



HAL
open science

Stabilité et filtration de Harder-Narasimhan

Laurent Bruasse

► **To cite this version:**

Laurent Bruasse. Stabilité et filtration de Harder-Narasimhan. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2001. Français. NNT : . tel-00004129

HAL Id: tel-00004129

<https://theses.hal.science/tel-00004129>

Submitted on 9 Jan 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement

par

Laurent BRUASSE

le 21 décembre 2001

Titre :

Stabilité et Filtration de Harder-Narasimhan

Directeur de thèse :

M. Georges DLOUSSKY

RAPPORTEURS

M. Mudumbai Narasimhan SISSA-Italie
M. Christian Okonek Université de Zürich

JURY

M. Georges Dloussky Université de Provence
M. Mudumbai Narasimhan SISSA-Trieste Italie
M. Karl Oeljeklaus Université de Provence
M. Christian Okonek Université de Zürich - Suisse
M. Jean-Claude Sikorav ENS Lyon
M. Andrei Teleman Université de Provence

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Georges Dloussky ; pour ses conseils, sa patience et surtout sa très grande disponibilité tout au long de ces trois années de doctorat et la générosité avec laquelle, à travers de nombreuses discussions, il a su me faire partager ses idées et ses intuitions. Je lui suis infiniment reconnaissant du soutien constant qu'il a su m'accorder.

La personnalité de Karl Oeljeklaus et sa passion pour les mathématiques m'ont séduit lorsque je l'ai rencontré en 1996. Il restera à posteriori la personne qui m'a introduite à la géométrie complexe. Pour tout ceci et pour toutes les discussions fructueuses que nous avons eues, je le remercie très chaleureusement et je suis heureux qu'il fasse partie du jury.

Je voudrais adresser mes vifs remerciements à Andrei Teleman pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté d'être membre du jury. Sa profonde connaissance du domaine et ses puissantes intuitions ont alimenté de nombreuses discussions. Je suis très honoré de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail, ainsi que de ses chaleureux encouragements.

Je remercie Mudumbai Narasimhan d'avoir accepté d'être rapporteur. La première partie de ma thèse est directement liée à certains de ses travaux. C'est donc un honneur pour moi qu'il fasse partie de mon jury.

Je remercie sincèrement Christian Okonek d'avoir été rapporteur de ma thèse. L'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail et l'attention qu'il a apporté à la lecture du manuscrit m'ont extrêmement touché.

Je remercie enfin Jean-Claude Sikorav d'avoir accepté de faire partie du jury.

Ma passion pour les mathématiques a été profondément marquée par la personnalité flamboyante de Pierre-Jean Hormière. Sa capacité à noyer des pages de calculs arides dans quelques remarques littéraires (ou était-ce le contraire ?) et son entrain communicatif ont rendu inoubliable cette fameuse année ! Je lui adresse une salutation distinguée.

Je voudrais exprimer mes remerciements à tous les membres du LATP avec qui j'ai entretenu d'excellents rapports au cours de ces années.

Je salue en particulier mes collègues Romain Bondil, Dan Zaffran, ..., pour toutes les discussions mathématiques que nous avons eues.

Je n'oublierai pas ici Gerard Henry et les heures passées à faire marcher Linux ; pauses aussi indispensables que bénéfiques.

Ma reconnaissance envers mes parents et toute ma famille, qui m'ont constamment soutenu, est bien plus grande que mes possibilités de l'expri-

mer en ces quelques lignes.

J'ai enfin une pensée tout à fait spéciale pour mon épouse Alexandra, ma compagne de tous les instants.

Table des matières

Introduction	3
I La Filtration de Harder-Narasimhan	9
1 Généralités	11
1.1 Degré et stabilité	11
1.2 La filtration de Harder-Narasimhan	15
1.3 Espaces de Sobolev	16
2 Le cas des fibrés vectoriels	19
2.1 Borne supérieure du degré	20
2.2 Sous-faisceau maximal	26
2.3 La filtration de Harder-Narasimhan	31
2.4 Autres notions de stabilité	35
3 Le cas général	39
3.1 Les faisceaux réflexifs	39
3.1.1 Le degré d'un sous-faisceau	40
3.1.2 Borne sur le degré	41
3.1.3 Sous-faisceau maximal	42
3.2 Les faisceaux sans torsion	45
3.3 Polygone de Harder-Narasimhan	47
4 Applications aux déformations	51
4.1 Famille C^∞ de métriques de Gauduchon	51
4.2 Déformations, convergence de sous-faisceaux	54
4.3 Déformations de faisceaux sans torsion	56
II Surfaces de la classe VII et surfaces à coquilles sphériques globales	61
5 Généralités	63
5.1 Construction	63
5.2 Feuilletages et champs tordus	66

6	Simplicité et stabilité	69
6.1	Simplicité et surfaces de la classe VII_0	69
6.2	Les surfaces à coquille sphérique globale	72
6.2.1	Surfaces de trace nulle de type intermédiaire	73
6.2.2	Surfaces de Inoue-Hirzebruch	74
6.2.3	Surfaces de trace non nulle	74
6.3	Stabilité des surfaces à CSG	75
7	Déformations	83
7.1	Indices associés à \mathcal{F}	83
7.2	La déformation logarithmique	85
	Bibliographie	91
	Index	93
	Notations	95

Introduction

La notion de stabilité, qui est la trame de ce mémoire, a ses origines en géométrie algébrique et peut être décrite dans ce contexte en termes purement algébriques. Différentes notions de stabilité pour les fibrés vectoriels ont été définies par Mumford-Takemoto, Gieseker-Maruyama, puis Bogomolov. La première d'entre elles fût introduite par Mumford [MF82] pour l'étude de l'espace de module des fibrés holomorphes sur les courbes algébriques. Cette définition utilise le degré des fibrés en droites, notion qui se généralise assez facilement aux variétés kähleriennes et qu'on peut en fait définir sur toute variété hermitienne compacte.

En effet, le degré d'un fibré en droites se calcule sur une variété algébrique comme une intersection de cycles algébriques. Sur une variété kählerienne compacte, on remplace ces cycles par des classes de cohomologie qui jouent un rôle analogue : le degré est alors le produit de la première classe de Chern du fibré en droites considéré par le bon multiple de la classe de cohomologie de la forme de Kähler. On définit ainsi une application $\text{deg} : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ du groupe de Picard des fibrés en droites holomorphes sur X dans \mathbb{R} qui dépend de la classe de cohomologie de la forme de Kähler. La notion s'étend facilement aux faisceaux cohérents sans torsion de rang quelconque par l'intermédiaire du fibré déterminant associé.

Pour généraliser la notion au cas des variétés holomorphes compactes, il faut attendre les travaux de Gauduchon en 1975 qui introduit la notion de métrique standard (maintenant appelée métrique de Gauduchon). Cette métrique hermitienne vérifie une condition plus faible que les métriques kähleriennes puisque la forme de Kähler n'est plus supposée fermée mais vérifie la condition

$$\partial\bar{\partial}\omega_g^{n-1} = 0$$

Il montre alors que de telles métriques existent sur toute variété complexe compacte et qu'il est possible, grâce à elles, d'étendre la notion de degré en choisissant un bon représentant de la première classe de Chern du fibré en droite que l'on considère (cf. [Gau84], [Gau76]). Il est important de remarquer que cette définition du degré n'en fait plus un invariant topologique du fibré considéré et qu'il faut dès lors être prudent quant à ses propriétés.

Dans ce cadre, la notion de stabilité s'exprime alors comme une inégalité sur les degrés que doivent vérifier tous les sous-faisceaux cohérents du fibré considéré. Il est remarquable que cette propriété, issue de la géométrie algébrique, soit en

correspondance directe avec une autre notion purement différentielle qui n'a, *a priori*, aucun lien : celle de métrique de Hermite-Einstein. Cette notion a été introduite en 1980 par S. Kobayashi [Kob80] comme une généralisation des métriques de Kähler-Einstein du fibré tangent. En 1982, S. Kobayashi [Kob82] démontre qu'un fibré de Hermite-Einstein sur une variété compacte kählérienne est stable au sens de Mumford. S. Kobayashi et N. Hitchin conjecturent alors simultanément que les deux notions sont équivalentes. L'existence d'une métrique de Hermite-Einstein sur un fibré stable sera ensuite successivement démontrée par Donaldson, Uhlenbeck et Yau pour des variétés kählériennes puis par Li et Yau pour des variétés quelconques.

Le cas de la non stabilité est tout aussi intéressant : par définition, au moins un des sous-faisceaux du fibré considéré ne vérifie pas la condition de stabilité. On parlera donc de sous-faisceau déstabilisant. Des questions naturelles se posent alors : est-il possible d'exhiber un plus grand déstabilisant ? et si oui, est-il unique et quels sont ses propriétés dans une déformation ?

C'est à ces questions que nous essayons de répondre dans la **première partie** de ce mémoire. Il faut remarquer que dans le cas algébrique, l'étude du degré des sous-faisceaux déstabilisants est grandement simplifiée puisque l'application degré est alors à valeurs entières. Une fois le degré borné, l'existence d'un sous-faisceau de plus grand degré est immédiate. C'est Harder et Narasimhan [HN75] qui ont les premiers étudié cette question pour les courbes algébriques et ont défini la notion de filtration de Harder-Narasimhan qui est une décomposition d'un fibré instable en facteurs semi-stables (le premier terme de la filtration étant en fait le sous-faisceau déstabilisant maximal). Le phénomène fut ensuite généralisé en dimension supérieure par Shatz et Maruyama (cf. [Sha77], [Mar81]). Ce résultat est à la base de la théorie de la stratification de Shatz dans le cas algébrique. Dans le cas kählérien, Kobayashi énonce un théorème d'existence tout à fait similaire (voir par exemple [Kob87]) mais la preuve se révèle incomplète comme on le verra par la suite. Il est à remarquer que l'existence et les propriétés du déstabilisant maximal sont également liées à des questions de géométrie différentielle et plus précisément à la résolution d'inégalités de Hermite-Einstein comme l'a récemment montré Bradlow ([Bra95]) dans le cas kählérien en se basant sur l'énoncé de Kobayashi.

Nous rappellerons dans le **premier chapitre** les définitions et les propriétés élémentaires du degré dans un cadre non nécessairement kählérien.

Dans le **deuxième chapitre**, nous nous penchons sur le cas des fibrés vectoriels complexes. Nous montrons comment il est possible de majorer le degré sur l'ensemble des sous-faisceaux d'un fibré en reliant le problème à un calcul de géométrie différentielle et de calcul de courbure. L'idée était déjà présente dans les travaux de S. Kobayashi ([Kob87]), mais la démonstration est un peu plus technique car la forme de Kähler n'est ici pas fermée. Nous montrons ensuite comment construire un sous-faisceau de pente (ou de degré) maximale. Ici il faut remarquer que même dans le cas kählérien, le degré est à valeur dans \mathbb{R}

et on peut montrer que l'image de l'application degré $\deg : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas toujours fermée. Il n'est donc pas évident de réaliser le supremum du degré et c'est précisément le point qui n'est pas abordé dans la preuve de Kobayashi. Sur des variétés non kähleriennes, le problème est plus profond. On peut toujours considérer les sous-faisceaux d'un fibré donné comme des sous-variétés analytiques de fibrés grassmaniens. Mais l'espace de Douady correspondant n'a aucune raison d'être compact et nous ne savons donc pas si l'image du degré est fermée.

Dans ce contexte, la meilleure approche consiste à utiliser la notion de *sous-fibré holomorphe faible* introduite par K. Uhlenbeck et S. T. Yau ([UY86], [UY89]). L'idée consiste à regarder les sous-fibrés d'un fibré donné comme des projecteurs C^∞ hermitiens et les sous-faisceaux comme des projecteurs avec "singularités", c'est-à-dire, vivant dans un espace de Sobolev L_k^2 . Une fois le lien fait entre le degré d'un sous-faisceau et la norme Sobolev du projecteur associé, nous serons en mesure de ramener le problème à une question de convergence faible dans un espace de Hilbert. On peut voir cette correspondance comme une bonne notion de topologie sur les sous-faisceaux cohérents d'un fibré. A partir de ces deux résultats, nous démontrons le théorème principal du chapitre :

Théorème (Filtration de Harder-Narasimhan).

Soit (X, g) une variété complexe compacte munie d'une métrique de Gauduchon. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X . Alors E admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.

On remarquera à la fin du chapitre que les méthodes utilisées peuvent s'appliquer à d'autres notions de stabilité (comme par exemple la stabilité associée aux fibrés de Higgs), mais qu'il ne paraît pas toujours possible de donner un sens à la filtration de Harder-Narasimhan.

Le **troisième chapitre** est plus technique et consiste en une généralisation de ce résultat dans le cadre plus naturel et également plus général des faisceaux cohérents sans torsion. On est ici confronté à des problèmes de convergence liés à la non compacité de la base (c'est-à-dire la non compacité du lieu où le faisceau est localement libre). Nous en viendrons à bout en considérant des résolutions locales du faisceau et en "recollant" les morceaux à l'aide de propriétés démontrées dans le chapitre précédent. Le cadre le plus naturel pour les calculs de géométrie différentielle reste toutefois celui des faisceaux réflexifs que nous étudierons en premier lieu. Le cas général en découlera rapidement.

Kodaira et Spencer ont démontré (voir [KS60]) qu'il était possible de déformer en famille une métrique kählerienne sur une déformation de fibré. La démonstration repose sur les propriétés fortes d'une famille différentiable d'opérateurs fortement elliptiques sur une variété compacte : continuité des éléments du spectre, dépendance différentiable des opérateurs de projection en fonction du paramètre t de la déformation... Reprenant ici cette idée nous montrons dans le **quatrième chapitre** qu'il est possible de déformer de manière C^∞ une métrique de Gauduchon dans une déformation de variétés compactes holomorphes. On peut alors suivre le degré d'une famille de fibrés de manière continue (en fait C^∞).

L'idée est alors d'utiliser les méthodes développées dans les chapitres précédents pour obtenir des résultats de convergence de sous-faisceaux en déformation. Rappelons que si l'on considère une famille de diviseurs effectifs $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dont le volume $\text{vol}_g(D_i)$ est borné, le théorème de compacité de Bishop (voir par exemple [Chi85] p. 205,206 Prop. 1) nous donne leur convergence vers un diviseur effectif limite (convergence au sens ensembliste et au sens des courants). Si l'on voit un sous-faisceau comme sous-ensemble analytique d'un fibré grassmanien, le volume de ce sous-ensemble est lié au calcul du degré du faisceau correspondant. Il semble donc naturel qu'une condition de borne sur le degré suffise à assurer la convergence des sous-faisceaux. Ce sont deux théorèmes de ce type que nous démontrons à la fin de ce chapitre d'abord pour une famille de fibrés puis pour une déformation plate de faisceaux sans torsion. On obtient par là-même une nouvelle démonstration de la propriété d'ouverture de la stabilité en déformation qui, contrairement à la preuve de [LT95], n'utilise pas la correspondance de Kobayashi-Hitchin. Ici, on étend ce résultat au cas d'une déformation plate de faisceaux sans torsion.

Dans la **deuxième partie** de ce mémoire, nous nous penchons sur les surfaces de la classe *VII* et plus particulièrement sur les surfaces à coquilles sphériques globales (en abrégé CSG) dont nous étudions la stabilité. Ces surfaces forment une classe toujours mal comprise de la classification de Kodaira (écrite dans les années soixante). Elles sont définies par la propriété topologique d'avoir un premier nombre de Betti b_1 égal à 1. Elles sont par conséquent non algébriques, car toute surface algébrique a un premier nombre de Betti pair. On sait de plus qu'il est possible d'associer à toute surface S de classe *VII* une unique surface minimale S_0 telle que S soit obtenue par un nombre fini d'éclatements de S_0 . On peut donc se contenter d'étudier les surfaces de la classe *VII* qui sont minimales, sous-classe que l'on notera *VII*₀.

Le cas où le deuxième nombre de Betti b_2 de S est nul est déjà bien connu : si S admet des fonctions méromorphes non constantes, alors S est une surface elliptique, sinon, S est soit une surface de Hopf, soit une surface d'Inoue. Il faut remarquer que c'est seulement en 1994 que ce résultat fut démontré bien qu'Inoue ait déjà donné en 1974 des exemples de ces surfaces. C'est le cas $b_2 > 0$ qui va nous intéresser ici. On sait (voir par exemple [Nak84]) que le corps des fonctions méromorphes sur une telle surface est réduit à \mathbb{C} . En particulier, il n'existe alors qu'un nombre fini de courbes compactes en vertu d'un théorème de Kodaira. Des exemples de telles surfaces ont été construits par Inoue, Kato et Enoki, mais on ne sait toujours pas aujourd'hui si ce sont les seuls. Tous les exemples connus de telles surfaces contiennent une *coquille sphérique globale*, c'est-à-dire un plongement holomorphe de la sphère S^3 qui ne disconnecte pas la surface. Les travaux de Nakamura ([Nak84],[Nak90]) puis de Dloussky ([Dlo84]) ont permis d'avoir une description complète du comportement des courbes sur ces surfaces. Dloussky et Oeljeklaus ont ensuite obtenu une bonne description des feuilletages de ces surfaces ([DO99]).

Les conditions de stabilité pour les surfaces à CSG s'expriment comme des

bornes sur le volume de certains diviseurs de la surface et sont donc liées de part le théorème de Bishop au comportement des courbes de ces surfaces dans une déformation ce qui a été une motivation supplémentaire pour cette étude.

Nous rappelons la construction par éclatements et recollement des surfaces à CSG dans le **cinquième chapitre**. Nous donnons aussi les principaux résultats sur les feuilletages qui nous seront très utiles dans notre étude.

Nous commencerons, dans le **sixième chapitre**, à étudier la simplicité du fibré tangent des surfaces à CSG, condition nécessaire à leur stabilité. Pour ce faire, nous montrerons que la propriété de simplicité est équivalente sur les surfaces de la classe *VII* à la non existence d'extensions particulières du fibré tangent. Nous obtiendrons ainsi une condition valable pour toute surface de la classe *VII*. Pour celles qui sont à coquille sphérique globale, on donnera une réponse complète à la question.

L'étude de la notion de stabilité est beaucoup plus complexe. Rappelons que dans le cas non kählerien où nous nous trouvons, le degré et donc la stabilité dépendent de la métrique de Gauduchon choisie. On peut en toute généralité définir la notion de stabilité par rapport à toute métrique de Gauduchon. Savoir si cette condition est réellement plus forte n'est en général pas connu. Des surfaces n'admettant aucun feuilletage la vérifient bien sûr. Nous donnons ici des exemples de surfaces à CSG (et donc de surfaces admettant au moins un feuilletage singulier) stables (resp. instables) pour toute métrique de Gauduchon. Dans le cas des surfaces de Inoue Hirzebruch, on utilisera pour ce faire le théorème de convergence des sous-faisceaux de la première partie. Au passage, on donnera un exemple de non ouverture de la non semi-stabilité en déformation illustrant un résultat de la théorie de Donaldson.

Enfin, dans le **dernier chapitre**, nous étudions la déformation logarithmique d'une surface à coquille sphérique globale. Nous montrons pour les surfaces de type intermédiaire que les cocycles d'une telle déformation doivent être cherchés parmi ceux qui conservent le feuilletage. Nous obtenons alors dans tous les cas la dimension de la déformation logarithmique.

Première partie

La Filtration de
Harder-Narasimhan

Chapitre 1

Généralités

1.1 Degré et stabilité

Soit X une variété complexe compacte de dimension n . On notera g une métrique hermitienne sur X et ω_g la forme de Kähler associée.

Le degré est essentiellement défini pour les fibrés en droites holomorphes. Soit donc \mathcal{L} un tel fibré sur X . Supposons un instant la variété kählérienne, c'est-à-dire que la forme de Kähler associée à la métrique g est fermée ($d\omega_g = 0$). Alors on généralise la notion algébrique de degré en posant :

$$\deg_g(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge \omega_g^{n-1} = \langle c_1(\mathcal{L}) \cup [\omega_g]^{n-1}, X \rangle$$

où $c_1(\mathcal{L})$ désigne alternativement la première classe de Chern du fibré \mathcal{L} ou une 2-forme représentant cette classe. Comme on le voit dans le membre de droite, la notion est topologique et peut se calculer avec la cohomologie.

Il est possible de généraliser la définition au cas des variétés non kählériennes grâce à la notion de métrique de Gauduchon.

Définition 1.1 ([Gau84]). Une métrique hermitienne g est dite de *Gauduchon* si $\partial\bar{\partial}\omega_g^{n-1} = 0$.

En particulier, si g est kählérienne ou semi-kählérienne ($d\omega_g^{n-1} = 0$) alors elle est de Gauduchon. Mais contrairement à ces deux cas, il y a en général beaucoup de métriques de Gauduchon sur une variété complexe compacte comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.2 ([Gau84]). *Si X est une variété compacte, il existe dans la classe conforme de toute métrique hermitienne une métrique de Gauduchon. Cette métrique est unique à une constante multiplicative près. En particulier, il existe toujours une telle métrique sur X .*

Démonstration. Fixons nous une métrique arbitraire g^0 sur X . On cherche une métrique dans la classe conforme de g^0 , pour ce faire on reformule le problème sous forme linéaire. Si on trouve une fonction strictement positive φ telle que

$\partial\bar{\partial}(\varphi\omega_{g^0}^{n-1}) = 0$, alors la métrique $g = \varphi^{\frac{1}{n-1}}g^0$ est de Gauduchon. On introduit alors un opérateur de l'espace des fonctions C^∞ sur X dans lui-même

$$Q : \psi \mapsto -\frac{i}{(n-1)!} \star \partial\bar{\partial}(L_{g^0}^{n-1}(\psi))$$

où \star est l'opérateur étoile de Hodge qui va des n -formes dans les 0-formes, et L_{g^0} est l'opérateur linéaire de Lefschetz qui consiste à faire le produit extérieur par ω_{g^0} . De part l'injectivité de l'opérateur de Hodge, toute fonction positive incluse dans le noyau de Q vérifie les propriétés désirées.

On montre alors que l'opérateur Q a un adjoint facilement calculable qui est elliptique de degré deux, que le noyau de Q est de dimension un et que toute fonction appartenant au noyau doit être de signe constant (on applique essentiellement un principe du maximum). \square

Remarque 1.3. Un problème est en fait qu'il y a "trop" de métriques de Gauduchon sur une variété compacte. Il serait intéressant d'isoler une condition plus forte sur la métrique pour obtenir une métrique "canonique".

On peut étendre alors la notion de degré comme suit : soit \mathcal{L} un fibré en droite holomorphe sur (X, g) , avec g Gauduchon, et h une métrique hermitienne quelconque sur \mathcal{L} . Alors, on peut associer à la connexion de Chern A_h de (\mathcal{L}, h) , c'est-à-dire l'unique connexion de \mathcal{L} compatible avec la métrique h et la structure complexe, sa courbure $c_1(\mathcal{L}, h)$ qui est une $(1, 1)$ -forme réelle sur X (c'est un représentant particulier de la classe de Chern de \mathcal{L} que l'on appellera *représentant distingué*). Cette forme ne dépend de h qu'à un terme $\partial\bar{\partial}$ -exact près (en effet, localement, on a $c_1(\mathcal{L}, h) = \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h$ et toute autre métrique sur \mathcal{L} s'écrit $h' = e^f h$ ce qui donne le résultat escompté). D'autre part ω_g^{n-1} est $\partial\bar{\partial}$ -fermée, donc le g -degré de \mathcal{L} (ou plus simplement le degré s'il n'y a pas de confusion possible sur la métrique de Gauduchon choisie sur X) défini par :

$$\deg_g(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}, h) \wedge \omega_g^{n-1},$$

est indépendant du choix de h (il suffit d'appliquer deux fois le théorème de Stokes pour s'en convaincre).

On définit ainsi une application $\deg_g : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ du groupe de Picard de X (l'ensemble des fibrés en droite de X) à valeur **réelle**. Mais ici le degré n'est plus un invariant topologique : sur une surface complexe de premier nombre de Betti b_1 impair (c'est à dire $\dim H^1(S, \mathbb{R})$ impair), l'application degré restreinte aux fibrés plats ($\text{Pic}^{\text{plat}}(X)$, les fibrés de première classe de Chern réelle nulle) est surjective, cf. [LT95].

Rappelons rapidement la généralisation au rang supérieur : soit \mathcal{F} un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X modules, on peut lui associer un fibré en droite $\det \mathcal{F}$ appelé fibré déterminant défini à partir de résolutions locales de \mathcal{F} comme suit : si

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0$$

est une résolution locale de \mathcal{F}_U par des faisceaux cohérents localement libres où U est un ouvert dans la variété X , alors on pose

$$\det \mathcal{F}_U := \otimes_{i=0}^n (\det \mathcal{E}_i)^{(-1)^i}.$$

On montre alors que $\det \mathcal{F}_U$ est indépendant du choix de la résolution.

Définition 1.4.

- Le g -degré de \mathcal{F} est celui de son déterminant

$$\deg_g(\mathcal{F}) := \deg_g(\det \mathcal{F}),$$

- Si \mathcal{F} est sans torsion, alors on peut définir son rang (rang de la partie localement libre) et on définit sa *pen*té par

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg_g \mathcal{F}}{\text{rang} \mathcal{F}}$$

Remarque 1.5. Si \mathcal{F} est sans torsion de rang p , la définition du fibré déterminant coïncide avec la notion “classique” : $\det \mathcal{F} = (\wedge^p \mathcal{F})^{**}$ (cf. [Kob87] Prop 6.10).

Le degré d’un fibré en droite est lié à l’existence et au comportement des sections holomorphes éventuelles de ce fibré. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 1.6 ([Gau76]). *Soit X une variété complexe compacte de dimension n munie d’une métrique de Gauduchon g et D un diviseur de X de fibré en droite associé $[D]$. Alors*

$$\deg_g([D]) = \int_X c_1([D], h) \wedge \omega_g^{n-1} = (n-1)! \text{vol}_g(D).$$

Démonstration. Cela découle d’un théorème de dualité de Poincaré pluri-harmonique et d’une égalité du type Wirtinger. □

Revenons maintenant sur la définition de la stabilité. On se placera dans toute la suite sur une variété compacte munie d’un métrique de Gauduchon.

Définition 1.7. Soit X une variété compacte munie d’une métrique de Gauduchon g . Un faisceau cohérent sans torsion \mathcal{E} est dit g -(semi)stable si pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, tel que $0 < \text{rang} \mathcal{F} < \text{rang} \mathcal{E}$, on a $\mu(\mathcal{F}) < (\leq) \mu(\mathcal{E})$.

Il est essentiel dans cette définition de regarder tous les sous-faisceaux de \mathcal{E} même si \mathcal{E} est localement libre (i.e un fibré vectoriel). Toutefois, on peut se restreindre à une certaine classe de sous-faisceaux :

Proposition 1.8 ([Kob87] Prop. 7.6). *Soit \mathcal{E} un faisceau sans torsion sur (X, g) . Alors pour définir la stabilité (resp. la semi-stabilité), il suffit de considérer les sous-faisceaux \mathcal{F} de \mathcal{E} dont le quotient \mathcal{E}/\mathcal{F} est sans torsion.*

Démonstration. Définissons \mathcal{Q} par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

et soit $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ le sous-faisceau de torsion de \mathcal{Q} . On définit un faisceau \mathcal{F}' par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & \mathcal{F}' & & & & \\
 & & \uparrow & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathcal{Q}/\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Alors \mathcal{F}' est un sous-faisceau de \mathcal{E} qui contient \mathcal{F} et le quotient \mathcal{F}'/\mathcal{F} est isomorphe au faisceau de torsion $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$.

Lemme 1.9 ([Kob87] 6.14). *Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent de torsion, alors $\det \mathcal{F}$ admet une section holomorphe non triviale. En particulier, son degré est positif ou nul.*

Démonstration. Notons $S = S_{n-1}(\mathcal{F})$ l'ensemble de singularités de \mathcal{F} , c'est-à-dire le lieu où \mathcal{F} n'est pas localement libre. Sur $X \setminus S$, \mathcal{F} est localement libre et par hypothèse \mathcal{F} est de torsion donc le support de \mathcal{F} est inclus dans S . Soit U un ouvert de X ; prenons une résolution locale de \mathcal{F}_U comme ci-dessus et posons $\mathcal{F}_1 = \ker(\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F}_U)$, on a :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0$$

On en déduit que

$$\det \mathcal{F}_U = (\det \mathcal{F}_1)^* \otimes (\det \mathcal{E}_0) = \text{Hom}(\det \mathcal{F}_1, \det \mathcal{E}_0).$$

L'application injective $\det \mathcal{F}_1 \rightarrow \det \mathcal{E}_0$ induite par l'injection $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0$ peut être considérée comme une section non triviale de $\det \mathcal{F}_U$. Il faut encore vérifier que cette section ne dépend pas du choix de la résolution ce que l'on fait à l'aide d'une chasse dans le "bon" diagramme. La positivité du degré découle alors du théorème 1.6 \square

On déduit de ce lemme que $\deg(\mathcal{F}'/\mathcal{F}) \geq 0$. Un calcul direct des fibrés déterminant donne $\deg(\mathcal{F}') \geq \deg(\mathcal{F})$ et les deux faisceaux ont même rang, d'où la même inégalité pour les pentes. Le lemme en découle directement. \square

Remarque 1.10. En fait on peut reformuler cette proposition d'une manière qui nous sera utile dans toute la suite :

Proposition 1.11. *Soit \mathcal{F} un sous-faisceau de rang p de \mathcal{E} . Alors il existe un sous-faisceau \mathcal{G} du même rang, contenant \mathcal{F} , vérifiant $\deg \mathcal{G} \geq \deg \mathcal{F}$ et tel que le quotient \mathcal{E}/\mathcal{G} est sans torsion.*

Définition 1.12. Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur X . On dira qu'un sous-faisceau \mathcal{F} de \mathcal{E} est *saturé* si le quotient \mathcal{E}/\mathcal{F} est sans torsion.

