

**Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la
transformation en ondelettes :
application en mammographie et en turbulence développée**

Pierre Kestener

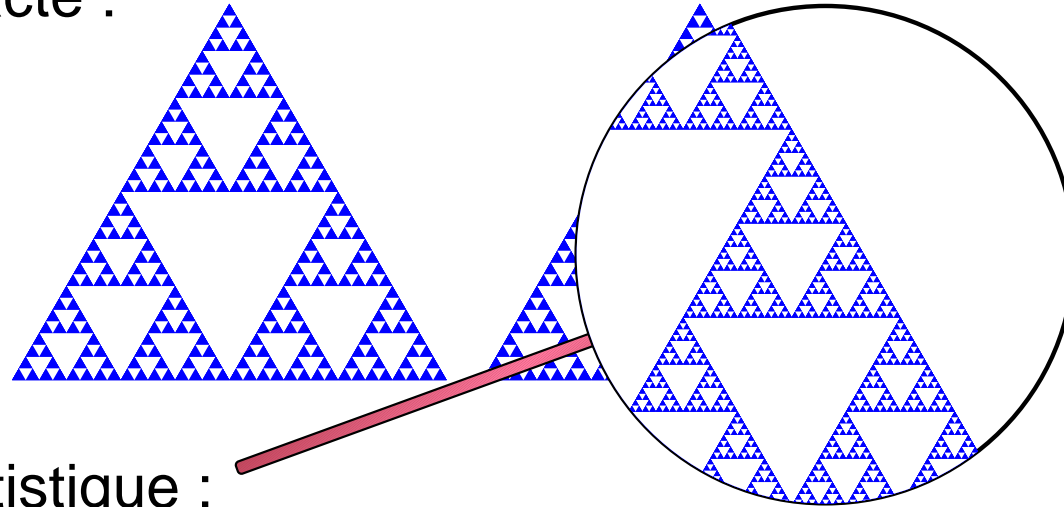
Centre de Recherche Paul Pascal, CNRS, Bordeaux

Laboratoire de Physique, ENS Lyon

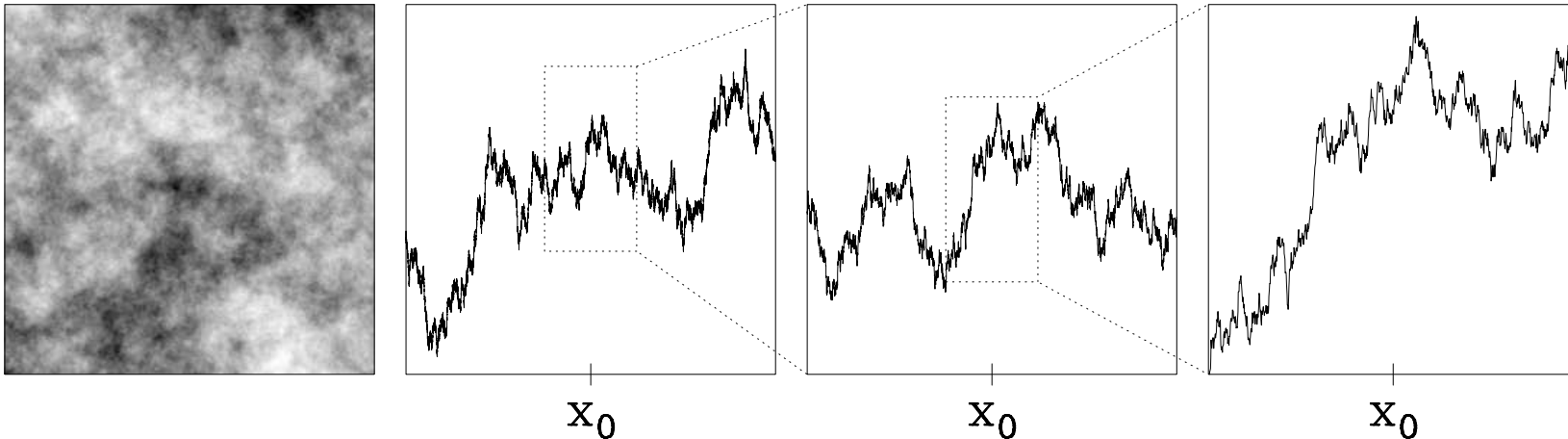
sous la direction d'Alain Arneodo

- ➡ Introduction
- ➡ Caractérisation d'images multifractales par la méthode MMTO 2D
 - Application en imagerie médicale : **la mammographie**
- ➡ Généralisations de la méthode MMTO
 - **passage 2D/3D**
 - **passage scalaire/vectoriel**
 - Applications en **turbulence développée** (simulations numériques directes)
 - cas 3D scalaire : champs de dissipation et d'enstrophie
 - cas 3D vectoriel : champs de vitesse et de vorticité

• autosimilarité exacte :



• autosimilarité statistique :



$$f(x_0 + \lambda u) - f(x_0) \sim \lambda^{h(x_0)} (f(x_0 + u) - f(x_0))$$

Autosimilarité et Transformation en Ondelettes

- la transformation en ondelettes : un microscope mathématique pour analyser les propriétés d'autosimilarité des objets fractals

$$T_{\psi}[f](a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

- l'autosimilarité locale (exposant de Hölder) se retrouve dans la transformation en ondelettes sous forme de loi d'échelle (Jaffard, Mallat et coll., Holschneider et Tchamitchian) :

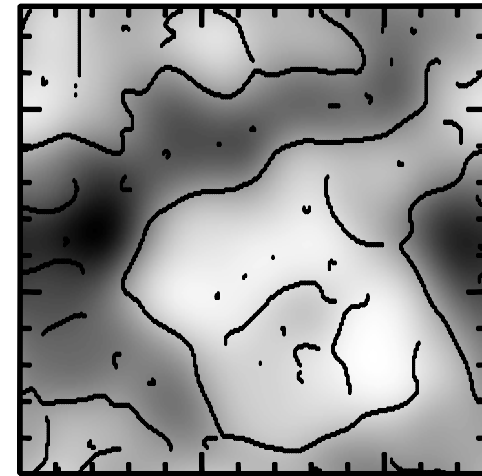
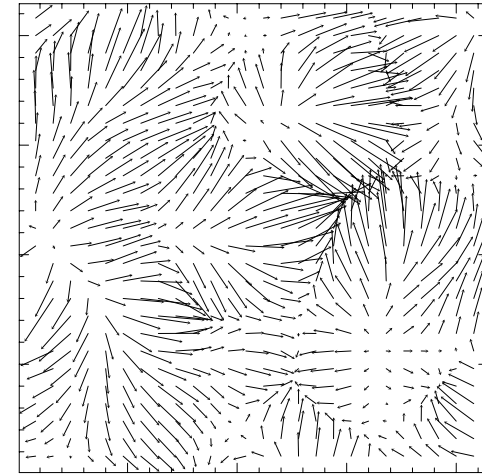
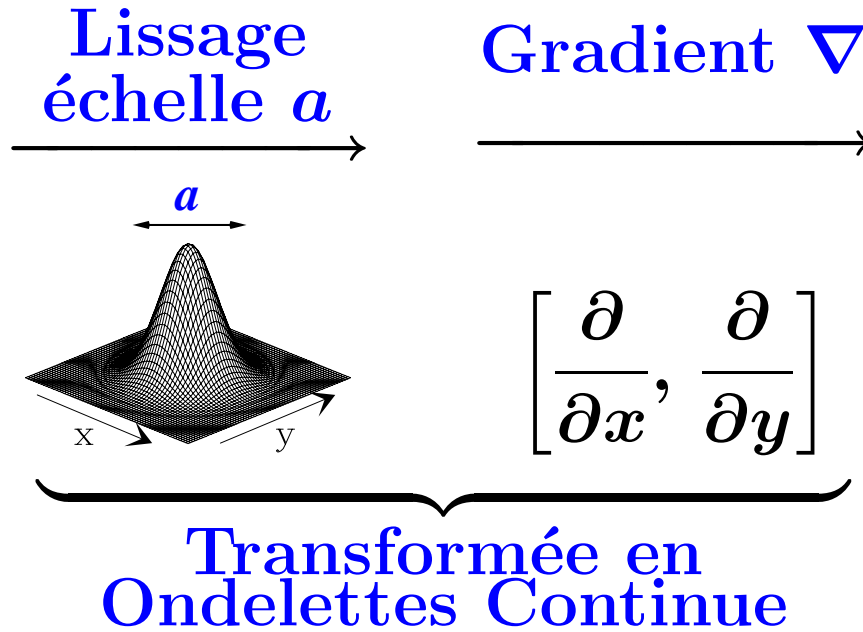
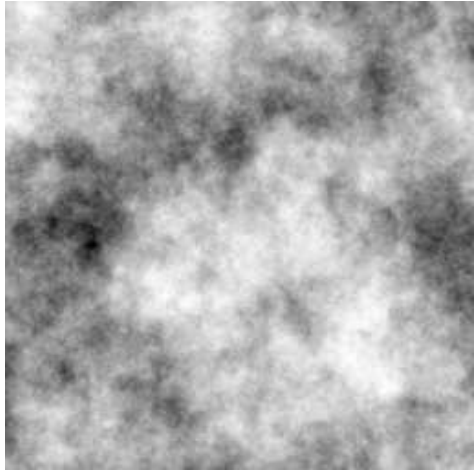
$$T_{\psi}[f](a, x_0) \sim a^{h(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+$$

- description statistique de l'autosimilarité :
méthode MMTO (Maxima du Module de la Transformée en Ondelettes) par Muzy, Bacry, Arneodo (1993) pour les **signaux multifractals**.

- nombreuses applications en bio-informatique (séquences d'ADN), en turbulence, en finance, en géophysique,...

Méthodologie MMTO 2D : travail de thèse de N. Decoster

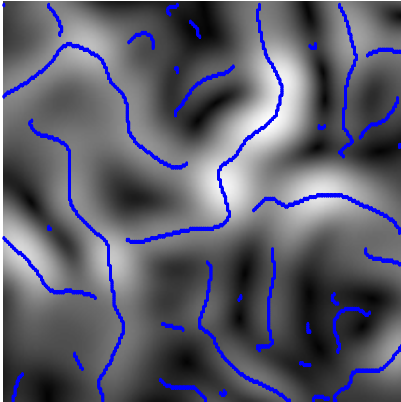
Données 2D : I



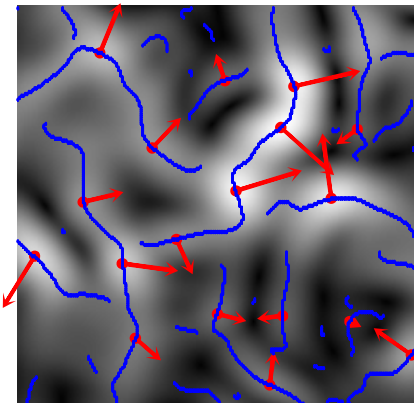
$$\mathbf{T}_\psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} I * \frac{\partial \phi_a}{\partial x}(\mathbf{r}) \\ I * \frac{\partial \phi_a}{\partial y}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \nabla(I * \phi_a)(\mathbf{r}) = (\mathcal{M}_\psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}), \mathcal{A}_\psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}))$$

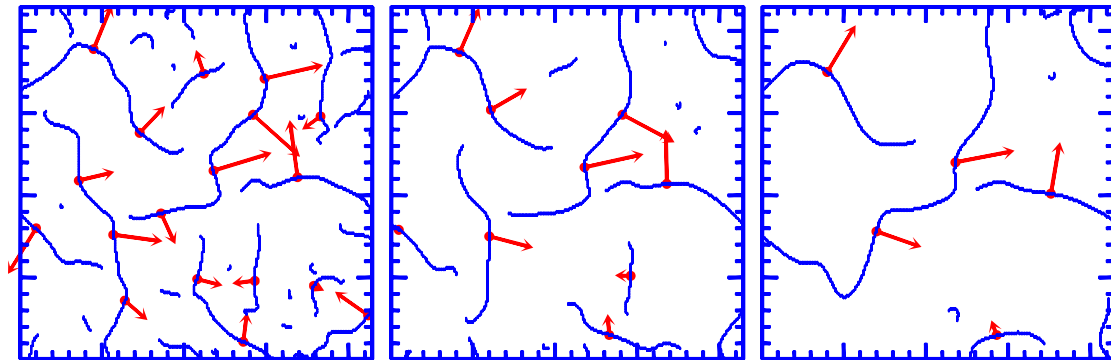
Chaînes MMTO



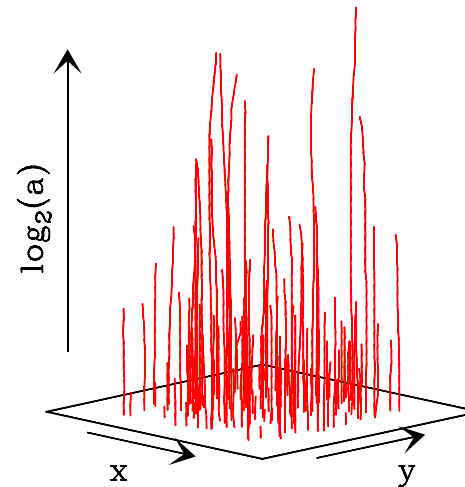
MMMTO



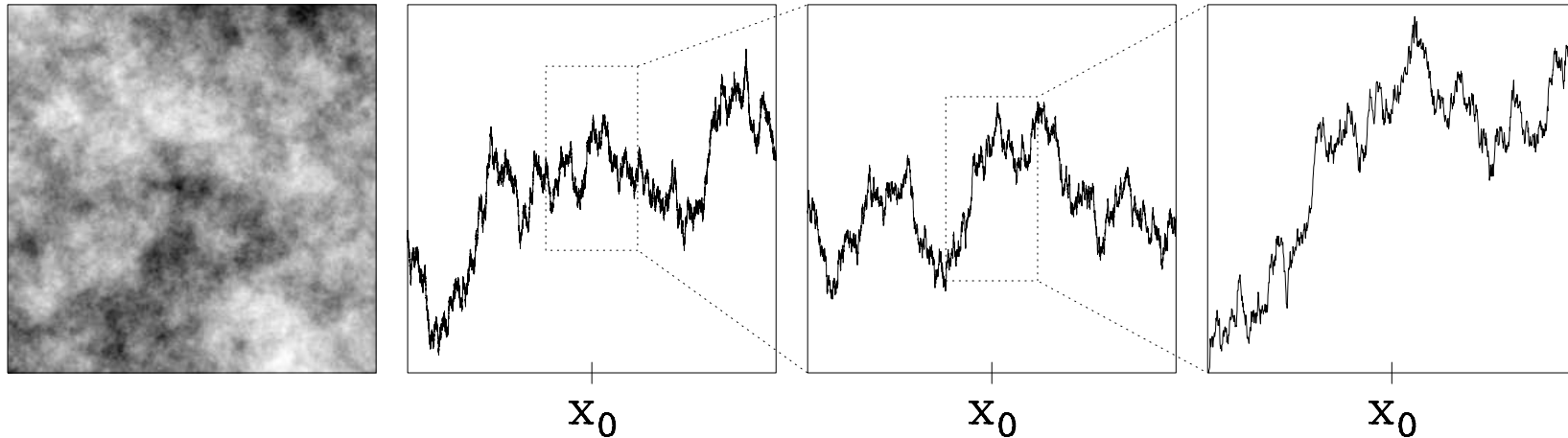
Chaînes MMTO à 3 échelles différentes



Chaînage des MMMTO : squelette TO



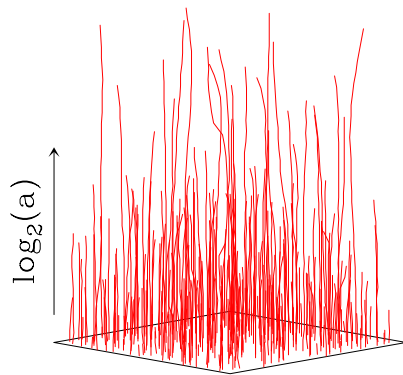
Caractérisation de la rugosité locale : **exposant de Hölder**



$$f(x_0 + \lambda u) - f(x_0) \sim \lambda^{h(x_0)} (f(x_0 + u) - f(x_0))$$

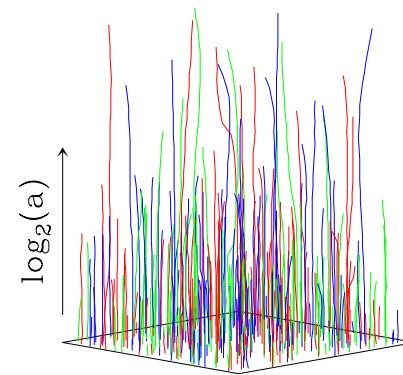
● Image monofractale

● Image multifractale



$$\mathcal{M} \sim a^h,$$

h unique



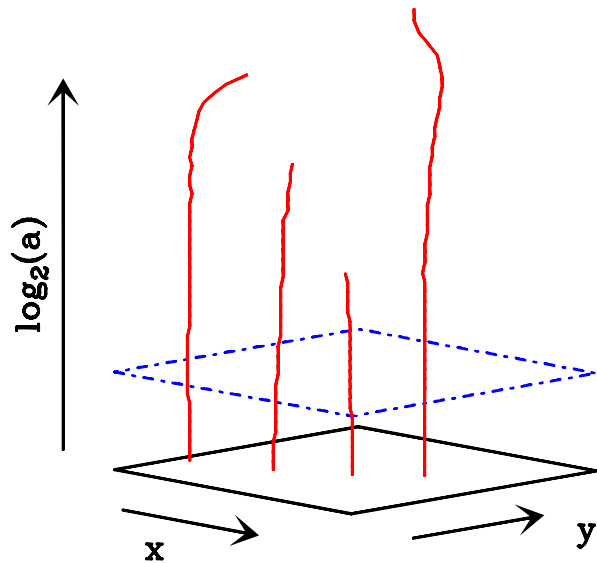
$$\mathcal{M} \sim a^h, a^h, a^h,$$

$h \in [h_{\min}, h_{\max}]$

Méthode MMTO : formalisme multifractal

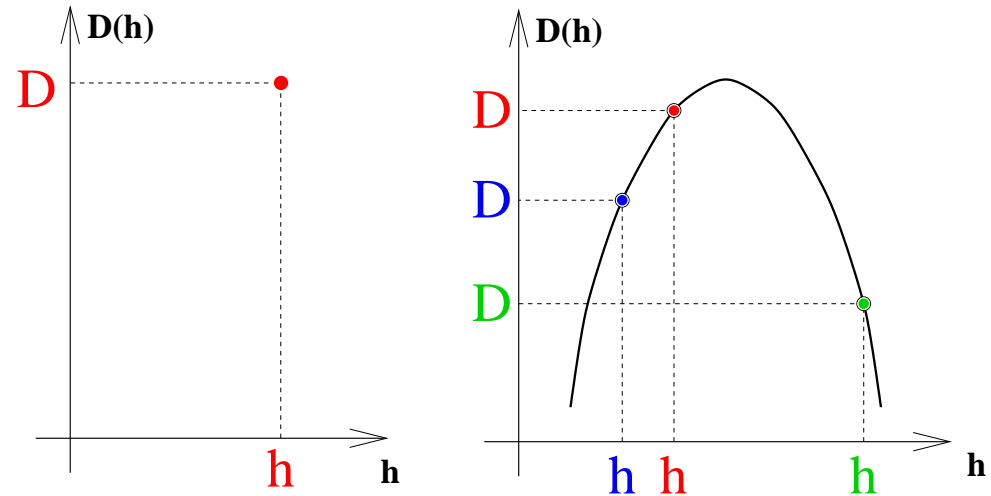
Spectre des singularités :

$$D(h) = d_H\{r \in R^d, h(r) = h\}$$



transformée de Legendre :

$$D(h) = \min_q (qh - \tau(q))$$



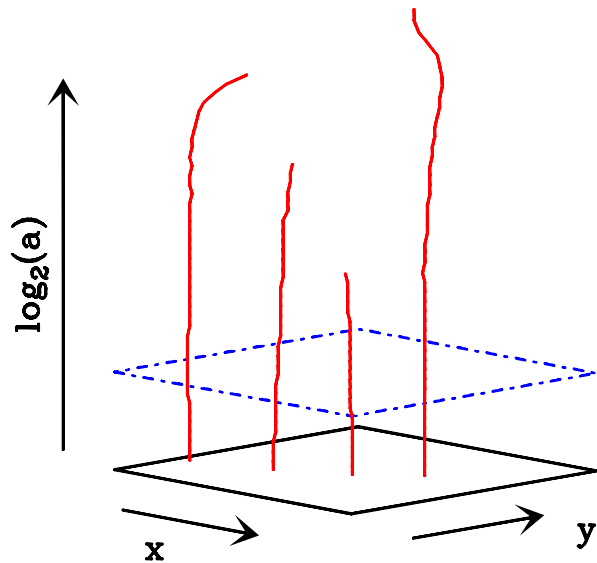
Analogie avec la physique statistique :
calcul de **fonctions de partition**

$$\mathcal{Z}(q, a) = \sum_{\mathcal{L}(a)} (\mathcal{M}_\psi(r, a))^q \sim a^{\tau(q)}$$

