



**HAL**  
open science

# Etude asymptotique de la turbulence d'ondes en rotation

Fabien Bellet

► **To cite this version:**

Fabien Bellet. Etude asymptotique de la turbulence d'ondes en rotation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Lyon, 2003. Français. NNT: . tel-00003678

**HAL Id: tel-00003678**

**<https://theses.hal.science/tel-00003678>**

Submitted on 3 Nov 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2002-D5-069

Année 2003

## THÈSE

pour obtenir le grade de

# DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École Doctorale MEGA

Spécialité : Énergétique et Thermique

présentée par

**Fabien Bellet**

---

# Étude asymptotique de la turbulence d'ondes en rotation

---

Soutenue le 23 juillet 2003 devant le jury :

C. Cambon	<i>Directeur de thèse</i>
F. Godeferd	
J. Piquet	<i>Président</i>
B. Rubinstein	<i>Rapporteur</i>
J. Scott	
O. Thual	<i>Rapporteur</i>



# Résumé

Il s'agit de déterminer l'influence d'une rotation solide sur la structure de la turbulence homogène incompressible. Les résultats du modèle spectral EDQNM étant probants en turbulence purement isotrope, la discrétisation spatiale devient un facteur limitant dans le cas anisotrope. Dans le cas où le nombre de Rossby est faible, un développement asymptotique en temps est possible. Le rôle joué par les surfaces résonantes étant dominant, le nouveau modèle conduit à une équation intégrodifférentielle fermée pour l'énergie spectrale. Par un traitement numérique précis, un code parallélisé donne des résultats quantitatifs. Il apparaît que l'énergie se concentre avec le temps vers le plan perpendiculaire au vecteur rotation. De plus, le spectre intégré suit une loi de pente -3 dans la zone inertielle, sans que cela soit dû aux seuls vecteurs d'ondes horizontaux. Il n'y a donc pas de vraie bidimensionnalisation, mais les vecteurs proches du plan horizontal ont une dynamique spécifique.

# Abstract

The objective of this work is the description of the influence of a solid-body rotation on the structure of incompressible homogeneous turbulence. The results from the EDQNM spectral model are accurate in purely isotropic turbulence, but the spatial discretization becomes limiting in the anisotropic case. If the Rossby number is small, an asymptotic development in time is possible. The role played by the resonant surfaces being dominant, the new model leads to a closed integro-differential equation for the spectral kinetic energy. By a precise numerical treatment, a parallelized program gives quantitative results. The energy seems indeed to concentrate with time towards the plane perpendicular to the rotation vector. Moreover, the integrated spectra follows, in the inertial zone, a -3 slope law, resulting from the whole range of vectors. Therefore, there is no true two-dimensional structure, but the vectors that are close to the horizontal plane have a specific dynamical behavior.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Denis Jeandel, puis Michel Lance, de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon.

Je remercie bien sûr mon directeur de thèse, Claude Cambon, pour ses conseils et sa grande expérience de la recherche, en particulier dans le domaine de la turbulence en rotation.

Je remercie aussi Julian Scott pour ses précieuses connaissances en mathématiques appliquées "à l'anglaise", pour ses grandes compétences théoriques, ainsi que pour son intuition numérique, toujours pertinente.

Je suis de plus très reconnaissant envers Fabien Godeferd de m'avoir soutenu tout au long de la thèse, et de m'avoir apporté presque quotidiennement son aide, que ce soit d'un point de vue physique ou numérique.

Je remercie ensuite tous les autres membres du laboratoire, permanents et doctorants, qui ont contribué à créer une atmosphère de travail favorable, ponctuée de moments de détente.

Enfin, ce travail aurait été beaucoup difficile sans le soutien de mes parents et de leurs conjoints, de mes amis proches de l'École Centrale, et surtout d'Anne, qui a toujours été à mes côtés pour m'encourager.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>La turbulence</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Approche expérimentale . . . . .	20
2.2.1	Caractérisation . . . . .	20
2.2.2	Mesure des champs . . . . .	20
2.2.3	Structuration d'un écoulement turbulent . . . . .	21
2.3	Outils statistiques . . . . .	22
2.3.1	Description statistique pour une variable aléatoire . . . . .	22
2.3.1.1	Moyenne discrète . . . . .	23
2.3.1.2	Moyenne continue et fonction densité de probabilité . . . . .	23
2.3.1.3	Propriétés . . . . .	24
2.3.1.4	Moments d'ordre $n$ . . . . .	24
2.3.2	Description statistique pour $N$ variables aléatoires . . . . .	25
2.3.2.1	Généralisation des moments d'ordre $n$ . . . . .	25
2.3.2.2	Fonction densité de probabilité conjointe . . . . .	25
2.3.2.3	Indépendance statistique . . . . .	26
2.3.2.4	Décorrélation . . . . .	27
2.3.2.5	Fonctions caractéristiques . . . . .	27
2.3.3	Un exemple important : la loi normale . . . . .	28
2.3.3.1	Variable gaussienne . . . . .	28
2.3.3.2	Vecteur gaussien . . . . .	29
2.3.3.3	Cumulants d'un vecteur gaussien . . . . .	30
2.3.4	Grandeurs physiques . . . . .	30
2.3.4.1	Variables aléatoires . . . . .	30
2.3.4.2	La décomposition de Reynolds . . . . .	31
2.4	Turbulence homogène et isotrope . . . . .	31
2.4.1	Turbulence homogène . . . . .	31
2.4.2	Hypothèses sur l'écoulement . . . . .	32
2.4.3	Corrélations doubles . . . . .	33
2.4.3.1	Points proches et éloignés . . . . .	33
2.4.3.2	Propriétés . . . . .	33
2.4.4	L'espace spectral . . . . .	34
2.4.4.1	La transformée de Fourier . . . . .	34
2.4.4.2	Pourquoi se placer dans l'espace spectral ? . . . . .	35



2.4.5	Le tenseur spectral des corrélations . . . . .	36
2.4.5.1	Définition . . . . .	36
2.4.5.2	Propriétés . . . . .	37
2.4.5.3	Lien avec l'énergie turbulente . . . . .	38
2.4.6	Turbulence isotrope . . . . .	39
2.4.6.1	Détermination des corrélations doubles . . . . .	39
2.4.6.2	Conséquences sur le tenseur spectral des corrélations	39
2.5	Dynamique des tourbillons . . . . .	40
2.5.1	Échelles spatiales . . . . .	40
2.5.1.1	Les grandes échelles . . . . .	40
2.5.1.2	Les petites échelles . . . . .	41
2.5.2	Équation d'évolution de l'énergie . . . . .	41
2.5.2.1	Équations pour le tenseur des corrélations . . . . .	41
2.5.2.2	Équation pour le tenseur spectral . . . . .	43
2.5.2.3	Propriétés . . . . .	43
2.5.2.4	Équation pour l'énergie . . . . .	44
2.5.3	Conséquences de la théorie de Kolmogorov . . . . .	45
2.5.3.1	Théorie spectrale . . . . .	45
2.5.3.2	La zone inertielle . . . . .	45
2.5.3.3	Loi en $k^{-5/3}$ . . . . .	46
2.5.3.4	Incréments de vitesse . . . . .	46
<b>3</b>	<b>La turbulence en rotation</b>	<b>49</b>
3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Première approche . . . . .	50
3.2.1	Équations du mouvement . . . . .	51
3.2.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	51
3.2.3	Écoulements géostrophiques . . . . .	52
3.2.3.1	Équation du mouvement . . . . .	52
3.2.3.2	Colonne de Taylor . . . . .	53
3.2.4	Équations pour les perturbations . . . . .	53
3.2.4.1	Le champ de vitesse fluctuante . . . . .	53
3.2.4.2	Symétries . . . . .	54
3.2.5	Équations pour la vitesse spectrale . . . . .	55
3.2.5.1	Évolution temporelle . . . . .	55
3.2.5.2	Propriétés . . . . .	55
3.2.6	Équations pour le tenseur spectral . . . . .	56
3.2.6.1	Moments d'ordre 3 . . . . .	56
3.2.6.2	Équation d'évolution de $\Phi_{ij}$ . . . . .	57
3.2.6.3	Conservation de l'énergie . . . . .	57
3.3	Le repère de Craya-Herring . . . . .	59
3.3.1	Définition . . . . .	59
3.3.2	Vecteurs $\mathbf{N}$ . . . . .	59
3.3.2.1	Définition . . . . .	60
3.3.2.2	Relations utiles . . . . .	60
3.3.3	Opérateurs linéaires . . . . .	60

3.3.3.1	Expression . . . . .	60
3.3.3.2	Propriétés . . . . .	61
3.3.4	Application au tenseur spectral . . . . .	61
3.3.4.1	Grandeurs spectrales fondamentales . . . . .	61
3.3.4.2	Expression tensorielle . . . . .	62
3.3.5	Étude de $e$ , $z$ et $h$ . . . . .	62
3.3.5.1	Lien avec les grandeurs physiques . . . . .	62
3.3.5.2	Cas d'une isotropie initiale . . . . .	63
3.3.5.3	Marqueurs de l'anisotropie . . . . .	63
3.3.5.4	Symétrie par inversion . . . . .	64
3.3.5.5	Équations d'évolution temporelle . . . . .	65
3.4	La théorie linéaire . . . . .	66
3.4.1	Résolution du système . . . . .	66
3.4.1.1	Vecteurs propres de $\gamma$ . . . . .	67
3.4.1.2	Étude de la relation de dispersion . . . . .	67
3.4.1.3	Champ de vitesse solution . . . . .	68
3.4.2	Tenseur de Green . . . . .	68
3.4.2.1	Définition . . . . .	68
3.4.2.2	Expression . . . . .	69
3.4.2.3	Solution . . . . .	69
3.4.3	Évolution des grandeurs spectrales . . . . .	70
3.4.3.1	Tenseur spectral . . . . .	70
3.4.3.2	Conséquences sur $e$ , $z$ et $h$ . . . . .	70
3.4.4	Turbulence faible devant la rotation . . . . .	71
3.4.4.1	Phénomènes caractéristiques . . . . .	71
3.4.4.2	Approche qualitative : les surfaces résonantes . . . . .	72
3.4.4.3	Conclusions . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Le modèle EDQNM</b> . . . . .	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Équations sur les moments . . . . .	76
4.2.1	Évolution des moments d'ordre 3 . . . . .	76
4.2.2	Tenseur de Green . . . . .	77
4.2.3	Solution particulière . . . . .	78
4.2.4	Solution générale formelle . . . . .	78
4.3	Approximations EDQNM . . . . .	78
4.3.1	Quasi-gaussianité . . . . .	79
4.3.1.1	Présentation . . . . .	79
4.3.1.2	Application à $F_{ilm}$ . . . . .	79
4.3.2	Amortissement tourbillonnaire . . . . .	80
4.3.2.1	Analyse du modèle QN . . . . .	80
4.3.2.2	Le modèle EDQN . . . . .	81
4.3.3	Choix de $d$ . . . . .	82
4.3.4	Markovianisation . . . . .	83
4.3.4.1	Remarques sur les différents modèles EDQNM . . . . .	83
4.3.4.2	Conséquences sur les effets de mémoire . . . . .	85

	4.3.4.3	Expression des moments d'ordre 3 . . . . .	86
	4.3.4.4	Fermeture des équations . . . . .	86
4.4		Analyse du modèle . . . . .	86
	4.4.1	Propriétés . . . . .	87
	4.4.1.1	Hermitiannité . . . . .	87
	4.4.1.2	Symétrie réelle . . . . .	87
	4.4.1.3	Incompressibilité . . . . .	88
	4.4.1.4	Réalisabilité . . . . .	88
	4.4.1.5	Conservation de l'énergie . . . . .	89
	4.4.2	Surfaces résonantes . . . . .	90
	4.4.2.1	Dépendance rapide du terme de transfert . . . . .	90
	4.4.2.2	Approche qualitative . . . . .	90
	4.4.2.3	Équations pour $e$ , $z$ et $h$ . . . . .	91
<b>5</b>		<b>Le modèle AQNM</b>	<b>93</b>
	5.1	Introduction . . . . .	93
	5.2	La turbulence d'ondes . . . . .	94
	5.2.1	Présentation . . . . .	94
	5.2.1.1	Rappels . . . . .	94
	5.2.1.2	Discussion sur la viscosité . . . . .	94
	5.2.2	Passage de la linéarité à la non-linéarité . . . . .	95
	5.2.2.1	Démarche générale . . . . .	95
	5.2.2.2	Remarque sur les vitesses spectrales . . . . .	96
	5.2.3	Amplitudes $A_{ss'}$ . . . . .	96
	5.2.3.1	Équation d'évolution . . . . .	96
	5.2.3.2	Propriétés . . . . .	97
	5.2.4	Interprétation spectrale . . . . .	98
	5.2.4.1	Lien avec $e$ , $z$ et $h$ . . . . .	98
	5.2.4.2	Relations inverses . . . . .	98
	5.3	Expression du terme de transfert . . . . .	99
	5.3.1	Hypothèses EDQN . . . . .	99
	5.3.1.1	Modélisation des corrélations triples . . . . .	99
	5.3.1.2	Symétrisation . . . . .	100
	5.3.2	Markovianisation . . . . .	100
	5.3.2.1	Tenseur $G_{ij}^{(ED)}$ . . . . .	100
	5.3.2.2	Conséquences sur $\tau_{ij}$ . . . . .	101
	5.3.3	Contraintes sur $\delta$ . . . . .	102
	5.4	Analyse asymptotique . . . . .	103
	5.4.1	Échelle de temps . . . . .	103
	5.4.2	Termes rapidement oscillants . . . . .	103
	5.5	Équations d'évolution des amplitudes . . . . .	105
	5.5.1	Évolution temporelle de $a_s$ . . . . .	105
	5.5.1.1	Partie $\zeta$ . . . . .	106
	5.5.1.2	Partie $I$ . . . . .	107
	5.5.1.3	Équation d'évolution de $a_s$ . . . . .	108
	5.5.2	Évolution temporelle de $A_{-1-1}$ . . . . .	108

	5.5.2.1	Terme non linéaire . . . . .	109
	5.5.2.2	Équation d'évolution de $Z$ . . . . .	109
5.6		Limite $\delta \rightarrow 0$ et surfaces résonantes . . . . .	109
	5.6.1	Prédominance des surfaces résonantes . . . . .	109
	5.6.2	Intégrales surfaciques . . . . .	110
	5.6.2.1	Description de l'espace spectral . . . . .	110
	5.6.2.2	Termes lentement variables . . . . .	111
	5.6.2.3	Développement limité de $F_{s's''}$ . . . . .	111
	5.6.2.4	Extension de l'intégration . . . . .	112
	5.6.2.5	Propriété du Dirac . . . . .	113
	5.6.2.6	Simplification de $B_s(\mathbf{k}, t)$ , $C_s(\mathbf{k}, t)$ et $\Re[D(\mathbf{k}, t)]$ . . . . .	114
	5.6.3	Intégrale volumique . . . . .	114
	5.6.3.1	Domaine éloigné de la surface résonante . . . . .	115
	5.6.3.2	Domaine proche de la surface résonante . . . . .	115
	5.6.3.3	Valeur principale d'une intégrale . . . . .	117
	5.6.3.4	Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	117
5.7		Évolution des grandeurs spectrales . . . . .	118
	5.7.1	Équation pour le spectre d'énergie . . . . .	118
	5.7.2	Équation pour l'hélicité spectrale . . . . .	119
	5.7.3	Équation pour le terme d'anisotropie . . . . .	120
	5.7.4	Remarques . . . . .	120
5.8		Réalisabilité du modèle AQNM . . . . .	121
	5.8.1	Condition équivalente de réalisabilité . . . . .	121
	5.8.2	Démonstration . . . . .	122
	5.8.2.1	Équation d'évolution de $\mathfrak{F}$ . . . . .	122
	5.8.2.2	Fonction auxiliaire . . . . .	123
	5.8.2.3	Étude du second membre . . . . .	123
	5.8.2.4	Minimum de $\mathfrak{J}$ . . . . .	123
	5.8.3	Conclusions . . . . .	124
5.9		Dernières simplifications . . . . .	124
	5.9.1	Calcul de $g_{s's''}$ . . . . .	124
	5.9.1.1	Expression en fonction de $\mathbf{N}$ . . . . .	125
	5.9.1.2	Invariance tensorielle . . . . .	125
	5.9.1.3	Changement de repère . . . . .	126
	5.9.1.4	Nouvelles coordonnées . . . . .	127
	5.9.1.5	Contraction d'indices . . . . .	127
	5.9.1.6	Expression de $g_{s's''}$ . . . . .	128
	5.9.2	Expression de $\gamma_{s's''}$ . . . . .	129
	5.9.3	Équations asymptotiques d'évolution . . . . .	130
	5.9.3.1	Équation pour $e$ . . . . .	130
	5.9.3.2	Équation pour $h$ . . . . .	131
<b>6</b>		<b>Implémentation numérique AQNM</b> . . . . .	<b>133</b>
	6.1	Introduction . . . . .	133
	6.2	Transformation de l'équation d'évolution . . . . .	134
	6.2.1	Équation de départ . . . . .	134

6.2.1.1	Introduction d'une viscosité . . . . .	134
6.2.1.2	Équation découplée pour $e$ . . . . .	135
6.2.2	Symétries . . . . .	135
6.2.2.1	Axisymétrie . . . . .	135
6.2.2.2	Symétrie miroir . . . . .	136
6.2.3	Traitement des singularités . . . . .	137
6.2.3.1	Changement de repère . . . . .	137
6.2.3.2	Première singularité . . . . .	137
6.2.3.3	Deuxième singularité . . . . .	138
6.2.4	Paramétrisation sphérique . . . . .	139
6.2.4.1	Variables adimensionnées . . . . .	139
6.2.4.2	Transformation de l'intégration . . . . .	139
6.2.4.3	Gradient de $f_{s's''}$ . . . . .	140
6.2.4.4	Nouvelle équation d'évolution . . . . .	140
6.3	Propriétés du modèle . . . . .	141
6.3.1	Conservation de l'énergie . . . . .	141
6.3.1.1	Évolution de l'énergie totale . . . . .	141
6.3.1.2	Symétrisation des triades . . . . .	142
6.3.1.3	Invariants . . . . .	143
6.3.1.4	Remarque sur la numérisation du modèle . . . . .	143
6.3.2	Analyse dimensionnelle . . . . .	144
6.3.2.1	Adimensionnalisation . . . . .	144
6.3.2.2	Temps caractéristiques . . . . .	145
6.4	Implémentation numérique . . . . .	146
6.4.1	Discrétisation de l'espace spectral . . . . .	146
6.4.1.1	Direction radiale . . . . .	146
6.4.1.2	Direction azimutale . . . . .	147
6.4.1.3	Direction méridienne . . . . .	147
6.4.2	Discrétisation des surfaces résonantes . . . . .	148
6.4.2.1	Rejet des boîtes . . . . .	148
6.4.2.2	Évaluation des grandeurs à la surface . . . . .	148
6.4.3	Évaluation de l'aire dans la boîte . . . . .	149
6.4.3.1	Équation du plan . . . . .	149
6.4.3.2	Projection du plan sur une face . . . . .	150
6.4.3.3	Calcul d'aire auxiliaire . . . . .	151
6.4.4	Interpolation de l'énergie . . . . .	153
6.4.4.1	Description de la méthode . . . . .	153
6.4.4.2	Schéma d'interpolation d'ordre 2 . . . . .	154
6.4.5	Schémas temporels . . . . .	154
6.4.5.1	Schéma Euler visqueux . . . . .	155
6.4.5.2	Schéma implicite . . . . .	156
6.4.6	Remarques sur l'implémentation numérique . . . . .	156
6.4.6.1	Récapitulatif . . . . .	156
6.4.6.2	Parallélisation . . . . .	157
6.4.6.3	Comparaison série-parallèle . . . . .	158

<b>7</b>	<b>Étude numérique du modèle AQNM</b>	<b>161</b>
7.1	Introduction . . . . .	161
7.2	Étude de convergence du terme de transfert . . . . .	162
7.2.1	Présentation . . . . .	162
7.2.1.1	Moyens de calcul numérique . . . . .	162
7.2.1.2	Choix des paramètres de départ . . . . .	163
7.2.1.3	Méthodes de comparaisons . . . . .	163
7.2.2	Variations terme à terme du transfert . . . . .	163
7.2.2.1	Principe . . . . .	164
7.2.2.2	Contraintes induites sur les paramètres . . . . .	164
7.2.3	Intégrale spatiale du transfert . . . . .	165
7.2.3.1	Principe . . . . .	165
7.2.3.2	Transposition numérique . . . . .	166
7.2.3.3	Quantificateur de convergence . . . . .	166
7.2.4	Convergence par itération . . . . .	166
7.2.4.1	Première série . . . . .	167
7.2.4.2	Estimation du temps de calcul . . . . .	167
7.2.4.3	Deuxième série . . . . .	168
7.2.4.4	Troisième série . . . . .	169
7.2.4.5	Dernière série . . . . .	170
7.2.5	Méthodes numériques . . . . .	170
7.2.5.1	Dépendance du transfert en $M_\rho$ . . . . .	170
7.2.5.2	Ordre de la méthode de calcul des aires . . . . .	171
7.3	Stabilité et convergence à $\Re = 1$ . . . . .	173
7.3.1	Stabilité . . . . .	173
7.3.1.1	Choix de $k_{max}$ . . . . .	173
7.3.1.2	Choix du pas de temps . . . . .	174
7.3.1.3	Évolution temporelle . . . . .	175
7.3.2	Convergence avec la discrétisation temporelle . . . . .	178
7.3.2.1	Méthodologie . . . . .	178
7.3.2.2	Diminution du pas de temps . . . . .	178
7.3.2.3	Augmentation du pas de temps . . . . .	178
7.3.3	Étude des énergies négatives . . . . .	179
7.3.3.1	Observations . . . . .	179
7.3.3.2	Influence de la résolution spatiale . . . . .	179
7.3.3.3	Influence du pas de temps . . . . .	180
7.3.3.4	Synthèse . . . . .	181
7.3.3.5	Utilisation de la mise à zéro . . . . .	182
7.3.4	Convergence avec la discrétisation spatiale . . . . .	182
7.3.4.1	Méthodologie . . . . .	183
7.3.4.2	Vérification à différents instants . . . . .	184
7.4	Recherche de stabilité à $\Re$ infini . . . . .	184
7.4.1	Rôle de la coupure radiale et du pas de temps . . . . .	185
7.4.2	Évolution temporelle à $k_{max} = 10$ et $dt = 0,01$ . . . . .	185
7.4.3	Évolution temporelle à $k_{max} \geq 60$ et $dt = 0,01$ . . . . .	188
7.4.4	Évolution temporelle à $k_{max} = 60$ et $0,001 \leq dt < 0,01$ . . . . .	190

7.4.5	Inclusion de triades résonantes . . . . .	191
7.4.5.1	Extension du domaine . . . . .	191
7.4.5.2	Application à des calculs typiques . . . . .	192
7.4.6	Évolution temporelle à $k_{max} = 60$ et $dt = 0,0001$ . . . . .	194
7.4.6.1	Analyse . . . . .	194
7.4.6.2	Diminution de $M_\theta$ . . . . .	195
7.4.7	Évolution temporelle à $k_{max} = 60$ et $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	195
7.4.8	Étude du schéma temporel . . . . .	197
7.4.8.1	Ordre du schéma temporel . . . . .	197
7.4.8.2	Schéma à $\mathfrak{R}$ infini . . . . .	198
7.4.8.3	Perturbation de la solution . . . . .	198
7.4.9	Ajout de viscosité . . . . .	199
7.5	Analyse et comparaison des résultats . . . . .	200
7.5.1	Résultats AQNM . . . . .	200
7.5.1.1	Rotation et turbulence bidimensionnelle . . . . .	200
7.5.1.2	Premières remarques . . . . .	204
7.5.1.3	Taux de décroissance de la turbulence . . . . .	205
7.5.1.4	Directionnalité : isovaleurs . . . . .	206
7.5.1.5	Directionnalité : énergie angulaire . . . . .	206
7.5.1.6	Énergie spectrale intégrée sur $k$ . . . . .	210
7.5.1.7	Transfert intégré sur $k$ . . . . .	213
7.5.1.8	Spectres d'énergie unidimensionnels . . . . .	215
7.5.1.9	Composantes bidimensionnelles de l'énergie . . . . .	216
7.5.1.10	Tenseur de Reynolds . . . . .	218
7.5.1.11	Longueurs intégrales . . . . .	221
7.5.2	Comparaison avec l'expérience? . . . . .	226
7.5.2.1	Estimation physique de $\mathfrak{R}$ et $Ro_L$ . . . . .	226
7.5.2.2	Conditions de validité . . . . .	227
7.5.3	Résultats EDQNM . . . . .	227
7.5.3.1	Paramètres EDQNM . . . . .	228
7.5.3.2	Évolution temporelle . . . . .	228
7.5.3.3	Comparaisons . . . . .	229

**8 Conclusion et perspectives 237**

# Chapitre 1

## Introduction

Les équations de Navier-Stokes, assorties de conditions initiales et aux limites, permettent de prédire le comportement, dans l'espace et le temps, de l'écoulement d'un fluide newtonien quelconque. La simplicité apparente de ces équations aurait pu laisser croire, au XIX<sup>ème</sup> siècle, que la mécanique des fluides deviendrait rapidement une sous-branche complètement explorée de la mécanique générale. Il est vrai que dans une multitude de cas particuliers, liés à la géométrie du problème ou aux propriétés du fluide, une solution explicite peut être obtenue. La plupart du temps, il s'agit en effet d'écoulements laminaires, c'est-à-dire pour lesquels le fluide se déplace de manière régulière et prévisible. Mais dès que les effets non linéaires de l'équation de conservation de la quantité de mouvement se font plus importants, le comportement du fluide devient nettement plus désordonné, imprévisible et aléatoire, ou encore turbulent. Dès lors, donner une expression analytique du champ de vitesse, de pression ou encore de température, même dans des cas simples, devient un véritable défi, et il faut souvent se contenter d'une description statistique de l'écoulement. Cela explique pourquoi la preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution générale aux équations de Navier-Stokes est actuellement toujours un problème ouvert. La démonstration fait d'ailleurs l'objet, avec six autres problèmes majeurs de physique mathématique, d'une récompense d'un million de dollars par le Clay Mathematics Institute à Cambridge.

Il faut attendre 1941 pour que la théorie de Kolmogorov [33] voie le jour, et marque une étape cruciale dans l'étude de la turbulence, en donnant des résultats qualitatifs précis dans le cas d'une turbulence homogène isotrope non entretenue. Encore aujourd'hui, ces travaux servent de référence à l'ensemble des sujets de recherche fondamentale en turbulence. Cette théorie, en s'appuyant sur l'universalité des grandeurs statistiques, prédit les lois d'échelles des fonctions de structure, sans se servir directement des équations de Navier-Stokes (sauf pour l'ordre 3). Un raisonnement plus quantitatif consiste à donner un modèle de fermeture pour les équations pour les moments d'ordre peu élevé, dérivées cette fois-ci des équations de Navier-Stokes. Dans les années 1950, Kraichnan [34] a ouvert la voie des fermetures triadiques en deux points, telles que l'approche DIA (Direct Interaction Approximation). Cette dernière offre un système d'équations cohérent pour le tenseur spectral d'ordre 2 et la fonction de Green non linéaire (appelé tenseur réponse). Ces modèles s'appliquent ainsi particulièrement à la classe d'écoulements pour lesquels le fluide est soumis à



une force extérieure. Cette force peut prendre des expressions très diverses, mais les exemples qui viennent à l'esprit immédiatement sont ceux liés à l'air dans l'atmosphère. Il est intéressant de considérer les cas où le fluide est soumis à un champ de gravité, à une rotation solide, ou encore aux deux conjointement. L'effet de la rotation est en effet complètement équivalent, dans le référentiel tournant, à l'action de deux forces extérieures sur le fluide, à savoir la force centrifuge et la force de Coriolis. L'attention s'est portée ici uniquement sur l'influence d'une rotation (dont l'intensité comparée à la non linéarité est mesurée avec le nombre adimensionnel de Rossby) sur la structure de la turbulence, car le problème s'est révélé plus difficile à résoudre que prévu.

L'expérience fondatrice des écoulements en rotation est due à Taylor, dont les écrits scientifiques ont été rassemblés par Batchelor en 1971 dans [59]. Par un dispositif expérimental simple mais ingénieux, où un cylindre rempli d'eau était mis en rotation autour de son axe, fut mise en évidence la tendance à la bidimensionalisation de l'écoulement sous la forme d'une colonne dite de Taylor. Cet effet a pendant longtemps été attribué à la seule domination dans l'écoulement de modes linéaires quasi-stationnaires, dits géostrophiques, pour lesquels le gradient de pression est compensé par la force de Coriolis, et dont l'utilisation est parfaitement justifiée pour des écoulements atmosphériques à grande échelle. Il est maintenant clair que ces effets linéaires de la rotation ne suffisent pas pour prédire l'allongement des structures le long de la verticale, et qu'il y a interaction forte de la force de Coriolis avec les effets non linéaires. Une autre expérience importante est celle de McEwan [45], qui permet la visualisation très nette des interactions entre ondes inertielles, dont la relation de dispersion est imposée par la rotation.

Le couplage des phénomènes ondulatoires avec les effets non linéaires a produit, dans les cinquante dernières années, une approche originale appelée turbulence d'ondes, dont les travaux marquants sont ceux de Benney & Saffman [4], et Zakharov [63]. C'est une démarche qui consiste à étudier les propriétés statistiques d'une distribution aléatoire et homogène d'ondes, dont les changements avec le temps proviennent d'interactions faiblement non linéaires. Dans le cadre d'une turbulence homogène et incompressible, la méthode EDQNM (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian), développée dans les années 1970 par Orszag [48], rejoint les théories de turbulence d'ondes pour la rotation. Cette formulation propose une fermeture pour le système d'équations pour les moments du champ de vitesse dans l'espace spectral. Il s'agit d'utiliser une base propre, suggérée par les effets linéaires de la rotation, comme base de projection de quantités non linéaires, afin d'obtenir des équations d'amplitudes modales. L'hypothèse de quasi-gaussianité (Quasi-Normal) de la vitesse, comme pour la turbulence d'ondes, permet de fermer le système d'équations. Le terme non linéaire pour les moments d'ordre 2 fait alors intervenir une fonction de Green incluant tous les effets linéaires, comme c'est le cas en DIA. Moyennant des corrections sur les temps caractéristiques des moments d'ordre 3 (Eddy-Damped), une distinction est effectuée entre les termes évoluant lentement ou rapidement afin d'identifier les termes de contribution dominante (Markovian). Finalement, le modèle aboutit à une équation d'évolution temporelle fermée pour le tenseur spectral, qui contient beaucoup d'informations sur la structure de l'écoulement. Le transfert non linéaire se met alors sous la forme d'une intégrale volumique dans l'espace spectral,

pour laquelle certaines surfaces, appelée surfaces résonantes, semblent apporter une plus forte contribution à faible nombre de Rossby.

L'objectif du travail présenté ici est l'obtention, en partant d'un tenseur spectral isotrope, de la forme asymptotique dans la limite d'un nombre de Rossby tendant vers zéro, du transfert non linéaire. Cela donne naissance à une modélisation baptisée AQNM (Asymptotic Quasi-Normal Markovian), s'appuyant sur l'analyse multi-échelles temporelle, qui sépare les phénomènes lents et rapides. Après une première phase d'évolution purement linéaire, l'intégration volumique peut alors être restreinte aux surfaces résonantes seules, sans perte d'information. En déterminant ainsi les contributions dominantes, l'idée est d'atteindre une bien meilleure précision dans le calcul numérique, temporel et spatial, de l'énergie dans l'espace spectral, seule composante du tenseur spectral non nulle. L'exploitation des nombreuses symétries du problème conduit à une équation intégral-différentielle fermée pour le spectre d'énergie, dont la discrétisation est délicate. Pour un ensemble de boîtes sphériques formant un maillage spectral, il faut en effet déterminer quelles sont celles qui vont contribuer aux intégrales surfaciques, et quelles vont être, dans ce cas, les aires élémentaires correspondantes des surfaces résonantes. Enfin, il peut s'avérer nécessaire d'interpoler l'énergie en certains vecteurs d'ondes, lorsque ceux-ci ne suivent pas le maillage spatial.

Avant d'étudier l'évolution temporelle du spectre d'énergie, la discrétisation spatiale optimale est déterminée par des critères de convergence du calcul du terme de transfert au premier pas de temps. Bien que le modèle AQNM ait été développé pour obtenir des résultats sans viscosité, il semble cependant nécessaire d'utiliser au moins une viscosité numérique, pour des raisons de stabilisation du schéma numérique et de dissipation de l'énergie aux grands nombres d'ondes. Il s'agit alors de prouver la consistance, la stabilité et la convergence du modèle discrétisé pour une valeur typique de cette viscosité, puis pour une valeur autorisant le développement, dans le spectre d'énergie intégré, d'une zone inertielle suffisamment large. Le spectre d'énergie intégré montre alors très nettement l'établissement d'une zone inertielle, en  $k^{-3}$ , ce qui peut se justifier par une tendance à la bidimensionnalisation de l'écoulement. De plus, le transfert de l'énergie préférentiellement vers le plan horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire au vecteur rotation, ainsi que la forte cohérence verticale des structures, sont aussi des arguments en faveur de cette hypothèse. On observe dans l'ensemble des niveaux d'énergie beaucoup plus importants aux vecteurs d'ondes horizontaux, et la comparaison avec le modèle EDQNM corrobore tout à fait ces résultats, même si c'est de manière plus qualitative que quantitative.



# Chapitre 2

## La turbulence

### 2.1 Introduction

Jusqu'au XIX<sup>ème</sup> siècle, on n'envisageait que les cas où un fluide s'écoule de façon laminaire, c'est-à-dire sous la forme de filets, de manière régulière et prévisible. Cette période fut très féconde en résultats : beaucoup de cas particuliers des équations de Navier-Stokes (fluide parfait, irrotationnel ou incompressible en conduites simples) furent ainsi résolus analytiquement. On peut se reporter à Landau & Lifshitz [37], Tritton [61], Fediaevski [17] ou encore Rieutord [53] pour plus de détails. Mais si on prend un exemple d'écoulement dans la vie de tous les jours, il y a de fortes chances pour que l'écoulement soit désordonné, imprévisible, chaotique : il est turbulent. Regardons le panache de la fumée ascendante d'une cigarette : sur une certaine distance, le fluide a un comportement très ordonné, et on a clairement une structure laminaire. À partir d'une certaine hauteur, il y a une brusque rupture dans les filets de fumée, et le fluide semble se disperser dans toutes les directions.

La plupart des écoulements de fluides usuels sont turbulents. On trouve de la turbulence dans le jet d'eau qui sort d'un robinet, dans le mélange du sucre dans le café, dans les sillages des voitures et avions, dans l'eau des torrents et océans, dans les tornades et cyclones atmosphériques. . . L'astrophysique est aussi un champ important d'application, par exemple pour des problèmes concernant la granulation solaire, la tache rouge de Jupiter. . . En ingénierie, la présence de turbulence peut être un gênant : c'est le cas dans l'étude du profil aérodynamique d'un avion. La turbulence est alors un facteur de perte de portance, et agit comme un frein au mouvement. Dans d'autres cas, on cherche à générer un écoulement turbulent volontairement, par exemple dans une chambre de combustion. La turbulence a en effet de très bonnes capacités de mélange des produits chimiques.

En partant des équations fondamentales en mécanique des fluides, à savoir les équations de Navier-Stokes, et de considérations tirées de l'expérience, on va dégager les grandes caractéristiques d'un écoulement turbulent. L'utilisation d'outils statistiques s'imposera d'elle-même, de par le caractère apparemment aléatoire des grandeurs physiques. Un cas particulier important sera ensuite étudié, à savoir la turbulence homogène, puis isotrope. Enfin, on présentera une synthèse sur la structuration spatiale de la turbulence sur laquelle s'appuie la théorie fondatrice de la turbulence moderne de Kolmogorov.

## 2.2 Approche expérimentale

Bien qu'étudiée de manière approfondie depuis plus d'un siècle, la turbulence reste un domaine peu compris du point de vue théorique. Une grande partie des connaissances provient donc d'expériences, sur lesquelles on s'appuie pour déduire des lois plus générales. Elles peuvent aussi être à l'origine de développements plus théoriques, comme des lois de similitude.

### 2.2.1 Caractérisation

On caractérise un écoulement turbulent par le fait que les grandeurs physiques macroscopiques qui le définissent, varient de façon rapide et aléatoire, du moins en apparence. Ces grandeurs caractéristiques sont par exemple la vitesse ou la pression.

Dans un écoulement, qu'il soit turbulent ou pas, le fluide est soumis à deux effets principaux antagonistes, qui sont traduits par les équations de Navier-Stokes. D'un côté, la viscosité d'un fluide, agissant via le terme  $\nu\Delta\mathbf{u}$ , a tendance à restreindre les mouvements possibles. De l'autre côté, la non-linéarité, représentée par  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , ainsi que le champ de pression, représenté par  $-\nabla P/\rho$ , engendrent les mouvements aléatoires.

Un fluide comporte différentes échelles spatiales, dont le comportement peut être différent. On constate expérimentalement que selon l'intensité des effets visqueux par rapport aux effets non linéaires aux grandes échelles, on aura un écoulement laminaire, turbulent, ou encore intermittent. On se place donc à une grande échelle de taille  $L$ , et de vitesse caractéristique  $U$ . On quantifie un effet par rapport à l'autre grâce au nombre de Reynolds :

$$Re_L = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.1)$$

C'est le rapport entre l'intensité  $U^2/L$  des effets non linéaires et  $\nu U/L^2$  des effets visqueux, ou encore le rapport des temps caractéristiques de la viscosité  $L^2/\nu$  et de la non-linéarité  $L/U$ . Si  $Re_L \gg 1$ , les effets non linéaires dominent aux grandes échelles, et l'écoulement peut devenir turbulent.

On s'intéresse par exemple à l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tuyau de section circulaire. Le régime laminaire se traduit par une vitesse parallèle à l'axe de la conduite, avec une distribution parabolique par rapport à la distance à l'axe. Le seuil d'apparition de la turbulence suggéré par Reynolds est de l'ordre de  $Re_L \geq 2000$ , pour une instabilité suffisamment importante. Si l'on regarde l'écoulement d'un fluide de vitesse uniforme et stationnaire perpendiculairement à l'axe d'un cylindre infini, on constate l'apparition de la turbulence dans le sillage lointain pour des nombres de Reynolds de l'ordre de quelques centaines. On sait maintenant que le seuil d'apparition dépend du type d'écoulement et du confinement.

### 2.2.2 Mesure des champs

Les champs caractéristiques d'un écoulement turbulent présentent un caractère aléatoire : en un point, ils semblent au cours du temps prendre un certain nombre de

valeurs sans rapport apparent les unes avec les autres. L'écoulement du fluide étant néanmoins régi par les équations déterministes de Navier-Stokes, le comportement aléatoire des grandeurs provient d'une grande sensibilité aux conditions initiales.

Considérons une composante aléatoire de la vitesse par exemple, notée  $U(\mathbf{x}, t)$ . Sa mesure en fonction du temps donnerait un graphe ressemblant à la figure 2.1. La valeur 0 correspond à la vitesse moyenne de l'écoulement. Il faut noter que l'on

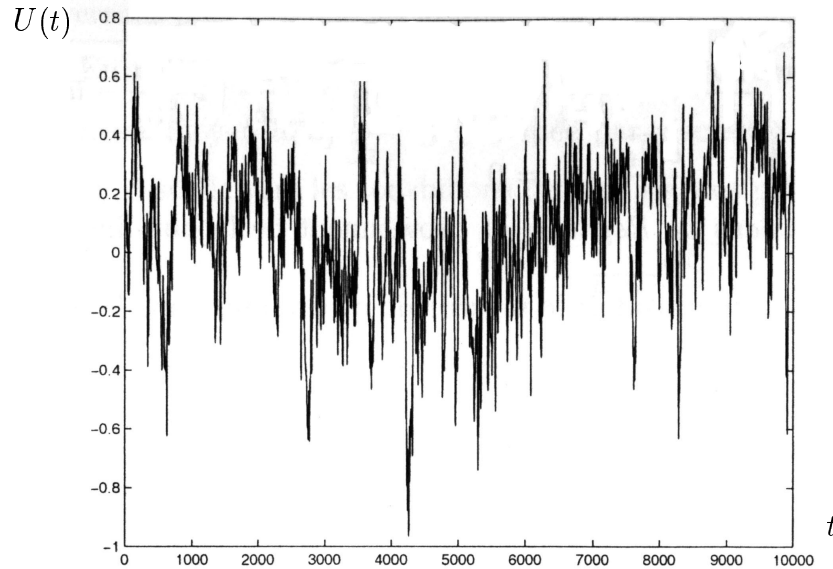


FIG. 2.1 – Composante de la vitesse de valeur moyenne nulle en fonction du temps (mesure au fil chaud)

obtient un graphe très similaire si on se place, non plus en une position fixée et en plusieurs instants, mais à un instant donné et en différentes positions. C'est ce dernier cas qui est traité dans le raisonnement qui suit, car il permet d'aborder la notion fondamentale d'échelles spatiales de la turbulence.

On s'intéresse au comportement de la vitesse à différentes échelles spatiales, ce qui revient à effectuer divers agrandissements de la courbe. A la plus grande échelle de l'écoulement,  $L$ , le graphe est très fluctuant, et n'est donc pas dérivable, dans le sens où les fluctuations sont trop brusques. Si on considère des agrandissements de plus en plus importants, le comportement reste le même jusqu'à ce que l'on atteigne une certaine échelle. C'est la plus petite échelle spatiale de l'écoulement, elle est appelée *échelle de Kolmogorov*, et notée  $\eta$ . A cette échelle, le graphe de la vitesse est non seulement lisse, mais aussi infiniment différentiable. Entre  $L$  et  $\eta$ , on distingue une gamme d'échelles intermédiaires, la zone inertielle, et dont Kolmogorov a décrit les propriétés dans [33], notamment grâce aux propriétés des incréments de vitesse. Cette théorie sera détaillée en fin de chapitre.

### 2.2.3 Structuration d'un écoulement turbulent

Lorsqu'on regarde un écoulement turbulent de très près, on s'aperçoit qu'il existe des structures cohérentes de différentes tailles au sein du fluide : ce sont des structures

tourbillonnaires ou tourbillons. Le mot tourbillon évoque en général un système de forte cohésion et de forme bien définie (comme le tourbillon qui se forme en vidant une baignoire), mais ce n'est pas le cas dans un écoulement turbulent. Les limites des structures tourbillonnaires ne sont pas nettes, ni stationnaires, et on ne distingue que localement des zones de rotation en bloc. C'est pourquoi il est difficile de donner un ordre de grandeur de la taille de ces structures, leur durée de vie, et plus généralement leur évolution.

Le mécanisme général de la turbulence est que ce sont d'abord des structures de grande taille qui apparaissent : dans un écoulement laminaire, leur dimension est donnée par le type de perturbation ou la taille d'un obstacle par exemple. Ces grandes structures contiennent beaucoup d'énergie initialement et sont donc instables. Elles vont perdre leur énergie en se brisant en structures de taille de plus en plus petite. Ce phénomène est la cascade d'énergie turbulente. Arrivés à une certaine taille,  $\eta$ , ces tourbillons n'arrivent plus à garder une cohésion suffisante, du fait de l'action de la viscosité qui transforme alors l'énergie en chaleur par dissipation.

Ainsi, la donnée du champ de vitesse en fonction de l'espace et du temps n'est pas exploitable directement. Le comportement ponctuel du fluide présente peu d'intérêt : on s'intéressera plutôt aux structures d'ensemble. De plus, on comprend bien que l'interprétation de la turbulence par des tourbillons est très qualitative, et qu'il est très difficile d'identifier clairement l'ensemble des structures aux différentes échelles. L'ensemble des outils statistiques qui vont être présentés maintenant constitue un moyen relativement efficace pour estimer les différentes échelles de longueur et de temps caractéristiques d'un écoulement turbulent. On pourra se référer à Pope [50], Frost & Moulden [19], Lumley & Yaglom [40] ou encore Schiestel [55].

## 2.3 Outils statistiques

L'outil majeur en statistiques est la notion de loi de probabilité. Si l'on connaît la loi d'une variable aléatoire, alors on peut en déduire toutes ses propriétés. Pour une variable discrète, cela consiste à donner la probabilité que la variable prenne une valeur donnée. Pour une variable continue, ce qui est le cas des variables utilisées en turbulence, il s'agit de déterminer sa fonction densité de probabilité. Expérimentalement, il est assez difficile d'avoir directement accès à cette fonction, mais on peut par contre mesurer sa "projection" sur une base bien choisie. Si c'est la base canonique des polynômes, les composantes de la projection sont les moments de la variable aléatoire. En particulier, le moment d'ordre 1 est appelé la moyenne, qui est une quantité utilisée dans de nombreux domaines. Ces moments contiennent en fait toute l'information liée au comportement de la variable aléatoire. Après avoir présenté ce concept pour une variable unique, discrète puis continue, on le généralisera au cas de plusieurs variables, et on finira par un exemple d'application, à savoir la loi normale ou gaussienne.

### 2.3.1 Description statistique pour une variable aléatoire

Quand une variable aléatoire prend un ensemble de valeurs au cours d'un ensemble de réalisations, il est intéressant de pouvoir donner une valeur moyenne à

cette variable : c'est la notion de moyenne statistique. C'est en réalité un cas particulier des moments d'une variable aléatoire. Les définitions seront présentées dans un premier temps pour une variable aléatoire discrète, afin de faciliter la compréhension, mais sont en fait destinées à l'étude des variables aléatoires continues.

### 2.3.1.1 Moyenne discrète

On répète un nombre  $M$  de fois une expérience faisant intervenir un écoulement turbulent. Soit  $U$  une variable aléatoire quelconque qui prendra alors  $M$  valeurs, notées  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_M$ . On prend  $M$  très grand (voire tendant vers l'infini), et on appelle *moyenne d'ensemble* de  $U$ , la quantité :

$$\bar{U} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathfrak{U}_i. \quad (2.2)$$

L'ensemble  $(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_M)$  des valeurs prises par  $U$  peut contenir des répétitions. On le réduit donc à l'ensemble  $(U_1, \dots, U_N)$  où tous les  $U_i$  sont différents, et avec  $N \leq M$ . On appelle *probabilité* que  $U$  prenne la valeur  $U_i$  le nombre d'occurrences " $U = U_i$ " dans les  $M$  réalisations, divisé par  $M$ . On note cette probabilité  $P(U = U_i)$ ; elle est comprise entre  $1/M$ , s'il n'y a qu'une occurrence, et 1 s'il y a  $M$  occurrences. Associer à des événements une probabilité s'appelle définir une *loi de probabilité* pour la variable  $U$ . Cela permet d'exprimer la moyenne de  $U$  sous la forme suivante :

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^N U_i P(U = U_i), \quad (2.3)$$

chaque valeur prise par  $U$  étant pondérée par la probabilité que  $U$  prenne cette valeur.

### 2.3.1.2 Moyenne continue et fonction densité de probabilité

Une variable aléatoire peut aussi prendre une infinité de valeurs au cours d'un nombre infini de réalisations. L'équivalent continu de la moyenne nécessite la fonction *densité de probabilité* de la variable aléatoire  $U$ , qui prend maintenant une infinité de valeurs. C'est la fonction  $g : U \mapsto g(U)$  telle que  $g(U) dU$  représente la probabilité que  $U$  prenne une valeur comprise entre  $U$  et  $U + dU$ . On a alors :

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} U g(U) dU. \quad (2.4)$$

On retrouve ici l'idée de la pondération des valeurs prises par  $U$  par une probabilité d'obtenir cette valeur. Plus généralement, si  $h$  est une fonction de  $U$ , on a :

$$\overline{h(U)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(U) g(U) dU. \quad (2.5)$$

On notera par la suite, dans le cas discret ou continu,  $u = U - \bar{U}$ . Cela représente l'écart de la variable aléatoire par rapport à sa valeur moyenne, on l'appelle donc *fluctuation* de la variable aléatoire.



### 2.3.1.3 Propriétés

Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires, discrètes ou continues, et  $\lambda$  une constante au sens statistique. On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\overline{U+V} &= \overline{U} + \overline{V}, \\ \overline{\lambda U} &= \lambda \overline{U}, \\ \overline{\frac{\partial U}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}, \\ \overline{u} &= 0,\end{aligned}$$

mais par contre, en général :

$$\overline{UV} \neq \overline{U} \overline{V},$$

sauf dans le cas où les variables  $U$  et  $V$  sont indépendantes, ce que l'on verra ultérieurement.

Il est clair que le calcul de la moyenne d'une variable n'est qu'une information partielle sur son comportement. On va définir la notion de moments, dont la moyenne est un cas particulier, et qui contient en théorie toute l'information sur la variable.

### 2.3.1.4 Moments d'ordre $n$

On choisit un entier  $n$ , inférieur ou supérieur à  $N$ . Dans le cas d'une variable discrète, on définit les *moments d'ordre  $n$*  de  $U$  par :

$$\overline{U^n} = \overline{U \times \cdots \times U} = \sum_{i=1}^N (U_i)^n P(U = U_i). \quad (2.6)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, l'équivalent est :

$$\overline{U^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} U^n g(U) dU. \quad (2.7)$$

Si on considère une fonction  $h : U \mapsto h(U)$ , infiniment dérivable, et qui admet un développement de Taylor, sur un certain intervalle de convergence, sous la forme :

$$h(U) = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i U^i, \quad (2.8)$$

alors on a :

$$\overline{h(U)} = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i \int_{-\infty}^{+\infty} U^i g(U) dU. \quad (2.9)$$

Cela démontre que la donnée, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , du moment d'ordre  $n$ , est équivalente à la connaissance statistique de  $U$ . Alors qu'un nombre infini de moments est normalement nécessaire, dans la pratique, on ne cherchera à calculer que certains de ces moments, ceux jugés les plus significatifs.

Dans les cas discret ou continu, on définit aussi les *moments centrés d'ordre  $n$*  de  $U$  par :

$$\overline{u^n} = \overline{u \times \cdots \times u} = \overline{(U - \overline{U})^n}, \quad (2.10)$$

qui peuvent s'exprimer comme un polynôme en les  $\overline{U^i}$ ,  $i \leq n$ . Le moment centré d'ordre 2 de  $U$  a un nom spécifique, il est appelé *variance* de  $U$  :

$$\sigma^2(U) = \overline{u^2} = \overline{U^2} - (\overline{U})^2. \quad (2.11)$$

On a enfin la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^N P(U = U_i) = 1, \quad (2.12)$$

avec son équivalent continu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(U) dU = 1, \quad (2.13)$$

qui indique que la probabilité certaine que  $U$  soit compris dans  $] -\infty, +\infty[$  est égale à 1.

Dans la suite, on ne considérera plus que des variables aléatoires continues, car elles représentent beaucoup mieux le comportement des grandeurs physiques aléatoires dans un écoulement turbulent.

## 2.3.2 Description statistique pour $N$ variables aléatoires

On peut généraliser toutes les définitions précédentes au cas de  $N$  variables aléatoires  $U_1, \dots, U_N$  pour lesquelles on définit la *loi conjointe*, loi de probabilité suivie par le vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_N)$ .

### 2.3.2.1 Généralisation des moments d'ordre $n$

Soit  $n$  un entier quelconque. On choisit  $n$  indices, distincts ou confondus,  $(i_1, \dots, i_n)$  dans  $\{1, \dots, N\}^n$ . On appelle de même *moments d'ordre  $n$*  de  $U_1, \dots, U_N$  grandeurs aléatoires :

$$\overline{U_{i_1} \cdots U_{i_n}} = \overline{U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}}. \quad (2.14)$$

On définit alors les *moments centrés d'ordre  $n$*  par :

$$\overline{u_{i_1} \cdots u_{i_n}} = \overline{u_{i_1} \times \cdots \times u_{i_n}} = \overline{(U_{i_1} - \overline{U_{i_1}}) \times \cdots \times (U_{i_n} - \overline{U_{i_n}})}. \quad (2.15)$$

### 2.3.2.2 Fonction densité de probabilité conjointe

Pour un vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_N)$ , on définit ensuite la fonction *densité de probabilité conjointe*  $f : U_1, \dots, U_N \mapsto (U_1, \dots, U_N)$  vérifiant la propriété que  $f(U_1, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_N$  représente la probabilité que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $U_i$  soit dans  $[U_i, U_i + dU_i]$ . On montre alors que :

$$\overline{U_{i_1} \cdots U_{i_n}} = \int_{\mathbb{R}^n} U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} f(U_1, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_N, \quad (2.16)$$

et que pour une fonction  $h$  de  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ , on a :

$$\overline{h(U_{i_1}, \dots, U_{i_n})} = \int_{\mathbb{R}^n} h(U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) f(U_1, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_N. \quad (2.17)$$

On a aussi la relation traduisant l'événement certain " $\forall i \in \{1, \dots, N\}, U_i \in \mathbb{R}$ " :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(U_1, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_N = 1. \quad (2.18)$$

On veut par la suite pouvoir extraire d'une loi conjointe, la loi suivie par chacune des composantes du vecteur aléatoire. On appelle *loi marginale de la loi conjointe* de  $U_i$ , la loi de probabilité suivie par la composante  $U_i$  du vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_N)$ . On lui associe une fonction *densité de probabilité marginale*  $f_{U_i} : x \mapsto f_{U_i}(x)$ , et on a son expression en utilisant la fonction densité de probabilité conjointe :

$$f_{U_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(U_1, \dots, U_{i-1}, x, U_{i+1}, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_{i-1} dU_{i+1} \cdots dU_N. \quad (2.19)$$

Sachant la densité de probabilité conjointe, on peut donc déduire la densité de probabilité de chacune des composantes du vecteur aléatoire. On peut aussi définir la densité de probabilité conjointe de  $n$  composantes distinctes  $i_1, \dots, i_n$  par :

$$f_{U_{i_1} \dots U_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = \int_{\mathbb{R}^{N-n}} f(U_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, \dots, U_N) dU_1 \cdots dU_N, \quad (2.20)$$

où l'intégration ne se fait pas sur les  $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ .

### 2.3.2.3 Indépendance statistique

Il est important de savoir, pour un certain nombre de variables aléatoires données, si elles ont des comportements indépendants les uns des autres. Pour traduire cela, il existe deux notions en statistiques : l'indépendance et la décorrélation. On dit que  $N$  variables aléatoire  $U_1, \dots, U_N$  sont *statistiquement indépendantes* si leur fonction densité de probabilité conjointe est égale au produit de leurs fonctions densité de probabilité marginales. Cela signifie que les lois de probabilité de chacune des variables sont indépendantes entre elles. On peut traduire cette propriété par :

$$f(U_1, \dots, U_N) = \prod_{i=1}^N f_{U_i}(U_i). \quad (2.21)$$

Cette relation est bien compatible avec (2.18) et (2.19).

Dans ce cas, et d'après (2.16), il en résulte l'égalité suivante sur les moments d'ordre  $n$ , si les  $i_1, \dots, i_n$  sont tous distincts :

$$\overline{U_{i_1} \cdots U_{i_n}} = \overline{U_{i_1}} \times \cdots \times \overline{U_{i_n}}, \quad (2.22)$$

et la moyenne du produit est égale au produit des moyennes. On a de plus, pour  $i \neq j$  :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{U_i U_j} - \overline{U_i} \overline{U_j} = 0, \quad (2.23)$$

et les variances sont nulles si  $i \neq j$ .

### 2.3.2.4 Décorrélation

Dorénavant, et sauf indication contraire, la répétition d'un indice à l'intérieur d'une formule signifiera que l'on doit effectuer une sommation sur cet indice. Pour  $N$  variables aléatoires  $U_1, \dots, U_N$ , on appelle tout d'abord *tenseur de corrélation* ou encore *tenseur de covariance*, le tenseur noté  $R_{ij}$  tel que :

$$R_{ij} = \overline{u_i u_j}. \quad (2.24)$$

C'est un tenseur important, qui sera le point de départ de l'analyse quand on choisira les composantes de la vitesse comme variables aléatoires.  $R_{ij}$  est un tenseur symétrique par définition. De plus, pour  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$  fixé :

$${}^t X R X = X_i R_{ij} X_j = \overline{(X_i u_i)(X_j u_j)} = \overline{(X_i u_i)^2} \geq 0, \quad (2.25)$$

ce qui implique que  $R$  est définie positive, en tant que matrice. Ses éléments diagonaux sont les variances des  $U_i$ .

On dit que  $N$  variables aléatoires  $U_1, \dots, U_N$  sont *décorrélées* si la matrice de corrélation est diagonale. Si  $N$  variables sont indépendantes, alors elles sont décorrélées d'après (2.23). C'est donc une propriété moins forte que l'indépendance statistique :  $N$  variables aléatoires peuvent être décorrélées sans être indépendantes.