La notion de stabilité qui est par définition très algébrique est reliée à des problèmes de géométrie différentielle. Soit en effet (E, h) un fibré hermitien sur (X, g) , notons A_h la connexion de Chern de E , alors en notant R_E la courbure de cette connexion on dira que h est une *métrique de Hermite-Einstein* si $K_E = i\Lambda_g R_E = \alpha \text{Id}$ avec $\alpha = \text{cst}$ où K_E est la courbure moyenne de la connexion A_h et Λ_g l'opérateur de contraction par la métrique g . L'existence d'une telle métrique sur un fibré complexe E donné revient donc à la résolution d'une certaine équation différentielle. Il est remarquable de constater que ce problème de nature purement géométrique est en fait lié à la notion de stabilité comme on le voit dans le théorème suivant :

Théorème 1.13 ([Kob87],[LT95]).

1. *Soit (E, h) un fibré vectoriel sur (X, g) admettant une métrique de Hermite-Einstein h , alors E est g -semi-stable et se décompose en somme directe*

$$(E, h) = (E_1, h_1) \oplus \cdots \oplus (E_k, h_k)$$

de fibrés g -stables de même constante de Hermite-Einstein c .

2. *Si E est g stable, alors E admet une métrique de Hermite-Einstein.*

1.2 La filtration de Harder-Narasimhan

Plaçons nous sur un fibré non semi-stable, il existe donc au moins un sous-faisceau déstabilisant et une question naturelle est de savoir s'il y a un "plus grand" déstabilisant. C'est Harder et Narasimhan qui ont répondu en premier à cette question en donnant dans le cas algébrique une décomposition des fibrés en facteurs vérifiant une condition de stabilité : la filtration de Harder-Narasimhan [HN75]. On peut en donner une définition dans la cadre qui nous intéresse :

Définition 1.14 (Filtration de Harder-Narasimhan). Soit (X, g) une variété complexe compacte de dimension n munie d'une métrique de Gauduchon g . Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur X . On appelle *Filtration de Harder-Narasimhan* de \mathcal{E} (en abrégé FHN de \mathcal{E}) tout drapeau :

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1} \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

de sous-faisceaux de \mathcal{E} vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est g -semi-stable, $1 \leq i \leq s$,
2. $\mu(\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j) < \mu(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1})$ avec $1 \leq j \leq s-1$.

En fait, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est le sous-faisceau g -semi-stable maximal de $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{i-1}$ for $1 \leq i \leq s$.

L'existence d'une telle filtration dans le cas algébrique est déjà bien connue (cf les travaux de Shatz [Sha77] et Maruyama [Mar81]).

Notre but ici est de généraliser ceci au cas d'une variété complexe quelconque. Le théorème principal que nous obtenons dans cette partie (théorème 3.11) est le suivant :

Théorème (Filtration de Harder-Narasimhan).

Soit (X, g) une variété complexe compacte munie d'une métrique de Gauduchon. Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur X . Alors \mathcal{E} admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.

Nous allons d'abord en donner une démonstration pour les fibrés vectoriels pour bien mettre en évidence les idées principales de la preuve. Le cas général, traité par la suite, se révèlera plus technique.

1.3 Espaces de Sobolev

Rappelons les définitions et fixons les notations pour les objets d'analyse que nous allons utiliser.

Soit (M, g) une variété différentiable Riemannienne et (E, h) un fibré différentiable hermitien complexe sur M . Soit A une connexion sur E , compatible avec la métrique h ; on notera d_A la dérivée covariante associée. On notera encore $A^r(E)$ (resp. $A^{p,q}(E)$) l'espace des r -formes globales à valeur dans E (resp. des (p, q) -formes), c'est à dire les sections C^∞ globales du faisceau $\wedge^r T^*M \otimes E$ (resp. $\wedge^{p,q} T^*M \otimes E$).

Les métriques g et h induisent des métriques sur tous les espaces $A^{p,q}(E)$. Par simplicité, on notera les normes associées $|\cdot|$ (en général p et q seront clairs d'après le contexte et seront donc omis). On définit une norme L^p sur les espaces de formes par la formule :

$$\|a\|_{L^p} := \left(\int_M |a|^p \cdot \text{vol}_g \right)^{1/p}.$$

Plus généralement, si E est un fibré hermitien on utilisera les espaces de Sobolev suivants :

Définition 1.15. Pour $k \in \{0, 1\}$ et $1 \leq p < \infty$, la norme L_k^p sur $A^0(E)$ est définie par :

$$\|a\|_{L_k^p} := \left(\sum_{i=0}^k \int_M |d_A^i(a)|^p \cdot \text{vol}_g \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace des sections Sobolev de E est la complétion de $A^0(E)$ pour cette norme. C'est un espace de Banach que l'on notera $L_k^p(E)$. Il est séparable et réflexif pour

$p > 1$. Bien sûr, $A^0(E)$ est dense dans cet espace pour $p \in [1, +\infty[$. Pour $p = 2$, c'est de plus un espace de Hilbert.

Il y a une autre façon de voir cet espace de Sobolev par l'intermédiaire des cartes locales et des trivialisations locales de E . Soit $(p, k) \in [0, +\infty[\times \{0, 1\}$. Alors, à tout triplet $\sigma = (\varphi, \tau, K)$ formé d'une carte locale $\varphi : U \rightarrow V \in \mathbb{R}^n$ de M , d'une trivialisations locale $\theta = (\theta_1, \theta_2) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^r$ de E et d'un compact $K \subset U$, on peut associer une semi-norme sur $A^0(E)$ par :

$$\mu_{k,\sigma}^p(s) = \left[\int_K \sum_{|i| \leq k} |\partial^i(\theta_2 \circ s \circ \varphi^{-1})|^p \right]^{1/p}$$

bien sûr la topologie définie sur $A^0(E)$ par cette famille $(\mu_{k,\sigma}^p)_\sigma$ de semi-normes n'est pas complète. Le complété est justement l'espace de Sobolev $L_k^p(E)$. Il est possible de définir une norme en sommant à l'aide de partitions de l'unité les semi-normes précédentes. Si M est compacte cette norme est équivalente à celle définie plus haut.

Les deux résultats essentiels sur les espaces de Sobolev que nous allons utiliser par la suite sont d'une part le théorème de plongement Sobolev et d'autre part le théorème de multiplication des sections Sobolev :

Théorème 1.16 (Théorème de plongement ([LT95])). *Soit E un fibré vectoriel sur une variété compacte X de dimension n . Soit $(p, k) \in]0, \infty[\times \mathbb{N}$. Si $k > l$ et $k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q}$, alors l'inclusion naturelle $A^0(E) \subset L_l^q(E)$ admet une extension injective continue*

$$L_k^p(E) \hookrightarrow L_l^q(E)$$

qui est compacte si $k - \frac{n}{p} > l - \frac{n}{q}$.

Théorème 1.17 (Multiplication Sobolev ([LT95])). *Soient E, F, G trois fibrés vectoriels sur une variété compacte X . Soit $m : E \times_M F \rightarrow G$ une application différentiable et bilinéaire sur les fibres. Alors, l'application linéaire induite*

$$A^0(E) \times A^0(F) \rightarrow A^0(G)$$

admet une extension continue

$$L_k^p(E) \times L_k^p(F) \rightarrow L_k^p(G)$$

si $k - \frac{n}{p} > 0$.

Chapitre 2

Le cas des fibrés vectoriels

Dans toute la suite, on se fixe une variété complexe compacte X munie d'une métrique de Gauduchon g par rapport à laquelle les degrés et pentes des fibrés seront calculés. On notera ω_g la forme de Kähler associée.

On s'intéresse dans cette partie au cas d'un fibré vectoriel complexe E de rang r au-dessus de X . On fixe pour la suite une métrique hermitienne h sur E .

La première étape pour construire la filtration de Harder-Narasimhan du triplet (X, g, E) est de trouver un sous-faisceau de pente maximal dans E . Pour ce faire, nous avons deux choses à montrer :

- Le fait que le degré de tous les sous-faisceaux de E est majoré par une constante ne dépendant que de E ;
- Le fait que l'on puisse réaliser le supremum du degré par un sous-faisceau.

On verra ensuite comment conclure sur l'existence de la filtration à partir de ces deux éléments.

Comme on l'a vu, lorsqu'on s'intéresse au maximum du degré, on peut se limiter à regarder les sous-faisceaux saturés de E (cf lemme 1.11). On appellera ensemble singulier d'un sous-faisceau $\mathcal{F} \subset E$ la réunion de son ensemble de singularité "au sens classique" $S_{n-1}(\mathcal{F})$ (c'est-à-dire du lieu où le faisceau n'est pas localement libre) et de celui du faisceau quotient E/\mathcal{F} (noté $S_{n-1}(E/\mathcal{F})$) $V = S_{n-1}(\mathcal{F}) \cup S_{n-1}(E/\mathcal{F})$. Dans le cas des sous-faisceaux saturés, V est de codimension au moins deux car \mathcal{F} est sans torsion et E/\mathcal{F} aussi. Sur le complémentaire de V , le fibré vectoriel $F = \mathcal{F}|_{X \setminus V}$ est un sous-fibré de $E|_{X \setminus V}$. En fait, tous les sous-faisceaux que l'on considère sont des sous-fibrés en dehors d'un ensemble de codimension deux. Ce sont de plus des faisceaux réflexifs d'après le lemme suivant :

Lemme 2.1 ([Kob87] Prop. 5.22). *Soit*

$$0 \rightarrow \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents avec \mathcal{S} réflexif et \mathcal{S}'' sans torsion. Alors \mathcal{S}' est réflexif.

Démonstration. On montre directement que \mathcal{S}' est normal, donc, puisqu'il est sans torsion, il est réflexif. \square

Dans la suite, on notera \mathcal{A}_p l'ensemble de tous les sous-faisceaux cohérents \mathcal{F} de rang p de E dont le quotient E/\mathcal{F} est sans torsion. On désignera toujours pas des caractères droits la restriction d'un sous-faisceau au complémentaire de son ensemble singulier. Prouvons tout d'abord que le degré est borné sur \mathcal{A}_p .

2.1 Borne supérieure du degré

Soit $0 < p < \text{rang} E$,

Proposition 2.2. *Il existe un réel C tel que*

$$\sup_{\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p} \text{deg}(\mathcal{F}) \leq C.$$

Démonstration. Pour plus de clarté, nous allons d'abord traiter le cas des sous-fibrés de E . Soit donc F un sous-fibré de E de rang p et notons Q le fibré quotient défini par :

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Notons $\pi : E \rightarrow E$ le projecteur h -hermitien sur le sous-espace F et h_F et h_Q les métriques induites par h sur F et Q respectivement. On obtient trois connexions de Chern que nous noterons A , A_F et A_Q . Soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base locale unitaire de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\}$ soit une base de F . On a :

$$A(e_a) = \omega_{ab} e_b.$$

La matrice de connexion écrite dans cette base locale se décompose en quatre blocs :

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_F & -\overline{a^{10}{}^t} \\ a^{10} & \omega_Q \end{pmatrix}$$

Ici, ω_F et ω_Q désignent les matrices des connexions induites sur F et Q respectivement. La $(1,0)$ -forme à valeur matricielle a^{10} est la *seconde forme fondamentale* de la décomposition. C'est un élément de $A^{10}\text{End}(F, Q)$ (si $d_A = \partial_0 + \bar{\partial}$ est la dérivée covariante de la connexion de Chern A , on a $a^{10} = (Id - \pi) \circ \partial_0(\pi)$). Nous noterons a^{01} la forme duale $(a^{10})^*$ (voir [LT95] ou [Bra91] pour plus de détails).

Notons R_E , R_F et R_Q les courbures associées des fibrés considérés, on sait que $R_E = d\omega + \omega \wedge \omega$. On obtient donc sous forme matricielle :

$$R_E = \begin{pmatrix} R_F - a^{01} \wedge a^{10} & \star \\ \star & R_Q - a^{10} \wedge a^{01} \end{pmatrix}$$

Nous noterons K_E (resp. K_F) la courbure moyenne de la connexion de Chern associée à (E, h) (resp. (F, h_F)). Par définition $K_E = i\Lambda_g(R_E)$ où Λ_g

est l'opérateur de contraction avec la métrique, i.e. le dual de l'opérateur de Lefschetz $L : \alpha \mapsto \omega_g \wedge \alpha$. Ce qu'on peut également écrire :

$$inR_E \wedge \omega_g^{n-1} = K_E \cdot \omega_g^n.$$

Calculons alors le degré de F :

$$\begin{aligned} \deg(F) &= \int_X c_1(F, h_F) \wedge \omega_g^{n-1} \\ &= \int_X \frac{i}{2\pi} \operatorname{tr}(R_F) \wedge \omega_g^{n-1} \\ &= \int_X \frac{1}{2\pi n} \operatorname{tr}(K_F) \cdot \omega_g^n \end{aligned}$$

D'après les remarques qui précèdent et le fait que $\pi^2 = \pi$, on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(K_F) &= \operatorname{tr}(\pi \circ K_E \circ \pi) + \operatorname{tr}(i\Lambda_g(a^{01} \wedge a^{10})) \\ &= \operatorname{tr}(K_E \circ \pi) - |a^{10}|^2 \end{aligned}$$

où $|\cdot|$ est la norme induite sur $A^{p,q}(\operatorname{End}E)$ par h et g (nous omettons de préciser p et q). Le passage à la dernière ligne découle du lemme suivant :

Lemme 2.3. *Si a^{10} est une $(1,0)$ -forme à valeur endomorphisme, alors*

$$\operatorname{tr}(i\Lambda_g(a^{01} \wedge a^{10})) = -|a^{10}|^2.$$

Démonstration. Soit x un point de X et choisissons des coordonnées locales $\{z_i\}$ sur un voisinage U autour de x telles que $\{dz_i\}_{i=1}^n$ et $\{d\bar{z}_i\}_{i=1}^n$ soit orthogonaux par rapport à la métrique g et de norme $\sqrt{2}$. Alors au point x ,

$$\omega_g = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

a^{10} étant de type $(1,0)$, on peut l'écrire

$$a^{10}(x) = \sum_{i=1}^n a^i(x) dz_i$$

où $a^i \in A^0(U, \operatorname{End}E)$ c'est-à-dire que a^i est une fonction à valeur matricielle sur U . Alors

$$\overline{a^{10}}^t(x) = \sum_{i=1}^n a^{i*}(x) d\bar{z}_i$$

On a donc

$$\operatorname{tr}(i\Lambda_g(a^{01} \wedge a^{10}))(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(a^i(x) a^{i*}(x)) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a^i(x)|^2.$$

□

On a :

$$\deg(F) = \frac{1}{2\pi n} \int_X \operatorname{tr}(K_E \circ \pi) \cdot \omega_g^n - \frac{(n-1)!}{2\pi} \|a^{10}\|_{L^2}^2$$

La première expression du second membre est clairement bornée indépendamment de π (et donc de F) par une certaine constante Φ car c'est une partie de la matrice de la courbure moyenne de E . On a donc obtenu une borne supérieure pour l'application degré :

$$\deg(F) \leq \Phi - \frac{(n-1)!}{2\pi} \|a^{10}\|_{L^2}^2 \leq \Phi \quad (2.1)$$

Dans le cas général, on doit considérer les sous-faisceaux de E qui sont des sous-fibrés en dehors d'un sous-ensemble de codimension deux. On doit contrôler le comportement près des points singuliers du sous-faisceau.

Soit donc \mathcal{F} dans \mathcal{A}_p et notons comme d'habitude V son ensemble singulier. Alors le fibré $F = \mathcal{F}|_{X \setminus V}$ est un sous-fibré de E . On peut donc le munir de la métrique induite h_F qui est bien définie en dehors de V et appliquer à celle-ci ce qui précède. Le problème est de montrer qu'en utilisant h_F on calcule bien le degré de \mathcal{F} . Notons π le projecteur hermitien sur F , il est défini presque partout et C^∞ sur $X \setminus V$. Sur cet ouvert, on peut décomposer le fibré E en somme directe orthogonale $E = F \oplus F^\perp$, et associer à ce scindage la seconde forme fondamentale a^{10} correspondante. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.4 (Formule de Chern-Weil).

$$\deg(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} \operatorname{tr}(K_E \circ \pi) \cdot \omega_g^n - \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} |a^{10}|^2 \cdot \omega_g^n. \quad (2.2)$$

Démonstration. La preuve est sensiblement la même que celle de Kobayashi (preuve (★★) p. 181 de [Kob87])

Considérons le fibré déterminant $\det \mathcal{F} = (\wedge^p \mathcal{F})^{**}$ et notons j le monomorphisme de faisceaux :

$$j : \det \mathcal{F} \hookrightarrow \wedge^p E$$

Soit α une section holomorphe locale de $\det \mathcal{F}$ et notons

$$W = \{x \in X \mid j(\alpha)(x) = 0\}.$$

le faisceau \mathcal{F} étant un sous-fibré de E en dehors de l'ensemble analytique V , l'application j est injective sur $X \setminus V$ en temps qu'application du fibré en droites $\det \mathcal{F}$ dans le fibré vectoriel $\wedge^p E$. L'ensemble W est donc inclus dans V et ses composantes irréductibles sont donc au moins de codimension 2.

Appelons alors $u = j^*(\wedge^p h)$ le tiré en arrière de la structure hermitienne $\wedge^p h$ de $\wedge^p E$ par j . Par définition u définit une structure hermitienne sur le fibré en droite $\det \mathcal{F}|_{X \setminus W}$ et u dégénère en s'annulant au-dessus de W . Choisissons une métrique hermitienne \bar{u} sur $\det \mathcal{F}$ au-dessus de X tout entier. On a le résultat suivant :

Lemme 2.5.

$$\int_X c_1(\det \mathcal{F}, \bar{u}) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{X \setminus W} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1}.$$

Preuve du lemme 2.5. On va essayer de contrôler ce qui se passe au voisinage du lieu d'annulation W de u en résolvant les singularités de W , puis on appliquera des calculs de résidus.

Soit τ une section holomorphe locale de $\det \mathcal{F}$ ne s'annulant pas. En utilisant une base locale $e = (e_1, \dots, e_r)$ de E et le morphisme j on peut écrire

$$j(\tau) = \sum_I \tau^I e_I \quad \text{où } e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \quad \text{avec } i_1 < \dots < i_p.$$

Posons alors,

$$f = u(\tau, \tau) / \bar{u}(\tau, \tau) = \sum u_{IJ} \tau^I \bar{\tau}^J,$$

avec

$$u_{IJ} = \wedge^p h(e_I, e_J) / \bar{u}(\tau, \tau).$$

Il est facile de voir que f est bien définie indépendamment du choix de τ et que c'est une fonction lisse positive qui s'annule exactement sur W . En effet, la matrice (u_{IJ}) étant définie positive, f s'annule exactement là où tous les τ^I s'annulent.

On notera alors \mathcal{I} l'idéal engendré par les $\{\tau^I\}$ de sorte que W soit le lieu d'annulation de l'idéal \mathcal{I} . On sait alors, en utilisant le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, qu'il existe une variété complexe X^* et une application holomorphe surjective $\pi : X^* \rightarrow X$ telle que $\text{codim}(\pi^{-1}W) = 1$,

$$\pi : X^* - \pi^{-1}W \rightarrow X - W$$

est un biholomorphisme et $\pi^* \mathcal{I} = \mathcal{O}_{X^*}(-m(\pi^{-1}W))$ pour un entier m . Si l'équation $\zeta = 0$ définit localement $\pi^{-1}W$ sur X^* , alors les fonctions $\pi^* \tau^I / \zeta^m$ sont toutes holomorphes et, en chaque point, au moins l'une d'entre elles ne s'annule pas. Puisque u_{IJ} est une matrice hermitienne définie positive C^∞ , on peut écrire localement :

$$\pi^* f = a |\zeta|^{2m},$$

où a est une fonction C^∞ partout non nulle.

En utilisant $u = f \bar{u}$, on obtient

$$c_1(\det \mathcal{F}, \bar{u}) = c_1(\det \mathcal{F}, u) - \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log f \quad \text{sur } M - W.$$

Montrons alors que

$$\int_{X \setminus W} \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log f \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{X^* \setminus \pi^{-1}W} \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log \pi^* f \wedge \pi^* \omega_g^{n-1} = 0$$

Notons Ψ_1 la $(1, 0)$ -forme $\frac{i}{2\pi}\partial \log \pi^* f$. Elle est régulière sur $X^* \setminus \pi^{-1}W$. Au voisinage de $\pi^{-1}W$, on peut écrire localement :

$$\Psi_1 = \frac{i}{2\pi}\partial \log a + m\frac{i}{2\pi}\partial \log |\zeta|^2 = \frac{i}{2\pi}\partial \log a + m\frac{i}{2\pi}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

Ψ_1 est donc une 1-forme à coefficients L^1_{loc} définie sur tout X^* (en effet, la fonction a étant strictement positive, la première partie est en fait C^∞ partout). On a $d\Psi_1 = \bar{\partial}\Psi_1 = \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \pi^* f$ qui s'étend de la même manière en une forme localement L^1 sur X^* . Utilisons alors la formule des résidus (voir par exemple [GH78]) :

$$dT_{\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) = T_{d\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) + R_1(\pi^*\omega_g^{n-1}),$$

où T_φ désigne le courant induit par la forme φ .

On peut alors facilement calculer le résidu avec l'aide, par exemple de la formule de Lelong pour les fonctions holomorphes (voir par exemple [GH78]) : $R_1 = -m[\pi^{-1}W]$ où $[\pi^{-1}W]$ désigne le courant d'intégration sur le sous-ensemble analytique $\pi^{-1}W$. On obtient alors,

$$\begin{aligned} \int_{X^*} \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \pi^* f \wedge \pi^*\omega_g^{n-1} &= T_{d\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) \\ &= dT_{\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) - R_1(\pi^*\omega_g^{n-1}) \\ &= dT_{\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) + m \int_{\pi^{-1}W} \pi^*\omega_g^{n-1} \\ &= dT_{\Psi_1}(\pi^*\omega_g^{n-1}) + m \int_W \omega_g^{n-1} \\ &= -T_{\Psi_1}(d\pi^*\omega_g^{n-1}) \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on se sert de façon essentielle du fait que la codimension de W est supérieure ou égale à deux.

Pour calculer le terme restant, on se sert de la même méthode. On a :

$$T_{\Psi_1}(d\pi^*\omega_g^{n-1}) = \int_{X^*} \frac{i}{2\pi}\partial \log \pi^* f \wedge \bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}.$$

Ici, on pose $\Psi_2 = \frac{i}{2\pi}\log \pi^* f$. Ψ_2 est C^∞ en dehors de $\pi^{-1}W$ et L^1_{loc} sur X^* (au voisinage de W , on a la forme locale $\frac{i}{2\pi}\log a + m\frac{i}{2\pi}\log |\zeta|^2$). De plus, $d\Psi_2 = \frac{i}{2\pi}d \log \pi^* f$ est localement L^1 au voisinage de W .

$$\begin{aligned} \int_{X^*} \frac{i}{2\pi}\partial \log \pi^* f \wedge \bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1} &= \int_{X^*} \frac{i}{2\pi}d \log \pi^* f \wedge \bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1} \\ &= T_{d\Psi_2}(\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) \\ &= dT_{\Psi_2}(\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) - R_2(\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) \\ &= -T_{\Psi_2}(\partial\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) - R_2(\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) \end{aligned}$$

On se rappelle alors que la métrique g est de Gauduchon pour annuler le premier terme du membre de gauche. On calcule directement le résidu R_2 :

$$R_2(\bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}} \int_{|\zeta|=\varepsilon} |\zeta| \left(\frac{i}{2\pi} \log \pi^* f \right) \bar{\partial}\pi^*\omega_g^{n-1}$$

où $\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ sont des coordonnées locales sur X^* vérifiant $\pi^{-1}W = \{\zeta = 0\}$. Mais, de part la forme locale de $\psi_2 = \frac{i}{2\pi} \log a + m \frac{i}{2\pi} \log |\zeta|^2$ au voisinage de $\pi^{-1}W$, et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varepsilon| \log |\varepsilon|^2 = 0$, on obtient que le résidu R_2 est nul. \square

En utilisant le lemme, on obtient :

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{F}) &= \int_X c_1(\det \mathcal{F}, \bar{u}) \wedge \omega_g^{n-1} \\ &= \int_{X \setminus W} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1} \\ &= \int_{X \setminus V} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1} \\ &= \int_{X \setminus V} c_1(F, h_F) \wedge \omega_g^{n-1} \end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on utilise le fait que la codimension de V et W est au moins 2 et que ces ensembles sont donc de mesure nulle.

On se sert alors du scindage du fibré E sur $X \setminus V$ pour appliquer le même raisonnement que dans le cas des sous-fibrés. Finalement, on obtient la formule :

$$\deg(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} \text{tr}(K_E \circ \pi) \cdot \omega_g^n - \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} |a^{10}|^2 \cdot \omega_g^n$$

\square

Grâce à cette formule, on peut finir la démonstration de la proposition 2.2. En effet, l'inégalité suivante est vérifiée pour tous les sous-faisceaux $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$:

$$\deg(\mathcal{F}) \leq \Phi - \frac{(n-1)!}{2\pi} \int_{X \setminus V} |a^{10}|^2 \cdot \text{vol}_g \leq \Phi \quad (2.3)$$

\square

Remarque 2.6. Si \mathcal{F} est un sous-faisceau de E en dehors d'un sous-ensemble de codimension au moins deux, son degré peut être calculé seulement en fonction de la partie sous-fibré de \mathcal{F} . On en déduit donc que le faisceau saturé qui lui est associé a le même degré (il a la même partie sous-fibré).

Remarque 2.7. La proposition 2.4 est plus précise que le résultat que l'on souhaitait car elle donne également une majoration de la norme L^2 de la seconde forme fondamentale du faisceau \mathcal{F} . C'est cette information qui va se révéler essentielle pour démontrer l'existence du faisceau maximal.

Corollaire 2.8. *Il existe une constante C telle que pour tout sous-faisceau cohérent \mathcal{F} de E , on ait $\deg(\mathcal{F}) \leq C$.*

2.2 Sous-faisceau maximal

Le problème est maintenant d'introduire une certaine notion de convergence sur l'ensemble des sous-faisceaux de E qui nous permettrait d'atteindre un faisceau de degré maximal en passant à la limite. Pour ce faire, on va utiliser une notion introduite par K. Uhlenbeck ([UY86]) qui définit des “*sous-fibrés singuliers*” d'un fibré holomorphe E donnés par des “*projecteurs avec singularités*”.

Définition 2.9. Un élément π de l'espace de Sobolev $L^2_1(\text{End}E)$ est appelé *sous-fibré holomorphe faible de E* si, dans $L^1(\text{End}E)$ (c'est à dire presque partout), il vérifie les propriétés :

$$\pi^* = \pi = \pi^2 \quad \text{et} \quad (\text{Id} - \pi) \circ \bar{\partial}(\pi) = 0. \quad (\star)$$

La démonstration du fait qu'un sous-fibré holomorphe faible représente bien un sous-faisceau holomorphe de E est la plus compliquée et utilise des résultats de régularisation non triviaux. On trouve la preuve dans deux articles de K. Uhlenbeck et S. T. Yau qui n'utilisent d'ailleurs que ce sens de la correspondance :

Théorème 2.10 ([UY86], [UY89] et [LT95] p. 81).

Un fibré holomorphe faible π de E représente un sous-faisceau cohérent \mathcal{F} de E ; plus précisément, il existe un sous-faisceau cohérent \mathcal{F} de E et un sous-ensemble analytique $V \subset X$ avec les propriétés suivantes :

- $\text{codim}_X V \geq 2$,
- $\pi|_{X \setminus V}$ est C^∞ et satisfait (\star) ,
- $F = \mathcal{F}_{X \setminus V} = \pi|_{X \setminus V}(E|_{X \setminus V}) \hookrightarrow E|_{X \setminus V}$ est un sous-fibré holomorphe.

On peut toujours supposer que \mathcal{F} est saturé c'est à dire qu'il appartient à un des ensembles \mathcal{A}_p .

Démonstration. Pour démontrer le théorème, remarquons tout d'abord que pour tout fibré vectoriel E sur une variété complexe compacte X , on peut trouver un recouvrement $\{O_i\}$ de X tel que $E|_{O_i}$ est biholomorphe à $O_i \times \mathbb{C}^r$ et les fonctions de transitions sont données par des applications holomorphes de $O_i \cap O_j$ dans $GL(r, \mathbb{C})$. Un sous-fibré peut alors être donné comme suit : pour tout i on se donne une application holomorphe f_i de O_i dans $G(r, k)$, la Grassmannienne des k -plans dans \mathbb{C}^r . Les applications f_i et f_j se recollent à un automorphisme de $G(r, k)$ près (automorphisme induit par les fonctions de transition du fibré E).

