Estimations globales du noyau de la chaleur

Plan de l'exposé

1. Rappels : structure des espaces symétriques de type non compact et analyse sphérique

2. Noyau de la chaleur sur les espaces symétriques riemanniens non compacts

3. Noyaux de la chaleur sur les groupes de Lie semi-simples

Introduction

$\mathbb{X} =$ variété riemannienne
$\Delta =$ opérateur de Laplace–Beltrami

Problème de la chaleur :
$u : \mathbb{X} \times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$
équation de la chaleur : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
+ condition initiale : $\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = f(x)$, avec $f \in C^0(\mathbb{X})$

Solution : $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{X}} \mathrm{d}y \, h_t(x,y) \, f(y)$ $\qquad$ $h_t(x,y) =$ noyau de la chaleur

Dans $\mathbb{R}^n$: $h_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ $\quad$ $(x,\, y \in \mathbb{R}^n,\, t > 0)$

Propriétés du noyau de la chaleur : régularité, positivité, symétrie, équation de la chaleur, ...

1. Rappels :

Structure des espaces symétriques de type non compact et analyse sphérique

Structure des espaces symétriques de type non compact :

réalisé comme $\mathbb{X} = G/K$, avec
$G =$ groupe de Lie réel, semi-simple (réductif ...), non compact, connexe, ...
$K =$ sous-groupe compact maximal

$\theta =$ involution de Cartan de G/de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$
$\mathfrak{a} =$ sous-espace abélien maximal $\subset \mathfrak{p} \quad ([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\})$
$B =$ forme de Killing sur $\mathfrak{g}$
$\langle X, Y \rangle = -B\big(X, \theta(Y)\big)$ produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ semi-simple ; $\langle X, X \rangle = |X|^2$
$\rightarrow \quad \mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}^*$

Système de racines (restreintes) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$:

$$\Sigma = \Big\{ \lambda \in \mathfrak{a}^* \smallsetminus \{0\} : \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\} \Big\}$$

où $\mathfrak{g}_\lambda = \Big\{ X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a},\ [H, X] = \langle \lambda, H \rangle\, X \Big\}$

- Σ est fini $\quad \big(\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda \big)$
- $-\Sigma = \Sigma$
- pour tout $\alpha \in \Sigma, \quad \mathbb{R}\alpha \cap \Sigma \subset \big\{ \pm \frac{1}{2}\alpha,\ \pm\alpha,\ \pm 2\alpha \big\}$

$\mathfrak{a}^+ =$ chambre de Weyl positive

$\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}$

$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \quad$ avec $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$

$\Sigma_0^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ : \frac{1}{2}\alpha \notin \Sigma\} =$ racines positives indivisibles

$\Pi = \Sigma^+ \setminus (\Sigma^+ + \Sigma^+) =$ racines simples $\subset \Sigma_0^+ \subset \Sigma^+ \subset \Sigma$

$W =$ groupe de Weyl, engendré par les réflexions σ_α $(\alpha \in \Pi)$:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\,\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2}\,\alpha \qquad (\beta \in \mathfrak{a}^*)$$

- **Décomposition d'Iwasawa :** $G = K(\exp \mathfrak{a})N$, $x = K[x](\exp H[x])N[x]$

avec $N =$ sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$

- **Décomposition polaire :** $G = K\,\overline{\exp \mathfrak{a}^+}\,K$

Conséquence :

Comme $h_t(gxK, gyK) = h_t(xK, yK) \quad (g,\, x,\, y \in G)$

$\Longrightarrow \; h_t(xK, yK) = h_t(o, x^{-1}yK)$ est déterminé par la restriction à $\exp \overline{\mathfrak{a}^+}$ de la fonction K-biinvariante $x \in G \mapsto h_t(x) = h_t(o, xK)$.