### 2.3.2.5 Fonctions caractéristiques

On cherche maintenant à trouver une fonction qui contienne toute l'information portée par les moments. Pour un vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_N)$ , sa *première fonction caractéristique*  $\varphi$  est :

$$\varphi : (s_1, \dots, s_N) \mapsto \overline{\exp[i(s_1 U_1 + \dots + s_N U_N)]}. \quad (2.26)$$

C'est la transformée de Fourier de sa fonction densité de probabilité dans  $\mathbb{R}^n$ , d'après (2.17). Le développement en série entière de cette fonction en  $(s_1, \dots, s_N)$  autour de  $(0, \dots, 0)$  fait intervenir les moments de tous ordres de  $(U_1, \dots, U_N)$  :

$$\varphi(s_1, \dots, s_N) = \sum_{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N} m_{i_1, \dots, i_N} \frac{(i s_1)^{i_1} \dots (i s_N)^{i_N}}{i_1! \dots i_N!}, \quad (2.27)$$

avec, pour  $(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N$ ,  $m_{i_1, \dots, i_N} = \overline{U_1^{i_1} \times \dots \times U_N^{i_N}}$  un moment d'ordre  $i_1 + \dots + i_N$ .

Il est parfois plus commode de travailler sur le logarithme complexe à valeur principale de cette fonction. On obtient alors la *deuxième fonction caractéristique*,  $\chi$  :

$$\chi : (s_1, \dots, s_N) \mapsto \log [\varphi(s_1, \dots, s_N)]. \quad (2.28)$$

Un nouveau développement en série entière en  $(s_1, \dots, s_N)$  donne :

$$\chi(s_1, \dots, s_N) = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N \\ i_1 + \dots + i_N \neq 0}} k_{i_1, \dots, i_N} \frac{(i s_1)^{i_1} \dots (i s_N)^{i_N}}{i_1! \dots i_N!}, \quad (2.29)$$

où, pour  $(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N$ ,  $k_{i_1, \dots, i_N}$  est un *cumulant d'ordre*  $i_1 + \dots + i_N$ . On peut exprimer les cumulants d'ordre  $N$  en fonction des moments d'ordre inférieur ou égal à  $N$ , en exprimant les dérivées de  $\chi$  en fonction de celles de  $\varphi$ . On choisit 4 indices distincts  $i, j, k$  et  $l$ , et on donne quelques cumulants importants :

$$\begin{aligned} \text{Ordre 1 : } & \overline{U_i}, \\ \text{Ordre 2 : } & \overline{u_i u_j}, \\ \text{Ordre 3 : } & \overline{u_i u_j u_k}, \\ \text{Ordre 4 : } & \overline{u_i u_j u_k u_l} - \overline{u_i u_j} \overline{u_k u_l} - \overline{u_i u_k} \overline{u_j u_l} - \overline{u_i u_l} \overline{u_j u_k}, \end{aligned}$$

où les indices dans la formule (2.29) valent 0 ou 1. Pour plus de détails, on pourra se reporter, par exemple, à [52].

### 2.3.3 Un exemple important : la loi normale

#### 2.3.3.1 Variable gaussienne

Dans le cas d'une seule variable aléatoire  $U$ , on dit qu'elle suit une loi *normale* ou *gaussienne*, de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  si sa fonction densité de probabilité est de la forme :

$$f(U) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.30)$$

Si on calcule la moyenne de cette variable, on trouve :

$$\begin{aligned} \overline{U} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U-\mu)^2}{2\sigma^2}} dU \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2V e^{-V^2} dV + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-V^2} dV \\ &= \mu, \end{aligned} \quad (2.31)$$

et sa variance est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{(U-\mu)^2} &= \overline{U^2} - \mu^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma V + \mu)^2 e^{-V^2} dV - \mu^2 \\ &= \sigma^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

après une intégration par parties. Enfin, les moments d'ordre impair de  $U$  sont tous nuls, car quand  $n$  est impair,  $U \mapsto U^n f(U)$  est une fonction impaire d'intégrale nulle sur  $\mathbb{R}$ .

L'allure de  $f$  est celle de la figure 2.2. La courbe est centrée sur la valeur moyenne  $\mu$  par rapport à laquelle elle est symétrique. Elle a une forme de cloche dont la largeur est inversement proportionnelle à la variance  $\sigma^2$ . De plus, elle décroît rapidement quand on s'écarte de la valeur moyenne. Cela correspond à une faible probabilité pour les valeurs très éloignées de la moyenne.

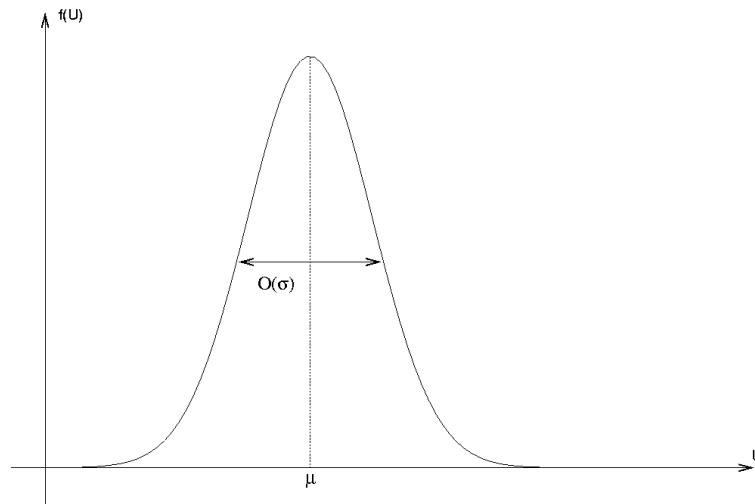


FIG. 2.2 – Fonction densité de probabilité d'une loi normale

### 2.3.3.2 Vecteur gaussien

La notion de loi normale peut se généraliser à un vecteur aléatoire. On dit qu'un vecteur aléatoire  $(U_1, \dots, U_N)$ , de moyennes  $\mu_1, \dots, \mu_N$  et de variances  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , est un *vecteur gaussien* si sa fonction densité de probabilité conjointe est de la forme :

$$f : (U_1, \dots, U_N) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi R)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T R^{-1} \mathbf{u} \right], \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{u}$  le vecteur colonne  $\begin{pmatrix} u_1 = U_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ u_N = U_N - \mu_N \end{pmatrix}$ ,  $R$  la matrice de corrélation que l'on a vue précédemment, c'est-à-dire telle que  $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$ , et  $\det$  l'application déterminant. Pour  $N = 1$ ,  $R$  est réduit à un élément,  $\sigma^2$ , et on retrouve l'expression (2.30).

On a vu que l'indépendance des vecteurs  $(U_1, \dots, U_N)$  entraînait leur décorrélation quelle que soit la loi suivie par le vecteur. Si on suppose maintenant le vecteur gaussien, et si  $U_1, \dots, U_N$  sont décorrélés, alors  $R$  est diagonale et  $R^{-1}$  aussi, avec pour éléments diagonaux les inverses des variances. Il en résulte :

$$f(U_1, \dots, U_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(U_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (2.34)$$

ce qui donne une fonction à variables séparables. On en déduit, d'une part, que les fonctions densité de probabilité marginales sont toutes gaussiennes, donc toutes les composantes du vecteur suivent la loi normale. D'autre part, on conclut que la fonction densité de probabilité conjointe est le produit des fonctions densité de probabilité marginales, et donc que  $U_1, \dots, U_N$  sont statistiquement indépendantes. On a donc *équivalence* entre indépendance statistique et décorrélation.

De plus, si  $(U_1, \dots, U_n)$  forme un vecteur gaussien, on peut montrer que  $U_1 + \dots + U_n$  est une variable gaussienne. Enfin, si  $U_1, \dots, U_n$  sont des variables individuellement gaussiennes et statistiquement indépendantes, elles forment un vecteur

gaussien. En effet, comme elles sont indépendantes, leur fonction densité de probabilité conjointe est le produit de fonctions densité de probabilité gaussiennes, et caractérise donc un vecteur gaussien. Dans ce cas, la matrice  $R$  est diagonale, car les  $U_1, \dots, U_n$  sont décorrélées.

### 2.3.3.3 Cumulants d'un vecteur gaussien

Soit  $(U_1, \dots, U_n)$  un vecteur gaussien. En prenant la transformée de Fourier de (2.33), on obtient la première fonction caractéristique. Le résultat est l'exponentielle d'une fonction quadratique en  $s_1, \dots, s_N$ . Ainsi, la seconde fonction caractéristique est elle-même quadratique, et son développement en série s'arrête donc à l'ordre 2. Cela implique que tous les cumulants d'ordre supérieur ou égal à trois sont nuls. Ainsi, le cumulants d'ordre 4 est nul, et on obtient un résultat qui sera important par la suite :

$$\overline{u_i u_j u_k u_l} = \overline{u_i u_j} \overline{u_k u_l} + \overline{u_i u_k} \overline{u_j u_l} + \overline{u_i u_l} \overline{u_j u_k}, \quad (2.35)$$

relation qui indique que les moments d'ordre quatre s'écrivent comme la somme de toutes les combinaisons des moments d'ordre deux. On verra ultérieurement que, dans le modèle de turbulence EDQNM, et bien que les composantes du champ de vitesse ne forment pas un vecteur gaussien, on supposera qu'ils vérifient tout de même cette propriété. Pour plus de détails, on pourra consulter Maurin [44] ou Manoukian [42].

## 2.3.4 Grandeurs physiques

Les résultats qui ont été présentés ont un caractère de généralité : ils sont aisément applicables aux grandeurs caractéristiques d'un écoulement turbulent.

### 2.3.4.1 Variables aléatoires

Avec une seule variable physique, comme une composante de la vitesse,  $U$ , on peut construire :

- une variable aléatoire  $U(\mathbf{x}, t)$  en un point et un temps fixés,
- un vecteur aléatoire en considérant par exemple  $(U(\mathbf{x}, t_1), \dots, U(\mathbf{x}, t_2))$  au même point mais à des instants différents, ou encore  $(U(\mathbf{x}_1, t), \dots, U(\mathbf{x}_n, t))$  au même instant mais en des points différents.

Mais on peut aussi décider de s'intéresser aux corrélations entre vitesse et pression, pression et température... en différents points, en différents temps, et pour différentes composantes.

Dans le cadre de la turbulence en rotation incompressible, c'est le champ de vitesse qui contient l'information dans l'écoulement, car on fera disparaître le terme de pression. On ne s'intéressera donc, dans la suite, qu'aux corrélations entre des composantes de la vitesse au même temps, et éventuellement en différents points. Dans la suite, on note  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  le champ de vitesse au point  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ , et  $U_i(\mathbf{x}, t)$  la composante de ce champ dans la direction  $i$ .

### 2.3.4.2 La décomposition de Reynolds

On choisit un point  $\mathbf{x}$  et un instant  $t$ . En turbulence, on décompose usuellement la vitesse en :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad U_i(\mathbf{x}, t) = \overline{U_i(\mathbf{x}, t)} + u_i(\mathbf{x}, t), \quad (2.36)$$

avec  $u_i(\mathbf{x}, t)$  le *champ de vitesse turbulent*, qui représente les variations de la vitesse autour de la vitesse moyenne. C'est l'analogie de la fluctuation statistique de la variable aléatoire  $U_i(\mathbf{x}, t)$ . Le champ de vitesse turbulent est ainsi à moyenne nulle. On note la variance de  $u_i(\mathbf{x}, t)$  :

$$\overline{u_i(\mathbf{x}, t)^2} = u_i'^2(\mathbf{x}, t), \quad (2.37)$$

ce qui traduit en général l'intensité de la turbulence dans la direction  $i$ . De cette valeur, on peut en déduire une *intensité moyenne spatiale de turbulence* :

$$u^2(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{3}(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)(\mathbf{x}, t), \quad (2.38)$$

qui représente la moyenne de l'intensité turbulente sur les trois directions de l'espace. On s'intéresse aussi à l'*énergie cinétique turbulente* par unité de masse,  $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$  :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_i(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{2}(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2)(\mathbf{x}, t) = \frac{3}{2}u^2(\mathbf{x}, t), \quad (2.39)$$

qui est directement proportionnelle à l'intensité moyenne de la turbulence.

## 2.4 Turbulence homogène et isotrope

Après le cas des écoulements laminaires, pour lesquels les théories classiques d'analyse sont efficaces, il s'est avéré très difficile de déterminer les propriétés des écoulements turbulents dans leur généralité. Afin de saisir certains éléments de leur complexité, on a commencé par étudier certains cas particuliers de turbulence, que sont la turbulence homogène, et la turbulence isotrope.

### 2.4.1 Turbulence homogène

On dit qu'une turbulence est *homogène* si les propriétés statistiques du champ de vitesse turbulente sont invariantes par translation de l'espace. Cela signifie que, quel que soit le point de l'espace que l'on choisit, les quantités statistiques restent les mêmes. Si on s'intéresse aux moments en un ou plusieurs points, la valeur doit rester inchangée si on translate tous les points par le même vecteur déplacement. A l'ordre 2 en deux points par exemple :

$$\overline{u_i(\mathbf{x}_i, t)u_j(\mathbf{x}_j, t)} = \overline{u_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{r}, t)u_j(\mathbf{x}_j + \mathbf{r}, t)}, \quad (2.40)$$

pour une translation de vecteur  $\mathbf{r}$ . L'hypothèse d'homogénéité conduit à deux simplifications : la première, c'est qu'elle permet d'éliminer un terme non linéaire dans les équations de Navier-Stokes. La deuxième, plus importante, est qu'elle permet



l'utilisation de l'analyse spectrale, d'une manière beaucoup plus simple que si les transformées de Fourier devaient dépendre de la position.

En pratique, on ne rencontre presque jamais de tels écoulements, bien que certains soient très proches de l'homogénéité. En effet, l'homogénéité nécessite que l'on puisse effectuer des translations dans toutes les directions et sur n'importe quelle distance. Un écoulement se trouvant rarement dans un milieu infini, la présence de parois restreint le domaine de validité de l'approximation. Cependant, grâce aux expériences dite de turbulence de grille, où le fluide passe à grande vitesse à travers une grille, on obtient une turbulence quasi-homogène pour peu que l'on se place suffisamment loin de la grille et des parois s'il y en a. On pourra considérer qu'une turbulence est homogène quand les grandeurs statistiques varient sur des échelles de longueur grandes devant les plus grandes échelles de la turbulence.

Il est comparativement plus facile d'obtenir un écoulement statistiquement stationnaire, mais il sera alors inhomogène. Néanmoins, les simplifications engendrées par l'hypothèse d'homogénéité sont telles qu'historiquement, elles conduisirent à des résultats fondamentaux. Batchelor, dans [3], a en particulier étudié l'équation d'évolution temporelle des corrélations doubles de vitesse. Il en a déduit des informations sur la décroissance de la turbulence homogène, et les liens entre transfert non linéaire, échanges d'énergie, et dissipation visqueuse.

### 2.4.2 Hypothèses sur l'écoulement

On s'attachera, dans la suite, à la signification et au comportement des corrélations des composantes de la vitesse en deux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ , et en un temps  $t$ , qui forment le tenseur :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}. \quad (2.41)$$

Le tenseur en un point  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t)$  a un nom spécifique : c'est le *tenseur de Reynolds* en  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ , et il regroupe les moments d'ordre 1 des composantes de la vitesse.

L'étude du tenseur  $R_{ij}$  en particulier, relève d'un choix, d'une part pour l'ordre du moment, et d'autre part pour le nombre de points, et qui découle des constatations suivantes. Restreindre l'étude aux moments d'ordre 2 se justifie tout d'abord par le fait que ces moments apportent des informations très pertinentes sur l'écoulement. Ils permettent en particulier d'obtenir des renseignements sur l'énergie turbulente, ou encore l'hélicité. De plus, se placer en deux points plutôt qu'en un point va dans le sens des observations expérimentales de la turbulence. Si l'on ne s'intéresse qu'au tenseur de Reynolds, il est tout d'abord difficile de capter l'information sur les structures spatiales de la turbulence, car celles-ci nécessitent la notion de distance. Ensuite, l'écriture des équations d'évolution du tenseur de Reynolds fait apparaître un terme de corrélation pression-vitesse, qu'il faut estimer pour espérer obtenir la fermeture des équations. Or ce terme représente des contributions fortement non locales dans l'écoulement, ce qui rend toute tentative de modélisation en un point plus complexe. Il faut noter que tout cela n'empêche pas les problèmes de fermeture, qui font nécessairement intervenir les moments d'ordre supérieur.

On supposera de plus que l'écoulement est incompressible. Pour les écoulements typiquement étudiés ici, c'est-à-dire pour de l'air ou de l'eau, les amplitudes des

champs de vitesse totale sont relativement petites par rapport à la vitesse du son. Le nombre de Mach étant très petit devant 1, on peut négliger la compressibilité du fluide.

Enfin, on se placera dans le cas d'une turbulence homogène, car d'une part, les équations s'en trouvent simplifiées. D'autre part, sans l'homogénéité, l'analyse de Fourier classique est moins pertinente. En effet, en turbulence inhomogène, les corrélations doubles dépendent de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{r}$ , et donc leurs transformées de Fourier dépendent de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{k}$ , ce qui rajoute une variable. Il faut remarquer que l'homogénéité implique aussi que l'écoulement occupe l'espace tout entier, et donc qu'il est illimité.

### 2.4.3 Corrélations doubles

#### 2.4.3.1 Points proches et éloignés

Le terme  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t)$  mesure en définitive le degré de corrélation existant entre deux composantes de vitesse en deux points. Si ce terme est non nul, c'est que les composantes de vitesse sont dépendantes l'une de l'autre. On s'attend à ce que la dépendance soit de plus en plus forte avec la diminution de la distance qui sépare les points d'observation : on voit apparaître le concept de cohérence dans un écoulement.

De plus, on imagine que deux points très éloignés d'un écoulement n'auront pas d'influence l'un sur l'autre. Expérimentalement, on constate effectivement une décroissance de la corrélation avec la distance, et avec un taux de décroissance très rapide. Idéalement, le coefficient de corrélation doit tendre vers zéro quand la distance qui sépare les points tend vers l'infini. L'infini étant inatteignable expérimentalement, il faut pouvoir donner une distance à partir de laquelle on considère qu'il y a décorrélation. Il y a plusieurs moyens d'estimer ces longueurs, appelées *longueurs de corrélation*, et dont la définition s'appuie sur le comportement des corrélations de vitesse.

#### 2.4.3.2 Propriétés

Pour une turbulence homogène,  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t)$  ne dépend pas de la position. En omettant la dépendance temporelle pour plus de clarté, on peut ainsi écrire :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r}), \quad (2.42)$$

et donc la corrélation ne dépend que de l'écartement entre les deux points. De plus, en remarquant que :

$$R_{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) = R_{ij}(-\mathbf{r}, \mathbf{0}), \quad (2.43)$$

on montre que :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ji}(-\mathbf{r}). \quad (2.44)$$

En particulier, pour  $i = j$ , on a que  $R_{ii}$  (sans sommation) est une fonction paire de  $\mathbf{r}$ . La corrélation est donc symétrique par rapport à l'origine. Ensuite, l'écoulement étant considéré comme incompressible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i} = 0, \quad (2.45)$$

et donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_i} &= -\overline{\frac{\partial u_i}{\partial r_i}(-\mathbf{r})u_j(\mathbf{0})} = 0, \\ \frac{\partial R_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_j} &= \overline{u_i(\mathbf{0})\frac{\partial u_j}{\partial r_j}(\mathbf{r})} = 0.\end{aligned}\quad (2.46)$$

Si  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x})$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^3$ , on peut écrire :

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \overline{u_i(\mathbf{x}) [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r} + \mathbf{h}) - u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})]} = 0, \quad (2.47)$$

d'où :

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} [R_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{h}) - R_{ij}(\mathbf{r})] = 0, \quad (2.48)$$

et on conclut que  $\mathbf{r} \rightarrow R_{ij}(\mathbf{r})$  est aussi continue sur  $\mathbb{R}^3$ .

Ensuite, en écrivant que :

$$\overline{(u_i(\mathbf{0}) + \lambda u_j(\mathbf{r}))^2} = \overline{u_i(\mathbf{0})^2} + 2\lambda \overline{u_i(\mathbf{0})u_j(\mathbf{r})} + \lambda^2 \overline{u_j(\mathbf{r})^2} \geq 0 \quad (2.49)$$

en tant que polynôme de degré 2. Cela implique que le discriminant réduit

$$\left[ \overline{u_i(\mathbf{0})u_j(\mathbf{r})} \right]^2 - \overline{u_i(\mathbf{0})u_i(\mathbf{0})} \overline{u_j(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})}, \quad (2.50)$$

est négatif ou nul. Avec l'égalité  $\overline{u_j(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})} = \overline{u_j(\mathbf{0})u_j(\mathbf{0})}$ , on en déduit :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) \leq \sqrt{[R_{ii}(\mathbf{0})R_{jj}(\mathbf{0})]} \quad (\text{sans sommation}). \quad (2.51)$$

Le cas intéressant est celui pour lequel  $i = j$ , qui donne  $R_{ii}(\mathbf{r}) \leq R_{ii}(\mathbf{0})$ . La fonction  $\mathbf{r} \mapsto R_{ii}(\mathbf{r})$  atteint donc son maximum quand  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  : la corrélation est maximale quand les points sont confondus. Si on tient compte des remarques faites dans ce paragraphe, on obtient la forme générale de la courbe de la fonction unidimensionnelle  $r \mapsto R_{11}(r, 0, 0)$ , par exemple, sur la figure 2.3.

## 2.4.4 L'espace spectral

On a vu que l'hypothèse de turbulence homogène permettait l'utilisation de l'analyse de Fourier, car les propriétés statistiques de l'écoulement ne dépendent pas du point d'observation. On définit ici quel est le type de transformée de Fourier utilisée, et ce que l'on peut dire de l'équivalent du tenseur des corrélations dans l'espace spectral.

### 2.4.4.1 La transformée de Fourier

Soit un instant  $t$ . Soit  $f : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, t)$  une fonction des trois coordonnées spatiales. Sous réserve que  $\int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{x}, t)| d^3 \mathbf{x}$  converge, la *transformée de Fourier* spatiale de  $f$  sera la fonction  $\tilde{f}$  telle que :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x} \quad (2.52)$$

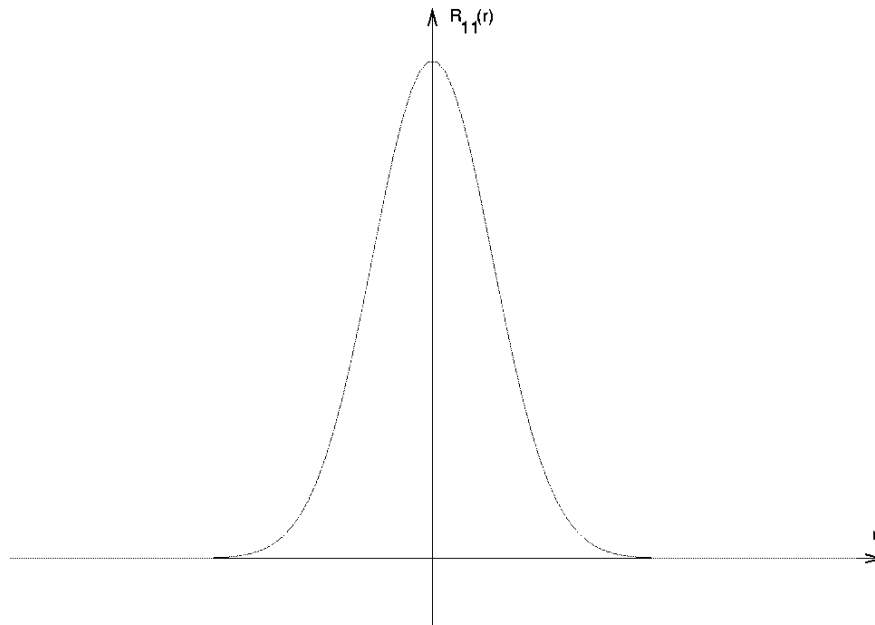


FIG. 2.3 – Allure générale d’un terme d’auto-corrélation en deux points pour une turbulence homogène

avec  $i = \sqrt{-1}$ . On pourra aussi exprimer  $f$  en fonction de  $\tilde{f}$  par la *transformée de Fourier inverse* :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\mathbf{k}, t) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k} \quad (2.53)$$

Ainsi, la fonction  $f$  s’écrit comme une combinaison linéaire infinie d’ondes de nombre d’onde  $\mathbf{k}$  et d’amplitude complexe  $\tilde{f}(\mathbf{k})$ . La connaissance de  $\tilde{f}$  équivaut donc à celle de  $f$ . On peut déduire de la transformée de Fourier de  $f$  les transformées de Fourier de ses dérivées partielles spatiales :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\mathbf{k}, t) = ik_i \tilde{f}(\mathbf{k}, t) \quad (2.54)$$

L’*espace spectral*, ou *espace de Fourier* est alors l’espace vectoriel de dimension 3 où tout vecteur est noté  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ . On peut travailler aussi bien dans l’espace physique que dans l’espace spectral, chacun ayant ses avantages et inconvénients. Le lecteur pourra se référer à Lighthill [38], ou encore à Canuto, Hussaini, Quarteroni & Zang [12].

#### 2.4.4.2 Pourquoi se placer dans l’espace spectral ?

D’une part, le passage dans l’espace spectral permet de transformer un système différentiel d’ordre élevé en un nouveau système algébrique d’ordre inférieur, en remplaçant l’opération de dérivation par des produits scalaires.

D’autre part, l’ensemble des outils statistiques présentés dans les chapitres précédents avait pour objectif la compréhension du comportement des différentes structures dans un écoulement turbulent, pour lesquelles la notion d’énergie est très importante. On a besoin de savoir quelle est l’énergie contenue dans les structures de

dimension caractéristique  $l$ . En ordre de grandeur, elle sera donnée par l'énergie spectrale contenue dans les ondes dont le nombre d'onde a pour norme  $|\mathbf{k}| \sim 2\pi/l \sim 1/l$ . Cependant, cette transformation implique qu'il faudra, à un moment ou à un autre, déduire des résultats obtenus dans l'espace spectral, des informations sur le comportement réel de l'écoulement. Le passage dans l'espace spectral est certes plus commode mathématiquement, encore que le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes nécessite le calcul d'un produit de convolution, mais l'interprétation physique y est finalement moins aisée.

Pour finir, on aimerait appliquer la transformation de Fourier aux composantes du champ de vitesse,  $u_i(\mathbf{x}, t)$  par exemple. Pour assurer la convergence de :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_i(\mathbf{x}, t)| d^3 \mathbf{x}, \quad (2.55)$$

il faudrait que la vitesse décroisse suffisamment rapidement à l'infini. Or ce ne peut pas être le cas en turbulence homogène, qui induit que le champ de vitesse turbulente est non nul dans tout l'espace. On ne peut ainsi pas prendre sans précautions la transformée de Fourier d'un champ de vitesse. Néanmoins, on peut utiliser une transformée de Fourier à grand volume, mais fini, et les propriétés principales de la transformée de Fourier sont conservées (dérivation, convolution...). On pourra se reporter à [43] pour plus de détails. On notera dans la suite la transformée de Fourier d'une composante  $u_i$  de la vitesse :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3 \mathbf{x}. \quad (2.56)$$

### 2.4.5 Le tenseur spectral des corrélations

En appliquant la transformation de Fourier au tenseur des corrélations doubles, on obtient un tenseur très important dans l'espace spectral : le tenseur spectral des corrélations. Il quantifie la corrélation entre les transformées de Fourier des composantes du champ de vitesse turbulente.

#### 2.4.5.1 Définition

Quand l'écartement entre les deux points d'observation,  $r = |\mathbf{r}|$ , tend vers l'infini,  $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$  tend vers 0 suffisamment rapidement pour que l'on puisse calculer sa transformée de Fourier :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.57)$$

Le tenseur  $\Phi_{ij}$  est le *tenseur spectral des corrélations*. On retrouve bien entendu le tenseur des corrélations doubles par transformée de Fourier inverse :

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} \quad (2.58)$$

### 2.4.5.2 Propriétés

Pour un instant  $t$  donné,  $\mathbf{k} \mapsto \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  est continue, en tant que transformée de Fourier d'une fonction continue. Elle est même bornée car  $\mathbf{r} \mapsto R_{ij}(\mathbf{r}, t)$  est bornée (voir (2.51)).

On choisit un vecteur  $\mathbf{k}$ . On peut déduire de la définition (2.57) de  $\Phi_{ij}$  et de (2.44), le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \Phi_{ji}(-\mathbf{k}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} R_{ji}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} R_{ij}(-\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \Phi_{ij}(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Et on s'aperçoit aussi que  $\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}) = \Phi_{ji}(-\mathbf{k})$ , d'où :

$$\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}), \tag{2.60}$$

avec  $*$  l'opération de conjugaison complexe. Cela prouve que  $\Phi_{ij}$  est un tenseur hermitien, et donc que ses éléments diagonaux sont réels.

De la propriété d'incompressibilité (2.46), et par intégration par parties par rapport à la dérivation selon  $r_i$  :

$$\begin{aligned} k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}, t) k_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

car  $\mathbf{r} \mapsto R_{ij}(\mathbf{r})$  tend vers zéro à l'infini. Donc :

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \tag{2.62}$$

et de même, avec (2.59) et (2.62) :

$$k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = -[-k_j \Phi_{ji}(-\mathbf{k})] = 0. \tag{2.63}$$

L'ensemble de ces propriétés entraîne qu'il suffit de quatre fonctions scalaires pour décrire complètement le tenseur spectral des corrélations : on a un exemple de démonstration tensorielle dans [3]. Dans un système de coordonnées sphériques lié à  $\mathbf{k}$ , appelé repère de Craya-Herring et qui sera décrit plus précisément dans le chapitre suivant, on écrit ainsi usuellement  $\Phi$  sous la forme matricielle :

$$\Phi_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e + z_r & z_i + ih \\ 0 & z_i - ih & e - z_r \end{pmatrix}.$$

Les quatre fonctions  $e$ ,  $h$ ,  $z_r$  et  $z_i$ , de  $\mathbf{k}$  et de  $t$ , sont réelles, et suffisent à décrire  $\Phi_{ij}$ . Le fait que les premières ligne et colonne soient nulles provient de l'incompressibilité (2.62).

Enfin, on peut relier  $\Phi_{ij}$  et les transformées de Fourier des composantes  $u_i$  et  $u_j$  de la vitesse. Pour deux vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ , on écrit pour cela :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{k})\tilde{u}_j^*(\mathbf{k}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \iint u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{y})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}}d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}, \quad (2.64)$$

d'où, la turbulence étant homogène :

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k})\tilde{u}_j^*(\mathbf{k}')} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \iint \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{y})}e^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \left(\int R_{ij}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{r}\right) \left(\int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}d^3\mathbf{x}\right) \\ &= \Phi_{ij}(\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ &= \Phi_{ij}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (2.65)$$

car on a multiplication par un Dirac centré en  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ . Cette relation prouve que deux composantes de Fourier du champ de vitesse turbulente ne sont corrélées que si elles correspondent au même nombre d'onde. Or  $\tilde{u}_j^*(\mathbf{k}') = \tilde{u}_j(-\mathbf{k}')$ , et donc :

$$\overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k})\tilde{u}_j(\mathbf{k}')} = \Phi_{ij}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (2.66)$$

### 2.4.5.3 Lien avec l'énergie turbulente

On peut exprimer un certain nombre de grandeurs physiques réelles grâce à des quantités de l'espace spectral. En particulier, l'énergie cinétique turbulente est donc donnée par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}R_{ii}(\mathbf{0}, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)d^3\mathbf{k}, \quad (2.67)$$

Cela montre que l'énergie, indépendante de la position par homogénéité, peut être vue comme la somme sur tout l'espace de l'énergie contenue dans les structures de nombre d'onde  $\mathbf{k}$ , appelée encore *énergie spectrale* :

$$e(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\Phi_{ii}(\mathbf{k}). \quad (2.68)$$

On définit aussi le *spectre d'énergie turbulente*  $E(k, t)$ , par :

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \int_{S_k} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)dS, \quad (2.69)$$

avec  $S_k$  la sphère de centre l'origine du repère et de rayon  $k$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres d'ondes de module  $k$ . Ainsi le spectre d'énergie turbulente est l'énergie contenue dans tous les vecteurs d'ondes dont le module est  $k$ . On a alors la relation générale :

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^{+\infty} E(k, t)dk = \int_{\mathbb{R}^3} e(\mathbf{k}, t)d^3\mathbf{k}. \quad (2.70)$$

## 2.4.6 Turbulence isotrope

On suppose maintenant, et dans cette partie uniquement, que la turbulence, en plus d'être homogène, est aussi *isotrope*. Cela signifie qu'il y a invariance des propriétés statistiques, par toute rotation par rapport à un axe et par toute symétrie par rapport à un plan du repère de coordonnées. Une turbulence isotrope est a fortiori homogène, c'est donc une hypothèse supplémentaire sur l'écoulement. La turbulence n'a donc pas de direction privilégiée, comme on a vu le voir, et c'est un cas très idéalisé de la réalité.

### 2.4.6.1 Détermination des corrélations doubles

Pour les moments en un point et en un temps, on peut donc écrire :

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \overline{u^2} \quad \text{ou encore} \quad u_1'^2 = u_2'^2 = u_3'^2 = u'^2, \quad (2.71)$$

et pour  $i \neq j$ ,  $\overline{u_i u_j} = 0$ . Ces résultats se résument en :

$$\overline{u_i u_j} = 2\mathcal{E}(t) \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad (2.72)$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker, tel que  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ .

La théorie des invariants de Robertson [54] implique que le tenseur  $R_{ij}(\mathbf{r})$  est entièrement déterminé par les groupements  $r_i r_j$  et  $\delta_{ij}$ , car  $R_{ji}(\mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r})$  par isotropie. Finalement,  $R_{ij}$  est décrit par deux fonctions scalaires :

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = [f(r) - g(r)]r_i r_j + g(r)\delta_{ij}, \quad (2.73)$$

comme tous les tenseurs d'ordre 2 isotropes. La condition d'incompressibilité (2.46) donne une relation entre  $f$  et  $g$  :

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2}r \frac{df}{dr}(r), \quad (2.74)$$

relation établie par Karman et Howarth dans [32], ce qui prouve qu'il suffit de la seule fonction  $f$  pour décrire  $R_{ij}$  complètement. On peut noter que, grâce à (2.44),  $R_{ij}(-\mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r})$ , et  $\mathbf{r} \mapsto R_{ij}(\mathbf{r})$  est donc une fonction paire. Enfin, le tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\overline{u_i u_j} = g(0)\delta_{ij}, \quad (2.75)$$

avec  $g(0) = 2\mathcal{E}(t)\delta_{ij}/3$ , ce qui traduit bien qu'aucune direction n'est privilégiée

### 2.4.6.2 Conséquences sur le tenseur spectral des corrélations

Le tenseur  $\Phi_{ij}$  est d'ordre 2 et isotrope, il est donc, de même que pour  $R_{ij}$ , déterminé par deux fonctions scalaires. Si on ajoute la condition d'incompressibilité (2.62), il suffit d'une seule fonction  $G$  :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = G(k)\Delta_{ij}, \quad (2.76)$$

avec :

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (2.77)$$



l'opérateur de projection d'un vecteur sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Simplement avec la définition, on montre les premières propriétés :

$$\Delta_{il}\tilde{u}_l = \tilde{u}_i, \quad (2.78a)$$

$$\Delta_{il}k_l = 0, \quad (2.78b)$$

$$\Delta_{ik}\Delta_{kj} = \Delta_{ij}, \quad (2.78c)$$

$$\Delta_{ij}\Phi_{ij} = \Phi_{ii}. \quad (2.78d)$$

On peut enfin relier l'énergie spectrale turbulente au tenseur  $\Phi_{ij}$  en constatant que :

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_{S_k} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) dS = 4\pi k^2 G(k), \quad (2.79)$$

car  $\Delta_{ii} = 3$ . L'énergie spectrale ne dépend ainsi que de  $k$ , et donc finalement :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = e(k)\Delta_{ij} = \frac{E(k)}{4\pi k^2}\Delta_{ij}, \quad (2.80)$$

ce qui ne privilégie aucune direction, du fait de l'isotropie. On pourra se reporter, par exemple, à Monin & Yaglom [46] pour plus de détails.

## 2.5 Dynamique des tourbillons

Dans le cadre de la turbulence homogène, l'analyse de la structure de l'écoulement est chose beaucoup plus aisée que dans le cas général. La première approche théorique de ce type d'écoulement est due à Kolmogorov, qui proposa, grâce aux équations de Navier-Stokes, une quantification des différents mécanismes mis en jeu dans la turbulence.

### 2.5.1 Échelles spatiales

#### 2.5.1.1 Les grandes échelles

Les mesures de corrélations doubles de vitesse prouvent clairement que plus la distance entre deux points d'observation augmente, moins les composantes de vitesse sont corrélées, et la décorrélation intervient en théorie à l'infini. Néanmoins, à partir d'une certaine distance, on peut dire que les vitesses du fluide en ces deux points sont pratiquement indépendantes. Il s'agit alors d'estimer cette longueur de corrélation, notée  $L$ , et qui représente la taille des plus grandes structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement.

Il y a plusieurs façons d'en donner une estimation : ce n'est en effet qu'un ordre de grandeur, et on dira par exemple qu'une longueur  $l$  est  $O(L)$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $L$ . On peut, par exemple, calculer  $L$  comme étant la distance à partir de laquelle les corrélations doubles passent en-dessous de 1% de leur valeur à  $r = 0$ . Mais la valeur la plus utilisée est très certainement celle de l'*échelle intégrale* :

$$L_{ij}^{(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{R_{ij}(r, 0, 0)}{u'_i u'_j} dr, \quad (2.81)$$

qui a bien la dimension d'une longueur, car on a en définitive adimensionné les corrélations doubles.

Expérimentalement, il est clair que les grandes échelles de l'écoulement sont dues au processus physique qui a généré la turbulence, et qu'elles ne dépendent donc pas des propriétés intrinsèques du fluide, comme la viscosité. Leur dynamique est donc régie par un comportement non visqueux. Les tourbillons de grande taille étant très énergétiques, ils ont tendance à être instables, et donc à perdre leur énergie au profit des tourbillons de plus petite taille, via un processus de *cascade d'énergie*. Celui-ci est dû aux non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes par l'intermédiaire du *terme de transfert*. Enfin, du point de vue spectral, les grandes échelles correspondent à de petits modules de nombres d'onde.

### 2.5.1.2 Les petites échelles

On peut de la même façon se demander quelle est la taille des plus petits tourbillons de l'écoulement, s'il y en a une. Si on regarde une figure du type 2.1, on remarque que la vitesse sur une échelle de longueur de l'ordre de  $L$  est très fluctuante. En effectuant un grossissement de plus en plus important d'une zone donnée, on finit par dépasser une certaine échelle de longueur, en-dessous de laquelle on n'a plus du tout de fluctuations aléatoires, mais des fluctuations plus régulières.

On a alors atteint l'échelle de Kolmogorov  $\eta$ , qui est fortement liée à la viscosité. En effet, la viscosité "lisse" la courbe par son action à courte distance. Il apparaît alors que  $\eta$  conditionne le calcul des dérivées spatiales beaucoup plus que les autres échelles, auxquelles on observe trop de fluctuations des grandeurs. On s'aperçoit finalement qu'un écoulement turbulent contient un grand nombre d'échelles de longueur différentes, comprises entre l'échelle de Kolmogorov et l'échelle intégrale.

Du point de vue spectral, les petites échelles correspondent à de grands modules de nombres d'onde.

## 2.5.2 Équation d'évolution de l'énergie

On supposera dans la suite que le champ de vitesse moyenne est nul, ce qui correspond à une turbulence homogène non alimentée en énergie, et donc soumise simplement à la dissipation visqueuse. Il s'agit ici de déterminer dans un premier temps l'équation vérifiée par le tenseur des corrélations physiques pour ensuite, par transformée de Fourier, trouver l'équation pour le tenseur des corrélations spectral.

### 2.5.2.1 Équations pour le tenseur des corrélations

Les équations de Navier-Stokes et d'incompressibilité pour la composante  $U_i$  du champ de vitesse totale s'écrivent :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.83)$$

On prend la moyenne de (2.82) et (2.83), et par soustraction, on obtient les équations pour le champ de vitesse turbulente :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.85)$$

où on a écrit  $P = \bar{P} + p$ , et où on a utilisé que :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.86)$$

pour une turbulence homogène. En prenant la divergence de l'équation (2.84), on peut en déduire l'équation de Poisson, qui donne la pression en fonction de la vitesse :

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2 u_j u_k}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2.87)$$

L'équation (2.84) écrite pour la composante  $j$  et en un point  $\mathbf{x}'$ , notée  $v_j$ , donne :

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial(v_j v_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.89)$$

On multiplie (2.84) par  $v_j$ , on lui ajoute (2.88) multiplié par  $u_i$ , on moyenne et on obtient, en notant  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial r_m \partial r_m} \right) (\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_m} [Q_{jim}(-\mathbf{r}, t) - Q_{ijm}(\mathbf{r}, t)] - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \Pi_j(-\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \frac{\partial \Pi_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} \right], \end{aligned} \quad (2.90)$$

avec

$$Q_{ilm}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_l(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) u_m(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)} \quad (2.91)$$

$$\Pi_i(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)}, \quad (2.92)$$

respectivement corrélation d'ordre trois des vitesses en deux points, et corrélation d'ordre deux vitesse-pression en deux points. L'incompressibilité donne :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Pi_i}{\partial r_i}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.93)$$

et de l'équation (2.87) pour la pression, on déduit :

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial r_m \partial r_m}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) \nabla^2 p(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)} = -\rho \frac{\partial^2 Q_{ilm}}{\partial r_l \partial r_m}(\mathbf{r}, t), \quad (2.94)$$

ce qui permet d'obtenir  $\Pi_i(\mathbf{r}, t)$  en fonction de  $Q_{ijk}$  via une fonction de Green.

### 2.5.2.2 Équation pour le tenseur spectral

On prend alors la transformée de Fourier des équations (2.90), (2.93) et (2.94), et on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ij} \right) (\mathbf{k}, t) \\ &= -ik_m [\Theta_{jim}(-\mathbf{k}, t) - \Theta_{ijm}(\mathbf{k}, t)] - \frac{i}{\rho} \left[ k_i \tilde{\Pi}_j(-\mathbf{k}, t) - k_j \tilde{\Pi}_i(\mathbf{k}, t) \right], \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = k_i \tilde{\Pi}_i(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (2.96)$$

$$\text{et} \quad \tilde{\Pi}_i(\mathbf{k}, t) = -\rho \frac{k_l k_m}{k^2} \Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t), \quad (2.97)$$

avec  $\Theta_{ijk}(\mathbf{k}, t)$  la transformée de Fourier de  $Q_{ijk}(\mathbf{r}, t)$  :

$$\Theta_{ijk}(\mathbf{k}, t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} Q_{ijk}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (2.98)$$

et  $\tilde{\Pi}_i(\mathbf{k}, t)$  celle de  $\Pi_i(\mathbf{r}, t)$ . Les dérivations spatiales se sont naturellement changées en multiplications par des composantes de  $i\mathbf{k}$ . La dernière équation réinjectée dans la première donne :

$$\left( \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + 2\nu k^2 \Phi_{ij} \right) (\mathbf{k}, t) = T_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (2.99)$$

où

$$T_{ij}(\mathbf{k}, t) = ik_m [\Delta_{jl} \Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) - \Delta_{il} \Theta_{jlm}(-\mathbf{k}, t)]. \quad (2.100)$$

$T_{ij}(\mathbf{k}, t)$  représente les échanges d'énergie entre  $\mathbf{k}$  et les autres nombres d'ondes, et provient de la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes.

### 2.5.2.3 Propriétés

Le tenseur  $\Theta_{ilm}$  vérifie la propriété :

$$\Theta_{ilm}^*(\mathbf{k}, t) = \Theta_{ilm}(-\mathbf{k}, t). \quad (2.101)$$

On peut aussi exprimer  $\Theta_{ilm}$  en fonction du champ de vitesse spectral. On montre ainsi, en utilisant les définitions et l'homogénéité, et en notant  $*$  l'opération de convolution dans l'espace spectral, que :

$$\begin{aligned} & \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k})(\tilde{u}_j * \tilde{u}_k)(\mathbf{k}')} \\ &= \int \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}) \tilde{u}_j(\mathbf{k}'') \tilde{u}_k(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')} d^3\mathbf{k}'' \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^9 \int \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}) u_k(\mathbf{x} - \mathbf{r}') e^{-i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' - \mathbf{k}''\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{k}'' \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^6 \int \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}) u_k(\mathbf{x} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}']}} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^6 \int \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}) u_k(\mathbf{x} - \mathbf{r}) e^{-i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}]} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{r} \\ &= \Theta_{ijk}(-\mathbf{k}', t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \end{aligned}$$

qui est une relation du même type que (2.66) . Donc finalement :

$$\overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k})(\tilde{u}_j * \tilde{u}_k)(\mathbf{k}')} = \Theta_{ijk}(\mathbf{k}, t)\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (2.102)$$

On a enfin :

$$T_{ji}(-\mathbf{k}, t) = T_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (2.103)$$

par définition, et :

$$T_{ji}^*(\mathbf{k}, t) = T_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (2.104)$$

en utilisant (2.101). Cela implique que  $T_{ij}(\mathbf{k}, t)$  est un tenseur hermitien et donc que sa trace,  $T_{ii}(\mathbf{k}, t)$ , est réelle.

### 2.5.2.4 Équation pour l'énergie

En effectuant la sommation  $i = j$  dans l'équation (2.99), on obtient donc l'équation d'évolution de  $e(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}\Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}T_{ii}(\mathbf{k}, t) - 2\nu k^2 e(\mathbf{k}, t), \quad (2.105)$$

aussi appelée *équation de Lin*. En intégrant sur une sphère de rayon  $k$ , on obtient l'équation d'évolution de  $E(k, t)$  :

$$\frac{\partial E}{\partial t}(k, t) = \frac{1}{2} \int_{S_k} T_{ii}(\mathbf{k}, t) dS - 2\nu k^2 E(k, t). \quad (2.106)$$

Enfin, si on intègre l'équation (2.105) sur tout l'espace, on obtient l'équation d'évolution de l'énergie turbulente totale  $\mathcal{E}(t)$  :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} T_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} - \int_{\mathbb{R}^3} 2\nu k^2 e(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k}. \quad (2.107)$$

Si la viscosité est nulle, alors on a un système conservatif, et l'énergie totale reste constante au cours du temps. On a donc que l'intégrale de  $T_{ii}$  sur  $\mathbb{R}^3$  est nulle, ce qui indique que le terme de transfert redistribue l'énergie entre les différents nombres d'ondes sans la dissiper. On en déduit l'équation vérifiée par l'énergie totale :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = -\bar{\varepsilon}, \quad (2.108)$$

avec

$$\bar{\varepsilon} = \nu \int_{\mathbb{R}^3} k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}, \quad (2.109)$$

terme de dissipation visqueuse qui est toujours positif, et qui est responsable de la décroissance de la turbulence si celle-ci n'est pas entretenue.

Dans l'équation (2.105), si on néglige les effets non linéaires par rapport aux effets visqueux, ce qui revient à supposer un bas nombre de Reynolds, on obtient que :

$$e(\mathbf{k}, t) = e(\mathbf{k}, 0) \exp[-2\nu k^2 t] \quad (2.110)$$

et l'énergie de tous les nombres d'ondes diminue *indépendamment* et de manière exponentielle sous l'effet de la dissipation visqueuse. Ce sera le cas quand la cascade d'énergie prendra fin, car alors, à toutes les échelles, la diminution de la vitesse turbulente fera décroître le nombre de Reynolds, jusqu'à ce que les effets visqueux dominant la dynamique.

### 2.5.3 Conséquences de la théorie de Kolmogorov

On se place dans le cas d'un écoulement statistiquement homogène et isotrope, et sans champ de vitesse moyen. On suppose de plus que la turbulence est complètement développée, et que toutes les échelles de la turbulence sont apparues. Kolmogorov, dans [33], fait une analyse qualitative de la turbulence isotrope, en déterminant les effets dominants au cours des différentes étapes de son évolution. Par une analyse dimensionnelle, il en déduit ainsi le comportement du spectre d'énergie dans la zone inertielle. Pour une explication plus récente, on pourra aussi lire Bailly & Comte-Bellot [1].

#### 2.5.3.1 Théorie spectrale

On part de l'équation d'évolution (2.106) pour le spectre d'énergie turbulente :

$$\frac{\partial E}{\partial t}(k, t) = T(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t), \quad (2.111)$$

avec  $T(k, t) = 2\pi k^2 T_{ii}(\mathbf{k}, t)$  et  $E(k, t) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)$ , fonctions du module de  $\mathbf{k}$  uniquement en isotrope. La plus grande partie de l'énergie est fournie initialement aux grandes échelles de l'écoulement, de l'ordre de  $L$ , donc aux petits nombres d'ondes. La taille de ces échelles est déterminée typiquement par la taille du phénomène générateur de la turbulence. La viscosité n'a que peu d'influence sur ces tourbillons de grande taille. Par le biais d'une cascade non linéaire, l'énergie est progressivement transférée à des structures de plus petite taille – donc de plus grands nombres d'ondes –, et ce grâce au terme de transfert  $T$ . Cette cascade est conservative, et il n'y a donc pas de pertes énergétiques. Finalement, quand on atteint une certaine taille de tourbillon, de l'ordre de  $\eta$ , la cohérence spatiale n'est plus possible, et il y a dissipation de l'énergie sous forme de chaleur, sous l'action de la viscosité.

#### 2.5.3.2 La zone inertielle

Les modules des vecteurs d'ondes  $\mathbf{k}$  tels que  $\eta \ll k^{-1} \ll L$  forment une zone appelée la *zone inertielle*. Son extension spatiale dépend fortement de la valeur du nombre de Reynolds  $Re_L$  calculé pour les grandes échelles. En effet, on suppose que l'échelle  $\eta$  ne dépend que de la dissipation  $\bar{\varepsilon}$ , et de la viscosité, qui devient importante aux petites échelles. Le seul groupement de ces variables ayant la même dimension qu'une longueur est alors :

$$\eta \sim \left( \frac{\nu^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.112)$$

L'énergie qui finalement est dissipée aux petites échelles provient à l'origine des grandes échelles, ce qui permet de dire que la création et la dissipation d'énergie se compensent globalement :

$$\bar{\varepsilon} \sim \frac{u'^3}{L}, \quad (2.113)$$

soit finalement :

$$\frac{\eta}{L} \sim Re_L^{-\frac{3}{4}}, \quad (2.114)$$

ce qui prouve bien que plus  $Re_L$  augmente, plus la largeur de la zone inertielle augmente, en déplaçant la dissipation visqueuse vers les plus grands nombres d'ondes.

### 2.5.3.3 Loi en $k^{-5/3}$

Dans la zone inertielle, Kolmogorov a prédit une loi en puissance pour le spectre d'énergie. On considère un nombre d'onde  $k$  dans cette zone inertielle, ce que l'on va voir maintenant. Il faut se placer suffisamment loin des grandes échelles énergétiques, et de telle façon que la grande partie de la dissipation s'effectue pour des nombres d'ondes plus grands que  $k$ . Pour les grandes échelles, le terme non linéaire domine, et pour les petites échelles, le terme visqueux domine : on s'attend donc à ce que dans la zone inertielle, on ait un équilibre entre les deux effets. On peut aussi ajouter qu'à ces échelles, on a peu d'accumulation d'énergie et peu de dissipation, et donc que  $E(k, t)$  y reste à peu près constant au cours du temps : le flux d'énergie et la dissipation s'équilibrent donc. Le comportement de ces échelles semble ainsi être indépendant du processus de création d'énergie, et ne dépendre en fait que du flux d'énergie de la cascade, et donc de la dissipation  $\bar{\varepsilon}$ . Grâce à l'analyse dimensionnelle, et si on suppose que le spectre d'énergie ne dépend que de  $k$  et de  $\bar{\varepsilon}$ , on obtient :

$$E = C \bar{\varepsilon}^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.115)$$

avec  $C$  une constante numérique, et la dépendance en temps étant contenue dans celle en  $\bar{\varepsilon}$ . En échelle logarithmique, le spectre d'énergie turbulente a la forme de la figure 2.4, en fonction d'un nombre de Reynolds aux grandes échelles croissant.

### 2.5.3.4 Incréments de vitesse

Les différentes échelles spatiales de l'écoulement peuvent être mises en évidence par l'étude des valeurs moyennes des puissances de l'incrément de vitesse en deux points  $\overline{(\Delta u)^n}$ . En raisonnant de manière unidimensionnelle, on notera  $r$  la séparation entre les deux points. Là où le champ de vitesse est infiniment dérivable, on peut effectuer un développement de Taylor pour l'incrément de vitesse. Avec l'analyse dimensionnelle, on obtiendrait alors  $\overline{(\Delta u)^n} \sim r^n$ . Aux petites échelles, de l'ordre de  $\eta$ , cette loi est effectivement vérifiée, ce qui est compatible avec l'infinie différentiabilité de la vitesse. Aux grandes échelles, l'incrément est constant, de l'ordre de la fluctuation moyenne de la vitesse. Par contre, on distingue nettement une zone intermédiaire où l'incrément décroît avec l'augmentation de la séparation, mais bien moins vite que si la courbe était infiniment dérivable. A ces échelles, qui déterminent la zone inertielle, une première approximation de la théorie de Kolmogorov conduit à :

$$\overline{(\Delta u)^n} \sim (\varepsilon r)^{n/3}, \quad (2.116)$$

et l'exposant est fractionnaire. Appliqué à l'ordre  $n = 2$ , on a une relation de même origine que (2.115), mais dans l'espace physique. Des théories récentes ont étudié l'écart à la relation (2.116) lors de l'intermittence. On peut par exemple consulter Frisch [18] ou encore Baroud, Plapp, She et Swinney [2]. Cependant, la correction sur l'exposant reste relativement faible pour les moments jusqu'à l'ordre 7 ou 8 : on peut donc ne pas en tenir compte ici, sachant que les moments d'ordre 4 au maximum seront utilisés.

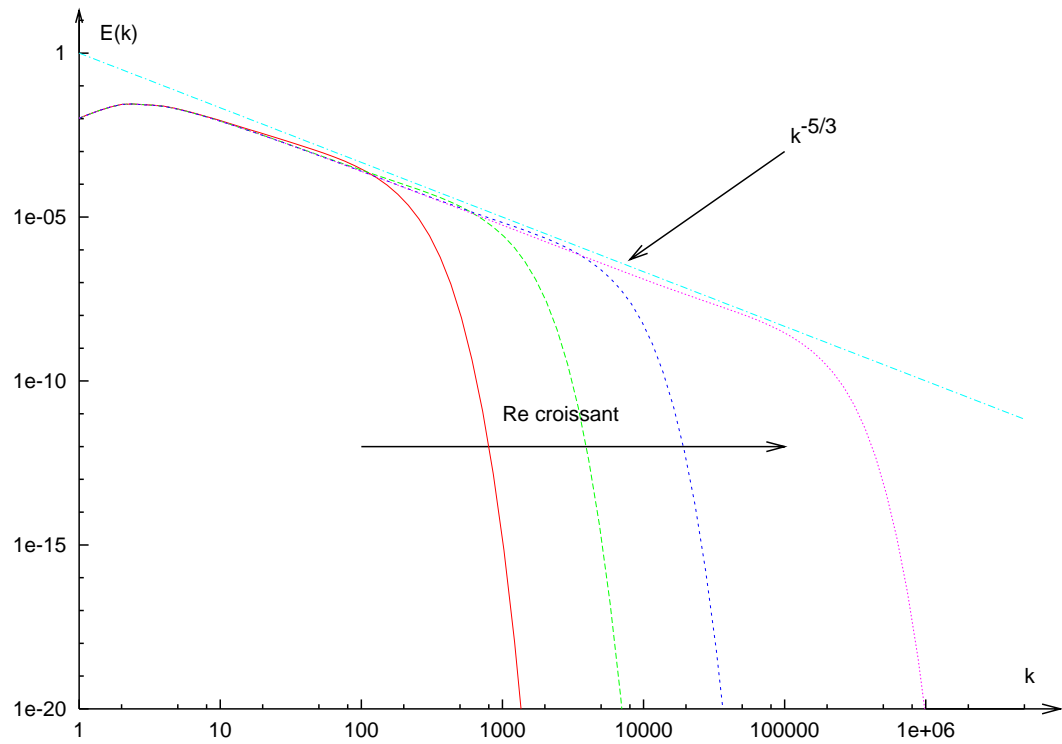


FIG. 2.4 – Spectre d'énergie turbulente en fonction du module du nombre d'onde pour un nombre de Reynolds croissant (résultat EDQNM isotrope)





# Chapitre 3

## La turbulence en rotation

### 3.1 Introduction

La turbulence est encore loin de révéler les mécanismes fondamentaux qui la régissent. Même dans des cas simples, les modèles analytiques manquent et le recours à l'expérience reste encore un moyen très efficace pour étudier un écoulement. Il peut alors être intéressant de considérer certains cas particuliers de turbulence, pour éventuellement en déduire des lois plus générales. On peut ainsi considérer un effet additionnel, comme le forçage du champ turbulent par un champ moyen ou une force extérieure, ou bien contraindre l'écoulement en lui imposant des conditions aux limites géométriques, thermiques, dynamiques, entre autres. Une des catégories les plus étudiées reste encore la turbulence soumise à une rotation solide. Les domaines d'application sont nombreux : pour ce qui est des systèmes à grande échelle, on peut citer la dynamique de l'océan, la météorologie, le comportement du milieu interstellaire, et pour le milieu industriel, les enjeux sont importants dans les moteurs de turbomachines, dans les centrales hydroélectriques. . . On aimerait ainsi comprendre quels sont les effets de la rotation sur la structuration de la turbulence.