Si f_i est seulement rationnelle, c'est-à-dire définie en dehors d'une sous-variété de codimension au moins deux dans O_i , alors les $\{f_i\}$ définissent un sous-faisceau cohérent de E . En effet, soit $U(k)$ le fibré universel au-dessus de $G(r, k)$ et F_i la clôture du graphe de f_i . Soit π_1^i et π_2^i les projections sur chaque facteur du

produit :

$$\begin{array}{ccc} O_i \times G(r, k) & \xrightarrow{\pi_2^i} & G(r, k) \\ \downarrow \pi_1^i & & \\ O_i & & \end{array}$$

Alors, $\pi_2^{i*}U(k)$ est un k -fibré sur $O_i \times G(r, k)$, on le restreint à F_i , puis on applique le théorème de l'image directe de Grauert : $\pi_{1*}^i(\pi_2^{i*}U(k)|_{F_i})$ est un faisceau cohérent sur O_i induit par f_i . Sur $O_i \cap O_j$ les faisceaux se recollent par un automorphisme de $G(r, k)$ puisque c'est le cas pour f_i et f_j .

Il nous faut donc montrer qu'on peut associer à tout sous-fibré holomorphe faible de E des applications rationnelles à valeur dans une certaine Grassmannienne $G(r, k)$. Donnons nous donc un sous-fibré holomorphe faible associé au projecteur π . Le rang de la projection est donnée par la trace de π qui est un entier et une fonction de L_1^2 , d'où l'on déduit que cet entier est constant presque partout. Soit donc $k = \text{tr}(\pi)$ cette constante. Alors, dans toute les cartes locales O_i de E , π induit une application $\hat{\pi}_i$ d'un ensemble de mesure pleine dans O_i à valeur dans $G(r, k)$. On montre alors que $\hat{\pi}_i$ peut être étendue en une application rationnelle de O_i dans $G(r, k)$. Supposons sans perte de généralité que la dimension de la variété est deux et que $O_i = D \times D$ où D est le disque unité de \mathbb{C} . Puisque π est L_1^2 , sa restriction à chaque tranche $\{z\} \times D$ (resp. $D \times \{z\}$) est L_1^2 . On voit π comme une application de $D \times D$ dans la sous-variété V_k de $\text{End}E$ de tous les endomorphismes de rang k . De part un théorème d'approximation (voir par exemple [SU83]), l'application $\pi_z = \pi|_{\{z\} \times D}$ peut être approchée par des applications lisses, L_1^2 bornées, F_m de $\{z\} \times D$ dans V_k . On définit alors $\hat{F}_m : \{z\} \times D \rightarrow G(r, k)$ par $\hat{F}_m(z, w) = F_m(z, w)(\mathbb{C}^r) \in G(r, k)$. On montre alors que la limite des \hat{F}_m donne l'extension rationnelle de $\hat{\pi}_z$ souhaitée. Pour ce faire, on montre tout d'abord par un calcul direct à l'aide des coordonnées de Plücker que les \hat{F}_m sont L_1^2 et que leur norme L_1^2 est bornée par celle de π_m et donc uniformément bornée. On prouve donc que la limite des \hat{F}_i donne une extension faiblement holomorphe de $\hat{\pi}_z$. On utilise alors un théorème de régularisation :

Théorème 2.11 (voir [UY86] et [UY89]). *Une application faiblement holomorphe à valeur dans une variété algébrique est méromorphe.*

□

Ici, nous allons utiliser la correspondance dans les deux sens, il nous faut vérifier la propriété suivante qui donne la réciproque du théorème précédent :

Proposition 2.12. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ un sous-faisceau. Alors, on peut lui associer un projecteur Sobolev $\pi \in L_1^2$.*

Démonstration. En effet, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 2.2, on peut décomposer le fibré E en dehors d'un ensemble V en $E = F \oplus F^\perp$. On a donc une projection hermitienne π définie presque partout et C^∞ au-dessus de $X \setminus V$. Il nous reste à montrer que π est bien dans $L^2_1(\text{End}E)$. La projection π étant hermitienne, sa norme au carré est égale à son rang et est donc bornée dans L^∞ et donc dans L^2 . Il reste à borner la norme L^2 de la dérivée de π . Notons A la connexion hermitienne de (E, h) et d_A la dérivée covariante associée (et par extension la dérivée covariante sur $\text{End}(E)$). Alors, si σ est une section de E , on a (cf. [Kob87] chap 1 §6)

$$\begin{aligned} d_A(\pi)(\sigma) &= d_A(\pi(\sigma)) - \pi(d_A(\sigma)) \\ &= [d_A(\pi(\sigma)) - \pi(d_A(\pi(\sigma)))] - [\pi(d_A((\text{Id} - \pi)(\sigma)))] \\ &= a^{10}(\pi(\sigma)) - a^{01}((\text{Id} - \pi)(\sigma)) \end{aligned}$$

ce que l'on peut résumer par :

$$d_A(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & a^{01} \\ a^{10} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

D'autre part, la formule de Chern-Weil (prop. 2.4)

$$\deg(\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} \text{tr}(K_E \circ \pi) \cdot \omega_g^n - \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} |a^{10}|^2 \cdot \omega_g^n.$$

nous montre que $\frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} |a^{10}|^2 \cdot \omega_g^n$ est borné en fonction du degré de \mathcal{F} et d'un terme ne dépendant que de E . C'est à dire que $d_A(\pi)$ est borné en norme L^2 . En fait, si l'on veut être tout à fait précis, le " $d_A(\pi)$ " utilisé précédemment est la dérivée de π en dehors de V et on doit vérifier que cela coïncide avec la dérivée de π au sens des distributions. Ici, les formes tests sont les éléments de $A^{2n-1}(\text{End}E)$. On doit donc montrer que quel que soit $\varphi \in A^{2n-1}(\text{End}E)$, on a :

$$\int_X \text{tr}(d_A(\pi) \wedge \varphi) = - \int_X \text{tr}(\pi \wedge d_A(\varphi))$$

Soit V_ε un voisinage tubulaire de V dont le volume tend vers zéro quand ε tend vers zéro. On applique la formule de Stokes :

$$\int_{X \setminus V_\varepsilon} \text{tr}(d_A(\pi) \wedge \varphi) + \int_{X \setminus V_\varepsilon} \text{tr}(\pi \wedge d_A(\varphi)) = \int_{\partial V_\varepsilon} \text{tr}(\pi \wedge \varphi).$$

On remarque alors que l'intégrande du dernier terme est une fonction bornée car la trace d'un endomorphisme est bornée par sa norme au carré et la projection est également bornée uniformément. Le dernier terme tend donc vers zéro lorsque ε tend vers zéro ce qui finit la démonstration. \square

Nous sommes maintenant armés pour montrer que le supremum des degrés est atteint.

Proposition 2.13. *Pour tout p , il existe un sous-faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ tel que*

$$\deg \mathcal{F} = \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}_p} \deg \mathcal{G}$$

Démonstration. Notons M le supremum des degrés (il existe de part la proposition 2.2). Soit \mathcal{F}_m une suite de sous-faisceaux de \mathcal{A}_p telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \deg \mathcal{F}_m = M$$

et soit c un nombre réel tel que $\deg \mathcal{F}_m \geq c$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On notera π_m le fibré holomorphe faible associé à \mathcal{F}_m .

Commençons par borner uniformément les projections π_m en norme L^2_1 :

Lemme 2.14. *Il existe une constante C_2 telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$*

$$\|\pi_m\|_{L^2_1} \leq C_2.$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué, les projecteurs π_m sont uniformément bornés en norme L^2 car leur rang est clairement borné. Le problème est donc de borner la norme L^2 de leur dérivée uniformément.

Pour tout m , on peut décomposer le fibré vectoriel E en dehors du sous-ensemble singulier V_m de \mathcal{F}_m . On obtient $E = F_m \oplus F_m^\perp$ et on notera comme d'habitude a_m^{10} la seconde forme fondamentale associée à la décomposition. Comme on l'a vu :

$$d_A(\pi_m) = \begin{pmatrix} 0 & a_m^{01} \\ a_m^{10} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Rappelons nous alors l'inégalité (2.3) et la borne inférieure sur le degré :

$$c \leq \deg(\mathcal{F}_m) \leq \Phi - \frac{(n-1)!}{2\pi} \int_{X \setminus V_m} |a_m^{10}|^2 \cdot \text{vol}_g$$

Comme nous venons de le montrer, la projection π_m est dans l'espace de Sobolev $L^2_1(\text{End}E)$, et de plus, sa dérivée Sobolev coïncide avec $d_A(\pi_m)$. Il est donc possible de calculer sa norme en intégrant en dehors de l'ensemble V_m . On a :

$$\|a_m^{10}\|_{L^2}^2 \leq C_1 = \frac{2\pi}{(n-1)!} (\Phi - c).$$

En utilisant cette inégalité et (2.5) on voit que $d_A(\pi_m)$ est uniformément borné dans L^2 ce qui finit la preuve. \square

On se retrouve avec des données classiques d'analyse : la suite $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Hilbert $L^2_1(\text{End}E)$, donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on peut supposer qu'elle converge faiblement dans $L^2_1(\text{End}E)$ vers un élément π . Le plongement de $L^2_1(\text{End}E)$ dans $L^2(\text{End}E)$ étant compact, on peut supposer quitte à extraire encore une sous-suite que la convergence est forte en norme L^2 . Il reste à montrer que π est bien un sous-fibré holomorphe faible.

On a certainement $\pi = \pi^* = \pi^2$ puisque c'est vérifié par tous les π_m et que la convergence $\pi_m^2 \rightarrow \pi^2$ est forte dans L^2 . De plus, $\text{Id} - \pi_m$ converge fortement dans L^2 vers $\text{Id} - \pi$ et la suite $(\bar{\partial}(\pi_m))_m$ converge faiblement vers $\bar{\partial}(\pi)$ et est uniformément bornée en norme L^2 . Un résultat classique d'analyse nous permet de conclure que $(\text{Id} - \pi_m)\bar{\partial}(\pi_m) = 0$ converge au sens des distributions vers $(\text{Id} - \pi)\bar{\partial}(\pi)$ qui vaut donc également zéro. En effet, notons pour simplifier $a_m = (\text{Id} - \pi_m)$, $b_m = \bar{\partial}(\pi_m)$, $a = (\text{Id} - \pi)$ et $b = \bar{\partial}(\pi)$. Soit φ une forme test élément de $A^{2n-1}(\text{End}E)$, considérons l'expression

$$\Delta_m = \int_X \text{tr}([a_m \circ b_m - a \circ b] \wedge \varphi)$$

où \wedge désigne l'opération obtenue sur les espaces $A^k(\text{End}E)$ en multipliant le produit extérieur des formes et la composition des endomorphismes. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \int_X \text{tr}([a_m \circ b_m - a \circ b_m + a \circ b_m - a \circ b] \wedge \varphi) \\ &= \int_X \text{tr}([(a_m - a) \circ b_m] \wedge \varphi) + \int_X \text{tr}([a \circ (b_m - b)] \wedge \varphi) \end{aligned}$$

Or, dans le premier terme, $(a_m - a)$ converge fortement vers zéro dans L^2 alors que le terme b_m reste borné par hypothèse, donc le tout tend vers zéro. Dans le second terme, on applique la convergence faible de $(b_m - b)$.

La limite π est donc bien un sous-fibré holomorphe faible.

Appelons \mathcal{F} le sous-faisceau cohérent de \mathcal{A}_p associé et montrons que $\text{deg}\mathcal{F} = M$. En utilisant les calculs précédents, on a :

$$\text{deg}\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi n} \int_X \text{tr}(\pi \circ R_E \circ \pi) \wedge \omega_g^{n-1} - \frac{(n-1)!}{2\pi} \|a^{10}\|_{L^2}^2.$$

Observons maintenant deux faits :

- La courbure R_E est une section C^∞ de $\wedge^2 T^*X \otimes \text{End}E$ de sorte que la convergence de π_m dans L^2 implique celle de $\text{tr}(\pi_m \circ R_E \circ \pi_m)$ vers $\text{tr}(\pi \circ R_E \circ \pi)$ dans L^1 . On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \text{tr}(\pi_m \circ R_E \circ \pi_m) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_X \text{tr}(\pi \circ R_E \circ \pi) \wedge \omega_g^{n-1}.$$

- D'autre part, on utilise la propriété de semi-continuité de la norme d'un espace de Hilbert pour la topologie faible :

Lemme 2.15. *Si $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers b alors*

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|b_m\| \geq \|b\|$$

.

Démonstration. En effet

$$\langle b, b \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle b, b_m \rangle \text{ puisqu'il y a convergence faible}$$

et pour tout m ,

$$| \langle b, b_m \rangle | \leq \|b\| \|b_m\|$$

ce qui implique en passant à la limite inférieure

$$\lim_{m \rightarrow \infty} | \langle b, b_m \rangle | \leq \|b\| \liminf_{m \rightarrow \infty} \|b_m\|.$$

□

Comme a_m^{10} converge faiblement vers a^{10} , on obtient :

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|a_m^{10}\|_{L^2} \geq \|a^{10}\|_{L^2}.$$

De ces deux faits, on déduit que $\deg \mathcal{F} \geq \limsup \deg \mathcal{F}_m \geq M$ car $\deg \mathcal{F}_m$ converge vers M par hypothèse, le terme contenant la courbure converge et $-\|a^{10}\|^2 \geq -\liminf \|a_m^{10}\|^2$. Mais alors, par définition on ne peut qu'avoir l'égalité $\deg \mathcal{F} = M = \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}_p} \deg \mathcal{G}$ ce qui prouve le résultat énoncé. □

Corollaire 2.16. *Soit E un fibré vectoriel sur (X, g) . Il existe un sous-faisceau cohérent de E qui est de degré maximal.*

2.3 La filtration de Harder-Narasimhan

Rappelons ici la définition de la filtration de Harder-Narasimhan.

Définition 2.17 (Filtration de Harder-Narasimhan). Soit (X, g) une variété complexe compacte de dimension n munie d'une métrique de Gauduchon g . Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur X . On appelle *Filtration de Harder-Narasimhan* de \mathcal{E} (en abrégé FHN de \mathcal{E}) tout drapeau :

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1} \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

de sous-faisceaux de \mathcal{E} vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est g -semi-stable, $1 \leq i \leq s$,
2. $\mu(\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j) < \mu(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1})$ avec $1 \leq j \leq s-1$.

En fait, $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ est le sous-faisceau g -semi-stable maximal de $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq s$.

Le théorème principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 2.18. *Soit (X, g) une variété complexe compacte de dimension n munie d'une métrique de Gauduchon g . Soit E un fibré vectoriel de rang r sur X . Alors, E possède une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. Nous allons construire le drapeau de la filtration par récurrence. Si E est déjà lui-même semi-stable, il n'y a rien à prouver. On peut donc supposer que E n'est pas semi-stable. Le premier pas de la récurrence est basé sur le lemme suivant :

Lemme 2.19. *Il existe un unique sous-faisceau \mathcal{E}_1 de E tel que le quotient E/\mathcal{E}_1 soit sans torsion, et tel que pour tout sous-faisceau \mathcal{F} de E ,*

1. $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$ i.e. \mathcal{E}_1 est de pente maximale,
2. Si $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1)$ alors $\text{rang}(\mathcal{F}) \leq \text{rang}(\mathcal{E}_1)$.

Il s'en suit que \mathcal{E}_1 est g -semi-stable.

Preuve du lemme 2.19. L'existence résulte de la proposition 2.2. En effet, elle affirme que le degré et donc la pente de tout sous-faisceau est borné. Prenons alors une suite de sous-faisceaux dont la pente converge vers le supremum $\sup_{\mathcal{F}} \mu(\mathcal{F})$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que tous les faisceaux de la suite ont le même rang p . On applique la proposition 2.13 : il existe un sous-faisceau \mathcal{F} de quotient sans torsion tel que $\mu(\mathcal{F})$ est maximal parmi tous les sous-faisceaux. Parmi tous les faisceaux avec cette propriété, certains sont de rang maximal. En prenant l'un d'eux on obtient le sous-faisceau désiré. Il vérifie bien évidemment (1) et (2). Remarquons que la condition de semi-stabilité est satisfaite naturellement.

La preuve de l'unicité est la même que celle de [Kob87] lemme 7.17. Soit \mathcal{E}'_1 un autre sous-faisceau vérifiant 1) et 2). Soit $p : E \rightarrow E/\mathcal{E}'_1$ la projection canonique. On peut toujours supposer que $p(\mathcal{E}_1) \neq 0$ et on peut donc définir un sous-faisceau \mathcal{F} de \mathcal{E}_1 par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow p(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0.$$

Comme \mathcal{E}_1 est g -semi-stable, $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_1) \leq \mu(p(\mathcal{E}_1))$. Cela découle en effet du lemme classique suivant sur les pentes :

Lemme 2.20 ([Kob87] lemme 7.3). *Soit*

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents. Alors on a la formule :

$$\text{rang}(\mathcal{S})[\mu(\mathcal{T}) - \mu(\mathcal{S})] + \text{rang}(\mathcal{Q})[\mu(\mathcal{T}) - \mu(\mathcal{Q})] = 0.$$

Démonstration. On calcule les fibrés déterminants : $\det \mathcal{T} = \det \mathcal{S} \otimes \det \mathcal{Q}$ et $\text{rang} \mathcal{T} = \text{rang} \mathcal{S} + \text{rang} \mathcal{Q}$. Donc $\deg \mathcal{T} = \deg \mathcal{S} + \deg \mathcal{Q}$. D'où la formule souhaitée. \square

Utilisons alors l'autre suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}'_1 \longrightarrow p^{-1}(p(\mathcal{E}_1)) \longrightarrow p(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0$$

D'après le lemme précédent, on a la relation suivante entre les pentes :

$$\text{rang}(\mathcal{E}'_1)[\mu(p^{-1}(p(\mathcal{E}_1))) - \mu(\mathcal{E}'_1)] + \text{rang}(p(\mathcal{E}_1))[\mu(p^{-1}(p(\mathcal{E}_1))) - \mu(p(\mathcal{E}_1))] = 0$$

Rappelons nous alors que $p(\mathcal{E}_1)$ est sans torsion comme sous-faisceau du faisceau sans torsion E/\mathcal{E}'_1 ; étant non nul son rang est donc supérieure ou égal à un. On obtient donc : $\text{rang}[p^{-1}(p(\mathcal{E}_1))] > \text{rang}[\mathcal{E}'_1]$ et en utilisant les propriétés 1) et 2), $\mu(p^{-1}(p(\mathcal{E}_1))) < \mu(\mathcal{E}'_1)$. Cela implique $\mu(p(\mathcal{E}_1)) < \mu(\mathcal{E}'_1) = \mu(\mathcal{E}_1)$ qui est en contradiction avec les hypothèses.

Remarque 2.21. Nous ne nous sommes pas servis du fait que E est un fibré vectoriel au cours de la preuve de l'unicité, elle reste par conséquent vraie pour n'importe quel faisceau sans torsion. \square

En appliquant le lemme, on obtient le premier sous-faisceau \mathcal{E}_1 de la filtration (remarquons que par construction $\mu(\mathcal{E}_1) > \mu(E)$).

Si le faisceau sans torsion E/\mathcal{E}_1 est semi-stable, on a fini. Sinon, on doit trouver un sous-faisceau semi-stable maximal $\overline{\mathcal{E}}_2$ de E/\mathcal{E}_1 . On aimerait donc appliquer le lemme 2.19 au faisceau E/\mathcal{E}_1 . Pour ce faire, il nous faut démontrer l'analogie de la proposition 2.13. Observons qu'il y a une correspondance bijective entre les sous-faisceaux $\overline{\mathcal{F}}$ de E/\mathcal{E}_1 de quotient sans torsion et les sous-faisceaux \mathcal{F} de E tels que E/\mathcal{F} soit sans torsion et $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$. Les pentes de $\overline{\mathcal{F}}$ et de \mathcal{F} sont reliées par la relation $\mu(\overline{\mathcal{F}}) = \frac{r\mu(\mathcal{F}) - r_1\mu(\mathcal{E}_1)}{r - r_1}$ où r (resp. r_1) est le rang de \mathcal{F} (resp. \mathcal{E}_1). En appliquant le raisonnement précédent à l'ensemble

$$\mathcal{A}_{p, \mathcal{E}_1} = \{\mathcal{F} \subset E \mid \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}, E/\mathcal{F} \text{ est sans torsion et } \text{rang } \mathcal{F} = p\},$$

on voit que l'application degré est bornée sur $\mathcal{A}_{p, \mathcal{E}_1}$ pour tout p et donc sur les sous-faisceaux de E/\mathcal{E}_1 .

Soit $\overline{\mathcal{F}}_n$ une suite de sous-faisceaux de E/\mathcal{E}_1 dont le degré converge vers le supremum et supposons comme précédemment que le rang des faisceaux est constant. Notons \mathcal{F}_n la suite correspondante dans $\mathcal{A}_{p, \mathcal{E}_1}$, alors $(\deg(\mathcal{F}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le supremum des degrés sur l'ensemble $\mathcal{A}_{p, \mathcal{E}_1}$.

La méthode de 2.13 nous donne un sous-faisceau \mathcal{G} de E de quotient sans torsion qui est la limite des \mathcal{F}_n au sens des sous-fibrés holomorphes faibles. Pour être tout à fait complet on doit vérifier que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{G}$. Pour ce faire, on a besoin d'une caractérisation des sections d'un faisceau associé à un fibré holomorphe faible $\pi \in L_1^2(\text{End}E)$. Soit donc \mathcal{F} le faisceau construit à partir de π . Rappelons que \mathcal{F} est un sous-fibré en dehors d'un ensemble analytique V de codimension deux et comme précédemment, on notera $F = \mathcal{F}|_{X \setminus V}$ cette partie sous-fibré.

Lemme 2.22. *Soit U un ouvert de X . Soit s une section holomorphe locale de E sur U . Alors, les solutions de l'équation*

$$\pi(s) = s \text{ (faiblement)} \tag{2.6}$$

sont exactement les sections locales de \mathcal{F} sur U .

Démonstration. Soit s une section holomorphe locale de $E|_U$ qui est une section de $\mathcal{F}|_U$. En dehors du sous-ensemble V , π est un projecteur C^∞ et \mathcal{F} un sous-fibré de E . On a donc clairement $\pi(s) = s$ sur $U \setminus V$. Mais alors, $\pi(s) = s$ presque partout et (2.6) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que s soit une solution de (2.6). Alors, s est une section de $\mathcal{F}|_U$ là où π est lisse (c'est-à-dire en dehors de V). D'autre part, \mathcal{F} est par construction un faisceau réflexif et par conséquent normal, donc la section

$s|_{U \setminus V}$ admet une unique extension S (cf. [Kob87] Chap V 5.21 pour les propriétés usuelles des faisceaux réflexifs) qui est une section de $\mathcal{F}|_U$. En tant que sections holomorphes de $E|_U$, les sections s et S coïncident presque partout et donc sont égales. Autrement dit, s est une section de \mathcal{F} au dessus de U . \square

Notons π_1 et π_2 les projecteurs L_1^2 associés respectivement à \mathcal{E}_1 et \mathcal{G} . Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{A}_p et observons que la condition $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$ implique que $(\text{Id} - \pi) \circ \pi_1 = 0$ (dans L^1) où π est la projection associée à \mathcal{F} , en effet c'est vrai presque partout : là où les projections sont régulières. Rappelons maintenant que la convergence que l'on a utilisée en 2.13 est forte en norme L^2 de sorte que l'équation précédente est encore vérifiée à la limite. C'est-à-dire $(\text{Id} - \pi_2) \circ \pi_1 = 0$. Soit donc U un ouvert et s une section locale de \mathcal{E}_1 au-dessus de U . En utilisant cette condition et le lemme précédent, on obtient :

$$\pi_2(s) = \pi_2\pi_1(s) = \pi_2\pi_1(s) + (\text{Id} - \pi_2)\pi_1(s) = \text{Id}(\pi_1(s)) = s.$$

Cela implique que s est une section locale du faisceau \mathcal{G} associé à π_2 . On a donc démontré que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{G}$ de sorte que la proposition 2.13 est démontrée pour E/\mathcal{E}_1 .

Le lemme 2.19 nous donne alors un sous-faisceau maximal \mathcal{E}_2 appartenant à un certain $\mathcal{A}_{p, \mathcal{E}_1}$ tel que $\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1$ est g -semi-stable et vérifie (1) et (2). Par construction, $\text{rang}(\mathcal{E}_2) > \text{rang}(\mathcal{E}_1)$ de sorte que $\mu(\mathcal{E}_2) < \mu(\mathcal{E}_1)$. On a donc bien $\mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) < \mu(\mathcal{E}_1)$ d'après la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$ et le lemme 2.20. L'unicité est démontré exactement comme dans la preuve du lemme 2.19 (voir la remarque finale 2.21).

Les étapes suivantes se démontrent exactement de la même manière. \square

Remarque 2.23. On démontre ici complètement le théorème pour les fibrés vectoriels. En fait, la méthode permettant de contrôler l'inclusion dans un autre faisceau va nous servir de manière essentielle pour trouver le sous-faisceau maximal dans le cas réflexif, c'est pourquoi nous l'avons développé ici.

Remarque 2.24. Soit \mathcal{F} un sous-faisceau donné de E , d'après ce qui précède, la condition $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est équivalente à $(\text{Id} - \pi_1) \circ \pi = 0$ où π_1 (resp. π) est la projection associée à \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}). C'est une condition fermée pour la convergence au sens des fibrés holomorphes faibles. En utilisant le raisonnement précédent, on obtient donc :

Corollaire 2.25. *Soit E un fibré vectoriel sur (X, g) . Si \mathcal{F} est un sous-faisceau cohérent de E ou un quotient sans torsion de E (c'est-à-dire $\mathcal{F} = E/\mathcal{G}$) alors \mathcal{F} admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Il est possible de raffiner un peu la filtration en décomposant les facteurs semi-stables en drapeaux dont les facteurs sont stables. Plus précisément :

Proposition 2.26. *Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion semi-stable sur (X, g) . Alors, \mathcal{E} possède un unique drapeau (à isomorphisme près)*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1} \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

avec

1. $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1})$, $1 \leq j \leq s$,
2. $\mathcal{E}_j/\mathcal{E}_{j-1}$ est stable, $1 \leq j \leq s$.

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas algébrique, voir par exemple [Sha77]. On fait une démonstration par récurrence sur le rang de \mathcal{E} : on considère un sous-faisceau propre $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ qui est de même pente que \mathcal{E} . S'il n'en existe pas, \mathcal{E} est déjà stable et il n'y a rien à montrer. Sinon on prend \mathcal{G} de rang maximal avec cette propriété. Alors, \mathcal{G} est semi-stable avec $\text{rang}(\mathcal{G}) < \text{rang}(\mathcal{E})$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Il reste alors juste à montrer que \mathcal{E}/\mathcal{G} est stable. Soit $\mathcal{F}/\mathcal{G} \subset \mathcal{E}/\mathcal{G}$ un sous-faisceau propre. Puisque $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$ et donc $\mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{E}/\mathcal{F})$. D'autre part $\mu(\mathcal{E}/\mathcal{G}) = \mu(\mathcal{E})$ ce qui permet de conclure que $\mu(\mathcal{F}/\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{E}/\mathcal{G})$. \square

Le drapeau ainsi obtenu en développant les facteurs d'une FHN est appelé une *Filtration de Harder-Narasimhan complète*.

2.4 Autres notions de stabilité

On trouve dans la littérature de nombreuses autres notions de stabilité, toutes reliées à des problèmes de géométrie différentielle (du type condition de Hermite-Einstein). Il est possible d'adapter les méthodes décrites ici pour obtenir de manière analogue une filtration de Harder-Narasimhan dans certains cas.

Une de ces notions est celle de fibré de Higgs utilisée par Simpson ([Sim88]) pour décrire les variations des structures de Hodge. Un fibré de Higgs sur une variété complexe compacte X est une paire (E, θ) où E est un fibré vectoriel complexe et $\theta : E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1$ est appelé un champ de Higgs. On suppose usuellement que la condition d'intégrabilité $\theta \wedge \theta = 0$ est vérifiée. Pour définir la notion de stabilité pour un fibré de Higgs, on considère les sous-faisceaux de Higgs, c'est-à-dire les sous-faisceaux \mathcal{F} de E qui sont préservés par θ .

Définition 2.27. Soit (X, g) une variété compacte munie d'une métrique de Gauduchon. Le fibré de Higgs (E, θ) est g -stable (resp. g -semi-stable) si quel que soit le sous-faisceau cohérent \mathcal{F} , invariant par θ , avec $0 < \text{rang}\mathcal{F} < \text{rang}E$, on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(E)$ (resp. $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E)$).

Cette notion de stabilité est reliée elle aussi à un problème de géométrie différentielle du type Hermite-Einstein. La condition à vérifier est la même que dans le cas standard mais on considère la connexion induite par la métrique et l'application θ au lieu de la connexion de Chern (voir [Sim88]).

On peut redéfinir dans ce cadre une notion de filtration de Harder-Narasimhan

Définition 2.28. Soit (X, g, E, θ) un fibré de Higgs. On appelle filtration de Harder-Narasimhan de E tout drapeau :

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{s-1} \subset \mathcal{E}_s = E$$

de sous-faisceaux de E vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. chaque \mathcal{E}_i est invariant par θ .
2. \mathcal{E}_i est le sous-faisceau de E invariant par θ , contenant strictement \mathcal{E}_{i-1} et de pente maximale parmi les sous-faisceaux vérifiant cette propriété.

Alors, \mathcal{E}_1 est un sous-faisceau stable par θ et g -semi-stable, il est maximal avec ces propriétés.

