



HAL
open science

Descente de toiseurs, gerbes et points rationnels

Stephane Zahnd

► **To cite this version:**

Stephane Zahnd. Descente de toiseurs, gerbes et points rationnels. Mathématiques [math]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2003. Français. NNT: . tel-00004163

HAL Id: tel-00004163

<https://theses.hal.science/tel-00004163>

Submitted on 14 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Descente de toiseurs, gerbes et points rationnels

Stéphane Zahnd

23 décembre 2003

FIG. 1 – Le lieu de gerbes (d'après Millet)

Saint-Rémy

Huile sur toile, 44,5cm × 32cm

Amsterdam, Rijksmuseum Vincent Van Gogh.

Table des matières

Remerciements	VII
Introduction	XI
Notations	XXI
1 Champs et gerbes	1
1.1 Sites et topoï	2
1.2 Torseurs	6
1.3 Bitorseurs	12
1.4 Préchamps et champs	15
1.5 Gerbes	20
1.6 Liens	26
1.7 Cohomologie à valeurs dans un lien	30
2 Descente de toseurs : le cas abélien	35
2.1 Conséquences de la suite spectrale de Leray	36
2.2 De l'importance de la condition $\tilde{G}_X(\bar{X}) = \tilde{G}(\bar{k})$	43
2.3 Points adéliques et toseurs	49
2.3.1 Construction de l'obstruction de Brauer-Manin	51
2.3.2 Exemples de calculs de $m_{\mathcal{H},\mathbb{B}(X)}(X)$	55
2.3.3 Brauer-Manin orthogonalité et descente	57
3 Descente de toseurs : le cas non-abélien	61
3.1 Une interprétation topologique	62
3.2 Obstruction non-abélienne	69
3.3 Le cas fini	71
3.4 Remarques	72
3.4.1 Problèmes de représentabilité	72
3.4.2 La condition corps des modules et le champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$	72
4 Obstruction de Brauer-Manin des gerbes	75
4.1 Rappels	76
4.1.1 Calcul de Br_a pour un espace homogène sous SL_n	76
4.1.2 Exemples	77
4.2 Interprétation en termes de champ quotient	78
4.3 Invariant de Brauer-Manin d'une k -gerbe	80
4.4 1/2-théorème de Tate-Poitou non-abélien	84

Appendice A. Interprétation de la classe de Chern d'un fibré en droites comme la gerbe de ses logarithmes	87
Appendice B. Généralités sur les suites spectrales	95
Appendice C. A la recherche d'un contre-exemple au principe de Hasse parmi les hypersurfaces de degré ≥ 4 de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$	103
Bibliographie	109
Index	114
Glossaire des notations	116

Mathematics Subject Classification (2000). 14G05, 14A20, 14F20, 18G50.

Mots-clés. Points rationnels, (bi-)torseurs, champs, gerbes, cohomologie non-abélienne, obstruction de Brauer-Manin.

Remerciements

Les mots sont faibles pour exprimer ma reconnaissance à Jean-Claude DOUAI pour tout ce qu'il m'a apporté durant l'élaboration de cette thèse. Sa passion et sa soif de découvrir, peut-être plus encore que sa disponibilité de tous les instants et son impressionnante culture mathématique, ont transformé toutes nos discussions en véritables moments de bonheur. A ses côtés, la découverte des gerbes et de la cohomologie non-abélienne m'est apparue comme un fantastique voyage.

J'ai bien sûr été très honoré que Jean GIRAUD ait accepté la lourde tâche de rapporteur, et je tiens ici à le remercier d'avoir été aussi précis et consciencieux dans ses observations. Le présent texte porte la trace de son magnifique ouvrage sur la cohomologie non-abélienne, et de ses commentaires très riches et détaillés sur mon travail.

Le temps que David HARARI a eu la gentillesse de bien vouloir me consacrer, les indications et explications précises qu'il m'a fournies sur les questions arithmétiques en général et sur l'obstruction de Brauer-Manin en particulier, m'ont permis d'énormément progresser dans la compréhension de ces problèmes. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier chaleureusement Pierre DÈBES, pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. J'ai beaucoup appris sur les revêtements (entre autres) à son contact, et nos discussions ont toujours été, sur de nombreux sujets, très éclairantes.

Je remercie Michel EMSALEM de m'avoir consacré tant de temps, et d'avoir accepté de se pencher avec moi sur des problèmes aussi effrayants (ah! le *gr*-champ des auto-équivalences de la gerbe des *G*-torseurs...). Manipuler les catégories fibrées et les champs me paraît plus facile grâce à ses indications.

Le cours de DEA de Géométrie Algébrique de Dimitri MARKUSHEVICH m'a donné le goût de cette discipline et du travail bien fait, et c'est pourquoi je souhaite ici lui dire avec reconnaissance : *бесконечно спасибо*.

La théorie des champs occupe une place importante dans ce travail. Je tiens donc à remercier chaleureusement Laurent MORET-BAILLY de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury. Ses travaux dans ce domaine apportent à de nombreux endroits de la présente thèse un éclairage particulièrement intéressant.

Je tiens à remercier ma famille de son soutien inconditionnel durant ces trois années. Evidemment, je m'adresse tout d'abord à Sophie, pour avoir supporté sans sourciller mes envies de solitude, et pour avoir accepté que je me plonge de longues soirées dans la lecture des "grands classiques".

Je remercie Valerio VASSALLO, qui m'a enseigné les fondements de la Géométrie Algébrique, et dont les idées m'ont permis d'aiguiser mon intuition et mon désir d'aller plus loin dans ce domaine.

Enfin, je ne veux à aucun prix oublier mes amis : vos encouragements (en particulier ces dernières semaines), et les conversations que nous avons eues ensemble, que ce soit devant un tableau noir, autour d'un café ou sur une aire d'autoroute quelque part en Allemagne, m'ont aidé à conserver intacte ma motivation. Séverine (la mise en page de cette thèse porte ta signature!), mes "compagnons autrichiens" Yann et Salah, mes camarades de jeu en cohomologie étale Ben et Diallo, c'est un plaisir de vous associer à ces remerciements.

Mais, si vous en croyez tout le monde savant,
L'esprit doit sur le corps prendre le pas devant,
Et notre plus grand soin, notre première instance,
Doit être à le nourrir du suc de la science.

Molière, *Les femmes savantes*, (Acte II, Scène VII).

Introduction

La question qui motive ce travail est la suivante :

Soient k un corps et X un k -schéma. X possède-t-il des points k -rationnels ?

Il semble évidemment sans espoir de répondre entièrement à ce problème, puisque cela équivaudrait à prouver d'un seul coup tous les énoncés du type "Théorème de Fermat" possibles et imaginables. L'objectif plus raisonnable que nous nous fixons ici est le suivant :

Soient k un corps de caractéristique nulle et X un k -schéma. Déterminer des obstructions cohomologiques étales à l'existence de points k -rationnels sur X .

Pour arriver à nos fins, nous utilisons les gerbes, introduites par Grothendieck et Giraud, mais fort peu utilisées depuis (sauf peut-être par les Physiciens, qui se servent des gerbes abéliennes en théorie des cordes, cf. [Hi03]), ce qui nous semble être une flagrante injustice. En effet, les gerbes apparaissent naturellement dans des problèmes aussi nombreux que variés, et dont nous donnons maintenant quelques exemples, en commençant par celui qui est au cœur de cet exposé :

Problème central : soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe algébrique linéaire. Soient encore :

$$\bar{P} \longrightarrow \bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$$

un \bar{G}_X -torseur, où :

$$G_X = G \times_{\text{Spec } k} X \quad \text{et} \quad \bar{G}_X = G_X \times_X \bar{X}.$$

et \bar{k} désigne une clôture algébrique de k fixée à l'avance. On suppose que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$, il existe un isomorphisme de \bar{G}_X -torseurs :

$$\varphi_\sigma : \sigma \bar{P} \longrightarrow \bar{P}$$

où $\sigma \bar{P}$ désigne le schéma obtenu par pullback à partir de $\tilde{\sigma}$ (l'automorphisme de $\text{Spec } \bar{k}$ induit par σ) ; autrement dit, le carré ci-dessous est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \sigma \bar{P} & \xrightarrow{\varphi_\sigma} & \bar{P} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } \bar{k} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \text{Spec } \bar{k} \end{array}$$

Employant une terminologie propre à la théorie des revêtements, nous dirons que le toseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est de *corps des modules* k .

Le problème est alors de savoir s'il existe un G_X -torseur $Q \rightarrow X$ tel que $\bar{Q} \approx \bar{P}$, ce dernier isomorphisme vivant dans la catégorie des \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} . Nous appellerons *modèle* de \bar{P} sur X un tel tosseur $Q \rightarrow X$. Si \bar{P} possède un modèle sur X , nous dirons qu'il est *défini sur k* .

Supposons par exemple que G soit un k -groupe abélien de type multiplicatif, et que X soit un k -schéma propre (*e.g.* une k -variété projective). Alors la suite exacte à 5 termes :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X) \quad (1)$$

(où Γ désigne le groupe de Galois absolu de k) déduite de la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

montre que l'obstruction à ce que \bar{P} (qui représente une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$) soit défini sur k (*i.e.* : $[\bar{P}] \in \text{im } u$) est mesurée par une classe vivant dans $H^2(k, G)$. Une telle classe est une (classe d'équivalence de) gerbe sur le site étale de k .

Par ailleurs, sous les mêmes hypothèses, on a une interprétation en termes de *type* de ce problème. On dispose en effet de la suite exacte à 5 termes introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS87] :

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X) \quad (2)$$

celle-ci étant déduite de la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_\Gamma^p(\widehat{G}, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_{m, \bar{X}})) \implies H^{p+q}(X, G) = E^{p+q}$$

Les suites exactes (1) et (2) sont canoniquement isomorphes (*cf.* [HS02]). On appelle *type* d'un G_X -torseur $P \rightarrow X$ l'image de $[P]$ par le morphisme χ de la suite (2). Plus généralement, on peut associer à tout \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un type noté $\tau_{\bar{P}}$, appartenant *a priori* à $\text{Hom}(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X})$; si de plus \bar{P} est de corps des modules k , alors $\tau_{\bar{P}}$ est Γ -équivariant (*cf.* [HS02] 3.7). Dans ce cas, l'existence d'un modèle pour le \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est équivalente à l'existence d'un G_X -torseur sur X de type $\tau_{\bar{P}}$.

Un problème très similaire est celui de l'existence de modèles pour un revêtement galoisien :

“Revêtements algébriques : corps des modules contre corps de définition”¹ soient X une variété algébrique définie sur un corps K , et soit K^{sep} une clôture séparable de K . Soient G un groupe fini, et $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un G -revêtement. On suppose que \bar{f} est isomorphe à tous ses conjugués par l'action de $\text{Gal}(K^{sep}/K)$.

Le G -revêtement \bar{f} est-il défini sur K ?

Une situation légèrement différente des deux précédentes est liée à ce que nous conviendrons d'appeler la

¹Titre honteusement plagié sur [DD97].

Conjecture de Grothendieck sur les groupes de Brauer : soit X un schéma. Notons $\text{Br}_{Az} X$ le groupe des classes d'équivalence d'algèbres d'Azumaya sur X (cf. [Gr68]), et notons $\text{Br } X$ la partie de torsion du second groupe de cohomologie étale $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ (lorsque X est régulier, on a $\text{Br } X = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ d'après [Gr68] II.1.4). On a toujours un morphisme injectif de groupes :

$$\Delta : \text{Br}_{Az} X \longrightarrow \text{Br } X$$

La surjectivité de ce morphisme n'est pas connue en général, mais elle l'est dans le cas où X est :

- le spectre d'un corps ;
- un schéma affine, ou la réunion de deux schémas affines ayant une intersection affine (Gabber [Ga80]) ;
- une variété abélienne (Hoobler [Ho72]) ;
- une variété torique lisse (Demeyer et Ford [DF93]) ;
- une surface algébrique séparée géométriquement normale (Schröer [Sc01]) ;

Le problème de déterminer si Δ est surjective ou non est évidemment lié aux gerbes. Considérons en effet une classe $[c] \in \text{Br } X$; comme $[c]$ est de torsion, il existe un entier n tel que $[c]$ soit représentable par une classe $[c'] \in H^2(X, \mu_n)$. Un représentant de $[c']$ est une μ_n -gerbe sur le site étale de X (au passage, \mathcal{G} est en particulier un champ de Deligne-Mumford), et \mathcal{G} appartient à l'image de Δ si et seulement si \mathcal{G} est isomorphe à un champ quotient (cf. [EHKV01] 3.6).

Ce sont les mêmes types de considérations qui interviennent lorsque l'on étudie la

Relation de domination de Springer : soient K un corps, K^{sep} une clôture séparable de K , G un K -groupe algébrique, et H un sous- K -groupe algébrique de G . Il existe une relation [Sp66] :

$$H^1(\text{Gal}(K^{sep}/K), G) \twoheadrightarrow H^1(\text{Gal}(K^{sep}/K); G, H)$$

entre l'ensemble des classes d'isomorphie de G -torseurs (à droite) sur K , et celui des K -espaces homogènes sous l'action (à droite) de G avec isotropie H . Soit V un tel espace homogène. Une fois encore, l'obstruction à ce que V soit dominé par un G -torseur, *i.e.* l'obstruction à ce que $[V]$ appartienne à l'image de la relation est mesurée par une gerbe sur k , localement liée par H .

Le dernier exemple que nous donnons se distingue des précédents par le fait que c'est purement un problème de Géométrie Algébrique, et non un problème d'Arithmétique. Ceci étant dit, même si les contextes sont différents, les gerbes sont encore présentes :

Classe de Chern d'un fibré en droites : soient X une variété algébrique complexe projective lisse. On note X^{an} la variété analytique canoniquement associée à X

(cf. [Fu98]). De la suite exponentielle, on déduit la suite de cohomologie :

$$H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \xrightarrow{exp} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

D'après le théorème de Serre (cf. [Hart77] p.440), qui établit l'équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celle des faisceaux analytiques cohérents sur X^{an} , on en déduit la suite exacte :

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\eta} \text{Pic } X \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

L'image d'un fibré en droites \mathcal{L} sur X (i.e. d'un représentant d'une classe de $\text{Pic } X$) par δ^1 est appelée la *classe de Chern* de \mathcal{L} , et elle est notée $c_1(\mathcal{L})$.² On peut évidemment voir cette classe $c_1(\mathcal{L})$ comme une gerbe, sur le site analytique de X^{an} . Sa non-nullité est une obstruction à ce que \mathcal{L} appartienne à l'image du morphisme η .

Après ces exemples qui illustrent la diversité des contextes dans lesquels les gerbes interviennent, voici le plan que nous suivrons dans ces notes :

CHAPITRE 1 : nous y introduisons les outils et le langage nécessaires dans toute la suite. On commence par rappeler la définition de site en général, en ayant à l'esprit le fait que seule la notion de site étale d'un schéma nous sera vraiment utile. On rappelle ensuite les notions de catégorie fibrée, préchamp et champ afin de pouvoir présenter les actrices principales de ce travail : les gerbes. Cependant, plutôt que de travailler sur un site général (comme dans [Gi66] et [Gi71]), nous étudierons plus particulièrement les propriétés des gerbes sur le site étale d'un schéma, ce qui rendra peut-être plus facile leur interprétation. Enfin nous rappellerons les notions de lien et de cohomologie à valeurs dans un lien, en donnant des exemples de situations où le H^2 est "facilement" calculable.

CHAPITRE 2 : nous nous attaquons au problème central par son versant le plus facile : le cas abélien. Plus précisément, on s'intéresse à la situation suivante : on considère un corps de caractéristique nulle k , dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} , un k -schéma X géométriquement irréductible, et un k -groupe algébrique abélien G . On peut alors, en ajoutant de peu contraignantes hypothèses, déterminer une obstruction cohomologique abélienne à l'existence d'un point k -rationnel sur X . Explicitement, on suppose satisfaite la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ (e.g. X projective et $G = \mathbb{G}_m$). On a alors la suite exacte à 5 termes :

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

L'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction de l'application v , ce qui force le cobord δ^1 à être nul, cette nullité entraînant la surjectivité de l'application u . On en déduit donc une première obstruction :

²Ce n'est pas la seule manière de définir la classe de Chern d'un fibré en droites. C'est en tout cas celle présentée dans [Fu98], 19.3.1 ; pour un autre point de vue, nous renvoyons à l'appendice A de [Hart77], et pour un retour aux sources à [Gr58].

Théorème 1 (Obstruction abélienne à l’existence d’un point rationnel). *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma, quasi-compact et quasi-séparé, et G un k -groupe algébrique abélien tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.*

Si $X(k) \neq \emptyset$, alors dans la suite exacte précédente, le morphisme u est surjectif. Autrement dit, tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .

De cet énoncé, on extrait les conséquences suivantes :

Proposition 2. *Le corps k , le schéma X et le groupe G étant comme indiqués dans l’énoncé précédent, on a la suite longue de cohomologie (toujours déduite de la suite spectrale de Leray) :*

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \\ \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{tr} \longrightarrow H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \xrightarrow{\delta^2} H^3(k, G)$$

où $H^2(X, G_X)^{tr} = \ker \{H^2(X, G_X) \rightarrow H^2(\bar{X}, \bar{G}_X)\}$. Supposons que X possède un point k -rationnel. Alors :

(i) les suites :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{tr} \longrightarrow H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \longrightarrow 0$$

sont exactes ;

(ii) le morphisme $H^3(k, G) \longrightarrow H^3(X, G_X)$ est injectif (c’est l’edge : $E_2^{3,0} \rightarrow E^3$).

Dans le cas particulier où $G = \mathbb{G}_{m,k}$, on a alors :

(\mathbb{G}_m -i) tout fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k ;

(\mathbb{G}_m -ii) la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{tr} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte ;

(\mathbb{G}_m -iii) le morphisme $H^3(k, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{G}_{m,X})$ est injectif.

Signalons que ce résultat est connu de longue date, puisqu’à peu de choses près, l’énoncé de cette proposition est celui du lemme 6.3 de [Sa81]. Notons aussi que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est remplie, lorsque G est de type multiplicatif, si X est tel que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$. Les k -variétés satisfaisant cette dernière condition constituent d’ailleurs, pour citer Skorobogatov “une classe raisonnable de variétés pour lesquels les méthodes de descente fonctionnent bien” (cf. [Sk99] p.407). Cependant, toutes les variétés ne satisfont pas cette condition, et il est très instructif de regarder ce qui arrive sur un exemple (dû à J.-L. Colliot-Thélène et O. Gabber) de variété pour laquelle l’obstruction abélienne ne tient

pas. Plus précisément, nous étudions une variété X , telle que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$, possédant un point k -rationnel, mais telle que le morphisme :

$$\text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^\Gamma$$

n'est pas surjectif.

Il est également intéressant de remarquer que l'absence de point rationnel n'est pas une obstruction à la descente des toiseurs en général³. Concrètement, d'après [CTS87], la descente des \bar{G}_X -toiseurs (G étant abélien) sur \bar{X} est possible dès que X possède des points adéliques d'un certain type (ce qui est plus faible que de demander l'existence de points rationnels). Nous verrons que les variétés dont l'obstruction de Brauer-Manin est nulle ont justement des points adéliques de ce type.

CHAPITRE 3 : l'objet de ce chapitre est de s'inspirer du cas abélien pour obtenir une obstruction non-abélienne à l'existence de point rationnel. Bien entendu, il n'est plus question d'utiliser des suites spectrales, et il ne subsiste de la suite exacte à 5 termes (1) que la suite exacte au sens des ensembles pointés :

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$$

Pour espérer prolonger cette suite et obtenir un analogue de la suite à 5 termes dans le cas non-abélien, on définit, pour tout $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ sa gerbe des modèles, notée $D(\bar{P})$. C'est une gerbe sur k , dont la neutralité est nécessaire et suffisante pour que \bar{P} soit défini sur k (ou encore pour que \bar{P} ait un modèle sur X). La difficulté est évidemment que cette gerbe ne représente en général pas une classe de " $H^2(k, G)$ ", ni même de $H^2(k, \text{lien } G')$, où G' serait une k -forme de G . Le lemme suivant, qui est trivial mais d'une importance capitale, explique en partie l'origine de cette difficulté :

Lemme fondamental 3. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -toiseur sur S . Alors $\text{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit :*

$$\text{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \text{Int } G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors :

$$\text{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

Malgré cela, nous montrons que l'existence d'un point k -rationnel x sur X entraîne justement la neutralité de $D(\bar{P})$, lorsque l'on fait l'hypothèse supplémentaire :

Condition $(\star_{\bar{P}})$: *En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a :*

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

³I.e. la réciproque du théorème 1 est fautive en général.

qui est l'analogie non-abélien de la condition :

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

Sous cette hypothèse, on a le résultat suivant :

Théorème 4. *Soient X un k -schéma, et G un k -groupe linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un $G_{\bar{X}}$ -torseur de corps des modules k . On suppose que X possède un point k -rationnel x , et on suppose satisfaite la condition suivante :*

Condition $(\star_{\bar{P}})$: *En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a :*

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Alors $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

D'autre part, de nombreux obstacles se présentent lorsque l'on cherche à obtenir des informations précises sur le lien de la gerbe des modèles d'un tosseur. Cependant, dans le cas où le groupe G est fini, on retrouve l'énoncé suivant, à rapprocher de celui de Harari et Skorobogatov [HS02], théorème 2.5 et section 3.1 :

Théorème 5. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe fini. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .*

Enfin, nous essayons d'expliquer ce qui empêche d'obtenir une description précise du lien de $D(\bar{P})$, et ce qui empêche donc *a priori* de raffiner les énoncés précédents. Nous étudierons aussi ce qui se passe si l'on n'impose plus la condition corps des modules sur les tosseurs que l'on cherche à descendre. Précisément, on peut toujours associer à un tosseur \bar{P} sur \bar{X} représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$ sa gerbe des modèles, mais celle-ci n'est plus nécessairement une k -gerbe. De fait, c'est une $k_{\bar{P}}$ -gerbe, où $k_{\bar{P}}$ désigne le corps des modules⁴ de \bar{P} . Le tosseur \bar{P} représente un point $\xi_{\bar{P}}$ du k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ obtenu à partir de la gerbe des G_X -torseurs sur X par image directe *via* le morphisme structural $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$. Ce champ joue le rôle de champ des modules grossiers pour les \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} , et on a une interprétation en termes de gerbe résiduelle pour $D(\bar{P})$. En utilisant la terminologie de Giraud, on peut également interpréter $D(\bar{P})$ comme une section au-dessus de l'ouvert $(\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow k)$ du faisceau des sous-gerbes maximales du k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$. Nous essayons d'expliquer le lien entre ces deux façons d'aborder les choses. Il nous semble que le diagramme commutatif ci-dessous résume assez bien la

⁴C'est la plus petite extension étale L de k telle que :

$$\sigma \bar{P} \approx \bar{P}, \forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/L).$$

situation :

$$\begin{array}{ccc}
 D(\bar{P}) & \xrightarrow{i} & \pi_* \text{Tors}(X, G_X) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow [\bullet] \\
 \text{Spec } k_{\bar{P}} & \xrightarrow{[\bar{P}]} & R^1 \pi_* G_X
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, on a noté :

- $\pi : D(\bar{P}) \rightarrow \text{Spec } k_{\bar{P}}$ le morphisme structural de la gerbe des modèles de \bar{P} ;
- $i : D(\bar{P}) \rightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ désigne le monomorphisme canonique (rendu explicite dans le chapitre 3) ;
- $[\bullet] : \pi_* \text{Tors}(X, G_X) \rightarrow R^1 \pi_* G_X$ est défini en envoyant une section du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$, *i.e.* un G_{X_L} -torseur $T_L \rightarrow X_L$ sur sa classe d'isomorphie $[T_L]$;
- enfin, le choix de \bar{P} donne naissance à un point de $R^1 \pi_* G_X$ à valeurs dans $\text{Spec } k_{\bar{P}}$; c'est ce point que nous avons noté $[\bar{P}]$.

CHAPITRE 4 : les espaces homogènes sur un corps sont un exemple de variétés pour lesquelles l'existence de points rationnels a été et est encore particulièrement étudié ; un problème source de nombreuses activités est celui de la validité du principe de Hasse. Plus précisément, il serait intéressant de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les espaces homogènes sous l'action d'un groupe linéaire G avec isotropie H . D'après Sansuc [Sa81], on sait déjà que c'est le cas pour les toseurs sous des groupes connexes (*i.e.* G connexe et $H = \{1\}$), et d'après Borovoi [Bo96] c'est aussi le cas pour des espaces homogènes sous des groupes connexes avec isotropie connexe, ou pour des espaces homogènes sous des groupes simplement connexes avec isotropie abélienne finie.

Pour fixer les idées, considérons un corps de nombres k , et H un sous-groupe de SL_n . L'obstruction à ce qu'un k -espace homogène V sous SL_n avec isotropie H possède un point k -rationnel est mesurée par une gerbe \mathcal{G} sur k , localement liée par H ; la neutralité de \mathcal{G} (*i.e.* l'existence d'un point k -rationnel sur \mathcal{G}) est équivalente à l'existence d'un point k -rationnel sur V . Or la même gerbe \mathcal{G} peut correspondre à plusieurs espaces homogènes. D'où l'idée, dans un souci d'économie, de travailler directement avec les gerbes plutôt qu'avec les espaces homogènes.

Dans ce chapitre, fruit d'un travail en commun avec Jean-Claude Douai et Michel Emsalem, on commence donc par définir l'obstruction de Brauer-Manin d'une gerbe⁵. On montre que pour tout k -espace homogène V sous SL_n (ou n'importe quel autre groupe semi-simple simplement connexe) avec isotropie finie, on a :

$$m_{\mathcal{H}}(V) = m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_V)$$

où \mathcal{G}_V est la gerbe des trivialisations de V (pour faire le lien avec les travaux de Springer, c'est aussi l'obstruction à ce que V soit dominé par un k -torseur sous SL_n ; mais un tel toseur est toujours trivial). On obtient, grâce à cette obstruction, une nouvelle interprétation du théorème de Tate-Poitou (quand H est abélien fini), et un "demi-théorème de Tate-Poitou" lorsque H est non-abélien fini.

⁵Pour des raisons techniques, on doit considérer des gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford, ce qui n'est pas gênant dans nos applications, puisque le cas intéressant est justement celui où l'isotropie est finie.

APPENDICES : avec le souci de prouver que les gerbes sont omniprésentes en Géométrie, nous montrons dans le premier appendice comment il est possible d'interpréter la classe de Chern d'un fibré en droites sur une variété analytique comme une gerbe, le but étant d'exhiber un exemple particulièrement *concret* de gerbe.

Le second appendice est consacré aux suites spectrales. Le texte est celui d'un exposé présenté en juin 2002 au séminaire GTEM (Galois Theory and Effective Methods) de l'Université de Lille, et dont l'objet était la présentation des suites spectrales les plus courantes, et de quelques-unes de leurs applications.

Grâce à Swinnerton-Dyer [Sw62] et Cassels et Guy [CG66] on connaît des exemples de surfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ qui sont des contre-exemples au principe de Hasse. En revanche, on ne connaît pas d'hypersurface de degré ≥ 4 allant à l'encontre de ce principe (sauf peut-être celle de Sarnak et Wang [SW95], qui tient sous la conjecture de Lang [La91] 1.2 p.179). Dans le dernier appendice, nous montrons que l'hypersurface de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{560}$ d'équation :

$$\sum_{i=1}^{560} X_i^{560} = 561.X_0^{560}$$

a des points p -adiques pour tout p , des points réels, et nous donnons des arguments qui peuvent nous laisser espérer qu'elle ne possède pas de point \mathbb{Q} -rationnel, ce qui nous amène à énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 6. *L'hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{560}$ d'équation :*

$$\sum_{i=1}^{560} X_i^{560} = 561.X_0^{560}$$

est un contre-exemple au principe de Hasse.

Notations

Etant donné un corps k , nous appellerons *k -groupe algébrique* un k -groupe algébrique linéaire, et *k -groupe algébrique réductif* un k -groupe algébrique réductif et connexe.

Pour tout corps k et tout k -schéma Y , nous noterons $Y(k)$ l'ensemble des points k -rationnels de Y . Pour toute extension L de k , $Y(L)$ désignera l'ensemble des points de Y à valeurs dans $\text{Spec } L$.

Si Y est un schéma et G un schéma en groupes (*resp.* un schéma en groupes abéliens) sur Y , nous noterons $H^0(Y, G)$ et $H^1(Y, G)$ (*resp.* $H^i(Y, G)$, $i \geq 0$) les ensembles (*resp.* les groupes) de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^0(Y, G)$ et $H_{\text{ét}}^1(Y, G)$ (*resp.* $H_{\text{ét}}^i(Y, G)$, $i \geq 0$), où G est identifié au faisceau de groupes qu'il représente sur le site étale de Y .

Soient k un corps de caractéristique nulle, \bar{k} une clôture algébrique de k , $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma, et G un k -groupe algébrique. Soit encore $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur ($\bar{G}_X = (G \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}) \times_{\text{Spec } \bar{k}} \bar{X}$). Nous dirons que ce tosseur est de *corps des modules k* lorsque $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ représente une classe de $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ (notons que cette appellation représente un abus par rapport à la définition usuelle de corps des modules dans la théorie des revêtements; avec celle-ci en effet, la condition $[\bar{P}] \in H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ assure seulement que le corps des modules de $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est *inclus* dans k).

Lorsque \mathcal{C} est une catégorie, nous noterons $\text{Ob}(\mathcal{C})$ la classe de ses objets. Etant donnés deux objets A et B de \mathcal{C} , nous noterons $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ la classe des morphismes (ou des flèches) de \mathcal{C} entre A et B . Si de plus \mathcal{C} est un groupoïde, $\text{Isom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ désignera la classe des isomorphismes de \mathcal{C} entre A et B . Nous conviendrons que la catégorie vide est un groupoïde. Enfin, nous noterons \mathbf{Ens} (*resp.* \mathbf{Gr} , *resp.* \mathbf{Ab} , *resp.* $\mathbf{FAGR}(Y)$, *resp.* $\mathbf{FAGRAB}(Y)$) la catégorie des ensembles (*resp.* des groupes, *resp.* des groupes abéliens, *resp.* des faisceaux de groupes sur le site étale de Y , *resp.* des faisceaux de groupes abéliens sur le site étale de Y).

Chapitre 1

Champs et gerbes

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions de site et de topos, qui fournissent une généralisation de la notion d'espace topologique. Cette généralisation permet comprendre pourquoi les problèmes évoqués dans l'introduction (descente de toseurs ou de revêtements, banalisation d'une algèbre d'Azumaya, . . .) sont de même nature, dans le sens où on peut tous les interpréter comme des problèmes de recollement, moyennant le choix d'un site idoine.

Notons tout de suite que nous nous réduirons très vite en pratique au site étale d'un schéma (qui sera d'ailleurs souvent le site étale d'un corps). Cette restriction est motivée d'une part par le fait que notre problème central apparaît naturellement comme un problème de descente sur le site étale d'un corps, et d'autre part parce que la manipulation des champs et des gerbes est assez délicate et lourde sur des sites généraux.

On dispose sur les sites (et sur les topoï, qui sont des sites particuliers) des mêmes objets et outils que sur les espaces topologiques. En particulier, on a une notion de faisceau, et la deuxième section est consacrée à l'étude de faisceaux particuliers : les toseurs (sur le site étale d'un schéma), qui jouent un des premiers rôles dans ce travail. Les exemples de toseurs sont nombreux "dans la nature", aussi bien en Géométrie Algébrique (*e.g.* : les fibrés vectoriels de rang n sur une variété algébrique X "sont" les $GL_{n,X}$ -torseurs¹ sur le site de Zariski de X) qu'en Arithmétique (*e.g.* : les algèbres simples centrales d'indice n sur un corps K "sont" les PGL_n -torseurs sur le site étale de K). Après avoir rappelé quelques-unes de leurs propriétés, nous constaterons avec dépit le manque de structure de l'ensemble des classes d'isomorphie de G -torseurs, lorsque G n'est pas abélien. Ce manque de structure peut toutefois être partiellement comblé en symétrisant la situation, *via* les bitorseurs. En anticipant un peu, disons que les bitorseurs sont particulièrement bien adaptés à notre problème central, puisque, dans un sens que nous préciserons dans le chapitre III, ils permettent de "ne pas perdre d'informations".

Munis de ces outils, on peut enfin donner la notion de gerbe, dont nous verrons qu'elle est très fortement liée à celles de toseur et de bitorseur. Il est impossible de parler de gerbes sans évoquer les champs, ce qui justifie les rappels sur les catégories fibrées, les préchamps. . . Pour avoir un premier aperçu de ce que peuvent être les gerbes, nous décrivons ensuite celles qui sont associées aux divers problèmes évoqués dans l'introduction. Enfin, nous rappelons les définitions de lien et de 2-cohomologie à valeurs dans un lien.

¹Ce n'est pas tout-à fait vrai : pour être précis, le même ensemble $H^1(X, GL_{n,X})$ peut être interprété soit comme l'ensemble des classes d'isomorphie de $GL_{n,X}$ -torseurs sur X , soit comme l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de rang n sur X .

Dans leur écrasante majorité, les propriétés concernant les gerbes que nous rappelons ici sont issues de [Gi66] et [Gi71], mais elles sont peut-être rendues un peu plus explicites par notre choix de sites particuliers.

1.1 Sites et topoi

Comme nous venons de le signaler, les sites (et les topoi) généralisent les espaces topologiques². Grossièrement, un site est une catégorie munie d'une topologie, et plus précisément :

Définition 1.1.1. *Soit \mathcal{C} une catégorie. Pour tout objet U de \mathcal{C} , on se donne des familles de morphismes, et on note $\text{Cov}(\mathcal{C})$ la réunion de ces familles. On dit que $\text{Cov}(\mathcal{C})$ est une **topologie de Grothendieck** si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(TG 1) *Si $U \xrightarrow{\phi} V$ est un isomorphisme, alors $\phi \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.*

(TG 2) *(Caractère local). Si $(T_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} T)_\alpha$ est une famille dans $\text{Cov}(\mathcal{C})$, et si pour tout indice α , $(U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} T_\alpha)_\beta$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, alors la famille*

$$\left(U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta}} T \right)_{\alpha\beta}$$

obtenue “par composition”, appartient à $\text{Cov}(\mathcal{C})$.

(TG 3) *(Stabilité par changement de base). Si $(T_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} T)_\alpha$ est une famille dans $\text{Cov}(\mathcal{C})$, et si V est un objet de \mathcal{C} sur³ T , alors les produits fibrés $T_\alpha \times_T V$ existent dans \mathcal{C} , et la famille*

$$((\phi_\alpha)_V : T_\alpha \times_T V \rightarrow V)_\alpha$$

appartient à $\text{Cov}(\mathcal{C})$.

*On appelle **site** une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.*

Exemple 1.1.2. Le site \mathcal{Ouv}_X associé à un espace topologique X : on note \mathcal{Ouv} la catégorie dont les objets sont les ouverts de X , et dont les morphismes sont les inclusions. On choisit pour tout ouvert U de X la famille de toutes les familles d'ouverts $(V_i \hookrightarrow U)_{i \in I}$ dont la réunion est égale à U . On note $\text{Cov}(\mathcal{Ouv})$ la réunion de toutes ces familles ; alors $\text{Cov}(\mathcal{Ouv})$ est une topologie de Grothendieck sur \mathcal{Ouv} ; en effet, les trois propriétés de la définition se traduisent dans cet exemple de la façon suivante :

(TG 1) Le singleton $\left\{ U \xrightarrow{id} U \right\}$ constitue un recouvrement ouvert de U ;

²Afin d'illustrer cette affirmation, citons Grothendieck ([Gr58], p.301) : “[...]la notion de topos, dérivé naturel du point de vue faisceautique en Topologie, constitue un élargissement substantiel de la notion d'espace topologique, englobant un grand nombre de situations qui autrefois n'étaient pas considérées comme relevant de l'intuition topologique. Le trait caractéristique de telles situations est qu'on y dispose d'une notion de “localisation”, notion qui est formalisée précisément par la notion de site et, en dernière analyse, par celle de topos[...]”.

³*I.e* : il existe un morphisme de domaine V et de codomaine T .

- (TG 2) “Un recouvrement ouvert d’un recouvrement ouvert est un recouvrement ouvert” ;
 (TG 3) Si $(U_\alpha)_\alpha$ est un recouvrement ouvert d’un ouvert U , et si V est un ouvert inclus dans U , alors⁴ $(U_\alpha \cap V)_\alpha$ est un recouvrement ouvert de V .

Par suite $\mathcal{Ouv}_X = (\mathcal{Ouv}, \text{Cov}(\mathcal{Ouv}))$ est un site. En particulier, si on prend pour espace topologique X un schéma, muni de la topologie de Zariski, on obtient le *site de Zariski* de X , noté X_{Zar} .

Exemple 1.1.3. Le site (Sch) : c’est la catégorie des schémas, munie de la topologie de Grothendieck pour laquelle une famille $(S_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} S)_\alpha$ est couvrante (*i.e.* est dans $\text{Cov}(Sch)$) si et seulement si elle est surjective. Il est de nouveau immédiat (moyennant l’existence du produit fibré dans la catégorie des schémas, qui elle, n’est pas immédiate, *cf.* [EGA1] 3.2.1. . .) que les propriétés (TG 1), (TG 2) et (TG 3) sont vérifiées.

Exemple 1.1.4. Le site $S_{\text{ét}}$ des schémas étales sur un schéma S : c’est la catégorie (Et/S) des S -schémas étales (S étant un schéma quelconque), munie de la topologie de Grothendieck pour laquelle une famille de morphismes étales est couvrante si et seulement si elle est surjective. Les propriétés (TG 1), (TG 2) et (TG 3) sont vérifiées, car l’identité est un morphisme étale, et le caractère étale est stable par composition et par changement de base (*cf.* [Mi80] proposition I.3.3). On appelle ce site le *site étale* de S , et on le note $S_{\text{ét}}$.

Dans le cas particulier où S est le spectre d’un corps k , on obtient le site étale de k : un objet de $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$ est une k -algèbre étale, c’est-à-dire une k -algèbre isomorphe à un produit d’extensions séparables finies de k .

Définition 1.1.5. Soient $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ et $\mathcal{S}' = (\mathcal{C}', \text{Cov}(\mathcal{C}'))$ deux sites. On appelle **morphisme de sites** la donnée d’un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) Si $(U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} U)_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, alors $(F(U_\alpha) \xrightarrow{F(\phi_\alpha)} F(U))_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C}')$;
 (ii) Si $(U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} U)_\alpha$ est une famille de $\text{Cov}(\mathcal{C})$ et si $V \rightarrow U$ est un morphisme (dans la catégorie \mathcal{C}), alors le morphisme canonique :

$$F(U_\alpha \times_U V) \longrightarrow F(U_\alpha) \times_{F(U)} F(V)$$

est un isomorphisme pour tout indice α .

Exemple 1.1.6. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit évidemment un morphisme de sites :

$$F : \mathcal{Ouv}_Y \longrightarrow \mathcal{Ouv}_X$$

le foncteur F associant à un ouvert $U \subset Y$ (*resp.* à l’inclusion $V \hookrightarrow U \subset Y$) l’ouvert $f^{-1}(U) \subset X$ (*resp.* l’inclusion $f^{-1}(V) \hookrightarrow f^{-1}(U) \subset X$).

⁴Dans cette catégorie, le produit fibré n’est autre que l’intersection.

Exemple 1.1.7. Soit $f : Y \rightarrow S$ un morphisme de schémas. On peut lui associer un morphisme de sites (cf. [SGA4-VII] 1.4) :

$$f_{\text{ét}} : S_{\text{ét}} \longrightarrow Y_{\text{ét}}$$

défini en associant à un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ de S l'ouvert étale de Y obtenu par changement de base :

$$Y \times_S S' \longrightarrow Y$$

Définition 1.1.8. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ un site. On appelle **préfaisceau** d'ensembles (resp. de groupes, ...) sur \mathcal{S} un foncteur :

$$\mathcal{P} : \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathbf{Ens} \text{ (resp. } \mathbf{Grp}, \dots)$$

On appelle **faisceau** d'ensembles (resp. de groupes, ...) sur \mathcal{S} un préfaisceau satisfaisant la condition suivante : pour toute famille $(U_\alpha \rightarrow U)_\alpha$ de $\text{Cov}(\mathcal{C})$, le diagramme :

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \mathcal{F}(U_\alpha \times_U U_\beta)$$

est exact.

Exemple 1.1.9. Dans la situation usuelle où X est un espace topologique, un faisceau d'ensembles au sens usuel sur X est un faisceau d'ensembles sur le site Ouv_X (cf. exemple 1.1.2).