$\Longrightarrow \; u(xK, t) = f *_G h_t(x) = \displaystyle\int_G \mathrm{d}y\, h_t(y^{-1}x)\, f(yK)$

Analyse sphérique :

$(\pi_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{a}^*}$ = série principale unitaire irréductible sphérique :

$$\{\pi_\lambda(x)f\}(kM) = e^{-(i\lambda+\varrho)(H[x^{-1}k])}\, f(K[x^{-1}k]M) \qquad (x\in G,\ f\in L^2(K/M))$$

M = centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K
vecteurs K-fixes (pour π_λ) $= \mathbb{C}\,\mathbf{1} \subset L^2(K/M)$

φ_λ = fonction sphérique associée :

$$\varphi_\lambda(x) = \big(\pi_\lambda(x)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\big)_{L^2(K/M)} = \int_K \mathrm{d}k\, e^{-(i\lambda+\varrho)(H[x^{-1}k])}$$

$\mathcal{H}$ = transformation de Fourier sphérique : $\quad \mathcal{H}f(\lambda) = \displaystyle\int_G \mathrm{d}x\, f(x)\,\varphi_\lambda(x)$

$$L^2(K\backslash G/K) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathfrak{a}^*, |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}\,\mathrm{d}\lambda)^W$$
$$\mathcal{S}(K\backslash G/K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{a}^*)^W$$

2. Noyau de la chaleur sur $\mathbb{X}$

Problème de la chaleur après transformation sphérique :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}(\mathcal{H}u)}{\mathrm{d}t}(\lambda,t) = -(|\lambda|^2 + |\varrho|^2)\,\mathcal{H}u(\lambda,t) \\ \mathcal{H}u(\lambda,t) \to \mathcal{H}f(\lambda) \quad (t \to 0^+) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{H}u(\lambda,t) = \mathcal{H}f(\lambda)\, e^{-t(|\lambda|^2+|\varrho|^2)} \quad \text{avec} \quad u = f * h_t$$

$$h_t(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}^*} \mathrm{d}\lambda\, |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}\, e^{-t(|\lambda|^2+|\varrho|^2)}\, \varphi_\lambda(x) \qquad (x \in G,\ t > 0)$$

Expressions explicites de $h_t(x)$:

- G complexe (Gangolli, 1966)
- espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n(\mathbb{R})$
- $G = \mathrm{SU}(p,q)$
- $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{O})$ (Sawyer, 1990–)

2.1. Énoncé du théorème

Théorème (Anker–Ostellari) : *Le noyau de la chaleur h_t vérifie l'estimation globale*

$$h_t(\exp H) \asymp t^{-\frac{n}{2}} \left\{ \prod_{\alpha\in\Sigma_0^+} (1+\langle\alpha,H\rangle)(1+t+\langle\alpha,H\rangle)^{\frac{m_\alpha+m_{2\alpha}}{2}-1} \right\} \times e^{-t|\varrho|^2-\langle\varrho,H\rangle-\frac{|H|^2}{4t}} \qquad (H\in\overline{\mathfrak{a}^+},\ t>0).$$

- $G=\mathrm{SU}(p,q)$ + conjecture générale (Anker, 1988)
- majoration pour $G=\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ et minoration pour $G=\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$

(Sawyer, 1990–)

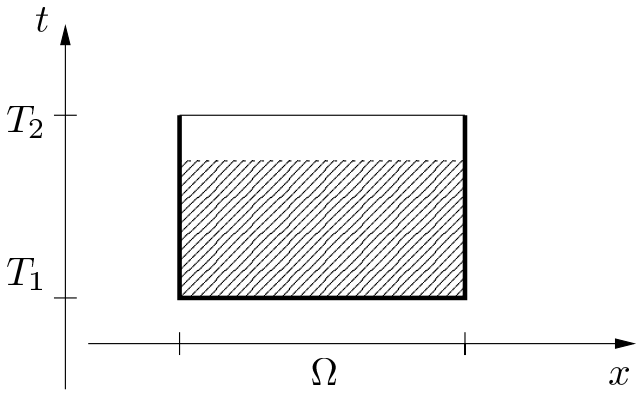
- estimation générale lorsque $|H|=O(1+t)$ ou $\min_{\alpha\in\Pi}\langle\alpha,H\rangle$ assez grand

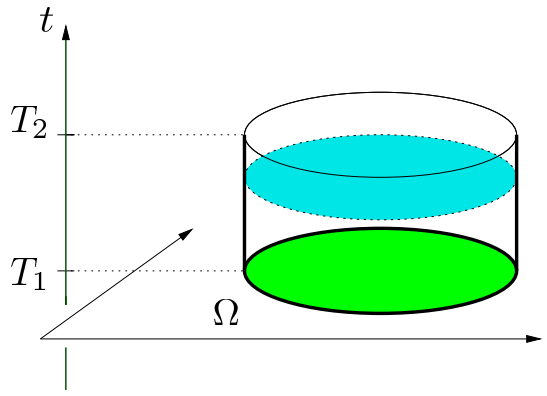
+ asymptotiques et dérivées (Anker–Ji, 1999)