L'introduction d'une rotation solide d'axe et d'intensité donnés, dans un écoulement au repos et dont les limites sont lointaines, conduit au bout d'un certain temps, à un champ de vitesse de direction orthoradiale, et ne dépendant que de la distance à l'axe. Cela correspond tout à fait à l'image que l'on se fait d'un tourbillon idéalisé. L'établissement de la rotation solide se fait d'autant plus rapidement que le taux de rotation  $\Omega$  est élevé. Dans le cas où le confinement se révèle ne plus être négligeable, de multiples expériences en géométrie cylindrique ont été menées, afin de comprendre la structuration de l'écoulement. McEwan, dans [45], a montré que pour une excitation de fréquence  $f \leq 2\Omega$  selon l'axe de rotation, on observait des *ondes inertielles*, dont les interactions et réflexions conduisaient à la formation de structures dites *croix de Saint-André*. Les simulations numériques en DNS de Lollini [39], et Godefert & Lollini [23] sont particulièrement en accord avec ces observations expérimentales. Quand  $f$  tend vers 0, les croix se transforment petit à petit en une colonne, dite *colonne de Taylor*, effet que ce dernier avait constaté dans [59]. Une analyse spécifique des équations de Navier-Stokes, dans le cas des écoulements *géostrophiques*, permet de retrouver cette structuration bidimensionnelle très marquée. On peut aussi citer les expériences de Colin de Verdière [16] et

de Ibbetson & Tritton [30]. Plus récemment, les expériences menées sur la plate-forme Coriolis à Grenoble depuis 1960, ont permis la modélisation d'écoulements à trois dimensions, comme les courants océaniques. Les dimensions du dispositif et son taux de rotation permettent d'atteindre des régimes à grand nombre de Reynolds et forte rotation.

On considère maintenant plus spécifiquement un écoulement homogène turbulent en régime établi, et soumis à une rotation solide. Dans le cas d'une rotation suffisamment forte par rapport à l'intensité de la turbulence, on assiste à nouveau à une bidimensionnalisation de l'écoulement, c'est-à-dire que les structures cohérentes de la turbulence s'étirent dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Pour expliquer ce phénomène, on peut penser que les effets linéaires de la rotation sont seuls responsables, mais on verra en fait que les échanges non linéaires jouent un rôle primordial. Une autre conséquence de l'ajout d'une rotation solide est que la directionnalité de la rotation inhibe les transferts d'énergie vers les petites échelles, et ralentit ainsi le déclin de la turbulence dû à la viscosité, effet cité dans l'expérience de Hopfinger, Browand & Gagne [27]. La rotation induit non seulement des effets linéaires, mais elle agit aussi en modifiant les effets non linéaires. D'un point de vue numérique, beaucoup de résultats proviennent de simulations de type DNS (Direct Numerical Simulation), qui consistent à discrétiser directement les équations de Navier-Stokes dans un domaine limité, mais elles sont limitées aux bas nombres de Reynolds. En domaine infini, une option est de considérer que le champ de vitesse est périodique dans les trois directions, et on se ramène à l'étude de modes de Fourier discrets. Enfin, on peut aussi utiliser des modèles mieux adaptés aux grands nombres de Reynolds, mais aussi plus complexes, comme le modèle EDQNM, qui propose une fermeture pour les équations vérifiées par les corrélations de composantes de la vitesse spectrale.

## 3.2 Première approche

On s'intéresse à partir de maintenant à une turbulence homogène, et donc illimitée, incompressible, et soumise à une anisotropie consistant en une rotation solide d'intensité et de direction constantes au cours du temps, représentée par le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}$ . On se place dans un repère de référence qui tourne à une vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour de l'axe de rotation.

On pourrait traiter le problème dans le référentiel fixe galiléen, mais il faudrait alors prendre en compte un champ de vitesse moyen correspondant à la rotation solide. On retrouverait alors quasiment les mêmes équations pour la perturbation de vitesse, et les grandeurs dans le référentiel tournant se déduiraient par application d'une matrice de rotation. On préfère donc se placer dans le référentiel tournant, pour ne pas avoir de champ de vitesse moyen dû à la rotation, mais au prix de la prise en compte des accélérations de Coriolis et d'inertie.

### 3.2.1 Équations du mouvement

L'équation de Navier-Stokes vérifiée par les composantes de la vitesse totale  $\mathbf{U}$  est :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U})_i - (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}))_i + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur position du point courant,  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$  est l'accélération de Coriolis et  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$  est l'accélération d'inertie. La condition d'incompressibilité se traduit alors par :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0.$$

En écriture tensorielle, les accélérations de Coriolis et inertielle deviennent :

$$-2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U})_i = 2\varepsilon_{ijq} U_j \Omega_q \quad (3.2)$$

$$-(\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijq} \varepsilon_{jkl} \Omega_k x_l \Omega_q = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -\frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 \right] \quad (3.3)$$

avec  $\varepsilon_{ijk}$  le tenseur alterné, qui vaut 0 s'il y a répétition d'indice, 1 si  $(i, j, k)$  est une permutation paire de  $(1, 2, 3)$  et  $-1$  si  $(i, j, k)$  est une permutation impaire de  $(1, 2, 3)$ .

Ainsi, l'accélération d'inertie peut être intégrée dans le terme de pression, car elle s'écrit comme le gradient d'une fonction, et elle joue alors un rôle secondaire. On obtient donc :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijq} U_j \Omega_q + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.5)$$

avec  $\hat{P} = P - \rho |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 / 2$  un terme de pression modifié, incluant les effets inertiels. Ces deux équations constituent les équations de départ, et l'analyse dimensionnelle va permettre d'en déduire les différents mécanismes qu'elles reflètent.

### 3.2.2 Analyse dimensionnelle

Pour quantifier les effets de la force de Coriolis par rapport aux effets non linéaires et visqueux, on va estimer l'ordre de grandeur des différents termes aux grandes échelles. En notant  $U$  l'échelle de vitesse,  $L$  l'échelle de longueur, et  $\Omega$  l'ordre de grandeur du taux de rotation, cela donne :

$$|\varepsilon_{ijq} U_j \Omega_q| \sim U \Omega, \quad (3.6)$$

$$\left| U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right| \sim \frac{U^2}{L}, \quad (3.7)$$

$$\text{et } \left| \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \right| \sim \frac{\nu U}{L^2}. \quad (3.8)$$

On peut alors former deux quantités adimensionnelles à partir de ces ordres de grandeur. Le premier est le *nombre de Rossby* :

$$Ro = \frac{U}{\Omega L} \equiv \frac{\text{effets non linéaires}}{\text{effets Coriolis}}, \quad (3.9)$$

et le deuxième est le *nombre d'Ekman* :

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2} \equiv \frac{\text{effets visqueux}}{\text{effets Coriolis}}. \quad (3.10)$$

Le nombre d'Ekman vaut en fait :

$$Ek = \frac{Ro}{Re},$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds.

On va s'intéresser, par la suite, à différents types d'écoulements selon les importances relatives de la rotation, de la viscosité et de la non-linéarité. Le premier cas correspond à une rotation forte devant les effets non linéaires et visqueux ; ce sont les écoulements géostrophiques. Le deuxième cas correspond à une rotation et une viscosité fortes devant les effets non linéaires ; ce sont des écoulements idéaux au comportement linéaire. Le lecteur trouvera plus de détails dans Greenspan [24].

### 3.2.3 Écoulements géostrophiques

Par souci de simplicité, on se place dans le cas stationnaire, ou quasi-stationnaire, c'est-à-dire que l'on étudie des phénomènes dont les temps d'évolution sont très longs, comme en météorologie par exemple. On suppose de plus la rotation forte devant la viscosité et la non-linéarité, ce qui correspond à de faibles nombre de Rossby et d'Ekman.

#### 3.2.3.1 Équation du mouvement

Dans ces conditions, les équations du mouvement se réduisent à :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \hat{P} = 2\Omega \times \mathbf{U}, \quad (3.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (3.11b)$$

L'écoulement est alors géostrophique, et le terme de pression compense exactement la force de Coriolis. Enfin, si on prend le rotationnel de (3.11a), on obtient :

$$\nabla \times (\Omega \times \mathbf{U}) = 0. \quad (3.12)$$

En utilisant le fait que :

$$\nabla \times (\Omega \times \mathbf{U}) = (\nabla \cdot \mathbf{U}) \Omega - (\nabla \cdot \Omega) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{U}, \quad (3.13)$$

on en déduit une propriété très importante pour ce type d'écoulements :

$$(\Omega \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (3.14)$$

car  $\Omega$  est uniforme et en s'aidant de l'incompressibilité (3.11b).

### 3.2.3.2 Colonne de Taylor

Les relations (3.11a) et (3.14) permettent de tirer deux conclusions. D'après (3.11a), on remarque que le gradient de pression est perpendiculaire à la vitesse. Ce gradient étant lui-même perpendiculaire aux lignes isobares, cela implique que les lignes isobares et les lignes de courant coïncident. Les relations géostrophiques sont ainsi très utilisées en météorologie car elles modélisent de manière correcte la circulation de certains vents d'altitude, loin de la surface où la viscosité a plus d'importance.

De plus, la relation (3.14) indique qu'il n'y a pas de variation du champ de vitesse selon la direction de  $\Omega$ , que l'on assimilera à la verticale par la suite. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Taylor-Proudman*. Tous les points sur une même verticale ont donc même vitesse. On a ainsi une bidimensionnalisation de l'écoulement dû à la rotation, sans que, toutefois, la vitesse verticale  $u_z$  soit forcément nulle. Un écoulement où une des composantes de la vitesse est nulle sera dit *bicomposantes*.

Si l'écoulement est maintenant confiné à un cylindre en rotation, comme dans l'expérience initiale de Taylor [59], on observe une structuration très nette en colonne verticale, centrée sur l'axe de rotation. Plus le nombre de Rossby diminue, plus la colonne est étroite, car le fluide tourne de plus en plus vite. On observe expérimentalement des limites à la colonne, où les grandeurs caractéristiques varient de manière significative sur de courtes distances, faisant apparaître une couche limite mince. Dans cette région, le nombre de Rossby et le nombre d'Ekman peuvent devenir importants, et l'approximation géostrophique ne tient plus. Contrairement au cas d'un écoulement illimité, la condition aux limites sur la paroi verticale entraîne que  $u_z$  est nulle à cet endroit, que le fluide soit parfait ou visqueux. Cela implique donc cette fois que la vitesse verticale est nulle partout dans l'écoulement, et que l'on a une vitesse bicomposantes : une particule fluide dans une section horizontale y reste à tout instant.

## 3.2.4 Équations pour les perturbations

En partant de l'équation pour le champ de vitesse totale (3.4), on peut facilement en déduire l'équation vérifiée par le champ de vitesse turbulent  $u_i$  défini par  $u_i = U_i - \bar{U}_i$ .

### 3.2.4.1 Le champ de vitesse fluctuante

On prend tout d'abord la moyenne de l'équation (3.4) :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijq} \bar{U}_j \Omega_q + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.15)$$

Or :

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \overline{(\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j}} = \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}, \quad (3.16)$$

car le champ fluctuant est à moyenne nulle. Enfin :

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} - \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0, \quad (3.17)$$

en utilisant l'hypothèse d'homogénéité pour le premier terme et l'incompressibilité du champ fluctuant pour le deuxième terme. L'équation (3.15) devient alors :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\hat{P}}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijq} \overline{U}_j \Omega_q + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.18)$$

On choisit de prendre dans la suite  $\overline{U}_i = 0$ , ce qui correspond, dans un référentiel fixe, à un champ de vitesse moyen dû à une rotation solide uniquement. On considère en définitive une turbulence dans le référentiel tournant, dont l'énergie n'est pas entretenue par un forçage mais simplement soumise à l'effet dissipatif de la viscosité. Si on accepte l'unicité de la solution à (3.18), alors cette condition est équivalente à dire que  $\overline{\hat{P}}$  est uniforme. Dans ce cas, l'équation (3.4) est alors aussi celle pour les fluctuations de vitesse turbulente :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijq} u_j \Omega_q + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.19b)$$

En s'aidant de l'incompressibilité du champ fluctuant et du fait que  $\overline{\hat{P}}$  est uniforme, on en conclut :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{ijq} u_j \Omega_q + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.20b)$$

avec  $p = \hat{P} - \overline{\hat{P}}$  la fluctuation de pression modifiée.

### 3.2.4.2 Symétries

On peut s'intéresser aux propriétés de symétries des équations (3.20), car elles sont utiles à la compréhension du problème. De plus, prises en compte dans l'élaboration d'un modèle de fermeture, elles conduisent en général à des simplifications intéressantes. L'équation d'évolution des fluctuations possède les propriétés suivantes :

1. On a invariance des équations par translation du système de coordonnées par un vecteur quelconque, car l'équation ne dépend pas explicitement de la position  $\mathbf{x}$ . Ainsi, les équations vérifiées par les moments des composantes du champ turbulent ne dépendent pas non plus de la position. Donc si la turbulence est homogène initialement, elle le reste ultérieurement.
2. On a invariance des équations par rotation du système de coordonnées autour de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Donc si la turbulence est axisymétrique par rapport à  $\boldsymbol{\Omega}$  initialement, elle le reste ultérieurement.

3. On a symétrie des équations par l'inversion des coordonnées  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . En effet, si les champs  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$  et  $p_1(\mathbf{x}, t)$  sont solution de (3.20), alors on peut construire une autre solution, à savoir  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{u}_1(-\mathbf{x}, t)$  et  $p_2(\mathbf{x}, t) = p_1(-\mathbf{x}, t)$ , ce qui correspond à un écoulement symétrique au précédent par rapport à l'origine. Donc si un écoulement est symétrique par rapport à l'origine initialement, il le reste à tout instant.

### 3.2.5 Équations pour la vitesse spectrale

On a vu qu'il n'était en fait pas possible de calculer la transformée de Fourier usuelle des composantes de la vitesse fluctuante, en particulier parce qu'à l'infini, ces fonctions n'ont aucune raison de tendre vers zéro. Pour éviter ce problème, on utilisera dans la suite une transformée de Fourier à grand volume (voir [43]), qui conserve toutes les propriétés de la transformée usuelle.

#### 3.2.5.1 Évolution temporelle

La transformée de Fourier des équations (3.20) est alors :

$$\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial t} + ik_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m = -\frac{ik_l}{\rho} \tilde{p} + 2\varepsilon_{lmq} \tilde{u}_m \Omega_q - \nu k^2 \tilde{u}_l, \quad (3.21a)$$

$$k_i \tilde{u}_i = 0, \quad (3.21b)$$

avec  $*$  l'opération de convolution dans l'espace spectral,  $k$  le module de  $\mathbf{k}$ , et où on a noté avec une tilde les transformées de Fourier. La condition d'incompressibilité se traduit par le fait que la vitesse spectrale est orthogonale au nombre d'onde.

On utilise alors l'opérateur tensoriel  $\mathbf{k} \mapsto \Delta_{il}(\mathbf{k})$  précédemment défini par (2.77). Appliqué à (3.21a), il prend en compte l'effet non local de la pression, et la fait disparaître de l'équation. On obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + i\Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m = 2\varepsilon_{lmq} \Delta_{il} \tilde{u}_m \Omega_q - \nu k^2 \tilde{u}_i, \quad (3.22)$$

en se servant de (2.78a). Il ne faut pas confondre cette étape avec l'application du rotationnel à l'équation physique (3.20), qui supprimait le terme de pression, tout en élevant le degré de l'équation différentielle. D'où finalement :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \gamma_{in} \tilde{u}_n + \nu k^2 \tilde{u}_i = -i\Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m, \quad (3.23)$$

où on a introduit l'opérateur :

$$\gamma_{in} : \mathbf{k} \mapsto 2\Omega_q \varepsilon_{qim} \Delta_{li}(\mathbf{k}) \Delta_{mn}(\mathbf{k}). \quad (3.24)$$

#### 3.2.5.2 Propriétés

Ce tenseur possède en particulier les propriétés de symétrie :

$$\gamma_{ni} = -\gamma_{in}, \quad (3.25a)$$

$$\gamma_{ni}(-\mathbf{k}) = \gamma_{in}(\mathbf{k}), \quad (3.25b)$$



car  $\varepsilon_{qml} = -\varepsilon_{qlm}$ .

On peut remarquer que si le champ de vitesse est incompressible au temps  $t = 0$ , il le reste à tout instant. En effet, l'équation vérifiée par  $k_i \tilde{u}_i$  est :

$$\frac{\partial (k_i \tilde{u}_i)}{\partial t} + \nu k^2 (k_i \tilde{u}_i) = 0, \quad (3.26)$$

avec (2.78b), et donc :

$$(k_i \tilde{u}_i)(\mathbf{k}, t) = (k_i \tilde{u}_i)(\mathbf{k}, 0) \exp[-\nu k^2 t], \quad (3.27)$$

d'où le résultat.

L'écriture de (3.23) est volontaire : elle sépare les termes linéaires et non-linéaires, le terme  $-\gamma_{in} \tilde{u}_n$  traduisant les effets a priori linéaires de la rotation. On peut encore regrouper les effets linéaires de telle sorte que (3.23) s'écrive :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + L_{in} \tilde{u}_n &= -i \Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m, \\ \text{avec } L_{in} &= -\gamma_{in} + \nu k^2 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le terme non linéaire s'écrit aussi :

$$-i \Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m = -i \Delta_{il} k_m \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}_l(\mathbf{k}') \tilde{u}_m(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3 \mathbf{k}', \quad (3.29)$$

ce qui fait apparaître les nombres d'ondes  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , formant un triangle fermé. De telles triades de nombres d'ondes sont dites *résonantes*; elles jouent un rôle majeur dans la dynamique de la vitesse spectrale.

### 3.2.6 Équations pour le tenseur spectral

On écrit (3.28) une fois pour la composante  $i$  en  $\mathbf{k}$ , multiplié par  $u_j(\mathbf{k}')$ , et une fois pour la composante  $j$  en  $\mathbf{k}'$ , multiplié par  $u_i(\mathbf{k})$ . En les additionnant et en prenant la moyenne, on en déduit :

$$\frac{\partial \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}'_j}}{\partial t} + L_{im} \overline{\tilde{u}_m \tilde{u}'_j} + L'_{jm} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}'_m} = -i \left[ \Delta_{il} k_m \overline{(\tilde{u}_l * \tilde{u}_m) \tilde{u}'_j} + \Delta'_{jl} k'_m \overline{(\tilde{u}_l * \tilde{u}_m)' \tilde{u}_i} \right], \quad (3.30)$$

où on a noté avec des primes les quantités se rapportant à  $\mathbf{k}'$ .

#### 3.2.6.1 Moments d'ordre 3

Avec la propriété (2.102), on peut réécrire  $\Theta_{ijk}$  sous la forme :

$$\Theta_{ijk}(\mathbf{k}, t) = \iiint \Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}'' \quad (3.31)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_k(\mathbf{k}'', t)} \quad (3.32)$$

en intégrant le Dirac sur l'ensemble des  $\mathbf{k}'$ . De plus, comme pour (2.102), en écrivant les transformées de Fourier, on peut montrer que  $\Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  s'écrit comme le produit d'une fonction de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ , et de  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'')$ . Ainsi,  $\Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  est nul dès que  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' \neq 0$ .

### 3.2.6.2 Équation d'évolution de $\Phi_{ij}$

En utilisant (2.66), on obtient :

$$\left( \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L'_{jm} \Phi_{im} + i [\Delta_{il} k_m \Theta_{jlm}(\mathbf{k}', t) + \Delta'_{jl} k'_m \Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t)] \right) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = 0. \quad (3.33)$$

Comme on a une multiplication par un Dirac centré sur  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' = 0$ , on intègre en  $\mathbf{k}'$  sur un domaine comprenant  $-\mathbf{k}$ . On peut ainsi écrire une nouvelle équation d'évolution :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L_{jm} \Phi_{im} = T_{ij}, \quad (3.34)$$

$$\text{avec } T_{ij}(\mathbf{k}, t) = ik_m [\Delta_{jl}(\mathbf{k}) \Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) - \Delta_{il}(\mathbf{k}) \Theta_{jlm}(-\mathbf{k}, t)], \quad (3.35)$$

où on a utilisé (3.25). Or :

$$-i \Delta_{il} k_m \Theta_{jlm}(-\mathbf{k}, t) = [i \Delta_{il} k_m \Theta_{jlm}(\mathbf{k}, t)]^*, \quad (3.36)$$

qui provient de (2.101), d'où l'équation d'évolution finale du tenseur spectral  $\Phi_{ij}$  sous sa forme symétrisée :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L_{jm} \Phi_{im} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*, \quad (3.37)$$

$$\text{avec } \tau_{ij}(\mathbf{k}, t) = ik_m \Delta_{jl}(\mathbf{k}) \Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t). \quad (3.38)$$

On retrouve une équation du même type que (2.99), où on a rajouté l'effet de la rotation dans l'opérateur linéaire. Cette équation pour les moments d'ordre 2 fait naturellement intervenir les moments d'ordre 3, et on retrouve un problème de fermeture classique. On peut aussi écrire  $\tau_{ij}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{1}{2} i [k_m \Delta_{jl} \Theta_{ilm} + k_l \Delta_{jm} \Theta_{iml}] \\ &= \frac{1}{2} i P_{jlm} \Theta_{ilm}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\text{où } P_{jlm}(\mathbf{k}) = k_m \Delta_{jl}(\mathbf{k}) + k_l \Delta_{jm}(\mathbf{k}), \quad (3.40)$$

grâce, à nouveau, à (2.101).

L'équation pour l'énergie spectrale est obtenue en prenant  $i = j$  dans (3.34), ce qui revient à une sommation, dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e = \frac{1}{2} T_{ii} = \frac{1}{2} [\tau_{ii} + \tau_{ii}^*], \quad (3.41)$$

les seuls effets linéaires étant ceux liés à la dissipation visqueuse.

### 3.2.6.3 Conservation de l'énergie

Comme dans le cas sans rotation, l'intégrale du terme de transfert sur tout l'espace :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} T_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k}, \quad (3.42)$$

doit être nulle. Il y a deux façons de le démontrer. La première consiste à utiliser l'équation vérifiée par l'énergie turbulente totale, qui est, d'après (3.41) :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\bar{\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} T_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k}. \quad (3.43)$$

On peut alors invoquer le fait que, pour un système conservatif, c'est-à-dire ici sans viscosité, l'énergie cinétique turbulente totale reste constante. Ainsi, si la dissipation  $\bar{\varepsilon}$  est nulle, alors l'intégrale du terme de transfert doit aussi être nulle.

La deuxième méthode est analytique, elle consiste à écrire l'intégrale du demi-terme de transfert  $\tau_{ii}$  sous une forme symétrique, afin de montrer qu'elle est égale à zéro. Il en découlera que l'intégrale du terme de transfert complet sera aussi nulle. Grâce à (3.38) et (3.31), cette intégrale vaut :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \frac{1}{2} i \iiint P_{ilm}(\mathbf{k}) \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \quad (3.44)$$

Or, d'après les propriétés de l'opérateur de projection  $P_{ilm}$  :

$$P_{ilm} \Gamma_{ilm} = k_m \Gamma_{ilm} + k_l \Gamma_{mlm}. \quad (3.45)$$

De plus,  $\Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  est nul dès que  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' \neq 0$ , donc on peut remplacer  $k_m$  dans l'expression précédente par  $-k'_m - k''_m$ . Comme  $k''_m \Gamma_{ilm} = 0$  du fait de l'incompressibilité, on obtient :

$$P_{ilm} \Gamma_{ilm} = k_l \Gamma_{mlm} - k'_m \Gamma_{ilm}. \quad (3.46)$$

Cela donne pour (3.44) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \frac{1}{2} i \iiint [k_l \Gamma_{mlm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') - k'_m \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')] d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \quad (3.47)$$

On peut construire deux nouvelles intégrales en permutant circulairement  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ , ce qui donne trois expressions égales pour (3.47), d'où :

$$\begin{aligned} \int \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \frac{1}{6} i \iiint & [k_l \Gamma_{mlm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') - k_l \Gamma_{mml}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}')] \\ & + k'_l \Gamma_{mlm}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}) - k'_l \Gamma_{mml}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ & + k''_l \Gamma_{mlm}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}') - k''_l \Gamma_{mml}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k})] \\ & d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Enfin, le tenseur  $\Gamma_{ijk}$  possède la propriété :

$$\Gamma_{ijk}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \Gamma_{kij}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Gamma_{jki}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}), \quad (3.49)$$

par définition. Les termes de l'intégrande de (3.48) s'annulent deux à deux, d'où la propriété :

$$\int \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (3.50)$$

et on en déduit que l'intégrale sur tout l'espace du terme de transfert complet est aussi nulle.

### 3.3 Le repère de Craya-Herring

Dans l'optique de la description du problème linéaire, qui est à la base de la turbulence d'ondes, on s'intéresse maintenant au mode de description spatiale des phénomènes. Les symétries du problème poussent à utiliser une description sphérique, en prenant comme verticale l'axe de rotation. Il est plus pratique d'utiliser un repère mobile sphérique particulier, connu sous le nom de *repère de Craya-Herring*, et qui est une fonction de  $\mathbf{k}$ . Dans ce repère, les opérateurs linéaires prennent une forme simplifiée, ce qui facilitera l'analyse.

#### 3.3.1 Définition

La figure 3.1 montre comment le repère de Craya-Herring est défini, où  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  sont les vecteurs fixes du repère cartésien initial.

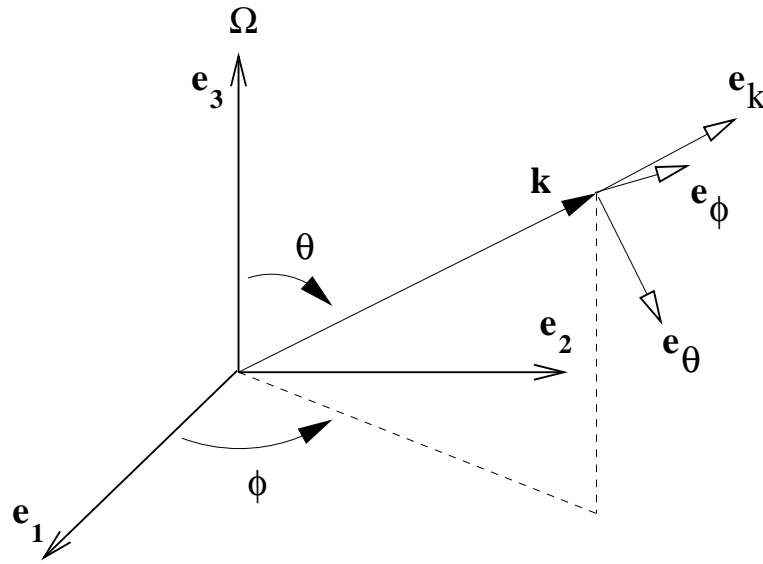


FIG. 3.1 – Repère de Craya-Herring associé au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$

Les vecteurs de la nouvelle base s'expriment sous la forme :

$$\mathbf{e}_k(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (3.51a)$$

$$\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_\phi(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_k(\mathbf{k}), \quad (3.51b)$$

$$\mathbf{e}_\phi(\mathbf{k}) = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}|}, \quad (3.51c)$$

où  $k = |\mathbf{k}|$ .

#### 3.3.2 Vecteurs $\mathbf{N}$

On s'intéresse ici à des vecteurs particuliers, qui sont propres pour l'opérateur linéaire  $\gamma_{ij}$ , et qui traduisent les effets de la rotation. Ils interviennent dans la résolution du système linéaire, et constituent ainsi une base de projection des tenseurs.

### 3.3.2.1 Définition

On définit, pour un  $\mathbf{k}$  donné, le vecteur :

$$\mathbf{N}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\phi \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

où les coordonnées sont celles dans le repère de Craya-Herring. Ces vecteurs sont propres pour l'opérateur de rotation  $\gamma_{ij}$ , comme on le verra ultérieurement.

### 3.3.2.2 Relations utiles

Les vecteurs  $\mathbf{N}$  vérifient les premières propriétés suivantes :

$$N_i N_i = N_i^* N_i^* = 0, \quad (3.53a)$$

$$N_i N_i^* = 2, \quad (3.53b)$$

$$k_i N_i = k_i N_i^* = 0, \quad (3.53c)$$

$$N_i(-\mathbf{k}) = N_i^*(\mathbf{k}). \quad (3.53d)$$

Ces relations se déduisent de la définition (3.52) et de (3.51).

## 3.3.3 Opérateurs linéaires

### 3.3.3.1 Expression

Dans le repère de Craya-Herring, le tenseur  $\Delta_{ij}$ , écrit sous forme matricielle, devient :

$$\Delta_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

et donc le tenseur  $\gamma_{ij}$  s'écrit sous la forme :

$$\gamma_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Omega \cos \theta \\ 0 & -2\Omega \cos \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Ce dernier tenseur reflète les effets linéaires de la rotation, c'est pourquoi son expression sera utile dans le cadre de la théorie linéaire. La matrice étant presque creuse, cela simplifiera toutes les opérations où elle intervient. On peut en déduire la première propriété suivante :

$$\gamma_{in} N_n = 2i\Omega \cos \theta N_i, \quad (3.56)$$

$$\gamma_{in} N_n^* = -2i\Omega \cos \theta N_i^*, \quad (3.57)$$

### 3.3.3.2 Propriétés

Le tenseur  $\Delta_{ij}$  vérifie l'identité suivante :

$$\Delta_{il}N_l = N_i, \quad (3.58)$$

que l'on obtient simplement en utilisant les expressions dans le repère de Craya-Herring. Les vecteurs  $\mathbf{N}$ , en plus de (3.53), possèdent les propriétés :

$$N_l N_m^* + N_l^* N_m = 2\Delta_{lm}, \quad (3.59a)$$

$$N_i^* N_j - N_i N_j^* = 2i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij}. \quad (3.59b)$$

Ces relations se vérifient, par exemple, terme à terme en utilisant la forme simplifiée (3.54) de  $\Delta_{ij}$ .

### 3.3.4 Application au tenseur spectral

Dans la base de Craya-Herring, le tenseur  $\Phi_{ij}$  ne dépend que de quatre fonctions scalaires, du fait de l'homogénéité et de l'incompressibilité ; il s'écrit donc sous une forme simple.

#### 3.3.4.1 Grandeurs spectrales fondamentales

Le tenseur  $\Phi_{ij}$  s'écrit alors :

$$\Phi_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e + z_r & z_i + ih \\ 0 & z_i - ih & e - z_r \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

avec  $e$ ,  $z_r$ ,  $z_i$  et  $h$  quatre fonctions réelles de  $\mathbf{k}$  et  $t$ . Les premières ligne et colonne sont nulles du fait de l'incompressibilité. En posant  $z = z_r + iz_i$ , on a ainsi défini les trois grandeurs :

$$e = \frac{1}{2} [\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}] \quad (3.61a)$$

$$z = \frac{1}{2} [\Phi_{22} - \Phi_{33} + i(\Phi_{32} + \Phi_{23})] \quad (3.61b)$$

$$h = \Im(\Phi_{32}) = \Im(\Phi_{23}), \quad (3.61c)$$

où  $\Im$  représente la partie imaginaire. Ces trois fonctions décrivent complètement le tenseur spectral, mais l'inconvénient de cette écriture est qu'elle est fortement liée au repère de Craya-Herring. On va maintenant donner une expression tensorielle pour  $e$ ,  $z$  et  $h$ , faisant intervenir les vecteurs propres de  $\gamma_{ij}$ , et le tenseur  $\Phi_{ij}$ .

### 3.3.4.2 Expression tensorielle

On peut exprimer les trois fonctions  $e$ ,  $z$  et  $h$  de manière plus synthétique sous la forme :

$$e = \frac{1}{2} \Phi_{ii} \quad (3.62a)$$

$$z = \frac{1}{2} N_i N_j \Phi_{ij} \quad (3.62b)$$

$$h = -\frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \Phi_{ij} \quad (3.62c)$$

d'après leurs définitions, les propriétés (3.53) et celles du tenseur alterné. Il est important de noter que, contrairement aux expressions (3.61), ce sont des relations tensorielles conservées dans n'importe quelle base.

A partir de (3.60), on écrit enfin  $\Phi_{ij}$  comme la somme de deux tenseurs réels faisant intervenir séparément  $e$  et  $z$ , et un tenseur imaginaire pur ne dépendant que de  $h$ . Alors, d'après les expressions (3.62) et différentes propriétés, on peut écrire le tenseur spectral sous la forme synthétique :

$$\Phi_{ij} = e \Delta_{ij} + \Re [z N_i^* N_j^*] + ih \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij}, \quad (3.63)$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle.

### 3.3.5 Étude de $e$ , $z$ et $h$

L'utilisation de ces trois grandeurs particulières se justifie par le fait que l'on peut relier deux d'entre elles à des quantités physiques, ce qui facilite leur interprétation. Puis on verra en quoi elles peuvent être le reflet d'une anisotropie dans l'écoulement. Enfin on donnera une première propriété de symétrie, ainsi que leurs équations d'évolution temporelle.

#### 3.3.5.1 Lien avec les grandeurs physiques

La fonction  $e(\mathbf{k}, t)$  est reliée à l'énergie cinétique turbulente à l'instant  $t$  par la relation :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} e(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k}. \quad (3.64)$$

Elle représente donc l'énergie cinétique turbulente contenue, à un instant  $t$ , dans les ondes de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , d'où son nom d'*énergie spectrale*.

La fonction  $h(\mathbf{k}, t)$  est quant à elle reliée à l'*hélicité moyenne* à l'instant  $t$ , définie par :

$$H(t) = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla \times \mathbf{u})(\mathbf{x}, t)}, \quad (3.65)$$

et qui ne dépend pas de la position  $\mathbf{x}$  choisie, par homogénéité. On a en effet la relation :

$$H(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} k h(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k}, \quad (3.66)$$

qui se démontre en écrivant que :

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \overline{u_i \frac{\partial u_k}{\partial u_j}} \\ &= - \iint \frac{1}{2} i k'_j \varepsilon_{jik} \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}) \tilde{u}_k(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}} d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}', \end{aligned} \quad (3.67)$$

et en se servant de (2.66) et (3.62c). C'est pourquoi la fonction  $h(\mathbf{k}, t)$  sera appelée l'*hélicité spectrale*, car elle représente, à un facteur  $k$  près, l'hélicité contenue dans l'onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Il est intéressant de regarder maintenant quels sont les liens entre les trois grandeurs spectrales et l'anisotropie de la turbulence.

### 3.3.5.2 Cas d'une isotropie initiale

On va montrer que si la turbulence est isotrope initialement, alors  $h$  est nul à  $t = 0$  et le reste à tout instant. On rappelle que l'inverse d'un écoulement est son écoulement symétrique par rapport à l'origine. On dit qu'une turbulence possède la *symétrie d'inversion* si un écoulement et son inverse sont équiprobables dans l'ensemble des réalisations.

Si la turbulence initiale est isotrope, alors elle a la propriété d'inversion initialement, l'opération d'inversion étant simplement la composition de trois symétries selon les plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ . On a vu dans la partie 3.2.4.2 qu'une solution et son inverse sont régies par les mêmes équations d'évolution temporelle, et donc elles vont rester équiprobables à tout instant ultérieur. Donc la turbulence garde la propriété d'inversion à tout instant. Ainsi, si on raisonne sur le tenseur des corrélations, on a, du fait de l'homogénéité :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} \quad (\text{en } \mathbf{x}), \quad (3.68)$$

$$R_{ij}(-\mathbf{r}, t) = \overline{[-u_i(-\mathbf{x}, t)] [-u_j(-\mathbf{x} - \mathbf{r}, t)]} \quad (\text{en } -\mathbf{x}). \quad (3.69)$$

Donc, à un instant  $t$ , les contributions d'une solution  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  à (3.68) et de son inverse  $-\mathbf{u}(-\mathbf{x}, t)$  à (3.69) étant égales, les deux moyennes sont égales, et la fonction  $\mathbf{r} \rightarrow R_{ij}(\mathbf{r}, t)$  est paire. Par transformée de Fourier, on déduit que  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  est un tenseur réel. Comme  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  est hermitien, il est donc symétrique. Finalement, la définition (3.62c) implique que  $h$  est identiquement nul, à l'instant considéré. Donc si la turbulence est initialement isotrope, on a  $\forall t \geq 0, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, h(\mathbf{k}, t) = 0$ .

On remarquera de plus que dans ce cas, et avec (3.34) écrite pour  $\Phi_{ij}$  et pour  $\Phi_{ji}$ , on obtient que  $T_{ij}$  est lui aussi symétrique. Il faut enfin noter que ce raisonnement, ainsi que celui sur la conservation de la symétrie d'inversion à tout instant, ne sont valables que si on admet l'existence et surtout l'unicité d'une solution à (3.34).

### 3.3.5.3 Marqueurs de l'anisotropie

Il est clair que, pour une turbulence initialement isotrope, l'anisotropie éventuelle du tenseur  $\Phi_{ij}$  ne peut alors se manifester que via  $e$  et  $z$ , ce que l'on va voir ici. On suppose donc  $h$  identiquement nul dans cette section. En partant de (3.63), l'expression isotrope (2.80) de  $\Phi_{ij}$  inspire alors la décomposition suivante :

$$\Phi_{ij} = \Re[\Phi_{ij}] = \frac{E}{4\pi k^2} \Delta_{ij} + \left( e - \frac{E}{4\pi k^2} \right) \Delta_{ij} + \Re[z N_i^* N_j^*], \quad (3.70)$$



où les deux derniers termes mesurent l'écart par rapport à l'isotropie. En particulier, le tenseur :

$$\left( e - \frac{E}{4\pi k^2} \right) \Delta_{ij}, \quad (3.71)$$

quantifie l'anisotropie directionnelle, c'est-à-dire l'écart, selon  $\theta$  et  $\phi$ , de l'énergie par rapport à une distribution sphérique. De plus, le tenseur :

$$\Re [z N_i^* N_j^*], \quad (3.72)$$

de trace nulle, quantifie l'anisotropie de polarisation. En effet, dans le repère de Craya-Herring,  $\Phi_{ij}$  est diagonalisable en tant que matrice réelle symétrique, et on peut même trouver une base de diagonalisation orthonormale. Ses valeurs propres sont  $0$ ,  $e - |z|$  et  $e + |z|$ , et on se concentre sur le cas où elles sont distinctes, pour plus de clarté. On a ainsi trois droites propres perpendiculaires : l'une est celle portée par  $\mathbf{k}$ , associé à la valeur propre  $0$ , et les deux autres sont dans le plan  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\phi$ . Comme on a éliminé le cas où  $z = 0$ , qui correspond à deux valeurs propres confondues, on peut écrire de manière unique  $z = |z| e^{i\Psi}$ , avec  $\Psi$  la phase de  $z$ . On montre alors que l'orientation des vecteurs propres, perpendiculaires, associés aux valeurs propres  $e - |z|$  et  $e + |z|$ , est entièrement déterminée par  $\Psi$ .  $z$  définit donc les directions propres de  $\Phi_{ij}$  dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ .

De (3.70), on peut en déduire, entre autres, l'expression du tenseur de Reynolds, qui est une estimation possible de l'anisotropie. Il s'exprime comme la somme de trois contributions :

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j}(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ij} d^3 \mathbf{k} \\ &= 2\mathcal{E}(t) \frac{\delta_{ij}}{3} + \int_{\mathbb{R}^3} \left( e - \frac{E}{4\pi k^2} \right) \Delta_{ij} d^3 \mathbf{k} + \int_{\mathbb{R}^3} \Re [z N_i^* N_j^*] d^3 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

où on a utilisé (2.72) pour le premier terme. On remarque qu'en fait, même si  $h$  était non nul, sa contribution au tenseur de Reynolds serait nulle, à cause de la propriété (3.76). On constate la contribution sur tout l'espace des tenseurs (3.71) et (3.72), que l'on retrouve sous une forme similaire dès que l'on veut calculer d'autres tenseurs de corrélation d'ordre deux, comme celui pour la vorticité par exemple. On va voir, enfin, que  $e$ ,  $z$  et  $h$  possèdent certaines propriétés par inversion, puis on va donner leurs équations d'évolution.

### 3.3.5.4 Symétrie par inversion

On peut déduire de (3.62), une première propriété de symétrie. En effet :

$$\begin{aligned} e(-\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \Phi_{ii}(-\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) \\ &= e(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (3.74)$$

et  $e$  reste invariant par inversion. De plus :

$$\begin{aligned}
 z(-\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} N_i(-\mathbf{k}) N_j(-\mathbf{k}) \Phi_{ij}(-\mathbf{k}, t) \\
 &= \frac{1}{2} N_i^*(\mathbf{k}) N_j^*(\mathbf{k}) \Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, t) \\
 &= z^*(\mathbf{k}, t).
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 h(-\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \Phi_{ij}(-\mathbf{k}, t) \\
 &= -\frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lji} \Phi_{ji}(\mathbf{k}, t) \\
 &= h(\mathbf{k}, t),
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

donc  $h$  est aussi conservé par inversion.

### 3.3.5.5 Équations d'évolution temporelle

De l'équation (3.34) d'évolution temporelle de  $\Phi_{ij}$ , on peut en déduire tout d'abord celle de  $e$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e = \frac{1}{2} T_{ii}, \tag{3.77}$$

en utilisant (3.25a), et grâce à (3.62a). Pour l'équation de  $z$ , on utilise le résultat intermédiaire :

$$N_i L_{im} = [\nu k^2 + 2i\Omega \cos \theta] N_i N_m, \tag{3.78}$$

où on s'est servi de la propriété (3.56). On en déduit, grâce à (3.62b), que :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + 2(\nu k^2 + 2i\Omega \cos \theta) z = \frac{1}{2} N_i N_j T_{ij}. \tag{3.79}$$

Enfin, pour  $h$ , on utilise la propriété (3.59b) pour écrire :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \gamma_{mi} \Phi_{mj} &= \frac{1}{4} \gamma_{mi} [N_i^* N_j - N_i N_j^*] \Phi_{mj} \\
 &= -\frac{1}{4} 2i \cos \theta [N_m^* N_j + N_m N_j^*] \Phi_{mj} \\
 &= -\frac{1}{2} 2i \cos \theta \Delta_{jm} \Phi_{mj} \\
 &= i\Omega \cos \theta \Phi_{ii},
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

en utilisant (3.56), puis (3.59a) et enfin (2.78d). De même :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \gamma_{mj} \Phi_{im} &= \left( \frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \gamma_{mi} \Phi_{mj} \right)^* \\
 &= i\Omega \cos \theta \Phi_{ii},
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

où on s'est servi du caractère hermitien de  $\Phi_{ij}$ . Finalement, avec (3.62c), on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 2\nu k^2 h = -\frac{1}{2}i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} T_{ij}. \quad (3.82)$$

On s'aperçoit que les équations pour  $e$  et pour  $h$  n'ont pas de dépendance angulaire explicite, mais qu'elle est contenue implicitement dans le terme de transfert. L'équation pour  $z$  fait par contre intervenir l'angle  $\theta$ , ce qui produira un comportement oscillatoire. Enfin, le taux de rotation n'apparaît que dans cette dernière équation, donc si l'on considère le problème entier, c'est-à-dire sans modélisation du terme de transfert, c'est le seul endroit où l'intensité de la rotation intervient. Cependant, cela ne veut pas dire que les effets de la rotation sont purement linéaires, car leur influence se fait sentir, au cours du temps, via la modification qu'ils entraînent sur le tenseur spectral et donc sur le terme de transfert.

### 3.4 La théorie linéaire

On va maintenant se placer dans le cas où on néglige le terme non linéaire. La dynamique linéaire est intéressante, car d'une part elle traduit le comportement du fluide à différents moments de son évolution, et d'autre part, elle met en relief le rôle des ondes inertielles et de leurs interactions. Si on néglige le terme non linéaire dans l'équation (3.28), on n'a plus aucun couplage entre les différents vecteurs d'ondes :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}(\mathbf{k}, t) + L_{in}(\mathbf{k}) \tilde{u}_n(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (3.83)$$

ce qui implique qu'un mode évoluera indépendamment des autres, sans qu'il y ait d'interactions modales. On peut encore écrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \mathbb{L} \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.84)$$

avec  $\mathbb{L}$  la matrice de l'opérateur tensoriel linéaire  $L_{ij}$ . L'équation vérifiée par le tenseur spectral  $\Phi_{ij}$  est alors l'équation (3.34) sans second membre :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L_{jm} \Phi_{im} = 0. \quad (3.85)$$

Dans un premier temps, on cherchera l'expression de  $\tilde{\mathbf{u}}$  à partir de (3.84). Elle se trouve plus facilement si on se place dans un repère approprié, dépendant du vecteur d'onde considéré. Puis, dans un deuxième temps, on en déduira l'expression de  $\Phi_{ij}$ .

#### 3.4.1 Résolution du système

On sait que les effets de la viscosité seule résultent en une décroissance exponentielle. On effectue donc le changement de variable :

$$\tilde{\mathbf{v}} = e^{\nu k^2 t} \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.86)$$

dans (3.84), et le système à résoudre pour  $\tilde{\mathbf{v}}$  s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = \gamma \tilde{\mathbf{v}}. \quad (3.87)$$

Le système est purement linéaire, on peut donc exprimer la solution en fonction des vecteurs propres de l'opérateur  $\gamma$ .

### 3.4.1.1 Vecteurs propres de $\gamma$

Le vecteur  $\mathbf{N}$  et son conjugué sont des vecteurs propre pour l'opérateur  $\gamma$ . On a en effet, d'après (3.55) :

$$\gamma_{in} N_n = i\omega(\mathbf{k}) N_i, \quad (3.88)$$

$$\gamma_{in} N_n^* = -i\omega(\mathbf{k}) N_i^*, \quad (3.89)$$

avec :

$$\omega(\mathbf{k}) = 2\Omega \cos \theta, \quad (3.90)$$

la fréquence des ondes inertielles. Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$  sont propres pour  $\gamma$ , de valeurs propres associées respectivement  $i\omega(\mathbf{k})$  et  $-i\omega(\mathbf{k})$ . De plus, le vecteur  $\mathbf{k}$  est aussi propre pour  $\gamma$ , de valeur propre associée 0.

Si  $\theta \neq \pi/2$ , les trois valeurs propres sont distinctes,  $\gamma$  est diagonalisable et  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$  forment une base de  $\mathbb{C}^3$  en tant que  $\mathbb{C}$  espace vectoriel. Si  $\theta = \pi/2$ , 0 est valeur propre triple, et  $\gamma \equiv 0$  est diagonalisable : les trois vecteurs forment aussi une base propre. L'existence d'une base propre assure que l'on pourra ultérieurement développer n'importe quelle grandeur vectorielle dans l'espace spectral, la vitesse en particulier, comme une combinaison linéaire de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}^*$ .

### 3.4.1.2 Étude de la relation de dispersion

Les modes oscillent à la fréquence angulaire  $\omega(\mathbf{k}) = 2\Omega \cos \theta$ , et les ondes sont donc dispersives car leur fréquence ne dépend pas linéairement de  $\mathbf{k}$ . On a de plus la symétrie  $\omega(-\mathbf{k}) = -\omega(\mathbf{k})$ . Leur vitesse de groupe varie ainsi avec  $\mathbf{k}$ . Elle vaut :

$$\mathbf{C}(\mathbf{k}) = \frac{2\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})}{k^3} = -\frac{2\Omega \sin \theta}{k} \mathbf{e}_\theta, \quad (3.91)$$

avec une amplitude :

$$|\mathbf{C}(\mathbf{k})| = \frac{2\Omega \sin \theta}{k}. \quad (3.92)$$

Enfin, la vitesse de groupe est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , dans le plan de  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{k}$ . L'énergie se propage donc perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Le maximum de l'amplitude de  $\mathbf{C}(\mathbf{k})$  est atteint pour  $\theta = \pi/2$ , c'est-à-dire pour les modes perpendiculaires à  $\boldsymbol{\Omega}$ , pour lesquels  $\omega(\mathbf{k}) = 0$  et  $\mathbf{C}(\mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\Omega}/k$ . Ces ondes sont quasi-stationnaires, à la viscosité près, mais elles dispersent beaucoup d'énergie.

### 3.4.1.3 Champ de vitesse solution

On peut écrire la solution de (3.87) sur la base de vecteurs propres de l'opérateur linéaire  $\gamma_{ij}$ . On obtient :

$$\tilde{v}_i = A_+(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})t} + A_-(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + A(\mathbf{k})k_i. \quad (3.93)$$

En calculant  $k_i\tilde{v}_i$ , et en utilisant la condition d'incompressibilité (3.21b) et la propriété (3.53c), on en déduit que :

$$\tilde{v}_i = A_+(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})t} + A_-(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (3.94)$$

$$\text{et donc } \tilde{u}_i = e^{-\nu k^2 t} [A_+(\mathbf{k})N_i(\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})t} + A_-(\mathbf{k})N_i^*(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})t}], \quad (3.95)$$

relation qui exprime la vitesse spectrale sur la base de vecteurs propres de l'opérateur linéaire  $\mathbb{L}$ . Les amplitudes  $A_+(\mathbf{k})$  et  $A_-(\mathbf{k})$  peuvent aussi s'exprimer en fonction de la vitesse au temps  $t = 0$  par :

$$A_+(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}N_i^*(\mathbf{k})\tilde{u}_i(\mathbf{k}, 0), \quad (3.96a)$$

$$A_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}N_i(\mathbf{k})\tilde{u}_i(\mathbf{k}, 0). \quad (3.96b)$$

En prenant le conjugué de ces deux relations, on obtient :

$$A_+^*(\mathbf{k}) = A_+(-\mathbf{k}), \quad (3.97)$$

$$A_-^*(\mathbf{k}) = A_-(-\mathbf{k}), \quad (3.98)$$

où on a utilisé (3.53d), et la propriété :

$$\tilde{u}_i(-\mathbf{k}) = \tilde{u}_i^*(\mathbf{k}), \quad (3.99)$$

qui assure que les composantes  $u_i$  sont réelles.

## 3.4.2 Tenseur de Green

On aurait pu retrouver l'expression (3.95) en utilisant le tenseur de Green associé au problème linéaire (3.83).

### 3.4.2.1 Définition

C'est une méthode qui consiste à chercher une solution du problème en exprimant la vitesse à un temps  $t$  en fonction de celle à un temps  $t'$  fixé, sous la forme :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t')\tilde{u}_j(\mathbf{k}, t'), \quad (3.100)$$

où  $\hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t')$  est le tenseur de Green en deux temps associé au problème. On cherche donc un tenseur qui vérifie :

$$\frac{\partial \hat{G}_{ij}}{\partial t} + L_{in}\hat{G}_{nj} = 0, \quad (3.101a)$$

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t', t') = \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \quad (3.101b)$$

cette dernière relation représentant la condition initiale. On montre que l'on peut encore écrire :

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t') = e^{-\nu k^2(t-t')} \hat{G}_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t, t'), \quad (3.102)$$

avec  $\hat{G}_{ij}^{(RDT)}$  le tenseur de Green associée au problème linéaire sans viscosité, communément appelé RDT, pour "Rapid Distorsion Theory" (voir par exemple Hunt & Carruthers [29]). Le nouveau tenseur  $\hat{G}_{ij}^{(RDT)}$  vérifie donc :

$$\frac{\partial \hat{G}_{ij}^{(RDT)}}{\partial t} - \gamma_{in} \hat{G}_{nj}^{(RDT)} = 0, \quad (3.103a)$$

$$\text{avec } \hat{G}_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t', t') = \Delta_{ij}(\mathbf{k}). \quad (3.103b)$$

### 3.4.2.2 Expression

En raisonnant toujours sur les valeurs propres de l'opérateur  $\gamma$ , la solution de (3.103) est la suivante :

$$\hat{G}_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t, t') = \frac{1}{2} \left[ N_i N_j^* e^{i\omega(\mathbf{k})(t-t')} + N_i^* N_j e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t')} \right], \quad (3.104)$$

où on a utilisé la propriété (3.59a). Ce tenseur sera noté dorénavant :

$$\hat{G}_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t, t') = G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t'), \quad (3.105)$$

car il ne dépend que de  $(t - t')$ . On en conclut que :

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t') = \frac{1}{2} e^{-\nu k^2(t-t')} \left[ N_i N_j^* e^{i\omega(\mathbf{k})(t-t')} + N_i^* N_j e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t')} \right] \quad (3.106)$$

ne dépend aussi que de  $(t - t')$ . On notera de même :

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t') = G_{ij}(\mathbf{k}, t - t'). \quad (3.107)$$

Enfin, le tenseur  $G_{ij}$  a les propriétés suivantes :

$$\Delta_{lm} G_{il} = G_{im}, \quad (3.108a)$$

$$G_{im} G_{jm} = \Delta_{ij}, \quad (3.108b)$$

qui sont aussi valables pour  $G_{ij}^{(RDT)}$ .

### 3.4.2.3 Solution

Alors, que ce soit avec (3.95) et (3.96), ou bien avec (3.106) pris en  $t' = 0$ , on obtient :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) = G_{ij}(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{k}, 0). \quad (3.109)$$

On retrouve le champ de vitesse dans l'espace physique grâce à la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} & u_i(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu k^2 t} \left[ A_+(\mathbf{k}) N_i(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega(\mathbf{k})t)} + A_-(\mathbf{k}) N_i^*(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} \right] d^3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ce champ apparaît donc comme une superposition de *modes inertiels*, qui sont des ondes dues à la rotation. Les conditions initiales à  $t = 0$  étant données, la démarche de construction d'une solution physique à tout instant est la suivante : la donnée du champ de vitesse dans l'espace physique, en tout point et à  $t = 0$ , permet d'en déduire le champ de vitesse dans l'espace spectral à  $t = 0$  par transformée de Fourier. Les expressions (3.96a) et (3.96b) permettent alors d'en déduire  $A_+(\mathbf{k})$  et  $A_-(\mathbf{k})$ . Le champ de vitesse dans l'espace physique est ainsi entièrement déterminé à tout instant, grâce à l'intégrale (3.110).

### 3.4.3 Évolution des grandeurs spectrales

Maintenant que le champ de vitesse dans l'espace spectral est connu, on peut en déduire d'abord l'expression du tenseur spectral, puis les équations d'évolution des quantités  $e$ ,  $z$  et  $h$ .

#### 3.4.3.1 Tenseur spectral

L'équation (3.109), avec la propriété (2.66) de  $\Phi_{ij}$ , donne :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = G_{il}(\mathbf{k}, t)G_{jm}(\mathbf{k}, t)\Phi_{lm}(\mathbf{k}, 0), \quad (3.111)$$

toujours en intégrant le Dirac sur tout l'espace. Le tenseur de Green associé au problème linéaire pour le tenseur spectral est ainsi le produit de tenseurs de Green pour le champ de vitesse. Il aurait été beaucoup plus difficile de le déterminer directement à partir de l'équation d'évolution linéaire de  $\Phi_{ij}$ , (3.85).

Si  $\Phi_{ij}$  est isotrope à  $t = 0$ , on obtient, grâce à (3.111) et (2.80) :

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) &= e^{-2\nu k^2 t} \frac{E(k, t)}{4\pi k^2} \Delta_{lm}(\mathbf{k}) G_{il}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t) G_{jm}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t) \\ &= e^{-2\nu k^2 t} \frac{E(k, 0)}{4\pi k^2} \Delta_{ij}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.112)$$

où on a utilisé (3.108). Ainsi, l'isotropie initiale est conservée au cours du temps, et l'anisotropie ne peut donc pas être générée par un phénomène purement linéaire. La structuration bidimensionnelle de l'écoulement ne peut donc pas s'expliquer simplement avec le théorème de Taylor-Proudman, et nécessite l'intervention des effets non linéaires.