Le théorème 2.18 a un analogue dans cette situation :

Théorème 2.29. *Soit (X, g) une variété compacte munie d'une métrique de Gauduchon g et (E, θ) un fibré de Higgs sur X . Alors, il admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas des fibrés sans structure de Higgs, simplement il faut vérifier que les sous-faisceaux maximaux que l'on construit sont bien stables par θ . Mais comme on l'a vu, la condition de stabilité par θ peut être écrite en terme d'annulation de projecteurs et elle passe à la limite lors de la convergence des sous-fibrés holomorphes faibles. \square

Dans un article récent ([Bra95]), S. B. Bradlow donne une correspondance plus profonde entre la notion de filtration de Harder-Narasimhan et celle d'équation de Hermite-Einstein (cf. les généralités). Son idée est que la filtration de Harder-Narasimhan décrit de manière algébrique le comportement d'un fibré non semi-stable. Ce comportement peut-être décrit par une méthode de géométrie différentielle à l'aide de résultats dus à Guan ([Gua92]) :

Théorème 2.30 ([Gua92]). *Soit E un fibré vectoriel sur X . Soit m (respectivement m') un nombre réel et supposons que E admette une métrique h telle que*

$$\frac{i}{2\pi}\Lambda_g R_{E,h} \leq m\text{Id} \quad (\text{resp. } \frac{i}{2\pi}\Lambda_g R_{E,h} \geq m'\text{Id})$$

c'est-à-dire telle que $\frac{i}{2\pi}\Lambda_g R_{E,h} - m\text{Id}$ (resp. $m'\text{Id} - \frac{i}{2\pi}\Lambda_g R_{E,h}$) est un endomorphisme semi-défini négatif. Alors

$$\mu(\mathcal{F}) \leq m \quad (\text{resp. } \mu(E/\mathcal{F}) \geq m')$$

pour tous les sous-faisceaux $\mathcal{F} \subset E$.

Suivant cette idée Bradlow s'intéresse à l'existence de solutions pour des inéquations du type

$$\frac{i}{2\pi}\Lambda_g R_{E,h} \leq m\text{Id}$$

pour un certain choix du nombre réel m . Les "bonnes" valeurs de m pour lesquelles il y a des solutions sont reliées aux pentes des différents sous-faisceaux de la filtration de Harder-Narasimhan. Pour démontrer ces résultats dans un cadre général (variété X de dimension quelconque), Bradlow se sert d'une autre notion de stabilité déjà utilisée dans son article [Bra91] qui est celle de λ -stabilité :

Définition 2.31. Étant donné un nombre réel λ , on dit qu'une paire (E, φ) composée d'un fibré vectoriel holomorphe E et d'une section $\varphi \in H^0(X, E)$ est λ -stable (resp. λ -semi-stable) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mu(\mathcal{F}) < \lambda$ (resp. $\leq \lambda$) pour tout sous-faisceau holomorphe $\mathcal{F} \subset E$;
2. $\mu(E/\mathcal{G}) > \lambda$ (resp. $\geq \lambda$) pour tout sous-faisceau holomorphe propre $\mathcal{G} \subset E$ contenant la section φ .

Comme les autres notions rencontrées, celle-ci est reliée à un problème de géométrie différentielle à travers le théorème suivant :

Théorème 2.32 ([Bra91]). *Supposons que la paire (E, φ) soit λ -stable pour une certaine valeur de λ . Alors l'équation de Vortex*

$$\frac{i}{2\pi} \Lambda_g R_{E,h} + \frac{1}{2\pi} \varphi \otimes \varphi^* = \lambda \text{Id}$$

a une unique solution h .

Réciproquement, supposons que pour une certaine valeur λ il existe une métrique hermitienne h sur E vérifiant l'équation ci-dessus. Alors E scinde holomorphiquement en $E = E_\varphi \oplus E_s$ où

1. E_s est non vide et somme directe de fibrés stables de même pente ;
2. E_φ contient la section φ et (E_φ, φ) est λ -stable.

Comme pour les autres exemples de stabilités, il semble naturel de vouloir définir ici une filtration de Harder-Narasimhan reliée à ce problème. C'est toutefois beaucoup plus difficile ici car il paraît ne pas y avoir de bonne notion de "sous-faisceau semi-stable maximal". En effet si

$$\sup_{\mathcal{F} \subset E} \mu(\mathcal{F}) > \inf_{\varphi \subset \mathcal{G} \subset E} \mu(E/\mathcal{G})$$

alors le fibré est non semi-stable pour toute valeur du paramètre λ et les méthodes utilisées ici ne permettent pas de conclure en l'existence d'un sous-faisceau qui réaliserait la condition de stabilité pour une certaine valeur de λ .

Il serait pourtant intéressant de pouvoir associer à toute notion de stabilité une telle filtration.

Chapitre 3

Le cas général

3.1 Les faisceaux réflexifs

La méthode précédemment développée utilise de manière essentielle des métriques définies sur le fibré considéré et des prolongements de sections définies en dehors de la codimension 2. Il est donc naturel d'essayer d'étendre la théorie tout d'abord pour les faisceaux réflexifs.

Tout faisceau réflexif étant localement libre en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins trois, on pourrait munir sa partie localement libre d'une métrique hermitienne pour appliquer directement les méthodes précédentes. Mais, ne travaillant plus sur une base compacte, on tombe sur plusieurs problèmes de convergence, en particulier celui de l'intégrabilité de la courbure moyenne qui nous sert à majorer le degré. Il est encore possible dans le cas kählerien de munir ce faisceau d'une métrique *admissible* avec de "bonnes" propriétés de ce point de vue. Ces métriques sont décrites dans un article de S. Bando et Y-T. Siu [BS94], mais uniquement dans le cas kählerien : elles vérifient que le tenseur de courbure est L^2 et que leur courbure moyenne est bornée uniformément. Si l'on suit cette voie, il reste un problème : celui d'étendre les sous-faisceaux obtenus par cette méthode (et donc définis sur le complémentaire d'un ensemble analytique) sur toute la variété. Pour éviter ces écueils, nous allons plonger localement notre faisceau réflexif dans un fibré, travailler dans ces cartes locales puis, recoller les morceaux.

Soit donc \mathcal{E} un faisceau réflexif de rang r sur (X, g) . Prenons un recouvrement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de X et des résolutions locales $\cdots \rightarrow E_{1,i}^* \rightarrow E_{0,i}^* \rightarrow \mathcal{E}^*|_{U_i} \rightarrow 0$ de \mathcal{E}^* par des fibrés vectoriels holomorphes qui vérifient la propriété de commutativité suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{1,i}^* & \longrightarrow & E_{0,i}^* & \xrightarrow{\varphi_i^*} & \mathcal{E}^*|_{U_i \cap U_j} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varphi_{ji}^* \uparrow & & \parallel & & \\
 E_{1,j}^* & \longrightarrow & E_{0,j}^* & \xrightarrow{\varphi_j^*} & \mathcal{E}^*|_{U_i \cap U_j} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où φ_{ji}^* est un isomorphisme vérifiant $\varphi_{ii}^* = \text{Id}$. En dualisant les suites exactes, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\varphi_i} & E_{0,i} & \xrightarrow{\psi_i} & E_{1,i} \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_{ji} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\varphi_j} & E_{0,j} & \xrightarrow{\psi_j} & E_{1,j} \end{array}$$

On voit, localement, \mathcal{E} comme un sous-faisceau d'un fibré vectoriel holomorphe $E_{0,i}$. Le faisceau réflexif \mathcal{E} est localement libre en dehors d'un ensemble analytique de codimension trois et les φ_i réalisent, en dehors d'un sous-ensemble analytique S de codimension au moins deux, un plongement de $E = \mathcal{E}|_{(X \setminus S) \cap U_i}$ dans $E_{0,i}$, en tant que sous-fibré holomorphe. En effet, on a l'isomorphisme $\psi_i(E_{0,i}) \simeq E_{0,i}/\mathcal{E}|_{U_i}$ et on en déduit que le faisceau $E_{0,i}/\mathcal{E}|_{U_i}$ est comme sous-faisceau de $E_{1,i}$ un faisceau sans torsion, son ensemble de singularité est donc de codimension au moins deux.

Prenons une métrique hermitienne \tilde{h}_i quelconque sur $E_{0,i}$ et une partition de l'unité $\{\rho_i\}_{i \in I}$ compatible avec le recouvrement $\{U_i\}$. Soit $h_i = \sum_j \rho_j \varphi_{ji}^* \tilde{h}_j$. Alors, les métriques images réciproques $\varphi_i^* h_i$ coïncident et définissent une même métrique hermitienne h sur \mathcal{E} en dehors de S .

Comme dans le cas localement libre, on peut se restreindre à étudier les sous-faisceaux saturés de \mathcal{E} (cf. prop 1.11) et on notera \mathcal{A}_p l'ensemble des sous-faisceaux de \mathcal{E} de rang p dont le quotient \mathcal{E}/\mathcal{F} est sans torsion.

Suivant les notations de Kobayashi, on notera l'ensemble de singularités d'un faisceau \mathcal{F} , c'est-à-dire le lieu où il n'est pas localement libre, par $S_{n-1}(\mathcal{F})$. Pour \mathcal{F} dans \mathcal{A}_p , les ensembles de singularités $S_{n-1}(\mathcal{F})$ et $S_{n-1}(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ sont de codimension 2. Dans toute la suite, on notera en caractères droits la restriction des sous-faisceaux de \mathcal{E} là où ce sont de vrais sous-fibrés des $E_{0,i}$: c'est à dire que si $V = S_{n-1}(\mathcal{F}) \cup S_{n-1}(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \cup S$, on note $F = \mathcal{F}|_{X \setminus V}$, et on remarquera que V est toujours de codimension au moins 2 (par ensemble singulier de \mathcal{F} on se référera dans toute la suite à cet ensemble V). Pour simplifier, on notera encore h la métrique induite sur F par celle de E . On peut définir sur $X \setminus V$ la forme $c_1(F, h)$, trace de la courbure de la connexion de Chern associée à h . En notant \mathcal{F}_i (resp. F_i) le plongement de $\varphi_i(\mathcal{F})$ (resp. $\varphi_i(F)$) dans $E_{0,i}$, on remarquera que sur $U_i \setminus (V \cap U_i)$, $c_1(F, h) = c_1(F_i, h_i)$ par construction de h .

3.1.1 Le degré d'un sous-faisceau

On considère dans cette section un sous-faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ de \mathcal{E} de rang p et on garde les notations introduites juste au-dessus. On a une formule tout à fait analogue au cas localement libre :

Proposition 3.1 (Formule de Chern-Weil).

$$\deg(\mathcal{F}) = \int_{X \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1} \quad (3.1)$$

c'est à dire que le degré peut se calculer avec la "partie sous-fibré" de \mathcal{F} .

Démonstration. On s'inspire du cas localement libre en utilisant les plongements locaux de \mathcal{E} dans $E_{0,i}$. On considère le fibré en droites $\det \mathcal{F}$. Le morphisme injectif de faisceaux $l : \det \mathcal{F} \hookrightarrow (\wedge^p \mathcal{E})^{**}$ induit sur chaque ouvert U_i des morphismes de faisceaux $l_i : \det \mathcal{F} \hookrightarrow \wedge^p E_{0,i}$. Soit α une section holomorphe locale de $\det \mathcal{F}$, posons alors

$$W_i = \{x \in U_i \mid l_i(\alpha)(x) = 0\}.$$

Sur $U_i \cap U_j$, $l_j(\alpha)(x) = (\varphi_j^{\wedge p} \circ l)(\alpha)(x) = (\varphi_{ji}^{\wedge p} \circ \varphi_i^{\wedge p} \circ l)(\alpha)(x)$ et puisque φ_{ji} est un isomorphisme, $W_i|_{U_j} = W_j|_{U_i}$. Appelons W le sous-espace analytique obtenu en recollant les W_i . Il est de codimension supérieure ou égale à deux car $W \subset V$.

On suit maintenant la démonstration de la proposition 2.4. Soit u la métrique obtenue par recollement des $l_i^*(\wedge^p h_i)$. Alors, u définit une structure hermitienne naturelle sur $\det \mathcal{F}|_{X \setminus W}$ induite par les métriques h_i , et cette métrique dégénère sur W . Soit \bar{u} une structure hermitienne sur $\det \mathcal{F}$ au-dessus de X tout entier. On démontre exactement comme dans le cas des fibrés le lemme suivant :

Lemme 3.2.

$$\int_X c_1(\det \mathcal{F}, \bar{u}) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{X \setminus W} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1}.$$

En effet, la preuve n'utilise essentiellement que la codimension de W et le fait que g est une métrique de Gauduchon.

On déduit de ce lemme que

$$\deg \mathcal{F} = \int_{X \setminus V} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{X \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. \square

3.1.2 Borne sur le degré

Proposition 3.3.

1. Le degré est majoré sur tous les sous-faisceaux cohérents sans torsion de \mathcal{E}
2. Soit c un réel fixé et $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ un sous-faisceau de \mathcal{E} vérifiant $\deg(\mathcal{F}) \geq c$. Alors, la forme $c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1}$ définie sur $X \setminus V$ est intégrable, on entend par là que sa fonction de densité est L^1 . De plus la borne L^1 est indépendante du sous-faisceau \mathcal{F} considéré et ne dépend que de c et de la résolution choisie.

Démonstration.

1. Dans toute la suite, on se fixe un sous-recouvrement $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ de $\{U_i\}$ tel que V_i soit relativement compact dans U_i . On notera encore φ_i les restrictions

à V_i des plongements locaux de \mathcal{E} . Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ un sous-faisceau réflexif de \mathcal{E} . Alors sur $V_i \setminus (V_i \cap V)$,

$$c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1} = c_1(F_i, h_i) \wedge \omega_g^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \text{tr}(K_{F_i}) \cdot \omega_g^n,$$

où K_{F_i} désigne la courbure moyenne de la connexion de Chern. Notons alors comme d'habitude π_i (resp. a_i^{10}) le projecteur hermitien de $(E_{0,i}, h_i)$ sur F_i (resp. la seconde forme fondamentale associée à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow E_{0,i} \rightarrow E_{0,i}/\mathcal{F}_i \rightarrow 0$). Ces deux objets sont définis presque partout sur U_i et C^∞ sur $U_i \setminus (U_i \cap V)$. On a alors la relation entre les courbures :

$$\text{tr}(K_{F_i}) = \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) - |a_i^{10}|^2.$$

Or, la courbure moyenne $K_{E_{0,i}}$ est une section C^∞ du fibré $\text{End}E_{0,i}$ sur tout U_i . L'endomorphisme π_i étant un projecteur hermitien, on peut borner, sur tous les compacts \bar{V}_i , le premier terme du membre de droite :

$$|\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i)| \leq \sum_{l,k} |K_{E_{0,i}^l}| \leq \sup_{\bar{V}_i} \sum_{l,k} |K_{E_{0,i}^l}| \leq M$$

où M est une constante indépendante de π_i (donc de \mathcal{F}) et de i (le nombre des V_i est fini). Par conséquent, la fonction $\text{tr}(K_F)$ est majorée uniformément sur $X \setminus V$ indépendamment de \mathcal{F} et par conséquent le degré $\text{deg}(\mathcal{F})$ aussi ce qui montre le premier point.

2. Supposons qu'il existe un certain réel c tel que

$$\int_{X \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \int_{X \setminus V} \text{tr}(K_F) \cdot \omega_g^n \geq c$$

En combinant cette hypothèse avec ce que l'on vient de démontrer, on voit que la fonction $\text{tr}(K_F)$ est intégrable sur $X \setminus V$. En effet, en notant f^+ (resp. f^-) la partie positive (resp. négative) d'une fonction f , on a $\text{tr}(K_F)^+ \leq \text{tr}(K_{E_{0,i}})^+ \leq M$ sur \bar{V}_i , ce qui implique que la partie positive de la fonction $\text{tr}(K_F)$ est intégrable sur X . Par suite, puisque l'intégrale impropre $\int_X \text{tr}(K_F) \cdot \omega_g^n$ converge, on en déduit que $\int_X \text{tr}(K_F)^- \cdot \omega_g^n < +\infty$ ce qui démontre le fait que $\text{tr}(K_F)$ est L^1 . De plus la borne pour la norme L^1 sur X s'exprime en fonction de c et M et est donc indépendante de \mathcal{F} . \square

3.1.3 Sous-faisceau maximal

Montrons l'existence d'un sous-faisceau de degré maximal.

Proposition 3.4. *Pour tout $0 < p < \text{rang}\mathcal{E}$, il existe un sous faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ tel que*

$$\text{deg}\mathcal{F} = \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}_p} \text{deg}\mathcal{G}.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.3, le degré est borné sur l'ensemble des sous-faisceaux de \mathcal{E} . Soit alors, $(\mathcal{F}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-faisceaux de \mathcal{A}_p qui converge vers le supremum des degrés que l'on notera M . L'idée est de se ramener à étudier des sous-faisceaux d'un vrai fibré en utilisant les plongements locaux φ_i .

La métrique h_i sur U_i , avec la structure complexe de $E_{0,i}$, nous permet de définir les espaces de Sobolev $L^2(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$ et $L^2_1(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$. On va donc travailler dans la famille finie d'espaces $\coprod_i L^2_1(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$. Sur chaque ouvert du recouvrement $\{U_i\}$, on regarde le sous-faisceau $\mathcal{F}_i^m = \varphi_i(\mathcal{F}^m)$ de $E_{0,i}$ et son projecteur π_i^m associé. Alors, π_i^m est un élément de l'espace de Sobolev $L^2_1(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$. En effet, la norme L^2 de π_i^m est bornée sur tout U_i car elle s'exprime en fonction de la trace du projecteur. Quant à celle de la dérivée, $d_{A_i}\pi_i^m$, où d_{A_i} désigne la connexion de Chern de $(E_{0,i}, h_i)$, comme on l'a déjà vu au paragraphe 2.2, il suffit pour la borner de majorer la norme L^2 de la seconde forme fondamentale $a^{10^m}_i$. Or, la fonction $\text{tr}(K_{F^m})$ est intégrable et sa norme L^1 ne dépend pas de m d'après le second point de la proposition 3.3, donc, en utilisant sur \overline{V}_i la formule :

$$\text{tr}(K_{F^m}) = \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) - |a^{10^m}_i|^2$$

on obtient :

$$\int_{\overline{V}_i} |a^{10^m}_i|^2 \cdot \omega_g^n = \int_{\overline{V}_i} \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) \cdot \omega_g^n - \int_{\overline{V}_i} \text{tr}(K_{F^m}) \cdot \omega_g^n \leq C, \quad \forall i, m$$

puisque les deux termes de droite sont bornés indépendamment de m d'après ce qui précède. Par suite, $\pi^m = (\pi_i^m) \in \coprod_i L^2_1(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$. De plus, chaque π_i^m satisfait aux conditions des sous-fibrés holomorphes faibles du fibré $E_{0,i}$.

Pour tout i , la suite $(\pi_i^m)_m$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers $\pi_i \in L^2_1(\overline{V}_i, \text{End}E_{0,i})$. Le nombre d'ouverts du recouvrement étant fini, on peut supposer que la même suite converge pour tout i . Il y a convergence forte dans L^2 (à extraction d'une sous-suite près) et la limite π_i est un sous-fibré holomorphe faible de $E_{0,i}$ sur V_i (même démonstration que dans le cas fibré (voir la proposition 2.13)). Notons $(\mathcal{F}_i)_i$ la famille finie de sous-faisceaux cohérents réflexifs associés par le théorème d'Uhlenbeck (thm. 2.10). Remarquons ici que la démonstration de l'existence du sous-faisceau associé est purement locale, le résultat d'Uhlenbeck reste donc valide sur \overline{V}_i .

Il reste à voir que les \mathcal{F}_i se recollent bien pour donner un sous-faisceau de \mathcal{E} et que ce sous-faisceau est de degré maximal. Rappelons le lemme qui justifie l'utilisation des projecteurs pour caractériser les inclusions de faisceaux (voir lemme 2.6) :

Lemme 3.5. *Soit s une section holomorphe locale de $E_{0,i}$ au-dessus de $U \subset \overline{V}_i$. Alors les solutions de l'équation*

$$\pi_i(s) = s \quad (\text{presque partout})$$

sont exactement les sections locales de \mathcal{F}_i sur U .

Quels que soient m, i, j , on a par construction $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i^m) = \mathcal{F}_j^m$, ce qui s'exprime par $(\text{Id} - \pi_j^m) \circ \varphi_{ji} \circ \pi_i^m = 0$ pour tout (i, j, m) . Cette condition passe à la limite car il y a convergence en norme L^2 des π_i^m . Donc, pour tout (i, j) , $(\text{Id} - \pi_j) \circ \varphi_{ji} \circ \pi_i = 0$. Soit alors s une section locale de \mathcal{F}_i , on a :

$$\pi_j(\varphi_{ji}(s)) = \pi_j(\varphi_{ji}(s)) + (\text{Id} - \pi_j)(\varphi_{ji}(s)) = \varphi_{ji}(s)$$

ce qui avec le lemme montre l'inclusion $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_j$, et donc par symétrie $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_j$.

Par le même raisonnement, \mathcal{F}_i est un sous-faisceau de $\varphi_i(\mathcal{E})$ (on l'exprime en tant que projecteur). On peut donc définir sur V_i l'image inverse de \mathcal{F}_i par φ_i , les deux définitions possibles coïncident sur $V_i \cap V_j$. On notera \mathcal{F} ce sous-faisceau de \mathcal{E} , c'est un élément de \mathcal{A}_p puisqu'il est sans torsion et de quotient sans torsion puisqu'on a une injection $\mathcal{E}/\mathcal{F} \hookrightarrow E_{0,i}/\mathcal{F}_i$.

Il reste à montrer que \mathcal{F} est bien de degré maximal.

Lemme 3.6. *Si sur chaque \overline{V}_i , \mathcal{F} est limite au sens des sous-fibrés holomorphes faibles des \mathcal{F}^m , alors $\deg \mathcal{F} \geq \limsup \deg \mathcal{F}^m$.*

Démonstration. Rappelons la formule de Chern-Weil (lemme 3.1) :

$$\deg \mathcal{F} = \int_{X \setminus V} \frac{1}{2\pi n} \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n$$

Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition C^∞ de l'unité associée au sous recouvrement V_i , alors :

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus V} \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n &= \sum_i \int_{\overline{V}_i} \rho_i \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n \\ &= \sum_i \int_{\overline{V}_i} \rho_i \text{tr}(K_{\mathcal{F}_i}) \cdot \omega_g^n \\ &= \sum_i \left(\int_{\overline{V}_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) \cdot \omega_g^n - \int_{\overline{V}_i} \rho_i |a_i^{10}|^2 \cdot \omega_g^n \right) \end{aligned}$$

or, la courbure moyenne $K_{E_{0,i}}$ est C^∞ sur U_i de sorte que la convergence L^2 de π_i^m vers π_i implique la convergence L^1 de $\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m)$ vers $\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i)$ sur \overline{V}_i donc,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\overline{V}_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) \cdot \omega_g^n = \int_{\overline{V}_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) \cdot \omega_g^n$$

On a convergence faible en norme L^2 de $\sqrt{\rho_i} a_i^{10m}$ vers $\sqrt{\rho_i} a_i^{10}$ ce qui assure, d'après le lemme 2.15,

$$\liminf \int_{\overline{V}_i} |\sqrt{\rho_i} a_i^{10m}|^2 \cdot \omega_g^n \geq \int_{\overline{V}_i} |\sqrt{\rho_i} a_i^{10}|^2 \cdot \omega_g^n$$

On en déduit que $\deg \mathcal{F} \geq \limsup \deg \mathcal{F}^m$. □

On a donc $\deg \mathcal{F} \geq M$ puisque $\deg \mathcal{F}^m$ converge vers M . Mais, M étant la borne supérieure des degrés sur \mathcal{A}_p , $\deg \mathcal{F} = M$ et on a trouvé le faisceau désiré. \square

Comme corollaire, on retrouve immédiatement l'analogie du lemme 2.19 dans le cadre des faisceaux réflexifs :

Proposition 3.7. *Soit \mathcal{E} un faisceau réflexif sur (X, g) . Il existe un unique sous-faisceau \mathcal{E}_1 de \mathcal{E} de quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ sans torsion et tel que pour tout sous-faisceau \mathcal{F} de \mathcal{E} ,*

1. $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$ i.e. \mathcal{E}_1 est de pente maximale,
2. Si $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1)$ alors $\text{rang}(\mathcal{F}) \leq \text{rang}(\mathcal{E}_1)$.

en particulier \mathcal{E}_1 est semi-stable.

L'existence découle de la proposition que l'on vient de démontrer. Quant à l'unicité, elle se prouve comme dans le lemme 2.19.

Définition 3.8. On appellera l'unique faisceau \mathcal{E}_1 donné par la proposition 3.7 le *sous-faisceau maximal* de \mathcal{E} .

Ce faisceau \mathcal{E}_1 est le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} . Comme dans le cas des fibrés, il serait possible de démontrer dès à présent l'existence de la filtration (en considérant les sous-faisceaux qui contiennent \mathcal{E}_1 et en faisant une récurrence). Mais, plutôt que d'utiliser cette méthode, nous allons généraliser le lemme 3.7 aux faisceaux sans torsion.

3.2 Les faisceaux sans torsion

Soit \mathcal{E} un faisceau sans torsion sur une variété complexe compacte X munie d'une métrique de Gauduchon g .

Le morphisme canonique $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{**}$ est injectif (car \mathcal{E} est sans torsion) et le bidualisé \mathcal{E}^{**} est un faisceau **réflexif**. D'après ce qui précède, il admet donc un unique sous-faisceau $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}^{**}$ de pente maximale (cf prop. 3.7). On va construire un sous-faisceau de \mathcal{E} avec la même propriété. L'idée la plus simple et qui se révèle être la bonne est d'intersecter le sous-faisceau \mathcal{E}_1 avec \mathcal{E} . Rappelons que si l'on considère deux sous-faisceaux \mathcal{H} et \mathcal{G} d'un même faisceau \mathcal{F} , le sous-faisceau $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ est bien défini comme noyau du morphisme canonique $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1$. Comme sous-faisceau d'un faisceau sans torsion, \mathcal{F}_1 est sans torsion.

Proposition 3.9. *Le faisceau $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1$ est le sous-faisceau maximal de \mathcal{E} et vérifie $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{F}_1)$.*

Démonstration. Par définition, le noyau du morphisme naturel obtenu par composition de l'injection de $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}^{**}$ et de la surjection $\mathcal{E}^{**} \rightarrow \mathcal{E}^{**}/\mathcal{E}$ est exactement $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1 = \mathcal{F}_1$. On a donc la suite exacte suivante :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{E}_1/\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{E}^{**}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{T} désigne le quotient des deux faisceaux. Remarquons alors les faits suivants :

- $\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E}$ est un faisceau de torsion, donc $\mathcal{E}_1/\mathcal{F}_1$ et \mathcal{T} sont également de torsion.
- le fibré en droite $\det(\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E})$ est trivial. En effet, \mathcal{E} étant sans torsion, $\det\mathcal{E} = (\det\mathcal{E})^{**} = (\det\mathcal{E}^*)^* = \det\mathcal{E}^{**}$ et de plus, on a la relation $\det\mathcal{E}^{**} = \det\mathcal{E} \otimes \det(\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E})$ d'où le résultat souhaité.

On va montrer que \mathcal{F}_1 et \mathcal{E}_1 ont la même pente. Remarquons tout d'abord que les deux faisceaux ont le même rang. Pour comparer leur degré, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.10. *Soit \mathcal{Q} un faisceau de torsion tel que $\det\mathcal{Q}$ soit trivial. Si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux, alors $\det\mathcal{Q}'$ et $\det\mathcal{Q}''$ sont triviaux.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' sont tous les deux de torsion. Donc d'après un résultat classique (voir par exemple [Kob87] prop. 6.14 chap. V), il existe des sections globales non triviales σ' et σ'' de $\det\mathcal{Q}'$ et $\det\mathcal{Q}''$ respectivement. De plus, on a la relation entre les fibrés en droites : $\det\mathcal{Q} = \det\mathcal{Q}' \otimes \det\mathcal{Q}''$. Regardons donc la section $\sigma = \sigma' \otimes \sigma''$ de $\det\mathcal{Q}$. C'est une section globale de ce fibré en droites trivial, c'est-à-dire une fonction holomorphe sur la variété compacte X , elle est donc constante. Or, σ ne peut être identiquement nulle car σ' et σ'' s'annulent au plus sur un sous-ensemble de codimension 1. Par suite, $\sigma = c \neq 0$ ce qui montre que les deux fibrés linéaires $\det\mathcal{Q}'$ et $\det\mathcal{Q}''$ sont triviaux. \square

Appliquons ce lemme à la suite exacte $(*)$, on obtient $\det\mathcal{E}_1 = \det\mathcal{F}_1$. Les deux faisceaux ont donc le même degré par rapport à toute métrique de Gauduchon et donc la même pente : $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{F}_1)$.

Il est alors facile de montrer la proposition : si \mathcal{G} est un sous-faisceau quelconque de \mathcal{E} , c'est un sous-faisceau de \mathcal{E}^{**} et sa pente est inférieure ou égale à celle de \mathcal{E}_1 donc à celle de \mathcal{F}_1 . Le même raisonnement marche pour les rangs. On a donc trouvé le sous-faisceau maximal de \mathcal{E} . \square

L'unicité de ce sous-faisceau découle du lemme 2.19 (cf la remarque suivant la démonstration). On a donc démontré l'analogie de la proposition 3.7 dans le cas sans torsion et construit l'unique sous-faisceau maximal \mathcal{F}_1 de \mathcal{E} qui est le premier terme de la FHN de \mathcal{E} .