Nous donnons maintenant quelques exemples de faisceaux que nous utiliserons dans les applications. Il s'agit de faisceaux sur le site étale d'un schéma S ; pour plus de détails concernant les propriétés de ces faisceaux, nous renvoyons à [Mi80] ou [Tam94].

Exemple 1.1.10. Le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$: c'est le faisceau dont le groupe des sections au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, noté simplement $\mathbb{G}_{a,S}(S')$ est :

$$\mathbb{G}_{a,S}(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}) = \mathcal{O}_{S'}(S')$$

Le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$ est appelé le *groupe additif* de S .

Exemple 1.1.11. Le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est le faisceau dont le groupe des sections au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, noté $\mathbb{G}_{m,S}(S')$ est cette fois constitué des fonctions inversibles définies globalement sur S' :

$$\mathbb{G}_{m,S}(S') = \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}^*) = \mathcal{O}_{S'}^*(S')$$

Le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est appelé le *groupe multiplicatif* de S .

Exemple 1.1.12. Le faisceau $\mu_{n,S}$ est le faisceau des racines n -ièmes de l'unité. Les sections de celui-ci au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ sont données par :

$$\mu_{n,S}(S') = \{f \in \mathcal{O}_{S'}^*(S') / f^n = 1\}$$

Exemple 1.1.13. On peut associer à tout S -schéma Y un faisceau, noté temporairement \mathcal{F}_Y , de la manière suivante : pour tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, on prend comme sections de \mathcal{F}_Y :

$$\mathcal{F}_Y(S') = \text{Hom}_S(S', Y)$$

Un faisceau \mathcal{F} sur $S_{\text{ét}}$ est dit *représentable* s'il existe un S -schéma Y tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y$. Les trois précédents exemples de faisceaux sont justement représentables :

- le faisceau $\mathbb{G}_{a,S}$ est représenté par le schéma :

$$\text{Spec } \mathbb{Z}[T] \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

- le faisceau $\mathbb{G}_{m,S}$ est représenté par le schéma :

$$\text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}] \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

- et enfin, le faisceau $\mu_{n,S}$ est représenté par le schéma :

$$\text{Spec } \left(\frac{\mathbb{Z}[T]}{(T^n - 1)} \right) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} S$$

Dans nos applications, nous considèrerons un k -groupe algébrique G , et un k -schéma X . Nous noterons G_X le produit fibré de X et de G au-dessus de $\text{Spec } k$:

$$\begin{array}{ccc} G_X & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } k \end{array}$$

D'après ce qui précède, le k -groupe algébrique G (*resp.* le X -schéma en groupes G_X) représente un faisceau sur le site étale de k (*resp.* de X). Nous identifierons souvent G et G_X avec les faisceaux qu'ils représentent.

On dispose évidemment d'une notion de morphisme de (pré)faisceaux au-dessus d'un site \mathcal{S} donné. Il est non moins évident que les faisceaux d'ensembles sur \mathcal{S} et les morphismes entre iceux constituent une catégorie, que l'on note $\tilde{\mathcal{S}}$.

Nous concluons cette première section en introduisant la notion de topos [SGA4-IV] :

Définition 1.1.14. On appelle **topos** une catégorie \mathcal{T} telle qu'il existe un site \mathcal{S} telle que \mathcal{T} soit équivalente à la catégorie $\tilde{\mathcal{S}}$ des faisceaux d'ensembles sur \mathcal{S} .

Le principal topos auquel nous nous intéresserons dans ce travail est le *topos étale* d'un schéma S , noté $\tilde{S}_{\text{ét}}$: c'est le topos des faisceaux d'ensembles sur le site étale de S . Nous renvoyons à [SGA4-VII] pour une étude approfondie des topoi étales des schémas. Faisons juste une remarque “fonctorielle” : soit :

$$f : Y \longrightarrow S$$

un morphisme de schémas. On a vu dans l'exemple 1.1.7 que f induit un morphisme de sites :

$$f_{\text{ét}} : Y_{\text{ét}} \longrightarrow S_{\text{ét}}$$

correspondant au foncteur :

$$f^{-1} : (S' \rightarrow S) \rightsquigarrow (Y \times_S S' \rightarrow Y)$$

qui associe à un ouvert étale de S l'ouvert étale de Y obtenu par changement de base. Alors f induit également un morphisme entre les topos étales de Y et de S :

$$\tilde{f}_{\text{ét}} : \tilde{Y}_{\text{ét}} \longrightarrow \tilde{S}_{\text{ét}}$$

Le morphisme $\tilde{f}_{\text{ét}}$ associe à tout faisceau d'ensembles sur le site étale de Y le faisceau sur le site étale de S obtenu par image directe grâce à f .

Notation 1.1.15. Dans nos applications, le schéma de base S sera souvent X ou $\text{Spec } k$. Pour alléger un peu la terminologie, nous dirons simplement, lorsque le contexte est clair, “faisceau sur X (*resp.* sur k)” au lieu de “faisceau d'ensembles sur le site étale de X (*resp.* de $\text{Spec } k$)”. D'ailleurs, plus généralement nous parlerons de préchamp, champ, gerbe... sur un schéma S (*resp.* sur un corps k) pour désigner un préchamp, un champ, une gerbe... sur le site étale de S (*resp.* sur le site étale de $\text{Spec } k$).

1.2 Torseurs

Nous nous limitons aux toseurs sur le site étale d'un schéma et nous renvoyons au chapitre III de [Gi71] pour l'étude des toseurs sur un site général.

Définition 1.2.1. Soient S un schéma et G_S un schéma en groupes sur S . Un G_S -**torseur** à droite sur S est un faisceau P sur S , muni d'une action à droite du faisceau de groupes G_S , tel que :

il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que l'ensemble $P(S_i)$ soit principal homogène sous l'action du groupe $G_S(S_i)$, pour tout $i \in I$.

Un **morphisme** $\varphi : P \rightarrow P'$ de G_S -torseurs est un morphisme de faisceaux G_S -équivariant. Etant donné un G_S -torseur P , on note :

$$\text{ad}_{G_S}(P)$$

le faisceau des automorphismes du G_S -torseur P .

Enfin on note :

$$\text{EHP}(G_S/S)$$

l'ensemble des classes d'isomorphie de G_S -torseurs sur S .

Remarque 1.2.2. Rappelons que d'après nos conventions et notations :

- $P(S_i)$ (*resp.* $G_S(S_i)$) désigne l'ensemble (*resp.* le groupe) des sections du faisceau P (*resp.* G_S) au-dessus de l'ouvert étale $(S_i \rightarrow S)$;
- le S -schéma en groupes G_S est identifié au faisceau de groupes qu'il représente ;
- la locution “ P est un faisceau sur S ” est mise pour “ P est un faisceau d'ensembles sur le site étale de S ”.

Remarque 1.2.3. On peut évidemment définir de la même manière les G_S -torseurs à gauche. Notons que par la suite, nous appellerons simplement G_S -torseur un G_S -torseur à droite. Les G_S -torseurs sur S et leurs morphismes constituent une catégorie, que l'on note $Tors(S, G_S)$.

Après cette définition “faisceutique” de toseur, notons que l'on dispose, moyennant des hypothèses très raisonnables sur le schéma G_S , d'une interprétation géométrique de ces objets. Plus précisément :

Proposition 1.2.4. *Soit S un schéma, et G_S un schéma en groupes affine sur S . Alors tout G_S -torseur sur S est représentable par un schéma.*

PREUVE : c'est le (a) du théorème III.4.3 de [Mi80].

□

En particulier, dans la situation de notre problème central (*cf.* page XI), les G_X -torseurs sont représentables. En effet, du fait que G est un k -groupe algébrique linéaire, le morphisme structural :

$$G \longrightarrow \text{Spec } k$$

est affine. Il s'ensuit que le morphisme :

$$G_X \longrightarrow X$$

l'est aussi, le caractère affine étant stable par changement de base quelconque (*cf.* [EGA1] I.9.1.16).

Donnons maintenant quelques exemples de toseurs :

Exemple 1.2.5. Etant donné un schéma S et un S -schéma en groupes G_S , on appelle G_S -torseur *trivial* et on note $G_{S,d}$ le G_S -torseur obtenu en faisant opérer G_S sur lui-même à droite par translations. Par définition même, tout G_S -torseur est isomorphe à $G_{S,d}$, localement pour la topologie étale sur S . En continuant d'enfoncer des portes ouvertes, il s'ensuit que deux G_S -torseurs sont toujours localement isomorphes pour la topologie étale.

Exemple 1.2.6. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on peut associer naturellement à tout G_S -torseur (à droite) P un $\text{ad}_{G_S}(P)$ -torseur à gauche, le faisceau des automorphismes (G_S -équivariants) de P opérant à gauche sur P de manière évidente. Nous reviendrons sur cette remarque dans la section concernant les bitorseurs.

Exemple 1.2.7. Les classes d'isomorphie de $\mathbb{G}_{m,S}$ -torseurs (*resp.* de $GL_{n,S}$ -torseurs) sur S coïncident avec les classes d'isomorphie de fibrés en droites (*resp.* de fibrés vectoriels de rang n) sur S .

Exemple 1.2.8. Soient n un entier ≥ 2 et k un corps quelconque. On peut associer au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un faisceau de groupes sur la droite projective \mathbb{P}_k^1 (faisceau constant). Un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -torseur sur \mathbb{P}_k^1 est alors un revêtement étale de la droite projective de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

En vue de nos applications, il est évidemment indispensable de disposer d'un moyen de calculer pratiquement l'ensemble EHP (G_S/S). Ce moyen est fourni par l'énoncé ci-dessous, qui est un cas particulier du corollaire III.4.7 de [Mi80] :

Proposition 1.2.9. Soient k un corps de caractéristique nulle, G un k -groupe algébrique linéaire, et X un k -schéma. Alors les ensembles EHP (G_X/X) et $H_{\text{ét}}^1(X, G_X)$ sont en bijection.

L'exemple ci-dessous est une application de cette proposition aux algèbres simples centrales et aux variétés de Severi-Brauer.

Exemple 1.2.10. Soit S un schéma. Rappelons que l'on appelle algèbre d'Azumaya sur S un faisceau de \mathcal{O}_S -algèbres \mathcal{A} , pour lequel il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ de S tel que pour tout $i \in I$, il existe un entier n_i tel que :

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_i} \approx M_{n_i}(\mathcal{O}_{S_i})$$

Il revient au même (d'après le thm. 5.1 p.57 de [Gr68]) de dire que \mathcal{A} est une \mathcal{O}_S -algèbre localement libre telle que :

- (i) pour tout point s de S , $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)$ est une algèbre simple centrale ;
- (ii) le morphisme naturel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}^{\text{opp}} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme de \mathcal{O}_S -algèbres.

Nous appellerons algèbre d'Azumaya d'indice n une algèbre d'Azumaya pour lesquels tous les n_i de la définition ci-dessus sont égaux à n . Qu'une algèbre d'Azumaya d'indice n sur un schéma S soit un $PGL_{n,S}$ -torseur sur S découle de l'énoncé suivant, qui généralise aux schémas le lemme de Skolem-Noether :

Théorème 1.2.11 (Auslander-Goldman, [Gr68]). Soit \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya sur S , u un automorphisme de \mathcal{A} . Alors, localement pour la topologie étale, u est intérieur, i.e. de la forme :

$$u(s) = asa^{-1}$$

où a est une section inversible de \mathcal{A} , déterminée d'ailleurs de façon unique modulo multiplication par une section de \mathcal{O}_S^* . De manière équivalente, le schéma des automorphismes de l'algèbre associative $M_n(\mathcal{O}_S)$ est canoniquement isomorphe au groupe projectif $PGL_{n,S}$.

Dans le cas particulier où $S = \text{Spec } k$, on retrouve la définition d'algèbre simple centrale : une algèbre d'Azumaya d'indice n sur k est une algèbre simple centrale d'indice n , soit une k -forme de l'algèbre de matrices M_n . D'après la proposition 1.2.8, l'ensemble des classes d'isomorphie de k -algèbres simples centrales est en bijection avec l'ensemble $H_{\text{ét}}^1(k, PGL_n)$. Remarquons alors que les multiples facettes de PGL_n fournissent des interprétations différentes de cet ensemble. Explicitement, comme :

$$PGL_n = \text{Aut } M_n = \text{Int } SL_n = \text{Aut } \mathbb{P}^{n-1}$$

on en déduit une correspondance entre les k -formes de M_n , celles de \mathbb{P}^{n-1} et les k -formes intérieures de SL_n :

$$\begin{array}{c} \{k\text{-algèbres simples centrales d'indice } n\} \\ \updownarrow \\ \{k\text{-formes intérieures de } SL_n\} \\ \updownarrow \\ \{\text{Variétés de Severi-Brauer de dimension } n-1\} \end{array}$$

Exemple 1.2.12. Suivant la remarque 2.1 de [SGA4-VII], lorsque G est un groupe commutatif ordinaire (*i.e.* G est un faisceau constant), on écrira simplement $H^1(X, G)$ au lieu de $H^1(X, G_X)$. Si par exemple G est abélien fini, alors $H^1(X, G)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de G -revêtements galoisiens, pour lesquels les problèmes de descente ont été largement étudiés dans [DD87] et [DD97]. Lorsque X est connexe et muni d'un point géométrique x , on a l'isomorphisme canonique :

$$H^1(X, G) = \text{Hom}(\Pi_1(X, x), G)$$

Exemple 1.2.13. Pour faire le lien avec la terminologie de Springer ([Sp66]), disons encore que si G est un k -groupe algébrique, les G -torseurs sur k sont évidemment des k -espaces homogènes avec isotropie triviale.

Le résultat suivant, qui concerne les faisceaux d'automorphismes des toseurs, est assez évident mais d'une importance capitale pour comprendre la différence entre les chapitres 2 et 3 (*i.e.* entre les situations abélienne et non-abélienne) :

Lemme fondamental 1.2.14. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -torseur sur S . Alors $\text{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit :*

$$\text{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \text{Int } G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors :

$$\text{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

PREUVE : par définition, il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)$ trivialisant P . On choisit alors une section p_i de $P|_{S_i}$, pour tout $i \in I$.

Pour tout $(i, j) \in I \times I$, on note S_{ij} le schéma $S_i \times_S S_j$. Du fait que l'action de $G_S|_{S_{ij}}$ sur $P|_{S_{ij}}$ est simplement transitive⁵, il existe $\gamma_{ij} \in G_S(S_{ij})$ tel que :

$$p_j|_{S_{ij}} = p_i|_{S_{ij}} \cdot \gamma_{ij}$$

⁵Cet abus de langage signifie en fait que le groupe $G_S(S')$ opère simplement transitivement (à droite, d'après nos conventions sur les toseurs) sur l'ensemble $P(S')$, pour tout S_{ij} -schéma étale S' .

(la famille $(\gamma_{ij})_{i,j}$ est justement un 1-cocycle représentant la classe de P dans $H^1(S, G_S)$). Afin de ne pas surcharger les notations, nous abandonnons à partir de maintenant les indices “ $|_{S_{ij}}$ ”. Nous réécrivons donc l'égalité précédente :

$$p_j = p_i \cdot \gamma_{ij} \quad (E1)$$

Soit maintenant f un automorphisme de P . Comme f est G_S -équivariante :

$$\exists g_i \in G_S(S_i) \text{ tel que : } f(p_i) = p_i \cdot g_i, \forall i \in I.$$

Pour tout $(i, j) \in I \times I$, on obtient, en utilisant la relation (E1) :

$$f(p_j) = p_j \cdot g_j = p_i \cdot \gamma_{ij} g_j \quad (E2)$$

D'autre part en utilisant la relation (E2) et la G_S -équivariance de f , on a :

$$f(p_j) = f(p_i \cdot \gamma_{ij}) = f(p_i) \cdot \gamma_{ij} = p_i \cdot g_i \gamma_{ij} \quad (E3)$$

En comparant les relations (E2) et (E3) et en utilisant une nouvelle fois la simple transitivité de l'action, on obtient :

$$g_i \gamma_{ij} = \gamma_{ij} g_j$$

soit finalement :

$$g_i = \gamma_{ij} g_j \gamma_{ij}^{-1} = \text{conj}(\gamma_{ij})(g_j)$$

Notons tout de suite qu'il est immédiat que la famille $(\text{conj}(\gamma_{ij}))_{i,j}$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\text{Int } G_S$, puisque $(\gamma_{ij})_{i,j}$ est un 1-cocycle à valeurs dans G_S .

De plus, la relation ci-dessus traduit le fait que le faisceau $\text{ad}_{G_S}(P)$ est la donnée des faisceaux locaux $G_S|_{S_i}$ recollés au-dessus des S_{ij} par les automorphismes intérieurs $\text{conj}(\gamma_{ij})$. Autrement dit, c'est une S -forme intérieure de G_S .

□

Dans la suite, nous aurons besoin de connaître l'influence d'un morphisme de schémas (plus précisément l'influence du morphisme structural $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$) sur les toiseurs ; c'est l'intérêt de l'énoncé suivant :

Lemme 1.2.15. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural, G un k -groupe algébrique linéaire, et P (resp. Q) un G_X -toiseur (resp. un G -toiseur) sur X (resp. sur $\text{Spec } k$). Alors :*

- (i) *le faisceau image directe $\pi_* P$ est un $\pi_* G_X$ -pseudo-toiseur sur $\text{Spec } k$;*
- (ii) *si $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$, alors $\pi_* P$ est un G -pseudo-toiseur sur $\text{Spec } k$;*
- (iii) *le faisceau image inverse $\pi^* Q$ est un $\pi^* G$ -toiseur sur X .*

PREUVE : pour le point (i), il suffit de prouver que pour toute extension étale L de k , l'ensemble $\pi_* P(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ est vide ou principal homogène sous l'action du groupe $\pi_* G_X(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$. Ceci provient du fait que l'ensemble :

$$\pi_* P(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) = P(X_L \rightarrow X) = \text{Hom}_X(X_L, P)$$

est vide ou principal homogène sous le groupe :

$$\pi_* G_X (\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) = G_X (X_L \rightarrow X) = \text{Hom}_X (X_L, G_X)$$

car P est un G_X -torseur sur X .

Pour établir le point (ii), il suffit de comparer les faisceaux (sur $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$) $\pi_* G_X$ et G ; pour ce faire, il suffit d'étudier leurs fibres $(\pi_* G_X)_{\bar{k}}$ et $G_{\bar{k}}$. Par définition :

$$(\pi_* G_X)_{\bar{k}} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ L}} [G_X (X_L \rightarrow X)] = \text{Hom}_X (\bar{X}, G_X)$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales L de k . De la même façon :

$$(G)_{\bar{k}} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ L}} [G (\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)] = \text{Hom}_k (\text{Spec } \bar{k}, G)$$

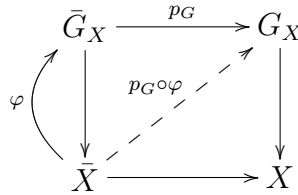
Par conséquent, les faisceaux $\pi_* G_X$ et G sont isomorphes si et seulement si :

$$\text{Hom}_X (\bar{X}, G_X) = \text{Hom}_k (\text{Spec } \bar{k}, G)$$

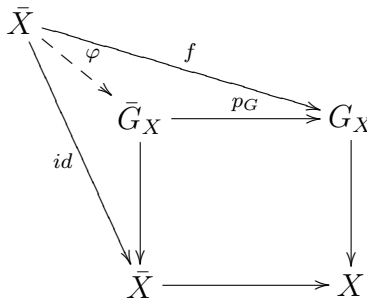
Cette dernière condition est équivalente à :

$$[\text{Hom}_{\bar{X}} (\bar{X}, \bar{G}_X) =] \quad \bar{G}_X (\bar{X}) = \bar{G} (\bar{k}) \quad [= \text{Hom}_{\bar{k}} (\text{Spec } \bar{k}, \bar{G})]$$

En effet, les ensembles $\text{Hom}_X (\bar{X}, G_X)$ et $\text{Hom}_{\bar{X}} (\bar{X}, \bar{G}_X)$ sont naturellement en bijection; à tout élément $\varphi \in \text{Hom}_{\bar{X}} (\bar{X}, \bar{G}_X)$ on associe l'élément $p_G \circ \varphi$ de $\text{Hom}_X (\bar{X}, G_X)$:



Réciproquement, on peut associer à tout $f \in \text{Hom}_X (\bar{X}, G_X)$ le morphisme (dont l'existence est assurée par la propriété universelle du produit fibré) $\varphi \in \text{Hom}_{\bar{X}} (\bar{X}, \bar{G}_X)$ du diagramme ci-dessous :



Le point (iii) est évident, à partir du moment où l'on a remarqué que comme G est linéaire, le G -torseur Q est représentable par un schéma, que l'on note encore Q , et le faisceau π^*Q est alors représenté par le X -schéma π^*Q d'après la proposition II.3.1.3 de [Tam94].

□

Remarque 1.2.16. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur l'utilité de la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ dans les problèmes de descente.

Remarque 1.2.17. Avec les notations du lemme précédent, il n'est en général pas vrai que le faisceau image inverse π^*G est représenté par le schéma en groupes G_X . C'est cependant le cas si G est un groupe fini, d'après la remarque 3.1.(d) page 69 de [Mi80].

1.3 Bitorseurs

Lorsque l'on veut étudier les G_S -torseurs sur un schéma S , il est essentiel de connaître leurs faisceaux d'automorphismes. Dans le cas abélien, d'après le lemme 1.2.13, il n'y a rien à faire. En revanche dans le cas général, d'après le même lemme, ces faisceaux sont des formes intérieures de G_S , et il convient donc de tenir compte de cette information supplémentaire. C'est ce qui motive l'introduction des bitorseurs⁶. Comme d'habitude, nous nous restreignons ici aux bitorseurs sur un schéma, et nous renvoyons à [Br90] pour la définition de bitorseur sur un topos en général.

Définition 1.3.1. Soient S un schéma, G_S et H_S deux schémas en groupes sur S . On appelle (H_S, G_S) -**bitorseur sur S** un faisceau d'ensembles B sur le site étale de S muni d'une action à gauche (resp. à droite) de H_S (resp. de G_S), ces actions commutant entre elles, tel que B soit un H_S -torseur à gauche et un G_S -torseur à droite.

Lorsque $G_S = H_S$, nous dirons simplement G_S -bitorseur pour désigner un (G_S, G_S) -bitorseur.

Soient B_1 et B_2 deux (H_S, G_S) -bitorseurs sur S . Un **morphisme** de (H_S, G_S) -bitorseurs est morphisme de faisceaux d'ensembles $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ qui est (H_S, G_S) -équivariant.

Les (H_S, G_S) -bitorseurs (resp. les G_S -bitorseurs) sur S et leurs morphismes constituent une catégorie, notée :

$$\text{Bitors}(S; H_S, G_S) \quad (\text{resp. } \text{Bitors}(S; G_S))$$

Exemple 1.3.2. Le G_S -bitorseur *trivial*, noté $G_{S, \text{bitriv}}$, est obtenu en faisant opérer G_S sur lui-même par translations à gauche et à droite.

⁶C'est également ce qui justifie le fait qu'il est désespéré d'arriver à une généralisation vraiment "idéale" de la suite à 5 termes dans le cas non-abélien avec les " H^1 " usuels; puisque par exemple l'ensemble $H_{\text{ét}}^1(S, G_S)$ correspond certes aux classes d'isomorphie de G_S -torseurs sur S , mais oublie délibérément la structure à gauche de ces objets.

Exemple 1.3.3. Soit u un automorphisme de G_S . On lui associe le G_S -bitorseur noté (G_S, u) , défini en faisant opérer G_S sur lui-même :

- à droite par translations ;
- à gauche en posant : $g \bullet_{gauche} g' = u(g) \cdot g'$

Exemple 1.3.4. A tout G_S -bitorseur, on associe naturellement un G_S -torseur en “oubliant” l’action de G_S à gauche. Réciproquement, à tout G_S -torseur P , on associe un $(ad_{G_S}(P), G_S)$ -bitorseur en faisant opérer à gauche $ad_{G_S}(P)$ sur P de façon évidente.

Exemple 1.3.5. A tout (H_S, G_S) -bitorseur B on peut associer un (G_S, H_S) -bitorseur noté B^{opp} et appelé *bitorseur opposé* à B , la nouvelle action à gauche (resp. à droite) de G_S (resp. de H_S) étant définie en posant :

$$g \square b = b \bullet g^{-1} \quad (\text{resp. } b \boxtimes h = h * b), \quad \forall g \in G_S, \forall h \in H_S, \forall b \in B;$$

où \bullet (resp. $*$) désigne l’action à droite (resp. à gauche) de G_S (resp. de H_S) donnée par la structure de (H_S, G_S) -bitorseur de B .

Remarque 1.3.6. Pour classifier les bitorseurs, on doit introduire la cohomologie à valeurs dans les modules croisés. On appelle *module croisé* (à gauche) sur S la donnée d’un morphisme de schémas en groupes sur S :

$$\varphi : G_S \longrightarrow H_S$$

et d’une action à gauche de H_S sur G_S tels que :

- (i) $\varphi(hg) = h \cdot \varphi(g) \cdot h^{-1}, \forall g \in G_S, \forall h \in H_S;$
- (ii) $\varphi(g)g' = g \cdot g' \cdot g^{-1}, \forall g, g' \in G_S;$

Par exemple, pour tout schéma en groupes G_S sur S , le morphisme évident :

$$conj : G_S \longrightarrow \text{Aut } G_S$$

et l’action naturelle de $\text{Aut } G_S$ sur G_S donnent lieu à un module croisé sur S . De plus, dans [Br90] ou [Br92], Breen définit la cohomologie à valeurs dans ce module croisé $(G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$. Sans rentrer dans les détails de cette construction⁷, signalons juste que :

- $H^0(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$ correspond aux classes d’isomorphie de G_S -bitorseurs sur S , et
- $H^1(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$ correspond aux classes d’équivalence de gerbes sur S localement liées par G_S . En anticipant un peu, cet ensemble diffère du H^2 de Giraud, puisque deux gerbes équivalentes (et non lien G_S -équivalentes) donnent la même classe dans ce H^1 , et pas nécessairement dans le H^2 de Giraud.

⁷Que l’on peut d’ailleurs rapprocher de la cohomologie à valeurs dans un système de coefficients introduite dans [Do76].

La suite exacte (cf. [Br90]) suivante contient l'essentiel des propriétés des bitorseurs dont nous aurons besoin dans la suite de notre propos :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^0(\text{Int } G_S) & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
 H^0(G_S) & \xrightarrow{\text{conj.}} & H^0(\text{Aut } G_S) & \xrightarrow{b} & H^0(G_S \rightarrow \text{Aut } G_S) & \xrightarrow{AP} & \dots \\
 & & & & & & \\
 & & & & H^1(\text{Int } G_S) & & \\
 & & & & \nearrow & \searrow & \\
 \dots \rightarrow H^1(G_S) & \xrightarrow{\text{ad}_{G_S}} & H^1(\text{Aut } G_S) & & & & \\
 & & & & & & \searrow \lambda \\
 & & & & & & H^1(\text{Out } G_S)
 \end{array}$$

où l'on a noté $H^i(\bullet)$ l'ensemble de cohomologie $H^i(S, \bullet)$ et :

- $\text{conj.} : H^0(G_S) \rightarrow H^0(\text{Aut } G_S)$ est le morphisme évident ;
- pour tout $u \in H^0(\text{Aut } G_S)$, $b(u)$ est le bitorseur (G_S, u) de l'exemple 1.3.3 ;
- AP est le foncteur “amnésie partielle” qui associe à tout G_S -bitorseur B le G_S -torseur à droite sous-jacent ;
- pour tout G_S -torseur P , $\text{ad}_{G_S}(P)$ est comme d'habitude le faisceau des G_S -automorphismes de P (dans la preuve du lemme 1.2.13, nous avons explicitement décrit ce morphisme) ;
- enfin l'application :

$$\lambda : H^1(\text{Aut } G_S) \rightarrow H^1(\text{Out } G_S)$$

est celle qui associe à une forme de G_S le lien qu'elle représente ; remarquons l'image par λ d'une forme G'_S de G_S est égale à la classe privilégiée de $H^1(\text{Out } G_S)$ si et seulement si G'_S est une S -forme *intérieure* de G_S .

En particulier, si G_S est un schéma en groupes abéliens, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(\text{Aut } G_S) \rightarrow H^0(G_S \rightarrow \text{Aut } G_S) \rightarrow H^1(G_S) \rightarrow 0$$

Dans ce cas, les G_S -bitorseurs constituent une extension des G_S -torseurs par $\text{Aut } G_S$.

Pour clore cette section, notons que l'on dispose sur les bitorseurs une loi de composition partiellement définie, grâce au produit contracté. Plus explicitement :

Définition 1.3.7. Soient S un schéma, et G_S, H_S et L_S des schémas en groupes sur S . Soient encore B (resp. C) un (H_S, G_S) -bitorseur (resp. un (G_S, L_S) -bitorseur). On appelle **produit contracté de B et de C** , et on note :

$$B \wedge^{G_S} C$$

le faisceau $B \times C$ quotienté par la relation :

$$(b.g, c) = (b, g.c)$$

D'après [Br90], l'action à gauche (resp. à droite) de H_S (resp. de L_S) fait de $B \wedge^{G_S} C$ un (H_S, L_S) -bitorseur.

Le bitorseur trivial est l'élément neutre pour ce produit, et le produit contracté d'un bitorseur B avec son opposé B^{opp} est isomorphe au bitorseur trivial.

1.4 Préchamps et champs

Il est bien connu (par exemple grâce à [LMB00]) que les champs algébriques fournissent une généralisation de la notion de schéma. Ils apparaissent naturellement dans des problèmes de modules, où le foncteur que l'on étudie n'est pas représentable par un schéma, du fait de la présence d'automorphismes (voir par exemple l'étude des courbes de genre $g \geq 2$ sur un schéma S [DM69]). En clair, on ne peut obtenir un espace des modules fin qu'en "rigidifiant" la situation, par l'intermédiaire de structures supplémentaires (pour être un peu plus concret, cela se fait *via* les structures de niveau pour les variétés abéliennes). De la même manière, il est raisonnable de voir les champs en général (sur le site étale d'un schéma S) comme une généralisation des faisceaux d'ensembles sur S .

La définition de champ sur un schéma S nécessite plusieurs étapes. Premièrement, on appelle *catégorie fibrée sur S* la donnée :

- (i) pour tout ouvert étale $(S_1 \rightarrow S)$ d'une catégorie, notée $\mathcal{G}(S_1)$ et appelée *catégorie fibre* de \mathcal{G} au-dessus de l'ouvert étale $(S_1 \rightarrow S)$;
- (ii) pour toute inclusion⁸ :

$$\begin{array}{ccc} S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & & S \end{array}$$

entre ouverts étales de S , d'un foncteur (restriction à S_2) :

$$\begin{array}{ccc} \rho_{S_1 S_2} : & \mathcal{G}(S_1) & \longrightarrow \mathcal{G}(S_2) \\ & g_1 \longmapsto & g_1|_{S_2} \end{array}$$

- (iii) pour toute double inclusion :

$$\begin{array}{ccccc} S_3 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & S & & \end{array}$$

d'une transformation naturelle :

$$\tau_{S_3 S_2 S_1} : \rho_{S_1 S_3} \Longrightarrow \rho_{S_2 S_3} \circ \rho_{S_1 S_2}$$

⁸Pour faire le parallèle avec la définition usuelle de préfaisceau, nous appelons ici "inclusion" un morphisme entre ouverts étales de S ; cet abus est justifié par le fait qu'une catégorie fibrée est grossièrement un préfaisceau en catégories, comme il est d'ailleurs indiqué dans [Br94a]. Un tel morphisme n'est cependant pas un monomorphisme en général.

de telle sorte que, pour toute triple inclusion :

$$\begin{array}{ccccccc} S_4 & \longrightarrow & S_3 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & S_1 \\ & & \searrow & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & & & & S \\ & \searrow & & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & & & & S \end{array}$$

les transformations naturelles obtenues par composition :

$$\rho_{S_1 S_4} \Longrightarrow \rho_{S_3 S_4} \circ \rho_{S_1 S_3} \Longrightarrow \rho_{S_3 S_4} \circ (\rho_{S_2 S_3} \circ \rho_{S_1 S_2})$$

et

$$\rho_{S_1 S_4} \Longrightarrow \rho_{S_2 S_4} \circ \rho_{S_1 S_2} \Longrightarrow (\rho_{S_3 S_4} \circ \rho_{S_2 S_3}) \circ \rho_{S_1 S_2}$$

coïncident.

\mathcal{G} est appelée une *catégorie fibrée en groupoïdes* sur S , si la catégorie fibre $\mathcal{G}(S')$ au-dessus de tout ouvert étale ($S' \rightarrow S$) est un groupoïde⁹. Le foncteur naturel :

$$\mathcal{G} \longrightarrow S_{\text{ét}}$$

est appelé *projection* ou *morphisme structural* de \mathcal{G} . Commençons par un exemple naïf :

Exemple 1.4.1. Soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma. On peut associer à X une catégorie fibrée sur k ,¹⁰ notée provisoirement \mathcal{G}_X , en prenant pour toute extension étale L de k le groupoïde discret dont l'ensemble d'objets est :

$$\mathcal{G}_X(L) = \text{Hom}_{\text{Spec } k}(\text{Spec } L, X)$$

Autrement dit, la catégorie fibre de \mathcal{G}_X au-dessus de L a pour objets les points à valeurs dans $\text{Spec } L$ du k -schéma X , et les seuls morphismes sont les identités des objets (en particulier \mathcal{G}_X est une catégorie fibrée en groupoïdes!).

Nous donnerons un peu plus loin des exemples plus intéressants (heureusement!) de catégories fibrées. La totalité des catégories fibrées que nous considérerons seront des catégories fibrées en groupoïdes.

Un *morphisme* $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ entre deux catégories fibrées sur S est la donnée pour tout ouvert étale ($S_1 \rightarrow S$) d'un foncteur $F_{S_1} : \mathcal{G}(S_1) \rightarrow \mathcal{G}'(S_1)$ naturellement compatible avec les restrictions, dans le sens où pour toute inclusion ($S_2 \rightarrow S_1$) le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(S_1) & \xrightarrow{F_{S_1}} & \mathcal{G}'(S_1) \\ \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}'} \\ \mathcal{G}(S_2) & \xrightarrow{F_{S_2}} & \mathcal{G}'(S_2) \end{array}$$

⁹Un groupoïde est une catégorie où toute flèche est inversible.

¹⁰*I.e.* une catégorie fibrée sur le site étale de $\text{Spec } k$.

commute, à un isomorphisme de foncteurs près ; *i.e.* il existe une transformation naturelle :

$$\theta_{S_1 S_2} : \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}'} \circ F_{S_1} \Longrightarrow F_{S_2} \circ \rho_{S_1 S_2}^{\mathcal{G}}$$

cette transformation naturelle satisfaisant à sont tour des conditions de compatibilité avec les transformations naturelles “ $\tau_{S_3 S_2 S_1}$ ”. Un tel foncteur est aussi appelé *foncteur cartésien* entre les catégories \mathcal{G} et \mathcal{G}' .

Un *préchamp de groupoïdes sur S* (ou simplement préchamp sur S) est une catégorie fibrée en groupoïdes \mathcal{G} sur S où les isomorphismes se recollent : explicitement, cela signifie qu'étant donné un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, x et y deux objets de $\mathcal{G}(S')$, $(S_i \rightarrow S')_{i \in I}$ un recouvrement étale de S' , la suite d'ensembles :

$$\text{Isom}_{\mathcal{G}(S')}(x, y) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Isom}_{\mathcal{G}(S_i)}(x|_{S_i}, y|_{S_i}) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \text{Isom}_{\mathcal{G}(S_{ij})}(x|_{S_{ij}}, y|_{S_{ij}})$$

est exacte (on a noté $S_{ij} = S_i \times_{S'} S_j$). Plus succinctement, il revient au même de dire que $\text{Isom}(x, y)$ est un faisceau sur le site étale de S' .

Un *champ de groupoïdes sur S* (ou juste champ sur S , ou encore S -champ) est un préchamp de groupoïdes \mathcal{G} sur S où toute donnée de descente sur les objets est effective, ce qui signifie ceci : soient :

- $(S' \rightarrow S)$ un ouvert étale de S ;
- $(S_i \rightarrow S')_{i \in I}$ un recouvrement étale de S' ;
- $(g_i)_{i \in I}$ une famille de sections de \mathcal{G} , plus précisément :

$$g_i \in \text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)), \forall i \in I;$$

- pour tout couple $(i, j) \in I \times I$, un isomorphisme :

$$\varphi_{ij} : g_j|_{S_{ij}} \longrightarrow g_i|_{S_{ij}}$$

de telle sorte que :

$$\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}, \forall (i, j, k) \in I \times I \times I$$

cette dernière égalité ayant lieu dans $\text{Isom}(\mathcal{G}(S_{ijk}))$.

Alors il existe (effectivement) un objet $g' \in \mathcal{G}(S')$ et des isomorphismes :

$$\eta_i : g'|_{S_i} \longrightarrow g_i$$

compatibles avec les isomorphismes de recollement, dans le sens où :

$$\varphi_{ij} \circ \eta_j = \eta_i \text{ sur } S_{ij}, \forall (i, j) \in I \times I.$$

Grossièrement, un champ est donc une catégorie fibrée dans laquelle les morphismes *et* les objets se recollent. Nous en donnons maintenant quelques exemples.

Exemple 1.4.2 (Le champ Tors (k, G) des G -torseurs sur un corps k). Soient k un corps et G un k -groupe algébrique. Pour tout ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$, les G_L -torseurs sur le site étale de L sont les objets de la catégorie $\text{Tors}(L, G_L)$; cette catégorie

est d'ailleurs un groupoïde, puisque tout morphisme de toiseurs est un isomorphisme, du fait de la simple transitivité de l'action. En outre, si $(\text{Spec } L' \rightarrow \text{Spec } k)$ est un ouvert étale de k inclus dans le premier, *i.e.* si le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } L' & \longrightarrow & \text{Spec } L \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

alors on a un foncteur :

$$\rho_{LL'} : \text{Tors}(L, G_L) \longrightarrow \text{Tors}(L', G_{L'})$$

qui associe à un G_L -torseur $P \rightarrow \text{Spec } L$ le toiseur $P_{L'} \rightarrow \text{Spec } L'$ obtenu par changement de base ; le carré suivant est donc cartésien :

$$\begin{array}{ccc} P_{L'} & \longrightarrow & P \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \text{Spec } L' & \longrightarrow & \text{Spec } L \end{array}$$

Par ailleurs, le foncteur $\rho_{LL'}$ associe à un morphisme $f : P \rightarrow Q$ de G_L -torseurs sur L le morphisme $f_{L'} : P_{L'} \rightarrow Q_{L'}$ obtenu lui aussi par changement de base ; le diagramme ci-dessous est donc commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & Q_{L'} & \longrightarrow & Q \\ & f_{L'} \nearrow & & & \nearrow f \\ P_{L'} & \longrightarrow & P & & \\ & \searrow & \searrow & & \searrow \\ & \text{Spec } L' & \longrightarrow & \text{Spec } L & \end{array}$$

La collection des groupoïdes $\text{Tors}(L, G_L)$ (pour L parcourant les extensions étales de k) et les foncteurs $\rho_{LL'}$ constituent une catégorie fibrée en groupoïdes sur k . Cette catégorie fibrée est notée $\text{Tors}(k, G)$: par définition, le groupoïde fibre $\text{Tors}(k, G)(L)$ de cette catégorie fibrée au-dessus d'un ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ est justement le groupoïde $\text{Tors}(L, G_L)$. La catégorie fibrée $\text{Tors}(k, G)$ est un préchamp puisque les morphismes se recollent, et c'est un champ car les toiseurs (qui sont des faisceaux) se recollent (toujours par la théorie classique de la descente).

Si l'on considère le cas particulier où $G = PGL_n$, on obtient le champ $\text{Tors}(k, PGL_n)$, et suivant que l'on interprète PGL_n comme le groupe d'automorphismes de M_n ou de \mathbb{P}^{n-1} , on obtient le k -champ $\text{Asc}(k, n)$ des k -algèbres simples centrales d'indice n , ou celui des variétés des k -variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$, noté $\text{SB}(k, n - 1)$. En particulier, les champs $\text{Asc}(k, n)$ et $\text{SB}(k, n - 1)$ sont isomorphes, et l'isomorphisme de champs n'est autre que le foncteur qui permet d'associer à une algèbre simple centrale A la variété de Severi-Brauer X_A correspondante, ce foncteur étant décrit dans le chapitre 5 de [Ja00], ou encore dans [J96] III.3.5.