Méthode MMTO : formalisme multifractal

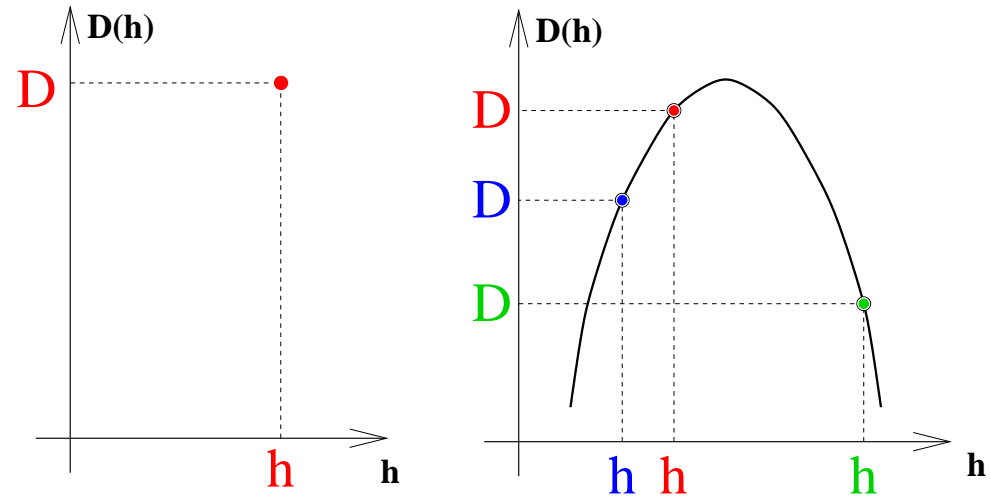
Spectre des singularités :

$$D(h) = d_H\{r \in R^d, h(r) = h\}$$



transformée de Legendre :

$$D(h) = \min_q (qh - \tau(q))$$



Analogie avec la physique statistique :
calcul de **fonctions de partition**

$$\mathcal{Z}(q, a) = \sum_{\mathcal{L}(a)} (\mathcal{M}_\psi(r, a))^q \sim a^{\tau(q)}$$

$$\mathcal{H}(q, a) = \sum_{\mathcal{L}(a)} \ln |\mathcal{M}_\psi(r, a)| \mathcal{W}_\psi(r, a) \sim a^{h(q)}$$

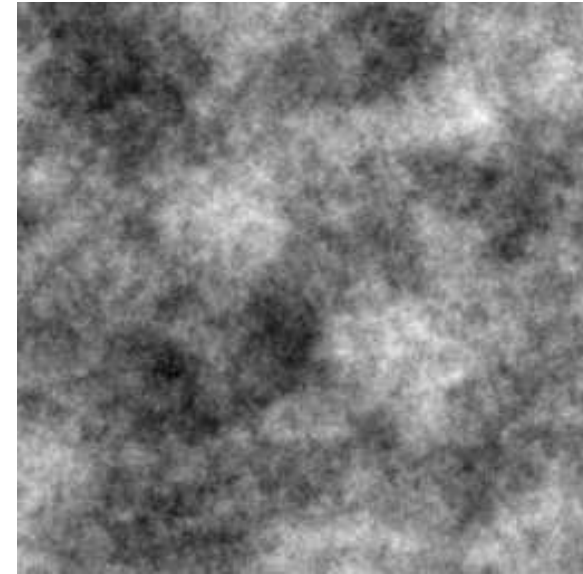
$$\mathcal{D}(q, a) = \sum_{\mathcal{L}(a)} \ln |\mathcal{W}_\psi(r, a)| \mathcal{W}_\psi(r, a) \sim a^{D(q)}$$

Application sur des surfaces **monofractales** synthétiques

Surfaces Browniennes fractionnaires : $B_H(r)$

$$H = 1/3$$

- $H < 0.5$: incréments anti-corrélés
- $H = 0.5$: incréments non-corrélés
- $H > 0.5$: incréments corrélés

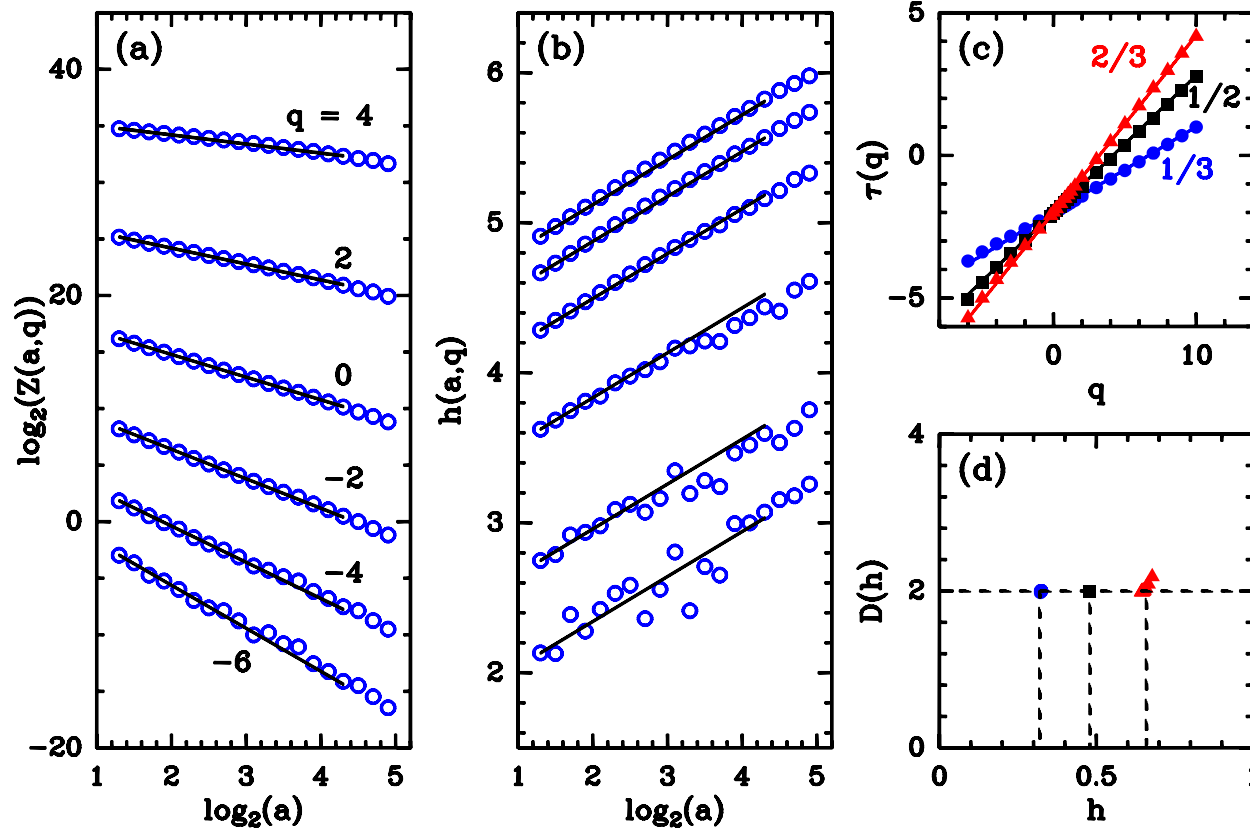


Prédictions théoriques :

- $\tau(q)$ est linéaire :

$$\tau(q) = qH - 2$$
- le spectre multifractal est dégénéré :

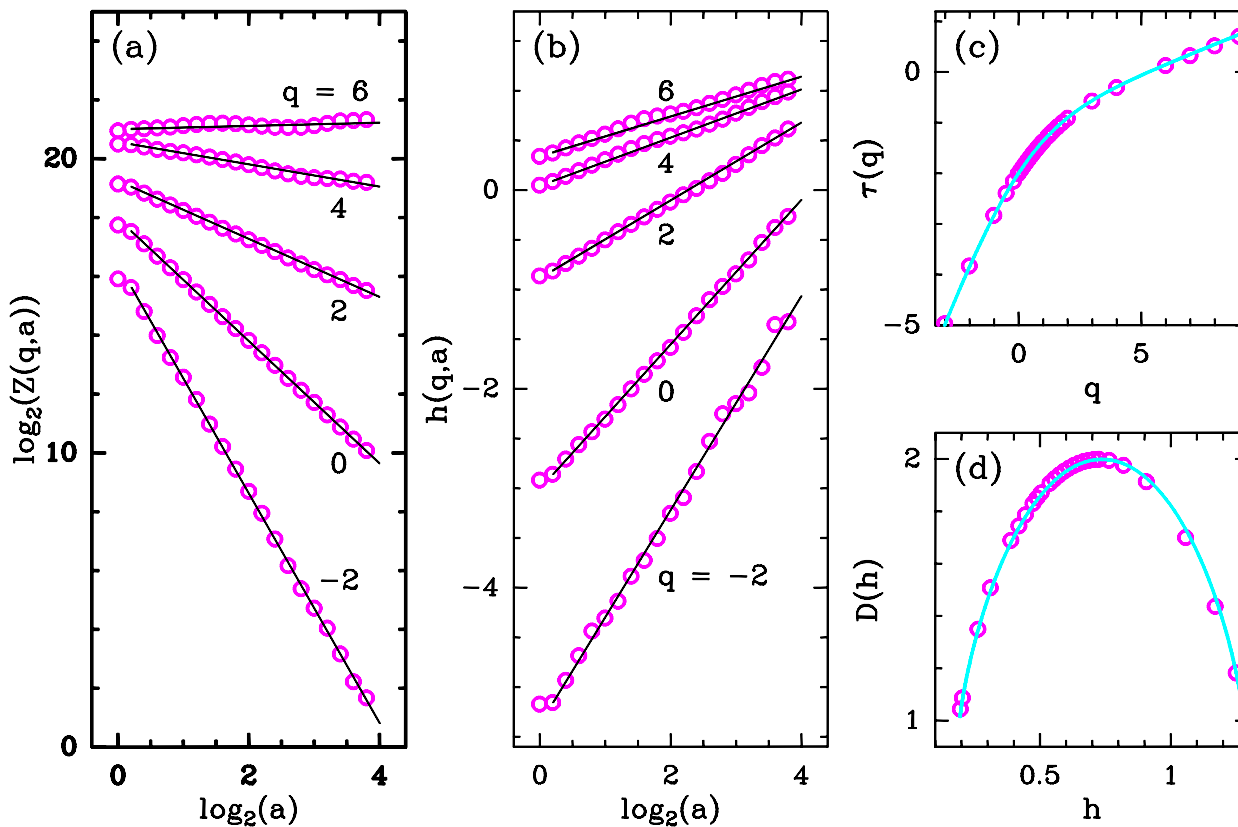
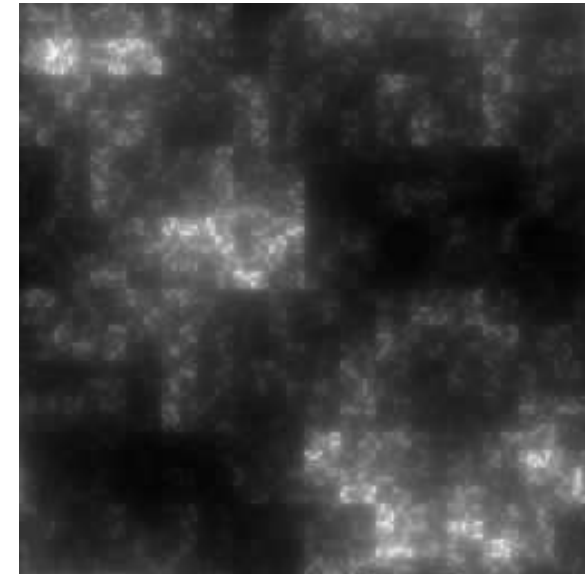
$$D(h = H) = 2$$



Application sur des surfaces **multifractales** synthétiques

FISC

Surfaces **multifractales** (Fractionally Integrated Singular Cascades)

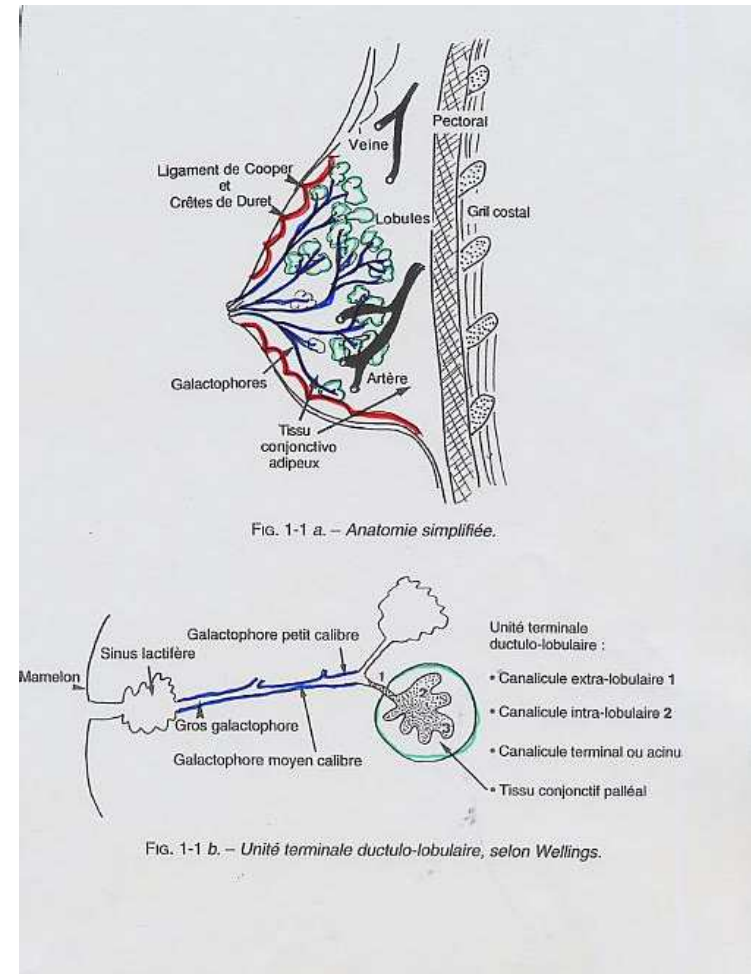
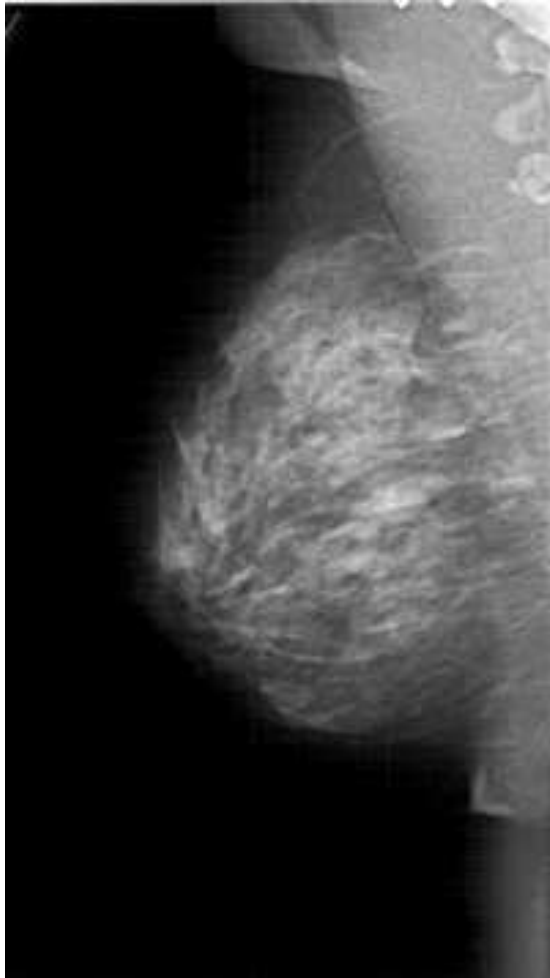


Prédictions théoriques :

- $\tau(q)$ est non-linéaire
- $\tau(q) = -2 - q(1 - H^*) - \log_2(p_1^q + p_2^q)$
- le spectre des singularités est une courbe non-dégénérée convexe

Mammographie et anatomie du sein

Objectifs : utilisation de la méthode MMTO pour l'aide au diagnostic du cancer du sein

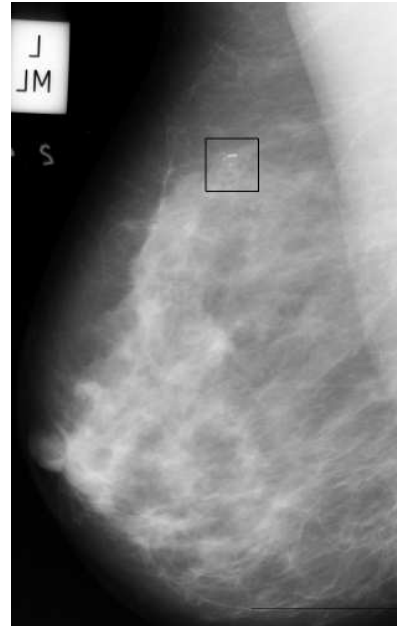


Qu'est ce que le cancer du sein ?