Le théorème principal en découle par récurrence sur le rang de \mathcal{E} : soit le faisceau sans torsion $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$ est semi-stable et $0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}$ est la FHN de \mathcal{E} , soit il ne l'est pas et on applique l'hypothèse de récurrence au faisceau $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$, puisque $\text{rang}(\mathcal{E}/\mathcal{F}_1) < \text{rang}(\mathcal{E})$. En fin de compte, on a montré :

Théorème 3.11 (Filtration de Harder-Narasimhan). *Soit (X, g) une variété complexe compacte de dimension n munie d'une métrique de Gauduchon. Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur X . Alors \mathcal{E} admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Remarque 3.12. De part le choix fait à chaque étape, la seconde propriété de la définition 1.14 est automatiquement vérifiée.

bien sûr, on peut aussi définir ici la filtration de Harder-Narasimhan complète.

3.3 Polygone de Harder-Narasimhan

On peut donner une autre interprétation de la filtration de Harder-Narasimhan à travers le théorème suivant :

Définition 3.13. Soit $D = (\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_l \subset \mathcal{E})$ un drapeau de sous-faisceaux de \mathcal{E} , on appelle *polygone du drapeau* D la ligne polygonale de \mathbb{R}^2 formée par la suite de points $p(\mathcal{F}_i) = (\text{rang}\mathcal{F}_i, \text{deg}\mathcal{F}_i)$ pour $0 \leq i \leq l$. On appellera *polygone de Harder-Narasimhan* le polygone associé à la filtration de Harder-Narasimhan.

Théorème 3.14. Soit \mathcal{E} un faisceau sans torsion sur (X, g) et

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Soit \mathcal{F} un sous-faisceau sans torsion de \mathcal{E} , alors le point $p(\mathcal{F}) = (\text{rang}\mathcal{F}, \text{deg}\mathcal{F})$ de \mathbb{R}^2 est situé au-dessous du polygone de Harder-Narasimhan. De plus, si $p(\mathcal{F})$ appartient à un segment $[p(\mathcal{E}_{i-1}), p(\mathcal{E}_i)]$ pour $1 \leq i \leq s$, alors \mathcal{F} vérifie $\mathcal{E}_{i-1} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}_i$.

Autrement dit, considérons dans le plan \mathbb{R}^2 l'ensemble des points de la forme $(\text{rang}\mathcal{F}, \text{deg}\mathcal{F})$ où \mathcal{F} est un sous-faisceau sans torsion de \mathcal{E} . Son enveloppe convexe est délimitée vers le haut par une ligne polygonale brisée concave

$$p_0 = (0, 0), p_1, \cdots, p_l = (\text{rang}\mathcal{E}, \text{deg}\mathcal{E})$$

Cette ligne brisée correspond au polygone de Harder-Narasimhan et chaque point p_i correspond à un unique sous-faisceau saturé \mathcal{E}_i (voir figure 3.1 page 49).

Démonstration du théorème 3.14. On fait une récurrence sur la longueur de la filtration de Harder-Narasimhan.

Si \mathcal{E} est semi-stable (c'est à dire que la filtration est de longueur 1) il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc le résultat démontré pour tout faisceau sans torsion admettant une FHN de longueur $s - 1$ et soit \mathcal{E} un faisceau sans torsion et $0 = \mathcal{E}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_s = \mathcal{E}$ sa FHN. Soit \mathcal{F} un sous-faisceau sans torsion quelconque de \mathcal{E} . Si $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1)$, alors par définition de \mathcal{E}_1 , on a $\text{rang}\mathcal{F} < \text{rang}\mathcal{E}_1$ et $p(\mathcal{F})$ est bien en-dessous du polygone de Harder-Narasimhan. Sinon, on peut supposer que $\mathcal{F} \neq 0$ et $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}_1)$. On considère le morphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ et on pose $\mathcal{K} = \text{Ker}(u)$ et $\mathcal{Q} = \text{Im}(u)$, on a donc la suite exacte suivante :

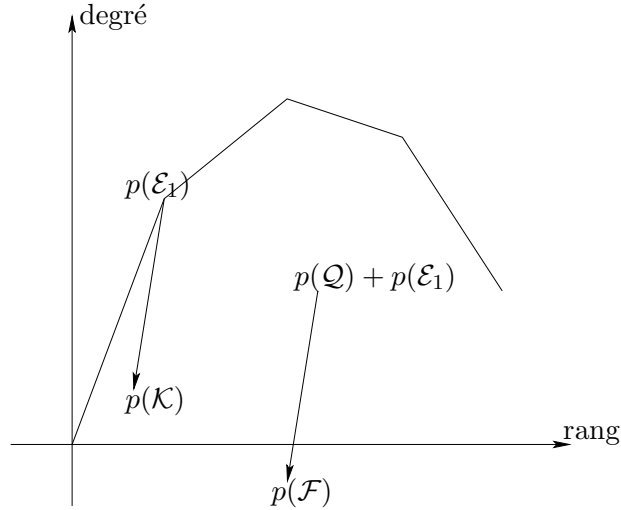
$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

donc par définition $p(\mathcal{F}) = p(\mathcal{K}) + p(\mathcal{Q}) = [p(\mathcal{Q}) + p(\mathcal{E}_1)] + [p(\mathcal{K}) - p(\mathcal{E}_1)]$.

On remarque alors que puisque \mathcal{Q} est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$, l'hypothèse de récurrence s'applique à \mathcal{Q} et le terme $[p(\mathcal{Q}) + p(\mathcal{E}_1)]$ se situe donc au-dessous du polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} mais pas au-dessous du premier segment de ce polygone.

Le terme $[p(\mathcal{K}) - p(\mathcal{E}_1)]$ est un vecteur de pente supérieure à $\mu(\mathcal{E}_1)$ et orienté vers le bas puisque \mathcal{E}_1 est semi-stable.

Le polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} étant concave (cf la seconde condition de la définition de la filtration), le point $p(\mathcal{F})$ est situé au-dessous de ce polygone ce qui achève la récurrence.



Si $p(\mathcal{F})$ est situé sur le segment $[p(\mathcal{E}_{i-1})p(\mathcal{E}_i)]$, il est nécessaire que $p(\mathcal{K}) = p(\mathcal{E}_1)$ et donc que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $\mathcal{E}_{i-1}/\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}/\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_1$ et donc que $\mathcal{E}_{i-1} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{E}_i$. \square

On peut alors interpréter la filtration de Harder-Narasimhan complète comme l'ensemble des sous-faisceaux de \mathcal{E} dont la coordonnée se situe sur le polygone de Harder-Narasimhan.

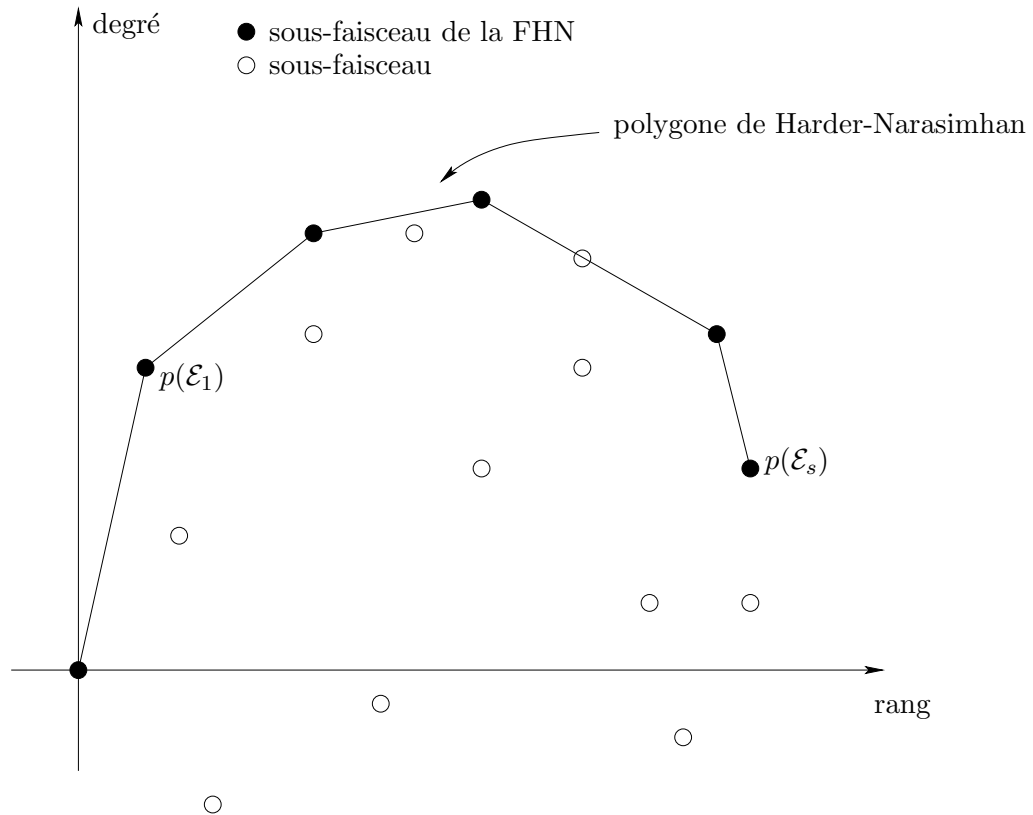


FIG. 3.1 – Polygone de Harder-Narasimhan

Chapitre 4

Applications aux déformations

On peut à partir de ces résultats démontrer un analogue pour les faisceaux du théorème de convergence de Bishop. Le théorème de Bishop donne la convergence (à extraction d'une sous-suite près) d'une suite de diviseurs positifs dont le volume est borné. Ici, bien sûr, nous allons faire l'hypothèse que le degré est borné ce qui est fondamentalement la même chose puisque le degré du fibré associé à un diviseur positif est son volume à une constante multiplicative près.

Nous allons considérer une famille de fibrés vectoriels complexes au-dessus d'une famille différentiable de variétés compactes. On peut voir cette déformation comme la donnée d'une variété différentiable compacte de dimension paire X , d'un espace de paramètres T et d'une famille lisse $(J_t)_{t \in T}$ de structures complexes sur X , c'est-à-dire que la section associée du fibré $p_1^*(\text{End}T_{\mathbb{R}}(X))$ au-dessus de $X \times T$ est lisse, où $p_1 : X \times T \rightarrow X$ est la projection canonique.

On peut munir chaque fibre X_t d'une métrique de Gauduchon, mais si l'on veut avoir un contrôle quelconque sur le degré, il faut être plus précis et démontrer qu'on peut faire varier les métriques de Gauduchon de manière régulière sur la déformation.

4.1 Famille C^∞ de métriques de Gauduchon

N'ayant pas trouvé de références, nous donnons ici la démonstration du résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit $(g_t^0)_t$ une famille de métriques hermitiennes sur X_t , C^∞ en t . Soit t_0 dans T . Alors, il existe un voisinage U de t_0 dans T et une famille différentiable de fonctions réelles strictement positives $\varphi_t \in A^0(X_t)$, $t \in U$, telle que la métrique hermitienne $g_t = \varphi_t g_t^0$ soit de Gauduchon et C^∞ en $t \in U$.*

Démonstration. A fibre fixée, la preuve du théorème de Gauduchon revient à trouver une fonction strictement positive réelle φ dans le noyau de l'opérateur

différentiel :

$$Q : A^0(X) \rightarrow A^0(X), \quad Q(\psi) = -\frac{i}{(n-1)!} \star \partial \bar{\partial} (L_{g^0}^{n-1}(\psi)),$$

où L_g est l'application produit extérieur par ω_g (opérateur de Lefschetz). En effet $g = \varphi^{\frac{1}{n-1}} \cdot g^0$ est alors de Gauduchon (pour les détails de la preuve voir [LT95] ou [Gau84] et le rappel du début).

Fixons donc sur la famille $(X, T, (J_t)_{t \in T})$ une famille quelconque de métriques hermitiennes $(g_t^0)_{t \in T}$, C^∞ par rapport au paramètre t . On définit à l'aide de ces métriques la famille d'opérateurs différentiels Q_t :

$$\begin{aligned} Q_t : A^0(X_t) &\rightarrow A^0(X_t) \\ \psi_t &\mapsto -\frac{i}{(n-1)!} \star_t \partial_t \bar{\partial}_t (L_{g_t^0}^{n-1} \psi_t) \end{aligned}$$

Rappelons tout d'abord quelques propriétés des opérateurs Q_t : ils possèdent un adjoint pour le produit scalaire qui s'exprime comme :

$$P_t = Q_t^* = i \Lambda_{g_t^0} \bar{\partial}_t \partial_t$$

où $\Lambda_{g_t^0}$ est l'opérateur de contraction par $\omega_{g_t^0}$ c'est-à-dire, l'adjoint de l'opérateur de Lefschetz. Les opérateurs P_t et Q_t sont réels. On les regarde en tant qu'opérateurs sur l'espace de Hilbert $L^2(X_t, \mathbb{R})$ des fonctions L^2 sur X_t à valeur dans \mathbb{R} .

On a alors les résultats suivants ([LT95], chap. 7.2) :

Proposition 4.2. *$\{Q_t \mid t \in T\}$ est une famille différentiable d'opérateurs réels fortement elliptiques de degré 2. Le noyau de Q_t est de dimension constante égale à 1 et toute fonction de $\text{Ker}(Q_t|_{C^\infty(X, \mathbb{R})})$ est de signe constant.*

L'idée est d'appliquer des résultats sur les opérateurs fortement elliptiques auto-adjoints déjà utilisés par Kodaira pour démontrer l'existence en famille des structures kähleriennes (cf. [KS60] et l'appendice de [Kod86] pour l'énoncé détaillé des résultats). Ici, Q_t n'est pas auto-adjoint, on va donc considérer la famille d'opérateurs $(Q_t^* Q_t)_{t \in T}$ qui est une famille d'opérateurs fortement elliptiques d'ordre quatre et auto-adjoints. Remarquons que $\text{Ker}(Q_t) = \text{Ker}(Q_t^* Q_t)$, ce dernier espace étant donc de dimension constante égale à un.

Notons F_t le projecteur orthogonal de $L^2(X_t)$ sur la droite $\text{Ker}(Q_t^* Q_t)$. Alors, en utilisant les résultats de [Kod86], on a :

Proposition 4.3. *Le projecteur F_t est C^∞ différentiable en t .*

Fixons alors $t_0 \in T$ et une fonction réelle strictement positive $\psi_{t_0} \in A^0(X_{t_0})$ appartenant au noyau de Q_{t_0} . En posant $g_t = \psi_{t_0} g_t^0$, on obtient une métrique de Gauduchon. On étend cette fonction de manière C^∞ en une famille de fonctions $\{\psi_t \in A^0(X_t) \mid t \in T\}$. L'opérateur de projection F_t étant différentiable en t , on obtient une famille C^∞ en t de fonctions $\varphi_t = F_t(\psi_t)$ appartenant au noyau de

Q_t et vérifiant $\varphi_{t_0} = \psi_{t_0}$. Par conséquent, puisque φ_t est C^∞ en $(x, t) \in X \times T$, φ_{t_0} strictement positive et X compact, on peut supposer, quitte à se restreindre à un ouvert U , que φ_t est strictement positive quels que soient $(x, t) \in X \times U$.

En posant $g_t = \varphi_t g_t^0$, on obtient une métrique de Gauduchon appartenant à la classe conforme de g_t et C^∞ en t . \square

Il est possible de réaliser ce même théorème globalement. Supposons nous donnée une famille différentiable C^∞ de métriques hermitiennes $\{g_t^0 \mid t \in T\}$. D'après le résultat précédent, il est possible de trouver, en chaque point t_0 de T , un ouvert $U \ni t_0$ et une famille différentiable de métriques de Gauduchon $\{g_t \mid t \in U\}$ tel que g_t soit dans la classe conforme de g_t^0 .

D'après le théorème 1.2, il y a unicité de la métrique de Gauduchon dans toute classe conforme à un facteur constant réel strictement positif près. On a donc un recouvrement de T par une famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ sur lesquels est définie une famille différentiable de métriques de Gauduchon $\{g_{it}\}_{i \in I}$. Alors sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$, g_{it} et g_{jt} sont deux métriques de Gauduchon sur X_t dans la même classe conforme. Il existe donc (thm. 1.2) une constante réelle strictement positive c_{ij_t} tel que $g_{it} = c_{ij_t} g_{jt}$. On définit ainsi des fonction c_{ij_t} , C^∞ en t sur U_{ij} et qui forment un cocycle de $Z^1(\mathcal{U}, C_+^\infty)$, où C_+^∞ est le faisceau multiplicatif des fonctions réelles strictement positives sur T .

On a donc associé à la famille de métriques de Gauduchon, un élément du premier groupe de cohomologie $H^1(T, C_+^\infty)$.

Lemme 4.4. *Le groupe de cohomologie $H^1(T, C_+^\infty)$ est nul.*

Démonstration. On a un isomorphisme de faisceaux donné par l'exponentielle réelle :

$$C^\infty \xrightarrow{\exp} C_+^\infty,$$

(l'inverse étant donné par le logarithme). Or le faisceau C^∞ est un faisceau fin, donc ses groupes de cohomologie $H^q(T, C^\infty)$, $q \geq 1$ sont nuls. \square

On peut donc recoller sur U_{ij} les métriques de Gauduchon. On a obtenu le résultat :

Théorème 4.5. *Soit $(X, T, (J_t)_{t \in T})$ une famille de variétés complexes compactes connexes à base lisse. Soit $\{g_t^0 \mid t \in T\}$ une famille C^∞ de métriques hermitiennes sur $X_t = \omega^{-1}(t)$. Alors il existe une famille différentiable C^∞ de métriques de Gauduchon $\{g_t \mid t \in T\}$ définie sur T , telle que g_t^0 soit dans la classe conforme de g_t .*

On va donc pouvoir parler de stabilité et de degré pour n'importe quel faisceau défini sur X_t . Considérons une famille de fibrés vectoriels holomorphes $(E_t)_{t \in T}$, autrement dit, on se donne un fibré vectoriel réel de dimension paire sur X et une famille régulière de J_t -semi-connexions $(\bar{\partial}_t)_{t \in T}$. Par régulière, on entend que la famille d'opérateurs différentiels $\bar{\partial}_t : A_{\mathbb{C}}^0(E) \rightarrow A_{\mathbb{C}}^1(E)$ a des coefficients, par rapport à toute trivialisations locale de E , qui dépendent différentiablement

de $(x, t) \in X \times T$. Munissons la déformation d'une famille différentiable de métriques de Gauduchon $(g_t)_{t \in T}$.

On peut toujours définir à t fixé le degré du fibré E_t (ou d'un sous-faisceau) par rapport à g_t :

$$\deg_t(E_t) = \deg_{g_t}(E_t) = \int_X c_p(E_t) \wedge \omega_{g_t}^{n-1}.$$

où $c_p(E_t)$ est un représentant distingué, c'est-à-dire dans l'image de $\partial\bar{\partial}$, de la première classe de Chern réelle de E_t (pour un sous-faisceau on considère son fibré déterminant). Plus précisément, on prend une métrique hermitienne h sur E_t et on considère la 2-forme : $\gamma_h = \frac{1}{2\pi i} \partial\bar{\partial} \log h$ qui est un représentant de la classe de Chern pluri-harmonique de E_t . Pour une famille différentiable de fibrés, on a alors le résultat suivant :

Proposition 4.6. *L'application $t \rightarrow \deg_{g_t}(E_t)$ est C^∞ de T dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Fixons t_0 dans la base T et une métrique hermitienne h_{t_0} dans la fibre E_{t_0} . On peut étendre la métrique h_{t_0} sur un ouvert V contenant t_0 en une famille différentiable C^∞ de métriques $\{h_t \mid t \in V\}$. Alors, la 2-forme $\gamma_t = \frac{1}{2\pi i} \partial_t \bar{\partial}_t \log h_t$ est un représentant de $c_p(E_t)$. Sur l'ouvert V , on a :

$$\deg_{g_t}(E_t) = \int_X \frac{1}{2\pi i} \partial_t \bar{\partial}_t \log h_t \wedge \omega_{g_t}^{n-1}.$$

Puisque X est compacte et l'intégrande C^∞ , on a le résultat escompté. \square

4.2 Déformations, convergence de sous-faisceaux

On obtient le résultat de convergence suivant :

Théorème 4.7. *Soit $(X, T, (J_t)_{t \in T}, (g_t)_{t \in T})$ une famille définie comme ci-dessus avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et $(E, (\bar{\partial}_t)_{t \in T})$ une famille de fibrés complexes de rang r . Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \{1, \dots, r-1\}$, l'ensemble*

$$S(p, c) = \{t \in T \mid \text{il existe un sous-faisceau } \mathcal{F}_t \subset (E, \bar{\partial}_t) \text{ avec} \\ \text{rang}(\mathcal{F}_t) = p \text{ et } \mu_{g_t}(\mathcal{F}_t) \geq c\}$$

est fermé dans T .

En fait, de toute famille $(\mathcal{F}_{t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ de sous-faisceaux de E_{t_m} telle que $t_m \rightarrow t_0 \in T$ et $\deg_{g_{t_m}} \mathcal{F}_{t_m}$ est minoré uniformément, on peut extraire une sous-suite qui converge au sens des sous-fibrés holomorphes faibles vers un sous-faisceau $\mathcal{F}_{t_0} \subset E_{t_0}$.

Démonstration. On va démontrer la deuxième assertion de la proposition dont découle la première. Pour cela remarquons que l'on peut définir dans chaque fibre une norme Sobolev notée L_{1t}^2 sur $A^0(\text{End}E)$: on munit la déformation de fibrés d'une métrique h_t régulière par rapport à t , on considère la connexion de Chern A_t du fibré $(E, (\bar{\partial}_t), h_t)$. On peut définir de manière usuelle

$$\|a\|_{L_{1t}^2} = \left(\int_X |a|^2 \cdot \text{vol}_g \right)^{1/2} + \left(\int_X |d_{A_t}(a)|^2 \text{vol}_g \right)^{1/2}$$

pour $a \in A^0(E)$ ou $a \in A^0(\text{End}E)$.

Supposons donc avoir une suite de sous-faisceaux $\mathcal{F}_{t_m} \subset E_{t_m}$ où $t_m \rightarrow t_0 \in T$. On peut associer à chaque sous-faisceau son projecteur Sobolev $\pi_m \in L_{1t_m}^2(\text{End}E)$ et sa seconde forme fondamentale a_m^{10} . D'après la formule de Chern-Weil (cf 3.1) :

$$\|a_m^{10}\|_{L^2, t_m}^2 = \int_X \text{tr}(K_{E_{t_m}} \circ \pi_m) \cdot \omega_{g_{t_m}}^n - 2\pi n \text{deg}_{t_m} \mathcal{F}_{t_m}.$$

L'endomorphisme K_{E_t} est la courbure moyenne associée à la connexion A_t , il varie de façon C^∞ quand t varie. Le premier terme du membre de droite est donc borné localement au voisinage de t_0 indépendamment de t et, par hypothèse, le degré des sous-faisceaux considérés est minoré. On en déduit que la norme $L_{1t_m}^2$ de a_m^{10} est bornée indépendamment de m . De plus, comme toutes les métriques et connexions considérées varient différemment en t , les différentes normes sont toutes équivalentes. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de t_0 tel que pour tout $t \in V$

$$C^{-1} \|a\|_{L_i^2, t} \leq \|a\|_{L_i^2, t_0} \leq C \|a\|_{L_i^2, t}.$$

pour $i = 0$ ou 1 .

On regarde tous les projecteurs comme des endomorphismes de E muni de sa norme L_{1,t_0}^2 . Alors, π_m est une suite bornée pour cette norme. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement en norme L_{1,t_0}^2 vers un projecteur π et supposer, quitte à passer à une sous-suite, que cette convergence est forte dans $L_{t_0}^2$. On en déduit que $\pi^2 = \pi = \pi^*$ par passage à la limite. De plus $(\bar{\partial}_{t_m} \pi_m)_m$ est uniformément bornée et converge faiblement vers $\bar{\partial}_{t_0} \pi$, car par hypothèse, $\bar{\partial}_{t_0} \pi_m$ converge faiblement vers $\bar{\partial}_{t_0} \pi$ et la famille d'opérateurs $\bar{\partial}_t$ étant différentiable, $(\bar{\partial}_{t_m} - \bar{\partial}_{t_0}) \pi_m$ converge faiblement vers zéro. Ceci assure une convergence au sens des distributions de $(\text{Id} - \pi_m) \circ \bar{\partial}_{t_m} \pi_m$ vers $(\text{Id} - \pi) \circ \bar{\partial}_{t_0} \pi$. On a donc montré que π est un sous-fibré holomorphe faible de L_{1,t_0}^2 et on notera \mathcal{F} le sous-faisceau de E_{t_0} associé.

En utilisant le lemme 3.6, on montre que $\text{deg}_{t_0} \mathcal{F} \geq \limsup \text{deg}_{t_m} \mathcal{F}_{t_m}$. \square

On retrouve comme Corollaire le résultat bien connu d'ouverture de la stabilité dans une déformation (cf. [LT95] pour une autre démonstration).

Théorème 4.8 (Ouverture de la stabilité). *Soit $(X, T, (J_t)_{t \in T}, (g_t)_{t \in T})$ une famille définie comme ci-dessus avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et $(E, (\bar{\partial}_t)_{t \in T})$ une famille de fibrés complexes. Alors l'ensemble*

$$\{t \in T \mid (E, \bar{\partial}_t) \text{ est } g_t\text{-stable sur } (X, J_t)\}$$

est ouvert dans T .

Démonstration. Soit $t_0 \in T$ tel que $(E, \bar{\partial}_{t_0})$ soit g_{t_0} -stable. Supposons qu'il existe une suite de paramètres $t_n \rightarrow t_0$ tels que E_{t_n} ne soit pas stable, i.e. il existe un sous-faisceau $\mathcal{F}_{t_n} \subset E_{t_n}$ vérifiant $\deg \mathcal{F}_{t_n} \geq \deg E_{t_n}$. D'après la proposition 4.6, l'application $t \rightarrow \deg_{g_t}(E_t)$ est C^∞ , donc en particulier $\deg E_{t_n}$ est borné et converge vers $\deg E_{t_0}$. En appliquant le théorème 4.7 on construit un sous-faisceau \mathcal{F} de E_{t_0} tel que $\deg_{t_0} \mathcal{F} \geq \limsup \deg_{t_n} \mathcal{F}_{t_n} \geq \deg_{t_0} E_{t_0}$. Cela contredit la stabilité de E_{t_0} et finit la démonstration. \square

Remarque 4.9. Il est important de remarquer que contrairement à la preuve de [LT95], on n'utilise pas ici la correspondance de Kobayashi-Hitchin.

4.3 Déformations de faisceaux sans torsion

On se donne ici une déformation $\mathcal{X} \xrightarrow{\omega} T$ d'une variété complexe compacte X à base T lisse. On considère un faisceau cohérent sans torsion \mathcal{E} sur \mathcal{X} qui est (T, \mathcal{O}_T) -plat. On notera $\mathcal{E}(t)$ la restriction du faisceau \mathcal{E} à la fibre $\omega^{-1}(t) = X_t$, c'est-à-dire que si $i_t : X_t \hookrightarrow \mathcal{X}$ désigne l'inclusion de la fibre X_t dans l'espace total, $\mathcal{E}(t) = i_t^*(\mathcal{E})$.

Remarquons ici que c'est l'hypothèse de platitude qui nous permet de suivre le degré de manière régulière C^∞ . On a en effet la proposition suivante :

Proposition 4.10. *Soit $(\mathcal{X} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de (T, \mathcal{O}_T) . Alors l'application $t \rightarrow \deg_{g_t}(\mathcal{E}(t))$ est C^∞ en $t \in T$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat localement au voisinage d'un point $t_0 \in T$. Il est possible de trouver un ouvert $U \subset T$ contenant t_0 et un nombre fini d'ouverts V_i tels que $\{U \times V_i\}$ forme un recouvrement de $\omega^{-1}(U)$ et sur chaque $U \times V_i$, on a une résolution

$$0 \rightarrow E_{m,i} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{1,i} \rightarrow E_{0,i} \rightarrow \mathcal{E}|_{U \times V_i} \rightarrow 0$$

par des faisceaux localement libres. Le faisceau déterminant $\det \mathcal{E}$ est défini sur \mathcal{X} comme $\det \mathcal{E}|_{U \times V_i} = \otimes_{l=0}^m (\det E_{l,i})^{(-1)^l}$ et il ne dépend pas du choix de la résolution (voir [Kob87] pour plus de détails). C'est un fibré en droites complexes sur \mathcal{X} . D'autre part, la restriction sur chaque fibre X_t de la résolution reste exacte, puisque le faisceau est plat au-dessus de la base, et donne donc une

résolution de $\mathcal{E}(t)$ sur $\{t\} \times V_i$ à l'aide de laquelle on calcule le déterminant $\det \mathcal{E}(t)$. On a donc $(\det \mathcal{E})(t) = \det(\mathcal{E}(t))$. Soit alors h une métrique quelconque sur $\det(\mathcal{E})$ et notons h_t sa restriction à la fibre $\det \mathcal{E}(t)$, alors clairement $\deg_{g_t} \mathcal{E}(t) = \int_X c_1(\det \mathcal{E}(t), h_t) \wedge \omega_{g_t}^{n-1}$ est C^∞ en $t \in U$ \square

Nous allons montrer dans ces conditions l'analogie du théorème 4.7 :

Théorème 4.11. *Soit $(\mathcal{X} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de T . Soit r le rang commun de toutes les restrictions $\mathcal{E}(t)$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \{1, \dots, r-1\}$, l'ensemble*

$$S(p, c) = \{t \in T \mid \text{il existe un sous-faisceau } \mathcal{F}_t \subset \mathcal{E}(t) \text{ avec} \\ \text{rang}(\mathcal{F}_t) = p \text{ et } \mu_{g_t}(\mathcal{F}_t) \geq c\}$$

est fermé dans T .