2.2. Principe (faible) du minimum parabolique

- $\Omega =$ ouvert connexe et relativement compact de $\mathbb{X}$
- $u : \overline{\Omega} \times [T_1, T_2] \to \mathbb{R}$ continue telle que
  $x \mapsto u(x,t)$ soit de classe C^2 sur Ω, pour tout $t \in [T_1, T_2]$
  $t \mapsto u(x,t)$ soit de classe C^1 sur $]T_1, T_2]$, pour tout $x \in \Omega$
- $\mathrm{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta =$ opérateur de la chaleur

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L}u \geqslant 0 \text{ sur } \Omega \times]T_1, T_2] \\ u \geqslant 0 \text{ sur } (\Omega \times \{T_1\}) \cup (\partial\Omega \times [T_1, T_2]) \end{array}\right\} \Longrightarrow\ u \geqslant 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \times [T_1, T_2]$$





Utilisation pour la démonstration de la majoration $h_t(x) \lesssim h(x,t)$:
On applique le principe du minimum à

$$u(x,t) = C\,h(x,t) - h_t(x),$$

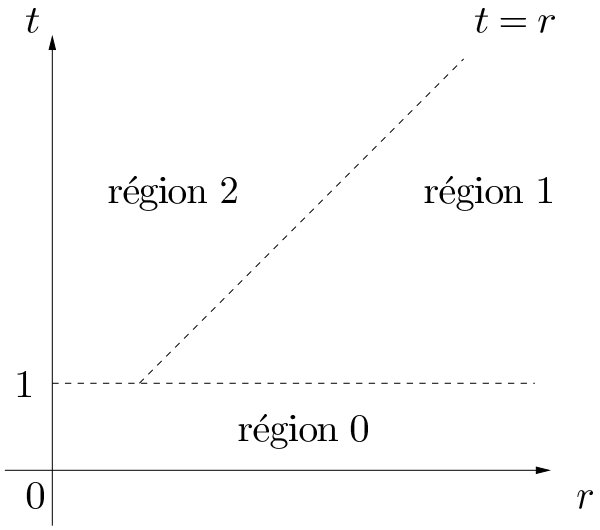
quitte à remplacer $h(x,t)$ et la constante C par des fonctions $\widetilde{h}(x,t)$ et $\widetilde{C}(x,t)$ de mêmes ordres, pour assurer la positivité de $\mathrm{L}(\widetilde{C}\,\widetilde{h})$.

2.3. Esquisse de la démonstration dans le cas des espaces hyperboliques réels

$\mathbb{X} = \mathbf{H}^n(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,1)_o/\mathrm{SO}(n)$

But : Prouver que

$$h_t(r) \asymp t^{-\frac{n}{2}}\,(1+r)\,(1+t+r)^{\frac{n-3}{2}}\,e^{-t(\frac{n-1}{2})^2 - r\frac{n-1}{2} - \frac{r^2}{4t}} \qquad (r \geqslant 0,\ t > 0).$$



Région 0 (pour $0 < t \leqslant 1$) :

$$\text{membre de droite} \asymp t^{-\frac{n}{2}}\,(1+r)^{\frac{n-1}{2}}\,e^{-r\frac{n-1}{2}-\frac{r^2}{4t}} \asymp \mathcal{J}(r)^{-\frac{1}{2}}\,h_t^{\mathrm{eucl}}(r) = h_0(r,t)$$

où $\mathcal{J}(r) = (\operatorname{sh} r/r)^{n-1} =$ jacobien de $\operatorname{Exp} : \mathfrak{p} \to \mathbb{X}$.