#### 3.4.3.2 Conséquences sur $e$ , $z$ et $h$

Avec (3.111) et (3.62a), l'énergie spectrale suit la loi d'évolution suivante :

$$\begin{aligned} e(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\nu k^2 t} G_{il}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t) G_{im}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t) \Phi_{lm}(\mathbf{k}, 0) \\ &= e^{-2\nu k^2 t} e(\mathbf{k}, 0), \end{aligned} \quad (3.113)$$

en utilisant (3.108), et (2.78d). On peut, de la même façon, en déduire les équations vérifiées par  $z$  et  $h$  :

$$z(\mathbf{k}, t) = e^{-2\nu k^2 t} e^{-2i\omega(\mathbf{k})t} z(\mathbf{k}, 0), \quad (3.114)$$

$$h(\mathbf{k}, t) = e^{-2\nu k^2 t} h(\mathbf{k}, 0), \quad (3.115)$$

en se servant de (3.62b), (3.62c) et (3.111). On retrouve le résultat qu'il n'y a pas de transfert d'énergie entre nombres d'ondes, et que la seule source d'atténuation est la décroissance exponentielle visqueuse.

### 3.4.4 Turbulence faible devant la rotation

On suppose maintenant non plus que les effets non linéaires sont négligeables, mais simplement qu'ils sont faibles devant les effets de la rotation. En notant  $Ro_L$  le nombre de Rossby basé sur les grandes échelles, de taille  $L$  et de vitesse caractéristique  $u'$ , il est équivalent de dire que  $Ro_L$  est très petit devant 1. L'analyse d'une telle turbulence prouvera que la première phase d'évolution est purement linéaire. Cette constatation conduira alors à réutiliser, dans l'analyse non linéaire, la décomposition des quantités spectrales sur la base propre de la théorie linéaire : cette approche est appelée *turbulence d'ondes*.

#### 3.4.4.1 Phénomènes caractéristiques

On essaie d'extraire des informations de l'équation spectrale (3.23) :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \gamma_{in} \tilde{u}_n + \nu k^2 \tilde{u}_i = -i \Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m$$

par des adimensionnalisations, en regardant les ordres de grandeurs des différents termes. On se concentre sur les grandes échelles, et on note  $\Omega$  l'ordre de grandeur du taux de rotation et les grandeurs adimensionnelles avec un chapeau.  $Ro_L \ll 1$  implique que le temps caractéristique de la rotation est bien inférieur au temps de retournement des tourbillons sans rotation. Cela se traduit par :

$$\Omega^{-1} \ll \frac{L}{u'}, \quad (3.117)$$

et la rotation est donc le premier effet à se manifester dans le temps.

Pour des temps de l'ordre du temps caractéristique de la rotation  $\Omega^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} - \hat{\gamma}_{in} \hat{u}_n + Ek_L \hat{k}^2 \hat{u}_i = -i Ro_L \Delta_{il} \hat{k}_m \hat{u}_l * \hat{u}_m.$$

avec  $Ek_L$  le nombre d'Ekman aux grandes échelles. On s'aperçoit qu'en turbulence à faible nombre de Rossby, le terme non linéaire peut être négligé aux grandes échelles. De plus, on peut dire raisonnablement que la non linéarité n'affecte pas les petites échelles sur cette courte échelle de temps. Dans ce cas si  $t \sim \Omega^{-1}$ , on peut appliquer la théorie linéaire et la turbulence ne ressent que les effets de la rotation et de la viscosité. En pratique, grâce à (3.113) et (3.115),  $e$  et  $h$  décroissent par dissipation



visqueuse, et grâce à (3.114),  $|z|$  aussi. Le comportement du fluide pour des temps de l'ordre de  $\Omega^{-1}$  est donc parfaitement connu, et on se focalise alors sur les échelles de temps beaucoup plus grandes, afin de voir apparaître les effets non linéaires.

Pour des temps de l'ordre du temps de retournement des tourbillons  $t \sim L/u' = Ro_L^{-1}\Omega^{-1}$ , on a :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{Ro_L} \hat{\gamma}_{in} \hat{u}_n + \frac{1}{Re_L} \tilde{u}_i = -i \Delta_{il} \hat{k}_m \hat{u}_l * \hat{u}_m$$

où  $Re_L$  le nombre de Reynolds aux grandes échelles. On peut alors négliger les effets de la rotation sur les grandes échelles car  $Ro_L$  est petit. On peut même négliger les effets de la viscosité pour les grands nombres de Reynolds. Dans ce dernier cas, on retrouve une équation de cascade non linéaire, avec conservation de l'énergie totale, sans pertes d'énergies à l'infini. C'est pourquoi l'analyse du problème à petit nombre de Rossby conduit à se placer par la suite dans le cas où  $t \gg \Omega^{-1} \iff \Omega t \gg 1$ .

### 3.4.4.2 Approche qualitative : les surfaces résonantes

Pour mieux comprendre quels sont les phénomènes dominants de la turbulence en forte rotation, on regarde le comportement des amplitudes  $A_+$  et  $A_-$ . Dans la théorie linéaire, ces amplitudes sont constantes, mais dans l'hypothèse d'une turbulence à bas nombre de Rossby, elles varient sur des échelles de temps longues. Par conséquent, on suppose que les amplitudes ont une dépendance lente en temps. Afin de trouver leurs équations d'évolution temporelle, on injecte (3.95) dans (3.23). La multiplication par  $N_i^*(\mathbf{k})$  donne l'équation pour  $A_+$ , et la multiplication par  $N_i(\mathbf{k})$  donne celle pour  $A_-$ . On en déduit :

$$\frac{\partial A_+}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega(\mathbf{k})t} N_i^*(\mathbf{k}) I_l(\mathbf{k}, t), \quad (3.120a)$$

$$\frac{\partial A_-}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = e^{i\omega(\mathbf{k})t} N_l(\mathbf{k}) I_l(\mathbf{k}, t), \quad (3.120b)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_l(\mathbf{k}, t) = & \\ & -\frac{1}{2} i k_m e^{\nu k^2 t} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\nu(k'^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2)t} \left[ A_+(\mathbf{k}', t) N_l(\mathbf{k}') e^{i\omega(\mathbf{k}')t} + A_-(\mathbf{k}', t) N_l^*(\mathbf{k}') e^{-i\omega(\mathbf{k}')t} \right] \\ & \times \left[ A_+(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) N_m(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{i\omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}')t} + A_-(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) N_m^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') e^{-i\omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}')t} \right] d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Pour effectuer une analyse simplifiée des membres de droite de (3.120), on néglige à nouveau la viscosité. Une première approximation consistant à dire que les amplitudes  $A_+$  et  $A_-$  restent constantes sur des intervalles de temps de l'ordre de  $\Omega^{-1}$ , on voit que la dépendance temporelle est contenue dans des termes du type :

$$\exp [i (\omega(\mathbf{k}) \pm \omega(\mathbf{k}') \pm \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}')) t]. \quad (3.122)$$

Ce sont des composantes oscillantes en temps, sous réserve que leur fréquence,  $\omega(\mathbf{k}) \pm \omega(\mathbf{k}') \pm \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , ne soit pas nulle. Pour un vecteur  $\mathbf{k}$  donné, les surfaces décrites

dans l'espace des  $\mathbf{k}'$  par  $\omega(\mathbf{k}) \pm \omega(\mathbf{k}') \pm \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$ , jouent donc un rôle particulier. On les appelle, pour un choix de signes, *les surfaces résonantes*, et il y en a quatre types. Elles jouent un rôle très important dans la dynamique non linéaire.

Afin de mieux cerner leur prédominance par rapport au reste de l'espace spectral, on fixe un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . On découpe alors l'intégrale spatiale (3.121) en une intégrale sur les quatre surfaces résonantes pour ce  $\mathbf{k}$ ,  $I_{\text{surf}}$ , et une intégrale sur le reste de l'espace  $I_{\text{reste}}$ , en intégrant à chacune de ces intégrales le terme en  $e^{\pm i\omega(\mathbf{k})t}$  présent dans (3.120a) et (3.120b). Pour l'évaluation de la contribution de  $I_{\text{reste}}$ , on s'intéresse au comportement des différents facteurs de l'intégrande. On choisit ainsi un  $\mathbf{k}'$  dans  $\mathbb{R}^3$  privé des surfaces résonantes. Le terme (3.122) est donc rapidement oscillant en temps, de fréquence de l'ordre de  $\Omega$ . De plus, les autres termes, faisant intervenir  $A_+$  ou  $A_-$ , évoluent lentement en temps, comparativement aux oscillations rapides de (3.122). L'intégrale  $I_{\text{reste}}$  a finalement une dépendance en temps rapidement oscillante, donc de période très courte. On comprend ainsi que, quand on intègre temporellement les équations (3.120a) et (3.120b) sur cette période, les portions de quasi-sinusoïdes (l'une positive, l'autre négative) vont pratiquement se compenser, donnant une contribution de l'intégrale  $I_{\text{reste}}$  négligeable.

Par contre, la dépendance en temps de  $I_{\text{surf}}$  n'est pas oscillante, car les  $\mathbf{k}'$  que l'on intègre se trouvent sur les surfaces résonantes. L'intégration temporelle de  $I_{\text{surf}}$  consiste donc en une addition de termes qui ne se compensent pas a priori, ce qui produit finalement une contribution petite mais non négligeable, du moins par rapport à celle de  $I_{\text{reste}}$ . L'importance des surfaces résonantes est par conséquent cumulative en temps.

### 3.4.4.3 Conclusions

Les vecteurs se trouvant sur les surfaces résonantes, ou très proches, vont donc contribuer de manière beaucoup plus importante que les autres vecteurs aux variations des amplitudes, et sont donc le support de la non-linéarité. Un fait remarquable est que ces surfaces occupent un espace négligeable de  $\mathbb{R}^3$ , ce qui n'empêche pas leur contribution d'être dominante. On s'aperçoit finalement que la rotation exclut tout un ensemble de triades non-résonantes, ce qui a pour effet de diminuer l'influence de la non-linéarité. On s'attend donc à ce que le temps caractéristique de la non-linéarité, qui était de l'ordre de :

$$\frac{L}{u'} = \Omega^{-1} Ro_L^{-1} \quad (3.123)$$

sans la rotation, soit plus grand si on lui superpose une rotation. De plus, la cascade étant diminuée, la dissipation est moins importante, et donc la décroissance de la turbulence est atténuée, ce qui est bien observé expérimentalement. Enfin, on s'attend à ce que, pour une rotation forte, une structuration plutôt bidimensionnelle apparaisse dans l'écoulement. L'anisotropie non-linéaire devrait se développer dans la direction perpendiculaire à  $\Omega$ . Cependant, l'écoulement ne sera jamais complètement bidimensionnel, car alors la force de Coriolis, irrotationnelle, pourrait être incluse dans le terme de pression, éliminant toute influence dynamique de la rotation.



# Chapitre 4

## Le modèle EDQNM

### 4.1 Introduction

Dans une approche statistique et spectrale de la turbulence, il s'agit de résoudre un système infini d'équations pour les moments d'ordre  $n$ , chaque équation faisant intervenir le moment d'ordre juste supérieur. Pour traiter ce problème, la méthode la plus répandue est celle consistant à ne s'intéresser qu'aux équations d'évolution des  $m$  premiers moments. Bien entendu, comme elles ne constituent pas un système fermé d'équations, il faut alors proposer une modélisation pour le moment d'ordre  $m + 1$ , voire pour les moments d'ordre encore supérieur. La difficulté réside dans le choix du modèle de fermeture, car il doit être cohérent avec le système complet d'équations, et doit de plus correspondre, dans la mesure du possible, à une certaine réalité physique. Alors que beaucoup de modèles s'arrêtent simplement à l'ordre 2, le modèle EDQNM (pour Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian) conserve également l'équation régissant l'évolution des moments d'ordre 3. C'est un modèle qui a été rendu populaire par les travaux d'Orszag [48], et qui a été utilisé extensivement dans l'unité de recherche où s'est déroulée cette thèse. On a en effet montré que l'EDQNM était un modèle de fermeture particulièrement bien adapté aux cas d'écoulements soumis à des forces extérieures, dont les effets linéaires sont pris en compte par une fonction de Green (voir [11]). On peut en particulier citer les études de turbulence stratifiée de Godeferd [21], ou Godeferd & Cambon [22].

L'idée de départ du modèle EDQNM est d'utiliser une approximation quasi-gaussienne QN afin d'exprimer les moments d'ordre 4 en fonction des moments d'ordre 2, une approximation gaussienne pure entraînant des moments d'ordre 3 identiquement nuls. On en déduit ensuite les moments d'ordre 3 en fonction de ceux d'ordre 2, grâce à l'introduction d'une fonction de Green associée au problème linéaire. On obtient finalement une équation d'évolution ne faisant intervenir que les moments d'ordre 2. Les inconvénients majeurs sont que l'on peut voir apparaître des énergies spectrales négatives, et que la zone inertielle, dans le cas initialement isotrope et sans rotation, n'est pas en  $k^{-5/3}$ , comme prédit par Kolmogorov. L'introduction d'un amortissement tourbillonnaire ED a pour objectif d'assurer la réalisabilité du modèle, c'est-à-dire de faire disparaître ces énergies négatives. Or, ce phénomène apparaît parce que les moments d'ordre 3 aux grandes échelles ont une amplitude trop importante, ce qui entraîne, via l'équation d'évolution des moments

d'ordre 2, un déficit d'énergie aux petits nombres d'ondes. Les moments d'ordre 3 des grandes échelles ont en fait une mémoire trop longue de leur condition initiale et de l'histoire des moments d'ordre 2. L'idée est donc, par l'ajout d'un amortissement, de diminuer le temps de mémoire. Cette méthode ne suffit pas à prouver que le modèle est réalisable, mais on observe néanmoins en pratique la disparition des énergies négatives : cela est donc efficace, mais de manière empirique. On introduit alors une hypothèse de markovianisation (M), qui consiste à raisonner sur les temps d'évolution de différentes quantités. On peut alors montrer que le modèle EDQNM ainsi construit assure la réalisabilité. De plus, l'amortissement tourbillonnaire permet, par un choix judicieux, de rejoindre la théorie de Kolmogorov en ce qui concerne le comportement du spectre dans la zone inertielle.

Le modèle EDQNM présenté dans ce chapitre revêt un caractère de généralité, car l'opérateur linéaire peut être modifié pour prendre en compte d'autres effets, comme un gradient de vitesse moyenne par exemple. En théorie, seul le choix de l'amortissement tourbillonnaire devrait se faire différemment selon le type d'écoulement étudié.

## 4.2 Équations sur les moments

On rappelle que  $L$  est l'opérateur linéaire tel que  $L_{ij}(\mathbf{k}) = -\gamma_{ij}(\mathbf{k}) + \nu k^2 \delta_{ij}$ , qui inclut les effets de la force de Coriolis et les effets visqueux. On cherche ici à écrire les équations différentielles vérifiées par les moments d'ordre 3.

### 4.2.1 Évolution des moments d'ordre 3

L'équation spectrale de départ est :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L_{jm} \Phi_{im} = T_{ij} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*, \quad (4.1)$$

$$\text{où } \tau_{ij} = ik_m \Delta_{jl} \Theta_{ilm} = \frac{1}{2} i P_{jlm} \Theta_{ilm}. \quad (4.2)$$

On rappelle que  $\Theta_{ilm}$  s'exprime sous la forme :

$$\Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) = \iint \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}'', \quad (4.3)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)}. \quad (4.4)$$

On cherche maintenant à obtenir  $\Gamma_{ijk}$  via son équation d'évolution et sous certaines hypothèses. On part de l'équation pour la vitesse suivante :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + L_{in} \tilde{u}_n = -i \Delta_{ik} k_n \tilde{u}_k * \tilde{u}_n, \quad (4.5)$$

que l'on multiplie par  $\tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)$  et que l'on moyenne pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \overline{\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)} + L_{in}(\mathbf{k}) \overline{\tilde{u}_n(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)} \\ &= -i \Delta_{ik}(\mathbf{k}) k_n \overline{(\tilde{u}_k * \tilde{u}_n)(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Par permutation cyclique *simultanée* des triplets  $(i, l, m)$  et  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ , on obtient deux équations similaires que l'on ajoute à (4.6) pour avoir :

$$\frac{\partial \Gamma_{ilm}}{\partial t} + L_{in}(\mathbf{k})\Gamma_{nlm} + L_{ln}(\mathbf{k}')\Gamma_{inm} + L_{mn}(\mathbf{k}'')\Gamma_{iln} = F_{ilm}, \quad (4.7)$$

$$\text{où } F_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = -i \sum_{\substack{(i,l,m) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} \Delta_{ik}(\mathbf{k}) k_n \overline{(\tilde{u}_k * \tilde{u}_n)(\mathbf{k}, t)} \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t), \quad (4.8)$$

et la sommation s'entend en permutant cycliquement et conjointement les triplets  $(i, l, m)$  et  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ . On considère alors le terme  $F_{ilm}$  connu, et on cherche une solution formelle de cette équation, en utilisant le tenseur de Green associé à l'opérateur linéaire à gauche de (4.7).

### 4.2.2 Tenseur de Green

Plutôt que de chercher ce tenseur directement à partir de (4.7), on va le construire à partir de la fonction de Green associée au champ de vitesse spectral. Dans cette optique, on pose :

$$\begin{aligned} \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t') &= G_{ip}(\mathbf{k}, t - t') G_{lq}(\mathbf{k}', t - t') G_{mr}(\mathbf{k}'', t - t') \text{ si } t > t', \\ \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t') &= 0 \text{ si } t < t', \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $G_{ij}$  est le tenseur de Green défini par (3.106). On fixe  $t'$ , et avec l'équation (3.101), on déduit, pour  $t > t'$  en dérivant (4.9), et  $t < t'$  directement, que :

$$\frac{\partial \Lambda_{ilm;pqr}}{\partial t} + L_{in}(\mathbf{k})\Lambda_{nlm;pqr} + L_{ln}(\mathbf{k}')\Lambda_{inm;pqr} + L_{mn}(\mathbf{k}'')\Lambda_{iln;pqr} = 0 \quad (4.10)$$

De plus, en  $t = t'$ ,  $\Lambda_{ilm;pqr}$  présente une discontinuité, en tant que fonction de  $t$ , car elle passe dans le sens croissant de 0 à  $\Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')$ . Ainsi,  $\Lambda_{ilm;pqr}$  vérifie :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda_{ilm;pqr}}{\partial t} + L_{in}(\mathbf{k})\Lambda_{nlm;pqr} + L_{ln}(\mathbf{k}')\Lambda_{inm;pqr} + L_{mn}(\mathbf{k}'')\Lambda_{iln;pqr} \\ &= \Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')\delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.11)$$

On peut montrer ce résultat en multipliant le membre de gauche (qui est une distribution) par une fonction test à support compact  $t \rightarrow \phi(t)$ , et intégrer le tout sur  $]-\infty, +\infty[$ . En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution, en réduisant l'intégration sur  $[t', +\infty[$  grâce à (4.9), et en utilisant (4.10), on se ramène à l'intégration de la dérivée (au sens des fonctions) de  $t \rightarrow \Lambda_{ilm;pqr}(t)\phi(t)$  sur  $[t', +\infty[$ . On trouve finalement :

$$\Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')\phi(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')\delta(t - t')\phi(t)dt, \quad (4.12)$$

d'où l'équation (4.11).

### 4.2.3 Solution particulière

On cherche maintenant une solution particulière de (4.7). Avec les propriétés (2.78) et la définition (4.8) on montre que :

$$\Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')F_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = F_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t), \quad (4.13)$$

et avec la définition (3.32) de  $\Gamma$  on a la même propriété :

$$\Delta_{ip}(\mathbf{k})\Delta_{lq}(\mathbf{k}')\Delta_{mr}(\mathbf{k}'')\Gamma_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t). \quad (4.14)$$

On prend  $t > 0$ , on multiplie (4.11) par  $F_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$ , et on intègre sur  $t' > 0$  en utilisant (4.13). On s'aperçoit alors que le nouveau tenseur :

$$\hat{\Gamma}_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \int_0^{+\infty} \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t')F_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t')dt', \quad (4.15)$$

est solution de (4.7) pour  $t > 0$ , mais sans avoir la bonne valeur à  $t = 0$ . Comme  $\Lambda_{ilm;pqr} = 0$  si  $t' > t$ , l'expression de  $\hat{\Gamma}_{ilm}$  se réduit à :

$$\hat{\Gamma}_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \int_0^t \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t')F_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t')dt', \quad (4.16)$$

et  $\hat{\Gamma}_{ilm}$  est une solution particulière de (4.7).

### 4.2.4 Solution générale formelle

Enfin, pour trouver la solution générale de (4.7), on ajoute à la solution particulière  $\hat{\Gamma}_{ilm}$  une solution du problème homogène, qui est facile à trouver grâce au tenseur de Green associé, ceci afin d'obtenir la bonne valeur initiale de  $\Gamma_{ilm}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) &= \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, 0)\Gamma_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', 0) \\ &+ \int_0^t \Lambda_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t')F_{pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t')dt', \end{aligned} \quad (4.17)$$

est solution de (4.7) pour  $t \geq 0$ , et on vérifie aisément que cette solution a une valeur correcte à  $t = 0$ .

Si  $F_{pqr}$  est connu, alors (4.17) donne explicitement  $\Gamma_{ilm}$ , sachant sa valeur initiale. On en déduit alors  $\Theta_{ilm}$  grâce à (4.3), puis  $\tau_{ij}$  grâce à (4.2), et enfin  $\Phi_{ij}$  par (4.1). Mais tout le problème réside dans le fait que  $F_{pqr}$  n'est pas connu, et ne s'exprime pour l'instant que comme une somme de moments d'ordre 4 : le modèle EDQNM, par une série d'approximations, va permettre d'obtenir une nouvelle expression pour ce terme.

## 4.3 Approximations EDQNM

L'idée principale est de trouver un modèle de fermeture pour le système d'équations des moments, tronqué aux moments d'ordre 4. Ainsi, on cherche à exprimer  $F_{pqr}$  sous la forme :

$$F_{pqr} = f(\Phi_{ij}, \Gamma_{klm}), \quad (4.18)$$

où  $f$  est une fonction suffisamment simple pour permettre une résolution analytique du système. L'approximation Quasi-Normal (QN), ou quasi-gaussienne, propose d'exprimer les moments d'ordre 4 en fonction des moments d'ordre 2 uniquement :

$$F_{pqr} = f(\Phi_{ij}). \quad (4.19)$$

On émet ensuite deux hypothèses de correction : l'hypothèse Eddy-Damped (ED) sur les moments d'ordre 3 et l'hypothèse Markovian (M) afin de pallier les défauts du modèle.

### 4.3.1 Quasi-gaussianité

C'est une méthode qui consiste à évaluer les moments d'ordre 4 comme si le champ de vitesse était gaussien, ce qui permet de les exprimer en fonction des moments d'ordre 2.

#### 4.3.1.1 Présentation

Supposons que le champ de vitesse réel en tout point  $\mathbf{u}$  est un processus gaussien. Alors le champ spectral  $\tilde{\mathbf{u}}$  l'est aussi : c'est une transformation linéaire de  $\mathbf{u}$ , par définition, et on a vu qu'une somme de variables formant un vecteur gaussien est une variable gaussienne. Or, pour des variables gaussiennes, les moments d'ordre 4 s'expriment facilement comme somme de moments d'ordre 2, car les cumulants d'ordre 4 sont nuls. L'équation (2.35) en est un exemple pour des variables gaussiennes réelles et de moyenne nulle, et ce résultat s'étend facilement pour des variables complexes. On peut se demander pourquoi ne pas appliquer les propriétés des vecteurs gaussiens aux moments d'ordre 3 directement : en tant que moments d'ordre impair, on montrerait alors qu'ils sont égaux à zéro. Le terme de transfert  $T_{ij}$  dans (4.1) serait lui aussi nul, conduisant à un problème purement linéaire. C'est pourquoi la méthode est appelée quasi-gaussienne, car elle n'utilise qu'une seule propriété des variables gaussiennes.

#### 4.3.1.2 Application à $F_{ilm}$

Le tenseur  $F_{ilm}$  fait apparaître des termes du type :

$$\overline{(\tilde{u}_k * \tilde{u}_n)(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\tilde{u}_k(\mathbf{p}, t) \tilde{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)} d^3 \mathbf{p}, \quad (4.20)$$

qui est une intégrale de moments d'ordre 4. En utilisant (2.35), on obtient donc :

$$\begin{aligned} & \overline{\tilde{u}_k(\mathbf{p}, t) \tilde{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)} \\ &= \Phi_{kn}(\mathbf{p}, t) \Phi_{lm}(\mathbf{k}', t) \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \\ &+ \Phi_{lk}(\mathbf{k}', t) \Phi_{mn}(\mathbf{k}'', t) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{p}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'' - \mathbf{p}) \\ &+ \Phi_{ln}(\mathbf{k}', t) \Phi_{mk}(\mathbf{k}'', t) \delta(\mathbf{k}'' + \mathbf{p}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

On injecte cette expression dans (4.20), et en utilisant (4.8), on obtient une somme de trois distributions. La première contient le produit  $k_n \delta(\mathbf{k})$ , on peut donc dire



que c'est la distribution nulle. Les deux autres font intervenir  $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'')$ , et on trouve :

$$F_{ilm}^{(QN)} = -i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \sum_{\substack{(i,l,m) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} \Delta_{ik}(\mathbf{k})k_n [\Phi_{lk}(\mathbf{k}', t)\Phi_{mn}(\mathbf{k}'', t) + \Phi_{ln}(\mathbf{k}', t)\Phi_{mk}(\mathbf{k}'', t)]. \quad (4.22)$$

Enfin, on a :

$$\Delta_{ik}(\mathbf{k})k_n\Phi_{ln}(\mathbf{k}', t)\Phi_{mk}(\mathbf{k}'', t) = \Delta_{in}(\mathbf{k})k_k\Phi_{lk}(\mathbf{k}', t)\Phi_{mn}(\mathbf{k}'', t), \quad (4.23)$$

et en remarquant que  $P_{ikn}(\mathbf{k}) = \Delta_{ik}(\mathbf{k})k_n + \Delta_{in}(\mathbf{k})k_k$ , on a le résultat suivant pour  $F_{ilm}^{(QN)}$  :

$$F_{ilm}^{(QN)} = -i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \sum_{\substack{(i,l,m) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{ikn}(\mathbf{k})\Phi_{lk}(\mathbf{k}', t)\Phi_{mn}(\mathbf{k}'', t). \quad (4.24)$$

Ainsi, l'expression de  $F_{ilm}^{(QN)}$  en fonction de  $\Phi_{ij}$  permet de trouver une expression de  $\Gamma_{ilm}$ ,  $\Theta_{ilm}$  et  $T_{ij}$  en fonction de  $\Phi_{ij}$ , d'où une équation (4.1) maintenant fermée. Cependant, cette équation présente deux inconvénients rédhibitoires : d'une part, dans le cas isotrope ( $\Omega = 0$ ), elle peut conduire à des énergies cinétiques négatives, et d'autre part, on n'obtient pas de zone inertielle en  $k^{-5/3}$ . L'utilisation d'un amortissement tourbillonnaire combiné à une markovianisation permet de résoudre ces problèmes.

## 4.3.2 Amortissement tourbillonnaire

### 4.3.2.1 Analyse du modèle QN

Si on regarde l'équation (4.17), on s'aperçoit que  $\Lambda_{ilm;pqr}$  y joue deux rôles. Il est en premier lieu responsable de la décroissance avec  $t$  de la dépendance en la valeur initiale de  $\Gamma_{ilm}$ , via le premier terme du membre de droite, et, en second lieu, il détermine la mémoire de  $\Gamma_{ilm}$  vis-à-vis des moments d'ordre 2, via l'intégrale temporelle. On s'intéresse dans cette partie au cas où  $\Omega = 0$ , afin d'étudier le comportement de  $\Lambda_{ilm;pqr}$  dans le cadre de la théorie de Kolmogorov. On a ainsi  $L_{ij} = \nu k^2 \delta_{ij}$  et  $G_{ij}(\mathbf{k}, t - t') = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) \exp[-\nu k^2(t - t')]$ , ce qui implique que la dépendance temporelle de  $\Lambda_{ilm;pqr}$  est en  $\exp[-\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)(t - t')]$ .

Dans (4.17), le temps caractéristique de la mémoire en la valeur initiale de  $\Gamma$  et de la mémoire des moments d'ordre 2 dans l'intégrale est alors de l'ordre de  $[\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)]^{-1}$ . Ces deux effets de mémoire ne sont déterminés que par le seul déclin visqueux. Le problème est que, pour les grandes échelles (correspondant à  $k$  petit) à grand nombre de Reynolds, ce temps caractéristique est bien supérieur à  $L/u'$ , qui traduit le temps de vie des grands tourbillons. Il y a une contradiction, et les moments d'ordre 3 se rappellent donc trop longtemps leur valeur initiale et l'historique des moments d'ordre 2 aux temps précédents. L'amplitude de  $\Gamma_{ilm}$  au temps  $t$  s'en trouve donc faussement augmentée, et cela se répercute donc sur le terme de transfert aux grandes échelles, qui se trouve être ainsi plus grand que physiquement acceptable. L'énergie intégrée sur une sphère à ces échelles peut alors devenir négative, comme l'a décrit Orszag dans [48].

## 4.3.2.2 Le modèle EDQN

L'Eddy-Damping permet de diminuer le temps caractéristique de mémoire en agissant sur la dépendance en temps du tenseur de Green. L'idée est d'écrire ce tenseur sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') &= \exp \left[ - \int_{t'}^t d(\mathbf{k}, t'') dt'' \right] G_{ij}(\mathbf{k}, t - t') \\ &= \exp \left[ - \int_{t'}^t \zeta(\mathbf{k}, t'') dt'' \right] G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t'), \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec  $\zeta(\mathbf{k}, t) = d(\mathbf{k}, t) + \nu k^2$ ,  $G_{ij}$  et  $G_{ij}^{(RDT)}$  définis par (3.106) et (3.104). Ainsi,  $d(\mathbf{k}, t)$  correspond bien à un amortissement paramétrable. Ce nouveau tenseur  $G_{ij}^{(ED)}$  est en définitive la solution de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{ij}^{(ED)}}{\partial t} + L_{in}^{(ED)} G_{nj}^{(ED)} &= 0, \\ G_{ij}^{(ED)}(\mathbf{k}, t', t') &= \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{où } L_{in}^{(ED)}(\mathbf{k}, t) = L_{in}(\mathbf{k}) + d(\mathbf{k}, t)\delta_{ij}. \quad (4.27)$$

Enfin, tandis que  $\Gamma_{ilm}^{(QN)}$  était solution de :

$$\frac{\partial \Gamma_{ilm}^{(QN)}}{\partial t} + L_{in}(\mathbf{k})\Gamma_{nlm}^{(QN)} + L_{ln}(\mathbf{k}')\Gamma_{inm}^{(QN)} + L_{mn}(\mathbf{k}'')\Gamma_{ilm}^{(QN)} = F_{ilm}^{(QN)}, \quad (4.28)$$

$\Gamma_{ilm}^{(EDQN)}$  est solution de :

$$\frac{\partial \Gamma_{ilm}^{(EDQN)}}{\partial t} + L_{in}^{(ED)}(\mathbf{k})\Gamma_{nlm}^{(EDQN)} + L_{ln}^{(ED)}(\mathbf{k}')\Gamma_{inm}^{(EDQN)} + L_{mn}^{(ED)}(\mathbf{k}'')\Gamma_{ilm}^{(EDQN)} = F_{ilm}^{(QN)}. \quad (4.29)$$

Cette relation s'écrit encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ilm}^{(EDQN)}}{\partial t} + L_{in}(\mathbf{k})\Gamma_{nlm}^{(EDQN)} + L_{ln}(\mathbf{k}')\Gamma_{inm}^{(EDQN)} + L_{mn}(\mathbf{k}'')\Gamma_{ilm}^{(EDQN)} &= F_{ilm}^{(EDQN)}, \\ \text{avec } F_{ilm}^{(EDQN)} &= F_{ilm}^{(QN)} - [d(\mathbf{k}, t) + d(\mathbf{k}', t) + d(\mathbf{k}'', t)]\Gamma_{ilm}^{(EDQN)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

La modification ED peut donc être décrite de deux façons, qui sont équivalentes mais dont l'angle de vue est différent. La première consiste à dire que l'on modifie simplement l'opérateur linéaire, tout en gardant le même second membre,  $F_{ilm}^{(QN)}$ , comme dans (4.29). Une deuxième approche consiste à dire que l'on a rajouté artificiellement un terme, complètement paramétrable par la donnée de  $d$ , au terme non linéaire qui devient  $F_{ilm}^{(EDQN)}$ .

Finalement, on préfère travailler sur la solution de (4.29), qui est :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ilm}^{(EDQN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) &= \Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, 0)\Gamma_{pqr}^{(EDQN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', 0) \\ &+ \int_0^t \Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''; t, t')F_{pqr}^{(QN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t')dt', \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec :

$$\Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t, t') = G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') G_{lq}^{(ED)}(\mathbf{k}', t, t') G_{mr}^{(ED)}(\mathbf{k}'', t, t').$$

Il faut noter que le tenseur  $G_{ij}^{(ED)}$  est un outil mathématique formel qui permet simplement de diminuer le temps de mémoire des moments d'ordre 3. En effet, l'intégrale de  $d$  entre  $t'$  et  $t$  dans (4.25) est positive si  $t \geq t'$ , car  $d$  est positive ; elle implique donc que le temps caractéristique de  $\Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}$  est maintenant strictement inférieur à celui de  $\Lambda_{ilm;pqr}$ . Les moments d'ordre 3 ont ainsi moins de mémoire de leur valeur initiale et des moments d'ordre 2.

### 4.3.3 Choix de $d$

La fonction  $d$  a la dimension de l'inverse d'un temps, et devrait dépendre de  $E(k, t)$  car l'objectif final du modèle est d'obtenir une équation sur l'énergie intégrée. On choisira avant tout  $d$  de telle façon que  $d(\mathbf{k}, t) = d(-\mathbf{k}, t) \geq 0$  pour tous  $\mathbf{k}$  et  $t$ , afin de préserver le caractère hermitien de  $F_{ilm}^{(EDQN)}$  et donc de  $\Gamma_{ilm}^{(EDQN)}$ . Le plus facile est de choisir  $d(k)$  isotrope. De plus, la raison d'être de l'amortissement visqueux est de diminuer le temps de mémoire des moments d'ordre 3 aux grandes échelles, c'est-à-dire aux petits nombres d'ondes. Une forme judicieuse pour la fonction  $d$  doit conduire à un spectre, initialement isotrope, sans rotation, en  $k^{-5/3}$  dans la zone inertielle. Orszag a proposé la forme suivante en 1970 dans [48] :

$$d(\mathbf{k}, t) = d(k, t) = Ak^{3/2}E(k, t)^{1/2}, \quad (4.33)$$

où  $A$  est une constante. Le choix de  $A$  se fait afin de retrouver, dans la zone inertielle, un comportement en  $k^{-5/3}$  et une constante de Kolmogorov cohérente.

Une autre expression a été suggérée par Pouquet, Lesieur, André et Basdevant dans [51] :

$$d(\mathbf{k}, t) = d(k, t) = A \left[ \int_0^k k'^2 E(k', t) dk' \right]^{1/2}, \quad (4.34)$$

où le terme entre crochets représente l'énstrophie aux grandes échelles. Cette dernière forme pour  $d$  est utilisée fréquemment lors de simulations numériques, mais il existe une infinité de possibilités. On peut remarquer que si l'on se place aux nombres d'ondes contenant l'énergie  $k \sim L^{-1}$ , alors  $E(k, t) \sim u'^2 L$ , d'où  $d(k, t) \sim u'/L$ . Cette expression du temps de retournement des tourbillons sous forme intégrale a été proposée la première fois par Comte-Bellot et Corrsin dans [14]. Le temps  $d(k, t)^{-1}$  est donc de l'ordre de la durée de vie des tourbillons contenant l'énergie. Il reflète donc de manière cohérente l'échelle de temps d'un processus non linéaire, à savoir l'amortissement tourbillonnaire des moments d'ordre 3.

L'expression (4.34) est utilisable quel que soit l'écoulement étudié, c'est-à-dire avec ou sans champ de vitesse moyen, stratification ou rotation, tout en gardant à l'esprit que les échelles temporelles typiques de la turbulence peuvent être affectées si ces effets sont trop importants. On peut donc être amené à ajuster l'amortissement tourbillonnaire, afin qu'il reflète mieux la réalité. Dans le cas de la rotation

seule, Cambon, Bertoglio et Jeandel, dans [7], ont suggéré de prendre en compte le taux de rotation dans l'amortissement tourbillonnaire. On remplace ainsi, dans (4.34), l'enstrophie aux grandes échelles par l'enstrophie totale en y ajoutant  $2\Omega^2$ . La nouvelle expression de  $d$  est donc :

$$d(\mathbf{k}, t) = d(k, t) = A \left[ \int_0^k k'^2 E(k', t) dk' + 2\Omega^2 \right]^{1/2}. \quad (4.35)$$

Mais même ainsi, l'amortissement tourbillonnaire ne reflète en rien l'anisotropie liée à la rotation.

### 4.3.4 Markovianisation

Même avec l'hypothèse ED, le modèle EDQN peut toujours conduire à des énergies négatives, et c'est ici qu'intervient la markovianisation. C'est une technique qui consiste à considérer que certaines grandeurs ont une évolution temporelle très lente comparée à d'autres évoluant sur des échelles de temps courtes, et que l'on peut ainsi les considérer comme constantes sur certains intervalles de temps. La markovianisation sera appliquée à l'expression de  $\Gamma_{ilm}^{(EDQN)}$ .

#### 4.3.4.1 Remarques sur les différents modèles EDQNM

On s'intéresse au terme de mémoire des moments d'ordre 2 de (4.31), et on regarde quels termes seront considérés comme ayant une évolution rapide par rapport aux autres. A partir de considérations physiques et empiriques, il s'agit d'estimer quelles sont les grandeurs dont la contribution à la mémoire temporelle dans (4.31) va être importante. On va voir qu'il y a trois façons de procéder, ce qui a donné lieu à trois modélisations EDQNM différentes, qui vont dans le sens d'une meilleure identification des termes rapides et lents.

En partant des expressions (4.24) et (4.25), la markovianisation peut donc se porter sur les quantités suivantes :

$$\exp \left[ - \int_{t'}^t \zeta(\mathbf{k}, t'') dt'' \right], \quad (4.36a)$$

$$G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t'), \quad (4.36b)$$

$$\Phi_{lk}(\mathbf{k}', t) \text{ et } \Phi_{mn}(\mathbf{k}'', t). \quad (4.36c)$$

La première étape, qui est commune aux trois modèles, consiste à supposer que l'amortissement  $\zeta$  évolue lentement sur  $[t', t]$ , et prend sa valeur à  $t$ , ce qui simplifie l'analyse. Le terme obtenu :

$$\exp [-\zeta(\mathbf{k}, t)(t' - t)], \quad (4.37)$$

est alors toujours considéré comme rapide, car c'est le seul qui contient l'information sur l'amortissement.

Dans le modèle que l'on appelle EDQNM1, on décide de considérer comme lents  $G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t')$ , qui prend sa valeur à  $t - t' = 0$ ,  $\Delta_{ij}(\mathbf{k})$ , et le tenseur  $\Phi_{ij}$ . L'ultime dépendance en  $t'$  est celle de l'amortissement tourbillonnaire : cela implique

que  $\Lambda_{ilm;pqr}^{(EDM)}$  décroît rapidement, de manière exponentielle. Pour des temps pas trop proches de  $t = 0$ , on peut donc étendre, dans (4.31), l'intégration sur  $[0, t]$  de la mémoire des moments d'ordre 2, à une intégration sur  $]-\infty, t]$ , les contributions supplémentaires étant négligeables. Finalement, la dépendance temporelle en  $t'$  s'intègre en :

$$\int_{-\infty}^t \exp[-\zeta(\mathbf{k}, t)(t - t')] dt' = \frac{1}{\zeta(\mathbf{k}, t)}. \quad (4.38)$$

Le transfert non linéaire  $\tau_{ij}$  ne contient alors plus du tout de dépendance en  $\Omega$ , car le tenseur de Green RDT est le seul terme où le taux de rotation apparaît. Ainsi, un spectre initialement isotrope reste isotrope ultérieurement, car on a vu que ce sont les interactions non linéaires qui sont responsables de l'anisotropie via  $\Omega$ , ce qui est donc en contradiction avec les observations expérimentales. Ce modèle pas assez cohérent constitua la première approche EDQNM avec rotation, mais fut abandonné par la suite, pour les raisons qui viennent d'être exprimées.

Donc, dans le modèle avec rotation, on ne veut pas faire complètement disparaître la dépendance en  $\Omega$  de  $G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t')$ , car elle contient l'information liée aux interactions entre ondes inertielles. Le modèle suivant, EDQNM2, consiste à considérer le terme  $G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t')$  comme étant rapide cette fois-ci, et en supposant toujours l'évolution lente de  $\Phi_{ij}$ . A nouveau pour des raisons de décroissance rapide de  $\Lambda_{ilm;pqr}^{(EDM)}$ , la dépendance en  $t'$  dans (4.31) s'intègre en :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\left[\theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) - iF_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)\right](t - t')\right\} dt' \\ &= \frac{1}{\theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) - iF_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

avec :

$$\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = [\zeta(\mathbf{k}, t) + \zeta(\mathbf{k}', t) + \zeta(\mathbf{k}'', t)]^{-1}, \quad (4.40)$$

et :

$$F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}''), \quad (4.41)$$

les indices  $s$ ,  $s'$  et  $s''$  étant pris dans  $\{-1, 1\}$ . On remarque que  $\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$  reste invariant par toute permutation de  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ , et a la dimension d'un temps. De plus, l'intégrale (4.39) ne converge que parce que  $\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$  est un réel positif. Le modèle EDQNM2 est celui qui a été le plus souvent utilisé, c'est donc avec lui que continuera l'analyse principale.

On peut néanmoins parler brièvement du dernier modèle, à savoir EDQNM3. On considère toujours que  $G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t')$  est un terme rapide. C'est un modèle qui affine encore la distinction entre termes lents et rapides, à la lumière de réflexions sur la décomposition  $e$ ,  $z$ ,  $h$  du tenseur  $\Phi_{ij}$ . En effet, si on regarde les équations d'évolution (3.77), (3.79), et (3.82), l'équation pour  $z$  :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + 2(\nu k^2 + i\omega)z = \frac{1}{2}N_i N_j T_{ij},$$

se démarque des autres, car elle contient un terme de phase. Le changement de variable :

$$z = Ze^{-2i\omega t}, \quad (4.42)$$

donne une nouvelle équation d'évolution pour  $Z$ , ne faisant plus intervenir de terme linéaire oscillant :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + 2\nu k^2 Z = \frac{1}{2} N_i N_j T_{ij} e^{2i\omega t}. \quad (4.43)$$

On ne peut ainsi pas considérer raisonnablement que  $z$  est un terme lent, mais que seul  $Z$  l'est. Pour résumer, au lieu de considérer que  $\Phi_{ij}(t') = \Phi_{ij}(t)$  globalement, on écrit :

$$\begin{aligned} e(t') &= e(t), \\ Z(t') &= Z(t), \\ h(t') &= h(t). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Finalement, la correction par rapport à EDQNM2 est qu'à la dépendance en  $t'$ , on rajoute selon les cas un terme oscillant du type  $e^{2i\omega t'}$ . Ce dernier modèle a été testé numériquement pour une turbulence initialement isotrope, mais n'a pas montré de grandes différences : le terme  $|z| = |Z|$  était trop petit pour avoir une influence mesurable, sauf peut-être au voisinage de  $\pi/2$ , où la différence entre  $z$  et  $Z$  disparaît.

#### 4.3.4.2 Conséquences sur les effets de mémoire

Dans le cadre de la modélisation EDQNM2, la markovianisation sur  $\Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}$  dans (4.32) implique :

$$\Lambda_{ilm;pqr}^{(EDM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t, t') = e^{-\frac{(t-t')}{\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}} G_{ip}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t-t') G_{lq}^{(RDT)}(\mathbf{k}', t-t') G_{mr}^{(RDT)}(\mathbf{k}'', t-t'). \quad (4.45)$$

On s'intéresse maintenant à la forme markovianisée de (4.31) en remplaçant  $F_{pqr}^{(QN)}$  par sa valeur en  $t' = t$ , ce qui revient à considérer le tenseur  $\Phi_{ij}$  comme un terme évoluant lentement. Pour des temps pas trop proches de  $t = 0$ , on peut, toujours pour les mêmes raisons, étendre l'intégration de la mémoire des moments d'ordre 2 à  $]-\infty, t]$ , tout en négligeant le terme provenant des conditions initiales de  $\Gamma_{ilm}^{(EDQNM)}$ . Cet ensemble d'approximations conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ilm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \\ &= \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) F_{pqr}^{(QN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \\ &= -i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \sum_{\substack{(p,q,r) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t) \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec :

$$\Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{T}{\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}} G_{ip}^{(RDT)}(\mathbf{k}, T) G_{lq}^{(RDT)}(\mathbf{k}', T) G_{mr}^{(RDT)}(\mathbf{k}'', T) dT. \quad (4.47)$$

Cette expression permet d'exprimer les moments d'ordre 3 en fonction des moments d'ordre 2, et constitue la fermeture EDQNM2 complète.

#### 4.3.4.3 Expression des moments d'ordre 3

Avec (4.3) et (4.46), on obtient donc :

$$\Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) = -i \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \sum_{\substack{p,q,r \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t) \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}',$$

$$\text{avec } \mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'. \quad (4.48)$$

En utilisant la symétrie par permutation de  $\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$ , on montre que  $\Psi_{ilm;prq}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}', t) = \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$ . De plus,  $P_{qkn} = P_{qkn}$ , donc deux des termes de la somme sur les triplets, intégrés, donnent le même résultat. D'où :

$$\Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) = -i \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t) [P_{pkn}(\mathbf{k}, t) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t) + 2P_{qkn}(\mathbf{k}') \Phi_{pk}(\mathbf{k}, t)] d^3 \mathbf{k}',$$

avec  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . (4.49)

#### 4.3.4.4 Fermeture des équations

On peut maintenant obtenir une expression pour le terme de transfert. Avec (4.2), on a :

$$\tau_{ij}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) P_{jlm}(\mathbf{k}) \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t) \left[ \frac{1}{2} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t) + P_{qkn}(\mathbf{k}') \Phi_{pk}(\mathbf{k}, t) \right] d^3 \mathbf{k}',$$

avec  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . (4.50)

Le tenseur  $\Psi_{ilm;pqr}$  est alors le vecteur de l'influence de la rotation sur le tenseur non linéaire  $T_{ij}$ . Ainsi, en partant d'un spectre isotrope initialement, on arrive à générer une anisotropie, ce qui n'aurait pas été le cas si on avait remplacé  $G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t')$  par sa valeur en  $t - t' = 0$  dans (4.45). C'est la différence notable par rapport au modèle EDQNM sans rotation, avec, bien sûr, le choix de la fonction  $d$ . L'injection de (4.50) dans :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi_{mj} + L_{jm} \Phi_{im} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*, \quad (4.51)$$

où  $L_{ij}(\mathbf{k}) = -\gamma_{ij}(\mathbf{k}) + \nu k^2 \delta_{ij}$ , donne une équation intégral-différentielle fermée pour  $\Phi_{ij}$ .

## 4.4 Analyse du modèle

Dans cette section, le terme  $\tau_{ij}$ , défini par (4.50), sera parfois vu comme une fonction mathématique du tenseur spectral  $\Phi_{ij}$ , de  $\mathbf{k}$  et de  $t$ , et noté  $\hat{\tau}_{ij}(\Phi, \mathbf{k}, t)$ . On va montrer tout d'abord que le modèle EDQNM2 appliqué à la rotation conserve certaines propriétés usuelles du tenseur  $\Phi_{ij}$ . La réalisabilité n'est par contre pas vérifiée quelles que soient les conditions initiales du problème. Enfin, on mettra en évidence à nouveau l'importance des surfaces résonantes, en particulier à travers les équations vérifiées par  $e$ ,  $z$  et  $h$ .

### 4.4.1 Propriétés

On cherche à savoir si le modèle EDQNM préserve pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ , les propriétés suivantes :

$$\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, t) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (4.52a)$$

$$\Phi_{ij}^*(-\mathbf{k}, t) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (4.52b)$$

$$k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (4.52c)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^3, \alpha_i^* \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \alpha_j \geq 0, \quad (4.52d)$$

si elles sont vraies pour tout  $\mathbf{k}$  et à  $t = 0$ . Les relations (4.52a) et (4.52b) reflètent les symétries du tenseur  $\Phi_{ij}$ . La relation (4.52c) provient du fait que le champ de vitesse est incompressible.

La condition (4.52d) mérite une explication plus détaillée. Elle est nécessaire afin d'assurer la *réalisabilité* du modèle, c'est-à-dire la possibilité de construire un champ de vitesse aléatoire et statistiquement homogène,  $u_i(\mathbf{x}, t)$ , tel que  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  soit son tenseur spectral, comme indiqué dans [3]. La relation (4.52d) assure ainsi que l'énergie spectrale  $e(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)$  est toujours positive, ce qui n'est pas le cas dans les modèles QN et EDQN isotropes. Orszag [49] a par contre établi qu'avec le modèle EDQNM isotrope, on obtient une équation pour le spectre d'énergie identique à celle d'un modèle dynamique bien connu, à savoir l'équation de Langevin. Cela suffit à en assurer la réalisabilité. Cependant, dans le cas de la rotation, on va voir que tandis que les trois premières propriétés sont bel et bien conservées, la quatrième pose problème. Il faut noter que la plupart des raisonnements intervenant dans ces démonstrations, et dans d'autres à venir, s'appuie sur l'hypothèse d'existence et d'unicité d'une solution aux équations différentielles qui proviennent de l'équation de Navier-Stokes. On admettra ce résultat sans démonstration, car c'est encore une question ouverte en mécanique des fluides.

#### 4.4.1.1 Hermitiannité

On suppose que pour tout  $\mathbf{k}$ , on a  $\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, 0) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0)$ . En intervertissant  $i$  et  $j$  dans (4.51), et en prenant le conjugué, on montre que  $\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, t)$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \Phi_{ji}^*}{\partial t} + L_{im} \Phi_{jm}^* + L_{jm} \Phi_{mi}^* = (\hat{\tau}_{ji}^* + \hat{\tau}_{ij}) (\Phi, \mathbf{k}, t). \quad (4.53)$$

Ainsi  $\Phi_{ji}^*$  et  $\Phi_{ij}$  ont la même équation d'évolution, qui est :

$$\frac{\partial \square_{ij}}{\partial t} + L_{im} \square_{mj} + L_{jm} \square_{im} = (\hat{\tau}_{ij} + \hat{\tau}_{ji}^*) (\Phi, \mathbf{k}, t), \quad (4.54)$$

et avec les mêmes conditions initiales. L'unicité de la solution de (4.54) assure donc que pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $\Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, t) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$ , d'où la propriété (4.52a).

#### 4.4.1.2 Symétrie réelle

On suppose que pour tout  $\mathbf{k}$ , on a  $\Phi_{ij}^*(-\mathbf{k}, 0) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0)$ . En prenant (4.51) en  $-\mathbf{k}$ , et en conjuguant,  $\Phi'_{ij}(\mathbf{k}, t) = \Phi_{ij}^*(-\mathbf{k}, t)$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \Phi'_{ij}}{\partial t} + L_{im} \Phi'_{mj} + L_{jm} \Phi'_{im} = [\hat{\tau}_{ij}^* + \hat{\tau}_{ji}] (\Phi, -\mathbf{k}, t). \quad (4.55)$$



Or, d'après la contrainte imposée à l'amortissement tourbillonnaire  $d(-\mathbf{k}, t) = d(\mathbf{k}, t)$ , on peut déduire que :

$$\zeta(-\mathbf{k}, t) = \zeta(\mathbf{k}, t), \quad (4.56)$$

$$\text{d'où} \quad \theta(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k}'', t) = \theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t), \quad (4.57)$$

$$\text{et} \quad \Psi_{ilm;pqr}(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k}'', t) = \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t), \quad (4.58)$$

avec la propriété  $G_{ij}^{(RDT)}(-\mathbf{k}, t) = G_{ij}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t)$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ij}^*(\Phi, -\mathbf{k}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{ilm;pqr}(-\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', t) P_{jlm}(-\mathbf{k}) \Phi_{rn}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} P_{pkn}(-\mathbf{k}) \Phi_{qk}^*(\mathbf{k}', t) + P_{qkn}(\mathbf{k}') \Phi_{pk}^*(-\mathbf{k}, t) \right] d^3 \mathbf{k}' \\ &= \hat{\tau}_{ij}(\Phi', \mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (4.59)$$

où on a effectué le changement de variable  $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}'$ . De plus, on a, par conjugaison, que  $\hat{\tau}_{ji}(\Phi, -\mathbf{k}, t) = \hat{\tau}_{ji}^*(\Phi', \mathbf{k}, t)$ .

On s'aperçoit finalement, avec (4.55), que  $\Phi_{ij}^*(-\mathbf{k}, t)$  a la même équation d'évolution que  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$ , qui est :

$$\frac{\partial \square_{ij}}{\partial t} + L_{im} \square_{mj} + L_{jm} \square_{im} = [\hat{\tau}_{ij} + \hat{\tau}_{ji}^*](\square, \mathbf{k}, t) \quad (4.60)$$

avec les mêmes conditions initiales. Donc l'unicité de la solution de (4.60) assure que pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $\Phi_{ij}^*(-\mathbf{k}, t) = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$ , d'où la propriété (4.52b).

#### 4.4.1.3 Incompressibilité

On suppose que pour tout  $\mathbf{k}$ ,  $(k_i \Phi_{ij})(\mathbf{k}, 0) = 0$ . On a déjà  $k_i \tau_{ij}(\mathbf{k}, t) = k_i \tau_{ji}^*(\mathbf{k}, t) = 0$  car  $k_i G_{ip}^{(RDT)}(\mathbf{k}, T) = 0$  et  $k_i P_{ilm}(\mathbf{k}) = 0$ . L'équation vérifiée par  $(k_i \Phi_{ij})(\mathbf{k}, t)$  est la suivante :

$$\frac{\partial (k_i \Phi_{ij})}{\partial t} + (L_{jm} + \nu k^2 \delta_{jm})(k_i \Phi_{ij}) = 0. \quad (4.61)$$

On admet l'unicité de la solution pour une condition initiale donnée. Le tenseur nul vérifie l'équation avec la même condition initiale, donc on a pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $(k_i \Phi_{ij})(\mathbf{k}, t) = 0$ . En conjuguant cette relation, comme  $\mathbf{k}$  est réel et avec (4.52a), on obtient donc pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $(k_j \Phi_{ij})(\mathbf{k}, t) = 0$ , et donc (4.52c).

#### 4.4.1.4 Réalisabilité

On suppose la propriété (4.52d) vraie. Comme  $\Phi_{ij}$ , en tant que matrice, est hermitienne, elle est diagonalisable, et comme elle est positive, ses valeurs propres sont toutes réelles positives. Sa trace est donc positive comme somme de ses valeurs propres, et  $e(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t)$ , demie-trace de  $\Phi_{ij}$ , est positive. Dans le cas isotrope, on peut montrer que la réalisabilité est assurée en utilisant la méthode d'Orszag, ou bien en écrivant l'équation d'évolution de  $\alpha_i^* \Phi_{ij} \alpha_j$ .

Dans le cas avec rotation, on a trouvé un contre-exemple de réalisabilité. Pour une fonction tensorielle  $(\mathbf{k}, t) \rightarrow \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  donnée, on peut construire un vecteur  $\alpha$  de  $\mathbb{C}^3$  tel que :

$$\begin{aligned} \alpha_i^* \Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0) \alpha_j &= 0 \\ \frac{\partial (\alpha_i^* \Phi_{ij} \alpha_j)}{\partial t}(\mathbf{k}, 0) &< 0, \end{aligned}$$

d'où l'existence de valeurs négatives pour  $\alpha_i^* \Phi_{ij} \alpha_j$  dès le premier pas de temps. La démonstration est assez longue et ne figure donc pas ici. De plus, numériquement, on s'aperçoit que la réalisabilité est difficile à obtenir pour un jeu quelconque de paramètres.