En fait, soit $(\mathcal{F}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-faisceaux de $\mathcal{E}(t_n)$ telle que $t_n \rightarrow t_0 \in T$ et $\deg_{g_{t_n}} \mathcal{F}_{t_n}$ soit minoré uniformément, alors il existe un sous-faisceau $\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{E}(t_0)$ vérifiant $\deg_{g_{t_0}} \mathcal{F}_{t_0} \geq \limsup \deg_{g_{t_n}} \mathcal{F}_{t_n}$.

Démonstration. La démonstration s'inspire des idées du théorème 4.7. Considérons le faisceau \mathcal{E}^* , il est réflexif et il existe donc au voisinage de tout point $t_0 \in T$ des résolutions locales en famille de \mathcal{E}^* . Plus précisément, il existe un voisinage compact \overline{U} de t_0 et un recouvrement de $\omega^{-1}(\overline{U})$ par un nombre fini de compacts de la forme $\overline{U} \times \overline{V}_i$, tels que pour tout i , on ait une résolution en famille $\dots \rightarrow E_{1,i}^* \rightarrow E_{0,i}^* \rightarrow \mathcal{E}^*|_{\overline{U} \times \overline{V}_i} \rightarrow 0$ par des fibrés vectoriels holomorphes sur $\overline{U} \times \overline{V}_i$ qui vérifient la propriété de commutativité :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}|_{\overline{U} \times \overline{V}_i \cap \overline{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_i} & E_{0,i} & \longrightarrow & E_{1,i} \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_{ji} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}|_{\overline{U} \times \overline{V}_i \cap \overline{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_j} & E_{0,j} & \longrightarrow & E_{1,j} \end{array} \quad (4.1)$$

En restriction à une fibre $\omega^{-1}(t)$, on a la suite exacte

$$\mathcal{E}_{1,i,t}^* \rightarrow E_{0,i}^*(t) \rightarrow \mathcal{E}^*(t)|_{V_i} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{E}_{1,i,t}^*$ est par définition le noyau de la surjection de $E_{0,i}^*(t)$ sur $\mathcal{E}^*(t)$. On a donc sur chaque fibre le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}(t)|_{\overline{V}_i \cap \overline{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_i(t)} & E_{0,i}(t) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{1,i,t} \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_{ji}(t) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}(t)|_{\overline{V}_i \cap \overline{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_j(t)} & E_{0,j}(t) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{1,i,t} \end{array}$$

où les différentes flèches sont induites par les morphismes globaux de (4.1). Soit alors $(\mathcal{F}_{t_n})_n$ une suite de sous-faisceaux de $\mathcal{E}(t_n)$ avec $t_n \rightarrow t_0$.

On suit la démonstration du paragraphe précédent avec les idées introduites pour les faisceaux réflexifs. Quel que soit $t \in U$, on définit, en choisissant des métriques C^∞ sur chaque famille de fibrés, les espaces de Sobolev $L_{1,t}^2(\overline{V}_i, E_{0,i}(t))$ et on peut associer à chaque sous-faisceau \mathcal{F}_{t_n} une famille finie de projecteurs Sobolev $\pi_i^n \in \prod_i L_{1,t_n}^2(\overline{V}_i, E_{0,i}(t_n))$. De part les choix faits, tous ces espaces sont isomorphes lorsque t varie dans U et les normes Sobolev sont globalement équivalentes, quitte à restreindre U . On peut donc voir l'ensemble de ces projecteurs dans l'espace $\prod_i L_{1,t_0}^2(\overline{V}_i, E_{0,i}(t_0))$. Comme on l'a vu dans les paragraphes précédents (théorèmes 3.7 et 4.7), les normes L_1^2 de chaque π_i^n sont bornées indépendamment de la fibre et du projecteur grâce à l'hypothèse de minoration du degré. On a donc convergence d'une sous-suite vers un élément $\{\pi_i\}_i \in \prod_i L_{1,t_0}^2(\overline{V}_i, E_{0,i}(t_0))$, représentant une famille de sous-fibrés holomorphes faibles des $E_{0,i}(t_0)$.

Il reste à démontrer, tout d'abord, que les sous-faisceaux "locaux" $\{\mathcal{F}_i\}_i$ associés se recollent bien et que le faisceau obtenu est bien dans l'image par $\varphi_i(t_0)$ de \mathcal{E}^{**} . Montrons donc que quels que soient i et j , $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_j$ ce qui s'exprime d'après le lemme 3.5 avec les projecteurs par : $(\text{Id} - \pi_j) \circ \varphi_{ji}(t_0) \circ \pi_i = 0$. Cette condition est vérifiée par tous les sous-faisceaux de la suite $\{\pi_i^n\}$ et l'application $t \rightarrow \varphi_{ji}(t)$ est régulière en t ce qui donne le résultat à la limite.

Prouvons que $\mathcal{F}_i \subset \varphi_i(t_0)(\mathcal{E}^{**})$. Là encore, on traduit l'inclusion en termes de projecteurs ce qui est justifié par le lemme 3.5 : quel que soit $t \in U$, le sous-faisceau $\varphi_i(t)(\mathcal{E}^{**})$ de $E_{0,i}(t)$ est réflexif, et est donc défini par un projecteur Sobolev $p_{i,t}$ appartenant à $L_{1,t}^2(\text{End}E_{0,i}(t))$. Quel que soit n , on a par construction $(\text{Id} - p_{i,t_n}) \circ \pi_i^n = 0$. D'après les propositions 3.9 et 4.10, l'application $t \rightarrow \deg \mathcal{E}(t)^{**} = \deg \mathcal{E}(t)$ est C^∞ et donc localement bornée au voisinage de t_0 . De part la proposition 3.3, la fonction $\text{tr}(K_{\varphi_i(t)(\mathcal{E}^{**})})$ (en fait c'est la partie localement libre que l'on considère) est bornée dans L^1 sur \overline{V}_i indépendamment de t et i pour t proche de t_0 . Le raisonnement habituel nous donne que la suite p_{i,t_n} est bornée dans L_2^1 et admet donc une sous-suite convergente pour la topologie faible. La limite de cette suite ne peut être que p_{i,t_0} car la famille de projecteurs est en fait globalement définie sur la déformation et est C^∞ en dehors d'un ensemble de codimension 2. Par conséquent, il y a convergence forte dans L^2 d'une sous-suite de p_{i,t_n} vers p_{i,t_0} . On en déduit le résultat escompté : $(\text{Id} - p_{i,t_0}) \circ \pi_i = 0$.

Il existe donc un sous-faisceau \mathcal{F}_{t_0} de $\mathcal{E}(t_0)^{**}$ de degré supérieur ou égal à la limite supérieure des degrés des \mathcal{F}_{t_n} (cf lemme 3.6 pour cette dernière propriété).

La proposition 3.9 nous dit alors que le faisceau $\mathcal{F}'_{t_0} = \mathcal{F}_{t_0} \cap \mathcal{E}(t_0)$ conserve le même degré et vérifie donc les propriétés souhaitées. \square

On généralise alors le résultat d'ouverture de la stabilité au cas des faisceaux sans torsion :

Théorème 4.12 (Ouverture de la stabilité). *Soit $(\mathcal{X} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau*

cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de T . Alors l'ensemble

$$\{t \in T \mid \mathcal{E}(t) \text{ est } g_t\text{-stable sur } X_t\}$$

est ouvert dans T .

Démonstration. Même raisonnement que dans le cas des fibrés en remarquant que la platitude implique la constance du rang des faisceaux $\mathcal{E}(t)$ lorsque t varie. \square

On répondra dans la seconde partie de ce mémoire à une question complémentaire : la non semi-stabilité est-elle une condition ouverte ? On verra qu'il est possible de déformer une surface dont le fibré tangent est non semi-stable pour toute métrique de Gauduchon en surfaces dont le fibré tangent est stable pour toute métrique de Gauduchon (cf. théorème 6.20).

Deuxième partie

Surfaces de la classe *VII* et surfaces à coquilles sphériques globales

Chapitre 5

Généralités

5.1 Construction

Nous rappelons ici la construction des surfaces à coquilles sphériques globales (CSG en abrégé) telle qu'elle est présentée dans l'article de G. Dloussky [Dlo84]. Les résultats sur les feuilletages et le comportement des courbes peuvent se trouver dans [DO99] et [DK98].

Soit B la boule unité de \mathbb{C}^2 , on définit la notion de *tour finie d'éclatements* au-dessus de l'origine comme suit :

Définition 5.1. Une application $\Pi = \Pi_0 \circ \dots \circ \Pi_{n-1} : \hat{B} = B_{n-1} \rightarrow B$ est une tour finie d'éclatements au-dessus de 0 si

- $\hat{B}_{-1} = B$; $O_{-1} = 0$;
- pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\Pi_i : B_i \rightarrow B_{i-1}$ est l'éclatement au point O_{i-1}
- pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $O_i \in C_i := \Pi_i^{-1}(O_{i-1})$.

Soit alors $F = \Pi\sigma : B \circlearrowleft$ un germe contractant où

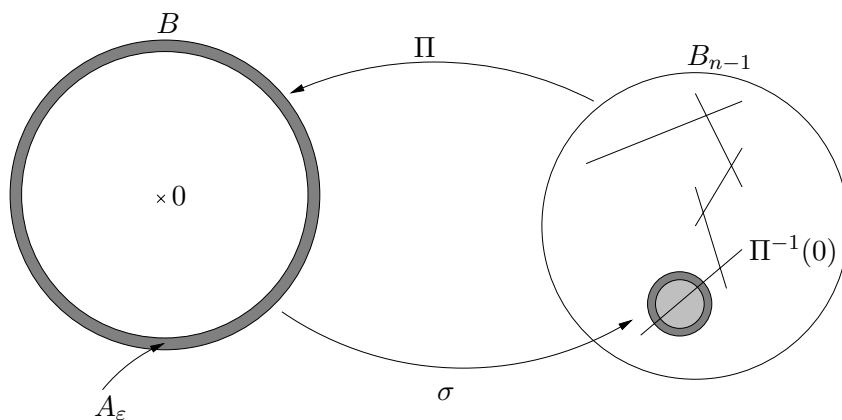
$$\Pi = \Pi_0 \circ \dots \circ \Pi_{n-1} : \hat{B} \rightarrow B$$

est une tour finie d'éclatements au-dessus de l'origine et $\sigma : B \rightarrow \hat{B}$ est un germe d'isomorphisme vérifiant $\sigma(0) = O_{n-1}$. On peut supposer que σ est défini sur un voisinage de la boule unité fermée $\overline{B} \subset \mathbb{C}^2$ et que $\sigma(B)$ est relativement compact dans B_{n-1} . Soit $\varepsilon \ll 1$ et considérons l'anneau $A_\varepsilon := B \setminus (1-\varepsilon)B$. L'application $\sigma \circ \Pi$ envoie un voisinage du bord de B_{n-1} injectivement dans B_{n-1} , en effet, la restriction

$$\sigma\Pi : \Pi^{-1}(A_\varepsilon) \rightarrow \sigma(A_\varepsilon)$$

est un biholomorphisme. On obtient une surface compacte minimale $S = S(\Pi, \sigma)$ en recollant $\Pi^{-1}(A_\varepsilon)$ et $\sigma(A_\varepsilon)$:

$$S := (B_{n-1}/\sigma((1-\varepsilon)B))/\sim .$$



Les nombres de Betti de cette surface (c'est à dire la dimension des espaces de cohomologie $H^i(S, \mathbb{R})$) sont $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) = n$. Elle appartient à la classe VII de la classification de Kodaira. Les courbes exceptionnelles de première espèce dans B_{n-1} deviennent soit des courbes rationnelles non singulières d'auto-intersection inférieure ou égale à -2 , soit des courbes rationnelles singulières dans S .

On a une caractérisation plus géométrique de ces surfaces :

Définition 5.2 (Coquille sphérique globale). Soit S une surface complexe compacte. Une coquille sphérique globale (en abrégé CSG) est un plongement holomorphe $i : A_\varepsilon \hookrightarrow S$ qui ne disconnecte pas S (c'est à dire $S - i(A_\varepsilon)$ reste connexe).

Dans la construction définie ci-dessus

$$\sigma : A_\varepsilon \hookrightarrow B_{n-1} \setminus \sigma((1 - \varepsilon)B) \hookrightarrow S$$

définit une coquille sphérique globale. Notons ici que si l'on se donne deux germes F et F' comme ci-dessus, s'il existe un germe d'isomorphisme qui conjugue F et F' , alors il induit un isomorphisme entre les deux surfaces S et S' .

Réciproquement, étant donnée une surface S contenant une coquille sphérique globale, Ma. Kato [Kat78] a prouvé que S provenait d'une construction comme ci-dessus. Pour $b_2(S) = n$, il y a n classes d'homotopie de CSG et n classes d'isomorphisme de germes.

Le revêtement universel \tilde{S} de S est obtenu en recollant une suite de copies $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'anneaux $A_i := B_{n-1} \setminus \overline{\sigma((1 - \varepsilon)B)}$. La composante pseudo-concave du bord de A_i est recollée avec celle pseudo-convexe de A_{i+1} . L'automorphisme de revêtement $\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ envoie A_i sur A_{i+1} . Dans \tilde{S} on trouve une famille dénombrable de courbes rationnelles avec un ordre canonique induit par "l'ordre de création". Fixons une courbe C_0 dans ce revêtement universel et notons $a(S) = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$; $a_i = -C_i^2$ la suite des opposés des auto-intersections des courbes du revêtement universel. La suite $a(S)$ est périodique de période $b_2(S) = n$. On peut la partitionner en séquences régulières $r_m = (2, \dots, 2)$ de longueur m et en

séquences singulières $s_p = (p+2, 2, \dots, 2)$ de longueur p . La suite $a(S)$ détermine complètement la matrice d'intersection $M(S)$ des courbes de S . On peut définir l'invariant $\sigma_n(S) = \sum_i^{i+n-1} a_j = \text{tr}M(S) + 2N$ où N est le nombre de courbes singulières de S . C'est un entier compris entre $2n$ et $3n$.

On définit également un autre invariant : la trace du germe $F = \Pi\sigma$ (resp. de la surface $S(\Pi, \sigma)$) est par définition la trace $\text{tr}DF(0)$ de l'application tangente $DF(0)$ au point fixe de F . Cette trace est indépendante du choix de la CSG et ne dépend que de la classe d'isomorphisme de S . C'est pourquoi on la notera par la suite $\text{tr}(S)$. On a toujours $0 \leq \text{tr}(S) < 1$.

On divise usuellement les surfaces à CSG en plusieurs sous-classes à partir des invariants que l'on vient de définir.

- **Les surfaces de trace** $\text{tr}(S) \neq 0$; Cette condition est équivalente à l'une des suivantes :
 - pour tout $0 \leq i \leq n-1$, le point O_i n'est jamais à l'intersection de C_i avec la transformée stricte d'une autre courbe C_k ($k < i$) ou de $\sigma^{-1}(C_{n-1})$;
 - S contient un cycle Γ de courbes rationnelles tel que $\Gamma^2 = 0$;
 - toute courbe rationnelle du revêtement universel est d'auto-intersection -2 ;
 - la somme $\sigma_n(S) = 2n$.

Cette catégorie comporte encore deux sous classes : on dit que le germe est **d'Inoue** ou que la surface est d'Inoue (ou encore de type **Inoue parabolique**) si une des conditions suivantes équivalentes est vérifiée :

- F est conjugué à $N(z) = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$;
- S admet un champ de vecteur global;
- S admet une courbe elliptique;

alors les seules courbes de S sont le cycle Γ et la courbe elliptique E d'auto-intersection $E^2 = -n$.

Dans tous les autres cas avec $\text{tr}(S) \neq 0$, la surface S ne contient que le cycle Γ .

- **Les surfaces à trace nulle** $\text{tr}(S) = 0$. Cette condition étant équivalente à l'une des conditions suivantes :
 - Il existe un indice i pour lequel O_i est à l'intersection de deux courbes, ou $\sigma(0)$ est à l'intersection de deux courbes, ou la transformée stricte de $\sigma^{-1}(C_{n-1})$ par Π_0 passe par O_0 ;
 - $\sigma_n(S) > 2n$;
 - $a(S)$ contient au moins une séquence singulière;
 - la matrice $M(S)$ est définie négative.

On divise les surfaces à trace nulle en deux sous-classes :

- les surfaces **intermédiaires** pour lesquelles $2n < \sigma_n(S) < 3n$, c'est-à-dire qu'il y a au moins une séquence régulière dans $a(S)$ ou autrement dit, au moins un des points O_i n'est pas à l'intersection de deux courbes. Dans ce cas le diviseur maximal de la surface S est constitué par un cycle de courbes rationnelles sur lequel viennent se greffer des arbres.
- les surfaces **d'Inoue-Hirzebruch** qui correspondent à $\sigma_n(S) = 3n$ pour lesquelles le diviseur maximal est constitué d'un ou deux cycles de courbes

rationnelles (selon le cas on dit que la surface est *paire* ou *impaire*).

5.2 Feuilletages et champs tordus

On considère ici une surface à coquille sphérique globale de trace nulle S . On note $D = \sum_{i=1}^n D_i$ le diviseur maximal.

Définition 5.3.

- Un diviseur $D_{-\mathcal{K}}$ est dit *numériquement anti-canonique* s'il existe un fibré en droite plat L tel que $-\mathcal{K} \otimes L = [D_{-\mathcal{K}}]$.
- Un diviseur D_θ est dit *numériquement tangent* s'il existe un fibré en droite plat L tel que $\Theta \otimes L$ admette une section méromorphe globale θ qui satisfait $(\theta) = D_\theta$, c'est-à-dire $h^0(S, \Theta \otimes L \otimes \mathcal{O}(-D_\theta)) \geq 1$.

On peut montrer que l'existence des diviseurs numériquement anti-canoniques et numériquement tangents est liée à l'existence de solutions entières à un système d'équations linéaires dont la matrice est la matrice d'intersection $M(S)$. Cette matrice étant définie négative ([Dlo84]), les \mathbb{Q} diviseurs $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ et $D_\theta^{\mathbb{Q}}$ existent donc toujours et sont reliés par la relation $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}} = D + D_\theta^{\mathbb{Q}}$. En particulier $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ est un diviseur si et seulement si $D_\theta^{\mathbb{Q}}$ est un diviseur et dans ce cas on montre que $D_\theta^{\mathbb{Q}} \geq 0$

Rappelons que si E est un diviseur effectif de S , alors le faisceau localement libre $\Omega_S^1(\log E)$ défini par

$$\Omega_S^1(\log E)(U) := \{\omega \in \Omega^1(E_{red})(U) \mid d\omega \in \Omega_S^2(E_{red})(U)\}$$

où E_{red} désigne le diviseur réduit associé à E , est appelé *faisceau des formes méromorphes logarithmiques* de pôle E . Si $z \in E$ est un point régulier de $E = \{z_1 = 0\}$, alors $\Omega_S^1(\log E)$ est engendré par $\frac{dz_1}{z_1}$ et dz_2 ; si $z \in E$ est un point singulier de $E = \{z_1 z_2 = 0\}$, alors $\Omega_S^1(\log E)$ est engendré par $\frac{dz_1}{z_1}$ et $\frac{dz_2}{z_2}$. Une déformation logarithmique de la surface S par rapport à E est définie par des cocycles à valeur dans le faisceau dual $\Theta(-\log E) := \mathcal{H}om(\Omega_S^1(E), \mathcal{O}_S)$ (voir [Kaw78]). Il s'en suit que la configuration des courbes est maintenue dans une telle déformation.

Nous aurons également besoin d'une description explicite de $Pic^{\text{plat}}(S)$, le groupe des fibrés en droites plats sur une surface à CSG avec $b_2(S) > 0$. Soit $g : \pi_1(S) \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ une représentation à laquelle on associe l'action linéaire de $\pi_1(S)$ sur \mathbb{C} suivante : à tout $u \in \pi_1(S)$ on associe l'homothétie de rapport $g(u)^{-1}$. D'autre part, $\pi_1(S)$ agit sur le revêtement universel \tilde{S} de S ; on peut donc quotienter $\tilde{S} \times \mathbb{C}$ par l'action diagonale de $\pi_1(S)$. Le quotient $(\tilde{S} \times \mathbb{C})/\pi_1(S)$ est un fibré en droites holomorphe sur S noté $L^g \in Pic(S)$. On obtient donc un morphisme de groupe

$$\varphi : \mathcal{H}om(\pi_1(S), \mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^* \rightarrow Pic^{\text{plat}}(S) = \{L \in Pic(S) \mid c_1^{\mathbb{R}}(L) = 0\}$$

qui est surjectif. On montre ensuite qu'il est injectif en comparant les suites exponentielles pour les faisceaux \mathbb{C}^* et \mathcal{O}^* et en utilisant que $H^1(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O})$ est injective ce qui nous donne la paramétrisation souhaitée des fibrés plats par \mathbb{C}^* . On trouve une description plus explicite en termes de cocycles dans [DO99].

Intéressons nous d'abord au cas intermédiaire. Soit S une surface à CSG de trace nulle avec $2n < \sigma_n(S) < 3n$. Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 5.4 ([DO99]). *S admet un unique feuilletage \mathcal{F} donné par une forme logarithmique tordu $\omega \in H^0(S, \Omega_S^1(\log D) \otimes L^k)$ où $k = k(S)$ est un entier supérieur ou égal à 2 ne dépendant que de la classe d'isomorphisme de S . Ce feuilletage est unique et laisse les courbes invariantes. Ses points singuliers sont exactement les n points d'intersection des courbes de D .*

Théorème 5.5 ([DO99]). *Soit M une matrice définie négative à coefficients entiers tel que le système linéaire définissant les diviseurs numériquement anti-canoniques ou tangents ait des solutions dans \mathbb{Z} .*

- *Soit alors S une surface à CSG de type intermédiaire dont la matrice d'intersection vérifie $M(S) = M$. Alors il existe un unique diviseur numériquement anti-canonique et un unique nombre complexe $\kappa = \kappa(S)$ tel que $\mathcal{K}^{-1} \otimes L^\kappa = [D_{-\mathcal{K}}]$ pour lequel $H^0(S, \mathcal{K}^{-1} \otimes L^\kappa) \neq 0$. On dit alors que la singularité dont la résolution minimale est D est numériquement Gorenstein (cf la remarque ci après).*
- *Si S est une surface à CSG de type intermédiaire avec $M(S) = M$, alors il existe un unique diviseur numériquement tangent D_θ et un unique nombre complexe $\lambda = \lambda(S)$ tel que*

$$H^0(S, \Theta(-D_\theta) \otimes L^\lambda) \neq 0$$

On a alors la relation $\lambda(S) = k(S)\kappa(S)$

- *Soit $\mathcal{S} \rightarrow U$ une famille logarithmique verselle de surfaces à matrice d'intersection fixée M . Alors il existe une fonction holomorphe λ sur U telle que $\lambda(S_u) = \lambda(u)$ et les surfaces qui admettent un champ de vecteur global se trouvent au-dessus de l'hypersurface $\{u \mid \lambda(u) = 1\}$. On peut également définir une fonction holomorphe κ telle que $\kappa(u) = \kappa(S_u)$ et les surfaces admettant un 2-champ de vecteurs sont exactement celles de l'hypersurface $\{u \mid \kappa(u) = 1\}$.*

Remarque 5.6. Si (X, p) est une singularité normale de surface et $\pi : S \rightarrow X$ sa résolution minimale de diviseur maximal $D = \cup_i D_i$, on dit que (X, p) est numériquement Gorenstein s'il existe un diviseur D_{-K} qui satisfait $D_{-K} \cdot D_i = -\mathcal{K} \cdot D_i$ pour tout i . On dit que (X, p) est Gorenstein s'il existe un voisinage U de p et une 2-forme sur $U \setminus \{p\}$ partout non nulle.

Regardons maintenant le cas des surfaces de Inoue-Hirzebruch (ie. $\sigma_n(S) = 3n$).

Théorème 5.7 ([DO99]). *Si S est une surface de type Inoue-Hirzebruch, alors*

- *S admet exactement deux feuilletages holomorphes. Dans le complémentaire des courbes rationnelles, les feuilles sont soit toutes isomorphes à \mathbb{C} , soit toutes isomorphes au disque unité Δ ;*
- *Les diviseurs numériques existent toujours : $D_{-\kappa} = D$ et $D_\theta = 0$;*
- *Les deux feuilletages sont donnés par des champs de vecteurs tordus $\theta_i \in H^0(S, \Theta \otimes L^{\lambda_i})$, $1 \leq i \leq 2$ où $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. En fait λ_1 et λ_2 sont des irrationnels quadratiques conjugués. On a également deux formes logarithmiques tordus $\omega_i \in H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes L^{\lambda_i})$.*

Le cas trace non nulle a été traité dans un article de G. Dloussky et F. Kohler ([DK98]) qui ont obtenu :

Théorème 5.8 ([DK98]). *Soit S une surface minimale compacte à CSG de trace non nulle.*

- *S admet un unique feuilletage holomorphe singulier dont les singularités sont exactement les points d'intersection des courbes rationnelles ;*
- *En dehors des courbes, les feuilles sont toutes isomorphes à \mathbb{C} et s'accablent sur le cycle de courbes rationnelles ;*
- *Le feuilletage est donné par une 1-forme méromorphe globale avec un pôle logarithmique sur le cycle \mathcal{T} .*

Chapitre 6

Simplicité et stabilité

La notion de stabilité pour un fibré a été introduite dans la première partie (définition 1.7). On peut définir une notion plus faible qui est celle de simplicité :

Définition 6.1. Un fibré holomorphe complexe E sur une variété complexe compacte X est dit *simple* si toute section holomorphe de $\text{End}E = E^* \otimes E$ est une homothétie λId .

Le lien entre stabilité et simplicité est contenu dans la proposition suivante :

Proposition 6.2 (cf. [Kob87] Prop. 7.14). *Soit (X, g) une variété complexe compacte munie d'une métrique de Gauduchon. Alors tout fibré vectoriel g -stable est simple.*

Démonstration. Soit E un fibré vectoriel g -stable. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E et a une valeur propre de la restriction $f : E_x \rightarrow E_x$ en un point arbitraire $x \in X$. Regardons l'endomorphisme $g = f - a\text{Id}_E$. Supposons que g n'est pas l'endomorphisme nul. Nous allons montrer que g est injectif. En effet, notons $\mathcal{F} = g(E)$ alors \mathcal{F} est un quotient sans torsion de E . Puisque E est g -stable, si $\text{rang}(E) > \text{rang}(\mathcal{F})$ alors $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E) < \mu(\mathcal{F})$ ce qui est impossible ; donc $\text{rang}(E) = \text{rang}(\mathcal{F})$. Par conséquent g est injectif ce qui est exclu par définition et on a $g = 0$. \square

Étudions alors le comportement du fibré tangent d'une surface à coquille sphérique globale vis à vis de ces notions de simplicité et de stabilité. Nous commencerons par la simplicité.

6.1 Simplicité et surfaces de la classe VII₀

Soit S une surface complexe compacte de la classe VII₀. On notera de manière standard Θ le fibré tangent, Ω^1 le fibré dual des 1-formes holomorphes et \mathcal{K} le fibré canonique. On suppose dans toute la suite que le second nombre de Betti $b_2(S)$ est strictement positif, on sait alors que la surface S n'admet pas de feuilletage régulier (cf [Bru97] prop. 9).

Proposition 6.3. *Le fibré Θ est simple si et seulement s'il n'existe pas d'extension :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$$

avec \mathcal{L} un fibré en droite et \mathcal{Z} un nombre fini de points telle que $H^0(S, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2) \neq 0$.

Démonstration. Supposons S non simple. Il existe un endomorphisme f du fibré tangent Θ qui n'est pas une homothétie. Les coefficients du polynôme caractéristique de f sont des fonctions holomorphes sur S qui est compacte, ce sont donc des constantes tout comme ses racines qui sont les valeurs propres de f .

L'endomorphisme f ne peut avoir deux valeurs propres distinctes λ et μ . Sinon, $\mathcal{E} = \text{Ker}(f - \lambda Id)$ et $\mathcal{G} = \text{Ker}(f - \mu Id)$ sont deux sous-faisceaux de Θ de rang 1 en somme directe : $\Theta = \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}$. Mais alors, \mathcal{F} et \mathcal{G} sont tous les deux des faisceaux réflexifs d'après le lemme 2.1. Comme nous nous plaçons sur une surface, ce sont des faisceaux localement libres et Θ scinde en une somme directe de deux sous-fibrés, ce qui nous livre deux feuilletages réguliers sur S . Cela n'arrive pas sur une surface de la classe VII avec $b_2(S) > 0$ ([Bru97]).

Notons λ l'unique valeur propre de f et $\mathcal{N} = \text{Ker}(f - \lambda Id)$. C'est un sous-faisceau cohérent de Θ qui donne lieu à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{Q} désigne le quotient des deux faisceaux.

On quotiente à droite par la torsion, ce qui donne la suite exacte horizontale suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{N} & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}^T} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \searrow & & \uparrow \\
 & & & & & & \mathcal{Q}
 \end{array}$$

Le fibré Θ est libre, celui de droite est sans torsion, donc \mathcal{L} est réflexif (cf 2.1), c'est en fait le fibré saturé de \mathcal{N} . Son ensemble singulier est de codimension 3, il est donc vide : \mathcal{L} est un faisceau localement libre de rang 1.