Exemple 1.4.3 (Le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ des G_S -torseurs sur un schéma S). Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes. On définit de la même manière que précédemment le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ des G_S -torseurs sur S . Le groupoïde fibre de ce champ au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ a pour objets les $G_{S'}$ -torseurs¹¹ sur S' , et pour flèches les isomorphismes de $G_{S'}$ -torseurs sur S' . Lorsque l'on prend $G_S = \mathbb{G}_{m,S}$ (*resp.* $G_S = GL_{n,S}$, *resp.* $G_S = PGL_{n,S}$), on obtient le champ $\text{LBun}(S)$ des fibrés en droites sur S (*resp.* le champ $\text{VBun}(n, S)$ des fibrés vectoriels de rang n sur S , *resp.* le champ $\text{Az}(n, S)$ des algèbres d'Azumaya d'indice n sur S).

Exemple 1.4.4 (Champ associé à un schéma). Soient S un schéma et Y un S -schéma. On peut associer un S -champ à Y , que l'on note encore Y ; le groupoïde fibre de ce champ Y au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ le groupoïde discret¹² dont l'ensemble d'objets est : $\text{Hom}_S(S', Y)$. Un S -champ \mathfrak{X} est dit *représentable* s'il existe un S -schéma Y tel que le S -champ associé à Y par le procédé décrit ci-dessus et le S -champ \mathfrak{X} sont isomorphes. La présence d'automorphismes non-triviaux est donc clairement un obstacle à ce qu'un S -champ soit représentable par un schéma.

Cette correspondance entre schémas et champs nous permet d'interpréter le foncteur projection d'un champ comme un morphisme de champs. Considérons par exemple le champ des G -torseurs sur un corps k . Le foncteur projection relatif à ce champ :

$$p : \text{Tors}(k, G) \longrightarrow (\text{Spec } k)_{\text{ét}}$$

est celui qui associe à un toseur l'extension de k au-dessus de laquelle il est défini. Or, d'après ce qui précède, on peut associer au k -schéma $\text{Spec } k$ (!) un k -champ. En adoptant ce point de vue, le foncteur p devient un morphisme de champs.

Enfin, la construction du S -champ associé à un S -schéma donne lieu à un foncteur pleinement fidèle :

$$(\text{Sch}/S) \longrightarrow (\text{Champ}/S)$$

de la catégorie des S -schémas dans celle des S -champs, qui se factorise d'ailleurs par la catégorie des S -champs algébriques (*cf.* le chapitre 4 de [LMB00]).

Exemple 1.4.5 (Le champ \mathcal{M}_g des courbes stables de genre g ($g \geq 2$)). Soit S un schéma; rappelons que l'on appelle courbe stable (suivant [DM69]) de genre g sur S un morphisme

$$\pi : C \longrightarrow S$$

propre, plat, dont les fibres géométriques sont des schémas C_S de dimension 1, réduits, connexes, et tels que :

- C_S n'a que des points doubles ordinaires;
- si E est une composante rationnelle non-singulière de C_S , alors E rencontre les autres composantes de C_S en au moins trois points.

On note (SchEt) le site dont la catégorie sous-jacente est celle des schémas, munie de la topologie étale. Pour tout schéma S , on définit un groupoïde que l'on note $\mathcal{M}_{g,S}$ en posant :

¹¹On a noté $G_{S'}$ le schéma en groupes $G_S \times_S S'$.

¹²*I.e.* les seules flèches sont les identités.

Objets de $\mathcal{M}_{g,S}$: courbes stables de genre g sur S ;

Isomorphismes de $\mathcal{M}_{g,S}$: S -isomorphismes de schémas.

La collection des $\mathcal{M}_{g,S}$ constitue une catégorie fibrée \mathcal{M}_g sur (SchEt), et \mathcal{M}_g est un champ de groupoïdes sur (SchEt) (cf. [Do01]). En outre, ce champ est isomorphe au quotient de H_g par $PGL(5g-6)$, où H_g est le sous-schéma de $\text{Hilb}_{5g-6}^{P_g}$ des courbes stables tricanoniquement plongées dans \mathbb{P}^{5g-6} , où $P_g(n) = (6n-1)(g-1)$ est le polynôme de Hilbert (cf. [Do01] p.127-128).

Exemple 1.4.6 (Champ associé à un préchamp). Soit S un schéma. Pour construire le faisceau (sur le site étale de S) associé à un préfaisceau sur S , il suffit de rendre locale la définition de section, de telle sorte que le recollement des sections devient possible. De la même façon, on construit le S -champ associé à un S -préchamp en rendant locale la définition d'objet, de manière à forcer l'effectivité des données de descente. Ainsi, on obtient un foncteur :

$$(\text{Préchamp}/S) \longrightarrow (\text{Champ}/S)$$

et tout S -champ appartient localement à l'image essentielle de celui-ci [Br94a]. Plus précisément, si \mathcal{P} est un préchamp sur S , et si $(S' \rightarrow S)$ est un ouvert étale, une section du champ \mathcal{P}^+ associé à \mathcal{P} au-dessus de cet ouvert est la donnée :

- (i) d'un recouvrement étale $(S'_i \rightarrow S')_{i \in I}$;
- (ii) d'une famille de sections $(p_i)_{i \in I}$ du préchamp \mathcal{P} relativement à ce recouvrement : précisément, on demande que :

$$p_i \in \text{Ob}(\mathcal{P}(S'_i)), \forall i \in I;$$

- (iii) (*donnée de recollement*) d'un isomorphisme de $\mathcal{P}(S'_i \times_{S'} S'_j)$:

$$\varphi_{ij} : p_j|_{S'_i \times_{S'} S'_j} \longrightarrow p_i|_{S'_i \times_{S'} S'_j}, \forall (i, j) \in I \times I;$$

- (iv) (*donnée de descente*) les isomorphismes φ_{ij} satisfaisant la condition de 1-cocycle¹³ :

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}, \forall (i, j, k) \in I \times I \times I.$$

De fait, il existe une manière plus intrinsèque de définir le champ associé à un préchamp (nous renvoyons à la définition II.2.1.1 de [Gi71] pour celle-ci.)

1.5 Gerbes

Définition 1.5.1. Soit S un schéma. On appelle **gerbe sur S** (ou S -gerbe) un champ de groupoïdes \mathcal{G} sur le site étale de S , localement non-vide et localement connexe, soit :

¹³C'est une manière rapide de dire que :

$$\varphi_{ij}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k} \circ \varphi_{jk}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k} = \varphi_{ik}|_{S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k}, \forall (i, j, k) \in I \times I \times I,$$

cette égalité ayant lieu dans $\text{Isom}(\mathcal{P}(S'_i \times_{S'} S'_j \times_{S'} S'_k))$.

- (\mathcal{G} est localement non-vide). Il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que :

$$\text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)) \neq \emptyset, \forall i \in I.$$

- (\mathcal{G} est localement connexe). Soient $(S' \rightarrow S)$ un ouvert étale, et soient x et y deux objets de $\mathcal{G}(S')$. Alors il existe un recouvrement étale $(S'_j \rightarrow S')_{j \in J}$ tel que :

$$x|_{S'_j} \approx y|_{S'_j}$$

cet isomorphisme vivant dans le groupoïde $\mathcal{G}(S'_j)$, $\forall j \in J$.

Une S -gerbe est dite **neutre** si elle a une section au-dessus de S , i.e. si le groupoïde fibre $\mathcal{G}(S)$ est non-vide.

Un **morphisme de gerbes** sur S est un morphisme de champs dont la source et le but sont des S -gerbes.

Exemple 1.5.2 (Gerbes de toiseurs). Soient S un schéma, et G_S un S -schéma en groupes. Le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ de l'exemple 1.4.3 est une gerbe. En effet :

- le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ est localement non-vide, puisqu'il l'est même globalement : le G_S -torseur trivial $S \times_S G_S \rightarrow S$ est en effet une section de ce champ au-dessus de S ;
- le champ $\text{Tors}(S, G_S)$ est localement connexe, puisque comme nous l'avons remarqué dans la section 1.2, tout G_S -torseur est isomorphe au G_S -torseur trivial, localement pour la topologie étale sur S .

D'ailleurs, il est intéressant de remarquer que toute gerbe neutre est de cette forme :

Lemme 1.5.3. *Soit S un schéma. Toute S -gerbe neutre \mathcal{G} est équivalente à une S -gerbe de toiseurs.*

PREUVE : soit \mathcal{G} une S -gerbe neutre, et soit g un objet de $\mathcal{G}(S)$. Alors on a une équivalence :

$$\begin{aligned} \epsilon : \quad \mathcal{G} &\longrightarrow \text{Tors}(S, \text{Aut}(g)) \\ g' &\longmapsto \text{Isom}(g, g') \end{aligned}$$

où $\text{Aut}(g)$ (*resp.* $\text{Isom}(g, g')$) désigne le faisceau des automorphismes de l'objet g (*resp.* le faisceau des isomorphismes entre g et g').

□

On déduit immédiatement de ce lemme et de la définition de gerbe la conséquence suivante :

Corollaire 1.5.4. *Toute S -gerbe est localement équivalente à une gerbe de toiseurs.*

PREUVE : soit \mathcal{G} une S -gerbe. Par définition, il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)_{i \in I}$ tel que $\text{Ob}(\mathcal{G}(S_i)) \neq \emptyset$. Soit g_i un objet de $\mathcal{G}(S_i)$, pour tout $i \in I$. Alors les gerbes (sur le site étale restreint à S_i) $\mathcal{G}|_{S_i}$ et $\text{Tors}(S_i, \text{Aut}(g_i))$ sont équivalentes, où $\text{Aut}(g_i)$ est le faisceau sur S_i des automorphismes de g_i , et $\mathcal{G}|_{S_i}$ est le produit fibré $\mathcal{G} \times_S S_i$.

□

Exemple 1.5.5 (Gerbe des algèbres simples centrales sur un corps, etc. . .). Soit k un corps. D'après l'exemple 1.4.2, le champ $\text{Asc}(k, n)$ (*resp.* $\text{SB}(k, n - 1)$) des algèbres simples centrales sur k (*resp.* des variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$) est une gerbe. En outre, les gerbes $\text{Asc}(k, n)$ et $\text{SB}(k, n - 1)$ sont équivalentes, puisque toutes deux sont équivalentes à la gerbe neutre $\text{Tors}(k, \text{PGL}_n)$.

De la même façon, lorsque S est un schéma, le champ $\text{LBun}(S)$ (*resp.* $\text{VBun}(n, S)$, *resp.* $\text{Az}(n, S)$) des fibrés en droites sur S (*resp.* des fibrés vectoriels de rang n sur S , *resp.* des algèbres d'Azumaya d'indice n sur S) est une gerbe neutre, équivalente à la gerbe $\text{Tors}(S, \mathbb{G}_{m,S})$ (*resp.* $\text{Tors}(S, \text{GL}_{n,S})$, *resp.* $\text{Tors}(S, \text{PGL}_{n,S})$).

Nous présentons maintenant la gerbe que nous évoquerons le plus souvent au cours de ce travail.

Exemple 1.5.6 (Gerbe des modèles d'un torseur). Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma lisse et géométriquement connexe, G un k -groupe algébrique linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur. Par analogie avec les revêtements, nous introduisons la définition suivante :

Définition 1.5.7. On dit que \bar{P} est de **corps des modules** k s'il représente une classe de $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$. Il revient au même de dire que pour tout $\sigma \in \Gamma$, les torseurs \bar{P} et ${}^\sigma \bar{P}$ sont isomorphes.

Définition 1.5.8. On conserve les hypothèses adoptées ci-dessus concernant k , X et G , et on suppose \bar{P} de corps des modules k .

(i) L étant une extension étale de k , on appelle **modèle de \bar{P}** au-dessus de X_L un G_{X_L} -torseur $Y_L \rightarrow X_L$ tel que les \bar{G}_X -torseurs \bar{P} et $\bar{Y}_L = Y_L \times_{X_L} \bar{X}$ sont isomorphes.

(ii) On appelle **gerbe des modèles de \bar{P}** , et on note $D(\bar{P})$ la k -gerbe dont le groupoïde fibre au-dessus d'un ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ a pour objets les G_{X_L} -torseurs

$Y_L \rightarrow X_L$ tel qu'il existe $\sigma \in \Gamma$ tel que les \bar{G}_X -torseurs ${}^\sigma \bar{P}$ et \bar{Y}_L sont isomorphes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{P} \approx \bar{Y}_L & \longrightarrow & Y_L & & & & \\
 \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \downarrow & \swarrow \text{dotted} & & & \\
 & \bar{G}_X & \longrightarrow & G_{X_L} & \longrightarrow & G_X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \bar{X} & \longrightarrow & X_L & \longrightarrow & X & & \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & \bar{G} & \longrightarrow & G_L & \longrightarrow & G & \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \\
 \text{Spec } \bar{k} & \longrightarrow & \text{Spec } L & \longrightarrow & \text{Spec } k & &
 \end{array}$$

Les flèches du groupoïde fibre $D(\bar{P})(L)$ sont les isomorphismes de G_{X_L} -torseurs sur X_L .

$D(\bar{P})$ est effectivement une k -gerbe, car :

- (1) c'est une catégorie fibrée en groupoïdes sur k , avec les foncteurs de "restriction" évidents ;
- (2) c'est un k -champ, puisque les isomorphismes de toseurs se recollent, et toute donnée de descente sur les toseurs est effective (d'après [Gi71] III.1.4.1) ;
- (3) $D(\bar{P})$ est localement connexe, puisque deux objets sont isomorphes à \bar{P} (du fait que ${}^\sigma \bar{P} \approx \bar{P}, \forall \sigma \in \Gamma$) ;
- (4) $D(\bar{P})$ est localement non-vide : en effet (d'après [SGA4-VII], 5.7 pour le cas abélien, et 5.14.(a) pour le cas général) :

$$H^1(\bar{X}, \bar{G}_X) = \varinjlim_L H^1(X_L, G_{X_L})$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales L de k . Par suite, tout $[\bar{P}]$ est représenté par une classe $[Y_{L_0}] \in H^1(X_{L_0}, G_{X_{L_0}})$, pour une extension étale L_0/k "suffisamment grande". Donc $D(\bar{P})$ est localement non-vide, puisque le singleton :

$$\{\text{Spec } L_0 \rightarrow \text{Spec } k\}$$

est un recouvrement étale de k .

Notons, même si c'est une évidence d'après la définition, que $D(\bar{P})$ est **une gerbe neutre si et seulement si \bar{P} est défini sur k , i.e. si et seulement si \bar{P} a un modèle sur X . La gerbe $D(\bar{P})$ mesure donc l'obstruction à ce que la descente de \bar{P} soit possible.**

Remarque 1.5.9. La gerbe $D(\bar{P})$ que l'on vient de définir est exactement la gerbe $D(c)$ décrite dans [Gi71] V.3.1.6.

Remarque 1.5.10. Dans le cas où G est abélien, et où la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, on peut associer à tout torseur \bar{P} représentant une classe dans $H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma$ un type $\lambda_{\bar{P}} \in \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X})$. En outre, comme on l'a rappelé dans l'introduction, on dispose des deux suites exactes :

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

et :

$$H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{x} \text{Hom}_\Gamma(\widehat{G}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

L'image de \bar{P} par le morphisme δ^1 est la classe de la gerbe $D(\bar{P})$ (cf. [Gi71] V.3.2.1). D'autre part, la gerbe $\partial(\lambda_{\bar{P}})$, qui mesure l'obstruction à ce qu'il existe un G_X -torseur sur X de type $\lambda_{\bar{P}}$, coïncide avec $D(\bar{P})$ (cf. [HS02] 3.7.(c)). Par conséquent :

Proposition 1.5.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \bar{P} est défini sur k ;
- (ii) la gerbe $D(\bar{P})$ est neutre ;
- (iii) la gerbe $\partial(\lambda_{\bar{P}})$ est neutre ;
- (iv) il existe un G_X -torseur sur X de type $\lambda_{\bar{P}}$.

PREUVE : évidente, d'après la remarque précédente et les définitions des gerbes $D(\bar{P})$ et $\partial(\lambda_{\bar{P}})$.

□

Exemple 1.5.12 (Gerbe des modèles d'un G -revêtement). La définition de la gerbe des modèles d'un G -revêtements (satisfaisant la condition corps des modules) présente beaucoup de points communs avec la gerbe des modèles d'un torseur. Nous renvoyons à la section 2 de [DD87] pour une présentation et une étude détaillées de cette gerbe.

Exemple 1.5.13 (Gerbe des banalisations d'une algèbre d'Azumaya). Soit X un schéma régulier et géométriquement irréductible. On suppose que X est connexe, de telle sorte que les algèbres d'Azumaya sur X sont d'indice constant¹⁴ (cf. [Mi80] p.143). Soit \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya sur X . On appelle *banalisation* de \mathcal{A} un couple (\mathcal{E}, α) , où \mathcal{E} est une \mathcal{O}_X -algèbre localement libre de type fini, et α est un isomorphisme de \mathcal{O}_X -algèbres :

$$\alpha : \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

¹⁴I.e. tous les n_i sont égaux dans l'exemple 1.2.9.

On définit la gerbe des banalisations $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} ainsi : au-dessus d'un ouvert étale $(X' \rightarrow X)$, le groupoïde fibre $[\mathcal{B}(\mathcal{A})](X')$ est le groupoïde dont :

- les objets sont les banalisations de $\mathcal{A}|_{X'} = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$. Ce sont donc les couples (\mathcal{E}', α) , \mathcal{E}' étant une $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbre localement libre de type fini, et α un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres :

$$\alpha : \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}') \longrightarrow \mathcal{A}|_{X'}$$

- une flèche entre deux banalisations $(\mathcal{E}_1, \alpha_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \alpha_2)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$ -algèbres ψ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}_1) & \xrightarrow{\psi} & \text{End}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}_2) \\ & \searrow \alpha_1 & \swarrow \alpha_2 \\ & \mathcal{A}|_{X'} & \end{array}$$

Alors la théorie de la descente assure que $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ est un champ, et c'est une gerbe d'après l'énoncé ci-dessous (cf. [Gr68] I.5.1 ou [Mi80] IV.4.2.1) :

Proposition 1.5.14. *Soit \mathcal{A} une \mathcal{O}_X -algèbre qui est de type fini en tant que \mathcal{O}_X -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{A} est une algèbre d'Azumaya sur X ;
- (ii) il existe un recouvrement étale $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ tel que $\mathcal{A}|_{X_i}$ soit banale, $\forall i \in I$; plus précisément, il existe pour tout $i \in I$ un entier n_i tel que : $\mathcal{A}|_{X_i} \approx M_{n_i}(\mathcal{O}_{X_i})$

Exemple 1.5.15 (Gerbe des trivialisations d'un espace homogène). Soient k un corps de caractéristique nulle, dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} , et H un sous-groupe fini de $SL_n(k)$. Soit V un espace homogène sous SL_n avec isotropie H : on entend par là que V est une k -forme de SL_n/H , i.e. on a un isomorphisme sur \bar{k} :

$$\bar{V} \approx \bar{SL}_n/\bar{H}$$

On a la relation de domination de Springer [Sp66] :

$$H^1(k, SL_n) \twoheadrightarrow H^1(k; SL_n, H)$$

L'espace homogène V représente une classe de $H^1(k; SL_n, H)$. La gerbe $\mathcal{T}(V)$ que l'on va associer à V mesure l'obstruction à ce que $[V]$ appartienne à l'image de la relation. Or, comme $H^1(k, SL_n)$ est réduit à la classe du torseur trivial (par le théorème 90 de Hilbert), toute classe appartenant à l'image de la relation est triviale. D'où l'appellation de gerbe des trivialisations de V . Définissons maintenant cette gerbe : le groupoïde fibre $[\mathcal{T}(V)](L)$ au-dessus d'un ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ a pour objets les SL_n -torseurs P_L (forcément triviaux) sur L tels qu'il existe une application : $f_L : P_L \rightarrow V_L$, et pour flèches les isomorphismes de toseurs. C'est effectivement une gerbe d'après [Sp66] 2.

Exemple 1.5.16 (Classe de Chern d'un fibré en droites). Soient X une variété projective lisse complexe, X^{an} la variété analytique associée [Fu98], et \mathcal{L} un fibré en droites sur X . Nous verrons en appendice comment interpréter la classe de Chern $c_1(\mathcal{L})$ comme une gerbe sur le site analytique de X , mesurant l'obstruction à ce que \mathcal{L} appartienne à l'image du morphisme :

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \text{Pic } X$$

Donnons maintenant deux exemples de champs qui ne sont pas des gerbes :

Exemple 1.5.17 (Le champ \mathcal{M}_g). Ce champ n'est pas une gerbe car il possède un ouvert¹⁵ (non-vide) de courbes ne possédant pas d'automorphisme non-trivial. Or nous verrons dans la section suivante que les gerbes se différencient des champs par ce que les objets d'une gerbe ont tous (localement) les mêmes automorphismes.

Exemple 1.5.18 (Le champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$). On considère une nouvelle fois un corps de caractéristique nulle k , un k -schéma $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$, et un k -groupe algébrique linéaire G . En général, le champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ n'est pas une gerbe. Rappelons que ce k -champ a pour catégorie fibre au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) la catégorie $\text{Tors}(X_L, G_{X_L})$ des G_{X_L} -torseurs sur X_L . C'est une catégorie fibrée en groupoïdes sur k munie des foncteurs de restriction évidents, c'est un préchamp car les isomorphismes de toseurs se recollent, et c'est un champ car les toseurs sur X constituent un champ. En outre, ce champ est localement non-vide, et même globalement non-vide puisque le G_X -torseur trivial $X \times G_X$ est un objet de ce champ au-dessus de $\text{Spec } k$. Mais deux objets ne sont pas nécessairement localement isomorphes (ce champ n'est pas localement connexe) : étant donné ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) un ouvert étale de k , deux G_{X_L} -torseurs P et Q sur X_L , il existe certes un recouvrement étale $(X_i \rightarrow X_L)_{i \in I}$ tel que :

$$P|_{X_i} \approx Q|_{X_i}, \quad \forall i \in I.$$

Cependant, les ouverts de ce recouvrement n'ont aucune raison de provenir d'un recouvrement étale de L ; plus explicitement, il n'y a aucune raison pour que les schémas X_i soient de la forme X_{L_i} , où les L_i seraient des extensions étales de L . Donc P et Q , vus comme objets de :

$$[\pi_*\text{Tors}(X, G_X)](L)$$

ne sont pas localement isomorphes.

Cet exemple illustre donc le fait que l'image directe d'une gerbe par un morphisme de schémas n'est pas en général une gerbe, alors que l'image inverse d'une gerbe est toujours une gerbe [Gi71] V.1.4.2.

1.6 Liens

Avant de donner la définition de lien en général, nous donnons juste idée pratique de cette notion. Remarquons tout d'abord que par définition, deux objets g et g' d'une gerbe \mathcal{G} sur un schéma S sont localement isomorphes. Il s'ensuit que g et g' ont localement le

¹⁵Pour la définition d'ouvert d'un champ algébrique, nous renvoyons à [LMB00] ou [Vi89].

même faisceau d'automorphismes, l'isomorphisme entre ces faisceaux étant obtenu par conjugaison :

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(g) & \longrightarrow & \text{Aut}(g') \\ f & \longmapsto & \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

où φ est un isomorphisme entre g et g' . L'idée qui s'impose donc naturellement, lorsque l'on souhaite classifier les gerbes sur un schéma S , est d'associer à chaque S -gerbe un "faisceau en groupes" sur S . C'est ce qui justifie l'introduction de la notion de lien.

Le champ des liens sur un schéma

Soit S un schéma. Les faisceaux de groupes sur S constituent un S -champ noté (FAGR/S) (cf. [Gi71] II.3.4.12). Pour tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$, la catégorie fibre

$$(\text{FAGR}/S)(S' \rightarrow S)$$

est la catégorie $\text{FAGR}(S')$ des faisceaux de groupes sur le site étale de S' . Le préchamp des liens est construit en deux temps à partir de ce champ :

Définition 1.6.1. On note (Lien/S) la catégorie fibrée sur S , dont la catégorie fibre $(\text{Lien}/S)(S')$ au-dessus d'un ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ a pour objets les faisceaux de groupes sur S' ; les morphismes entre deux objets \mathcal{F} et \mathcal{G} sont les sections du faisceau quotient :

$$\text{Int}(\mathcal{F}) \backslash \text{Hom}_{\text{FAGR}(S')}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) / \text{Int}(\mathcal{G})$$

Proposition 1.6.2. La S -catégorie fibrée (Lien/S) est un S -préchamp, le préchamp des liens sur S . On appelle **champ des liens sur S** et on note (LIEN/S) le champ qui lui est associé par le foncteur (cf. exemple 1.4.6) :

$$(\text{Préchamp}/S) \longrightarrow (\text{Champ}/S)$$

On appelle **lien** sur S un objet du champ (LIEN/S) . Notons que l'on peut associer à tout faisceau de groupes G sur S un lien sur S , cette association étant obtenue en grâce au foncteur composé :

$$\text{lien} : (\text{FAGR}/S) \longrightarrow (\text{Lien}/S) \longrightarrow (\text{LIEN}/S).$$

Un lien sur S (ou S -lien) est dit **représentable** s'il appartient à l'image essentielle de ce foncteur ; autrement dit, un lien \mathcal{L} sur S est représentable par un faisceau de groupes G s'il existe un isomorphisme de liens sur S :

$$\mathcal{L} \approx \text{lien } G$$

Un lien \mathcal{L} sur S est dit **localement représentable** par un faisceau de groupes G sur S s'il existe un recouvrement étale $(S_i \rightarrow S)$ et des isomorphismes de liens sur S_i :

$$\mathcal{L}|_{S_i} \approx \text{lien}(G|_{S_i})$$

Par construction même, tout lien sur S est localement représentable par un faisceau de groupes.

Enfin, un lien \mathcal{L} sur S est dit **réalisable** s'il existe une S -gerbe \mathcal{G} telle que :

$$\text{lien}(\mathcal{G}) \approx \mathcal{L}$$

Définition 1.6.3. Soient S un schéma, G un faisceau de groupes sur S et \mathcal{G} une S -gerbe. On dit que \mathcal{G} est **liée par** G si $\text{lien}(\mathcal{G})$ est représentable par G . On dit que \mathcal{G} est **localement liée par** G si $\text{lien}(\mathcal{G})$ est localement représentable par G . Il suffit pour cela qu'il existe pour tout ouvert étale $(S' \rightarrow S)$ et pour tout $g' \in \text{Ob}(\mathcal{G}(S'))$ des isomorphismes fonctoriels ([Mi80] p.144) :

$$G_S(S') \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{G}(S')}(g')$$

Exemple 1.6.4. On se place dans la situation de l'exemple 1.5.6, et on considère \bar{P} un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . Alors :

Lemme 1.6.5. Si G est abélien, alors :

- (i) la k -gerbe $D(\bar{P})$ est liée par π_*G_X ;
- (ii) si de plus la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, alors $D(\bar{P})$ est liée par G .

PREUVE : En effet, soit $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ un ouvert étale tel que le groupoïde fibre $D(\bar{P})(L)$ soit non-vidé, et soit P_L un de ses objets. La gerbe $D(\bar{P})|_{\text{Spec } L}$ est donc neutre(!), et elle est donc équivalente à une gerbe de toseurs sur L . Explicitement, on a une équivalence de L -gerbes [Gi71] V.3.1.6.(ii) :

$$\begin{array}{ccc} \epsilon : D(\bar{P})|_{\text{Spec } L} & \longrightarrow & \text{Tors}(L, \pi_*\text{ad}_{G_{X_L}}(P_L)) \\ P' & \longmapsto & \pi_*(P' \wedge^{G_{X_L}} P_L^{\text{opp}}) \end{array}$$

où P_L^{opp} désigne le bitorseur opposé à P_L , vu comme un $(\text{ad}_{G_{X_L}}(P_L), G_{X_L})$ -bitorseur. On vérifie ensuite que π_* et ad commutent, ce qui est immédiat ; enfin, comme G est abélien, le faisceau $\text{ad}_{\pi_*G_{X_L}}(\pi_*P_L)$ n'est autre que le faisceau $\pi_*G_{X_L}$, d'où le point (i).

Pour le point (ii) on utilise le fait que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ implique que les faisceaux π_*G_X et G sont isomorphes (cf. preuve du lemme 1.2.14).

□

Exemple 1.6.6. La gerbe des modèles d'un G -revêtement est liée par le centre de G (cf. [DD97]).

Exemple 1.6.7. La gerbe des banalisations d'une algèbre d'Azumaya sur un schéma X est liée par $\mathbb{G}_{m,X}$ (cf. [Gi71] V.4.2 ou [Mi80] p.145).

Exemple 1.6.8. La classe de Chern d'un fibré en droites sur une variété analytique X , vue comme une gerbe sur le site analytique de X^{an} , est liée par $\mathbb{Z}_{X^{\text{an}}}$ (cf. appendice A).

L'énoncé suivant est encore traité dans le cas général dans [Gi71] (corollaire IV.1.1.7.3).

Proposition 1.6.9. Soient S un schéma et G un faisceau de groupes sur S . L'ensemble des classes d'isomorphie de liens localement représentables par G est en bijection avec l'en-

semble de cohomologie $H^1(k, \text{Out } G)$, où $\text{Out } G$ est le faisceau sur S des automorphismes extérieurs de G .

Remarque 1.6.10. L'ensemble $H^1(S, \text{Out } G)$ des formes extérieures est pointé par la classe du $\text{Out } G$ -torseur trivial; ce dernier correspond au S -lien lien G .

Soient S un schéma et G un faisceau de groupes sur S . On a toujours la suite exacte de faisceaux de groupes sur S :

$$0 \longrightarrow \text{Int } G \longrightarrow \text{Aut } G \longrightarrow \text{Out } G \longrightarrow 1$$

d'où une suite de cohomologie (déjà évoquée, voir diagramme p. 14) :

$$H^1(S, \text{Int } G) \longrightarrow H^1(S, \text{Aut } G) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G)$$

L'application λ est juste celle qui associe à une forme¹⁶ (sur S) de G le lien qu'elle représente. Un lien est donc représentable par G s'il appartient à l'image de λ . En outre, on déduit facilement de l'exactitude de cette suite l'énoncé :

Lemme 1.6.11. *Avec les notations adoptées précédemment, si G' est une S -forme intérieure de G , alors :*

$$\text{lien } G' \approx \text{lien } G$$

Une conséquence beaucoup moins immédiate de l'exactitude de la suite précédente est la suivante :

Proposition 1.6.12. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes réductifs sur S . Alors tout S -lien localement (pour la topologie étale) représentable par G_S est représentable par une S -forme de G_S .*

PREUVE : soit \mathcal{L} un S -lien localement représentable par G_S . \mathcal{L} représente une classe de $H^1(S, \text{Out } G_S)$. Du fait que G_S est réductif, la suite :

$$1 \longrightarrow \text{Int } G_S \longrightarrow \text{Aut } G_S \xrightarrow{\sigma} \text{Out } G_S \longrightarrow 1$$

est scindée [Dem64] p.28. Cette section induit une section de l'application :

$$H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G_S)$$

¹⁶Rappelons que l'on appelle S -forme d'un objet A défini sur S un objet A' défini sur S , localement isomorphe à A pour la topologie étale sur S . Par exemple, une k -variété de Severi-Brauer de dimension n est une k -forme de l'espace projectif \mathbb{P}_k^n ; une k -algèbre simple centrale d'indice n est une k -forme de l'algèbre de matrices $M_n(k)$; une algèbre d'Azumaya d'indice n sur S est une S -forme de la \mathcal{O}_S -algèbre $M_n(\mathcal{O}_S)$, etc. . .

d'où la conclusion. □

Remarque 1.6.13. Nous avons délibérément choisi de nous restreindre à la topologie étale, en vue de nos applications. Signalons cependant que cet énoncé est valable dans un cadre beaucoup plus général (cf. [Do76] V.3.2).

1.7 Cohomologie à valeurs dans un lien

Définition 1.7.1. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. On définit l'ensemble

$$H^2(S, \mathcal{L})$$

comme l'ensemble des classes d'équivalence de S -gerbes de lien \mathcal{L} pour la relation d'équivalence suivante : \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont dites **équivalentes au sens de Giraud** s'il existe une équivalence $\epsilon : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ liée par $\text{id}_{\mathcal{L}}$. On note $[\mathcal{G}]$ la classe d'une S -gerbe de lien \mathcal{L} .

Exemple 1.7.2. Soient S un schéma, G_S un S -schéma en groupes, et G'_S une S -forme intérieure de G_S . Alors les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ ont évidemment même lien (d'après le lemme 1.6.11), et ce lien n'est autre que lien G_S . En outre, il existe une équivalence

$$\epsilon : \text{Tors}(S, G_S) \longrightarrow \text{Tors}(S, G'_S)$$

mais ϵ n'est pas forcément liée par l'identité. En effet, on déduit de la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow Z(G_S) \longrightarrow G_S \longrightarrow \text{Int } G_S \longrightarrow 0$$

une suite longue d'ensembles pointés :

$$H^1(S, G_S) \xrightarrow{\alpha} H^1(S, \text{Int } G_S) \xrightarrow{\beta} H^2(S, Z(G_S))$$

Comme nous le verrons bientôt, le groupe $H^2(S, Z(G_S))$ agit simplement transitivement sur l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$; en outre, la proposition IV.3.2.6 de [Gi71] assure que l'ensemble $H^1(S, \text{Int } G_S)$ "agit" transitivement (par l'intermédiaire de β) sur l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)'$ des classes neutres de S -gerbes liées par G_S .

Par conséquent, les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ ne sont équivalentes (au sens de Giraud) que si G'_S est une S -forme intérieure de G_S telle que :

$$\beta([\mathcal{G}'_S]) = 0 \in H^2(S, Z(G_S))$$

Remarquons pour conclure cet exemple que si G'_S est une S -forme intérieure de G_S , alors les gerbes $\text{Tors}(S, G_S)$ et $\text{Tors}(S, G'_S)$ sont équivalentes *au sens de Breen* (cf. [Br94a]), *i.e.* représentent la même classe dans :

$$H^1(S, G_S \rightarrow \text{Aut } G_S)$$

Avant d'aller plus loin, commençons par quelques faits et remarques élémentaires concernant le H^2 à valeurs dans un lien.

Fait 1.7.3. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. L'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est non-vide si et seulement si \mathcal{L} est réalisable.

PREUVE : triviale, d'après la définition de lien réalisable.

□

Fait 1.7.4. Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux S -gerbes équivalentes (au sens de Giraud ou non) de lien \mathcal{L} . Si \mathcal{G} est neutre, alors \mathcal{G}' est également neutre. On appelle **classe neutre** de $H^2(S, \mathcal{L})$ une classe de S -gerbes équivalentes au sens de Giraud et de lien \mathcal{L} dont un (donc tous, par ce qui précède) représentant est neutre.

PREUVE : si \mathcal{G} est neutre, alors elle a une section au-dessus de S . L'équivalence entre \mathcal{G} et \mathcal{G}' fournit alors une section de \mathcal{G}' au-dessus de S . Donc \mathcal{G}' est neutre à son tour.

□

Fait 1.7.5. Soient S un schéma et G_S un schéma en groupes sur S . Alors l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une classe privilégiée :

$$[\text{Tors}(S, G_S)]$$

On l'appelle la **classe triviale** de $H^2(S, \text{lien } G_S)$.

L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède donc toujours cette classe triviale, mais il peut aussi (d'après l'exemple 1.7.2) posséder plusieurs classes neutres, différentes de la classe triviale. Explicitement, avec les notations du fait ci-dessus, soit G'_S une S -forme intérieure de G_S . Si $\beta([G'_S]) \neq 0$, alors la gerbe $\text{Tors}(S, G'_S)$ n'est pas équivalente (au sens de Giraud) à la gerbe $\text{Tors}(S, G_S)$. Dans cette situation donc, la classe $[\text{Tors}(S, G'_S)]$ est une classe neutre de $H^2(S, \text{lien } G_S)$, différente de la classe triviale.

Evidemment, la situation est nettement plus simple si l'on considère un schéma en groupes abéliens :

Fait 1.7.6. Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes abéliens. L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une unique classe neutre, qui est la classe triviale : $[\text{Tors}(S, G_S)]$.

PREUVE : puisque G_S est abélien, il ne possède pas d'automorphisme intérieur non-trivial. La suite exacte de cohomologie (cf. section précédente) :

$$H^1(S, \text{Int } G_S) \longrightarrow H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \text{Out } G_S)$$

se réduit alors à l'identité :

$$H^1(S, \text{Aut } G_S) \xrightarrow{\text{id}} H^1(S, \text{Aut } G_S)$$

Autrement dit, il existe un unique (à isomorphisme près) S -lien localement représentable par G_S : le lien $\text{lien } G_S$ lui-même, d'où le fait. □

Dans ce cas, on pourra noter 0 cette unique classe neutre (et on pourra alors parler de *classe nulle*). En effet :

Fait 1.7.7. *Soient S un schéma et G_S un S -schéma en groupes abéliens. L'ensemble $H^2(S, \text{lien } G_S)$ possède une loi de groupe. De plus les groupes $H^2(S, \text{lien } G_S)$ et $H_{\text{ét}}^2(S, G_S)$ sont isomorphes.*

PREUVE : c'est la proposition IV.3.5.1 de [Gi71]. □

Enfin le théorème suivant est d'une importance capitale, puisqu'il permet de réduire la cohomologie à valeurs dans un lien à celle de son centre :

Fait 1.7.8 (Théorème IV.3.3.3 de [Gi71]). *Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Alors l'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est un pseudo-torseur sous $H^2(S, Z(\mathcal{L}))^{17}$, $Z(\mathcal{L})$ désignant le centre du lien \mathcal{L} .*

Dans le cas particulier où $\mathcal{L} = \text{lien } G$ est représentable par un faisceau de groupes G sur S , l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G)$ est principal homogène sous l'action de $H^2(S, Z(G))$ (puisque le centre de $\text{lien } G$ est représentable par le centre de G [Gi71] IV.1.5.3.(iii)).

Définition 1.7.9. *Soient S un schéma et \mathcal{L} un S -lien. Nous dirons que l'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ est **inessentiel** s'il est non-vide et s'il n'est composé que de classes neutres.*

D'après le fait précédent, lorsque G est un faisceau de groupes abéliens sur S , l'ensemble $H^2(S, \text{lien } G)$ est inessentiel si et seulement si il est réduit à la classe nulle.

Voici maintenant un exemple de situation particulièrement important où le H^2 est inessentiel, et qui est en partie une conséquence du fait 1.7.8.

Théorème 1.7.10. *Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k -groupe algébrique. Alors l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ est inessentiel dans les cas suivants :*

- (i) G est semi-simple adjoint ;
- (ii) k est un corps de nombres purement imaginaires et G est semi-simple ;
- (iii) k est un corps de nombres et G est semi-simple simplement connexe.

PREUVE : pour les cas (ii) et (iii), c'est le théorème VI.3.2 de [Do76]. Pour le cas où G est semi-simple adjoint, commençons par noter que l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ n'est pas vide, puisqu'il possède au moins la classe triviale. D'après le fait 1.7.8, il est donc principal homogène sous $H^2(k, Z(G))$. Or, G étant adjoint, son centre est trivial. Donc

¹⁷I.e. $H^2(S, \mathcal{L})$ est vide ou principal homogène sous l'action de $H^2(S, Z(\mathcal{L}))$.

le groupe $H^2(k, Z(G))$ est nul, et l'ensemble $H^2(k, \text{lien } G)$ est réduit à la classe triviale. En particulier, il est inessentiel. □

Pour achever ce chapitre, nous donnons deux exemples d'application de ce théorème.

Corollaire 1.7.11. *Soient k un corps de caractéristique nulle, et G une k -forme de PGL_n . Toute k -gerbe de lien G est neutre.*

PREUVE : c'est une conséquence directe du théorème 1.7.10, puisque PGL_n est semi-simple adjoint. □

Corollaire 1.7.12. *Si k est un corps de nombres, l'application :*

$$\delta_n : H^1(k, PGL_n) \longrightarrow {}_n\text{Br } k$$

est bijective. Autrement dit, tout élément d'ordre n dans $\text{Br } k$ est l'image par δ_n d'une k -algèbre simple centrale d'indice n . En termes de gerbes, cela revient à dire que toute k -gerbe liée par μ_n (c'est en particulier un k -champ de Deligne-Mumford) est la gerbe des trivialisations d'une k -algèbre simple centrale d'indice n .