- tumeur maligne de la glande mammaire
 - incidence : 30000 nouveaux cas chaque année en France
 - prévention très difficile (par opposition au cancer des poumons)
 - origine héréditaire : 5 à 10 % seulement (gènes BRCA1/2)
 - le pronostic dépend du volume tumoral au diagnostic
- ⇒ **DEPISTAGE ORGANISE** par mammographie



● Opacités



● Calcifications



● Désorganisations architecturales

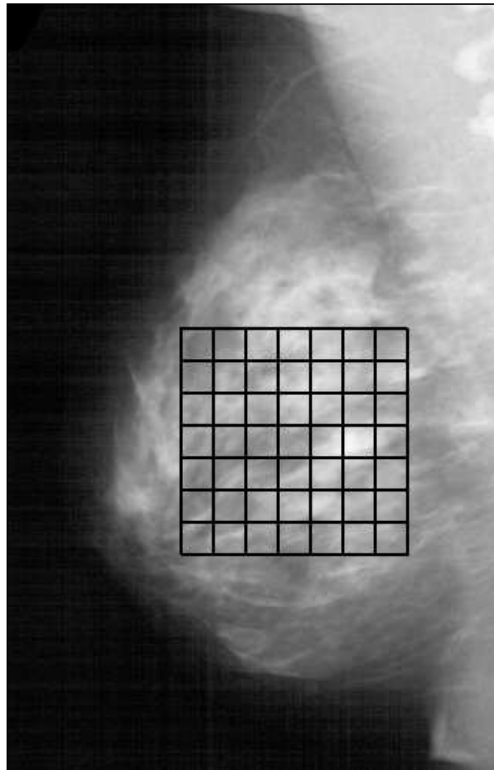
Mammographies digitalisées : étude de la texture

- seins denses : plus difficiles à diagnostiquer
- 2 classes de propriétés monofractales seulement

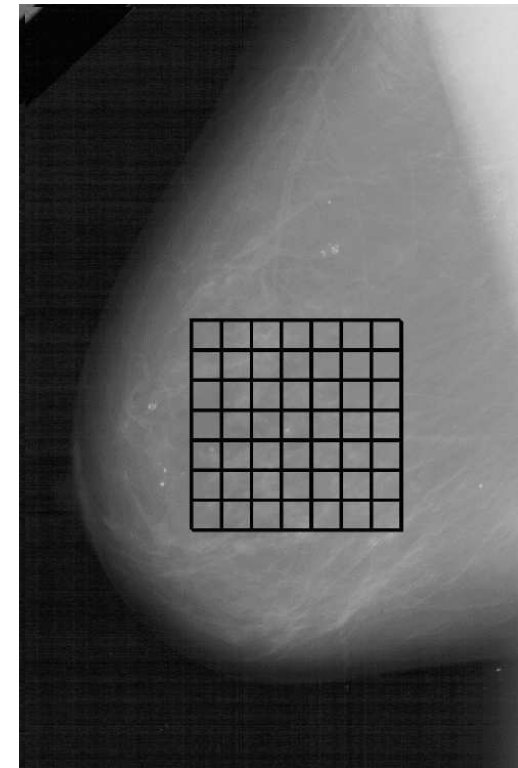
Digital Database for Screening Mammography:

<http://marathon.csee.usf.edu/Mammography/Database.html>

Sein dense

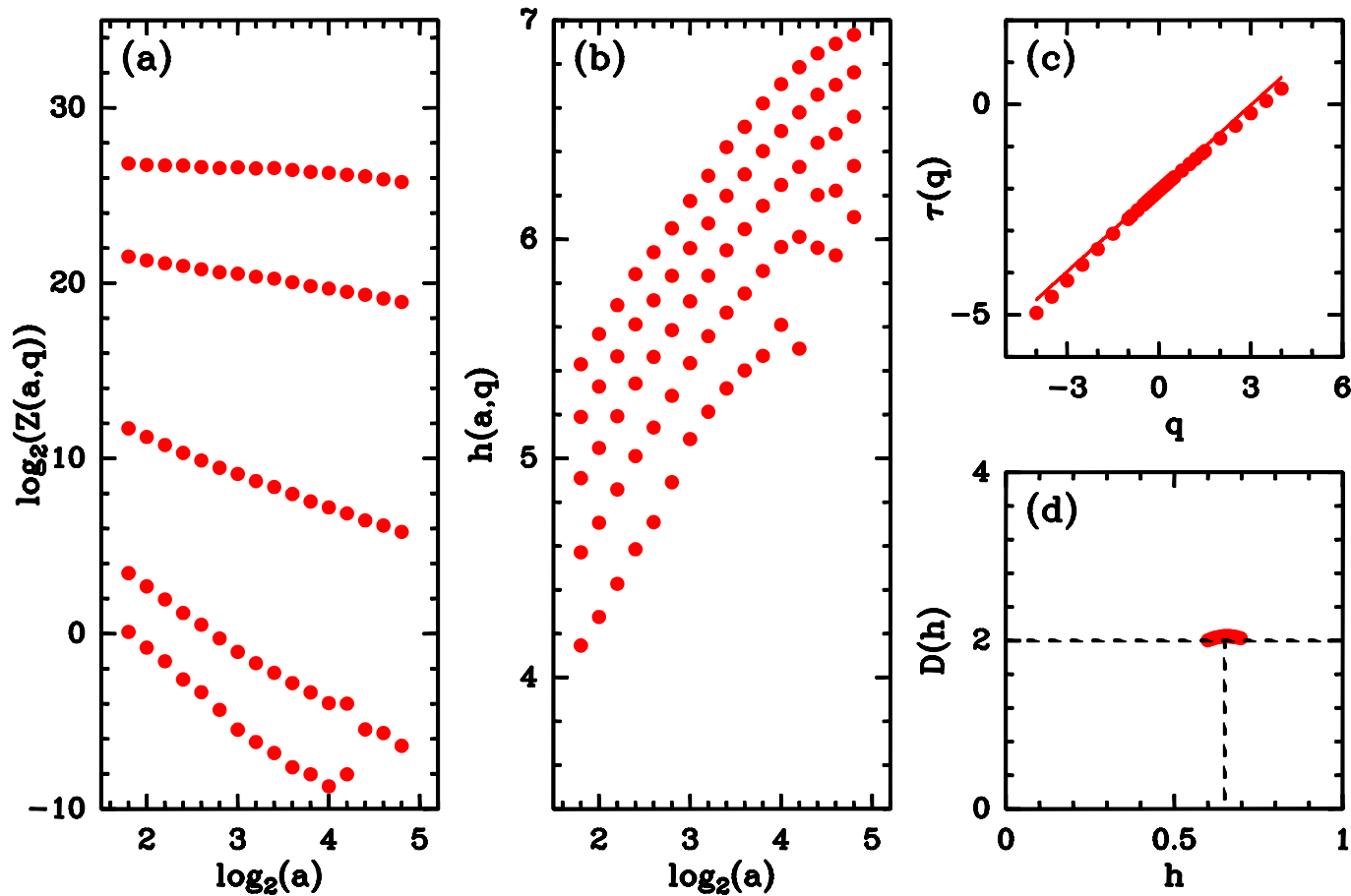


Sein gras



Application de la méthode MMTO 2D en mammographie

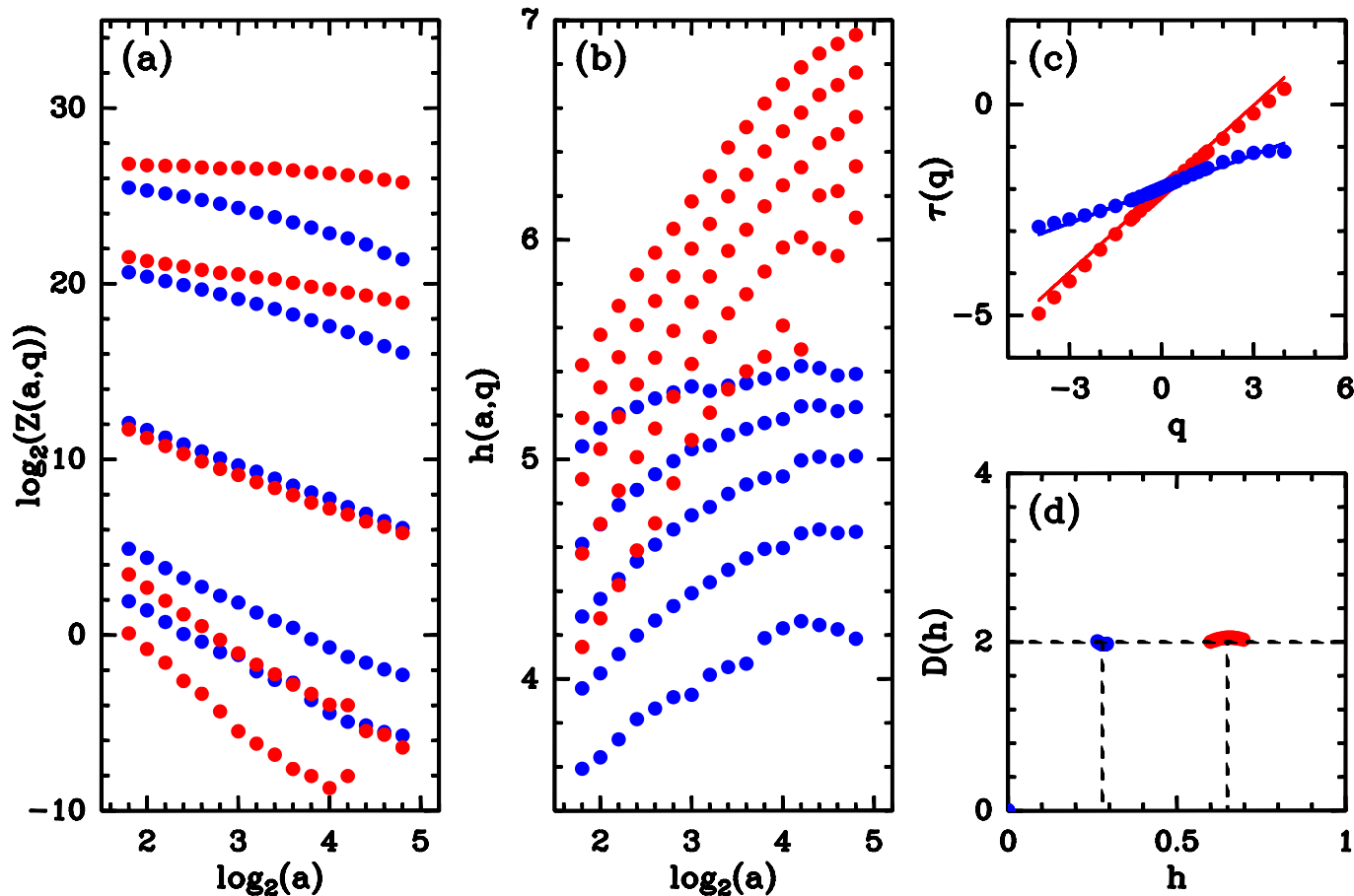
Classification de tissus : **dense**



● **Sein dense:**
monofractal, $H = 0.65$
corrélations **persistentes**

Application de la méthode MMTO 2D en mammographie

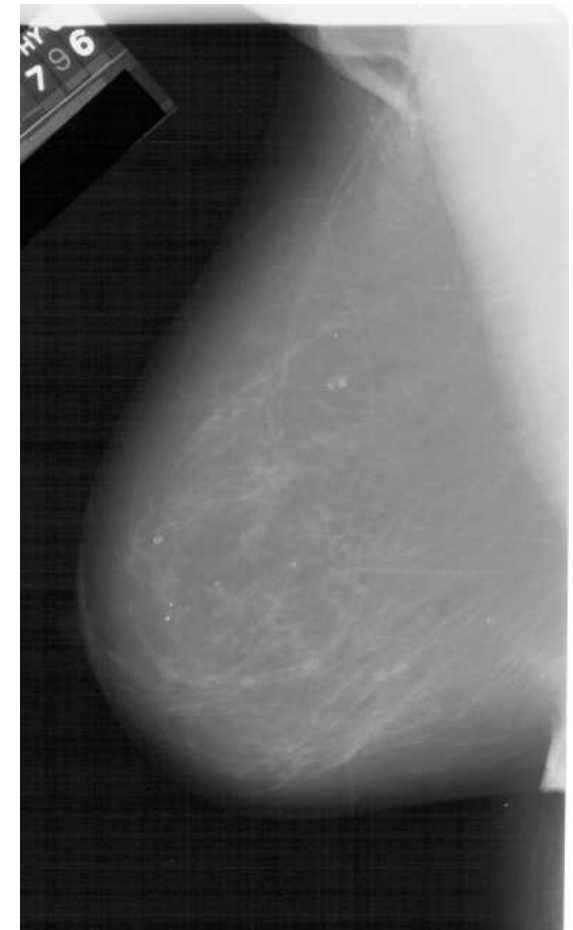
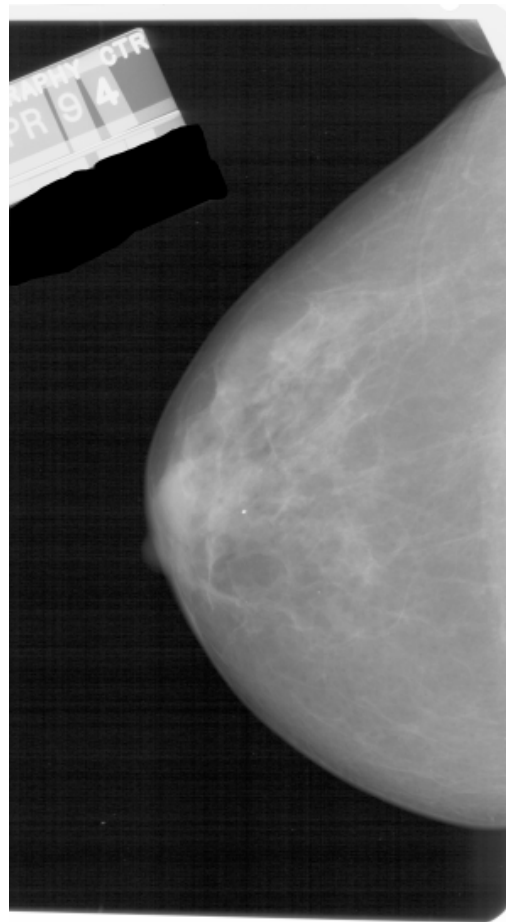
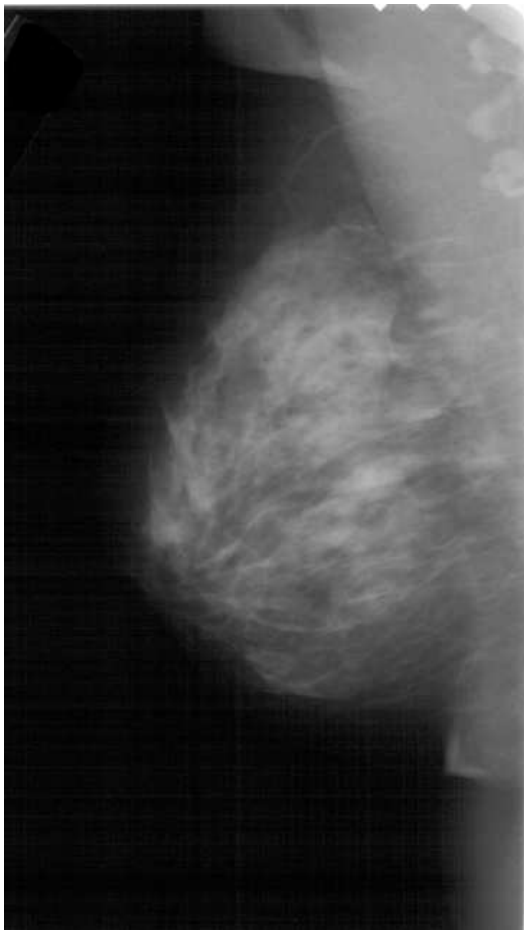
Classification de tissus : **dense** vs **gras**



- **Sein dense:**
monofractal, $H = 0.65$
corrélations **persistentes**
- **Sein gras:**
monofractal, $H = 0.30$
corrélations **anti-persistentes**

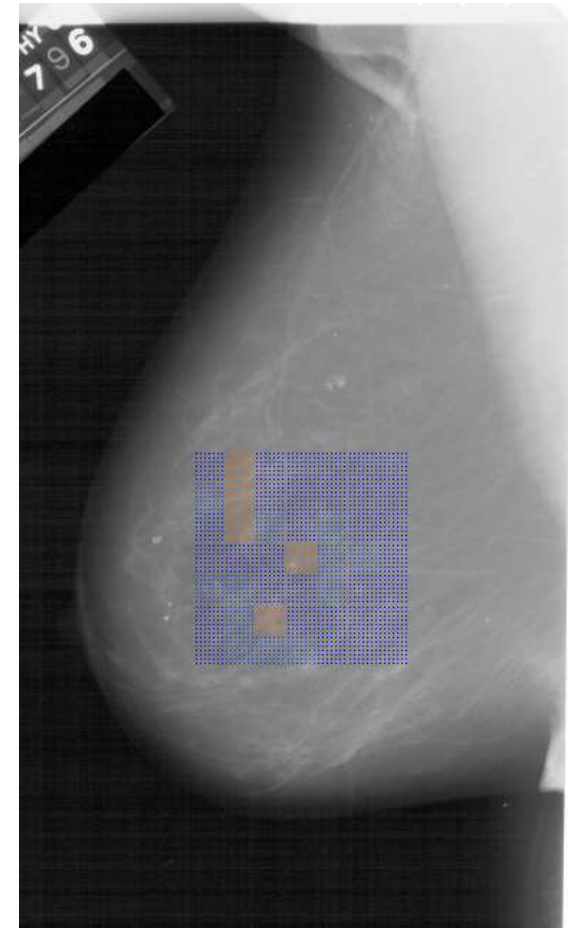
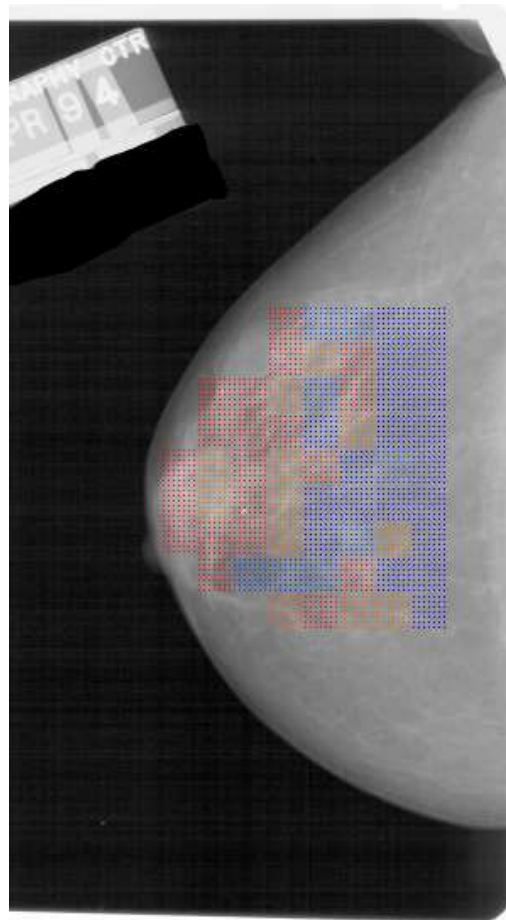
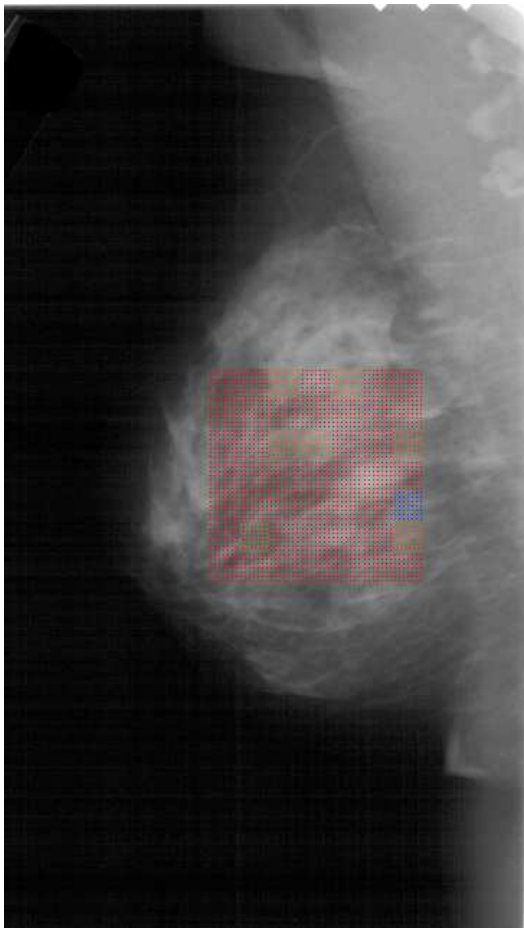
Application aux mammographies digitalisées

