^2 \sin^2(\theta)]^2}.$$

De même, l'intégrale $I_{3,2}$ se réécrit :

$$I_{3,2} = \frac{2}{(r_w - r)^4} (\mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_6),$$

avec :

$$\mathcal{I}_4 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 + a^2 \sin^2(\theta)]^2},$$

$$\mathcal{I}_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2 \sin^2(\theta))^2 d\theta}{[1 + a^2 \sin^2(\theta)]^2}.$$

Les intégrales $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_5, \mathcal{I}_6$ sont données dans le paragraphe 9.3.

Finalement on a :

$$D_{2,1,3}(s) \approx \frac{8s}{3\sqrt{s^2+r^2} (r_w - r)^4} ((r_w^2 + r^2)\mathcal{I}_5 - r r_w(\mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_6)).$$

Calcul de $D_{2,3}(y)$:

On rappelle l'expression de $D_{2,3}(y)$:

$$D_{2,3}(y) = -r_w \int_0^{2\pi} \int_0^L \varphi_i^h(l) \frac{(r_w - r \cos \theta)(l - l_y)}{[(l - l_y)^2 + D^2]^{5/2}} dl d\theta.$$

Pour calculer cette intégrale, on intègre tout d'abord par rapport à l . On discrétise l'intervalle $[0, L]$, puis par changement de variable, et intégration, on trouve :

$$D_{2,3}(y) = -r_w \sum_k \frac{1}{(l_i - l_{ik})} \left\{ J_{3,1}(l_{k+1} - l_y) - J_{3,1}(l_k - l_y) - (l_y - l_{ik}) (J_{3,2}(l_{k+1} - l_y) - J_{3,2}(l_k - l_y)) \right\} \quad (9.3)$$

avec :

$$J_{3,1}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{s^3 (r_w - r \cos \theta) d\theta}{3 D^2(\theta) (s^2 + D^2(\theta))^{3/2}},$$

$$J_{3,2}(s) = \int_0^{2\pi} \frac{(r_w - r \cos \theta) d\theta}{3 (s^2 + D^2(\theta))^{3/2}}.$$

Calcul de $J_{3,1}$

On peut approcher $s^2 + D^2(\theta)$ par $s^2 + r^2$, et donc :

$$J_{3,1}(s) \approx \frac{s^3}{3 (s^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \frac{(r_w - r \cos \theta) d\theta}{D^2(\theta)}.$$

Après relations trigonométriques et changement de variable, l'intégrale $J_{3,1}$ s'exprime en fonction de \mathcal{I}_1 et de \mathcal{I}_2 :

$$J_{3,1}(s) \approx \frac{4 s^3}{3 (s^2 + r^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{(r_w - r)} \mathcal{I}_1 + \frac{2r}{(r_w - r)^2} \mathcal{I}_2 \right).$$

Calcul de $J_{3,2}$

L'intégrale $J_{3,2}$ est approchée par :

$$J_{3,2}(s) \approx \frac{1}{3 (s^2 + r^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (r_w - r \cos \theta) d\theta,$$

et son approximation se calcule très facilement :

$$J_{3,2}(s) \approx \frac{2\pi r_w}{3 (s^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Donc l'intégrale $D_2(y)$ s'écrit :

$$D_2(y) = D_{2,1}(y) \cdot n_y^1 + D_{2,3}(y) \cdot n_y^3,$$

avec n_y^3 la troisième composante de la normale n_y .

Il s'ensuit pour l'intégrale intérieure \mathcal{D}_{ij} :

$$\mathcal{D}_{ij}(y) = (D_{1,1}(y) - 3 D_{2,1}(y)) \cdot n_y^1 - 3 D_{2,3}(y) \cdot n_y^3.$$

L'intégrale D_{ij} est finalement obtenue par intégration numérique sur l'équation (9.2).