PREUVE : de la suite exacte de faisceaux sur k :

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow SL_n \longrightarrow PGL_n \longrightarrow 1$$

on déduit l'existence d'une application injective¹⁸ :

$$1 \longrightarrow H^1(k, PGL_n) \xrightarrow{\delta_n} H^2(k, \mu_n) = {}_n\text{Br } k$$

Soit $[\mathcal{G}] \in {}_n\text{Br } k$. L'obstruction à ce que cette classe appartienne à l'image de δ_n est mesurée par une gerbe dont le lien est représentable par une forme de SL_n [Gi71] IV.4.2.10. Comme SL_n est semi-simple simplement connexe, cette gerbe est neutre d'après le théorème 1.7.10. Donc δ_n est bijective. □

Remarque 1.7.13. En fait, il est déjà connu que cette application est bijective dans bien d'autres cas que les corps de nombres (cf. [CTGP03]). Remarquons aussi qu'il existe des corps sur lesquels δ_n n'est pas bijective ; c'est le cas du corps K_M construit par Merkurjev pour obtenir un contre-exemple à une conjecture de Kaplansky [Me91]. Il existe en effet sur K_M une algèbre simple centrale d'indice 4, mais d'esposant 2 (i.e. dont l'image dans $\text{Br } k$ est d'ordre 2). Une telle algèbre simple centrale représente donc une classe de $H^1(K_M, PGL_4)$ dont l'image par l'isomorphisme :

$$\Delta : \text{Br}_{Az} K_M \longrightarrow \text{Br } K_M$$

¹⁸La seule trivialité de l'ensemble $H^1(k, SL_n)$ n'entraîne pas l'injectivité de δ^n cf. [Ja00].

appartient à ${}_2\text{Br } K_M$. Il s'ensuit que l'application :

$$\delta_2 : H^1(K_M, PGL_2) \longrightarrow H^2(K_M, \mu_2) = {}_2\text{Br } K_M$$

n'est pas surjective.

Par conséquent :

Corollaire 1.7.14. *Il existe une K_M -forme SL'_2 de SL_2 telle que $H^2(K_M, \text{lien } SL'_2)$ possède une classe non-neutre.*

Chapitre 2

Descente de toiseurs et points rationnels : le cas abélien

Dans [DD87], Dèbes et Douai montrent que l'obstruction à ce qu'un G -revêtement $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{B}$ de corps des modules k soit défini sur k est mesurée par une gerbe (la gerbe des modèles $\mathcal{G}(\bar{f})$ du G -revêtement) localement liée par le centre de G . Si G est abélien, ou si $Z(G)$ est un facteur direct de G , cette gerbe est neutre lorsque la suite exacte de groupes fondamentaux :

$$1 \longrightarrow \Pi_{\bar{k}}(\bar{B}^*) \longrightarrow \Pi_k(B^*) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

est scindée (où $B^* = B - D$, D étant le lieu de ramification du G -revêtement). C'est en particulier le cas lorsque la base du revêtement possède un point k -rationnel (en dehors du lieu de ramification). L'objectif de ce chapitre est d'obtenir le même type d'énoncé pour les toiseurs sous un schéma en groupes abéliens.

On se place donc dans la situation suivante : k est un corps de caractéristique nulle, dont on fixe une clôture algébrique \bar{k} et dont on note Γ le groupe de Galois absolu ; X est un k -schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ est le morphisme structural, et G est un k -groupe algébrique linéaire abélien.

Une première idée consiste à utiliser la suite spectrale de Leray attachée à cette situation :

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

Dans ce que nous serons amenés à considérer comme les “bons cas” (*i.e.* lorsque la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite), la suite exacte à 5 termes associée à la suite spectrale ci-dessus s'écrit :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

Cette suite est évidemment parfaitement adaptée à notre problème de descente, puisqu'on y lit directement l'obstruction à ce qu'un \bar{G}_X -toiseur \bar{P} sur \bar{X} de corps des modules k soit défini sur k . Plus précisément, le morphisme δ^1 défini en algèbre homologique a une interprétation en termes de gerbes : c'est celui qui associe à une classe $[\bar{P}]$ la classe d'équivalence $[D(\bar{P})]$ de la gerbe d'un quelconque de ses représentants (*cf.* [Gi71] V.3.1.4.1). Dire que \bar{P} est défini sur k , c'est exactement dire que $[\bar{P}]$ appartient à l'image de u , ce qui équivaut donc à la nullité de la gerbe $D(\bar{P}) \in H^2(k, G)$. Nous verrons que l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne alors que tout \bar{G}_X sur \bar{X} de corps des modules k est

défini sur k , ou de façon équivalente, que le morphisme u est surjectif. Notons que cette approche fournit, à peu de frais, des résultats sur la descente des G -revêtements abéliens.

Dans la deuxième section, on s'intéresse à ce qui se passe en général, si l'on n'impose plus la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$. Nous montrons que le point-clef est finalement la comparaison entre les faisceaux (sur k) G et π_*G_X . Pour illustrer les différences entre cette situation et celle de la première section, on s'intéresse en particulier à une variété X telle que :

$$\mathbb{G}_{m,\bar{X}}(\bar{X}) \neq \mathbb{G}_{m,\bar{k}}(\bar{k})$$

Plus précisément, on a :

$$\bar{k}[X]^* = \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$$

Dans cette situation particulière, l'existence d'un point k -rationnel ne suffit pas à ce que tout $\mathbb{G}_{m,\bar{X}}$ -torseur sur \bar{X} de corps des modules k soit défini sur k .

Enfin, nous nous plaçons dans la dernière section sur un corps de nombres, et nous utilisons un résultat de Skorobogatov qui assure que la descente des toseurs sous des groupes abéliens sur des "bonnes variétés" est possible dès qu'il existe sur X des points adéliques d'un certain type, ce qui est plus faible que de demander l'existence de points k -rationnels.

2.1 Conséquences de la suite spectrale de Leray

Dans cette section, k désigne un corps de caractéristique nulle, dont on choisit une clôture algébrique \bar{k} ; on note $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k . On considère G un k -groupe algébrique abélien. Enfin on se donne :

$$\pi : X \longrightarrow \text{Spec } k$$

un k -schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé, et on suppose satisfaite la condition :

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

Rappelons quelques définitions :

Définition 2.1.1. *Un morphisme de schémas $f : X \rightarrow Y$ est dit :*

- (i) **quasi-compact** si pour tout ouvert quasi-compact U de Y , l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est quasi-compacte ;
- (ii) **quasi-séparé** (resp. **séparé**) si le morphisme diagonal

$$\Delta_f : X \times_Y X \longrightarrow X$$

est quasi-compact (resp. une immersion fermée).

Un k -schéma est dit quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. séparé) si le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spec } k$ est quasi-compact (resp. quasi-séparé, resp. séparé).

Exemple 2.1.2. Un morphisme séparé est quasi-séparé, puisqu'une immersion fermée est quasi-compacte ; un morphisme noethérien est quasi-compact (cf. [EGA1] I.6.1.9) ; un morphisme affine est quasi-compact et séparé (cf. [EGA1] I.9.1.3) ; le caractère quasi-compact (resp. quasi-séparé) est stable par composition et par changement de base quelconque (cf. [EGA1] I.6.1.5, resp. I.6.1.9) ; ...

Avec ces hypothèses sur X et G , on a une suite exacte à 5 termes :

$$(S1) : 0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* G_X) \\ \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_* G_X) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

qui est la suite exacte en basses dimensions associée à la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = R^p \underline{\Gamma}_k(R^q \pi_* G_X) \implies R^{p+q} \underline{\Gamma}_X(G_X) = E^{p+q}$$

où :

$$\underline{\Gamma}_k : FAGRAB(k) \longrightarrow \mathfrak{Ab} \quad (\text{resp. } \underline{\Gamma}_X : FAGRAB(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab})$$

est le foncteur qui associe à un faisceau de groupes abéliens sur le site étale de k (resp. de X) le groupe abélien de ses sections globales. Comme par définition les foncteurs dérivés à droite de ces foncteurs sont justement les foncteurs cohomologie, on peut réécrire la suite spectrale ci-dessus :

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q \pi_* G_X) \implies H^{p+q}(X, G_X) = E^{p+q}$$

On peut maintenant rendre plus agréable l'expression de la suite (S1) grâce au théorème 5.2 de [SGA4-VIII] dont voici l'énoncé :

Théorème 2.1.3. *Soient $f : Z \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas, G un faisceau abélien sur Z , y un point de Y , \bar{y} le point géométrique au-dessus de y , relatif à une clôture séparable $k(\bar{y})$ de $k(y)$, $\bar{Y} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y, \bar{y}})$ le schéma localisé strict correspondant, $\bar{Z} = Z \times_Y \bar{Y}$, \bar{G} l'image inverse de G sur \bar{Z} . Alors l'homomorphisme canonique :*

$$(R^q f_* G)_{\bar{y}} \longrightarrow H^q(\bar{Z}, \bar{G})$$

est un isomorphisme, pour tout $q \geq 0$.

Remarque 2.1.4. Cet énoncé reste valable (d'après la remarque 5.3 de [SGA4-VIII]) pour un faisceau de groupes G sur Z non-nécessairement abélien, pour $q = 0$ et $q = 1$, en prenant pour $R^1 f_* G$ la définition de [Gi71] V.2.1 : c'est le faisceau sur Y associé au préfaisceau dont l'ensemble des sections $R^1 f_* G(Y')$ au-dessus d'un ouvert étale ($Y' \rightarrow Y$) est donné par :

$$R^1 f_* G(Y') = H^1(Z \times_Y Y', G|_{Z \times_Y Y'})$$

Corollaire 2.1.5. *Sous les hypothèses du début de cette section, on a des isomorphismes :*

$$(\pi_* G_X)_{\text{Spec } \bar{k}} \approx \bar{G}(\bar{k})$$

$$(R^1 \pi_* G_X)_{\text{Spec } \bar{k}} \approx H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$$

PREUVE : il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus avec $Z = X$, $Y = \text{Spec } k$, $f = \pi$ et $G = \bar{G}_X$, et d'utiliser (pour obtenir le premier isomorphisme) l'hypothèse $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.

□

Par conséquent, on peut réécrire la suite (S1) :

$$(S2) : 0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)$$

Remarque 2.1.6. De fait, l'image du morphisme v est incluse dans la partie transgressive $H^2(X, G_X)^{alg}$, qui est le noyau du morphisme évident :

$$H^2(X, G_X) \longrightarrow H^2(\bar{X}, \bar{G}_X)$$

Ces considérations nous amènent à introduire une nouvelle notation :

Définition 2.1.7. Soit k un corps. On appelle *k -schéma de type (*)* un k -schéma géométriquement connexe, quasi-compact et quasi-séparé.

Une première conséquence de l'exactitude de la suite (S2) est la suivante :

Théorème 2.1.8 (Obstruction abélienne à l'existence d'un point rationnel). Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma de type (*), et G un k -groupe algébrique abélien tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.

Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .

PREUVE : l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction du morphisme $v : H^2(k, G) \rightarrow H^2(X, G_X)$. Donc v est injectif¹, donc le cobord δ^1 de la suite (S2) est nul, donc le morphisme u est surjectif, d'où la conclusion.

□

Remarque 2.1.9. Il revient au même de dire, avec les notations et hypothèses du théorème, l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'un point k -rationnel de la gerbe des modèles de tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k .

Une dernière manière de traduire l'énoncé précédent est que lorsque X possède un point rationnel, il n'existe pas d'obstruction à la descente des \bar{G}_X -torseurs de corps des modules k .

En outre, on peut prolonger la suite exacte (S2) : en effet, on peut associer à toute suite spectrale :

$$E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$$

¹Puisque dans la catégorie des groupes abéliens, il est équivalent de dire qu'un morphisme est injectif ou qu'il possède une rétraction.

une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E^{2,tr} \longrightarrow E_2^{1,1} \longrightarrow E_2^{3,0}$$

où :

$$E^{2,tr} = \ker \{E^2 \longrightarrow E_2^{0,2}\}$$

Sous les hypothèses du théorème 2.1.8, on obtient ainsi la suite exacte :

$$(S3) : 0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \\ \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{alg} \xrightarrow{w} H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \xrightarrow{\delta^2} H^3(k, G)$$

On en déduit donc la :

Proposition 2.1.10. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma de type $(*)$, et G un k -groupe algébrique tels que $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$.*

Si $X(k) \neq \emptyset$ alors :

(i) *la suite :*

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^\Gamma \longrightarrow 0$$

est exacte ;

(ii) *la suite :*

$$0 \longrightarrow H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X, G_X)^{alg} \xrightarrow{w} H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier :

$$H^1(k, H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)) \approx \frac{H^2(X, G_X)^{alg}}{H^2(k, G)}$$

(iii) *le morphisme $z : H^3(k, G) \longrightarrow H^3(X, G_X)$ est injectif.*

PREUVE : l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence de rétractions des morphismes v et z , d'où la conclusion, en utilisant l'exactitude de la suite (S3). □

Nous donnons maintenant des exemples d'applications de ces propriétés aux groupes de Picard et de Brauer d'une k -variété, ainsi qu'aux G -revêtements abéliens.

• Application aux groupes de Picard et de Brauer

On s'intéresse donc ici au cas particulier où $G = \mathbb{G}_{m,k}$. De manière à pouvoir utiliser les résultats précédents, on souhaite voir remplie la condition :

$$\mathbb{G}_{m,\bar{X}}(\bar{X}) = \mathbb{G}_{m,\bar{k}}(\bar{k})$$

c'est-à-dire :

$$\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$$

Pour ces applications, nous considérons donc une k -variété X **propre**². En écrivant alors la suite (S3) avec $G = \mathbb{G}_{m,k}$, on obtient la suite exacte :

²Mais les résultats obtenus ici sont encore valables pour une variété X telle que : $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$; une telle variété n'est pas nécessairement propre (on peut par exemple penser à l'espace affine \mathbb{A}_k^n).

$$(S4) : 0 \longrightarrow \text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^\Gamma \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg} X \\ \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow H^3(k, \mathbb{G}_{m,k})$$

où : $\text{Br}^{alg} X = \ker \{ \text{Br } X \rightarrow \text{Br } \bar{X} \}$ est le groupe de Brauer *transgressif* de X . De cette suite exacte, on déduit immédiatement la :

Proposition 2.1.11. *Si X est une k -variété propre, et si $X(k) \neq \emptyset$, alors :*

(i) *tout fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k ;*

(ii) *la suite :*

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

est exacte ;

(iii) *le morphisme $H^3(k, \mathbb{G}_{m,k}) \longrightarrow H^3(X, \mathbb{G}_{m,X})$ est injectif.*

PREUVE : c'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.10.

□

Notons tout de suite que le (i) de la proposition ci-dessus ne peut pas fournir réellement d'obstruction à l'existence d'un point k -rationnel lorsque k est un corps de nombres. Plus explicitement :

Proposition 2.1.12. *Soient k un corps de nombres, \mathbb{A}_k son anneau des adèles, et soit X une k -variété propre. Si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, alors le morphisme :*

$$\text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^\Gamma$$

est un isomorphisme.

PREUVE : soit \bar{L} un fibré en droites sur \bar{X} de corps des modules k . La gerbe des modèles $D(\bar{L})$ vit dans $\text{Br } k$. Mais, comme X a un k_v -point pour toute place v de k :

$$D(\bar{L}) \otimes_k k_v = \text{loc}_v(D(\bar{L}))$$

est neutre, pour toute place v de k ($\text{loc}_v : \text{Br } k \rightarrow \text{Br } k_v$ étant le morphisme évident). En particulier, $D(\bar{L})$ est dans le noyau de l'application loc intervenant dans la célèbre suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Br } k \xrightarrow{\text{loc}} \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donc $D(\bar{L}) = 0$, donc \bar{L} est défini sur k .

□

L'exactitude de la suite (S4) a aussi des conséquences sur le calcul de l'obstruction de Brauer-Manin³ d'une variété. Explicitement, supposons toujours X propre : l'obstruction de Brauer-Manin de X associée à $\mathbb{B}(X)$ (en reprenant la terminologie de [CTS87], définition 3.1.1), que nous noterons $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X)$, est un élément de

$$\mathbb{B}(X)^D = \text{Hom}(\mathbb{B}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où $\mathbb{B}(X)$ est le groupe construit à partir du groupe de Brauer de la façon suivante : on commence par poser :

$$\text{Br}_a X = \frac{\text{Br}^{alg} X}{\text{im}(\text{Br } k \rightarrow \text{Br } X)}$$

puis on définit $\mathbb{B}(X)$ (*resp.* $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$) comme le noyau de l'application de localisation :

$$\text{Br}_a X \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a(X \otimes_k k_v) \left(\text{resp. } H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, \text{Pic } \bar{X}) \right)$$

En utilisant l'exactitude de la suite (S4) on obtient :

$$\text{Br}_a X \approx H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

donc en "passant aux noyaux sur toutes les places", on a :

$$\mathbb{B}(X) \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

Le calcul de l'obstruction de Brauer-Manin de X associée à $\mathbb{B}(X)$ se ramène donc essentiellement au calcul de $\text{Pic } \bar{X}$. D'où par exemple la :

Proposition 2.1.13. *Soient k un corps de nombres et X une k -variété qui est :*

- (i) *une variété de Severi-Brauer ;*
- (ii) *une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 ;*

alors :

$$\mathbb{B}(X) = 0$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X)$ d'une telle variété est nulle.

PREUVE : elle repose sur le fait que dans les deux cas, on a $\text{Pic } \bar{X} = \mathbb{Z}$.⁴ Donc $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, et *a fortiori* $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$. D'où la conclusion, puisque $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X) \in \mathbb{B}(X)^D$ et $\mathbb{B}(X) \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})$.

□

³Pour la définition et la construction de cette obstruction, nous renvoyons à la section 2.3.1 du présent chapitre.

⁴C'est trivial pour les variétés de Severi-Brauer, et nous renvoyons à la démonstration de la proposition suivante pour le cas des intersections complètes.

Cet énoncé n'est toutefois absolument pas surprenant dans la mesure où le groupe de Brauer de telles variétés est "trivial" dans le sens suivant :

Proposition 2.1.14. *La "conjecture de Grothendieck" est "trivialement vraie" pour les variétés de Severi-Brauer et pour les variétés intersections complètes lisses dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 sur un corps k de caractéristique nulle. Plus précisément, si X est une telle variété, alors :*

$$\mathrm{Br}_{Az} X \approx \mathrm{Br} k \approx \mathrm{Br} X$$

$\mathrm{Br}_{Az} X$ désignant le groupe des classes d'isomorphie d'algèbres d'Azumaya sur X .

PREUVE : si X est une variété de Severi-Brauer : alors il existe un entier n tel que : $\bar{X} \approx \mathbb{P}_k^n$. Par suite, $\mathrm{Pic} \bar{X} = \mathbb{Z}$, donc $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) = 0$, donc $\mathrm{Br} k = \mathrm{Br}^{alg} X$. De plus, $\mathrm{Br} \bar{X} = 0$, car le groupe de Brauer d'un espace projectif sur un corps algébriquement clos est nul [Gr68]. Donc $\mathrm{Br}^{alg} X = \mathrm{Br} X$.

Si X est une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 : commençons par montrer : $\mathrm{Pic} \bar{X} = \mathbb{Z}$. D'après le principe de Lefschetz (cf. [Har92] 15.1), k étant de caractéristique nulle, on peut supposer $\bar{k} = \mathbb{C}$. Supposons dans un premier temps que X est une hypersurface : on a le diagramme commutatif et à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) & \longrightarrow & H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) & \longrightarrow & H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

les lignes étant obtenues à partir de la suite exponentielle, et les colonnes à partir de l'inclusion : $\bar{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Pour des raisons évidentes de dimension⁵, les groupes :

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}), H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}), H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \text{ et } H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$$

sont nuls. D'autre part, le théorème de la section hyperplane de Lefschetz (cf. [GH78] p.156) assure que le morphisme :

$$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Donc :

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}^*) \approx H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^*)$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{Pic} \bar{X} \approx \mathbb{Z}$$

Pour obtenir cette propriété dans le cas où \bar{X} est une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n (et non plus seulement une hypersurface), il suffit d'appliquer le théorème de la section hyperplane "suffisamment" de fois (précisément $n - \dim \bar{X}$ fois). D'après la suite (S4), on a déjà :

$$\mathrm{Br}^{alg} X = \mathrm{Br} k$$

⁵Pour $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$, $i = 1, 2$, c'est exactement le (b) du théorème III.5.1 de [Hart77] ; pour $H^i(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$, $i = 1, 2$, c'est le (c) de l'exercice III.5.5 de *loc. cit.*

La conclusion provient alors du fait que le morphisme naturel

$$\mathrm{Br}_{A_z} X \longrightarrow \mathrm{Br} X$$

est toujours injectif, et de ce que $\mathrm{Br} \bar{X} = 0$ dans ce cas [Ma74].

□

• Application aux G -revêtements (G abélien)

On considère X une k -variété projective géométriquement irréductible et G un groupe fini abélien. Dans ce cas, G -revêtements étales et G -torseurs coïncident, et l'obstruction à ce qu'un G -revêtement $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k soit défini sur k est mesuré par une gerbe $\mathcal{G}(\bar{f})$ vivant dans $H^2(k, G)$. Une conséquence presque immédiate de la suite spectrale de Leray est l'énoncé suivant (qui est à rapprocher du théorème de Combes-Harbater) :

Théorème 2.1.15. *Avec les notations introduites plus haut, si X possède un point k -rationnel en dehors du lieu de ramification de \bar{f} , alors le G -revêtement \bar{f} est défini sur k .*

PREUVE : On note $X^* = X - R$, où R est le lieu de ramification de \bar{f} , $\bar{X}^* = \bar{X} - \bar{R}$, et $f^* : \bar{Y}^* \rightarrow \bar{X}^*$ la restriction de \bar{f} à \bar{X}^* . La condition $\bar{G}(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ est satisfaite, car G est fini, et la conclusion provient alors de ce que l'existence d'un point k -rationnel sur X^* entraîne l'existence d'une rétraction du morphisme v dans la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X^*, G) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}^*, G)^\Gamma \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \xrightarrow{v} H^2(X^*, G)$$

□

Si l'on suppose maintenant $k = \mathbb{Q}$, et :

$$X(A_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset$$

c'est-à-dire si l'on suppose que X a des points réels et des points p -adiques pour tout nombre premier p , alors :

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = 0$$

et :

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = 0, \quad \forall p \text{ premier}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{G}(\bar{f}) \in \mathrm{III}^2(\mathbb{Q}, G) = 0$$

On retrouve ainsi le principe local-global de Dèbes et Douai (cf. [DD97] theorem 3.8) :

Théorème 2.1.16 (Principe local-global pour les G -revêtements abéliens). *Avec les notations indiquées ci-dessus, un G -revêtement $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules \mathbb{Q} est défini sur \mathbb{Q} si et seulement si il est défini sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q}_p pour tout premier p . C'est en particulier le cas si X possède des points adéliques.*

2.2 De l'importance de la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$

Nous commençons par un exemple (dû à J.-L. Colliot-Thélène et O. Gabber) illustrant le caractère indispensable de cette condition. Soit k un corps possédant une extension cyclique non-triviale L . Il existe donc une classe α non-nulle dans $H^2(k, \mathbb{Z})$. On considère le k -schéma :

$$X = \mathbb{G}_m = \text{Spec } k[T, T^{-1}]$$

On fixe \bar{k} une clôture séparable de k , et on note comme d'habitude $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. Les fonctions inversibles sur \bar{X} sont données par :

$$\bar{k}[X]^* \approx \bar{k}^* \oplus \mathbb{Z}$$

le scindage étant obtenu par évaluation en $T = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \bar{k}[X]^* & \xrightarrow{\text{ev}_1} & \bar{k}^* \longrightarrow 0 \\ & & & & & \swarrow & \\ & & n \longmapsto & T^n & & & \\ & & & \mu T^n \longmapsto & \mu & & \end{array}$$

On en déduit la suite exacte :

$$H^2(k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^2(k, \bar{k}[X]^*) \longrightarrow \text{Br } k$$

Remarquons que le morphisme i est injectif, car $H^1(k, \bar{k}^*) = 0$. Notons :

$$\beta = i(\alpha).$$

β est donc un élément non-nul de $H^2(k, \bar{k}[X]^*)$. D'autre part, on a un morphisme⁶ :

$$j : H^2(k, \bar{k}[X]^*) \longrightarrow \text{Br } X$$

Comme X est affine, le monomorphisme de groupes :

$$\Delta : \text{Br}_{Az} X \longrightarrow \text{Br } X$$

obtenu en associant à une algèbre d'Azumaya sur X la gerbe de ses banalisations (cf. [Gi71] V.4.2) est un isomorphisme (cf. [Ga80] thm. 1 p.163). Par suite il existe un schéma de Severi-Brauer $Y \rightarrow X$ telle que :

$$\Delta(Y) = j(\beta)$$

Comme l'évaluation de β en 1 est triviale, Y possède un point k -rationnel au-dessus de $T = 1$. En particulier :

$$Y(k) \neq \emptyset$$

⁶C'est l'edge $E_2^{2,0} \rightarrow E^2$ de la suite spectrale de Leray :

$$H^p(k, R^q \pi_* \mathbb{G}_{m,X}) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{G}_{m,X}).$$

De la suite spectrale de Leray et du morphisme $Y \rightarrow X$ on déduit le diagramme commutatif et à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pic } Y & \longrightarrow & (\text{Pic } \bar{Y})^\Gamma & \xrightarrow{\delta_Y} & H^2(k, \bar{k}[Y]^*) & \xrightarrow{u_Y} & \text{Br } Y \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow w & & \uparrow \\ \text{Pic } X & \longrightarrow & (\text{Pic } \bar{X})^\Gamma & \xrightarrow{\delta_X} & H^2(k, \bar{k}[X]^*) & \xrightarrow{u_X} & \text{Br } X \end{array}$$

On a $\bar{k}[X]^* = \bar{k}[Y]^*$,⁷ et w est un isomorphisme. β (identifié à son image par w dans $H^2(k, \bar{k}[Y]^*)$) est non-nul, mais $u_Y(\beta) = 0$. Donc le morphisme u_Y n'est pas injectif, malgré l'existence d'un point k -rationnel. En particulier, le morphisme $\text{Pic } Y \rightarrow (\text{Pic } \bar{Y})^\Gamma$ n'est pas surjectif.

Proposition 2.2.1. *Pour le k -schéma Y construit ci-dessus, le morphisme*

$$\text{Pic } Y \rightarrow (\text{Pic } \bar{Y})^\Gamma$$

n'est pas surjectif, bien que Y possède un point k -rationnel.

Nous montrons maintenant pourquoi, sur cet exemple, l'existence d'un point k -rationnel sur Y n'entraîne pas l'existence d'une rétraction du morphisme v dans la suite exacte (c'est la suite (S1) déduite de la suite spectrale de Leray) :

$$(S5) : \text{Pic } Y \xrightarrow{u} H^0(k, R^1\pi_*\mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_*\mathbb{G}_{m,Y}) \xrightarrow{v} \text{Br } Y$$

où π désigne le morphisme structural $Y \rightarrow \text{Spec } k$, obtenu par composition à partir des morphismes $Y \rightarrow X$ et $X \rightarrow \text{Spec } k$.

Commençons par décrire δ^1 : soit \mathcal{P} un élément de $H^0(k, R^1\pi_*\mathbb{G}_{m,Y})$; c'est une section globale du faisceau $R^1\pi_*\mathbb{G}_{m,Y}$, et c'est donc la donnée :

- d'une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$;
- pour tout $i \in I$, d'un $\mathbb{G}_{m,Y_{L_i}}$ -torseur $P_i \rightarrow Y_{L_i}$;
- pour tout couple $(i, j) \in I \times I$, d'un isomorphisme :

$$\varphi_{ij} : P_j|_{Y_{L_{ij}}} \longrightarrow P_i|_{Y_{L_{ij}}}$$

On peut maintenant donner une description tout-à-fait concrète de ce qui empêche \mathcal{P} d'appartenir à l'image du morphisme u . Pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$, on a le diagramme

⁷Car le morphisme $Y \rightarrow X$ est lisse avec des fibres propres et géométriquement intègres. Donc une fonction inversible sur Y a une restriction à la fibre générique qui est constante (je remercie D. Harari pour cet argument).

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 P_k \times_{Y_{L_k}} Y_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}} \\
 & \searrow \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} & \nearrow \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \\
 & P_j \times_{Y_{L_j}} Y_{L_{ijk}} &
 \end{array}$$

qui n'a aucune raison d'être commutatif. On pose alors :

$$c_{ijk} = \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \circ \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} \circ \left(\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}} \right)^{-1}$$

Il est immédiat que $(c_{ijk})_{i,j,k \in I}$ est un 2-cocycle, qui mesure l'obstruction à ce que la famille des isomorphismes $(\varphi_{ij})_{i,j \in I}$, qui est une donnée de *recollement* sur les P_i soit une donnée de *descente* ;

$$\begin{array}{ccc}
 P_k \times_{Y_{L_k}} Y_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{Y_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}} \\
 & \searrow \varphi_{jk}|_{Y_{L_{ijk}}} & \nearrow \varphi_{ij}|_{Y_{L_{ijk}}} \\
 & P_j \times_{Y_{L_j}} Y_{L_{ijk}} & \\
 & \Downarrow c_{ijk} &
 \end{array}$$

Remarquons maintenant que :

$$c_{ijk} \in \text{ad}_{\mathbb{G}_m, Y_{L_{ijk}}} \left(P_i \times_{Y_{L_i}} Y_{L_{ijk}} \right), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

et du fait que \mathbb{G}_m est abélien (!), on a :

$$c_{ijk} \in \mathbb{G}_{m, Y_{L_{ijk}}} (Y_{L_{ijk}}) = \mathcal{O}_{Y_{L_{ijk}}}^* (Y_{L_{ijk}}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

Or, par définition du faisceau $\pi_* \mathbb{G}_{m, Y}$, ceci signifie encore que :

$$c_{ijk} \in \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} (L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

Par suite, la classe du 2-cocycle :

$$[c_{ijk}] \in \check{H}^2 \left((L_i/k)_{i \in I}, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} \right) \hookrightarrow \check{H}^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y}) \simeq H^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y})$$

(où le dernier isomorphisme est dû au théorème III.2.17 de [Mi80]) est exactement l'obstruction à ce que \mathcal{P} appartienne à l'image de u .

Passons maintenant à la description de v . Soit $\mathcal{G} \in H^2 (k, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y})$. En utilisant une fois encore le théorème III.2.17 de [Mi80], \mathcal{G} est représenté par un 2-cocycle :

$$(g_{ijk})_{i,j,k \in I'} \in Z^2 \left((L_i/k)_{i \in I'}, \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} \right)$$

Par définition, on a donc :

$$g_{ijk} \in \pi_* \mathbb{G}_{m, Y} (L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I'^3$$

c'est-à-dire :

$$g_{ijk} \in \mathbb{G}_{m,Y}(Y_{L_{ijk}}), \forall (i, j, k) \in I'^3$$

On obtient donc trivialement un 2-cocycle :

$$(g_{ijk})_{i,j,k \in I'} \in Z^2((Y_{L_i}/Y)_{i \in I'}, \mathbb{G}_{m,Y})$$

ce qui fournit donc une interprétation particulièrement claire du morphisme :

$$v : H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

Montrons maintenant que l'existence d'un point k -rationnel entraîne l'existence d'un morphisme :

$$r : H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow \text{Br } k$$

Soit $\mathfrak{G} \in H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$; une nouvelle application du théorème III.2.17 de [Mi80] permet de supposer que \mathfrak{G} est représenté par un 2-cocycle⁸ :

$$(\gamma_{\alpha\beta\epsilon})_{\alpha,\beta,\epsilon \in A} \in Z^2((Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}, \mathbb{G}_{m,Y})$$

Pour tout $(\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$, on a⁹ :

$$\gamma_{\alpha\beta\epsilon} \in G_Y(Y_{\alpha\beta\epsilon})$$

Puisque Y possède un point k -rationnel y , on peut considérer le produit fibré :

$$Y_\alpha \times_{Y,y} \text{Spec } k$$

C'est un k -schéma étale, étant obtenu par changement de base à partir du morphisme $Y_\alpha \rightarrow Y$, qui est étale par hypothèse. On note $\text{Spec } K_\alpha$ ce schéma. Pour résumer la situation, on a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{G}_{m,Y} \\
 & & \swarrow \quad \downarrow h \\
 Y_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y \\
 \uparrow y_\alpha & & \downarrow \pi \quad \downarrow y \\
 \text{Spec } K_\alpha & \xrightarrow{q_\alpha} & \text{Spec } k \\
 & & \swarrow \quad \downarrow \\
 & & \mathbb{G}_{m,k}
 \end{array}$$

⁸Où $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement étale de Y qui ne provient pas *a priori* d'un recouvrement étale de k .

⁹On a noté : $Y_{\alpha\beta\epsilon} = Y_\alpha \times_Y Y_\beta \times_Y Y_\epsilon$.

Revenons maintenant à notre cocycle $(\gamma_{\alpha\beta\epsilon})_{\alpha,\beta,\epsilon}$. Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$, le nouveau diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{G}_{m,Y} \\
 & & & \nearrow^{c_{\alpha\beta\epsilon}} & \downarrow h \\
 Y_{\alpha\beta\epsilon} & \xrightarrow{f_{\alpha\beta\epsilon}} & Y & & \mathbb{G}_{m,k} \\
 \uparrow y_{\alpha\beta\epsilon} & & \downarrow \pi & \curvearrowright y & \swarrow \\
 \text{Spec } K_{\alpha\beta\epsilon} & \xrightarrow{q_{\alpha\beta\epsilon}} & \text{Spec } k & &
 \end{array}$$

où :

$$K_{\alpha\beta\epsilon} = K_{\alpha} \otimes_k K_{\beta} \otimes_k K_{\epsilon}$$

On pose :

$$\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y = h \circ c_{\alpha\beta\epsilon} \circ y_{\alpha\beta\epsilon}, \quad \forall (\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$$

Alors :

$$\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y \in \mathbb{G}_{m,k}(K_{\alpha}), \quad \forall (\alpha, \beta, \epsilon) \in A^3$$

Ce faisant, on obtient donc un 2-cocycle :

$$(\widehat{c_{\alpha\beta\epsilon}}^y) \in Z^2((K_{\alpha}/k)_{\alpha \in A}, \mathbb{G}_{m,k})$$

Il est immédiat que l'on a ainsi défini un morphisme :

$$r : H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow \text{Br } k$$

mais du fait que $\pi_* \mathbb{G}_{m,Y} \neq \mathbb{G}_{m,k}$, ce n'est pas une rétraction du morphisme :

$$u : H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

mais seulement une rétraction du morphisme :

$$u' : \text{Br } k \longrightarrow H^2(Y, \mathbb{G}_{m,Y})$$

défini de manière évidente vu ce qui précède. Pour conclure, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Pic } Y & \xrightarrow{u} & H^0(k, R^1 \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(k, \pi_* \mathbb{G}_{m,Y}) & \xrightarrow{v} & \text{Br } Y \\
 & & & & \swarrow i & & \uparrow u' \\
 & & & & \text{Br } k & & \downarrow r
 \end{array}$$

Remarque 2.2.2. Nous avons affirmé un peu vite que r est une rétraction du morphisme u' . Pour compléter la preuve de cette affirmation, il reste encore à prouver le fait suivant : si L/k est une extension étale, et en reprenant les notations habituelles :

$$\begin{array}{ccc} Y_L & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_L \downarrow & & \downarrow \pi \quad y \\ \text{Spec } L & \xrightarrow{q} & \text{Spec } k \end{array}$$

alors :

$$\text{Spec } L \simeq Y_L \times_{f,Y,y} \text{Spec } k$$

Pour ce faire, on commence par remarquer que l'existence du point k -rationnel y entraîne l'existence d'une section :

$$y_L : \text{Spec } L \rightarrow Y_L$$

du morphisme π_L . Son existence (et son unicité d'ailleurs) est assurée par la propriété universelle du produit fibré, puisque l'on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } L & & & & \\ & \searrow^{y_L} & & & \\ & & Y_L & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{id} & \downarrow \pi_L & & \downarrow \pi \quad y \\ & & \text{Spec } L & \xrightarrow{q} & \text{Spec } k \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a larger diagram with a curved arrow $y \circ q$ from $\text{Spec } L$ to Y and a dashed arrow y_L from $\text{Spec } L$ to Y_L . The identity arrow id goes from $\text{Spec } L$ to $\text{Spec } L$. The curved arrow $y \circ q$ is labeled $y \circ q$.)

Donnons nous maintenant un schéma Z et deux morphismes

$$g : Z \rightarrow X_L \quad \text{et} \quad h : Z \rightarrow \text{Spec } k$$

tels que : $f \circ g = y \circ h$. On a :

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow^{h} & & & \\ & & \text{Spec } L & \xrightarrow{q} & \text{Spec } k \\ & \searrow^{g} & \uparrow \pi_L & & \uparrow \pi \quad y \\ & & Y_L & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Il existe un unique morphisme

$$Y \rightarrow \text{Spec } L$$

rendant commutatif tout le diagramme ci-dessus, le morphisme $\pi_L \circ g$. En effet, on a d'un côté :

$$f \circ y_L \circ \pi_L \circ g = f \circ g$$

et de l'autre :

$$y \circ q \circ \pi_L \circ g = f \circ y_L \circ \pi_L \circ g = f \circ g$$

Enfin :

$$q \circ \pi_L \circ g = \pi \circ f \circ g = \pi \circ y \circ h = h$$

Par suite, le k -schéma $\text{Spec } L$ est effectivement le produit fibré :

$$\text{Spec } L \simeq Y_L \times_{f,Y,y} \text{Spec } k$$

2.3 Points adéliques et toiseurs

Le but de cette section est d'illustrer par des applications un résultat de Colliot-Thélène et Sansuc [CTS87] (étendu par Skorobogatov [Sk99] des tores aux groupes multiplicatifs) assurant que l'existence de points adéliques est suffisante pour descendre des toiseurs sous des groupes abéliens sur des variétés propres. Jusqu'à la fin de ce chapitre :

- k est un corps de nombres, dont on note Ω_k l'ensemble des places et \mathbb{A}_k l'anneau des adèles ;
- X est une k -variété propre, de telle sorte que¹⁰ :

$$X(\mathbb{A}_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$$

On note toujours $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural.

On identifie l'ensemble des points k -rationnels de X à son image dans $\prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$ par le morphisme diagonal :

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \\ x & \longmapsto & (x_v = x \circ p_v)_v \end{array}$$

où :

$$p_v : \text{Spec } k_v \longrightarrow \text{Spec } k$$

est le morphisme évident.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x_v = x \circ p_v & \downarrow \pi \\ \text{Spec } k_v & \xrightarrow{p_v} & \text{Spec } k \end{array}$$

¹⁰En général, on a seulement l'inclusion : $X(\mathbb{A}_k) \subset \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$. Le critère valuatif de propreté (cf. [Hart77] II.4.7) fournit l'autre inclusion.

On a donc évidemment l'inclusion :

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)$$

Il est donc immédiat que $X(k) \neq \emptyset \implies X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$. Un problème difficile est d'arriver à déterminer pour quelles variétés la réciproque est vraie, *i.e.* l'existence de points adéliques sur X entraîne l'existence de points rationnels sur X ; c'est ce que l'on appelle le principe de Hasse. Plus précisément :

Définition 2.3.1. *Soit X une variété propre sur un corps de nombres k .*

- (i) *Si $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, on dit que X a des points **partout localement**.*
- (ii) *On dit que la variété X est un **contre-exemple au principe de Hasse** si X a des points partout localement, mais ne possède pas de point k -rationnel.*

• Exemples de variétés satisfaisant le principe de Hasse

- les quadriques projectives lisses [Se70] ;
- les k -formes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ [CTS87] ;
- les variétés de Severi-Brauer [CTS87] ;
- les surfaces de Del Pezzo de degré 6 [CTS87] ;
- certaines intersections de quadriques [CTCS80] ;
- les surfaces cubiques singulières dans \mathbb{P}_k^3 (Skolem) ;
- les toseurs sous un groupe semi-simple simplement connexe (Kneser-Harder, *cf.* théorème 4.2 de [Sa81]).

• Quelques contre-exemples au principe de Hasse

- la surface cubique de Cassels et Guy [CG66] : c'est la surface de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ d'équation :

$$5X^3 + 9Y^3 + 10Z^3 + 12T^3 = 0$$

Swinerton-Dyer [Sw62] a également exhibé une surface projective lisse contre-exemple au principe de Hasse ;

- Poonen [Po99] a prouvé que pour tout $t \in \mathbb{Q}$, la courbe de \mathbb{P}^2 d'équation :

$$5X^3 + 9Y^3 + 10Z^3 + 12 \left(\frac{t^{12} - t^4 - 1}{t^{12} - t^8 - 1} \right)^3 (X + Y + Z)^3 = 0$$

est un contre-exemple au principe de Hasse ;

- Siksek et Skorobogatov [SSk03] ont exhibé une courbe de Shimura contre-exemple au principe de Hasse ;
- enfin Sarnak et Wang [SW95] ont construit une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^4$ de degré 1130 qui est un contre-exemple au principe de Hasse, sous réserve que la conjecture de Lang (*cf.* [La91] conjecture 1.2 p.179) tienne.