#### 4.4.1.5 Conservation de l'énergie

En EDQNM avec rotation, on peut montrer que le terme de transfert total ( $\tau_{ii} + \tau_{ii}^*$ ), conserve l'énergie, c'est-à-dire que son intégrale sur tout l'espace est nulle. La démonstration est très similaire à celle pour la turbulence isotrope faite en 3.2.6.3, car seuls les moments d'ordre 3 ont une expression différente. On a, d'après (4.2), (4.3) et (4.46) :

$$\int \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \frac{1}{2} i \iiint P_{ilm}(\mathbf{k}) \Gamma_{ilm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \quad (4.62)$$

De la même façon que pour (3.46), on a :

$$P_{ilm} \Gamma_{ilm}^{(EDQNM)} = k_l \Gamma_{mlm}^{(EDQNM)} - k'_m \Gamma_{llm}^{(EDQNM)}, \quad (4.63)$$

d'où on déduit que (4.62) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} i \iiint \left[ k_l \Gamma_{mlm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') - k'_m \Gamma_{llm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \right] d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Par permutation circulaire de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ , on obtient trois expressions égales pour (4.64), d'où :

$$\begin{aligned} \int \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} &= \frac{1}{6} i \iiint \left[ k_l \Gamma_{mlm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') - k_l \Gamma_{mml}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}') \right. \\ &+ k'_l \Gamma_{mlm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}) - k'_l \Gamma_{mml}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ &+ k''_l \Gamma_{mlm}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}') - k''_l \Gamma_{mml}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}) \left. \right] \\ & \quad d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Enfin, le tenseur  $\Gamma_{ijk}^{(EDQNM)}$  est construit de telle façon que :

$$\Gamma_{ijk}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \Gamma_{kij}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Gamma_{jki}^{(EDQNM)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}), \quad (4.66)$$

d'après la propriété d'invariance par permutation circulaire de  $\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ . Le tenseur  $\Gamma_{ijk}$  vérifie la même propriété. Les termes de l'intégrande de (4.65) s'annulent deux à deux, d'où :

$$\int \tau_{ii}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (4.67)$$

Cette équation implique qu'il n'y a pas de pertes d'énergies dues au terme de transfert non linéaire de l'équation pour l'énergie spectrale. Il est donc conservatif, car globalement sur tout l'espace spectral, les transferts d'énergie sont nuls.

#### 4.4.2 Surfaces résonantes

On va voir que l'expression du transfert non linéaire dans le modèle EDQNM2 permet de donner un aperçu du rôle que jouent les surfaces résonantes dans la dynamique du problème, en particulier à travers les équations d'évolution temporelle de  $e$ ,  $z$  et  $h$ .

##### 4.4.2.1 Dépendance rapide du terme de transfert

Dans le cas d'un nombre de Rossby petit, on retrouve l'importance des surfaces résonantes dans l'expression (4.50). Elle apparaît grâce au tenseur  $\Psi_{ilm;pqr}$  défini par (4.47), qui contient la dépendance en temps rapide du terme de transfert. On utilise l'expression (3.104) de  $G_{ij}^{(RDT)}$  pour écrire :

$$\begin{aligned} & \Psi_{ilm;pqr}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \\ = & \frac{1}{8} \sum_{s, s', s''} N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_q^{(-s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\ & \int_0^{+\infty} \exp \left\{ - \left[ \theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) - i F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \right] T \right\} dT, \end{aligned} \quad (4.68)$$

avec  $F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$  donné par (4.41). Or :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \exp \left\{ - \left[ \theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) - i F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \right] T \right\} dT \\ = & \frac{1}{\theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) - i F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

et on retrouve effectivement la dépendance temporelle qui avait été prévue par (4.39). On a ainsi un terme qui traduit la dépendance en temps rapide du terme de transfert  $\tau_{ij}$ .

##### 4.4.2.2 Approche qualitative

On rappelle que :

$$\theta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \sim \frac{L}{w'}, \quad (4.70)$$

car il traduit un effet non linéaire. Donc si  $Ro_L \ll 1$ , on a  $\theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) \ll \Omega$ . L'expression (4.69) devient alors à la limite  $\theta^{-1} \rightarrow 0$  :

$$\frac{i}{F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}, \quad (4.71)$$

Si  $F_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'') = 0$ , c'est-à-dire si on se trouve sur une surface résonante,  $\Psi_{ilm;pqr}$  prend des valeurs beaucoup plus élevées, toutes choses étant égales par ailleurs. L'intégrande de (4.50) est donc une fonction à fortes variations près des surfaces résonantes.

#### 4.4.2.3 Équations pour $e$ , $z$ et $h$

Il est intéressant de regarder quelles sont les équations d'évolution de  $e$ ,  $z$  et  $h$ . D'après (3.77), (3.79) et (3.82), on rappelle les équations générales suivantes, en fonction du terme de transfert :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e = \frac{1}{2}(\tau_{ii} + \tau_{ii}^*) = T^e, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + 2[\nu k^2 + i\omega]z = \frac{1}{2}N_i N_j (\tau_{ij} + \tau_{ji}^*) = T^z, \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + 2\nu k^2 h = -\frac{1}{2}i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} (\tau_{ij} + \tau_{ji}^*) = T^h. \quad (4.74)$$

Les différents seconds membres non linéaires s'expriment en fonction de  $e$ ,  $z$  et  $h$ , mais le calcul est trop long pour figurer ici. Pour plus de détails, on trouvera une expression dans un repère bisphérique lié au triangle résonant, dans [10]. On peut néanmoins toujours les mettre sous la forme :

$$T^{e,z,h} = \sum_{s,s',s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_{ss's''}^{e,z,h}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)}{\theta^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) + iF_{ss's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)} d^3 \mathbf{k}', \quad (4.75)$$

avec  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$

où  $f_{ss's''}^{e,z,h}$  représente trois fonctions constituées de produits de  $e$ ,  $z$  et  $h$  pris en  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ . Le dénominateur, qui provient de la dépendance en temps rapide du tenseur  $\tau_{ij}$ , manifeste à nouveau l'importance des surface résonantes.



# Chapitre 5

## Le modèle AQNM

### 5.1 Introduction

L'étude de la turbulence homogène en rotation fait partie des problèmes fondamentaux en turbulence, avec un champ d'application très varié. Contrairement au cas isotrope pour lequel on trouve depuis presque un siècle des expériences concluantes, une approche théorique cohérente et plus récemment des simulations numériques, le cas avec rotation, apparemment simple, pose de nombreux problèmes.

Avec les modèles de type EDQNM, on a commencé dans les années 70-80 à s'intéresser à l'aspect interactions entre ondes inertielles en trois dimensions. On s'aperçut que les surfaces résonantes jouaient un rôle prépondérant dans la dynamique de l'écoulement, et leur influence fut alors prise en compte dans le modèle théorique. Pour ce type de modèles, l'inconvénient est que seules les interactions triadiques proches, c'est-à-dire celles concernant le voisinage du nombre d'onde donné, sont correctement prises en compte. Rien ne permet de dire en effet que l'on ne perd pas d'interactions triadiques lointaines. On pourrait alors penser que les calculs en DNS apporterait des renseignements précieux, mais ils sont rapidement limités en nombre de Reynolds. Enfin, les expériences ont du mal à reproduire une parfaite homogénéité, sans compter les difficultés liées aux échelles de mesure des champs. On manque donc finalement d'une référence complètement fiable, et l'analyse asymptotique de la turbulence d'ondes va en fournir une.

Dans la limite d'un nombre de Rossby de plus en plus petit, l'importance des surfaces résonantes se fait de plus en plus grande, et l'intégration volumique se transforme asymptotiquement en une intégration sur ces surfaces. Dans un modèle de ce type, que l'on appelle AQNM, on s'appuie sur les méthodes employées pour EDQNM, mais on est alors certains de ne pas rater d'interactions triadiques, car seules les contributions des surfaces résonantes sont conservées. De plus, on peut espérer ainsi que la diminution du coût numérique contrebalancera l'augmentation de la résolution, car l'intégration se fait sur un domaine beaucoup plus restreint que l'espace tout entier. Mais ce qui importe avant tout, c'est qu'avec le modèle AQNM, on peut espérer une précision des calculs beaucoup plus importante, quitte à ce que le gain sur le coût numérique ne soit pas aussi important que ce à quoi on aurait pu s'attendre.

## 5.2 La turbulence d'ondes

En turbulence en rotation, la théorie linéaire impose une décomposition de la vitesse spectrale sur une base de vecteurs propres pour l'opérateur  $\gamma_{ij}$ , provenant de la force de Coriolis. Les valeurs propres associées mettent en évidence l'existence d'ondes inertielles, définies par leur relation de dispersion. On s'attend à ce que ces ondes jouent un rôle important dans la dynamique du problème, même lorsqu'on prend en compte les effets non linéaires. On étend alors le domaine de validité de la projection sur les modes propres au problème non linéaire, en autorisant cette fois les composantes à varier lentement avec le temps. Dans les chapitres suivants, on omettra souvent les dépendances en  $\mathbf{x}$  et  $t$  dans l'espace physique et en  $\mathbf{k}$  et  $t$  dans l'espace spectral, quand il n'y a pas d'ambiguïté.

### 5.2.1 Présentation

#### 5.2.1.1 Rappels

D'après (3.23), l'équation vérifiée par les composantes de la transformée du champ de vitesse en  $\mathbf{k}$  est :

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \gamma_{in} \tilde{u}_n + \nu k^2 \tilde{u}_i = -i \Delta_{il} k_m \tilde{u}_l * \tilde{u}_m, \quad (5.1)$$

avec  $\Delta_{il}(\mathbf{k})$  l'opérateur de projection d'un vecteur sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  dans l'espace de Fourier,  $\varepsilon_{ijk}$  le tenseur alterné,  $\gamma_{in}(\mathbf{k})$  l'opérateur de Coriolis. L'équation (3.34) se réécrit :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} - \gamma_{in} \Phi_{nj} - \gamma_{jn} \Phi_{in} + 2\nu k^2 \Phi_{ij} = T_{ij} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*, \quad (5.2)$$

$$\text{où } \tau_{ij} = ik_m \Delta_{jl} \Theta_{ilm} = \frac{1}{2} iP_{jlm} \Theta_{ilm}, \quad (5.3)$$

$$\text{avec } \Theta_{ijk}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}) (\tilde{u}_j * \tilde{u}_k)(\mathbf{k}')}. \quad (5.4)$$

#### 5.2.1.2 Discussion sur la viscosité

Avec le modèle AQNM, on cherche à savoir, après une période de comportement linéaire, quelle va être la dynamique de l'écoulement, via l'étude du spectre d'énergie. En particulier, il faut déterminer s'il y a apparition d'une zone inertielle dans l'écoulement, et si c'est le cas, quelle va être sa vitesse d'établissement ainsi que sa pente. On ne s'intéresse donc finalement qu'au comportement des grandes échelles de la turbulence, car elles contiennent initialement l'énergie, et sont ainsi censées gouverner toute la dynamique d'établissement d'une zone inertielle éventuelle.

On choisit donc se placer dans le cas où  $\nu = 0$ , ou encore  $Re_L$  infini, ce qui revient principalement à repousser la coupure visqueuse à l'infini. A défaut d'une justification stricte, on peut faire les remarques suivantes :

1. Premièrement, la suppression du terme visqueux dans (3.34) conduit à la disparition du terme de dissipation,  $2\nu k^2 e(\mathbf{k}, t)$ . On suppose en fait que les petites échelles sont peu affectées par la viscosité. Cela revient à étudier le comportement du spectre à nombre de Reynolds infini, et on s'attend à obtenir le

même comportement aux petits nombres d'ondes et en zone inertielle que si la viscosité était conservée.

2. De plus, on espère que le fait de prendre la viscosité nulle ne perturbe pas démesurément toute l'analyse EDQNM, celle-ci servant de base à l'approche AQNM. La suppression de la viscosité conduit aussi à une transformation du tenseur de Green associé au problème, via l'amortissement total par nombre d'onde  $\zeta(\mathbf{k}, t) = d(\mathbf{k}, t) + \nu k^2$ . On néglige donc implicitement les interactions non-locales avec des nombres d'ondes sur les surfaces résonantes. Ce point sera traité plus en détails ultérieurement.
3. Enfin, le fait de repousser la coupure visqueuse à l'infini pose certains problèmes physiques. C'est en effet la viscosité qui assure que l'énergie spectrale décroît de manière exponentielle aux grands nombres d'ondes. Ce comportement est nécessaire afin d'assurer la convergence de l'intégrale de transfert, car sans viscosité, le terme de transfert non linéaire n'est plus conservatif. On peut espérer que la troncature radiale engendrée par la discrétisation spatiale jouera alors le rôle de la perte d'énergie à l'infini. Si ce n'est pas le cas, il sera vraisemblablement nécessaire de dissiper l'énergie à ces échelles, sous peine de la voir s'accumuler et d'engendrer des énergies infinies. Le terme visqueux, en tant que simple paramètre numérique, assurera donc la stabilité du schéma.

On considère donc, dans la suite, l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} - \gamma_{in} \Phi_{nj} - \gamma_{jn} \Phi_{in} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*, \quad (5.5)$$

quitte à réintroduire, en fin d'analyse, un terme de dissipation visqueuse, en cas de problème numérique principalement.

## 5.2.2 Passage de la linéarité à la non-linéarité

### 5.2.2.1 Démarche générale

Si le régime est linéaire ( $T_{ij} \equiv 0$ ), on obtient la solution :

$$\tilde{u}_j(\mathbf{k}, t) = A_+(\mathbf{k}) N_j e^{i\omega(\mathbf{k})t} + A_-(\mathbf{k}) N_j^* e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (5.6)$$

grâce à (3.95), avec  $A_+(\mathbf{k})$  et  $A_-(\mathbf{k})$  des amplitudes complexes ne dépendant pas de  $t$ . En utilisant (2.66), on peut donc mettre le tenseur spectral sous la forme générale :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \sum_{(s,s') \in \{-1,1\}^2} A_{ss'}(\mathbf{k}) N_i^{(s)} N_j^{(s')} e^{i(s+s')\omega(\mathbf{k})t}, \quad (5.7)$$

avec la convention que  $N_i^{(1)} = N_i$  et  $N_i^{(-1)} = N_i^*$ , et avec  $A_{ss'}$  de nouvelles amplitudes complexes, liées aux corrélations doubles des  $A_{\pm}$ . La décomposition de  $\Phi_{ij}$  sur une base formée à partir de vecteurs propres du système linéaire constitue une approche dite de *turbulence d'ondes*. La turbulence est ainsi vue comme un ensemble d'interactions entre ondes, dont on essaie de déterminer les contributions dominantes.



On se place maintenant dans le cas d'une turbulence à faible nombre de Rossby,  $Ro_L \ll 1$ . Le temps caractéristique de la non-linéarité est donc grand devant celui de la rotation :

$$\frac{L}{u'} \gg \Omega^{-1}. \quad (5.8)$$

On va mettre en pratique dans la suite une méthode asymptotique multi-échelles, dont on trouvera une description dans Nayfeh [47]. Cette approche s'inscrit dans le cadre plus général des développements asymptotiques par rapport à un petit paramètre, que l'on trouvera dans Bogoliubov & Mitropolsky [5], Wilcox [62] ou De Bruijn [15]. La non linéarité étant faible par rapport à la rotation, le tenseur spectral  $\Phi_{ij}$  évolue peu sur des échelles de temps rapides. On autorise alors les amplitudes  $A_{s_1 s_2}(\mathbf{k})$ , qui restent constantes dans la théorie linéaire, à varier lentement avec le temps, c'est-à-dire à varier sur des échelles de temps lents. On suppose donc maintenant que le tenseur spectral prend la forme

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \sum_{(s, s') \in \{-1, 1\}^2} A_{ss'}(\mathbf{k}, t) N_i^{(s)} N_j^{(s')} e^{i(s+s')\omega(\mathbf{k})t}, \quad (5.9)$$

et on va essayer d'obtenir les équations d'évolution temporelle des amplitudes.

### 5.2.2.2 Remarque sur les vitesses spectrales

A partir de l'expression (5.6), on pourrait utiliser la même approche pour les vitesses spectrales, en autorisant les amplitudes  $A_+$  et  $A_-$  à varier lentement dans le temps :

$$\tilde{u}_j(\mathbf{k}, t) = A_+(\mathbf{k}, t) N_j e^{i\omega(\mathbf{k})t} + A_-(\mathbf{k}, t) N_j^* e^{-i\omega(\mathbf{k})t}. \quad (5.10)$$

L'injection de cette formulation dans les équations de Navier-Stokes spectrales (3.23) conduit à un système d'équations différentielles couplées en les amplitudes  $A_+$  et  $A_-$ . La même analyse que celle qui va suivre est alors possible, et la fermeture du problème serait assurée de la même façon, mais l'inconvénient est d'ordre pratique. On peut en effet se demander comment imposer au champ aléatoire de la vitesse spectrale, des conditions initiales sur les amplitudes reflétant un état turbulent. D'un côté, l'initialisation isotrope d'un système d'équations pour le tenseur spectral peut se faire aisément en spécifiant quatre fonctions déterministes. D'un autre côté, les conditions initiales d'un système d'équations sur les amplitudes doivent être statistiquement aléatoires et en même temps correspondre à un champ de vitesse physique turbulent. La vérification de la première contrainte est du domaine du possible, mais imposer la deuxième pose plus de problèmes. Ainsi, on préfère travailler sur les moments d'ordre 2, qui ne font intervenir que des fonctions déterministes.

## 5.2.3 Amplitudes $A_{ss'}$

### 5.2.3.1 Équation d'évolution

On injecte l'expression (5.9) dans (3.34) pour écrire :

$$\sum_{(s, s') \in \{-1, 1\}^2} \frac{\partial A_{ss'}}{\partial t} N_i^{(s)} N_j^{(s')} e^{i(s+s')\omega t} = \tau_{ij} + \tau_{ji}^*. \quad (5.11)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} &= \sum_{(s,s') \in \{-1,1\}^2} \left[ \frac{\partial A_{ss'}}{\partial t} + i(s+s')\omega A_{ss'} \right] N_i^{(s)} N_j^{(s')} e^{i(s+s')\omega t}, \\ \text{et } L_{im} \Phi_{mj} &= \sum_{(s,s') \in \{-1,1\}^2} -is A_{ss'} \omega N_i^{(s)} N_j^{(s')} e^{i(s+s')\omega t}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

en s'aidant de (3.88). On choisit un couple  $(s_1, s_2)$  quelconque, et on multiplie (5.11) par  $N_i^{(-s_1)} N_j^{(-s_2)}$ . En utilisant (3.53), on obtient finalement l'équation d'évolution temporelle des amplitudes :

$$\frac{\partial A_{s_1 s_2}}{\partial t} = \frac{1}{4} N_i^{(-s_1)} N_j^{(-s_2)} (\tau_{ij} + \tau_{ji}^*) e^{-i(s_1+s_2)\omega t}. \quad (5.13)$$

### 5.2.3.2 Propriétés

Les amplitudes  $A_{ss'}$  vérifient plusieurs propriétés, du fait des symétries de  $\Phi_{ij}$ . On peut exprimer, d'après la définition (5.9),  $A_{ss'}(\mathbf{k}, t)$  en fonction de  $\Phi_{ij}$  :

$$A_{ss'}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4} e^{-i(s+s')\omega(\mathbf{k})t} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(-s')}(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (5.14)$$

en utilisant (3.53). On peut en déduire :

$$\begin{aligned} A_{ss'}^*(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4} e^{i(s+s')\omega(\mathbf{k})t} N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s')}(\mathbf{k}) \Phi_{ij}^*(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{1}{4} e^{-i(s+s')\omega(-\mathbf{k})t} N_i^{(-s)}(-\mathbf{k}) N_j^{(-s')}(-\mathbf{k}) \Phi_{ij}(-\mathbf{k}, t) \\ &= A_{ss'}(-\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (5.15)$$

et :

$$\begin{aligned} A_{ss'}^*(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4} e^{-i(-s'-s)\omega(\mathbf{k})t} N_j^{(s')}(\mathbf{k}) N_i^{(s)}(\mathbf{k}) \Phi_{ji}(\mathbf{k}, t) \\ &= A_{-s'-s}(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

ce qui donne finalement :

$$A_{ss'}^*(\mathbf{k}, t) = A_{ss'}(-\mathbf{k}, t) = A_{-s'-s}(\mathbf{k}, t). \quad (5.17)$$

En particulier, on a :

$$A_{11}^*(\mathbf{k}, t) = A_{-1-1}(\mathbf{k}, t), \quad (5.18)$$

et en posant :

$$a_s(\mathbf{k}, t) = A_{s-s}(\mathbf{k}, t), \quad (5.19)$$

on en conclut que les  $a_s(\mathbf{k}, t)$  sont des quantités réelles, ces deux dernières relations étant utiles par la suite.

## 5.2.4 Interprétation spectrale

Les amplitudes  $A_{ss'}(\mathbf{k}, t)$  sont directement liées aux grandeurs  $e(\mathbf{k}, t)$ ,  $h(\mathbf{k}, t)$  et  $z(\mathbf{k}, t)$ , si on utilise (5.9).

### 5.2.4.1 Lien avec $e$ , $z$ et $h$

On remarque que :

$$\begin{aligned} e(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) \\ &= A_{1-1}(\mathbf{k}, t) + A_{-11}(\mathbf{k}, t) \\ &= a_1(\mathbf{k}, t) + a_{-1}(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.20)$$

De plus, d'après (3.62b), on obtient :

$$\begin{aligned} z(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \\ &= 2A_{-1-1}(\mathbf{k}, t) e^{-2i\omega(\mathbf{k})t}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Enfin, d'après (3.62c) et (3.59), on a :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{k}, t) &= -\frac{1}{2} i \frac{k_l}{k} \varepsilon_{lij} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \\ &= -\frac{1}{4} [N_i^*(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k}) - N_i(\mathbf{k}) N_j^*(\mathbf{k})] \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \\ &= A_{-11}(\mathbf{k}, t) - A_{1-1}(\mathbf{k}, t) \\ &= a_{-1}(\mathbf{k}, t) - a_1(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ainsi, la connaissance de  $e$ ,  $z$  et  $h$  es strictement équivalent à celle de  $a_1$ ,  $a_{-1}$  et  $A_{-1-1}$ .

### 5.2.4.2 Relations inverses

En inversant (5.20), (5.22) et (5.21), on obtient les trois relations suivantes :

$$A_{1-1}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} [e(\mathbf{k}, t) - h(\mathbf{k}, t)], \quad (5.23)$$

$$A_{-11}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} [e(\mathbf{k}, t) + h(\mathbf{k}, t)], \quad (5.24)$$

$$A_{-1-1}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} z(\mathbf{k}, t) e^{2i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (5.25)$$

$$A_{11}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} z^*(\mathbf{k}, t) e^{-2i\omega(\mathbf{k})t}. \quad (5.26)$$

On voit ici encore que les trois grandeurs  $e$ ,  $z$  et  $h$  suffisent pour décrire complètement le tenseur spectral  $\Phi_{ij}$  en turbulence homogène.

### 5.3 Expression du terme de transfert

On cherche maintenant à transformer le terme  $\tau_{ij}$ , qui ne fait intervenir que les corrélations triples, de façon à l'exprimer en fonction des corrélations doubles et donc des  $A_{ss'}$ , grâce en partie à la modélisation EDQNM. On rappelle que  $\Theta_{ilm}$  s'exprime en fonction des moments spectraux d'ordre 3,  $\Gamma_{ilm}$  par la relation (3.31) :

$$\Theta_{ilm}(\mathbf{k}, t) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}'', \quad (5.27)$$

avec  $\Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \overline{\tilde{u}_i(\mathbf{k}, t) \tilde{u}_l(\mathbf{k}', t) \tilde{u}_m(\mathbf{k}'', t)}$ ,

et c'est sur ce tenseur que l'on va appliquer la modélisation EDQN.

#### 5.3.1 Hypothèses EDQN

On reprend une partie des hypothèses du modèle EDQNM pour débiter l'analyse.

##### 5.3.1.1 Modélisation des corrélations triples

On utilise maintenant une modélisation EDQN, sans Markovianisation, pour le tenseur  $\Gamma_{ilm}$  des corrélations spectrales triples, et d'après (4.31), on obtient :

$$\Gamma_{ilm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = \int_{-\infty}^t \Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t, t') F_{pqr}^{(QN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t') dt', \quad (5.28)$$

où

$$\Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t, t') = G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') G_{lq}^{(ED)}(\mathbf{k}', t, t') G_{mr}^{(ED)}(\mathbf{k}'', t, t'), \quad (5.29)$$

et  $F_{pqr}^{(QN)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t') = -i\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \sum_{\substack{(p,q,r) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t') \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t').$

(5.30)

On rappelle que la sommation s'entend par permutation circulaire conjointe des triplets  $(p, q, r)$  et  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ . Il faut noter que l'on a utilisé, d'après (5.29), la décroissance exponentielle en  $(t - t')$  de  $\Lambda_{ilm;pqr}^{(ED)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t, t')$ , ce qui permet de négliger la contribution des conditions initiales, et d'étendre l'intégration de  $[0, t]$  à  $]-\infty, t]$ . La combinaison de (5.3), (5.27), (5.28), (5.29) et (5.30) donne :

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(EDQN)}(\mathbf{k}, t) &= \iint_{-\infty}^t G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') G_{lq}^{(ED)}(\mathbf{k}', t, t') G_{mr}^{(ED)}(\mathbf{k}'', t, t') P_{jlm}(\mathbf{k}) \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\substack{(p,q,r) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t') \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t') dt' d^3 \mathbf{k}', \end{aligned} \quad (5.31)$$

avec  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  dans la suite.

## 5.3.1.2 Symétrisation

Or :

$$\sum_{\substack{(p,q,r) \\ (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t') \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t') = P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t') \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t') \\ + P_{rkn}(\mathbf{k}'') \Phi_{pk}(\mathbf{k}, t') \Phi_{qn}(\mathbf{k}', t') + P_{qkn}(\mathbf{k}') \Phi_{rk}(\mathbf{k}'', t') \Phi_{pn}(\mathbf{k}, t'). \quad (5.32)$$

ce qui transforme l'intégrale de (5.31) en trois intégrales, notées (I), (II) et (III) respectivement. On veut alors factoriser  $\Phi_{qk}(\mathbf{k}', t')$  dans chacune d'elles. L'intégrale (I) a déjà une forme correcte. Pour l'intégrale (II), en utilisant les propriétés de symétrie de  $P_{rkn}$  et en échangeant les indices muets  $k$  et  $n$ , on obtient :

$$P_{rkn}(\mathbf{k}'') \Phi_{pk}(\mathbf{k}, t') \Phi_{qn}(\mathbf{k}', t') = P_{rkn}(\mathbf{k}'') \Phi_{pn}(\mathbf{k}, t') \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t'). \quad (5.33)$$

Pour l'intégrale (III), on travaille sur l'intégrale complète. En échangeant les indices  $q$  et  $r$ , et en effectuant le changement de variable  $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , on obtient que (III) = (II). D'où finalement l'expression suivante :

$$\tau_{ij}^{(EDQN)}(\mathbf{k}, t) = \iint_{-\infty}^t G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') G_{lq}^{(ED)}(\mathbf{k}', t, t') G_{mr}^{(ED)}(\mathbf{k}'', t, t') P_{jlm}(\mathbf{k}) \Phi_{qk}(\mathbf{k}', t') \\ \left[ \frac{1}{2} P_{pkn}(\mathbf{k}) \Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t') + P_{rkn}(\mathbf{k}'') \Phi_{pn}(\mathbf{k}, t') \right] dt' d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.34)$$

## 5.3.2 Markovianisation

On considère maintenant que les amplitudes  $A_{ss'}$  restent constantes sur  $] -\infty, t]$ , égales à leur valeur en  $t' = t$ . On peut remarquer que le fait de considérer que, dans le tenseur spectral, seules les amplitudes varient lentement revient à dire que seuls  $e$ ,  $Z$  et  $h$  varient lentement, ce qui constitue exactement le modèle EDQNM3. On fait la même hypothèse d'évolution lente sur l'amortissement tourbillonnaire, car c'est un petit paramètre dans la limite  $Ro_L \ll 1$ .

 5.3.2.1 Tenseur  $G_{ij}^{(ED)}$ 

On obtient :

$$G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') \\ = e^{-\int_{t'}^t d(\mathbf{k}, t'') dt''} G_{ip}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t') \\ = e^{-d(\mathbf{k}, t)(t-t')} G_{ip}^{(RDT)}(\mathbf{k}, t - t') \\ = \frac{1}{2} \left[ N_i(\mathbf{k}) N_p^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k}) - d(\mathbf{k})(t-t')} + N_i^*(\mathbf{k}) N_p(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k}) - d(\mathbf{k})(t-t')} \right], \quad (5.35)$$

en remarquant que  $G_{ip}^{(ED)}$  redevient une fonction de  $t - t'$ . En raisonnant de même sur  $G_{lq}^{(ED)}$  et  $G_{mr}^{(ED)}$ , on arrive à :

$$\begin{aligned}
 & G_{ip}^{(ED)}(\mathbf{k}, t, t') G_{lq}^{(ED)}(\mathbf{k}', t, t') G_{mr}^{(ED)}(\mathbf{k}'', t, t') \\
 = & \frac{1}{8} \sum_{s, s', s''} N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_q^{(-s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\
 & \exp \{ [i(s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')) - \delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)] (t - t') \}, \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

où  $\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = d(\mathbf{k}, t) + d(\mathbf{k}', t) + d(\mathbf{k}'', t) = \delta$  est l'amortissement tourbillonnaire total. On discutera du choix de ce paramètre en fin de section.

### 5.3.2.2 Conséquences sur $\tau_{ij}$

On injecte l'expression (5.36) dans (5.34), on y remplace  $\Phi_{qk}(\mathbf{k}', t')$ ,  $\Phi_{rn}(\mathbf{k}'', t')$  et  $\Phi_{pm}(\mathbf{k}, t')$  par leur expression en fonction des  $A_{ss'}$ , et on utilise enfin la propriété (3.53) pour trouver :

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij}^{(EDQNM3)}(\mathbf{k}, t) = & \frac{1}{2} \sum_{s, s', s'', s_3, s_4} P_{jlm}(\mathbf{k}) \iint_{-\infty}^t e^{[i(s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')) - \delta](t - t')} \\
 & e^{i(s' + s_3)\omega(\mathbf{k}')t'} N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_k^{(s_3)}(\mathbf{k}') A_{s's_3}(\mathbf{k}', t') \\
 & \left[ e^{i(s'' + s_4)\omega(\mathbf{k}'')t'} \frac{1}{2} P_{pkn}(\mathbf{k}) A_{s''s_4}(\mathbf{k}'', t') N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}'') \right. \\
 & \left. + e^{i(s + s_4)\omega(\mathbf{k})t'} P_{rkn}(\mathbf{k}'') A_{ss_4}(\mathbf{k}, t') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}) \right] dt' d^3\mathbf{k}'. \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

Les intégrales spatiale et temporelle sont séparables. Celles sur  $t'$  ne faisant intervenir que des exponentielles complexes, on peut donc les calculer :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^t e^{[i(s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')) - \delta](t - t')} e^{i(s' + s_3)\omega(\mathbf{k}')t'} e^{i(s'' + s_4)\omega(\mathbf{k}'')t'} dt' \\
 = & \frac{e^{i(s' + s_3)\omega(\mathbf{k}')t} e^{i(s'' + s_4)\omega(\mathbf{k}'')t}}{\delta - i[s\omega(\mathbf{k}) - s_3\omega(\mathbf{k}') - s_4\omega(\mathbf{k}'')]} \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^t e^{[i(s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')) - \delta](t - t')} e^{i(s' + s_3)\omega(\mathbf{k}')t'} e^{i(s + s_4)\omega(\mathbf{k})t'} dt' \\
 = & \frac{e^{i(s' + s_3)\omega(\mathbf{k}')t} e^{i(s + s_4)\omega(\mathbf{k})t}}{\delta - i[s''\omega(\mathbf{k}'') - s_3\omega(\mathbf{k}') - s_4\omega(\mathbf{k})]} \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

On en déduit une nouvelle expression pour  $\tau_{ij}$  :

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij}^{(EDQNM3)}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{s, s', s'', s_3, s_4} P_{jlm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \\
 & N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_k^{(s_3)}(\mathbf{k}') A_{s's_3}(\mathbf{k}', t) e^{i(s'+s_3)\omega(\mathbf{k}')t} \\
 & \left[ \frac{1}{2} \frac{P_{pkn}(\mathbf{k}) A_{s''s_4}(\mathbf{k}'', t) N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}'') e^{i(s''+s_4)\omega(\mathbf{k}'')t}}{\delta - i[s\omega(\mathbf{k}) - s_3\omega(\mathbf{k}') - s_4\omega(\mathbf{k}'')]} \right. \\
 & \left. + \frac{P_{rkn}(\mathbf{k}'') A_{ss_4}(\mathbf{k}, t) N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}) e^{i(s+s_4)\omega(\mathbf{k})t}}{\delta - i[s''\omega(\mathbf{k}'') - s_3\omega(\mathbf{k}') - s_4\omega(\mathbf{k})]} \right] d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

Cette analyse correspond au modèle EDQNM3, plus consistant que les précédents dans le sens où l'étape de markovianisation a des justifications physiques concrètes si la turbulence est faible devant la rotation. La markovianisation est non pas appliquée indistinctement à tout un groupe de termes, mais ciblée sur des quantités bien spécifiques. Pour finir, les expressions (5.13) et (5.40) donnent un système d'équations intégro-différentielles fermé en les  $A_{ss'}$ .

### 5.3.3 Contraintes sur $\delta$

Dans la limite d'un faible nombre de Rossby, le choix de ce paramètre ne peut pas se faire au hasard. Il doit d'abord vérifier certaines contraintes propres au modèle EDQNM, duquel il provient, et ensuite avoir d'autres propriétés liées au modèle AQNM. Le modèle EDQNM impose tout d'abord que  $\delta^{-1}$  soit de l'ordre du temps de retournement des tourbillons sans rotation. C'est un effet non linéaire traduisant l'amortissement tourbillonnaire, et qui doit donc avoir un temps caractéristique plus grand que celui lié aux effets linéaires aux grandes échelles.

De plus, à grande échelle, et comme  $Ro_L \ll 1$ , on doit avoir  $\delta \ll \Omega$ . On a absolument besoin de cette propriété pour effectuer l'analyse asymptotique qui va suivre. Deux problèmes se posent : en choisissant l'expression (4.34), on s'aperçoit d'abord que  $d$  croît avec  $k$ , ce qui peut amener  $\delta$  à dépasser  $\Omega$ . De même, la viscosité, que l'on a négligée jusqu'à présent, peut produire le même effet. Si on avait gardé la viscosité depuis le début de l'analyse, le terme (5.40) aurait une expression légèrement différente. On aurait eu un amortissement total de la forme :

$$\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t) = d(\mathbf{k}, t) + d(\mathbf{k}', t) + d(\mathbf{k}'', t) + \nu (k^2 + k'^2 + k''^2). \quad (5.41)$$

On a choisi de se concentrer sur les grandes échelles, donc  $k$  est petit. Cela permet de négliger la viscosité  $\nu k^2$ , et cela n'entraîne pas une valeur trop importante pour  $d(\mathbf{k}, t)$ . Reste que  $k'$  peut prendre des valeurs quelconques, car l'intégration se fait sur tout l'espace. Si  $k'$  est suffisamment petit, alors comme on a  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  par définition, on a aussi que  $k''$  est suffisamment petit : l'ensemble des termes visqueux est négligeable, et les amortissements tourbillonnaires restent raisonnables. Si  $k'$  est plus grand, il faut invoquer un autre argument, car alors  $\delta$  peut facilement dépasser  $\Omega$ , même si  $k''$  est petit. Le plus cohérent est de dire que les interactions non locales entre triplets de vecteurs d'ondes apportent une contribution négligeable au terme

de transfert, comparée à celle produite par les interactions locales. Donc, même si l'amortissement total prend une valeur importante dans l'intégrande de (5.40), elle est fortement diminuée par les autres termes, via les amplitudes. Ces remarques constituent donc une justification de la non prise en compte de la viscosité dans l'analyse, et permettent de considérer que  $\delta \ll \Omega$  pour tous les triplets de vecteurs d'ondes.

## 5.4 Analyse asymptotique

### 5.4.1 Échelle de temps

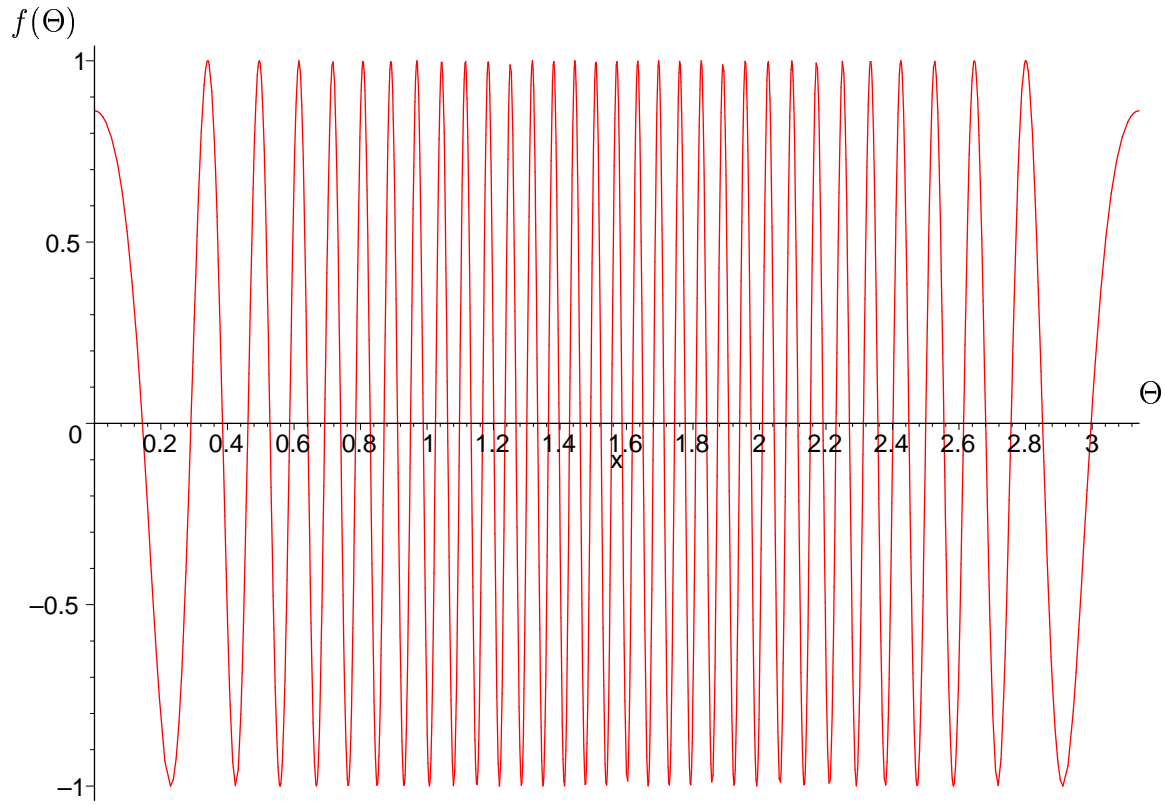
On s'est placé, depuis le début de l'analyse, dans le cas où le nombre de Rossby était très petit devant 1, ce qui implique que le temps caractéristique de la rotation est très inférieur au temps caractéristique des effets non linéaires sans rotation. On ne sait en effet pas sur quelle échelle de temps la non-linéarité avec rotation va se manifester : ses effets devraient se faire sentir sur une échelle de temps plus grande que celle attendue sans rotation. Donc pour des temps  $t \ll \Omega^{-1}$ , la rotation domine les grandes échelles, et on peut négliger les effets non linéaires : la théorie linéaire s'applique à ces échelles. Comme on suppose de plus que les petites échelles contiennent très peu d'énergie initialement, on peut dire que l'écoulement ne subit que des effets linéaires. On a vu qu'alors toutes les composantes du tenseur spectral  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$  décroissent sous l'effet de la viscosité, et de manière exponentielle. Le choix ultérieur d'un spectre d'énergie initiale isotrope impliquera qu'il restera isotrope après la phase de décroissance visqueuse linéaire. On ne considère donc, dans la suite, que les temps tels que  $\Omega t \gg 1$ , à partir desquels la non linéarité se manifeste significativement.

### 5.4.2 Termes rapidement oscillants

Dans l'intégrande de (5.40), la dépendance temporelle se manifeste via des termes de la forme  $\exp[i\alpha(\cos\Theta)\Omega t]$ , où  $\Theta$  est l'angle que fait  $\mathbf{k}'$  ou  $\mathbf{k}''$  avec  $\boldsymbol{\Omega}$ . On peut alors décomposer chacune de ces exponentielles sous la forme d'un cosinus et d'un sinus réels. Tant que  $\alpha$  est non nul, et comme  $\Omega t$  est grand, on obtient ainsi des termes rapidement oscillants en  $\Theta$ , lorsque l'angle décrit  $[0, \pi]$ . La figure 5.1 donne un aperçu de  $\frac{1}{\Omega t} \cos(100 \cos\Theta)$  sur  $[0, \pi]$ . On décide alors de négliger dans (5.40) les termes rapidement oscillants en  $\mathbf{k}'$ , car leur intégrale sur tout l'espace est presque nulle. On peut, comme on l'a vu précédemment, imaginer un couplage en  $\Theta$  des sinusoïdes qui vont se compenser deux à deux. Comme  $\Omega t$  est grand, la méthode de la phase stationnaire peut aussi être utilisée pour prouver la décroissance rapide en temps de ces termes, et ainsi justifier que l'on peut les négliger. De plus, il est clair que comme  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , on peut aussi négliger les termes rapidement oscillants en  $\mathbf{k}''$ . Ne vont donc subsister que les termes pour lesquels  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire les termes "stationnaires" faisant intervenir  $\omega(\mathbf{k}')$  ou  $\omega(\mathbf{k}'')$ .

Cela revient à ne conserver, pour  $s'$  et  $s''$  fixés, que les termes pour lesquels




 FIG. 5.1 – Allure sur  $[0, \pi]$  de la fonction  $f : \Theta \mapsto \cos(100 \cos \Theta)$ 

$s_3 = -s'$  et  $s_4 = -s''$  :

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij}^{(AQNM)}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4} \sum_{s, s', s''} P_{jlm}(\mathbf{k}) N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) \\
 &\int_{\mathbb{R}^3} N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') A_{s'-s'}(\mathbf{k}', t) \frac{P_{pkn}(\mathbf{k}) A_{s''-s''}(\mathbf{k}'', t) N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'')}{\delta - i[s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')]} d^3 \mathbf{k}' \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{s', s''} P_{jlm}(\mathbf{k}) N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}) \sum_{s, s_4} A_{ss_4}(\mathbf{k}, t) e^{i(s+s_4)\omega(\mathbf{k})t} \\
 &\int_{\mathbb{R}^3} N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') A_{s'-s'}(\mathbf{k}', t) \frac{P_{rkn}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'')}{\delta - i[s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'') - s_4\omega(\mathbf{k})]} d^3 \mathbf{k}',
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

où on voit à nouveau apparaître les surfaces résonantes. On fait le changement d'indice  $s \rightarrow s_3$  dans la deuxième somme, et on obtient :

$$\tau_{ij}^{(AQNM)} = \zeta_{ij} + \sum_{s_3, s_4} I_{ij; s_3 s_4} A_{s_3 s_4} e^{i(s_3 + s_4)\omega t}, \tag{5.43}$$

avec :

$$\zeta_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{s,s',s''} P_{jlm}(\mathbf{k}) P_{pkn}(\mathbf{k}) N_i^{(s)}(\mathbf{k}) N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \frac{a_{s'}(\mathbf{k}', t) a_{s''}(\mathbf{k}'', t)}{\delta - i[s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')]} d^3\mathbf{k}', \quad (5.44)$$

et :

$$I_{ij;s_3s_4} = \frac{1}{2} \sum_{s',s''} P_{jlm}(\mathbf{k}) N_i^{(s_3)}(\mathbf{k}) N_n^{(s_4)}(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^3} N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \frac{P_{rkn}(\mathbf{k}'') a_{s'}(\mathbf{k}', t)}{\delta - i[s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'') - s_4\omega(\mathbf{k})]} d^3\mathbf{k}'. \quad (5.45)$$

Les termes  $\zeta_{ij}$  et  $I_{ij;s_3s_4}$  sont, comme les  $A_{s_1s_2}$ , des termes évoluant lentement en temps. La décomposition (5.43) fait donc apparaître explicitement la dépendance en temps rapide du terme de transfert  $\tau_{ij}$ .

## 5.5 Équations d'évolution des amplitudes

Maintenant que l'on a obtenu la forme asymptotique de  $\tau_{ij}$ , grâce à (5.43), on peut obtenir également l'équation intégrô-différentielle asymptotique régissant l'évolution des  $A_{s_1s_2}$ . Les quatre équations d'évolution que l'on peut écrire ne sont pas toutes intéressantes : en effet, on cherche à déterminer, en fin d'analyse, les évolutions de l'énergie spectrale  $e(\mathbf{k}, t)$ , de "l'hélicité"  $h(\mathbf{k}, t)$  et du facteur d'anisotropie  $z(\mathbf{k}, t)$ . On va donc se concentrer par la suite sur les  $a_s(\mathbf{k}, t)$  et sur  $A_{-1-1}(\mathbf{k}, t)$ , ce dernier ne contenant l'information que sur la partie lente de  $z(\mathbf{k}, t)$ .

### 5.5.1 Évolution temporelle de $a_s$

L'équation (5.13) donne, en  $s_1 = s$  et  $s_2 = -s$  :

$$\frac{\partial a_s}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s)}(\mathbf{k}) (\tau_{ij} + \tau_{ji}^*)^{(AQNM)}(\mathbf{k}, t). \quad (5.46)$$

Le membre de droite de cette expression contient des termes rapidement oscillants en temps cette fois-ci. Or l'analyse multi-échelles s'intéresse à des temps lents, et le développement asymptotique est aussi valable pour la dérivée de  $a_s$ . On ne s'intéresse donc pas à la contribution de ces termes oscillants car leurs amplitudes sont petites, et surtout car ils ont tendance à s'annuler deux à deux par intégration temporelle de (5.46). On peut donc se permettre de négliger tous les termes rapidement oscillants en temps dans  $\tau_{ij} + \tau_{ji}^*$ , qui vaut alors :

$$(\tau_{ij} + \tau_{ji}^*)^{(AQNM)} = (\zeta_{ij} + \zeta_{ji}^*) + \sum_{s_3} [I_{ij;s_3-s_3} + I_{ji;s_3-s_3}^*] a_{s_3}. \quad (5.47)$$

Il s'agit maintenant d'exprimer les différents termes de cette expression en fonction des amplitudes  $a_s$  explicitement.

5.5.1.1 Partie  $\zeta$ 

On a d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{8} \sum_{s', s''} P_{jlm}(\mathbf{k})P_{pkn}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) \\ &\int_{\mathbb{R}^3} N_k^{(-s')}(\mathbf{k}')N_l^{(s')}(\mathbf{k}')N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'')N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \frac{a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_{s''}(\mathbf{k}'', t)}{\delta - i[s\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'')]} d^3\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (5.48)$$

par contraction de l'indice  $i$ . On fait les changements d'indices  $s' \rightarrow ss'$  et  $s'' \rightarrow ss''$ , ces nouveaux indices décrivant aussi  $\{-1, 1\}$ , et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{8} \sum_{s', s''} P_{jlm}(\mathbf{k})P_{pkn}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) \\ &\int_{\mathbb{R}^3} N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'')N_n^{(-ss'')}(\mathbf{k}'') \frac{a_{ss'}(\mathbf{k}', t)a_{ss''}(\mathbf{k}'', t)}{\delta - isF_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')} d^3\mathbf{k}', \end{aligned} \quad (5.49)$$

où on a noté :

$$F_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}''), \quad (5.50)$$

la *fonction résonante*. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{8} \sum_{s', s''} P_{jlm}(\mathbf{k})P_{pkn}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k}) \\ &\int_{\mathbb{R}^3} N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'')N_n^{(-ss'')}(\mathbf{k}'') a_{ss'}(\mathbf{k}', t)a_{ss''}(\mathbf{k}'', t) \frac{\delta + isF_{s's''}}{\delta^2 + F_{s's''}^2} d^3\mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Les  $a_s$  étant réels, on vérifie facilement la relation :

$$\frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})\zeta_{ji}^*(\mathbf{k}, t) = \left[ \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})\zeta_{ij}(\mathbf{k}, t) \right]^*. \quad (5.52)$$

La somme de (5.51) et (5.52) donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})[\zeta_{ij} + \zeta_{ji}^*](\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{4} \sum_{s', s''} \Re \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \right. \\ &P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'')P_{pkn}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k})N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_n^{(-ss'')}(\mathbf{k}'') \\ &\left. a_{ss'}(\mathbf{k}', t)a_{ss''}(\mathbf{k}'', t) \frac{\delta + isF_{s's''}}{\delta^2 + F_{s's''}^2} d^3\mathbf{k}' \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Or, pour  $s'$  et  $s''$  fixés :

$$P_{pkn}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k})N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_n^{(-ss'')}(\mathbf{k}'') = \left[ P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'') \right]^*, \quad (5.54)$$

donc :

$$\begin{aligned}
 & P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'')P_{pkn}(\mathbf{k})N_p^{(-s)}(\mathbf{k})N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_n^{(-ss'')}(\mathbf{k}'') \\
 &= \left| P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'') \right|^2 \\
 &= \left| P_{jlm}(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})N_l^{(s')}(\mathbf{k}')N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') \right|^2 \\
 &= 8\gamma_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''), \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

où on a noté :

$$\gamma_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \frac{1}{8} \left| P_{jlm}(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})N_l^{(s')}(\mathbf{k}')N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') \right|^2. \tag{5.56}$$

L'équation (5.53) devient alors :

$$\frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})[\zeta_{ij} + \zeta_{ji}^*](\mathbf{k}, t) = 2 \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta \gamma_{s's''}}{\delta^2 + F_{s's''}^2} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) a_{ss''}(\mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}'. \tag{5.57}$$

### 5.5.1.2 Partie I

On calcule maintenant, d'après (5.46) et (5.47) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})I_{ij;s_3-s_3}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4}\delta_{ss_3} \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \\
 & P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(s')}(\mathbf{k}')N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'')P_{rkn}(\mathbf{k}'')N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'')N_k^{(-s')}(\mathbf{k}')N_n^{(-s_3)}(\mathbf{k}) \\
 & \frac{a_{s'}(\mathbf{k}', t)}{\delta - i[s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'') + s_3\omega(\mathbf{k})]} d^3 \mathbf{k}', \tag{5.58}
 \end{aligned}$$

avec  $\delta_{ss_3}$  le symbole de Kronecker. En réduisant la somme à  $s_3 = s$ , puis, pour faire apparaître ici aussi  $F_{s's''}$ , on fait les changements d'indices  $s' \rightarrow ss'$  et  $s'' \rightarrow ss''$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} I_{ij;s_3-s_3}(\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4} \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \\
 & P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k})N_l^{(ss')}(\mathbf{k}')N_m^{(ss'')}(\mathbf{k}'')P_{rkn}(\mathbf{k}'')N_r^{(-ss'')}(\mathbf{k}'')N_k^{(-ss')}(\mathbf{k}')N_n^{(-s)}(\mathbf{k}) \\
 & \frac{a_{ss'}(\mathbf{k}', t) a_s(\mathbf{k}, t)}{\delta - isF_{s's''}} d^3 \mathbf{k}'. \tag{5.59}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si on pose :

$$\begin{aligned}
 & g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\
 &= -\frac{1}{4}P_{jlm}(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})N_l^{(s')}(\mathbf{k}')N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'')P_{rkn}(\mathbf{k}'')N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'')N_k^{(-s')}(\mathbf{k}')N_n^*(\mathbf{k}), \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4}N_i^{(-s)}(\mathbf{k})N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} I_{ij;s_3-s_3}(\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) \\
 &= -a_s(\mathbf{k}, t) \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} g_{s's''}^{(s)} \frac{\delta + isF_{s's''}}{\delta^2 + F_{s's''}^2} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \tag{5.61}
 \end{aligned}$$

Pour le terme conjugué, on utilise le résultat :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} I_{ji;s_3-s_3}^*(\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) \\ &= \left[ \frac{1}{4} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} I_{ij;s_3-s_3}(\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) \right]^*, \end{aligned} \quad (5.62)$$

pour conclure finalement que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} [I_{ij;s_3-s_3} + I_{ji;s_3-s_3}^*](\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) \\ &= 2 \Re \left[ -a_s(\mathbf{k}, t) \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} g_{s' s''}^{(s)} \frac{\delta + i s F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{s s'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

On admet pour l'instant que  $g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  est réel, car la démonstration nécessite de nombreux calculs intermédiaires, qui seront effectués en section 5.9.1. On en déduit alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} N_i^{(-s)}(\mathbf{k}) N_j^{(s)}(\mathbf{k}) \sum_{s_3} [I_{ij;s_3-s_3} + I_{ji;s_3-s_3}^*](\mathbf{k}, t) a_{s_3}(\mathbf{k}, t) \\ &= -2 a_s(\mathbf{k}, t) \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta g_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{s s'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (5.64)$$

### 5.5.1.3 Équation d'évolution de $a_s$

Les expressions (5.46), (5.47), (5.57) et (5.64) permettent de décrire l'évolution temporelle de  $a_s$  :

$$\frac{\partial a_s}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = B_s(\mathbf{k}, t) a_s(\mathbf{k}, t) + C_s(\mathbf{k}, t), \quad (5.65)$$

avec :

$$B_s(\mathbf{k}, t) = -2 \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} g_{s' s''} \frac{\delta}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{s s'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.66)$$

$$C_s(\mathbf{k}, t) = 2 \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \gamma_{s' s''} \frac{\delta}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{s s'}(\mathbf{k}', t) a_{s s''}(\mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.67)$$

## 5.5.2 Évolution temporelle de $A_{-1-1}$

On pose  $Z = A_{-1-1}$ , qui correspond à la partie lente de  $z$ , d'après (5.21). L'équation (5.13) en  $s_1 = s_2 = -1$  donne :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4} N_i(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k}) (\tau_{ij} + \tau_{ji}^*)(\mathbf{k}, t) e^{2i\omega(\mathbf{k})t}, \quad (5.68)$$

et il faut à nouveau exprimer le terme non linéaire en fonction de  $Z$ .

### 5.5.2.1 Terme non linéaire

Avec (5.43), et en enlevant les termes à évolution rapide, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})\tau_{ij}(\mathbf{k}, t)e^{2i\omega(\mathbf{k})t} &= \frac{1}{4}N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})I_{ij;-1-1}(\mathbf{k}, t)Z(\mathbf{k}, t) \\ &= -\sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''} [\delta + iF_{s' s''}]}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{s'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (5.69)$$

De même, comme  $A_{11}^*(\mathbf{k}, t) = A_{-1-1}(\mathbf{k}, t)$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{4}N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})\tau_{ji}^*(\mathbf{k}, t)e^{2i\omega(\mathbf{k})t} = \frac{1}{4}N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})I_{ji;11}^*(\mathbf{k}, t)Z(\mathbf{k}, t). \quad (5.70)$$

De là, en faisant les changements d'indices  $s' \rightarrow -s'$  et  $s'' \rightarrow s''$  dans l'expression de  $I_{ji;11}^*(\mathbf{k}, t)$ , on en déduit :

$$\frac{1}{4}N_i(\mathbf{k})N_j(\mathbf{k})\tau_{ji}^*(\mathbf{k}, t)e^{2i\omega(\mathbf{k})t} = -\sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''} [\delta + iF_{s' s''}]}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} a_{-s'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.71)$$

### 5.5.2.2 Équation d'évolution de $Z$

Finalement, la réunion de (5.69) et (5.71), que l'on remplace dans (5.68), donne :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = D(\mathbf{k}, t)Z(\mathbf{k}, t) \quad (5.72)$$

$$\text{avec } D(\mathbf{k}, t) = -\sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} g_{s' s''} \frac{\delta + iF_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.73)$$

où on a utilisé (5.20).

## 5.6 Limite $\delta \rightarrow 0$ et surfaces résonantes

On a vu précédemment que l'analyse asymptotique en petit nombre de Rossby induisait que la rotation est l'effet dominant sur des échelles de temps de l'ordre de  $\Omega^{-1}$ . De fait, les effets non linéaires, comme l'amortissement tourbillonnaire, doivent avoir des temps caractéristiques grands devant  $\Omega^{-1}$ , ce qui implique que  $\delta \ll \Omega$ . La limite asymptotique  $Ro \rightarrow 0$  correspond donc à  $\delta \rightarrow 0$  : l'objectif est donc d'obtenir la limite, quand  $\delta$  tend vers zéro, des intégrales intervenant dans les équations pour les amplitudes (5.66), (5.67) et (5.73). On considérera, dans la suite, que  $\delta$  représente l'ordre de grandeur maximum de  $\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', t)$  ; il est équivalent de considérer  $\delta$  comme une constante, que l'on veut faire tendre vers 0.

### 5.6.1 Prédominance des surfaces résonantes

On fixe  $\mathbf{k}, t$  et  $(s', s'')$ . On définit les fonctions :

$$g : \mathbf{p} \mapsto g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (5.74)$$

$$\text{et } F : \mathbf{p} \mapsto F_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (5.75)$$

On raisonne par la suite sur l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta^2 + F(\mathbf{p})^2} a_{s's'}(\mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}, \quad (5.76)$$

qui provient de l'expression (5.66) de  $B_s(\mathbf{k}, t)$ . Le raisonnement est identique pour  $C_s(\mathbf{k}, t)$  et  $\Re [D(\mathbf{k}, t)]$ .

