Contribution à la sensibilité et à la stabilité en optimisation et en théorie métrique des points critiques

Abderrahim Hantoute

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER

UFR MATHÉMATIQUES INFORMATIQUES GESTION

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER

Spécialité : **Mathématiques Appliquées, Analyse Variationnelle et Optimisation**

Par **Abderrahim HANTOUTE**

CONTRIBUTION À LA SENSIBILITÉ ET À LA STABILITÉ EN OPTIMISATION ET EN THÉORIE MÉTRIQUE DES POINTS CRITIQUES

Soutenue le 29 septembre 2003, devant le jury composé de :

D. Aussel	Maître de conférences à l'Université de Perpignan	Examinateur
D. Azé	Professeur à l'Université Toulouse III	Co-directeur
P.-L. Combettes	Professeur à l'Université Paris VI	Rapporteur
J.-N. Corvellec	Maître de conférences à l'Université de Perpignan	Co-directeur
J.-B. Hiriart-Urruty	Professeur à l'Université Toulouse III	Président
J.-P. Penot	Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur

Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique

UMR CNRS 5640, Université Toulouse III - Paul Sabatier

À mes parents et à toute ma famille

Merci !

Je tiens à remercier mes Professeurs Dominique Azé et Jean-Noël Corvellec pour la confiance qu'ils m'ont faite en acceptant de diriger mes recherches, et pour le soutien constant et efficace durant ces années de thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude et de ma profonde reconnaissance.

Je suis très honoré que Messieurs les Professeurs Patrick-Louis Combettes et Jean-Paul Penot aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les prie de trouver ici l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs Didier Aussel, Maître de conférences à l'Université de Perpignan, et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Professeur à l'Université Paul Sabatier, président du jury. Je les en remercie chaleureusement.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et à tous mes amis qui m'ont accompagné et soutenu durant ces longues années.

Abderrahim

CONTRIBUTION À LA SENSIBILITÉ ET À LA STABILITÉ EN OPTIMISATION ET EN THÉORIE MÉTRIQUE DES POINTS CRITIQUES

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION ET NOTATIONS

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Dans cette thèse nous proposons quelques contributions théoriques à l'analyse variationnelle dans les espaces métriques et à l'optimisation : régularité métrique des opérateurs multivoques, théorie métrique des points critiques, sensibilité de constantes de Hoffman des systèmes d'inégalités et d'égalités affines, stabilité en programmation quadratique sous contraintes d'inégalités affines. L'analyse variationnelle (et convexe) est un domaine qui ne cesse de se développer ces dernières années. L'introduction de nouveaux outils, notamment les notions de sous-différentiel et récemment les notions de pentes (forte ([38], 1980) et faible ([39, 59, 62], 1990)) a permis une présentation à la fois systématique et synthétique de tous les aspects de cette théorie : borne d'erreur, bon comportement asymtotique, problèmes bien posés d'optimisation, régularité métrique, analyse de sensibilité. Le présent rapport est constituée de cinq chapitres principaux, ayant chacun une introduction plus détaillée, qui peuvent être lus indépendamment les uns des autres.

Après cette brève introduction générale où nous fixons les notations qui serons utilisées tout le long de ce manuscrit, nous faisons dans le chapitre 2 une revue de la régularité métrique des multi-applications. Nous revisitons ainsi, en utilisant une nouvelle approche variationnelle développée dans [13] et basée sur le principe variationnel [41], de nombreux théorèmes classiques et nouveaux en la matière. Nous établissons également des versions paramétriques, et éventuellement des généralisations de quelques-uns de ces résultats.

Dans le chapitre 3 nous étudions la stabilité homotopique des points critiques isolés des fonctions continues sur des espaces métriques. Nous utilisons alors les outils de la théorie métrique des points critiques. Nous établissons par conséquent les techniques de déformation nécessaires à notre analyse que nous appliquons pour démontrer un résultat de stabilité homotopique des minimiseurs. Dans le cas des points critiques (pas nécessairement des minimiseurs) nous discutons la conservation des groupes critiques.

Dans le chapitre 4, utilisant l'approche variationnelle de [13] et les outils de l'analyse convexe, nous établissons des formules explicites de constantes de Hoffman des systèmes affines. Lorsque ces derniers contiennent des égalités explicites, nous discutons la sensibilité de ces constantes aux perturbations simultanées des matrices et des vecteurs définissant les polyèdres associés.

Le chapitre 5 est un complément du chapitre 4. Ayant établi le comportement lipschitzien d'une fonction associée à une constante de Hoffman, nous proposons alors de calculer son sous-différentiel de Clarke. Nous obtenons par conséquent des développements au premier ordre, et donc une meilleure précision du comportement des constantes de Hoffman.

Dans le chapitre 6 nous étudions la sensibilité des programmes quadratiques convexes. Nous établissons des conditions caractéristiques dans ce cas. Ensuite, utilisant les résultats du chapitre 4, nous étudions le comportement de la fonction valeur et des multi-applications des solutions primales et duales.

Notations :

Les notations que nous introduisons ici sont communes à tous les chapitres de cette thèse. Les notations spécifiques à chaque chapitre seront introduites au fur et à mesure de leur utilisation.

Soient X un espace métrique, d une distance sur X, $f : X \to [-\infty,+\infty]$ une fonction, et $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On note :

$\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$;

$\operatorname{epi}(f) := \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} : \lambda \geq f(x)\}$;

$\operatorname{argmin}_X f := \{x \in X : f(x) = \inf_X f\}$;

$[f{<}b] := \{x \in X : f(x) < b\}$;

$[f{\leq}b] := \{x \in X : f(x) \leq b\}$;

$[f{>}a] := \{x \in X : f(x) > a\}$;

$[f{\geq}a] := \{x \in X : f(x) \geq a\}$;

$[f{=}a] := \{x \in X : f(x) = a\}$;

$[a{<}f{<}b] := \{x \in X : a < f(x) < b\}$.

On dira alors que f est propre si $\operatorname{dom} f = [f{<}{+\infty}] \neq \emptyset$, et semi-continue inférieurement (s.c.i., en abrégé) si $\operatorname{epi}(f)$ est fermé.

Si $A,C \subset X$ et $r > 0$, On note :

$f_{|A}$ la restriction de f sur A;

$d(x,C) := \inf\{d(x,y) : y \in C\}$ (avec la convention $d(x,\emptyset) = +\infty$);

$e(A,C) := \sup\{d(x,C) : x \in A\}$ l'excès de Hausdorff de A sur B ($e_{\mathcal{H}}(\emptyset,B) = 0$);

$d_{\mathcal{H}}(A,C) := \max\{e(A,C),e(C,A)\}$ la distance de Hausdorff;

$B_r(C) := \{x \in X : d(x,C) < r\}$, $\overline{B}_r(C) := \{x \in X : d(x,C) \leq r\}$;

$\operatorname{int}(C)$ l'intérieur de C;

$\operatorname{fr}(C)$ la frontière de C;

$\operatorname{co}(C)$ l'enveloppe convexe de C;

$\operatorname{pos}(C)$ l'enveloppe conique de C;

$\overline{C}$ l'adhérence de C.

Si X est un espace de Banach d'origine θ, on note :

$B_X := B_1(\theta)$, $\overline{B}_X := \overline{B}_1(\theta)$;

d_* la distance associée à la norme duale;

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité (X^*,X).

Si $X := \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors:

$\|\cdot\|_1$ est la norme l_1;

$\|\cdot\|_2$ est la norme *euclidienne*;

$\|\cdot\|_\infty$ est la norme *sup*.

On note aussi

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs;

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Si m,n,p sont des entiers strictement positifs et $I \subset [1,m]$ est de cardinal égal à p $(|I| = p)$, on note:

$\mathbb{R}^m$ l'espace euclidien usuel muni du produit euclidien $\langle\cdot,\cdot\rangle$;

$\mathbb{R}^m_+$ l'ensemble des réels positifs de $\mathbb{R}^m$;

$\mathbb{R}^I := \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^I_+ := \mathbb{R}^p_+$;

$\mathcal{M}_{m\times n}$ l'espace des matrices à m lignes et n colonnes, à coefficients réels;

$\mathcal{S}_m$ l'espace des matrices carrées de type m;

$\mathcal{S}^+_m$ le cône des matrices semi-définies positives de type m.

Si $A := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $(\{a_1,\ldots,a_m\} \subset \mathcal{M}_{1\times n})$ et $I \subset [1,m]$, on note:

I^c le complémentaire de I dans $[1,m]$;

A^T la transposée de A;

$R(A)$ et Ker(A) l'image et le noyau de A;

A_I la matrice dont les lignes sont celles indexées par I;

$a_I := \{a_i,\ i \in I\}$.

Enfin, on note:

$r^+ := \max\{r,0\}$ si $r \in \mathbb{R}$;

$y \xrightarrow{A} x$ si $y \to x$ et $y \in A$;

$A \times C := \{(a,c) :\ a \in A, c \in C\}$;

Σ_C la fonction d'appui de C;

$$i_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

UNE REVUE DE LA RÉGULARITÉ MÉTRIQUE DES MULTI-APPLICATIONS

2. UNE REVUE DE LA RÉGULARITÉ MÉTRIQUE DES MULTI-APPLICATIONS

Résumé

Ce premier chapitre est consacré à l'étude de la régularité métrique de multi-applications dépendant d'un paramètre, définies sur des espaces de Banach. Nous utilisons pour cela une approche variationnelle développée dans [13] (étendant l'approche proposée dans [53]), basée sur le principe variationnel d'Ekeland [41], et pour laquelle la notion de pente forte introduite par De Giorgi, Marino et Tosques [38] joue un rôle essentiel. Nous montrons que de nombreux résultats connus en la matière découlent de cette approche, en estimant localement la pente forte. Nous en donnons des démonstrations simples et directes, tout en considérant de plus des versions paramétriques et éventuellement des versions plus générales. Nous revisitons ainsi les théorèmes classiques pour les fonctions univoques (Banach, Graves-Lyusternik et variantes), nous étudions les multi-applications strictement différentiables, et nous donnons des conditions suffisantes en termes de cônes contingents et approximatifs.

2.1 Introduction

La notion de régularité métrique pour des multi-applications occupe une place importante dans l'analyse multivoque. Elle est la généralisation à ce cadre des résultats classiques connus comme les théorèmes de l'application ouverte de Banach et de Graves-Lyusternik [45, 79], qui sont des extensions du théorème des fonctions implicites. Cette propriété permet, entre autres, d'établir la stabilité des solutions d'équations non linéaires ainsi que les conditions nécessaires d'optimalité. Notre but dans ce chapitre est de montrer que de nombreux résultats sur la régularité métrique découlent d'une manière simple d'un théorème général établi dans [13] et qui est basé essentiellement sur le principe variationnel. Cette approche trouve ses origines dans un travail de Ioffe [53], voir aussi [56].

L'hypothèse essentielle de ce résultat est une estimation locale de la pente forte d'une fonction associée à la multi-application considérée.

Soient X, Y des espaces métriques, F une multi-application qu'on identifie à son graphe $F := \{(x,y) \,:\, y \in F(x)\} \subset X \times Y$, et $(\bar{x},\bar{y}) \in F$. On cherche alors l'existence d'un réel $\sigma > 0$ tel que :

$$\sigma\, d(x,F^{-1}(y)) \leq d(y,F(x)) \tag{2.1}$$

pour tout (x,y) proche de $(\bar{x},\bar{y})$. Dans ce cas F est dite *métriquement régulière au voisinage de* $(\bar{x},\bar{y})$. En considérant la fonction à valeurs étendues $f : (X \times Y) \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ donnée par :

$$f((x,y),z) := \begin{cases} \|y-z\| & \text{si } (x,z) \in F \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et en posant $f_z(x,y) := f((x,y),z)$, il suffit alors, pour établir (2.1), de trouver un réel $\sigma > 0$ qui vérifie :

$$\sigma\, d((x,y),[f_z {\leq} 0]) \leq (f_z(x,y))^+ \tag{2.2}$$

pour tout (x,y) proche de $(\bar{x},\bar{y})$. Pour montrer cette dernière inégalité (2.2), on fait appel à une variante du principe variationnel exprimée en terme de la *pente forte*, une notion introduite par De Giorgi, Marino et Tosques [38]. Dans [13], il est établi que si la pente forte de f est minorée, sur un voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$ intersecté avec $[f{>}0]$, par une constante strictement positive σ, alors (2.2) a lieu, et par conséquent F est métriquement régulière. Cette condition, qui est en fait nécessaire, permet d'obtenir d'autres conditions suffisantes. Il suffit pour cela de comparer cette notion de pente avec d'autres notions de dérivées comme par exemple les différentielles et les sous-différentiels.

Nous appliquons cette approche, dans un premier temps, au cas où F est univoque. Tout d'abord, nous proposons de faire une revue du théorème de l'application ouverte de Banach attestant qu'une application linéaire $A : X \to Y$ continue surjective est ouverte, et dont la démonstration originale utilise des procédures itératives. La fonction $f(x) := \|Ax - y\|$, $y \in Y$, est convexe, nous obtenons alors des estimations de la pente forte en fonction du sous-différentiel convexe, et donc nous établissons l'ouverture de A grâce à l'approche décrite ci-dessus. Lorsque A est remplacée par φ, une application telle que $\nabla\varphi(x_0)$ est surjective on peut alors appliquer cette dernière méthode en calculant le sous-différentiel de Clarke si φ est de classe C^1 qui donne donc le résultat de Lyusternik [66]. Supposant que φ est strictement différentiable en x_0, nous donnons des estimations de la pente forte en calculant les dérivées approchées. Ce résultat fut établi par Graves en utilisant une méthode semblable à celle de Banach.

La différentiabilité stricte de φ dans le résultat de Graves implique une certaine régularité du graphe de l'application $\nabla\varphi(x_0)$, qui devient donc un *cône équi-circatangent* au graphe de φ en $(x_0,\varphi(x_0))$. Dans [10], les auteurs ont étendu cette propriété aux multi-applications en introduisant la notion de *différentiabilité stricte inférieure*. Nous montrons dans ce cas, en donnant une version paramétrique de [10, Theorem 3.1], que la régularité métrique de F découle en estimant la pente forte des fonctions f_z, $z \in Y$, à l'aide des dérivées approchées. En dimension finie toute multi-application est strictement différentiable, ceci est dû au fait que le cône de Clarke [27] d'un ensemble est toujours équi-circatangent à ce dernier. Ceci n'est pas évident en dimension infinie et il est très difficile de trouver de tels cônes, d'où l'intérêt d'établir des conditions suffisantes en termes de cônes contingents. Dans le Théorème 2.6.1 nous utilisons les cônes contingents exacts pour donner une version paramétrique du résultat de [4, Theorem 2], ainsi qu'une variante formulée avec le cône contingent approximatif et qui inclut, contrairement à [4, Theorem 2], le résultat de Lyusternik .

Dans les résultats que nous venons de citer, il semble que la surjectivité des cônes contingents est une hypothèse nécessaire. Ceci est le cas par exemple du théorème de Banach où le fait que A soit surjective est nécessaire pour l'ouverture [40]. Pour cette raison nous donnons le Théorème 2.6.2, attestant une régularité métrique de la multi-application sur un sous-espace que nous déterminons, en particulier nous retrouvons la régularité métrique usuelle sur l'espace tout entier si le cône approximatif est surjectif. Ce résultat implique aussi celui de [84, Theorem 1] établi en utilisant des cônes exacts.

Après avoir introduit dans la section 2.2 les outils nécessaires à notre analyse, qui sont essentiellement des résultats établis dans [13] et revus dans [12], nous donnons des démonstrations des théorèmes classiques de l'application ouverte de Banach et de Lyusternik-Graves dans la section 2.3. Après avoir rappelé dans la section 2.4 les définitions et les propriétés de la régularité métrique et établi le théorème fondamental, nous considérons dans la section 2.5 le cas des multi-applications strictement différentiables entre espaces de Banach. Dans la section 2.6 nous discutons la régularité métrique des multi-applications en étudiant des conditions suffisantes en termes de cônes contingents.

Notation 2.1.1: Dans ce chapitre, X et Y sont des espaces métriques et P est un espace topologique. On note d la distance dans X. Nous identifions toute multi-application F de X dans Y à son graphe $F := \{(x,y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\} \subset X \times Y$. L'inverse de F, notée F^{-1}, est la multi-application de Y dans X donnée par $F^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X \ (x,y) \in F\}$. Si $x \in X$, on note $F(x) := \{y \in Y : \ (x,y) \in F\}$ l'image de x par F, et $\operatorname{dom} F := \{x \in$

$X : F(x) \neq \emptyset\}$ le domaine de F. Si X et Y sont des espaces de Banach, et si F est un cône dans $X \times Y$ (on dit alors que la multi-application F est *conique*), on note :

$$\|F\| := \sup_{x \in \operatorname{dom} F \setminus \{0\}} \|x\|^{-1} d(0,F(x))$$

la norme de F, voir [5, p. 57]. Dans toute la suite les multi-applications que nous considérons sont de domaine non vide.

2.2 Outils variationnels

Le principe variationnel d'Ekeland est un outil très puissant de l'analyse non linéaire que nous utilisons tout le long de cette thèse.

Théorème 2.2.1: [41, Principe variationnel] *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i., $\bar{x} \in X$, et $\sigma,r > 0$ tels que :*

$$f(\bar{x}) \leq \inf_X f + \sigma r \,.$$

(En particulier, f est bornée inférieurement). Alors, il existe $x \in \overline{B}_r(\bar{x})$ tel que $f(x) \leq f(\bar{x})$, et

$$f(x) < f(y) + \sigma d(x,y) \quad \textit{pour tous } y \neq x \,. \tag{2.3}$$

On rappelle la notion de pente forte de De Giorgi, Marino et Tosques [38].

Définition 2.2.1: *Soient $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. et $x \in \operatorname{dom} f$. On pose :*

$$|\nabla f|(x) := \begin{cases} 0 & \textit{si } x \textit{ est un minimiseur local de } f, \\ \limsup\limits_{y \to x} \dfrac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} & \textit{sinon} \,. \end{cases}$$

Pour $x \notin \operatorname{dom} f$, on pose $|\nabla f|(x) := +\infty$. Le nombre réel positif étendu $|\nabla f|(x)$ est appelé la pente forte *de f en x.*

Avec cette notion de pente on obtient une conséquence du principe variationnel (Théorème 2.2.1) dont nous donnerons une autre version dans la Proposition 3.6.1.

Corollaire 2.2.1: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., $\bar{x} \in X$, et $\sigma,r > 0$ tels que :*

$$f(\bar{x}) < \inf_{\overline{B}_r(\bar{x})} f + \sigma r \,.$$

Alors, il existe $x \in B_r(\bar{x})$ tel que $f(x) \leq f(\bar{x})$ et $|\nabla f|(x) < \sigma$.

Démonstration. La démonstration est donnée dans [12, Corollary 2.1]. En effet, on choisit $0 < r' < r$ et $0 < \sigma' < \sigma$ tels que :

$$f(\bar{x}) \leq \inf_{\overline{B}_r(\bar{x})} f + \sigma' r' .$$

Appliquant ensuite le Théorème 2.2.1 avec $X := \overline{B}_r(\bar{x})$. On trouve alors $x \in \overline{B}_{r'}(\bar{x}) \subset B_r(\bar{x})$ tel que $f(x) \leq f(\bar{x})$ et $|\nabla f_{|\overline{B}_{r'}(\bar{x})}|(x) = |\nabla f|(x) \leq \sigma' < \sigma$. ■

Les deux résultats suivants, qui découlent essentiellement du Corollaire 2.2.1, ont été établis dans [13]. Ce sont les ingrédients clé dans notre analyse.

Théorème 2.2.2: [13, Theorem 3.1] *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i., $c \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que :*

$$\inf_{[f>c]} |\nabla f|(x) \geq \sigma . \tag{2.4}$$

Alors :

$$(f - c)(x)^+ \geq \sigma d(x,[f \leq c]) \quad \textit{pour tout } x \in X .$$

Le second résultat est une version locale et paramétrique du Théorème 2.2.2, où on utilise la notion suivante d'*épi-semi-continuité supérieure* [2].

Définition 2.2.2: *Soient $f : X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $(\bar{x},\bar{p}) \in X \times P$. On pose :*

$$e\text{−}\limsup_{p \to \bar{p}} f(.,p)(\bar{x}) := \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{V \in \mathcal{V}(\bar{p})} \sup_{p \in V} \inf_{x \in \overline{B}_\varepsilon(\bar{x})} f(x,p) .$$

La fonction f est dite épi-semi-continue supérieurement *en $(\bar{x},\bar{p})$ si*

$$e\text{−}\limsup_{p \to \bar{p}} f(.,p)(\bar{x}) \leq f(\bar{x},\bar{p}) .$$

Théorème 2.2.3: [13, Theorem 3.5] *Soient X complet, U un ouvert de $X \times P$, $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$. Supposons que :*

(a) *f est épi-semi-continue supérieurement en $(\bar{x},\bar{p}) \in U \cap [f \leq c]$;*

(b) *$f(\cdot,p)$ est semi-continue inférieurement pour tout p proche de $\bar{p}$;*

(c) $\inf_{[f>c] \cap U} |\nabla f|(\cdot,p)(x) \geq \sigma$.

Alors, pour tout voisinage V_0 de $\bar{x}$, il existe un voisinage $V \subset V_0$ de $\bar{x}$ et un voisinage N de $\bar{p}$ tels que :

$$[f(\cdot,p) \leq c] \cap V \neq \emptyset \quad \textit{pour tout } p \in N$$

et

$$(f - c)(x,p)^+ \geq \sigma d(x,[f(\cdot,p) \leq c]) \quad \textit{pour tout } (x,p) \in V \times N .$$

Remarque 2.2.1: (a) On notera que, dans le Théorème 2.2.2, le fait que $[f \leq c] \neq \emptyset$ est une *conclusion* (voir [12, Remark 2.2 (b)] à ce sujet), tandis que dans le Théorème 2.2.3 (et dans un résultat proche du Théorème 2.2.2 obtenu dans [63]), on doit *supposer* que $[f \leq c] \neq \emptyset$. Une généralisation du Théorème 2.2.2 a été donnée dans [12, Theorem 2.1] en utilisant des tranches du type $[a < f < b]$ au lieu des surniveau (voir Chapitre 4, Section 4.2).

(b) Dans [13], les résultats ci-dessus ont en fait été formulés en utilisant la notion abstraite de *paire variationnelle* : on dit que (X,δ) est une paire variationnelle si δ est une fonction qui associe à toute fonction s.c.i. $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et à tout $x \in X$ un nombre $\delta f(x) \in [0, +\infty]$, et les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\operatorname{dom} \delta f \subset \operatorname{dom} f$;

(ii) si $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i. telle que $f = g + c$ dans un voisinage de x, pour un certain $c \in \mathbb{R}$, alors $\delta f(x) = \delta g(x)$;

(iii) si $\bar{x} \in X$, et $\sigma, r > 0$ sont tels que $f(\bar{x}) < \inf_{\overline{B}_r(\bar{x})} f + \sigma r$, alors pour tout $\lambda > 0$, il existe $x \in B_r(x)$ tel que :

$$f(x) < f(\bar{x}) + \lambda \quad \text{et} \quad \delta f(x) < \sigma\,.$$

En particulier, lorsque X est un espace métrique complet, $(X, |\nabla \cdot|)$ est une paire variationnelle (ceci est une conséquence immédiate du Corollaire 2.2.1). Un autre exemple de base de paire variationnelle est celui où X est un espace de Banach et $\delta f(x) = d_*(0, \partial f(x))$, où ∂ est un opérateur sous-différentiel, lorsque (X, ∂) est une *paire sous-différentielle* (voir [13, Definition 2.5]).

Cependant, les formulations données ici sont en fait *équivalentes* à celles de [13]. En effet, d'une part comme nous allons le voir, pour estimer la pente forte nous cherchons des estimations d'autres objets qui vérifient les propriétés de paire variationnelle, et d'autre part on vérifie facilement qu'on a :

$$\inf_{[f>c]} |\nabla f|(x) \geq \inf_{[f>c]} \delta f(x)\,. \tag{2.5}$$

En effet, si $\operatorname{dom} f \cap [f>c] = \emptyset$, alors la conclusion est évidente. Sinon soit $\sigma > 0$ tel que $\sigma > \inf_{[f>c]} |\nabla f|(x)$. Il existe donc, puisque f est s.c.i, $\bar{x} \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\overline{B}_\varepsilon(\bar{x}) \subset [f>c]$, et

$$f(\bar{x}) \leq \inf_{\overline{B}_\varepsilon(\bar{x})} f + \sigma\varepsilon < \inf_{\overline{B}_\varepsilon(\bar{x})} f + \sigma'\varepsilon$$

pour tout $\sigma' > \sigma$. Appliquant (iii) (de la définition d'une paire variationnelle) avec $\lambda = 1$, on trouve $x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \subset [f>c]$ tel que $f(x) < f(\bar{x}) + 1$ et $\delta f(x) < \sigma'$, d'où

$$\inf_{[f>c]} \delta f(x) \leq \sigma' .$$

En faisant ensuite tendre σ' vers $\inf_{[f>c]} |\nabla f|(x)$, on obtient (2.5).

Voir également [12, Section 4] pour une comparaison directe entre la pente forte et la notion de paire sous-différentielle.

On peut aussi comparer $|\nabla f|$ à diverses notions de l'analyse non lisse, lorsque X est un espace de Banach. En particulier dans le cas convexe on a la :

Proposition 2.2.1: [12, Proposition 3.1] *Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre, convexe, et s.c.i., et soit $x \in X$ qui n'est pas un minimiseur de f. Alors :*

$$|\nabla f|(x) = \sup_{f(z)<f(x)} \frac{f(x) - f(z)}{\|x - z\|} = d_*(0, \partial f(x)) .$$

On aura besoin dans la suite des notions suivantes de dérivée directionnelle.

Définition 2.2.3: *Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i., et $u,x \in X$. On appelle* dérivée contingente de f en x dans la direction u *la fonction définie par :*

$$f'(x;u) := \begin{cases} \liminf\limits_{t\searrow 0, v\to u} \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} & \textit{si } x \in \operatorname{dom} f, \\ -\infty & \textit{sinon} . \end{cases}$$

Si $\varepsilon > 0$, la dérivée ε- contingente de f en x dans la direction u *est définie par :*

$$f'_\varepsilon(x;u) := \begin{cases} \liminf\limits_{t\searrow 0} \left(\inf\limits_{v\in B_{\varepsilon\|u\|}(u)} \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} \right) & \textit{si } x \in \operatorname{dom} f, \\ -\infty & \textit{sinon} . \end{cases}$$

On déduit alors immédiatement la :

Proposition 2.2.2: *Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre s.c.i., $x \in X$, $u \in X \setminus \{0\}$, et $\varepsilon > 0$. Alors :*

(a)

$$|\nabla f|(x) \geq -\frac{f'_\varepsilon(x;u)}{(1+\varepsilon)\|u\|} \geq -\frac{f'(x;u)}{\|u\|} .$$

(b) *Si* $f := g + h$ *avec* $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *s.c.i., et* $g : X \to \mathbb{R}$ *convexe lipschitzienne de rapport* $K \geq 0$ *au voisinage de* $x \in \operatorname{dom} h$*, on a :*

$$f'_\varepsilon(x;u) \leq g'(x;u) + K\varepsilon\|u\| + h'_\varepsilon(x;u)\,.$$

On rappelle que si S est un fermé de X, le *cône* ε*-contingent* à S en $x \in S$ (introduit dans [70]) est défini par :

$$T^\varepsilon(S,x) := \{v \in X \;:\; \exists (t_n) \searrow 0, \exists (v_n)_n \subset B_{\varepsilon\|v\|}(v),\; (x + t_n v_n) \subset S\}\,,$$

et que :

$$\bigcap_{\varepsilon>0} T^\varepsilon(S,x) = T(S,x) := \{v \in X \;:\; \exists (t_n) \searrow 0, \exists v_n \to v, (x + t_n v_n) \subset S\}$$

est le *cône contingent (de Bouligand)* à S en x. Finalement, on rappelle que :

$$(i_S)'_\varepsilon(x;u) = i_{T^\varepsilon_S(x)}(u)\,,$$

où i_S est la fonction indicatrice de S.

2.3 Théorèmes d'ouverture pour les applications

Comme application de l'approche variationnelle rappelée dans la section précédente aux applications, nous revisitons des théorèmes classiques de l'analyse linéaire et non linéaire, à savoir le théorème de l'application ouverte de Banach et sa généralisation non linéaire, le théorème de Graves-Lyusternik.

À partir de cette section, X et Y sont des espaces de Banach de normes notées $\|\cdot\|$ et $L(X,Y)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Théorème 2.3.1: (Banach) *Soit* $A : X \to Y$ *une application linéaire continue surjective. Alors,* A *est ouverte.*

Démonstration. Puisque A est surjective on a $Y = \cup_{n\geq 1} \overline{A(nB_X)}$. Donc, d'après le Théorème de Baire, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\operatorname{int}(\overline{A(n_0 B_X)}) \neq \emptyset$, dont on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$c\overline{B}_Y \subset \overline{A(B_X)}\,. \tag{2.6}$$

Pour $y \in Y$, on pose :

$$f(x) := \|Ax - y\|\,.$$

Alors, f est convexe, continue, et son sous-différentiel de Fenchel est donné par :

$$\partial f(x) = A^* \partial \|\cdot\|(Ax - y) ,$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A. Soit $x \in X$ tel que $f(x) > 0$ et soit $\xi \in \partial f(x)$. Alors, il existe $\eta \in B_Y^*$ tel que $\|\eta\|_* = 1$, $\langle \eta, Ax - y\rangle = \|Ax - y\|$, et $\xi = A^*\eta$. Grâce à (2.6), on peut trouver une suite $(u_n)_n \subset X$ telle que $\|u_n\| \leq c^{-1}$ et

$$Au_n \to \frac{Ax - y}{\|Ax - y\|} ,$$

d'où

$$\|\xi\|_* c^{-1} \geq \langle \xi, u_n \rangle = \langle \eta, Au_n \rangle .$$

En passant à la limite, on déduit que $\|\xi\|_* \geq c$. Or, $|\nabla f|(x) = d_*(0, \partial f(x))$, d'après la Proposition 2.2.1, on en déduit que :

$$\inf_{f>0} |\nabla f|(x) = \inf_{f>0} d_*(0, \partial f(x)) \geq c .$$

Appliquant le Théorème 2.2.2, on obtient

$$c\, d(x, A^{-1}(y)) = c\, d(x, [f \leq 0]) \leq f(x)^+ = \|Ax - y\|$$

pour tout $x \in X$. Ceci montre bien que $cB_Y \subset A(B_X)$. ■

Définition 2.3.1: *Soit $x_0 \in X$. Une application $\varphi : X \to Y$ est dite* strictement différentiable *en x_0 s'il existe $\xi \in L(X,Y)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que :*

$$\|\varphi(x) - \xi(x) - \varphi(y) + \xi(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\| \quad \textit{pour tous } x,y \in U . \tag{2.7}$$

Dans ce cas, $D\varphi(x_0) := \xi$ est appelée la dérivée stricte *de φ en x_0.*

Lemme 2.3.1: *Soient $\varphi : X \to Y$ et $x_0 \in X$. Supposons que φ est strictement différentiable en x_0. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x_0 tel que :*

$$\mathrm{Gr}(D\varphi(x_0)) \subset T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x, \varphi(x)) \quad \textit{pour tout } x \in U ,$$

où Gr *est le graphe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors, il existe un voisinage U de x_0 tel que (2.7) ait lieu. Si $(u,v) \in \mathrm{Gr}(D\varphi(x_0))$, posant $v_n = t_n^{-1}(\varphi(x + t_n u) - \varphi(x))$, où $t_n \to 0$ est une suite quelconque, on obtient

$$\|v_n - v\| \leq \varepsilon\|u\| \leq \varepsilon\|(u,v)\|\,.$$

On en déduit que $((u,v_n))_n \subset B_{\varepsilon\|(u,v)\|}(u,v)$ et

$$(x,\varphi(x)) + t_n(u,v_n) = (x + t_n u, \varphi(x) + t_n v_n) = (x + t_n u, \varphi(x + t_n u)) \in \mathrm{Gr}(\varphi).$$

Par conséquent, $(u,v) \in T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x,\varphi(x))$ pour tout $x \in U$. ■

On obtient le :

Théorème 2.3.2: (Graves-Lyusternik) *Soient $\varphi : X \to Y$ et $x_0 \in X$. Supposons que φ est strictement différentiable en x_0, et que $D\varphi(x_0)$ est surjective. Alors, il existe un voisinage U de x_0 et $\sigma > 0$ tels que :*

$$B_{\sigma\tau}(\varphi(x)) \subset \varphi(B_\tau(x)) \quad \textit{pour tout } x \in U \tag{2.8}$$

et pour tout $\tau > 0$ tel que $B_\tau(x) \subset U$.

Démonstration. D'après le Théorème 2.3.1, il existe $c > 0$ tel que :

$$cB_Y \subset D\varphi(x_0)(B_X)\,. \tag{2.9}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{(1-\varepsilon)c}{(1+\varepsilon)} > 0$. Alors, il existe, d'après le Lemme 2.3.1, un voisinage U de x_0 tel que :

$$\mathrm{Gr}(D\varphi(x_0)) \subset T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x,\varphi(x)) \quad \text{pour tout } x \in U\,. \tag{2.10}$$

Nous allons appliquer le Théorème 2.2.3 dans $X \times Y$ muni de la norme :

$$\|(x,y)\| := \max(\|x\|, c^{-1}\|y\|)\,,$$

à la fonction $f : (X \times Y) \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$f((x,y),z) := \|y - z\| + i_{\hat{F}}((x,y),z)\,.$$

où $\hat{F} := \mathrm{Gr}(\varphi) \times Y$. On vérifie facilement que f satisfait les conditions (a) et (b) du Théorème 2.2.3. Soient $x \in U$ et $y,z \in Y$ tels que $0 < f((x,y),z) < +\infty$. Il en résulte que

$y = \varphi(x)$ et $y \neq z$. Posant $v := \dfrac{z-y}{\|y-z\|}$, on déduit que $\|\cdot\|'(z-y;v) = -1$, et qu'il existe $u \in c^{-1}B_X$ tel que

$$(u,v) \in \mathrm{Gr}(D\varphi(x_0)) \subset T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x,\varphi(x))\,,$$

d'après (2.9) et (2.10). Par conséquent, considérant les fonctions $f_z(x,y) := f((x,y),z)$, et utilisant la Proposition 2.2.2 (b), on obtient

$$(f_z)'_{\varepsilon}((x,y),(u,v)) \quad \leq \quad \|\cdot\|'(z-y;v) + \varepsilon c\|(u,v)\| + i_{T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x,y)}(u,v) \leq -1+\varepsilon\,.$$

Donc, d'après la Proposition 2.2.2 (a), on déduit que :

$$|\nabla f_z|(x,y) \geq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)\|(u,v)\|} \geq \frac{c(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} =: \sigma > 0\,.$$

Appliquant le Théorème 2.2.3 avec $V_0 := X \times Y$, on trouve des voisinages V de x_0 et W de $\varphi(x_0)$ tels que :

$$d(\varphi(x),z) \geq \sigma d(x,\varphi^{-1}(z)) \quad \text{pour tous } x \in V, z \in W\,, \tag{2.11}$$

ce qui montre que $B_{\sigma\tau}(\varphi(x)) \subset \varphi(B_\tau(x))$ pour tout $x \in U$, et $\tau > 0$ tel que $B_\tau(x) \subset U$. ■

Remarque 2.3.1: (a) La démonstration du Théorème 2.3.2 fut établie, dans un premier temps, pour des fonctions de classe C^1 au voisinage de x_0 par Lyusternik, ensuite par Graves pour des fonctions strictement différentiables en x_0 en utilisant une méthode itérative (voir [40]). La démonstration ci-dessus devient encore plus simple si f est plus régulière, par exemple de classe C^1. Dans ce cas, il suffit de calculer le sous-différentiel de clarke de la fonction $f := \|\varphi(x) - y\|$. En utilisant les règles de calcul (voir chapitre 5, section 5.3) on trouve, pour tout $x \in [f>0]$,

$$\partial f(x) = \nabla\varphi(x)^*\partial\|\cdot\|(\varphi(x)-y)\,,$$

où $\nabla\varphi(x)^*$ est l'opérateur adjoint de $\nabla\varphi(x)$. Le reste de la preuve est le même que dans le Théorème 2.3.1.

(b) Revenons-en à (2.11). Cette conclusion montre que le cône tangent à $\varphi^{-1}(y_0)$ en x_0 est donné par :

$$T_{\varphi^{-1}(y_0)}(x_0) = x_0 + \mathrm{Ker}(\nabla\varphi(x_0))\,,$$

où $y_0 := \varphi(x_0)$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$, on trouve, grâce au Théorème 2.3.2 et au fait que φ est strictement différentiable en x_0, des réels δ, $\sigma > 0$ tels que (2.11) ait lieu, et

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \nabla\varphi(x_0)(x-x_0)\| \leq \varepsilon\|x-x_0\|$$

pour tous $x \in B_\delta(x_0)$ et $z \in B_\delta(y_0)$. En particulier, si $x \in B_\delta(x_0) \cap (x_0 + \mathrm{Ker}(\nabla\varphi(x_0)))$, on déduit que :

$$\sigma d(x,\varphi^{-1}(y_0)) \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \nabla\varphi(x_0)(x_0 - x)\| \leq \varepsilon\|x - x_0\|\,,$$

d'où le résultat. Ceci est donc une application importante de cette théorie qui sert en particulier à déduire des conditions nécessaires d'optimalité de problèmes du type :

$$\textit{minimiser}\ f(x)\ \textit{sous les contraintes}\ \ \varphi(x) = 0\,.$$

(c) La propriété (2.8), dite parfois *ouverture à un taux linéaire* au voisinage de x_0 (ou *régularité métrique* au voisinage de $(x_0,\varphi(x_0))$), coïncide avec l'ouverture usuelle lorsque l'application considérée est linéaire [40]. L'application φ^{-1} est dite dans ce cas *pseudo-lipschitzienne* au voisinage de $(\varphi(x_0),x_0)$. Ce qui justifie aussi l'appellation *Théorème d'inversion* pour ce résultat, dont il existe d'autres formulations plus générales (voir [5, Chapter 3]) que nous considérons dans les sections suivantes en traitant les multi-applications.

2.4 Régularité métrique des multi-applications

Dans cette section, nous donnons le résultat théorique de base que nous appliquons aux sections 2.5 et 2.6 pour déduire des conditions suffisantes pour la régularité métrique.

Définition 2.4.1: *Soient $F \subset X \times Y$ une multi-application fermée et $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$. On dit que F est* métriquement régulière *au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$ s'il existe $\sigma > 0$, et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que :*

$$\sigma\, d(x,F^{-1}(y)) \leq d(y,F(x)) \quad \textit{pour tous}\ x \in U\ \textit{et}\ y \in V\,. \tag{2.12}$$

D'une façon équivalente, F est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$ s'il existe $\sigma,\varepsilon > 0$ tels que (2.12) ait lieu pour $x \in B_\varepsilon(\bar{x})$ et $y \in B_\varepsilon(\bar{y})$ tels que $d(y,F(x)) \leq \varepsilon$. En effet, soit $\delta > 0$ tel que $(\sigma + 1)\delta < \varepsilon$, et soient $x \in B_\delta(\bar{x})$ et $y \in B_\delta(\bar{y})$ tels que $d(y,F(x)) > \varepsilon$. Puisque $d(y,F(\bar{x})) \leq d(y,\bar{y}) \leq \delta < \varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma\, d(x,F^{-1}(y)) \leq \sigma\, d(\bar{x},F^{-1}(y)) + \sigma\, d(x,\bar{x}) &\leq d(y,F(\bar{x})) + \sigma\, d(x,\bar{x}) \\ &\leq \delta + \sigma\delta \leq \varepsilon \leq d(y,F(x))\,.\end{aligned}$$

Il existe dans la littérature d'autres notions équivalentes à la régularité métrique.

Proposition 2.4.1: *Soient $F \subset X \times Y$ une multi-application fermée et $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *F est métriquement régulière au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$;*

(b) *F est ouverte à un taux linéaire au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$: il existe $\sigma > 0$, $\tau_0 > 0$, et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que :*

$$B_{\sigma\tau}(\bar{y}) \subset F(B_\tau(\bar{x})) \quad \textit{pour tous } x \in U, y \in V, (x,y) \in F, \textit{ et } \tau \in]0,\tau_0] .$$

(c) *F^{-1} est pseudo-lipschitzienne au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$: il existe $K > 0$ et des voisinages U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que :*

$$e(F^{-1}(y') \cap U, F^{-1}(y'')) \leq K d(y,y'') \quad \textit{pour tous } x \in U, y', y'' \in V .$$

Démonstration. Voir par exemple [21, 57, 71, 78]. ∎

Définition 2.4.2: *Soient X, Y des espaces topologiques et $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$. Une multi-application $F \subset X \times Y$ est dite* semi-continue inférieurement *en $(\bar{x},\bar{y})$ si pour tout voisinage V de $\bar{y}$ il existe un voisinage U de $\bar{x}$ tel que :*

$$F(p) \cap V \neq \emptyset \quad \textit{pour tout } x \in U .$$

Théorème 2.4.1: [13, Theorem 5.3] *Soient X, Y complets, P un espace topologique, $F \subset P \times (X \times Y)$ une multi-application à valeurs fermées et semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in F$, et σ, $\rho > 0$.*

Soit $f : (X \times Y) \times (Y \times P) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction définie par :

$$f((x,y),(z,p)) := d(y,z) + i_{F(p)}(x,y) .$$

On munit l'espace $(X \times Y)$ de la norme

$$d_\rho((x,y),(x',y')) := \max\{(d(x,x'),\rho d(y,y'))\} .$$

Supposons qu'il existe un voisinage U de $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$ dans $(X \times Y) \times (Y \times P)$ tel que :

$$\inf\{|\nabla f_{(z,p)}|(x,y) : \ ((x,y),(z,p)) \in U \cap [f{>}0]\} \geq \sigma . \tag{2.13}$$

Alors, il existe des voisinages N de $\bar{p}$, V de $\bar{x}$, et W de $\bar{y}$ tels que $F^{-1}(p)(z) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $(p,z) \in N \times W$ et

$$\sigma\, d(x,F(p)^{-1}(z)) \leq d(z,F(p)(x)) \quad \textit{pour tout } (p,x,z) \in N \times V \times W .$$

Remarque 2.4.1: Le Théorème 2.4.1 a été formulé dans [13] en utilisant la notion de paire variationnelle, une formulation à laquelle on peut se ramener selon la Remarque 2.2.1 (b), en remarquant qu'on a nécessairement $\sigma\rho \leq 1$, d'après la définition de la pente forte (Définition 2.2.1). On notera aussi que (2.13) est une condition nécessaire pour obtenir la conclusion du théorème, voir [57, Theorem 2], et [12, Theorem 5.3] dans le cas non paramétrique.

Pour conclure cette section, nous donnons quelques résultats techniques que nous utilisons par la suite. Les propositions suivantes sont aisément vérifiables.