Ce dernier contre-exemple nous intéresse particulièrement, puisque l'obstruction de Brauer-Manin d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^4$ est nulle. Comme le résultat de Skorobogatov que l'on veut utiliser est fortement lié à cette obstruction, nous rappelons ici sa construction.

2.3.1 Construction de l'obstruction de Brauer-Manin

Soit X une k -variété propre. On a un accouplement naturel :

$$(Acc) : X(k) \times \text{Br } X \longrightarrow \text{Br } k$$

$$(x, b) \longmapsto x^*b$$

que l'on peut décrire de la manière suivante : comme d'après nos hypothèses $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$, la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q\pi_*\mathbb{G}_{m,X}) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{G}_{m,X}) = E^{p+q}$$

fournit la suite longue de cohomologie :

$$0 \longrightarrow \text{Pic } X \longrightarrow (\text{Pic } \bar{X})^{\Gamma} \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

Si x est un point rationnel, c'est-à-dire une section du morphisme structural :

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{\pi} & \text{Spec } k \end{array}$$

alors il fournit une rétraction notée x^* de l'edge :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{2,0} = \text{Br } k & \longrightarrow & \text{Br } X = E^2 \\ & \curvearrowleft & \\ & x^* & \end{array}$$

Le morphisme x^* ainsi décrit est celui intervenant dans la définition de l'accouplement (Acc) .

Remarque 2.3.1.1. Dans le cas où X est une variété pour laquelle la “conjecture de Grothendieck” sur les groupes de Brauer est vraie, on a une interprétation plus géométrique pour le morphisme x^* .

Supposons que X soit une telle variété. Soit $b \in \text{Br } X$. Notons \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya sur X correspondant¹¹ à b ; alors x^*b n'est autre que la fibre \mathcal{A}_x de \mathcal{A} au point x . Evidemment, \mathcal{A}_x est une k -algèbre simple centrale, car c'est une $k(x)$ -algèbre simple centrale, et la rationalité de x entraîne $k(x) = k$.

On veut maintenant rendre local l'accouplement (Acc) . Pour toute place $v \in \Omega_k$ on peut évidemment définir de la même manière que (Acc) un accouplement :

$$(Acc_v) : X(k_v) \times \text{Br } X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(x_v, b) \longmapsto \text{inv}_v(x_v^*b)$$

¹¹On entend par là que : $\Delta([\mathcal{A}]) = b$, où $\Delta : \text{Br}_{Az} X \rightarrow \text{Br } X$ est le morphisme de Grothendieck.

où $\text{inv}_v : \text{Br } k_v \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'invariant fourni par la théorie du corps de classes. En effet, comme x_v est un point de X à valeurs dans $\text{Spec } k_v$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow x_v & \downarrow \pi \\ \text{Spec } k_v & \xrightarrow{p_v} & \text{Spec } k \end{array}$$

et x_v induit donc un morphisme :

$$x_v^* : \text{Br } X \longrightarrow \text{Br } k_v$$

Remarque 2.3.1.2. Une fois encore, si $\text{Br}_{\text{Az}} X = \text{Br } X$, on a une interprétation géométrique de x_v^* . En effet, soit $b \in \text{Br } X$, et soit \mathcal{A} une algèbre d'Azumaya correspondant à b . Dans ce cas $x_v^* b$ n'est autre que le pullback de \mathcal{A} par le morphisme x_v :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A} \\ & \nearrow x_v^* b \approx \mathcal{A} \times_X \text{Spec } k_v & \downarrow \\ & & X \\ & \nearrow x_v & \downarrow \pi \\ \text{Spec } k_v & \xrightarrow{p_v} & \text{Spec } k \end{array}$$

On définit maintenant un accouplement global à l'aide de la famille d'accouplements locaux (Acc_v) :

$$\begin{aligned} \langle \bullet, \bullet \rangle : X(\mathbb{A}_k) \times \text{B}(X) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((x_v)_v, b) &\longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}) \end{aligned}$$

où \tilde{b} désigne un représentant dans $\text{Br}^{\text{alg}} X \subset \text{Br } X$ de b . Il n'est *a priori* pas évident que $\langle (x_v)_v, b \rangle$ soit bien défini par la formule ci-dessus. Nous rappelons brièvement les arguments qui prouvent la cohérence de cette définition.

Fait 2.3.1.3. La somme $\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b})$ est finie.

PREUVE : puisque $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$, on a $x_v^* b \in \text{Br } \mathcal{O}_v$, pour presque tout $v \in \Omega_k$, d'où la conclusion puisque $\text{Br } \mathcal{O}_v = 0$ (cf. [Mi80]).

□

Fait 2.3.1.4. *La valeur de la somme $\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b})$ ne dépend pas du représentant $\tilde{b} \in \text{Br}^{\text{alg}} X$ de b choisi.*

PREUVE : soient \tilde{b} et \tilde{b}' deux représentants de b . Alors il existe $c \in \text{Br}^{\text{cst}} X$ tel que¹² :

$$\tilde{b} = \tilde{b}' + c$$

Donc :

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}) = \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}') + \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* c)$$

On déduit de la suite exacte :

$$(S7) : \quad 0 \longrightarrow \text{Br } k \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} \text{Br } k_v \xrightarrow{\sum \text{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

la nullité de la somme $\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* c)$, ce qui achève la preuve du fait. □

Les deux faits précédents nous assurent donc que l'accouplement $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bien défini. Nous énonçons maintenant sa propriété fondamentale :

Proposition 2.3.1.5. *Avec les notations introduites précédemment :*

(i) *La valeur de l'accouplement :*

$$\langle (x_v)_v, b \rangle$$

ne dépend pas du point adélique de X choisi.

(ii) *Si $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ appartient à l'image du morphisme diagonal :*

$$X(k) \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$$

alors : $\langle (x_v)_v, b \rangle = 0$.

PREUVE : soient $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ et $b \in \mathbb{B}(X)$. Choisissons un représentant $\tilde{b} \in \text{Br}^{\text{alg}} X$ de b . Pour toute place v de k , on a :

$$\text{loc}_v(b) \in \text{Br}^{\text{cst}} X_v$$

ce qui prouve (i).

Soient maintenant $b \in \mathbb{B}(X)$ et \tilde{b} un représentant de b . On a :

$$x_v^* \tilde{b} = (x \circ p_v)^* \tilde{b} = p_v^*(x^* \tilde{b}), \quad \forall v \in \Omega_k,$$

et $x^* \tilde{b} \in \text{Br } k$.

¹²On a noté : $\text{Br}^{\text{cst}} X = \text{im} \{ \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } X \}$.

En utilisant une nouvelle fois l'exactitude de la suite (S7), on en déduit finalement que :

$$\langle (x_v)_v, b \rangle = 0$$

□

En conclusion, on a donc défini un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X) : \mathbb{B}(X) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ b &\longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* \tilde{b}) \end{aligned}$$

où $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ est quelconque, et \tilde{b} est un représentant de b dans $\text{Br}^{alg} X$. De la proposition précédente, on déduit alors le :

Théorème 2.3.1.6.

$$\text{Si } X(k) \neq \emptyset, \text{ alors } m_{\mathcal{H}}(X) = 0 \in \mathbb{B}(X)^D.$$

Notons enfin pour terminer ces rappels que (voir p. 41) :

$$(\clubsuit) \quad \mathbb{B}(X)^D \approx \text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X})^D$$

puisque l'on déduit de la suite exacte :

$$\text{Br } k \longrightarrow \text{Br}^{alg} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) \longrightarrow 0$$

l'isomorphisme :

$$\text{Br}_a X \approx H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

puis l'isomorphisme (\clubsuit) , en "passant aux noyaux sur toutes les places" et en dualisant.

2.3.2 Exemples de calculs de $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X)$

Exemple 2.3.2.1 (Variétés de Severi-Brauer et intersections complètes lisses). D'après la proposition 2.1.13, on a le :

Lemme 2.3.2.2. *Si V est une k -variété de Severi-Brauer ou une intersection complète lisse de dimension ≥ 3 , alors $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(V) = 0$.*

Exemple 2.3.2.3 (Surfaces de Del Pezzo). Rappelons que l'on appelle *surface de Del Pezzo* une surface projective lisse dont le diviseur anticanonique est ample. Le plan projectif est un exemple de surface de Del Pezzo¹³. Un exemple moins trivial est fourni par la surface cubique non-singulière de \mathbb{P}^3 . Cette dernière est obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 en 6 points en position générale (non co-coniques et 3 à 3 non-alignés). Donc son groupe de Picard est \mathbb{Z}^7 (un premier exemplaire de \mathbb{Z} correspond à \mathbb{P}^2 , et les 6 autres sont fournis

¹³Puisque $K_{\mathbb{P}^2} = -3\mathbb{P}^1$, d'après [Hart77] II.8.20.1.

par les diviseurs exceptionnels correspondant aux éclatements successifs). D'une manière plus générale, une surface de Del Pezzo est toujours obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 en un certain nombre de points (cf. [Ma74]), et son groupe de Picard est donc toujours de la forme \mathbb{Z}^N . Si Γ opère trivialement sur \mathbb{Z}^N (c'est alors un Γ -module de permutation), on a (cf. [CTS87]) :

$$\text{III}^1(k, \mathbb{Z}^N) = 0$$

d'où la nullité de $m_{\mathcal{H}, \mathbb{B}(X)}(X)$ dans ce cas.

Exemple 2.3.2.4 (Espaces homogènes sous SL_n avec isotropie finie). Soit \bar{H} un sous-groupe fini (non-nécessairement abélien) de $SL_n(\bar{k})$.¹⁴ On considère alors le \bar{k} -espace homogène :

$$\bar{V} = SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$$

On choisit X une k -forme¹⁵ de \bar{V} . D'après le corollaire 4.6 de [FI73], on a :

$$\text{Pic } \bar{X} = \widehat{H}$$

Il s'ensuit que l'obstruction de Brauer-Manin d'une telle variété X n'est en général pas nulle.

Lemme 2.3.2.5. Soient n un entier, et \bar{H} un \bar{k} -groupe algébrique qui est un sous-groupe de $SL_n(\bar{k})$. Soit X une k -forme de $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$. Alors :

$$m_{\mathcal{H}}(X) \in \text{III}^1(k, \widehat{H})$$

Nous terminons ces exemples en faisant le lien entre cette remarque et la dualité de Tate-Poitou. On suppose maintenant \bar{H} abélien fini, et on note toujours X une forme de $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$. On peut associer à X la gerbe de ses trivialisations, c'est-à-dire la gerbe \mathcal{G}_X qui mesure l'obstruction à ce que X soit dominé par un SL_n -torseur sur k (nécessairement trivial). Dans la terminologie de Springer [Sp66], la donnée de X correspond à la donnée d'un 1-cocycle à valeurs dans $SL_n(\bar{k}) / \bar{H}$, et \mathcal{G}_X est alors la classe du 2-cocycle à valeurs dans \bar{H} mesurant ce qui empêche de le relever en un 1-cocycle à valeurs dans $SL_n(\bar{k})$.

Supposons que X ait un point partout localement. Alors¹⁶ :

$$\mathcal{G}_X \in \text{III}^2(k, \bar{H})$$

Moyennant la définition de la cohomologie à valeurs dans un topos localement annelé (cf. [SGA4-V]) on peut définir l'obstruction de Brauer-Manin¹⁷ de la gerbe \mathcal{G}_X , notée $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_X)$ [DEZ03]. Celle-ci a le bon goût de satisfaire la propriété suivante :

¹⁴En particulier, \bar{H} est un \bar{k} -groupe algébrique; il ne provient pas nécessairement d'un groupe défini sur k .

¹⁵Il est un peu abusif d'utiliser parler de " k -forme" ici; nous voulons juste dire que X est une k -variété telle que : $X \otimes_k \bar{k} \approx \bar{V}$.

¹⁶Pour être complètement rigoureux, il eût fallu dire : \mathcal{G}_X représente une classe dans $\text{III}^2(k, \bar{H})$. Cet abus est justifié par le fait que si un représentant dans une classe d'équivalence est une gerbe neutre, alors tous les représentants de cette classe sont des gerbes neutres.

¹⁷Nous renvoyons au chapitre IV pour la définition de l'obstruction de Brauer-Manin d'une gerbe.

Proposition 2.3.2.6. *Avec les notations introduites ci-dessus :*

(i) $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_X) = m_{\mathcal{H}}(X)$;

(ii) *la dualité de Tate-Poitou :*

$$\mathbb{H}^2(k, \bar{H}) \times \mathbb{H}^1(k, \widehat{H}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

est explicitement réalisée grâce à l'obstruction de Brauer-Manin des gerbes, dans le sens où :

$$\begin{array}{ccc} m_{\mathcal{H}} : \mathbb{H}^2(k, \bar{H}) & \longrightarrow & \mathbb{H}^1(k, \widehat{H})^D \\ \mathcal{G} & \longmapsto & m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

PREUVE : c'est une conséquence de la proposition 3.2 de [DEZ03].

□

2.3.3 Brauer-Manin orthogonalité et descente

Après ces quelques exemples et avant d'énoncer le théorème de Skorobogatov, il nous faut introduire un peu de terminologie :

Définition 2.3.3.1. *Un point adélique $(x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k)$ est dit **Brauer-Manin orthogonal** à $b \in \text{Br } X$ si :*

$$\sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* b) = 0$$

*cette somme étant finie d'après le fait 2.3.4. Soit B une partie de $\text{Br } X$; le point adélique $(x_v)_v$ est dit **Brauer-Manin orthogonal à B** s'il est Brauer-Manin orthogonal à tout $b \in B$. On note :*

$$X(\mathbb{A}_k)^B = \left\{ (x_v)_v \in X(\mathbb{A}_k) \left| \sum_{v \in \Omega_k} \text{inv}_v(x_v^* b) = 0, \forall b \in B \right. \right\}$$

l'ensemble des points adéliques Brauer-Manin orthogonaux à B .

Exemple 2.3.3.2. D'après les exemples précédents tout point adélique sur une variété de Severi-Brauer (resp. une intersection complète lisse dans \mathbb{P}^n de dimension ≥ 3 , resp. une surface de Del Pezzo) X est Brauer-Manin orthogonal à $\text{Br } X$, i.e :

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br } X} = X(\mathbb{A}_k)$$

Soit B une partie de $\text{Br } X$. On a la suite d'inclusions :

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br } X} \subset X(\mathbb{A}_k)^B \subset X(\mathbb{A}_k) \quad (2.1)$$

où la première inclusion découle de la proposition 2.3.1.5(ii), et les deux autres sont triviales. Nous allons justement introduire un nouveau maillon dans cette chaîne. Soit M un k -groupe algébrique abélien, tel que $\bar{M}_X(\bar{X}) = \bar{M}(\bar{k})$ (e.g. M fini). De la suite spectrale “des Ext” [CTS87] :

$$\text{Ext}_{(\text{Spec } k)_{\text{ét}}}^p(M, R^q \pi_* \mathbb{G}_{m,X}) \implies \text{Ext}_{X_{\text{ét}}}^{p+q}(M_X; \mathbb{G}_{m,X})$$

on déduit la suite à 5 termes :

$$H^1(k, M) \longrightarrow H^1(X, M_X) \xrightarrow{\text{type}} \text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M(\bar{k})}, \text{Pic } \bar{X}) \xrightarrow{\partial} H^2(k, M) \longrightarrow H^2(X, M_X)$$

Définition 2.3.3.3. Soit $Y \rightarrow X$ un M_X -torseur. On appelle **type de Y** l'image de $[Y]$ par le morphisme du même nom dans $\text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M(\bar{k})}, \text{Pic } \bar{X})$. Si $\widehat{M(\bar{k})} = \text{Pic } \bar{X}$, on appelle **torseur universel sur X** un M_X -torseur dont le type est l'identité de $\text{Pic } \bar{X}$.

Remarque 2.3.3.4. L'exactitude de la suite ci-dessus a la conséquence suivante : pour tout $\lambda \in \text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M(\bar{k})}, \text{Pic } \bar{X})$:

$$\partial(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \text{il existe un } M_X\text{-torseur sur } X \text{ de type } \lambda.$$

La suite à 5 termes que l'on vient d'évoquer n'est évidemment pas sans rapport avec celle déduite de la suite spectrale de Leray :

$$H^1(k, M) \longrightarrow H^1(X, M_X) \longrightarrow H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \xrightarrow{D} H^2(k, M) \longrightarrow H^2(X, M_X)$$

Nous renvoyons à l'appendice B de [HS02] pour une comparaison détaillée de ces deux suites spectrales. Les groupes $H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma}$ et $\text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M(\bar{k})}, \text{Pic } \bar{X})$ sont isomorphes (cf. [CTS87],[HS02]), et on note :

$$\tau : H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \longrightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M(\bar{k})}, \text{Pic } \bar{X})$$

cet isomorphisme. Ceci nous amène à introduire une nouvelle définition :

Définition 2.3.3.5. Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{M}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k . On appelle **type de \bar{Y}** l'image de \bar{Y} par le morphisme τ .

On déduit des remarques précédentes le :

Lemme 2.3.3.6. Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{M}_X -torseur de corps des modules k . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k ;
- (ii) la gerbe des modèles $D(\bar{Y})$ est neutre ;
- (iii) la gerbe $\partial(\tau(\bar{Y}))$ est neutre ;

(iv) il existe un M_X -torseur sur X de type $\tau(\bar{Y})$.

En outre, ces conditions sont évidemment satisfaites lorsque $X(k) \neq \emptyset$.

Soit $\lambda \in \text{Hom}_\Gamma(\widehat{M}(\bar{k}), \text{Pic } \bar{X})$. On peut lui associer un morphisme de groupes :

$$\lambda_* : H^1(k, \widehat{M}) \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

l'image d'un \widehat{M} -torseur $Y \rightarrow \text{Spec } k$ par λ_* étant donnée par extension du groupe structural à l'aide de λ : explicitement, le toseur $\lambda_* Y$ n'est autre que le $\text{Pic } \bar{X}$ -torseur :

$$\begin{array}{c} Y \wedge^\lambda \text{Pic } \bar{X} \\ \downarrow \\ \text{Spec } k \end{array}$$

obtenu à l'aide du produit contracté défini *via* le morphisme λ [Gi71]. Notons maintenant r le morphisme naturel¹⁸ :

$$r : \text{Br}^{alg} X \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$$

Définition 2.3.3.7. Avec les notations adoptées ci-dessus, on pose :

$$\text{Br}_\lambda X = r^{-1} \left[\lambda_* H^1(k, \widehat{M}) \right]$$

On a évidemment la chaîne d'inclusions :

$$X(k) \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br } X} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_\lambda X} \subset X(\mathbb{A}_k) \quad (2.2)$$

Le point fondamental est alors le résultat de Skorobogatov :

Théorème 2.3.3.8 (Theorem 3, [Sk99]). *Supposons que \bar{M} soit un Γ -module de type fini en tant que groupe abélien. Si $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}_\lambda X} \neq \emptyset$, alors les conditions équivalentes du lemme 2.3.3.6 sont satisfaites.*

Autrement dit :

Corollaire 2.3.3.9. *L'existence d'un point adélique sur X Brauer-Manin orthogonal à $\text{Br}_\lambda X$ entraîne l'existence d'un modèle pour tout \bar{M}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k et de type λ .*

Exemple 2.3.3.10 (Application aux G -revêtements sur des espaces homogènes). On fixe H un k -groupe algébrique abélien fini, et on choisit un entier n de telle sorte que H se réalise comme un sous-groupe de $SL_n(k)$ (on peut par exemple prendre $n = |H|$,

¹⁸C'est le morphisme : $\ker \{E^2 \rightarrow E_2^{2,0}\} \longrightarrow E_2^{1,1}$ déduit de la suite spectrale de Leray.

mais un tel n n'est évidemment pas unique). On choisit X une k -forme de $SL_n(\bar{k})/\bar{H}$. On a :

$$\text{Pic } \bar{X} = \widehat{H}$$

Soit $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ un \widehat{H} -torseur sur \bar{X} de corps des modules k . Du fait que \bar{H} est abélien fini, c'est aussi un \widehat{H} -revêtement de \bar{X} . On note $\tau(\bar{Y})$ le type du revêtement \bar{Y} . On déduit de ce qui précède le :

Lemme 2.3.3.11. *S'il existe sur X un point adélique Brauer-Manin orthogonal à $\text{Br}_{\tau(\bar{Y})}X$, alors le \widehat{H} -revêtement $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .*

Remarque 2.3.3.12. Une fois encore, on se rend compte que l'énoncé de Skorobogatov fournit donc une condition suffisante beaucoup plus faible que l'existence d'un point rationnel pour qu'un revêtement abélien soit défini sur son corps des modules. Il convient malgré tout de tempérer ce résultat par la remarque suivante : le théorème 2.3.3.8 ne donne aucune information quant aux revêtements sur des variétés de Severi-Brauer, etc. . . D'ailleurs, plus généralement, cet énoncé est "vide" pour des k -variétés telles que $\text{Pic } \bar{X}$ soit sans torsion (e.g. des variétés rationnelles [CTS87]). En effet, puisque M est fini, il existe des types intéressants (non-triviaux) dans

$$\text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M}, \text{Pic } \bar{X})$$

si $\text{Pic } \bar{X}$ possède de la torsion.

Remarque 2.3.3.13. Evidemment, on aimerait beaucoup pouvoir étendre ce théorème au cas non-abélien. Les obstacles sont de deux sortes. Premièrement, il faut faire une croix sur les suites spectrales. La conséquence la plus fâcheuse de cette disparition est que l'on n'a plus aucune raison d'avoir un isomorphisme :

$$H^1(\bar{X}, \bar{M}_X)^{\Gamma} \approx \text{Hom}_{\Gamma}(\widehat{M}(\bar{k}), \text{Pic } \bar{X})$$

Adieu donc notre belle correspondance entre types et revêtements de corps des modules k !

La seconde conséquence, non moins fâcheuse, est que la dualité de Tate-Poitou ne tient plus. Plus précisément, lorsque H n'est plus abélien, l'obstruction de Brauer-Manin (des gerbes) permet juste de définir une application [DEZ03] :

$$m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, \text{lien } H) \longrightarrow \text{III}^1(k, \widehat{H})^D$$

mais cette application n'a plus aucune raison d'être un isomorphisme. Or le théorème de Skorobogatov utilise de manière essentielle la dualité de Tate-Poitou. . .

Chapitre 3

Descente de toiseurs et points rationnels : le cas non-abélien

L'objectif de ce chapitre est de comprendre ce qui empêche de généraliser d'une manière franchement satisfaisante au cas non-abélien les résultats du chapitre précédent. On considère toujours un corps k de caractéristique nulle, X un k -schéma et un k -groupe algébrique G non-nécessairement abélien ; il n'est donc plus question d'utiliser des suites spectrales. Le plan que nous suivrons dans ce chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous donnerons une interprétation purement topologique de la suite d'ensembles pointés :

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* \bar{G}_X)$$

et nous déterminerons les conditions sur G permettant de "prolonger" cette suite au cas non-abélien. Dans un deuxième temps, nous donnerons une preuve du résultat principal inspirée de la preuve du théorème de Combes-Harbater pour les revêtements (pour laquelle je tiens à remercier Michel Emsalem). Nous nous intéresserons ensuite au cas des groupes non-abéliens finis, pour lesquels (assez ironiquement d'ailleurs) tout fonctionne à merveille. Enfin, nous tâcherons de passer en revue les obstructions à ce que l'on puisse dans le cas général calculer "explicitement" le lien de la gerbe des toiseurs d'un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k , et en particulier l'obstruction à ce que ce lien soit représentable (ou juste localement représentable) par un k -groupe algébrique, même lorsque le groupe G dont on part est le plus sympathique possible (par exemple semi-simple simplement connexe). La clef de ce chapitre est de toute façon liée au lemme fondamental (lemme 1.2.14), dont nous rappelons ici l'énoncé :

Lemme fondamental. *Soient S un schéma, G_S un schéma en groupes sur S , et P un G_S -torseur sur S . Alors $\text{ad}_{G_S}(P)$ est une S -forme intérieure de G_S ; autrement dit :*

$$\text{ad}_{G_S}(P) \text{ représente une classe de } H^1(S, \text{Int } G_S).$$

En particulier, si G_S est abélien, alors :

$$\text{ad}_{G_S}(P) \approx G_S$$

3.1 Une interprétation topologique

Avant de décrire complètement la suite

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1 \pi_* \bar{G}_X)$$

il nous semble indispensable ici, au vu des considérations qui vont suivre, de faire quelques rappels sur les différents ensembles pointés intervenant dans cette suite.

Soient Y un k -schéma et G un k -groupe algébrique (non-nécessairement abélien). Ainsi on a une bijection (d'après le corollaire 4.7 p.123 de [Mi80]) :

$$\text{EHP}(G_Y/Y) \longrightarrow H^1(Y, G_Y)$$

Rappelons brièvement comment l'on obtient cette bijection.

- 1-cocycle associé à un G_Y -torseur sur Y

Soit P un G_Y -torseur sur Y . Alors il existe un recouvrement étale $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ tel que $P|_{Y_\alpha}$ soit trivial, pour tout $\alpha \in A$. Le choix d'une section

$$p_\alpha \in P(Y_\alpha)$$

pour tout α fournit un isomorphisme de toseurs :

$$\eta_\alpha^P : P|_{Y_\alpha} \longrightarrow G_{Y_\alpha, d}, \quad \forall \alpha \in A$$

défini par :

$$\eta_\alpha^P(p_\alpha) = e, \quad \forall \alpha \in A$$

Soit maintenant $(\alpha, \beta) \in A \times A$. La simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_{\alpha\beta})$ (où on a évidemment noté $Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \times_Y Y_\beta$) entraîne l'existence et l'unicité d'un $g_{\alpha\beta}^P \in G_Y(Y_{\alpha\beta})$ tel que :

$$p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P$$

cette égalité ayant lieu dans $P(Y_{\alpha\beta})$. Il est immédiat¹ que la famille $(g_{\alpha\beta}^P)_{\alpha, \beta} \in A$ est un 1-cocycle à valeurs dans G_Y .

La classe de ce 1-cocycle ne dépend pas du choix des sections locales de P ; en effet, soit $(p'_\alpha)_\alpha$ une autre famille de sections, avec :

$$p_\alpha \in P(Y_\alpha), \quad \forall \alpha \in A$$

Alors :

$$\forall \alpha \in A, \exists! h_\alpha^P \in G_Y(Y_\alpha) \text{ t.q. } p'_\alpha = p_\alpha \cdot h_\alpha^P \in P(Y_\alpha)$$

¹En utilisant encore la simple transitivité de l'action de G_Y .

Au-dessus de $Y_{\alpha\beta}$, on dispose des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^P|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\beta^P|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g'^P_{\alpha\beta} \end{array} \right.$$

D'une part, on déduit de la première et de la dernière relation la nouvelle condition :

$$p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^P \cdot g'^P_{\alpha\beta}$$

et on obtient d'autre part à l'aide des deux autres relations :

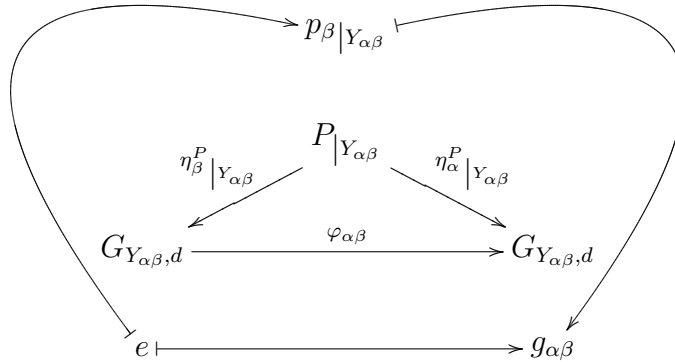
$$p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^P$$

Par suite :

$$g'^P_{\alpha\beta} = (h_\alpha^P)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^P, \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times A$$

ce qui prouve justement que les 1-cocycles $(g_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A}$ et $(g'^P_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A}$ sont cohomologues.

Remarque 3.1.1. Explicitement, il revient au même de dire que le G_Y -torseur P est obtenu en recollant les toiseurs triviaux $G_{Y_\alpha, d}$ à l'aide des $g_{\alpha\beta}$. Plus précisément, le choix d'une famille de sections locales $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ pour P entraîne l'existence d'une famille d'automorphismes $\varphi_{\alpha\beta}$ des toiseurs triviaux $G_{Y_\alpha, d}$, ce que l'on illustre sur par le diagramme suivant :



Pour achever ces rappels sur les toiseurs, montrons que deux toiseurs P et P' isomorphes donnent lieu à des 1-cocycles cohomologues. On peut supposer qu'il existe un recouvrement étale $(Y_\alpha/Y)_{\alpha \in A}$ de Y trivialisant P et P' (il suffit de prendre "l'intersection" d'un recouvrement étale trivialisant P et d'un recouvrement étale trivialisant P'). On note alors $(g_{\alpha\beta}^P)_{\alpha, \beta \in A}$ (resp. $(g_{\alpha\beta}^{P'})_{\alpha, \beta \in A}$) le 1-cocycle associé comme précédemment à P (resp. à P') via le choix d'une famille de sections locales $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. $(p'_\alpha)_{\alpha \in A}$). On suppose donc qu'il existe un isomorphisme de G_Y -toiseurs sur Y :

$$f : P' \longrightarrow P$$

En utilisant la simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_\alpha)$ sur $P(Y_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$, on obtient :

$$\forall \alpha \in A, \exists! h_\alpha^{PP'} \in G_Y(Y_\alpha) \text{ t.q. : } f|_{Y_\alpha}(p'_\alpha) = p_\alpha \cdot h_\alpha^{PP'}$$

Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, on a encore, au-dessus de $Y_{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \\ f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \\ p_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \\ p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}} = p'_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^{P'} \end{array} \right.$$

De la deuxième et de la troisième relation, on déduit :

$$f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}}$$

tandis que les deux extrêmes donnent :

$$f|_{Y_{\alpha\beta}}(p'_\beta|_{Y_{\alpha\beta}}) = p_\alpha|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \cdot g_{\alpha\beta}^{P'}$$

La simple transitivité de l'action de $G_Y(Y_{\alpha\beta})$ sur $P(Y_{\alpha\beta})$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$ permet alors de conclure :

$$g_{\alpha\beta}^{P'} = \left(h_\alpha^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}} \right)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}^P \cdot h_\beta^{PP'}|_{Y_{\alpha\beta}}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in A \times A$$

Ce qui achève de prouver que l'ensemble des classes d'isomorphie de G_Y -torseurs sur Y est en bijection avec les classes de cohomologie de 1-cocycles à valeurs dans G_Y .

- Description de l'ensemble $H^0(k, R^1\pi_*G_X)$

C'est l'ensemble des sections globales du k -faisceau $R^1\pi_*G_X$, qui est le faisceau associé au préfaisceau :

$$(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) \rightsquigarrow H^1(X_L, G_{X_L})$$

L désignant dans la formule ci-dessus une extension étale de k . Une section globale est donc une classe :

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I} \right]$$

où :

- (i) L_i est une extension étale de k , $\forall i \in I$;
- (ii) pour tout $i \in I$, P_i représente une classe de $H^1(X_{L_i}, G_{X_{L_i}})$;

(iii) pour tout $(i, j) \in I \times I$:

$$\varphi_{ij} : P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ij}} \longrightarrow P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ij}}$$

est un isomorphisme de $G_{X_{L_{ij}}}$ -torseurs sur $X_{L_{ij}}$, où l'on a noté $L_{ij} = L_i \otimes_k L_j$.

Deux telles classes

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i, j \in I} \right] \quad \text{et} \quad \left[(L_{i'}/k)_{i' \in I}, (P_{i'})_{i' \in I'}, (\varphi_{i'j'})_{i', j' \in I'} \right]$$

sont équivalentes si et seulement si il existe un recouvrement étale² $(L_\alpha/k)_{\alpha \in A}$ raffinant l'intersection des deux précédents, et des isomorphismes :

$$\psi_\alpha : P'_i \times_{X_{L_i}} X_{L_\alpha} \longrightarrow P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_\alpha}, \quad \forall \alpha \in A$$

compatibles avec les isomorphismes φ_{ij} et $\varphi_{i'j'}$ dans le seul sens raisonnable que l'on puisse donner à cette formulation.

Nous passons maintenant à la description de la suite exacte d'ensembles pointés tant attendue.

- Description de l'application $a : H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X)$

Soit T un représentant d'une classe de $H^1(k, \pi_* G_X)$; c'est donc la donnée d'une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$ et d'un 1-cocycle :

$$(\tau_{ij})_{i, j} \in Z^1((L_i/k), \pi_* G_X)$$

Par conséquent, pour tout $(i, j) \in I \times I$, on a :

$$\tau_{ij} \in \pi_* G_X(L_{ij})$$

Or, par définition de l'image directe d'un faisceau :

$$\pi_* G_X(L_{ij}) = G_X(\pi^{-1}(L_{ij})) = G_X(X_{L_{ij}})$$

Notons maintenant :

$$\widetilde{\tau}_{ij} \in G_X(X_{L_{ij}})$$

l'élément τ_{ij} , vu comme une section du faisceau G_X . Il est alors évident que l'on obtient un 1-cocycle :

$$(\widetilde{\tau}_{ij}) \in Z^1((X_{L_i}/X), G_X)$$

On peut alors définir $a([T])$ comme la classe du G_X -torseur sur X correspondant à ce 1-cocycle. Pour cela, il suffit de vérifier l'indépendance du représentant choisi pour la classe de T : soit donc $(\tau'_{ij})_{i, j \in I}$ un 1-cocycle à valeurs dans $\pi_* G_X$ cohomologue au 1-cocycle $(\tau_{ij})_{i, j}$. Il existe donc une 1-cochaîne :

$$(h_i)_{i \in I} \in C^1((L_i/k)_{i \in I}, \pi_* G_X)$$

²Il eût fallu écrire : le recouvrement étale $(\text{Spec } L_\alpha \rightarrow \text{Spec } k)_{\alpha \in A}$.

telle que :

$$\tau'_{ij} = \left(h_j|_{L_{ij}} \right)^{-1} \cdot \tau_{ij} \cdot h_i|_{L_{ij}} \in [\pi_* G_X](L_{ij}), \forall (i, j) \in I \times I$$

Or cette relation implique évidemment la suivante :

$$\widetilde{\tau}'_{ij} = \left(\widetilde{h}_j|_{X_{L_{ij}}} \right)^{-1} \cdot \widetilde{\tau}_{ij} \cdot \widetilde{h}_i|_{X_{L_{ij}}} \in [\pi_* G_X](L_{ij}), \forall (i, j) \in I \times I$$

où \widetilde{h}_i désigne l'élément h_i , qui appartient *a priori* à :

$$[\pi_* G_X](L_i)$$

vu comme un élément de :

$$G_X(X_{L_i})$$

Il s'ensuit que les 1-cocycles $(\widetilde{\tau}_{ij})_{i,j \in I}$ et $(\widetilde{\tau}'_{ij})_{i,j \in I}$ sont cohomologues, ce qui prouve la cohérence de la définition de l'application a . À de très légères modifications près, ce sont les mêmes arguments qui permettent de prouver la trivialité du noyau (au sens des ensembles pointés³ bien sûr) de l'application a . En outre, une conséquence immédiate des précédents calculs est la suivante :

Lemme 3.1.2. *L'image de l'application $a : H^1(k, \pi_* G_X) \longrightarrow H^1(X, G_X)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de G_X -torseurs sur X trivialisés par un recouvrement étale de X "provenant de k ". Plus précisément, l'image de l'application a est constituée des classes d'isomorphie de G_X -torseurs $P \rightarrow X$ pour lesquels il existe une famille d'extensions étales $(L_i/k)_{i \in I}$ telle que :*

$$P \times_X X_{L_i} \simeq G_{X_{L_i}, d}, \forall i \in I$$

Remarque 3.1.3. Dans le contexte des chapitres précédents, l'image de a est donc constituée des classes d'isomorphie de G_X -torseurs $P \rightarrow X$ tels que $\bar{P} \simeq \bar{G}_{X,d}$.

Remarque 3.1.4. En reprenant les notations du paragraphe V.3.3.1 de [Gi71], on peut encore exprimer le fait précédent en disant que l'image de a est la catégorie :

$$\text{Tors}(X, G_X)^{(\text{Spec } k)_{\text{ét}}}$$

cette dernière étant une catégorie équivalente à la gerbe

$$\text{Tors}(k, \pi_* G_X)$$

³I.e. le préimage de la classe privilégiée de $H^1(X, G_X)$ par a est la classe privilégiée de $H^1(k, \pi_* G_X)$.

- Description de l'application $u : H^1(X, G_X) \longrightarrow H^0(k, R^1\pi_*G_X)$

On obtient évidemment cette application en associant à la classe $[P] \in H^1(X, G_X)$ la classe :

$$[(k/k), (P), (\text{id}_P)]$$

Il est maintenant immédiat, vues les précédentes descriptions de l'application a d'une part, et des sections globales du faisceau $R^1\pi_*G_X$ d'autre part, que le noyau (au sens non-abélien) est effectivement constitué des classes d'isomorphie de G_X -torseurs trivialisés par un recouvrement étale de X "provenant de k ", ce qui achève de prouver l'exactitude de la suite d'ensembles pointés :

$$0 \longrightarrow H^1(k, \pi_*G_X) \xrightarrow{a} H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^0(k, R^1\pi_*G_X)$$

- Obstruction non-abélienne

On rentre maintenant dans le vif du sujet avec l'étude de la surjectivité de l'application u . Considérons une classe :

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i, j \in I} \right]$$

dans $H^0(k, R^1\pi_*G_X)$. En choisissant un représentant de cette classe, on dispose donc d'une famille de toseurs $(P_i)_{i \in I}$, et d'isomorphismes⁴ :

$$\varphi_{ij} : P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ij}} \longrightarrow P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ij}}$$

En d'autres termes, la famille $(\varphi_{ij})_{i, j \in I}$ constitue une donnée de recollement pour les toseurs P_i , et on veut mesurer ce qui l'empêche d'être une donnée de descente.

Pour tout triplet $(i, j, k) \in I^3$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_k \times_{X_{L_k}} X_{L_{ijk}} & \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{X_{L_{ijk}}}} & P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ijk}} \\ & \searrow \varphi_{jk}|_{X_{L_{ijk}}} & \nearrow \varphi_{ij}|_{X_{L_{ijk}}} \\ & P_j \times_{X_{L_j}} X_{L_{ijk}} & \end{array}$$

$\Downarrow c_{ijk}$

où l'on a noté :

$$c_{ijk} = \varphi_{ij}|_{X_{L_{ijk}}} \circ \varphi_{jk}|_{X_{L_{ijk}}} \circ \left(\varphi_{ik}|_{X_{L_{ijk}}} \right)^{-1}$$

En particulier :

$$c_{ijk} \in \text{ad}_{G_{X_{L_{ijk}}}} \left(P_i \times_{X_{L_i}} X_{L_{ijk}} \right), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

c'est-à-dire encore :

$$c_{ijk} \in [\pi_* \text{ad}_{G_X} (P_i)](L_{ijk}), \quad \forall (i, j, k) \in I^3$$

⁴De $G_{X_{L_{ij}}}$ -torseurs sur $X_{L_{ij}}$.

Remarque 3.1.5. Dans le cas abélien, on a évidemment :

$$c_{ijk} \in [\pi_* G_X](L_{ijk}), \forall (i, j, k) \in I^3$$

et les c_{ijk} constituent donc un 2-cocycle à valeurs dans $\pi_* G_X$; plus précisément, la classe de ce 2-cocycle est justement l'image de la classe

$$\left[(L_i/k)_{i \in I}, (P_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i, j \in I} \right]$$

par le cobord

$$H^0(k, R^1 \pi_* G_X) \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, \pi_* G_X)$$

Dans le cas non-abélien, la famille $(c_{ijk})_{i, j, k \in I}$ pourrait encore être vue comme un 2-cocycle, mais à valeurs dans un *système de coefficients* cf. [Do76], précisément celui défini par la famille de faisceaux locaux $(\pi_* \text{ad}_{G_X}(P_i))_{i \in I}$.