Cartes colorées :
segmentation des zones **denses** $h > 0.52$ et des zones **grasses** $h < 0.38$



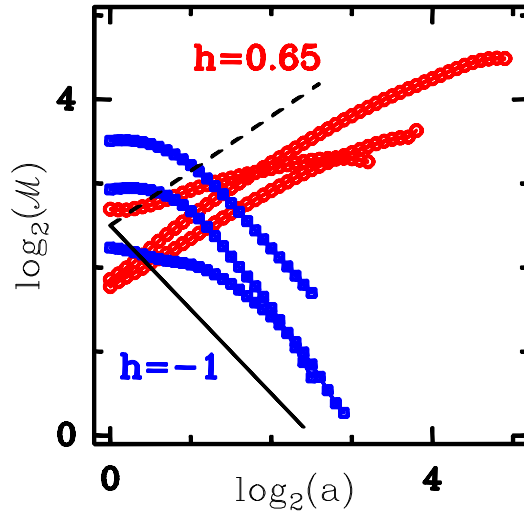
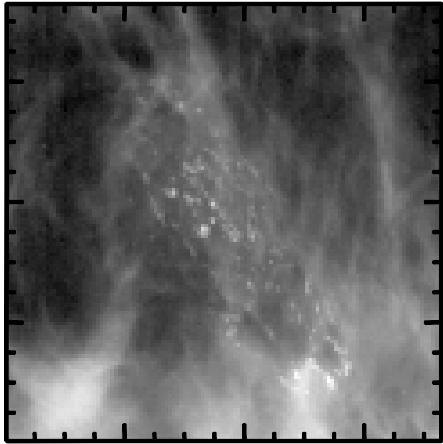
Application aux mammographies digitalisées

Cartes colorées :
segmentation des zones **denses** $h > 0.52$ et des zones **grasses** $h < 0.38$



Détection des Microcalcifications

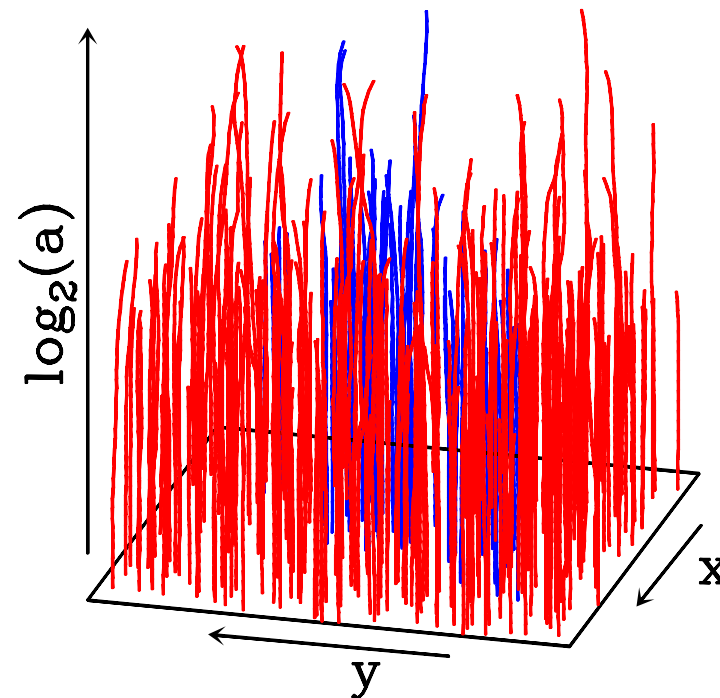
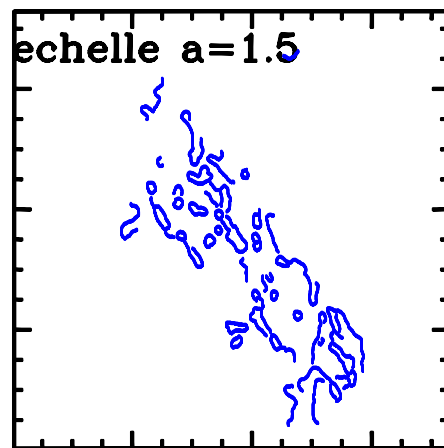
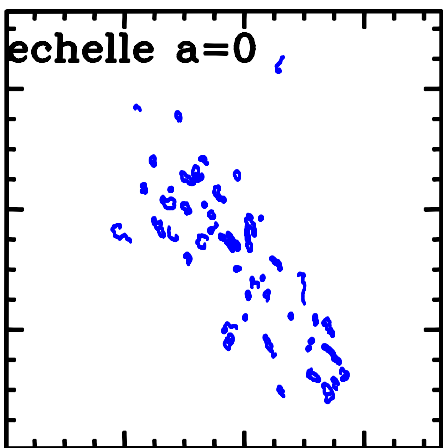
Segmentation des lignes du squelette TO :
microcalcifications vs texture de fond



● Lignes du fond

● Microcalcifications

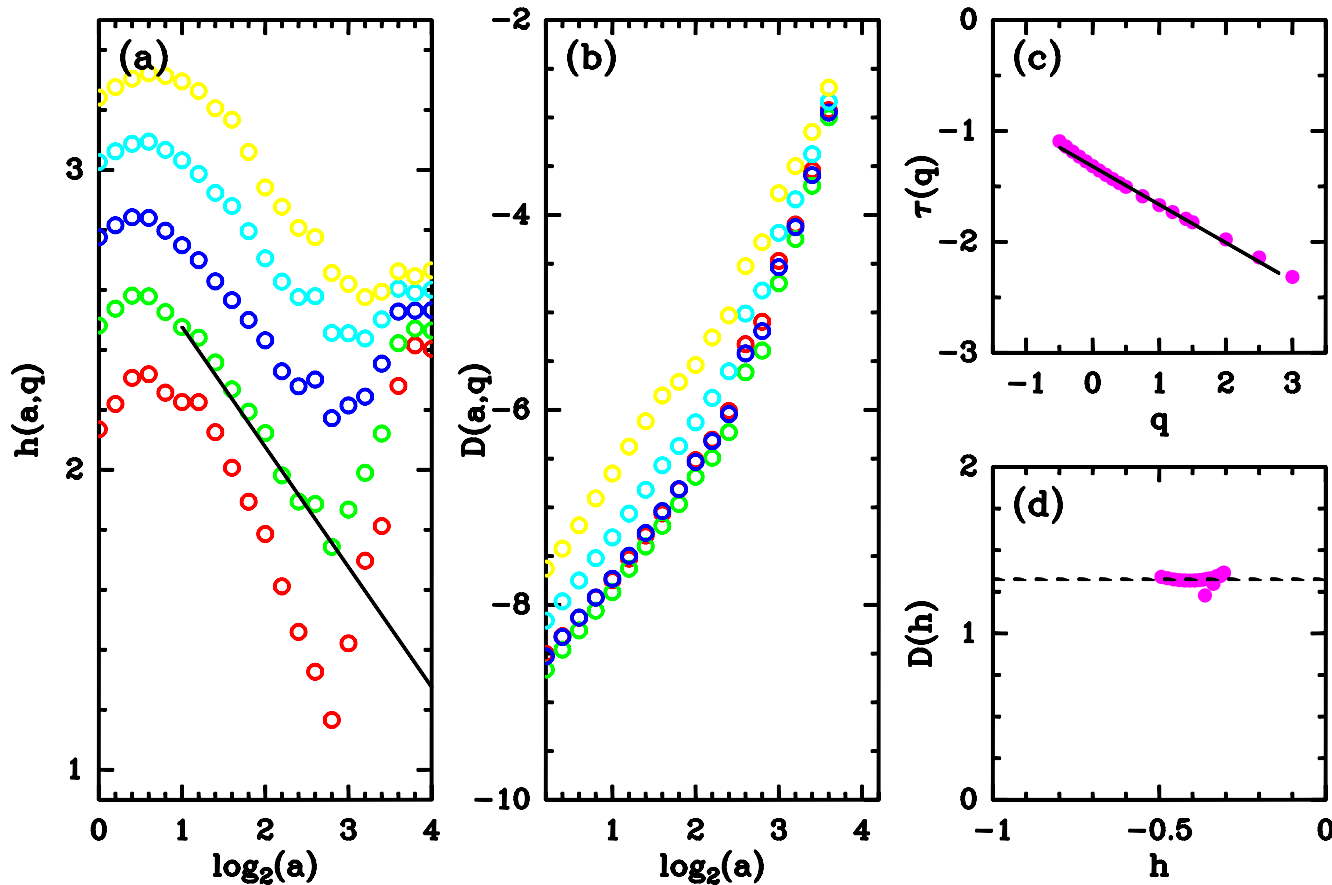
les objets quasi-ponctuels se comportent comme des 'Dirac' ($h = -1$)



Agrégat de microcalcifications

Etude de la distribution spatiale des microcalcifications

Fonctions de partition :



$$D_F = 1.3$$

observation :

la **ramification fractale** des amas de microcalcifications ($1 < D_F < 2$) semble être corrélée à la malignité de la pathologie

- la **méthode MMTO 2D** fournit un cadre de travail pour la mesure automatisée de la **radio-densité** des seins et l'étude de la **géométrie fractale des amas de microcalcifications**.
- étude complémentaire nécessaire pour valider quantitativement l'apport de la mesure de la dimension fractale D_F dans les systèmes d'aide au diagnostic **bénin/malin**

Description multifractale de l'intermittence en turbulence

● le **formalisme multifractal classique** est né de la problématique de la turbulence

☞ modèle multifractal pour la vitesse : **fonction de structure** longitudinale (basée sur les incréments **1D** de vitesse) :

$$S_p(l) = \langle (\mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, l\mathbf{e}))^p \rangle \sim l^{\zeta_p}, \quad p > 0$$

☞ modèle multifractal pour la dissipation (**surrogate 1D**) : hypothèse RSH

$$S_p(l) \sim \langle \varepsilon_l^{p/3} \rangle l^{p/3} \sim l^{\tau_\varepsilon(p/3) + p/3}.$$

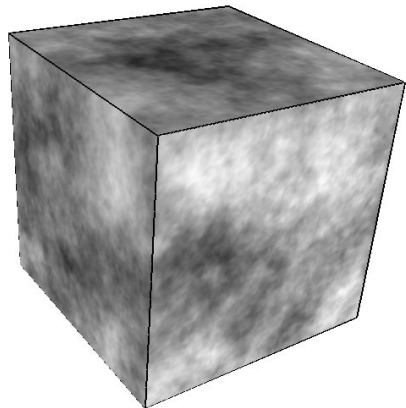
Mesure des spectres $\tau_\varepsilon(p)$ et $f(\alpha)$ par la méthode du **comptage de boîtes**.

● **formalisme multifractal basé sur la TO** (méthode **MMTO**) pour l'analyse des singularités des fonctions, des mesures et des distributions.

☞ généralisation de la méthode MMTO 1D/2D → **3D**

☞ généralisation aux **champs vectoriels multidimensionnels**. Première application aux champs de vitesse et de vorticité d'un écoulement turbulent.

données 3D

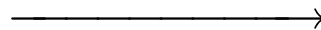


Filtrage
lissant
échelle a



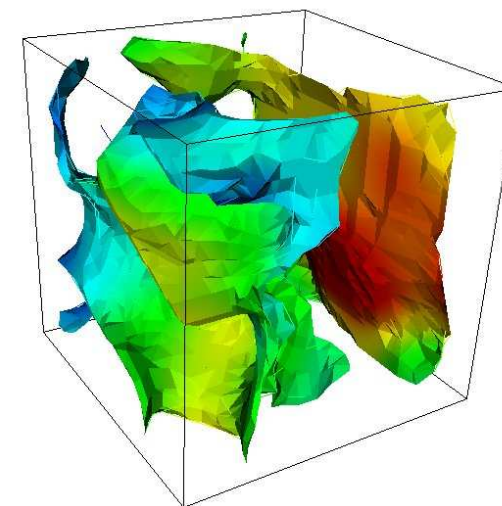
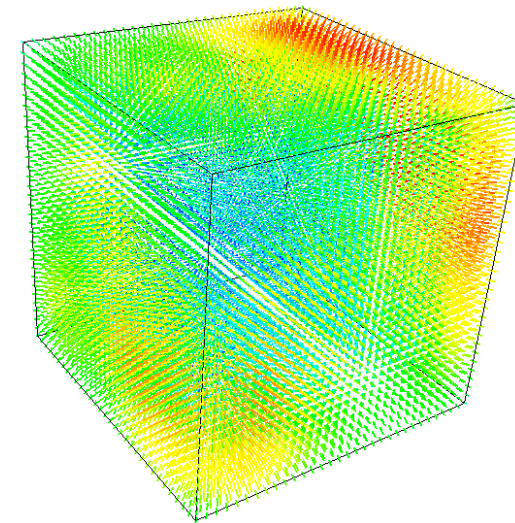
ϕ_a

Gradient ∇



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix}$$

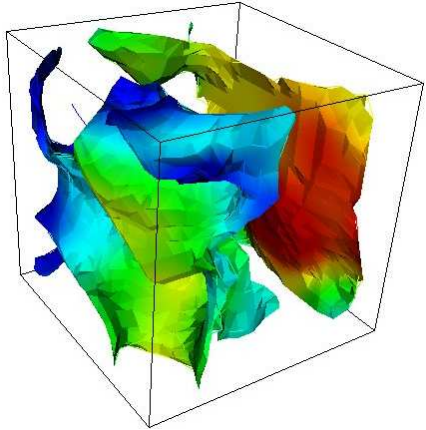
Transformée en
Ondelettes



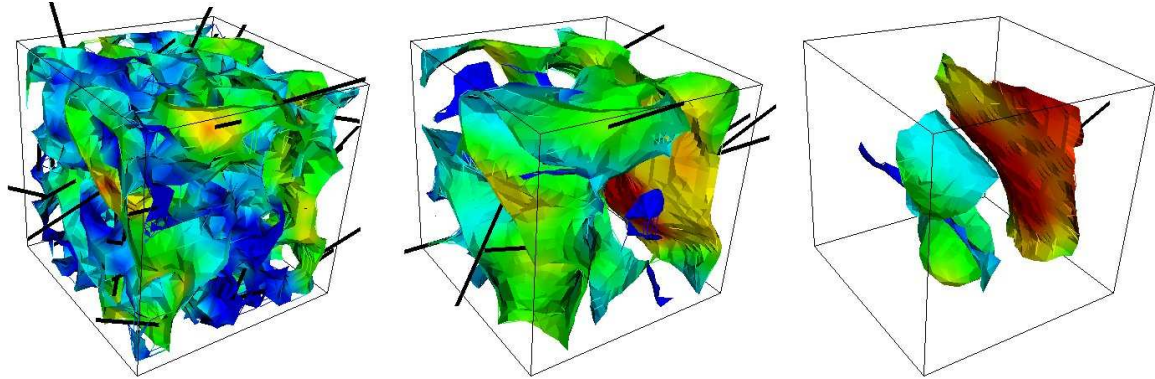
$$\mathbf{T}_\psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} * \frac{\partial \phi_a}{\partial x}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{I} * \frac{\partial \phi_a}{\partial y}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{I} * \frac{\partial \phi_a}{\partial z}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \nabla (\mathbf{I} * \phi_a)(\mathbf{r})$$

Méthode MMTO 3D scalaire : squelette

Surfaces MMTO

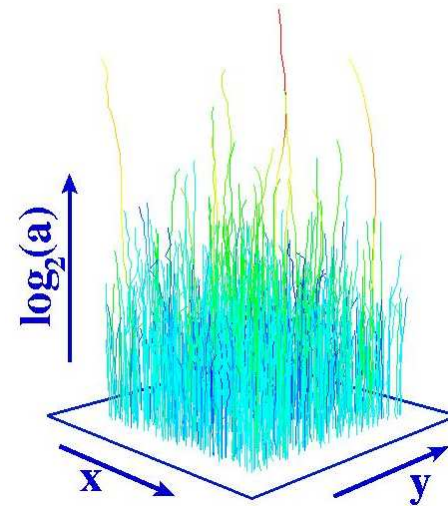
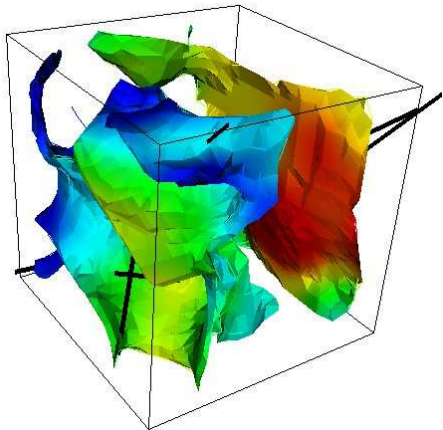


Surfaces MMTO à 3 échelles différentes

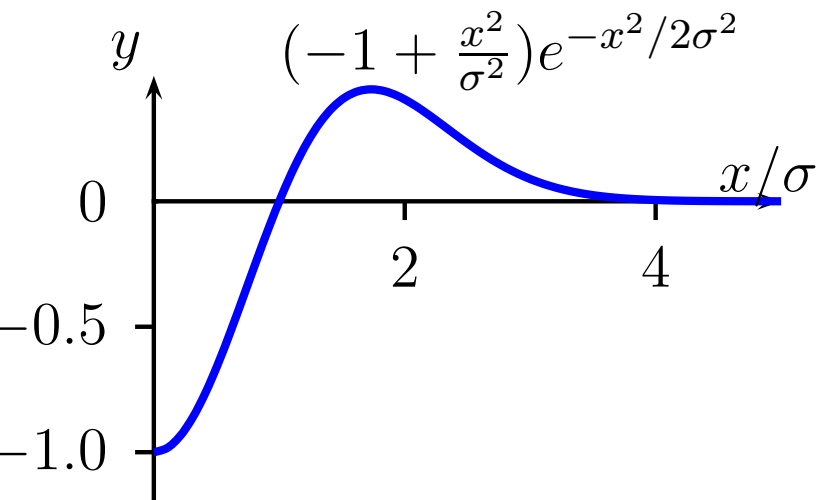
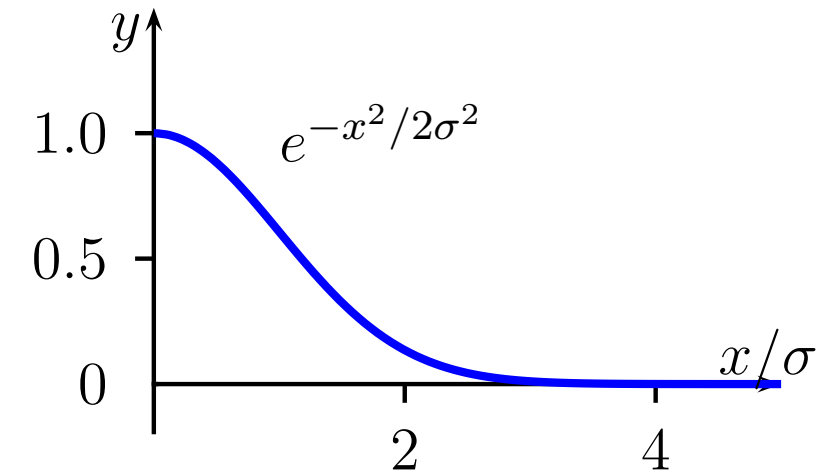