9.3 Calculs d'intégrales intermédiaires

9.3.1 Intégrales en $1 + a^2 \sin^2 \theta$:

9.3.1.1 Calcul de \mathcal{I}_1 :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + a^2 \sin^2(\theta))} d\theta.$$

On factorise le dénominateur par $\cos^2(\theta)$:

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + a^2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)} d\theta,$$

puis par relations trigonométriques, on exprime l'intégrande en fonction de $\tan(\theta)$:

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \tan^2 \theta) d\theta}{(1 + \tan^2 \theta + a^2 \tan^2 \theta)}.$$

On effectue alors le changement de variable :

$$u = \tan \theta \quad du = (1 + \tan^2 \theta) d\theta,$$

et on obtient :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (1 + a^2) u^2}.$$

Après intégration, on trouve :

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \frac{\pi}{2}.$$

La méthode de calcul est la même pour toutes les intégrales suivantes : on factorise le dénominateur par $\cos^2(\theta)$ pour faire apparaître par relations trigonométriques $\tan^2(\theta)$, on fait ensuite le changement de variable $u = \tan \theta$, puis une décomposition en éléments simples, et on intègre. Pour les calculs de \mathcal{I}_2 et \mathcal{I}_3 , nous ne montrerons que ces étapes du calcul, puis le résultat final.

9.3.1.2 Calcul de \mathcal{I}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(1 + a^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + u^2)(1 + (1 + a^2)u^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(u^2 + (1 + a^2)) du}{a^4 (1 + u^2)} - \int_0^{+\infty} \frac{(1 + a^2)(1 + u^2) du}{a^4 (1 + (1 + a^2)u^2)} \\ &= \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a^4} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a^4 \sqrt{1 + a^2}} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

9.3.1.3 Calcul de \mathcal{I}_3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{(1 + a^2 \sin^2 \theta)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + u^2)^2 (1 + (1 + a^2)u^2)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^2 + (1 + a^2)}{a^4 (1 + u^2)^2} du - \int_0^{+\infty} \frac{(1 + a^2)}{a^4 (1 + (1 + a^2)u^2)} du \\
&= \frac{(2 + a^2)\pi}{4a^4} - \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a^4} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

9.3.2 Intégrales en $(1 + a^2 \sin^2 \theta)^2$:**9.3.2.1 Calcul de \mathcal{I}_4 :**

On adopte la même méthode que précédemment : on cherche à faire apparaître $\tan^2 \theta$ par relations trigonométriques, mais en factorisant cette fois par $\cos^4 \theta$, puis on fait le changement de variable $u = \tan \theta$. On aboutit ainsi à :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_4 &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 + a^2 \sin^2(\theta)]^2} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \tan^2 \theta)^2 d\theta}{[1 + (1 + a^2) \tan^2 \theta]^2} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(1 + u^2) du}{[1 + (1 + a^2) u^2]^2}.
\end{aligned}$$

A ce stade, on peut faire apparaître $1 + (1 + a^2) u^2$ au numérateur, et on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_4 &= \int_0^{\infty} \frac{1 + (1 + a^2)u^2 - a^2 u^2}{[1 + (1 + a^2) u^2]^2} du \\
&= \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + (1 + a^2) u^2} - \int_0^{\infty} \frac{a^2 u^2}{[1 + (1 + a^2) u^2]^2} du.
\end{aligned}$$

Après intégration, on obtient :

$$\mathcal{I}_4 = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}} - \frac{a^2 \pi}{4(1 + a^2)^{3/2}}.$$

9.3.2.2 Calcul de \mathcal{I}_7 :

$$\mathcal{I}_7 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{[1 + a^2 \sin^2(\theta)]^2}.$$

Pour cette intégrale, on adopte la même méthode, et après le changement de variable $u = \tan \theta$, on arrive à :

$$\mathcal{I}_7 = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + (1 + a^2) u^2)^2}.$$