Proposition 2.4.2: *Soit $F \subset P \times (X \times Y)$ une multi-application à valeurs fermées semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in P \times (X \times Y)$, et soit $f : (X \times Y) \times (Y \times P) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :*

$$f((x,y),(z,p)) := d(y,z) + i_{F(p)}(x,y)\,.$$

Alors :

(a) *f est épi-semi-continue supérieurement en $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$;*

(b) *$f(.,(z,p))$ est semi-continue inférieurement pour tout $(z,p) \in Y \times P$.*

Proposition 2.4.3: *Soient $f : X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $(\bar{x},\bar{p}) \in \operatorname{dom} f$. On note $F \subset P \times (X \times \mathbb{R})$ la multi-application définie par $F(p) := \operatorname{epi}(f(.,p))$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est épi-semi-continue supérieurement en $(\bar{x},\bar{p})$;*

(b) *F est semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},f(\bar{x},\bar{p})))$.*

2.5 multi-applications strictement différentiables

La notion de *différentiabilité inférieure stricte* est l'adaptation au cadre des multi-applications dans des espaces de Banach X et Y de la différentiabilité stricte usuelle des fonctions (Définition 2.3.1). On introduit la notion de cônes *équi-circatangents*, dont on rappelle sans démonstrations les propriétés essentielles. On renvoie à [10] pour plus de détails concernant cette notion.

Définition 2.5.1: *Soit $A \subset X$ un fermé. Un cône $\mathcal{C} \subset X$ est dit* équi-circatangent *à A en $a \in A$ si :*

$$\lim_{(t,x) \overset{\mathbb{P}\times A}{\to} (0,a)} e(\mathcal{C} \cap B_X, t^{-1}(A - x)) = 0\,,$$

où $\mathbb{P} :=]0, +\infty[$.

On déduit de cette définition que tout cône équi-circatangent à A en a est inclus dans le cône de Clarke [27] noté $C(A,a)$ et défini par :

$$C(A,a) := \{v \in X : \lim_{(t,x) \overset{\mathbb{P}\times A}{\to} (0,a)} d(v, t^{-1}(A - x)) = 0\}.$$

D'autre part, on montre que tout sous-cône de $C(A,a)$ contenu dans un sous-espace de dimension finie de X est un cône équi-circatangent à A en a. En particulier, en dimension finie $C(A,a)$ est lui-même un cône équi-circatangent à A en a. On a la caractérisation suivante des cônes équi-circatangents [10, Proposition 2.3].

Proposition 2.5.1: *Un cône $\mathcal{C} \subset X$ est équi-circatangent à A en $a \in A$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage N de a tel que :*

$$\mathcal{C} \subset T_A^{\varepsilon}(x) \quad \textit{pour tout } x \in N \cap A\,.$$

Définition 2.5.2: *Une multi-application $F \subset X \times Y$ est dite* strictement différentiable inférieurement *en $(x,y) \in F$ s'il existe un cône $\{(0,0)\} \neq L \subset X \times Y$ équi-circatangent à F en (x,y). On appelle L la* différentielle inférieure stricte *de F en (x,y) et on note $DF(x,y) := L$.*

Remarque 2.5.1: (a) En dimension finie toute multi-application F est strictement différentiable inférieurement, puisque $C(F,(x,y))$ est équi-circatangent à F en (x,y) pour tout $(x,y) \in F$.

(b) La Définition 2.5.2 recouvre le cas des applications strictement différentiables. Soit $\varphi : X \to Y$ une application strictement différentiable en $x_0 \in X$. Alors, d'après le Lemme 2.3.1, il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\mathrm{Gr}(D\varphi(x_0)) \subset T^{\varepsilon}_{\mathrm{Gr}(\varphi)}(x,\varphi(x)) \quad \text{pour tout } x \in U\,.$$

Donc, $\mathrm{Gr}(D\varphi(x_0))$ (qui coïncide avec $C(\mathrm{Gr}(\varphi),(x_0,\varphi(x_0)))$ est un cône équi-circatangent à $\mathrm{Gr}(\varphi)$ en $(x_0,\varphi(x_0))$.

On introduit également la notion d'*uniforme équi-circatangence*.

Définition 2.5.3: *Soient $(A_p)_{p\in P} \subset X$ une famille d'ensembles fermés, $\bar{p} \in P$, et $a \in A_{\bar{p}}$. Un cône $\mathcal{C} \subset X$ est dit uniformément équi-circatangent à $(A_p)_p$ en a au voisinage de $\bar{p}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des voisinages N de $\bar{p}$ et V de a tels que :*

$$\mathcal{C} \subset T^{\varepsilon}_{A_p}(x) \quad \textit{pour tous } x \in A_p \cap V \ \textit{ et } p \in N\,.$$

Théorème 2.5.1: *Soit $F \subset P \times (X \times Y)$ une multi-application à valeurs fermées semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in F$. Supposons qu'il existe un cône $\mathcal{C} \subset X \times Y$ tel que :*

(a) *$\mathcal{C}$ est surjective, c'est-à-dire pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $(x,y) \in \mathcal{C}$;*

(b) *$\mathcal{C}$ est uniformément équi-circatangent à $(F(p))_{p\in P}$ en $(\bar{x},\bar{y})$ au voisinage de $\bar{p}$;*

(c) $\|\mathcal{C}^{-1}\| := \sup\limits_{y \in \operatorname{dom} \mathcal{C}^{-1}} \|y\|^{-1} d(0,\mathcal{C}^{-1}(y)) < +\infty$.

Alors, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\gamma > \|\mathcal{C}^{-1}\|$, posant $\sigma := \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)\gamma}$, il existe des voisinages N de $\bar{p}$, V de $\bar{x}$ et W de $\bar{y}$ tels que pour tout $(p,x,z) \in N \times V \times W$ on a $F(p)^{-1}(z) \cap V \neq \emptyset$ et

$$\sigma d(x,F(p)^{-1}(z)) \leq d(z,F(p)(x))\,.$$

Démonstration. Soient γ et ε tels que $\|\mathcal{C}^{-1}\| < \gamma$ et $0 < \varepsilon < 1$. Utilisant (b) on trouve un voisinage U de $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$ dans $P \times (X \times Y)$ tel que :

$$\mathcal{C} \subset T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y) \quad \text{pour tout } (p,(x,y)) \in U \cap F\,. \tag{2.14}$$

On introduit la fonction $f : (X \times Y) \times (Y \times P) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$f((x,y),(z,p)) := \|y - z\| + i_{F(p)}(x,y)\,,$$

et on munit l'espace $X \times Y$ de la norme $\|(x,y)\|_{\gamma} = \max(\|x\|,\gamma\|y\|)$. On a $f((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p})) = 0$, et de la Proposition 2.4.2 on déduit que f est épi-semi-continue supérieurement en $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$, et que les fonctions $f(.,(z,p))$ sont semi-continues inférieurement pour tous $z \in Y$ et p proche de $\bar{p}$. Soient $(p,(x,y)) \in U$ et $z \in Y$ tels que

$$0 < f_{(z,p)}(x,y) := f((x,y),(z,p)) < +\infty\,.$$

On en déduit que $(p,(x,y)) \in F$ et $y \neq z$. Posant alors $v := \frac{z-y}{\|y-z\|} \in \overline{B}_Y$, il existe, d'après (a) et (c), un vecteur $u \in X$ tel que $\|u\| \leq \gamma$ et $(u,v) \in \mathcal{C}$. Par conséquent, de (2.14) on déduit que $(u,v) \in T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)$. Utilisant la Proposition 2.2.2 (b), on obtient

$$(f_{(z,p)})'_{\varepsilon}((x,y),(u,v)) \leq \|\cdot\|'(y - z; v) + \varepsilon\gamma^{-1}\|(u,v)\| + i_{T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)}(u,v) \leq -1 + \varepsilon\,,$$

d'où, d'après la Proposition 2.2.2, on obtient

$$|\nabla f_{(z,p)}|(x,y) \geq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)\gamma} =: \sigma\,.$$

À ce stade il suffit d'appliquer le Théorème 2.4.1. ■

On peut également formuler le Théorème 2.5.1 (on se restreint au cas non paramétrique) en utilisant la notion de *module de surjection* [54, 55].

Définition 2.5.4: *Soient $F \subset X \times Y$ une multi-application et $(x,y) \in F$. On appelle* module de surjection *de F en (x,y) la fonction* $\mathrm{Sur}(F,x,y)$ *donnée, pour $t > 0$, par :*

$$\mathrm{Sur}(F,x,y)(t) := \sup\{r \geq 0 : \; B(y,r) \subset F(B(x,t))\}\,.$$

Le réel positif $\mathrm{sur}(F,x,y) := \liminf_{t \to 0} t^{-1}\mathrm{Sur}(F,x,y)(t)$ *est appelé* constante de surjection *de F en (x,y).*

Corollaire 2.5.1: *Soient $F \subset X \times Y$ une multi-application fermée et $(\bar{x},\bar{y}) \in F$. Supposons que F est strictement différentiable inférieurement en $(\bar{x},\bar{y})$, que $DF(\bar{x},\bar{y})$ est surjective, et que $\|DF(\bar{x},\bar{y})^{-1}\| < +\infty$. Alors, pour tous $\varepsilon > 0$ et $\gamma > \|DF(\bar{x},\bar{y})^{-1}\|$, il existe un voisinage U de $(\bar{x},\bar{y})$ tel que :*

$$\mathrm{sur}(F,x,y) \geq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)\gamma} \quad \textit{pour tout } (x,y) \in U\,.$$

En particulier, $\mathrm{sur}(F,\bar{x},\bar{y}) \geq \dfrac{1}{\|DF(\bar{x},\bar{y})^{-1}\|}$.

Remarque 2.5.2: (a) Lorsque $F(p) \equiv F$, le Théorème 2.5.1 a été obtenu dans [10] en utilisant une méthode *itérative*. Quant au Corollaire 2.5.1, il est la version multivoque du résultat de Graves-Lyusternik (Théorème 2.3.2).

2.6 Conditions suffisantes en termes de cônes contingents

Pour appliquer le Théorème 2.5.1 il faut trouver un cône équi-circatangent, ce qui n'est pas évident en dimension infinie. Pour cela, nous donnons des conditions suffisantes pour la régularité métrique en termes de cônes contingents et contingents approximatifs.

Théorème 2.6.1: *Soient $F \subset P \times (X \times Y)$ une multi-application à valeurs fermées semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in F$, $\alpha \in [0,1[$, et $c > 0$. Supposons que :*

$$\limsup_{(p,(x,y)) \xrightarrow{F} (\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))} e(B_Y, T_{F(p)}(x,y)(cB_X)) \leq \alpha\,. \tag{2.15}$$

Alors, F est métriquement régulière en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$. En particulier, il existe un voisinage U de $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$ tel que :

$$\operatorname{sur}(F(p),x,y) \geq \frac{1-\alpha}{c} \quad \textit{pour tout } (p,(x,y)) \in U \cap F\,.$$

Démonstration. On munit $X \times Y$ de la norme $\|(x,y)\| := \max(\|x\|, \frac{c}{1+\alpha}\|y\|)$, et on introduit sur $(X \times Y) \times (Y \times P)$ la fonction f définie par :

$$f((x,y),(z,p)) := \|y - z\| + i_{\hat{F}(z,p)}(x,y)\,,$$

où $\hat{F} := Y \times F$. Alors, $f((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p})) = 0$, et de la Proposition 2.4.2 on déduit que f est épi-semi-continue supérieurement en $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$, et que les fonctions $f(.,(z,p))$ sont semi-continues inférieurement pour tous $z \in Y$ et p proche de $\bar{p}$. Utilisant (2.15), on trouve un voisinage U de $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$ dans $P \times (X \times Y)$ tel que :

$$\sup_{(p,x,y) \in U \cap F} e(B_Y, T_{F(p)}(x,y)(cB_X)) \leq \alpha\,. \tag{2.16}$$

Soient alors $(p,(x,y)) \in U$ et $z \in Y$ tels que $0 < f_{(z,p)}(x,y) := f((x,y),(z,p)) < +\infty$. Donc, $(x,y) \in F(p)$ et $y \neq z$. Posant $v := \frac{z-y}{\|y-z\|}$, on déduit que $\|\cdot\|'(y - z; v) = -1$. Utilisant (2.16), on trouve des vecteurs $u \in X$ et $w \in Y$ qui vérifient :

$$(u, v - w) \in T_{F(p)}(x,y), \quad \|u\| \leq c, \quad \|w\| \leq \alpha\,, \tag{2.17}$$

d'où, appliquant la Proposition 2.2.2 (b) avec $\varepsilon = 0$,

$$f'_{(z,p)}((x,y),(u,v-w)) \leq \|\cdot\|'(y - z; v) + \|w\| + i_{T_{F(p)}(x,y)}(u, v - w) \leq -1 + \alpha\,.$$

Par conséquent,

$$|\nabla f_{(z,p)}|(x,y) \geq -\|(u,v-w)\|^{-1} f'_{(z,p)}((x,y),(u,v-w)) \geq \frac{1-\alpha}{c} > 0\,.$$

La conclusion découle donc du Théorème 2.4.1 appliqué avec $\sigma := \frac{1-\alpha}{c}$. ∎

Remarque 2.6.1: (a) Le Théorème 2.6.1 donne une version paramétrique de [4, Theorem 2]. Il contient aussi le résultat de [55, Corollary 2.1] et [69, p. 30] qui correspondent à $\alpha = 0$.

(b) La conclusion du Théorème 2.6.1 demeure vraie si on remplace le cône contingent $T_{F(p)}(x,y)$ par le cône contingent approximatif $T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)$. Ceci ne change rien à la démonstration, mais il donne une condition suffisante plus faible pour la régularité métrique (voir [13, Corollary 5.10]) :

> Soient $F \subset P \times (X \times Y)$ une multiapplication à valeurs fermées semi-continue inféireurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in F$, $\alpha \in [0,1[$, $c > 0$ et $0 < \varepsilon < (1+\alpha)/\mu^2$, où $\mu := \max\{1+\alpha, c\}$. Supposons que :
>
> $$\limsup_{(p,(x,y)) \overset{F}{\to} (\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))} e(\overline{B}_Y, T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)(c\overline{B}_X)) \leq \alpha\,. \tag{2.18}$$
>
> Alors, F est métriquement régulière en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$. En particulier, il existe un voisinage U de $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$ tel que :
>
> $$\mathrm{sur}(F(p),x,y) \geq \frac{1-\alpha-(\varepsilon\mu^2)/c}{c+\varepsilon u} \quad \text{pour tout } (p,(x,y)) \in U \cap F\,.$$

(c) L'hypothèse (2.18) est moins forte que celle du Théorème 2.5.1. En effet, s'il existe $\gamma > 0$ et $\mathcal{C}$ un cône équi-circatangent uniforme à $(F(p))_{p\in P}$ en $(\bar{x},\bar{y})$ au voisinage de $\bar{p}$, surjectif, et vérifiant $\|\mathcal{C}^{-1}\| < \gamma$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y}))$ tel que pour tout $(p,(x,y)) \in U$ on a :

$$\mathcal{C} \subset T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)\,.$$

Ceci montre que :

$$\overline{B}_Y \subset \mathcal{C}(\gamma\overline{B}_X) \subset T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)(\gamma\overline{B}_X) \quad \text{pour tout } (p,(x,y)) \in U\,.$$

Donc (2.18) a lieu pour tout $\alpha \in [0,1[$.

Comme nous l'avons vu jusqu'à maintenant dans tous les résultats sur la régularité métrique, la surjectivité d'un cône contingent exact ou approximatif est une hypothèse incontournable. Le cas linéaire en témoigne puisque dans le Théorème 2.3.1 le fait que A est surjective est nécessaire pour que A soit ouverte, voir [40]. Dans le théorème suivant, utilisant une variante de (2.18), nous donnons un résultat garantissant un certain comportement des multi-applications, et qui en particulier donne la régularité métrique si le cône approximatif est surjectif.

Théorème 2.6.2: *Soient $F \subset P \times (X \times Y)$ une multi-application à valeurs fermées semi-continue inférieurement en $(\bar{p},(\bar{x},\bar{y})) \in F$. On suppose qu'il existe un voisinage ouvert W de $(\bar{x},\bar{y})$, $\alpha \in [0,1[$ et $c,\varepsilon > 0$ tels que :*

$$\limsup_{(x,y) \overset{F(p)\cap W}{\longrightarrow} (\bar{x},\bar{y}),\, p\to\bar{p}} e(B_Y \cap T_{F(p)}(x,y)(X),\, T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)(c\overline{B}_X)\,) \leq \alpha\,. \tag{2.19}$$

Posant $\sigma := \dfrac{1-\alpha-\varepsilon(1+\alpha)}{c} > 0$*, il existe des voisinages* N *de* $\bar{p}$*,* U *de* $\bar{x}$*, et* V *de* $\bar{y}$ *tels que :*

$$F(p)^{-1}(z)\cap U \neq \emptyset \quad \textit{pour tout } (p,z) \in N\times(V\cap Z(W))$$

et

$$\sigma d(x,F(p)^{-1}(z)) \leq d(z,F(p)(x))$$

pour tout $(p,x,z) \in N\times U\times(V\cap Z(W))$*, où*

$$Z(W) := \bigcap_{(x,y)\in F(p)\cap W} (y+\overline{T_{F(p)}(x,y)(X)})\,. \tag{2.20}$$

Démonstration. L'ensemble $Z(W)$ est un fermé de Y, donc c'est un espace métrique complet muni de la topologie induite. On munit également l'espace $X\times Y$ de la norme $\|(x,y)\| := \max(\|x\|,\frac{c}{1+\alpha}\|y\|)$, et on définit la fonction $f : (X\times Y)\times(Z(W)\times P) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ par :

$$f((x,y),(z,p)) := \|y-z\| + i_{F(p)}(x,y)\,.$$

Alors, $f((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p})) = 0$, et de la Proposition 2.4.2 on déduit que f est épi-semi-continue supérieurement en $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$, et que les fonctions $f(.,(z,p))$ sont semi-continues inférieurement pour tous $z\in Y$ et p proche de $\bar{p}$. D'après (2.19), il existe des voisinages N de $\bar{p}$, U de $\bar{x}$ et V de $\bar{y}$ tels que $U\times V\subset W$ et

$$e(B_Y\cap T_{F(p)}(x,y)(X), T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)(c\overline{B}_X)) \leq \alpha \quad \text{pour tout } (p,(x,y)) \in (N\times(U\times V))\cap F\,. \tag{2.21}$$

Soient $(p,x,y)\in N\times U\times V$ et $z\in Z(W)$ tels que $0 < f_{(z,p)}(x,y) := f((x,y),(z,p)) < +\infty$. Alors, $y\neq z$ et $(x,y)\in F(p)$. Posons donc $v := \frac{z-y}{\|z-y\|}$. Alors, d'une part on a $\|\cdot\|'(y-z;v) = -1$, et d'autre part, de la définition de $Z(W)$ (voir (2.20)) on obtient

$$z-y \in \overline{T_{F(p)}(x,y)(X)} \quad \text{pour tous } x,y\in W\,,$$

dont on déduit que $v\in\overline{T_{F(p)}(x,y)(X)}$, donc $v\in\overline{B_Y\cap T_{F(p)}(x,y)(X)}$. Utilisant (2.21), on trouve $u\in B_X$ et $w\in Y$ tels que :

$$\|u\|\leq c\,,\quad \|w\|\leq\alpha\,,\quad (u,v-w)\in T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)\,,$$

d'où, par la Proposition 2.2.2 (b), on obtient

$$\begin{aligned}(f_{(z,p)})'_{\varepsilon}((x,y),(u,v-w)) &\leq \|\cdot\|'(y-z;v) + \|w\| + \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{c}\|v-w\| + i_{T^{\varepsilon}_{F(p)}(x,y)}(u,v-w)\\ &\leq -1+\alpha+\varepsilon(1+\alpha)\,.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|\nabla f(.,(z,p))|(x,y) = |\nabla f_{(z,p)}|(x,y,z,p) \geq \frac{1-\alpha-\varepsilon(1+\alpha)}{(1+\varepsilon)c} =: \sigma > 0\,.$$

Pour finir il suffit donc d'appliquer le Théorème 2.4.1 avec $(U \times V) \times (Z(W) \times N)$ pour voisinage de $((\bar{x},\bar{y}),(\bar{y},\bar{p}))$. ■

Remarque 2.6.2: (a) Observons que $Z(W) = Y$ si et seulement si

$$\overline{T_{F(p)}(x,y)(X)} = Y \tag{2.22}$$

pour tout (p,x,y) tel que $(x,y) \in F(p) \cap W$. Dans ce cas, sous l'hypthèse (2.19), F est métriquement régulière en $(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$. On retrouve ainsi le Théorème 2.6.1 quand $\alpha = 0$.

(b) Le Théorème 2.6.2 recouvre le résultat de [84, Theorem 1] quand $\alpha = \varepsilon = 0$ et $F(p) \equiv F$.

(c) Sur les quelques exemples que nous avons traités, on voit bien que la recherche d'une condition suffisante (et même nécessaire et suffisante, voir [58, 12]) pour qu'une multi--application soit métriquement régulière au voisinage d'un point de son graphe se ramène à l'estimation de la pente forte d'une certaine fonction. De même, le cas de conditions à base de codérivées, comme dans [68], et le cas des multi-applications fortement lipschitziennes voir [61] entrent dans ce cadre. Nous renvoyons à [13, 12] pour ces cas.

STABILITÉ HOMOTOPIQUE DES POINTS CRITIQUES ISOLÉS DES FONCTIONS CONTINUES

3. STABILITÉ HOMOTOPIQUE DES POINTS CRITIQUES ISOLÉS DES FONCTIONS CONTINUES

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité homotopique des points critiques isolés des fonctions continues définies sur des espaces métriques complets. En plus du principe variationnel et de la pente forte déjà introduits dans le chapitre 2, nous utiliserons pour cela la notion de pente faible et les techniques de déformation de la théorie des points critiques introduits dans [34, 39]. En utilisant également le principe de changement de métrique introduit dans [31], nous donnons ainsi une approche plus simple et claire des résultats principaux de Ioffe et Schwartzman [59], concernant le cas des minimiseurs locaux. Dans le même cadre, nous donnons aussi un résultat de stabilité homotopique des groupes critiques d'un point critique isolé, étendant un résultat de K.-C. Chang [24] établi pour des fonctions de classe C^2 définies sur un espace de Hilbert. Ce chapitre reprend pour l'essentiel l'article [35] par rapport auquel nous donnons ici des rappels et des détails de démonstration supplémentaires, mais nous omettons quelques commentaires bibliographiques.

3.1 Introduction

Soient X un espace de Hilbert et $(f_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ une famille de fonctions de classe C^2 définies sur une boule fermée $\overline{B}_r(z) \subset X$, telle que pour tout $\lambda \in [0,1]$, f_λ satisfait la condition classique de Palais-Smale dans $\overline{B}_r(z)$ et z est l'unique point critique de f_λ. Il est établi dans [19] que si l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ est continue par rapport à la topologie C^1 et si z est un minimiseur (qui est nécessairement strict) de f_0, alors z est aussi un minimiseur de f_λ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Plus généralement, il est établi dans [24] que les groupes critiques $C_q(f_\lambda; z)$, $q \in \mathbb{Z}$, sont indépendants de λ.

Ce type de résultat est obtenu en utilisant les techniques de déformation de la théorie des points critiques, et conduit à des applications de la méthode classique d'*homotopie* à des problèmes variationnels : on observera en effet que, sous les hypothèses faites, la fonction $f : [0,1] \times X \to \mathbb{R}$ définie par $f(\lambda,u) := f_\lambda(u)$ $(u \in H)$ est continue, c'est-à dire f est une homotopie entre f_0 et f_1.

Motivés par des applications à des problèmes du Calcul des variations où, de façon naturelle, les fonctionnelles associées ne sont pas différentiables, et l'espace fonctionnel sur lequel elles sont bien définies n'est pas un espace de Hilbert, Ioffe et Schwartzman [59] ont étendu le premier résultat (le cas des minimiseurs) au cadre général où X est un espace métrique complet et les f_λ sont continues. Dans leurs démonstrations ils ont utilisé une extension convenable de la notion de point critique permettant de développer les techniques de déformation. Un ingrédient essentiel dans leur approche est le théorème dit "du puits de potentiel" [59, Theorem 2], donnant une estimation *a priori* de la taille du puits de potentiel associé à un minimiseur local strict.

Il nous est apparu que les techniques et les arguments utilisés dans la preuve de ce dernier résultat sont très complexes et rendent la démonstration délicate à comprendre. Notre première motivation est donc de donner une démonstration plus claire et simple de ce résultat. Dans ce but, nous utilisons les outils et les méthodes de la théorie métrique des points critiques introduite indépendamment dans [34, 39], et basée sur la notion de *pente faible* (introduite aussi indépendamment dans [62]), laquelle diffère légèrement de la notion correspondante de [59]. Comme son nom l'indique, la pente faible est plus petite que la pente forte.

Dans notre approche, nous utilisons le *principe de changement de métrique* introduit dans [31, 32] qui nous permet d'invoquer une version (relativement) simple du *principe de déformation* (une légère extension de [32, Theorem 2]) pour donner une démonstration transparente du théorème du puits de potentiel.

Pour établir le théorème de stabilité homotopique d'un minimiseur local, il s'agit, de façon classique, de montrer que l'ensemble :

$$\Gamma := \{\lambda \in [0,1] : z \text{ est un minimiseur local de } f_\lambda\}$$

(qui contient 0) est ouvert et fermé. La partie difficile consiste à montrer que Γ est fermé, ce qu'on déduit du théorème du puits de potentiel. Quant à l'ouverture de Γ, nous montrons qu'il s'agit d'une conséquence du principe variationnel (utilisant la pente forte): il n'est donc pas nécessaire d'employer les techniques de déformation, comme c'est le cas dans [59].

Nous profitons de notre étude pour revoir un autre résultat de Ioffe et Schwartzman

[60], qui est une version abstraite du théorème de bifurcation variationnel de Rabinowitz [73], dont la démonstration utilise le théorème du puits de potentiel et une version métrique du théorème du col d'Ambrosetti et Rabinowitz. Nous avons ici besoin de modifier légèrement la définition de point critique, en donnant une définition "symétrique" de cette notion.

La dernière section du chapitre est consacrée à la stabilité homotopique des groupes critiques des points critiques isolés. Nous donnons à ce sujet un résultat qui est une conséquence immédiate du résultat de théorie de Morse locale suivant : soient f et g deux fonctions continues définies sur un espace métrique complet X et U un ouvert de X. Supposons que f et g satisfont la condition de Palais-Smale sur $\overline{U}$, et que f et g possèdent chacune un unique point critique dans $\overline{U}$: $z_f, z_g \in U$. Supposons de plus $(g-f)_{|\overline{U}}$ est lipschitzienne et bornée. Alors, si la constante de Lipschitz de $(g-f)_{|\overline{U}}$ et $\|(g-f)_{|\overline{U}}\|_\infty$ sont suffisamment petits, on a $C_q(f; z_f) = C_q(g; z_g)$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Les résultats principaux de cette section étendent ceux de K.-C. Chang [24] établis dans le cadre classique mentionné au début de cette introduction, et illustrent l'efficacité des méthodes de la théorie métrique des points critiques.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous rappelons la notion de la pente faible, en rappelant divers liens avec d'autres notions (pente forte, différentielle de Gâteaux, opérateurs sous-différentiels). Dans les sections 3.3, 3.4, et 3.5, nous donnons les outils nécessaires à notre analyse, notamment le principe de changement de métrique, la condition de Palais-Smale, et un théorème de déformation. La section 3.6 est consacrée aux estimations quantitatives aux voisinage des minimiseurs locaux, que nous appliquons dans les sections 3.7 et 3.8 pour établir la stabilité homotopique des minimiseurs locaux et une version abstraite du théorème de bifurcation de Rabinowitz. Dans la section 3.9, nous étudions la stabilité homotopique des groupes critiques des points critiques isolés.

Notation 3.1.1: Dans ce chapitre X est un espace métrique muni d'une distance notée d.

3.2 La pente faible

Définition 3.2.1: *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in X$. On appelle* pente faible *de f en u, qu'on note $|df|(u)$, la borne supérieure des réels positifs σ tels qu'il existe*

$\delta > 0$ et une fonction $\mathcal{H} : B_\delta(u) \times [0,\delta] \to X$ continue qui vérifient

$$d(\mathcal{H}(v,t),v) \leq t\,, \tag{3.1}$$

$$f(\mathcal{H}(v,t)) \leq f(v) - \sigma t\,. \tag{3.2}$$

Les inégalités (3.1) et (3.2) étant toujours vérifiées pour $\sigma = 0$, avec $\delta > 0$ arbitraire et $\mathcal{H}(v,t) \equiv v$, on voit que $|df|(u) \in [0,+\infty]$ est bien défini.

Observons que $|df|(u) = 0$ si u est un minimiseur local de f. Dans ce cas en effet, (3.2) implique que

$$\sigma t \leq f(u) - f(\mathcal{H}(u,t)) \leq 0$$

pour $t > 0$ suffisamment petit, d'où $\sigma = 0$.

Proposition 3.2.1: *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'application $u \mapsto |df|(u)$ est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Soit $u \in X$ tel que $|df|(u) > 0$, et soit $\sigma > 0$ tel que $|df|(u) > \sigma$. Alors, il existe $\delta > 0$ et une fonction $\mathcal{H} : B_\delta(u) \times [0,\delta] \to \mathbb{R}$ avec les propriétés (3.1) et (3.2). Soit $\rho := \delta/2$. Alors, pour $v \in B_\rho(u)$ et $(w,t) \in B_\rho(v) \times [0,\rho]$, on a :

$$d(\mathcal{H}(w,t),w) \leq t\,, \quad f(\mathcal{H}(w,t)) \leq f(w) - \sigma t\,,$$

d'où $|df|(v) \geq \sigma$. Donc $\liminf_{v \to u} |df|(v) \geq |df|(u)$, ce qui est (trivialement) vrai aussi si $|df|(u) = 0$. ∎

Le lien entre les pentes forte et faible est donné dans la proposition suivante, qui explique la terminologie.

Proposition 3.2.2: *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors :*

$$|\nabla f|(u) \geq |df|(u) \quad \textit{pour tout } u \in X\,.$$

Démonstration. On peut supposer que $|df|(u) > 0$ (donc, u n'est pas un minimiseur local de f). Soit donc $\sigma > 0$ tel que $|df|(u) > \sigma$. Alors, il existe $\delta > 0$ et une fonction $\mathcal{H} : B_\delta(u) \times [0,\delta] \to \mathbb{R}$ qui vérifient (3.1) et (3.2). On obtient

$$\sigma d(v,\mathcal{H}(v,t)) \leq \sigma t \leq f(v) - f(\mathcal{H}(v,t))\,,$$

pour tout $v \in B_\delta(u)$ et $t \in [0,\delta]$, d'où $|\nabla f|(u) \geq \sigma$, et la conclusion. ∎

Comme en ce qui concerne la pente forte, on peut comparer la pente faible avec diverses notions de différentielle ou de sous-différentielle. Nous nous contenterons ici de la proposition suivante, voir la Remarque 3.2.1 ci-dessous pour d'autres commentaires et références à ce sujet.

Proposition 3.2.3: *Soient X un espace normé, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable dont la différentielle $f' : X \to X^*$ est continue par rapport aux topologies forte dans X et *-faible dans X^*. Alors :*

$$|df|(u) \geq \|f'(u)\| \quad \textit{pour tout } u \in X\,. \tag{3.3}$$

En particulier, si f est de classe C^1, alors :

$$|df|(u) = |\nabla f|(u) = \|f'(u)\| \quad \textit{pour tout } u \in X\,. \tag{3.4}$$

Démonstration. Montrons (3.3). L'inégalité est évidente si $\|f'(u)\| = 0$. Soit donc $\sigma > 0$ tel que $\|f'(u)\| > \sigma$. Alors, on trouve $w \in X$ tel que $\|w\| = 1$ et $f'(u)(w) < -\sigma$ et, d'après la propriété de continuité de f' il existe $\delta > 0$ tel que $f'(v)(w) \leq -\sigma$ pour tout $v \in B_{2\delta}(u)$. Pour $(v,t) \in B_\delta(u) \times [0,\delta]$ on pose :

$$\mathcal{H}(v,t) := v + tw\,.$$

Alors $\mathcal{H}$ est continue et vérifie :

$$f(\mathcal{H}(v,t)) - f(v) = tf'(v + \tau w)(w) \leq -\sigma t\,,$$

où $\tau = \tau(v,t) \in]0,t[$, d'où $v + \tau w \in B_{2\delta}(u)$. Donc, $|df|(u) \geq \sigma$, d'où $|df|(u) \geq \|f'(u)\|$.

On montre que $\|f'(u)\| \geq |\nabla f|(u)$ si f est Fréchet-différentiable en u, d'où (3.4), d'après la Proposition 3.2.2 et (3.3). Soit $\varepsilon > 0$, on trouve $\delta > 0$ tel que :

$$\|f'(u)\| \geq f'(u)\left(\frac{v-u}{\|u-v\|}\right) \geq \frac{f(u)-f(v)}{\|u-v\|} - \varepsilon \quad \text{pour tout } v \in B_\delta(u)\,,$$

d'où $\|f'(u)\| \geq |\nabla f|(u) - \varepsilon$, et la conclusion puisque ε est arbitraire. ■

On introduit donc la notion métrique des points critiques.

Définition 3.2.2: *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Un élément $u \in X$ est appelé* point critique *de f si $|df|(u) = 0$.*

Remarque 3.2.1: (a) La Définition 3.2.1 a été introduite dans [39], et indépendamment dans [62], tandis qu'une variante a été donnée dans [59]. La notion de pente faible permet de développer une théorie des points critiques générale, dans un cadre métrique, pour les fonctions continues, de façon cohérente avec les applications à l'existence de solutions de problèmes variationnels.

Une telle théorie générale n'est pas possible pour les fonctions s.c.i. arbitraires : voir [39] où, cependant, la notion de pente faible, et donc la notion métrique de point critique, sont aussi naturellement étendues aux fonctions s.c.i., ce qui permet d'appliquer la théorie métrique des points critiques à diverses *classes* de fonctions semi-continues inférieurement. À cet effet, on établit des comparaisons entre la pente faible et diverses notions de différentielle ou de sous-différentiel : voir par exemple [39, 23, 30]. La Proposition 3.2.3 n'est qu'un cas très particulier de telles comparaisons, qui montre déjà que la Définition 3.2.2 généralise la notion "classique" de point critique.

Dans [22], une notion nouvelle d'opérateur sous-différentiel ∂ a été introduite, de telle façon que :

$$|df|(u) < +\infty \implies \partial f(u) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad |df|(u) \geq d_*(0,\partial f(u)) \,,$$

si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i. sur l'espace de Banach X. En particulier, si $f : X \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne, alors $\partial f(u)$ coïncide avec le sous-différentiel de Clarke de f en u, et l'inégalité ci-dessus peut être stricte dans ce cas (voir [22]).

(b) On a vu qu'un minimiseur local d'une fonction continue f est un point critique de f, mais on ne sait pas, en général, si un maximum local l'est. Dans la section 3.8, on modifiera la Définition 3.2.2, en la rendant *bilatérale*, afin que les maxima locaux soient aussi des points critiques.

Notation 3.2.1: Si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et $a \in \mathbb{R}$, on note :

$$K_a := \{u \in X \ : \ |df|(u) = 0, f(u) = a\}$$

l'ensemble des points critiques de f au niveau a. Si $K_a \neq \emptyset$, on dit que a est une *valeur critique* de f.

3.3 Le principe de changement de métrique

Les diverses assertions du théorème suivant ont été démontrées successivement dans [31], [32] et [35]. Nous donnons ici les principes des démonstrations données dans [31] et

[32], ainsi que les démonstrations données dans [35].

Théorème 3.3.1: *Soient A un ensemble non vide, fermé de X et $\beta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue telle que $\beta(s) > 0$ pour tout $s > 0$. Supposons que : ou bien $\beta(0) > 0$, ou bien A est compact et ses composantes connexes sont des points.*

Alors, il existe une métrique $\tilde{d}$ sur X, topologiquement équivalente à d, et telle que :

(a) *pour tous $r > 0$, $R > 2r$, et $u_i \in X$, $i = 1,2$, on a :*

$$2r \leq d(u_i,A) \leq R \implies \tilde{d}(u_1,u_2) \geq \left(\min_{[r,R+r]} \beta\right) \min\{r,d(u_1,u_2)\}\,;$$

(b) *pour tout $u \in X$ on a :*

$$\tilde{d}(u,A) = \int_0^{d(u,A)} \beta(t)dt\,.$$

(c) *si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(t)dt = +\infty$ et si (X,d) est complet, alors $(X,\tilde{d})$ est complet;*

(d) *si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i., alors*

$$|\widetilde{\nabla} f|(u) = \frac{|\nabla f|(u)}{\beta(d(u,A))} \quad \text{pour tout } u \notin A_\beta\,,$$

où $A_\beta := \{u \in X \,:\, \beta(d(u,A)) = 0\}$ et $|\widetilde{\nabla} f|$ est la pente forte de f par rapport à la métrique $\tilde{d}$;

(e) *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors*

$$|\widetilde{d} f|(u) = \frac{|df|(u)}{\beta(d(u,A))} \quad \text{pour tout } u \notin A_\beta\,,$$

où $|\widetilde{d} f|$ est la pente faible de f par rapport à la métrique $\tilde{d}$.

Démonstration. D'après le théorème d'Arens-Eells (voir par exemple [43, p.110]), on peut plonger isométriquement X dans un espace de Banach qu'on note Y. Dans la suite de la démonstration, on identifie donc (X,d) à un sous-espace (métrique) de $(Y,\|\cdot\|)$. Si u, $v \in Y$ on note

$$\Gamma_{u,v} := \{\gamma \in C^1([0,1],Y) \,:\, \gamma(0) = u, \gamma(1) = v\}\,,$$

et on pose :

$$\tilde{d}(u,v) := \inf_{\gamma \in \Gamma_{u,v}} \int_0^1 \beta(d(\gamma(t),A))\|\gamma'(t)\|dt\,, \tag{3.5}$$

où on note encore d la distance associée à la norme Y.

Dans le cas où $\beta(0) > 0$, il est facile de vérifier que $\tilde{d}$ est une métrique sur Y. Dans le cas où $\beta(0) = 0$, on doit expliciter le fait que $\tilde{d}(u,v) > 0$ si $u \neq v$. Pour cela, on montre que si $u \in Y$ et $r > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|u - v\| \geq r \implies \tilde{d}(u,v) \geq \delta\,;$$

ceci est établi dans [32], grâce à l'hypothèse que A est compact et ses composantes connexes sont des points. Comme par ailleurs on voit facilement, en considérant les segments, que si B est un borné de Y, alors il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\tilde{d}(u,v) \leq \rho\|u - v\| \quad \text{pour tous } u,v \in B\,,$$

on en déduit également que $\tilde{d}$ est topologiquement équivalente à d.

(a) Soit $\delta := \min_{[r,R+r]} \beta$. Pour $\gamma \in \Gamma_{u_1,u_2}$, on pose :

$$t_\gamma := \sup\{t \in [0,1]\ :\ r \leq d(\gamma(s),A) \leq R + r \ \text{ pour tout } s \in [0,t]\} > 0\,.$$

Alors :

$$\int_0^{t_\gamma} \beta(d(\gamma(s),A))\|\gamma'(s)\|ds \geq \delta\|u_1 - \gamma(t_\gamma)\| \geq \delta \min\{r,\|u_1 - u_2\|\}\,, \tag{3.6}$$

la dernière inégalité dans (3.6) étant obtenue en distinguant les cas $t_\gamma < 1$ (qui implique : $d(\gamma(t_\gamma),A)) = r$ ou $d(\gamma(t_\gamma),A)) = R + r$), et $t_\gamma = 1$.

(b) Soient $v \in A$, $t \in [0,1]$ et $\gamma \in \Gamma_{v,u}$, on pose : $\rho(t) := d(\gamma(t),A)$. Alors, ρ est localement lipschitzienne sur $[0,1]$, et vérifie $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = d(u,A)$ et $|\rho'(t)| \leq \|\gamma'(t)\|$ presque partout sur $]0,1[$. Par une formule de changement de variable (voir [43, Theorem 3.2.5]), on obtient

$$\int_0^1 \beta(d(\gamma(t),A))\|\gamma'(t)\|dt \geq \int_0^1 \beta(\rho(t))\|\rho'(t)\|dt \geq \int_0^{d(u,A)} \beta(t)dt.$$

Comme v et γ sont arbitraires dans A et $\Gamma_{u,v}$ respectivement, on en déduit en passant aux bornes inférieures sur $\gamma \in \Gamma_{v,u}$ puis sur $v \in A$, que :

$$\tilde{d}(u,A) \geq \int_0^{d(u,A)} \beta(t)dt\,. \tag{3.7}$$

Donc, pour conclure nous allons montrer l'inégalité inverse :

$$\tilde{d}(u,A) \leq \int_0^{d(u,A)} \beta(t)dt. \tag{3.8}$$

On fixe $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que : $0 < \delta \leq \min\{\varepsilon,1\}$ et

$$[0 \leq \tau \leq \tau' \leq d(u,A) + 1\,,\ \tau' - \tau \leq \delta] \implies \beta(\tau) \leq \beta(\tau') + \varepsilon\,. \tag{3.9}$$

Soient $v \in A$ et $\gamma \in \Gamma_{u,v}$ tels que :

$$\|u-v\| \leq d(u,A)+\delta \quad \text{et} \quad \gamma(t) := u+t(u-v)\,, \;\; t \in [0,1]\,.$$

Alors, on a :

$$d(\gamma(t),A) \leq \|\gamma(t)-v\| = (1-t)\|u-v\| \leq \min\{d(\gamma(t),A),d(u,A)\}+\delta\,.$$

Par conséquent, en appliquant (3.9) avec $\tau := d(\gamma(t),A)$ et $\tau' := (1-t)\|u-v\|$, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(u,A) \leq \tilde{d}(u,v) &\leq \int_0^1 \beta(d(\gamma(t),A))\|\gamma'(t)\|dt \\
&\leq \int_0^1 (\beta((1-t)\|u-v\|)+\varepsilon)\|u-v\|dt \\
&\leq \int_0^{\|u-v\|} \beta(t)dt + \varepsilon\|u-v\| \\
&\leq \int_0^{d(u,A)+\varepsilon} \beta(t)dt + \varepsilon(d(u,A)+\varepsilon)\,,
\end{aligned}$$

et donc l'inégalité (3.8) en faisant tendre ε vers 0.

(c) Dans le cas où $\beta(0)>0$, la démonstration est donnée dans [31], elle est plus simple que dans le cas où $\beta(0)=0$, que nous reproduisons d'après [32].

Soit (u_h) une suite de Cauchy dans $(X,\tilde{d})$. D'après (3.7), la suite $(d(u_h,A))$ est alors bornée, et en particulier, $\rho := \liminf_h d(u_h,A) < +\infty$. Si $\rho = 0$, puisque A est compact il existe une sous-suite (u_{h_k}) de (u_h) qui converge dans (X,d), et donc aussi dans $(X,\tilde{d})$, vers un point $u \in A$, d'où la suite (u_h) converge vers u dans $(X,\tilde{d})$. Si $\rho > 0$, il existe $0 < 2r < R$ tels que $2r \leq d(u_h,A) \leq R$ pour h suffisamment grand, d'où on déduit de (a) que (u_h) est une suite de Cauchy dans (X,d). Si (X,d) est complet, (u_h) converge dans (X,d), donc aussi dans $(X,\tilde{d})$.