Chaînage des **MMTO** : Squelette TO (projection suivant z)

Points MMTTO



Technique de filtres récursifs en 3D



- filtres à variables séparables
- **Filtre Gaussien** $e^{-x^2/2\sigma^2}$ approché par $h_\sigma(x)$

$$(a_0 \cos(\omega_0 \frac{x}{\sigma}) + a_1 \sin(\omega_0 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_0 \frac{x}{\sigma}} + (c_0 \cos(\omega_1 \frac{x}{\sigma}) + c_1 \sin(\omega_1 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_1 \frac{x}{\sigma}}$$

- **équation récurrente d'ordre 4 :**

$$y_k = n_{00}x_k + n_{11}x_{k-1} + n_{22}x_{k-2} + n_{33}x_{k-3} - d_{11}y_{k-1} - d_{22}y_{k-2} - d_{33}y_{k-3} - d_{44}y_{k-4}$$

● **comparaison FFT/filtres récursifs :**

gain en temps de calcul en 3D:

☞ **60 % pour le filtrage Gaussien**

☞ **25 % pour le filtrage Mexicain**

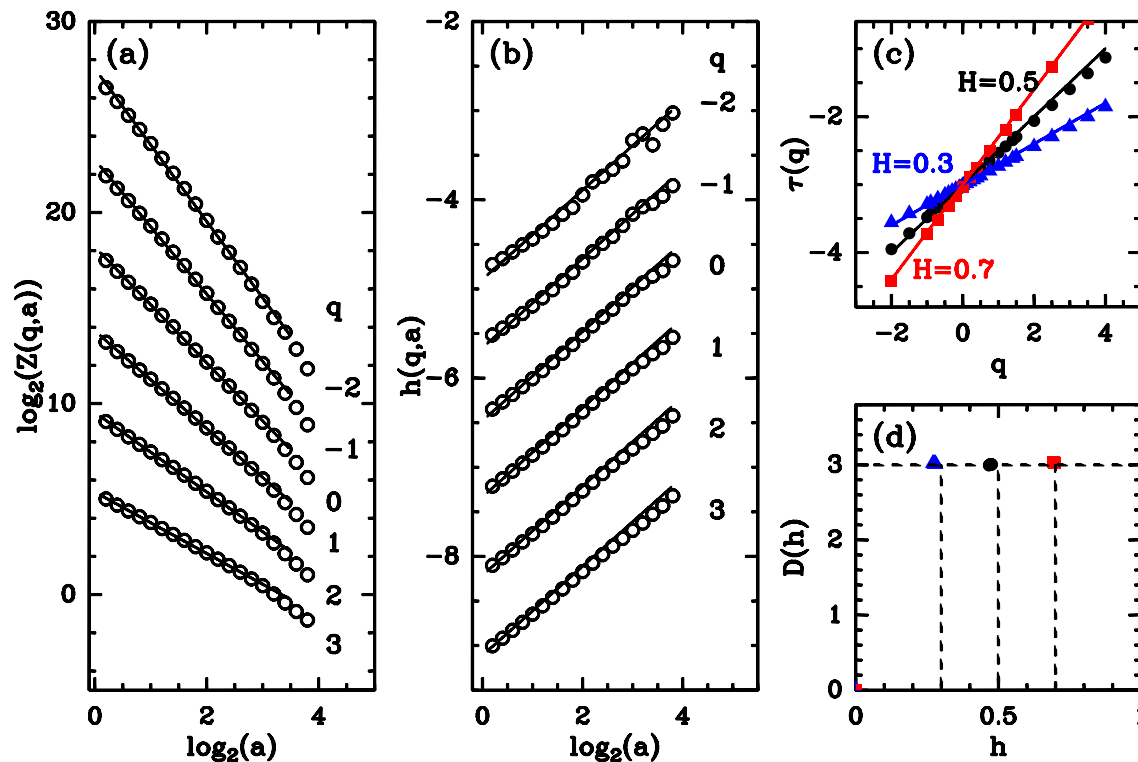
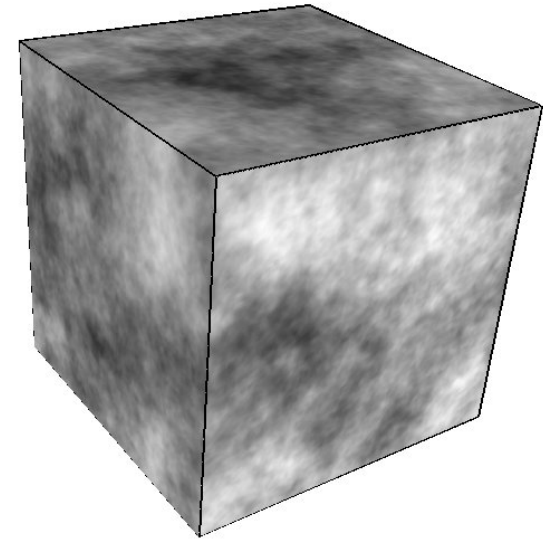
Application-test à des champs synthétiques monofractals 3D

Champs Browniens fractionnaires : $B_H(\mathbf{r})$

⇒ $H < 0.5$: incréments anti-corrélés

⇒ $H = 0.5$: incréments non-corrélés

⇒ $H > 0.5$: incréments corrélés



Prédictions théoriques :

⇒ $\tau(q)$ est linéaire :

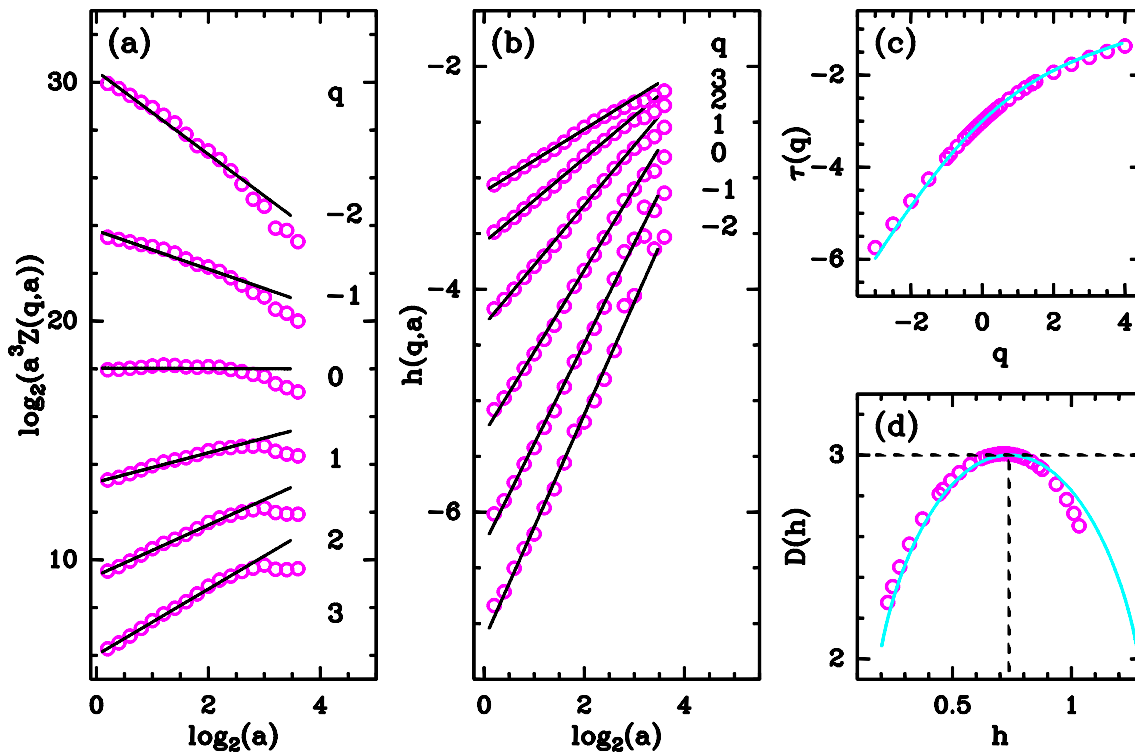
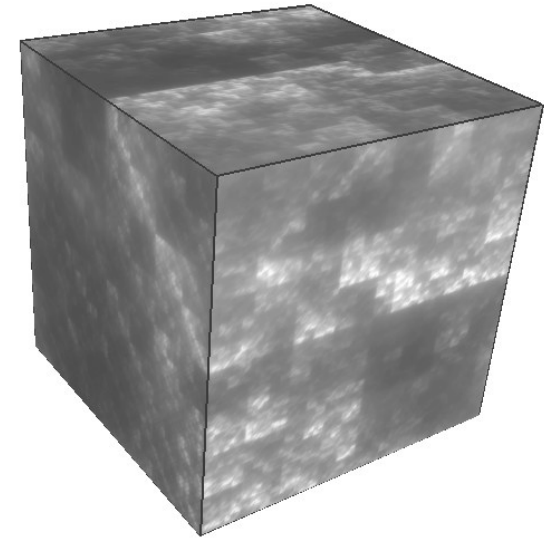
$$\tau(q) = qH - 3$$

⇒ le spectre multifractal est dégénéré :

$$D(h = H) = 3$$

Application-test à des champs synthétiques multifractals 3D

Champs multifractals 3D (Fractionally Integrated Singular Cascades)



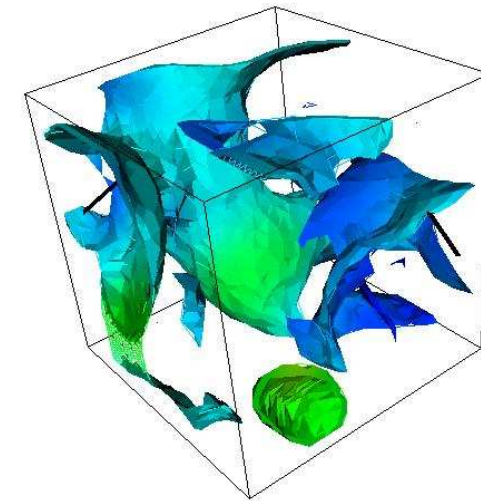
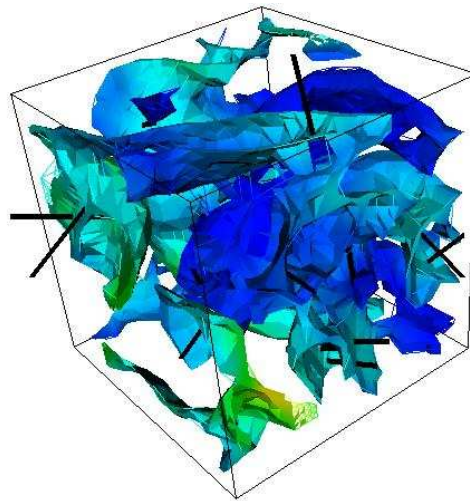
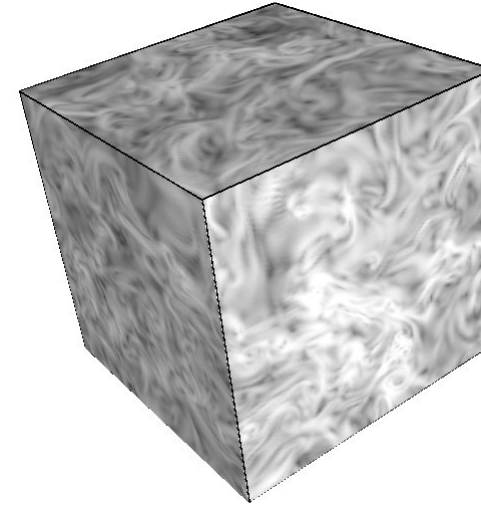
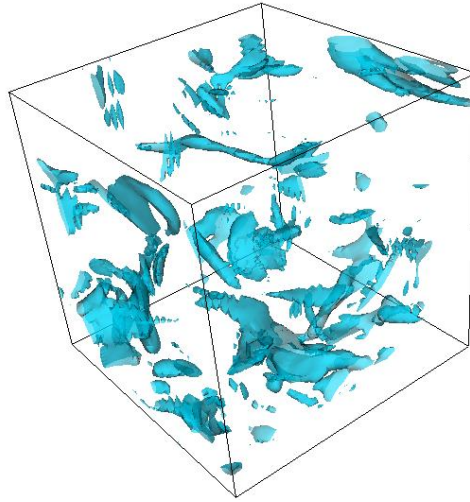
Prédictions théoriques :

→ $\tau(q) = -2 - q(1 - H^*) - \log_2(p_1^q + p_2^q)$
avec $p_1 + p_2 = 1$

→ le spectre des singularités est une courbe convexe non-dégénérée

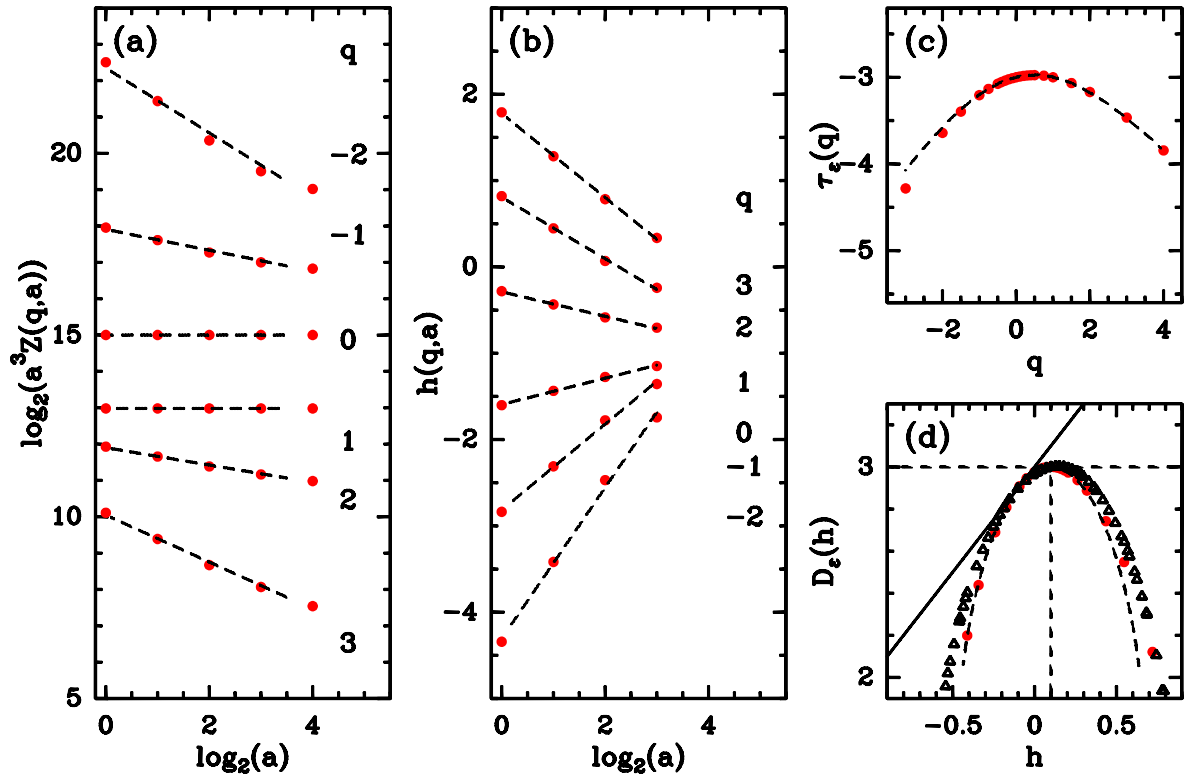
Champ de dissipation 3D : turbulence isotrope SND

code pseudo-spectral, grille $(512)^3$, $R_\lambda = 216$ (M. Meneguzzi)



Méthodologie MMTO 3D vs Algorithmes de comptage de boîtes

→ Algorithme de “Comptage de boîtes”, ajustement binomial avec $p_1 = 0.3$ et $p_2 = 0.7$
 → $p_1 + p_2 = 1$: diagnostique une structure multiplicative **conservative**



dissipation

modèle binomial :

$$\tau(q) = -2 - q - \log_2(p_1^q + p_2^q)$$

Méthodologie MMTO 3D vs Algorithmes de comptage de boîtes

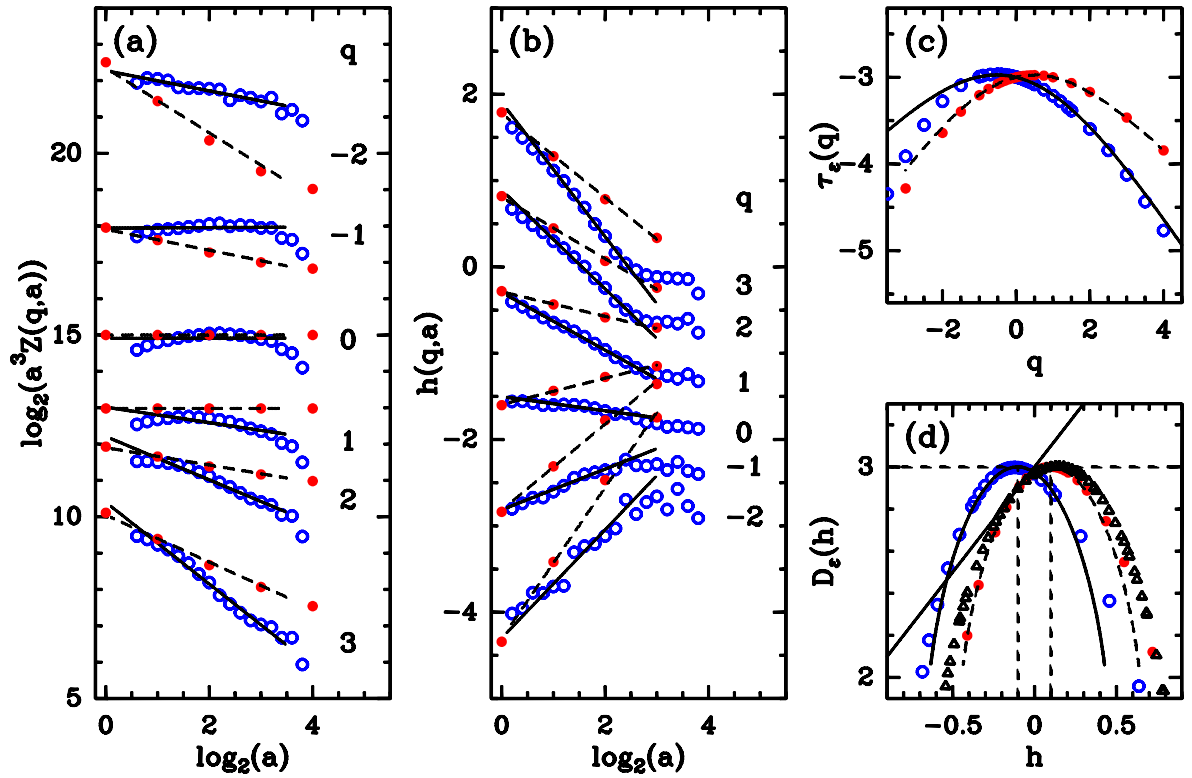
👉 Algorithme de “Comptage de boîtes”, ajustement binomial avec $p_1 = 0.3$ et $p_2 = 0.7$

→ $p_1 + p_2 = 1$: diagnostique une structure multiplicative **conservative**

👉 Méthodologie “MMTO 3D” révèle une structure multiplicative **non-conservative** :

ajustement binomial avec $p_1 = 0.36$ et $p_2 = 0.80$ ⇒ $p_1 + p_2 \neq 1$

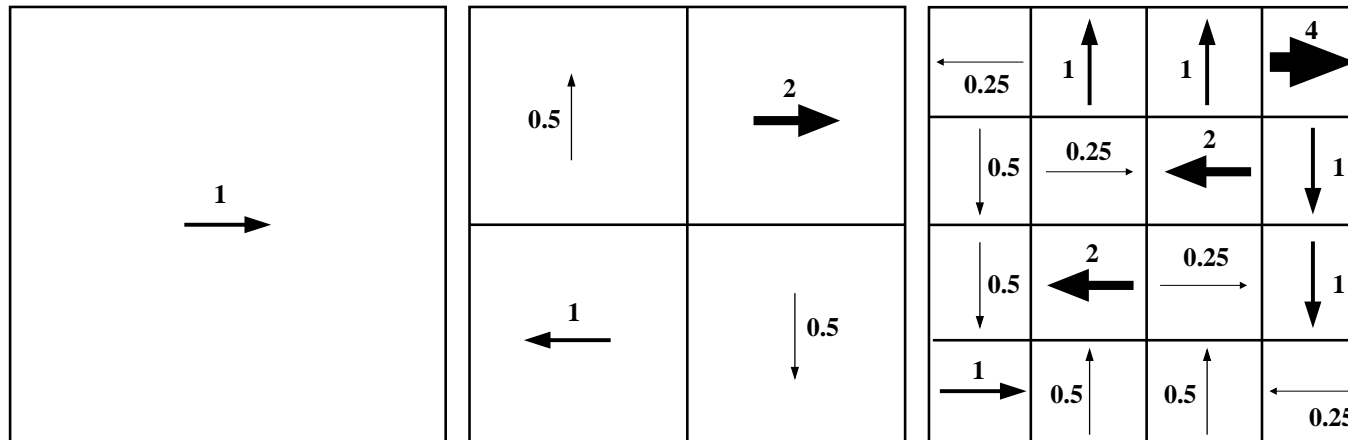
dissipation



modèle binomial : $\tau(q) = -2 - q - \log_2(p_1^q + p_2^q)$

remarque :
 $p_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$
 ⇒ comptage de boîtes biaisé !