Il s'agit maintenant de comprendre pourquoi (dans le cas abélien comme dans le cas général) ce 2-cocycle devient trivial, c'est-à-dire de comprendre pourquoi les P_i se recollent effectivement, "une fois que l'on passe à X ". Notons tout d'abord que l'on peut, comme dans la description de l'application a , associer au 2-cocycle constitué par les

$$c_{ijk} \in [\pi_* \text{ad}_{G_X}(P_i)](L_{ijk})$$

un 2-cocycle sur X :

$$\widetilde{c}_{ijk} \in [\text{ad}_{G_X}(P_i)](X_{L_{ijk}})$$

(dans le cas abélien, on a $\widetilde{c}_{ijk} \in G_X(X_{L_{ijk}})$). Or ce dernier peut être rendu trivial, puisque l'on dispose d'assez d'ouverts sur X pour pouvoir rendre tous les toiseurs P_i triviaux.

Remarque 3.1.6. Une autre manière de dire les choses est que la gerbe sur X engendrée par les toiseurs P_i est la gerbe des G_X -toiseurs sur X , du fait que l'on peut localiser suffisamment de manière à rendre tous les P_i triviaux, ce qui n'est évidemment pas le cas si l'on se restreint aux ouverts étales de X "provenant de k ".

Il reste encore à voir que l'existence d'un point k -rationnel sur X entraîne l'existence d'une rétraction de l'application :

$$\left[(c_{ijk})_{i, j, k} \right] \longmapsto [(\widetilde{c}_{ijk})]$$

On note maintenant

$$x : \text{Spec } k \longrightarrow X$$

un point k -rationnel de X . Dans le cas abélien, la rétraction est obtenue en envoyant la classe de (\widetilde{c}_{ijk}) sur la classe du 2-cocycle :

$$(q \circ \widetilde{c}_{ijk} \circ x_{ijk})$$

où :

$$x_{ijk} : \text{Spec } L_{ijk} \longrightarrow X_{ijk}$$

est induit par x , et où

$$q : G_X \longrightarrow G$$

est le morphisme évident (puisque G_X est le produit fibré $G \times_{\text{Spec } k} X$). Evidemment, le 2-cocycle $(q \circ \widetilde{c_{ijk}} \circ x_{ijk})_{i,j,k \in I}$ ainsi obtenu n'est qu'un cocycle à valeurs dans G , et ne correspond au cocycle initial $(c_{ijk})_{i,j,k \in I}$ que sous réserve que la condition :

$$\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$$

soit satisfaite.

Dans le cas non-abélien, on applique exactement le même raisonnement, pour aboutir à la même conclusion, à la différence (de taille!) près que l'on doit imposer la condition beaucoup plus contraignante suivante, si l'on souhaite pouvoir descendre tous les $G_{\bar{X}}$ -torseurs sur \bar{X} de corps des modules k :

Condition (\star) : Pour toute \bar{X} -forme intérieure G' de \bar{G}_X , on a :

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Une justification plus rigoureuse de ce fait est apportée dans la section suivante.

3.2 Obstruction non-abélienne à l'existence d'un point k -rationnel

Soit $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . On note $G' = \text{ad}_{\bar{G}_X}(\bar{P})$ le faisceau sur \bar{X} de ses automorphismes. D'après le lemme 1.2.14, c'est une forme intérieure sur \bar{X} de \bar{G}_X . On note encore :

$$\bar{x} : \text{Spec } \bar{k} \longrightarrow \bar{X}$$

le morphisme induit par x , et $G'_{\bar{x}}$ la fibre en ce point de G' . On dispose d'une flèche naturelle :

$$\varphi_{\bar{x}} : H^0(\bar{X}, G') \longrightarrow H^0(\text{Spec } \bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Remarque 3.2.1. Lorsque G est abélien, demander que la condition $\bar{G}_X(\bar{X}) = \bar{G}(\bar{k})$ soit satisfaite équivaut encore à demander que l'application ci-dessus soit bijective (et cette hypothèse n'est pas trop contraignante, du fait qu'il n'y a pas de \bar{X} -formes intérieures de \bar{G}_X autres que \bar{G}_X lui-même).

Théorème 3.2.2. Soient X un k -schéma, et G un k -groupe linéaire, et $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un $G_{\bar{X}}$ -torseur de corps des modules k . On suppose que X possède un point k -rationnel x , et on suppose satisfaite la condition suivante :

Condition $(\star_{\bar{P}})$: En notant $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ et \bar{x} un point géométrique associé au point k -rationnel x , on a :

$$H^0(\bar{X}, G') = H^0(\bar{k}, G'_{\bar{x}})$$

Alors $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

PREUVE. On note encore $G' = \text{ad}_{G_{\bar{X}}}(\bar{P})$ le faisceau sur \bar{X} des automorphismes de \bar{P} . Soit \bar{p} un point dans la fibre $\bar{f}^{-1}(\bar{x})$. Puisque \bar{P} est de corps des modules k , il existe un isomorphisme :

$$\varphi_\sigma : \bar{P} \longrightarrow \sigma \bar{P}, \forall \sigma \in \Gamma$$

Par ailleurs $\bar{P}_{\bar{x}}$ est un $(\bar{G}_X)_{\bar{x}}$ -torseur, de groupe d'automorphismes $G'_{\bar{x}}$, ce dernier agissant simplement transitivement à droite sur $P_{\bar{x}}$. Comme x est un point k -rationnel, tous les isomorphismes φ_σ respectent la fibre au-dessus de \bar{x} , pour tout $\sigma \in \Gamma$. De plus, puisque la condition (\star) est satisfaite, on peut composer tout φ_σ à droite par un élément de $G'(\bar{X})$ de telle sorte que l'on ait :

$$\varphi_\sigma(\bar{p}) = \sigma \bar{p}$$

En utilisant toujours la condition (\star) , cette propriété détermine uniquement φ_σ . Il s'ensuit immédiatement que pour tout couple (τ, σ) d'éléments de Γ , le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} & \xrightarrow{\varphi_{\tau\sigma}} & \tau\sigma \bar{P} \\ & \searrow \varphi_\tau & \nearrow \tau\varphi_\sigma \\ & \tau \bar{P} & \end{array}$$

Donc $\bar{f} : \bar{P} \rightarrow \bar{X}$ est défini sur k .

□

Remarque 3.2.3. Evidemment, la condition (\star) est très lourde. On aurait envie qu'elle soit vérifiée par exemple pour les schémas en groupes linéaires au-dessus de variétés projectives. Ce n'est absolument pas le cas, comme le montre l'exemple suivant : on considère la droite projective $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$, munie du recouvrement par les ouverts standards $\{U_0, U_\infty\}$, où :

$$U_0 = \{(x : y) / y \neq 0\} \quad \text{et} \quad U_\infty = \{(x : y) / x \neq 0\}$$

Nous noterons :

$$U_{0\infty} = U_0 \cap U_\infty$$

On construit maintenant une forme intérieure G' du faisceau GL_{2, \mathbb{P}^1} en recollant les faisceaux GL_{2, U_0} et GL_{2, U_∞} au-dessus de $U_{0\infty}$ à l'aide de la conjugaison :

$$\chi : \quad GL_{2, U_{0, \infty}} = (GL_{2, U_0})|_{U_{0\infty}} \longrightarrow GL_{2, U_{0, \infty}} = (GL_{2, U_\infty})|_{U_{0\infty}}$$

$$A \longmapsto M_{0\infty} \cdot A \cdot M_{0\infty}^{-1}$$

où :

$$M_{0\infty} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Alors la section :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de GL_{2,U_0} fournit une section globale du faisceau G'

$$\left(\text{puisque : } M_{0\infty} \cdot A_0 \cdot M_{0\infty}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

non-constante. On ne peut donc pas espérer que G' provienne d'un \mathbb{Q} -groupe algébrique ici.

3.3 Le cas fini

Théorème 3.3.1. *Soient k un corps de caractéristique nulle, X un k -schéma géométriquement connexe, et G un k -groupe fini. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} de corps des modules k est défini sur k .*

PREUVE. Notons $x : \text{Spec } k \rightarrow X$ un point k -rationnel de X , et soit $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k . On a alors un morphisme naturel de k -champs⁵ :

$$\epsilon : D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$$

La composante au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) du morphisme en question est le foncteur évident :

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_L : & D(\bar{P})(L) & \longrightarrow \text{Tors}(X_L, G_{X_L}) \\ & P_L & \longmapsto P_L \end{array}$$

En utilisant la formule d'adjonction pour les champs (cf. [Gi66] I.5.2.1) :

$$\underline{\text{Cart}}_{X_{\acute{e}t}}(\pi^* D(\bar{P}), \text{Tors}(X, G_X)) \approx \underline{\text{Cart}}_{(\text{Spec } k)_{\acute{e}t}}(D(\bar{P}), \pi_* \text{Tors}(X, G_X))$$

on obtient l'existence d'un morphisme de gerbes (puisque l'image inverse d'une gerbe est une gerbe, [Gi71] V.1.4.2) :

$$\phi : \pi^* D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Tors}(X, G_X)$$

On veut prouver que ϕ est une équivalence. Notons $\mathcal{L}_{\bar{P}}$ le lien de la gerbe $D(\bar{P})$. Comme la gerbe image inverse par π de $D(\bar{P})$ est liée par l'image inverse du lien de $D(\bar{P})$ (cf. [Gi71] V.1.4.2), le morphisme ϕ est lié par un morphisme :

$$\Lambda : \pi^* \mathcal{L}_{\bar{P}} \longrightarrow \text{lien } G_X$$

D'autre part, il existe un recouvrement étale $(\text{Spec } L_i \rightarrow \text{Spec } k)_{i \in I}$, et des modèles locaux pour \bar{P} au-dessus de ces ouverts. Plus précisément, pour tout $i \in I$, il existe un G_{X_i} -torseur⁶ P_i sur X_i tel que :

$$P_i \times_{X_i} \bar{X} \approx \bar{P}$$

⁵En effet, $D(\bar{P})$ est une gerbe, mais $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ n'est qu'un champ (cf. exemple 1.5.18). Par ailleurs, ce morphisme fait de $D(\bar{P})$ une *sous-gerbe maximale* du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ (cf. [Gi66] p.113).

⁶Pour alléger les notations, on a noté X_i le schéma $X \otimes_k L_i$.

Au-dessus d'un ouvert $(X_i \rightarrow X)$, le morphisme Λ est représenté par le morphisme naturel de faisceaux de groupes sur le site étale de X_i (cf. [Gi66] IV.3.5.4) :

$$\lambda_i : \pi^* \pi_* \text{ad}_{G_{X_i}}(P_i) \longrightarrow \text{ad}_{G_{X_i}}(P_i)$$

Du fait que ces $\text{ad}_{G_{X_i}}(P_i)$ sont finis, le morphisme d'adjonction ci-dessus est un isomorphisme (d'après la remarque 3.1.(d) de [Mi80]) et il s'ensuit que dans ce cas le morphisme

$$\phi : \pi^* D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Tors}(X, G_X)$$

est un isomorphisme de gerbes. Donc la gerbe $\pi^* D(\bar{P})$ est neutre. Par suite, la gerbe $x^* \pi^* D(\bar{P})$ est neutre. Comme $\pi \circ x = \text{id}_{\text{Spec } k}$, on en déduit que la gerbe $D(\bar{P})$, qui est équivalente à la gerbe $x^* \pi^* D(\bar{P})$, est elle aussi neutre, ce qui achève la preuve. \square

3.4 Remarques

3.4.1 Problèmes de représentabilité

Il ressort des deux chapitres précédents qu'il existe des obstacles de taille à ce que l'on puisse généraliser au cas non-abélien la suite à 5 termes déduite de la suite spectrale de Leray. Le premier, et non des moindres, est (pour citer [Gi71]) "qu'il n'existe pas de notion raisonnable pour l'image directe d'un lien".

On ne peut en général pas dire grand chose du lien de la gerbe $D(\bar{P})$, même lorsque le k -groupe G initial jouit des meilleures propriétés dont l'on puisse rêver. Il serait par exemple tentant de croire que si G est un k -groupe réductif (e.g. $GL_n(k)$) alors le lien de la gerbe des modèles d'un \bar{G}_X -torseur de corps des modules k est localement représentable par une k -forme de G . Il n'en est rien en général, et voici (me semble-t-il) une explication possible : même si l'on connaît parfaitement la structure des k -groupes réductifs (et plus généralement des schémas en groupes réductifs, grâce à [Dem64]), on ne peut pas arriver à avoir des informations exploitables sur lien $D(\bar{P})$, attendu que ce k -lien provient dans un certain sens de formes intérieures sur X du schéma en groupes G_X . Grossièrement, le passage de X à k brouille toutes les pistes.

3.4.2 La condition corps des modules et le champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$

Considérons de nouveau un corps k de caractéristique nulle, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ un k -schéma, un k -groupe algébrique G et un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$, que l'on ne suppose pas pour l'instant de corps des modules k , autrement dit : $[\bar{P}] \in H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)$.

- Si \bar{P} est de corps des modules k : on peut lui associer sa gerbe des modèles $D(\bar{P})$. C'est une k -gerbe. On dispose de plus d'un monomorphisme de k -champs évident (que nous avons déjà évoqué dans la preuve du lemme 3.1.2) :

$$\epsilon : D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$$

dont la composante au-dessus d'un ouvert étale $(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k)$ est le foncteur :

$$\epsilon_L : D(\bar{P})(L) \longrightarrow \text{Tors}(X_L, G_{X_L})$$

$$P_L \longmapsto P_L$$

dont la définition est cohérente, puisqu'un objet de cette gerbe au-dessus de $\text{Spec } L$ est en particulier un G_{X_L} -torseur sur X_L . Dans un certain sens (que nous n'allons pas tarder à préciser) le k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ "contient" les gerbes des modèles de tous les \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} de corps des modules k ;

- Si \bar{P} n'est pas de corps des modules k : on peut toujours définir la k -catégorie fibrée en groupoïdes $D(\bar{P})$ en prenant comme catégorie fibre au-dessus d'un ouvert étale ($\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k$) le groupoïde dont :
 - **les objets** sont toujours les G_{X_L} -torseurs P_L sur X_L tels qu'il existe un automorphisme $\sigma \in \Gamma$ et un isomorphisme de \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} :

$$\sigma \bar{P} \xrightarrow{\approx} P_L \otimes_L \bar{k}$$

- **les flèches** sont les isomorphismes de G_{X_L} -torseurs sur X_L .

$D(\bar{P})$ est toujours un k -champ. Il est même localement non-vide, puisque comme (cf. [SGA4-VII] 5.7 et 5.14) :

$$H^1(\bar{X}, \bar{G}_X) = \varinjlim_L H^1(X_L, G_{X_L})$$

la limite directe étant prise sur les extensions étales de k , il existe une extension étale L' et un élément $[P_{L'}]$ de $H^1(X_{L'}, G_{X_{L'}})$ tels que : $P_{L'} \otimes_{L'} \bar{k} \approx \bar{P}$.

Mais ce champ $D(\bar{P})$ n'est pas une k -gerbe, car deux objets ne sont pas localement isomorphes, du fait que pour $\sigma \in \Gamma$, les toseurs \bar{P} et $\sigma \bar{P}$ ne sont pas en général isomorphes. Cependant, il est possible d'associer à \bar{P} une gerbe au-dessus de son corps des modules $k_{\bar{P}}$, ce dernier étant l'intersection de toutes les extensions étales L de k telles que :⁷

$$\tau \bar{P} \approx \bar{P}, \forall \tau \in \text{Gal}(\bar{k}/L).$$

On peut traduire de deux manières les remarques ci-dessus :

- dans le langage de Giraud (cf. [Gi66] et [Gi71]), la première remarque signifie que la gerbe $D(\bar{P})$ est une section globale du faisceau des sous-gerbes maximales de $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$, et la seconde signifie que la gerbe $D(\bar{P})$ est une section au-dessus de l'ouvert étale ($\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow \text{Spec } k$) de ce faisceau. Ces remarques sont contenues dans l'énoncé suivant :

Propriété 3.4.1 (Lemme V.3.1.5 de [Gi71]). *Soient $f : E' \rightarrow E$ un morphisme de sites et A un faisceau de groupes sur E' . On a un isomorphisme canonique d'ensembles sur E entre $R^1 f_* A$ et le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $f_*\text{Tors}(E', A)$.*

En appliquant ce lemme à la présente situation, *i.e.* en prenant pour E (*resp.* E') le site étale de k (*resp.* de X), pour f le morphisme de sites induit par le morphisme structural π et pour A le faisceau G_X , on obtient ainsi :

⁷Pour donner une interprétation topologique du corps des modules, disons que l'ouvert étale ($\text{Spec } k_{\bar{P}} \rightarrow \text{Spec } k$) est le plus grand ouvert étale sur lequel on peut associer une donnée de recollement à \bar{P} .

Lemme 3.4.2. *On a un isomorphisme canonique d'ensembles sur k entre les classes d'isomorphie de \bar{G}_X -torseurs sur \bar{X} et le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$.*

En effet, on peut associer à un G_X -torseur sur \bar{X} une $k_{\bar{P}}$ -gerbe, et celle-ci est une sous-gerbe maximale du $k_{\bar{P}}$ -champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X) \otimes_k k_{\bar{P}}$, *i.e.* une section au-dessus de $k_{\bar{P}}$ du faisceau des sous-gerbes maximales de $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$;

- dans le langage plus moderne de Laumon et Moret-Bailly (*cf.* [LMB00]), on traduit la première remarque en disant que \bar{P} (*resp.* $[\bar{P}]$) est un point k -rationnel⁸ du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ (*resp.* une section globale du faisceau étale grossier⁹ $R^1 \pi_* G_X$ associé à ce champ), et la seconde en disant que \bar{P} (*resp.* $[\bar{P}]$) est un point à valeurs dans $\text{Spec } k_{\bar{P}}$ du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ (*resp.* une section au-dessus de $k_{\bar{P}}$ du faisceau grossier $R^1 \pi_* G_X$). Dans les deux cas, la gerbe $D(\bar{P})$ est la gerbe résiduelle en le point \bar{P} du champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$. L'analogie du lemme V.3.1.5 de [Gi71] est fourni par l'énoncé ci-dessous :

Propriété 3.4.3 (Corollaire 11.4 de [LMB00]). *Soient S un schéma, \mathfrak{X} un S -champ algébrique noethérien, et ξ un point du S -champ algébrique \mathfrak{X} . L'application qui à ξ associe $\mathcal{G}_{\bar{\xi}}$ (la gerbe résiduelle du champ \mathfrak{X} au point ξ) définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphie de couples*

$$\left(\mathcal{G} \xrightarrow{A} \text{Spec } K, \mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathfrak{X} \right)$$

où \mathcal{G} est une gerbe fppf sur un S -corps K et où $\mathcal{G} \xrightarrow{I} \mathfrak{X}$ est un monomorphisme de S -champs.

Nous utiliserons cette propriété (où, avec nos hypothèses, on peut remplacer “fppf” par “étale”) avec $S = \text{Spec } k$ et $\mathfrak{X} = \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$. À tout \bar{G}_X -torseur sur \bar{X} , on peut associer sa gerbe des modèles $D(\bar{P})$; comme on l'a vu plus haut, c'est une $k_{\bar{P}}$ -gerbe ($k_{\bar{P}}$ étant le corps des modules de \bar{P}), que l'on peut toujours “plonger” naturellement dans le k -champ $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)$ (essentiellement parce qu'un modèle de \bar{P} au-dessus d'une extension étale L est un G_{X_L} -torseur sur X_L , donc en particulier un objet du groupoïde fibre $\pi_* \text{Tors}(X, G_X)(L)$). Alors le morphisme A du corollaire 11.4 de [LMB00] n'est autre que le morphisme structural :

$$D(\bar{P}) \longrightarrow \text{Spec } k_{\bar{P}}$$

de la $k_{\bar{P}}$ -gerbe des modèles, et le monomorphisme I est le morphisme naturel :

$$D(\bar{P}) \longrightarrow \pi_* \text{Tors}(X, G_X)$$

Achevons ces considérations par un énoncé (trivial) faisant le lien entre les deux points de vue que l'on vient de comparer :

⁸Au sens de la définition 5.2 de [LMB00].

⁹Nous renvoyons à [LMB00] 3.19 ou à la preuve du lemme 3.3.2.2 pour la définition de faisceau grossier attaché à un champ.

Lemme 3.4.2.1. *Avec les notations adoptées tout au long de cette section, le faisceau $R^1\pi_*G_X$ est le faisceau grossier (sur le site étale de k) attaché au k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$.*

PREUVE : le faisceau grossier attaché au k -champ $\pi_*\text{Tors}(X, G_X)$ est le faisceau associé au préfaisceau :

$$(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) \rightsquigarrow \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \pi_*\text{Tors}(X, G_X)(L)\}$$

soit encore :

$$(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) \rightsquigarrow \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \text{Tors}(X_L, G_{X_L})\}$$

C'est donc le faisceau associé au préfaisceau :

$$(\text{Spec } L \rightarrow \text{Spec } k) \rightsquigarrow H^1(X_L, G_{X_L})$$

Ce qui est exactement la définition du faisceau $R^1\pi_*G_X$.

□

Chapitre 4

Obstruction de Brauer-Manin des gerbes

Cette section est le fruit d'un travail en commun avec Jean-Claude Douai et Michel Emsalem. A peu de choses près, le contenu de cette section est celui de notre texte, disponible sur le serveur "arxiv", à l'adresse suivante :

arxiv :math.AG/0303231

Nous montrons ici comment associer à une gerbe définie sur un corps de nombres une obstruction de Brauer-Manin mesurant, comme dans le cas des variétés, le défaut d'existence d'une section globale. La motivation est la suivante : soient k un corps de nombres, et V un k -espace homogène sous SL_n avec isotropie H . On peut lui associer la gerbe $\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}$ de ses trivialisations, *i.e.* la gerbe qui mesure l'obstruction à ce que V soit dominé par un SL_n -torseur sur k , autrement dit qu'il soit trivial. D'autre part, si V a des points partout localement, on peut lui associer son obstruction de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(V)$. Si cette dernière est non-nulle, V n'a pas de point k -rationnel.

Or plusieurs espaces homogènes peuvent avoir la même gerbe \mathcal{G} des trivialisations. Dans un souci d'économie, on veut définir une obstruction de Brauer-Manin de \mathcal{G} , dont la non-nullité est une obstruction à ce que \mathcal{G} soit neutre, et par conséquent une obstruction à ce que chacun des espaces homogènes ayant \mathcal{G} pour gerbe des trivialisations ait un point k -rationnel.

Une fois de plus, ce raisonnement est inspiré de la théorie des revêtements. Plus explicitement, si k est un corps de nombres, \bar{f} un \bar{k} -revêtement de corps des modules k , et $\mathcal{G}(\bar{f})$ la k -gerbe associée à \bar{f} (*i.e.* la gerbe des modèles de \bar{f}). Dans [DDM01], Dèbes, Douai et Moret-Bailly ont introduit la notion de variété de descente associée à \bar{f} . Si V est une telle variété, la gerbe $\mathcal{G}(\bar{f})$ est alors isomorphe au champ quotient $[V/GL_n]$, pour un n idoine. En fait, il existe une infinité possible de telles variétés de descente V correspondant à une infinité de choix possibles pour l'entier n . Soit maintenant K une extension de k : tout K -point de V définit un K -point de \mathcal{G} , et réciproquement tout K -point de \mathcal{G} se relève en un K -point de V . Il s'ensuit que si V et V' sont deux variétés de descente correspondant à la même k -gerbe \mathcal{G} , alors :

$$V(K) \neq \emptyset \Leftrightarrow V'(K) \neq \emptyset$$

Forts de ces observations, on veut comparer les invariants de V et V' ; ils ne dépendent que de \mathcal{G} . En particulier :

$$\mathrm{Br}_a V \approx \mathrm{Br}_a V' \approx \mathrm{Br}_a \mathcal{G},$$

et

$$\text{Pic } V \approx \text{Pic } V' \approx \text{Pic } \mathcal{G}.$$

Ceci nous amène à calculer l'invariant de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(V)$ de V , à introduire l'invariant de Brauer-Manin $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ de la gerbe \mathcal{G} , puis à prouver que $m_{\mathcal{H}}(V) = m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$, l'intérêt de cette égalité étant sa validité pour toute variété de descente V correspondant à \mathcal{G} (plus loin, nous dirons que V est une *présentation* de \mathcal{G}).

Tout ce qui précède s'étend aux k -gerbes quelconques localement liées par un groupe fini (pour des raisons évidentes, de telles gerbes seront appelées des *gerbes de Deligne-Mumford*). L'application $m_{\mathcal{H}}$ qui à une classe de k -gerbes $[\mathcal{G}]$ associe l'invariant de Brauer-Manin d'un de ses représentants peut alors être vue comme une généralisation de la dualité de Tate-Poitou dans le cas abélien (nous renvoyons au théorème 4.4.1 pour un énoncé précis); cet invariant vit dans le groupe de Tate-Shafarevich :

$$\text{III}^1(k, \widehat{H})^D$$

où \widehat{H} est le groupe d'automorphismes d'un objet de $\mathcal{G}(\text{Spec } \bar{k})$.

4.1 Rappels

4.1.1 Calcul de $\text{Br}_a V$ dans le cas où V est un espace homogène de SL_n avec isotropie H

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps de nombres et Ω_k l'ensemble de ses places. Soit V une k -variété¹ algébrique lisse, géométriquement irréductible. De la suite spectrale :

$$H^p(k, H_{\text{ét}}^q(\bar{V}, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\text{ét}}^{p+q}(V, \mathbb{G}_m)$$

on déduit la suite exacte longue :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k, \bar{k}[V]^*) & \longrightarrow & \text{Pic } V & \longrightarrow & \text{Pic } \bar{V}^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \longrightarrow H^2(k, \bar{k}[V]^*) & (4.1) \\ & & & & & & \uparrow & \\ & & & & & & \text{Br}_1 V & \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{V}) \longrightarrow H^3(k, \bar{k}[V]^*) \end{array}$$

Posons :

$$U(\bar{V}) = \frac{\bar{k}[V]^*}{\bar{k}^*}$$

La suite exacte (4.1) fournit une nouvelle suite exacte :

$$\text{Pic } \bar{V}^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow H^2(k, U(\bar{V})) \rightarrow \text{Br}_a V \rightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{V}) \rightarrow H^3(k, U(\bar{V})) \quad (4.2)$$

Supposons que V est un k -espace homogène sous un k -groupe algébrique semi-simple simplement connexe \widetilde{G} (e.g. SL_n) avec isotropie un groupe fini, i.e. : il existe un \bar{k} -groupe fini \widehat{H} tel que :

$$\bar{V} = \widetilde{G}(\bar{k}) / \widehat{H}$$

¹Par k -variété, on entend ici k -schéma séparé de type fini.

Nous avons alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow U(\bar{V}) \longrightarrow U(\widetilde{G}(\bar{k}))$$

provenant de la fibration $\widetilde{G}(\bar{k}) \rightarrow \bar{V}$. Or on sait (d'après le lemme 6.5 (iii) de [Sa81]) que :

$$U(\widetilde{G}(\bar{k})) = \widehat{\widetilde{G}(\bar{k})} = 0$$

La suite exacte (4.2) se réduit alors à l'isomorphisme :

$$\mathrm{Br}_a V \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V})$$

Remarque 4.1.1.1. Notons au passage que cet isomorphisme est valable plus généralement lorsque V est une variété algébrique propre (*e.g.* projective) définie sur un corps de nombres k . Car dans cette situation, d'une part le groupe $H^3(k, \mathbb{G}_m)$ est nul, et d'autre part $\bar{k}[V]^*$ se réduit évidemment aux constantes.

Par exemple, le groupe $\mathrm{Br}_a V$ (donc *a fortiori* $\mathbb{B}(V)$) est nul lorsque V est une k -variété de Severi-Brauer, ou une k -variété projective lisse qui est une intersection complète de dimension ≥ 3 (*cf.* la proposition 2.1.13).

4.1.2 Exemples

- (i) Si $H = 0$, alors $\bar{V} \approx \widetilde{G}(\bar{k})$, et $\mathrm{Pic} \bar{V} = 0$ (car $\mathrm{Pic} \widetilde{G}(\bar{k}) = 0$ par le corollaire 4.5 de [FI73]).
- (ii) Si $H = \mu$ est un k -sous-groupe central de \widetilde{G} , alors $V = G = \widetilde{G}/\mu$ est semi-simple, et $\mathrm{Pic} \widetilde{G}(\bar{k}) = \widehat{\mu(\bar{k})}$ (par le corollaire 4.6 de [FI73]), d'où :

$$\mathrm{Br}_a V = \mathrm{Br}_a G = H^1(\bar{k}/k, \widehat{\mu(\bar{k})}) = H^1(k, \widehat{\mu})$$

$\mathrm{Pic} G$ et $\mathrm{Br}_a G$ sont justiciables de la philosophie de Kottwitz : ce sont des invariants des groupes semi-simples qui sont nuls lorsque $G = \widetilde{G}$ est simplement connexe. Ils peuvent donc s'exprimer en fonction du centre $Z({}^L G)$ du dual de Langlands de G [Ko84].

Cette remarque vaut encore pour :

$$\mathbb{B}(G) = \ker \left\{ \mathrm{Br}_a G \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}_a G_v \right\}$$

- (iii) Prenons pour V un k -tore T . Alors (*cf.* le lemme 6.9 de [Sa81]) :

$$\mathrm{Pic} \bar{T} = H^1(k, \widehat{T}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_a T = H^2(k, \widehat{T})$$

En outre :

$$\mathbb{B}(T) \approx \mathrm{III}^2(k, \widehat{T}) \approx \mathrm{III}^1(k, \widehat{T})^D$$

le deuxième isomorphisme étant fourni par la dualité de Kottwitz [Ko84] qui étend aux tores celle de Tate-Poitou.

- (iv) Considérons maintenant un k -espace homogène de SL_n avec isotropie un groupe fini ; on suppose donc qu'il existe un groupe fini \bar{H} tel que :

$$\bar{V} \approx SL_{n,\bar{k}}/\bar{H}$$

Alors $\text{Pic } \bar{V} \approx \widehat{H}$ (cf. [BK97]). On dispose en effet de la \bar{k} -fibration :

$$SL_{n,\bar{k}} \longrightarrow SL_{n,\bar{k}}/\bar{H}$$

à laquelle est attachée la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$E_2^{p,q} = H^p(\bar{H}, H^q(SL_n, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\text{ét}}^{p+q}(\bar{V}, \mathbb{G}_m) = E^{p+q}$$

Dans cette dernière, le terme $E_2^{0,1}$ est nul², donc :

$$H_{\text{ét}}^1(\bar{V}, \mathbb{G}_m) = H^1(\bar{H}, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(\bar{H}, \mathbb{G}_m) = \widehat{H}$$

D'où la :

Proposition 4.1.2.1. *Soit V un k -espace homogène d'un groupe semi-simple simplement connexe \tilde{G} avec isotropie un groupe fini \bar{H} . Alors d'après [BK97] :*

$$\text{Br}_a V \approx H^1(k, \widehat{H})$$

En outre, si k est un corps de nombres, et si on suppose que V a des points partout localement (i.e. si $V_v = V \otimes_k k_v$ a un k_v -point, pour toute place v de k), alors :

$$\mathbb{B}(V) = \ker \left\{ \text{Br}_a V \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a V_v \right\} \approx \text{III}^1(k, \widehat{H})$$

Corollaire 4.1.2.2. *Sous les hypothèses et notations de la proposition précédente, si \bar{H} est sans caractère, alors $\text{Br}_a V = \mathbb{B}(V) = 0$.*

Exemple 4.1.2.3. Le corollaire s'applique donc si $\bar{H} = SL(2, \mathbb{F}_p)$ avec $p \neq 2, 3$, ou encore si $\bar{H} = \mathcal{A}_n$ avec $n \geq 5$. Plus généralement, il faut et il suffit que \bar{H} soit égal à son groupe dérivé.

4.2 Interprétation comme champ quotient des k -gerbes localement liées par un groupe algébrique fini

On s'intéresse donc dans cette section aux k -gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford [LMB00]. Rappelons d'abord la proposition 5.1 de [DDM01] :

²En effet, $\text{Pic } SL_n = H^1(SL_{n,\bar{k}}, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}(\Pi_1(SL_n), \mathbb{G}_m) = 0$ puisque SL_n est simplement connexe.

Proposition 4.2.1. *Soient k un corps, et \mathcal{G} une k -gerbe (pour la topologie étale) qui est un champ de Deligne-Mumford. Alors :*

1. *Il existe une k -algèbre L avec action à gauche d'un groupe fini Γ admettant k comme anneau des invariants telle que \mathcal{G} soit isomorphe au champ quotient $[\mathrm{Spec} L/\Gamma]$;*
2. *Il existe un k -schéma affine V , un entier $n \geq 0$, une action à droite de $GL_{n,k}$ sur V et un 1-morphisme $\pi : V \rightarrow \mathcal{G}$ avec les propriétés suivantes :*
 - (i) *π induit un isomorphisme du champ quotient $[V/GL_{n,k}]$ vers \mathcal{G} ;*
 - (ii) *V est lisse et géométriquement irréductible ;*
 - (iii) *l'action de $GL_{n,k}$ sur V est transitive et à stabilisateurs finis ;*
 - (iv) *pour chaque extension K de k , chaque objet de $\mathcal{G}(K)$ se relève en un point de $V(K)$ via π .*

En particulier, à cause de (iii) et (iv), si K est une extension de k telle que $\mathcal{G}(K) \neq \emptyset$,³ la K -variété $V \otimes_k K$ est isomorphe au quotient de $GL_{n,K}$ par un groupe fini.

Remarques 4.2.2.

- (a) Dans la remarque 5.2(b) de [DDM01], il est montré que l'on peut en fait prendre pour k -algèbre L une extension galoisienne finie de k , auquel cas Γ est l'ensemble des couples (σ, φ) où $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$ et $\varphi : \sigma x \xrightarrow{\sim} x$ est un isomorphisme dans la catégorie (en fait, le groupoïde) $\mathcal{G}(L)$. Il y a une structure de groupe sur Γ pour laquelle la projection naturelle $\Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k)$ est un morphisme surjectif, et le noyau $H = H(L)$ est le stabilisateur fini dont l'existence est donnée par le (iii) de la proposition 4.2.1. A la gerbe \mathcal{G} est aussi associée une extension (cf. [Gi71], [Sp66])

$$\mathcal{G} \rightsquigarrow (\mathcal{E}) : 1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \rightarrow 1$$

définissant une action extérieure \mathcal{L}_H de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur $H = H(L)$, et une classe de 2-cohomologie notée $[\mathcal{G}]$ dans $H^2(L/k, \mathcal{L}_H) \hookrightarrow H^2(k, \mathcal{L}_H)$.

- (b) On obtient les mêmes conclusions en remplaçant dans la proposition 4.2.1 GL_n par SL_n (cf. remarque 5.2(c) de [DDM01]).

Une construction fondamentale

Partons de l'extension (\mathcal{E}) de la remarque précédente :

$$(\mathcal{E}) : 1 \rightarrow H \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathrm{Gal}(L/k) \rightarrow 1$$

Γ est un groupe fini ; on peut donc le plonger dans SL_n pour un certain n , ce qui conduit au diagramme suivant :

$$(D) : \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/k) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & SL_{n,\bar{k}} & \dashrightarrow & SL_{n,\bar{k}}/H \longrightarrow 1 \end{array}$$

³Ce qui signifie que l'ensemble d'objets $Ob(\mathcal{G}(K))$ de la catégorie fibre de \mathcal{G} au-dessus de $\mathrm{Spec} K$ est non-vide ; par la suite, nous faisons systématiquement cet abus de langage.

$SL_{n,\bar{k}}/H$ n'est pas un groupe, puisque H n'est pas nécessairement normal dans $SL_{n,\bar{k}}$. C'est seulement un k -espace homogène (toujours au sens de Springer [Sp66]), d'où la présence des pointillés dans le diagramme précédent. La flèche verticale

$$\begin{array}{c} \text{Gal}(L/k) \\ \downarrow \\ SL_{n,\bar{k}}/H \end{array}$$

donne lieu à un 1-cocycle dans $Z^1(L/k; SL_n, H)$, qui représente précisément la classe du k -espace homogène V du (2) de la proposition 4.2.1. La k -gerbe $\mathcal{G} \approx [V/SL_n]$ (associée à (\mathcal{E})) s'interprète alors comme la gerbe des relèvements du k -espace homogène V à SL_n . En d'autres termes, $[\mathcal{G}]$ est l'image de V par le cobord (cf. [Sp66], [Do76])

$$\delta^1 : Z^1(L/k; SL_n, H) \longrightarrow H^2(k, \mathcal{L}_H)$$

Dans la suite, nous appellerons **présentation de $\mathcal{G} = [V/SL_n]$** un couple (V, π) comme dans la proposition 4.2.1.

Remarque 4.2.3. La proposition 4.2.1 traduit en particulier le fait que les deux groupes de Brauer d'un schéma (cohomologique et "Azumaya") coïncident lorsque ce schéma est un corps. En effet, si $\mathcal{G} \in H^2(k, \mathbb{G}_m)$, alors il existe un n tel que $\mathcal{G} \in H^2(k, \mu_n)$, puisque le groupe de Brauer d'un corps, et plus généralement d'un schéma régulier [Gr68], est de torsion. Par conséquent, \mathcal{G} est un champ de Deligne-Mumford, et il existe un entier n' et un k -espace homogène V de $SL_{n'}$ avec isotropie μ_n tels que

$$\mathcal{G} \approx [V/SL_{n'}]$$

Remarquons que l'entier n' peut être différent de n , et c'est en particulier le cas pour le corps k_M construit par Merkurjev dans son article sur la conjecture de Kaplansky [Me91] : il existe un élément de $H^2(k_M, \mu_2)$ qui ne provient pas d'un élément de $H^1(k_M, PGL_2) = H^1(k_M; SL_2, \mu_2)$ (mais qui est atteint par un élément de $H^1(k_M, PGL_4)$).

Cependant, l'espace homogène V n'est autre que la variété de Severi-Brauer pré-image de \mathcal{G} par le morphisme naturel

$$\text{Br}_{Az} k \longrightarrow H^2(k, \mathbb{G}_m)$$

et on retrouve ainsi le point de vue de [EHKV01].

4.3 Invariant de Brauer-Manin d'une k -gerbe localement liée par un groupe fini

Les k -champs algébriques (en particulier les k -gerbes qui sont des champs de Deligne-Mumford) sont des généralisations de la notion de schéma. Par suite, il est tout-à-fait naturel de définir l'obstruction de Brauer-Manin d'une k -gerbe de manière analogue à celle d'un k -schéma.