Pour la majoration $h_t^{\mathrm{hyp}}(r) \lesssim h_0(r,t)$:

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{hyp}} = \frac{\partial}{\partial t} - \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth r\,\frac{\partial}{\partial r}\Big)$$

$$\frac{\mathrm{L}_{\mathrm{hyp}} h_0}{h_0}(r,t) = \Big(\frac{n-1}{2}\Big)^2 + \frac{n-1}{2}\,\frac{n-3}{2}\Big(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} - \frac{1}{r^2}\Big) = O(1)$$

$h_t^{[R]}(r) =$ noyau hyperbolique dans la boule $\Omega_R = B(o,R)$, avec condition au bord $h_t^{[R]}(R) = 0$

Principe du minimum appliqué à $u(r,t) = e^{ct}\,h_0(r,t) - h_t^{[R]}(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}_{\mathrm{hyp}} u}{e^{ct}\,h_0} = c + \dfrac{\mathrm{L}_{\mathrm{hyp}} h_0}{h_0} \geqslant 0 \qquad \text{pour } c > 0 \text{ assez grand} \\ u(r,0) = \delta_0(r) - \delta_0(r) \equiv 0 \\ u(R,t) = e^{ct}\,h_0(R,t) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ h_t^{[R]}(r) \leqslant e^{ct}\,h_0(r,t) \quad (0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 < t \leqslant 1)$$

Or, $h_t^{[R]}(r) \nearrow h_t(r)$ pour $R \nearrow +\infty$,
donc $h_t(r) \leqslant e^{c}\,h_0(r,t) \quad (r \geqslant 0,\ 0 < t \leqslant 1)$.

Pour la minoration :

$$h_t^{\mathrm{hyp}}(r) \gtrsim h_0(r,t) \iff h_t^{\mathrm{eucl}}(r) \lesssim \mathcal{J}(r)^{\frac{1}{2}}\,h_t^{\mathrm{hyp}}(r)$$

Région 1 (pour $r \geqslant t \geqslant 1$) :

$$\text{membre de droite} \asymp t^{-\frac{n}{2}}\, \mathcal{J}(r)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-t(\frac{n-1}{2})^2 - \frac{r^2}{4t}} = h_1(r,t)$$

$$\frac{\mathrm{L}h_1}{h_1}(r,t) = \frac{n-1}{2}\,\frac{n-3}{2}\Big(\frac{1}{\mathrm{sh}^2\, r} - \frac{1}{r^2}\Big) \lesssim \frac{1}{r^2} \lesssim \frac{1}{t^2}$$

Région 2 (pour $t \geqslant \max\{r, 1\}$) :

$$\text{membre de droite} \asymp t^{-\frac{3}{2}}\, \varphi_0(r)\, e^{-t(\frac{n-1}{2})^2 - \frac{r^2}{4t}} = h_2(r,t)$$

puisque $\varphi_0(r) \asymp (1+r)\, e^{-r\frac{n-1}{2}}$.

$\dfrac{\mathrm{L}h_2}{h_2}(r,t) \lesssim \dfrac{1}{t(1+r)} \Longrightarrow$ correction : $h_2^{\pm}(r,t) = e^{\mp c\frac{\sqrt{r^2+1}}{t}}\, h_2(r,t)$

$\dfrac{\mathrm{L}h_2^{\pm}}{h_2^{\pm}}(r,t) = \pm$ expression positive $+ O_c\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$

Région 1+2 :

$$h_3^{\pm}(r,t) = \Big\{1 - \chi\Big(\frac{r}{t}\Big)\Big\}\, h_1(r,t) + \chi\Big(\frac{r}{t}\Big)\, h_2^{\pm}(r,t)$$

où $\begin{cases} \chi \equiv 1 & \text{sur }]-\infty, 1] \\ \chi \equiv 0 & \text{sur } [2, +\infty[\end{cases}$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{L}h_3^{\pm}}{h_3^{\pm}}(r,t) = \pm \text{ expression positive} + O_c\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

Principe du minimum appliqué à $\begin{cases} u^+(r,t) = C\, e^{-\frac{c'}{t}}\, h_3^+(r,t) - h_t^{[R]}(r) \\ u^-(r,t) = h_t(r) - C\, e^{\frac{c'}{t}}\, h_3^-(r,t) \end{cases}$

sur $\overline{\Omega_R} \times [1, T]$

$R \nearrow +\infty$ et $T \nearrow +\infty \implies h_3^-(r,t) \lesssim h_t(r) \lesssim h_3^+(r,t)$