Mesure multifractale autosimilaire vectorielle (cas 2D)



➔ Falconer et O'Neil (1995)

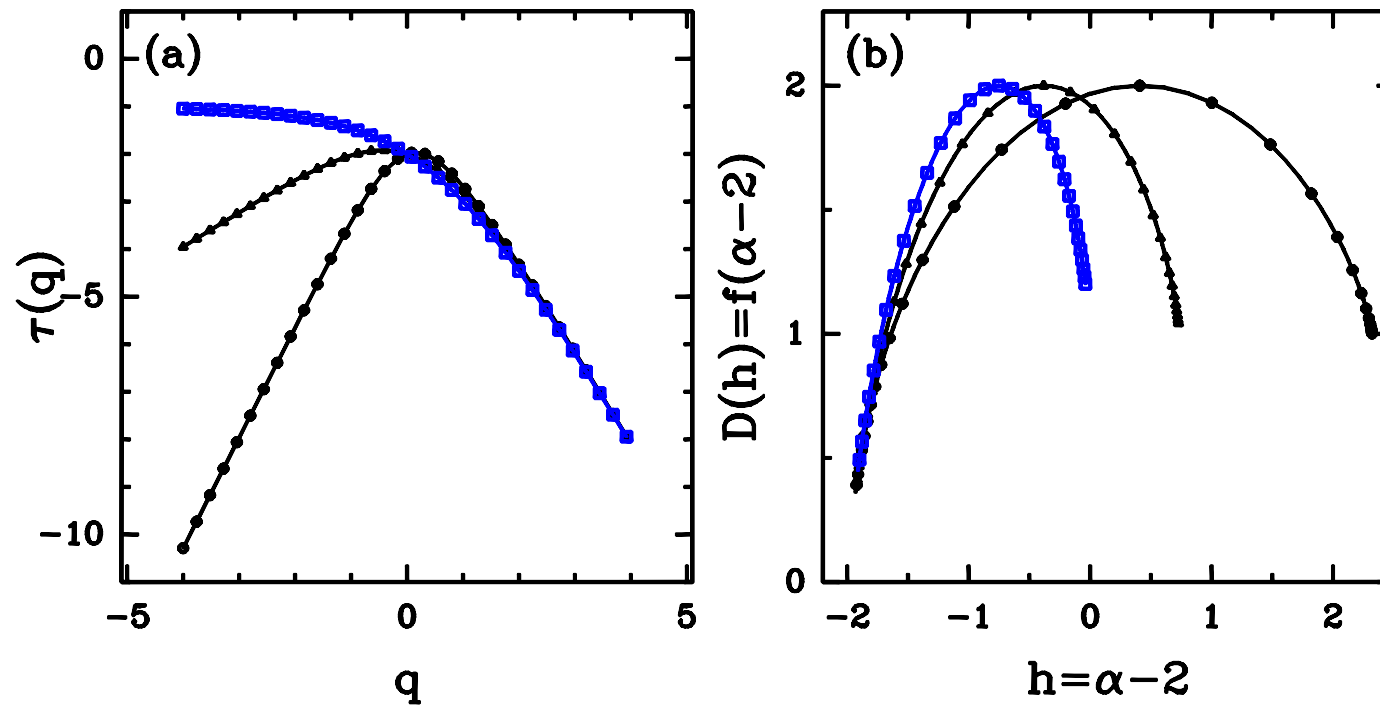
➔ **mesure scalaire** $\left\{ r : \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(r,l))}{\log l} = \alpha \right\}, \quad \alpha = h + 2$

$$\mathcal{Z}(q, l) = \sum_i \mu_i^q(l) \sim l^{\tau_\mu(q)}$$

➔ **mesure vectorielle** $\left\{ r : \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \int_{B(r,l)} \|\Phi_l \mu(s)\| d\mathcal{L}_d(s)}{\log l} = \alpha \right\}, \quad \alpha = h + 2$

$$\mathcal{Z}(q, l) = \sum_i \|\Phi_l \mu\|_i^q \sim l^{\tau_\mu(q)}$$

Mesure multifractale autosimilaire vectorielle (cas 2D)



$$\tau_\mu(q) = -\frac{\log(p_1^q + p_2^q + p_3^q + p_4^q)}{\log 2}$$

$$D_\mu(h) = f_\mu(\alpha - 2) = \inf_q(qh - \tau_\mu(q)).$$

Transformation en ondelettes tensorielle (cas 2D)

1. Transformée en ondelettes tensorielle du champ $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$:

$$\mathbb{T}_{\psi}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbb{T}_{\psi_i}[V_j](\mathbf{b}, \mathbf{a})) = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{\psi_1}[V_1] & \mathbb{T}_{\psi_1}[V_2] \\ \mathbb{T}_{\psi_2}[V_1] & \mathbb{T}_{\psi_2}[V_2] \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{T}_{\psi_i}[V_j](\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^{-3} \int d^3\mathbf{r} \psi_i(\mathbf{a}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{b})) V_j(\mathbf{r}), j = 1, 2$$

2. Direction de plus grande variation du champ vectoriel :

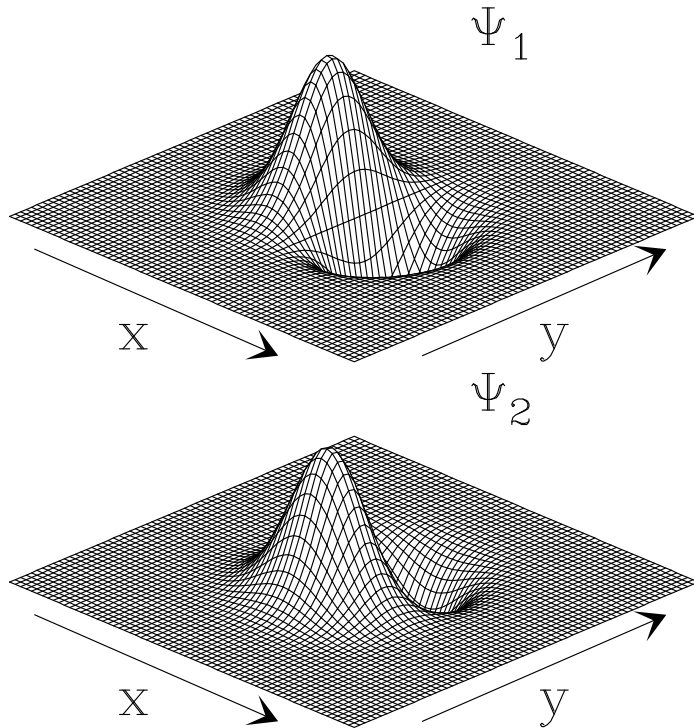
$$|\mathbb{T}_{\psi}[\mathbf{V}]| = \sup_{\mathbf{C} \neq 0} \frac{||\mathbb{T}_{\psi}[\mathbf{V}] \cdot \mathbf{C}||}{||\mathbf{C}||}$$

3. Décomposition en valeurs singulières du tenseur TO :

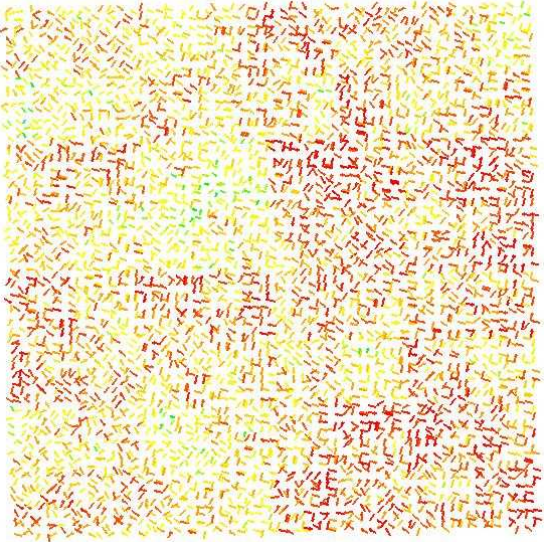
$$\mathbb{T}_{\psi}[\mathbf{V}] = (\mathbf{G}) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{\max} & 0 \\ 0 & \sigma_{\min} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{D})^T$$

4. Transformée en ondelettes tensorielle :

$$\mathbb{T}_{\psi, \max}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \sigma_{\max} \mathbf{G} \sigma_{\max}$$



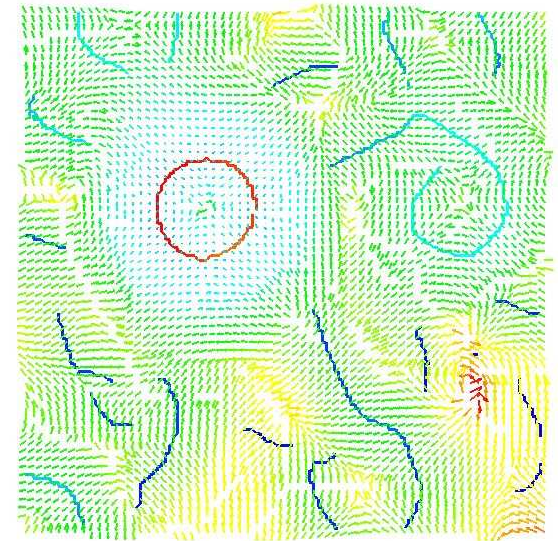
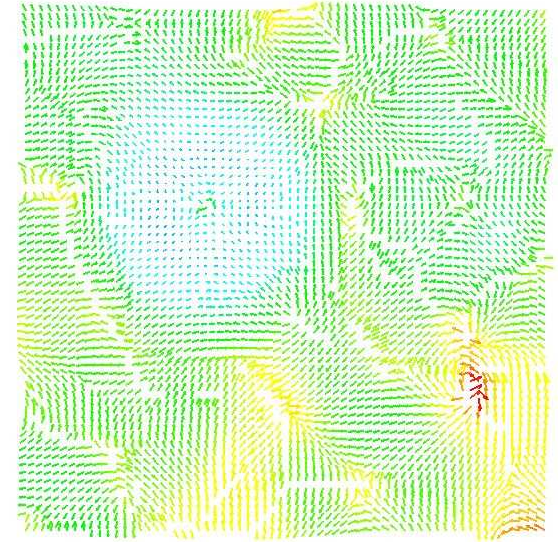
Donnée



Transformée en ondelettes tensorielle



$$\mathbf{T}_{\psi, \max}[\mathbf{V}](\mathbf{b}, a) = \sigma_{\max} \mathbf{G}_{\sigma_{\max}}$$



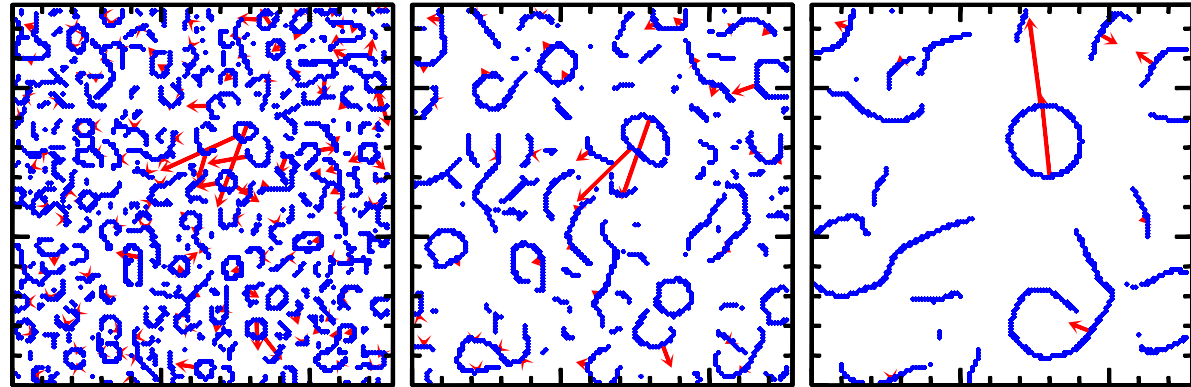
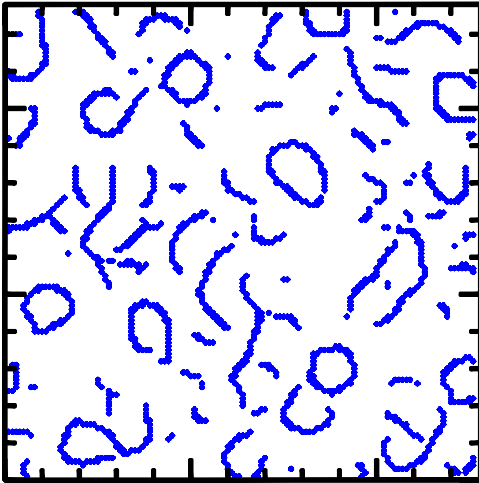
Chaînes de maxima du module σ_{\max} de la transformée en ondelettes tensorielle à l'échelle a :

$$\left\{ (b, a) / \frac{\partial \sigma_{\max}}{\partial G_{\max}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\max}}{\partial G_{\max}^2} < 0 \right\}$$

Méthodologie MMTO 2D tensorielle : Squelette

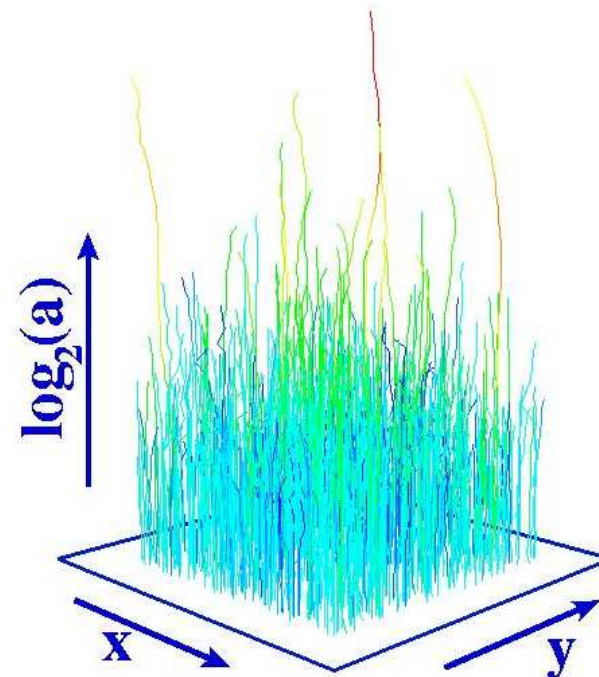
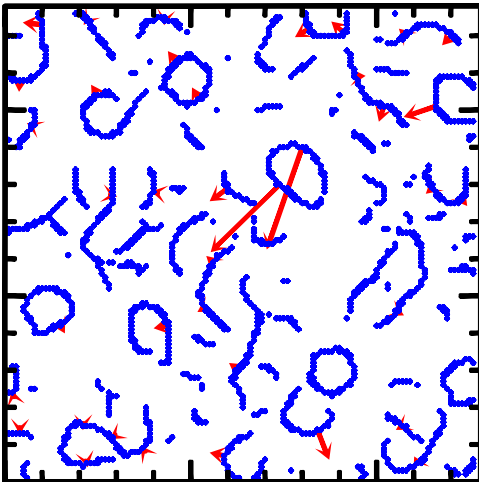
Chaînes MMTO à 3 échelles différentes