(d) Soit $u \in \operatorname{dom} f \setminus A_\beta$ et $0<\varepsilon<\beta(d(u,A))$. Alors, il existe $\delta_0>0$ tel que :

$$|\beta(d(v,A))-\beta(d(u,A))| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_{\delta_0}(u)\,. \tag{3.10}$$

Si $\sigma > |\widetilde{\nabla} f|(u)$, on trouve alors $0<\delta\leq\delta_0$ tel que :

$$f(u)-f(v) \leq \sigma\tilde{d}(u,v) \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_{\delta_0}(u)\,. \tag{3.11}$$

Soit $v \in \overline{B}_\delta(u)$, on considère le chemin γ donné par $\gamma(t) := v+t(u-v)$, $t \in [0,1]$. On a :

$$\tilde{d}(u,v) \leq \int_0^1 \beta(d(\gamma(t),A))\|u-v\|ds \leq (\beta(d(u,A)+\varepsilon))\|u-v\|\,,$$

d'où par (3.11) on obtient

$$f(u) - f(v) \leq \sigma\beta(d(u,A) + \varepsilon)\|u - v\| \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_\delta(u)\,,$$

d'où $|\nabla f|(u) \leq \sigma\beta(d(u,A) + \varepsilon)$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $|\nabla f|(u) \leq |\widetilde{\nabla} f|(u)\beta(d(u,A))$, cette inégalité étant évidente si $|\widetilde{\nabla} f|(u) = +\infty$.

Inversement, si $\sigma > |\nabla f|(u)$, on peut trouver $0 < \delta \leq \delta_0$ tel que :

$$f(u) - f(v) \leq \sigma\|u - v\| \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_\delta(u)\,. \tag{3.12}$$

Soient $v \in \overline{B}_\delta(u)$ et $\gamma \in \Gamma_{u,v}$. On pose :

$$\tilde{s} := \sup\{s \in [0,1] \;:\; \gamma(r) \in \overline{B}_\delta(u) \text{ pour tout } 0 \leq r \leq s\}\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{\tilde{s}} \beta(d(\gamma(s),A))\|\gamma'(s)\|ds \;&\geq\; (\beta(d(u,A)) - \varepsilon)\|\gamma(\tilde{s}) - u\| \\ &\geq\; (\beta(d(u,A)) - \varepsilon)\|u - v\|\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\tilde{d}(u,v) \geq (\beta(d(u,A)) - \varepsilon)\|u - v\|$, d'où, d'après (3.12) :

$$f(u) - f(v) \leq \frac{\sigma}{\beta(d(u,A)) - \varepsilon}\tilde{d}(u,v) \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_\delta(u)\,,$$

et par conséquent, $|\widetilde{\nabla} f|(u) \leq \dfrac{\sigma}{\beta(d(u,A)) - \varepsilon}$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $|\widetilde{\nabla} f|(u) \leq \dfrac{|\nabla f|(u)}{\beta(d(u,A))}$, cette inégalité étant évidente si $|\nabla f|(u) = +\infty$.

La démonstration de (e), dont le principe est analogue à celle de (d) (en plus technique, parce que la définition de la pente faible est plus complexe que celle de la pente forte), est donnée dans [31]. ■

Remarque 3.3.1: (a) Si X est un espace de Banach, $A := \{0\}$ et $\beta(t) := \dfrac{1}{1+t}$, la métrique obtenue dans le Théorème 3.3.1 est celle de *Cerami* [26] :

$$\tilde{d}(u,v) := \inf_{\gamma \in \Gamma_{u,v}} \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 + \|\gamma(t)\|}dt\,,$$

en particulier, on a :

$$\tilde{d}(u,0) = \int_0^{\|u\|} \frac{dt}{1+t}\,.$$

Les pentes dans cette métrique sont données par :

$$|\widetilde{\nabla} f|(u) = (1 + \|u\|)|\nabla f|(u)\,, \qquad |\tilde{d}f|(u) = (1 + \|u\|)|df|(u)\,.$$

La métrique de Cerami a été très utilisée pour obtenir des résultats d'existence de solutions de problèmes variationnels, voir par exemple [42].

(b) Dans [25, Theorem 2.1], on trouve le résultat suivant :

Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., propre, minorée et Gâteaux-différentiable sur son domaine effectif, et $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue croissante telle que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+h(t)} = +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $y \in X$ tel que :

$$f(y) < \inf_X f + \varepsilon\,,$$

et pour tout $\lambda > 0$, il existe $z \in X$ tel que :

$$f(z) \leq f(y)\,, \quad \|z\| \leq \|y\| + \bar{r}\,, \quad \text{et} \quad \|f'(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda(1+h(\|u\|))}\,,$$

où $\bar{r}$ est tel que $\int_{\|y\|}^{\|y\|+\bar{r}} \frac{1}{1+h(t)} dt \geq \lambda$.

Ce résultat est obtenu comme conséquence d'une généralisation du principe variationnel, pour une fonction s.c.i. définie sur un espace métrique complet, et est appliqué pour obtenir des variantes de résultats de type min-max en théorie des points critiques.

Grâce au principe de changement de métrique, on voit que le résultat ci-dessus est en fait une conséquence immédiate du Corollaire 2.2.1, et donc du principe variationnel "usuel". En effet, soit $\tilde{d}$ la métrique associée à

$$A := \{0\}\,, \quad \beta(t) := \frac{1}{1+h(t)}\,, \ t \geq 0\,,$$

selon le Théorème 3.3.1. Alors, $\tilde{d}$ est topologiquement équivalente à $\|\cdot\|$ et $(X,\tilde{d})$ est complet. Soient $\varepsilon,\lambda > 0$ fixés, posons $\sigma := \varepsilon/\lambda$, on considère donc $y \in X$ tel que :

$$f(y) < \inf_X f + \sigma\lambda\,.$$

D'après le Corollaire 2.2.1, il existe $z \in X$ tel que :

$$f(z) \leq f(y)\,, \quad \tilde{d}(z,y) < \lambda\,, \quad |\widetilde{\nabla} f|(z) < \sigma\,.$$

On a :

$$\int_0^{\|z\|} \beta(t)\,dt = \tilde{d}(z,0) \leq \tilde{d}(z,y) + \tilde{d}(y,0) < \lambda + \int_0^{\|y\|} \beta(t)\,dt \leq \int_0^{\|y\|+\bar{r}} \beta(t)\,dt\,,$$

d'après le Théorème 3.3.1 (b), d'où $\|z\| \leq \|y\| + \bar{r}$, et

$$\|f'(z)\| \leq |\nabla f|(z) = \beta(\|z\|)|\widetilde{\nabla} f|(z) = \frac{1}{1+h(\|u\|)}|\widetilde{\nabla} f|(z) < \frac{\sigma}{1+h(\|u\|)},$$

d'après le Théorème 3.3.1 (d).

De la même façon, les résultats d'existence de points critiques de [25] sont des conséquences des résultats "usuels" de la théorie *métrique* des points critiques, en considérant la métrique $\tilde{d}$; voir la Remarque 3.4.1 (b) ci-dessous.

3.4 La condition de Palais-Smale

La condition de *Palais-Smale* est une condition de compacité qui joue un rôle fondamental dans la théorie des points critiques. Dans cette section, nous établissons des aspects quantitatifs de cette condition en utilisant la notion de *module*.

Définition 3.4.1: *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, U un fermé de X et $c \in \mathbb{R}$.*

On dit qu'une suite $(u_h)_h \subset U$ est une suite de Palais-Smale pour f dans U *si $(f(u_h))_h$ est bornée et $|df|(u_h) \to 0$.*

On dit qu'une suite $(u_h)_h \subset X$ est une suite de Palais-Smale pour f au niveau c *si $f(u_h) \to c$ et $|df|(u_h) \to 0$.*

On dit que f satisfait la condition de Palais-Smale dans U *((PS)* dans U*, en abrégé), si toute suite de Palais-Smale pour f dans U contient une sous-suite convergente.*

On dit que f satisfait la condition de Palais-Smale au niveau c *($(PS)_c$), en abrégé), si toute suite de Palais-Smale pour f au niveau c contient une sous-suite convergente.*

Observons que grâce à la semi-continuité inférieure de la pente faible (Proposition 3.2.1), on déduit que toute limite d'une suite de Palais-Smale pour f (dans $U \subset X$) est un point critique de f, et que lorsque f satisfait la condition $(PS)_c$, l'ensemble K_c des points critiques de f au niveau c est compact.

Remarque 3.4.1: (a) Si $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i., on peut bien sûr formuler une condition de Palais-Smale à l'aide de la pente forte : si $c \in \mathbb{R}$, on dit que f satisfait la condition $(\widehat{PS})_c$ si toute suite $(u_h) \subset X$ telle que $f(u_h) \to c$ et $|\nabla f|(u_h) \to 0$ contient une sous-suite convergente.

Il est bien connu que cette condition donne un résultat d'existence de minimiseur, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4.1: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., propre, bornée inférieurement et (v_h) une suite minimisante de f : $f(v_h) \to c := \inf_X f$. Alors, il existe une suite $(u_h) \subset X$ telle que :*

$$f(u_h) \leq f(v_h)\,, \quad d(u_h,v_h) \to 0 \quad et \quad |\nabla f|(u_h) \to 0\,.$$

Par conséquent, si f satisfait la condition $(\widehat{PS})_c$, alors toute suite minimisante de f contient une sous-suite qui converge vers un minimiseur de f.

Démonstration. Soit $(\varepsilon_h) \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite telle que $f(v_h) < c+\varepsilon_h^2$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. D'après le Corollaire 2.2.1, il existe une suite $(u_h) \in X$ telle que :

$$f(u_h) \leq f(v_h)\,, \quad d(u_h,v_h) < \varepsilon_h \quad \text{et} \quad |df|(u_h) \leq |\nabla f|(u_h) \leq \varepsilon_h\,.$$

Par conséquent, $f(u_h) \to c$, et si f satisfait la condition $(\widehat{PS})_c$, il existe une sous-suite (u_{h_k}) de (u_h) et $u \in X$ tels que $u_{h_k} \to u$, d'où $v_{h_k} \to u$ et $c \leq f(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} f(u_{h_k}) = c$. ■

(b) Dans [25], l'auteur obtient des résultats d'existence de points critiques pour une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. propre sur l'espace de Banach X, en supposant que f est Gâteaux-différentiable sur son domaine effectif et que $f' : \mathrm{dom}\, f \to X^*$ est norme–*-faible continue (en particulier, f est localement lipschitzienne sur $\mathrm{dom}\, f$, comme il est indiqué dans [30]). Ces résultats utilisent la condition de type Palais-Smale suivante :

> toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $(f(x_n))$ est bornée et $\|f'(x_n)\|(1+h(\|x_n\|)) \to 0$ contient une sous-suite convergente,

où h a les propriétés de la Remarque 3.3.1 (b). Si $\tilde{d}$ est la métrique définie dans cette remarque, il découle de la Proposition 3.2.3 et du Théorème 3.3.1 (e) que la condition ci-dessus implique que f satisfait la condition (PS) dans $\mathrm{dom}\, f$ par rapport à la métrique $\tilde{d}$. Il s'ensuit que les résultats d'existence de points critiques de [25] sont des conséquences de ceux obtenus par la théorie métrique des points critiques, notamment des résultats de [34].

Définition 3.4.2: *Soient P un espace topologique, $f_p : X \to \mathbb{R}$, $p \in P$, une famille de fonctions continues, et U un fermé de X. On dit que $(f_p)_{p\in P}$ satisfait la* condition de Palais-Smale uniforme dans *U ((PS)* dans *U, en abrégé), si toute suite $(p_h,u_h) \subset P \times U$ telle que la suite $(f_{p_h}(u_h))$ est bornée et $|df_{p_h}|(u_h) \to 0$ contient une sous-suite convergente vers $(p,u) \in P \times U$ avec $|df_p|(u) = 0$.*

Remarquons que si $(f_p)_{p\in P}$ satisfait (PS) dans U, alors pour tout $p \in P$, la fonction f_p satisfait (PS) dans U.

Définition 3.4.3: *On appelle* module *une fonction* $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *continue, croissante, et telle que* $\beta(s) > 0$ *pour tout* $s > 0$.

Dans la proposition qui suit nous donnons un critère pour qu'une famille de fonctions satisfasse (PS) dans U.

Proposition 3.4.2: *Soient P un espace topologique compact, $f_p : X \to \mathbb{R}$, $p \in P$, une famille de fonctions continues, et U un fermé de X. Supposons que pour tout $p \in P$, la fonction f_p est bornée sur U, satisfait (PS) dans U, et*

$$\liminf_{p\to p_0} \inf_V |df_p| \geq \inf_V |df_{p_0}| \quad \textit{pour tout } p_0 \in P \textit{ et tout fermé } V \subset U\,. \tag{3.13}$$

Alors, $(f_p)_{p\in P}$ satisfait la condition (PS) dans U.

Démonstration. Considérons des suites $(p_h) \subset P$ et $(u_h) \subset U$ telles que $|df_{p_h}|(u_h) \to 0$. Comme P est compact, on peut supposer que $p_h \to p \in P$. Soit $V := \overline{(u_h)}$. De (3.13), on déduit que :

$$0 = \liminf_{h\to+\infty} \left(\inf_V |df_{p_h}|\right) \geq \inf_V |df_p|\,.$$

Comme f_p satisfait la condition (PS) dans U, il existe donc une sous-suite de (u_h) qui converge vers $u \in U$, et puisque $|df_p|$ est s.c.i., d'après la Proposition 3.2.1, on obtient que $|df_p|(u) = 0$. ■

Dans la proposition suivante on établit un aspect quantitatif de la condition de Palais-Smale.

Proposition 3.4.3: *Soient P un espace topologique, U un fermé de X, et $f : P\times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $f_p := f(p,\cdot)$, $p \in P$. Supposons que f est bornée sur $P\times U$, que $(f_p)_{p\in P}$ satisfait la condition (PS) dans U, et que pour chaque $p \in P$, f_p a un unique point critique z_p dans U. Alors :*

(a) *$p \mapsto z_p$ est continue;*

(b) *il existe un module β tel que $\beta(0) = 0$ et*

$$|df_p|(u) > \beta(d(u,z_p)) \quad \textit{pour tous } u \in U \setminus \{z_p\} \textit{ et } p \in P\,. \tag{3.14}$$

Démonstration. (a) Soient $p \in P$ et une suite $(p_h)_h \subset P$ tels que $p_h \to p$, alors $|df_{p_h}|(z_{p_h}) = 0$. Puisque $(f_p)_{p\in P}$ satisfait la condition (PS) dans U, toute sous-suite de (z_{p_h}) possède une sous-suite convergente vers $z \in U$ qui vérifie $|df_p|(z) = 0$. Par conséquent, $z = z_p$ (car z_p est l'unique point critique de f_p dans U) et $z_{p_h} \to z_p$ quand $h \to +\infty$.

(b) Pour $p \in P$ et $s \geq 0$, on pose :

$$\tilde{\beta}(s) := \inf_{p\in P}\{|df_p|(u) \ : \ u \in U,\, d(u,z_p) \geq s\}\,.$$

Alors, $\tilde{\beta} : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ est une fonction croissante qui vérifie $\tilde{\beta}(0) = 0$. On montre que $\tilde{\beta}(s) > 0$ si $s > 0$. Par contradiction, supposons qu'il existe $s > 0$ tel que $\tilde{\beta}(s) = 0$. Alors, on peut trouver des suites $(p_h) \subset P$ et $(u_h) \subset U$ telles que $|df_{p_h}|(u_h) \to 0$ et

$$d(u_h,z_{p_h}) \geq s \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Puisque $(f_p)_{p\in P}$ satisfait (PS) dans U, alors il existe une sous-suite de (p_h,u_h) notée encore (p_h,u_h), et $(p,u) \in P \times U$ tels que $(p_h,u_h) \to (p,u)$ et $|df_p|(u) = 0$. Donc $u = z_p$, une contradiction avec (3.15).

Notons $\hat{\beta}$ la régularisation semi-continue inférieurement de $\tilde{\beta}$, alors $\hat{\beta}$ vérifie les mêmes propriétés mentionnées ci-dessus que $\tilde{\beta}$. On pose :

$$\beta(s) := \frac{1}{2}\inf\{|s-\tau| + \hat{\beta}(\tau) \ : \ \tau \geq 0\}\,.$$

On voit que $\beta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est continue, croissante, et vérifie $\beta(s) > 0$ si et seulement si $s > 0$. De plus, pour tout $p \in P$ et $u \in U \setminus \{z_p\}$ on a :

$$\beta(d(u,z_p)) \leq \frac{1}{2}\beta_p(d(u,z_p)) < |df_p|(u)\,,$$

d'où la conclusion. ∎

Remarque 3.4.2: Lorsque $f_p \equiv f$ dans la Proposition 3.4.3, on retrouve [32, Lemma].

3.5 Techniques de déformation

Définition 3.5.1: *On appelle* déformation *de X, toute application continue $\eta : X \times [0,1] \to X$ telle que $\eta(u,0) = 0$ pour tout $u \in X$.*

Le théorème suivant a été établi dans [34, Theorem 2.8]. Il s'agit du résultat de base permettant d'obtenir une déformation globale de l'espace métrique X, en "recollant" les "déformations locales" données dans la définition de la pente faible.

Théorème 3.5.1: *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $\sigma : X \to [0, +\infty[$ des fonctions continues telles que :*

$$|df|(u) \neq 0 \implies |df|(u) > \sigma(u) > 0\,.$$

Alors, il existe une fonction continue $\tau : X \to [0, +\infty[$ telle que :

$$\tau(u) = 0 \iff |df|(u) = 0\,,$$

et une application continue $\eta : X \times [0, +\infty[\to X$ telle que :

(a) $d(\eta(u,t),u) \leq t$, $f(\eta(u,t)) \leq f(u)$;

(b) $t \geq \tau(u) \Longrightarrow \eta(u,t) = \eta(u,\tau(u))$;

(c) $0 \leq t \leq \tau(u) \Longrightarrow f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma(u)t$.

Maintenant nous donnons le théorème principal de déformation.

Théorème 3.5.2: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $C \subset X$, σ, ρ_1, $\rho_2 > 0$, et $c \in \mathbb{R}$. Supposons que :*

$$|df|(u) > \sigma \quad \textit{pour tout } u \in B_{\rho_1+\rho_2}(C) \cap [c{<}f{<}c{+}\sigma\rho_2]\,. \tag{3.16}$$

Alors, il existe une fonction continue $\tau : \overline{B}_{\rho_1}(C) \cap [f{<}c{+}\sigma\rho_2] \to [0,+\infty[$ et une application continue $\eta : (\overline{B}_{\rho_1}(C) \cap [f{<}c{+}\sigma\rho_2]) \times [0,1] \to X$ telles que :

(a) $\tau(u) = 0 \iff f(u) \leq c$;

(b) $d(\eta(u,t),u) \leq \tau(u)t$;

(c) $f(\eta(u,t)) \leq f(u) - \sigma\tau(u)t$;

(d) $f(\eta(u,1)) \leq c$.

Démonstration. Posant $U := B_{\rho_1+\rho_2}(C) \cap [c{<}f{<}c{+}\sigma\rho_2]$, on trouve, grâce au Théorème 3.5.1 appliqué dans l'espace métrique U (muni de la topologie induite par celle de X) avec $\sigma(.) := \sigma$, une fonction continue $\tau_0 : U \to [0, +\infty[$ telle que :

$$\tau_0(u) = 0 \iff |df|(u) = 0\,, \tag{3.17}$$

et une application continue $\eta_0 : U \times [0, +\infty[\to U$ qui vérifie avec τ_0 les propriétés (a), (b) et (c) du Théorème 3.5.1.

On définit par récurrence des suites

$$\eta_h : U \times [0, +\infty[\to U \quad \text{et} \quad \tau_h : U \to]0,\rho_2[$$

comme suit : pour $h \geq 1$ et $(u,t) \in U \times [0,+\infty[$, on pose :

$$\eta_h(u,t) = \begin{cases} \eta_{h-1}(u,t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \tau_{h-1}(u) \\ \eta_0(\eta_{h-1}(u,\tau_{h-1}(u)),\, t-\tau_{h-1}(u)) & \text{si} \quad t \geq \tau_{h-1}(u)\,, \end{cases}$$

et

$$\tau_h(u) = \tau_{h-1}(u) + \tau_0(\eta_{h-1}(u,\tau_{h-1}(u)))\,. \tag{3.18}$$

Alors, pour tous $h \in \mathbb{N}$ et $u \in U$, η_h et τ_h sont continues, la suite $(\tau_h(u))_h$ est strictement croissante à termes strictement positifs, et

$$d(\eta_h(u,t),u) \leq t\,,$$

$$t \geq \tau_h(u) \implies \eta_h(u,t) = \eta_h(u,\tau_h(u))\,,$$

$$0 \leq t \leq \tau_h(u) \implies f(\eta_h(u,t)) \leq f(u) - \sigma t\,, \tag{3.19}$$

$$d(\eta_{h+1}(u,\tau_{h+1}(u)),\eta_h(u,\tau_h(u))) \leq \tau_{h+1}(u) - \tau_h(u) = \tau_0(\eta_h(u,\tau_h(u)))\,. \tag{3.20}$$

Soit $u \in \overline{B}_{\rho_1}(C) \cap [c<f<c+\sigma\rho_2] \subset U$, alors d'après (3.19), on a :

$$0 \leq \tau_h(u) \leq \sigma^{-1}(f(u)-c) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{N}\,,$$

d'où $(\tau_h(u))$ est bornée, on a donc $\tau_h(u) \to \tau(u) \in]0,\rho_2]$. De (3.20) on déduit que $\eta_h(u,\tau_h(u))$ converge vers $\bar{u} \in \overline{U}$. On a : $f(\bar{u}) = c$. En effet, on a clairement $c \leq f(\bar{u}) < c+\sigma\rho_2$; supposons que $f(\bar{u}) = c+\varepsilon (< f(u))$ pour un $\varepsilon > 0$. Alors :

$$c+\varepsilon \leq f(\eta_h(u,\tau_h(u))) \leq f(u) - \sigma\tau_h(u) < c + \sigma(\rho_2 - \tau_h(u))$$

d'où

$$d(\eta_h(u,\tau_h(u)),u) \leq \tau_h(u) < \rho_2 - \varepsilon/\sigma\,,$$

pour tout $h \in \mathbb{N}$. Il s'en suit que $d(\bar{u},u) < \rho_2$, donc $\bar{u} \in U$, et $\tau_0(\bar{u}) = 0$, une contradiction.

Pour $(u,t) \in (\overline{B}_{\rho_1}(C) \cap [f<c+\sigma\rho_2]) \times [0,1]$, on pose :

$$\eta(u,t) := \begin{cases} \lim\limits_{h\to+\infty} \eta_h(u,t\tau(u)) & \text{si}\, f(u) > c \\ u & \text{si}\, f(u) \leq c\,, \end{cases}$$

et on pose $\tau(u) := 0$ si $u \in \overline{B}_{\rho_1}(C) \cap [f\leq c]$. L'application η est bien définie. En effet, si $u \in U$ et $t \in [0,1[$, alors il existe h_0 tel que $t\tau(u) < \tau_h(u)$ pour tout $h \geq h_0$. Donc $\eta(u,t) = \eta_{h_0}(u,t\tau(u))$. Si $t = 1$, on a :

$$\eta(u,1) := \lim_h \eta_h(u,\tau(u)) = \lim_h \eta_h(u,\tau_h(u))\,.$$

Il est clair que τ est continue, quand à η on établit sa continuité exactement comme dans [32, Theorem 2]. ■

Si $C := X$, le Théorème 3.5.2 se réduit à [32, Theorem 2], qui a été appliqué dans [32] pour déduire la version métrique suivante du *Deuxième Lemme de Déformation* (selon la terminologie de K.-C. Chang [24]), dont nous aurons besoin à la section 3.9.

Théorème 3.5.3: *Soient $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$. Supposons que :*

(i) *f n'a pas de points critiques dans $[a{<}f{<}b]$;*

(ii) *ou bien K_a est vide, ou bien ses composantes connexes sont des points;*

(iii) *pour tout $c \in [a,b[$, $[a{\le}f{\le}c]$ est complet et f satisfait la condition (PS) dans $[a{\le}f{\le}c]$.*

Alors, il existe une déformation $\eta : [f{<}b] \times [0,1] \to [f{<}b]$ telle que :

(a) *$f(\eta(u,t)) \le f(u)$;*

(b) *$u \in K_a \implies \eta(u,t) = u$;*

(c) *$\eta([f{<}b],1) \subset [f{<}a] \cup K_a$.*

Remarque 3.5.1: Comme le suggère l'hypothèse (ii), la démonstration de ce résultat utilise le Théorème 3.3.1. En fait, le Principe de changement de métrique apporte un éclairage nouveau sur cette hypothèse, qui apparaît déjà dans la version du résultat donnée dans [24, Theorem I.3.2], où X est une variété de Finsler de classe C^2 et f est de classe C^1, et les techniques de déformation sont "classiques".

Le résultat suivant est une version métrique du célèbre Théorème du Col d'Ambrosetti et Rabinowitz (voir [1, 74]), et un cas particulier de [34, Theorem 3.7]. Nous en donnons une démonstration rapide basée sur le Théorème 3.5.2, qui donne une première illustration du rôle des techniques de déformation en théorie des points critiques.

Théorème 3.5.4: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $u,v \in X$. On suppose que :*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1],X) \ : \ \gamma(0) = u, \gamma(1) = v\} \neq \emptyset\,,$$

et on pose :

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} f(\gamma(t))\,.$$

Si $c > \max\{f(u),f(v)\}$ et si f vérifie la condition $(PS)_c$, alors $K_c \neq \emptyset$.

Démonstration. Par contradiction, supposons que $K_c = \emptyset$. D'après la condition $(PS)_c$, il existe $\varepsilon \in]0,c - \max\{f(u),f(v)\}[$ et $\sigma > 0$ tels que :

$$|df|(u) > \sigma \quad \text{pour tout } u \in [c-\varepsilon<f<c+\varepsilon]\,.$$

D'après le Théorème 3.5.2, appliqué avec $C := X$, il existe une déformation η de $[f<c+\varepsilon]$ telle que :

$$u \in [f\leq c-\varepsilon] \implies \eta(u,t) = u \quad \text{et} \quad \eta([f<c+\varepsilon],1) \subset [f\leq c-\varepsilon]\,.$$

Soit alors $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma([0,1]) \subset [f<c+\varepsilon]$, on pose :

$$\tilde{\gamma}(t) := \eta(\gamma(t),1) \quad \text{pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Alors, on voit que $\tilde{\gamma} \in \Gamma$, tandis que $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset [f\leq c-\varepsilon]$, ce qui contredit la définition de c. ■

3.6 Estimations quantitatives au voisinage d'un minimiseur local isolé

Dans cette partie, nous établissons des estimations quantitatives au voisinage des minimiseurs locaux stricts. Nous commençons par donner une conséquence du Principe variationnel d'Ekeland en termes de pente forte.

Proposition 3.6.1: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., $C \subset X$, σ, $\rho_1 \geq 0$, et $\rho_2 > 0$. Supposons que :*

$$\inf_{\overline{B}_{\rho_1}(C)} f < \inf_{B_{\rho_1+\rho_2}(C)} f + \sigma\rho_2\,.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in X$ tel que :

$$d(u,C) < \rho_1 + \rho_2\,, \quad f(u) < \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(C)} f + \varepsilon \quad \textit{et} \quad |\nabla f|(u) < \sigma\,.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soient $\bar{u} \in \overline{B}_{\rho_1}(C)$, $\rho < \rho_2$, $0 < \bar{\sigma} < \sigma$, et $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$ tels que :

$$f(\bar{u}) \leq \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(C)} f + \bar{\varepsilon} \leq \inf_{B_{\rho_1+\rho_2}(C)} f + \bar{\sigma}\rho\,.$$

Soit $\bar{\rho}_2 \in]\rho,\rho_2[$, alors $\overline{B}_{\bar{\rho}_2}(\bar{u}) \subset B_{\rho_1+\rho_2}(C)$, et donc on a :

$$f(\bar{u}) \leq \inf_{\overline{B}_{\bar{\rho}_2}(\bar{u})} f + \bar{\sigma}\rho\,.$$

Appliquant le Théorème 2.2.1, on trouve $u \in \overline{B}_{\rho}(\bar{u}) \subset B_{\rho_1+\rho_2}(C)$ tel que :

$$f(u) \leq f(\bar{u}) \leq \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(C)} f + \bar{\varepsilon} < \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(C)} f + \varepsilon$$

et

$$f(u) \leq f(v) + \bar{\sigma} d(v,u) \quad \text{pour tout } v \in \overline{B}_{\bar{\rho}_2}(\bar{u})$$

(en particulier, pour tout $v \in \overline{B}_{\bar{\rho}_2-\rho}(u)$), d'où d'après la définition de $|\nabla f|$, on déduit que $|\nabla f|(u) \leq \bar{\sigma} < \sigma$. ∎

Proposition 3.6.2: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., $z \in X$ et σ, ρ_1, $\rho_2 > 0$. Supposons que :*

$$f(u) \geq f(z) - \sigma\rho_2 \quad \textit{et} \quad |\nabla f|(u) \geq \sigma \quad \textit{pour tout } u \in B_{\rho_1+\rho_2}(z) \setminus \{z\}\,.$$

Alors, z est un minimiseur de f sur la boule $\overline{B}_{\rho_1}(z)$.

Démonstration. Par contradiction, supposant que $f(z) > \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(z)} f$, on obtient

$$\inf_{\overline{B}_{\rho_1}(z)} f < f(z) \leq \inf_{B_{\rho_1+\rho_2}(z)} f + \sigma\rho_2$$

d'où, grâce à la Proposition 3.6.1 appliquée avec $C := \{z\}$ et $\varepsilon := f(z) - \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(z)} f > 0$, on trouve un élément $u \in B_{\rho_1+\rho_2}(z)$ tel que :

$$f(u) < \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(z)} f + \varepsilon = f(z) \quad \text{et} \quad |\nabla f|(u) < \sigma\,,$$

une contradiction. ∎

Grâce au principe de changement de métrique (Théorème 3.3.1), on en déduit immédiatement une autre formulation de la Proposition 3.6.2.

Corollaire 3.6.1: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i., $\beta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ un module, $z \in X$ et $\rho > 0$. Supposons que :*

$$f(u) \geq f(z) - \rho\beta(\rho) \quad \textit{et} \quad |\nabla f|(u) \geq \beta(d(u,z)) \quad \textit{pour tout } u \in B_{2\rho}(z)\,. \tag{3.21}$$

Alors, z est un minimiseur de f sur la boule $\overline{B}_{\rho}(z)$.

Démonstration. Observons que $\int_0^{+\infty} \beta(t)dt = +\infty$, donc par le Théorème 3.3.1, appliqué avec β et $A := \{z\}$, on trouve une métrique $\tilde{d}$ équivalente à d telle que $(X,\tilde{d})$ est complet, et pour tout $u \neq z$ on a :

$$\tilde{d}(u,z) = \int_0^{d(u,z)} \beta(t)dt, \quad |\widetilde{\nabla} f|(u) = \frac{|\nabla f|(u)}{\beta(d(u,z))}.$$

Si $\alpha > 0$, on note $\tilde{\alpha} := \int_0^{\alpha} \beta(t)dt$ et $\widetilde{B}_{\tilde{\alpha}}(z) := \{u \in X \ : \ \tilde{d}(u,z) < \tilde{\alpha}\}$, la boule dans $(X,\tilde{d})$. On voit que $B_\alpha(z) = \widetilde{B}_{\tilde{\alpha}}(z)$. On pose : $\rho_1 := \tilde{\rho}$ et $\rho_2 := \widetilde{2\rho} - \tilde{\rho}$. Comme β est croisssante, on déduit que $\rho_2 \geq \rho\beta(\rho)$, et donc (3.21) devient

$$f(u) \geq f(z) - \rho_2 \quad \text{et} \quad |\widetilde{\nabla} f|(u) \geq 1 \qquad \text{pour tout } u \in \widetilde{B}_{\rho_1+\rho_2}(z)\,.$$

Appliquons ensuite la Proposition 3.6.2 dans $(X,\tilde{d})$. Alors il s'ensuit que z est un minimiseur de f sur $\widetilde{B}_{\tilde{\rho}}(z) = B_\rho(z)$. ■

Corollaire 3.6.2: *Soient X complet, $f_h : X \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions continues, $\beta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ un module, $z \in X$ et $\rho > 0$. Supposons que z soit un minimiseur local de f_0 et que :*

(i) *$f_h \to f_0$ uniformément sur $B_{2\rho}(z)$, quand $h \to +\infty$;*

(ii) *$|\nabla f_h|(u) \geq \beta(d(u,z))$ pour tous $u \in B_{2\rho}(z)$ et $h \in \mathbb{N}^*$.*

Alors, z est un minimiseur local de f_h pour tout h assez grand.

Démonstration. Soit $0 < r \leq \rho$ tel que $f_0(u) \geq f_0(z)$ pour tout $u \in B_{2r}(z)$. Alors, pour h assez grand, on obtient

$$f_h(u) \geq f_h(z) - r\beta(r) \quad \text{pour tout } u \in B_{2r}(z)\,,$$

d'après (i), et du fait que $\beta(r) > 0$. Par conséquent, la conclusion découle du Corollaire 3.6.1, grâce à (ii). ■

Maintenant nous pouvons énoncer le théorème du puits de potentiel.

Théorème 3.6.1: *Soient X complet et localement connexe, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $z \in X$, et $r_1, r_2 > 0$. Supposons que z est un minimiseur local de f et que :*

$$|df|(u) > 1 \quad \textit{pour tout } u \in B_{r_1+r_2}(z) \setminus \{z\}\,.$$

Soit $0 < r \leq r_1$ tel que $\overline{B}_r(z)$ est connexe et

$$f(u) < f(z) + r_2 \qquad \textit{pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,.$$

Alors,

$$f(u) \geq f(z) + d(u,z) \quad \textit{pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,.$$

Démonstration. Observons tout d'abord que z est nécessairement un minimiseur local strict de f puisque $|df|(u) > 1$ pour tout $u \in B_{r_1+r_2}(z) \setminus \{z\}$ et les minimiseurs locaux sont des points critiques. Appliquons ensuite le Théorème 3.5.2 avec

$$C := \{z\}\,, \quad c := f(z), \quad \rho_1 := r_1\,, \quad \rho_2 := r_2 \quad \text{et} \quad \sigma := 1\,.$$

Puisque $\overline{B}_r(z) = \overline{B}_r(z) \cap [f{<}c{+}r_2]$, on trouve des applications continues

$$\tau : \overline{B}_r(z) \to [0,+\infty[\quad \text{et} \quad \eta : \overline{B}_r(z) \times [0,1] \to X\,,$$

qui vérifient les propriétés (a), (b), (c) et (d) du Théorème 3.5.2. En particulier, de (a) et (b) on obtient

$$d(\eta(z,1),z) \leq \tau(z) = 0\,,$$

d'où $z = \eta(z,1) \in \eta(\overline{B}_r(z),1)$. Puisque $\eta(\overline{B}_r(z),1)$ est connexe et z est un minimiseur local strict de f, on déduit de (c) que :

$$f(\eta(u,1)) \leq c \text{ pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,,$$

et que $\eta(\overline{B}_r(z),1) = \{z\}$. Par conséquent, pour tout $u \in \overline{B}_r(z)$, on obtient grâce à (b) :

$$d(u,z) = d(\eta(u,1),u) \leq \tau(u)\,,$$

d'où en utilisant (c), on trouve

$$f(z) = f(\eta(u,1)) \leq f(u) - \tau(u) \leq f(u) - d(u,z)\,,$$

ceci achève la preuve. ■

Le corollaire suivant est une version légèrement affinée du théorème du puits de potentiel de Ioffe et Schwartzman [59, Theorem 2].

Corollaire 3.6.3: *Soient X complet et localement connexe, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $\beta : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ un module et $z \in X$. Supposons que z est un minimiseur local de f, et que pour $\rho > 0$ on a :*

$$|df|(u) > \beta(d(u,z)) \quad \textit{pour tout } u \in B_{2\rho}(z) \setminus \{z\}\,.$$

Soit $0 < r \leq \rho$ *tel que* $\overline{B}_r(z)$ *est connexe et*

$$f(u) < f(z) + \rho\beta(\rho) \quad \textit{pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,.$$

Alors,

$$f(u) \geq f(z) + \int_0^{d(u,z)} \beta(t)dt \quad \textit{pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,.$$

Démonstration. Soit $\tilde{d}$ la métrique donnée par le Théorème 3.3.1 appliqué avec $A := \{z\}$ et β, en particulier $\tilde{d}$ est topologiquement équivalente à d, donc $(X,\tilde{d})$ est localement connexe. De plus, puisque $\int_0^{+\infty} \beta(t)dt = +\infty$, on déduit que $(X,\tilde{d})$ est un espace complet. On a aussi pour tout $u \neq z$:

$$\tilde{d}(u,z) = \int_0^{d(u,z)} \beta(t)dt\,, \quad |\tilde{d}f|(u) = \frac{|df|(u)}{\beta(d(u,z))}\,.$$

Appliquant le Théorème 3.6.1 à f et $(X;\tilde{d})$ avec

$$r_1 := \tilde{\rho}\,, \quad r_2 := \widetilde{2\rho} - \tilde{\rho}\,, \quad r := \tilde{r}$$

et observant que $r_2 \geq \rho\beta(\rho)$, que z est aussi un minimiseur local strict de f et que $\overline{\tilde{B}}_{\tilde{r}}(z)$ est connexe, on obtient

$$f(u) \geq f(z) + \tilde{d}(u,z) = f(z) + \int_0^{d(u,z)} \beta(t)dt\,,$$

pour tout $u \in \overline{\tilde{B}}_{\tilde{r}}(z) = \overline{B}_r(z)$. ■

Corollaire 3.6.4: *Soient* X *complet et localement connexe,* $f_h : X \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$ *des fonctions continues,* $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *un module,* $z \in X$ *et* $\rho > 0$. *Supposons que* z *est un minimiseur local de* f_h *pour tout* $h \in \mathbb{N}^*$ *et que*

(i) $u_h \to u \Longrightarrow f_h(u_h) \to f_0(u)$ *pour tout* $u \in B_{2\rho}(z)$, *quand* $h \to +\infty$;

(ii) $|df_h|(u) > \beta(d(u,z))$ *pour tout* $u \in B_{2\rho}(z) \setminus \{z\}$ *et* $h \in \mathbb{N}^*$.

Alors, z *est un minimiseur local de* f_0. *De plus, il existe* $r > 0$ *tel que*

$$f_h(u) > f_h(z) \quad \textit{pour tout } u \in \overline{B}_r(z) \setminus \{z\} \textit{ et } h \in \mathbb{N}\,.$$

Démonstration. Soit $0 < r \leq \rho$ tel que $\overline{B}_r(z)$ est connexe et

$$f_h(u) < f_h(z) + \rho\beta(\rho) \quad \text{pour tous } u \in \overline{B}_r(z) \text{ et } h \in \mathbb{N}^*\,,$$

d'après (i). De (ii) et du Corollaire 3.6.3, on déduit que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f_h(u) \geq f_h(z) + \int_0^{d(u,z)} \beta(t)dt \quad \text{pour tout } u \in \overline{B}_r(z)\,,$$

d'où z est un minimiseur strict de f_h sur $\overline{B}_r(z)$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. ■

Remarque 3.6.1: (a) Le Corollaire 3.6.2 peut être généralisé de la façon suivante : soient X complet, $f_h : X \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions continues, $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ un module, U un ouvert de X, et $(z_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset U$. Supposons que z_0 est un minimiseur local de f_0 et que :

(i) $f_h \to f_0$ uniformément sur U et $z_h \to z_0$, quand $h \to +\infty$;

(ii) $|\nabla f_h|(u) \geq \beta(d(u,z_h))$ pour tout $u \in U$ et $h \in \mathbb{N}^*$.

Alors, z_h est un minimiseur local de f_h pour tout h assez grand. En effet, Soit $\rho > 0$ tel que $B_{2\rho}(z_0) \subset U$ et $f_0(u) \geq f_0(z_0)$ pour tout $u \in B_{2\rho}(z_0)$. En utilisant (i), on peut trouver $r \leq \rho$ tel que pour h assez grand, on a :

$$f_h(u) \geq f_h(z_h) - r\beta(r) \quad \text{pour tout } u \in B_{2r}(z_h)\,.$$

La conclusion découle du Corollaire 3.6.1.

On peut également formuler ce résultat, et donc le Corollaire 3.6.2, en utilisant la condition de Palais-Smale. On suppose pour cela que, au lieu de (ii), la condition suivante ait lieu :

(ii') $(f_h)_{h\in N}$ est uniformément bornée et satisfait (PS) dans $\overline{U}$, et z_h est l'unique point critique de f_h dans $\overline{U}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$.

En effet, d'après la Proposition 3.4.3, on déduit que $z_h \to z_0$ quand $h \to +\infty$ et qu'il existe un module $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tel que :

$$|\nabla f_h|(u) \geq |df_h|(u) > \beta(d(u,z_h)) \quad \text{pour tout } u \in U \setminus \{z_h\} \text{ et tout } h \in \mathbb{N},$$

d'où les conditions (i) et (ii) ci-dessus.

(b) Quand au Corollaire 3.6.4, une telle généralisation n'est pas immédiate. Par exemple on peut donner une version semblable au Corollaire 3.6.2, si X est *fortement localement connexe*, c'est-à-dire X est localement connexe et la fonction $\delta : X \to]0, +\infty]$ définie par

$$\delta(t) := \sup\{\delta > 0 \;:\; B_\delta(u) \text{ est connexe}\}$$

est s.c.i. sur X. Dans ce cas en effet, si $z_h \to z_0$, on trouve $r > 0$ tel que $B_r(z_h)$ est connexe pour tout $h \in \mathbb{N}$. Evidemment, un espace de Banach est fortement localement connexe.

Mais, dans ce cas, on peut au contraire se ramener au contexte du Corollaire 3.6.4, en considérant les fonctions $\tilde{f}_h := f_h(. + z_h - z_0)$.

(c) Il n'est pas difficile de voir que la conclusion du Corollaire 3.6.1 demeure valable si, à la place de la condition (3.21), on suppose que :

$$\inf_{B_{\rho_1+\rho_2}(z)} f > \inf_{\overline{B}_{\rho_1}(z)} f - \rho_2\beta(\rho_1)\,, \tag{3.22}$$

et $|\nabla f|(u) \geq \beta(d(u,z))$ pour tout $u \in B_{\rho_1+\rho_2}(z) \setminus \{z\}$. En effet, soit $\tilde{d}$ la métrique donnée par le Théorème 3.3.1 appliqué avec $A := \{z\}$ et β. Posant $r_1 := \tilde{\rho}_1$ et $r_2 := \widetilde{\rho_1+\rho_2} - \tilde{\rho}_1$, on obtient

$$r_2 = \int_0^{\rho_1+\rho_2} \beta(t)dt - \int_0^{\rho_1} \beta(t)dt = \int_{\rho_1}^{\rho_1+\rho_2} \beta(t)dt \geq \rho_2\beta(\rho_1)\,,$$

et donc (3.22) devient

$$\inf_{\overline{\tilde{B}}_{r_1+r_1}(z)} f > \inf_{\overline{\tilde{B}}_{r_1}(z)} f - r_2\,.$$

De plus, grâce au Théorème 3.3.1, on a :

$$|\widetilde{\nabla} f|(u) = \frac{|\nabla f|(u)}{\beta(d(u,z))} \geq 1 \qquad \text{pour tout } u \in \tilde{B}_{r_1+r_2}(z) \setminus \{z\}\,.$$

Si z n'est pas un minimiseur local sur $\overline{B}_{\rho_1}(z) = \overline{\tilde{B}}_{r_1}(z)$, alors $\varepsilon := f(z) - \inf_{\overline{\tilde{B}}_{r_1}(z)} f > 0$, et il existe, d'après le Corollaire 2.2.1, $u \in \tilde{B}_{r_1+r_2}(z)$ tel que :

$$f(u) \leq \inf_{\overline{\tilde{B}}_{r_1}(z)} f + \varepsilon = f(z) \quad \text{et} \quad |\widetilde{\nabla} f|(u) < 1\,,$$

une contradiction.