Si on s'intéresse au terme  $\delta^2 + F^2$  au dénominateur de l'intégrande on s'aperçoit que  $F^2 \sim \Omega^2 \gg \delta^2$ . Ainsi, le dénominateur est de l'ordre de  $F^2$ , et on voit clairement que les nombres d'ondes  $\mathbf{p}$  tels que  $F(\mathbf{p}) = F_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, -\mathbf{k} - \mathbf{p}) = \omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{p}) + s''\omega(-\mathbf{k} - \mathbf{p}) = 0$ , vont apporter une contribution dominante à chacune des trois intégrales. Ici encore, les surfaces résonantes semblent jouer un rôle prépondérant dans la dynamique du problème. Cependant, on ne peut pas faire tendre directement  $\delta$  vers 0. Alors que l'intégrande de départ, où  $\delta$  est non nul, ne contient pas de singularité, on en ferait alors artificiellement apparaître une, et ce quand le vecteur  $\mathbf{p}$  se trouverait près d'une surface résonante. On va donc montrer que le passage à la limite est valide, dans le sens où on a en fait aucune singularité après intégration partielle dans la direction normale aux surfaces résonantes.

## 5.6.2 Intégrales surfaciques

La limite  $\delta \rightarrow 0$  va mettre en évidence le comportement particulier de l'intégrande de (5.76) près des surfaces résonantes, et ce, par le choix d'une description particulière de l'espace spectral. En distinguant termes singuliers et réguliers aux surfaces, et par un série d'approximations, on arrive à transformer les intégrales sur tout l'espace en intégrales surfaciques.

### 5.6.2.1 Description de l'espace spectral

On choisit un vecteur  $\mathbf{k}$  et une surface résonante, c'est-à-dire un couple  $(s', s'')$ . On a vu que la contribution dominante à l'intégrale (5.76) provient de nombres d'ondes  $\mathbf{p}$  proches de la surface résonante, du fait du comportement en Dirac de la fonction en  $\delta$ . On peut donc conclure tout d'abord que la contribution, à l'intégrale (5.76), de la partie de l'espace loin de la surface résonante va être négligeable. On se place donc, dans la suite, près de la surface résonante. On appelle alors  $V_\varepsilon$ , pour un  $\varepsilon > 0$ , la bande volumique de largeur  $2\varepsilon$  entourant la surface résonante  $F_{s's''} = 0$ .

On décrit ensuite l'espace spectral par rapport à la surface résonante, en adoptant un système de coordonnées spécifique. Il consiste tout d'abord à doter la surface d'un système de coordonnées curvilignes  $(q_1, q_2)$  d'origine et d'orientation quelconques, de façon à pouvoir repérer tout point de la surface de manière unique par un couple  $(q_1, q_2)$ . On prolonge ensuite ce système à l'espace proche de la surface résonante : à tout point à l'extérieur de la surface, on associe le point le plus proche sur la surface, et donc un couple  $(q_1, q_2)$ . La coordonnée dans cette direction sera parfois  $\xi$ , qui représente la distance du point à la surface, et parfois  $F$  qui représente la valeur de la fonction  $F_{s's''}$  en ce point. Ainsi, tout point proche de la surface est repéré par un triplet  $(q_1, q_2, \xi)$  ou  $(q_1, q_2, F)$ , mais si l'on s'écarte trop de la surface, il risque de ne plus y avoir unicité de la normale passant par le point considéré, et

la description n'est plus valable. On oriente  $\xi$  de façon à ce que  $\xi$  soit positif dans le sens des valeurs de  $F$  croissantes. De plus,  $\xi$  et  $F$  sont nulles à la surface et elles sont positives d'un même côté de la surface et négatives de l'autre.

On assimilera un vecteur  $\mathbf{p}$  de l'espace à la position de son extrémité. Par exemple, un vecteur sera sur la surface si son extrémité s'y trouve. Pour un vecteur  $\mathbf{p}$  de l'espace proche,  $\mathbf{k}'$  sera le vecteur "projeté" de la surface, de coordonnées  $(q_1, q_2)$ , et tel que  $\mathbf{p} - \mathbf{k}' = \Xi$  est perpendiculaire à la surface. On aura donc  $|\Xi| = \xi$ . La figure 5.2 donne un aperçu de l'espace spectral près de la surface résonante, et de la description que l'on va utiliser ensuite.

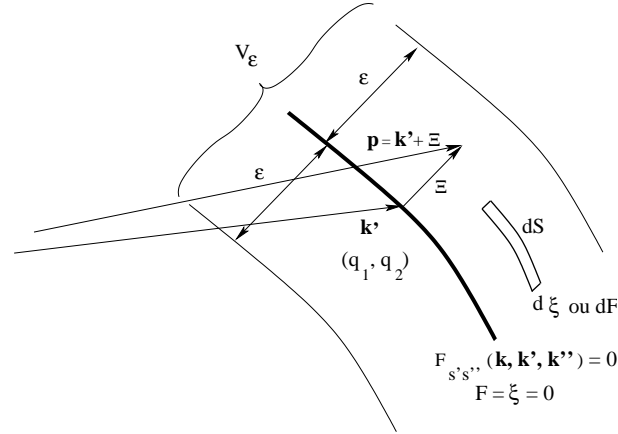


FIG. 5.2 – Systèmes de coordonnées curvilignes étendus près d'une surface résonante

### 5.6.2.2 Termes lentement variables

La fonction  $\mathbf{p} \mapsto a_{ss'}(\mathbf{p})$  est supposée continue, et  $\mathbf{p} \mapsto g(\mathbf{p})$  est une fraction rationnelle en les modules de  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  et  $-\mathbf{k} - \mathbf{p}$ , comme on le verra en section 5.9.1. Ces fonctions ne sont donc pas singulières à la surface. Près de la surface résonante, elles sont à variations lentes par rapport à la fonction en  $\delta$ , qui, comme on va le voir, se comporte comme un Dirac. Par conséquent, on peut considérer alors que :

$$g(\mathbf{p}) = g(\mathbf{k}'),$$

et

$$a_{ss'}(\mathbf{p}) = a_{ss'}(\mathbf{k}').$$

### 5.6.2.3 Développement limité de $F_{s's''}$

On va effectuer le développement limité de  $F_{s's''}$  dans la direction perpendiculaire à la surface, afin d'ôter la singularité. On suppose que l'on peut effectuer un développement de Taylor de la fonction  $F$  par rapport à sa valeur en  $\mathbf{k}'$ . On peut ne conserver que le terme d'ordre principal, car le Dirac est centré sur la surface elle-même. On obtient :

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{k}' + \Xi) = F(\mathbf{k}') + \Xi \cdot \nabla F(\mathbf{k}'). \quad (5.77)$$

Les contributions d'ordre plus élevé dans ce développement de Taylor correspondent à des résonances d'ordre supérieur, que l'on néglige donc. Or  $F(\mathbf{k}') = 0$  et, de plus,



le gradient de  $F$  est normal à la surface et donc parallèle à  $\Xi$ , d'où  $\Xi \cdot \nabla F(\mathbf{k}') = \xi |\nabla F(\mathbf{k}')|$ . Finalement :

$$F(\mathbf{p}) = \xi |\nabla F(\mathbf{k}')|. \quad (5.78)$$

En utilisant l'expression de la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$  des groupes d'inertielles, on peut exprimer le gradient de la fonction  $F$  :

$$\nabla F(\mathbf{k}') = s' \mathbf{C}(\mathbf{k}') - s'' \mathbf{C}(-\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.79)$$

déduit :

$$|\nabla F(\mathbf{k}')| = \pi \alpha_{s' s''}(\mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.80)$$

$$\text{avec } \alpha_{s' s''}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \frac{1}{\pi} |s' \mathbf{C}(\mathbf{k}') - s'' \mathbf{C}(\mathbf{k}'')|, \quad (5.81)$$

d'où l'expression :

$$F(\mathbf{p}) = \pi \alpha_{s' s''}(\mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}') \xi. \quad (5.82)$$

L'introduction de cette expression dans (5.76), moyennant la description  $(d\xi, dq_1, dq_2)$  de l'intégration volumique, va permettre de se ramener à une intégrale surfacique.

#### 5.6.2.4 Extension de l'intégration

On se place dans le système de coordonnées  $(q_1, q_2, \xi)$ , et on note  $dS$  l'aire élémentaire déterminée par  $dq_1$  et  $dq_2$ . L'intégrale (5.76) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{p}) \frac{\delta}{\delta^2 + F(\mathbf{p})^2} a_{ss'}(\mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p} \\ &= \iint \left[ \int \frac{\delta}{\delta^2 + \pi^2 \alpha_{s' s''}^2(\mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}') \xi^2} d\xi \right] g(\mathbf{k}') a_{ss'}(\mathbf{k}', t) dS, \end{aligned} \quad (5.83)$$

avec l'intégration sur  $\xi$  se faisant à travers la surface résonante.

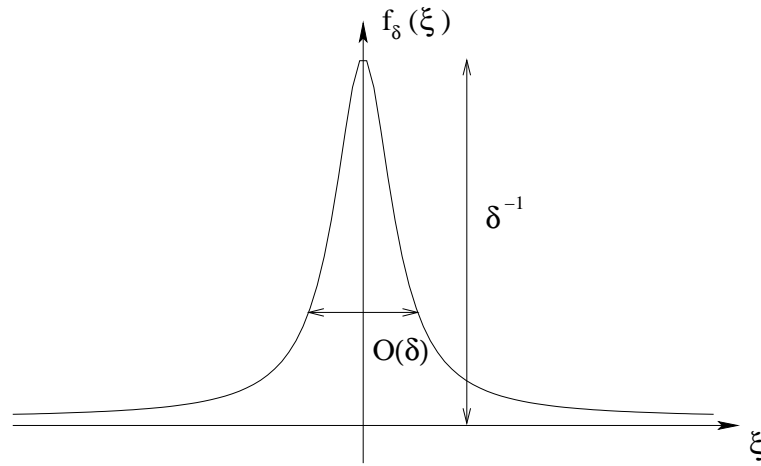
On doit donc intégrer autour de la surface résonante une fonction du type :

$$f_\delta : \xi \mapsto \frac{\delta}{\xi^2 + \delta^2}, \quad (5.84)$$

car  $\alpha = \alpha_{s' s''}(\mathbf{k}', -\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  ne dépend pas de  $\xi$ . La fonction  $f_\delta$  est paire, sa dérivée est :

$$f'_\delta : \xi \mapsto \frac{-2\delta\xi}{(\xi^2 + \delta^2)^2}, \quad (5.85)$$

et s'annule en 0. On a de plus  $f_\delta(0) = \delta^{-1}$ . Enfin, la largeur à mi-hauteur est  $2\delta$ , ce qui est de l'ordre de  $\delta$ . On donne l'allure de cette fonction sur la figure 5.3. Quand  $\delta$  tend vers 0, on s'aperçoit que cette fonction a un maximum qui tend vers  $+\infty$ , tout en ayant sa largeur à mi-hauteur qui tend vers 0. On va donc bien obtenir à la limite un Dirac centré sur la surface résonante.


 FIG. 5.3 – Allure de la fonction  $f_\delta : \xi \mapsto \frac{\delta}{\xi^2 + \delta^2}$ 

On voit que la fonction  $f_\delta$  tend rapidement (en  $\xi^{-2}$ ) vers 0 en  $\pm\infty$ , on peut donc prolonger l'intégration initialement autour de la surface en  $] -\infty, +\infty[$ , sans perdre en précision. Pour effectuer le calcul, on fait le changement de variable  $u = \pi\alpha/\delta$  dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta}{\delta^2 + \pi^2 \alpha^2 \xi^2} d\xi &= \frac{1}{\pi\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\pi}{|\nabla F(\mathbf{k}')|}. \end{aligned}$$

### 5.6.2.5 Propriété du Dirac

Avant de continuer, on se propose de démontrer une propriété de la distribution Dirac, qui va permettre de remplacer les intégrales surfaciques par des intégrales volumiques pondérées par un Dirac et la norme du gradient de la fonction de surface. Soit  $g$  et  $F$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . On veut montrer l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(F(\mathbf{k})) |\nabla F(\mathbf{k})| g(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \int_{F=0} g(\mathbf{p}) dS. \quad (5.86)$$

Le Dirac étant centré sur la surface résonante, on peut restreindre l'intégration à une bande volumique autour de la surface  $F = 0$ , car seule compte la valeur de la fonction  $g$  à la surface. On décide ainsi de développer  $F$  en série de Taylor comme on l'a fait précédemment avec les surfaces résonantes, en utilisant la distance  $\xi$  à la surface. On a donc :

$$F(\mathbf{k}) = \xi |\nabla F(\mathbf{p})|, \quad (5.87)$$

avec  $\mathbf{p}$  le vecteur le plus proche de  $\mathbf{k}$  sur la surface, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F(\mathbf{k})) |\nabla F(\mathbf{k})| g(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} &= \int_{F=0} \left[ \int \delta(F(\mathbf{k})) |\nabla F(\mathbf{p})| d\xi \right] g(\mathbf{p}) dS \\ &= \int_{F=0} \left[ \int \delta(F) dF \right] g(\mathbf{p}) dS, \end{aligned} \quad (5.88)$$

où on a considéré que  $\nabla F(\mathbf{k})$  et  $g(\mathbf{k})$  ne dépendaient pas de  $\xi$ , et où l'intégration sur  $\xi$  se fait à travers la surface  $F = 0$ . Or l'intégrale d'un Dirac vaut 1 par définition, d'où le résultat recherché, et on revient à la simplification des intégrales surfaciques.

### 5.6.2.6 Simplification de $B_s(\mathbf{k}, t)$ , $C_s(\mathbf{k}, t)$ et $\Re[D(\mathbf{k}, t)]$

Finalement, on obtient de nouvelles expressions asymptotiques pour  $B_s(\mathbf{k}, t)$  :

$$B_s(\mathbf{k}, t) = -2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) dS \quad (5.89a)$$

$$= -2\pi \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s' s''}) g_{s' s''} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.89b)$$

et pour  $C_s(\mathbf{k}, t)$  :

$$C_s(\mathbf{k}, t) = 2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) a_{ss''}(\mathbf{k}'', t) dS \quad (5.90a)$$

$$= 2\pi \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s' s''}) \gamma_{s' s''} a_{ss'}(\mathbf{k}', t) a_{ss''}(\mathbf{k}'', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.90b)$$

où  $S_{s' s''}$  est la surface résonante associée au triplet  $(\mathbf{k}, s', s'')$ . On a ainsi :

$$S_{s' s''}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3 / \omega(\mathbf{k}) + s' \omega(\mathbf{k}') + s'' \omega(-\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0\}. \quad (5.91)$$

Les expressions (5.89b) et (5.90b) montrent que l'on a remplacé dans (5.66) et (5.67) les fonctions en  $\delta$  par des Dirac sur la surface résonante, à un facteur  $\pi$  près. Pour  $D(\mathbf{k}, t)$ , on peut appliquer cette même transformation à la partie réelle uniquement :

$$D(\mathbf{k}, t) = - \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) dS - i \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} g_{s' s''} \frac{F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.92)$$

La partie imaginaire nécessite par contre un traitement particulier, car on n'a plus l'amortissement tourbillonnaire au numérateur : faire tendre  $\delta$  vers 0 créerait à nouveau une singularité aux points sur les surfaces résonantes.

### 5.6.3 Intégrale volumique

On a vu que l'influence de la surface résonante se faisait sentir pour des  $\xi$  de l'ordre de  $\delta$ . L'idée est ici d'utiliser un domaine  $V_\varepsilon$  avec  $\varepsilon = O(\delta)$ , fixé. On découpe

l'intégrale de la partie imaginaire de  $D(\mathbf{k}, t)$  en deux parties selon que l'on est proche ou non de la surface résonante :

$$\begin{aligned} & \Im [D(\mathbf{k}, t)] \\ &= - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V_\varepsilon} g_{s' s''} \frac{F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' - \sum_{s', s''} \int_{V_\varepsilon} g_{s' s''} \frac{F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Si on est dans  $\mathbb{R}^3 \setminus V_\varepsilon$ , alors  $F_{s' s''}$  prend des valeurs non nulles. Quand on fait tendre  $\delta$  vers 0, il n'y a pas de singularités et toutes les fonctions sont régulières ; le passage à la limite  $\delta \rightarrow 0$  ne pose donc pas de problèmes. Le passage  $\varepsilon \rightarrow 0$  nécessitera la définition de la valeur principale d'une intégrale. Si on est dans  $V_\varepsilon$ , près de la surface résonante, on va montrer que la valeur de l'intégrale est négligeable quand  $\delta$  puis  $\varepsilon$  tendront vers 0.

### 5.6.3.1 Domaine éloigné de la surface résonante

On rappelle que  $\varepsilon$  est fixé. Dans (5.93), la première intégrale ne pose pas de problème : comme on est loin des surfaces résonantes,  $F_{s' s''}$  est non nul, et toutes les fonctions sont régulières. Faire tendre  $\delta$  vers 0 donne le résultat :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V_\varepsilon} g_{s' s''} \frac{F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' \right] = - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V_\varepsilon} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.94)$$

et on verra plus loin quelle est la limite de ce terme quand on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0.

### 5.6.3.2 Domaine proche de la surface résonante

On cherche ici l'expression de la deuxième intégrale de (5.93) :

$$\sum_{s', s''} \int_{V_\varepsilon} g_{s' s''} \frac{F_{s' s''}}{\delta^2 + F_{s' s''}^2} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}', \quad (5.95)$$

quand  $\delta$  tend vers 0. On utilise le système de coordonnées curvilignes  $(q_1, q_2, F)$  exposé précédemment. On peut exprimer un volume élémentaire sous la forme :

$$d^3 \mathbf{k}' = J_2(q_1, q_2, F) dq_1 dq_2 dF, \quad (5.96)$$

avec  $J_2(q_1, q_2, F)$  le jacobien de la transformation de coordonnées, que l'on n'a pas besoin d'expliciter pour mener à bien le calcul. Quand on est dans  $V_\varepsilon$ , on suppose que les fonctions lisses admettent un développement de Taylor sous la forme :

$$\tilde{g}_{s' s''}(q_1, q_2, F) \tilde{e}(q_1, q_2, F) J_2(q_1, q_2, F) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(q_1, q_2) F^i, \quad (5.97)$$

où  $\tilde{g}_{s's''}$  et  $\tilde{e}$  sont les fonctions  $g_{s's''}$  et  $e$  de (5.95) réécrites dans le nouveau système de coordonnées. On en déduit une nouvelle expression pour (5.95) :

$$\sum_{s', s''} \int \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i(q_1, q_2) \left[ \int_{F_-}^{F_+} \frac{F^{i+1}}{F^2 + \delta^2} dF \right] dq_1 dq_2, \quad (5.98)$$

où l'intégration selon  $q_1$  et  $q_2$  se fait sur leur domaine de définition, inclus dans  $\mathbb{R}^2$ . De plus,  $F_+$  et  $F_-$  sont des fonctions de  $q_1, q_2$ , telles que  $F_+(q_1, q_2)$  et  $F_-(q_1, q_2)$  sont la valeur de la fonction  $F$  au point respectivement de coordonnées  $(q_1, q_2, \varepsilon)$ , et de coordonnées  $(q_1, q_2, -\varepsilon)$ , dans le système de coordonnées  $(q_1, q_2, \xi)$ .

Si  $i \geq 1$ , alors la fonction en  $F$  ne fait pas apparaître de singularité quand  $\delta$  tend vers 0, donc après le passage à la limite, on obtient :

$$\int_{F_-}^{F_+} F^{i-1} dF = \left[ \frac{F^i}{i} \right]_{F_-}^{F_+} = \frac{F_+^i - F_-^i}{i}. \quad (5.99)$$

Par contre, si  $i = 0$ , il faut d'abord intégrer la fonction avant de passer à la limite :

$$\int_{F_-}^{F_+} \frac{F}{F^2 + \delta^2} dF = \frac{1}{2} [\log |F^2 + \delta^2|]_{F_-}^{F_+} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{F_+^2 + \delta^2}{F_-^2 + \delta^2} \right|. \quad (5.100)$$

Ainsi, quand  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\int_{F_-}^{F_+} \frac{F}{F^2 + \delta^2} dF \rightarrow \log \left| \frac{F_+}{F_-} \right|. \quad (5.101)$$

L'équation (5.98) devient, quand  $\delta$  tend vers 0 :

$$\sum_{s', s''} \int \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i(q_1, q_2) \frac{F_+^i - F_-^i}{i} + \alpha_0(q_1, q_2) \log \left| \frac{F_+}{F_-} \right| \right] dq_1 dq_2. \quad (5.102)$$

Enfin, on écrit que  $F$ , qui est nulle à la surface, admet un développement en puissances de  $\xi$  :

$$F(q_1, q_2, \xi) = \sum_{i=1}^{+\infty} F^{(i)}(q_1, q_2) \xi^i, \quad (5.103)$$

d'où :

$$F_-(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} F^{(i)}(q_1, q_2) (-\varepsilon)^i, \quad (5.104a)$$

$$\text{et } F_+(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} F^{(i)}(q_1, q_2) \varepsilon^i, \quad (5.104b)$$

relations qui seront utiles lors du passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 5.6.3.3 Valeur principale d'une intégrale

C'est une méthode qui consiste à attribuer une valeur finie à une intégrale divergente au sens usuel, comme celle à laquelle on s'intéresse ici. Afin que les explications soient plus claires, on va prendre l'exemple d'une fonction unidimensionnelle et continue partout sauf en un point unique singulier. Si on considère  $a > 0$ ,  $b > 0$  et la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , son intégrale entre  $-a$  et  $b$  n'est pas convergente, car elle présente une singularité en 0. Par contre, pour un petit  $\varepsilon > 0$  fixé, les deux intégrales :

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)dx = \log(\varepsilon) - \log(a) \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^b f(x)dx = \log(b) - \log(\varepsilon)$$

sont convergentes et ne sont même pas impropres. On voit que si on fait la somme de ces deux intégrales, les termes en  $\log(\varepsilon)$  se compensent, et faire tendre  $\varepsilon$  ne pose plus aucun problème.

On appellera donc *valeur principale* de l'intégrale de  $f$  entre  $-a$  et  $b$  :

$$\int_{-a}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\varepsilon}^b f(x)dx \right], \quad (5.105)$$

en prenant un intervalle symétrique autour de la singularité. Cette intégrale vaut ici  $\log(b) - \log(a)$ . Pour finir, il faut noter qu'un intervalle asymétrique permet de donner d'autres valeurs, finies ou infinies, à l'intégrale : ce n'est qu'une question de conventions. De plus, on peut remarquer que si la fonction est continue partout sur  $[-a, b]$ , alors la valeur principale de l'intégrale vaut l'intégrale usuelle au sens de Lebesgue. On peut généraliser sans difficultés cette notion à une fonction de plusieurs variables continue presque partout.

### 5.6.3.4 Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Les résultats précédents ont été obtenus pour un  $\varepsilon$  fixé, mais petit. On décide maintenant de le faire tendre vers 0. Il est clair que, par définition, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, l'intégrale (5.94) tend vers la valeur principale de l'intégrale sur tout l'espace :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus V_\varepsilon} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' \right] = - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'.$$

Pour l'autre intégrale (5.102), on se sert de (5.104) pour montrer que :

$$F_- \rightarrow 0, \quad (5.106a)$$

$$F_+ \rightarrow 0, \quad (5.106b)$$

$$\text{et} \quad \left| \frac{F_+}{F_-} \right| \rightarrow 1, \quad (5.106c)$$

d'où :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \sum_{s', s''} \int \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i(q_1, q_2) \frac{F_+^i - F_-^i}{i} + \alpha_0(q_1, q_2) \log \left| \frac{F_+}{F_-} \right| \right] dq_1 dq_2 \right] = 0, \quad (5.107)$$

d'après (5.102). On en déduit l'expression asymptotique de la partie imaginaire de  $D(\mathbf{k}, t)$  :

$$\Im [D(\mathbf{k}, t)] = - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}'. \quad (5.108)$$

Finalement, on obtient l'expression asymptotique de  $D(\mathbf{k}, t)$  comme étant :

$$D(\mathbf{k}, t) = - \sum_{s', s''} \left[ \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) dS + i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' \right]. \quad (5.109)$$

## 5.7 Évolution des grandeurs spectrales

On va pouvoir écrire les nouvelles équations d'évolution des trois grandeurs caractéristiques du tenseur spectral,  $e$ ,  $z$  et  $h$ , grâce à leurs expressions en fonction des  $A_{s_1 s_2}$ , aux équations d'évolution de ces derniers, et aux formes asymptotiques de  $B_s(\mathbf{k}, t)$ ,  $C_s(\mathbf{k}, t)$  et  $D(\mathbf{k}, t)$ .

### 5.7.1 Équation pour le spectre d'énergie

On utilise (5.20) combinée avec (5.65), et les expressions (5.89) et (5.90) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{\partial a_{-1}}{\partial t}(\mathbf{k}, t) + \frac{\partial a_1}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \\ &= B_1(\mathbf{k}, t) a_1(\mathbf{k}, t) + B_{-1}(\mathbf{k}, t) a_{-1}(\mathbf{k}, t) + C_1(\mathbf{k}, t) + C_{-1}(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Or on montre que :

$$\begin{aligned} & B_1(\mathbf{k}, t) a_1(\mathbf{k}, t) + B_{-1}(\mathbf{k}, t) a_{-1}(\mathbf{k}, t) \\ &= -2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [a_{s'}(\mathbf{k}', t) a_1(\mathbf{k}, t) + a_{-s'}(\mathbf{k}', t) a_{-1}(\mathbf{k}, t)] dS, \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & C_1(\mathbf{k}, t) + C_{-1}(\mathbf{k}, t) \\ &= 2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [a_{s'}(\mathbf{k}', t) a_{s''}(\mathbf{k}'', t) + a_{-s'}(\mathbf{k}', t) a_{-s''}(\mathbf{k}'', t)] dS. \end{aligned} \quad (5.112)$$

On peut alors exprimer les sommes de produits des  $a_s$  dans ces deux intégrales en fonction de  $e$  et  $h$  uniquement. En remarquant que :

$$e(\mathbf{k}, t) = a_1(\mathbf{k}, t) + a_{-1}(\mathbf{k}, t), \quad (5.113a)$$

$$e(\mathbf{k}', t) = a_{s'}(\mathbf{k}', t) + a_{-s'}(\mathbf{k}', t), \quad (5.113b)$$

$$e(\mathbf{k}'', t) = a_{s''}(\mathbf{k}'', t) + a_{-s''}(\mathbf{k}'', t), \quad (5.113c)$$

$$h(\mathbf{k}, t) = a_{-1}(\mathbf{k}, t) - a_1(\mathbf{k}, t), \quad (5.113d)$$

$$h(\mathbf{k}', t) = s' [a_{-s'}(\mathbf{k}', t) - a_{s'}(\mathbf{k}', t)], \quad (5.113e)$$

$$\text{et} \quad h(\mathbf{k}'', t) = s'' [a_{-s''}(\mathbf{k}'', t) - a_{s''}(\mathbf{k}'', t)], \quad (5.113f)$$

on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_1(\mathbf{k}, t) + a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-1}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} [e(\mathbf{k}, t)e(\mathbf{k}', t) + s'h(\mathbf{k}, t)h(\mathbf{k}', t)], \\ a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_{s''}(\mathbf{k}'', t) + a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-s''}(\mathbf{k}'', t) &= \frac{1}{2} [e(\mathbf{k}', t)e(\mathbf{k}'', t) + s's''h(\mathbf{k}', t)h(\mathbf{k}'', t)]. \end{aligned}$$

L'équation d'évolution du spectre d'énergie devient finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{1}{\alpha_{s' s''}} [ - g_{s' s''} \{e(\mathbf{k}, t)e(\mathbf{k}', t) + s'h(\mathbf{k}, t)h(\mathbf{k}', t)\} \\ &\quad + \gamma_{s' s''} \{e(\mathbf{k}', t)e(\mathbf{k}'', t) + s's''h(\mathbf{k}', t)h(\mathbf{k}'', t)\} ] dS. \end{aligned} \quad (5.115)$$

### 5.7.2 Équation pour l'hélicité spectrale

On utilise (5.22) combinée avec (5.65), et les expressions (5.89) et (5.90). On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{\partial a_{-1}}{\partial t}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial a_1}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \\ &= B_{-1}(\mathbf{k}, t)a_{-1}(\mathbf{k}, t) - B_1(\mathbf{k}, t)a_1(\mathbf{k}, t) + C_{-1}(\mathbf{k}, t) - C_1(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (5.116)$$

et on dispose de l'expression de tous les termes en fonction des  $a_s$  :

$$\begin{aligned} &B_{-1}(\mathbf{k}, t)a_{-1}(\mathbf{k}, t) - B_1(\mathbf{k}, t)a_1(\mathbf{k}, t) \\ &= -2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-1}(\mathbf{k}, t) - a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_1(\mathbf{k}, t)] dS, \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad &C_{-1}(\mathbf{k}, t) - C_1(\mathbf{k}, t) \\ &= 2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-s''}(\mathbf{k}'', t) - a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_{s''}(\mathbf{k}'', t)] dS. \end{aligned} \quad (5.118)$$

En utilisant les relations (5.113), on prouve, de la même façon que pour l'énergie spectrale, les relations :

$$\begin{aligned} a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-1}(\mathbf{k}, t) - a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_1(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} [s'e(\mathbf{k}, t)h(\mathbf{k}', t) + h(\mathbf{k}, t)e(\mathbf{k}', t)], \\ a_{-s'}(\mathbf{k}', t)a_{-s''}(\mathbf{k}'', t) - a_{s'}(\mathbf{k}', t)a_{s''}(\mathbf{k}'', t) &= \frac{1}{2} [s'h(\mathbf{k}', t)e(\mathbf{k}'', t) + s''e(\mathbf{k}', t)h(\mathbf{k}'', t)]. \end{aligned}$$

On en déduit l'équation d'évolution asymptotique de  $h(\mathbf{k}, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{1}{\alpha_{s' s''}} [ - g_{s' s''} \{s'e(\mathbf{k}, t)h(\mathbf{k}', t) + h(\mathbf{k}, t)e(\mathbf{k}', t)\} \\ &\quad + \gamma_{s' s''} \{s'h(\mathbf{k}', t)e(\mathbf{k}'', t) + s''e(\mathbf{k}', t)h(\mathbf{k}'', t)\} ] dS. \end{aligned} \quad (5.120)$$



### 5.7.3 Équation pour le terme d'anisotropie

On utilise (5.72), combinée avec (5.109), et le résultat est immédiat :

$$\frac{\partial Z}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = -Z \sum_{s', s''} \left[ \int_{S_{s', s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) dS + i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) d^3 \mathbf{k}' \right]. \quad (5.121)$$

### 5.7.4 Remarques

On peut en formuler plusieurs :

1. On s'aperçoit que ces trois équations d'évolution ne font plus du tout intervenir l'amortissement tourbillonnaire  $\delta$ . En effet, quand on se place en turbulence faible devant la rotation, le fait que le nombre de Rossby soit très petit implique que  $\delta$  est lui aussi très petit devant  $\Omega$ , voire même nul à la limite. Cette approche a le mérite de ne plus être conditionnée par le choix du paramètre  $\delta$ , sous réserve qu'il vérifie les contraintes énoncées précédemment.
2. Les équations pour  $e$  et  $h$  sont découplées de celle pour  $Z$ . Ainsi,  $Z$  évolue parallèlement mais ses variations n'entraînent aucune variation sur  $e$ , ni sur  $h$ .
3. Un des objectifs de la méthode AQNM est de diminuer les coûts de calcul numérique. On voit que l'on a réussi à éliminer toutes les intégrales volumiques, pour les remplacer par des intégrales sur les surfaces résonantes, sauf une qui apparaît dans l'équation d'évolution de  $Z$ . On peut, par un changement de variable adéquat portant sur un terme de phase, le faire disparaître. La variable :

$$Y(\mathbf{k}, t) = \exp \left[ i \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t') d^3 \mathbf{k}' \right) dt' \right] Z(\mathbf{k}, t), \quad (5.122)$$

vérifie en effet l'équation différentielle :

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = -\lambda(\mathbf{k}, t) Y(\mathbf{k}, t), \quad (5.123)$$

$$\text{avec } \lambda(\mathbf{k}, t) = \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) dS. \quad (5.124)$$

4. On suppose que pour tout  $\mathbf{k}$ ,  $h(\mathbf{k}, 0) = 0$ . On admet l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation (5.120) pour des conditions initiales données. Comme la fonction identiquement nulle vérifie l'équation et possède les mêmes conditions initiales que  $h$ , on a que pour tout  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $h(\mathbf{k}, t) = 0$ . Si on suppose maintenant que pour tout  $\mathbf{k}$ ,  $Z(\mathbf{k}, 0) = 0$ , alors on a pour tous  $\mathbf{k}$  et  $t$ ,  $Z(\mathbf{k}, t) = 0$ , pour les mêmes raisons que pour  $h$ . Par contre, cette propriété n'est pas vérifiée par  $e(\mathbf{k}, t)$ , car on ne peut pas dire si la fonction identiquement nulle est toujours solution de (5.115).
5. Pour conclure, si la turbulence est initialement isotrope, ce qui va être le cas dans notre étude, alors on a  $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, 0) = e(k, 0) \Delta_{ij}(\mathbf{k})$ . On en déduit qu'initialement,  $h = 0$ , car le tenseur  $\Phi_{ij}$  est symétrique. De plus, on a aussi que

$Z = 0$  initialement d'après la définition (5.21), et en utilisant (3.58). On vient de montrer que  $h$  et  $Z$  resteront donc nuls ultérieurement. Seul  $e$  verra donc sa distribution spectrale s'écarter de l'isotropie, et c'est dans ce cas la seule grandeur qui peut quantifier l'anisotropie.

6. On peut s'intéresser à la stabilité du système différentiel soumis à une petite anisotropie initiale. Si on perturbe faiblement  $Z$ , on se ramène, par le changement de variable (5.122), à une équation pour  $Y$ , de même module que  $Z$ . Le signe de la fonction  $\lambda$  va donc conditionner la croissance (s'il est négatif) ou la décroissance (s'il est positif) de  $|Z|$ . Du fait de la fonction  $g_{s's''}$ , il n'est pas aisé de déterminer ce signe analytiquement, et il faudrait certainement recourir à un traitement numérique.

Le problème se pose de manière encore plus ardue dans le cas d'une anisotropie initiale sur  $h$  : l'équation différentielle (5.120) présente une plus grande complexité, ce qui ne permet d'envisager qu'une résolution numérique.

7. L'ensemble des trois équations forme un système réalisable, comme on va le montrer par la suite.

## 5.8 Réalisabilité du modèle AQNM

La propriété de réalisabilité (4.52d) est fondamentale, et elle doit être vérifiée quel que soit le modèle analytique. Elle assure que le tenseur  $\Phi_{ij}$  dont on cherche l'évolution temporelle correspond bien au tenseur spectral d'un champ de vitesse réel. Cela permet en particulier d'être certain d'obtenir un spectre d'énergie spectrale positif à tout instant.

### 5.8.1 Condition équivalente de réalisabilité

La condition  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^3, \alpha_i^* \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \alpha_j \geq 0$  est équivalente à dire que les valeurs propres de  $\Phi_{ij}$  vu en tant que matrice sont toutes positives ou nulles. Or on a :

$$\Phi_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e + z_r & z_i + ih \\ 0 & z_i - ih & e - z_r \end{pmatrix}.$$

La matrice n'est pas inversible donc 0 est valeur propre évidente. La trace étant positive, les deux autres valeurs propres sont positives si et seulement si le déterminant de la sous-matrice  $(\Phi_{ij})_{i \geq 2, j \geq 2}$  est positif. On calcule donc :

$$\begin{vmatrix} e + z_r & z_i + ih \\ z_i - ih & e - z_r \end{vmatrix} = e^2 - h^2 - |z|^2.$$

Comme on a de plus que  $z(\mathbf{k}, t) = 2Z(\mathbf{k}, t)e^{-2i\omega(\mathbf{k})t}$ , on en déduit que le modèle est réalisable si et seulement si :

$$e^2 - h^2 - 4|Z|^2 \geq 0, \tag{5.125}$$

à tout instant. On peut remarquer que cette condition implique en particulier que l'énergie spectrale reste positive tout le temps. On appelle fonction de réalisabilité, la fonction  $\mathfrak{F} : (\mathbf{k}, t) \mapsto (e^2 - h^2 - 4|Z|^2)(\mathbf{k}, t)$ .

### 5.8.2 Démonstration

On suppose maintenant la réalisabilité initiale, c'est-à-dire :

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \mathfrak{F}(\mathbf{k}, 0) \geq 0, \quad (5.126)$$

et on va montrer que c'est le cas à tout instant, grâce aux équations d'évolution de  $e$ ,  $Z$  et  $h$ .

#### 5.8.2.1 Équation d'évolution de $\mathfrak{F}$

On note par la suite  $e = e(\mathbf{k}, t)$ ,  $h = h(\mathbf{k}, t)$ ,  $e' = e(\mathbf{k}', t)$ ,  $h' = h(\mathbf{k}', t)$ ,  $e'' = e(\mathbf{k}'', t)$  et  $h'' = h(\mathbf{k}'', t)$ . Comme les équations d'évolution (5.115), (5.120) et (5.121) contiennent des termes communs, on note :

$$b_1(\mathbf{k}, t) = - \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e' \, dS, \quad (5.127a)$$

$$b_2(\mathbf{k}, t) = - \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} s' h' \, dS, \quad (5.127b)$$

$$b_3(\mathbf{k}, t) = - \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_{s' s''}}{F_{s' s''}} e' \, d^3 \mathbf{k}', \quad (5.127c)$$

$$c_1(\mathbf{k}, t) = \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [e' e'' + s' s'' h' h''] \, dS, \quad (5.127d)$$

$$c_2(\mathbf{k}, t) = \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [s' h' e'' + s'' e' h''] \, dS. \quad (5.127e)$$

Les équations (5.115), (5.120) et (5.121) se réécrivent alors :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = b_1 e + b_2 h + c_1, \quad (5.128a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = b_1 h + b_2 e + c_2, \quad (5.128b)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = Z [b_1 + i b_3]. \quad (5.128c)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (|Z|^2)}{\partial t} &= Z \left( \frac{\partial Z}{\partial t} \right)^* + Z^* \left( \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \\ &= Z Z^* (b_1 - i b_3) + Z^* Z (b_1 + i b_3) \\ &= 2b_1 |Z|^2, \end{aligned} \quad (5.129)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} &= \frac{\partial (e^2 - h^2 - 4|Z|^2)}{\partial t} \\ &= 2e \frac{\partial e}{\partial t} - 2h \frac{\partial h}{\partial t} - 8b_1 |Z|^2 \\ &= 2 [b_1 \mathfrak{F} + c_1 e - c_2 h], \end{aligned} \quad (5.130)$$

qui est une équation pour  $\mathfrak{F}$  avec second membre.

### 5.8.2.2 Fonction auxiliaire

En utilisant la solution homogène de (5.130) et la méthode de la variation de la constante, on fait le changement de variable :

$$K(\mathbf{k}, t) = \mathfrak{F}(\mathbf{k}, t)d_1(\mathbf{k}, t),$$

où on a posé 
$$d_1(\mathbf{k}, t) = \exp \left[ -2 \int_0^t b_1(\mathbf{k}, t') dt' \right]. \quad (5.131)$$

L'équation différentielle vérifiée par  $K$  est la suivante :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = 2d_1(c_1e - c_2h). \quad (5.132)$$

En remarquant que  $\mathfrak{F} \geq 0 \iff K \geq 0$ , on s'est ramené à l'étude d'un problème plus simple en  $K$ .

### 5.8.2.3 Étude du second membre

On suppose  $K$  positive à un instant donné, et on va montrer qu'alors, la dérivée temporelle de  $K$  à cet instant est positive. Comme  $d_1$  est une fonction positive, on cherche le signe de  $c_1e - c_2h$ , qui vaut :

$$c_1e - c_2h = \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} [ee'e'' + s's''eh'h'' - s'hh'e'' - s''he'h''] dS. \quad (5.133)$$

On définit les nouvelles grandeurs :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{h}{e}, \\ X' &= s' \frac{h'}{e'}, \\ X'' &= s'' \frac{h''}{e''}, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$c_1e - c_2h = \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{\gamma_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} ee'e'' [1 + XX' + X'X'' + X''X] dS, \quad (5.135)$$

où  $\gamma_{s' s''}$ ,  $\alpha_{s' s''}$  et  $ee'e''$  sont des fonctions positives de  $\mathbf{k}'$  pour un  $\mathbf{k}$  donné. Il reste à étudier le signe de la fonction  $\mathfrak{J} : (x, y, z) \mapsto 1 + xy + xz + yz$ , sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$  à préciser.

### 5.8.2.4 Minimum de $\mathfrak{J}$

A l'instant considéré, on a, pour tous les nombres d'ondes,  $K \geq 0$  donc  $e^2 \geq h^2 + 4|Z|^2 \geq h^2$ , et donc  $|h| \leq e$ . En particulier, pour des vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  donnés,  $|X| \leq 1$ ,  $|X'| \leq 1$  et  $|X''| \leq 1$ . On étudie donc  $\mathfrak{J}$  sur le cube  $[-1, 1]^3$ . La fonction  $\mathfrak{J}$  est continue sur un compact donc elle est bornée et atteint ses bornes. On cherche à montrer que  $\mathfrak{J}$  est positive en prouvant que son minimum est positif.

On a deux cas :

1. On suppose le minimum de la fonction atteint à l'intérieur du cube strictement, c'est-à-dire pas sur une des faces. Le seul candidat potentiel est celui qui annule la différentielle de  $\mathfrak{J}$ , car on est dans l'intérieur, au sens topologique, du cube. Il n'y a que le point  $(0, 0, 0)$  où la différentielle s'annule. Or  $\mathfrak{J}(0, 0, 0) = 1 \geq 0$  donc le minimum est positif.
2. On suppose que le minimum est atteint sur une des faces, et on n'est plus dans l'intérieur du cube. La fonction  $\mathfrak{J}$  étant invariante par permutation de ses variables, on peut se ramener à deux faces seulement, par exemple  $z = 1$  et  $z = -1$ . Pour tous  $(x, y)$ , on a  $\mathfrak{J}(x, y, 1) = xy + y + x + 1$  et  $\mathfrak{J}(x, y, -1) = xy - y - x - 1$ . Donc si le minimum est atteint en  $(x_0, y_0)$  sur la face  $z = 1$ , il est aussi atteint en  $(-x_0, -y_0)$  sur la face  $z = -1$ , et on peut donc se ramener à l'étude de la fonction sur une seule face, par exemple  $z = 1$ . On se ramène donc à l'étude de  $\mathfrak{L} : (x, y) \mapsto xy + y + x + 1$  sur  $[-1, 1]^2$ , continue sur un compact, donc bornée et atteignant ses bornes.
  - (a) On montre, de la même façon que pour  $\mathfrak{J}$ , que si le minimum est atteint à l'intérieur strict de la face, c'est au point  $(-1, -1)$  qui n'est pas dans l'intérieur.
  - (b) Le minimum est donc atteint sur un des côtés de la face, en  $x = \pm 1$  ou  $y = \pm 1$ . Sur  $x = -1$  ou  $y = -1$ , on a  $\mathfrak{L} \equiv 0$ , donc le minimum est bien positif ou nul. Sur  $x = 1$ , on a, pour tout  $y$ ,  $\mathfrak{L}(1, y) = 2(y + 1)$  et le minimum vaut 0. Enfin, il en est de même sur le côté  $y = 1$ .

On a montré que, dans tous les cas, le minimum de la fonction  $\mathfrak{J}$  était positif, ce qui implique que  $\mathfrak{J}$  est positive sur  $[-1, 1]^3$ . On a ainsi prouvé que si  $K$  est positive à un instant donné, alors la dérivée temporelle de  $K$  à cet instant est aussi positive, car le membre de droite de (5.132) est positif.

### 5.8.3 Conclusions

On suppose que la réalisabilité initiale est assurée, donc pour tout vecteur  $\mathbf{k}$ , on a  $K(\mathbf{k}, 0) \geq 0$ . Le résultat précédent implique donc que pour tout  $\mathbf{k}$ , la dérivée temporelle de  $K$  en  $\mathbf{k}$  et à  $t = 0$  est elle aussi positive. De proche en proche par itération temporelle, et sauf dans des cas particuliers, la fonction  $K$  reste positive à tout instant, ce qui donne la réalisabilité à tout instant.

## 5.9 Dernières simplifications

L'objectif est le calcul explicite des termes  $g_{s's''}$  et  $\gamma_{s's''}$ . Ils s'expriment en fonction des normes  $k$ ,  $k'$  et  $k''$  uniquement, ce qui permet d'obtenir les équations finales d'évolution temporelle de  $e$ ,  $Z$  et  $h$ , grâce à (5.115), (5.121) et (5.120).

### 5.9.1 Calcul de $g_{s's''}$

Dans cette partie, on va voir que  $g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  est un tenseur d'ordre 0, et qu'en choisissant une base appropriée, il s'exprime explicitement en fonction des modules  $k$ ,  $k'$  et  $k''$ .

5.9.1.1 Expression en fonction de  $\mathbf{N}$ 

On rappelle que, d'après (5.60),  $g_{s's''}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} & g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ &= -\frac{1}{4} P_{jlm}(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') P_{rkn}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_n^*(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

et on cherche son écriture en fonction des composantes du vecteur  $\mathbf{N}$  seulement. Or on a :

$$P_{jlm}(\mathbf{k}) N_j(\mathbf{k}) = k_m N_l(\mathbf{k}) + k_l N_m(\mathbf{k}), \quad (5.136)$$

$$P_{rkn}(\mathbf{k}'') N_r^{(-s'')}(\mathbf{k}'') = k_n'' N_k^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k_k'' N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}''), \quad (5.137)$$

d'où :

$$\begin{aligned} g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= -\frac{1}{4} [k_m N_l(\mathbf{k}) + k_l N_m(\mathbf{k})] N_n^*(\mathbf{k}) \\ &\quad \left[ k_n'' N_k^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k_k'' N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \right] N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') \\ &\quad \left[ N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') \right]. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Les propriétés des vecteurs  $\mathbf{N}$  permettent d'exprimer chacun des crochets sous une forme plus explicite.

## 5.9.1.2 Invariance tensorielle

Soit  $\mathbf{p}$  un vecteur d'onde. D'après (3.59b) et (3.59a), on a :

$$\begin{aligned} (N_i^* N_j + N_i N_j^*)(\mathbf{p}) &= 2 \left[ \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right], \\ (N_i^* N_j - N_i N_j^*)(\mathbf{p}) &= 2 i \varepsilon_{lij} \frac{p_l}{p}, \end{aligned}$$

et donc par addition :

$$N_i^*(\mathbf{p}) N_j(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} + i \varepsilon_{lij} \frac{p_l}{p}. \quad (5.139)$$

Pour  $s \in \{-1, 1\}$ , on obtient finalement :

$$N_i^{(s)}(\mathbf{p}) N_j^{(-s)}(\mathbf{p}) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} - i s \varepsilon_{ijk} \frac{p_k}{p}, \quad (5.140)$$

et on cherche à savoir si c'est une quantité tensorielle (voir par exemple Hladik [26]).

Il est clair que  $\delta_{ij}$  est un tenseur d'ordre 2. De plus,  $p_i$  et  $p_j$  sont des tenseurs d'ordre 1, et  $1/p$  est un tenseur d'ordre 0. Donc  $p_i p_j / p^2$  est un tenseur d'ordre 2 par produit tensoriel. Le tenseur alterné  $\varepsilon_{ijk}$  est d'ordre 3, donc par produit contracté  $\varepsilon_{ijk} p_k / p$  est un tenseur d'ordre 2. Par somme de tenseurs,  $N_i^{(s)}(\mathbf{p}) N_j^{(-s)}(\mathbf{p})$  est donc un tenseur d'ordre 2. Il en résulte que :

$$-\frac{1}{4} k_i k_j'' [N_k(\mathbf{k}) N_l^*(\mathbf{k})] \left[ N_m^{(s')}(\mathbf{k}') N_n^{(-s')}(\mathbf{k}') \right] \left[ N_o^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_p^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \right]$$

est un tenseur d'ordre 8, en tant que produit de deux tenseurs d'ordre 1 et trois tenseurs d'ordre 2. Par produit contracté,  $g_{s's''}$  est un tenseur d'ordre 0. Cela permet de conclure qu'il reste invariant par changement de base orthonormale. Pour le calcul de  $g_{s's''}$ , on peut alors choisir n'importe quelle base orthonormale. On va donc effectuer un changement de repère lié à la triade  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ .

### 5.9.1.3 Changement de repère

Pour des vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  fixés, on définit les vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (5.141a)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{k}' - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{e}'_1}{|\mathbf{k}' - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{e}'_1|}, \quad (5.141b)$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2. \quad (5.141c)$$

On a bien  $|\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}'_2| = |\mathbf{e}'_3| = 1$  et  $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0$ , donc la base est orthonormale. Dans cette nouvelle base mobile, les coordonnées de  $\mathbf{k}$  sont  $(k, 0, 0)$ . De plus, on vérifie que :

$$\begin{aligned} k'_3 &= \mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_3 \\ &= \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \\ &= \mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{k}') \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.142)$$

car  $\mathbf{e}'_1$  est perpendiculaire à  $\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{k}'$ . Enfin :

$$\begin{aligned} k'_2 &= \mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_2 \\ &= \frac{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_1)^2}{|\mathbf{k}' - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{e}'_1|} \\ &= \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_2)^2 + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_3)^2}{|\mathbf{k}' - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{e}'_1|} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Dans ce repère, les coordonnées de  $\mathbf{k}'$  sont  $(k'_1, k'_2, 0)$  et celles de  $\mathbf{k}''$  sont  $(k''_1, -k'_2, 0)$ , avec  $k'_2 \geq 0$  et  $k''_1 = -k - k'_1$ .

Le triangle formé par les vecteurs  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$  se trouve donc dans le plan défini par les vecteurs  $\mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}'_2$ . On peut donc exprimer toutes les coordonnées de ces vecteurs en fonction de  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $k' = |\mathbf{k}'|$  et  $k'' = |\mathbf{k}''|$  uniquement :

$$k'_1 = \frac{k''^2 - k'^2 - k^2}{2k}, \quad (5.144a)$$

$$k''_1 = \frac{k'^2 - k''^2 - k^2}{2k}, \quad (5.144b)$$

$$(k'_2)^2 = k'^2 - k_1'^2 = \frac{1}{4k^2} \left[ 2k^2 (k'^2 + k''^2) - k^4 - (k'^2 - k''^2)^2 \right]. \quad (5.144c)$$

On en déduit que  $g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ , qui dépend initialement des coordonnées des trois vecteurs, ne dépend alors que de  $k$ ,  $k'$  et  $k''$ .

### 5.9.1.4 Nouvelles coordonnées

Pour le calcul de  $g_{s's''}$ , on peut donc choisir n'importe quelle triade dont les normes respectives sont  $k$ ,  $k'$  et  $k''$ . On s'intéresse donc au cas particulier où la triade est dans le plan perpendiculaire à  $\Omega$ . Dans le repère précédemment choisi, cela signifie que  $\mathbf{e}'_3$  coïncide avec  $\Omega/\Omega$ . On cherche maintenant à trouver l'expression de  $\mathbf{N}(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{N}^{(s')}(\mathbf{k}')$  et  $\mathbf{N}^{(s'')}(\mathbf{k}'')$  dans ce repère, muni de la base  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , pour en déduire l'expression de  $g_{s's''}$ .

D'après la définition de  $\mathbf{N}$  donnée par (3.52), on obtient facilement que :

$$\mathbf{N}(\mathbf{k}) = (0, i, -1), \quad (5.145)$$

dans cette base, car  $\mathbf{e}_\phi(\mathbf{k})$  coïncide avec  $\mathbf{e}'_2$ , et  $\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k})$  avec  $-\mathbf{e}'_3$ . De plus, par simple calcul du produit vectoriel :

$$\mathbf{e}_\phi(\mathbf{k}') = \frac{\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{k}'}{k'} = \frac{-k'_2}{k'} \mathbf{e}'_1 + \frac{k'_1}{k'} \mathbf{e}'_2, \quad (5.146a)$$

$$\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}') = \mathbf{e}_\phi(\mathbf{k}') \times \mathbf{e}_k(\mathbf{k}') = -\mathbf{e}'_3, \quad (5.146b)$$

d'où :

$$\mathbf{N}^{(s')}(\mathbf{k}') = (-is' \frac{k'_2}{k'}, is' \frac{k'_1}{k'}, -1). \quad (5.147)$$

Enfin, on procède de même avec le dernier vecteur :

$$\mathbf{e}_\phi(\mathbf{k}'') = \frac{k''_2}{k''} \mathbf{e}'_1 + \frac{k''_1}{k''} \mathbf{e}'_2, \quad (5.148a)$$

$$\mathbf{e}_\theta(\mathbf{k}'') = -\mathbf{e}'_3, \quad (5.148b)$$

et donc :

$$\mathbf{N}^{(s'')}(\mathbf{k}'') = (is'' \frac{k''_2}{k''}, is'' \frac{k''_1}{k''}, -1). \quad (5.149)$$

Les expressions (5.145), (5.147), (5.149) combinées avec (5.138) vont permettre le calcul explicite de  $g_{s's''}(k, k', k'')$ .

### 5.9.1.5 Contraction d'indices

On réécrit l'expression (5.138) sous la forme :

$$g_{s's''}(k, k', k'') = -\frac{1}{4} \left[ k_m N_l(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') + k_l N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m(\mathbf{k}) \right] N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') \\ \left[ k''_n N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_k^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k''_k N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \right] N_n^*(\mathbf{k}). \quad (5.150)$$

On peut alors calculer le produit scalaire sur l'indice  $l$  :

$$k_m N_l(\mathbf{k}) N_l^{(s')}(\mathbf{k}') + k_l N_l^{(s')}(\mathbf{k}') N_m(\mathbf{k}) \\ = k_m \left( 1 - s' \frac{k'_1}{k'} \right) - is' \frac{k k'_2}{k'} N_m(\mathbf{k}), \quad (5.151)$$



et sur l'indice  $k$  :

$$\begin{aligned} & k_n'' N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_k^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k_k'' N_k^{(-s')}(\mathbf{k}') N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\ = & k_n'' \left( 1 + \frac{s' s''}{k' k''} ((k_2')^2 - k_1' k_1'') \right) + i s' \frac{k_2'}{k'} (k_1' + k_1'') N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}''). \end{aligned} \quad (5.152)$$

La contraction des indices  $m$  et  $n$ , via un produit scalaire à nouveau, donne :

$$k_m N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') = i s'' \frac{k k_2'}{k''}, \quad (5.153a)$$

$$N_m(\mathbf{k}) N_m^{(s'')}(\mathbf{k}'') = 1 - s'' \frac{k_1''}{k''}, \quad (5.153b)$$

$$k_n'' N_n^*(\mathbf{k}) = i k_2', \quad (5.153c)$$

$$N_n^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_n^*(\mathbf{k}) = 1 - s'' \frac{k_1''}{k''}. \quad (5.153d)$$

### 5.9.1.6 Expression de $g_{s' s''}$

Avec (5.151), (5.152) et (5.153), on en conclut que (5.150) devient :

$$\begin{aligned} g_{s' s''}(k, k', k'') = & -\frac{k(k_2')^2}{4k'^2 k''^2} [s' k'' - s'' k' + s' s'' (k_1' - k_1'')] \\ & [k' k'' + s' s'' ((k_2')^2 - k_1' k_1'') - s' k (k'' - s'' k_1'')]. \end{aligned} \quad (5.154)$$

On va maintenant simplifier les deux expressions entre crochets de (5.154). En utilisant le fait que  $k_1' - k_1'' = -2k_1'' - k$ , et avec (5.144), on a :

$$\begin{aligned} s' k'' - s'' k' + s' s'' (k_1' - k_1'') & = \frac{s' s''}{k} [k''^2 - k'^2 + s'' k k'' - s' k k'] \\ & = \frac{s' s''}{k} (s'' k'' - s' k') (k + s' k' + s'' k''), \end{aligned} \quad (5.155)$$

où on s'est servi de  $k'^2 = (s' k')^2$  et  $k''^2 = (s'' k'')^2$ . Pour les deuxièmes crochets de (5.154), on utilise (5.144) :

$$k_1' k_1'' = \frac{1}{4k^2} \left[ k^4 - (k'^2 - k''^2)^2 \right], \quad (5.156)$$

$$\text{d'où} \quad (k_2')^2 - k_1' k_1'' = \frac{1}{2} [k'^2 + k''^2 - k^2]. \quad (5.157)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} k' k'' + s' s'' ((k_2')^2 - k_1' k_1'') - s' k (k'' - s'' k_1'') & = k' k'' + s' s'' (k'^2 - k^2) - s' k k'' \\ & = s' s'' [(s' k')^2 - k^2 + s'' k'' (s' k' - k)] \\ & = s' s'' (s' k' - k) (k + s' k' + s'' k''). \end{aligned} \quad (5.158)$$

On a enfin de besoin de transformer l'expression de  $(k'_2)^2$  à partir de (5.144), en écrivant que les deux premiers termes sont le début d'un carré :

$$\begin{aligned}
 (k'_2)^2 &= -\frac{1}{4k^2} \left[ \left( k^2 - k'^2 - k''^2 \right)^2 - \left( k'^2 + k''^2 \right)^2 + \left( k'^2 - k''^2 \right)^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{4k^2} \left( k^2 - k'^2 - k''^2 - 2k'k'' \right) \left( k^2 - k'^2 - k''^2 + 2k'k'' \right) \\
 &= -\frac{1}{4k^2} \left[ k^2 - (k' + k'')^2 \right] \left[ k^2 - (k' - k'')^2 \right], \tag{5.159}
 \end{aligned}$$

où on a reconnu une identité remarquable.