Soit donc \mathcal{G} une k -gerbe, qui est un champ de Deligne-Mumford. Le site étale de \mathcal{G} est défini au chapitre 12 de [LMB00]. Le groupe de Brauer $\text{Br } \mathcal{G} = H_{\text{ét}}^2(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)$ est défini

dans [SGA4-V] (où, d'une manière plus générale, la cohomologie d'un topos localement annelé est définie). Il existe une suite spectrale (cf. [SGA4-V], prop. 5.3) :

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H_{\acute{e}t}^q(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m)) \implies H_{\acute{e}t}^{p+q}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) = E^{p+q}$$

qui permet de définir $\text{Br}^{cst}\mathcal{G}$, $\text{Br}^{alg}\mathcal{G}$ et $\text{Br}_a\mathcal{G}$ comme pour les variétés. Plus précisément :

$$\begin{cases} \text{Br}^{cst}\mathcal{G} = \text{im} \{ E_2^{2,0} = \text{Br } k \longrightarrow \text{Br } \mathcal{G} = E^2 \} \\ \text{Br}^{alg}\mathcal{G} = \text{ker} \{ E^2 = \text{Br } \mathcal{G} \longrightarrow \text{Br } \bar{\mathcal{G}} = E_2^{0,2} \} \\ \text{Br}_a\mathcal{G} = \frac{\text{Br}^{alg}\mathcal{G}}{\text{Br}^{cst}\mathcal{G}} \end{cases}$$

Soit (V, π) une présentation de \mathcal{G} (d'après nos hypothèses, on a donc $\mathcal{G} \approx [V/SL_n]$). Posons :

$$U(\bar{\mathcal{G}}) = \frac{\bar{k}[\mathcal{G}]^*}{\bar{k}^*}$$

On a :

$$U(\bar{\mathcal{G}}) \subset U(\bar{V}) \subset U(SL_{n,\bar{k}}) = \widehat{SL_{n,\bar{k}}} = 0$$

L'analogie de la suite exacte (2) associée à la suite spectrale précédente implique alors :

$$\begin{aligned} \text{Br}_a\mathcal{G} &\approx H^1(k, \text{Pic } \bar{\mathcal{G}}) \\ &\approx H^1(k, \text{Hom}(\Pi_1(\bar{\mathcal{G}}), \mathbb{G}_m)) \\ &\approx H^1(k, \text{Hom}(\bar{H}, \mathbb{G}_m)) \end{aligned}$$

car il est bien connu que $\Pi_1(\bar{\mathcal{G}}) = \bar{H}$ (cf. [No02]), et finalement :

$$\text{Br}_a\mathcal{G} \approx H^1(k, \widehat{\bar{H}}) \tag{4.3}$$

Si K est un corps qui est une extension quelconque de k , nous pouvons définir un accouplement :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(K) \times \text{Br } \mathcal{G} & \longrightarrow & \text{Br } K \\ (x, b) & \longmapsto & b(x) \end{array}$$

où l'image $b(x)$ peut être interprétée de différentes façons (\mathcal{B} désigne ci-dessous un représentant de b) :

- (i) $b(x)$ est la gerbe résiduelle de \mathcal{B} au point x du champ algébrique $\mathcal{G} = [V/SL_n]$;
- (ii) comme dans la section 2.3, x peut être vu comme une section au dessus de $\text{Spec } k$ du (1-)morphisme structural $\mathcal{G} \rightarrow \text{Spec } k$; autrement dit, c'est un (1-)morphisme rendant commutatif le diagramme (de morphismes de champs) suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{G} \\ & \nearrow x & \downarrow \\ \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

\mathcal{B} étant une gerbe sur \mathcal{G} , on peut considérer la gerbe image inverse $x^*\mathcal{B}$ de \mathcal{B} par le morphisme x ; la gerbe $x^*\mathcal{B}$ ainsi obtenue correspond exactement à $b(x)$; elle est

obtenue par pull-back à partir de x et de \mathcal{B} :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{B} \\
 & \swarrow x^* & \downarrow \\
 x^* \mathcal{B} & & \mathcal{G} \\
 \downarrow & \nearrow x & \downarrow \\
 \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } k
 \end{array}$$

De plus, si H abélien, toute K -section de la gerbe \mathcal{G} (*i.e.* tout objet de $\mathcal{G}(K)$) est un H -torseur sur $\text{Spec } K$ (\mathcal{G} est par définition localement équivalente à la gerbe $\text{Tors } H$; l'existence d'une K -section implique que $\mathcal{G}|_K$ est équivalente à la gerbe des H -torseurs sur K). Si on suppose que K est un corps local, on obtient alors l'énoncé suivant :

Proposition 4.3.1 (Cas local). *Soient K un corps local, \mathcal{G} une K -gerbe liée par un groupe abélien fini H et (V, π) une présentation de \mathcal{G} . Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
 (\text{Acc.1}) & V(K) & \times & \text{Br}_a V & \\
 & \downarrow & & \approx \uparrow & \searrow \\
 (\text{Acc.2}) & \mathcal{G}(K) & \times & \text{Br}_a \mathcal{G} & \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
 & \downarrow & & \approx \uparrow & \nearrow \\
 (\text{Acc.3}) & H^1(K, \bar{H}) & \times & H^1(K, \widehat{\bar{H}}) &
 \end{array}$$

où :

- l'accouplement $(\text{Acc.1}) : V(K) \times \text{Br}_a V \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est défini comme suit : à un point x de $V(K)$, et à une classe b dans $\text{Br}_a V$, on associe :

$$\langle x, b \rangle = [s_x(b)]_x$$

s_x désignant la section⁴ induite par x de la projection canonique p (cf. [BK00]) :

$$\text{Br}_1 X \xrightarrow[p]{} \text{Br}_a X \xleftarrow{s_x} \text{Br}_a X$$

- l'accouplement $(\text{Acc.2}) : \mathcal{G}(K) \times \text{Br}_a \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est défini de la même manière que (Acc.1) ;
- l'accouplement $(\text{Acc.3}) : H^1(K, \bar{H}) \times H^1(K, \widehat{\bar{H}}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est l'accouplement de Tate pour les corps locaux.

⁴En effet, l'existence d'un point K -rationnel entraîne que la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Br } K \longrightarrow \text{Br}_1 V \longrightarrow \text{Br}_a V \longrightarrow 0$$

k étant un corps de nombres, nous pouvons définir pour toute place v de k l'accouplement :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k_v) \times \mathrm{Br}_1 \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ (x, b) &\longmapsto \mathrm{inv}_v(b(x)) \end{aligned}$$

où comme d'habitude inv_v est l'invariant donné par la théorie du corps de classes, et $b(x)$ est la classe dans $\mathrm{Br} k_v$ de \mathcal{B}_x , où \mathcal{B} est un représentant de b . Supposons maintenant que $\mathcal{G}(k_v)$ soit non-vide pour toute place v de k , et restreignons nous au sous-groupe $\mathbb{B}(\mathcal{G})$ de $\mathrm{Br}_a \mathcal{G}$ défini par :

$$\mathbb{B}(\mathcal{G}) = \ker \left\{ \mathrm{Br}_a \mathcal{G} \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}_a \mathcal{G}|_{k_v} \right\}$$

Nous définissons ainsi un accouplement :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \prod_{v \in \Omega_k} \mathcal{G}(k_v) \times \mathbb{B}(\mathcal{G}) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ ((x_v)_v, b) &\longmapsto \sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(\tilde{b}(x_v)) \end{aligned}$$

où \tilde{b} est un relevé de b dans $\mathrm{Br}_1 \mathcal{G}$. Par analogie avec la définition usuelle de cet accouplement (cf. section 2.3), $\langle (x_v)_v, b \rangle$ ne dépend pas de $(x_v)_v$, et $\langle (x_v)_v, b \rangle \neq 0$ est une obstruction à l'existence d'une section k -rationnelle de $\mathrm{Spec} k$ (i.e. d'un objet de la catégorie fibre $\mathcal{G}(k)$). Nous obtenons de cette façon un élément bien défini :

$$m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \in \mathbb{B}(\mathcal{G})^D = \mathrm{Hom}(\mathbb{B}(\mathcal{G}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}\left(\mathrm{III}^1(k, \widehat{H}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$$

puisque : $\mathbb{B}(\mathcal{G}) \approx \mathrm{III}^1(k, \widehat{H})$ (c'est une conséquence immédiate de l'isomorphisme (4.3)).

Proposition 4.3.2 (Cas global). *Soient k un corps de nombres et \mathcal{G} une k -gerbe. Pour toute présentation (V, π) de \mathcal{G} :*

$$\mathbb{B}(V) \xleftarrow{\sim} \mathbb{B}(\mathcal{G})$$

et $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ est égale à l'image de $m_{\mathcal{H}}(V)$ par l'isomorphisme :

$$\mathbb{B}(V)^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(\mathcal{G})^D$$

L'isomorphisme $\mathbb{B}(V) \xleftarrow{\sim} \mathbb{B}(\mathcal{G})$ résulte de l'isomorphisme

$$\mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{\mathcal{G}})$$

ce dernier étant induit par les isomorphismes composés

$$H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{V}) \approx H^1(k, \widehat{H}) \approx H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{\mathcal{G}})$$

Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \prod V(k_v) \times \mathbb{B}(V) & & \\ \downarrow & \approx & \searrow \\ \prod \mathcal{G}(k_v) \times \mathbb{B}(\mathcal{G}) & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

dans lequel la surjectivité de la flèche de gauche provient de la proposition 4.2.1(iv). On a vu que le calcul de $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ ne dépendait pas de la famille $(x_v)_v$ choisie dans $\prod_{v \in \Omega_k} \mathcal{G}(k_v)$.

De la même manière, on sait que le calcul de $m_{\mathcal{H}}(V)$ ne dépend pas non plus de la famille $(y_v)_v$ choisie dans $\prod_{v \in \Omega_k} V(k_v)$. Pour calculer $m_{\mathcal{H}}(V)$, on peut donc prendre pour $(y_v)_v$

n'importe quel relèvement de la famille $(x_v)_v$. On en déduit que $m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$ n'est autre que l'application composée :

$$\mathbb{B}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(V) \xrightarrow{m_{\mathcal{H}}(V)} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où $m_{\mathcal{H}}(V) \in \mathbb{B}(V)^D$ est donnée par :

$$b \longmapsto \langle (y_v)_v, b \rangle$$

Dans la suite, nous verrons l'élément $m_{\mathcal{H}}(V)$ comme un élément de $\text{III}^1(k, \widehat{H})^D$.

4.4 1/2-théorème de Tate-Poitou pour les groupes non-abéliens

Théorème 4.4.1. *Soient k un corps de nombres, H un k -groupe fini, \mathcal{L}_H un k -lien localement représentable par H . L'application*

$$\begin{array}{ccc} m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) & \longrightarrow & \text{III}^1(k, \widehat{H})^D \\ [\mathcal{G}] & \longmapsto & m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}) \end{array}$$

où $\text{III}^2(k, \mathcal{L}_H)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de gerbes localement liées par H admettant partout localement une section (i.e. qui sont partout localement neutres), se factorise par

$$\begin{array}{ccc} \text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) & \xrightarrow{ab} & \text{III}^2\left(k, \frac{\widehat{H}}{[\widehat{H}, \widehat{H}]}\right) \\ & \searrow m_{\mathcal{H}} & \downarrow \approx \\ & & \text{III}^1\left(k, \frac{\widehat{H}}{[\widehat{H}, \widehat{H}]}\right)^D \end{array}$$

où ab est l'application d'abélianisation naturelle, et l'isomorphisme vertical est fourni par la dualité de Tate-Poitou.

Remarque 4.4.2.

On peut étendre le théorème 4.4.1 au cas où H est un k -groupe linéaire, *i.e.* au cas où les k -gerbes considérées ne sont plus de Deligne-Mumford. Ceci peut se faire en remplaçant dans la construction fondamentale (de la section 2) SL_n par GL_n . Le théorème 4.1 peut alors être complété par les deux résultats suivants :

1. Si H est un k -tore T , $m_{\mathcal{H}}$ prend ses valeurs dans $\text{III}^1(k, X^*(T))^D$:

$$m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, T) \longrightarrow \text{III}^1(k, X^*(T))^D$$

et coïncide avec l'isomorphisme donné par la dualité de Kottwitz pour les tores [Ko84].

2. Si H est un k -groupe semi-simple, alors $\text{III}^1(k, \widehat{H}) = 0$ et

$$m_{\mathcal{H}} : \text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) \longrightarrow \text{III}^1(k, \widehat{H})^D = 0$$

est l'application nulle. On sait d'après [Bo96] dans le cas semi-simple (resp. d'après [Do76] dans le cas semi-simple simplement connexe) que toutes les classes de

$$\text{III}^2(k, \mathcal{L}_H) \quad (\text{resp. de } H^2(k, \mathcal{L}_H))$$

sont neutres. Ainsi l'obstruction de Brauer-Manin est la seule dans le cas semi-simple. Compte tenu de la remarque (1) précédente, on en déduit que le même résultat vaut dans le cas des groupes réductifs connexes, puis dans le cas des groupes connexes ([Bo93]).

Appendice A

Interprétation de la classe de Chern d'un fibré en droites comme la gerbe de ses logarithmes

Tout au long de cet appendice, X désigne une variété algébrique complexe, projective et lisse. On note X^{an} la variété analytique naturellement associée à X (cf. [GH78] *e.g.*). Sur X^{an} , on dispose de la suite exacte de faisceaux :

$$(A1) : \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{an}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{X^{an}}^* \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{O}_{X^{an}}$ (resp. $\mathcal{O}_{X^{an}}^*$) désigne le faisceau des fonctions holomorphes (resp. des fonctions holomorphes ne s'annulant pas) sur X . On en déduit la suite longue de cohomologie :

$$H^1(X^{an}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \xrightarrow{\exp} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

dans laquelle on note encore $\exp : H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \rightarrow H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*)$ le morphisme de groupes induit par le morphisme de faisceaux \exp de la suite (A.1). D'après le théorème de Serre (cf. [Hart77] p.440), qui établit l'équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celle des faisceaux analytiques cohérents sur X^{an} , on a :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{Pic } X^{an} & & \\ & & & & \parallel & & \\ H^1(X^{an}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j} & H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) & \xrightarrow{\exp} & H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(X^{an}, \mathbb{Z}) \\ & \searrow & \parallel & & \parallel & \nearrow & \\ & & H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & & \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & \text{Pic } X & & \end{array}$$

où $\text{Pic } X$ (resp. $\text{Pic } X^{an}$) désigne le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites (resp. de fibrés en droites holomorphes) sur X (resp. sur X^{an}). Soit maintenant \mathcal{E} un fibré en droites sur X . Une conséquence directe de la définition est (cf. [Fu98] p.385) :

$$c_1(\mathcal{E}) = \delta^1(\mathcal{E})$$

Par ailleurs, il est légitime de vouloir donner une interprétation en termes de gerbes à $\delta^1(\mathcal{E})$. Pour ce faire, on associe une gerbe à \mathcal{E} , notée $\text{Log } \mathcal{E}$ et appelée gerbe des logarithmes de \mathcal{E} : celle-ci vit dans $H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$, *i.e.* c'est une gerbe sur le site analytique⁵ de X^{an} . $\text{Log } \mathcal{E}$ mesure l'obstruction à ce que \mathcal{E} appartienne à l'image de \exp . Plus précisément :

⁵C'est le site dont les objets sont les ouverts de la variété analytique X^{an} , les morphismes sont les inclusions entre iceux, et les familles couvrantes sont les recouvrements ouverts au sens usuel.

Proposition A.1. *Soient X une variété algébrique complexe projective et lisse, et \mathcal{E} un fibré en droites sur X . Alors :*

$$\text{Log } \mathcal{E} = c_1(\mathcal{E})$$

On obtient en particulier :

Proposition A.2. *Soit X une variété algébrique complexe projective et lisse, satisfaisant la condition “ $B^2 - \rho = 0$ ”, i.e le deuxième nombre de Betti de X est égal au rang du groupe de Neron-Severi de X . Alors tout élément de $H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$ est la gerbe des logarithmes d'un fibré en droites sur X .*

D'où :

Corollaire A.3. *Si X est une variété projective complexe lisse de dimension ≥ 3 , intersection complète dans \mathbb{P}^N , alors tout fibré en droites sur X est déterminé uniquement (à isomorphisme près) par la classe d'équivalence de la gerbe de ses logarithmes.*

En outre, en vertu du principe de Lefschetz, on peut supposer dans ces énoncés X définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (e.g. $\bar{\mathbb{Q}}$).

A.1 Une célèbre suite de cohomologie

A.1.1 La suite exponentielle

Rappelons rapidement la définition du faisceau $\mathcal{O}_{X^{an}}$. Soit U un ouvert de X^{an} . Un élément de $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ est une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, i.e : pour tout $x \in U$, il existe un ouvert U_x avec :

$$x \in U_x \subset U$$

et il existe un ouvert V_x de \mathbb{C}^n et un homéomorphisme :

$$\theta_x : U_x \longrightarrow V_x$$

tel que $f \circ \theta_x^{-1}$ soit holomorphe (au sens usuel) sur V_x :

$$\begin{array}{ccc} & U_x & \\ \theta_x \swarrow & & \searrow f \\ V_x & \xrightarrow{f \circ \theta_x^{-1}} & \mathbb{C} \end{array}$$

On définit le faisceau $\mathcal{O}_{X^{an}}^*$ de la même façon, en imposant juste que f ne s'annule pas sur U . Le morphisme de faisceaux $\exp : \mathcal{O}_{X^{an}} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{an}}^*$ est défini en posant, pour tout ouvert U de X^{an} :

$$\begin{aligned} \exp_U : \quad \mathcal{O}_{X^{an}}(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_{X^{an}}^*(U) \\ f &\longmapsto \exp(2i\pi \cdot f) \end{aligned}$$

La suite de faisceaux sur X^{an} :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{an}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{X^{an}}^* \longrightarrow 0$$

est exacte, car en tout point x de X , la suite (de groupes abéliens) obtenue sur les fibres :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

est évidemment exacte.

A.1.2 Fibrés en droites holomorphes, $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseurs

On appelle **fibré en droites holomorphe** sur X^{an} la donnée d'un couple

$$(\mathcal{E}, \pi : \mathcal{E} \rightarrow X)$$

où π est un morphisme de variétés analytiques, tel qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X^{an} et des isomorphismes de variétés analytiques φ_α rendant commutatif le diagramme suivant (pour tout $\alpha \in A$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}|_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

où pr_1 désigne la première projection. La commutativité de ce diagramme impose que φ_α préserve les fibres ; on demande que l'application obtenue par restriction à chaque fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ (pour tout $x \in U_\alpha$) :

$$\varphi_{\alpha,x} = \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(\{x\})} : \pi^{-1}(\{x\}) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$$

soit un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, le diagramme ci-dessous est alors commutatif⁶ :

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & & \\ & \swarrow \varphi_\alpha & \downarrow & \searrow \varphi_\beta & \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C} & \xleftarrow{\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C} \\ & \searrow pr_1 & \downarrow \pi & \swarrow pr_1 & \\ & & U_{\alpha\beta} & & \end{array}$$

On pose : $g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$. C'est encore une application qui préserve les fibres, et il découle des remarques précédentes que pour tout point $x \in U_{\alpha\beta}$, l'application :

$$g_{\alpha\beta,x} = g_{\alpha\beta,x}|_{\{x\} \times \mathbb{C}} : \{x\} \times \mathbb{C} \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$$

est une homothétie vectorielle de \mathbb{C} . Il s'ensuit que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, pour tout $x \in U_{\alpha\beta}$, il existe un unique nombre complexe $\hat{g}_{\alpha\beta}(x)$ tel que :

$$g_{\alpha\beta}(x, z) = (x, \hat{g}_{\alpha\beta}(x) \cdot z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

⁶On pose : $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.

La fonction $\hat{g}_{\alpha\beta}$ ainsi définie est holomorphe sur $U_{\alpha\beta}$, et ne s'annule évidemment pas. De plus :

$$\hat{g}_{\alpha\alpha}(x) = 1, \quad \forall \alpha \in A, \quad \forall x \in U_\alpha$$

et :

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x) \hat{g}_{\beta\gamma}(x) = \hat{g}_{\alpha\gamma}(x), \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in A^3, \quad \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma}$$

Ainsi la famille $(\hat{g}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathcal{O}_{X^{an}}^*$, relativement au recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Nous appellerons les fonctions $\hat{g}_{\alpha\beta}$ les **fonctions de transition** du fibré \mathcal{E} .

On appelle **$\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur sur X^{an}** un couple $(\mathcal{T}, \pi : \mathcal{T} \rightarrow X)$ comme précédemment, mais on demande cette fois-ci que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, et pour tout point $x \in U_{\alpha\beta}$, l'application :

$$g_{\alpha\beta,x} = g_{\alpha\beta,x} : \{x\} \times \mathbb{C} \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$$

soit une translation de \mathbb{C} . Alors, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$, et pour tout $x \in U_{\alpha\beta}$, il existe un unique nombre complexe $\hat{g}_{\alpha\beta}(x)$ tel que :

$$g_{\alpha\beta}(x, z) = (x, z + \hat{g}_{\alpha\beta}(x)), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La fonction $\hat{g}_{\alpha\beta}$ ainsi définie est holomorphe sur $U_{\alpha\beta}$, et :

$$\hat{g}_{\alpha\alpha}(x) = 0, \quad \forall \alpha \in A, \quad \forall x \in U_\alpha$$

et :

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x) + \hat{g}_{\beta\gamma}(x) = \hat{g}_{\alpha\gamma}(x), \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in A^3, \quad \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma}$$

Comme dans le cas des fibrés en droites, la famille $(\hat{g}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ est un 1-cocycle, à valeurs cette fois dans $\mathcal{O}_{X^{an}}$, relativement au recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Nous appellerons encore les fonctions $\hat{g}_{\alpha\beta}$ les **fonctions de transition** du $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur \mathcal{T} .

Remarque. On aurait pu se passer de distinguer les deux cas, puisque les fibrés en droites sont eux aussi des $(\mathcal{O}_{X^{an}}^*)$ -torseurs, mais on a ici donné la préférence à une explication plus détaillée de la situation.

A.1.3 Un peu de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^0(X^{an}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \longrightarrow H^0(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \longrightarrow 0$$

est exacte, puisque toute fonction holomorphe définie globalement sur X^{an} est constante. On en déduit une nouvelle suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X^{an}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \xrightarrow{\exp} H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

Description du morphisme j : soit $[A]$ un élément de $H^1(X^{an}, \mathbb{Z})$; il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X^{an} tel que $[A]$ soit représenté par un 1-cocycle $k_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{Z}$. On associe alors à $[A]$ la classe du $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur $j(A)$ dont les fonctions de transition $\hat{g}_{\alpha\beta}$ sont justement les $k_{\alpha\beta}$.

Description du morphisme exp : soit \mathcal{T} un $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur sur X^{an} , et soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X^{an} le trivialisant. On note $\hat{g}_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition de \mathcal{T} , relativement à ce recouvrement. On définit alors **l'exponentielle de \mathcal{T}** et on note $e^{\mathcal{T}}$ le fibré en droites holomorphe sur X^{an} dont les fonctions de transition sont les $h_{\alpha\beta}$ définies par :

$$h_{\alpha\beta}(x) = \exp(2i\pi \cdot \hat{g}_{\alpha\beta}(x)), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

La définition de l'exponentielle d'un $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur suggère d'introduire la définition suivante :

Définition A.1.3.1. Soit $\mathcal{E} \in \text{Pic } X^{an} \approx \text{Pic } X$. On appelle **logarithme de \mathcal{E}** un $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur \mathcal{T} tel que : $e^{\mathcal{T}} \approx \mathcal{E}$.

Avec cette nouvelle définition, on a évidemment l'énoncé :

Lemme A.1.3.2. Soit \mathcal{E} un fibré en droites (holomorphe ou non) sur X . \mathcal{E} a un logarithme si et seulement si sa classe de Chern $c_1(\mathcal{E})$ est nulle.

A.2 Gerbe des logarithmes d'un fibré en droites

Soit (\mathcal{E}, π) un fibré en droites holomorphe sur X^{an} . On appelle **gerbe des logarithmes** de \mathcal{E} et on note $\text{Log } \mathcal{E}$ la catégorie fibrée en groupoïdes sur le site analytique de X^{an} définie comme suit : pour tout ouvert U de X^{an} , la fibre $(\text{Log } \mathcal{E})_U$ est le groupoïde dont :

- **les objets** sont les “logarithmes de $\mathcal{E}|_U$ ” ; ce sont donc les couples $(\mathcal{T}^U, \varphi_{\mathcal{T}^U})$, où \mathcal{T}^U est un $\mathcal{O}_{X^{an}|U}$ -torseur sur U , et $\varphi_{\mathcal{T}^U}$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X^{an}|U}$ -torseurs sur U :

$$\varphi_{\mathcal{T}^U} : e^{\mathcal{T}^U} \xrightarrow{\approx} \mathcal{E}|_U$$

- deux objets $(\mathcal{T}^U, \varphi_{\mathcal{T}^U})$ et $(\mathcal{T}'^U, \varphi_{\mathcal{T}'^U})$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme

$$\psi : \mathcal{T}^U \longrightarrow \mathcal{T}'^U$$

de $\mathcal{O}_{X^{an}|U}$ -torseurs rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} e^{\mathcal{T}^U} & \xrightarrow{e^\psi} & e^{\mathcal{T}'^U} \\ \searrow \varphi_{\mathcal{T}^U} & & \swarrow \varphi_{\mathcal{T}'^U} \\ & \mathcal{E}|_U & \end{array}$$

Précisons cela : soit $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseurs. On peut trouver un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X^{an} trivialisant (\mathcal{T}, π) et (\mathcal{T}', π') . Par définition, il existe un isomorphisme φ_α (resp. φ'_α) pour tout $\alpha \in A$:

$$\varphi_\alpha : \mathcal{T}|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C} \quad (\text{resp. } \varphi'_\alpha : \mathcal{T}'|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C})$$

Pour tout $\alpha \in A$, on a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \pi^{-1}(U_\alpha) = \mathcal{T}|_{U_\alpha} & \xrightarrow{\psi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}} & \pi'^{-1}(U_\alpha) = \mathcal{T}'|_{U_\alpha} & \\
 \varphi_\alpha \swarrow & & & & \searrow \varphi'_\alpha \\
 U_\alpha \times \mathbb{C} & & & & U_\alpha \times \mathbb{C} \\
 & \searrow \pi & & \swarrow \pi' & \\
 & & U_\alpha & & \\
 & \swarrow pr_1 & & \searrow pr_1 & \\
 & & & &
 \end{array}$$

On note Ψ_α la composée :

$$\varphi'_\alpha \psi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \varphi_{U_\alpha}^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$$

Par définition, Ψ_α préserve les fibres, et pour tout $x \in U_\alpha$, l'application $\Psi_{\alpha,x}$ induite sur les fibres est \mathbb{C} -équivariante ; c'est donc une translation de \mathbb{C} , et pour tout $x \in U_\alpha$ on note $\hat{\Psi}_\alpha(x)$ l'unique nombre complexe tel que :

$$\Psi_{\alpha,x}(x, z) = \left(x, z + \hat{\Psi}_\alpha(x) \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Passons maintenant à la preuve de quelques faits :

Fait A.2.1. *La catégorie fibrée en groupoïdes $\text{Log } \mathcal{E}$ est une gerbe sur le site analytique de X^{an} .*

Le fait que $\text{Log } \mathcal{E}$ soit un champ est une conséquence directe du fait que les $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseurs se recollent.

$\text{Log } \mathcal{E}$ est localement non-vide : en effet, il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X^{an} tel que $\mathcal{E}|_{U_\alpha}$ soit isomorphe au fibré en droites trivial $U_\alpha \times \mathbb{C}$; il suffit alors de remarquer que le fibré en droites trivial est l'exponentielle du $\mathcal{O}_{X^{an}}$ -torseur trivial.

Deux objets sont localement isomorphes : soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux logarithmes de $\mathcal{E}|_U$; on choisit un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de U trivialisant \mathcal{T} et \mathcal{T}' , et on note $\hat{g}_{\alpha\beta}$ (resp. $\hat{g}'_{\alpha\beta}$) les fonctions de transition de \mathcal{T} (resp. de \mathcal{T}'). Comme $e^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{T}'}$ sont isomorphes, il existe une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X^{an}}^*(U_\alpha)$ telle que :

$$\exp \left(2i\pi \left[\hat{g}_{\alpha\beta}(x) - \hat{g}'_{\alpha\beta}(x) \right] \right) = f_\alpha(x) f_\beta^{-1}(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

Du fait que f_α (resp. f_β) ne s'annule pas sur U_α (resp. sur U_β), il existe (quitte à raffiner encore le recouvrement) une fonction \hat{f}_α (resp. \hat{f}_β) holomorphe sur U_α (resp. sur U_β) telle que :

$$\exp \left(2i\pi \cdot \hat{f}_\alpha(x) \right) = f_\alpha(x), \quad \forall x \in U_\alpha \text{ (resp. } \beta \text{)}.$$

Par conséquent, pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times A$, et pour tout $x \in U_{\alpha\beta}$, il existe $k_{\alpha\beta}(x) \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x) - \hat{g}'_{\alpha\beta} - \hat{f}_\alpha(x) + \hat{f}_\beta(x) = k_{\alpha\beta}(x)$$

Les $k_{\alpha\beta}$ ainsi construits fournissent un isomorphisme "provenant de \mathbb{Z} " entre \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

□

Fait A.2.2. *La gerbe $\text{Log } \mathcal{E}$ est liée par \mathbb{Z} . Il est clair, vue la définition de $\text{Log } \mathcal{E}$, que le*

faisceau des automorphismes d'un logarithme de \mathcal{E} sur U est \mathbb{Z} ; le fait s'ensuit, \mathbb{Z} n'ayant évidemment pas d'automorphismes intérieurs.

□

Fait A.2.3. *A la gerbe $\text{Log } \mathcal{E}$ on peut associer naturellement un 2-cocycle à valeurs dans \mathbb{Z} .*

On choisit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X^{an} trivialisant \mathcal{E} , et on note :

$$\varphi_\alpha : \mathcal{E}|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$$

les isomorphismes locaux. On a déjà remarqué que le fibré en droites trivial $U_\alpha \times \mathbb{C}$ était l'exponentielle du $\mathcal{O}_{X^{an}|U_\alpha}$ -torseur trivial sur U_α , noté \mathcal{T}_α .

Quitte à raffiner le recouvrement, on peut supposer que pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times A$ il existe une fonction $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ holomorphe sur $U_{\alpha\beta}$ telle que :

$$\exp(2i\pi \cdot \tilde{g}_{\alpha\beta}(x)) = \hat{g}_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

où les $\hat{g}_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transition du fibré en droites \mathcal{E} . La question est maintenant de savoir si on peut recoller les \mathcal{T}_α à l'aide des $\tilde{g}_{\alpha\beta}$; c'est possible si et seulement si :

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) - \tilde{g}_{\alpha\gamma}(x) + \tilde{g}_{\beta\gamma}(x) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in A^3, \quad \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or, il découle de la définition des fonctions $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in A^3$:

$$\forall x \in U_{\alpha\beta\gamma}, \quad \exists k_{\alpha,\beta,\gamma}(x) \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } : \tilde{g}_{\alpha\beta}(x) - \tilde{g}_{\alpha\gamma}(x) + \tilde{g}_{\beta\gamma}(x) = k_{\alpha,\beta,\gamma}(x).$$

Un calcul facile montre que pour tout $(\alpha, \beta, \gamma, \mu) \in A^4$, on a :

$$k_{\alpha,\beta,\gamma}(x) - k_{\alpha,\gamma,\mu}(x) + k_{\alpha,\beta,\mu}(x) - k_{\beta,\gamma,\mu}(x) = 0, \quad \forall x \in U_{\alpha\beta\gamma\mu}.$$

Donc $k_{\alpha,\beta,\gamma} \in Z^2((U_\alpha)_{\alpha \in A}, \mathbb{Z})$ est le 2-cocycle recherché. Il est cohomologue au cocycle nul si et seulement si \mathcal{E} possède un logarithme sur X .

□

Fait A.2.4. *La gerbe $\text{Log } \mathcal{E}$ est nulle si et seulement si \mathcal{E} possède un logarithme.*

Résulte directement de la définition de $\text{Log } \mathcal{E}$.

□

A.3 Applications

Dans la section précédente, on a donné une autre interprétation du cobord δ^1 . On a ainsi obtenu :

Proposition A.3.1. *Soient X une variété algébrique complexe projective et lisse, et \mathcal{E} un fibré en droites sur X . Alors :*

$$\text{Log } \mathcal{E} = c_1(\mathcal{E})$$

Pour faire le lien avec la section 2, il est juste nécessaire de rappeler que :

$$\text{Pic } X^{an} \approx H^1(X^{an}, \mathcal{O}_{X^{an}}^*) \approx H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \approx \text{Pic } X.$$

En particulier, un fibré en droites \mathcal{E} possède un logarithme si et seulement si sa classe de Chern $c_1(\mathcal{E})$ est nulle, ou d'une manière équivalente, la gerbe de ses logarithmes est nulle. Une conséquence immédiate de la proposition A.3.1 est alors :

Proposition A.3.2. *Soit X une variété algébrique complexe projective et lisse, telle que $B_2(X) = \rho(X)$.⁷ Alors tout élément de $H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$ est :*

- (i) la gerbe des logarithmes d'un fibré en droites sur X , ou
- (ii) la classe de Chern d'un fibré en droites sur X .

En effet, sous ces hypothèses, le cobord

$$\text{Pic } X \longrightarrow H^2(X^{an}, \mathbb{Z})$$

est surjectif.

□

Remarque. Ces quelques faits suggèrent que l'on pourrait peut-être interpréter, comme le suggère Deligne dans [Del90], les n -gerbes en termes des classes de Chern supérieures, le principal problème avec les n -gerbes étant la complexité de leur manipulation. Notons cependant qu'une telle interprétation ne serait pas totalement satisfaisante, dans la mesure où elle ne s'appliquerait qu'à des gerbes très "spéciales" ; en particulier, elle ne pourrait pas s'étendre à des n -gerbes non-abéliennes, pour lesquelles la situation est cette fois-ci absolument épouvantable (il suffit de consulter [Br94a] pour avoir un aperçu de la complexité des 2-gerbes en général).

⁷ $B_2(X)$ est le deuxième nombre de Betti de X , et $\rho(X)$ est le rang du groupe de Neron-Severi $NS(X) = \ker \{H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)\}$.

Appendice B

Généralités sur les suites spectrales

B.1 Rappels sur les suites spectrales

A spectral sequence is an algebraic object, like an exact sequence, but more complicated.

J.F.Adams.

Le but des suites spectrales est d'établir un algorithme fournissant des approximations successives d'une cohomologie que l'on cherche à déterminer par des cohomologies "aisément calculables". Entrons directement dans le vif du sujet en énonçant la définition :

Une suite spectrale de groupes abéliens⁸ est la donnée :

1. de groupes abéliens $E_r^{p,q}$, pour $r \geq 2$, et $p, q \in \mathbb{Z}$;
2. de morphismes de groupes

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}, \text{ pour } r \geq 2, \text{ et } p, q \in \mathbb{Z}$$

tels que

$$d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r, q+r-1} = 0, \text{ pour } r \geq 2, \text{ et } p, q \in \mathbb{Z}$$

3. d'isomorphismes de groupes

$$\alpha_r^{p,q} : \frac{\ker d_r^{p,q}}{\text{im } d_r^{p-r, q+r-1}} \xrightarrow{\approx} E_{r+1}^{p,q}$$

4. de groupes E^n ($n \in \mathbb{Z}$) munis d'une filtration décroissante $F^p(E^n)_{p \in \mathbb{Z}}$.

On suppose en outre que, pour tout couple (p, q) , $d_r^{p,q} = 0$, pour r "assez grand" ; par suite, pour tout couple (p, q) , $E_r^{p,q}$ est indépendant de r pour r suffisamment grand. On note alors $E_\infty^{p,q}$ cette valeur limite. On suppose également que $F^p(E^n) = 0$ pour p assez grand, et que $F^p(E^n) = E^n$ pour p assez petit⁹.

5. d'isomorphismes

$$\beta^{p,q} : E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\approx} gr_p(E^{p+q}) = \frac{F^p(E^{p+q})}{F^{p+1}(E^{p+q})}$$

⁸Il est possible de définir les suites spectrales à valeurs dans une catégorie abélienne quelconque. Nous n'aurons pas besoin d'une telle généralité par la suite.

⁹C'est-à-dire que l'on suppose que pour tout entier n , la filtration de E^n est régulière.

On résume les points (1) à (5) sous la forme très condensée suivante :

$$E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$$

Terminologie - Remarques

Remarque B.1.1. Si $E_r^{p,q} = 0$, alors $E_{r+k}^{p,q} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Remarque B.1.2. On dit que la suite spectrale $E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$ **aboutit au $N^{\text{ème}}$ terme** si :

$$E_N^{*,*} = E_{N+1}^{*,*} = \dots = E_\infty^{*,*}$$

Exemple B.1.3.(extrait de [Mac84]). Supposons que $E_2^{p,q} = 0$, pour p pair ou q impair :

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & E_2^{1,2} & 0 & E_2^{3,2} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & E_2^{1,0} & 0 & E_2^{3,0} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Alors soit $E_2^{p,q} = 0$, et alors, d'après la remarque 1, on a :

$$E_3^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q} = 0$$

Soit $E_2^{p,q} \neq 0$, ce qui implique que p est pair et q est impair. Considérons alors la différentielle

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

Si r est pair, alors $q - r + 1$ est impair, donc $E_r^{p+r, q-r+1} = 0$, et donc $d_r^{p,q} = 0$. De la même façon, comme $q + r - 1$ est impair, alors $E_r^{p-r, q+r-1}$ est nul, donc la différentielle

$$d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \longrightarrow E_r^{p,q}$$

est nulle à son tour. Pour r pair, on a donc

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r^{p,q}}{\text{im } d_r^{p-r, q+r-1}} = E_r^{p,q}$$

et on montre d'une manière tout-à-fait analogue que cette relation est également vraie pour r impair. Il s'ensuit que

$$E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}, \forall r \geq 2, \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

et par conséquent

$$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas, la suite spectrale aboutit donc au $2^{\text{ème}}$ terme (on dit qu'elle est dégénérée).

Définition B.1.4. On dit que $E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$ est une suite spectrale **cohomologique** si $E_2^{p,q} = 0$ dès que $p < 0$ ou $q < 0$. Autrement dit, les seuls termes éventuellement non-nuls d'une telle suite spectrale sont situés dans le "premier quadrans".

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des suites spectrales cohomologiques.

Remarque B.1.5. Pour une suite spectrale cohomologique, on a

$$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}, \text{ dès que } r > \max(p, q + 1).$$

Cela se déduit en effet aisément des points (2) et (3) de la définition de suite spectrale. En particulier

$$E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0}; E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}; E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1} \dots$$

Lemme B.1.6. Pour toute suite spectrale cohomologique $E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$, il existe des morphismes

$$E_2^{n,0} \longrightarrow E^n \text{ et } E^n \longrightarrow E_2^{0,n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PREUVE : Soit $E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$ une suite spectrale cohomologique. Alors

$$\begin{aligned} F^{n+1}(E^n) &= 0 & (a) \\ F^0(E^n) &= E^n & (b) \end{aligned}$$

Montrons (a) : pour tout entier $i > 0$, on a d'après le (5) de la définition de suite spectrale

$$gr_{n+i}(E^n) = E_\infty^{n+i,-i}$$

Or $E_\infty^{n+i,-i} = 0$, donc $gr_{n+i}(E^n) = 0$ pour tout $i > 0$, donc

$$F^{n+i}(E^n) = F^{n+i+1}(E^n), \forall i > 0.$$

Donc

$$F^{n+1}(E^n) = F^{n+2}(E^n) = \dots = 0$$

à cause des hypothèses faites sur la filtration de E^n , ce qui prouve (a).

D'une manière "duale", on a, pour $i > 0$

$$gr_{-i}(E^n) = E_\infty^{-i,n+i}$$

De nouveau, $E_\infty^{-i,n+i} = 0$, et on en déduit que

$$F^0(E^n) = F^{-1}(E^n) = \dots = E^n$$

ce qui prouve (b).

Ceci étant dit, comme

$$E_\infty^{n,0} = gr_n(E^n) = \frac{F^n(E^n)}{F^{n+1}(E^n)}$$

on en déduit que $E_\infty^{n,0} = F^n(E^n)$, et on a donc un (mono)morphisme

$$E_\infty^{n,0} \hookrightarrow E^n \quad (c)$$

En outre, pour tout $r \geq 2$

$$E_{r+1}^{n,0} = H(E_r^{n,0}) = \frac{\ker d_r^{n,0} : E_r^{n,0} \longrightarrow E_r^{n+r,1-r}}{\operatorname{im} d_r^{n-r,r-1} : E_r^{n-r,r-1} \longrightarrow E_r^{n,0}}$$

Comme $1 - r < 0$, alors $E_r^{n+r,1-r} = 0$, donc

$$E_{r+1}^{n,0} = \frac{E_r^{n,0}}{\operatorname{im} d_r^{n-r,r-1} : E_r^{n-r,r-1} \longrightarrow E_r^{n,0}}$$

donc on a cette fois, pour tout $r \geq 2$, un (épi)morphisme

$$E_r^{n,0} \twoheadrightarrow E_{r+1}^{n,0}$$

Par composition, on obtient donc un (épi)morphisme

$$E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \quad (d)$$

Et en composant les morphismes (c) et (d), on obtient un morphisme

$$E_2^{n,0} \longrightarrow E^n$$

qui est donc le premier des deux “edge morphisms” recherchés.

Dans l’autre sens, on utilise cette fois-ci le fait que

$$E_\infty^{0,n} = gr_0(E^n) = \frac{F^0(E^n)}{F^1(E^n)}$$

Or $F^0(E^n) = E^n$, et on a donc un (épi)morphisme

$$E^n \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} \quad (e)$$

D’autre part, pour tout $r \geq 2$, on a

$$E_{r+1}^{0,n} = \frac{\ker d_r^{0,n} : E_r^{0,n} \longrightarrow E_r^{r,n+1-r}}{\operatorname{im} d_r^{-r,n+r-1} : E_r^{-r,n+r-1} \longrightarrow E_r^{0,n}}$$

Comme $E_r^{-r,n+r-1} = 0$, alors $d_r^{-r,n+r-1} = 0$, donc

$$E_{r+1}^{0,n} = \ker d_r^{0,n}$$

et on a donc pour tout $r \geq 2$ un (mono)morphisme

$$E_{r+1}^{0,n} \hookrightarrow E_r^{n,0}$$

De nouveau, on obtient par composition un (mono)morphisme

$$E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_2^{n,0} \quad (f)$$

En composant (e) et (f), on obtient alors le morphisme

$$E^n \longrightarrow E_2^{n,0}$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Comme nous avons eu de nombreuses occasions de le constater, le résultat suivant est d'un intérêt capital en pratique :

Théorème B.1.7. (Suite exacte à 5 termes) *Si $E_2^{p,q} \implies E^{p+q}$ est une suite spectrale cohomologique de groupes abéliens, alors on a une suite exacte de groupes*

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E^2$$

PREUVE : rappelons que $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}$ (cf. remarque B.1.5), et que par définition

$$E_\infty^{1,0} = gr_1(E^1) = \frac{F^1(E^1)}{F^2(E^1)}$$

Comme $F^2(E^1) = 0$ (voir la preuve du lemme précédent), alors

$$E_\infty^{1,0} = F^1(E^1) \hookrightarrow E^1$$

donc la suite

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \xrightarrow{\varphi_1} E^1 \quad (a)$$

est exacte (et $\text{im } \varphi_1 = F^1(E^1)$).