3.7 Stabilité homotopique d'un minimiseur local isolé

Le résultat suivant est une légère variante de [59, Theorem 3], qui est le résultat abstrait ayant motivé Ioffe et Schwartzman a développer leur approche de la théorie métrique des points critiques.

Théorème 3.7.1: *Soient X complet et localement connexe, $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$, une famille de fonctions continues, $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ un module, $z \in X$, et $\rho > 0$. Supposons que :*

(i) *pour tout $\lambda_0 \in [0,1]$, $f_\lambda \to f_{\lambda_0}$ uniformément sur $B_\rho(z)$, quand $\lambda \to \lambda_0$;*

(ii) $|df_\lambda|(u) > \beta(d(u,z))$ *pour tout* $u \in B_\rho(z) \setminus \{z\}$ *et* $\lambda \in [0,1]$.

Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) z *est un minimiseur local de* f_0;

(b) z *est un minimiseur local de* f_λ *pour tout* $\lambda \in [0,1]$. *De plus, il existe* $r > 0$ *tel que :*

$$f_\lambda(u) > f_\lambda(z) \qquad \text{pour tout } u \in \overline{B}_r(z) \setminus \{z\}.$$

Démonstration. On pose :

$$\Lambda := \{\lambda \in [0,1] \ : \ z \text{ est un minimiseur local de } f_\lambda\}\,. \tag{3.23}$$

Alors, $\Lambda \neq \emptyset$ $(0 \in \Lambda)$, ouvert, d'après le corollaire 3.6.2, et fermé, d'après le Corollaire 3.6.4, d'où $\Lambda = [0,1]$. La dernière conclusion dans (b) découle aussi du corollaire 3.6.4. ∎

Remarque 3.7.1: (a) Dans Le Théorème 3.7.1, la fonction $f : [0,1] \times B_\rho(z) \to \mathbb{R}$ définie par $f(\lambda,u) := f_\lambda(u)$ est continue, ainsi qu'il découle de l'hypothèse (i) et du fait que chaque fonction f_λ est continue. Il s'agit donc d'une *homotopie* entre les fonctions f_0 et f_1 (on dit aussi que f_0 et f_1 sont homotopes).

(b) La condition (ii) est vérifiée si la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ est uniformément bornée et satisfait (PS) dans $\overline{B}_\rho(z)$, et si pour tout $\lambda \in [0,1]$, z est l'unique point critique de f_λ dans $\overline{B}_\rho(z)$, voir Proposition 3.4.3.

3.8 Une version abstraite du théorème de bifurcation de Rabinowitz

Nous nous intéressons dans cette section au théorème de bifurcation de Rabinowitz. Dans ce but, et uniquement dans cette section, nous modifions légèrement la définition de point critique.

Définition 3.8.1: *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Un élément* $u \in X$ *est appelé* point critique *de* f *si* $\min\{|df|(u), -|df|(u)\} = 0$.

On remarquera que les maxima locaux sont aussi des points critiques.

Définition 3.8.2: *Soient* $z \in X$, U *un voisinage de* z, $\mu > 0$ *et* $f : [-\mu,\mu] \times U \to \mathbb{R}$ *une fonction continue tels que* z *est un point critique de* $f_\lambda := f(\lambda,\cdot)$ *pour tout* $\lambda \in [-\mu,\mu]$. *On dit que* $\lambda = 0$ *est un point de* bifurcation *de* f *s'il existe une suite* $(\lambda_h,u_h) \to (0,z)$ *telle que pour tout* h, $u_h \neq z$ *et* u_h *est un point critique de* f_{λ_h}.

Théorème 3.8.1: *Soient X un espace de Banach d'origine θ, $\mu > 0$, $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in [-\mu,\mu]$, une famille de fonctions continues et $\rho > 0$. On définit la fonction f : $[-\mu,\mu] \times \overline{B}_\rho(\theta) \to \mathbb{R}$ par $f(\lambda,u) := f_\lambda(u)$, et on suppose que :*

(i) *θ est un point critique de f_0, un minimiseur local de f_λ pour $\lambda > 0$, et un maximum local de f_λ pour $\lambda < 0$;*

(ii) *$f_\lambda \to f_0$ uniformément sur $\overline{B}_\rho(\theta)$, quand $\lambda \to 0$;*

(iii) *$(f_\lambda)_{\lambda\in[-\mu,\mu]}$ et $(-f_\lambda)_{\lambda\in[-\mu,\mu]}$ vérifient (PS) dans $\overline{B}_\rho(\theta)$.*

Alors, $\lambda = 0$ est un point de bifurcation de f. De plus, une des trois possibilités suivantes a lieu :

(a) *θ n'est pas un point critique isolé de f_0;*

(b) *il existe un voisinage Λ de θ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, f_λ possède au moins un point critique $u_\lambda \neq \theta$, avec $u_\lambda \to \theta$ quand $\lambda \to 0$;*

(c) *il existe $\lambda_0 \in\,]-\mu,\mu[\setminus\{0\}$ tel que pour tout $\lambda \in [\lambda_0,0[$ si $\lambda_0 < 0$ (ou $\lambda \in]0,\lambda_0]$ si $\lambda_0 > 0$), f_λ possède au moins deux points critiques distincts u_λ, v_λ, différents de θ, et tels que $u_\lambda,v_\lambda \to \theta$ quand $\lambda \to 0$.*

Démonstration. On suppose que $f_\lambda(\theta) = 0$ pour tout $\lambda \in [\mu,\mu]$ (on peut s'y ramener en considérant les fonctions $u \mapsto f_\lambda(u) - f_\lambda(\theta)$), et que f est bornée sur $[-\mu,\mu] \times \overline{B}_\rho(\theta)$. Si (a) a lieu, alors $\lambda = 0$ est un point de bifurcation. Donc, dorénavant nous supposons que θ est un point critique isolé de f_0.

Si (b) n'a pas lieu, alors il existe $0 < r \leq \rho$ et une suite $\lambda_h \to 0$, $h \in \mathbb{N}^*$ (qui est soit dans $]0,+\infty[$ ou dans $]-\infty,0[$), tels que θ est l'unique point critique de f_0 et f_{λ_h} dans $\overline{B}_r(\theta)$. On suppose que $\lambda_h > 0$, et on pose : $f_h := f_{\lambda_h}$. Alors, de (iii) on déduit que $(f_h)_{h\in\mathbb{N}}$ satisfait (PS) dans $\overline{B}_r(\theta)$. Appliquant ensuite la Proposition 3.4.3, on trouve un module β tel que :

$$|df_h|(u) \geq \beta(\|u\|) \quad \text{pour tout } 0 < \|u\| < r \text{ et tout } h \in \mathbb{N}.$$

Puisque θ est un minimiseur local de chaque fonction f_h, $h \in \mathbb{N}^*$, on déduit du Corollaire 3.6.4, que θ est aussi un minimiseur local de f_0. De même, en utilisant un argument semblable avec la fonction $-f$, on montre que si $\lambda_h < 0$, alors θ est un maximum local de f_0. Ceci montre que θ n'est pas un extremum local de f_0, et donc (b) a lieu.

Par conséquent, nous supposons que θ est un extremum local (strict) de f_0, et nous montrons que (c) ait lieu. Supposons alors en premier temps que θ est un maximum local de f_0. Observons que chaque fonction f_λ et $-f_\lambda$, $\lambda \in [-\mu,\mu]$ satisfait (PS) dans $\overline{B}_\rho(\theta)$.

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \frac{1}{\rho}$, on trouve $\alpha_k < 0$ tel que:

$$\|u\| = \frac{1}{k} \implies f_0(u) \leq 2\alpha_k\,. \tag{3.24}$$

De (ii), on déduit que pour tout $k \geq \frac{1}{\rho}$, il existe $\delta_k > 0$ tel que

$$0 < \lambda \leq \delta_k, \|u\| = \frac{1}{k} \implies f_\lambda(u) \leq \alpha_k\,.$$

On montre que, pour tout $\lambda \in]0,\delta_k]$, la fonction f_λ possède deux points critiques non triviaux dans $B_{\frac{1}{k}}(\theta)$. On peut supposer que θ est un minimiseur local isolé de f_λ (sinon, la conclusion découle.) Alors, il existe $0 < r_\lambda < \frac{1}{k}$ et $\alpha_k > 0$ tels que:

$$\|u\| = r_k \implies f_\lambda(u) \geq \alpha_k\,.$$

On pose:

$$B_k := \overline{B}_{\frac{1}{k}}(\theta)\,, \quad m_\lambda := \sup_{B_k} f \in [\alpha_k, +\infty[\,.$$

Puisque $|d(-f_{\lambda|B_k})|(u) = |d(-f_\lambda)|(u)$ pour tout $u \in B_k \cap [f_\lambda \geq 0]$, d'après (3.24), on déduit que la fonction $-f_{\lambda|B_k}$, satisfait la condition (PS) dans $B_k \cap [f_\lambda \geq 0]$. D'après la Proposition 3.4.1, on déduit qu'il existe $u_\lambda \in B_{\frac{1}{k}}(\theta)$ tel que:

$$|d(-f_\lambda)|(u_\lambda) = 0,\ f_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda,$$

d'où u_λ est un minimiseur de $-f_{\lambda|B_k}$, d'après la Proposition 3.4.1. En particulier, $u_\lambda \neq \theta$.

Posons $\bar{u}_\lambda := -u_\lambda/k\|u_\lambda\|$,

$$\Gamma := \{\gamma\ :\ [0,1] \to B_k\ :\ \gamma \text{ est continu}, \gamma(0) = \theta, \gamma(1) = \bar{u}_\lambda\}\,,$$

et

$$c_\lambda := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{[0,1]} (f_\lambda \circ \gamma) \in [\alpha_\lambda, m_\lambda]\,.$$

Si $c_\lambda = m_\lambda$, alors en considérant le segment liant θ et $\bar{u}_\lambda$, on trouve donc $t \in]0,1[$ tel que le vecteur $v_\lambda := t\bar{u}_\lambda \in B_{\frac{1}{k}}(\theta)$ est un maximum local de f_λ, et donc un point critique de f_λ, différent de u_λ.

Si $c_\lambda < m_\lambda$, de (3.24) on déduit que:

$$|df_{\lambda|B_k}|(u) = |df_\lambda|(u) \quad \text{pour tout } u \in B_k \cap [f_\lambda \geq 0],$$

d'où $f_{\lambda|B_k}$ satisfait la condition (PS) dans $B_k \cap [f_\lambda \geq 0]$. Appliquant le Théorème 3.5.4, on trouve un vecteur $v_\lambda \in B_{\frac{1}{k}}(\theta)$ tel que:

$$|df_\lambda|(v_\lambda) = 0,\ f_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda,$$

i.e. v_λ est un point critique de $f_{\lambda|B_k}$. Le cas où θ est un minimiseur local de f_0 se traite de la même faqn en remplaçant f_λ par $-f_\lambda$. ∎

Remarque 3.8.1: Dans [59, Theorem 2], les auteurs ont supposé à la place de (ii), que la fonction $f : [-\mu,\mu] \times \overline{B}_\rho(z) \to \mathbb{R}$ est continue. Or, ceci n'est pas suffisant sauf si X est de dimension finie, auquel cas la formulation se simplifie considérablement car, dans ce cas, les maxima sont en fait des points critiques au sens de la Définition 3.2.2. Le Théorème 3.8.1 est une version abstraite du résultat de Rabinowitz ([73], [74, Theorem 11.35]) sur la bifurcation des opérateurs potentiels de classe C^2 dans les espaces de Hilbert.

La méthode de démonstration de la partie (c) du Théorème 3.8.1 remonte à Rabinowitz, tandis que l'utilisation du théorème de puits du potentiel pour établir (b) est due à Ioffe et Schwartzman [59], une démarche qui a simplifié les arguments de [73], qui sont aussi basés sur le théorème du col (Théorème 3.5.4).

3.9 Stabilité homotopique des points critiques isolés

Dans cette section nous donnons un résultat de stabilité homotopique au voisinage d'un point critique isolé qui n'est pas nécessairement un minimiseur. Pour cela nous utilisons des outils de topologie algébrique.

Si A est un espace topologique et si $B \subset A$, on notera :

$$H_*(A,B) := \{H_q(A,B)\}_{q\in\mathbb{N}}\,,$$

le *groupe gradué d'homologie singulière (relative), à coefficients dans* $\mathbb{R}$, de la *paire topologique* (A,B). Les groupes $H_q(A,B)$, $q \in \mathbb{N}$, sont alors, en fait, des espaces vectoriels réels. Si $B = \emptyset$, on note $H_q(A) := H_q(A,\emptyset)$. On renvoie le lecteur à [80] pour une description détaillée de la théorie de l'homologie singulière (en particulier, pour sa définition), et à [24, Chapter I, Section I] pour une description plus succinte. Nous nous contenterons ici de rappeler les propriétés de base dont nous aurons besoin dans la suite.

Si (A',B') est une autre paire topologique et $f : (A,B) \to (A',B')$ est une application continue, c'est-à-dire $f : A \to A'$ est continue et $f(B) \subset B'$, il existe un morphisme induit f_* ($f_* = (f_q)_{q\in\mathbb{N}}$, et chaque f_q est en fait une application linéaire) :

$$f_* : H_*(A,B) \to H_*(A',B')\,;$$

en particulier Id_*, le morphisme induit par $Id : (A,B) \to (A,B)$, est l'idendité.

Propriété de fonctorialité : Si $f : (A,B) \to (A',B')$ et $g : (A',B') \to (A'',B'')$ sont des applications continues (entre paires topologiques), alors :

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \,.$$

Propriété d'homotopie : Si $f : [0,1] \times (A,B) \to (A',B')$ est une application continue (une *homotopie* de (A,B) dans (A',B')), et $f_0 := f(0,\cdot)$, $f_1 := f(1,\cdot)$, alors :

$$(f_0)_* = (f_1)_* \,.$$

Propriété d'excision : Si (A,B) est une paire topologique et U est tel que $\overline{U}$ est contenu dans l'intérieur de B, alors l'application induite par l'inclusion $(A\backslash U,B\backslash U) \to (A,B)$:

$$H_*(A\backslash U,B\backslash U) \to H_*(A,B)$$

est un isomorphisme.

Si A est un espace topologique et si $C \subset B \subset A$, alors la suite :

$$\ldots \to H_q(B,C) \to H_q(A,C) \to H_q(A,B) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(B,C) \to \ldots \to H_0(A,B) \to 0\,,$$

où ∂ est l'*opérateur de bord* et les autres flèches sont induites par les inclusions $(B,C) \to (A,C)$ et $(A,C) \to (A,B)$, est *exacte*, c'est-à-dire le noyau d'une flèche est égal à l'image de la flèche qui la précède. Cette suite est appelée la *longue suite exacte* du triplet topologique (A,B,C). On en déduit notamment que $H_*(A,A) = \{0\}$ pour tout espace topologique A.

Proposition 3.9.1: *Soient $B \subset A \subset X$ et η une déformation de A dont la restriction à $B \times [0,1]$ est une déformation de B, bet telle que $\eta(A,1) \subset B$. Alors l'application (induite par l'inclusion) :*

$$H_q(B) \to H_q(A)$$

est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, $H_q(A,B) = \{0\}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et si $C \subset B$ (resp., $A \subset C$), alors l'application (induite par l'inclusion) :

$$H_q(B,C) \to H_q(A,C) \qquad \textit{(resp., } H_q(C,B) \to H_q(C,A))$$

est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soient $\eta(\cdot,1) : A \to B$, et $i : B \to A$ l'inclusion de B dans A. D'après les hypothèses, $i \circ \eta(\cdot,1)$ est homotope à l'identité de A, et $\eta(\cdot,1) \circ i$ est homotope à l'identité de B, l'homotopie étant donnée par la déformation η. Par conséquent, d'après la propriété d'homotopie de l'homologie singulière, puisque $(i \circ \eta(\cdot,1))_* = i_* \circ \eta(\cdot,1)_*$ et $(\eta(\cdot,1) \circ i)_* = \eta(\cdot,1)_* \circ i_*$, et que l'application induite par l'identité est l'identité, on obtient que les applications induites $\eta(\cdot,1)_*$ et i_* sont des isomorphismes (inverses l'un de l'autre).

La deuxième conclusion s'en déduit en considérant la portion suivante de la longue suite exacte d'homologie du triplet $(A,B,\emptyset)$:

$$H_q(B) \to H_q(A) \to H_q(A,B) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(B) \to H_{q-1}(A)\,,$$

où la première et la dernière flèche sont des isomorphismes.

La troisième conclusion se déduit de la deuxième en considérant la portion suivante de la longue suite exacte d'homologie du triplet (A,B,C) (resp., (C,A,B)) :

$$\{0\} = H_{q+1}(A,B) \xrightarrow{\partial} H_q(B,C) \to H_q(A,C) \to H_q(A,B) = \{0\}\,,$$

$$(\text{resp.,}\quad \{0\} = H_q(A,B) \to H_q(C,B) \to H_q(C,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A,B) = \{0\}\,).$$

■

Définition 3.9.1: [29, Definition 3.1] *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $u \in X$, $c := f(u)$ et $W \subset X$ un voisinage de u. On pose :*

$$C_q(f;u) := H_q(([f{<}c] \cup \{u\}) \cap W, [f{<}c] \cap W), \quad q \in \mathbb{N}$$

et

$$C_*(f;u) := \{C_q(f;u)\}_{q\in\mathbb{N}} = H_*(([f{<}c] \cup \{u\}) \cap W, [f{<}c] \cap W)\,.$$

L'espace vectoriel $C_q(f;u)$ est appelé le q-ième groupe critique *de f en u.*

Remarque 3.9.1: (a) Grâce à la propriété d'excision de l'homologie singulière relative, la définition de $C_*(f;u)$ est indépendante du choix du voisinage W.

(b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et u est un minimiseur local de f, alors

$$C_q(f;u) = H_q(\{u\},\emptyset) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0 \\ \{0\} & \text{si } q > 0 \end{cases}.$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ et u est un maximum local strict de f, alors

$$C_q(f;u) = H_q(B^n,S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = n \\ \{0\} & \text{si } q \neq n \end{cases}.$$

Voir [24] pour plus de détails.

La proposition suivante justifie la terminologie de *groupes critiques*.

Proposition 3.9.2: [29, Proposition 3.4] *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u \in X$. On a :*

$$|df|(u) \neq 0 \implies C_*(f;u) = \{0\}\,.$$

Démonstration. Comme $|df|(u) \neq 0$, on déduit en utilisant la Définition 3.2.1, qu'il existe $\sigma > 0$, $\delta \in]0,1]$ et $\mathcal{H} : B_\delta(u) \times [0,\delta] \to X$ tels que :

$$d(\mathcal{H}(v,t),v) \leq t\,, \quad f(\mathcal{H}(v,t)) \leq f(v) - \sigma t\,.$$

Pour $(v,t) \in X \times [0,\delta]$, on pose :

$$\eta(v,t) := \begin{cases} \mathcal{H}(v,t(\delta - d(u,v))) & \text{si } v \in B_\delta(u)\,, \\ v & \text{si } v \notin B_\delta(u)\,. \end{cases}$$

Alors, η est bien définie et continue. De plus, on a :

$$\eta(([f{<}c] \cup \{u\}) \times [0,\delta]) \subset [f{<}c] \cup \{u\}\,, \quad \eta([f{<}c] \times [0,\delta]) \subset [f{<}c]$$

et

$$\eta([f{<}c] \cup \{u\},\delta) \subset [f{<}c]\,,$$

donc, d'après la Proposition 3.9.1, on déduit que :

$$C_*(f;u) := H_*([f{<}c] \cup \{u\},[f{<}c]) = \{0\}_*\,.$$

■

Remarque 3.9.2: La Proposition précédente et la Remarque 3.9.1 (b) montrent que si u est un maximum local strict de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, alors $|df|(u) = 0$.

Proposition 3.9.3: *Soient X complet, $f_i : X \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, $z_i \in X$, et $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ tels que $f(z_i) \geq b_i$, $i = 1,2$. Supposons que pour $i = 1,2$:*

(i) *f_i satisfait (PS) dans $[f_i \geq a_i]$;*

(ii) *z_i est l'unique point critique de f_i dans $[f_i \geq a_i]$;*

(iii) $[f_2{<}a_2] \subset [f_1{<}a_1] \subset [f_2{<}b_2] \subset [f_1{<}b_1]$.

Alors :

$$C_*(f_1;z_1) = H_*(X,[f_1{<}b_1]) = H_*(X,[f_2{<}a_2]) = C_*(f_2;z_2)\,.$$

Démonstration. Posant $c_i := f_i(z_i)$, $i = 1{,}2$, on déduit de (i), (ii) et de la Proposition 3.5.3, que les paires (A,B) :

$$(A,B) = (X,[f_i{<}c_i] \cup \{z_i\}),\ ([f_1{<}c_1],[f_1{<}b_1]),\ ([f_2{<}c_2],[f_2{<}a_2]),\ ([f_i{<}b_i],[f_i{<}a_i])$$

sont tels que : $B \subset A$ et il existe η une déformation de A dont la restriction à $B \times [0{,}1]$ est une déformation de B, et telle que $\eta(A,1) \subset B$. Par conséquent, d'après la Proposition 3.9.1, on obtient $H_*(A,B) = \{0\}_*$ pour ces paires et :

$$C_*(f_1,z_1) := H_*([f_1{<}c_1] \cup \{z_1\},[f_1{<}c_1]) = H_*(X,[f_1{<}c_1]) = H_*(X,[f_1{<}b_1])\,,$$

$$C_*(f_2,z_2) := H_*([f_2{<}c_2] \cup \{z_2\},[f_2{<}c_2]) = H_*(X,[f_2{<}c_2]) = H_*(X,[f_2{<}a_2])\,,$$

et

$$H_*([f_1{<}b_1],[f_2{<}a_2]) = H_*([f_1{<}b_1],[f_2{<}b_2]) \tag{3.25}$$

(ces égalités étant, formellement, des isomorphismes). Or, le triangle suivant (où les flèches désignent les applications linéaires induites par les inclusions) est commutatif, d'après la propriété de fonctorialité :

$$\begin{tikzcd}
 & H_*([f_1{<}b_1],[f_1{<}a_1]) \arrow[dr] & \\
H_*([f_1{<}b_1],[f_2{<}a_2]) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H_*([f_1{<}b_1],[f_2{<}b_2])\,,
\end{tikzcd}$$

donc $H_*([f_1{<}b_1],[f_2{<}a_2]) = \{0\}$ d'après (3.25) et le fait que $H_*([f_1{<}b_1],[f_1{<}a_1]) = \{0\}_*$. Utilisant à nouveau la Proposition 3.9.1, on obtient

$$H_*(X,[f_1{<}b_1]) = H_*(X,[f_2{<}a_2])\,,$$

d'où la conclusion. ∎

Proposition 3.9.4: *Soient $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1{,}2$ des fonctions continues telles que $f_1 - f_2$ est $k-$lipschitzienne dans un voisinage de $u \in X$. Alors, il existe $\delta_0 > 0$ tel que si $\sigma > 0$, $\delta \in\,]0,\delta_0]$ et $\mathcal{H} :\ B_\delta(u) \times [0,\delta] \to X$ continue et satisfait*

$$d(\mathcal{H}(v,t),v) \leq t\,, \quad f_1(\mathcal{H}(v,t)) \leq f_1(v) - \sigma t\,,$$

alors :

$$f_2(\mathcal{H}(v,t)) \leq f_2(v) - (\sigma - k)t \quad \textit{pour tout } (v,t) \in B_\delta(u) \times [0,\delta]\,.$$

En particulier, on a :

$$|df_1|(u) - k \leq |df_2|(u) \leq |df_1|(u) + k\,.$$

Démonstration. En choisissant $\delta_0 > 0$ tel que $f_1 - f_2$ est $k-$lipschitzienne dans $B_{2\delta_0}(u)$, la première conclusion est immédiate, tandis que la seconde découle de la définition de la pente faible (Définition 3.2.1.) ■

Etant donnée une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, on pose :

$$\|f\|_\infty := \sup_X |f|, \quad \mathrm{Lip}(f) := \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{d(u,v)},$$

et

$$\|f\|_{1,\infty} := \max\{\|f\|_\infty, \mathrm{Lip}(f)\}.$$

Observons que $\|f\|_{1,\infty} < +\infty$ si et seulement si f est bornée et lipschitzienne sur X.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 3.9.1: *Soient X complet, $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, U un ouvert de X, et $z_f \in U$. Supposons que z_f est l'unique point critique de f dans $\overline{U}$ et que f satisfait (PS) dans $\overline{U}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction continue $g : X \to \mathbb{R}$ possédant un unique point critique $z_g \in \overline{U}$, vérifiant (PS) dans $\overline{U}$, et telle que :*

$$\|g_{|U} - f_{|U}\|_{1,\infty} \leq \varepsilon,$$

on a :

$$C_*(g; z_g) = C_*(f; z_f).$$

Démonstration. On pose : $c := f(z_f)$. On peut supposer que U est borné et que f est bornée sur $\overline{U}$. Soit $\beta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ un module tel que :

$$|df|(u) > \beta(d(u,z_f)) \quad \text{pour tout } u \in \overline{U} \setminus \{z_f\},$$

d'après la Proposition 3.4.3. Soit $\tilde{d}$, la métrique donnée par le Théorème 3.3.1 appliqué à β et z_f. Donc, utilisant le Théorème 3.3.1 (e), on obtient

$$|\tilde{d}f|(u) > 1 \quad \text{pour tout } u \in U \setminus \{z_f\}.$$

Soient $\alpha \in]0,1[$ et $\rho > 0$ tels que $\widetilde{B}_{\frac{2\rho}{\alpha}}(z_f) := \{u \in X \ : \ \alpha\tilde{d}(u,z_f) < 2\rho\} \subset U$. On pose :

$$W := \{u \in X \ : \ f(u) - f(z_f) + \alpha\tilde{d}(u,z_f) \leq \rho\}, \tag{3.26}$$

donc W est un voisinage fermé de z_f dans $(X,\tilde{d})$ comme dans (X,d). Par conséquent, W est un complet dans (X,d). Observons que :

$$W \cap [f \geq c - \rho] \subset \widetilde{B}_{\frac{2\rho}{\alpha}}(z_f) \subset U. \tag{3.27}$$

Soient $r \in]0,\rho/3]$ et $s > 0$ tels que :

$$u \in \overline{B}_{2s}(z_f) \Longrightarrow u \in \ \mathrm{int}(W) \text{ et } f(u) \geq c - r$$

(où $\mathrm{int}(W)$ est l'intérieur de W). Soit $g : X \to \mathbb{R}$ une fonction comme dans le théorème avec

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{(1-\alpha)\beta(s),r\} > 0\,.$$

Nous montrons que :

$$|dg_{|W}|(u) \geq |dg|(u) \quad \text{pour tout } u \in W \cap [f{\geq}c{-}\rho]\,. \tag{3.28}$$

En fait, on a l'égalité si $u \in \ \mathrm{int}(W) \supset \overline{B}_{2s}(z_f)$ (la pente faible est une notion locale). D'après le Théorème 3.3.1 (e), il suffit donc, pour établir (3.28), de montrer que :

$$|\tilde{d}g_{|W}|(u) \geq |\tilde{d}g|(u) \quad \text{pour tout } u \in (W \cap [f{\geq}c{-}\rho]) \setminus \overline{B}_{2s}(z_f)\,.$$

Puisque U est borné et la fonction β est croissante, on a :

$$\tilde{d}(v,w) \geq \beta(s)\min\{s,d(v,w)\} \quad \text{pour tout } v,w \in U \setminus \overline{B}_{2s}(z_f)\,,$$

d'après le Théorème 3.3.1 (a). Comme $\mathrm{Lip}(g_{|U} - f_{|U}) \leq \varepsilon$, on déduit que la fonction $(g-f)$ est $\frac{\varepsilon}{\beta(s)}$-lipschitzienne par rapport à $\tilde{d}$ dans un voisinage de chaque point de $U \setminus \overline{B}_{2s}(z_f)$. Donc, en utilisant la Proposition 3.9.4, on obtient

$$|\tilde{d}g|(u) \geq |\tilde{d}f|(u) - \frac{\varepsilon}{\beta(s)} > 1 - \frac{\varepsilon}{\beta(s)} > 0 \quad \text{pour tout } u \in U \setminus \overline{B}_{2s}(z_f)\,.$$

En particulier, on déduit que $z_g \in \overline{B}_{2s}(z_f)$, et que W est un voisinage de z_g.

Soient maintenant $u \in (W \cap [f{\geq}c{-}\rho]) \setminus \overline{B}_{2s}(z_f)$ et $1 - \frac{\varepsilon}{\beta(s)} \leq \sigma < |\tilde{d}g|(u)$. Soit donc $\delta > 0$ et $\mathcal{H} : \tilde{B}_\delta(u) \times [0,\delta] \to X$ continue tels que :

$$\tilde{d}(\mathcal{H}(v,t),v) \leq t, \quad g(\mathcal{H}(v,t)) \leq g(v) - \sigma t\,,$$

$$f(\mathcal{H}(v,t)) - f(v) \leq -\left(\sigma - \frac{\varepsilon}{\beta(s)}\right)t\,,$$

d'après la même Proposition 3.9.4. Si $v \in \tilde{B}_\delta(u) \cap W$ et $t \in [0,\delta]$, alors :

$$\begin{aligned} f(\mathcal{H}(v,t)) - f(z_f) + \alpha\tilde{d}(\mathcal{H}(v,t),z_f) \quad &\leq \quad f(\mathcal{H}(v,t)) - f(v) + \rho + \alpha\tilde{d}(\mathcal{H}(v,t),v) \\ &\leq \quad -\Big(\sigma - \frac{\varepsilon}{\beta(s)} - \alpha\Big)t + \rho \leq \rho\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{H}(v,t) \in W$, et donc $|\tilde{dg_{|W}}|(u) \geq \sigma$, d'où (3.28).

Comme $\|g_{|U} - f_{|U}\|_\infty \leq \varepsilon \leq r/2$, on a :

$$g(z_g) \geq f(z_g) - \varepsilon \geq c - r - \varepsilon$$

et

$$[f{<}c{-}\rho] \subset [g{<}c{-}2r{-}\varepsilon] \subset [f{<}c{-}2r] \subset [g{<}c{-}r{-}\varepsilon] \subset [f{<}c{-}r]\,.$$

Appliquons ensuite la Proposition 3.9.3 avec $X := W$, $f_1 := f_{|W}$, $f_2 := g_{|W}$, $a_1 := c - 2r$, $b_1 := c - r$, $a_2 := c - 2r - \varepsilon$, et $b_2 := c - r - \varepsilon$. En effet, les conditions (i) et (ii) de la Proposition 3.9.3 découlent respectivement de (3.28) et (3.27). ■

Remarque 3.9.3: Soit f une fonction comme dans le Théorème 3.9.1, et $W := W(\rho,\alpha)$ défini comme dans (3.26), et tel que (3.27) a lieu. On vient de montrer en fait, que pour tout $\varepsilon \in]0,\rho]$ on a :

$$C_*(f_\lambda; z_f) = H_*(W,W \cap [f{<}c{-}\varepsilon]) \tag{3.29}$$

(ceci est aussi vrai si $\alpha = 1$). La paire $(W,W \cap [f{<}c{-}\varepsilon])$ est un substitut de la paire de Gromoll-Meyer utilisée dans le contexte de l'analyse lisse, voir [46] et [24, Definition 5.1]. La formule (3.29) correspond à [24, Theorem 5.2], et le Théorème 3.9.1 étend au cadre non lisse, les résultats de ce dernier théorème et de [24, Lemma 5.2].

Comme conséquence du Théorème 3.9.1, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.9.2: *Soient X complet, $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$, une famille de fonctions continues, U un ouvert de X et soit $(z_\lambda)_\lambda \subset U$ telle que z_λ est l'unique point critique de f_λ dans $\overline{U}$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Supposons que :*

(i) *pour tout $\lambda_0 \in [0,1]$, $\|f_{\lambda|U} - f_{\lambda_0|U}\|_{1,\infty} \to 0$, quand $\lambda \to \lambda_0$;*

(ii) *pour tout $\lambda \in [0,1]$, f_λ satisfait (PS) dans $\overline{U}$.*

Alors, $C_*(f_\lambda; z_\lambda)$ est indépendant de $\lambda \in [0,1]$.

Remarque 3.9.4: (a) Les conditions (i) et (ii) du Théorème 3.9.2 impliquent que la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ satisfait (PS) dans $\overline{U}$, d'après la Proposition 3.4.2.

(b) En raisonnant de façon similaire à [24, Theorem I.4.6], on montre que si X est connexe par arcs, et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et satisfait (PS) dans un voisinage de point critique isolé u qui n'est pas un minimiseur local, alors $C_0(f; u) = \{0\}$. Par conséquent, si dans le Théorème 3.9.2, X est connexe par arcs et z_0 est un minimiseur local de f_0, alors z_λ est aussi un minimiseur local de f_λ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Ceci est donc la conclusion du Théorème 3.7.1, mais on observera que l'hypothèse (i) dans ce résultat est plus faible que la condition (i) du Théorème 3.9.2.

(c) Le Théorème 3.9.2 généralise le résultat de K.-C. Chang [24, Theorem 5.6], où X est un espace de Hilbert, les fonctions f_λ, $\lambda \in [0,1]$, sont de classe C^1, et $\lambda \mapsto f_\lambda$ est continue par rapport à la topologie $C^1(\overline{U},\mathbb{R})$.

SENSIBILITÉ DE CONSTANTES DE HOFFMAN
DES SYSTÈMES D'INÉGALITÉS AFFINES
COMPORTANT DES ÉGALITÉS EXPLICITES

4. SENSIBILITÉ DE CONSTANTES DE HOFFMAN DES SYSTÈMES D'INÉGALITÉS AFFINES COMPORTANT DES ÉGALITÉS EXPLICITES.

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de constantes de Hoffman d'un polyèdre contenant à la fois des inégalités et des égalités explicites. En utilisant l'approche variationnelle développée dans [13] et basée sur le principe variationnel, nous donnons diverses formules explicites de ces constantes. Ceci nous permet d'étudier le comportement de telles constantes sous l'effet de perturbations des données, matrices et vecteurs définissant le polyèdre en question. Nous revisitons ainsi, à l'aide des techniques de l'analyse convexe, un résultat de stabilité établi dans [65], en montrant que sous une condition caractérisant la stabilité, condition dont nous établissons des équivalences géométriques et analytiques, des constantes de Hoffman ont un comportement lipschitzien. Les démonstrations sont simples et claires, ce qui prouve que cette approche, déjà appliquée dans [11] aux polyèdres sans égalités explicites, est aussi efficace dans ce cas plus général. Ces résultats sont appliqués au chapitre 6 dans l'étude de la sensibilité des problèmes quadratiques convexes.

4.1 Introduction

Nous proposons d'étudier le comportement des constantes de Hoffman des polyèdres non vides de la forme :

$$\mathcal{P}_{A,G,b,h} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b, Gx = h\}, \tag{4.1}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $G \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $m,n,k \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $h \in \mathbb{R}^k$. Nous cherchons alors à exprimer des constantes $K > 0$ vérifiant l'inégalité

$$K\, d(x,\mathcal{P}_{A,G,b,h}) \le |((Ax-b)^+,Gx-h)| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\,. \tag{4.2}$$

On sait depuis Hoffman [52] qu'il existe une constante $K = K_{A,G}$ indépendante de b et h vérifiant (4.2), qu'on appelle par conséquent une *constante de Hoffman*. Nous nous intéressons dans ce chapitre au comportement des constantes $K_{A,G,b,h}$ sous l'effet des perturbations simultanées de A, G, b et h en étudiant les propriétés topologiques (continuité) et différentielles (lipschitzianité) de la fonction $(A,G) \mapsto K_{A,G,b,h}$. Lorsque le polyèdre ne comporte que des inégalités, il est établi dans [11], en utilisant l'approche variationnelle introduite dans [13] et rappelée au chapitre 2, qu'il existe des constantes de Hoffman qui sont localement lipschitziennes en tant que fonction de A et G. Dans [65], Luo et Tseng ont traité le cas contenant des égalités et ont montré, d'une manière qui nous semble très complexe, qu'il existe des constantes de Hoffman qui sont localement uniformément bornées. De plus, leurs démonstrations sont très différentes de celles établies pour des polyèdres ne comportant pas d'égalités explicites. Pour toutes ces raisons, notre but dans cette partie consiste à établir ce résultat d'une manière simple en montrant le comportement lipschitzien de ces constantes en tant que fonctions des variables A, G, b et h. En effet, en utilisant des techniques de l'analyse convexe, nous montrons que l'approche de [11] s'applique aussi pour ces polyèdres (4.1) de forme générale.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.2 nous rappelons le résultat principal établi dans [11] et qui donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une estimation d'erreur globale. Nous utilisons ce résultat dans la section 4.3 pour donner des formules explicites de plus grandes constantes de Hoffman. Nous rappelons ainsi la constante liée à la norme sup, et nous établissons celle liée à la norme euclidienne dont on déduit une formule de la plus grande constante du polyèdre $G^{-1}(h)$ en montrant qu'elle coïncide en fait avec la plus petite valeur propre non nulle de GG^T. Nous mettons aussi en évidence une autre constante de Hoffman $\sigma_{A,G}$ (voir (4.3.3)), dont nous étudions le comportement à la section 4.5. Pour cela nous consacrons la section 4.4 aux résultats préliminaires que nous utilisons alors pour donner des conditions suffisantes assurant que $\sigma_{A,G}$ ait un bon comportement.

4.2 Bornes d'erreur globales

Le problème de l'existence d'une constante de Hoffman d'un polyèdre donné est un problème d'*estimation des bornes d'erreur* d'une fonction, dont le sous-niveau en 0 coïncident avec ce polyèdre.

Définition 4.2.1: *Soient X un espace métrique (muni d'une distance d) et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i.. On dit que f possède une* estimation globale (resp., locale) de borne d'erreur au niveau $c \in \mathbb{R}$ *si :*

$$\sigma_c(f) := \inf_{f(x)>c} \frac{f(x) - c}{d(x,[f \leq c])} > 0 \tag{4.3}$$

$$(\textit{resp., il existe } \varepsilon > 0 \textit{ tel que } \sigma_{c,\varepsilon}(f) := \inf_{c<f(x)<c+\varepsilon} \frac{f(x) - c}{d(x,[f \leq c])} > 0)\,,$$

avec la convention que $\sigma_c(f) = 0$ si $[f \leq c] = \emptyset$ (resp., $\sigma_{c,\varepsilon}(f) = +\infty$ si $[c<f<c+\varepsilon] = \emptyset$; $\sigma_{c,\varepsilon}(f) = 0$ si $[f \leq c] = \emptyset$).

S'il est strictement positif, $\sigma_c(f)$ (resp., $\sigma_{c,\varepsilon}(f)$) est la borne supérieure des réels τ strictement positifs tels que :

$$\tau d(x,[f \leq c]) \leq (f(x) - c)^+ \quad \textit{pour tout } x \in X$$

$$(\textit{resp., } \tau d(x,[f \leq c]) \leq (f(x) - c)^+ \quad \textit{pour tout } x \in [f<c+\varepsilon])\,.$$

Appliquant le Théorème 2.2.2 et la Proposition 2.2.1, on déduit que :

$$\sigma_c(f) \geq \inf_{f(x)>c} |\nabla f|(x) \quad (\text{resp., } \sigma_{c,\varepsilon}(f) \geq \inf_{c<f(x)<c+\varepsilon} |\nabla f|(x) \ \text{ pour } \varepsilon > 0)\,. \tag{4.4}$$

Lorsque X est un Banach, dont on note d_* la distance associée à la norme duale, on a le résultat suivant.

Théorème 4.2.1: [11, Theorem 3.1] *Soient $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i., propre, et $c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $[f<c+\varepsilon] \neq \emptyset$, on a :*

$$\inf_{f(x)>c} |\nabla f|(x) = \sigma_c(f) = \sigma_{c,\varepsilon}(f) = \inf_{f(x)>c} d_*(0,\partial f(x)) \tag{4.5}$$

(avec la convention que $\sigma_{c,\varepsilon}(f) = +\infty$ si $[c<f<c+\varepsilon] = \emptyset$; $\sigma_{c,\varepsilon}(f) = 0$ si $[f \leq c] = \emptyset$.)

Remarque 4.2.1: Le Théorème 4.2.1 montre que dans le cas convexe les notions de borne d'erreur locale et globale au niveau c tel que $[f \leq c] \neq \emptyset$ coïncident et que f possède une estimation globale d'erreur si $\inf_{f(x)>c} |\nabla f|(x) > 0$, ce qui est un critère *primal*, ou si $\inf_{f(x)>c} d_*(0,\partial f(x)) > 0$, ce qui est un critère *dual*. Ce théorème est un cas particulier de [11, Theorem 2.1] établi dans un espace métrique complet pour des fonctions s.c.i.. Dans ce cas, on a :

$$\inf_{[c<f<c+\varepsilon]} |\nabla f| = \inf_{c \leq \gamma \leq c+\varepsilon} \sigma_{\gamma,\varepsilon}(f)\,.$$

Dans le cas convexe, les premières caractérisations de l'existence d'estimation de borne d'erreur remontent à [28, 63, 72].

4.3 Formules explicites des constantes de Hoffman

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|_*$ sa norme duale. On notera dans la suite d et d_* les distances associées respectivement à $\|\cdot\|$ et à $\|\cdot\|_*$.

Soit le polyèdre donné par :

$$\mathcal{P}_{A,G,b,h} := \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b, \, Gx = h\} \, ,$$

où $m, n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$A := \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \, , \quad G := \begin{pmatrix} g_1^T \\ \vdots \\ g_k^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times n} \, , \quad b \in \mathbb{R}^m \, , \quad h \in \mathbb{R}^k \, .$$

Dans le cas où $G = 0$ et $h = 0$, le polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ s'écrit

$$\mathcal{P}_{A,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax \leq b\} \, .$$

On inclut donc le cas des polyèdres ne comportant pas d'égalité explicite. Nous cherchons alors l'existence et des formules explicites de constantes de Hoffman. Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposons que le polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ est non vide.

Définition 4.3.1: *Soit $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^{m+k}$. On dit que $\sigma > 0$ est une* constante de Hoffman *de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ relativement à $|\cdot|$ (et à $\|\cdot\|$) si :*

$$\sigma \, d(x,\mathcal{P}_{A,G,b,h}) \leq |((Ax - b)^+, Gx - h)| \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \, . \tag{4.6}$$

Une constante $\sigma > 0$ est dite de Hoffman *s'il existe une norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^{m+k}$ telle que σ est une constante de Hoffman relativement à cette norme.*

D'après [52], une constante de Hoffman du polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ existe. Ce résultat est en fait, une conséquence immédiate du Théorème 4.2.1, qui nous permet de plus de donner des formules explicites des plus grandes constantes de Hoffman. Le cas des polyèdres ne comportant pas d'égalités explicites, qui correspond à $G = 0$ et $h = 0$, a été traité dans [11], d'où on tire le théorème suivant.