On peut alors écrire :

$$\mathcal{I}_7 = \frac{1}{(1+a^2)} \int_0^{+\infty} \frac{(1+a^2)u^2}{(1+(1+a^2)u^2)^2} du.$$

On fait alors le changement de variable :

$$v = \sqrt{1+a^2} u,$$

et on doit calculer :

$$\mathcal{I}_7 = \frac{1}{(1+a^2)^{3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{v^2 dv}{(1+v^2)^2}.$$

On trouve après intégration :

$$\mathcal{I}_7 = \frac{\pi}{4(1+a^2)^{3/2}}.$$

9.3.2.3 Calcul de \mathcal{I}_8 :

$$\mathcal{I}_8 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 \theta d\theta}{[1+a^2 \sin^2(\theta)]^2}.$$

Après avoir exprimé l'intégrande en fonction de $\tan \theta$, puis avoir fait le changement de variable $u = \tan \theta$, on obtient :

$$\mathcal{I}_8 = \int_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1+u^2)(1+(1+a^2)u^2)^2}.$$

On fait alors une décomposition en éléments simples :

$$\mathcal{I}_8 = \int_0^{+\infty} \frac{du}{a^4(1+u^2)} + \int_0^{+\infty} \frac{(a^4 - (1+a^2)^2)u^2 - 1}{a^4(1+(1+a^2)u^2)^2} du.$$

La première intégrale s'intègre sans difficulté, et pour la deuxième, on développe le numérateur, et on fait le changement de variable $v = ((1+a^2)u)^{1/2}$, puis on intègre. On trouve finalement :

$$\mathcal{I}_8 = \frac{\pi}{2a^4} + \frac{\pi}{4(1+a^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{1+a^2}\pi}{4a^4} - \frac{\pi}{4a^4\sqrt{1+a^2}}.$$

Les intégrales \mathcal{I}_5 et \mathcal{I}_6 peuvent s'exprimer facilement en développant leur intégrande par rapport aux intégrales déjà calculées.

9.3.2.4 Calcul de \mathcal{I}_5 :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_5 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-2\sin^2 \theta) d\theta}{[1+a^2 \sin^2(\theta)]^2} \\ &= \mathcal{I}_4 - 2\mathcal{I}_7. \end{aligned}$$

9.3.2.5 Calcul de \mathcal{I}_6 :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_6 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(1-2\sin^2 \theta)^2 d\theta}{[1+a^2 \sin^2(\theta)]^2} \\ &= \mathcal{I}_4 - 4\mathcal{I}_7 + 4\mathcal{I}_8. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] R. ARCHER et R. HORNE - Flow simulation in Heterogeneous Reservoirs using the Dual Reciprocity Boundary Element Method and the Green Element Method, *ECMOR VI*, 1998.
- [2] R. ARCHER, R.N. HORNE et O. ONYEJEKWE - Petroleum reservoir engineering applications of the Dual Reciprocity Boundary Element Method and the Green Element Method, 21st World Conference on the Boundary Element Method, 25-27 August 1999, Oxford University.
- [3] R. ARCHER et R. HORNE - The Green Element Method for Numerical Well Test Analysis *SPE*, **62916**, 2000.
- [4] R. ARCHER - Computing flow and pressure transients in heterogeneous media using boundary element methods, thèse de doctorat, Stanford University, 2000.
- [5] M. M. ARAL et Y. TANG - A boundary only procedure for time-dependent diffusion equations, *Appl. Math. Modelling*, **12**, pp. 610-618, 1988.
- [6] C. ATAMIAN - *Résolution de problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques et acoustiques en régime fréquentiel par une méthode de domaines fictifs*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1991.
- [7] K. E. ATKINSON - *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997.
- [8] K. AZIZ et A. SETTARI - *Petroleum reservoir simulation*, Elsevier Applied Science Publishers, London, 1979.
- [9] R. BASQUET - *Solutions analytiques pour la représentation d'écoulements monophasiques autour de puits de géométrie quelconque dans un milieu poreux hétérogène stratifié*, thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1999.
- [10] A. BENDALI - *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*, thèse de doctorat d'état, Université Paris VI, 1984.
- [11] J. BESSON - Performance of Slanted and Horizontal Wells on an Anisotropic Medium, *SPE*, **30724**, pp. 219-231, 1990.
- [12] M. BONNET - *Equations intégrales et éléments de frontières, Applications en mécanique des solides et des fluides*, CNRS Editions / Eyrolles, 1995.
- [13] C.A. BREBBIA et A.J. NOWAK - *Boundary Element Methods in Heat Transfer*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp. 1-31, 1992.
- [14] C.A. BREBBIA et L.C. WROBEL - *The solution of parabolic problems using the Dual Reciprocity Boundary Element*, Advanced Boundary Element Method, San-Antonio, Springer-Verlag, 1988.
- [15] W.E. BRIGHAM - Discussion of productivity of a horizontal well, *SPE*, **20394**, pp. 254-255, 1990.