3. Noyaux de la chaleur sur les groupes de Lie semi-simples

$G =$ groupe de Lie réel, semi-simple, connexe, sans facteur compact, …

$\mathfrak{g} \longleftrightarrow$ champs de vecteurs sur G invariants à gauche :

$$(Xf)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x \exp tX) \qquad (X \in \mathfrak{g},\ f \in C^\infty(G))$$

$\Delta = \sum\limits_j X_j^2 =$ sous-laplacien

+ condition de Hörmander : X_j, $[X_{j_1}, X_{j_2}]$, $[[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}]$, … engendrent $\mathfrak{g}$

$\Longrightarrow$ noyau de la chaleur $h_t(x) = h_t(x, e) \quad (x \in G,\ t > 0)$

solution du problème $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} h_t(x) = (\Delta h_t)(x) \\ h_t(x)\,\mathrm{d}x \to \delta_e \quad (t \to 0^+) \end{cases}$

Propriétés : régularité, symétrie, positivité, …

Théorème (Alexopoulos–Lohoué) : *Pour tout $\kappa > 0$, il existe $\mu, c > 0$ tels que*

$$h_t(x) \lesssim t^{-\frac{\ell}{2} - |\Sigma_0^+|}\, e^{-t\mu}\, \varphi_0(x)\, e^{-\frac{\|x\|^2}{ct}} \qquad (x \in G,\ t \geqslant 1)$$

$$h_t(x) \gtrsim_\kappa t^{-\frac{\ell}{2} - |\Sigma_0^+|}\, e^{-t\mu}\, \varphi_0(x) \qquad (x \in G,\ t \geqslant 1,\ \|x\| \leqslant \kappa\sqrt{t}).$$

$d =$ distance de Carnot–Carathéodory sur G

$\|x\| = d(e, x)$

$\Gamma(x,y) =$ chemins absolument continus $\gamma : [0,1] \to G$, vérifiant
$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ et pour lesquels il existe des $a_j \in L^2([0,1])$ tels que

$$(*) \qquad \dot\gamma(t) = \sum_j a_j(t)\, X_j\big(\gamma(t)\big) \qquad \text{pp.}$$

$$\text{longueur du chemin} = |\gamma| = \inf_{(*)} \int_0^1 \mathrm{d}t \Big(\sum_j a_j(t)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} |\gamma| < +\infty$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) =$ algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$

$$\Omega = \underbrace{\sum_j X_j^2}_{\Omega_{\mathfrak{p}}} - \underbrace{\sum_l Y_l^2}_{\Omega_{\mathfrak{k}}} \quad \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \text{centre de } \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

où (X_j) est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$
(Y_l) est une base orthonormale de $\mathfrak{k}$.

$\Delta = \Omega_{\mathfrak{p}} + \sum_j Z_j^2, \quad Z_j \in \mathfrak{k} \quad \longrightarrow$ sous-laplacien de Hörmander sur G

Lemme : *Pour un tel sous-laplacien, il existe $c > 0$ tel que l'on ait*

$$|x| \leqslant \|x\| \leqslant |x| + c \qquad (x \in G),$$

où l'on a posé $|x| = |H|$ pour tout $x = k_1(\exp H)k_2$ décomposé suivant $G = K\,\overline{\exp \mathfrak{a}^+}\,K$

Principe de Harnack : *Soit $T_1 < T_2$ deux réels d'un intervalle $]\alpha,\beta[\subset \mathbb{R}$ (avec $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$), $\Omega \subset G$ un ouvert relativement compact et $\mathcal{K}$ un compact de G. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute solution u strictement positive de l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta u(x,t)$ sur $\Omega \times]\alpha,\beta[$, on ait l'inégalité*

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} u(x,T_1) \leqslant C \inf_{x\in\mathcal{K}} u(x,T_2).$$

Corollaire : $h^\natural_{t-1}(x) \lesssim h_t(x) \lesssim h^\natural_{t+1}(x) \quad (x \in G,\, t \geqslant 2)$,
où $h^\natural_s(x) = \displaystyle\int_K \mathrm{d}k_1 \int_K \mathrm{d}k_2\, h_s(k_1 x k_2)$