Théorème 4.3.1: [11, Theorem 3.3] *Posons :*

$$\sigma := \min\{d_*(0,co(a_J)) : \; J \subset J_{A,b}(x) \, , \, x \notin \mathcal{P}_{A,b} \, , \, (a_J) \textit{ linéairement indépendants}\} \, ,$$

où $J_{A,b}(x) := \{j \in [1,m] \, : a_j^T x - b_j = \max_{1\le j\le m}(a_j^T x - b_j)\}$. *Alors,* σ *est la plus grande des constantes de Hoffman de* $\mathcal{P}_{A,b}$ *relativement à la norme* $\|\cdot\|_\infty$*, c'est-à-dire* σ *est la plus grande des constantes* $\tau > 0$ *telles que :*

$$\tau\, d(x,\mathcal{P}_{A,b}) \le \|(Ax-b)^+\|_\infty \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Nous établissons un résultat similaire en considérant la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ au lieu de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 4.3.2: *Posons :*

$$\sigma := d_*(0,A^T((R(A)-\mathbb{R}_+^* b)^+ \cap S))\,,$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^m \, : \, \|x\|_2 = 1\}$. *Alors,* σ *est la plus grande des constantes de Hoffman de* $\mathcal{P}_{A,b}$ *relativement à la norme* $\|\cdot\|_2$*, c'est-à-dire* σ *est la plus grande des constantes* $\tau > 0$ *telles que :*

$$\tau\, d(x,\mathcal{P}_{A,b}) \le \|(Ax-b)^+\|_2 \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \,.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in P_{A,b}$. Observons tout d'abord que $\sigma > 0$. Procédons par contradiction, supposons alors qu'il existe une suite $(y_n)_n \subset (R(A)-\mathbb{R}_+^* b)^+ \cap S$ telle que $A^T y_n \to 0$, et soient des suites $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ et $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+^*$ telles que $y_n = (Ax_n - \delta_n b)^+$. On a pour tout n :

$$\begin{aligned} 1 = \|y_n\|_2^2 &= \langle (Ax_n - \delta b)^+, Ax_n - \delta_n b\rangle \\ &\le \langle (Ax_n - \delta b)^+, Ax_n - \delta A x_0\rangle \\ &= \langle A^T(Ax_n - \delta_n b)^+, x_n - \delta_n x_0\rangle = \langle A^T y_n, x - \delta x_0\rangle \to 0\,, \end{aligned}$$

une contradiction. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \|(Ax-b)^+\|_2\,.$$

Alors, f est convexe, différentiable, et $[f \le 0] = \mathcal{P}_{A,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, Ax \le b\}$. Soit $x \in [f>0]$. On a :

$$\nabla f(x) = \frac{A^T(Ax-b)^+}{\|(Ax-b)^+\|_2} \in A^T((R(A)-\mathbb{R}_+^* b)^+ \cap S)\,.$$

Par conséquent, on déduit du Théorème 4.2.1 que :

$$\sigma_0(f) = \inf_{f(x)>0} \|\nabla f(x)\|_* \ge d_*(0,A^T((R(A)-\mathbb{R}_+^* b)^+ \cap S)) =: \sigma\,.$$

Réciproquement, soient $(y_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ et $(\delta_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ des suites telles que $\|(Ay_n - \delta_n b)^+\|_2 = 1$ et

$$\|A^T(Ay_n - \delta_n b)^+\|_* \to \sigma \, .$$

Posant $z_n := A^T(A(y_n - \delta_n b)^+)$, on déduit que :

$$z_n = \frac{A^T(A(\delta_n^{-1} y_n - b)^+)}{\|(A(\delta_n^{-1} y_n) - b)^+\|_2} = \nabla f\left(\delta_n^{-1} y_n\right) \, . \tag{4.7}$$

Comme $f\left(\delta_n^{-1} y_n\right) = \|(A(\delta_n^{-1} y_n) - b)^+\| = \delta_n^{-1} > 0$, on déduit de (4.7) que :

$$\|z_n\| = \|\nabla f\left(\delta_n^{-1} y_n\right)\| \geq \inf_{[f>0]} \|\nabla f(x)\| \, . \tag{4.8}$$

De plus, puisque $\|z_n\| = \|A^T(Ay_n - \delta_n b)^+\|_* \to \sigma$ on obtient, en apssant à la limite dans (4.8),

$$\sigma \geq \inf_{[f>0]} \|\nabla f(x)\| \, .$$

Pour conclure il suffit d'appliquer le Théorème 4.2.1. ■

Corollaire 4.3.1: *Posons :*

$$\sigma := d_*(0, G^T(R(G) \cap S)) \, .$$

où $S := \{x \in \mathbb{R}^k \, : \, \|x\|_2 = 1\}$. *Alors,* σ *est la plus grande des constantes de Hoffman de* $G^{-1}(h)$ *relativement à la norme euclidienne.*

En particulier, si $\|\cdot\|$ *est la norme euclidienne, alors on a :*

$$\sigma = \sqrt{\lambda_{min}^*(GG^T)} \, ,$$

où $\lambda_{min}^*(GG^T)$ *est la plus petite valeur propre non nulle de* GG^T.

Démonstration. On écrit le polyèdre $G^{-1}(h)$ sous la forme :

$$G^{-1}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, Gx \leq h, -Gx \leq -h\} \, .$$

Alors, d'après le Théorème 4.3.2 appliqué au polyèdre $G^{-1}(h)$, il faut vérifier que :

$$\sigma = d_*(0, \widetilde{G}^T((R(\widetilde{G}) - \mathbb{R}_+^* \widetilde{h})^+ \cap S)) \, ,$$

où $\widetilde{G} := \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix}$, $\widetilde{h} := \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix}$, et $S := \{x \in \mathbb{R}^{2k} \, : \, \|x\|_2 = 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \sigma &= \inf\{\|\widetilde{G}^T(\widetilde{G}x - \alpha\widetilde{h})^+\|_* : \, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \|(\widetilde{G}x - \alpha\widetilde{h})^+\|_2 = 1\} \\ &= \inf\{\|G^T((Gx - \alpha h)^+ - (-Gx + \alpha h)^+)\|_* : \, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \|\widetilde{G}x - \alpha\widetilde{h})^+\|_2 = 1\} \\ &= d_*(0, G^T(R(G) \cap S)) \, , \end{aligned}$$

d'où la première conclusion. Supposons maintenant que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. On a la formulation variationnelle de Rayleigh pour $\lambda^*_{min}(GG^T)$:

$$\lambda^*_{min}(GG^T) = \min_{\{\|y\|_2=1, y\in(\mathrm{Ker}\,(GG^T))^\perp\}} y^T GG^T y\,,$$

où $(\mathrm{Ker}\,(GG^T))^\perp$ est l'espace ortogonal du noyau de GG^T. Observons que $GG^Tx = 0$ si et seulement si $G^Tx = 0$, d'où $(\mathrm{Ker}\,(GG^T))^\perp = (\mathrm{Ker}\,(G^T))^\perp = R(G)$. Donc on obtient

$$\lambda^*_{min}(GG^T) = \min_{\|Gx\|_2=1} (Gx)^T(GG^T)Gx = \min_{\|Gx\|_2=1} d(0,G^T(Gx))^2 = d(0,G^T(R(G)\cap S))^2 = \sigma^2\,,$$

ce qui montre le résultat. ■

Corollaire 4.3.2: *Posons :*

$$\begin{aligned}\sigma := \inf\{d_*(0,A^T(Ax-\alpha b)^+ + G^T(Gx-\alpha h)) :\ & x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{R}^*_+,\\ & \|((Ax-\alpha b)^+, Gx-\alpha h)\|_2 = 1\}\,.\end{aligned}$$

Alors, σ est la plus grande des constantes de Hoffman de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ relativement à la norme euclidienne.

Démonstration. On écrit le polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ sous la forme :

$$\mathcal{P}_{A,G,b,h} = \{x\in\mathbb{R}^n :\ Ax\le b, Gx\le h, -Gx\le -h\}\,.$$

Alors, d'après le Théorème 4.3.2, il faut vérifier que :

$$\sigma = d_*(0,\widetilde{A}^T((R(\widetilde{A}) - \mathbb{R}^*_+\widetilde{b})^+\cap S))\,, \tag{4.9}$$

où $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A \\ G \\ -G\end{pmatrix}$, $\widetilde{b} := \begin{pmatrix} b \\ h \\ -h\end{pmatrix}$, et $S := \{x\in\mathbb{R}^{2k+m} :\ \|x\|_2 = 1\}$. La conclusion découle en développant (4.9) :

$$\begin{aligned}\sigma &= \inf\{\|\widetilde{A}^T(\widetilde{A}x-\alpha\widetilde{b})^+\|_* :\ \alpha\in\mathbb{R}^*_+, x\in\mathbb{R}^n, \|(\widetilde{A}x-\alpha\widetilde{b})^+\|_2 = 1\}\\ &= \inf\{\|A^T(Ax-b)^+ + G^T(Gx-\alpha h)\|_*, \alpha\in\mathbb{R}^*_+, x\in\mathbb{R}^n,\\ &\qquad\qquad \|((Ax-\alpha b)^+, Gx-h)\|_2 = 1\}\,.\end{aligned}$$

■

Remarque 4.3.1: (a) Le Corollaire 4.3.1 montre que la notion de plus grande constante de Hoffman est fortement liée à celle de valeur propre. Dans le chapitre 5, nous donnons diverses formulations variationnelles de constantes de Hoffman, et nous discutons les liens avec d'autres notions, notamment les valeurs propres des multi-applications.

(b) On remarque que la plus grande constante de Hoffman du polyèdre $G^{-1}(h)$ (relativement à la norme euclidienne) ne dépend pas du vecteur h, et que les plus grandes constantes de Hoffman des polyèdres $G^{-1}(0)$ et ${G^{T}}^{-1}(0)$ sont les mêmes lorsque $\|\cdot\|$ est également la norme euclidienne. Ceci découle du fait que les matrices GG^T et G^TG ont les mêmes valeurs propres (voir [83]).

Nous introduisons maintenant une constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$, dont nous étudierons le comportement à la section 4.5.

Etant donné $I \subset [1,m]$, on pose :

$$\Sigma_I := \{\theta := (\theta_I, \theta) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}^k : \sum_I \theta_i + \sum_{j=1}^k |\theta_j| = 1\}, \tag{4.10}$$

$$\Theta_{A_I,G} := \{A_I^T\theta_I + G^T\theta : (\theta_I, \theta) \in \Sigma_I\}, \tag{4.11}$$

et

$$\mathcal{J}_{A,G} := \{I \subset [1,m] : 0 \notin \Theta_{A_I,G}\}. \tag{4.12}$$

On note $\sigma_{A,G}$ la constante définie par :

$$\sigma_{A,G} := \inf_{I \in \mathcal{J}_{A,G}} d_*(0,\Theta_{A_I,G}). \tag{4.13}$$

Alors, $\sigma_{A,G} > 0$, d'après la définition de $\mathcal{J}_{A,G}$. Pour montrer que $\sigma_{A,G}$ est une constante de Hoffman on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.3.1: [64, Lemma 2.1] *Supposons que $(G^T)^{-1}(0) = \{0\}$, c'est-à-dire $g_1,\ldots,g_k$ (les vecteurs lignes de G) sont linéairement indépendants. Si $I \subset [1,m]$, $y \in \mathbb{R}^n$, et $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}^k$ sont tels que $y = A_I^T\beta + G^T\gamma$, alors il existe $J \subset I$, $\hat\beta \in \mathbb{R}_+^J$ et $\hat\gamma \in \mathbb{R}^k$ tels que $(a_J,g_{[1,k]})$ sont linéairement indépendants et $y = A_J^T\hat\beta + G^T\hat\gamma$.*

On obtient :

Théorème 4.3.3: *Supposons que $\{g_i,\ i \in [1,k]\}$, les vecteurs lignes de G, sont lin. ind.. Alors, $\sigma_{A,G}$ (défini dans (4.13)) est une constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire*

$$\sigma_{A,G} d(x,\mathcal{P}_{A,G,b,h}) \leq \|((Ax-b)^+, Gx-h)\|_\infty \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Démonstration. Soit f la fonction donnée par :

$$f(x) := \|((Ax-b)^+,Gx-h)\|_\infty = \max\left(\sup_{i\in[1,m]}(a_i^Tx-b_i),\ \sup_{i\in[1,k]}|g_i^Tx-h_i|\right),$$

et soient $x \in [f{>}0]$ et z une projection de x sur $P_{A,G,b,h}$. Notant $J := [1,k]$ et $I \subset [1,m]$ l'ensemble des $i \in [1,m]$ tels que $a_i^Tz = b_i$, il existe donc $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $(\tilde\theta_I,\tilde\theta_J) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ tels que $\|\xi\|_* = 1$, $\xi = A_I^T\tilde\theta_I + G^T\tilde\theta_J$ et $\langle \xi, x-z\rangle = \|z-x\|$. Utilisant le Lemme 4.3.1, on déduit qu'il existe $\hat I \subset I$ et $\hat\theta := (\hat\theta_{\hat I},\hat\theta_J) \in \mathbb{R}_+^{\hat I} \times \mathbb{R}^k$ tels que $\xi = A_{\hat I}^T\hat\theta_{\hat I} + G^T\hat\theta_J$ et les vecteurs $a_{\hat I} \cup g_J$ sont linéairement indépendants. Donc $\hat I \in \mathcal{J}_{A,G}$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \max\left(\sup_{i\in\hat I}(a_i^Tx-b_i)^+,\ \sup_{i\in[1,k]}|g_i^Tx-h_i|\right)\\ &\geq \max\left(\sup_{i\in\hat I}(a_i^T(x-z))^+,\ \sup_{i\in[1,k]} g_i^T(x-z)\right)\\ &\geq \left\langle \frac{\hat\theta}{\|\hat\theta\|_1}, ((A_{\hat I}(x-z))^+, G(x-z))\right\rangle \geq \frac{1}{\|\hat\theta\|_1}\langle \xi, x-z\rangle . \end{aligned}$$

Par conséquent, posant $(\theta_{\hat I},\theta_J) := \frac{\hat\theta}{\|\hat\theta\|_1}$,

$$f(x) \geq \|A_{\hat I}^T\theta_{\hat I} + G^T\theta_J\|_* d(x,P_{A,G,b,h}) \geq d_*(0,\Theta_{A_{\hat I},G})\, d(x,P_{A,G,b,h}) \geq \sigma_{A,G} d(x,P_{A,G,b,h}),$$

d'où la conclusion. ■

4.4 Quelques résultats techniques

La deuxième motivation de ce chapitre est l'étude du comportement de constantes de Hoffman du polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ sous l'effet des perturbations des données A, G, b et h. Dans cette section nous donnons les outils nécessaires à notre analyse.

Proposition 4.4.1: *Soient $I \subset [1,m]$ et ψ la fonction définie par :*

$$\psi(x) := \max\left(\max_{i\in I}(a_i^Tx),\ \max_{j\in[1,k]}|g_j^Tx|\right).$$

Si $\max_{i\in I}(a_i^Tx) \geq 0$ pour tout x tel que $Gx = 0$, alors $\partial\psi(0) = \Theta_{A_I,G}$.

Démonstration. La fonction ψ est convexe continue et s'écrit sous la forme

$$\psi(x) = \max_{i\in[1,m],j\in[1,k]}(a_i^Tx, g_j^Tx, -g_j^Tx).$$

On déduit donc que $\Theta_{A_I,G} \subset \partial\psi(0) = \mathrm{co}(a_I, g_{[1,k]}, -g_{[1,k]})$. En effet, si $\xi \in \Theta_{A_I,G}$ et $\theta \in \mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^k$ sont tels que $\|\theta\|_1 = 1$ et $\xi = \sum_I \theta_i a_i + \sum_{[1,k]} \theta_j g_j$, alors $\xi = \sum_I \theta_i a_i + \sum_{[1,k]} \theta_j^+ g_j - \sum_{[1,k]} \theta_j^- g_j$. Or,

$$\sum_I \theta_i + \sum_{[1,k]} \theta_j^+ + \sum_{[1,k]} \theta_j^- = \sum_I \theta_i + \sum_{[1,k]} |\theta_j| = \|\theta\|_1 = 1\,,$$

d'où $\xi \in \partial\psi(0)$.

Posant $J := [1,k]$, on affirme qu'il existe $\theta^0 := (\theta_I^0, \theta_J^0) \in (\mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^k) \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|\theta^0\|_1 = 1$ et $A_I^T \theta_I^0 + G^T \theta_J^0 = 0$. En effet, soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) := \max_I (a_i^T x) + i_{G^{-1}(0)}(x)\,.$$

Alors, φ est convexe, s.c.i. et $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'après l'hypothèse. On en déduit que :

$$0 \in \partial\varphi(0) = \mathrm{co}(a_I) + R(G^T)\,, \tag{4.14}$$

ainsi il suffit de prendre $\theta^0 := \|\theta\|_1^{-1}\theta$ où $\theta := (\theta_I, \theta_J) \in (\mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^k) \setminus (0,0)$ est tel que $A_I^T \theta_I + G^T \theta_J = 0$, d'après (4.14).

Soit $\xi \in \partial\psi(0)$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^k$ tel que $\xi = \sum_I \theta_i a_i + \sum_{[1,k]} \theta_j g_j$ et $\|\theta\|_1 \leq 1$. Choisissant $s \geq 0$ tel que $\|\theta + s\theta^0\|_1 = 1$, on a $\xi = \sum_I (\theta_i + s\theta_i^0) a_i + \sum_{[1,k]} (\theta_j + s\theta_j^0) g_j$, d'où $\xi \in \Theta_{A_I,G}$. ■

Proposition 4.4.2: *Soit $I \subset [1,m]$. Si $(G^T)^{-1}(0) = \{0\}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) $0 \notin \Theta_{A_I,G}$;

(b) $0 \notin co(a_I) + R(G^T)$;

(c) *il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $A_I z < 0$ et $Gz = 0$.*

Démonstration. On pose : $\varphi(x) := \max_I (a_i^T x) + i_{G^{-1}(0)}(x)$. Alors, φ est convexe, s.c.i., et $\partial\varphi(0) = \mathrm{co}(a_J) + R(G^T)$. Donc, (c) ayant lieu si et seulement si 0 n'est pas un minimiseur de φ, ce qui est équivalent à $0 \notin \mathrm{co}(a_J) + R(G^T)$. Par conséquent, (b) et (c) sont équivalents.

Si $0 \in \Theta_{A_I,G}$, alors il existe $\theta \in \Sigma_I$ tel que $0 = \sum_I \theta_i a_i + \sum_{[1,k]} \theta_j g_j$. Donc, $\theta_I \neq 0$ car $\theta \neq 0$ et les vecteurs $(g_{[1,k]})$ sont linéairement indépendants. Écrivant $0 = \sum_I \frac{\theta_i}{\|\theta_I\|_1} a_i + \sum_{[1,k]} \frac{\theta_j}{\|\theta_I\|_1} g_j$, on déduit que $0 \in \mathrm{co}(a_J) + R(G^T) = \partial\varphi(0)$. Par conséquent, $\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x < 0,\ Gx = 0\} = \emptyset$.

Réciproquement, si $\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x < 0, Gx = 0\} = \emptyset$, alors $\psi(x) \geq \psi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\psi(x) := \max(\max_I(a_i^T x), \max_{[1,k]} |g_j^T x|)$. Donc, $0 \in \partial\psi(0) = \Theta_{A_I,G}$, d'après la Proposition 4.4.1. Par conséquent, (a) et (c) sont équivalents, d'où la conclusion. ∎

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un cône, on note E^- le cône dual négatif de E défini par :

$$E^- := \{z \in \mathbb{R}^n : z^T x \leq 0 \text{ pour tout } x \in E\}.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4.4.3: *Soit $I \subset [1,m]$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) $0 \in int(\Theta_{A_I,G})$;

(b) $A_I^T(\mathbb{R}_+^I) + R(G^T) = \mathbb{R}^n$;

(c) $\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x \leq 0, Gx = 0\} = \{0\}$.

Démonstration. Les assertions (b) et (c) se déduisent l'une de l'autre en passant au dual, voir [81] :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x \leq 0, Gx = 0\}^- = A_I^T(\mathbb{R}_+^I) + R(G^T).$$

Donc $A_I^T(\mathbb{R}_+^I) + R(G^T) = \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x \leq 0, Gx = 0\} = (\mathbb{R}^n)^- = \{0\}$.

Si $0 \in \mathrm{int}(\Theta_{A_I,G})$, alors il existe $\sigma > 0$ tel que $\sigma B_{\mathbb{R}^n} \subset \Theta_{A_I,G} \subset \partial\psi(0)$, où ψ est la fonction définie par :

$$\psi(x) := \max\left\{\max_{i\in I}(a_i^T x), \max_{j\in J}|g_j^T x|\right\}. \tag{4.15}$$

On en déduit que $\psi(x) \geq \sigma\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x \leq 0, Gx = 0\} = [\psi \leq 0] = \{0\},$$

d'où (c). Supposons que $0 \notin \mathrm{int}(\Theta_{A_I,G})$. Si $\{x \in \mathbb{R}^n : A_I x \leq 0, Gx = 0\} = \{0\}$, alors d'après la Proposition 4.4.1 on a $\partial\psi(0) = \Theta_{A_I,G}$. Donc $0 \notin \mathrm{int}(\partial\psi(0))$. Par conséquent, on peut trouver une suite $(x_p)_p \subset \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\psi(x_p) \leq p^{-1}\|x_p\|_2 \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

Il existe alors $y \in [\psi \leq 0] \setminus \{0\}$ (un point adhérent de la suite $(\|x_p\|_2^{-1} x_p)_p$). Donc y vérifie $A_I y \leq 0$ et $Gy = 0$, une contradiction. Par conséquent, (a) et (c) sont équivalentes. ∎

Proposition 4.4.4: *Soit $I \subset [1,m]$. Si $(G^T)^{-1}(0) = \{0\}$, alors les ensembles :*

$$\{(A,G) \in \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n} : \ 0 \notin \Theta_{A_I,G}\} \text{ et } \{(A,G) \in \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n} : \ 0 \in int(\Theta_{A_I,G})\}$$

sont des ouverts dans $\mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$. Par conséquent, si on a :

$$0 \notin \mathrm{fr}(\Theta_{A_I,G}) \quad \text{pour tout } I \subset [1,m]\,,$$

alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (A,G) tel que $\mathcal{J}_{A,G} = \mathcal{J}_{A',G'}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{U}$.

Démonstration. Soient $(A^n,G^n)_n \subset \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$ et $(A,G) \in \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$ tels que $0 \in \Theta_{A_I^n,G^n}$ pour tout n. Alors, il existe $(\theta^n)_n \subset \Sigma_I$, une suite telle que :

$$\sum_I \theta_i^n a_i^n + \sum_{[1,k]} \theta_i^n g_i^n = 0 \quad \text{pour tout } n\,.$$

On trouve donc, en passant à une sous-suite, $\bar{\theta} \in \Sigma_I$ tel que $\|\bar{\theta}\|_1 = 1$ et

$$\sum_I \bar{\theta}_i a_i + \sum_{[1,k]} \bar{\theta}_i g_i = 0\,,$$

d'où $0 \in \Theta_{A_I,G}$.

Soit $(A,G) \in \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$ tel que $0 \in \mathrm{int}\,(\Theta_{A_I,G})$. Alors, d'après la Proposition 4.4.3, on a :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A_I x \leq 0,\, Gx = 0\} = \{0\}\,.$$

Par conséquent, $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A'_I x \leq 0,\, G'x = 0\} = \{0\}$, pour tout (A',G') proche de (A,G). Appliquant la Proposition 4.4.3 de nouveau, on déduit que $0 \in \mathrm{int}\,(\Theta_{A'_I,G'})$ pour tout (A',G') proche de (A,G).

Supposons maintenant que $0 \notin fr\,(\Theta_{A_I,G})$ pour tout $I \subset [1,m]$. Alors, $0 \in \mathrm{int}\,(\Theta_{A_I,G})$ pour tout $I \notin \mathcal{J}_{A,G}$. Or, d'après la première partie de la démonstration, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (A,G) tel que $0 \in \mathrm{int}\,(\Theta_{A'_I,G'})$, d'où $I \notin \mathcal{J}_{A',G'}$, et donc $\mathcal{J}_{A',G'} \subset \mathcal{J}_{A,G}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{V}$. Réciproquement, soit $I \subset [1,m]$ tel que $0 \notin \Theta_{A_I,G}$, alors il existe, d'après la première partie de la démonstration, un voisinage $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ de (A,G) tel que $0 \notin \Theta_{A'_I,G'}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{U}$. On déduit donc que $\mathcal{J}_{A,G} \subset \mathcal{J}_{A',G'}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{U}$, d'où le résultat. ∎

4.5 Comportement de constantes de Hoffman sous des perturbations quelconques

Considérons la constante $\sigma_{A,G} := \min\{d_*(0,\Theta_{A_I,G}) \,:\, I \in \mathcal{J}_{A,G}\}$ définie dans (4.13), et $\sigma_{A,G,b,h}$ la plus grande constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ relativement à la norme euclidienne définie dans le Corollaire 4.3.2. D'après le Théorème 4.3.3, $\sigma_{A,G}$ est une constante de Hoffman de tout polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b',h'}$ non vide, où b' et h' sont des vecteurs quelconques dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement, pourvu que les vecteurs lignes de C sont linéairement indépendants. De plus, sous cette dernière hypothèse et la condition :

$$0 \notin fr(\Theta_{A_I,G}) \quad \text{pour tout } I \subset [1,m]$$

on peut trouver, d'après la Proposition 4.4.4, un voisinage $\mathcal{U}$ de (A,G) dans $\mathcal{M}_{m\times n}\times\mathcal{M}_{k\times n}$ tel que $\mathcal{J}_{A,G} := \{I \subset [1,m] :\ 0 \notin \Theta_{A_I,G}\} = \{I \subset [1,m] :\ 0 \notin \Theta_{A'_I,G'}\} =: \mathcal{J}_{A',G'}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{U}$. Par conséquent, la constante donnée par :

$$\sigma_{A',G'} = \min\{d_*(0,\Theta_{A'_I,G'}) \,:\, I \in \mathcal{J}_{A,G}\}$$

est une constante de Hoffman de tout polyèdre $\mathcal{P}_{A',G',b',h'}$ non vide, où $(A',G') \in \mathcal{U}$, b' et h' sont des vecteurs quelconques dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement. Nous nous intéressons en particulier au comportement lipschitzien de σ en tant qu'application réelle définie sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$ par :

$$\sigma : (A',G') \mapsto \sigma(A',G') := \sigma_{A',G'} := \inf\{d_*(0,\Theta_{A'_I,G'}),\ I \in \mathcal{J}_{A,G}\}\,. \tag{4.16}$$

Dans cette partie, les vecteurs lignes de G sont supposés linéairement indépendants, i.e. $(G^T)^{-1}(0) = \{0\}$. En dehors de quelques situations simples où $G^{-1}(0) = \{0\}$, cette condition est nécessaire comme nous le montrons dans la Proposition 4.5.1 ci-dessous.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 4.5.1: (a) *Supposons que :*

$$0 \notin \mathrm{fr}(\Theta_{A_I,G}) \quad \textit{pour tout } I \subset [1,m]\,. \tag{4.17}$$

Alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (A,G) tel que l'application σ définie dans (4.16) est lipschitzienne sur $\mathcal{U}$ et $\sigma_{A',G'}$ est une constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A',G',b',h'}$ relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour tout $(A',G',b',h') \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{P}_{A',G',b',h'} \neq \emptyset$.

(b) *Réciproquement, s'il existe $I \subset [1,m]$ tel que $0 \in \mathrm{fr}\,(\Theta_{A_I,G})$, alors pour tout $(\hat{b},\hat{h}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tel que $\mathcal{P}_{A,G,\hat{b},\hat{h}} \neq \emptyset$, pour tout $x_0 \in \mathcal{P}_{A,G,\hat{b},\hat{h}}$ et $\varepsilon > 0$, il existe des matrices $(A^\varepsilon\ G^\varepsilon) \in \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{k\times n}$, des vecteurs $(b^\varepsilon,\ h^\varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ et $\hat{I} \subset I$ tels que :*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} \neq \emptyset\,, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} (A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon) = (A,G,\bar{b},\hat{h})\,, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sigma_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} = 0\,, \end{cases}$$

où $\bar{b}_{\hat{I}} := A_{\hat{I}}x_0$, $\bar{b}_{\hat{I}^c} := \hat{b}_{\hat{I}^c}$, et $\sigma_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ est la constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ relativement à la norme euclidienne.

Démonstration. On vient de voir (discussion ci-dessus) qu'il existe $\mathcal{U}$, un voisinage de (A,G) tel que :

$$\sigma_{A',G'} = \min\{d_*(0,\Theta_{A'_I,G'}) :\ I \in \mathcal{J}_{A,G}\}$$

est une constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A',G',b',h'}$ pour tout $(A',G') \in \mathcal{U}$, $b' \in \mathbb{R}^m$ et $h' \in \mathbb{R}^k$ tels que $\mathcal{P}_{A',G',b',h'} \neq \emptyset$. Soient $(A_i,G_i) \in \mathcal{U}$ et $(b_i,h_i) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ tels que $\mathcal{P}_{A_i,G_i,b_i,h_i} \neq \emptyset$, $i = 1{,}2$, et soient $I \in \mathcal{J}_{A,G}$ et $(\theta,\gamma) \in \Sigma_I$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que pour toute norme sur $\mathcal{M}_{m\times n}$ et $\mathcal{M}_{k\times n}$, que nous noterons également $\|\cdot\|$, on a :

$$\sigma_{A_1,G_1} \le d_*(0,\Theta_{(A_1)_I,G_1}) \le \|(A_1)_I^T\theta + G_1^T\gamma\|_* \le \delta\|A_1 - A_2\| + \delta\|G_1 - G_2\| + \|(A_2)_I^T\theta + G_2^T\gamma\|_*\,,$$

d'où en passant à l'infimum sur Σ_I puis sur $\mathcal{J}_{A,G}$, on obtient

$$\sigma_{A_1,G_1} \le \sigma_{A_2,G_2} + \|A_1 - A_2\| + \|G_1 - G_2\|\,.$$

De même, on montre que $\sigma_{A_2,G_2} \le \sigma_{A_1,G_1} + \|A_1 - A_2\| + \|G_1 - G_2\|$, d'où la première conclusion.

Réciproquement, soit $I \subset [1,m]$ tel que $0 \in fr(\Theta_{A_I,G})$. On note $J := [1,k]$. Alors, d'après les Propositions 4.4.2 et 4.4.3, il existe $z \in \mathbb{R}^n$ et $\theta := (\theta_I,\theta_J) \in \mathbb{R}^I_+ \times \mathbb{R}^k$ tels que :

$$\|z\|_2 = \|\theta\|_2 = 1, \quad A_I z \le 0, \quad Gz = 0\,, \quad A_I^T\theta_I + G^T\theta_J = 0\,.$$

Soient $\hat{I} := \{i \in I :\ a_i^T z = 0\}$ et $\tilde{I} := \{i \in I :\ a_i^T z < 0\}$. Alors, $\hat{I} \neq \emptyset$ car si $A_I z < 0$ alors $\{x \in \mathbb{R}^n :\ A_I x < 0, Gx = 0\} \neq \emptyset$, et donc $0 \notin \Theta_{A_I,G}$, d'après la Proposition 4.4.2, une contradiction. On a :

$$\langle z, A_I^T\theta_I + G^T\theta_J\rangle = \langle A_I z,\theta_I\rangle = \langle A_{\tilde{I}}z,\theta_{\tilde{I}}\rangle = 0\,.$$

Comme $A_{\tilde{I}}z < 0$, on en déduit que $\theta_{\tilde{I}} = 0$. Par conséquent, $\hat{I}$ vérifie :

$$A_{\hat{I}}z = 0, \quad Gz = 0\,, \quad A_{\hat{I}}^T\theta_{\hat{I}} + G^T\theta_J = 0\,.$$

Soient $\hat{b} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{h} \in \mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathcal{P}_{A,G,\hat{b},\hat{h}}$, et $\varepsilon > 0$. Posant :

$$A_{\hat{I}}^\varepsilon := A_{\hat{I}} + \varepsilon\theta_{\hat{I}}z^T\,, \quad A_{\hat{I}^c}^\varepsilon := A_{\hat{I}^c}\,, \quad G^\varepsilon := G + \tfrac{\varepsilon}{2}\theta_J z^T\,,$$
$$b_{\hat{I}}^\varepsilon := A_{\hat{I}}x_0 + \varepsilon\theta_{\hat{I}}z^Tx_0 + \varepsilon^2\theta_{\hat{I}}\,, \quad b_{\hat{I}^c}^\varepsilon := \hat{b}_{\hat{I}^c} + 2\varepsilon[A_{\hat{I}^c}z]^+\,, \quad h^\varepsilon := \hat{h} + \tfrac{\varepsilon}{2}\theta_J z^T x_0\,,$$

on obtient $G^\varepsilon x_0 - h^\varepsilon = 0$, $A_{\hat{I}}^\varepsilon x_0 - b_{\hat{I}}^\varepsilon = -\varepsilon^2\theta_{\hat{I}} \leq 0$, et $A_{\hat{I}^c}^\varepsilon x_0 - b_{\hat{I}^c}^\varepsilon = A_{\hat{I}^c}x_0 - b_{\hat{I}^c} - 2\varepsilon[A_{\hat{I}^c}z]^+ \leq 0$. Donc $x_0 \in \mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$. Soit $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, le vecteur donné par : $x_\varepsilon = x_0 + 2\varepsilon z$. Alors :

$$(A_{\hat{I}}^\varepsilon x_\varepsilon - b_{\hat{I}}^\varepsilon)^+ = \varepsilon^2\theta_{\hat{I}}\,, \quad (A_{\hat{I}^c}^\varepsilon x_\varepsilon - b_{\hat{I}^c}^\varepsilon)^+ = 0\,, \quad G^\varepsilon x_\varepsilon - h^\varepsilon = \varepsilon^2\theta_J\,,$$

d'où $x_\varepsilon \notin \mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$. D'après le Corollaire 4.3.2, la meilleure constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ relativement à la norme euclidienne est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} := \inf\{d(0,A^{\varepsilon T}(A^\varepsilon x - \alpha b^\varepsilon)^+ + G^{\varepsilon T}(G^\varepsilon x - \alpha h^\varepsilon)) :\ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\\ \|((A^\varepsilon x - \alpha b^\varepsilon)^+, G^\varepsilon x - \alpha h^\varepsilon)\|_2 = 1\}\,,\end{aligned}$$

où d est dans ce cas la distance euclidienne. Comme $x_\varepsilon \notin \mathcal{P}_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ et $\|((A^\varepsilon x_\varepsilon - b^\varepsilon)^+, G^\varepsilon x_\varepsilon - h^\varepsilon)\|_2 = \|(\varepsilon^2\theta_{\hat{I}}, \varepsilon^2\theta_J)\|_2 = \varepsilon^2\|\theta\|_2 = \varepsilon^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{A^\varepsilon,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} &\leq \varepsilon^{-2}\|A^{\varepsilon T}(A^\varepsilon x_\varepsilon - b^\varepsilon)^+ + G^{\varepsilon T}(G^\varepsilon x_\varepsilon - h^\varepsilon)\|_2\\ &\leq \varepsilon^{-2}\|\varepsilon^2 A_{\hat{I}}^T\theta_{\hat{I}} + \varepsilon^2 G^T\theta_J + 2\varepsilon^3 z\|_2 = 2\varepsilon\|z\|_2 = 2\varepsilon\,,\end{aligned}$$

d'où la conclusion. ∎

La condition $(G^T)^{-1}(0) = \{0\}$ dans le théorème précédent est nécessaire pour le bon comportement des constantes de Hoffman comme le montre la proposition suivante. Une situation simple se présente lorsque $G^{-1}(0) = \{0\}$ auquel cas le polyèdre $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ se réduit à $\mathcal{P}_{A,G,b,h} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Gx = d\} =: G^{-1}(h)$. La constante de Hoffman de $\mathcal{P}_{A,G,b,h}$ coïncide alors avec celle de $G^{-1}(h)$, déja établie dans le Corollaire 4.3.1 et dont le comportement lipschitzien est évident.

Proposition 4.5.1: *Supposons que :*

$$G^{-1}(0) \neq \{0\} \quad \textit{et} \quad G^{T^{-1}}(0) \neq \{0\}\,.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $G^\varepsilon \in \mathcal{M}_{k\times n}$ et des vecteurs $b^\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ et $h^\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ tels que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} \neq \emptyset\,, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon) = (G,b,h)\,, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} = 0\,. \end{cases}$$

Démonstration. Soient $\theta \in \mathbb{R}^k$ et $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|\theta\|_2 = \|z\|_2 = 1$, $G^T\theta = 0$, $Gz = 0$, et soit $x_0 \in \mathcal{P}_{A,G,b,h}$. Posant :

$$G^\varepsilon = G + \varepsilon\theta z^T\,, \quad h^\varepsilon = h + \varepsilon\theta z^T x_0\,, \quad b^\varepsilon = b + \varepsilon(Az)^+\,,$$

on obtient $G^\varepsilon x_0 - h^\varepsilon = 0$ et $Ax_0 - b^\varepsilon = Ax_0 - b - \varepsilon(Az)^+ \leq 0$, d'où $x_0 \in \mathcal{P}_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$. Soit x_ε, le vecteur donné par : $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon z$, alors $G^\varepsilon x_\varepsilon - h^\varepsilon = \varepsilon^2\theta$ et $Ax_\varepsilon - b_\varepsilon \leq 0$. Soit $\sigma_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ la constante de Hoffman du polyèdre $\mathcal{P}_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$ donnée dans le Corollaire 4.3.2 :

$$\begin{aligned} \sigma_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} := \inf\{d(0,A^T(Ax-\alpha b^\varepsilon)^+ + G^{\varepsilon T}(G^\varepsilon x - \alpha h^\varepsilon)) :\ x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \\ \|((Ax-\alpha b^\varepsilon)^+, G^\varepsilon x - \alpha h^\varepsilon)\|_2 = 1\}\,, \end{aligned}$$

où d est la distance euclidienne dans ce cas. Comme $x_\varepsilon \notin \mathcal{P}_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon}$, et

$$\|((Ax_\varepsilon - b^\varepsilon)^+, G^\varepsilon x_\varepsilon - h^\varepsilon)\|_2 = \varepsilon^2\|\theta\|_2 = \varepsilon^2\,,$$

on obtient

$$\sigma_{A,G^\varepsilon,b^\varepsilon,h^\varepsilon} \leq \frac{\|G_\varepsilon^T(G_\varepsilon x_\varepsilon - h_\varepsilon)\|_2}{\varepsilon^2} = \frac{\|\varepsilon^3 z\|_2}{\varepsilon^2} = \varepsilon\,.$$

■

Remarque 4.5.1: (a) En modifiant légèrement la définition de $\sigma_{A,G}$, on peut donner, comme dans [11, Theorem 4.2] et [65, Theorem 2.4], des conditions caractérisant le comportement lipschitzien de σ. Introduisant l'ensemble $\mathcal{I}_{A,b} := \{I \subset [1,m] :\ \mathcal{P}_{A,G,b,h} \cap A_I^{-1}(b) \neq \emptyset$ ou $\mathcal{P}_{A,G,0,0} \cap A_I^{-1}(0) \neq \{0\}\}$, on montre ([65, Theorem 2.4]) qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (A,G,b,h) tel que :

$$\{I \subset [1,m] :\ A'^{-1}_I(b'_I) \cap \mathcal{P}_{A',G',b',h'} \neq \emptyset,\ (A',G',b',h') \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{I}_{A,b}\,. \tag{4.18}$$

À l'aide du Théorème 4.3.3, en appliquant (4.18), on déduit que la constante :

$$\kappa_{A',G'} := \min_{\{I\in\mathcal{I}_{A,b}:\ 0\notin\Theta_{A_I,G}\}} d_*(0,\Theta_{A'_I,G'})$$

est une constante de Hoffman relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$ de tout polyèdre non vide $\mathcal{P}_{A',G',b',h'}$, avec $(A',G',b',h') \in \mathcal{U}$. De plus, la condition :

$$0 \notin \mathrm{fr}\,(\Theta_{A_I,C}) \quad \text{pour tout } I \in \mathcal{I}_{A,b}\,, \tag{4.19}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que κ ait un comportement lipschitzien.

(c) Lorsque le système $\{Ax \leq b, Gx = h\}$ vérifie la *condition de Slater*, c'est-à-dire s'il existe x_0 tel que $Ax_0 < b$ et $Gx_0 = h$, alors la condition (4.19) est équivalente à $0 \notin \mathrm{fr}\,(\Sigma_{A,G})$, voir le Lemme 6.3.4.

SENSIBILITÉ AU PREMIER ORDRE DES CONSTANTES DE HOFFMAN D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS AFFINES

5. SENSIBILITÉ AU PREMIER ORDRE DES CONSTANTES DE HOFFMAN D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS AFFINES.

Résumé

Ce chapitre est un complément du chapitre précédent, où nous étudions avec précision le comportement des constantes de Hoffman d'un polyèdre non vide. Ayant montré au chapitre 4, sous de conditions de régularité géométriques et analytiques, le comportement lipschitzien de ces constantes en tant que fonctions réelles, il s'agit maintenant d'établir leurs développements au premier ordre. Nous proposons pour cela de calculer le sous-différentiel de Clarke de quelques fonctions liées aux constantes de Hoffman, dont nous donnons dans un premier temps des formulations variationnelles. Nous établissons ainsi des comparaisons entre cette notion et d'autres théories, notamment celle des valeurs propres des multi-applications et les inéquations variationnelles. En particulier, deux catégories de constantes sont considérées. La première est celle relative à la norme euclidienne, pour laquelle nous donnons des formules implicites du sous-différentiel. Quant à celle relative à la norme $\|\cdot\|_1$, utilisant la caractérisation des solutions des programmes quadratiques convexes, nous établissons des formules explicites du sous-différentiel.

5.1 Introduction

Soit $\mathcal{P}_{A,b}$ le polyèdre donné par :

$$\mathcal{P}_{A,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\; Ax \leq b\}\,,$$

où $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Nous avons montré dans le chapitre 4 que sous l'hypothèse de régularité

$$0 \notin \operatorname{fr}(\operatorname{co}(a_I)) \qquad \text{pour tout } I \subset [1,m]\,,$$

l'application définie par :

$$\varphi :\; A' \in \mathcal{M}_{m\times n} \mapsto \varphi(A') := \min_{\{I\,:\,0 \notin \operatorname{co}(a'_I)\}} d(0,\operatorname{co}(a'_I))$$

est lipschitzienne au voisinage de A et que $\varphi(A')$ est une constante de Hoffman du polyèdre $\mathcal{P}_{A',b'}$ pour tout A' proche de A et pour tout $b' \in \mathbb{R}^m$ tels que $\mathcal{P}_{A',b'} \neq \emptyset$. Il est donc naturel de chercher à calculer le sous-différentiel de Clarke de φ [47]. Ceci nous permet d'étudier avec précision le comportement des constantes de Hoffman puisque nous donnons le développement au premier ordre des applications associées à ces constantes.

Dans ce but, nous donnons dans un premier temps des formules explicites d'une constante de Hoffman σ liée à la norme euclidienne. Cette norme étant maniable, nous en déduisons alors des formules variationnelles de cette constante, que nous utilisons pour établir des comparaisons entre cette notion et celle de valeur propre.