Chaînes MMTO



Chaînage des **MMMTO** : Squelette TO

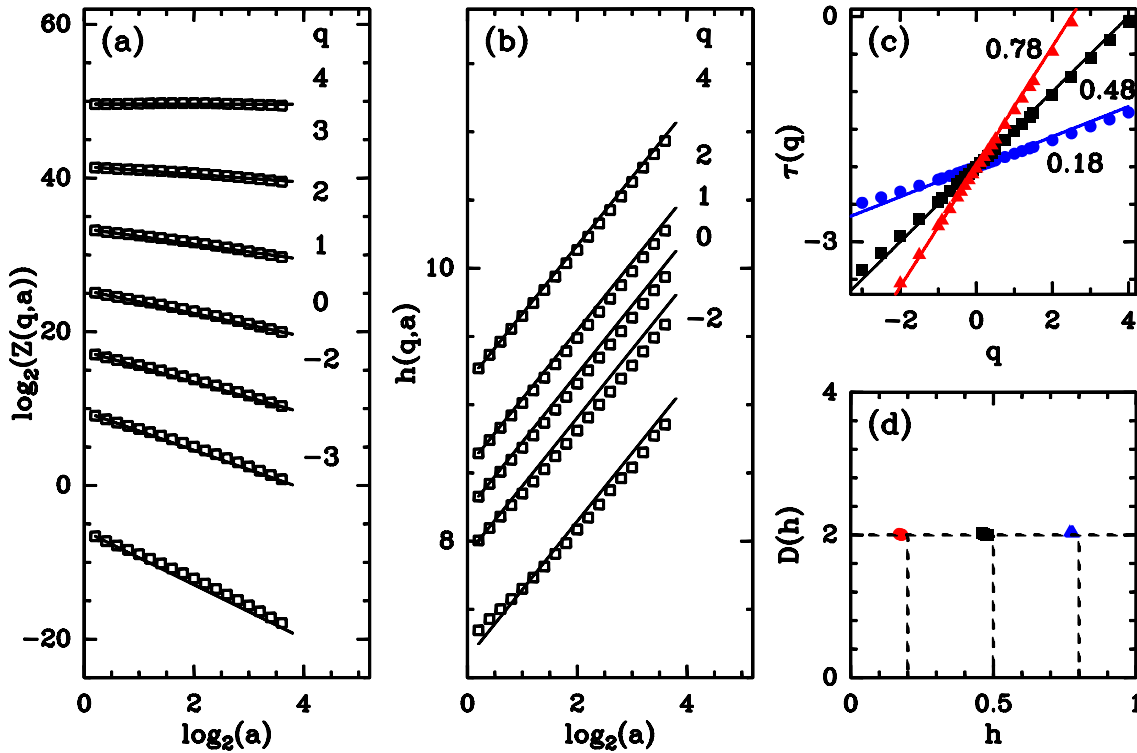
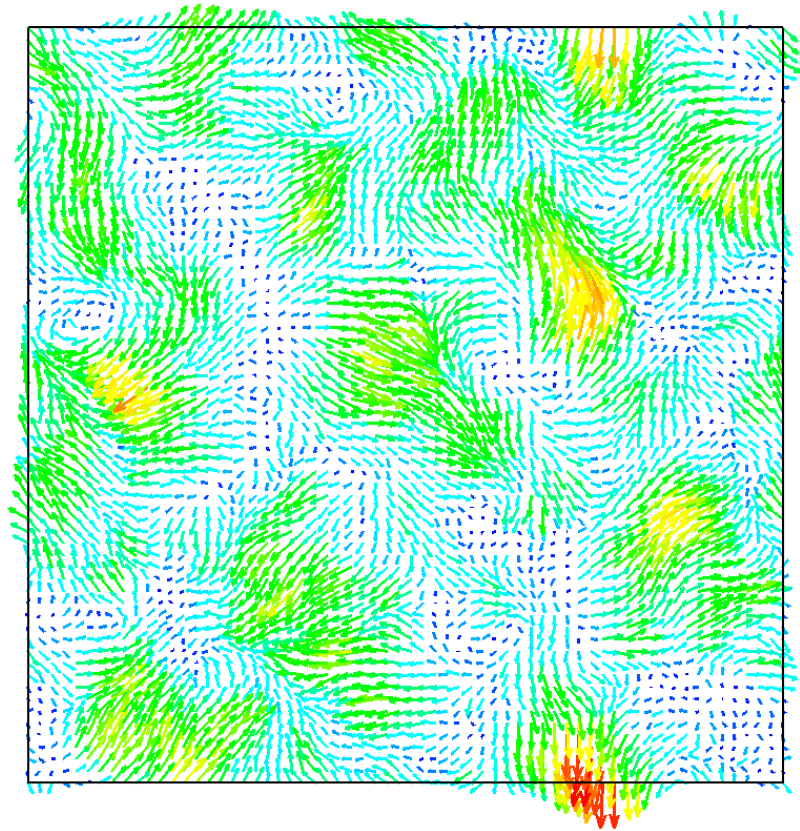
MMMTO



Champs vectoriels 2D monofractals

Champs Browniens Fractionnaires : $B_H(r)$

Simulation par méthode spectrale



Prédictions théoriques :

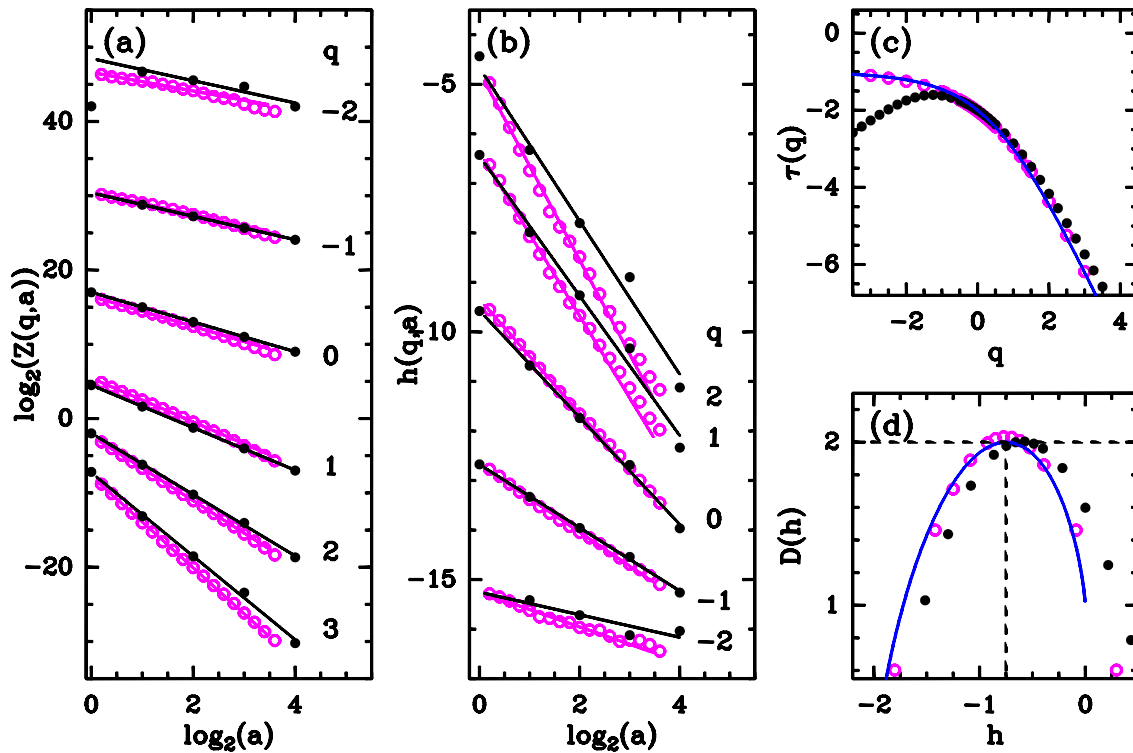
● $\tau(q)$ linéaire : $\tau(q) = qH - 2$

● spectre des singularités dégénéré :

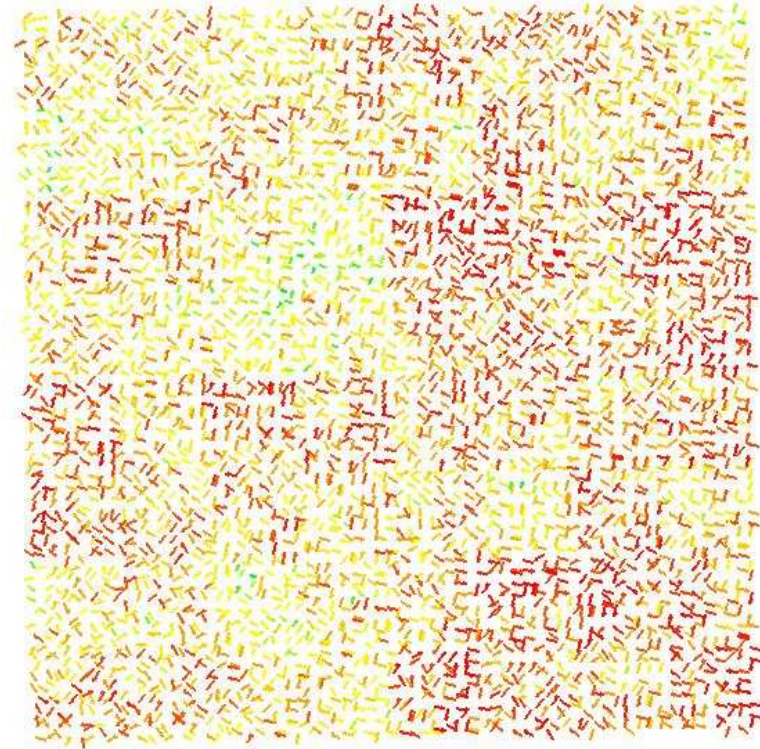
$$D(h = H) = 2$$

Mesures vectorielles 2D autosimilaires multifractales

Mesures vectorielles autosimilaires multifractales (Modèle de Falconer et O'Neil)



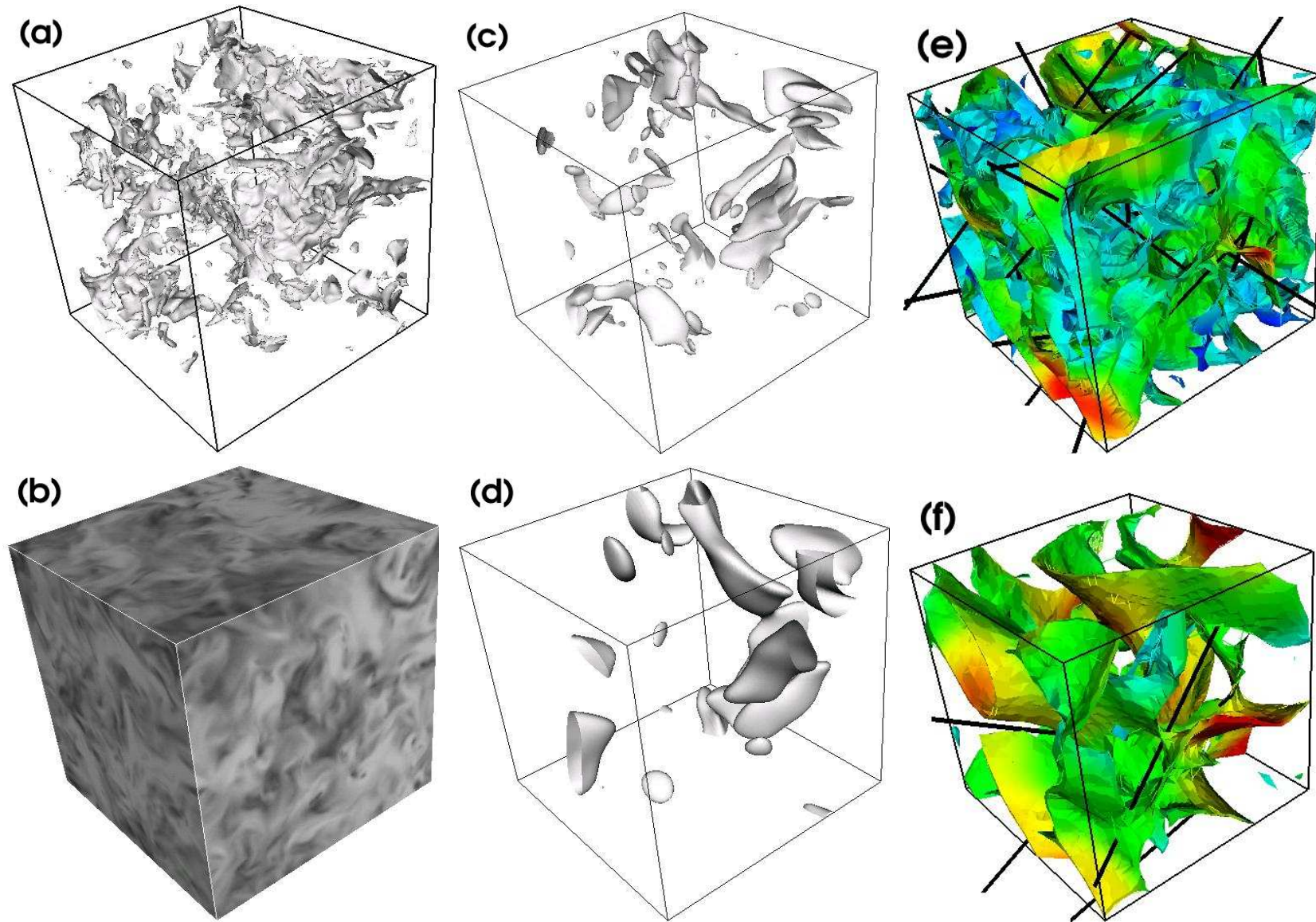
- comptage de boîtes vectoriel
- méthode MMTO 2D vectorielle



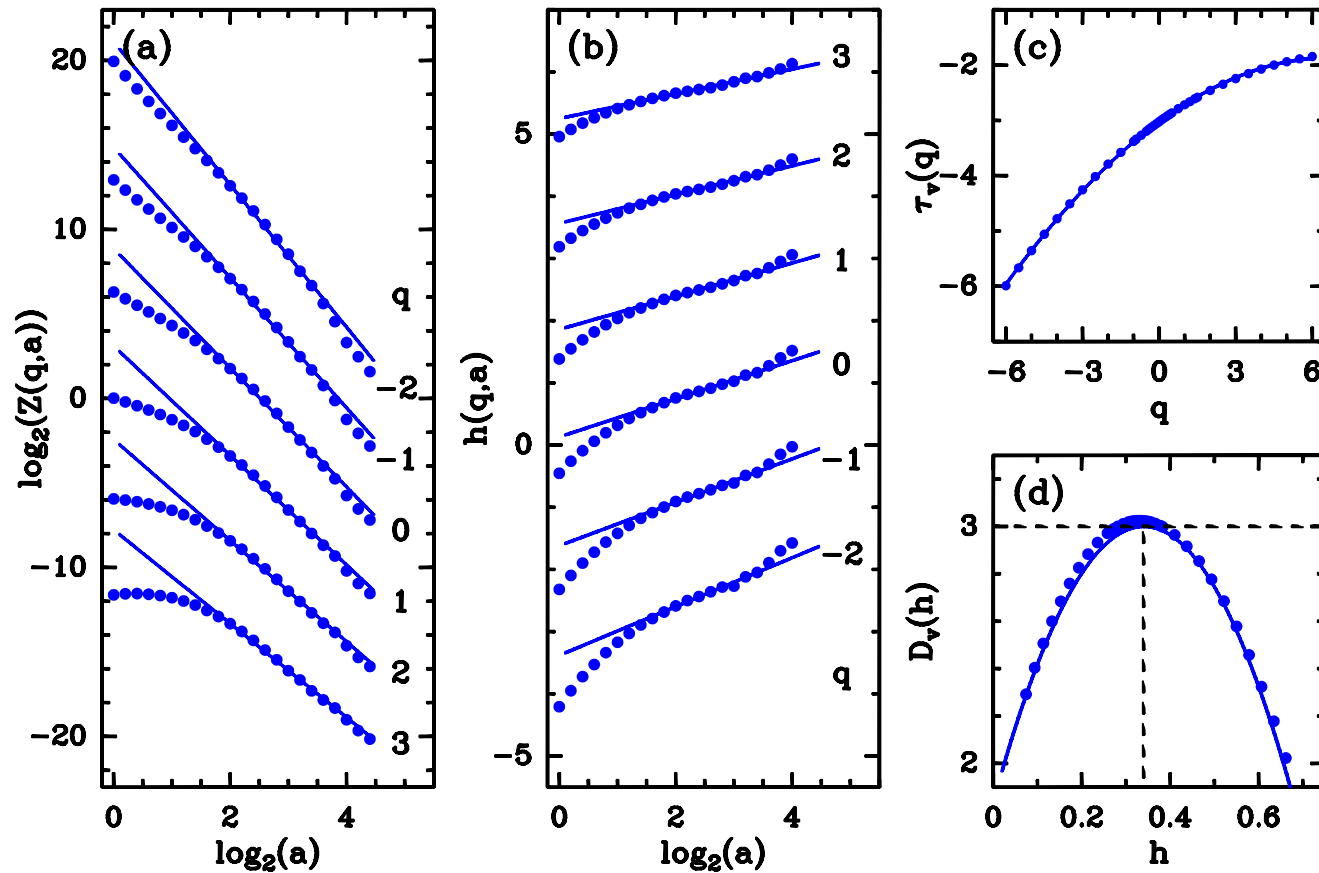
Prédictions théoriques :

- $\tau(q) = -\log_2(p_1^q + p_2^q + p_3^q + p_4^q)$
 $p_1 = p_4 = 0.5, p_2 = 2$ et $p_3 = 1$
- le comptage de boîtes vectoriel est moins performant

Méthode MMTO tensorielle 3D : champ de vitesse turbulent ($R_\lambda = 140$)



Méthode MMTO tensorielle 3D : spectre des singularités de la vitesse

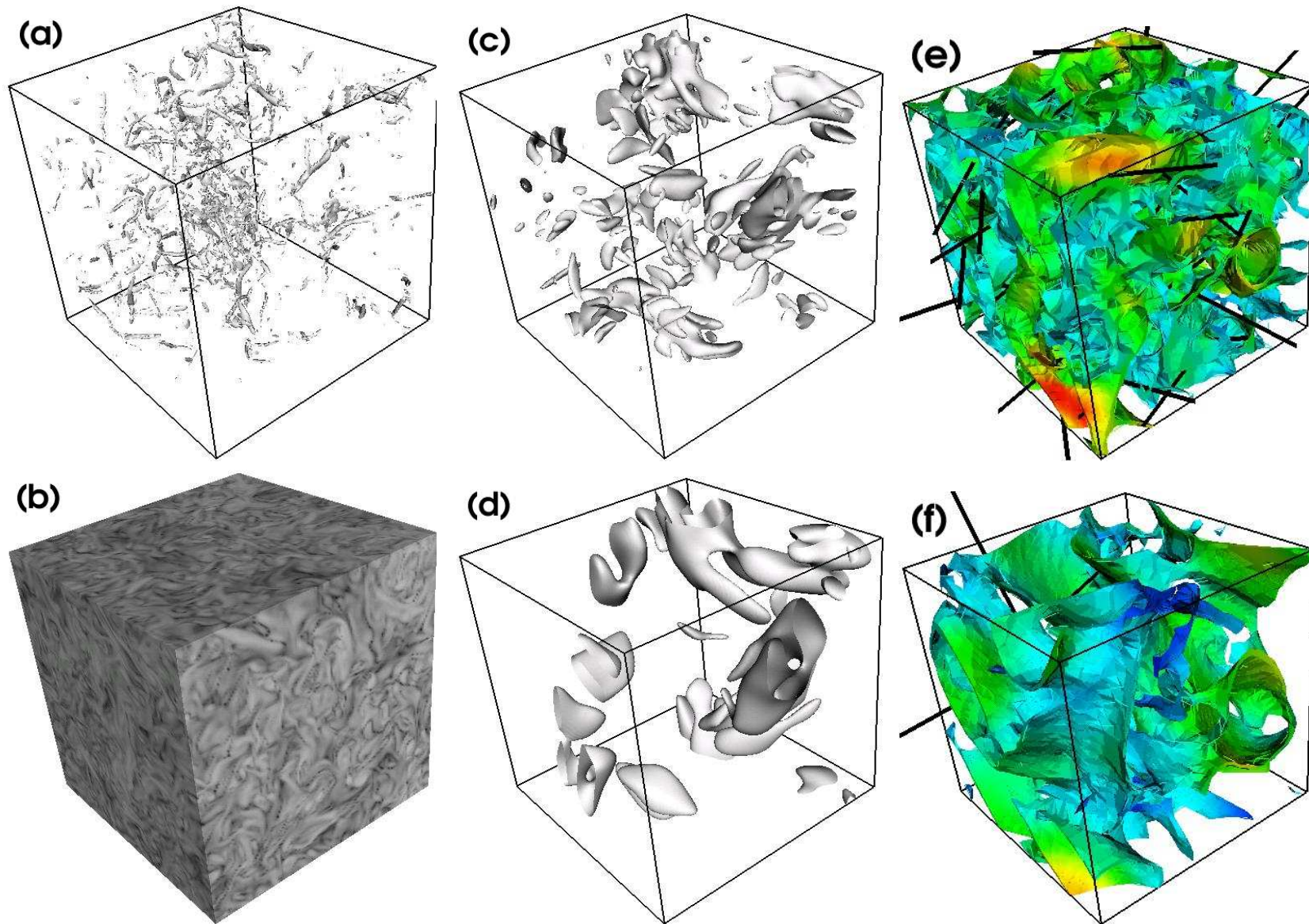


- ajustement parabolique : $\tau(q) = -C_0 - C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}$
- coefficient d'intermittence $C_2 = 0.049 \pm 0.004$