- [16] S. CHALUS - *Ecoulement permanent autour de puits complexes dans un réservoir multicouches à géométrie quelconque*, stage de fin d'études, IFP, 1999.
- [17] R. CHAPKO et R. KRESS - Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations, *Journal of Integral Equations and Applications*, **9**, pp.47-69, 1997.
- [18] G. CHAVENT et J. JAFFRÉ, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*, Studies in Mathematics and its applications, Elsevier Science Publishers, **17**, 1986.
- [19] C.S. CHEN, M.A. GOLBERG, M. GANESH et A. H-D. CHENG - The Dual Reciprocity Method using Multilevel Compactly Supported Radial Basis Functions, *Boundary Element XXII*, cf <http://www.nevada.edu/chen/pubs.html>.
- [20] C.S. CHEN, Y.F. RASHED et M.A. GOLBERG - A mesh-free method for linear diffusion equations, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **33**, pp. 469-486, 1998.
- [21] R. COSSÉ - *Techniques d'exploitation pétrolière : le gisement*, Editions Technip, 1988.
- [22] B. DAVIES et B. MARTIN - Numerical inversion of the Laplace Transform : a Survey and Comparison of Methods, *Journal of Computational Physics*, **33**, pp. 1-32, 1979.
- [23] E. DARVE - *Méthode multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales.*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, Juin 1999.
- [24] B.J. DIKKEN - Pressure drop in horizontal wells and its effects on production performance, *JPT*, pp. 1426-1433, 1990.
- [25] Y. DING - A generalized 3D well model for reservoir simulation, *SPE*, **30724**, vol. 1, 4, pp. 437-450, 1996.
- [26] Y. DING - Using potential theory for complex wells in transient problems, *ECMOR VI*, Scotland, 1998.
- [27] Y. DING - Using Boundary Integral Methods to Couple a Semi-Analytical Reservoir Flow Model and a Wellbore Flow Model, *SPE*, **51898**, pp. 195-205, 1999.
- [28] Y. DING - Transient Pressure Solution in the presence of pressure drop in the wellbore, *SPE*, **56614**, 1999.
- [29] Y. DING, T. HA-DUONG, J. GIROIRE et V. MOUMAS - Modelling of single-phase flow for horizontal wells in a stratified medium, présenté à la conférence AMIF 2002, Lisbonne, 17-20 avril 2002, accepté dans le journal Computers and Fluids.
- [30] E. DIVO et A. KASSAB - Generalized Boundary Integral Equation for Transient Heat Conduction in Heterogeneous Media, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **12 :3**, pp. 364-373, 1998.
- [31] L. FARINA, Y. DING et T. HA-DUONG - Transient pressure solution for a horizontal well in a petroleum reservoir by boundary integral methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**, pp. 669-679, 2000.
- [32] J. GIROIRE - Cours de DEA de l'Université de Nantes, 1992.
- [33] M.A. GOLBERG, C.S. CHEN et H. BOWMAN - Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, pp. 285-296, 1999.
- [34] M.A. GOLBERG, C.S. CHEN, H. BOWMAN et H. POWER - Some comments on the use of radial basis functions in the Dual Reciprocity Method, *Computational Mechanics*, **21**, pp. 141-148, 1998.
- [35] M.A. GOLBERG, C.S. CHEN et A.S. MULESHKOV - *The method of fundamental solutions for time-dependent problems*, Boundary Element Technology XIII, pp. 377-386, 1999.