Grâce aux règles de calcul du sous-différentiel de Clarke et aux formulations variationnelles établies, nous donnons une première formule du sous-différentiel de l'application associée à la constante de Hoffman σ (voir Définition 5.2.2). Cette formule (voir Théorème 5.4.1) est définie implicitement à partir des programmes quadratiques avec contraintes quadratiques. Ceci est dû à l'utilisation de la norme euclidienne.

Pour donner des formules explicites du sous-différentiel nous utilisons la constante d'Azé-Corvellec introduite dans [11] et qu'on note κ. Cette constante est donnée en fonction de la norme $\|\cdot\|_1$ (voir Théorème 4.3.1) qui engendre, au niveau de la formule implicite du sous-différentiel relativement à cette constante κ, des programmes quadratiques avec contraintes linéaires. Donnant des caractérisations des solutions de ces programmes en utilisant des conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) et aussi des caractérisations données dans [67], nous établissons une formule explicite du sous-différentiel de κ.

Notation 5.1.1: Soient p, $q \in \mathbb{N}^*$. Dans ce chapitre, les espaces des matrices $\mathcal{M}_{p\times q}$ sont munis du produit scalaire $\langle\!\langle U,V \rangle\!\rangle := \mathrm{tr}(U^T V)$, dont la norme, qu'on note $\|\cdot\|$, est celle de Frobenius :

$$\|U\| := \mathrm{tr}(U^T U)^{1/2} = \left(\sum_{1\le i,j\le q} U_{ij}^2 \right)^{1/2} .$$

En particulier, si $p = q$ et $\mathcal{M}_{p\times p}$ est l'espace des matrices symétriques, on retrouve le produit scalaire usuel des matrices symétriques :

$$\langle\!\langle U,V \rangle\!\rangle := \mathrm{tr}\,(UV)\,.$$

5.2 Formulations variationnelles de constantes de Hoffman

Nous cherchons dans cette section à établir des formules variationnelles de constantes de Hoffman. On pose :

$$\sigma_A := \inf_{I \in \mathcal{J}_A} \inf_{\{\theta \in \mathbb{R}^I_+ :\ \|\theta\|_2 = 1\}} \|A_I^T \theta\|_2 \,. \tag{5.1}$$

où

$$\mathcal{J}_A := \{I \subset [1,m] :\ 0 \notin \mathrm{co}(a_I)\} \,.$$

Observons que $\sigma_A > 0$, d'après le Lemme 4.4.2. Plus précisément, on a la :

Proposition 5.2.1: *La constante σ_A est une constante de Hoffman de tout polyèdre non vide $\mathcal{P}_{A,b'}$, $b' \in \mathbb{R}^m$ relativement à la norme euclidienne :*

$$\sigma_A d(x,\mathcal{P}_{A,b'}) \leq \|(Ax - b')^+\|_2 \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \,,$$

où d est la distance euclidienne. De plus, sous la condition :

$$0 \notin \mathrm{fr}(\mathrm{co}(a_I)) \quad \textit{pour tout } I \subset [1,m] \,, \tag{5.2}$$

l'application $\sigma : A' \mapsto \sigma(A') := \sigma_{A'}$ est lipschitzienne au voisinage de A.

Démonstration. Pour $x \notin \mathcal{P}_{A,b}$, on note z une projection de x sur $\mathcal{P}_{A,b}$. Il existe donc $J \subset [1,m]$ et $\gamma_J \in \mathbb{R}^J_+$ tels que :

$$A_J z = b_J,\ x - z = A_J^T \gamma_J \,.$$

Appliquant le Lemme 4.3.1, on trouve $I \subset J$ et $\theta \in \mathbb{R}^I_+$ tels que les vecteurs (a_I) sont linéairement indépendants et $x - z = A_I^T \theta$, on en déduit que $I \in \mathcal{J}_A$ et

$$\|(Ax-b)^+\|_2 \geq \|(A_I x - b_I)^+\|_2 = \|(A_I(x-z))^+\|_2 = \|(A_I A_I^T \theta)^+\|_2 \,.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|\theta\|_2 \, \|(A_I A_I^T \theta)^+\|_2 \geq \langle \theta, (A_I A_I^T \theta)^+ \rangle \geq \langle \theta, A_I A_I^T \theta \rangle = \|A_I^T \theta\|_2^2 \,,$$

d'où

$$\frac{\|(Ax-b)^+\|}{d(x,\mathcal{P}_{A,b})} = \frac{\|(Ax-b)^+\|_2}{\|x-z\|_2} \geq \frac{\|(A_I A_I^T \theta)^+\|_2}{\|A_I^T \theta\|_2} \geq \frac{\|A_I^T \theta\|_2}{\|\theta\|_2} \geq \sigma_A \,.$$

Par conséquent, $\inf_{x \notin \mathcal{P}_{A,b}} \dfrac{\|(Ax-b)^+\|_2}{d(x,\mathcal{P}_{A,b})} \geq \sigma_A$, et il est de même pour tout polyèdre $\mathcal{P}_{A,b'} \neq \emptyset$.

Supposons que (5.2) ait lieu, alors d'après le Lemme 4.4.4, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A tel que :

$$\mathcal{J}_A = \mathcal{J}_{A'} := \{I \subset [1,m] : \ 0 \notin \mathrm{co}(a'_I)\}$$

pour tout $A' \in \mathcal{U}$ et donc, pour tout $A' \in \mathcal{U}$ et $b' \in \mathbb{R}^m$, $\sigma_{A'}$ est une constante de Hoffman de tout polyèdre non vide $\mathcal{P}_{A',b'}$ relativement à la norme euclidienne. Soient $A_i \in \mathcal{U}$, $b_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1,2$, $I \in \mathcal{J}_A$ et $\theta \in \{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}$. En utilisant la première partie, on déduit que

$$\sigma_{A_1} = \inf_{I \in \mathcal{J}_A} \inf_{\{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}} \|(A_1)_I^T \theta\|_2 \leq \|(A_1)_I^T \theta\|_2 \leq \|(A_2)_I^T \theta\|_2 + \|A_1 - A_2\| \,.$$

La conclusion découle en passant à l'infimum sur $\{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}$ puis sur $\mathcal{J}_A$. ■

Comme conséquence, on obtient une formulation variationnelle de σ_A.

Corollaire 5.2.1: *On a :*

$$\sigma_A^2 = \min_{I \in \mathcal{J}_A} \min_{\{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}} \langle\langle \theta\theta^T, A_I A_I^T \rangle\rangle \,.$$

Démonstration. Soient $I \in \mathcal{J}_A$ et $\theta \in \{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}$. On a :

$$\|A_I^T \theta\|_2^2 = \langle A_I^T \theta, A_I^T \theta \rangle = \langle \theta, A_I A_I^T \theta \rangle = \langle \theta\theta^T, A_I A_I^T \rangle \,,$$

La conclusion découle en élevant σ_A au carré. ■

On rappelle quelques propriétés liées aux fonctions d'appui. Si $I \subset [1,m]$, de cardinal égal à $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\Omega_I := \mathrm{co}\{\theta\theta^T : \ \theta \in \mathbb{R}^I_+ \,, \|\theta\|_2 = 1\} \,. \tag{5.3}$$

Alors, Ω_I est un convexe, compact dans $\mathcal{M}_{p\times p}$ et sa fonction d'appui :

$$\Sigma_{\Omega_I}(M) := \max_{\Omega_I} \langle\langle C, M \rangle\rangle$$

est convexe lipschitzienne. Comme la valeure de Σ_{Ω_I} est le maximum d'un programme linéaire, alors ce maximum est atteint sur des points extrémaux de Ω_I qui sont en fait des points de l'ensemble $\{\theta\theta^T : \ \theta \in \mathbb{R}^I_+ \,, \|\theta\|_2 = 1\}$. Alors, Σ_{Ω_I} s'écrit

$$\Sigma_{\Omega_I}(M) = \max_{\{\theta\theta^T : \ \theta \in \mathbb{R}^I_+ \,, \ \|\theta\|_2 = 1\}} \langle\langle C, M \rangle\rangle \,.$$

On obtient une autre écriture de σ à l'aide des fonctions d'appui.

Corollaire 5.2.2: *On a :*

$$\sigma_A^2 = -\max_{I \in \mathcal{J}_A} \Sigma_{\Omega_I}(-A_I A_I^T)\,.$$

Remarque 5.2.1: Observons que si $0 \notin \mathrm{co}(a_{[1,m]})$, alors σ_A s'écrit :

$$\sigma_A^2 = \min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^m :\ \|\theta\|_2 = 1\}} \langle\langle \theta\theta^T, AA^T \rangle\rangle\,.$$

Par ailleurs, la plus petite valeur propre de la matrice AA^T, notée $\lambda_{\min}(AA^T)$, est donnée grâce à la formule variationnelle de Rayleigh par :

$$\lambda_{\min}(AA^T) = \min_{\{\theta \in \mathbb{R}^m :\ \|\theta\|_2 = 1\}} \langle\langle \theta, AA^T\theta \rangle\rangle\,.$$

Nous introduisons la notion de K*-valeur propre* où K est un cône convexe fermé. Pour plus de détails sur cette notion, on renvoie à [82].

Définition 5.2.1: *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, K un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^p$ et B une matrice carrée de type p. Un réel λ est dit $K-$*valeur propre* de B s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^p$ tel que :*

$$x \in K,\ Bx - \lambda x \in K^+,\ \langle x,\ Bx - \lambda x \rangle = 0\,, \tag{5.4}$$

où $K^+ := \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle x,y \rangle \geq 0 \quad \forall\, y \in K\}$ est le cône dual positif.

En termes d'inéquation variationnelle, le système (5.4) est équivalent a :

$$x \in K \setminus \{0\},\ \langle Bx - \lambda x, v - x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in K\,.$$

Remarquons aussi que B est $K-$*semi-définie positive*, c'est-à-dire

$$\langle x, Bx \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in K\,,$$

si et seulement si les $K-$valeurs propres de B sont positives. En particulier, si $K = \mathbb{R}^p$, alors on retrouve les définitions usuelles des matrices semi-définies positives. Par analogie aux *valeurs singulières*, on introduit la notion de $K-$valeur singulière d'une matrice.

Définition 5.2.2: *Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$, K un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^p$ et B une matrice de type $p \times q$ ($B \in \mathcal{M}_{p\times q}$). Un réel μ_K est dit $K-$valeur singulière de B si μ_K^2 est une $K-$valeur propre de BB^T. On note $\mu_{B,K}$ la plus petite valeur singulière de B.*

On donne le théorème principal de cette section qui exprime la constante de Hoffman σ_A introduite dans (5.1) en fonction des valeurs singulières (conique).

Théorème 5.2.1: *On a :*

$$\sigma_A = \min\{\mu_{A_I,\mathbb{R}^I_+} \; : \; I \in \mathcal{J}_A\} \,.$$

En particulier, si $0 \notin \mathrm{co}(a_{[1,m]})$ *alors* $\sigma_A = \mu_{A,\mathbb{R}^n_+}$*, la plus petite* $\mathbb{R}^n_+-$*valeur singulière de la matrice* A*.*

Démonstration. Observons tout d'abord que pour tout $I \in \mathcal{J}_A$, les $\mathbb{R}^I_+-$valeurs propres de $A_I A_I^T$ sont positives. Ceci est dû au fait que la matrice $A_I A_I^T$ est semi-définie positive, donc $\mathbb{R}^I_+-$semi-définie positive. On montre qu'elles (les $\mathbb{R}^I_+-$valeurs propres de $A_I A_I^T$) sont en fait strictement positives. En effet, supposons le contraire. Alors, il existe $x \in \mathbb{R}^I_+ \setminus \{0\}$ tel que :

$$x \geq 0,\; A_I A_I^T x \geq 0,\; \langle x, A_I A_I^T x\rangle = 0 \,.$$

On en déduit que $A_I^T x = 0$, d'où $0 \in \mathrm{co}(a_I)$, une contradiction.

La constante σ_A s'écrit $\sigma_A^2 = \min\limits_{I\in\mathcal{J}_A} \min\limits_{\{\theta\in\mathbb{R}^I_+ :\; \|\theta\|_2=1\}} \langle \theta, A_I A_I^T \theta\rangle$, d'après le Corollaire 5.2.1. On peut trouver donc $I \in \mathcal{K}_A$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}^I_+$ tels que $\|\theta_0\|_2 = 1$ et $\langle \theta_0, A_I A_I^T \theta_0\rangle = \sigma_A^2$. Posons $\lambda := \langle \theta_0, A_I A_I^T \theta_0\rangle$. Alors, λ est la plus petite $\mathbb{R}^I_+-$valeur propre de $A_I A_I^T$. En effet, $\lambda > 0$ puisque $I \in \mathcal{J}_A$, d'après le Lemme 4.4.2 et

$$\langle \theta_0, A_I A_I^T \theta_0 - \lambda\theta_0\rangle = \langle \theta_0, A_I A_I^T \theta_0\rangle - \lambda = 0 \,.$$

Pour montrer que $A_I A_I^T \theta_0 - \lambda\theta_0 \geq 0$, on procède comme dans [82, Lemme 2.2]. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}^I_+$ par :

$$G(\theta) := \langle \theta, A_I A_I^T \theta\rangle - \lambda(\|\theta\| - 1) \,,$$

et pour $\theta \in \mathbb{R}^I_+ \setminus \{0\}$, on construit la trajectoire donnée par :

$$u(t) := \frac{t\theta + (1-t)\theta_0}{\|t\theta + (1-t)\theta_0\|} \,, \quad t \in [0{,}1] \,.$$

On en déduit que $u([0{,}1]) \subset \{\theta \in \mathbb{R}^I_+ \; : \; \|\theta\|_2 = 1\}$ et que le minimum de la fonction $g(t) := G(u(t))$ est atteint en $t = 0$. Par conséquent, la *dérivée à droite* de g en 0 s'écrit :

$$g'_+(0) = \langle G'(u(0)), u'(0)\rangle = \langle A_I A_I^T \theta_0 - \lambda\theta_0, u'(0)\rangle \geq 0 \,,$$

avec $u'(0) = \theta - \langle \theta_0, \theta \rangle \theta_0$, d'où

$$\langle A_I A_I^T \theta_0 - \lambda \theta_0, u'(0) \rangle = \langle A_I A_I^T \theta_0 - \lambda \theta_0, \theta \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}_+^I \, .$$

Par conséquent, λ est une $\mathbb{R}_+^I-$valeur propre de $A_I A_I^T$.

Maintenant soit λ_1 une autre $\mathbb{R}_+^I-$valeur propre de $A_I A_I^T$. Alors, il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}_+^I$ tel que $\|\theta_1\|_2 = 1$ et $\langle \theta_1, A_I A_I^T \theta_1 - \lambda_1 \theta_1 \rangle = 0$, d'où

$$\lambda_1 = \langle \theta_1, A_I A_I^T \theta_1 \rangle \geq \sigma_A^2 = \lambda \, .$$

Donc $\sqrt{\lambda}$ est la plus petite $\mathbb{R}_+^I-$valeur singulière de A_I, d'où la conclusion. ∎

En donnant des caractérisations des ensembles Ω_I définis dans (5.3), nous établissons une autre interprétation des constantes de Hoffman. On utilisera les familles suivantes des matrices (voir par exemple [20]).

Définition 5.2.3: *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{S}_p$ est dite* copositive *si*

$$x^T M x \geq 0 \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^p \, .$$

On note $\mathcal{C}_p$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 5.2.4: *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{S}_p$ est dite* complètement positive *s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_1, \cdots, \theta_l \in \mathbb{R}_+^p$ tels que $M = \sum_{i=1}^l \theta_i \theta_i^T$. On note $\mathcal{C}_p^+$ l'ensemble de ces matrices.*

Ainsi définis, les ensembles $\mathcal{C}_p^+$ et $\mathcal{C}_p$ sont des cônes convexes fermés de $\mathcal{M}_p$, et on a :

$$\mathcal{C}_p^+ \subset \mathcal{S}_p^+ \subset \mathcal{C}_p \, .$$

On remarque aussi que $\mathcal{C}_p^+$ est le cône dual positif de $\mathcal{C}_p$ et vice versa, ceci justifie les notations introduites. Pour une étude détaillée de ces familles, on renvoie le lecteur à [36].

Proposition 5.2.2: *Soient $I \subset [1,m]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $|I| = p$. Alors, l'ensemble Ω_I défini dans (5.3) s'écrit :*

$$\Omega_I = \{ C \in \mathcal{C}_p^+ : \ \mathrm{tr}(C) = 1 \} \, , \tag{5.5}$$

c'est-à-dire Ω_I est une face de $\mathcal{C}_p^+$.

Démonstration. Soit $C \in \mathcal{M}_p$ telle que $C = \theta\theta^T$ où $\theta \in \mathbb{R}^I_+$ et $\|\theta\|_2 = 1$, alors $C \in \mathcal{C}_p^+$, d'après la Définition 5.2.4 d'une part et d'autre part, notant id_p la matrice *identité* dans $\mathcal{M}_p$, on obtient

$$\mathrm{tr}\,(C) := \langle\!\langle C, id_p \rangle\!\rangle = \|\theta\|_2^2 = 1\,,$$

d'où $\Omega_I \subset \{C \in \mathcal{C}_p^+ :\ \mathrm{tr}\,(C) = 1\}$. Réciproquement, soit $C \in \mathcal{C}_p^+$ telle que $\mathrm{tr}\,(C) = 1$. Il existe donc $l \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_1, \cdots, \theta_l \in \mathbb{R}^I_+$ non nuls tels que $C = \theta_1\theta_1^T + \cdots + \theta_l\theta_l^T$ et

$$\sum_1^l \|\theta_i\|_2^2 = \langle\!\langle \sum_1^l \theta_i\theta_i^T, id_p \rangle\!\rangle = \mathrm{tr}\,(C) = 1\,.$$

Écrivant C sous la forme

$$C = \|\theta_1\|_2^2 \hat{\theta}_1\hat{\theta}_1^T + \cdots + \|\theta_l\|_2^2 \hat{\theta}_l\hat{\theta}_l^T\,,$$

où $\hat{\theta}_i := \dfrac{\theta_i}{\|\theta_i\|_2}$, on déduit que $C \in \Omega_I$, d'où la conclusion. ■

Théorème 5.2.2: *On a :*

$$\sigma_A = \min_{I \in \mathcal{J}_A} \max_{\{\lambda \in \mathbb{R}:\ A_I A_I^T - \lambda id_p \in \mathcal{C}_p\}} \sqrt{\lambda}\,,$$

où id_p est la matrice identité *dans $\mathcal{M}_p$.*

Démonstration. Soient $I \in \mathcal{J}_A$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $|I| = p$. Considérons le problème conique donné par :

$$\min_{\{C \in \mathcal{C}_p^+ :\ \mathrm{tr}\,(C) = 1\}} \langle\!\langle C, A_I A_I^T \rangle\!\rangle\,. \tag{5.6}$$

Comme le cône $\mathcal{C}_p^+$ est convexe, fermé et pointé (car son cône dual est d'intérieur non vide), alors le problème dual de (5.6) est donné par :

$$\max_{\{\lambda \in \mathbb{R}:\ A_I A_I^T - \lambda id_p \in \mathcal{C}_p\}} \lambda\,. \tag{5.7}$$

Observons aussi que (5.7) est borné supérieurement. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_I A_I^T - \lambda id_p \in \mathcal{C}_p$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^p_*$ on obtient :

$$\langle x, A_I A_I^T x - \lambda x \rangle \geq 0\,.$$

Donc, $\displaystyle\sup_{\{\lambda \in \mathbb{R}:\ A_I A_I^T - \lambda id_p \in \mathcal{C}_p\}} \lambda \leq \frac{\|A_I^T x\|^2}{\|x\|^2} < +\infty$. Par ailleurs, comme $0 \notin \mathrm{co}(a_I)$, on a :

$$2\bar{\delta} := \inf_{x \neq 0} \frac{\|A_I^T x\|^2}{\|x\|^2} > 0\,.$$

On vérifie alors aisément que $\bar{\delta} \in \operatorname{int}\{\lambda \in \mathbb{R} : \ A_I A_I^T - \lambda I_p \in \mathcal{C}_p\}$. Le problème dual (5.7) étant donc strictement faisable. On déduit grâce aux résultats de dualité en programmation conique (voir [16, Chapitre 2.2]), que les valeurs optimales de (5.6) et (5.7) sont égales. On obtient donc, en utilisant la formule de σ_A dans la Proposition 5.2.2 et la caractérisation de Ω_I dans le Corollaire 5.2.1,

$$\begin{aligned}
\sigma_A &= \min_{I\in\mathcal{J}_A} \min_{\{\theta\in\mathbb{R}_+^I :\ \|\theta\|_2=1\}} \langle\!\langle \theta\theta^T, A_I A_I^T\rangle\!\rangle \\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A} \min_{\{C=\theta\theta^T :\ \theta\in\mathbb{R}_+^I,\ \|\theta\|_2=1\}} \langle\!\langle C, A_I A_I^T\rangle\!\rangle \\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A} \min_{\Omega_I} \langle\!\langle C, A_I A_I^T\rangle\!\rangle \\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A} \max_{\{\lambda\in\mathbb{R}:\ A_I A_I^T - \lambda id_p\in\mathcal{C}_p\}} \lambda\,.
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.2.2: Les problèmes :

$$\min_{\{\theta\in\mathbb{R}_+^I :\|\theta\|_2=1\}} \langle\!\langle \theta\theta^T, A_I A_I^T\rangle\!\rangle\,,\ I \in \mathcal{J}_A\,,$$

sont appelés aussi *programmes copositifs*, voir [20] par exemple, où une méthode numérique est proposée pour résoudre ce type de programmes, en approchant le cône $\mathcal{C}_p$ des matrices copositives par des inégalités matricielles linéaires. Les problèmes duaux

$$\max_{\{\lambda\in\mathbb{R}:\ A_I A_I^T - \lambda id_p\in\mathcal{C}_p\}} \lambda\,,\ I \in \mathcal{J}_A\,,$$

peuvent donc être approchés par des *programmes semi-définis positifs.*

5.3 Rappels sur le sous-différentiel de Clarke

Nous rassemblons dans cette section les résultats sur le sous-différentiel de Clarke qui nous serons utiles par la suite. Pour plus de détails concernant cette théorie, nous renvoyons à [27].

Soient X, Y et Z des espaces de Banach tels que $Y \subset X$. On munit X de la norme $\|\cdot\|$, le dual de X est noté X^* muni de la norme duale $\|\cdot\|_*$ et on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit de dualité $X \times X^*$. L'ensemble $L(X,Z)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de X dans Z.

Étant donnée $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne, on rappelle la définition de la *dérivée directionnelle généralisée de Clarke de f en $x \in X$ dans la direction $v \in X$* :

$$f^\circ(x,v) := \limsup_{x' \to x,\, t \to 0^+} \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t}.$$

La fonction $f^\circ(x,\cdot)$ est finie, positivement homogène, sous-additive, donc convexe et vérifie $f^\circ(x,-v) = (-f)^\circ(x,v)$. Le théorème de Hahn-Banach assure que l'ensemble de X^* :

$$\partial^\circ f(x) := \{\xi \in X^* : \; f^\circ(x,v) \geq \langle \xi, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in X\}$$

est non vide. Cet ensemble, qui est de fait, convexe et *-faiblement compact dans X^*, est appelé le *sous-différentiel de Clarke de f en x*. Cet ensemble coïncide avec le sous-différentiel de Fenchel si f est convexe et vérifie :

$$f^\circ(x;v) = \Sigma_{\partial f(x)}(\xi) := \max\{\langle \xi, v\rangle : \; \xi \in \partial f(x)\}.$$

Lorsque f est strictement différentiable en x (Voir Définition 2.3.1) on note $f_s'(x)$ la dérivée stricte de f en x. On sait alors que f est strictement différentiable en x si et seulement s'il existe $\xi \in X^*$ tel que $\partial f(x) = \{\xi\}$. De plus, si X est de dimension finie, alors f est de classe C^1 sur un voisinage de x si et seulement si $\partial f(y)$ est un singleton dans ce voisinage.

La fonction f est dite *régulière* en x si la dérivée généralisée coïncide, pour tout $v \in X$, avec la *dérivée directionnelle usuelle* :

$$f'(x;v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Comme exemples de fonctions lipschitziennes régulières, on a les fonctions strictement différentiables, les fonctions convexes, les combinaisons coniques de fonctions régulières, le maximum d'un nombre fini de fonctions régulières.

Soit f_i, $i = 1,\dots,k$ une famille de fonctions localement lipschitziennes en x, alors

$$\partial(f_1 + \cdots + f_k)(x) \subset \partial f_1(x) + \cdots + \partial f_k(x),$$

et l'égalité a lieu si les fonctions f_i, $i = 1,\dots,k$, sont régulières en x.

Soient $F : Y \to Z$ et $g : Z \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que F est strictement différentiable en x et g est localement lipschitzienne en $F(x)$, alors la fonction $f := g \circ F$ est localement lipschitzienne en x et on a :

$$\partial f(x) \subset \partial g(F(x)) \circ F_s'(x),$$

l'égalité a lieu si g est régulière en $F(x)$.

On note $h(x) := \max\{f_1(x),...,f_k(x)\}$ et $I(x) := \{i \in [1,k] \ : \ f_i(x) = h(x)\}$. Alors, on a :

$$\partial h(x) \subset \mathrm{co}\{\partial f_i(x) : \ i \in I(x)\} \,,$$

l'égalité a lieu si f_i est régulière en x pour tout $i \in I(x)$.

Si $g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne en $f(x)$, alors la fonction $h := g \circ f$ est localement lipschitzienne en x et on a :

$$\partial h(x) \subset \{\alpha\xi : \ \xi \in \partial f(x), \, \alpha \in \partial g(f(x))\} \,,$$

l'égalité a lieu si g est strictement différentiable en $f(x)$.

5.4 Formules implicites du sous-différentiel de fonctions liées aux constantes de Hoffman

Dans cette partie nous établissons des formules implicites du sous-différentiel et de la dérivée généralisée de la fonction $\sigma : \ \mathcal{M}_{m\times n} \to \mathbb{R}$ associée à la constante de Hoffman σ_A définie dans (5.1) :

$$\sigma : \ A' \to \sigma(A') := \sigma_{A'} := \inf_{I \in \mathcal{J}_{A'}} \inf_{\{\theta \in \mathbb{R}^I_+ : \ \|\theta\|_2 = 1\}} \|A'^T_I \theta\| \,,$$

où $\mathcal{J}_{A'} := \{I \subset [1,m] : \ 0 \notin \mathrm{co}(a'_I)\}$. Sous l'hypothèse de régularité (5.2) :

$$0 \notin \mathrm{fr}(\mathrm{co}(a_I)) \quad \text{pour tout } I \subset [1,m] \,,$$

la fonction σ est localement lipschitzienne, d'après la Proposition 5.2.1. Le sous-différentiel de Clarke de σ en A, étant donc non vide, est donné par :

$$\partial\sigma(A) = \{C \in \mathcal{M}_{m\times n} : \ \sigma^\circ(A;C) \geq \langle\!\langle C,H \rangle\!\rangle \quad \text{pour tout } H \in \mathcal{M}_{m\times n}\} \,,$$

où $\sigma^\circ(A;\cdot)$ est la dérivée généralisée de σ qui coïncide en fait avec la fonction d'appui $\Sigma_{\partial\sigma(A)}$ de $\partial\sigma(A)$.

Pour simplifier les formulations nous fixons quelques notations. On rappelle que Ω_I (voir (5.3)) est donné, dáprès la Proposition 5.2.2, par :

$$\Omega_I := \mathrm{co}\{\theta\theta^T : \ \theta \in \mathbb{R}^I_+, \|\theta\|_2 = 1\} = \{C \in \mathcal{C}^+_p : \mathrm{tr}\, C = 1\} \,.$$

Notation 5.4.1: Si $I \subset [1,m]$, on note ϕ_I et f_I les fonctions définies par :

$$\phi_I(C) := -C_I C_I^T \,, \quad f_I(C) := \max_{H \in \Omega_I} \langle\langle H, \phi_I(C) \rangle\rangle \,,$$

et on pose :

$$Q_I(A) := \left\{ C \in \Omega_I : \ \min_{H \in \Omega_I} \langle\langle H, A_I A_I^T \rangle\rangle = \langle\langle C, A_I A_I^T \rangle\rangle \right\} \tag{5.8}$$

et

$$\mathbb{I}(A) := \{ I \in \mathcal{J}_A : \ f_I(A) = -\sigma_A^2 \} \,. \tag{5.9}$$

Utilisant la Notation 5.4.1, σ s'écrit :

$$\sigma_A^2 = -\max_{I \in \mathcal{J}_A} f_I(A) \,.$$

Il faut donc vérifier la régularité et la dérivabilité des fonctions ϕ_I et f_I. Les deux résultats suivants sont aisément vérifiables.

Lemme 5.4.1: *Soit $I \subset [1,m]$. Alors, la fonction ϕ_I est de classe C^∞ sur $\mathcal{M}_{m \times n}$ et on a :*

$$\phi_I'(C)(V) = -C_I V_I^T - V_I C_I^T$$

pour tous $C,V \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Comme l'ensemble Ω_I est convexe et compact, on a immédiatement la :

Proposition 5.4.1: *Soit $I \subset [1,m]$ de cardinal égal à $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, Σ_{Ω_I}, la fonction d'appui de Ω_I, est convexe, lipschitzienne (donc régulière), finie, et pour tout $C \in \mathcal{S}_p$ on a :*

$$\partial(\Sigma_{\Omega_I})(C) = \{ H \in \Omega_I : \ \Sigma_{\Omega_I}(C) = \langle\langle H, C \rangle\rangle \} \,.$$

Par conséquent,

$$\Sigma'_{\Omega_I}(C;V) = \Sigma^\circ_{\Omega_I}(C;V) = \Sigma_{\partial(\Sigma_{\Omega_I})(C)}(V) = \max\{ \langle\langle H, V \rangle\rangle : \ H \in \Omega_I, \Sigma_{\Omega_I}(C) = \langle\langle H, C \rangle\rangle \}$$

pour tout $V \in \mathcal{S}_p$.

Toute fonction f_I, $I \subset [1,m]$ (voir Notation 5.4.1) est la composée d'une fonction convexe lipschitzienne Σ_{Ω_I} et d'une fonction de classe C^∞. On en déduit donc que f_I est localement lipschitzienne et régulière (voir [27]). On obtient la proposition suivante.

Proposition 5.4.2: *Soit $I \subset [1,m]$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|I| = p$. Alors, le sous-différentiel de f_I en A est donné par :*

$$\partial f_I(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2CA_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} : \ C \in \partial(\Sigma_{\Omega_I})(-A_I A_I^T) \right\}, \tag{5.10}$$

autrement dit :

$$\partial f_I(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2CA_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} : \ C \in \Omega_I, \ \min_{H \in \Omega_I} \langle\langle H, A_I A_I^T \rangle\rangle = \langle\langle C, A_I A_I^T \rangle\rangle \right\},$$

où 0_{m-p} est la matrice nulle dans $\mathcal{M}_{(m-p)\times n}$.

Démonstration. Pour simplifier les notations nous supposons que $I = [1,m]$. On note donc $f := f_{[1,m]}$, $\Omega := \Omega_{[1,m]}$ et $\phi := \phi_{[1,m]}$. Soient V et $t > 0$ fixés. En utilisant des développements au premier ordre des fonctions ϕ et Σ_Ω, on obtient :

$$\begin{aligned} f(A+tV) = \Sigma_\Omega(\phi(A+tV)) &= \Sigma_\Omega(\phi(A) + t\phi'(A,V) + o(t)) \\ &= \Sigma_\Omega(\phi(A) + t\phi'(A,V)) + o(t) \\ &= \Sigma_\Omega(\phi(A)) + t\Sigma'_\Omega(\phi(A)\ ; \phi'(A,V)) + o(t) \\ &= f(A) + t\Sigma'_\Omega(\phi(A)\ ; -AV^T - VA^T) + o(t) \\ &= f(A) + t\Sigma_{\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)}(-AV^T - VA^T) + o(t). \end{aligned}$$

Or, pour $C \in \Omega$ on a :

$$\langle\langle C, AV^T + VA^T \rangle\rangle = \mathrm{tr}\,(CAV^T) + \mathrm{tr}\,(AV^T C) = 2\mathrm{tr}\,(CAV^T) = 2\langle\langle CA, V \rangle\rangle,$$

d'où

$$\Sigma_{\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)}(-AV^T - VA^T) = \Sigma_{-2\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)A}(V).$$

On en déduit que :

$$f(A+tV) = f(A) + t\Sigma_{-2\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)A}(V) + o(t).$$

Par conséquent, $f'(A;V) = \Sigma_{-2\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)A}(V)$. Comme f est régulière, on en déduit que $f'(A;V) = f^\circ(A;V) = \Sigma_{\partial f(A)}(V)$. On obtient

$$\partial f(A) = -2\partial(\Sigma_\Omega)(-AA^T)A = \left\{ -2CA : \ C \in \Omega, \min_{H \in \Omega} \langle\langle H, AA^T \rangle\rangle = \langle\langle C, AA^T \rangle\rangle \right\}.$$

■

On obtient alors le théorème principal de cette section.

Théorème 5.4.1: *Supposons que l'hypothèse (5.2) a lieu:* $0 \notin \mathrm{fr}(\mathrm{co}(a_I))$ *pour tout* $I \subset [1,m]$. *Alors, le sous-différentiel de* σ *en* A *est donné par:*

$$\partial\sigma(A) = \sigma_A^{-1}\mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} \theta_I\theta_I^T A_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} \right\},$$

où θ_I, I *et* p *sont tels que:*

$$I \subset [1,m],\ |I| = p,\ \min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2 = \sigma_A(>0)\,,\ \theta_I \geq 0\,,\ \|\theta_I\|_2 = 1\,.$$

Par conséquent, la dérivée directionnelle est donnée par:

$$\sigma'(A;H) = \sigma_A^{-1}\max\{\langle\!\langle \theta_I\theta_I^T, H_I A_I^T \rangle\!\rangle :\ \theta_I \geq 0,\ \|\theta_I\|_2 = 1,$$
$$\min_{\{\theta_I \geq 0, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2 = \sigma_A > 0\}$$

pour tout $H \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Démonstration. Posons $g(A) := \sigma(A)^2 = -\max_{I\in\mathcal{K}_A} f_I(A)$. On a $\sigma(A) = \sqrt{g(A)}$. Appliquant les règles de calcul rappelées dans la section 5.3, on obtient,

$$\partial\sigma(A) = \frac{1}{2\sigma_A}\partial g(A).$$

Puisque les fonctions f_I sont régulières et $\partial g(A) = -\partial(-g)(A)$, on déduit que:

$$\partial g(A) = -\partial\left(\max_{I\in\mathcal{J}_A} f_I\right)(A) = -\mathrm{co}\left\{\partial f_I(A), I \in \mathbb{I}(A)\right\}.$$

Or, d'après la Proposition 5.4.2, on a $\partial f_I(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2CA_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} :\ C \in Q_I(A) \right\}$ ($Q_I(A)$ est l'ensemble introduit dans la Notation 5.4.1). On obtient,

$$\partial\sigma(A) = \sigma_A^{-1}\mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} CA_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} :\ C \in Q_I(A), I \in \mathbb{I}(A) \right\}. \tag{5.11}$$

Observons que Ω_I est convexe et compact, donc $Q_I(A)$ s'écrit:

$$Q_I(A) = \mathrm{co}\left\{ \theta_I\theta_I^T :\ \min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2 \right\}.$$

L'ensemble $\partial\sigma(A)$ est convexe et compact par construction, donc il est l'enveloppe convexe de ces points extrémaux. En particulier on obtient, en utilisant (5.11),

$$\begin{aligned}
\partial\sigma(A) &= \sigma_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix} CA_I \\ 0_{m-p}\end{pmatrix} : C \in \mathrm{co}\left\{\theta_I\theta_I^T : \min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2\right\}, I \in \mathbb{I}(A)\right\} \\
&= \sigma_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix} \theta_I\theta_I^T A_I \\ 0_{m-p}\end{pmatrix} : \theta_I \geq 0, \|\theta_I\|_2 = 1, \min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2, I \in \mathbb{I}(A)\right\} \\
&= \sigma_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix} \theta_I\theta_I^T A_I \\ 0_{m-p}\end{pmatrix} : \theta_I \geq 0, \|\theta_I\|_2 = 1, \min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2 = \sigma_A > 0\right\}
\end{aligned}$$

où le passage de l'avant-dernière à la dernière égalité est dû, grâce au Lemme 4.4.2 (appliqué avec $C = 0$), au fait que : $I \in \mathbb{I}(A)$ si et seulement si

$$\min_{\{\theta_I \geq 0,\, \|\theta_I\|_2=1\}} \|A_I^T\theta_I\|_2 = \|A_I^T\theta_I\|_2 = \sigma_A > 0\,.$$

La deuxième conclusion découle du fait que σ est régulière. On a donc :

$$\sigma^\circ(A; H) = \sigma'(A; H) = \Sigma_{\partial\sigma(A)}(H)\,.$$

■

Remarque 5.4.1: Le Théorème 5.4.1 donne des formules implicites du sous-différentiel de σ et de sa dérivée directionnelle, ces objets étant définis à partir des problèmes d'optimisation qui sont en fait équivalents à des programmes quadratiques convexes avec des contraintes quadratiques.

5.5 Formules explicites du sous-différentiel des fonctions liées aux constantes de Hoffman

Dans cette section nous proposons de calculer le sous-différentiel de la fonction κ : $\mathcal{M}_{m\times n} \to \mathbb{R}$, associée à la constante d'Azé-Corvellec, introduite dans [11], donnée par :

$$\kappa :\ A' \to \kappa(A') := \kappa_{A'} := \inf_{I \in \mathcal{J}'_A}\ \inf_{\{\theta\in\mathbb{R}^I:\ \|\theta\|_1=1,\, \theta\geq 0\}} \|{A'}_I^T\theta\|_2\,. \tag{5.12}$$

On rappelle que $\mathcal{J}_{A'} := \{I \subset [1{,}m] : 0 \notin \mathrm{co}(a'_I)\}$. On a $\kappa_A > 0$ et

$$\kappa_A\, d(x, \mathcal{P}_{A,b}) \leq \|(Ax-b)^+\|_\infty \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

ici d est la distance associée à la norme euclidienne. Sous l'hypothèse (5.2), on montre, comme dans la Proposition 5.2.1, que κ est localement lipschitzienne au voisinage de A (voir aussi [11]). Par conséquent, $\partial\kappa(A)$ est bien défini.

Notation 5.5.1: Soit $I \subset [1,m]$, on note Γ_I l'ensemble donné par :

$$\Gamma_I := \operatorname{co}\{\theta\theta^T :\ \theta \in \mathbb{R}^I_+, \|\theta\|_1 = 1\}\,,$$

et on pose :

$$\mathbb{J}(A) := \{I \in \mathcal{J}_A :\ \max_{H\in\Gamma_I}\langle\langle H,\phi_I(A)\rangle\rangle = -\kappa_A^2\}$$

et

$$M_I(A) := \{C \in \Gamma_I :\ \min_{\Gamma_I}\langle\langle C',A_IA_I^T\rangle\rangle = \langle\langle C,A_IA_I^T\rangle\rangle\}\,.$$

En procédant comme dans la section 5.2, nous donnons une formulation variationnelle de la constante κ_A.

Proposition 5.5.1: *On a :*

$$\kappa_A^2 = -\max_{I\in\mathcal{J}_A}\Sigma_{\Gamma_I}(-A_IA_I^T)\,.$$

Démonstration. Élevant κ au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}
\kappa_A^2 &= \min_{I\in\mathcal{J}_A}\ \min_{\{\theta\in\mathbb{R}^I_+:\ \|\theta\|_1=1\}} \|A_I^T\theta\|_2^2\\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A}\ \min_{\{\theta\in\mathbb{R}^I_+:\ \|\theta\|_1=1\}} \langle\theta,A_IA_I^T\theta\rangle\\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A}\ \min_{\{\theta\in\mathbb{R}^I_+:\ \|\theta\|_1=1\}} \langle\langle\theta\theta^T,A_IA_I^T\rangle\rangle\\
&= \min_{I\in\mathcal{J}_A}\ \min_{\{C=\theta\theta^T:\ \theta\in\mathbb{R}^I_+,\, \|\theta\|_1=1\}} \langle\langle C,A_IA_I^T\rangle\rangle\,.
\end{aligned}$$

Or,

$$\min_{\{C=\theta\theta^T:\ \theta\in\mathbb{R}^I_+,\, \|\theta\|_1=1\}}\langle\langle C,A_IA_I^T\rangle\rangle = \min_{C\in\operatorname{co}\{\theta\theta^T:\ \theta\in\mathbb{R}^I_+,\, \|\theta\|_1=1\}}\langle\langle C,A_IA_I^T\rangle\rangle = \min_{\Gamma_I}\langle\langle C,A_IA_I^T\rangle\rangle\,,$$

d'où le résultat. ∎

Comme pour les ensembles Ω_I, nous donnons une caractérisation des ensembles Γ_I.

Proposition 5.5.2: *Soient $I \subset [1,m]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $|I| = p$. Alors,*

$$\Gamma_I = \{C \in \mathcal{C}_p^+ :\ \sum_{1\le i,j\le p} C_{ij} = 1\}\,. \tag{5.13}$$

Démonstration. Si $C \in \mathcal{S}_p$ est telle que $C = \theta\theta^T$ avec $\theta \in \mathbb{R}^I_+$ et $\|\theta\|_1 = 1$, alors $C \in \mathcal{C}^+_p$, d'après la Définition 5.2.4. De plus, on a :

$$\sum_{1\le i,j\le p} C_{ij} = \sum_{1\le i,j\le p} (\theta\theta^T)_{ij} = \sum_{1\le i,j\le p} \theta_i\theta_j = \sum_{1\le i\le p} \theta_i \sum_{1\le j\le p} \theta_j = 1\,.$$

Or, l'ensemble $\{C \in \mathcal{C}^+_p : \sum_{1\le i,j\le p} C_{ij} = 1\}$ est convexe, donc $\Gamma_I \subset \{C \in \mathcal{C}^+_p : \sum_{1\le i,j\le p} C_{ij} = 1\}$. Réciproquement, soit $C \in \mathcal{C}^+_p$ telle que $\sum\limits_{1\le i,j\le p} C_{ij} = 1$. Il existe donc $l \in \mathbb{N}^*$ et $\theta^1, \cdots, \theta^l \in \mathbb{R}^I_+$ non nuls tels que $C = \theta^1\theta^{1^T} + \cdots + \theta^l\theta^{l^T}$ et

$$\sum_{k=1}^{l} \|\theta^k\|_1^2 = \sum_{k=1}^{l} (\theta^k_1 + \cdots + \theta^k_p)^2 = \sum_{k=1}^{l} \sum_{1\le i,j\le p} \theta^k_i\theta^k_j = \sum_{1\le i,j\le p} \sum_{k=1}^{l} \theta^k_i\theta^k_j = \sum_{1\le i,j\le p} C_{ij} = 1\,.$$

Écrivant C sous la forme :

$$C = \|\theta_1\|_1^2 \hat\theta_1\hat\theta_1^T + \cdots + \|\theta_l\|_1^2 \hat\theta_l\hat\theta_l^T\,,$$

où $\hat\theta_i := \dfrac{\theta_i}{\|\theta_i\|_1}$, on déduit que $C \in \Gamma_I$, d'où la conclusion. ■

On obtient ainsi, par analogie avec le Théorème 5.4.1, le sous-différentiel de κ donné sous une forme implicite.