Par ailleurs, $E_3^{1,0} = E_\infty^{1,0}$ (cf. encore la remarque B.1.5), or

$$E_3^{1,0} = \frac{\ker d_2^{0,1} : E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0}}{\text{im } d_2^{-2,2} : E_2^{-2,2} \longrightarrow E_2^{0,1}}$$

Comme la différentielle $d_2^{-2,2}$ est nulle, on en déduit que

$$E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = \ker d_2^{0,1}$$

donc : $E_3^{0,1} \hookrightarrow E_2^{0,1}$. Comme on a aussi

$$E_3^{0,1} = gr_0(E^1) = \frac{F^0(E^1)}{F^1(E^1)}$$

et que $F^0(E^1) = E^1$, alors il existe un morphisme

$$p : E^1 \longrightarrow E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1}$$

dont le noyau est $F^1(E^1)$. Or on a déjà remarqué que $E_\infty^{0,1} = \ker d_2^{0,1}$, donc la suite

$$E^1 \xrightarrow{p} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0}$$

est exacte. Comme le noyau de p est $F^1(E^1)$, on peut recoller cette dernière suite avec la suite (a), pour obtenir la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \xrightarrow{\varphi_1} E^1 \xrightarrow{p} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \quad (b)$$

Plus qu'une étape! On note que $E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0}$ (cf. encore et toujours la remarque B.1.5), et que

$$E_\infty^{2,0} = gr_2(E^2) = \frac{F^2(E^2)}{F^3(E^2)}$$

Comme $F^3(E^2) = 0$, il existe un monomorphisme

$$\varphi_2 : E_\infty^{2,0} \hookrightarrow E^2$$

Par ailleurs

$$E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0} = \frac{\ker d_2^{2,0}}{\operatorname{im} d_2^{0,1}} = \frac{E_2^{2,0}}{\operatorname{im} d_2^{0,1}}$$

et il existe donc un morphisme

$$\pi : E_2^{2,0} \longrightarrow E_\infty^{2,0}$$

dont le noyau est $\operatorname{im} d_2^{0,1}$. On a donc la suite exacte

$$E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{\varphi_2 \circ \pi} E^2$$

et enfin, en recollant cette dernière suite avec la suite (b), on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E^2$$

□

B.2 Applications

B.2.1 Suite spectrale des foncteurs dérivés

Théorème B.2.1.1. (Suite spectrale des foncteurs dérivés) Soient $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ et $F_2 : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$ deux foncteurs covariants et exacts à gauche. On suppose que les catégories \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont assez d'injectifs¹⁰. Enfin on suppose que F_1 envoie les objets injectifs de \mathcal{C}_1 sur des objets F_2 -acycliques¹¹. On note F_3 le foncteur composé $F_2 \circ F_1$.

Alors pour tout objet A de \mathcal{C}_1 , on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p F_2(R^q F_1(A)) \implies R^{p+q} F_3(A) = E^{p+q}$$

Nous renvoyons à [CE56] pour la preuve de ce théorème.

¹⁰Les foncteurs dérivés à droite de F_1 et de F_2 sont ainsi bien définis.

¹¹C'est-à-dire que pour tout objet injectif I de \mathcal{C}_1 , on a $R^p F_2(F_1 I) = 0$, pour tout $p > 0$.

• Application

Soient G un groupe profini, N un sous-groupe normal fermé de G , et A un G -module. On considère les foncteurs :

$$F_1 : \begin{array}{ccc} \{G - \text{modules}\} & \longrightarrow & \{G/N - \text{modules}\} \\ A & \longmapsto & A^N \end{array}$$

$$F_2 : \begin{array}{ccc} \{G/N - \text{modules}\} & \longrightarrow & \mathfrak{Ab} \\ B & \longmapsto & B^{G/N} \end{array}$$

$$F_3 : \begin{array}{ccc} \{G - \text{modules}\} & \longrightarrow & \mathfrak{Ab} \\ A & \longmapsto & A^G \end{array}$$

Il est alors clair que $F_3 = F_2 \circ F_1$, que F_1 et F_2 sont covariants et exacts à gauche, et il est connu que toutes les catégories considérées ici possèdent suffisamment d'injectifs. Il n'est en revanche pas du tout évident que le foncteur F_1 transforme les G -modules en G/N -modules acycliques, et nous renvoyons à [Sh72] pour la preuve de ce fait. En appliquant le théorème B.2.1.1, on obtient la suite spectrale d'inflation-restriktion :

$$H^p(G/N, H^q(N, A)) \implies H^{p+q}(G, A)$$

et en particulier, on a la suite exacte à 5 termes

$$0 \longrightarrow H^1(G/N, A^N) \xrightarrow{\alpha} H^1(G, A) \xrightarrow{\beta} H^1(N, A)^{G/N} \xrightarrow{\gamma} H^2(G/N, A^N) \xrightarrow{\delta} H^2(G, A)$$

où l'on peut interpréter α et δ comme des morphismes d'inflation, β comme un morphisme de restriction, et γ comme un morphisme de transgression (*cf.* [Se68]).

B.2.2 Suite spectrale de Leray

Théorème B.2.2.1. (Suite spectrale de Leray)¹² Soit $\pi : X \longrightarrow Y$ une application continue, et soit \mathcal{F} un faisceau **abélien** sur X . Alors on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q\pi_*\mathcal{F}) \implies H^{p+q}(X, \mathcal{F}) = E^{p+q}$$

Une conséquence directe de ce théorème et du théorème B.1.7 est donc le :

Corollaire B.2.2.2. Si $\pi : X \longrightarrow Y$ est une application continue, et si \mathcal{F} est un faisceau **abélien** sur X , alors la suite

$$0 \rightarrow H^1(Y, \pi_*\mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(Y, R^1\pi_*\mathcal{F}) \rightarrow H^2(Y, \pi_*\mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F})$$

est exacte.

¹²Nous renvoyons une fois encore à [CE56] ou [Mac84] par exemple pour la preuve.

- Application

Soit X un schéma. Il existe un morphisme de sites :

$$\pi : X_{\acute{e}t} \longrightarrow X_{Zar}$$

associé au foncteur :

$$\pi^{-1} : X_{Zar} \longrightarrow X_{\acute{e}t}$$

qui associe à un ouvert de Zariski U de X , l'ouvert étale ($U \rightarrow X$), ce qui est légitime car toute immersion ouverte est étale (*cf.* [Mi80]). D'après le théorème B.2.2.1 (ou plus exactement sa généralisation aux sites, *cf.* [Mi80] ou [Tam94]) appliquée au morphisme $\pi : X_{\acute{e}t} \longrightarrow X_{Zar}$ et au faisceau étale $\mathbb{G}_{m,X}$, on a une suite spectrale :

$$H_{Zar}^p(X, R^q \pi_* \mathbb{G}_{m,X}) \Longrightarrow H_{\acute{e}t}^{p+q}(X, \mathbb{G}_{m,X})$$

En remarquant que $\pi_* \mathbb{G}_{m,X} = \mathcal{O}_X^*$, on en déduit donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Pic } X \longrightarrow H_{\acute{e}t}^1(X, \mathbb{G}_{m,X}) \longrightarrow H_{Zar}^0(X, R^1 \pi_* \mathbb{G}_{m,X})$$

Comme $R^1 \pi_* \mathbb{G}_{m,X} = 0$ ([Mi80] III.4.10), on retrouve le célèbre

Théorème 90 (Hilbert). *Pour tout schéma X :*

$$\text{Pic } X = H_{\acute{e}t}^1(X, \mathbb{G}_{m,X})$$

Remarque B.2.2.3. Evidemment, avec notre présentation, le théorème B.2.2.1 apparaît comme un corollaire du théorème B.2.1.1. Plus précisément, avec les notations du théorème B.2.2.1, la suite spectrale de Leray n'est autre que la suite spectrale des foncteurs dérivés ¹³

$$R^p \underline{\Gamma}_Y(R^q \pi_* \mathcal{F}) \Longrightarrow R^{p+q} \underline{\Gamma}_X(\mathcal{F})$$

où $\underline{\Gamma}_Y$ (*resp.* $\underline{\Gamma}_X$) désigne le foncteur “sections globales” sur Y (*resp.* sur X).

¹³C'est d'ailleurs de sous cette forme qu'elle est présentée dans [Gi68] p.9.

Appendice C

A la recherche d'un contre-exemple au principe de Hasse parmi les hypersurfaces de degré ≥ 4 de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$

On a déjà vu dans la section 2.3 des contre-exemples au principe de Hasse. Swinnerton-Dyer [Sw62], Cassels et Guy [CG66],... ont construit des surfaces cubiques lisses de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ violant ce principe. On ne connaît en revanche pas d'hypersurface de degré ≥ 4 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ qui soit un contre-exemple au principe de Hasse (excepté l'exemple conditionnel de Sarnak et Wang [SW95]). Peut-être que l'on peut expliquer en partie ce phénomène par le fait que l'obstruction de Brauer-Manin d'une hypersurface de degré ≥ 4 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ est "encore plus nulle" que celle d'une surface cubique, dans le sens où :

- si X est une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$, alors $m_{\mathcal{H}}(X) = 0$ car $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, mais $H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$ n'est pas nul (mais fini) ;
- si X est une hypersurface lisse de degré ≥ 4 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$ ($n \geq 4$), alors $m_{\mathcal{H}}(X) = 0$ car $\text{III}^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$, et $H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) = 0$;

En dépit de ces observations peu encourageantes, nous nous proposons dans cet appendice de partir à la recherche d'une hypersurface de degré ≥ 4 enfreignant le principe de Hasse, au travers de quelques exemples :

Exemple C.1. Commençons par remarquer qu'il est très facile de construire une hypersurface sans point \mathbb{Q} -rationnel. Par exemple l'hypersurface \mathcal{H}_1 de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ d'équation :

$$(E1) : \quad X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$$

n'a pas point \mathbb{Q} -rationnel. Mais elle n'a évidemment pas de point réel non plus, ce qui restreint assez considérablement son intérêt.

Exemples C.2. Un exemple un tantinet peu plus intéressant est fourni par l'hypersurface $\mathcal{H}_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^3$ d'équation :

$$(E2) : \quad X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 4X_0^4$$

\mathcal{H}_2 possède évidemment des points réels, et n'a pas de point \mathbb{Q} -rationnel ; en effet, l'équation (E2) étant homogène, il suffit de vérifier qu'elle n'a pas de solution entière non-triviale, ce qui se voit par congruence modulo 8.

Pour la même raison, l'hypersurface $\mathcal{H}_3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^4$ d'équation :

$$(E3) : \quad X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4 = 6X_0^4$$

a également des points réels, mais pas de point \mathbb{Q} -rationnel.

Enfin, en utilisant le même raisonnement (avec un argument de congruence modulo 16), l'hypersurface $\mathcal{H}_4 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^8$ d'équation :

$$(E4) : \sum_{i=1}^8 X_i^8 = 9X_0^8$$

a des points réels, et aucun point \mathbb{Q} -rationnel.

Evidemment, on s'intéresse maintenant aux points p -adiques de ces différentes hypersurfaces. Afin d'éviter une infinité de vérifications (il faudrait résoudre chacune de ces équations dans \mathbb{Q}_p , pour tout nombre premier p), on veut utiliser le

Théorème de Chevalley. *Soient K un corps fini, $n > d \geq 1$ deux entiers. Tout polynôme homogène de degré d en n variables a un zéro non-trivial à coefficients dans K .*

L'idée est naturellement d'appliquer ce théorème en le combinant avec le

Lemme de Hensel. *Soit f un polynôme à coefficients entiers, et p un nombre premier. Tout zéro simple de la réduction modulo p de f se relève en un zéro de f à coefficients dans \mathbb{Z}_p , l'anneau des entiers p -adiques.*

Ce faisant, on en déduit par exemple que l'hypersurface \mathcal{H}_4 a des points dans \mathbb{Q}_p , pour tout $p \neq 2, 3$. En outre, elle a un point dans \mathbb{Q}_3 , puisque par exemple :

$$\alpha = 1 + 3 + 3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + 2.3^5 + 3^6 + 2.3^7 + 3^8 + O(3^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_3 de l'équation :

$$X_1^8 + 2 = 0$$

donc $(0 : \alpha : 1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ est un point dans \mathbb{Q}_3 de \mathcal{H}_4 .

Mais \mathcal{H}_4 ne possède pas de point dans \mathbb{Q}_2 . En effet, la raison qui fait que \mathcal{H}_4 n'a pas de point \mathbb{Q} -rationnel (l'équation (E4) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}$) empêche du même coup l'existence de solutions dans \mathbb{Q}_2 .

De la même façon, l'hypersurface \mathcal{H}_3 a des points dans \mathbb{Q}_p , pour tout $p \neq 2, 3$; le point $(0 : \beta : 1 : 1 : 0)$ où :

$$\beta = 2 + 2.3^2 + 3^3 + 2.3^5 + 3^6 + 2.3^7 + 3^8 + 2.3^9 + O(3^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_3 de l'équation :

$$X^4 + 2 = 0$$

est un point dans \mathbb{Q}_3 de \mathcal{H}_3 . Mais \mathcal{H}_3 ne possède pas de point dans \mathbb{Q}_2 .

En conclusion, en conservant notre approche, nous sommes condamnés à construire des "presque" contre-exemples au principe de Hasse, nous entendons par là des hypersurfaces ayant des points réels, aucun point \mathbb{Q} -rationnel, et des points dans \mathbb{Q}_p pour presque tout p premier.

Exemple C.3. Considérons maintenant l'hypersurface lisse $\mathcal{H}_5 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{560}$ d'équation :

$$(E5) : \sum_{i=1}^{560} X_i^{560} = 561.X_0^{560}$$

Alors :

- (i) \mathcal{H}_5 a des points réels : par exemple le point $(1 : 561^{1/560} : 0 : 0 : \dots : 0)$.
- (ii) d'après le théorème de Chevalley et le lemme de Hensel, \mathcal{H}_5 a des points dans \mathbb{Q}_p , pour tout $p \neq 2, 3, 5, 7, 11, 17$: en effet, ces nombres premiers sont ceux qui interviennent dans la décomposition de 561 (= 3.11.17) et de 560 (= 2⁴.5.7).
- (iii) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_2 : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_2; X_2 = X_3 = \dots = X_{64} = 1; X_{65} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_2 = 1 + 2 + 2^5 + O(2^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_2 de l'équation :

$$X_0^{560} + 63 = 0$$

- (iv) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_3 : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_3; X_2 = X_3 = \dots = X_9 = 1; X_{10} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_3 = 1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 2.3^5 + 2.3^6 + 3^7 + 3^8 + O(3^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_3 de l'équation :

$$X_0^{560} + 8 = 0$$

- (v) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_5 : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_5; X_2 = X_3 = \dots = X_{25} = 1; X_{26} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_5 = 1 + 2.5 + 2.5^2 + 2.5^3 + 2.5^4 + 4.5^5 + 4.5^7 + 5^9 + O(5^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_5 de l'équation :

$$X_0^{560} + 24 = 0$$

- (vi) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_7 : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_7; X_2 = X_3 = \dots = X_{49} = 1; X_{50} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_7 = 1 + 2.7 + 6.7^2 + 7^3 + 7^4 + 6.7^5 + 7^6 + 6.7^7 + 5.7^8 + 7^9 + O(7^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_7 de l'équation :

$$X_0^{560} + 48 = 0$$

(vii) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_{11} : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_{11}; X_2 = X_3 = \dots = X_{121} = 1; X_{122} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_{11} = 1 + 11^2 + 7.11^3 + 10.11^4 + 11^5 + 7.11^6 + 5.11^7 + 9.11^8 + 7.11^9 + O(11^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_{11} de l'équation :

$$X_0^{560} + 120 = 0$$

(viii) \mathcal{H}_5 a un point dans \mathbb{Q}_{17} : le point

$$X_0 = 0; X_1 = \xi_{17}; X_2 = X_3 = \dots = X_{289} = 1; X_{290} = \dots = X_{560} = 0$$

où :

$$\xi_{17} = 1 + 17^2 + 16.17^3 + 3.17^4 + 2.17^5 + 8.17^6 + 4.17^7 + 12.17^8 + 17^9 + O(17^{10})$$

est une solution dans \mathbb{Q}_{17} de l'équation :

$$X_0^{560} + 288 = 0$$

Conclusion : l'hypersurface $\mathcal{H}_5 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{560}$ a des points réels, et des points p -adiques pour tout nombre premier p .

Il ne reste donc plus à montrer qu'elle n'a pas de point \mathbb{Q} -rationnel ! Mettons tout de suite fin à un insoutenable suspense ; au moment où ces lignes sont écrites, on ne sait pas encore s'il en est ainsi, et un ordinateur continue de chercher des solutions. La seule chose que l'on puisse dire est que si \mathcal{H}_5 possède des points \mathbb{Q} -rationnels, alors elle n'en possède pas de "trop triviaux" ; précisons cela :

- il n'existe pas sur \mathcal{H}_5 de point \mathbb{Q} -rationnel de la forme (à permutation des 560 dernières variables près) :

$$(X_0 : X_1 : 0 : 0 : \dots : 0)$$

En effet, l'équation $X_1^{560} = 561.X_0^{560}$ n'a pas de solution entière non-triviale : s'il en existait une, disons (a, b) , on pourrait toujours supposer a et b premiers entre eux. De la relation $b^{560} = 561.a^{560}$, on déduit que $11 | b$. Mais alors $11^{559} | a$, donc en particulier $11 | a$, d'où une contradiction.

- il n'existe pas sur \mathcal{H}_5 de point \mathbb{Q} -rationnel de la forme (à permutation des 560 dernières variables près) :

$$(X_0 : X_1 : X_2 : 0 : \dots : 0)$$

En effet, l'équation $X_1^{560} + X_2^{560} = 561.X_0^{560}$ n'a pas de solution entière non-triviale : supposons de nouveau qu'il en existe une, notée (a, b, c) . Dans un premier temps,

on demande à un ordinateur bienveillant de calculer les puissances $560^{\text{èmes}}$ modulo 561.¹⁴ La seule possibilité pour avoir l'égalité :

$$b^{560} + c^{560} = 561.a^{560}$$

est que b et c soient multiples de 561. Ils sont alors en particulier multiples de 17 (pour changer), donc $17^{559} | a$, donc $17 | a$, d'où une contradiction.

- il n'existe pas sur \mathcal{H}_5 de point \mathbb{Q} -rationnel de la forme (toujours à permutation des 560 dernières variables près) :

$$(X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : 0 : \cdots : 0)$$

En effet, l'équation $X_1^{560} + X_2^{560} + X_3^{560} = 561.X_0^{560}$ n'a pas de solution entière non-triviale : supposons de nouveau qu'il en existe une, notée (a, b, c, d) . En considérant encore les puissances $560^{\text{èmes}}$ modulo 561, on obtient deux cas où l'égalité :

$$b^{560} + c^{560} + d^{560} = 561.a^{560}$$

peut être satisfaite :

- (i) b, c et d sont multiples de 561. Mais ceci implique aussi que a est multiple de 561 ;
- (ii) b, c et d sont multiples de 187 ; ce qui entraîne que a est à son tour multiple de 187.

Par conséquent, nous sommes amenés à énoncer la :

Conjecture. *L'hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{560}$ d'équation :*

$$\sum_{i=1}^{560} X_i^{560} = 561.X_0^{560}$$

est un contre-exemple au principe de Hasse.

¹⁴Nous joignons à la page suivante une table donnant ces puissances.

PUISSANCES 560^{emes} DANS $\mathbb{Z}/561\mathbb{Z}$ (APERÇU)

0	1	1	375	1	1	375	1	1	375
1	154	375	1	1	375	1	34	375	1
1	375	154	1	375	1	1	375	1	1
375	1	1	528	34	1	375	1	1	375
1	1	375	1	154	375	1	1	375	1
1	408	1	1	375	154	1	375	1	1
375	1	1	375	1	1	528	1	34	375
1	1	375	1	1	375	1	154	375	1
1	375	1	1	375	34	1	375	154	1
375	1	1	375	1	1	375	1	1	528
1	1	408	1	1	375	1	1	375	1
154	375	1	1	375	1	1	375	1	34
375	154	1	375	1	1	375	1	1	375
1	1	528	1	1	375	34	1	375	1
1	375	1	154	375	1	1	375	1	1
375	1	1	408	154	1	375	1	1	375
1	1	375	1	1	528	1	1	375	1
34	375	1	1	375	1	154	375	1	1
375	1	1	375	1	1	375	187	1	375
1	1	375	1	1	375	1	1	528	1
1	375	1	1	408	1	1	375	1	154
375	1	1	...						

Si n est un entier, alors n^{560} ne peut prendre modulo 561 que les valeurs : 0, 1, 34, 154, 187, 375, 408 et 528.

Bibliographie

- [EGA1] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag, 1971.
- [SGA4-IV] A. Grothendieck, J-L. Verdier, *Topos*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.
- [SGA4-V] J-L. Verdier, *Cohomologie dans les topos*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.
- [SGA4-VII] A. Grothendieck, *Site et Topos étales d'un schéma*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.
- [SGA4-VIII] A. Grothendieck, *Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 1963-64.
- [Bo93] M. Borovoi, *Abelianization of the second non-abelian Galois cohomology*, Duke Mathematical J. **72**, 217–239, 1993.
- [Bo96] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473**, 181–194, 1996.
- [BK97] M. Borovoi, B. Kunyavsky, *On the Hasse Principle for homogeneous spaces with finite stabilizers*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **6** (3), 481–497, 1997.
- [BK00] M. Borovoi, B. Kunyavsky, *Brauer equivalence in a homogeneous space with connected stabilizer*, Michigan Math. J. **49**, 197–205, 2000.
- [Br90] L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non-abélienne*, issu de *The Grothendieck Festschrift I*, Progress in Mathematics **86**, p401–476, 1990.
- [Br92] L. Breen, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^o série, t.25, 465–514, 1992.
- [Br94a] L. Breen, *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, SMF, Astérisque **225**, 1994.
- [Br94b] L. Breen, *Tannakian Categories*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume **55**, part I, 1994.
- [CE56] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

- [CG66] J.W.S. Cassels, M.J.T. Guy, *On the Hasse principle for cubic surfaces*, *Mathematika*, volume 13, part 2, 1966.
- [CTGP03] J-L. Colliot-Thélène, P. Gille, R. Parimala *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, www.mathematik.uni-bielefeld.de/log/man/107.html.
- [CTS87] J-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, *Duke Mathematical Journal*, vol. **54**, n.2, 375–492, 1987.
- [CTCS80] J-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, *J. reine angew. Math.* **320**, 150–191, 1980.
- [DD87] P. Dèbes, J-C. Douai, *Gerbes and covers*, *Communications in Algebra*, **27**(2), 577–594, 1999.
- [DD97] P. Dèbes, J-C. Douai, *Algebraic covers : field of moduli versus field of definition*, *Ann. Scient. ENS*, t.**30**, 303–338, 1997.
- [DDM01] P. Dèbes, J-C. Douai, L. Moret-Bailly, *Descent varieties for algebraic covers*, 2001.
- [Del90] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, extrait de *The Grothendieck Festschrift II*, *Progress in Math.* **87**, 111–195, Birkhauser, 1990.
- [DM69] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, *Publications Mathématiques de l’I.H.E.S.*, **36**, 75–109, 1969.
- [Dem64] M. Demazure, *Automorphismes des groupes réductifs*, SGA, exposé XXIV, 1964.
- [DF93] F.R. Demeyer, T.J. Ford, *On the Brauer group of toric varieties*, *Trans. AMS*, vol. **335**, 559–575, 1993.
- [Do76] J-C. Douai, *2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1976.
- [Do87] J-C. Douai, *Le théorème de Tate-Poitou pour les corps de fonctions des courbes définies sur les corps de séries formelles en une variable sur un corps algébriquement clos*, *Comm. in Algebra* **15** (11), 2379–2390, 1987.
- [Do95] J-C. Douai, *Espaces homogènes et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux des Dedekind*, *Journal de théorie des Nombres de Bordeaux* **7**, 21–26, 1995.
- [Do01] J-C. Douai, *Descente, champs et gerbes de Hurwitz*, *Séminaire et Congrès* **5**, SMF, 119–131, 2001.
- [DEZ03] J-C. Douai, M. Emsalem, S. Zahnd, *Variétés de descente, gerbes et obstruction de Brauer-Manin*, arXiv :mathAG/0303231 v1, mar 2003.
- [EHKV01] D. Edidin, B. Hassett, A. Kresch, A. Vistoli, *Brauer groups and quotient stacks*, *American Journal of Mathematics* **123**, 761–777, 2001.
- [FI73] R. Fossum, B. Iversen, *On Picard Groups of algebraic fibre spaces*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **3**, 269–280, 1973.

- [Fu98] W. Fulton, *Intersection theory*, Second Edition, Springer, 1998.
- [Ga80] O. Gabber, *Some theorems on Azumaya algebras*, dans *The Brauer Group (Les Plans-sur-Bex, 1980)*, LNM **844**, Springer-Verlag, 1980.
- [GH78] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley and sons, 1978.
- [Gi66] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Thèse, Columbia University, 1966.
- [Gi68] J. Giraud, *Analysis situs*, dans *10 Exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson et Cie, Paris, 1968.
- [Gi71] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Springer-Verlag, 1971.
- [Gr55] A. Grothendieck, *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.
- [Gr58] A. Grothendieck, *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. **86**, 137–154, 1958.
- [Gr68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II et III*, dans *10 Exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson et Cie, Paris, 1968.
- [Gr02] A. Grothendieck, *Les dérivateurs*, Ch. XI, Edition des Universités de Montpellier II et Paris VII, 2002.
- [Ha02] D. Harari, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322**, 811–826, 2002.
- [HS02] D. Harari, A.N. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Mathematica **130**, 241–273, 2002.
- [Har92] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer, vol. 133, 1992.
- [Hart77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, vol. 52, 1977.
- [Hi03] N. Hitchin, *What is a gerbe ?*, Notices of the AMS, volume 50, number 2, 218–219, February 2003.
- [Ho72] R.T. Hoobler, *Brauer groups of abelian schemes*, Ann. Scient. ENS, t.5, 45–70, 1972.
- [J96] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*, Springer, 1996.
- [Ja00] J. Jahnel, *The Brauer-Severi variety associated with a central simple algebra : a survey*, <http://www.uni-math.gdwg.de/jahnel>, 2000.
- [KO74] M-A. Knus, M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d’Azumaya*, LNM **389**, Springer-Verlag, 1974.
- [Ko84] R.E. Kottwitz, *Stable trace formula : cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51**, 3, 611–650, 1984.

- [KV03] A. Kresch, A. Vistoli, *On coverings of Deligne-Mumford stacks and surjectivity of the Brauer map*, arXiv :mathAG/0301249 v1, jan. 2003.
- [La91] S.Lang, *Number Theory III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. 60, Springer-Verlag, 1991.
- [LMB00] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag, 2000.
- [Mac84] J. Mac Cleary, *User's guide to spectral sequences*, Mathematics Lecture Series **12**, Publish or Perish, 1984.
- [Ma70] Y. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes, Congrès intern. math., tome 1, 401–411, 1970.
- [Ma74] Y. Manin, *Cubic forms*, North-Holland Publishing Company, 1974.
- [Me91] A.S. Merkurjev, *Kaplansky conjecture in the theory of quadratic forms*, Journal of Soviet Math., 57, 3489–3497, 1991.
- [Mi80] J-S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.
- [MB02] L. Moret-Bailly, *Sur la R-équivalence de toseurs sous un groupe fini*, arXiv : math.AG/0203151 v2, sep. 2002.
- [No02] B. Noohi, *Fundamental groups of algebraic stacks*, arXiv : math.AG/0201021 v1, jan. 2002.
- [Po99] B. Poonen, *An explicit algebraic family of genus-one curves violating the Hasse principle*, arXiv : math.AG/9910124 v1, oct. 1999.
- [Sa81] J-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327**, 12-80, 1981.
- [SW95] P. Sarnak, L. Wang, *Some hypersurfaces in \mathbb{P}^4 and the Hasse principle*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, 319–322, 1995.
- [SS58] A. Schinzel, W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arithmetica, IV-1, 185–208, 1958.
- [Sc01] S. Schroer, *There are enough Azumaya algebras on surfaces*, arXiv :mathAG/0003229 v2, avr 2001.
- [Se68] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, 1968.
- [Se70] J-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, PUF, 1970.
- [Se73] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, LNM **5**, 1973.
- [Sh72] S.S. Shatz, *Profinite groups, Arithmetic, and Geometry*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1972.
- [SSk03] S. Siksek, A. Skorobogatov, *On a Shimura curve that is a counterexample to the Hasse principle*, Bull. London Math. Soc. **135**, 409–414, 2003.
- [Sk99] A. Skorobogatov, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135**, 399–424, 1999.

- [Sp66] T.A. Springer, *Nonabelian H^2 in Galois cohomology*, Proc. Symp. Pure Mathematics, AMS, IX, 164–182, 1966.
- [Sw62] H.P.F. Swinnerton-Dyer, *Two special cubic surfaces*, Mathematika **9**, 54–56, 1962.
- [Tam94] G. Tamme, *Introduction to Etale Cohomology*, Springer-Verlag, Universitext, 1994.
- [Tat66] J. Tate, *The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields*, Nagoya Mathematical Journal, vol. 27 (1), 709–719, 1966.
- [Vi89] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Inventiones Mathematicae **97**, 613–670, 1989.

Index

- algèbre
 - d'Azumaya, 8
 - simple centrale, 8
- banalisation d'une algèbre d'Azumaya, 24
- bitorseur, 12
 - associé à un torseur, 13
 - opposé, 13
 - trivial, 12
- catégorie fibrée, 15
- champ, 17
 - associé à un préchamp, 20
 - associé à un schéma, 19
 - des faisceaux de groupes, 27
 - des liens, 27
 - des toreseurs, 17
- classe
 - de Chern, 93
 - neutre, 31
 - nulle, 32
 - triviale, 31
- Conjecture de Grothendieck sur les groupes
 - de Brauer, XIII, 42
- corps des modules, XI, 22
- donnée
 - de descente, 20
 - effective, 17
 - de recollement, 20
- dualité de Tate-Poitou, 57, 78
- défini sur k , XII
- faisceau
 - des racines n -ièmes de l'unité, 4
 - représentable, 5
 - sur un site, 4
- foncteur cartésien, 17
- fonctions de transition, 92
- forme, 29
 - extérieure, 29
- formule d'adjonction, 71
- gerbe, 20
 - de Deligne-Mumford, 78
 - de toreseurs, 21
 - des banalisations d'une algèbre d'Azumaya, 24
 - des modèles
 - d'un revêtement, 24
 - d'un torseur, 22
 - des trivialisations d'un espace homogène, 25
 - liée, 28
 - localement liée, 28
 - neutre, 21
 - résiduelle, 74
- gerbes
 - équivalentes au sens de Giraud, 30
- groupe
 - additif d'un schéma, 4
 - de Brauer
 - cohomologique, XIII
 - constant, 54
 - d'une gerbe, 82
 - transgressif, 40
 - de Brauer-Azumaya, XIII
 - de Neron-Severi, 96
 - multiplicatif d'un schéma, 4
- indice
 - d'une algèbre d'Azumaya, 8
 - d'une algèbre simple centrale, 8
- inessentiel, 32
- invariant
 - de Brauer-Manin d'une gerbe, 78
- k -schéma
 - de type $(*)$, 38
 - quasi-compact, 36
 - quasi-séparé, 36

- lemme de Hensel, 106
- lien, 27
 - localement représentable, 27
 - représentable, 27
 - réalisable, 27
- logarithme d'un fibré en droites, 93
- module croisé, 13
- modèle d'un torseur, 22
- morphisme
 - de bitorseurs, 12
 - de catégories fibrées, 16
 - de gerbes, 21
 - de sites, 3
 - de torseurs, 6
 - diagonal, 50
 - structural, 16
- obstruction
 - abélienne, 38
 - de Brauer-Manin, 52
- partout localement, 51
- point
 - k -rationnel d'un champ, 74
- principe
 - de Hasse, 51
 - de Lefschetz, 42
- produit contracté, 14
- préchamp, 17
 - des liens, 27
- préfaisceau sur un site, 4
- présentation, 78, 82
- relation de domination de Springer, XIII, 25
- site, 2
 - de Zariski, 3
 - étale d'un schéma, 3
- suite spectrale
 - d'inflation-restriction, 103
 - de Leray, XV, 35, 103
 - des Ext, 58
 - des foncteurs dérivés, 102
- surface
 - de Cassels et Guy, 51
 - de Del Pezzo, 55
- théorème 90, 104
- théorème de Chevalley, 106
- topologie de Grothendieck, 2
- topos, 5
 - étale d'un schéma, 5
- torseur, 6
 - associé à un bitorseur, 13
 - trivial, 7
 - universel, 58
- type d'un torseur, XII, 24, 58
- variété
 - de descente, 77
 - de Severi-Brauer, 8, 18

Glossaire des notations

- $\mathrm{Br}_{Az}X$, groupe de Brauer-Azumaya de X , XIII
- $\mathrm{Br} X$, groupe de Brauer cohomologique de X , XIII
- $S_{\acute{e}t}$, site étale de S , 3
- $\mathbb{G}_{a,S}$, groupe additif de S , 4
- $\mathbb{G}_{m,S}$, groupe multiplicatif de X , 4
- $\mu_{n,S}$, faisceau des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sur S , 4
- $\tilde{S}_{\acute{e}t}$, topos étale de S , 5
- $\mathrm{ad}_{G_S}(P)$, faisceau des automorphismes du G_S -torseur P , 6
- $\mathrm{Tors}(S, G_S)$, catégorie des G_S -torseurs sur le site étale de S , 6
- $\mathrm{Bitors}(S; H_S, G_S)$, catégorie des (H_S, G_S) -bitorseurs sur le site étale de S , 12
- $\mathrm{Tors}(k, G)$, gerbe des G -torseurs sur le site étale de k , 17
- $\mathrm{Asc}(k, n)$, gerbe des algèbres simples centrales d'indice n sur le site étale de k , 18
- $\mathrm{SB}(k, n - 1)$, gerbe des k -variétés de Severi-Brauer de dimension $n - 1$, 18
- $\mathrm{Tors}(S, G_S)$, gerbe des G_S -torseurs sur le site étale de S , 18
- $\mathrm{LBun}(S)$, gerbe des fibrés en droites sur le site étale de S , 22
- $\mathrm{VBun}(n, S)$, gerbe des fibrés vectoriels de rang n sur le site étale de S , 22
- $\mathrm{Az}(n, S)$, gerbe des algèbres d'Azumaya d'indice n sur le site étale de S , 22
- $D(\bar{P})$, k -gerbe des modèles de \bar{P} , 22
- $\partial(\lambda_{\bar{P}})$, gerbe associée au type $\lambda_{\bar{P}}$, 23
- (FAGR/S) , champ des faisceaux de groupes sur le site étale de S , 27
- $\mathrm{FAGR}(S')$, catégorie des faisceaux de groupes sur le site étale de S' , 27
- (Lien/S) , préchamp des liens sur le site étale de S , 27
- (LIEN/S) , champ des liens sur le site étale de S , 27
- lien G , lien représenté par G , 27
- $H^2(S, \mathcal{L})$, ensemble des classes d'équivalence de S -gerbes de lien \mathcal{L} , 30
- $R^1\pi_*G_X$, premier foncteur dérivé à droite du faisceau π_*G_X , 37
- $H^2(X, G_X)^{tr}$, partie transgressive de $H^2(X, G_X)$, 38

$\mathrm{Br}^{alg} X$, groupe de Brauer transgressif de X , 40

$\mathrm{Br}_a X$, groupe de Brauer transgressif de X modulo les constantes, 41

$\mathbb{B}(X)$, noyau de $\mathrm{Br}_a X \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}_a(X \otimes_k k_v)$, 41

$\mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X})$, noyau de $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, \mathrm{Pic} \bar{X})$, 41

$m_H(X)$, obstruction de Brauer-Manin de X , 41

Ω_k , ensemble des places du corps de nombres k , 49

\mathbb{A}_k , anneau des adèles du corps de nombres k , 49

$X(\mathbb{A}_k)$, ensemble des points adéliques de X , 49

inv_v , invariant local, 52

$x_v^* b$, image inverse d'une algèbre d'Azumaya par un k_v -point, 52

$\mathrm{III}^2(k, \bar{H})$, noyau de $H^2(k, \bar{H}) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^2(k_v, \bar{H})$, 56

$m_{\mathcal{H}}(\mathcal{G})$, obstruction de Brauer-Manin de la gerbe \mathcal{G} , 57

$X(\mathbb{A}_k)^B$, points adéliques de X Brauer-Manin orthogonaux à B , 57

$\mathrm{Br}_\lambda X$, partie de $\mathrm{Br} X$ associée au type λ , 59

$\mathrm{Br} \mathcal{G}$, groupe de Brauer de la gerbe \mathcal{G} , 80

$\mathcal{O}_{X^{an}}$, faisceau des fonctions analytiques sur X^{an} , 87

$c_1(\mathcal{E})$, classe de Chern du fibré en droites \mathcal{E} , 87

$\mathrm{Log} \mathcal{E}$, gerbe des logarithmes du fibré en droites \mathcal{E} , 91

RÉSUMÉ

Soient k un corps de caractéristique nulle et G un k -groupe algébrique linéaire. Il est bien connu que si G est abélien, les toseurs sous G_X sur un k -schéma $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ fournissent une obstruction à l'existence de points k -rationnels sur X , puisque la suite spectrale de Leray :

$$R^p \underline{\Gamma}_k (R^q \pi_* G_X) \implies R^{p+q} \underline{\Gamma}_X (G_X)$$

donne dans les bons cas (*e.g.* X propre) une suite exacte de groupes :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

sur laquelle on peut directement lire l'obstruction à ce qu'un \bar{G}_X -torseur $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ de corps des modules k soit défini sur k , *i.e.* qu'il provienne par extension des scalaires à la clôture algébrique \bar{k} de k d'un G_X -torseur $P \rightarrow X$. Le point crucial est que cette obstruction est mesurée par une gerbe, qui est neutre lorsque X possède un point k -rationnel. On essaye ici d'étendre ce résultat au cas non-commutatif, et on en déduit (sous certaines conditions) des obstructions cohomologiques non-abéliennes à l'existence de points k -rationnels sur X , et des résultats sur la descente des toseurs.

Mots-clés. Points rationnels, (bi-)torseurs, champs, gerbes, cohomologie non-abélienne, obstruction de Brauer-Manin.

ABSTRACT

Let k be a field of characteristic 0 and G a linear algebraic k -group. When G is abelian, it is well known that torsors under G_X over a k -scheme $\pi : X \rightarrow \text{Spec } k$ provide an obstruction to the existence of k -rational points on X , since Leray spectral sequence :

$$R^p \underline{\Gamma}_k (R^q \pi_* G_X) \implies R^{p+q} \underline{\Gamma}_X (G_X)$$

gives rise (when X is “nice”, *e.g.* X smooth and proper) to an exact sequence of groups :

$$0 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(X, G_X) \xrightarrow{u} H^1(\bar{X}, \bar{G}_X)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \xrightarrow{\delta^1} H^2(k, G) \longrightarrow H^2(X, G_X)$$

This sequence gives an obstruction for a \bar{G}_X -torsor $\bar{P} \rightarrow \bar{X}$ with field of moduli k to be defined over k , *i.e.* to be obtained by extension of scalars to the algebraic closure \bar{k} of k from a G_X -torsor $P \rightarrow X$. This obstruction is measured by a gerbe, which is neutral if X possesses a k -rational point. We try to extend this result to the non-commutative case, and in some cases, we deduce non-abelian cohomological obstruction to the existence of k -rational points on X , and results about descent of torsors.

Keywords. Rational points, (bi-)torsors, stacks, gerbes, non-abelian cohomology, Brauer-Manin obstruction.