On peut écrire plus précisément cette suite exacte car le lieu singulier de $\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}^T}$ est constitué de points \mathcal{Z} :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$$

Considérons alors l'endomorphisme de $g = f - \lambda Id$ de Θ . Il s'annule sur l'image de \mathcal{L} et passe donc au quotient en un morphisme \bar{g} de $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ dans Θ . On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\alpha} & \Theta & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow g & \nearrow \bar{g} & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\alpha} & \Theta & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Regardons alors le morphisme $\beta \circ \bar{g}$; en notant i l'injection canonique de $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ dans $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$, on peut considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \\
\downarrow \beta \circ \bar{g} & \searrow g' & \\
\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}
\end{array}$$

En dehors de l'ensemble de points \mathcal{Z} , le morphisme g' va du fibré en droite $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ dans lui-même et est donc de la forme $g'(z) = f(z)\text{Id}$ où f est une fonction holomorphe sur $S \setminus \mathcal{Z}$. D'après le théorème de Hartogs, \mathcal{Z} étant de codimension 2, f se prolonge en une fonction holomorphe sur S tout entière. Mais S étant compacte, cette fonction est donc constante : il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = c$. Considérons le morphisme

$$f' := c\text{Id} : \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

Il coïncide avec g' en dehors de \mathcal{Z} et donc partout : en effet si le morphisme $(g' - f')$ n'est pas nul, il induit une injection

$$[\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}]/(\text{Ker}(f' - g')) \hookrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

or le premier faisceau est de torsion et le second localement libre ce qui est impossible. Par conséquent, $g' = c\text{Id} = \beta \circ \bar{g}$. On en déduit que le morphisme g/c définit une section de la suite exacte et donc un scindage du fibré tangent Θ . On a vu précédemment que c'était impossible. On en déduit que $\beta \circ \bar{g} = 0$. On peut donc voir \bar{g} comme une application, non nulle, à valeur dans \mathcal{L} c'est-à-dire comme un morphisme de $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ dans \mathcal{L} .

Remarquons ici que la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0$$

induit la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{L})$$

Puisque \mathcal{Z} est de codimension 2 et \mathcal{L} un fibré en droite, on a $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{L}) = 0$ (voir [GH78] par exemple). On en déduit que les deux premiers faisceaux sont

identiques et on a donc construit un morphisme non nul \bar{g} élément de $\mathcal{H}om(\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L})$ c'est-à-dire une section non nulle de $H^0(\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2)$.

Réciproquement, supposons l'existence d'une extension non triviale :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$$

et d'un élément $g' \in H^0(\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2)$. D'après l'inclusion $\mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \hookrightarrow \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1}$, on obtient par restriction un morphisme g comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\alpha} & \Theta & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \nearrow g \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \xrightarrow{\alpha} & \Theta & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Alors, $h = \alpha \circ g \circ \beta$ est un endomorphisme de Θ . Puisque α est injective, et β surjective, h est non nul (car g est non nul) et nilpotent (car $\beta \circ \alpha = 0$) et n'est donc pas de la forme λId . On en déduit que Θ n'est pas simple. \square

Remarque 6.4. La proposition ci-dessus est liée à l'existence de feuilletages (singuliers ou non) sur la surface considérée. En effet toute décomposition comme ci-dessus, correspond à un feuilletage singulier \mathcal{F} de fibré tangent $\mathcal{L} = T_{\mathcal{F}}$. Si l'on connaît le nombre de feuilletages et que l'on sait caractériser $T_{\mathcal{F}}$, on peut alors faire la liste des extensions possibles.

Remarque 6.5. Dans la même idée, il est parfois plus facile de travailler avec le fibré conormal $N_{\mathcal{F}}^*$ et donc de travailler avec le fibré cotangent. Or Θ est simple si et seulement si Ω^1 est simple. En suivant le même raisonnement, on montre :

Proposition 6.6. *Le fibré Θ est simple si et seulement si il n'existe pas d'extensions de la forme :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$$

avec $H^0(S, \mathcal{K}^{-1} \otimes \mathcal{L}^2) \neq 0$.

6.2 Les surfaces à coquille sphérique globale

On se place maintenant dans le cas où S est une surface de la classe VII_0 avec $b_2(S) > 0$ contenant une coquille sphérique globale. Trois cas se présentent alors :

6.2.1 Surfaces de trace nulle de type intermédiaire

Il existe sur ces surfaces un unique feuilletage \mathcal{F} et on notera de manière usuelle $T_{\mathcal{F}}$ et $N_{\mathcal{F}}$ les fibrés tangents et cotangents (voir [Bru97] pour les constructions). On notera D le diviseur maximal de S .

Supposons tout d'abord qu'il existe un diviseur numériquement tangent D_{θ} (ce qui équivaut à l'existence d'un diviseur numériquement anti-canonique $D_{-\mathcal{K}}$).

Proposition 6.7. *Soit S de type intermédiaire possédant un diviseur numériquement tangent. Soit λ, k, κ comme dans les théorèmes 5.4 et 5.5, alors le fibré tangent de S est simple sauf si $D_{\theta} \geq D$ et $\lambda k = 1$.*

Démonstration. D'après 6.3, le fibré tangent Θ de S n'est pas simple si et seulement s'il existe une extension vérifiant $H^0(S, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2) \neq 0$. Mais puisque le feuilletage \mathcal{F} est unique, $\mathcal{L} = T_{\mathcal{F}} = [D_{\theta}] \otimes L^{1/\lambda}$. Donc,

$$\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^2 = [-D_{-\mathcal{K}}] \otimes L^{\kappa} \otimes [2D_{\theta}] \otimes L^{1/\lambda^2} = [D_{\theta}] \otimes [-D] \otimes L^{1/(\lambda k)}$$

S'il existe une section non nulle de ce fibré, notons F son diviseur d'annulation (F est donc un diviseur effectif) On a :

$$[F] = [D_{\theta}] \otimes [-D] \otimes L^{1/(\lambda k)}$$

Le diviseur $F - D_{\theta} + D$ est plat, il est donc nul (cf [Nak84], la forme d'intersection est définie négative sur une telle surface). On déduit que $F = D_{\theta} - D \geq 0$ et que le fibré $L^{1/(\lambda k)}$ est trivial ce qui nous donne la condition $\lambda k = 1$.

Réciproquement, sous ces conditions $H^0(S, \mathcal{K} \otimes T_{\mathcal{F}}^2) \neq 0$. \square

Remarque 6.8. Le cas de non simplicité peut bel et bien se produire pour une surface avec $a(S) = (\overline{3, 2, \dots, 2})$ et $b_2(S) > 2$. Dans ce cas le diviseur numériquement tangent existe et contient D (cf. lemme 6.24). Le paramètre λ , quant à lui, peut toujours être choisi égal à $1/k$ dans une déformation logarithmique de la surface.

Dans le cas général, le feuilletage \mathcal{F} est toujours donné par une 1-forme logarithmique tordue $\omega \in \Omega^1(\log D) \otimes L^k$ (cf. théorème 5.4). Il est donc plus agréable de travailler avec le fibré cotangent et d'utiliser la remarque 6.5. La 1-forme logarithmique est une section du faisceau $\Omega^1(D) \otimes L^k$. Le fibré $[-D] \otimes L^{1/k}$ est donc un sous-faisceau de Ω^1 . L'unicité du feuilletage nous dit que c'est le seul possible et nous donne comme précédemment la condition de non-simplicité : $H^0(S, \mathcal{K}^{-1} \otimes N_{\mathcal{F}}^{-2}) \neq 0$ avec ici $N_{\mathcal{F}}^{-1} = [-D] \otimes L^{\frac{1}{k}}$. La condition devient : $H^0(S, \mathcal{K}^{-1} \otimes [-2D] \otimes L^{\frac{1}{k^2}}) \neq 0$. S'il existe une section holomorphe non triviale, on notera F son diviseur d'annulation. C'est un diviseur effectif, et on a :

$$[F] = \mathcal{K}^{-1} \otimes [-2D] \otimes L^{\frac{1}{k^2}}$$

Le \mathbb{Q} -diviseur anticanonique $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ existe toujours, on regarde l'égalité précédente dans $H^2(S, \mathbb{Q})$, on a : $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}} = F + 2D$. On en déduit qu'obligatoirement $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ est un vrai diviseur, élément de $H^2(S, \mathbb{Z})$. Cela nous ramène au cas précédent où le diviseur numériquement tangent existe. On a donc obtenu :

Proposition 6.9. *Soit S une surface à coquille sphérique globale de trace nulle de type intermédiaire, alors le fibré tangent de S est simple sauf si la singularité de résolution minimale D est numériquement Gorenstein avec $D_\theta \geq D$ et $\lambda k = 1$.*

6.2.2 Surfaces de Inoue-Hirzebruch

Si S est une surface de Inoue-Hirzebruch, elle admet deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} qui sont donnés par des champs tordus éléments de $H^0(S, \Theta \otimes L)$ et $H^0(S, \Theta \otimes L^{-1})$ où L est un fibré plat sur S . Ces champs ne s'annulent qu'en des points de S , donc $T_{\mathcal{F}} = L^{-1}$ et $T_{\mathcal{G}} = L$.

Proposition 6.10. *Soit S une surface de Inoue-Hirzebruch. Alors le fibré tangent de S est simple.*

Démonstration. Sinon, il existe comme précédemment une extension non triviale de Θ , associée à l'un des feuilletages (disons \mathcal{F}) telle que $H^0(S, \mathcal{K} \otimes T_{\mathcal{F}}^2) = H^0(S, \mathcal{K} \otimes L^{-2}) \neq 0$.

Lemme 6.11. *Soit S une surface de la classe VII_0 . Alors, quels que soient $m \in \mathbb{N}^*$ et L fibré plat sur S , on a : $H^0(S, \mathcal{K}^m \otimes L) = 0$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une section non nulle s de $\mathcal{K}^m \otimes L$ et soit $E = (s)$ son diviseur d'annulation. On a $E = m\mathcal{K} + L$. Mais pour toute courbe irréductible C , on a $\mathcal{K}C \geq 0$ (cf [Nak84]). Puisque E est effectif, $EC \geq 0$. Alors, $E^2 = E(m\mathcal{K} + L) = mEK + EL \geq 0$. Ceci implique que $E = 0$ (la forme d'intersection est définie négative sur les surfaces de la classe VII). Donc $m\mathcal{K}$ est un fibré plat, ce qui n'est bien-sûr pas le cas. \square

En appliquant le lemme, on aboutit immédiatement à une contradiction. \square

6.2.3 Surfaces de trace non nulle

Supposons d'abord que S est une surface d'Inoue parabolique. Il existe une courbe elliptique E et un cycle de courbes rationnelles Γ . Il y a sur S un unique feuilletage (théorème 5.8) défini par un champ global ou par une 1-forme logarithmique $\omega \in H^0(\Omega^1(\log \Gamma))$. En appliquant la même méthode qu'en 6.2.1, on obtient la condition de non-simplicité : $H^0(S, \mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma)) \neq 0$.

Soit α une section de $\mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma)$, elle correspond à un 2 champ défini au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 , s'annulant à l'ordre 2 sur $z_2 = 0$ et stable par le

germe $F(z_1, z_2) = (z_1 z_2^n t^n, t z_2)$ (qui définit une surface d’Inoue, voir les rappels plus haut et [DK98]) :

$$\alpha = z_2^2 a(z) \frac{\partial}{\partial z_1} \wedge \frac{\partial}{\partial z_2}$$

La condition d’invariance donne

$$t^{n-1} z_2^n a(z) = a(F(z))$$

On en déduit $a(0) = 0$, on peut donc écrire $a(z) = z_1 b(z) + c(z_2)$. En remplaçant, on obtient en particulier :

$$t^{n-1} z_2^n c(z_2) = c(t z_2)$$

ce qui donne $c = 0$. On a alors $b(z) = t b(F(z))$, donc $b = 0$. Par conséquent, il n’y a pas de section non triviale de $\mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma)$.

Dans le cas générique où la courbe elliptique n’existe pas, le feuilletage est toujours défini par une telle 1-forme logarithmique. La condition de non-simplicité reste donc

$$H^0(S, \mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma)) \neq 0.$$

Or tout germe correspondant à une surface de trace non nulle est formellement conjugué à un germe de surface d’Inoue. Cette conjugaison transformerait tout élément de $H^0(\mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma))$ en une section formelle du même fibré sur la surface d’Inoue. Or le raisonnement précédent exclu l’existence d’une telle section. Dans tous les cas $H^0(S, \mathcal{K}^{-1}(-2\Gamma)) = 0$.

On a démontré :

Proposition 6.12. *Soit S une surface de trace non nulle. Le fibré tangent de S est simple.*

On a donc le résultat suivant :

Théorème 6.13. *Soit S une surface à CSG de la classe VII_0 . Alors le fibré tangent de S est simple sauf si S est à trace nulle de type intermédiaire avec $D_\theta \geq D$ et $\lambda k = 1$.*

6.3 Stabilité des surfaces à CSG

Pour une surface à coquille sphérique, on connaît tous les sous-faisceaux possibles du fibré tangent puisqu’on a la liste des feuilletages singuliers de la surface. On peut essayer d’exprimer les degrés de ces sous-faisceaux pour vérifier la condition de stabilité (voir définition 1.7). On se fixe donc une métrique de Gauduchon g sur S .

Définition 6.14. On dira qu’une surface S est stable (resp. semi-stable ou instable) si son fibré tangent est stable (resp. semi-stable ou instable).

Plaçons nous dans le cas d'une surface S à CSG de trace nulle du cas intermédiaire et supposons qu'il existe un diviseur numériquement tangent. D'après le théorème 5.4, il existe un unique feuilletage donné par le champ tordu $\theta \in H^0(S, \Theta(-D_\theta) \otimes L^\lambda)$. On a donc l'injection

$$L^{1/\lambda} \otimes \mathcal{O}(D_\theta) \hookrightarrow \Theta$$

La condition de stabilité s'écrit

$$2\deg(L^{1/\lambda} \otimes \mathcal{O}(D_\theta)) < \deg(-\mathcal{K})$$

avec

$$\begin{aligned} \deg(-\mathcal{K}) &= \deg(L^{1/\kappa} \otimes \mathcal{O}(D_{-\kappa})) \\ &= \deg(L^{1/\kappa}) + \deg[D] + \deg[D_\theta] \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$2C \ln \frac{1}{|\lambda|} + 2\deg[D_\theta] < C \ln \frac{1}{|\kappa|} + \deg[D] + \deg[D_\theta]$$

donc à

$$\deg[D_\theta] - \deg[D] < C \left(\ln \frac{|\lambda|^2}{|\kappa|} \right) = C \ln \left(|k\lambda| \right)$$

La constante $C \in \mathbb{R}$ dépend de la métrique et l'égalité $\deg L^\alpha = C \ln |\alpha|$ provient du lemme suivant :

Lemme 6.15. *Soit S munie d'une métrique de Gauduchon g et identifications de manière canonique $\text{Pic}^{\text{plat}}(S)$ à \mathbb{C}^* , alors il existe une unique constante C telle que pour tout fibré plat $L = L^\alpha$ on ait*

$$\deg(L^\alpha) = C \ln |\alpha|$$

Démonstration. L'application $\deg : \text{Pic}^{\text{plat}}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes de Lie et les morphismes continus de (\mathbb{C}^*, \times) dans $(\mathbb{R}, +)$ sont tous de la forme $\alpha \rightarrow C \ln |\alpha|$ pour un certain réel C non nul. \square

Dans le cas où la singularité n'est pas numériquement Gorenstein et dans le cas de trace non nulle, l'unique feuilletage de la surface est donné par une 1-forme logarithmique tordue par le fibré $L^{k(S)}$ (on prend $k(S) = 1$ si S est de trace non nulle). On en déduit l'expression du fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ de ce feuilletage qui est l'unique sous-faisceau de $\Omega^1 : N_{\mathcal{F}}^* = \mathcal{O}(-D) \otimes L^{1/k}$. Puisque Θ_S est stable si et seulement si Ω_S^1 l'est, la condition de stabilité s'écrit

$$2\deg[D] + 2C \ln |k| > \deg(-\mathcal{K}).$$

On a donc obtenu le lemme :

Proposition 6.16. *Soit S à coquille sphérique globale et C la constante réelle donnée par le lemme 6.15 :*

1. *Si S est de trace non nulle ($\sigma_n(S) = 2n$), alors le fibré tangent est stable (resp. semi-stable) si et seulement si*

$$2\deg([D]) > (\geq)\deg(-\mathcal{K}).$$

2. *Si S est de type intermédiaire ($2n < \sigma_n(S) < 3n$) alors le fibré tangent Θ est stable (resp. semi-stable) si et seulement si*

$$2\deg([D]) + 2C \ln |k| > (\geq)\deg(-\mathcal{K})$$

où $k = k(S)$.

S'il existe de plus un diviseur numériquement tangent D_θ , le fibré tangent est stable (resp. semi-stable) si et seulement si

$$\deg[D_\theta] - \deg[D] < (\leq)C \ln(|\lambda k|)$$

En particulier,

- *Si $D_\theta \geq D$ et $|\lambda| > 1/k$, Θ est non semi-stable pour toute métrique de Gauduchon,*
- *Si $D_\theta \leq D$ et $|\lambda| < 1/k$, Θ est stable pour toute métrique de Gauduchon.*

Démonstration. Les conditions de stabilité on déjà été démontrées, pour conclure il faut juste vérifier que le signe de la constante C ne dépend pas de g et est négatif, les deux dernières conditions étant alors de simples comparaisons de signe. Le signe de la constante C provient des lemmes suivants :

Lemme 6.17. *Soit S une surface à CSG de trace non nulle, alors la constante C du lemme 6.15 est strictement négative.*

Démonstration. Comme on l'a vu, on identifie $\text{Pic}^{\text{plat}}(S)$ avec \mathbb{C}^* de sorte que si $t = \text{tr}(S) \neq 0$ alors le cycle Γ de courbes rationnelles est un diviseur plat et $[\Gamma] = L^t$ (cela découle de la description des fibrés plats de [DO99] et de la forme du germe pour une surface de trace non nulle : $F(z_1, z_2) = (t^n z_1 z_2^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^{i+1} z_2^{i+1}, t z_2)$ cf [DK98]). Alors, d'après le lemme 6.15,

$$\deg([\Gamma]) = C \ln |t| = c\text{vol}(\Gamma) > 0$$

et puisque $0 < |t| < 1$ on a $C < 0$. □

Lemme 6.18. *Soit S une surface de trace nulle, alors il existe une déformation $(\mathcal{S}, \Pi, \Delta)$ de S au-dessus du disque Δ telle que :*

1. $S \simeq S_0$;
2. Pour tout $u \neq 0$, $\text{tr}(S_u) \neq 0$;
3. Il existe sur \mathcal{S} une famille C^∞ de métriques de Gauduchon $(g_u)_{u \in \Delta}$;

4. Il existe une unique fonction $C : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ de classe C^∞ telle que

$$\deg_u(L^\alpha) = C(u) \ln |\alpha|$$

5. Il existe une unique fonction holomorphe $t : \Delta \rightarrow \Delta$ telle que $\text{tr}(S_u) = t(u)$.

Démonstration. L'existence d'une telle déformation est immédiate : il suffit de considérer les cartes locales de la tour finie d'éclatements et de déplacer avec un même paramètre les points éclatés qui sont à l'intersection de deux courbes. L'existence de la famille de métriques de Gauduchon découle du théorème 4.5.

La fonction $C : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$ est alors bien définie d'après le lemme 6.15 et d'après le lemme précédent, prend des valeurs négatives en dehors de 0 et donc partout. \square

La conclusion de la proposition 6.16 est alors immédiate. \square

Remarque 6.19. Les deux cas présentés à la fin de la proposition existent bel et bien :

1^{er} cas : On peut avoir le diviseur $D - D_\theta$ positif (exemple surface avec $a(S) = (\overline{32})$ ou $a(S) = (\overline{422232})$). Dans ce cas, quitte à prendre une déformation logarithmique, on peut toujours rendre $|\lambda k|$ plus petit que 1 (théorème 5.5 et [DO99]). On obtient ainsi une surface dont le fibré tangent est stable pour toute métrique de Gauduchon.

2^{ème} cas : On peut réaliser $D - D_\theta$ négatif car le support de D_θ ne contient pas toujours le sommet d'un arbre (cf [DO99], exemple surface avec $a(S) = (\overline{322})$). Il suffit alors que $|k\lambda| > 1$ pour que la condition de non semi-stabilité soit vérifiée. Or ceci peut toujours arriver car on peut faire varier λ dans \mathbb{C}^* dans une déformation logarithmique de la surface et on obtient ainsi une surface dont le fibré tangent est non semi-stable pour toute métrique de Gauduchon.

A partir de ces résultats, on peut donner une réponse à une question générale concernant la notion de stabilité : à savoir si la non semi-stabilité est ouverte dans une déformation.

Théorème 6.20. *Soit S une surface minimale à CSG avec $b_2(S) > 0$. Si $\text{tr}(S) = 0$, alors il existe une déformation $(\mathcal{S}, \Pi, \Delta)$ de S telle que pour tout $u \neq 0$, le fibré tangent Θ_u soit stable. En particulier la non semi-stabilité n'est pas une condition ouverte en déformation.*

Démonstration. On choisit une déformation de S comme dans le lemme 6.18. On note \mathcal{K}_u le fibré canonique de S_u . Il existe un fibré linéaire global K au-dessus de \mathcal{S} tel que $K|_{S_u} \simeq \mathcal{K}_u$. D'après le lemme 4.6, la fonction $u \mapsto \deg(-\mathcal{K}_u)$ est de classe C^∞ sur Δ et en particulier est bornée. Comme le cycle de courbe Γ d'une surface de trace non nulle vérifie $[\Gamma] = L^t$ (t est la trace de la surface comme définie dans le lemme 6.18), on a

$$\lim_{u \rightarrow 0} \deg([\Gamma_u]) = \lim_{u \rightarrow 0} C(u) \ln |t(u)| = +\infty$$

D'après le premier point de la proposition 6.16, il existe un voisinage V de 0 dans Δ tel que si $u \in V$ et $u \neq 0$, le fibré tangent Θ_u est stable (quel que soit la métrique de Gauduchon fixée au départ). Quitte à restreindre, on a donc la déformation recherchée.

Comme on l'a vu, Θ_S pouvait être non semi-stable pour certaines surfaces de la classe intermédiaire, on en déduit que cette dernière condition n'est pas ouverte. \square

Remarque 6.21. Ce résultat illustre très bien un phénomène de la théorie de Donaldson. Prenons une famille de fibrés holomorphes complexes \mathcal{E}_n organisés par exemple dans une déformation de fibré $(\mathcal{E}_t)_{t \in \Delta}$ avec $\mathcal{E}_{t_n} = \mathcal{E}_n$ et $t_n \rightarrow 0$. Notons E le fibré différentiable sous-jacent et supposons les \mathcal{E}_n tous stables. Notons $\mathcal{L}_0^n = \det(\mathcal{E}_n)$ les fibrés déterminants associés. De part la correspondance de Kobayashi-Hitchin (cf. [LT95]), on peut associer à chaque fibré stable \mathcal{E}_n une connexion de Hermite-Einstein A_n élément de l'espace $\mathcal{A}_{a_0^n}^{HE}(E)$ des connexions de Hermite-Einstein sur E dont la connexion associée dans \mathcal{L}_0^n est fixée égale à a_0^n . On peut voir ces connexions comme des instantons, c'est à dire des connexions anti-autoduales dans le $PU(2)$ -fibré principal associé (cf [LT95]). Un théorème de compactification d'Uhlenbeck nous dit alors qu'il y a convergence des A_n vers un élément limite $(A_0, \{x_1, \dots, x_k\})$ (cf [Don85]) associé à un fibré complexe \mathcal{E}'_0 polystable (c'est-à-dire somme directe de fibrés stables de même pente) qui a même déterminant \mathcal{L}_0 que \mathcal{E}_0 mais qui ne lui est pas isomorphe (il y a isomorphisme seulement en dehors des points x_1, \dots, x_k de S). Sa seconde classe de Chern vérifie $c_2(\mathcal{E}'_0) = c_2(\mathcal{E}_0) - k$ et on sait que $H^0(\mathcal{H}om(\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}_0)) \neq 0$. C'est la non séparation de l'espace de modules des fibrés holomorphes qui rend possible l'existence de ces deux limites distinctes. Il est *a priori* tout à fait possible que le fibré \mathcal{E}_0 soit non semi-stable alors que \mathcal{E}'_0 est lui polystable. Cela correspond en effet en l'existence de deux extensions :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{E}'_0 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-D) \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Z}'} \longrightarrow 0$$

La première suite déstabilise \mathcal{E}_0 avec $\deg \mathcal{L} > (\deg \mathcal{L}_0)/2$ et la deuxième vérifie la condition de stabilité $\deg[D] + \deg \mathcal{L}_0 - \deg \mathcal{L} < \deg(\mathcal{L}_0/2)$ qui peut tout à fait être compatible avec l'inégalité précédente. La déformation ci-dessus est donc une illustration de ce phénomène.

Si S est une surface d'Inoue Hirzebruch ($\sigma_n(S) = 3n$), il existe un unique irrationnel quadratique $0 < \lambda < 1$ tel que $h^0(S, \Theta \otimes L^\lambda) = h^0(S, \Theta \otimes L^{1/\lambda}) = 1$ (cf théorème 5.7). De plus, ces deux sections ne s'annulent qu'en des points isolés (cf [DO99] thm 2.16).

Proposition 6.22. *Soit S une surface d’Inoue-Hirzebruch et soit $0 < \lambda < 1$ comme ci-dessus. Alors le fibré tangent Θ est stable (resp. semi-stable) si et seulement si*

$$0 < 2C \ln |\lambda| < (\leq) \deg(-\mathcal{K}).$$

Démonstration. On remarque que le diviseur numériquement anti-canonique est toujours positif donc $\deg(-\mathcal{K}) > 0$. Une des deux conditions de stabilité est alors toujours trivialement vérifiée. \square

Nous allons montrer que cette condition de stabilité peut ne pas être vérifiée pour certaines surfaces d’Inoue-Hirzebruch.

Lemme 6.23. *Soit S une surface d’Inoue-Hirzebruch pour laquelle $b_2(S) \geq 3$. Il existe alors une déformation $(\mathcal{S}, \Pi, \mathbb{P}^1)$ de S par des surfaces contenant une CSG et vérifiant*

1. $S \simeq S_0$;
2. S_∞ est une surface d’Inoue-Hirzebruch et pour tout $u \neq 0, \infty$, $a(S_u) = \overline{(3, 2, \dots, 2)}$;
3. Il existe une fonction holomorphe non constante $\lambda : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que pour tout $u \neq 0, \infty$, $h^0(S_u, \Theta_u(-D_\theta) \otimes L^{\lambda(u)}) = 1$.

Démonstration. On choisit la CSG de la surface S de sorte que dans la suite d’éclatements de la construction (cf. les généralités) le point O_{n-1} soit à l’intersection des deux dernières courbes $O_{n-1} = C_{n-1} \cap C_{n-2}$. On peut de plus supposer que dans les cartes usuelles, le recollement est donné par $\sigma(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$. On choisit pour chaque courbe C_i , $i = 0, \dots, n-2$ un isomorphisme $f_i : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow C_i$ entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et la $i^{\text{ème}}$ courbe éclatée de la façon suivante : comme C_i rencontre deux autres courbes, on pose $f_i(0) = O_i$ et $f_i(\infty)$ est le point d’intersection de C_i avec l’autre courbe. La surface S_u pour $u \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est obtenue en éclatant la courbe C_i au point $f_i(u)$. Pour $u \neq 0, \infty$, tous les éclatements sont génériques (c’est-à-dire pas à l’intersection de deux courbes) sauf le dernier recollement qui de part la forme choisie donne une courbe rationnelle singulière d’auto-intersection -3 . On a donc des surfaces de type intermédiaire avec $a(S_u) = \overline{(3, 2, \dots, 2)}$. Pour $u = \infty$, tous les éclatements se font à l’intersection de deux courbes et S_∞ est de type Inoue-Hirzebruch.

Pour donner un sens au troisième point du lemme, il faut que nous remarquions que le diviseur numériquement tangent existe toujours dans notre cas :

Lemme 6.24. *Soit S une surface à CSG avec $\sigma_n(S) = 2n + 1$ et $n \geq 3$, alors le diviseur D_θ est bien défini et vérifie de plus $D_\theta \geq D$.*

Démonstration. La matrice d’intersection $M(S)$ d’une telle configuration est de

la forme :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 1 & & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que son déterminant est 1 ou -1 ce qui assure l'existence des diviseurs D_θ et $D_{-\mathcal{K}}$.