Théorème 5.5.1: *Supposons que la condition de régularité (5.2) ait lieu. Alors, le sous-différentiel de Clarke de la fonction κ en A est donné par :*

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1} \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} \theta_I\theta_I^T A_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} \right\}\,,$$

où θ_I, I et p sont tels que :

$$I \subset [1,m],\ |I| = p,\ d(0,\mathrm{co}(a_I)) = \|A_I^T\theta_I\|_2 = \kappa_A(>0),\ \theta_I \ge 0,\ \sum_{i\in I} \theta_i = 1\,,$$

Démonstration. Le résultat découle en procédant exactement comme dans la démonstration du Théorème 5.4.1. On montre que le sous-différentiel de κ en A est donné par :

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1} \mathrm{co}\left\{ \begin{pmatrix} CA_I \\ 0_{m-p} \end{pmatrix} :\ C \in M_I(A)\,, I \in \mathbb{J}(A) \right\}\,.$$

En développant cette dernière expression on aboutit à la conclusion. ■

Pour expliciter la formule de $\partial\kappa(A)$ dans le Théorème 5.5.1 nous allons chercher les vecteurs $\theta_I \in \mathbb{R}^I_+$ tels que $d(0,\mathrm{co}(a_I)) = \|A_I^T\theta_I\|_2$ pour tout $I \in \mathbb{J}(A)$. Ceci est équivalent à résoudre des programmes de la forme :

$$\min_{\{\theta\in\mathbb{R}^k_+:\ \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}} \theta^T H\theta\,,\ k \in \mathbb{N}^*\,,\ H \in \mathcal{S}^+_k\,. \tag{5.14}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathcal{S}_k^+$ fixés, on note $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ la matrice diagonale où $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$ sont les valeurs propres de H rangées dans l'ordre croissant en comptant les valeurs multiples. Alors, il existe une matrice de passage orthogonale $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(k)$ ($p_1, \cdots, p_k$ sont des vecteurs lignes dans $\mathbb{R}^k$) à une base orthonormale de vecteurs propres $\{v_1, \cdots, v_k\}$ telle que $H = P\Lambda P^T$.

Proposition 5.5.3: *Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $H \in \mathcal{S}_k^+$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\mu = \min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^k :\ \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}} \theta^T H \theta .$$

Alors, $\mu = \theta^T H \theta$ pour tout θ vérifiant :

$$\{\theta \in \mathbb{R}_+^k \ :\ \|\theta\|_1 = 1, H\theta - \mu e \geq 0, (H\theta - \mu e)_i \theta_i = 0 \text{ pour tout } i \in [1,k]\} \tag{5.15}$$

où $e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus, si θ_0 est tel que $\mu = \theta_0^T H \theta_0$ alors, $\mu = \theta^T H \theta$ pour tout θ vérifiant :

$$\{\theta \in \mathbb{R}_+^k \ :\ \|\theta\|_1 = 1, H\theta = H\theta_0\} . \tag{5.16}$$

Démonstration. Observons que le problème $\min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^k :\ \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}} \theta^T H \theta$ est un programme quadratique convexe (avec contraintes affines) fini :

$$\min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^k :\ \sum_{i=1}^k \theta_i = 1\}} \theta^T H \theta \geq 0 .$$

On déduit grâce au théorème de Frank-Wolfe [44] qu'il a des solution et donc μ est bien défini. Faisant le changement de variables $h = P^T \theta$, on trouve

$$\begin{aligned} \min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^k :\ \|\theta\|_1 = 1\}} \langle\langle \theta\theta^T, H \rangle\rangle &= \min_{\{\theta \in \mathbb{R}_+^k :\ \|\theta\|_1 = 1\}} \langle P^T\theta, \Lambda P^T \theta \rangle \\ &= \min_{\{h \in \mathbb{R}^k :\ Ph \geq 0,\ \sum_{i=1}^k p_i h = 1\}} \langle h, \Lambda h \rangle . \end{aligned}$$

On note $(\mathcal{Q})$ le problème défini par :

$$\min_{\{h \in \mathbb{R}^k :\ Ph \in \mathbb{R}_+^k,\ \sum_{i=1}^k p_i h = 1\}} \langle h, \Lambda h \rangle .$$

Alors, $(\mathcal{Q})$ est un programme quadratique convexe, dont les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$(KKT)\ :\ \begin{cases} 2\Lambda h + \sum_{i=1}^{k} \xi_i p_i^T + \gamma \sum_{i=1}^{k} p_i^T = 0, \quad \xi \leq 0, \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ \\ \xi_i p_i h = 0 \quad \text{pour tout } i \in [1,k] \\ \\ Ph \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} p_i h = 1 \end{cases} .$$

Multipliant (en faisant le produit scalaire) la première ligne de (KKT) par p_j , $j \in [1,k]$ et utilisant le fait que P est orthogonale, on obtient

$$2p_j \Lambda h + \xi_j + \gamma = 0\,.$$

Multipliant scalairement la deuxième ligne de (KKT) par h, on trouve

$$2h^T \Lambda h + \gamma = 0\,.$$

On déduit que :

$$\gamma = -2h^T \Lambda h\,, \quad \xi_j = 2(h^T - p_j)\Lambda h\,.$$

En reportant ces valeurs dans la première ligne de (KKT), on trouve

$$2\Lambda h + \sum_{i=1}^{k} \xi_i p_i^T + \gamma \sum_{i=1}^{k} p_i^T = 0\,.$$

Il en résulte donc que le système (KKT) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} p_i h = 1,\ Ph \geq 0 \\ \\ (p_i - h^T)\Lambda h p_i h = 0 \qquad \text{pour tout } i \in [1,k] \\ \\ (p_i - h^T)\Lambda h \geq 0 \qquad \text{pour tout } i \in [1,k] \end{cases} .$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^k$ tel que $\|\theta\|_1 = 1$ et $\mu = \theta^T H \theta$. Alors, $h = P^T \theta$ est une solution de $(\mathcal{Q})$. On a donc

$$p_i h = \theta_i,\ p_i \Lambda h = e_i^T P \Lambda h = e_i^T P \Lambda P^T P h = (H\theta)_i,\ h^T \Lambda h = \mu\,,$$

d'où

$$H\theta - \mu e \geq 0,\ (H\theta - \mu e)_i \theta_i = 0 \quad \text{pour tout } i \in [1,k]\,.$$

Réciproquement, si θ vérifie (5.15), alors

$$\sum_{i=1}^{k}(H\theta)_i\theta_i = \mu\,.$$

Donc, $\theta^T H\theta = \mu$.

La deuxième affirmation (5.16) résulte de la caractérisation des solutions d'un programme quadratique convexe donnée dans [67]. ∎

On obtient le théorème suivant qui donne la formule explicite du sous-différentiel de κ.

Théorème 5.5.2: *Supposons que la condition de régularité (5.2) ait lieu. Alors, le sous-différentiel de Clarke de la fonction κ en A est donné par :*

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix}\theta_I\theta_I^T A_I\\ 0_{m-p}\end{pmatrix}\right\},$$

où θ_I, I et p sont tels que $I \subset [1,m]$, $|I| = p$ et

$$\begin{cases}\theta_I \geq 0,\ \sum_{i\in I}\theta_i = 1\\ \\ A_I A_I^T\theta_I - \kappa_A e \geq 0\\ \\ (A_I A_I^T\theta - \kappa_A e)_i\theta_i = 0 \quad \textit{pour tout } i \in I\end{cases}. \tag{5.17}$$

Démonstration. Soit $I \subset [1,m]$. On a :

$$M_I(A) = \left\{\theta_I\theta_I^T, \theta_I \geq 0, \sum_{i\in I}\theta_i = 1, d(0,\mathrm{co}(a_I)) = \|A_I^T(\theta_I)\|_2\right\},$$

Or, $M_I(A)$ est décrit, d'après la Proposition 5.5.3, par :

$$\begin{aligned}M_I(A) = \{\theta_I\theta_I^T : \theta_I \geq 0\,,\ \|\theta_I\|_1 = 1\,,\ A_I A_I^T\theta_I - \mu_I e \geq 0,\\ (A_I A_I^T\theta - \mu_I e)_i\theta_i = 0 \text{ pour tout } i \in I\}\,,\end{aligned}$$

où $\mu_I = d(0,\mathrm{co}(a_I))$. En particulier, si $I \in \mathbb{J}(A)$ alors, $\mu_I = d(0,\mathrm{co}(a_I)) = \kappa_A > 0$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 5.5.1. ∎

Utilisant la carctérisation (5.16), on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.5.1: *Supposons que la condition de régularité (5.2) ait lieu. Si pour chaque $I \in \mathbb{J}(A)$, θ_I^0 est une solution de (5.17) alors, le sous-différentiel de Clarke de la fonction κ en A est donné par :*

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\begin{pmatrix}\theta_I\theta_I^T A_I\\ 0_{m-p}\end{pmatrix}\right\},$$

où θ_I, I et p sont tels que :

$$I \subset [1,m],\ |I| = p,\ A_I A_I^T \theta_I = A_I A_I^T \theta_I^0,\ \theta_I \geq 0\,,\ \sum_{i\in I} \theta_i = 1\,.$$

Remarque 5.5.1: (a) Si $0 \notin \mathrm{co}(a_{[1,m]})$, alors $\kappa_A = d(0,\mathrm{co}(a_{[1,m]}))$. Dans ce cas, l'hypothèse (5.2) est satisfaite et le sous-différentiel de A est donné, d'après le Théorème 5.5.2, par :

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\mathrm{co}\{\theta\theta^T A\}\,,$$

où θ est tel que :

$$\begin{cases} \theta \geq 0,\ \sum_{i\in[1,m]} \theta_i = 1 \\ AA^T\theta - \kappa_A e \geq 0 \\ (AA^T\theta - \kappa_A e)_i\theta_i = 0 \quad \text{pour tout } i \in [1,m] \end{cases} . \tag{5.18}$$

D'une façon équivalente, d'après le Corollaire 5.5.1, si θ_0 est une solution du système (5.18), alors

$$\partial\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\mathrm{co}\left\{\theta\theta^T A :\ \theta \geq 0,\ \sum_{i\in[1,m]} \theta_i = 1, AA^T\theta = AA^T\theta_0\right\}.$$

En particulier, si le système (5.18) admet une unique solution θ_0, alors κ est strictement différentiable et

$$\nabla\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\theta_0\theta_0^T A\,.$$

(b) Si les vecteurs $(a_{[1,m]})$ sont linéairement indépendants, alors on a nécessairement $0 \notin \mathrm{co}(a_{[1,m]})$. Dans ce cas, κ est de classe C^1 (voir section 5.3) et sont gradient en A est donné par :

$$\nabla\kappa(A) = \kappa_A^{-1}\theta\theta^T A\,,$$

où $\theta \in \mathbb{R}^m$ est l'unique vecteur vérifiant $\theta \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ et $d(0,\mathrm{co}(a_{[1,m]})) = \|A^T\theta\|$.

(c) Les formulations variationnelles établies pour les constantes de Hoffman permettent aussi d'étudier le comportement au second ordre et plus généralement la stabilité de toutes les valeurs propres multivoques comme dans le cas des valeurs propres usuelles traité dans [49, 50, 51].

QUANTITATIVE STABILITY IN CONVEX QUADRATIC PROGRAMMING

6. QUANTITATIVE STABILITY IN CONVEX QUADRATIC PROGRAMMING

Abstract

Given a quadratic convex mimization problem, we investigate the dependence of the value function and of the primal and dual solution sets with respect to all the data of the problem. This leads us to a slight extension of the results of [17, 18] along with a simplification and clarification based on the systematic use of convex analysis techniques. Moreover some quantitative estimates are given on the rate of change of the primal and dual solution set as well as the Lipschitzian behaviour of the optimal value function with respect to the data.

6.1 Introduction and notations

Given a matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ (the set of real matrices with m rows and n columns) whose rows are denoted by $a_1^T, \cdots, a_m^T$ so that $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$, and a vector $b \in \mathbb{R}^m$ such that the convex polyhedron

$$P_{A,b} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

is nonempty, we consider the convex quadratic minimization problem on $\mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{P}_\pi) \qquad \min_{Ax \leq b} \left(\frac{x^T H x}{2} - y^T x \right)$$

where $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (the set of real symmetric positive semidefinite matrices) and $y \in \mathbb{R}^n$. We denote by

$$\pi = (H,A,b,y) \in \Pi := \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

the natural parameter attached to our problem when dealing with its stability. We are interested in finding a necessary and sufficient condition ensuring that $\mathcal{S}_{\hat{\pi}} \neq \emptyset$, the solutions of $(\mathcal{P}_{\hat{\pi}})$, for all $\hat{\pi} = (\hat{H},\hat{A},\hat{b},\hat{y})$ close enough to π. In other words we are seeking for finding the interior of the domain of the multifunction $\mathcal{S}(\cdot) := \mathcal{S}_{(\cdot)}$. We also want to investigate the continuity of the value function $\pi \longmapsto \min_{Ax\leq b}\left(\frac{x^THx}{2} - y^Tx\right)$ with respect to $\pi = (H,A,b,y)$ and the behaviour of the primal and dual solution sets. In the positive definite case, one can find a thorough study of these questions in [37], see also [15] and references therein. In the semidefinite case the situation is more involved [14]. Some answers to these questions of stability have been provided in [17, 18]. In [17], rectified in [18], the authors characterize the interior of the domain of the multifunction $\mathcal{S}_{(H,\cdot)}$ with H fixed and establish some directional continuity properties of the value function at a point of the interior of the domain. In [18], it is proved that the value function is continuous at any $\pi = (H,A,b,y) \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}\mathcal{S})$ and that the multifunction $\mathcal{S}(\cdot)$ is upper semicontinuous at any point π interior to the domain of $\mathcal{S}(\cdot)$. In this paper, we slightly extend the quoted results in two directions. The matrix H is allowed to vary in the context of [17], and we also study the behaviour of the dual solution sets. Moreover, we provide a quantitative approach to stability by giving some rates of change for the primal and dual solution sets and for the optimal value function. We mainly rely on convex analysis and convex duality leading to an attempt of simplification and clarification of the results and of their proofs.

We shall freely use the usual definitions and notations of convex analysis which can be found e.g in [48, 77, 8, 85]. Let $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ be the set of symmetric positive semidefinite matrices, and let $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be the convex quadratic function defined by $Q(x) = \frac{x^THx}{2}$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. It is noteworthy that $\operatorname{dom}(Q^*) = R(H) := H(\mathbb{R}^n)$. Given $\pi \in \Pi$ let us introduce the convex function $q_\pi(\cdot)$, or briefly $q(\cdot)$ if there is no risk of confusion, by

$$q_\pi(x) = Q(x) + i_{P_{A,b}}(x) \tag{6.1}$$

where $i_{P_{A,b}}(x)$ denotes the indicator function of the set $P_{A,b}$ that is

$$i_{P_{A,b}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in P_{A,b} \\ +\infty & \text{if } x \notin P_{A,b} \end{cases}.$$

We further denote by σ_S the support function of a subset $S \subset \mathbb{R}^n$, that is $\sigma_S(y) = \sup_{x\in S} y^Tx$. Given $\pi = (H,A,b,y) \in \Pi$, we shall be dealing with the convex quadratic minimization problem:

$$(\mathcal{P}_\pi) \qquad \inf_{x\in P_{A,b}} (Q(x) - y^Tx) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} q(x) - y^Tx,$$

whose infimal value is equal to $-q^*(y)$. It is well-known, according to the Frank-Wolfe theorem [44], that $(\mathcal{P}_\pi)$ admits solutions if and only if $y \in \operatorname{dom}(q^*)$ that is $q^*(y) < +\infty$;

in that case, we denote by $\mathcal{S}_\pi$ the set of solutions of $(\mathcal{P}_\pi)$. Observe that for any $x \in P_{A,b}$, we have

$$\partial q(x) = Hx + \operatorname{pos}(a_{J_{A,b}(x)})$$

where $J_{A,b}(x) = \{j \in [1,m] : a_j^T x = b_j\}$ and $\operatorname{pos}(a_J) = A^T(\mathbb{R}_+^J) = \sum_{j\in J} \mathbb{R}_+ a_j$ for any $J \subset [1,m]$ with the convention $\operatorname{pos}\emptyset = \{0\}$. In other words, for all $x \in P_{A,b}$, one has

$$\partial q(x) = \Big\{Hx + A^T\mu : \ \mu \in \mathbb{R}_+^m,\ \mu^T(Ax - b) = 0\Big\}.$$

We shall denote by ∂q the graph of the subdifferential of q, that is $\partial q = \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : z \in \partial q(x)\}$. The following lemma will be of interest.

Lemma 6.1.1: *Let $\mathcal{J} = \{J_{A,b}(x) : x \in P_{A,b}\}$ and let us set, for all $J \in \mathcal{J}$,*

$$\Gamma_J = \{(x,z) \in \Omega_J \times \mathbb{R}^n : z \in Hx + A_J^T(\mathbb{R}_+^J)\},$$

where $\Omega_J = P_{A,b} \cap A_J^{-1}(b_J)$ with the convention $A_\emptyset = 0$, $b_\emptyset = 0$. Then

$$\partial q = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} \Gamma_J.$$

Proof. Let $(x,z) \in \partial q$, so that $x \in P_{A,b}$ and there exists $\mu \in \mathbb{R}_+^J$ with $z = Hx + A_J^T\mu$ where $J = J_{A,b}(x) \in \mathcal{J}$. It follows that $x \in \Omega_J$ from which we get $(x,z) \in \Gamma_J$. Conversely, given $J \in \mathcal{J}$, we have $\Gamma_J \subset \partial q$. Indeed let $x \in \Omega_J$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}_+^J$ be such that $z = Hx + A_J^T\mu$, then $J \subset J_{A,b}(x)$. Setting $\mu_j = 0$ for all $j \in J^c$, we get $z = Hx + A^T\mu$ and $\mu^T(Ax - b) = 0$. Thus $z \in \partial q(x)$, and then $\partial q = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} \Gamma_J$. ■

Remark 6.1.1: As Γ_J is a convex polyhedron for all $J \in \mathcal{J}$, it follows from [76] that the multifunction ∂q^{-1} is upper Lipschitzian at any $y \in \mathbb{R}^n$ which means that there exist $c \geq 0$ and $\eta > 0$ such that $\partial q^{-1}(z) \subset \partial q^{-1}(y) + c\|z - y\|B_{\mathbb{R}^n}$ for all $z \in y + \eta B_{\mathbb{R}^n}$. In particular, the range $R(\partial q) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \partial q(x)$ is closed.

The previous remark leads to an interesting property satisfied by the convex quadratic function q. Following [6, 7], see also [3, 72], we say that a closed convex function $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ has a good asymptotic behaviour whenever $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converges to $\inf_{\mathbb{R}^n} f$ for any sequence $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ such that $d(0,\partial f(x_n))$ converges to 0.

Proposition 6.1.1: *For any $y \in \mathbb{R}^n$, the function $f(x) = q(x) - y^T x$ has a good asymptotic behaviour.*

Proof. Let $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ be a sequence such that $d(0,\partial f(x_k))$ converges to 0. Thus there exists a sequence $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ such that $w_k \in \partial q(x_k)$ and $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to y. Relying on remark 6.1.1, there exists a constant $c \geq 0$ and a sequence $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ such that $z_k \in \partial^{-1}q(y)$ (that is $z_k \in \mathcal{S}_\pi$) and such that $\|x_k - z_k\| \leq c\|y - w_k\|$ eventually. One gets

$$f(x_k) = f(z_k) + \frac{1}{2}(x_k - z_k)^T H(x_k - z_k) + (x_k - z_k)^T(Hz_k - y)$$

As $Hz_k = H\bar{z}$ for a fixed $\bar{z} \in \mathcal{S}_\pi$ (see [67, Corollary 1]), it follows that $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$. ■

Given a solution $x \in \mathcal{S}_\pi$, one has $0 \in \partial f(x)$ where $f(x) = q(x) - y^T x$. The set of multipliers associated to the solution x is the set, denoted by $\mathcal{S}_\pi^*$, of those $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ such that

$$\begin{cases} y = Hx + A^T\mu \\ \\ \mu^T(Ax - b) = 0 \end{cases}. \tag{6.2}$$

It is noteworthy that if (6.2) is in force for some $x \in P_{A,b}$ and $\mu \in \mathbb{R}_+^m$, then x is a solution of $(\mathcal{P}_\pi)$, and μ is a multiplier associated with x.

6.2 Stability in convex quadratic programming

From now on, we shall posit that the polyhedron $P_{A,b}$ is nonempty. In the linear case, corresponding to $H = 0$, it is well-known from the duality theory in linear programming that $(\mathcal{P}_{0,A,b,y})$ has solutions if and only if $y \in A^T(\mathbb{R}_+^m)$. In fact this result extends to the quadratic case under the following slight variant of the Wolfe duality.

Theorem 6.2.1:

(a) *For all $y \in \mathbb{R}^n$, it holds*

$$q^*(y) = \min_{\mu\in\mathbb{R}_+^m}(\mu^T b + Q^*(y - A^T\mu)), \tag{6.3}$$

and

$$\operatorname{dom}(q^*) = A^T(\mathbb{R}_+^m) + R(H). \tag{6.4}$$

(b) *For all $y \in \operatorname{dom}(q^*)$ and for all $\pi \in \Pi$, we have*

$$\mathcal{S}_\pi^* = \{\mu \in \mathbb{R}_+^m : \mu^T b + Q^*(y - A^T\mu) = q^*(y)\}.$$

Proof. (a) Observing that the convex function Q is continuous, we can use the classical result about the conjugate of a sum of convex functions (see [48, 77]) yielding

$$q^*(y) = \min_{z \in \operatorname{dom}(\sigma_{P_{A,b}})} (\sigma_{P_{A,b}}(z) + Q^*(y - z)).$$

From the duality Theorem in linear programming (observe that $\mathcal{P}_{A,b} \neq \emptyset$), we obtain that

$$\sigma_{P_{A,b}}(z) = \min\{\mu^T b : \ \mu \in \mathbb{R}^m_+, \ A^T \mu = z\},$$

for all $z \in \operatorname{dom}(\sigma_{P_{A,b}}) = A^T(\mathbb{R}^m_+)$, thus

$$q^*(y) = \min_{z \in A^T(\mathbb{R}^m_+)} \min_{\begin{cases} \mu \in \mathbb{R}^m_+ \\ A^T\mu = z \end{cases}} (\mu^T b + Q^*(y - z)) = \min_{\mu \in \mathbb{R}^m_+} (\mu^T b + Q^*(y - A^T\mu)).$$

Let us prove now that $\operatorname{dom}(q^*) = A^T(\mathbb{R}^m_+) + R(H)$. Indeed, assuming that

$$y = A^T \mu_0 + H x_0$$

for some $\mu_0 \in \mathbb{R}^m_+$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$, then $\mu_0^T b + Q^*(y - A^T\mu_0) < +\infty$ yielding

$$q^*(y) = \inf_{\mu \in \mathbb{R}^m_+} (\mu^T b + Q^*(y - A^T\mu)) \leq \mu_0^T b + Q^*(y - A^T\mu_0) < +\infty.$$

Conversely, if $y \in \operatorname{dom}(q^*)$, with $P_{A,b} \neq \emptyset$, then the minimization problem $(\mathcal{P}_\pi)$ admits at least a solution $\bar{x} \in P_{A,b}$ for which

$$0 \in \partial Q(\bar{x}) - y + \operatorname{pos}(a_{J_{A,b}(\bar{x})}) \subset R(H) - y + A^T(\mathbb{R}^m_+),$$

yielding $y \in A^T(\mathbb{R}^m_+) + R(H)$.

(b) Let $\mu \in \mathcal{S}^*_\pi$ be a multiplier associated to a solution x of $(\mathcal{P}_\pi)$. We have $Ax \leq b$, $Hx = y - A^T\mu$ and $\mu^T(Ax - b) = 0$, leading to

$$Q^*(y - A^T\mu) = \frac{x^T H x}{2},$$

and

$$b^T\mu = \mu^T A x = x^T A^T \mu = x^T y - x^T H x,$$

thus

$$b^T\mu + Q^*(y - A^T\mu) = x^T y - Q(x) = q^*(y) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} (\lambda^T b + Q^*(y - A^T w)).$$

On the other hand, let $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ be such that

$$\mu^T b + Q^*(y - A^T\mu) = q^*(y).$$

Observe that $Q^*(y - A^T\lambda) < +\infty$ if and only if $y - A^T\lambda = Hx$ for some $x \in \mathbb{R}^n$ and that, in that case, one has $Q^*(y - A^T\lambda) = \dfrac{x^T Hx}{2}$. Thus, considering some $\hat{x} \in H^{-1}(y - A^T\mu)$, we obtain that $(\hat{x},\mu)$ is a minimizer for the problem

$$\min_{\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^m_+ \\ A^T\lambda + Hx = y \end{cases}} \lambda^T b + \frac{x^T Hx}{2},$$

which is the Wolfe dual. As the convex function $(x,\lambda) \longmapsto \lambda^T b + \dfrac{x^T Hx}{2}$ is continuous, we can find $\xi \in \mathbb{R}^m_-$ and $z \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H\hat{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Hz \\ Az \end{pmatrix},$$

and $\xi^T\mu = 0$. Thus we get

$$\begin{cases} H\hat{x} + Hz = 0 \\ \mu^T(Ax - b) = \xi^T\mu = 0 \\ b + Az + \xi = 0 \end{cases}.$$

Setting $x = -z$, it follows that

$$\begin{cases} A^T\mu + Hx = y \\ Ax - b = \xi \leq 0 \\ \xi^T\mu = 0 \end{cases},$$

from which we derive that x is a solution to $(\mathcal{P}_\pi)$ associated to the Lagrange multiplier μ. ■

Remark 6.2.1: (a) In the case $H = 0$, we have $Q^* = i_{\{0\}}$ hence, for $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$,

$$Q^*(y - A^T\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{if } A^T\lambda \neq y \\ \\ 0 & \text{if } A^T\lambda = y \end{cases},$$

thus the previous theorem reduces to the usual duality in linear programming.

(b) If x is a solution of $\mathcal{P}_\pi$ and if $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ is a multiplier associated to x, then

$$q^*(y) = \mu^T b + \frac{x^T Hx}{2}. \tag{6.5}$$

Indeed, one has $q^*(y) = \mu^T b + Q^*(y - A^T\mu) = \mu^T b + \dfrac{x^T Hx}{2}$ since $A^T\mu = y - Hx$.

(c) It is well-known that the problem $(\mathcal{P}_\pi)$ admits solutions if and only if $y \in \operatorname{dom} q^*$, according to the Frank-Wolfe theorem [44]. This can be easily proved by observing that the function $q - y^T(\cdot)$ is bounded from below whenever $y \in \operatorname{dom} q^*$. Thus, by the Ekeland variational principle, we get $y \in \overline{R(\partial q)}$, hence $(\mathcal{P}_\pi)$ has solutions since $R(\partial q)$ is closed (see Remark 6.1.1). It is interesting to observe that the set of $y \in \mathbb{R}^n$ such that $\mathcal{S}_\pi \neq \emptyset$ is a closed convex cone equal to $\operatorname{dom} q^* = R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+)$.

(d) The function $\mu \longmapsto h^*(\mu) = \mu^T b + Q^*(y - A^T\mu) + i_{\mathbb{R}^m_+}(\mu)$ whose minimizers are the multipliers is closely related to a perturbation of the problem $(\mathcal{P}_\pi)$. Indeed, introducing the function

$$h(z) = \inf_{x \in P_{A,b+z}} (Q(x) - y^T x),$$

one easily checks that, for all $\mu \in \mathbb{R}^m$,

$$h^*(\mu) = \mu^T b + Q^*(y - A^T\mu) + i_{\mathbb{R}^m_+}(\mu). \tag{6.6}$$

Frow now on, we intend to study the behaviour of the quadratic problem $(\mathcal{P}_\pi)$ with respect to perturbations of the data represented by the parameter

$$\pi = (H,A,b,y) \in \Pi = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Let us recall that we have denoted by $q_\pi = q_{(H,A,b,y)}$ the function

$$q_\pi(x) = Q(x) + i_{P_{A,b}}(x) = \frac{x^T Hx}{2} + i_{P_{A,b}}(x),$$

and by $\mathcal{S}_\pi := \operatorname{argmin}(q_\pi - y^T(\cdot))$ the solution set of the problem $(\mathcal{P}_\pi)$. We also denote by $\mathcal{S}^*_\pi$ the set of multipliers.

Given $x_0 \in \mathcal{S}_\pi$, it is shown in [67, Corollary 1] that

$$\mathcal{S}_\pi = \{x \in P_{A,b} : Hx = Hx_0, y^T x = y^T x_0\} = \{x \in P_{A,b} : Hx = Hx_0, y^T x \geq y^T x_0\}.$$

In the sequel, we shall need such a result for multipliers.

Lemma 6.2.1: *Let $\mu_0 \in \mathcal{S}^*_\pi$ associated to $x_0 \in \mathcal{S}_\pi$. Then*

$$\mathcal{S}^*_\pi = \{\mu \in \mathbb{R}^m_+ : A^T\mu = A^T\mu_0, b^T\mu = b^T\mu_0\} = \{\mu \in \mathbb{R}^m_+ : A^T\mu = A^T\mu_0, b^T\mu \leq b^T\mu_0\}.$$

Proof. Let $\mu \geq 0$ be such that $A^T\mu \leq A^T\mu_0$ and $b^T\mu = b^T\mu_0$. We have

$$y = Hx_0 + A^T\mu_0 = Hx_0 + A^T\mu,$$

and

$$\mu^T(Ax_0 - b) = x_0^T A^T\mu - \mu^T b \geq \mu_0^T(Ax_0 - b) = 0,$$

hence $\mu^T(Ax_0 - b) = 0$, thus $\mu \in \mathcal{S}_\pi^*$. Conversely, it follows from [67, Corollary 1] that

$$\mathcal{S}_\pi = \{x \in P_{A,b} \,:\, Hx = Hx_0, y^T x = y^T x_0\}.$$

Now let $\mu \in \mathcal{S}_\pi^*$ associated to a solution $x \in \mathcal{S}_\pi$. We obtain that $Hx = Hx_0$, thus $A^T\mu = y - Hx = y - Hx_0 = A^T\mu_0$. On the other hand, we have (see (6.5))

$$b^T\mu + \frac{x^T Hx}{2} = b^T\mu_0 + \frac{x_0^T Hx_0}{2},$$

from which we get $b^T\mu = b^T\mu_0$. ∎

Definition 6.2.1: *Let* $\pi = (H,A,b,y) \in \Pi$. *We say that* $(\mathcal{P}_\pi)$ *is stable if*

$$\pi \in int(dom(\mathcal{S}))$$

that is, there exists a neighborhood $\mathcal{N}$ *of* π *in* Π *such that* $\mathcal{S}_{\hat\pi} \neq \emptyset$ *for all* $\hat\pi = (\hat H,\hat A,\hat b,\hat y) \in \mathcal{N}$.

We shall need the following classical lemma.

Lemma 6.2.2: *Let* $\ell : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *be a linear mapping and let* $C \subset \mathbb{R}^p$ *be a closed convex subset such that* $int(\ell(C)) \ni y$. *Then, there exists* $r \geq 0$ *such that* $y \in int(\ell(C \cap rB_{\mathbb{R}^p}))$.

Proof. From our assumptions, we have

$$\mathbb{R}^q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n(\ell(C \cap nB_{\mathbb{R}^p}) - y).$$

As $n(\ell(C \cap nB_{\mathbb{R}^p}) - y)$ is closed, we derive from Baire's Theorem that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathrm{int}\, n(\ell(C \cap nB_{\mathbb{R}^p}) - y) \neq \emptyset$, from which it is easily deduced that $0 \in \mathrm{int}\,(\ell(C \cap nB_{\mathbb{R}^p}) - y)$ yielding the conclusion of the lemma. ∎

The following result extends the Robinson-Ashmanov Theorem (see [9, 75]) on stability in linear programming. It also extends the stability result of [17] in which H was fixed.

Theorem 6.2.2: *The problem* $(\mathcal{P}_\pi)$ *is stable at* $\pi = (H,A,b,y)$ *if and only if the two following properties hold*

$$(\mathrm{R}_1) \qquad \mathbb{R}^n = R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+) - \mathbb{R}_+ y,$$

and

$$(\mathrm{R}_2) \qquad \text{there exists } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ such that } Ax_0 < b.$$

Proof. Assume that $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable. Then $P_{A,b-te} \neq \emptyset$ for all $t > 0$ small enough where $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. Thus there exists $x_0 \in \mathbb{R}^n$ such that $Ax_0 < b$. On the other hand, as $\mathcal{S}_{(H,A,b,\hat{y})} \neq \emptyset$ for all $\hat{y}$ close to y, we derive that y is an interior point of $\operatorname{dom} q^*$, that is $y \in \operatorname{int}(R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+))$, hence

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_+(R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+) - y) = R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+) - \mathbb{R}_+ y,$$

thus (R_1) is satisfied.

Conversely, let us assume that (R_1) and (R_2) hold true. From (R_1), we get $y \in \operatorname{int}(R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+))$. Then, there exists from Lemma 6.2.2 positive real numbers η and r such that

$$y + \eta B_{\mathbb{R}^n} \subset H(rB_{\mathbb{R}^n}) + A^T(\mathbb{R}^m_+ \cap rB_{\mathbb{R}^m}).$$

We derive that, for all $(\hat{H},\hat{A}) \in \mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}$,

$$\begin{aligned} y + \eta B_{\mathbb{R}^n} &\subset H(rB_{\mathbb{R}^n}) + A^T(\mathbb{R}^m_+ \cap rB_{\mathbb{R}^m}) \\ &\subset \hat{H}(rB_{\mathbb{R}^n}) + \hat{A}^T(\mathbb{R}^m_+ \cap rB_{\mathbb{R}^m}) + r(\|\hat{H} - H\| + \|\hat{A} - A\|)B_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Thus we get

$$y + \frac{\eta B_{\mathbb{R}^n}}{2} \subset \hat{H}(rB_{\mathbb{R}^n}) + \hat{A}^T(\mathbb{R}^m_+ \cap rB_{\mathbb{R}^m}),$$

for all $(\hat{H},\hat{A}) \in \mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}$ such that $r\|\hat{H} - H\| \leq \eta/4$ and $r\|\hat{A} - A\| \leq \eta/4$, and then

$$\hat{y} \in \hat{H}(rB_{\mathbb{R}^n}) + \hat{A}^T(\mathbb{R}^m_+ \cap rB_{\mathbb{R}^m}), \tag{6.7}$$

for all $\|\hat{y} - y\| \leq \eta/2$, and for all $(\hat{H},\hat{A},\hat{y}) \in \mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ such that $r\|\hat{H} - H\| \leq \eta/4$ and $r\|\hat{A} - A\| \leq \eta/4$. As there exists x_0 such that $Ax_0 < b$, we can assume that η is small enough in order that $P_{\hat{A},\hat{b}} \neq \emptyset$ whenever $\|\hat{A} - A\| \leq \eta/4$ and $\|\hat{b} - b\| \leq \eta$. It follows that $\mathcal{S}_{\hat{\pi}} \neq \emptyset$ for all $\hat{\pi} = (\hat{H},\hat{A},\hat{b},\hat{y})$ close enough to $\pi = (H,A,b,y)$ thus $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable. ■

Remark 6.2.2: Observe that (R_1) is equivalent to

$$(R(H) + A^T(\mathbb{R}^m_+) - \mathbb{R}_+ y)^- = \{0\},$$

where K^- stands for the negative polar of the cone K, which in turn is equivalent to the fact that the system

$$\begin{cases} y^T z \geq 0 \\ \\ Az \leq 0 \\ \\ Hz = 0 \end{cases}$$

has $z = 0$ as unique solution. This amounts to say that $\mathcal{S}_\pi$ is bounded since $\mathcal{S}_\pi$ is the polyhedron defined by $\mathcal{S}_\pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b, Hx = Hx_0, y^T x \geq y^T x_0\}$ where x_0 is an element of $\mathcal{S}_\pi$. One can also observe that (R_1) is equivalent to the strict feasibility of the dual problem, that is there exist $\mu > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ such that $y = A^T\mu + Hx$.

On the other hand, (R_2) is equivalent to the fact that $\mathcal{S}^*_\pi$ is bounded. Indeed, thanks to Lemma 6.2.1, the polyhedron $\mathcal{S}^*_\pi$ is bounded if and only if the system

$$\begin{cases} \lambda^T b \leq 0 \\ \\ \lambda \geq 0 \\ \\ A^T\lambda = 0 \end{cases}$$

has $\lambda = 0$ as unique solution which is equivalent to $(\mathbb{R}_+ b + R(A) - \mathbb{R}^m_+)^- = \{0\}$, that is $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_+ b + R(A) - \mathbb{R}^m_+$ which is equivalent to $b \in \operatorname{int}(R(A) + \mathbb{R}^m_+)$ and then equivalent to (R_2) by a straightforward computation. Thus $\mathcal{S}^*_\pi$ is bounded if and only if (R_2) is in force.

Theorem 6.2.3: *Assume that the problem $(\mathcal{P}_\pi)$ where $\pi = (H,A,b,y)$ is stable. Then there exists a neighborhood $\mathcal{N}$ of π in Π and $c \geq 0$ such that*

$$\mathcal{S}_{\hat\pi} \cup \mathcal{S}^*_{\hat\pi} \subset cB_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$$

for all $\hat\pi = (\hat H,\hat A,\hat b,\hat y) \in \mathcal{N}$.

Proof. From Theorem 6.2.2, there exists a neighborhood $\mathcal{N}$ of π in $\mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ such that $\mathcal{S}_{\hat\pi} \neq \emptyset$ for all $\hat\pi = (\hat H,\hat A,\hat b,\hat y) \in \mathcal{N}$. As $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable, there exists $x_0 \in \mathbb{R}^n$ such that $Ax_0 < b$, thus there exists $\delta > 0$ such that $\hat A x_0 \leq \hat b - \delta e$ for all $(\hat A,\hat b)$ close enough to (A,b) where $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$. For $\hat\pi \in \mathcal{N}$, let us set,

$$\hat h(z) = \inf_{\hat A x \leq \hat b - z} (\hat Q(x) - \hat y^T x),$$

for all $z \in \mathbb{R}^n$. One has (see (6.6))

$$\hat{h}^*(\mu) = \mu^T \hat{b} + \hat{Q}^*(\hat{y} - \hat{A}^T \mu) + i_{\mathbb{R}^m_+}(\mu).$$

As $\hat{A}x_0 \leq \hat{b} - \delta e$, we then have

$$\hat{h}(z) \leq \hat{Q}(x_0) - \hat{y}^T x_0 \leq c$$

for all $z \in \delta B_{\mathbb{R}^m}$ and for all $\hat{\pi} \in \mathcal{N}$, leading to $\hat{h} \leq c + i_{\bar{B}(0,\delta)}$. Taking the conjugate on both sides,

$$\mu^T \hat{b} + \hat{Q}^*(\hat{y} - \hat{A}^T \mu) + i_{\mathbb{R}^m_+}(\mu) = \hat{h}^*(\mu) \geq \delta \|\mu\| - c \text{ for all } \mu \in \mathbb{R}^m. \tag{6.8}$$

From (6.7), there exists $r \geq 0$ such that for all $\pi \in \mathcal{N}$,

$$\hat{y} = \hat{A}^T \lambda + \hat{H} x$$

for some $\lambda \geq 0$ with $\|\lambda\| \leq r$, $x \in r B_{\mathbb{R}^n}$, thus

$$q^*_{\hat{\pi}}(\hat{y}) \leq \lambda^T \hat{b} + \hat{Q}^*(\hat{y} - \hat{A}^T \lambda) = \lambda^T \hat{b} + \hat{Q}^*(\hat{H}x) = \lambda^T \hat{b} + \hat{Q}(x),$$

and then,

$$q^*_{\hat{\pi}}(\hat{y}) \leq \|\hat{b}\| r + \frac{\|\hat{H}\| r^2}{2}.$$

Thus, for all $\hat{\mu} \in \mathcal{S}^*_{\hat{\pi}}$, we get

$$\delta \|\hat{\mu}\| - c \leq \hat{\mu}^T \hat{b} + \hat{Q}^*(\hat{y} - \hat{A}^T \hat{\mu}) = q^*_{\hat{\pi}}(\hat{y}) \leq \|\hat{b}\| r + \frac{\|\hat{H}\| r^2}{2},$$

yielding the uniform boundedness of $\mathcal{S}^*_{\hat{\pi}}$ for $\hat{\pi} = (\hat{H},\hat{A},\hat{b},\hat{y})$ close enough to $\pi = (H,A,b,y)$.

Assuming that $\mathcal{S}_{\hat{\pi}}$ is not contained in some ball for $\hat{\pi}$ close enough to π, there exists a sequence $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((H_k,A_k,b_k,y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converging to $\pi = (H,A,b,y)$ and an unbounded sequence $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that $x_k \in \mathcal{S}_{\pi_k}$. We can assume that $z_k = \|x_k\|^{-1} x_k$ converges to some z such that $\|z\| = 1$. Given any multiplier $\mu_k \in \mathbb{R}^m_+$ associated to x_k, we obtain

$$y_k = A_k^T \mu_k + H x_k,$$

thus

$$\|x_k\|^{-1} y_k = \|x_k\|^{-1} A_k^T \mu_k + H z_k.$$

As $\|\mu_k\| \leq c$, it follows that $Hz = 0$. Moreover, we have $Az \leq 0$ and

$$z_k^T y_k = \mu_k^T A z_k + z_k^T H x_k = \|x_k\|^{-1} \mu_k^T b_k + z_k^T H x_k \geq \|x_k\|^{-1} b_k^T \mu_k,$$

from which we get $y^T z \geq 0$ which contradicts assumption (R_1). ■

Theorem 6.2.4: *Assume that the problem* $(\mathcal{P}_\pi)$ *with* $\pi = (H,A,b,y)$ *is stable. Then*

$$\emptyset \neq \limsup_{\hat{\pi} \to \pi} \mathcal{S}_{\hat{\pi}} \subset \mathcal{S}_\pi,$$
$$\emptyset \neq \limsup_{\hat{\pi} \to \pi} \mathcal{S}^*_{\hat{\pi}} \subset \mathcal{S}^*_\pi,$$

where $\hat{\pi} \to \pi$ *means* $\hat{\pi}$ *goes to* π. *Moreover, we have convergence of the infimum values,*

$$\lim_{\hat{\pi} \to \pi} q^*_{\hat{\pi}}(\hat{y}) = q^*_\pi(y).$$

Proof. Let $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence converging to π in $\mathcal{S}^+_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ and let $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence converging to some $x \in \mathbb{R}^n$ such that $x_k \in \mathcal{S}_{\pi_k}$ (such a sequence exists due to Theorem 6.2.3). We can assume that a sequence $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ such that $\mu_k \in \mathcal{S}^*_{\pi_k}$ is a multiplier associated to x_k also converge to some $\mu \in \mathbb{R}^m$. We have $A_k x_k \leq b_k$, $y_k = H_k x_k + A_k^T \mu_k$ and $\mu_k^T(b_k - A_k x_k) = 0$. Passing to the limit as k goes to $+\infty$, it follows $Ax \leq b$, $y = Hx + A^T\mu$ and $\mu^T(b - Ax) = 0$ thus $x \in \mathcal{S}_\pi$. The same proof leads to $\emptyset \neq \limsup_{\hat{\pi}\to\pi} \mathcal{S}^*_{\hat{\pi}} \subset \mathcal{S}^*_\pi$.