On obtient l'expression finale de  $g_{s's''}$  avec (5.154), (5.155), (5.158) et (5.159) :

$$\begin{aligned}
 g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= \frac{1}{16k^2 k'^2 k''^2} \left[ (k' + k'')^2 - k^2 \right] \left[ k^2 - (k' - k'')^2 \right] \\
 &\quad [s'k' - k] [s'k' - s''k''] [k + s'k' + s''k'']^2. \tag{5.160}
 \end{aligned}$$

Ce résultat prouve entre autres que  $g_{s's''}$  est bien une quantité réelle comme supposé en 5.5.1.2.

### 5.9.2 Expression de $\gamma_{s's''}$

D'après (5.55), l'expression de  $\gamma_{s's''}$  est :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= \frac{1}{8} P_{rkn}(\mathbf{k}) N_r(\mathbf{k}) N_k^{(s')}(\mathbf{k}') N_n^{(s'')}(\mathbf{k}'') \\
 &\quad [k_i N_j^*(\mathbf{k}) + k_j N_i^*(\mathbf{k})] N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}''), \tag{5.161}
 \end{aligned}$$

en utilisant (5.136) pour expliciter la valeur de  $P_{kij}(\mathbf{k}) N_k^*(\mathbf{k})$ , et on cherche une expression en fonction de  $g_{s's''}$  et  $g_{s''s'}$ .

On s'intéresse maintenant au terme entre crochets de (5.161), où on réécrit  $k_i$  sous la forme  $-k'_i - k''_i$ , et  $k_j$  sous la forme  $-k'_j - k''_j$  :

$$\begin{aligned}
 & [k_i N_j^*(\mathbf{k}) + k_j N_i^*(\mathbf{k})] N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\
 = & - [k''_i N_j^*(\mathbf{k}) + k'_j N_i^*(\mathbf{k})] N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\
 = & - \left[ k''_i N_j^*(\mathbf{k}) N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k'_j N_i^*(\mathbf{k}) N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \right], \tag{5.162}
 \end{aligned}$$

où on s'est servi de l'identité (3.53c). En échangeant les indices muets  $i$  et  $j$  dans le deuxième terme, on transforme (5.162) en :

$$\begin{aligned}
 & [k_i N_j^*(\mathbf{k}) + k_j N_i^*(\mathbf{k})] N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\
 = & -N_j^*(\mathbf{k}) \left[ N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') k''_i N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'') k'_i N_j^{(-s')}(\mathbf{k}') \right]. \tag{5.163}
 \end{aligned}$$

A l'intérieur des crochets, on rajoute et on soustrait le terme  $k_j'' N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'')$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} & [k_i N_j^*(\mathbf{k}) + k_j N_i^*(\mathbf{k})] N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \\ &= -N_j^*(\mathbf{k}) \left[ N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') \left( k_i'' N_j^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + k_j'' N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \right) \right. \\ & \quad \left. + N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'') \left( k_i' N_j^{(-s')}(\mathbf{k}') - k_j' N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.164)$$

On utilise à nouveau  $k_j'' = -k_j - k_j'$  seulement pour le deuxième terme entre crochets, et avec (5.164), l'expression (5.161) devient finalement :

$$\begin{aligned} \gamma_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= -\frac{1}{8} P_{rkn}(\mathbf{k}) N_r(\mathbf{k}) N_k^{(s')}(\mathbf{k}') N_n^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_j^*(\mathbf{k}) \\ & \quad \left[ P_{lij}(\mathbf{k}'') N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_l^{(-s'')}(\mathbf{k}'') + P_{lij}(\mathbf{k}') N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_l^{(-s')}(\mathbf{k}') \right]. \end{aligned} \quad (5.165)$$

On rappelle que  $g_{s's''}$  s'écrit, d'après sa définition (5.60) :

$$\begin{aligned} & g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \\ &= -\frac{1}{4} P_{rkn}(\mathbf{k}) N_r(\mathbf{k}) N_k^{(s')}(\mathbf{k}') N_n^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_j^*(\mathbf{k}) P_{lij}(\mathbf{k}'') N_i^{(-s')}(\mathbf{k}') N_l^{(-s'')}(\mathbf{k}''), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') \\ &= -\frac{1}{4} P_{rkn}(\mathbf{k}) N_r(\mathbf{k}) N_k^{(s')}(\mathbf{k}') N_n^{(s'')}(\mathbf{k}'') N_j^*(\mathbf{k}) P_{lij}(\mathbf{k}') N_i^{(-s'')}(\mathbf{k}'') N_l^{(-s')}(\mathbf{k}'), \end{aligned}$$

où on a utilisé  $P_{rkn} = P_{rnk}$ . Avec les écritures (5.166) et (5.166), et à partir de (5.165), on obtient l'égalité suivante :

$$\gamma_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \frac{1}{2} [g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') + g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')]. \quad (5.166)$$

### 5.9.3 Équations asymptotiques d'évolution

L'expression (5.166) de  $\gamma_{s's''}$  en fonction de  $g_{s's''}$  est maintenant utilisée pour réécrire les équations d'évolution de  $e$  et  $h$ . La relation (5.160) permet donc de calculer  $g_{s's''}$  en fonction de  $k$ ,  $k'$  et  $k''$ , et on obtient alors un modèle complet, prêt à être discrétisé.

#### 5.9.3.1 Équation pour $e$

On part de (5.115), et on remplace  $\gamma_{s's''}$  en fonction de  $g_{s's''}$ , grâce à (5.166) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2} \sum_{s', s''} \int_{S_{s's''}} \frac{1}{\alpha_{s's''}} [ \quad g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') (e' e'' + s' s'' h' h'' - 2e e' - 2s' h h') \\ & \quad + \quad g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') (e' e'' + s' s'' h' h'') ] dS, \end{aligned} \quad (5.167)$$

où on a à nouveau noté avec des primes et des secondes les quantités se rapportant respectivement à  $\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{k}''$ . On va maintenant transformer le terme contenant  $g_{s''s'}$ , en échangeant les indices  $s'$  et  $s''$ , puis en faisant un changement de variable. On peut écrire tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s',s''} \int_{S_{s't,s''}} \frac{g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')}{\alpha_{s't,s''}} [e'e'' + s's''h'h''] dS \\
 &= \sum_{s',s''} \int_{S_{s''s'}} \frac{g_{s'ts'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')}{\alpha_{s''s'}} [e'e'' + s's''h'h''] dS \\
 &= \pi \sum_{s',s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s''s'}) g_{s'ts'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') [e'e'' + s's''h'h''] d^3\mathbf{k}', \quad (5.168)
 \end{aligned}$$

car passer de l'intégrale surfacique à l'intégrale volumique fait apparaître en facteur  $\delta(F_{s''s'})$  d'une part, mais aussi  $|\nabla F_{s''s'}| = \pi\alpha_{s''s'}$ . On fait alors le changement  $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , pour transformer  $\mathbf{k}'$  en  $\mathbf{k}''$  et réciproquement :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s',s''} \int_{S_{s't,s''}} \frac{g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')}{\alpha_{s't,s''}} [e'e'' + s's''h'h''] dS \\
 &= \pi \sum_{s',s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')) g_{s'ts'} [e'e'' + s's''h'h''] d^3\mathbf{k}'. \quad (5.169)
 \end{aligned}$$

Par symétrie des surfaces résonantes,  $F_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') = F_{s'ts''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ , d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s',s''} \int_{S_{s't,s''}} \frac{g_{s''s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')}{\alpha_{s't,s''}} [e'e'' + s's''h'h''] dS \\
 &= \sum_{s',s''} \int_{S_{s'ts''}} \frac{g_{s'ts''}}{\alpha_{s'ts''}} [e'e'' + s's''h'h''] dS. \quad (5.170)
 \end{aligned}$$

Finalement, le spectre  $e$  vérifie l'équation d'évolution temporelle :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \sum_{s',s''} \int_{S_{s'ts''}} \frac{g_{s'ts''}}{\alpha_{s'ts''}} [e'(e'' - e) + s'h'(s''h'' - h)] dS, \quad (5.171)$$

qui constitue l'équation pour l'énergie du modèle AQNM.

### 5.9.3.2 Équation pour $h$

On part cette fois de (5.120) :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \sum_{s',s''} \int_{S_{s'ts''}} \frac{1}{\alpha_{s'ts''}} [-g_{s'ts''} (s'eh' + he') + \gamma_{s'ts''} (s'h'e'' + s''e'h'')] dS. \quad (5.172)$$

En remplaçant  $\gamma_{s'ts''}$  en fonction de  $g_{s'ts''}$ , et en faisant les changements d'indices et de variables adéquats, on obtient de la même façon :

$$\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \sum_{s',s''} \int_{S_{s'ts''}} \frac{g_{s'ts''}}{\alpha_{s'ts''}} [s'h'(e'' - e) + e'(s''h'' - h)] dS. \quad (5.173)$$

On remarque à nouveau ici que les équations asymptotiques pour  $e$  et  $h$  forment un système fermé d'équations intégro-différentielles. La donnée des spectres  $e$  et  $h$  en tout point et à un instant  $t$ , permet de déduire les spectres à tout instant ultérieur et en tout point. On ne s'intéresse donc plus à l'équation de  $Z$ , car on choisira une turbulence initialement isotrope par la suite, ce qui donnera  $Z$  identiquement nul à tout instant, grâce à (5.121).

# Chapitre 6

## Implémentation numérique AQNM

### 6.1 Introduction

Avec la méthode AQNM, on doit résoudre une équation d'évolution pour  $e$  de type équation de Lin, avec un terme non linéaire calculé dans l'espace spectral. Ce terme de transfert d'énergie est une intégrale, sur les surfaces résonantes, de produits entre des coefficients liés à la géométrie de la triade, et des énergies et hélicité spectrales aux différents vecteurs d'ondes. En partant d'un spectre isotrope, on obtient que  $Z$  et  $h$  restent identiquement nuls à tout instant, ce qui permet d'obtenir une équation fermée pour le spectre d'énergie. Moyennant la discrétisation de son équation d'évolution, et connaissant le spectre en tout point à l'instant initial, on peut en déduire le spectre en tout point aux instants ultérieurs,

Après avoir identifiée certaines symétries vérifiées par le modèle, on s'attachera à éliminer les singularités liées à la division par le gradient de la fonction de surface résonante. On adoptera alors une paramétrisation sphérique du problème, avec un repère s'appuyant sur l'axe de rotation et le vecteur d'onde. Cela conduit à la réécriture de l'intégrale dans ce repère, en faisant apparaître des vecteurs adimensionnés par rapport à  $k$ . L'expression obtenue permet la vérification de la conservation de l'énergie totale, en prouvant que le terme non linéaire AQNM ne procède qu'à des échanges d'énergie. Après une adimensionnalisation, l'équation d'évolution de l'énergie ne dépend plus que d'un paramètre adimensionnel du même type qu'un nombre de Reynolds, mais quantifiant les effets de la rotation par rapport aux effets non linéaires. Par l'analyse des temps caractéristiques, on en déduit que la rotation inhibe la cascade d'énergie, dont les effets se manifestent à des temps ultérieurs à ceux prévus par la théorie isotrope.

Dans une dernière partie, la discrétisation de l'espace spectrale est détaillée, avec un traitement particulier de la direction radiale, pour laquelle un pas exponentiel est choisi, ce qui permet de mieux capter les lois de puissance. Puis, la méthode d'intégration consiste en la détermination des zones de l'espace spectral, appelées boîtes, où vont passer les surfaces résonantes, et à l'évaluation de l'aire de la surface dans la boîte. Enfin, sont décrites la méthode d'interpolation de l'énergie quand le vecteur d'onde  $\mathbf{k}''$  n'est pas sur un point du maillage, et les méthodes d'intégration

temporelle.

## 6.2 Transformation de l'équation d'évolution

On choisit de partir d'une turbulence isotrope, ce qui implique que  $h$  et  $Z$  sont nuls initialement. Les équations (5.120) et (5.121) prédisent qu'alors  $h$  et  $Z$  restent nuls à tout instant ultérieur. Il ne reste alors que l'équation (5.171) pour  $e$ .

### 6.2.1 Équation de départ

On considère l'équation (5.171), en prenant  $h = 0$  :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) [e(\mathbf{k}'', t) - e(\mathbf{k}, t)] dS, \quad (6.1)$$

où  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , et  $S_{s' s''}$  est la surface résonante définie par (5.91). De plus, d'après (5.81) et (5.160), on rappelle que :

$$\begin{aligned} \alpha_{s' s''}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= \frac{1}{\pi} |s' \mathbf{C}(\mathbf{k}') - s'' \mathbf{C}(\mathbf{k}'')| \\ \text{et } g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') &= \frac{1}{16k^2 k'^2 k''^2} [(k' + k'')^2 - k^2] [k^2 - (k' - k'')^2] \\ &\quad [s' k' - k] [s' k' - s'' k''] [k + s' k' + s'' k'']^2, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{C}$  est la vitesse de groupe des ondes inertielles, définie par (3.91).

#### 6.2.1.1 Introduction d'une viscosité

Le raisonnement présenté ici prend comme référence la turbulence isotrope, à nombre de Reynolds infini en l'occurrence, car son comportement est bien connu. Rien ne dit que la turbulence en rotation possède des caractéristiques similaires, mais c'est la seule base de réflexion solide. Dans ce cas, le terme de transfert a une expression différente de celle du modèle AQNM, mais elle reste conservative. De plus, il est prédit qu'une telle équation produit une zone inertielle qui se développe jusqu'à l'infini en un temps infini. La cascade d'énergie vers les grands nombres d'ondes est continue, et on assiste à une décroissance de l'énergie à des nombres d'ondes de plus en plus grands au fur et à mesure des transferts d'énergie.

Cependant, d'un point de vue numérique, la discrétisation radiale impose que l'on coupe le spectre à un certain nombre d'onde, et toutes les énergies au-delà sont négligées. Non seulement les modules de nombres d'ondes supérieurs à la coupure ne sont pas résolus, mais en plus, on élimine toute un ensemble de contributions triadiques, celles pour lesquelles le module d'un des vecteurs est trop important. En turbulence isotrope, on observe l'établissement de la zone inertielle en  $k^{-5/3}$  jusqu'à la coupure, puis l'énergie commence à s'accumuler aux grands nombres d'ondes. Si la discrétisation spectrale fait perdre la propriété de conservation de l'énergie totale du schéma utilisé, les erreurs numériques risquent d'entraîner une instabilité, et finalement la saturation numérique. Dans le cas contraire, le spectre intégré pourrait

se diriger, comme on le constate en EDQNM isotrope à viscosité nulle, vers une expression conforme à une équipartition de l'énergie spectrale.

Dans tous les cas, pour le modèle AQNM, et en admettant l'établissement d'une zone inertielle de pente non encore connue, l'équation (6.1) risque donc de produire un spectre soit instable, soit se dirigeant vers l'équipartition. Une équation sans viscosité ne correspond donc pas à un processus physique : comme on cherche à étudier une turbulence en décroissance libre, il faut alors se décider à rajouter un terme assurant la dissipation de l'énergie. On introduit ainsi un paramètre purement numérique destiné éventuellement à stabiliser le schéma, en faisant décroître exponentiellement l'énergie aux grands nombres d'ondes. L'objectif final est d'obtenir une évolution temporelle du spectre d'énergie, stable et convergée, et présentant des caractéristiques simulant une évolution non visqueuse. On aurait alors la forme générale du spectre d'énergie, indépendamment de tout paramètre physique, que ce soit le nombre de Reynolds ou le nombre de Rossby.

### 6.2.1.2 Équation découplée pour $e$

On obtient l'équation intégral-différentielle avec viscosité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) + 2\nu k^2 e(\mathbf{k}, t) &= \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e(\mathbf{k}', t) [e(\mathbf{k}'', t) - e(\mathbf{k}, t)] dS \\ &= \pi \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s' s''}) g_{s' s''} e(\mathbf{k}', t) [e(\mathbf{k}'', t) - e(\mathbf{k}, t)] d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \tag{6.2}$$

On va maintenant montrer que le spectre  $e$  conserve certaines propriétés de symétrie s'il les possède initialement. Ensuite, en écrivant cette équation sous forme discrétisée, on verra alors que le calcul des intégrales surfaciques est un aspect qui nécessite une attention particulière.

## 6.2.2 Symétries

Si le spectre d'énergie est initialement axisymétrique ou possède la symétrie miroir, alors il conserve la propriété concernée avec le temps.

### 6.2.2.1 Axisymétrie

On se place dans un repère de coordonnées sphériques, construit à partir du repère cartésien initial, et dont l'axe vertical est porté par  $\Omega$ . A  $k$  et  $\theta$  fixés, on note  $\mathbf{k}_\phi$  le vecteur de coordonnées sphériques  $(k, \theta, \phi)$ . Pour un  $\phi_0$  donné, on cherche à montrer que la fonction  $\epsilon : (\mathbf{k}_\phi, t) \mapsto e(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, t)$  a la même équation d'évolution que  $e : (\mathbf{k}_\phi, t) \mapsto e(\mathbf{k}_\phi, t)$ .

Soient  $(k, \theta, \phi)$  fixés. En notant  $\mathbf{k}'_{\phi'}$  le vecteur de coordonnées  $(k', \theta', \phi')$ , l'équation



différentielle vérifiée par  $\epsilon$  est :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\nu k^2 \epsilon \right) (\mathbf{k}_\phi, t) &= \pi \sum_{s', s''} \iiint \delta(F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}')) \\ g_{s' s''}(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'}) e(\mathbf{k}'_{\phi'}, t) &[e(-\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'}, t) - \epsilon(\mathbf{k}_\phi, t)] \\ &k'^2 dk' \sin \theta' d\theta' d\phi'. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dans l'intégrale, on fait le changement de variable d'intégration  $\phi' \rightarrow \phi' + \phi_0$ . La triade  $(\mathbf{k}_\phi, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'})$  a donc été tournée d'un angle  $\phi_0$  par rapport à  $\Omega$ , pour devenir  $(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, \mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0}, -\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0})$ . Or  $F_{s' s''}$  ne dépend que des angles que font les vecteurs avec  $\Omega$ , donc  $F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'})$  se transforme en :

$$F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\phi+\phi_0}, \mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0}, -\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0}) = F_{s' s''}(\mathbf{k}_\phi, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'}). \quad (6.4)$$

De plus,  $g_{s' s''}$  ne dépend que des normes des vecteurs donc il se transforme de la même façon que  $F_{s' s''}$ . Enfin,  $e(\mathbf{k}'_{\phi'}, t)$  se transforme en  $e(\mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0}, t) = \epsilon(\mathbf{k}'_{\phi'}, t)$ , et  $e(-\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'}, t)$  en  $e(-\mathbf{k}_{\phi+\phi_0} - \mathbf{k}'_{\phi'+\phi_0}, t) = \epsilon(-\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'}, t)$ .

Finalement, l'équation (6.3) devient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\nu k^2 \epsilon \right) (\mathbf{k}_\phi, t) &= \pi \sum_{s', s''} \iiint \delta(F_{s' s''}(\mathbf{k}_\phi, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'})) \\ g_{s' s''}(\mathbf{k}_\phi, \mathbf{k}'_{\phi'}, -\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'}) \epsilon(\mathbf{k}'_{\phi'}, t) &[\epsilon(-\mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}'_{\phi'}, t) - \epsilon(\mathbf{k}_\phi, t)] k'^2 dk' \sin \theta' d\theta' d\phi'. \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve la même équation d'évolution que pour  $e(\mathbf{k}_\phi, t)$ . Si on admet l'existence et l'unicité d'une solution à cette équation, et comme on a initialement  $\epsilon(\mathbf{k}_\phi, 0) = e(\mathbf{k}_\phi, 0)$ , on peut conclure que pour tout  $t$  et tout  $\mathbf{k}$ ,  $\epsilon(\mathbf{k}_\phi, t) = e(\mathbf{k}_\phi, t)$ , d'où la propriété d'axisymétrie.

### 6.2.2.2 Symétrie miroir

On note  $\mathbf{k}_\theta$  le vecteur de coordonnées sphériques  $(k, \theta, \phi)$ . On suppose qu'initialement, le spectre possède la symétrie miroir, c'est-à-dire que pour tous  $(k, \theta, \phi)$ , on a  $e(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, 0) = e(\mathbf{k}_\theta, 0)$ . Pour un  $\theta$  donné, on va montrer que la fonction  $\epsilon : (\mathbf{k}_\theta, t) \mapsto e(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, t)$  a la même équation d'évolution que  $e : (\mathbf{k}_\theta, t) \mapsto e(\mathbf{k}_\theta, t)$ . C'est le même raisonnement que pour démontrer l'axisymétrie.

Soient  $(k, \theta, \phi)$  fixés. En notant  $\mathbf{k}'_{\theta'}$  le vecteur de coordonnées  $(k', \theta', \phi')$ , l'équation différentielle vérifiée par  $\epsilon$  est :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + 2\nu k^2 \epsilon \right) (\mathbf{k}_\theta, t) &= \pi \sum_{(s', s'')} \iiint \delta(F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'})) \\ g_{s' s''}(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'}) e(\mathbf{k}'_{\theta'}, t) &[e(-\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'}, t) - \epsilon(\mathbf{k}_\theta, t)] k'^2 dk' \sin \theta' d\theta' d\phi'. \end{aligned}$$

Faire le changement de variable  $\theta' \rightarrow \pi - \theta'$  revient à prendre le symétrique de la triade initiale par rapport au plan  $\theta = \pi/2$ . L'angle  $\theta''$  devient  $\pi - \theta'$ , donc  $F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'})$  devient :

$$F_{s' s''}(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, \mathbf{k}'_{\pi-\theta'}, -\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\pi-\theta'}) = -F_{s' s''}(\mathbf{k}_\theta, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_\theta - \mathbf{k}'_{\theta'}). \quad (6.5)$$

Le signe négatif ne change rien au Dirac, qui devient  $\delta(F_{s's''}(\mathbf{k}_\theta, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_\theta - \mathbf{k}'_{\theta'}))$ .  $g_{s's''}$  ne dépend que des normes des vecteurs, donc  $g_{s's''}(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'})$  se transforme en  $g_{s's''}(\mathbf{k}_\theta, \mathbf{k}'_{\theta'}, -\mathbf{k}_\theta - \mathbf{k}'_{\theta'})$ . Enfin,  $e(\mathbf{k}'_{\theta'}, t)$  devient  $\epsilon(\mathbf{k}'_{\theta'}, t)$ , et  $e(-\mathbf{k}_{\pi-\theta} - \mathbf{k}'_{\theta'}, t)$  devient  $\epsilon(-\mathbf{k}_\theta - \mathbf{k}'_{\theta'}, t)$ . On retrouve bien la même équation d'évolution pour  $e(\mathbf{k}_{\pi-\theta}, t)$  et  $e(\mathbf{k}_\theta, t)$  donc avec l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle, si le spectre possède la symétrie miroir à l'instant initial, il la possède à tout instant ultérieur.

Il faut remarquer que lorsqu'on prend un spectre isotrope initialement, il vérifie automatiquement l'axisymétrie autour de  $\Omega$  et possèdera la symétrie miroir initialement, ce qui assure qu'il conservera ces propriétés à tout instant ultérieur.

### 6.2.3 Traitement des singularités

L'intégrale de l'équation (6.2) présente des singularités, qu'il faut isoler par des considérations de symétrie, afin de les regrouper dans un ensemble de mesure nulle. Pour un  $k$  donné, l'équation admet des points singuliers quand  $\alpha_{s's''}$  n'est pas défini, et quand il est défini mais tend vers 0. On est dans le premier cas quand  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{k}'' = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ ) car alors la vitesse de groupe tend vers l'infini, et dans le deuxième quand  $k'$  tend vers l'infini car alors  $k''$  aussi, et  $\alpha_{s's''}$  tend vers 0. La singularité  $k'$  infini est naturellement éliminée par la discrétisation radiale de l'espace spectral, car une norme maximale pour les nombres d'ondes doit être fixée.

#### 6.2.3.1 Changement de repère

On va maintenant utiliser le nouveau repère orthonormé  $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$  tel que :

$$\mathbf{e}''_1 = \frac{\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}''_3) \mathbf{e}''_3}{|\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}''_3) \mathbf{e}''_3|}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}''_3 \times \mathbf{e}''_1, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{e}''_3 = \frac{\Omega}{\Omega}. \quad (6.8)$$

On vérifie facilement qu'alors  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}''_1 \geq 0$  et que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}''_2 = 0$ , ce qui implique que  $\mathbf{k} = (k_1 \geq 0, 0, k_3)$ .

#### 6.2.3.2 Première singularité

Pour s'occuper de la singularité  $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ , on divise l'espace spectral des  $\mathbf{k}'$  en deux zones : une zone où  $k' < k''$  et une zone où  $k' > k''$ , séparées par le plan  $k' = k''$ . Dans presque tous les cas de surfaces résonantes, l'intersection du plan  $k' = k''$  et de  $S_{s's''}$  est réduite à un nombre fini de droites, qui est un ensemble de mesure nulle : on peut donc négliger sa contribution à l'intégration de (6.2). Seul le cas  $\theta = \pi/2$  et  $s' = s''$  doit être traité séparément. En effet, on peut montrer que la surface résonante est constituée du plan  $k'_3 = 0$  et de la droite  $k' = k''$ , ce qui implique que l'intersection est cette fois le plan  $k' = k''$  tout entier. Néanmoins, pour  $s' = s''$  et  $k' = k''$ , on remarque facilement que  $g_{s's''} = 0$ , ce qui donne là aussi une contribution nulle. On va maintenant voir que les intégrations sur  $(k' < k'') \cap S_{s's''}$  et  $(k' > k'') \cap S_{s's''}$

permettent de restreindre le domaine d'intégration, par des considérations de symétrie.

Pour un couple  $(s', s'')$  donné, en faisant le changement de variable  $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  puis en échangeant les indices  $s'$  et  $s''$ , on obtient :

$$\sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e' [e'' - e] dS = \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')}{\alpha_{s' s''}} e'' [e' - e] dS,$$

grâce à l'invariance de  $S_{s' s''}$  et  $\alpha_{s' s''}$  par permutation conjointe de  $(\mathbf{k}', s')$  et  $(\mathbf{k}'', s'')$ . On déduit ainsi que :

$$\begin{aligned} & \sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} \frac{g_{s' s''}}{\alpha_{s' s''}} e' [e'' - e] dS \\ &= \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{1}{\alpha_{s' s''}} [g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') e' (e'' - e) + g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') e'' (e' - e)] dS \\ &= \pi \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s' s''}) g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') e' (e'' - e) + g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') e'' (e' - e) d^3 \mathbf{k}'. \end{aligned} \tag{6.9}$$

### 6.2.3.3 Deuxième singularité

La symétrie par rapport à la deuxième composante de  $\mathbf{k}'$  permet de traiter le cas de la singularité  $\mathbf{k}' = \mathbf{0}$ . Si on fait le changement de variable  $k'_2 \rightarrow -k'_2$  (qui entraîne aussi  $k''_2 \rightarrow -k''_2$  car  $k_2 = 0$ ), alors :

1.  $F_{s' s''}$  reste inchangée. En effet, on a que, pour un vecteur  $\mathbf{p}$ ,  $\omega(\mathbf{p})$  ne dépend pas de la deuxième coordonnée de  $\mathbf{p}$  car  $\Omega$  est parallèle à  $\mathbf{e}''_3$ . Donc  $\omega(\mathbf{k}')$  reste inchangé et  $\omega(\mathbf{k}'')$  aussi.
2.  $g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  et  $g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}')$  restent inchangés car ils ne dépendent que de  $k'$  et  $k''$ .
3.  $e'$  et  $e''$  restent invariants. En effet, on a montré que  $e$  était axisymétrique autour de  $\mathbf{e}''_3$  à tout instant. Donc, pour peu que  $k'_3$  et  $k_1'^2 + k_2'^2$  restent constants, on reste dans le même plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}''_3$  et à la même distance de l'axe vertical, et donc  $e'$  reste invariant (de même pour  $e''$ ).

Pour conclure, le changement de variable  $k'_2 \rightarrow -k'_2$  laisse l'intégrale invariante. De plus, l'intersection du plan  $k'_2 = 0$  et de  $(k' < k'') \cap S_{s' s''}$  est réduite à un ensemble de droites, de mesure nulle. On en déduit que l'équation d'évolution de  $e$  devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e \\ &= 2\pi \sum_{s', s''} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(F_{s' s''}) [g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') e' (e'' - e) + g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') e'' (e' - e)] d^3 \mathbf{k}' \\ &= 2 \sum_{s', s''} \int_{S_{s', s''}} \frac{1}{\alpha_{s' s''}} [g_{s' s''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') e' (e'' - e) + g_{s'' s'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}') e'' (e' - e)] dS. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Cette dernière expression n'admet plus aucune singularité liée au dénominateur  $\alpha_{s' s''}$ .

## 6.2.4 Paramétrisation sphérique

On ramène les vecteurs d'ondes à une forme adimensionnelle par rapport à la norme de  $\mathbf{k}$ , qui est le nombre d'onde de référence, afin d'effectuer une discrétisation plus rationnelle.

### 6.2.4.1 Variables adimensionnées

On considère les nouvelles variables :

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{K}' = \frac{\mathbf{k}'}{k}, \quad (6.11b)$$

$$\mathbf{K}'' = \frac{\mathbf{k}''}{k}. \quad (6.11c)$$

On décide de décrire  $\mathbf{K}$ , de norme égale à 1, sous la forme sphérique :

$$K_1 = \sin \theta, \quad (6.12a)$$

$$K_2 = 0, \quad (6.12b)$$

$$K_3 = \cos \theta, \quad (6.12c)$$

et de même pour  $\mathbf{K}'$  :

$$K'_1 = e^\rho \sin \theta' \cos \phi', \quad (6.13a)$$

$$K'_2 = e^\rho \sin \theta' \sin \phi', \quad (6.13b)$$

$$K'_3 = e^\rho \cos \theta'. \quad (6.13c)$$

On en déduit :

$$K''_1 = -\sin \theta - K'_1, \quad (6.14a)$$

$$K''_2 = -K'_2, \quad (6.14b)$$

$$K''_3 = -\cos \theta - K'_3. \quad (6.14c)$$

La description en coordonnées sphériques s'impose d'elle-même au problème, car il présente plusieurs symétries selon  $\theta$  ou  $\phi$ . Dans la direction radiale, on choisit de décrire la norme des vecteurs d'ondes avec une exponentielle, car cette écriture est bien adaptée à la recherche de lois en puissance dans le spectre d'énergie. En effet, sous forme logarithmique, une loi en puissance est une fonction affine. On raisonne dans la suite en termes d'intégration sur le triplet  $(\rho, \theta', \phi')$ , avec  $\theta' \in ]0, \pi[$ ,  $\phi' \in ]0, \pi[$  et  $\rho \in ]-\infty, +\infty[$  car  $k'_2 > 0$ , et  $K' < K''$  car  $k' < k''$ . Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  peuvent être vus comme des vecteurs de l'espace spectral fonctions de  $\rho$ ,  $\theta'$  et  $\phi'$ . L'espace  $(\rho, \theta', \phi')$  sera appelé *espace semi-sphérique*.

### 6.2.4.2 Transformation de l'intégration

Avec ces nouvelles variables, le volume élémentaire d'intégration s'écrit :

$$d^3 \mathbf{k}' = k^3 K'^3 \sin \theta' d\rho d\theta' d\phi', \quad (6.15)$$

car  $dk' = k'd\rho$ . On peut de même transformer  $g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  en :

$$g_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = k^2 G_{s's''}(K', K''), \quad (6.16)$$

avec

$$G_{s's''}(K', K'') = \frac{1}{16K'^2 K''^2} [(K' + K'')^2 - 1] [1 - (K' - K'')^2] [s'K' - 1] [s'K' - s''K''] [1 + s'K' + s''K'']^2.$$

Comme  $\omega(\mathbf{p}) = 2\Omega p_3/p$ , pour un vecteur  $\mathbf{p}$ , les surfaces résonantes dans l'espace semi-sphérique sont les courbes, notées  $\mathfrak{S}_{s's''}$ , et vérifiant :

$$f_{s's''}(\rho, \theta', \phi') = \frac{F_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}{2\Omega} = \cos \theta + s' \frac{K'_3}{K'} + s'' \frac{K''_3}{K''} = 0, \quad (6.17)$$

avec  $\theta' \in ]0, \pi[$ ,  $\phi' \in ]0, \pi[$ , et  $K' < K''$ .

### 6.2.4.3 Gradient de $f_{s's''}$

Afin de pouvoir intégrer le Dirac de (6.10), on a besoin de calculer le gradient de  $f_{s's''}$  dans le nouvel espace  $(\rho, \theta', \phi')$ . Si on note le vecteur  $\nabla f_{s's''} = \boldsymbol{\beta}^{s's''}$ , et  $\beta_\rho^{s's''}$ ,  $\beta_{\theta'}^{s's''}$  et  $\beta_{\phi'}^{s's''}$  ses trois composantes, on a :

$$\beta_\rho^{s's''} = \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \rho} = \frac{s''}{K''^3} \left[ (K_1''^2 + K_2''^2) \cos \theta - K_1'' K_3'' \sin \theta \right], \quad (6.18a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\theta'}^{s's''} &= \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \theta'} \\ &= -s' \sin \theta' + \frac{s'' K'}{K''^3} \left[ K_3'' \cos \theta' (K_1'' \cos \phi' + K_2'' \sin \phi') + (K_1''^2 + K_2''^2) \sin \theta' \right], \end{aligned} \quad (6.18b)$$

$$\beta_{\phi'}^{s's''} = \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \phi'} = \frac{s'' K_2' K_3'' \sin \theta}{K''^3}. \quad (6.18c)$$

### 6.2.4.4 Nouvelle équation d'évolution

L'équation (6.10), écrite avec les variables adimensionnelles, devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e &= \frac{\pi k^5}{\Omega} \sum_{s', s''} \int_{\mathfrak{S}_{s's''}} K'^3 \sin \theta' \frac{1}{|\nabla f_{s's''}|} \\ &[G_{s's''}(\mathbf{K}', \mathbf{K}'') e(k\mathbf{K}') (e(k\mathbf{K}'') - e(\mathbf{k})) + G_{s''s'}(\mathbf{K}'', \mathbf{K}') e(k\mathbf{K}'') (e(k\mathbf{K}') - e(\mathbf{k}))] dS. \end{aligned}$$

En remarquant que  $|\nabla f_{s's''}| = |\boldsymbol{\beta}^{s's''}|$ , et en notant :

$$H_1^{s's''}(\mathbf{K}', \mathbf{K}'') = \frac{K'^3 \sin \theta'}{|\boldsymbol{\beta}^{s's''}|} G_{s's''}(\mathbf{K}', \mathbf{K}''), \quad (6.19)$$

$$\text{et } H_2^{s's''}(\mathbf{K}', \mathbf{K}'') = \frac{K'^3 \sin \theta'}{|\boldsymbol{\beta}^{s's''}|} G_{s''s'}(\mathbf{K}'', \mathbf{K}'), \quad (6.20)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + 2\nu k^2 e &= \frac{\pi k^5}{\Omega} \sum_{s', s''} \int_{\mathfrak{S}_{s' s''}} \\ &\left\{ H_1^{s' s''} e(k\mathbf{K}') [e(k\mathbf{K}'') - e(\mathbf{k})] + H_2^{s' s''} e(k\mathbf{K}'') [e(k\mathbf{K}') - e(\mathbf{k})] \right\} dS, \end{aligned} \quad (6.21)$$

où l'intégration se fait dans l'espace semi-sphérique.

## 6.3 Propriétés du modèle

L'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de  $e(\mathbf{k}, t)$  est (6.21), avec une condition initiale choisie comme étant un spectre d'énergie isotrope du type Orszag :

$$e(\mathbf{k}, 0) = A \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 \right]. \quad (6.22)$$

La fonction présente un maximum en  $k = k_0$ , qui vaut  $A$ . Ce spectre tend bien vers 0 pour les grandes échelles, mais aussi pour les petites échelles, et suffisamment rapidement. Cette propriété assure que l'intégrale constituant le terme de transfert dans (6.21) converge. On va maintenant démontrer certaines propriétés du modèle AQNM, comme la conservation de l'énergie par le terme de transfert, pour ensuite effectuer une analyse dimensionnelle de l'équation, et se ramener à un problème à un seul paramètre physique.

### 6.3.1 Conservation de l'énergie

On va montrer que, sans viscosité et en partant d'un tenseur spectral quelconque, mais permettant tout de même le calcul du terme de transfert, la cascade non linéaire conserve l'énergie, ce qui revient à dire que l'énergie totale intégrée sur tout l'espace est constante en fonction du temps.

#### 6.3.1.1 Évolution de l'énergie totale

On part pour cela de l'équation (5.171) :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \pi \sum_{s', s''} \int \delta(F_{s' s''}) g_{s' s''} [e'(e'' - e) + s' h' (s'' h'' - h)] d^3 \mathbf{k}',$$

avec la relation  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0$ . On remplace cette condition par une intégration avec un Dirac :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial t}(\mathbf{k}, t) \\ &= \pi \sum_{s', s''} \iint \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \delta(F_{s' s''}) g_{s' s''} [e'(e'' - e) + s' h' (s'' h'' - h)] d^3 \mathbf{k}' d^3 \mathbf{k}''. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Pour obtenir l'équation d'évolution de l'énergie totale, on intègre sur  $\mathbf{k}$ , puis on fait les changements de variables  $\mathbf{p} = s'\mathbf{k}'$  et  $\mathbf{q} = s''\mathbf{k}''$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(t) &= \pi \sum_{s', s''} \iiint \delta(\mathbf{k} + s'\mathbf{p} + s''\mathbf{q}) \delta(F_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q})) g_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q}) \\ &\{e(s'\mathbf{p}) [e(s''\mathbf{q}) - e(\mathbf{k})] + s'h(s'\mathbf{p}) [s''h(s''\mathbf{q}) - h(\mathbf{k})]\} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

En exploitant les symétries de l'intégrale à droite de cette expression, on va montrer qu'elle est nulle.

### 6.3.1.2 Symétrisation des triades

On a  $\omega(s'\mathbf{p}) = s'\omega(\mathbf{p})$  et  $\omega(s''\mathbf{q}) = s''\omega(\mathbf{q})$ , grâce à la définition (3.90), donc :

$$F_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q}) = F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (6.25)$$

De plus, d'après (3.74), on a  $e(s'\mathbf{p}) = e(\mathbf{p})$  et  $e(s''\mathbf{q}) = e(\mathbf{q})$ , ainsi que, d'après (3.76),  $h(s'\mathbf{p}) = h(\mathbf{p})$  et  $h(s''\mathbf{q}) = h(\mathbf{q})$ . Puis, pour simplifier  $g_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q})$ , on revient à la définition (5.60) pour écrire :

$$\begin{aligned} &g_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q}) \\ &= -\frac{1}{4} P_{jlm}(\mathbf{k}) P_{rkn}(s''\mathbf{q}) N_j(\mathbf{k}) N_n^*(\mathbf{k}) N_l^{(s')} (s'\mathbf{p}) N_k^{(-s')} (s'\mathbf{p}) N_m^{(s'')} (s''\mathbf{q}) N_r^{(-s'')} (s''\mathbf{q}). \end{aligned}$$

La définition (3.40) prouve que  $P_{rkn}(s''\mathbf{q}) = s''P_{rkn}(\mathbf{q})$ . Enfin, la propriété (3.53) donne :

$$\begin{aligned} N_l^{(s')} (s'\mathbf{p}) N_k^{(-s')} (s'\mathbf{p}) &= N_l(\mathbf{p}) N_k^*(\mathbf{p}), \\ N_m^{(s'')} (s''\mathbf{q}) N_r^{(-s'')} (s''\mathbf{q}) &= N_m(\mathbf{q}) N_r^*(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement au résultat :

$$g_{s' s''}(\mathbf{k}, s'\mathbf{p}, s''\mathbf{q}) = s'' g_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (6.26)$$

L'expression (6.24) de l'intégrale du terme de transfert devient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(t) &= \pi \iiint \delta(F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})) g_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &\{f_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) e(\mathbf{p}) [e(\mathbf{q}) - e(\mathbf{k})] + f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) h(\mathbf{p}) h(\mathbf{q}) - f_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) h(\mathbf{p}) h(\mathbf{k})\} \\ &d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

où on a noté :

$$f_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{s', s''} s'' \delta(\mathbf{k} + s'\mathbf{p} + s''\mathbf{q}), \quad (6.28a)$$

$$f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{s', s''} s' \delta(\mathbf{k} + s'\mathbf{p} + s''\mathbf{q}), \quad (6.28b)$$

$$f_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{s', s''} s' s'' \delta(\mathbf{k} + s'\mathbf{p} + s''\mathbf{q}). \quad (6.28c)$$

Cette écriture a une forme très symétrique, et on cherche les invariants sous la transformation  $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$ , afin de prouver le caractère antisymétrique de l'intégrale.

### 6.3.1.3 Invariants

Il est clair que  $F_{11}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = F_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$  par définition de  $F_{11}$ . Pour  $g_{11}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k})$ , on a :

$$\begin{aligned} g_{11}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) &= -\frac{1}{4}P_{jlm}(\mathbf{q})N_j(\mathbf{q})N_l(\mathbf{p})N_m(\mathbf{k})P_{rkn}(\mathbf{k})N_r^*(\mathbf{k})N_k^*(\mathbf{p})N_n^*(\mathbf{q}) \\ &= -\frac{1}{4}P_{rkn}(\mathbf{q})N_r(\mathbf{q})N_k(\mathbf{p})N_n(\mathbf{k})P_{jlm}(\mathbf{k})N_j^*(\mathbf{k})N_l^*(\mathbf{p})N_m^*(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (6.29)$$

en faisant les changements d'indices  $j \leftrightarrow r$ ,  $l \leftrightarrow k$  et  $m \leftrightarrow n$ . On reconnaît l'expression de  $g_{11}^*(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ , et on a montré que  $g_{11}$  était réel donc  $g_{11}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = g_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ .

On écrit alors :

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \sum_{s', s''} s'' \delta(s'' \mathbf{k} + s' \mathbf{p} + \mathbf{q}) \\ &= \sum_{s', s''} s'' \delta(s'' (\mathbf{k} + s' s'' \mathbf{p} + s'' \mathbf{q})) \\ &= \sum_{s', s''} s'' \delta(\mathbf{k} + s' s'' \mathbf{p} + s'' \mathbf{q}) \quad \text{car } |s''| = 1 \\ &= \sum_{s', s''} s'' \delta(\mathbf{k} + s' \mathbf{p} + s'' \mathbf{q}), \end{aligned}$$

avec le changement d'indice  $s' \rightarrow s'' s'$ , pour  $s''$  fixé. Ainsi,  $f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = f_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Ensuite :

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) &= \sum_{s', s''} s' \delta(s'' \mathbf{k} + s' \mathbf{p} + \mathbf{q}) \\ &= \sum_{s', s''} s' \delta(\mathbf{k} + s' s'' \mathbf{p} + s'' \mathbf{q}) \\ &= \sum_{s', s''} s' s'' \delta(\mathbf{k} + s' \mathbf{p} + s'' \mathbf{q}), \end{aligned} \quad (6.30)$$

avec le changement d'indice  $s' \rightarrow s'' s'$ , pour  $s''$  fixé. Ainsi,  $f_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = f_3(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Enfin, on a aussi que  $f_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ , par symétrie.

Si on fait le changement  $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$  dans l'intégrale à droite de l'expression (6.27),  $\delta(F_{11})$ ,  $g_{11}$  et  $f_1$  restent inchangés. De plus,  $f_2$  est transformé en  $f_3$  et réciproquement. Finalement, on retrouve exactement l'opposé de l'intégrale à droite de (6.27), ce qui prouve que cette intégrale est nulle. L'énergie cinétique totale reste constante à tout instant, et elle est donc conservée au cours du temps.

### 6.3.1.4 Remarque sur la numérisation du modèle

Dans l'optique du passage au numérique du problème AQNM, il est intéressant de constater que si on force les modules des nombres d'ondes à rester entre deux bornes, que l'on notera plus tard  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , alors le raisonnement reste valable et le schéma est toujours conservatif. Si on rajoute à cette contrainte la discrétisation de



l'espace spectral, la propriété de conservation devrait aussi toujours être vérifiée, à condition que les arrondis sur le calcul de l'énergie en tout point restent raisonnables. En effet, on se ramène à un système discret pour lequel tous les échanges d'énergie se font à l'intérieur d'un ensemble fini de vecteurs d'ondes.

Dans le cas où la viscosité numérique est nulle, et si on suppose les erreurs d'arrondis négligeables, on s'attend donc à ce que le système discrétisé entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$  soit conservatif. Ainsi, on peut penser que l'énergie va se déplacer progressivement des structures les plus énergétiques vers les moins énergétiques, pour finalement atteindre une équipartition de l'énergie sur l'ensemble des vecteurs d'ondes. Cela correspond à un spectre  $\mathbf{k} \mapsto e(\mathbf{k})$  constant, et donc à un spectre  $k \mapsto E(k)$  en  $k^2$ . Par contre, si les erreurs numériques sont trop importantes, alors on peut par exemple imaginer que le phénomène d'accumulation d'énergie sera accentué ou qu'une instabilité apparaisse, conduisant à la saturation numérique.

### 6.3.2 Analyse dimensionnelle

L'équation d'évolution du spectre (6.21) peut être facilement adimensionnée, du moins du point de vue mathématique. Un nombre adimensionnel va ainsi apparaître, et c'est le seul paramètre qui va gouverner la dynamique du spectre. Par analogie, on l'appellera *nombre de Reynolds effectif*, car il joue le même rôle que le nombre de Reynolds usuel dans l'équation d'évolution. On déduira ensuite de cette même équation le temps caractéristique des effets non linéaires.

#### 6.3.2.1 Adimensionnalisation

Pour procéder à l'adimensionnalisation de (6.21), on pose :

$$\mathbf{k} = k_0 \hat{\mathbf{k}} \text{ et donc } k = k_0 \hat{k}, \quad (6.31a)$$

$$e(\mathbf{k}, t) = A \hat{e}(\hat{\mathbf{k}}, t), \quad (6.31b)$$

$$t = \frac{\Omega}{\pi A k_0^5} \hat{t}. \quad (6.31c)$$

Cela donne :

$$\frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \mathfrak{R}^{-1} \hat{k}^2 \hat{e} = \hat{T}, \quad (6.32)$$

avec :

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi A k_0^3}{2\Omega\nu}, \quad (6.33)$$

le nombre de Reynolds effectif, et :

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\mathbf{k}}) &= \hat{k}^5 \\ &\sum_{s', s''} \int_{S_{s' s''}} H_1^{s' s''} e(\hat{k} \mathbf{K}') \left[ e(\hat{k} \mathbf{K}'') - e(\hat{\mathbf{k}}) \right] + H_2^{s' s''} e(\hat{k} \mathbf{K}'') \left[ e(\hat{k} \mathbf{K}') - e(\hat{\mathbf{k}}) \right] dS, \end{aligned} \quad (6.34)$$

un terme de transfert non linéaire adimensionnel. Le nombre de Reynolds effectif mesure en fait le rapport entre les effets non linéaires et ceux liés à la rotation,

la viscosité étant ici un paramètre ajustable numériquement. De plus, le spectre d'énergie adimensionnel initial est :

$$\hat{e}(\hat{\mathbf{k}}, 0) = \hat{k}^2 e^{-\hat{k}^2}, \quad (6.35)$$

ce qui donne un maximum d'énergie en  $\hat{k} = 1$ , où elle vaut  $1/e$ . A noter que les termes  $H_1^{s's''}$ ,  $H_2^{s's''}$ ,  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$  sont sans dimension.

Dans la suite, on omettra souvent les chapeaux : en effet, numériquement, un problème adimensionnel et un problème dimensionnel sont traités exactement de la même manière. On a ainsi transformé le problème dimensionnel à plusieurs paramètres physiques ( $\Omega$ ,  $\nu$  etc.) en un problème adimensionnel ne faisant intervenir qu'un seul paramètre, à savoir le nombre de Reynolds effectif. Si on le fixe à une certaine valeur, l'équation (6.32) est déterministe et doit donner une solution unique. La seule dépendance en  $\Omega$  est celle contenue explicitement dans le nombre de Reynolds effectif, car le nombre de Rossby n'apparaît plus.

### 6.3.2.2 Temps caractéristiques

On a vu qu'en turbulence isotrope, le temps caractéristique de la cascade d'énergie est donné par le rapport entre la taille des grandes échelles et la vitesse turbulente. On écrit en effet que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} \sim T \iff t_{iso} \sim \frac{L}{u'}. \quad (6.36)$$

Si on considère, en première approche, que la rotation n'affecte pas cette échelle de temps, on obtient :

$$t_{iso} \sim Ro^{-1}\Omega^{-1}. \quad (6.37)$$

Cela permet de dire que plus la rotation est forte, plus le nombre de Rossby est petit, et donc plus le temps caractéristique de la cascade est élevé. Les transferts d'énergie non linéaires sont donc inhibés par la rotation.

Par contre, si l'on considère l'équation (6.21), et que l'on calcule, de la même façon, le rapport entre l'énergie et le transfert non linéaire, on se rend compte que :

$$\begin{aligned} e &\sim u'^2 L^3, \\ T &\sim \frac{e^2}{L^5 \Omega} \sim \frac{u'^4 L}{\Omega}, \\ \text{d'où } t_{rot} &\sim \frac{L^2 \Omega}{u'^2} \sim Ro^{-2} \Omega^{-1}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Ainsi, le temps de retournement usuel des tourbillons est multiplié par  $Ro^{-1}$ , et donc la cascade est encore plus ralentie que ce que l'on pourrait attendre avec une estimation simpliste. La turbulence dominée par la rotation ordonne les échelles de temps de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{-1} & \ll & Ro^{-1}\Omega^{-1} & \ll & Ro^{-2}\Omega^{-1}. \\ \text{Effets} & & \text{Effets non linéaires} & & \text{Effets non linéaires} \\ \text{linéaires} & & \text{en isotrope} & & \text{avec rotation} \end{array}$$

## 6.4 Implémentation numérique

On présente ici, dans un premier temps, les choix qui sont faits pour le maillage de l'espace dans la direction radiale, et les deux directions angulaires. Ensuite, on s'intéresse plus particulièrement à l'évaluation de la contribution des surfaces résonantes au terme de transfert. Il faut déterminer quelles portions de l'espace spectral sont traversées par une surface résonante donnée, et dans chacune de ces portions, calculer l'aire élémentaire de la surface concernée, ce qui nécessite une méthode spécifique. Puis, on présente la méthode d'interpolation, quand cela s'avère nécessaire, de l'énergie, opération qui doit être relativement précise. Enfin, on verra quels sont les schémas numériques utilisés pour l'intégration temporelle de l'équation pour le spectre d'énergie.

### 6.4.1 Discrétisation de l'espace spectral

A un instant  $t$ , on dispose du spectre d'énergie en tout point. Pour un  $\mathbf{k}$  donné, c'est-à-dire pour un module  $k$  et un angle  $\theta$  fixés, il s'agit de calculer le terme de transfert associé à ce nombre d'onde et d'en déduire la valeur de l'énergie au pas de temps suivant. Le terme de transfert fait intervenir des intégrations sur les surfaces résonantes dans l'espace  $(\rho, \theta', \phi')$ , comprises dans le parallélépipède infini défini par  $\rho \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $\theta' \in ]0, \pi[$  et  $\phi' \in ]0, \pi[$ . Les vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}' = k\mathbf{K}'$  prendront leurs valeurs sur un maillage à construire, aux points duquel toutes les fonctions seront connues. On verra que les valeurs des fonctions en  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}' = k\mathbf{K}''$  seront interpolées si  $k\mathbf{K}''$  tombe entre des points du maillage, et seront négligées si  $k\mathbf{K}''$  tombe à l'extérieur du maillage.

Dans la direction radiale, le domaine  $[0, +\infty[$  est infini, il faut donc le réduire à un domaine fini par troncature. On impose à  $k$ ,  $k'$  et  $k''$  de prendre des valeurs entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , réparties sur un maillage de pas exponentiel. Dans les deux directions angulaires, le domaine est borné, on se contentera d'une répartition régulière des angles. On aura donc divisé l'espace semi-sphérique en petites boîtes parallélépipédiques de taille fixe  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_\phi$ . Pour une boîte contribuant au terme de transfert, on choisira d'évaluer les différentes quantités au milieu de la boîte. Dans l'espace sphérique usuel, ces boîtes sont de taille fixe selon  $\theta'$  et  $\phi'$  mais de taille variant exponentiellement dans la direction radiale. Enfin, dans l'espace spectral cartésien de départ, ce sont des tranches contenues entre deux sphères de taille augmentant exponentiellement, et comprises entre deux valeurs angulaires dans les directions  $\theta$  et  $\phi$ .

#### 6.4.1.1 Direction radiale

Dans la direction radiale, le domaine infini est réduit entre deux bornes. On veut que le module des nombres d'ondes soit compris entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , ces deux valeurs étant fixées pour la description qui suit. On aimerait de plus que le module prenne  $M_\rho + 1$  de valeurs réparties logarithmiquement. On écrit ainsi :

$$k = k_{min}e^{j\varepsilon_\rho}, \quad (6.39)$$

avec l'entier  $j$  dans  $\{0, ..M_\rho\}$ . La valeur de  $\varepsilon_\rho$  reste à choisir, et si on veut qu'en  $j = M_\rho$ , on atteigne la valeur  $k_{max}$ , on doit vérifier :

$$\varepsilon_\rho = \frac{1}{M_\rho} \log \left( \frac{k_{max}}{k_{min}} \right). \quad (6.40)$$

Dans les intégrales, le vecteur  $k\mathbf{K}'$  devant rester lui aussi sur le maillage, on discrétisera  $\rho$  sous la forme :

$$\rho = l\varepsilon_\rho, \quad (6.41)$$

avec l'entier  $l$  variant dans  $\{-M_\rho, ..M_\rho\}$ . On a ainsi :

$$|k\mathbf{K}'| = k_{min}e^{(j+l)\varepsilon_\rho}, \quad (6.42)$$

ce qui correspond à l'indice  $j + l$  du maillage des modules, en s'assurant que  $j + l$  reste dans  $\{0, ..M_\rho\}$ . On aimerait enfin que  $\varepsilon_\rho$  soit le plus petit possible, afin de couvrir finement l'ensemble des modules à  $k_{min}$  et  $k_{max}$  fixés, ce qui revient à dire que l'on prendra  $M_\rho$  le plus grand possible.

#### 6.4.1.2 Direction azimutale

Dans la direction azimutale, on choisit une répartition régulière des angles sur  $]0, \pi[$ , en prenant :

$$\varepsilon_\theta = \frac{\pi}{M_\theta}, \quad (6.43)$$

où  $M_\theta$  est un entier définissant le nombre de boîtes dans la direction méridienne. Ainsi, les angles  $\theta$  et  $\theta'$  prendront les valeurs discrètes :

$$\theta = \left( p - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\theta \quad (6.44)$$

$$\text{et } \theta' = \left( m - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\theta, \quad (6.45)$$

où les entiers  $p$  et  $m$  décrivent  $\{1, ..M_\theta\}$ . Si  $\varepsilon_\theta$  est suffisamment petit, alors le premier angle atteint,  $\varepsilon_\theta/2$ , est proche de 0, et le dernier angle atteint,  $(M_\theta - 1/2) \varepsilon_\theta = \pi - \varepsilon_\theta/2$ , est proche de  $\pi$ . Il s'agira de prendre  $M_\theta$  le plus grand possible.

#### 6.4.1.3 Direction méridienne

Dans la direction méridienne, on procède de même, en choisissant :

$$\varepsilon_\phi = \frac{\pi}{M_\phi}, \quad (6.46)$$

où  $M_\phi$  est un entier définissant le nombre de boîtes dans la direction azimutale. Les angles  $\phi'$  de  $]0, \pi[$  prendront les valeurs discrètes :

$$\phi' = \left( n - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\phi, \quad (6.47)$$

où l'entier  $n$  décrit  $\{1, ..M_\phi\}$ . Il faut noter que l'axisymétrie de  $e$  rend la discrétisation de  $\phi$  obsolète. De même que pour  $\varepsilon_\theta$ , si  $\varepsilon_\phi$  est suffisamment petit, alors le premier angle atteint,  $\varepsilon_\phi/2$ , est proche de 0, et le dernier angle atteint,  $(M_\phi - 1/2) \varepsilon_\phi = \pi - \varepsilon_\phi/2$ , est proche de  $\pi$ . Il s'agira de prendre  $M_\phi$  le plus grand possible. On supposera donc dans la suite que  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_\phi$  sont du même petit ordre de grandeur,  $O(\varepsilon)$ .