De part la configuration, on voit qu'il n'y a qu'un arbre composé d'une seule courbe d'auto-intersection -2 et que la racine de l'arbre est aussi une courbe d'auto-intersection -2 . Notons $D_{-\mathcal{K}} = \sum_{l=1}^n k_l D_l$ et soit i l'indice de la courbe de l'arbre. Supposons que $k_i = 1$. On a $D_{-\mathcal{K}}.D_i = k_i D_i^2 + k_j = D_i^2 + 2 = 0$ où D_j est la racine de l'arbre et la formule est obtenue grâce à la formule d'adjonction. On a donc $k_j = 2$ pour la racine de l'arbre. On montre alors facilement par récurrence que pour toutes les courbes d'auto-intersection -2 du cycle, le coefficient de $D_{-\mathcal{K}}$ vaut 2. En effet, soit D_{i_0} une telle courbe et supposons que sur la courbe précédente, $k_{i_0-1} = 2$, alors $D_{-\mathcal{K}}.D_{i_0} = 0 = k_{i_0-1} - 2k_{i_0} + k_{i_0+1}$, donc $2k_{i_0} = k_{i_0+1} + 2$. Or on sait (cf. [DO99]) que $D_{-\mathcal{K}}$ contient D donc $k_{i_0+1} \geq 1$ et par suite, $k_{i_0} \geq 2$. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 6.25. *Pour une surface de la classe intermédiaire, les coefficients de $D_{-\mathcal{K}}$ atteignent leur maximum sur au moins une racine d'arbre.*

Reportons la démonstration de ce lemme. En l'appliquant on obtient que $k_{i_0} = 2$ dans notre cas.

Il reste la courbe D_{i_0} d'auto-intersection -3 . Pour elle, $-1 = k_{i_0-1} - 3k_{i_0} + k_{i_0+1}$, donc $3k_{i_0} = 5$ ce qui est impossible. \square

preuve du lemme 6.25. Remarquons tout d'abord que le maximum ne peut être atteint au sommet d'un arbre. En effet, pour une telle courbe D_i , on a $D_i^2 + 2 = k_i D_i^2 + k_j$ avec $D_i^2 \leq -2$. Supposons $k_i \geq k_j$, alors

$$k_j - k_i = 2 + D_i^2 - (D_i^2 + 1)k_i = 2 - k_i + D_i^2(1 - k_i) \geq k_i \geq 1$$

ce qui est impossible.

On peut être plus précis et montrer par récurrence que les coefficients sont strictement croissants le long d'un arbre. La première étape a déjà été démontrée. Soit donc i_1, \dots, i_l les indices des courbes successives d'un arbre, en commençant la numérotation des indices par le sommet. Supposons $k_{i_1} < k_{i_2} < \dots < k_{i_{l-1}}$, alors on a

$$\begin{aligned} k_{i_l} &= D_{i_l}^2 + 2 - k_{i_{l-1}} D_{i_{l-1}}^2 - k_{i_{l-2}} \\ &= (D_{i_{l-1}}^2 + 2)(1 - k_{i_{l-1}}) + k_{i_{l-1}} + k_{i_{l-1}} - k_{i_{l-2}} \\ &> k_{i_{l-1}} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Le raisonnement se poursuit jusqu'à la racine de l'arbre dont le coefficient majore donc tous ceux qui apparaissent dans l'arbre.

Supposons que le maximum est atteint sur une courbe D_i du cycle qui ne soit pas une racine. Alors, les deux courbes contiguës vérifient : $D_i^2 + 2 = k_i D_i^2 + k_l + k_j$ avec $k_l \leq k_i$ et $k_j \leq k_i$. On a $(D_i^2 + 2)(1 - k_i) = k_j - k_i + k_l - k_i$ ce qui n'est possible que si $k_i = k_l = k_j$ pour des raisons de signe. On voit donc que le maximum se propage dans le cycle jusqu'à atteindre une racine d'arbre (ce qu'il fait toujours par connexité). On a donc bien le résultat souhaité. \square

Par conséquent pour tout $u \neq 0, \infty$, on peut définir d'après le théorème 5.5 $\lambda(u)$ pour vérifier la propriété souhaitée (à savoir l'existence du champ tordu). La fonction holomorphe λ ainsi définie n'a pas de singularité essentielle en 0 et ∞ . Sinon, elle prendrait, par exemple, la valeur 1 dans tout voisinage de 0 (resp. ∞), ce qui contredirait la semi-continuité de $u \mapsto h^0(S_u, \Theta_u)$ au point 0 (resp. ∞) puisqu'il n'y a pas de champ de vecteur global sur une surface d'Inoue-Hirzebruch. Donc λ se prolonge en 0 et ∞ en une fonction holomorphe à valeur dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

On a forcément $\lambda(0) = 0$ ou $\lambda(0) = \infty$ car sinon on peut considérer le faisceau global $\Theta \otimes \mathcal{L}^\lambda$ au-dessus de \mathbb{C} qui vérifie pour tout $u \in \mathbb{C}$, $h^0(S_u, \Theta_u \otimes \mathcal{L}^{\lambda(u)}) = 1$. D'autre part, le fibré canonique \mathcal{K} existe globalement sur la déformation et en dehors de 0, on a la relation $-\mathcal{K}_u = [D_{-\mathcal{K}_u}] \otimes L^{1/\kappa(u)}$ ce qui donne

$$\deg_u(-\mathcal{K}_u) = \deg([D_{-\mathcal{K}_u}]) - C(u) \ln |\kappa(u)|$$

Or, $u \mapsto \deg_u(-\mathcal{K}_u)$ est continue partout (prop. 4.6) et, puisque la constante $k(S)$ ne dépend que de la suite $a(S)$ (cf [DO99]), la relation $\lambda = k\kappa$ implique que $u \mapsto C(u) \ln |\kappa(u)|$ est bornée au voisinage de 0. Par suite, $\text{vol}([D_{-\mathcal{K}_u}])$ est borné. Par le théorème de Bishop ([LT95]), il existe un diviseur limite au-dessus de 0 qui nous donne une hypersurface globale dans la déformation. Par le même argument, puisque le champ tordu θ_u s'annule sur certaines courbes pour $u \neq 0$, la section θ_0 doit aussi s'annuler sur une courbe de $S_0 = S$. Cependant, on sait que les champs tordus d'une surface d'Inoue-Hirzebruch ne s'annulent qu'en des points isolés, ce qui donne une contradiction. En particulier, on sait que λ est non constante. \square

On en déduit alors l'existence de surfaces d'Inoue-Hirzebruch instables :

Proposition 6.26. *Il existe des surfaces d'Inoue-Hirzebruch instables pour toute métrique de Gauduchon.*

Démonstration. Fixons une métrique de Gauduchon quelconque g sur S et étendons la à la déformation décrite ci-dessus. L'application $\lambda : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un revêtement ramifié, donc en 0 ou en ∞ , λ prend la valeur ∞ . D'après les conditions de la proposition 6.16 et le lemme 6.24, il existe un voisinage du point considéré tel que les surfaces de type intermédiaire définies au-dessus soient non semi-stables (elles le sont pour toute métrique de Gauduchon). Le théorème 4.8 nous permet alors de conclure à l'instabilité de la surface d'Inoue-Hirzebruch limite. \square

Chapitre 7

Déformations

On va s'intéresser ici à la dimension de la déformation logarithmique des surfaces à coquille sphérique globale.

Rappelons qu'il n'y a pas d'obstructions à la déformation d'une surface de la classe VII_0 d'après un résultat classique de Kodaira-Spencer ([KKS58]) et le théorème suivant :

Théorème 7.1 (Nakamura [Nak90]). *Soit S une surface de la classe VII_0 avec $b_2 > 0$. Alors $H^2(S, \Theta) = 0$.*

La dimension de la déformation verselle d'une surface de la classe VII_0 est $2b_2(S) + h^0(S, \Theta_S)$.

Pour ce qui est de la déformation logarithmique on a le résultat suivant dû à Nakamura :

Théorème 7.2. *Soit S une surface de la classe VII_0 avec un cycle Γ de courbes rationnelles et soit E un diviseur effectif contenant Γ . Alors*

$$H^2(S, \Theta(-\log E)) = 0.$$

En particulier la dimension de la base de la déformation logarithmique de diviseur D peut se calculer avec l'espace $H^1(S, \Theta(-\log D))$.

La déformation logarithmique d'une surface de trace non nulle a été entièrement décrite dans [DK98], c'est pourquoi nous nous donnons ici une surface S de trace nulle. On a vu (cf théorème 5.4) que si S est de type intermédiaire, il y a un unique feuilletage \mathcal{F} donné par une 1-forme logarithmique tordue, c'est-à-dire un élément de $H^0(S, \Omega^1(\log D) \otimes L^k)$, où D est le diviseur maximal de la surface et L^k un fibré plat associé au paramètre k et que si S est de type Inoue-Hirzebruch, il y a exactement deux feuilletages donnés par des champs de vecteurs tordus (théorème 5.7).

7.1 Indices associés à \mathcal{F}

Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une surface de trace nulle. Notons $T_{\mathcal{F}}$ le fibré en droites tangent au feuilletage \mathcal{F} et rappelons quelques définitions et résultats qui

vont nous servir pour le calcul de la dimension de la déformation logarithmique : si p est une singularité du feuilletage, alors le feuilletage est définie localement par un champ de vecteur holomorphe

$$\theta(z, w) = A(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + B(z, w) \frac{\partial}{\partial w}$$

où $p = (0, 0)$. Notons $J(z, w)$ la matrice jacobienne de l'application (A, B) . Baum, Bott et Brunella ([BB70], [Bru97]) ont introduit les deux indices suivants :

$$\begin{aligned} \text{Det}(p, \mathcal{F}) &= \text{Res}_{(0,0)} \frac{\det J(z, w)}{A(z, w)B(z, w)} dz \wedge dw \\ \text{Tr}(p, \mathcal{F}) &= \text{Res}_{(0,0)} \frac{(\text{tr} J(z, w))^2}{A(z, w)B(z, w)} \end{aligned}$$

où $\text{Res}_{(0,0)}$ désigne le résidu en $(0, 0)$ (voir [GH78] pour la définition précise). On définit ensuite

$$\text{Det}(\mathcal{F}) = \sum_{p \in S(\mathcal{F})} \text{Det}(p, \mathcal{F})$$

et

$$\text{Tr}(\mathcal{F}) = \sum_{p \in S(\mathcal{F})} \text{Tr}(p, \mathcal{F}).$$

Proposition 7.3 (Formules de Baum-Bott ([BB70], [Bru97])).

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathcal{F}) &= c_2(S) - c_1(T_{\mathcal{F}}).c_1(S) + c_1^2(T_{\mathcal{F}}) \\ \text{Tr}(\mathcal{F}) &= c_1^2(S) - 2c_1(T_{\mathcal{F}}).c_1(S) + c_1^2(T_{\mathcal{F}}) \end{aligned}$$

On montre, d'autre part, par un calcul direct, puis, à l'aide de la formule de Camacho-Sad ([CS82]) que $\text{Det}(\mathcal{F}) = n$ et $\text{Tr}(\mathcal{F}) = 2n - \sigma_n(S)$ (voir [DO99] pour tous les détails).

On a alors :

Proposition 7.4.

$$h^1(S, T_{\mathcal{F}}) = \begin{cases} 3n - \sigma_n(S) & \text{si } h^0(S, \Theta) = 0 \\ 3n - \sigma_n(S) + 1 & \text{si } h^0(S, \Theta) = 1 \end{cases}$$

En l'absence de champ global, cela correspond au nombre de points éclatés qui ne sont pas à l'intersection de deux courbes dans la suite des éclatements définissant S .

Démonstration. Par la formule de Riemann-Roch, on a :

$$\begin{aligned} h^0(T_{\mathcal{F}}) - h^1(T_{\mathcal{F}}) + h^2(T_{\mathcal{F}}) &= \chi(S) + \frac{1}{2}T_{\mathcal{F}}.T_{\mathcal{F}} - \frac{1}{2}T_{\mathcal{F}}.\mathcal{K} \\ &= c_1(T_{\mathcal{F}})^2 = \sigma_n(S) - 3n \end{aligned}$$

car d'après la première formule de Baum-Bott $c_1(T_{\mathcal{F}}).c_1(S) = c_1^2(T_{\mathcal{F}})$ et d'après la deuxième formule et la remarque ci-dessus $c_1^2(T_{\mathcal{F}}) = -\text{Tr}(\mathcal{F}) + c_1^2(S) = \sigma_n(S) - 3n$.

Plaçons nous d'abord sur une surface de type intermédiaire. Deux cas se présentent :

$$h^0(T_{\mathcal{F}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h^0(S, \Theta) = 0 \\ 1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

D'autre part, d'après [Bru97] $\mathcal{K} = N_{\mathcal{F}}^* \otimes T_{\mathcal{F}}^*$, donc en utilisant la formule de dualité de Serre $h^2(T_{\mathcal{F}}) = h^0(\mathcal{K}^2 \otimes N_{\mathcal{F}})$. Puisque le feuilletage est défini par une 1-forme logarithmique tordue, et qu'il est unique, le seul sous-faisceau cohérent non trivial de Ω^1 est $\mathcal{O}(-D) \otimes L^{\frac{1}{k}}$. Par suite, $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(D) \otimes L^k$.

Notons $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ le \mathbb{Q} -diviseur anti-canonique. Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m\mathcal{K} = -mD_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ dans $H^2(S, \mathbb{Z})$. Supposons alors que $h^0(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{K}^2) \geq 1$, on a alors $h^0(m\mathcal{K}^2 + mN_{\mathcal{F}}) \geq 1$. Mais $m\mathcal{K}^2 + mN_{\mathcal{F}} = mD - 2mD_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}} + L'$ où L' est un fibré plat et $mD - 2mD_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$ un diviseur négatif car on a toujours $D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}} = D + D_{\theta}^{\mathbb{Q}}$. C'est une contradiction. Donc $h^2(T_{\mathcal{F}}) = 0$. On en déduit la proposition.

Si S est de type Inoue-Hirzebruch, le feuilletage est donné par un champ tordu qui ne s'annule qu'en des points ([Koh95], [DO99]) $\theta \in H^0(S, \Theta \otimes L^{\lambda})$ où λ est un irrationnel quadratique. Alors $T_{\mathcal{F}} = L^{1/\lambda}$ avec $L^{1/\lambda}$ un fibré plat non trivial. Une application directe de la formule de Riemann-Roch donne alors $h^1(T_{\mathcal{F}}) = h^1(L^{1/\lambda}) = 0$ car $h^0(L^{1/\lambda}) = 0$ et $h^2(L^{1/\lambda}) = h^0(\mathcal{K} \otimes L^{\lambda}) = 0$. La dernière annulation provient du fait que pour une surface d'Inoue-Hirzebruch, on a $-\mathcal{K} = [D]$ où $-2\mathcal{K} = 2[D]$ ([Dlo88]). Donc $h^1(T_{\mathcal{F}}) = 0 = 3n - \sigma_n(S)$. \square

7.2 La déformation logarithmique

Proposition 7.5. *On a la suite exacte de faisceaux suivante :*

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow \Theta(-\log D) \rightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D \rightarrow 0$$

où \mathcal{I}_D est l'idéal annulateur du diviseur maximal D (donc $\mathcal{I}_D = \mathcal{O}(-D)$).

Démonstration. Soit U un ouvert de S et θ un champ qui engendre le feuilletage \mathcal{F} sur U . Il définit une section de $T_{\mathcal{F}}$ et l'injection $i : T_{\mathcal{F}} \rightarrow \Theta(-\log D)$ est donnée localement par $f_U \rightarrow f_U\theta$.

Prenons alors un recouvrement U_i de S par des ouverts tels que le feuilletage \mathcal{F} soit engendré sur U_i par la 1-forme ω_i . On définit alors :

$$\begin{aligned} j : \Theta(-\log D)|_{U_i} &\rightarrow (N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D)|_{U_i} \\ \theta &\mapsto \omega_i(\theta) \end{aligned}$$

Par définition du fibré conormal $N_{\mathcal{F}}$, les cocycles le définissant sont donnés par $g_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$. D'autre part θ étant tangent à D , $\omega_i(\theta)$ s'annule bien sur D . L'application j est donc bien définie. Son noyau est par définition l'image de $T_{\mathcal{F}}$ dans $\Theta(-\log D)$.

Il reste à voir que j est surjective : en dehors du diviseur maximal D c'est bien le cas puisqu'on se retrouve avec la suite exacte classique

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow \Theta(-\log D)|_{S \setminus D} = \Theta|_{S \setminus D} \rightarrow N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

le feuilletage n'ayant pas de singularité en dehors des points d'intersection du diviseur D .

- Soit $x \in D$ et $f_x \in (N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D)_x$ où f est défini sur un ouvert U autour de x
- Si x n'est pas à l'intersection de deux courbes de D . Notons $\omega = adz + zbdw$ une 1-forme réduite (z ne divise pas a) engendrant le feuilletage sur U (quitte à restreindre U) et $\theta = z\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial w}$ un champ tangent à D . $f = zg$ car f s'annule sur D donc l'équation à vérifier est $az\alpha + \beta zb = zg$, soit $g = a\alpha + \beta b$ et donc $g \in (a, b)$ ce qui est possible car a est inversible ($x \notin S(\mathcal{F})$).
 - Si x est à l'intersection de deux courbes, $\omega = wadz + zbdw$. On cherche $\theta = z\alpha \frac{\partial}{\partial z} + w\beta \frac{\partial}{\partial w}$. De plus $f = zwg$. On doit donc résoudre $g = a\alpha + b\beta$. On peut être plus précis sur ω : en utilisant la description de [DO99] on voit que soit a soit b est inversible et on a donc bien $g \in (a, b)$. L'équation admet alors des solutions. □

La suite exacte longue de cohomologie associée à cette suite exacte est :

$$0 \rightarrow H^1(S, T_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(S, \Theta(-\log D)) \rightarrow H^1(S, N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D) \rightarrow H^2(S, T_{\mathcal{F}})$$

En effet, rappelons que dans tous les cas le fibré normal est donné par $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(D) \otimes L^{\mu}$ avec $\mu \neq 1$. Mais alors, on a $h^0(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D) = h^0(L^{\mu}) = 0$ car le fibré L^{μ} n'est pas trivial.

De plus, $h^1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D) = h^1(L^{\mu})$. Or, puisque le fibré L^{μ} est plat, sa caractéristique d'Euler est nulle. On a vu que $h^0(L^{\mu}) = 0$ et on a $h^2(L^{\mu}) = h^0(L^{\frac{1}{\mu}} \otimes \mathcal{K})$. Par conséquent, si $h^2(L^{\mu}) > 0$ on a $h^0(mL^{\frac{1}{\mu}} \otimes m\mathcal{K}) = h^0(mL^{\frac{1}{\mu}} \otimes -mD_{-\mathcal{K}} \otimes L^{\kappa}) > 0$ ce qui est impossible car le diviseur $-mD_{-\mathcal{K}}$ est négatif. Donc $h^2(L^{\mu}) = 0$. Par suite, $h^1(L^{\mu}) = 0 = h^1(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{I}_D)$ grâce à la formule de Riemann-Roch ([GH78]).

On en déduit l'isomorphisme suivant :

$$0 \rightarrow H^1(S, T_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(S, \Theta(-\log D)) \rightarrow 0.$$

On a donc :

Proposition 7.6. *Soit S une surface de la classe VII_0 de trace nulle. Soit D le diviseur maximal de la surface, alors :*

$$\dim H^1(S, \Theta(-\log D)) = \begin{cases} 3n - \sigma_n(S) & \text{si } h^0(S, \Theta) = 0 \\ 3n - \sigma_n(S) + 1 & \text{si } h^0(S, \Theta) = 1 \end{cases}$$

Remarque 7.7. Si S est une surface de trace non nulle, le résultat reste valable (voir [DK98]).

On obtient en particulier :

Corollaire 7.8. *Une surface de type Inoue-Hirzebruch n'admet pas de déformation logarithmique non triviale.*

Corollaire 7.9. *Soit S une surface à coquilles sphériques globales et D son diviseur maximal. Toute déformation logarithmique conservant D conserve le feuilletage \mathcal{F} .*

Démonstration. Le cas intermédiaire découle de ce qui précède. Le résultat pour les surfaces de trace non nulle est démontré dans [DK98] où l'on trouve une description explicite de la déformation logarithmique dans ce cas. Les surfaces d'Inoue-Hirzebruch n'admettent quant à elles pas de telle déformation. \square

Bibliographie

- [BB70] P. Baum and R. Bott. *On the zeroes of meromorphic vector fields*. Essais en l'honneur de G. De Rham edition, 1970.
- [Bra91] S. B. Bradlow. Special metrics and stability for holomorphic bundles with global sections. *J. Differential Geometry*, vol. 33 :169–213, 1991.
- [Bra95] S. B. Bradlow. Hermitian-Einstein inequalities and Harder-Narasimhan filtrations. *Int. Journal of Maths.*, 6(5) :645–656, 1995.
- [Bru97] M. Brunella. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 30 :569–594, 1997.
- [Bru01] L. Bruasse. Harder-Narasimhan filtration on non kähler manifolds. *Int. Journal of Maths*, 12(5) :579–594, 2001.
- [BS94] S. Bando and Y-T. Siu. Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics. In T. Mabuchi J. Noguchi T. Ochiai, editor, *Geometry and analysis on complex manifolds*. 1994.
- [Chi85] E. M. Chirka. *Complex Analytic sets*. Number 46. Kluwer Academic Publishers, 1985.
- [CS82] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Math. Ann.*, 115 :579–595, 1982.
- [DK98] G. Dloussky and F. Kohler. Classification of singular germs of mappings and deformation of compact surfaces of class VII_0 . *Ann. Polinici Math.*, LXX :49–83, 1998.
- [Dlo84] G. Dloussky. Structure des surfaces de Kato. In *Mémoires de la SMF*, volume 112. 1984.
- [Dlo88] G. Dloussky. Une construction élémentaire des surfaces d'inoue-hirzebruch. *Math. Ann.*, (280) :663–682, 1988.
- [DO99] G. Dloussky and K. Oeljeklaus. Vector fields and foliations on compact surfaces of class VII_0 . *Ann. Inst. Fourier*, 43(5) :1503–1545, 1999.
- [Don85] S. K. Donaldson. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable bundles. In *Proc. London Math. Soc.*, volume 50, pages 1–26, 1985.
- [Gau76] P. Gauduchon. La classe de Chern pluri-harmonique. *C.R. Acad. Sci Paris*, vol. 282 :479–482, 1976.

- [Gau84] P. Gauduchon. Sur la 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte. *Math. Ann.*, vol. 267 :495–518, 1984.
- [GH78] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, 1978.
- [Gua92] D. Guan. Stability of hermitian vector bundles - a quantitative point of view. *Int. J. Math.*, 3 :477–481, 1992.
- [HN75] G. Harder and M. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1975.
- [Kat78] Ma. Kato. Compact complex manifolds containing 'global' spherical shells. i. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry*, pages 45–84, Tokyo, 1978. Kyoto Univ., Kyoto, 1977, Kinokuniya Book Store.
- [Kaw78] Y. Kawamata. On deformations of compactifiable complex manifolds. *Math. Ann.*, 235 :247–265, 1978.
- [KKS58] L. Nirenberg K. Kodaira and D. C. Spencer. On the existence of deformations of complex analytic structures. *Annals of Math.*, 68 :450–459, 1958.
- [Kob80] S. Kobayashi. First Chern class and holomorphic tensor fields. *Nagoya Math. J.*, 77 :5–11, 1980.
- [Kob82] S. Kobayashi. Curvature and stability of vector bundles. *Proc. Jap. Acad.*, 58 :158–162, 1982.
- [Kob87] S. Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton University Press, 1987.
- [Kod86] K. Kodaira. *Complex Manifolds and Deformation of Complex structures*. Springer-Verlag, 1986.
- [Koh95] F. Kohler. Feuilletages holomorphes singuliers sur les surfaces contenant une coquille sphérique globale. *Ann. Inst. Fourier*, 45(1) :161–182, 1995.
- [KS60] K. Kodaira and D. C. Spencer. On deformations of complex structures, iii. stability theorems for complex structures. *Annals of Maths.*, vol. 71 :43–76, 1960.
- [LT95] M. Lübke and A. Teleman. *The Kobayashi-Hitchin correspondence*. World Scientific, 1995.
- [Mar81] M. Maruyama. The theorem of Grauert-Mulich-Spindler. *Math. Ann.*, vol. 255 :317–333, 1981.
- [MF82] D. Mumford and J. Fogarty. *Geometric invariant theory*. Springer-Verlag, second edition, 1982.
- [Nak84] I. Nakamura. On surfaces of class VII_0 with curves. *Invent. Math.*, 78 :393–443, 1984.
- [Nak90] I. Nakamura. On surfaces of class VII_0 with curves ii. *Tohoku Math. J.*, 42 :475–516, 1990.

- [Sha77] S. Shatz. The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles. *Composito. Math.*, 35 :163–187, 1977.
- [Sim88] C. T. Simpson. Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 1 :867–918, 1988.
- [SU83] R. Schoen and K. Uhlenbeck. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. *J. Diff. Geom.*, 18 :253–268, 1983.
- [UY86] K. Uhlenbeck and S. T. Yau. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 39 :257–293, 1986.
- [UY89] K. Uhlenbeck and S. T. Yau. A note on our previous paper : On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 42 :703–707, 1989.

Index

- Connexion de Chern, 12
- Coquille Sphérique Globale, 64
- Déformation
 - Dimension, 86
 - Logarithmique, 83
- Degré
 - Faisceau (d'un), 13
 - Fibré (d'un), 11
- Diviseur
 - Numériquement anti-canonique, 66
 - Numériquement tangent, 66
- Equation de Vortex, 37
- Espaces de Sobolev, 16
- Faisceau
 - Ensemble singulier, 19
 - Saturé, 15
- Famille
 - d'opérateurs différentiels, 52
 - de faisceaux, 56
 - de fibrés vectoriels, 51
 - de métriques de Gauduchon, 51, 53
- Fibré
 - Déterminant, 12
 - Extension, 70
- Filtration
 - Complète, 34
 - de Harder-Narasimhan, 15
- Formes logarithmiques, 66
- Formule
 - de Baum-Bott, 84
 - de Camacho-Sad, 84
 - de Chern-Weil, 22, 40
 - de Riemann-Roch, 84
- Groupe de Picard, 12
- Higgs
 - Champ (de), 35
 - Fibré (de), 35
- Métrique
 - Gauduchon (de), 11
 - Hermite-Einstein (de), 15
- Nombre de Betti, 12
- Norme Sobolev, 16
- Pente d'un faisceau, 13
- Polygone
 - de drapeau D , 47
 - de Harder-Narasimhan, 47
- Projecteur Sobolev, 27
- Résolution locale, 12
- Représentant distingué, 12, 54
- Seconde forme fondamentale, 20
- Simplicité, 69
- Sous-faisceau maximal, 45
- Sous-fibré holomorphe faible, 26
- Stabilité
 - λ -stabilité, 37
 - , 13
 - Ouverture, 56, 58
 - Semi-stabilité, 13
- Surfaces
 - d'Inoue, 65
 - d'Inoue-Hirzebruch, 65
 - de classe VII , 63
 - Intermédiaires, 65
- Théorème
 - de Multiplication Sobolev, 17

de Plongement Sobolev, 17
de Bishop, 51
Tour d'éclatements, 63

Notations

$b_i(X)$	$i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de X
\mathcal{L}	un fibré en droites holomorphe
$A^{p,q}(E)$	espaces des (p, q) -formes C^∞ à valeur dans E
deg, deg_g	le degré d'un fibré ou d'un faisceau
μ, μ_g	la pente d'un faisceau
$c_1(\mathcal{L}), c_1(\mathcal{L}, h)$	des représentants de la première classe de Chern de \mathcal{L}
$\text{Pic}(X)$	groupe de Picard de la variété X
ω_g	la forme de Kähler associée à la métrique g
L_g	l'opérateur de Lefschetz (produit extérieur par ω_g)
Λ_g	l'opérateur de contraction par la métrique g
$\det \mathcal{F}$	le fibré déterminant du faisceau \mathcal{F}
$S(\mathcal{F}), S_{n-1}(\mathcal{F})$	l'ensemble singulier du faisceau \mathcal{F}
A, d_A	connexion et dérivée covariante associée
a^{10}	seconde forme fondamentale associée à un sous-fibré
R_E, K_E	courbure et courbure moyenne de la connexion de Chern d'un fibré E
$\ \cdot\ _{L^p}, \ \cdot\ _{L_k^p}$	normes L^p et L_k^p
$L_k^p(E)$	espace des sections Sobolev du fibré vectoriel E
π	projecteur hermitien sur un sous-faisceau d'un fibré E
$G(r, k)$	Grassmannienne des k plans dans \mathbb{C}^r
\mathcal{A}_p	ensemble des sous-faisceaux sans torsion saturés de rang p d'un fibré
$\mathcal{X} \rightarrow T$	déformation d'une variété compacte de base T
\star	l'opérateur "étoile" de Hodge

Dans la deuxième partie

Π	une tour finie d'éclatements
$S(\Pi, \sigma)$	surface associée à la tour d'éclatements Π et au biholomorphisme σ
$a(S)$	suite des opposés des auto-intersections des courbes
$\sigma_n(S)$	invariant associé à la surface à CSG S
$\text{tr}(S)$	trace de la surface à CSG S
$D_{-\mathcal{K}}, D_{-\mathcal{K}}^{\mathbb{Q}}$	(\mathbb{Q} -)diviseur numériquement anti-canonique
$D_\theta, D_\theta^{\mathbb{Q}}$	(\mathbb{Q} -)diviseur numériquement tangent
Θ_S, Θ	fibré tangent à la surface S considérée
Ω_S^1, Ω^1	fibré cotangent de la surface S
\mathcal{K}	fibré canonique
$T_{\mathcal{F}}$	fibré tangent au feuilletage \mathcal{F}
$N_{\mathcal{F}}$	fibré normal au feuilletage \mathcal{F}
$\Omega^1(\log E)$	faisceau des 1-formes logarithmiques de pôle E
$[D]$	fibré en droite associé à un diviseur D