Assume now that $q^*_{\hat{\pi}}(\hat{y})$ does not tend to $q^*_\pi(y)$ as $\hat{\pi}$ goes to π. Thus there exists a sequence $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Pi$, $\pi_k = (H_k,A_k,b_k,y_k)$ converging to π and $\delta > 0$ such that

$$|q^*_{\pi_k}(y_k) - q^*_\pi(y)| \geq \delta, \tag{6.9}$$

for all $k \in \mathbb{N}$. We can assume that $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converges to some x belonging to $\mathcal{S}_\pi$ thanks to the first part of the proof. Thus we get

$$\lim_{k\to+\infty} (Q_k(x_k) - y_k^T x_k) = Q(x) - y^T x,$$

where $Q_k(x) = \dfrac{x^T H_k x}{2}$, thus

$$\lim_{k\to+\infty} q^*_{\pi_k}(y_k) = q^*_\pi(y),$$

which contradicts (6.9). ■

6.3 Quantitative aspects

In this section, we put a quantitative insight into the stability results of the previous one. Given a closed convex subset $E \subset \mathbb{R}^n$, let us set $\varphi(x) = \dfrac{\gamma}{2} d^2(x,E)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, where $\gamma > 0$. We shall freely use the following evident fact that :

$$\varphi^*(y) = \frac{1}{2\gamma}\|y\|^2 + \sigma_E\ (y) \text{ for all } y \in \mathbb{R}^n. \tag{6.10}$$

We shall rely on the following theorem taken from [11], see also [28, 63, 72].

Theorem 6.3.1: *Let X be a Banach space, let $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a proper, convex, and lower semicontinuous function. Then,*

$$\inf_{x \in [f>0]} d_*(0,\partial f(x)) = \inf_{x \in [f>0]} \frac{f(x)}{d(x,[f \leq 0])}$$

(with the convention that the right hand side is zero if $[f \leq 0] = \emptyset$).

In Theorem 6.3.1, $d_*(\cdot,\cdot)$ denotes the distance function to subsets of X^* with respect to the dual norm $\|\cdot\|_*$ of the norm $\|\cdot\|$. This theorem tells us that a necessary and sufficient condition for the existence of a positive real number $\tau > 0$ such that

$$d(x,[f \leq 0]) \leq \frac{1}{\tau} f(x)^+ \text{ for all } x \in X,$$

is that

$$\inf_{x \in [f>0]} d_*(0,\partial f(x)) > 0.$$

It also proves that $\inf_{x \in [f>0]} d_*(0,\partial f(x))$ is then the optimal (i.e. the largest) positive real number τ such that the global error bound holds true.

Lemma 6.3.1: *Let $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ and let*

$$\theta_H = d(0,H^T(R(H) \cap S_{\mathbb{R}^n})),$$

where $S_{\mathbb{R}^n}$ is the unit sphere of $\mathbb{R}^n$. Then,

$$\theta_H = \lambda_{min}(H)$$

where $\lambda_{min}(H)$ is the smallest positive eigenvalue of H, and for all $y \in R(H)$,

$$\theta_H \, d(x,H^{-1}(y)) \leq \|Hx - y\| \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

Moreover θ_H is the largest positive real number τ such that

$$\tau d(x,H^{-1}(y)) \leq \|Hx - y\| \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. Observe that $d(0,H^T(S_{\mathbb{R}^n} \cap R(H))) > 0$. Let us set $\psi(x) = \|Hx - y\|$ where $y \in R(H)$ so that $[\psi \leq 0] = H^{-1}(y)$. For all $x \in \mathbb{R}^n$ with $\psi(x) > 0$, we get

$$\partial\psi(x) = H^T \frac{Hx - y}{\|Hx - y\|} \subset H^T(S_{\mathbb{R}^n} \cap R(H)),$$

then

$$d(0,\partial\psi(x)) \geq d(0,H^T(S_{\mathbb{R}^n} \cap R(H))) = \theta_H.$$

Now let $y = Hx \in S_{\mathbb{R}^n}$ be such that $d(0,H^T(S_{\mathbb{R}^n} \cap R(H))) = \|H^T y\|$. Setting $\hat{x} = x_0 + x$ where $x_0 \in H^{-1}(y)$, we get $\psi(\hat{x}) > 0$ and $\partial\psi(\hat{x}) = H^T y$, so that

$$d(0,\partial\psi(\hat{x})) = \|H^T y\| = \theta_H,$$

thus

$$\theta_H = \min_{\psi(x)>0} d(0,\partial\psi(x)),$$

and then the second conclusion of the lemma follows from Theorem 6.3.1. On the other hand, one has

$$\theta_H = \min_{y\in R(H),\, \|y\|=1} \|Hy\| \geq \min_{y\in R(H),\, \|y\|=1} y^T H y = \lambda_{\min}(H),$$

and, assuming that $\bar{y} \in R(H) \cap S_{\mathbb{R}^m}$ is such that $\bar{y}^T H \bar{y} = \lambda_{\min}(H)$, one has $\|H\bar{y}\| = \lambda_{\min}(H)$, thus $\theta_H = \lambda_{\min}(H)$. ∎

In the unconstrained case, we have the following simple result.

Proposition 6.3.1: *Let $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Then, for all $y \in R(H) = \operatorname{dom} Q^*$, one has*

$$\lambda_{min}(H)\, \frac{d^2(x,H^{-1}(y))}{2}) \leq \frac{x^T H x}{2} - y^T x - \mu \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n ,$$

where $\mu = \inf_{z\in\mathbb{R}^n} (Q(z) - y^T z) = -Q^*(y)$ and $\lambda_{min}(H)$ is the smallest positive eigenvalue of H.

Proof. Let $x_0 \in \mathbb{R}^n$ be such that $Hx_0 = y$ and let $z = Hx \in \operatorname{dom} Q^* = R(H)$. From Lemma 6.3.1, one has $\lambda_{\min}(H)\, d(x_0,H^{-1}(y+z)) \leq \|z\|$. Thus we can find $\xi \in H^{-1}(y+z)$ such that $\lambda_{\min}(H)\, \|x_0 - \xi\| \leq \|z\|$. We then have

$$\begin{aligned}
Q^*(y+z) &= \frac{\xi^T H \xi}{2} \\
&= \frac{x_0^T H x_0}{2} + z^T x_0 + \frac{(\xi - x_0)^T H(\xi - x_0)}{2} \\
&\leq Q^*(y) + z^T x_0 + (\lambda_{\min}(H))^{-1} \frac{\|z\|^2}{2} \\
&\leq Q^*(y) + \sigma_{H^{-1}(y)}(z) + (\lambda_{\min}(H))^{-1} \frac{\|z\|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Now if $z \notin R(H)$ then $\sigma_{H^{-1}(z)}(z) = +\infty$, so that

$$Q^*(y+z) \leq Q^*(y) + \sigma_{H^{-1}(y)}(z) + (\lambda_{\min}(H))^{-1} \frac{\|z\|^2}{2} \text{ for all } z \in \mathbb{R}^n.$$

Then the conclusion of the proposition follows from taking the conjugate in both sides and relying on (6.10). ∎

Given matrices $C \in \mathcal{M}_{m,n}$ and $G \in \mathcal{M}_{p,n}$, it is known since [52] that there exists a positive number σ such that for any nonempty polyhedron

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d, Gx = h\}$$

where $d \in \mathbb{R}^m$ and $h \in \mathbb{R}^p$, one has

$$\sigma\, d(x,\Omega) \leq (\max_{1\leq j\leq m} (c_j^T x - d_j))^+ + \|Gx - h\|.$$

We shall call such a constant σ a Hoffman's constant associated to the polyhedron Ω. In the constrained case (compared to Proposition 6.3.1), we have:

Theorem 6.3.2: *Asssume that $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, let $y \in int(dom\, q^*)$, let $r > 0$ be such that $\overline{B}(y,r) \subset \operatorname{dom} q^*$ and let*

$$v_\pi = \inf_{z\in\mathbb{R}^n} (q(z) - y^T z) = -q^*(y).$$

Then, there exists $\delta > 0$ such that

$$\varphi_{r,\delta}(d(x,\mathcal{S}_\pi)) \leq \frac{x^T Hx}{2} - y^T x - v_\pi \textit{ for all } x \in P_{A,b},$$

where $\varphi_{r,\delta}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\delta} & \textit{if } 0 \leq t \leq \delta r \\ rt - \delta\frac{r^2}{2} & \textit{if } t \geq r\delta \end{cases}$. *In particular*

$$\frac{d^2(x,\mathcal{S}_\pi)}{2\delta} \leq \frac{x^T Hx}{2} - y^T x - v_\pi \textit{ for all } x \in P_{A,b} \textit{ such that } d(x,\mathcal{S}_\pi) \leq r\delta.$$

Proof. Let $z \in B(0,r)$ and $(x_0,\mu_0) \in \mathcal{S}_\pi \times \mathcal{S}_\pi^*$, so that $x_0 \in P_{A,b}$, $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^m$, $A^T\mu_0 + Hx_0 = y$, $\mu_0^T(Ax_0 - b) = 0$ and $q^*(y) = \mu_0^T b + \dfrac{x_0^T Hx_0}{2}$. Let us consider in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ the nonempty polyhedron

$$\Omega = \{(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m : A^T\mu + Hx = y + z\}.$$

From Hoffman's Theorem, there exists a constant $c \geq 0$ such that

$$d((x_0,\mu_0),\Omega) \leq c\|A^T\mu_0 + Hx_0 - y - z\|,$$

It follows that there exists $(x,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ such that $A^T\mu + Hx = z + y$ and

$$\|x - x_0\| \leq \|(x_0,\mu_0) - (x,\mu)\| \leq c\|A^T\mu_0 + Hx_0 - y - z\| = c\|z\|.$$

Thus we obtain

$$\begin{aligned} q^*(y+z) &\leq \mu^T b + \frac{x^T H x}{2} \\ &\leq \mu_0^T b + \frac{x_0^T H x_0}{2} + \frac{(x-x_0)^T H (x-x_0)}{2} + x_0^T H (x-x_0) + (\mu-\mu_0)^T b. \end{aligned}$$

As $H(x-x_0) = z - A^T(\mu-\mu_0)$, it holds

$$q^*(y+z) \leq q^*(y) + z^T x_0 + (\mu-\mu_0)^T (b - Ax_0) + c\|H\| \frac{\|z\|^2}{2},$$

and, using the fact that $\mu^T(b-Ax_0) \leq 0$ and $\mu_0^T(b-Ax_0) = 0$,

$$q^*(y+z) \leq q^*(y) + \sigma_{\mathcal{S}_\pi}(z) + \delta \frac{\|z\|^2}{2} + i_{\overline{B}(0,r)}(z).$$

with $\delta = c\|H\|$. Setting $f = q - y^T(\cdot)$; taking the conjugate in both sides of the previous inequality and relying on (6.10) yields

$$f(x) \geq \inf_{\mathbb{R}^n} f + \varphi_{r,\delta}(d(x,\mathcal{S}_\pi)) \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n,$$

which is exactly the conclusion of the theorem. ■

Remark 6.3.1: (a) Assuming that $\operatorname{dom} q^* = \mathbb{R}^n$, that is $A^T(\mathbb{R}^m_+) + R(H) = \mathbb{R}^n$, we obtain from Theorem 6.3.2 that

$$\frac{d^2(x,\mathcal{S}_\pi)}{2\delta} \leq \frac{x^T H x}{2} - y^T x - v_\pi \text{ for all } x \in P_{A,b}.$$

Nevertheless, the previous global inequality does not hold in general whenever $\operatorname{dom} q^* \neq \mathbb{R}^n$. For example if $\mathcal{S}_\pi$ is bounded and $\operatorname{dom} q^* \neq \mathbb{R}^n$ then it is possible to find $z \in \mathbb{R}^n$ such that $q^*(y+z) = +\infty$ but $q^*(y) + \sigma_{\mathcal{S}_\pi}(z) + \delta\frac{\|z\|^2}{2}$ is always finite. For example, one can take $n=2$, $H(x_1,x_2) = (x_1,0)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = 0$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ for which $\mathcal{S}_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Assume that H is definite positive. Then, taking into account the fact that H is bijective, it is easily seen that the previous result takes the form

$$\frac{x^T H x}{2} - y^T x \geq v_\pi + \frac{\|x-\bar{x}\|^2}{2\|H^{-1}\|} = v_\pi + \lambda_{\min}(H)\frac{\|x-\bar{x}\|^2}{2} \text{ for all } x \in P_{A,b},$$

where $\lambda_{\min}(H)$ is the smallest eigenvalue of H and $\bar{x}$ is the unique element of $\mathcal{S}_\pi$.

We need the following lemma.

Lemma 6.3.2: *Assume that $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable. Then, we have*

$$v_\pi \leq v_{\hat{\pi}} + O(\|\hat{\pi} - \pi\|).$$

Proof. Let $\mathcal{N}$ be a neighrorhood of $\pi = (H,A,b,y)$ such that $\mathcal{S}_{\hat{\pi}}$ is bounded for all $\hat{\pi} \in \mathcal{N}$ (see Theorem 6.2.3) and let $\sigma > 0$ be a Hoffman's constant of the polyhedron $P_{A,b}$. Given $\hat{\pi} \in \mathcal{N}$ and $\hat{x} \in \mathcal{S}_{\hat{\pi}}$, we can find $x \in P_{A,b}$ such that

$$\sigma\|\hat{x} - x\| \le (\max_{1\le j\le m}(a_j^T\hat{x} - b_j))^+.$$

As $\mathcal{S}_\pi$ and $\mathcal{S}_{\hat{\pi}}$ are uniformly bounded on $\mathcal{N}$, we derive that

$$\sigma\|\hat{x} - x\| \le \max_{1\le j\le m}(\hat{a}_j^T\hat{x} - \hat{b}_j)^+ + O(\|\hat{\pi} - \pi\|) = O(\|\hat{\pi} - \pi\|)\,.$$

It then follows

$$v_\pi \le q_\pi(x) - y^T x \le q_{\hat{\pi}}(\hat{x}) - \hat{y}^T\hat{x} + O(\|\hat{\pi} - \pi\|) = v_{\hat{\pi}} + O(\|\hat{\pi} - \pi\|)\,.$$

■

We shall also use the following

Lemma 6.3.3: Let x_0 and μ_0 be respectively a solution of $(\mathcal{P}_\pi)$ and an associated multiplier. Then, we have

$$\frac{(x - x_0)^T H(x - x_0)}{2} \le \frac{x^T Hx}{2} - y^T x - v_\pi + \mu_0^T(Ax - b) \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n,$$

and

$$\frac{\|H(x - x_0)\|^2}{2\lambda_{\max}(H)} \le \frac{x^T Hx}{2} - y^T x - v_\pi + \mu_0^T(Ax - b) \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n$$

where $\lambda_{\max}(H)$ is the greatest positive eigenvalue of H.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}^n$, from the symmetry of H and the optimality conditions, we deduce that

$$x_0^T Hx = (y - A^T\mu_0)^T x = y^T x - \mu_0^T Ax.$$

Thus one gets, using (6.5),

$$\begin{aligned}(x - x_0)^T H(x - x_0) &= x^T Hx + x_0^T Hx_0 - 2x_0^T Hx\\ &= x^T Hx + x_0^T Hx_0 - 2y^T x + 2\mu_0^T(Ax - b) + 2\mu_0^T b\\ &= x^T Hx - 2y^T x - 2v_\pi + 2\mu_0^T(Ax - b),\end{aligned}$$

yielding the first conclusion of the lemma. The second one fellows since

$$\begin{aligned}\|H(x - x_0)\|^2 &= (x - x_0)^T H^2(x - x_0)\\ &\le \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(H)} \lambda(x - x_0)^T H(x - x_0) \le \lambda_{\max}(H)(x - x_0)^T H(x - x_0),\end{aligned}$$

where $\mathrm{Sp}(H)$ denotes the set of eigenvalues of H. ■

We are now in a position to give the announced quantitative stability result. Let us denote by $e(C,D) = \sup_{x\in C} d(x,D)$ the Hausdorff excess of $C \subset \mathbb{R}^n$ over $D \subset \mathbb{R}^n$.

Theorem 6.3.3: Assume that $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable. Then
(a) $e(\mathcal{S}_{\hat\pi},\mathcal{S}_\pi) = O(\|\hat\pi - \pi\|^{1/2})$,
(b) $e(\mathcal{S}^*_{\hat\pi},\mathcal{S}_\pi) = O(\|\hat\pi - \pi\|^{1/2})$,
(c) $|v_{\hat\pi} - v_\pi| = O(\|\hat\pi - \pi\|)$.

Proof. (a) From Theorem 6.2.3, we can find a neighborhood $\mathcal{N}$ and $c \geq 0$ such that

$$\mathcal{S}_{\hat\pi} \cup \mathcal{S}^*_{\hat\pi} \subset cB_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m},$$

for all $\hat\pi \in \mathcal{N}$. Let x be a solution of $\mathcal{P}_\pi$. From [67, Corollary 1], it follows that

$$\mathcal{S}_\pi = \{z \in \mathbb{R}^n : Hz = Hx,\ -y^T z \leq -y^T x, Az \leq b\}.$$

Thus we can find a Hoffman's constant $\sigma > 0$ such that

$$\sigma\, d(z,\mathcal{S}_\pi) \leq \|H(z-x)\| + (-y^T(z-x))^+ + \max_{i\in[1,m]}(a_i^T z - b_i)^+ \text{ for all } z \in \mathbb{R}^n.$$

Let $\hat\pi = (\hat H,\hat A,\hat y,\hat b) \in \mathcal{N}$, $\hat x \in \mathcal{S}_{\hat\pi}$ and $\hat\mu \in \mathcal{S}^*_{\hat\pi}$ an associated multiplier, then we have

$$\begin{aligned}\sigma\, d(\hat x,\mathcal{S}_\pi) &\leq \|H(\hat x - x)\| + (-y^T(\hat x - x))^+ + \max_{i\in[1,m]}(a_i^T\hat x - b_i)^+ \\ &\leq \|\hat H(\hat x - x)\| + (-\hat y^T(\hat x - x))^+ + O(\|\pi - \hat\pi\|) \qquad (6.11)\end{aligned}$$

Applying Lemma 6.3.3 to $\mathcal{P}_{\hat\pi}$, we deduce that

$$\begin{aligned}\frac{\|\hat H(\hat x - x)\|^2}{2\lambda_{\max}(\hat H)} &\leq \frac{x^T\hat H x}{2} - \hat y^T x - v_{\hat\pi} + \hat\mu^T(\hat A x - \hat b) \\ &\leq v_\pi - v_{\hat\pi} + \hat\mu^T((\hat A - A)x - (\hat b - b)) + O(\|\pi - \hat\pi\|)\,.\end{aligned}$$

As, from Lemma 6.3.2, we have $v_\pi \leq v_{\hat\pi} + O(\|\pi - \hat\pi\|)$, we get

$$\|\hat H(\hat x - x)\|^2 = O(\|\pi - \hat\pi\|). \qquad (6.12)$$

It follows, using the optimality conditions for problem $(\mathcal{P}_{\hat\pi})$,

$$-\hat y^T(\hat x - x) = (\hat H\hat x + \hat A^T\hat\mu)^T(x - \hat x) = \hat x^T\hat H(x - \hat x) + \hat\mu^T(\hat A x - \hat b)$$

and

$$\hat{\mu}^T(\hat{A}x - \hat{b}) = \hat{\mu}^T(Ax - b) + O(\|\pi - \hat{\pi}\|) \leq O(\|\pi - \hat{\pi}\|),$$

since $Ax - b \leq 0$ and $\hat{\mu} \geq 0$, yielding

$$-\hat{y}^T(\hat{x} - x) \leq \hat{x}^T\hat{H}(x - \hat{x}) + O(\|\pi - \hat{\pi}\|),$$

which, combined with (6.12), leads to $(-\hat{y}^T(\hat{x} - x_\pi))^+ = O(\|\pi - \hat{\pi}\|^{1/2})$, from which we derive that $d(\hat{x},\mathcal{P}_\pi) = O(\|\pi - \hat{\pi}\|^{1/2})$, hence $e(\mathcal{S}_{\hat{\pi}},\mathcal{S}_\pi) = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2})$.

(b) Let $\hat{\mu} \in \mathcal{S}^*_{\hat{\pi}}$ be a multiplier associated to some solution $\hat{x} \in \mathcal{S}_{\hat{\pi}}$ and let $x \in \mathcal{S}_\pi$ be such that $\|\hat{x} - x\| = d(\hat{x},\mathcal{S}_\pi) = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2})$, and let $\mu_0 \in \mathcal{S}^*_\pi$ be an associate multiplier. Relying on Lemma 6.2.1, we derive that

$$\mathcal{S}^*_\pi = \{\mu \geq 0 : A^T\mu = A^T\mu_0, b^T\mu = b^T\mu_0\}.$$

Consequently, there exists $\eta > 0$ such that

$$\eta d(\mu,\mathcal{S}^*_\pi) \leq \|A^T(\mu - \mu_0)\| + |b^T(\mu - \mu_0)| \text{ for all } \mu \in \mathbb{R}^m_+ .$$

Thus we can find $\mu \in \mathcal{S}^*_\pi$ such that

$$\eta\|\hat{\mu} - \mu\| \leq \|A^T(\hat{\mu} - \mu_0)\| + |b^T(\hat{\mu} - \mu_0)| = \|A^T(\hat{\mu} - \mu)\| + |b^T(\hat{\mu} - \mu)| . \tag{6.13}$$

Using the fact that $Hx - y + A^T\mu = 0$ and $\hat{H}\hat{x} - \hat{y} + \hat{A}^T\hat{\mu} = 0$, one obtains

$$\begin{aligned}
A^T(\hat{\mu} - \mu) &= (A^T - \hat{A}^T)\hat{\mu} + \hat{A}^T\hat{\mu} - A^T\mu \\
&= (A^T - \hat{A}^T)\hat{\mu} + \hat{y} - y + Hx - \hat{H}\hat{x} \\
&= (A^T - \hat{A}^T)\hat{\mu} + \hat{y} - y + H(x - \hat{x}) + (H - \hat{H})\hat{x}.
\end{aligned}$$

Since $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable and $\|x - \hat{x}\| = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2})$, we deduce that

$$\|A^T(\hat{\mu} - \mu)\| = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2}) . \tag{6.14}$$

Now, using the fact that $\mu^T(Ax - b) = 0$ and $\hat{\mu}^T(\hat{A}\hat{x} - \hat{b}) = 0$, one obtains

$$\begin{aligned}
b^T(\hat{\mu} - \mu) &= \hat{b}^T\hat{\mu} - b^T\mu + (b - \hat{b})^T\hat{\mu} \\
&= \hat{\mu}^T\hat{A}\hat{x} - \mu^TAx + (b - \hat{b})^T\hat{\mu} \\
&= (\hat{\mu} - \mu^T)Ax + \hat{\mu}^T(\hat{A}\hat{x} - Ax) + (b - \hat{b})^T\hat{\mu} \\
&= x^TA^T(\hat{\mu} - \mu) + \hat{\mu}^T(\hat{A} - A)\hat{x} + \hat{\mu}^TA(\hat{x} - x) + (b - \hat{b})^T\hat{\mu}
\end{aligned}$$

thus by (6.14) and the fact that $\|\hat{x} - x\| = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2})$ we deduce that

$$|b^T(\hat{\mu} - \mu)| = O(\|\hat{\pi} - \pi\|^{1/2}). \tag{6.15}$$

Thus the conclusion (b) follows from (6.14) and (6.15).

(c) In order to prove the last assertion observe that

$$\begin{aligned} v_{\hat{\pi}} - v_{\pi} &= \frac{(\hat{x} + x)^T H(\hat{x} - x)}{2} - y^T(\hat{x} - x) - \frac{\hat{x}^T(H - \hat{H})\hat{x}}{2} - (\hat{y} - y)^T\hat{x} \\ &= \frac{(\hat{x} - x)^T(\hat{H}\hat{x} + Hx)}{2} - \hat{y}^T(\hat{x} - x) + O(\|\hat{\pi} - \pi\|). \end{aligned}$$

As $\hat{H}\hat{x} + Hx = \hat{y} + y - \hat{A}^T\hat{\mu} - A^T\mu$, $\hat{\mu}^T(\hat{A}\hat{x} - \hat{b}) = 0$ and $\hat{\mu}^T(Ax - b\rangle) \leq 0$, we obtain

$$\begin{aligned} (\hat{x} - x)^T(\hat{H}\hat{x} + Hx) &= (\hat{y} + y)^T(\hat{x} - x) + (x - \hat{x})^T(\hat{A}^T\hat{\mu} + A^T\mu) \\ &= 2\hat{y}^T(\hat{x} - x) + (x - \hat{x})^T(\hat{A}^T\hat{\mu} + A^T\mu) + O(\|\hat{\pi} - \pi\|). \end{aligned}$$

Now, from (6.14), we get

$$\begin{aligned} (x - \hat{x})^T(\hat{A}^T\hat{\mu} + A^T\mu) &= (x - \hat{x})^T A^T(\mu - \hat{\mu}) + (x - \hat{x})^T(\hat{A}^T + A^T)\hat{\mu} \\ &\leq 2\hat{\mu}^T(Ax - b) + O(\|\hat{\pi} - \pi\|) \end{aligned}$$

yielding

$$(\hat{x} - x)^T(\hat{H}\hat{x} + Hx) \leq 2\hat{y}^T(\hat{x} - x) + O(\|\hat{\pi} - \pi\|),$$

since $\hat{\mu}^T(Ax - b) \leq 0$. Thus one gets

$$\frac{(\hat{x} - x)^T(\hat{H}\hat{x} + Hx)}{2} - \hat{y}^T(\hat{x} - x) \leq O(\|\hat{\pi} - \pi\|)$$

and then

$$v_{\hat{\pi}} \leq v_{\pi} + O(\|\hat{\pi} - \pi\|)\,,$$

from which the conclusion (c) follows since $v_{\pi} \leq v_{\hat{\pi}} + O(\|\hat{\pi} - \pi\|)$, according to Lemma 6.3.2.

■

Remark 6.3.2: It is probably uneasy, except in the definite positive case treated in [37], to obtain lower semicontinuity stability results in convex quadratic problems with perturbations of the quadratic part. Indeed, assuming that $\mathcal{S}_{\pi}$ does not reduce to a singleton; then the unique solution x_{ε} of the problem associated to $H_{\varepsilon} = H + \varepsilon I_n$ converges, when ε goes to 0, to the least norm solution of the unperturbed problem.

When strenghtening the regularity assumptions (R_1) and (R_2) of Theorem 6.2.2, we shall prove that the value function is, in that case, Lipschitzian near π. To this end, we need some material from [11, 65]. Given a nonempty polyhedron $P_{C,d}$, we set

$$\mathcal{I}_{C,d} := \{J \subset [1,m] : P_{C,d} \cap C_J^{-1}(d_J) \neq \emptyset\} \cup \{J \subset [1,m] :\ P_{C,0} \cap C_J^{-1}(0) \neq \{0\}\},$$

then

$$\tau_{\hat{C}} := \min_{\{J \in \mathcal{I}_{C,d}:\ 0 \notin \mathrm{co}\,(\hat{c}_J)\}} d_*(0,\mathrm{co}(\hat{c}_J)),$$

is a Hoffman constant for all nonempty polyhedron $P_{\hat{C},\hat{d}}$ whenever $(\hat{C},\hat{d})$ is close enough to (C,d). Moreover, under the regularity assumption

$$0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_J)) \text{ for all } J \in \mathcal{I}_{C,d}, \tag{6.16}$$

the function $\hat{C} \mapsto \tau_{\hat{C}}$ is Lipschitz near C and then is bounded away from 0 in a neighborhood of C. Observe that $0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_J))$ if and only if either there exists $z \in \mathbb{R}^n$ such that $C_J z < 0$ or $C_J z \leq 0$ implies $z = 0$.

Lemma 6.3.4: *Assume that there exists $x_0 \in \mathbb{R}^n$ such that $Cx_0 < d$. Then the regularity assumption (6.16) is equivalent to $0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_{[1,m]}))$.*

Proof. Assume that $0 \in \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_{[1,m]}))$, then there exists $\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ and $z \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ such that $C^T\lambda = 0$ and $Cz \leq 0$. Let $J = \{i \in [1,m] : \lambda_i > 0\}$, we have $0 = z^T C^T \lambda = \lambda_J^T C_J z$, thus $C_J z = 0$. It follows that $J \in \mathcal{I}_{C,d}$ and $0 \in \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_J))$ since $C^T\lambda_J{=}0$ and $C_J z = 0$ with $z \neq 0$, from which (6.16) does not hold. Conversely, assume that $0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_{[1,m]}))$ and let $J \in \mathcal{I}_{C,d}$. If there exists $z \in \mathbb{R}^n$ such that $Cz < 0$ then $C_J z < 0$ and we are done. If $Cz \leq 0$ implies $z = 0$, then there exists $z \in P_{C,d} \cap C_J^{-1}(d_J)$, thus $C_J(x_0 - z) < 0$ from which $0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(c_J))$. ∎

As a consequence, we get

Proposition 6.3.2: *Assume that $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable and that $0 \notin \mathrm{bdry}(\mathrm{co}(a_{[1,m]}))$. Then the value function $v_{(\cdot)}$ is Lipschitzian near π.*

Proof. As $(\mathcal{P}_\pi)$ is stable, there exists, from Theorem 6.2.2, a neighborhood $\mathcal{U}$ of π such that, for all $\hat{\pi} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{S}_{\hat{\pi}}$ is uniformly bounded. From Lemma 6.3.4, we obtain that (6.16) is satisfied, thus we can find $\sigma > 0$ a Hoffman constant for any polyhedron $P_{\hat{A},\hat{b}}$ where $\hat{\pi} = (\hat{H},\hat{A},\hat{b},\hat{y}) \in \mathcal{U}$. Then the conclusion of the proposition follows along the lines of the proof of Lemma 6.3.2. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[2] H. Attouch, "Variational Convergence for Functions and Operators", Applicable Mathematics Series, Pitman, 1984.

[3] D. Aussel, C. C. Chou, *Asymptotical well behavior for constrained minimization problems*, Bull. Austral. Math. Soc. **66** (2002), 499–516.

[4] J.-P. Aubin, *Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems*, Math. Oper. Res. **9** (1984), 87–111.

[5] J.-P. Aubin, H. Frankowska, "Set-Valued Analysis", Birkhäuser, Boston, 1990.

[6] A. Auslender, R. Cominetti, J.-P. Crouzeix, *Convex functions with unbounded level sets*, SIAM J. Optim. **3** (1993), 669–687.

[7] A. Auslender, J.-P. Crouzeix, *Well behaved asymptotical convex functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **6** (1989), 101–121.

[8] A. Auslender, M. Teboulle, "Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities", Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003

[9] S. A. Ashmanov, *Stability conditions for linear programming problems*, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. **21** (1981), 40–49.

[10] D. Azé, C. C. Chou, *On a Newton type iterative method for solving inclusions*, Math. Oper. Res. **20** (1995), 790–800.

[11] D. Azé, J.-N. Corvellec, *On the sensitivity analysis of Hoffman constants for systems of linear inequalities*, SIAM J. Optim. **12** (2002), 913–927.

[12] D. Azé, J.-N. Corvellec, *Characterization of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces*, pré-publication, Université Paul Sabatier, 2003.

[13] D. Azé, J.-N. Corvellec, R. E. Lucchetti, *Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis*, Nonlinear Anal. **49** (2002), 643–670.

[14] D. Azé, A. Hantoute, *Quantitative stability in convex quadratic programming revisited*, article soumis, 2003.

[15] B. Bank, J. Guddat, D. Klatte, B. Kummer, K. Tammer, "Nonlinear Parametric Optimization", Birkhäuser, 1983.

[16] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, "Lectures on Modern Convex Optimization, Analysis, Algorithms, and Engineering Applications", MPS-SIAM Series on Optimization, 2000.

[17] M. J. Best, M. Chakravarti, *Stability of linearly constrained convex programming*, J. Optim. Theory Appl. **64** (1990), 43–53.

[18] M. J. Best, B. Ding, *On the continuity of the minimum in parametric quadratic programs*, J. Optim. Theory Appl. **86** (1995), 240–250.

[19] N. A. Bobylev, *On deformation of functionals with a unique critical point*, Math. Zametki **34** (1983), 387–398.

[20] I. M. Bomze, A. De Klerk, *Solving standard quadratic optimization problems via linear, semidefinite and copositive programming*, J. Global Optim. **24** (2002), 163–185.

[21] J. M. Borwein, D. M. Zhuang, *Verifiable necessary and sufficient conditions for openness and regularity of set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. **134** (1988), 441–459.

[22] I. Campa, M. Degiovanni, *Subdifferential calculus and nonsmooth critical point theory*, SIAM J. Optim. **10** (2000), 1020–1048.

[23] A. Canino, M. Degiovanni, *Nonsmooth critical point theory and quasilinear elliptic equations*, Proc. NATO ASI & Séminaire de Mathématiques Supérieures, "Topological Methods in Differential Equations and Inclusions" (A. Granas, M. Frigon Eds.), Montréal 1994, Kluwer, Dordrecht, 1995, pp. 1–50.

[24] K. C. Chang, "Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications" Vol. **6**, Birkhäuser, Boston, 1993.

[25] Z. Cheng-Kui, *On Ekeland's variational principle and a minmax theorem*, J. Math. Anal. Appl. **205** (1997), 239–250.

[26] G. Cerami, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Acad. Sc. Lett. Istit. Lombardo **112** (1978), 332–336.

[27] F. H. Clarke, "Optimization and Nonsmooth Analysis", Second ed. Classics Appl. Math. Vol. **5**, SIAM, Philadelphia, 1990.

[28] O. Cornejo, A. Jourani and C. Zălinescu, *Conditioning and upper-Lipschitz inverse subdifferentials in nonsmooth optimization problems*, J. Optim. Theory Appl. **95** (1997), 127–148.

[29] J.-N. Corvellec, *Morse theory for continuous functionals*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 1050–1072.

[30] J.-N. Corvellec, *A note on coercivity of lower semicontinuous functions and nonsmooth critical point theory*, Serdica Math. J. **22** (1996), 57–68.

[31] J.-N. Corvellec, *Quantitative deformation theorems and critical point theory*, Pacific J. Math. **187** (1999), 263-279.

[32] J.-N. Corvellec, *On the second deformation lemma*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **17** (2001), 55–66.

[33] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni, *Nontrivial solutions of quasilinear equations via nonsmooth Morse theory*, J. Differential Equations **136** (1997), 268–293.

[34] J.-N. Corvellec, M. Degiovanni, M. Marzocchi, *Deformation properties for continuous functionals and critical point theory*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 151–171.

[35] J.-N. Corvellec, A. Hantoute, *Homotopical stability of isolated critical points of continuous functionals*, Set-Valued Anal. **10** (2002), 143–164.

[36] R. W. Cottle, J.-S. Pang, R. E. Stone, "The Linear Complementarity Problem", Academic Press, San Diego, 1992.

[37] J. W. Daniel, *Stability of the solution of definite quadratic programs*, Math. Program. **5** (1973), 41–53.

[38] E. De Giorgi, E. Marino, M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **68** (1980), 180–187.

[39] M. Degiovanni, M. Marzocchi, *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Ann. Mat. Pura Appl. **167** (1994), 73–100.

[40] A. L. Dontchev, *The Graves Theorem revisited*, J. Convex Anal. **3** (1996), 45–53.

[41] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 443–474.

[42] I. Ekeland, “Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics”, Springer-Verlag, 1990.

[43] H. Federer, “Geometric Measure Theory”, Springer-Verlag, 1969.

[44] M. Frank, P. Wolfe, *An algorithm for quadratic programming*, Naval Research Logistics Quarterly **3** (1956), 95–110.

[45] L. M. Graves, *Some mapping theorems*, Duke Math. J. **17** (1950), 111–114.

[46] D. Gromoll, W. Meyer, *On differentiable functions with isolated critical points*, Topology **8** (1969), 361–369.

[47] A. Hantoute, *On the first order sensitivity of the Hoffman constant of systems with affine inequalities*, pré-publication, Université Paul Sabatier, 2003.

[48] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, “Convex Analysis and Minimization Algorithms I and II”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. **305** & **306**, Springer-Verlag, 1993.

[49] J.-B. Hiriart-Urruty, A. S. Lewis, *The Clarke and Michel-Penot subdifferentials of the eigenvalues of a symmetric matrix*, Comput. Optim. Appl. **13** (1999), 13–23.

[50] J.-B. Hiriart-Urruty, M. Torki, *Analyse de la sensibilité du second ordre de toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), 1071–1074.

[51] J.-B. Hiriart-Urruty, D. Ye, *Sensitivity analysis of all eigenvalues of a symmetric matrix*, Numer. Math. **70** (1995), 45–72.

[52] A. J. Hoffman, *On approximate solutions of systems of linear inequalities*, J. Res. Nat. Bur. Stand. **49** (1952), 263–265.

[53] A. Ioffe, *Regular points of Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 61–69.

[54] A. Ioffe, *Nonsmooth analysis: Differential calculus of nondifferentiable mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **266** (1981), 1–56.

[55] A. Ioffe, *On the local surjection property*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 565–592.

[56] A. Ioffe, *Variational methods in local and global nonsmooth analysis*, Proc. NATO ASI & Séminaire de Mathématiques Supérieures, “Topological Methods in Differential Equations and Inclusions” (F. H. Clarke, R. J. Stern Eds.), Montréal 1998, Kluwer, Dordrecht, 1999, pp. 447–502.

[57] A. Ioffe, *Metric regularity and subdifferential calculus*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 501–558.

[58] A. Ioffe, *Towards metric theory of metric regularity*, Proc. Fifth Int. Conf. on Approximation and Optimization in the Carabbean, "Approximation, Optimization and Mathematical Economics" (M. Lassonde Ed.), Guadeloupe 1999, Physica-Verlag, Heidelberg, 2001, pp. 165–176.

[59] A. Ioffe, E. Schwartzman, *Metric critical point theory 1. Morse regularity and homotopic stability of a minimum*, J. Math. Pures Appl. **75** (1996), 125–153.

[60] A. Ioffe, E. Schwartzman, *An extension of the Rabinowitz bifurcation theorem to Lipschitz potential operators in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2725–2732.

[61] A. Jourani, L. Thibault, *Metric regularity for strongly compactly lipschitzian mappings*, Nonlinear Anal. **24** (1995), 229–240.

[62] G. Katriel, *Mountain pass theorem and global homeomorphism theorems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **11** (1994), 189–209.

[63] B. Lemaire, *Well-posedness, conditioning and regularization of minimization, inclusion and fixed-point problems*, Pliska Stud. Math. Bulgar. **12** (1998), 71–84.

[64] W. Li, *The sharp Lipschitz constant for feasible and optimal solutions of a perturbed linear program*, Linear Algebra Appl. **187** (1993), 15–40.

[65] Z.-Q. Luo, P. Tseng, *Perturbation analysis of a condition number for convex inequalities systems and global error bounds for analytic systems*, Math. Program. **83** (1998), 265–282.

[66] L. A. Lusternik, *On the conditional extrema of functionals*, Math. Sbornik **41** (1943), 390–401.

[67] O. L. Mangasarian, *A simple characterization of solution sets of convex programs*, Operations Research Letters **7** (1988), 21–26.

[68] B. S. Mordukhovich, Y. Shao, *Stability of set-valued mappings in infinite dimensions: Point criteria and applications*, SIAM J. Control Optim. **35** (1997), 295–314.

[69] J.-P. Penot, *Open mapping theorems and linearization stability*, Numer. Funct. Anal. Optim. **8** (1985), 21–35.

[70] J.-P. Penot, *About linearization, conization, calmness, opennes and regularity*, Nonlinear Anal. ed. by Lakshmikantam, Chap. 56, 439–450, Marcel Dekker, New York.

[71] J.-P. PENOT, *Metric regularity, openness and lipschitz multifunctions*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 629–643.

[72] J.-P. PENOT, *Well-behavior, well-posedness and nonsmooth analysis*, Pliska Stud. Math. Bulgar. **12** (1998), 141–190.

[73] P. H. RABINOWITZ, *A bifurcation theorem for potential operators*, J. Funct. Anal. **25** (1977), 412–424.

[74] P. H. RABINOWITZ, "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations", CBMS Reg. Conf. Series Math. Vol. **65**, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1986.

[75] S. M. ROBINSON, *A characterization of stability in linear programming*, Operations Research **25** (1977), 435-447.

[76] S. M. ROBINSON, *Some continuity properties of polyhedral multifunctions*, Math. Program. St. **14** (1981), 206–214.

[77] R. T. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis", Princeton University Press, 1967.

[78] R. T. ROCKAFELLAR, *Lipschitzian properties of multifunctions*, Nonlinear Anal. **9** (1985), 867–885.

[79] W. RUDIN, "Functional Analysis", Second ed. McGraw-Hill, New York, 1991.

[80] E. H. SPANIER, "Algebraic Topology", McGraw-Hill, New York, 1966.

[81] A. SCHRIJVER, "Theory of Linear and Integer Programming", Wiley, New York, 1986.

[82] A. SEEGER, *Existence de valeurs propres pour les systèmes multivoques : résultats anciens et nouveaux*, Ann. Sci. Math. Québec **25** (2001), 47–70.

[83] G. W. STEWART, J.-G. SUN, "Matrix Perturbation Theory", Academic Press, 1990.

[84] C. URSESCU, *Tangency and openness of multifunctions in Banach spaces*, An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi **34** (1988), 221–226.

[85] C. ZĂLINESCU, "Convex Analysis in general vector spaces", World Scientific Publ. Co. River Edge, NJ, 2002.

Contribution à la sensibilité et à la stabilité en optimisation et en théorie métrique des points critiques

Résumé :
Dans cette thèse nous proposons quelques contributions à l'analyse variationnelle dans les espaces métriques et à l'optimisation : régularité métrique, théorie métrique des points critiques, sensibilité de constantes de Hoffman, stabilité en programmation quadratique.
Dans le cas polyédral nous établissons des formules explicites de constantes de Hoffman des polyèdres avec égalités explicites. Ensuite, en mettant en évidence le caractère lipschitzien de ces constantes, nous calculons le sous-différentiel de Clarke des fonctions associées. Nous faisons également une revue de la régularité métrique des multi-applications, et nous traitons la stabilité d'un problème quadratique convexe. La considération du concept de pente faible, et donc des techniques de déformation appropriées, nous permet d'établir des résultats de stabilité homotopique des points critiques isolés des fonctions continues.

Contribution to stability and sensitivity in optimization and in metric critical point theory

Abstract:
In this thesis, we propose some contributions to variational analysis in metric spaces and to optimization: metric regularity, metric critical point theory, sensitivity of Hoffman constants, stability in quadratic programming.
In the polyhedral case, we establish explicit formulae for Hoffman constants of polyhedrons with explicit equalities. As these constants, under some regularity conditions, have a Lipschitzian behaviour, we calculate then the Clarke subdifferential of the associated functions. We also make a review of the metric regularity of multifunctions, and we treat some questions of stability in convex quadratic programming. The consideration of the notion of weak slope, and thus of appropriate deformation tools, allows us to establish results on the homotopical stability of isolated critical points of continuous functions on metric spaces.

Key words:
Sensitivity analysis, variational principles, weak and strong slopes, subdifferentials, global error bounds, metric regularity, Hoffman constants, quadratic programming, metric critical point theory, deformation tools, homotopical stability, bifurcation.

Abderrahim Hantoute

Toulouse, le 29 septembre 2003