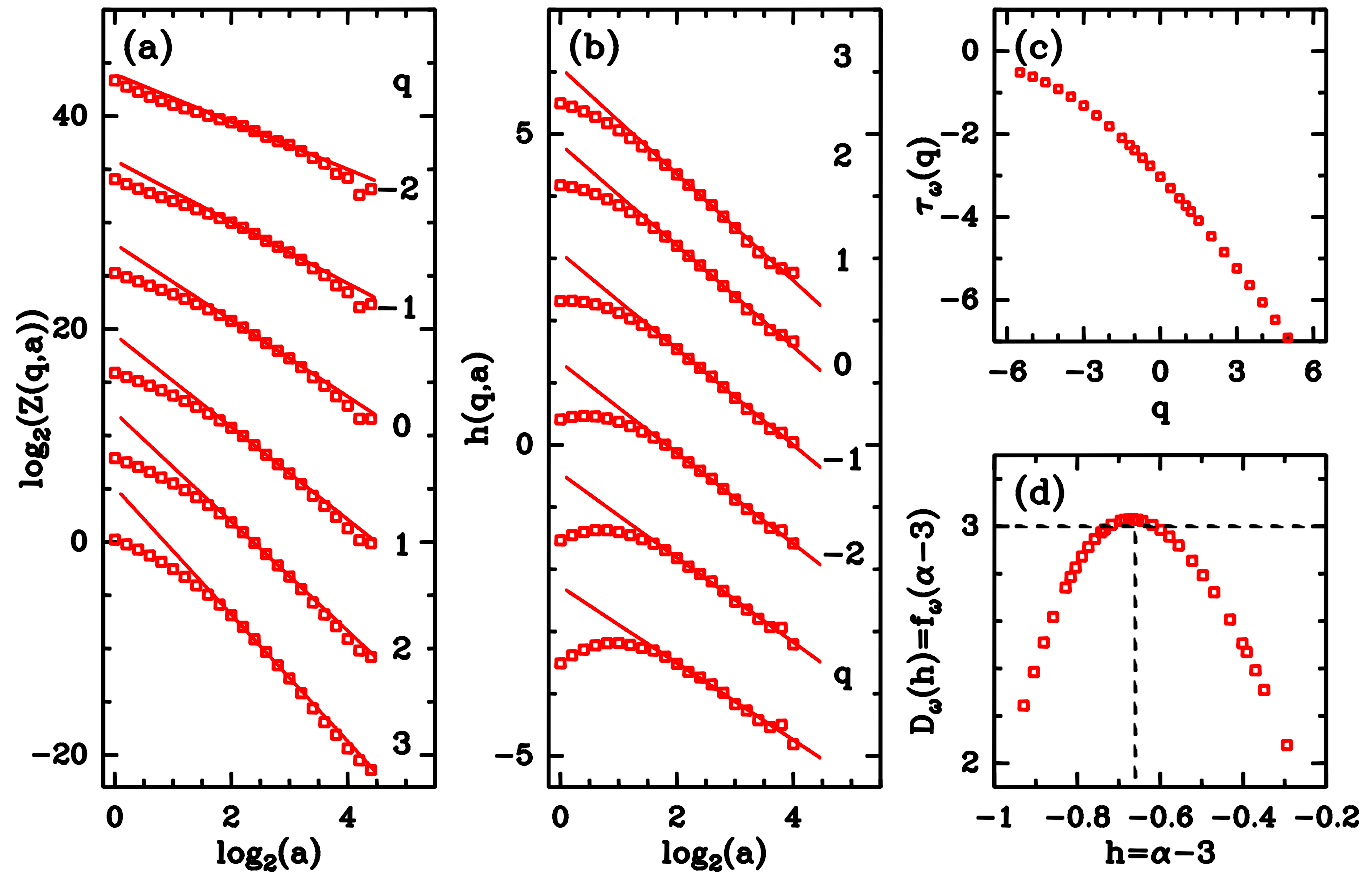
méthode des incréments 1D :

- longitudinaux : $C_2(\delta v_L) \sim 0.025$
- transversaux : $C_2(\delta v_T) \sim 0.040$

Méthode MMTO tensorielle 3D : champ de vorticité turbulent ($R_\lambda = 140$)

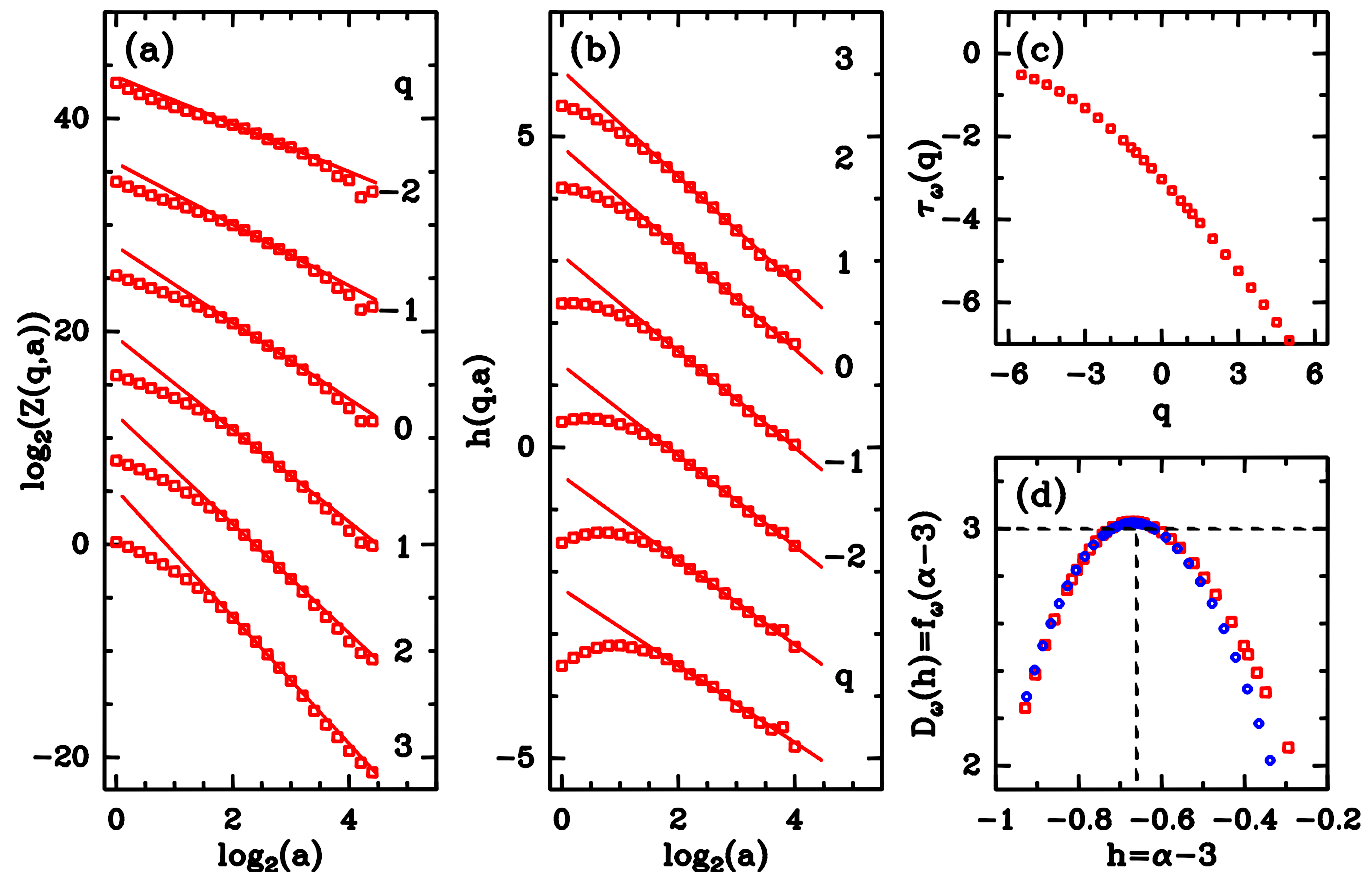


Méthode MMTO tensorielle 3D : spectre des singularités de la vorticité



□ vorticité

Méthode MMTO tensorielle 3D : spectre des singularités de la **vorticité**



□ vorticité

○ spectre $D_v(h + 1)$ vitesse translaté

⇒ même coefficient d'intermittence !

Conclusion générale et Perspectives

bilan :

- en mammographie : **résultats prometteurs à confirmer** (quantification de la radio-densité et caractérisation géométrique des microcalcifications)
- analyse multifractale MMT0 : passage vers les **champs scalaires 3D**
- passage vers les champs scalaires/vectoriels

perspectives :

- ☞ meilleure compréhension de l'information contenue dans le **tenseur TO**.
- ☞ **identification/sélection de structures cohérentes** en turbulence en utilisant la plus petite valeur singulière du **tenseur TO** : filaments ou nappes de vorticité.
- ☞ autres applications : astrophysique (milieu interstellaire, turbulence interstellaire), MHD, géophysique, ...

Remerciements :

- M.-H. Dilhuydy, radiologue à l'institut Bergonié de Bordeaux
- M. Meneguzzi et E. Lévêque (simulations numériques d'écoulements turbulents)

Notion d'exposant d'extinction

- Mesure singulière signée :

$$\forall A, \exists B \subset A / \mu_s(A)\mu_s(B) < 0$$

(ex : composante du champ magnétique, ...)

- Exposant d'extinction : $\kappa = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i |\mu(I_{i,\varepsilon})|}{\ln(1/\varepsilon)}$,

où $\{I_{i,\varepsilon}\}$ est un pavage du support de la mesure.

- formulation avec la transformée en ondelettes :

$$\kappa = -D_F - \tau(q = 1)$$

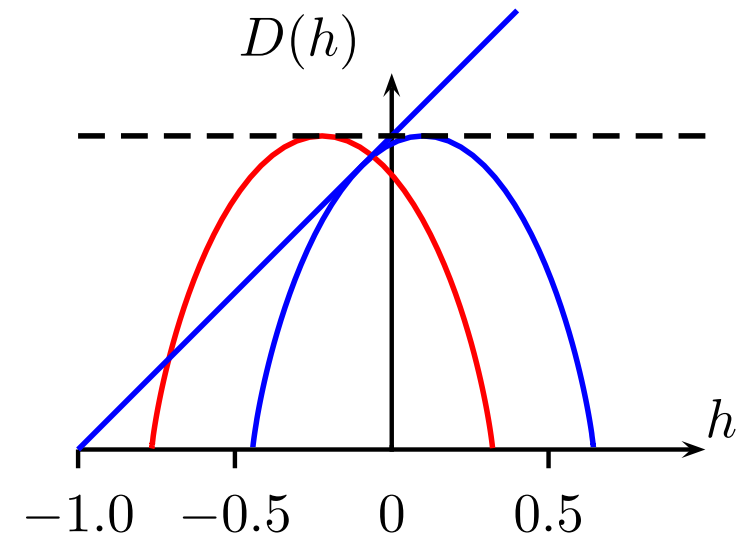
⇒ choix de l'ondelette analysatrice.

- lien avec la notion de **conservativité** d'une cascade multiplicative :

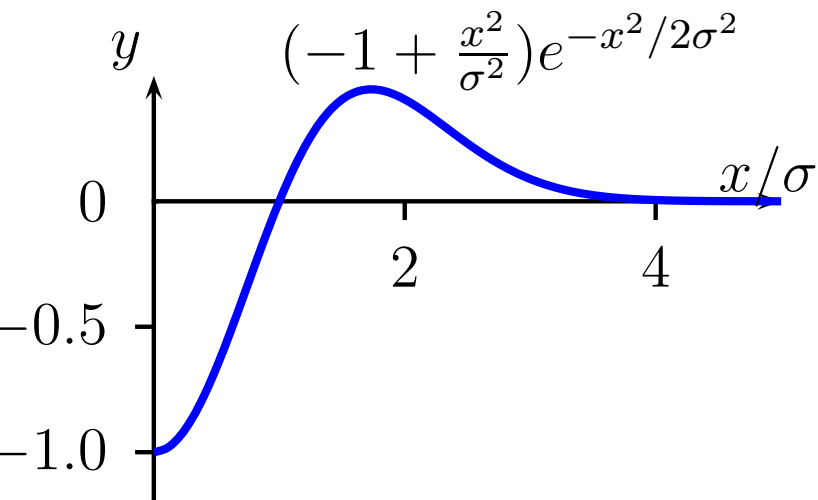
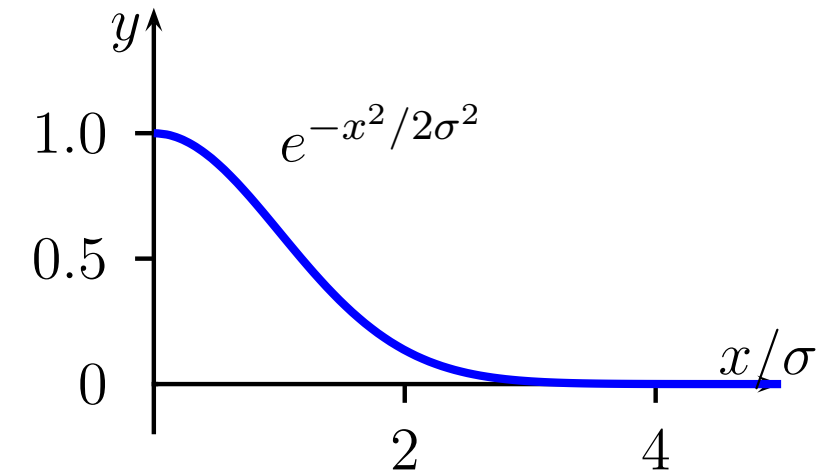
$$\kappa = -D_F - \tau(q = 1) = \frac{\ln \langle M \rangle}{\ln b} : \text{taux de transfert de la mesure de l'échelle } a \text{ à l'échelle } a/b$$

- cascade **conservative** $\iff \kappa = 0$

- cascade **non-conservative** $\iff \kappa \neq 0$



Technique de filtres récurrents en 3D



- **Filtre Gaussien $e^{-x^2/2\sigma^2}$ approché par $h_\sigma(x)$**

$$(a_0 \cos(\omega_0 \frac{x}{\sigma}) + a_1 \sin(\omega_0 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_0 \frac{x}{\sigma}} + (c_0 \cos(\omega_1 \frac{x}{\sigma}) + c_1 \sin(\omega_1 \frac{x}{\sigma})) \exp^{-b_1 \frac{x}{\sigma}}$$

- **Les coefficients a_i, b_i, c_i et ω_i sont estimés par une procédure de minimisation fonctionnelle de l'erreur quadratique relative**

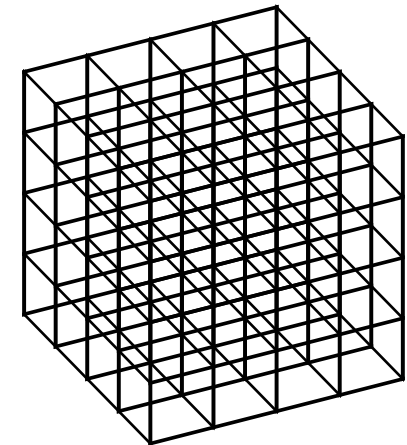
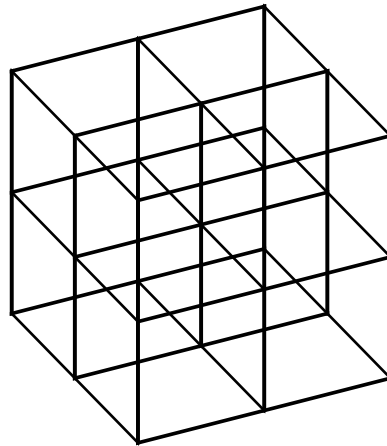
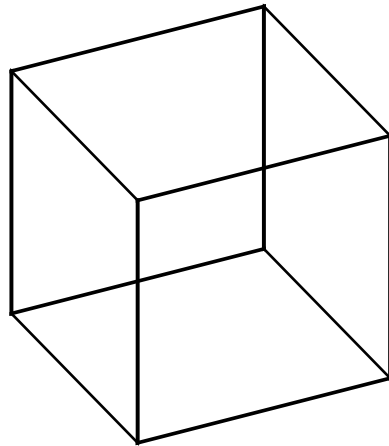
$$\epsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10\sigma} (g_\sigma(i) - h_\sigma(i))^2}{\sum_{i=1}^{10\sigma} g_\sigma(i)^2}$$

- **équation récurrente d'ordre 4 :**

$$y_k = n_{00}x_k + n_{11}x_{k-1} + n_{22}x_{k-2} + n_{33}x_{k-3} - d_{11}y_{k-1} - d_{22}y_{k-2} - d_{33}y_{k-3} - d_{44}y_{k-4}$$

- **gain en temps de calcul en 3D: 60 % pour le filtrage Gaussien et 25 % pour le filtrage Mexicain**

Algorithmes de comptage de boîtes : mesure multifractale



- μ : mesure de probabilité de support $E \subset \mathbb{R}^d$
 - exposant de singularité : $\alpha(x) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \mu(\mathcal{B}(l, x))}{\log l}$
 - méthode : paver le support de la mesure par des boîtes de taille $l_i = L/2^i$
 - fonctions de partition : $S_q(l_i) = \sum_{\mu(\mathcal{B}) \neq 0} [\mu(\mathcal{B})]^q = \langle \mu^q \rangle$
- spectres multifractals : $\tau(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log S_q(l)}{\log l}$;

$$f(\alpha) = D(h = \alpha - d) = \min_q (\alpha q - d q - \tau(q))$$

Spectres des singularités de la vitesse et de la vorticité

A toute singularité $h(\mathbf{r}_0)$ du champ de vitesse \mathbf{v} correspond une singularité $h(\mathbf{r}_0) - 1$ du champ de vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}_0 + l) &= f(\mathbf{x}_0) + (\nabla_{\mathbf{x}})f(\mathbf{x}_0)l + \dots + (\nabla_{\mathbf{x}})^n f(\mathbf{x}_0)l^{(n)} + |l|^{h(\mathbf{x}_0)} C(l) \\
 \downarrow \wedge \nabla_1 & & \swarrow \wedge \nabla_1 & & \downarrow \wedge \nabla_1 & & \searrow \wedge \nabla_1 \\
 \nabla_{\mathbf{x}} \wedge f(\mathbf{x}_0 + l) &= \nabla_{\mathbf{x}} \wedge f(\mathbf{x}_0) + \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge f)(\mathbf{x}_0)l + \dots + \nabla_{\mathbf{x}}^{n-1} (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge f)(\mathbf{x}_0)l^{(n-1)} \\
 & & & & & & + h|l|^{h-1} \mathbf{u}_1 \wedge C(l)
 \end{aligned}$$