- [36] G.W. GOVIER et K. AZIZ - *The Flow of complex mixtures in pipes*, Van Nostrand Reinold, 1972.
- [37] I.G. GRAHAM, W. HACKBUSCH et S.A. SAUTER - Hybrid Galerkin Boundary Elements : Theory and Implementation, Preprint 98-6, Université de Kiel, 1998.
- [38] I.G. GRAHAM, W. HACKBUSCH et S.A. SAUTER - Fast Integration Techniques in 3D Boundary Elements, Preprint, Université de Kiel.
(cf <http://www.maths.bath.ac.uk/MATHEMATICS/preprints.html>)
- [39] A.L. GRINGARTEN et H.J. RAMEY - The Use of Source and Green's Functions in Solving Unsteady-Flow Problems in Reservoirs, *SPE*, **3818**, pp. 285-296, 1973.
- [40] Y. ISO et K. ONISHI - On the stability of the boundary element collocation method applied to the linear heat equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **38**, pp. 201-209, 1991.
- [41] W. HACKBUSCH - *Integral Equations, Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [42] A.K. JAIN - Accurate explicit equation for friction factor, *Journal of Hydraulics Div. ASCE*, **102**, pp. 674-677, 1976.
- [43] L. JEANNIN et V. MOUMAS - Evaluation of well performance using the coupling of boundary element and finite element methods, *soumis*.
- [44] L. JEANNIN, V. MOUMAS et R. BASQUET - Coupling control volume and boundary element methods for flow modelling in porous media, *soumis*.
- [45] K. JONGKITTINARUKORN, D.TIAB et F.H. ESCOBAR - Interpretation of Horizontal Well Performance in Complicated Systems by the Boundary Element Method, *SPE*, **50437**, pp. 421-433, 1998.
- [46] J. KIKANI et R.N. HORNE - Pressure-Transient Analysis of Arbitrarily Shaped Reservoirs With the Boundary-Element Method, *SPE*, **18159**, pp. 53-60, 1998.
- [47] L.S. KOH et D. TIAB - A Boundary-Element Algorithm for Modeling 3D Horizontal Well Problems Using 2D Grids, *SPE*, **26228**, pp. 91-106, 1993.
- [48] R. KRESS - *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, **82**, 1941.
- [49] S. LANGDON - A boundary integral equation method for the heat equation, *Proceedings of the 5th international conference on integral methods in science and engineering*, CRC Press, 1998.
- [50] S. LANGDON et I. GRAHAM - Boundary Integral Methods for Singularly Perturbed Boundary Value Problems, *IMA Journal of numerical analysis*, 1998.
- [51] S. LANGDON - *Domain Embedding Boundary Integral Equation Methods and Parabolic PDEs*, thèse de doctorat, University of Bath, 1999.
- [52] L. LARSEN et T.M. HEGRE - Pressure-Transient Behavior of Horizontal Wells With Finite-Conductivity Vertical Fractures, *SPE*, **22076**, pp. 197-214, 1991.
- [53] J.A. LIGGETT et P.L.F. LIU - Unsteady Flow in Confined Aquifers : A Comparison of Two Boundary Integral Methods, *Water Resources Research*, **15** :4, pp.861-866, 1979.
- [54] J.A. LIGGETT et P.L-F. LIU - *The Boundary Integral Equation for Porous Media Flow*, George Allen and Unwin, 1983.
- [55] C. LUBICH et R. SCHNEIDER - Time discretization of parabolic boundary integral equations, *Num. Math.*, **63** :4, pp. 455-481, 1992.