Inversion de Fourier :

$$h^\natural_t(x) = \text{const.} \int_{\mathfrak{a}^*} \mathrm{d}\lambda\, |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}\, \mathcal{H}h^\natural_t(\lambda)\, \varphi_{\pm\lambda}(x)$$

avec $\mathcal{H}h^\natural_t(\lambda) = \big(\pi_\lambda(h^\natural_t)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\big)_{L^2(K/M)} = \big(\pi_\lambda(h_t)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\big) = e^{-t(|\lambda|^2+|\varrho|^2)}$

Formellement :

$$h_t = e^{t\Delta}\delta_e \quad\Longrightarrow\quad \pi_\lambda(h_t)\mathbf{1} = e^{t\pi_\lambda(\Delta)}\mathbf{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\, \pi_\lambda(\Delta)^j \mathbf{1}$$

avec $\pi_\lambda(\Delta)^j\mathbf{1} = \pi_\lambda(\Delta)^{j-1}\pi_\lambda(\Omega_\mathfrak{p})\mathbf{1} = \cdots = \pi_\lambda(\Omega)^j\mathbf{1} = (-1)^j\big(|\lambda|^2 + |\varrho|^2\big)^j\mathbf{1}$

Conclusion : $h^\natural_t(x) = h^{\mathbb{X}}_t(x)$

Théorème (Ostellari) : $h^{\mathbb{X}}_{t-1}(x) \lesssim h^G_t(x) \lesssim h^{\mathbb{X}}_{t+1}(x) \quad (x \in G,\, t \geqslant 2)$

Corollaire 1 :

$$t^{-\frac{\ell}{2}-|\Sigma_0^+|}\,\varphi_0(x)\,\omega(x,t)\,e^{-t|\varrho|^2-\frac{\|x\|^2}{4(t-1)}} \lesssim h_t(x)$$
$$\lesssim t^{-\frac{\ell}{2}-|\Sigma_0^+|}\,\varphi_0(x)\,\omega(x,t)\,e^{-t|\varrho|^2-\frac{\|x\|^2}{4(t+1)}} \qquad (x \in G,\ t \geqslant 2),$$

où

$$\omega(x,t) = \prod_{\alpha\in\Sigma_0^+} \Big(1 + \frac{\langle \alpha, H\rangle}{t}\Big)$$

pour tout $x = k_1(\exp H)k_2 \in G = K\,\overline{\exp \mathfrak{a}^+}\,K$.
En particulier, si $t \geqslant 2$ *et* $\|x\| \lesssim t$, *alors*

$$h_t(x) \asymp t^{-\frac{\ell}{2}-|\Sigma_0^+|}\,\varphi_0(x)\,e^{-t|\varrho|^2-\frac{\|x\|^2}{4t}}.$$

Lemme (Bougerol & Lohoué) : $h_t(e) \asymp t^{-\frac{\ell}{2}-|\Sigma_0^+|}\, e^{-t\lambda_0} \quad (t \to +\infty)$
avec $\lambda_0 = \inf\left\{(-\Delta f \mid f)_{L^2(G)} : f \in C_c^\infty(G),\ \|f\|_{L^2(G)} = 1\right\}$

Corollaire 2 : $\lambda_0 = |\varrho|^2$

$g_\zeta =$ fonction de Green $=$ noyau intégral de $(-\Delta - |\varrho|^2 + \zeta^2)^{-1} \quad (\zeta \geqslant 0)$:
$(-\Delta - |\varrho|^2 + \zeta^2)^{-1} f = f * g_\zeta$, avec

$$g_\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, e^{t(|\varrho|^2 - \zeta^2)}\, h_t(x) \qquad (x \in G,\ \zeta \geqslant 0)$$

Corollaire 3 : *Pour $\zeta > 0$, on a*

$$g_\zeta(\exp H) \asymp |H|^{\frac{1}{2}-\frac{\ell}{2}-|\Sigma_0^+|}\, \varphi_0(\exp H)\, e^{-\zeta|H|} \qquad (H \in \overline{\mathfrak{a}^+},\ |H| \geqslant 1).$$

Pour $\zeta = 0$:

$$g_0(\exp H) \asymp |H|^{2-\ell-2|\Sigma_0^+|}\, \varphi_0(\exp H) \qquad (H \in \overline{\mathfrak{a}^+},\ |H| \geqslant 1).$$