- [56] A. MCKENNEY, L. GREENGARD et A. MAYO - A Fast Poisson Solver for Complex Geometries, *Journal of Computational Physics*, **118**, pp. 348-355, 1995.
- [57] M.N. MOHAMAD-IBRAHIM et D.T. NUMBERE - Boundary element analysis of the productivity of complex petroleum well configurations, *Boundary Element Technology XIII*, WITpress, pp. 25-34, 1999.
- [58] V. MOUMAS, Y. DING, J. GIROIRE et T. HA-DUONG - Evaluation of the performance of complex wells in a stratified medium, proceeding numéro E-37 de la conférence ECMOR VIII, Freiberg, Allemagne, 3-6 septembre 2002.
- [59] G.V. NARAYANAN et D.E. BESKOS - Numerical operational methods for time-dependent linear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**, pp. 1829-1854, 1982.
- [60] D. NARDINI et C.A. BREBBIA - The solution of parabolic and hyperbolic problems using an alternative boundary element formulation, *Boundary Element Methods in Engineering VII*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [61] D. NARDINI et C.A. BREBBIA - Boundary integral formulation of mass matrices for dynamic analysis, *Boundary Element Methods in Engineering VII*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [62] D. NARDINI et C.A. BREBBIA - The solution of parabolic problems using an alternative boundary element formulation, *Boundary Element Methods in Engineering VII*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [63] J.-C. NÉDÉLEC - *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*, cours de l'Ecole Polytechnique, 1977.
- [64] J.-C. NÉDÉLEC - *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*, Series : Applied Mathematical Sciences. VOL. 144, Springer Verlag, Heidelberg, 2001.
- [65] J.-C. NÉDÉLEC et J. PLANCHARD - Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans \mathbb{R}^3 , *R.A.I.R.O., Analyse Numérique*, **3**, vol. 7, pp 105-129, 1973.
- [66] A.J. NOWAK - Solving linear heat conduction problems by the Multiple Reciprocity Method, *Boundary Element Methods in Heat Transfer*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp. 63-86, 1992.
- [67] M. OGUZTORELI et D.W. WONG - VERTEX : A New Modeling Method used to Direct Field Development, *SPE*, **39806**, pp. 467-476, 1998.
- [68] L.-B. OUYANG, S. ARBABI et K. AZIZ - General wellbore flow model for horizontal, vertical, and slanted well completions, *SPE*, **36608**, 1996.
- [69] L.-B. OUYANG - *Single Phase and Multiphase Fluid Flow in Horizontal Wells*, thèse de doctorat, Université de Stanford, 1998.
- [70] P.W. PARTRIDGE, C.A. BREBBIA et L.C. WROBEL - *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1992.
- [71] P.W. PARTRIDGE - Radial basis approximation functions in the boundary element Dual Reciprocity Method, *Boundary Element Technology XIII*, WITpress, pp. 325-334, 1999.
- [72] R. PASQUETTI, A. CARUSO et L.C. WROBEL - Transient problems using time-dependent fundamental solutions, *Boundary Element Methods in Heat Transfer*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, pp. 33-62, 1992.

- [73] R. PECHER et J.F. STANISLAV - Boundary Element techniques in petroleum reservoir simulation, *Journal of Petroleum Engineering*, **17**, pp.353-366, 1997.
- [74] V. R. PENMATCHA - *Modeling of Horizontal Wells with Pressure Drop in the Well*, thèse de doctorat, Université de Stanford, 1997.
- [75] P.S. RAMESH et M.H. LEAN - Accurate Integration of singular kernels in Boundary Integral Formulations for Helmholtz Equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, pp. 1055-1068, 1991.
- [76] K. RUOTSALAINEN et W. WENDLAND - On the Boundary Element Method for Some Nonlinear Boundary Value Problems, *Numerische Mathematik*, **53**, pp. 299-314, 1988.
- [77] H. SCHULZ, C. SCHWAB et W.L. WENDLAND - An extraction technique for boundary element method, *Boundary Elements : Implementation and Analysis of Advanced Algorithms*, Proceedings of the Twelfth GAMM-Seminar, Kiel, pp. 219-231, 1996.
- [78] A.E. TAIGBENU - The Green Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, pp. 2241-2263, 1995.
- [79] M. VABLE et B.A. AMMONS - Minimizing some of mesh errors in boundary element method, *Boundary Element Technology XIII*, WITpress, pp. 449-469, 1999.
- [80] P.H. WEN, M.H. ALIABADI, D.P. ROOKE - A new method for transformation of domain integrals to boundary integrals in Boundary Element Method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **14**, pp. 1055-1065, 1998.
- [81] G. YU, W.J. MABSUR, J.A.M. CARRER et L. GONG - Time weighting in time domain BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **22**, pp. 175-181, 1998.
- [82] M. ZERROUKAT - Approximation of Domain integrals in BEM using thin plate splines, *Boundary Element Research in Europe*, Southampton, 1988.
- [83] S.-P. ZHU, P. SATRAVAHA et X. LU - Solving linear diffusion equations with the dual reciprocity method in Laplace space, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **13**, pp. 1-10, 1994.
- [84] S.-P. ZHU - Time-Dependent reaction-diffusion problems and the LTDRM approach, *Boundary Integral Methods, numerical and mathematical aspects*, 1998.
- [85] S.-P. ZHU, H.-W. LIU et X.-P. LU - A combination of LTDRM and ATPS in solving diffusion problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pp. 285-289, **21**, 1998.
- [86] S.-P. ZHU - Solving transient diffusion problems : time-dependent fundamental solution approaches versus LTDRM approaches, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **21**, pp. 87-90, 1998.

Résumé

L'utilisation des méthodes intégrales dans le milieu pétrolier est récente et reste limitée à des problèmes 2D, le puits étant modélisé comme un terme source. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle méthode intégrale pour évaluer la performance des puits dans un réservoir stratifié à géométrie quelconque en 3D. Ici, l'écoulement dans le puits est pris en compte par deux types de conditions aux limites, la première linéaire, la seconde non-linéaire et non-locale.

Nous avons démontré que chacun des deux modèles (linéaire et non-linéaire) est bien posé. Du point de vue numérique, nous avons développé une nouvelle formulation intégrale, équivalente au modèle linéaire. Les équations intégrales ont été discrétisées par une méthode de Galerkin. D'autre part, nous avons pu tirer profit du problème d'échelle pour faire une approximation filaire du puits. Les tests numériques montrent que cette nouvelle méthode intégrale permet de calculer l'indice de productivité du puits à 1% près.

Mots-clés : réservoir pétrolier stratifié 3D, performance des puits, équations intégrales, approximation filaire, condition aux limites non-linéaire et non-locale.

Abstract

Boundary integral methods make it possible to overcome the scale difference between the size of the reservoir (several kilometers) and the radius of the well (less than 15 cm). They have recently been used in petroleum engineering, but they were limited to 2D problems, and the well was modelled like a source term. Here we propose a new boundary integral method to evaluate well performance in a 3D stratified reservoir with arbitrary geometry. The flow in the well is modelled using one of two boundary conditions, the first one linear, the second one non-linear and non-local. We have proved that both models are well-posed, and we have developed a new boundary integral formulation to treat the linear model. Boundary integral equations have been discretized by a Galerkin method, and integrals on the well have been reduced to 1D integrals, thanks to the scale difference. Well productivity index can be calculated by our new method with a precision of 1%.

Key words : 3D petroleum stratified reservoir, well productivity, boundary integral equations, thin well approximation, non-linear and non-local boundary condition.