## 6.4.2 Discrétisation des surfaces résonantes

Pour un  $\mathbf{k}$  et une surface résonante fixés, l'intégrale sur cette surface va se transformer en une somme finie de termes, chacun représentant la contribution d'une boîte  $(l, m, n)$  de l'espace des  $(\rho, \theta', \phi')$ . Pour un triplet  $(l, m, n)$ , on rejette d'abord la boîte si  $K' > K''$ . Ensuite, seules les boîtes qui sont intersectées par la surface résonante considérée sont conservées, et elles vont apporter une contribution non nulle à l'intégrale.

### 6.4.2.1 Rejet des boîtes

On choisit un triplet  $(l, m, n)$ . On calcule à partir de là, les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{K}''$ , d'où on déduit leur normes  $K'$  et  $K''$ . La boîte est tout d'abord rejetée si  $kK'$  ou  $kK''$  tombent à l'extérieur de la zone discrétisée, ou encore si  $K' > K''$ . On choisit alors une surface résonante, c'est-à-dire un couple  $(s', s'')$ . Parmi l'ensemble des boîtes que l'on conserve, toutes ne sont pas intersectées par la surface. Cette surface étant définie par :

$$f_{s's''}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \cos \theta + s' \frac{K'_3}{K'} + s'' \frac{K''_3}{K''} = 0,$$

il faut déterminer si la fonction  $f_{s's''}$  s'annule quelque part dans la boîte. On s'intéresse alors aux valeurs prises par cette fonction aux coins de la boîte. La fonction  $f_{s's''}$  est continue et une boîte est un domaine convexe. Donc, si on trouve deux coins auxquels la fonction prend des valeurs de signes opposés, alors on aura que la fonction s'annule forcément quelque part à l'intérieur de la boîte. Si c'est le cas, la boîte est conservée, sinon elle est rejetée.

Il faut noter que cette méthode ne permet en aucun cas de dire si la surface passe une fois ou plus d'une fois dans la boîte, et rejette certainement des boîtes où la surface n'intersecte qu'une des faces. On peut néanmoins dire qu'avec une taille de boîte très petite, la contribution qui est négligée a des raisons de l'être.

### 6.4.2.2 Évaluation des grandeurs à la surface

Pour une de ces boîtes qui contribuent à l'intégrale, l'évaluation des grandeurs se fait de la façon suivante :

1. Les fonctions  $H_1^{s's''}$  et  $H_2^{s's''}$  sont évaluées en son centre.
2. L'énergie  $e(k\mathbf{K}')$  est évaluée dans la boîte correspondant au vecteur  $k\mathbf{K}'$ , car ce dernier est forcément sur le maillage, par construction.

3. L'énergie  $e(k\mathbf{K}'')$  est éventuellement interpolée si le vecteur  $k\mathbf{K}''$  ne tombe pas sur un point du maillage.
4. L'élément d'aire  $dS$  est évalué comme étant l'aire de la surface intersectant la boîte, cette évaluation nécessitant une analyse à part entière.

Ces deux derniers points nécessitent des méthodes numériques particulières, qui sont décrites par la suite.

### 6.4.3 Évaluation de l'aire dans la boîte

Maintenant que l'on n'a gardé que les boîtes qui vont contribuer à l'intégration sur la surface  $f_{s's''} = 0$ , il faut déterminer quelle est la portion d'aire de la surface contenue dans la boîte. La géométrie des surfaces résonantes est très complexe, il y a souvent des points multiples, et des zones de forte courbure. Afin de simplifier l'analyse et pour diminuer les coûts de calcul, on considère qu'une surface intersecte une fois au maximum une boîte donnée, et que son aire sera approchée par celle d'un plan, équivalent à un plan tangent à la surface. Une fois l'équation de ce plan déterminée, il s'agira de calculer son aire. Pour cela, on calculera d'abord l'aire de la projection de ce plan sur une des faces de la boîte, et on se ramènera à son aire réelle en multipliant cette valeur par le cosinus de l'angle de projection.

#### 6.4.3.1 Équation du plan

Le centre de la boîte, fixé dans cette partie, est défini par le vecteur  $\mathbf{K}'$  de coordonnées  $(\rho, \theta', \phi')$  correspondant à un triplet  $(l, m, n)$ . Soit un vecteur  $\mathbf{K}_s$  quelconque de la surface  $\mathfrak{S}_{s's''}$ , de coordonnées  $(\rho_s, \theta_s, \phi_s)$ . On développe  $f_{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s)$  autour de  $(\rho, \theta', \phi')$  :

$$\begin{aligned} f_{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) &= f_{s's''}(\rho, \theta', \phi') + \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \rho}(\rho, \theta', \phi')(\rho_s - \rho) \\ &+ \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \theta'}(\rho, \theta', \phi')(\theta_s - \theta') + \frac{\partial f_{s's''}}{\partial \phi'}(\rho, \theta', \phi')(\phi_s - \phi'). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Or  $f_{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) = 0$  car  $\mathbf{K}_s$  est sur la surface, et on retrouve donc les coordonnées du gradient  $\beta^{s's''}$  :

$$\begin{aligned} f_{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) &= -\beta_{\rho}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')(\rho_s - \rho) - \beta_{\theta'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')(\theta_s - \theta') - \beta_{\phi'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')(\phi_s - \phi'). \end{aligned} \quad (6.49)$$

On pose alors :

$$\mu_{\rho}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) = -\frac{\beta_{\rho}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')}{|\beta_{\rho}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')|} \frac{2(\rho_s - \rho)}{\varepsilon_{\rho}}, \quad (6.50a)$$

$$\mu_{\theta'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) = -\frac{\beta_{\theta'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')}{|\beta_{\theta'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')|} \frac{2(\theta_s - \theta')}{\varepsilon_{\theta}}, \quad (6.50b)$$

$$\text{et } \mu_{\phi'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) = -\frac{\beta_{\phi'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')}{|\beta_{\phi'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi')|} \frac{2(\phi_s - \phi')}{\varepsilon_{\phi}}. \quad (6.50c)$$

En notant :

$$d_{\rho}^{s's''} = \varepsilon_{\rho} \left| \beta_{\rho}^{s's''}(\rho, \theta', \phi') \right|, \quad (6.51a)$$

$$d_{\theta'}^{s's''} = \varepsilon_{\theta} \left| \beta_{\theta'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi') \right|, \quad (6.51b)$$

$$\text{et } d_{\phi'}^{s's''} = \varepsilon_{\phi} \left| \beta_{\phi'}^{s's''}(\rho, \theta', \phi') \right|, \quad (6.51c)$$

on peut écrire :

$$\mu_{\rho}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) d_{\rho}^{s's''} + \mu_{\theta'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) d_{\theta'}^{s's''} + \mu_{\phi'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) d_{\phi'}^{s's''} = \frac{F_{s's''}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')}{\Omega}. \quad (6.52)$$

C'est l'équation d'un plan dans l'espace  $(\rho, \theta', \phi')$ , et les  $\mu^{s's''}$  sont des coordonnées réduites par rapport au centre de la boîte. Comme  $\mathbf{K}_s$  est dans la boîte, on a  $|\rho_s - \rho| \leq \varepsilon_{\rho}/2$ , d'où :

$$\left| \mu_{\rho}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s) \right| = \frac{2|\rho_s - \rho|}{\varepsilon_{\rho}} \leq 1. \quad (6.53)$$

De même,  $|\mu_{\theta'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s)| \leq 1$  et  $|\mu_{\phi'}^{s's''}(\rho_s, \theta_s, \phi_s)| \leq 1$ . On se place maintenant dans l'espace des  $\mu^{s's''}$ , qui est homothétique par rapport à l'espace  $(\rho, \theta', \phi')$ .

### 6.4.3.2 Projection du plan sur une face

Le vecteur  $(d_{\rho}^{s's''}, d_{\theta'}^{s's''}, d_{\phi'}^{s's''})$  étant un vecteur normal à ce plan, on cherche quelle est sa plus grande coordonnée, car on va ensuite s'intéresser à la projection de ce plan suivant cette coordonnée. On numérote les coordonnées  $\rho, \theta', \phi'$  de 1 à 3 de telle façon que  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ . L'équation du plan devient :

$$d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 + d_3 \mu_3 = \frac{F_{s's''}}{\Omega}. \quad (6.54)$$

On cherche alors la projection du plan sur la face  $\mu_3 = 1$ . L'intersection du plan et de  $\mu_3 = 1$  donne une première droite. L'intersection du plan et de  $\mu_3 = -1$  donne une deuxième droite. On en déduit directement l'équation de la droite symétrique par rapport à  $\mu_3 = 0$ , et qui appartient donc à  $\mu_3 = 1$ . On obtient donc deux droites d'équations :

$$d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 = \frac{F_{s's''}}{\Omega} - d_3 = \lambda_{-}, \mu_3 = 1, \quad (6.55a)$$

$$\text{et } d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 = \frac{F_{s's''}}{\Omega} + d_3 = \lambda_{+}, \mu_3 = 1. \quad (6.55b)$$

La figure 6.1 rend compte de l'aspect géométrique à l'intérieur de la boîte : le plan approximant la surface résonante est en rouge, sa projection sur la face  $\mu_3 = 1$  est en vert, et les trois droites intersectant les faces sont en pointillés.

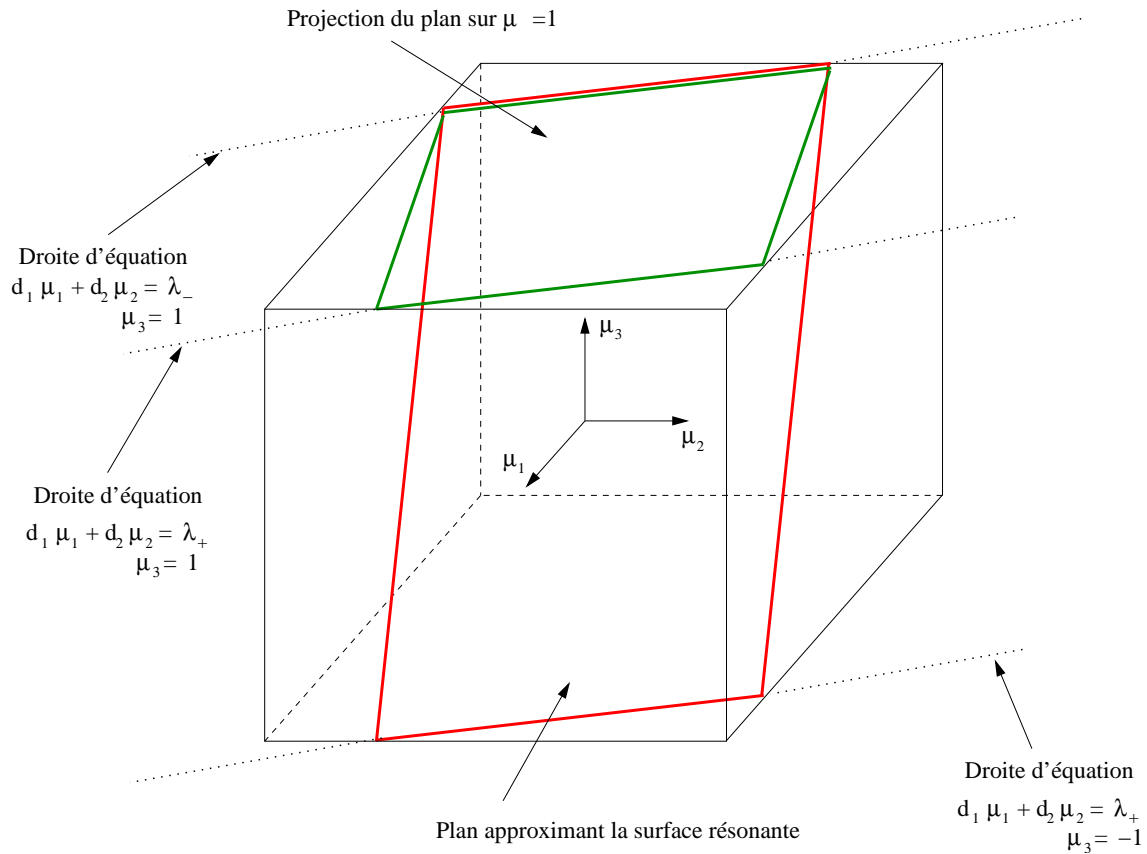


FIG. 6.1 – Plan approximant une surface résonante et sa projection dans la boîte

### 6.4.3.3 Calcul d'aire auxiliaire

La figure 6.2 est une vue de dessus de la boîte de la figure 6.1. Elle présente l'aire de la projection du plan sur la face  $\mu_3 = 1$  comme la différence entre l'aire bleue et l'aire marron. On note  $A(\lambda)$  l'aire délimitée par les côtés  $\mu_1 = -1$ ,  $\mu_2 = -1$ , une partie de  $\mu_1 = 1$  et de  $\mu_2 = 1$ , et la droite d'équation  $d_1\mu_1 + d_2\mu_2 = \lambda$ . Cette aire est délimitée par les pointillés épais de la figure 6.2. L'aire de la projection recherchée est donc  $A(\lambda_+) - A(\lambda_-)$ . Le problème est symétrique par rapport à la droite d'équation  $d_1\mu_1 + d_2\mu_2 = \lambda$  qui passe par 0 : on peut se restreindre d'abord à  $\lambda \leq 0$  et compléter par symétrie.

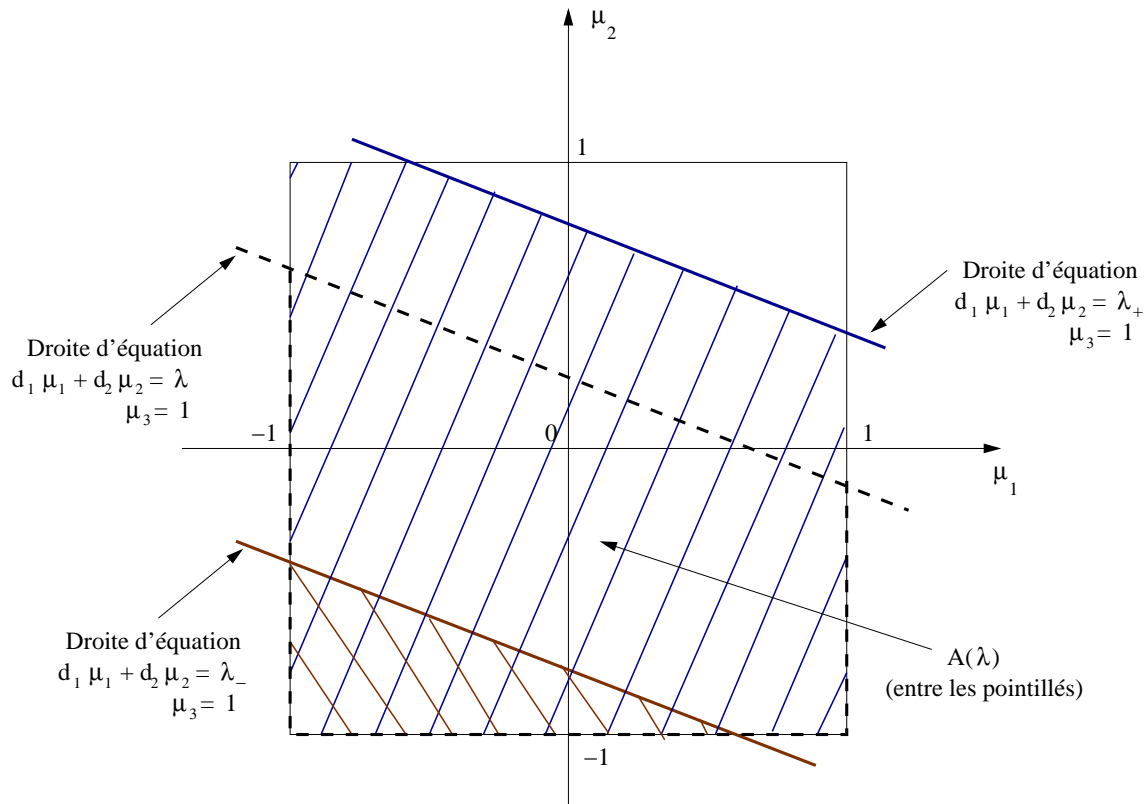
On a quatre cas à traiter :

1. La droite  $d_1\mu_1 + d_2\mu_2 = \lambda$  n'a pas d'intersection avec le carré. Il est équivalent de dire qu'elle coupe la droite  $\mu_2 = -1$  pour  $\mu_1 < -1$ . Le  $\mu_1$  recherché est tel que  $d_1\mu_1 = \lambda + d_2$ , donc on a  $\lambda + d_2 < -d_1$ . Donc :

$$\text{si } \lambda + d_2 < -d_1, A(\lambda) = 0. \quad (6.56)$$

2. La droite  $d_1\mu_1 + d_2\mu_2 = \lambda$  a une intersection avec le carré : elle coupe la droite  $\mu_2 = -1$  pour un  $\mu_1$  entre  $-1$  et  $1$  inclus. Cela correspond à  $|\lambda + d_2| \leq d_1$ . L'aire recherchée est alors un triangle rectangle de côtés facilement calculables.




 FIG. 6.2 – Vue de dessus de la projection du plan sur la face  $\mu_3 = 1$  dans la boîte

Donc :

$$\text{si } |\lambda + d_2| \leq d_1, A(\lambda) = \frac{(\lambda + d_1 + d_2)^2}{2d_1d_2}. \quad (6.57)$$

3. La droite  $d_1\mu_1 + d_2\mu_2 = \lambda$  a une intersection avec le carré : elle coupe la droite  $\mu_2 = -1$  pour un  $\mu_1$  strictement supérieur à 1. Cela correspond à  $d_1 < \lambda + d_2 \leq d_2$  car  $\lambda$  doit rester négatif. L'aire recherchée est celle d'un triangle rectangle et d'un rectangle. Donc :

$$\text{si } d_1 < \lambda + d_2 \leq d_2, A(\lambda) = 2 \frac{\lambda + d_2}{d_1}. \quad (6.58)$$

4. Enfin, dans le cas où  $\lambda$  est positif, l'aire se déduit des trois cas précédents en écrivant que c'est l'aire du carré tout entier, de côté 2, moins l'aire pour  $-\lambda$ .  
Donc :

$$\text{si } \lambda \geq 0, A(\lambda) = 4 - A(-\lambda). \quad (6.59)$$

Pour se ramener à la valeur de l'aire projeté dans l'espace  $(\rho, \theta', \phi')$ , il faut passer d'un carré de côté 2 à un rectangle de côtés  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Il faut donc multiplier les aires précédentes par  $\varepsilon_1\varepsilon_2/4$ . Finalement, l'aire du plan approximant la surface résonante se déduit en remarquant que l'aire projetée est égale à l'aire initiale multipliée par le cosinus de l'angle  $\alpha$  de projection. La projection s'étant faite dans la direction 3,

on a :

$$\cos \alpha = \frac{|\beta_3^{s's''}|}{|\boldsymbol{\beta}^{s's''}|}. \quad (6.60)$$

L'aire estimée  $\Delta S$  de la surface résonante, dans la boîte par laquelle elle passe, vaut donc :

$$\Delta S = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \frac{|\beta_3^{s's''}|}{|\boldsymbol{\beta}^{s's''}|} [A(\lambda_+) - A(\lambda_-)]. \quad (6.61)$$

La contribution de cette boîte à l'intégrale est finalement :

$$\left\{ H_1^{s's''} e(k\mathbf{K}') [e(k\mathbf{K}'') - e(\mathbf{k})] + H_2^{s's''} e(k\mathbf{K}'') [e(k\mathbf{K}') - e(\mathbf{k})] \right\} \Delta S, \quad (6.62)$$

Pour obtenir la contribution de la boîte au terme de transfert, il reste à évaluer la valeur de  $e(k\mathbf{K}'')$  quand  $k\mathbf{K}''$  se trouve entre des points du maillage.

#### 6.4.4 Interpolation de l'énergie

Pour donner une valeur à  $e(k\mathbf{K}'')$ , il faut utiliser une méthode d'interpolation, que l'on choisit sur neuf points, afin d'avoir un bon compromis entre temps de calcul et précision.

##### 6.4.4.1 Description de la méthode

On a vu que  $\mathbf{k}$  prenait des valeurs sur le maillage, et c'est aussi le cas pour  $k\mathbf{K}'$ , grâce à la discrétisation des coordonnées semi-sphériques de  $\mathbf{K}'$ . On peut alors utiliser la symétrie miroir si  $\theta' > \pi/2$ , et changer  $\theta'$  en  $\pi - \theta'$ . Par contre, rien n'empêche  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  de ne pas tomber exactement sur un point du maillage, et ce sera même souvent le cas. On a alors besoin d'interpoler entre certains points du maillage. Par axisymétrie, l'énergie en  $\mathbf{k}''$  ne dépend que de  $\log k''$  et de  $\theta''$ . L'interpolation se fait donc en deux dimensions en considérant les centres des boîtes.

On cherche d'abord, dans la direction radiale, l'indice  $q$  du maillage, entier ou pas, correspondant à  $k\mathbf{K}''$  :

$$k\mathbf{K}'' = K'' k_{min} e^{j\varepsilon_\rho} = k_{min} e^{q\varepsilon_\rho}.$$

On en déduit que :

$$q = j + \frac{\log K''}{\varepsilon_\rho}. \quad (6.64)$$

De même, dans la direction azimutale, on cherche l'indice  $r$ , entier ou pas, correspondant à  $k\mathbf{K}''$  :

$$\left( r - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\theta = \theta''$$

On en déduit que :

$$r = \frac{1}{2} + \frac{\theta''}{\varepsilon_\theta}. \quad (6.66)$$

Auparavant, on a remplacé  $\theta''$  par  $\pi - \theta''$  si  $\theta'' > \pi/2$ , grâce à la symétrie miroir. La plupart du temps, ces indices  $q$  et  $r$  sont fractionnaires.

Comme  $\varepsilon$  est petit, on pourrait penser que le choix du schéma d'interpolation n'a pas vraiment d'importance. On choisirait par exemple pour la valeur de l'énergie la valeur en le point le plus proche. Par contre, si l'on tient compte des fortes variations de l'énergie à certains endroits, un schéma d'ordre 2 est certainement préférable. Cependant un tel schéma peut conduire à des énergies  $e(\mathbf{k}'')$  négatives dans la zone dissipative, du fait des faibles énergies à cet endroit.

#### 6.4.4.2 Schéma d'interpolation d'ordre 2

On appelle  $l''$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $\log K''/\varepsilon_\rho$ , et  $m''$  l'entier le plus proche de  $1/2 + \theta''/\varepsilon_\theta$ . On utilise un schéma d'interpolation unidimensionnel d'ordre 2 dans la direction azimutale entre les points :

$$\left. \begin{array}{l} (j + l'' - 1, m'' - 1) \\ (j + l'' - 1, m'') \\ (j + l'' - 1, m'' + 1) \end{array} \right\} \text{ pour l'énergie en } (j + l'' - 1, \frac{1}{2} + \frac{\theta''}{\varepsilon_\theta}),$$

$$\left. \begin{array}{l} (j + l'', m'' - 1) \\ (j + l'', m'') \\ (j + l'', m'' + 1) \end{array} \right\} \text{ pour l'énergie en } (j + l'', \frac{1}{2} + \frac{\theta''}{\varepsilon_\theta}),$$

$$\left. \begin{array}{l} (j + l'' + 1, m'' - 1) \\ (j + l'' + 1, m'') \\ (j + l'' + 1, m'' + 1) \end{array} \right\} \text{ pour l'énergie en } (j + l'' + 1, \frac{1}{2} + \frac{\theta''}{\varepsilon_\theta}).$$

On a le choix entre différents schémas, mais on adoptera un schéma de type Simpson, c'est-à-dire qu'on fait passer une parabole par les trois points connus. Puis on utilise à nouveau un schéma unidimensionnel d'ordre 2, mais dans la direction radiale cette fois :

$$\left. \begin{array}{l} (j + l'' - 1, 1/2 + \theta''/\varepsilon_\theta) \\ (j + l'', 1/2 + \theta''/\varepsilon_\theta) \\ (j + l'' + 1, 1/2 + \theta''/\varepsilon_\theta) \end{array} \right\} \text{ pour l'énergie en } (j + \frac{\log K''}{\varepsilon_\rho}, \frac{1}{2} + \frac{\theta''}{\varepsilon_\theta}).$$

Pour un spectre d'énergie fourni à l'instant  $t$ , on est maintenant capable de calculer, en tout  $\mathbf{k}$ , le terme de transfert associé. Il reste à calculer la valeur du spectre d'énergie à un instant suivant, en utilisant un schéma temporel. Deux sont utilisés : un schéma Euler visqueux et un schéma implicite.

#### 6.4.5 Schémas temporels

On part de l'équation adimensionnée (6.32) :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(t) + \frac{k^2}{\mathfrak{R}} e(t) = T(t), \quad (6.67)$$

en omettant les chapeaux et les dépendances en  $\mathbf{k}$ , et avec  $T(t)$  connu. On notera  $dt$  le petit pas de temps numérique.

### 6.4.5.1 Schéma Euler visqueux

On fait le changement de variable dans (6.67) :

$$f(t) = \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}t\right) e(t),$$

pour inclure les effets linéaires de la viscosité. La fonction  $f$  vérifie ainsi l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t) = \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}t\right) T(t).$$

On intègre l'équation entre  $t$  et  $t + dt$  et on obtient :

$$f(t + dt) - f(t) = \int_t^{t+dt} \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}u\right) T(u) du.$$

En faisant le changement de variable  $v = u - t$ , cela donne :

$$f(t + dt) - f(t) = \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}t\right) \int_0^{dt} \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}v\right) T(v + t) dv.$$

Pour un pas de temps  $dt$  donné, cette relation est exacte, mais fait intervenir un calcul coûteux d'intégrale. Il faut donc donner une valeur approchée de ce terme. On considère que le terme de transfert n'évolue pas sur l'intervalle de temps considéré. Dans la suite, on notera avec une tilde les fonctions approchées. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t + dt) - f(t) &= T(t) \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}t\right) \int_0^{dt} \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}v\right) dv \\ &= \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}t\right) \frac{\mathfrak{R}}{k^2} \left[ \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}dt\right) - 1 \right] T(t). \end{aligned}$$

On se ramène à :

$$\exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}dt\right) \tilde{e}(t + dt) - e(t) = \frac{\mathfrak{R}}{k^2} \left[ \exp\left(\frac{k^2}{\mathfrak{R}}dt\right) - 1 \right] T(t),$$

soit :

$$\tilde{e}(t + dt) = \exp\left(-\frac{k^2}{\mathfrak{R}}dt\right) e(t) + \frac{\mathfrak{R}}{k^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k^2}{\mathfrak{R}}dt\right) \right] T(t), \quad (6.69)$$

relation qui constitue le schéma Euler visqueux.

Ce schéma est correct pour un nombre de Reynolds effectif fini, mais n'est pas applicable si celui-ci tend vers l'infini. Si on prend  $\mathfrak{R}$  très grand dans l'expression (6.69), on trouve :

$$\tilde{e}(t + dt) = e(t) + T(t)dt, \quad (6.70)$$

ce qui est bien le schéma numérique approché du type Euler obtenu à partir de (6.67), c'est-à-dire un schéma différences finies temporel. Cependant, l'estimation

numérique du coefficient devant le  $T(t)$  dans (6.69) conduit à multiplier un nombre proche de 0 par un nombre proche de l'infini. Le résultat est alors imprévisible, car on atteint la saturation du calculateur en termes de précision machine. En l'occurrence, un processeur IBM trouve une valeur de 0 pour ce coefficient, et on n'observe naturellement pas d'évolution du spectre. C'est pourquoi on cherche un autre schéma numérique de même type, afin de pouvoir passer à la limite dans le cas d'un grand nombre de Reynolds effectif, sans problème de division par un nombre très petit.

#### 6.4.5.2 Schéma implicite

A partir de l'équation (6.67), on approche maintenant la dérivée par un schéma différences finies usuel :

$$\frac{\widetilde{\partial e}}{\partial t}(t) = \frac{\tilde{e}(t + dt) - e(t)}{dt},$$

mais au lieu de considérer le terme visqueux au temps  $t$ , on utilise un schéma centré en temps :

$$\frac{k^2}{\mathfrak{R}}\tilde{e}(t) = \frac{k^2}{2\mathfrak{R}}[e(t) + \tilde{e}(t + dt)].$$

On obtient finalement :

$$\tilde{e}(t + dt) = \frac{1 - \mathfrak{R}^{-1}k^2dt/2}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2dt/2}e(t) + \frac{dt}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2dt/2}T(t), \quad (6.71)$$

qui est un schéma implicite, dans le sens où le calcul de  $e(t)$  fait intervenir la valeur  $e(t + dt)$ .

La limite  $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$  dans le schéma implicite (6.71) donne à nouveau :

$$\tilde{e}(t + dt) = e(t) + T(t)dt.$$

La différence avec le schéma numérique explicite précédent, c'est qu'il n'y a ni division par de petits nombres, ni multiplication par de grands nombres. La seule opération est la division de deux nombres proches de 1. On montrera de plus que les deux schémas sont d'ordre 1.

### 6.4.6 Remarques sur l'implémentation numérique

En récapitulant l'ensemble de la méthode numérique du modèle AQNM, on s'aperçoit qu'une parallélisation du code peut se faire sans difficultés.

#### 6.4.6.1 Récapitulatif

Avant toute intégration temporelle, et pour chaque valeur discrète de  $\theta$  et chaque indice  $s'$  et  $s''$ , il faut déterminer quelles sont les boîtes qui vont contribuer à l'intégrale sur la surface associée à  $s'$  et  $s''$ . La valeur de  $k$  n'intervient pas encore à ce stade de la méthode. L'indice  $l$  pour  $K'$  parcourt donc  $\{-M_\rho, \dots, M_\rho\}$ , l'indice

$m$  pour  $\theta'$  parcourt  $\{1, ..M_\theta\}$  et l'indice  $n$  pour  $\phi'$  parcourt  $\{1, ..M_\phi\}$ . Pour conserver la boîte, on vérifie d'abord que  $K' < K''$ . Puis, la surface doit intersecter la boîte, ce dont on s'assure en utilisant le critère du signe de  $f_{s's''}$  aux coins de la boîte. Pour chaque boîte qui contribue, on garde en mémoire  $l, m, l''$  et  $m''$ . Les indices  $j + l$  et  $m$  permettront la détermination de  $e(\mathbf{k}')$ , et  $j + l''$  et  $m''$  serviront pour l'interpolation sur le groupe de neuf points autour de  $\mathbf{k}''$ . On conserve aussi en mémoire, les quatre coefficients nécessaires à l'interpolation sur les neuf points pour l'interpolation de  $e(\mathbf{k}'')$ . Enfin, on garde les valeurs de  $H_1^{s's''} \Delta S$  et  $H_2^{s's''} \Delta S$ , qui sont des coefficients géométriques ne dépendant que de  $\mathbf{k}'$ . Ces dernières valeurs sont donc réutilisables pour tous les  $\mathbf{k}$ , et il n'est pas nécessaire de les recalculer à chaque itération temporelle.

On se place à un temps  $t$  donné, et on choisit une valeur pour  $k$ , donc un indice  $j$ , et pour  $\theta$ , donc un indice  $l$ . Une somme sur  $s'$  et  $s''$ , ainsi que sur les boîtes qui contribuent à la surface considérée est effectuée. Pour chaque boîte, on récupère les valeurs des coefficients géométriques  $H_1^{s's''} \Delta S$  et  $H_2^{s's''} \Delta S$ , et des différents indices  $l, m, l''$  et  $m''$ . On prend soin de vérifier que  $j + l$  est bien dans  $\{0, ..M_\rho\}$ , ce qui implique que  $\mathbf{k}'$  suit exactement le même maillage que  $\mathbf{k}$ , et que  $j + l''$  est dans  $\{1, ..M_\rho - 1\}$ , car sinon  $\mathbf{k}''$  n'est plus dans la zone discrétisée. La valeur de  $e(\mathbf{k}'')$  est alors obtenue par interpolation, et la contribution de la boîte au terme de transfert est calculée. On obtient finalement le terme de transfert total au vecteur  $\mathbf{k}$ . Après avoir parcouru l'ensemble des  $\mathbf{k}$ , on a donc le terme de transfert en tout point et au temps  $t$ . Le schéma d'intégration temporelle donne alors la valeur en tout point du spectre d'énergie au temps  $t + dt$ , et on recommence l'opération au temps  $t + dt$ , jusqu'à atteindre le temps final, noté  $t_f$ .

#### 6.4.6.2 Parallélisation

Bien que la valeur de l'énergie à un instant  $t + dt$  et en un vecteur  $\mathbf{k}$  dépende de la valeur de cette énergie en tous les points et à l'instant précédent, il y a suffisamment de séparation entre les nombres d'ondes pour que le calcul soit parallélisable. On notera  $N$  le nombre de processus, et on donne accès initialement à chacun d'entre eux au spectre d'énergie en tout point à  $t = 0$ .

On distingue trois phases dans le calcul :

1. La première consiste, pour l'ensemble des  $\theta$ , à déterminer les boîtes qui contribueraient éventuellement au terme de transfert aux vecteurs  $\mathbf{k}$  d'angle  $\theta$ . On appellera cette étape, dans la suite, la préparation. Il est ainsi facile de découper l'ensemble des  $\theta$  en  $N$  intervalles de longueur égale, et à répartir les calculs sur chacun des processus. A la fin de la sélection de ces boîtes, il n'y a alors pas besoin de transmettre aux autres processus toutes les données, à savoir les indices de vecteurs d'ondes et les coefficients géométriques. En effet, seul le processeur qui a déterminé les boîtes aura à s'en servir dans la phase suivante. On réduit ainsi grandement les temps de calcul liés à la communication entre les processus, opération qui peut être très coûteuse.
2. La deuxième étape est constituée du calcul, à proprement parler, du terme de transfert, en interpolant si nécessaire les énergies en  $\mathbf{k}''$ . Chaque processus s'occupe à nouveau de la même gamme d'angles  $\theta$ , à laquelle est rajoutée le

parcours des modules  $k$ . Pour chacune des boîtes présélectionnées, on élimine celles pour lesquelles  $\mathbf{k}'$  ou  $\mathbf{k}''$  se trouve en dehors de la zone discrétisée. Pour les autres, après interpolation de l'énergie en  $\mathbf{k}''$ , on calcule la contribution au terme de transfert en  $\mathbf{k}$ , en remarquant que pour un  $\mathbf{k}$  donné, un seul processus intervient dans ce calcul. Il n'y a donc aucun problème de chevauchement lors de l'accès aux données.

3. La dernière phase est le calcul de l'énergie en tout point à l'instant  $t + dt$ . Un processus parcourt son intervalle d'angles  $\theta$ , ainsi qu'un certain nombre de modules  $k$ , et ici encore, le calcul de l'énergie en  $\mathbf{k}$  à l'instant  $t + dt$  ne nécessite que le terme de transfert en  $\mathbf{k}$  à  $t$ , calculé par le même processus précédemment, et l'énergie en  $\mathbf{k}$  à  $t$ , à laquelle tous les processus ont accès depuis le début. Enfin, la seule étape de communication entre processus s'effectue à ce moment : un processus maître récupère le spectre d'énergie au temps  $t + dt$ , et le renvoie à tous les processus fils, qui recommencent la troisième phase.

Ainsi, le modèle AQNM dans sa version discrétisée se prête particulièrement bien à une parallélisation. On remarque que, si on considère que tous les processus ont à peu près le même nombre de boîtes qui contribuent au terme de transfert, utiliser  $N$  processus diminue à peu près le temps de calcul total par  $N$ . On décide alors d'utiliser les bibliothèques parallèle standard MPI, que l'on trouve sur pratiquement tous les calculateurs parallèles.

### 6.4.6.3 Comparaison série-parallèle

L'inconvénient majeur du calcul parallèle est le coût des communications entre les différents processus, éventuellement prohibitif en temps. On essaie donc de quantifier, pour une configuration arbitraire, quelle est la part consommée par les échanges de données entre processus pour un code parallélisé. On choisit une discrétisation arbitraire,  $M_\rho = M_\theta = M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0, 1$ ,  $k_{max} = 10$ ,  $dt = 0, 01$  et  $\mathfrak{R} = 1$ , et on utilise un code en parallèle sur 5 processus, et un code en série, avec une fréquence par processus de 1,3 GHz.

Dans le tableau suivant, on fait figurer, pour les deux codes, le temps de calcul de la préparation et d'une itération temporelle, qui correspond à une moyenne sur cent pas de temps :

Type de code	Préparation	Pas de temps
Calcul série	1807 s	22,7 s
Calcul parallèle	363 s	6,7 s
Rapport	4,98	3,39

Le calcul de la préparation voit son temps divisé par quasiment le nombre de processus. Par contre, le calcul d'un pas de temps montre un gain bien moindre. Cela est dû aux temps de communication entre les processus, qui coûtent, si l'on ramène ces durées au travail équivalent à un processus, 50% de temps en plus. C'est le prix à payer pour le passage d'un code série à un code parallèle.

Cependant, on constate quand même un gain de temps très net entre les deux versions, même s'il n'est pas exactement proportionnel au nombre de processus. De plus, la répartition des calculs permet de réduire considérablement la mémoire vive

nécessaire par processus, qui est en général un facteur limitant. Cette mémoire étant croissante avec le nombre de boîtes du maillage, une plus grande discrétisation est ainsi atteignable. On peut montrer que cette mémoire est majoritairement utilisée pour le calcul de la préparation et son stockage. Pour chaque angle  $\theta$ , on parcourt un ensemble de vecteurs  $\mathbf{k}'$ , et on n'en conserve qu'un certain pourcentage, typiquement 10%, ce qui donne un volume de données proportionnel à  $M_\rho M_\theta^2 M_\phi$ . Ainsi, la répartition des angles  $\theta$  sur  $N$  processus permet de diviser cette mémoire par  $N$ .





# Chapitre 7

## Étude numérique du modèle AQNM

### 7.1 Introduction

Tout comme le modèle EDQNM, le modèle AQNM propose une expression approchée du terme de transfert dans une équation de type Lin. Dans le modèle EDQNM, il s'agit d'une intégrale sur tout l'espace prenant en compte toutes les interactions triadiques. Dans le modèle AQNM, cette intégrale volumique est remplacée par des intégrales surfaciques restreintes aux surfaces résonantes uniquement. L'évolution temporelle elle-même ne posant pas de problème en principe, le calcul de ce terme de transfert est le point délicat du modèle. À chaque pas de temps, et pour tous les nombres d'ondes, ce calcul doit être refait : ainsi, on cherche à avoir une précision très importante sur l'évaluation numérique du transfert.

Indépendamment de tout pas de temps, il est possible de calculer le terme de transfert obtenu à partir du spectre initial isotrope de type Orszag, et cela constituera la première phase de l'étude. En considérant certains indicateurs caractéristiques de la convergence, il est possible de quantifier l'impact de la discrétisation spatiale, afin d'atteindre la convergence initiale du calcul. Dans un deuxième temps, l'étude se portera sur l'obtention d'une évolution temporelle du spectre d'énergie, stable et convergée. Le cas  $\mathfrak{R} = 1$  constituera le cas de référence de l'étude, en permettant d'identifier les problèmes numériques éventuels. On peut penser que le choix de certains paramètres numériques, comme la coupure aux grands nombres d'ondes ou encore le pas de temps, va se révéler être décisif.

Cependant, à cette valeur du nombre de Reynolds effectif, l'effet de la viscosité numérique est trop fort, et la cascade non linéaire ne peut imposer sa dynamique. Il faut donc trouver une méthode de détermination d'une valeur de  $\mathfrak{R}$  susceptible d'entraîner une évolution temporelle acceptable, car le jeu de paramètres est trop ouvert. Or, un comportement attendu sans viscosité est que l'énergie intégrée s'accumule aux grands nombres d'ondes, ce qui sera vérifié numériquement. Ainsi, la viscosité numérique devra être telle qu'elle permette la dissipation de cette énergie, tout en n'ayant pas d'effet trop important sur le reste du spectre. La valeur finale retenue est  $\mathfrak{R} = 5$ , et on verra en particulier que le spectre d'énergie intégré développe dans ce cas une zone inertielle en  $k^{-3}$ . On s'attardera de plus sur la répartition

spatiale de l'énergie, spécialement selon l'angle  $\theta$ , à partir de laquelle on recherche une confirmation de la bidimensionnalisation de l'écoulement. Finalement, des comparaisons avec le modèle EDQNM2 montreront que les phénomènes dominants sont mieux captés par le modèle AQNM..

## **7.2 Étude de convergence du terme de transfert**

### **7.2.1 Présentation**

On présente tout d'abord les moyens informatiques mis en œuvre pour mener à bien le traitement numérique du modèle AQNM initialement isotrope. Puis, après avoir présenté la gamme de paramètres qui constituent le cas de référence de l'étude de convergence paramétrique, on s'intéressera à la quantification de la convergence du calcul du terme de transfert au premier pas de temps.

#### **7.2.1.1 Moyens de calcul numérique**

En dehors du calculateur scalaire local, les moyens de calcul parallèle du CEA (Grenoble), de l'IDRIS (Orsay) et du CINES (Montpellier) ont été mis à contribution. Les données fournies correspondent aux ressources disponibles pour faire fonctionner le code sous une forme utilisant les bibliothèques de communication parallèle MPI.

1. Ixia (CEA)

Modèle : Compaq SC270.

Processeurs : 252 processeurs à 833 MHz.

Mémoire : 4 Go par processeur.

2. Brodie (IDRIS)

Modèle : IBM SP3.

Processeurs : 32 processeurs à 375 MHz.

Mémoire : 1 Go par processeur.

3. Zahir (IDRIS)

Modèle : IBM p690 Regatta.

Processeurs : 8 nœuds de 32 processeurs SP4 à 1,3 GHz.

Mémoire : 64, 128 ou 256 Go par nœud selon les cas.

4. Io (CINES)

Modèle : IBM hybride SP3/SP4.

Processeurs : 29 nœuds de 16 processeurs SP3 à 375 MHz, et 2 nœuds de 32 processeurs SP4 à 1,3 GHz.

Mémoire : 16 Go par nœud (SP3) et 64 Go par nœud (SP4).

### 7.2.1.2 Choix des paramètres de départ

Il semble raisonnable de démarrer avec les valeurs  $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{M}_\theta = \mathbf{M}_\phi = \mathbf{100}$ , sans privilégier aucune direction de discrétisation par rapport à une autre. Cette valeur arbitraire est l'ordre de grandeur, au sens large, de la résolution maximale que l'on peut atteindre avec un modèle de type EDQNM. Différents essais préalables montrent que la valeur de  $\mathbf{k}_{\min} = \mathbf{0}, \mathbf{01}$  est une bonne valeur de départ, des valeurs inférieures étant un raffinement non nécessaire pour l'instant. En effet, à cet endroit l'énergie adimensionnelle vaut  $0, \mathbf{01}$ , très petite devant l'énergie au pic, en  $k = 1$ , qui vaut  $1/e$ .

La difficulté est de fixer une valeur de  $k_{max}$ , car il faut s'assurer que la coupure des interactions triadiques entraînée par le choix de ce paramètre ne porte pas à conséquence sur le calcul du terme de transfert. La perte d'information est minime si la valeur de l'énergie au temps  $t = 0$  est suffisamment faible au-delà de  $k_{max}$ . On choisit donc  $\mathbf{k}_{\max} = \mathbf{10}$ , car l'énergie initiale ne vaut à cet endroit déjà plus qu'environ  $3,7 \cdot 10^{-42}$ , ce qui est une valeur très petite par rapport à celle atteinte au pic.

### 7.2.1.3 Méthodes de comparaisons

L'ensemble des paramètres précédents constitue le premier cas de référence. Toute la difficulté consiste à estimer si le calcul du terme de transfert est convergé ou pas à cette résolution. On va alors changer, un par un, chacun de ces paramètres, dans le sens d'une discrétisation plus fine, c'est-à-dire d'un plus grand nombre de points. On recalcule ensuite le terme de transfert, et on essaye de quantifier, pour chacun de ces nouveaux résultats, quelles sont les différences avec le cas de référence.

Ainsi, si les différences sont petites, alors le paramètre concerné a peu d'influence sur le calcul du terme de transfert, et on conserve sa valeur précédente. Il faut encore arriver à définir ce que signifie de petits écarts. Si les différences sont trop importantes, l'influence du paramètre est non négligeable, et on conserve alors sa nouvelle valeur.

On se retrouve donc avec un nouvel ensemble de paramètres, qui forment un nouveau cas de référence, et on recommence la même étude de convergence jusqu'à ce que, en changeant tous les paramètres un par un, on ne note plus de variations notables. Le dernier cas de référence devient alors l'ensemble minimal de paramètres permettant le calcul du terme de transfert. Pour évaluer les différences entre un nouvel ensemble de paramètres et les paramètres de référence, on utilise deux critères principaux, qui sont présentés dans la suite.

## 7.2.2 Variations terme à terme du transfert

À un instant  $t$  donné, le terme de transfert d'énergie est représenté, dans le code numérique, par une matrice, dont le coefficient  $(i, j) \in \{0..M_\rho\} \times \{1..M_\theta\}$  vaut :

$$T \left( k_{min} e^{i\varepsilon_\rho}, \left( j - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\theta, t \right). \quad (7.1)$$

Le premier critère consiste à évaluer l'écart entre la nouvelle matrice de transfert  $T$  et la matrice  $T_{ref}$  correspondant au cas de référence, si possible en l'estimant coefficient par coefficient.

### 7.2.2.1 Principe

On décide de calculer :

$$\frac{\|T - T_{ref}\|}{\|T_{ref}\|}, \quad (7.2)$$

avec  $\|\cdot\|$  une norme choisie convenablement. En l'occurrence ici pour une matrice  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1..n\}^2}$ , on prend :

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{(i,j) \in \{1..n\}^2} A_{ij}^2}. \quad (7.3)$$

Pour que ce calcul soit possible entre  $T_{ref}$  et  $T$ , il faut que les deux matrices aient la même taille, ou, à défaut – et c'est le cas dès que l'on change  $M_\rho$  ou  $M_\theta$  – qu'elles aient des sous-matrices de même taille, et dont la comparaison soit pertinente.

### 7.2.2.2 Contraintes induites sur les paramètres

Ainsi, à partir du cas de référence, on ne peut pas faire varier librement les paramètres car ils doivent permettre la comparaison par rapport au cas de référence :

- Pour  $M_\rho$  : changer la valeur de ce paramètre revient à changer la taille du tableau de stockage du terme de transfert. Néanmoins, transformer  $M_\rho$  en  $n_\rho M_\rho$  implique de changer  $\varepsilon_\rho$  en  $\varepsilon_\rho/n_\rho$ . On a environ  $n_\rho$  fois plus de points entre  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , et leur écart, en échelle logarithmique, a été divisé par  $n_\rho$ . Donc si l'on ne considère que des multiples entiers de  $M_\rho$ , il suffit de ne conserver qu'une donnée sur  $n_\rho$  dans la direction radiale dans la nouvelle matrice pour obtenir les valeurs du transfert exactement aux mêmes points que dans le cas de référence. En pratique, on prendra donc  $n_\rho = 2$ .
- Pour  $M_\theta$  : on utilise presque la même méthode que pour  $M_\rho$ . Multiplier  $M_\theta$  par un entier  $n_\theta$  revient à diviser  $\varepsilon_\theta$  par  $n_\theta$ . Mais les angles sont répartis selon la loi  $(p - 1/2) \varepsilon_\theta$ , avec  $p \in \{1..M_\theta\}$ , le décalage de  $\varepsilon_\theta/2$  impliquant que toutes les valeurs entières de  $n_\theta$  ne sont pas possibles.  $n_\theta$  sera acceptable si :

$$\forall p \in \{1..M_\theta\}, \exists q \in \{1..n_\theta M_\theta\} \left( p - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_\theta = \left( q - \frac{1}{2} \right) \frac{\varepsilon_\theta}{n_\theta} \iff n_\theta \text{ impair.} \quad (7.4)$$

En pratique, on choisira donc  $n_\theta = 3$ .

- Pour  $M_\phi$  : la taille de la matrice de transfert ne change pas, et on a toute latitude pour choisir la nouvelle valeur de  $M_\phi$ . L'axisymétrie du problème implique en effet que le transfert ne dépend pas de  $\phi$ , mais que son calcul fait par contre intervenir la discrétisation méridienne.

- Pour  $k_{min}$  : l'étude est plus délicate. Il est clair que la diminution de  $k_{min}$  seule entraînerait l'augmentation de  $\varepsilon_\rho = 1/M_\rho \ln(k_{max}/k_{min})$ , si  $M_\rho$  et  $k_{max}$  restaient constants. Il en résulterait d'une part que le maillage dans la direction radiale serait moins dense, et d'autre part, qu'aucun point de la nouvelle discrétisation ne coïnciderait avec aucun des points de la discrétisation du cas de référence, et la comparaison serait alors impossible.

L'idée est alors, tout en changeant la valeur de  $k_{min}$ , de changer simultanément la valeur de  $M_\rho$  afin de garder constante la valeur de  $\varepsilon_\rho$ . L'écart logarithmique est conservé, seule l'origine change, et on aura donc coïncidence des points de discrétisation à partir d'un certain rang. Par exemple, la division de  $k_{min}$  par 10 environ, entraîne une augmentation de  $M_\rho$  de  $\ln 10/\varepsilon_\rho$ . Comme  $M_\rho$  doit rester un entier, on ne pourra pas dans la pratique diviser  $k_{min}$  par exactement 10, mais on essaiera de s'en approcher en divisant par le premier nombre supérieur à 10 acceptable.

- Pour  $k_{max}$  : le problème est le symétrique de celui pour  $k_{min}$ . Quand on fera croître  $k_{max}$ , on augmentera en même temps la valeur de  $M_\rho$  afin de garder  $\varepsilon_\rho$  constant. La multiplication par environ 10 de  $k_{max}$  entraînera de la même façon une augmentation de  $M_\rho$  de l'ordre de  $\ln 10/\varepsilon_\rho$ . On choisira alors la première valeur supérieure à 10 qui donnera un  $M_\rho$  entier.

Si le changement d'un paramètre semble n'affecter ni l'intégrale sur l'espace du terme de transfert, ni le calcul effectif de la matrice de transfert, on pourra être amenés à réduire sa valeur, ou l'augmenter si c'est  $k_{min}$ . Cela permet en effet d'économiser des ressources de calcul sans perdre d'information. Bien entendu, il faudra que les nouvelles valeurs des paramètres vérifient les contraintes énoncées précédemment, pour qu'une comparaison avec le cas de référence soit possible.

### 7.2.3 Intégrale spatiale du transfert

Le deuxième critère consiste à regarder la valeur de l'intégrale sur tout l'espace du terme de transfert. L'analyse théorique a montré que le modèle AQNM conservait certaines propriétés fondamentales de la turbulence, et, en particulier, celle qui implique que les transferts non linéaires, responsables de la cascade, conservent l'énergie totale.

#### 7.2.3.1 Principe

Que le terme de transfert soit dimensionnel ou pas, les deux étant égaux à une constante multiplicative près, on doit donc vérifier :

$$\int_{\mathbb{R}^3} T(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{+\infty} T(k, \theta, \phi) k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi = 0. \quad (7.5)$$

Avec une turbulence initialement isotrope, le spectre d'énergie initiale est axisymétrique selon l'axe de  $\mathbf{\Omega}$ , et il le reste à tout instant ultérieur. Il ne dépend donc pas de  $\phi$ , et cela implique que  $T$  n'en dépend pas non plus. Si, de surcroît, on prend en compte

la coupure liée à la discrétisation, il faudrait vérifier idéalement que :

$$\int_{k_{min}}^{k_{max}} k^2 \left( \int_{\varepsilon_\theta/2}^{\pi-\varepsilon_\theta/2} T(k, \theta) \sin \theta d\theta \right) dk = 0. \quad (7.6)$$

### 7.2.3.2 Transposition numérique

Pour l'intégration numérique, on choisit deux méthode différentes : on intègre selon  $\theta$  avec des rectangles, car la discrétisation est régulière, et on utilise une méthode d'ordre plus élevé de type Simpson pour l'intégration en  $k$ . Pour cette dernière, on préfère toujours une formule à pas constant, la précision étant alors plus grande. On rappelle que la discrétisation radiale est logarithmique, car  $k$  s'écrit  $k_{min}e^\rho$  avec  $\rho$  allant de 0 à  $\ln(k_{max}/k_{min})$ . On fait donc le changement de variable  $k \rightarrow \rho$  dans (7.6), qui devient :

$$\int_0^{\ln(k_{max}/k_{min})} (k_{min}e^\rho)^3 \left( \int_{\varepsilon_\theta/2}^{\pi-\varepsilon_\theta/2} T(k_{min}e^\rho, \theta) \sin \theta d\theta \right) d\rho = 0, \quad (7.7)$$

et on peut utiliser une méthode à pas constant égal à  $\varepsilon_\rho$  sur  $\rho$ .

### 7.2.3.3 Quantificateur de convergence

La valeur absolue de l'intégrale sur l'espace du terme de transfert devrait donc décroître vers 0 avec une résolution croissante. Il s'agit alors d'une part de déterminer si sa valeur diminue significativement par rapport à celle calculée pour le cas de référence, et d'autre part, arriver à dire si sa valeur est suffisamment petite. On a alors besoin d'avoir une valeur représentative du terme de transfert, et de même type que son intégrale sur tout l'espace : on a choisi l'intégrale sur tout l'espace de la valeur absolue du terme de transfert. On calcule donc le rapport :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^3} T(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}}{\int_{\mathbb{R}^3} |T(\mathbf{k})| d^3\mathbf{k}}, \quad (7.8)$$

car on sait que le transfert non linéaire n'est pas de signe constant. Il faut aussi noter que ce deuxième critère est lié au premier, car peu de variations sur la matrice de transfert entraîne peu de variations sur le calcul de l'intégrale du terme de transfert sur tout l'espace. Néanmoins, cela permet d'avoir une certaine quantification de la convergence numérique.

## 7.2.4 Convergence par itération

On détaille ici les séries de calculs qui ont été effectuées afin de tester la convergence numérique de l'évaluation du terme de transfert initial. Après avoir quantifié plus précisément l'impact de la valeur de  $M_\rho$  sur le calcul du transfert, on arrive finalement à un jeu de paramètres pour lesquels ce calcul est convergé.

### 7.2.4.1 Première série

Par rapport au cas de référence, on a fait varier successivement  $M_\rho$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $k_{min}$  et  $k_{max}$ . Un pourcentage inférieur à  $10^{-2}$  est compté comme 0, et c'est notre valeur seuil de variation de la norme de la matrice de transfert. En dernière colonne, on a indiqué le temps nécessaire pour le calcul des quantités intervenant dans l'évaluation numérique du terme de transfert, que l'on avait appelé préparation.

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\frac{\ T-T_{ref}\ }{\ T_{ref}\ }$	$\frac{\int T}{\int  T }$	Durée préparation
Réf. 1	100	100	100	0,01	10	0 %	-0,0149	203 s
$M_\rho$	200	100	100	0,01	10	0,25 %	-0,0208	407 s
$M_\theta$	100	300	100	0,01	10	0,07 %	-0,0149	1824 s
$M_\phi$	100	100	200	0,01	10	0,06 %	-0,0150	406 s
$k_{min}$	134	100	100	0,00096	10	0 %	-0,0149	273 s
$k_{max}$	134	100	100	0,01	104,71	0 %	-0,0149	273 s

On remarque, tout d'abord, que  $k_{min}$  et  $k_{max}$  n'influencent presque pas le calcul du terme de transfert : on peut conserver leur valeur précédente sans nuire au calcul. Par contre, l'influence de  $M_\rho$  est déterminante : non seulement l'écart entre les matrices de transfert est de 0,25%, mais surtout l'intégrale relative du transfert est divisée par 10 quand  $M_\rho$  passe de 100 à 200, ce qui laisse penser que le calcul du terme de transfert n'est pas encore convergé à cette résolution. Pour l'instant, les influences respectives de  $M_\theta$  et de  $M_\phi$ , bien que non nulles, sont négligées, car elles n'induisent quasiment pas de différences sur l'intégrale spatiale du transfert. On sera peut-être amenés à considérer plus tard que l'on ne peut plus ignorer ces écarts. On continue donc avec  $M_\rho = 200$ ,  $M_\theta = 100$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0,01$  et  $k_{max} = 10$ .

### 7.2.4.2 Estimation du temps de calcul

Il est important d'arriver à obtenir un ordre de grandeur de la durée de la préparation et d'un pas d'évolution temporelle, par souci, d'une part, d'optimisation de l'utilisation des calculateurs, et d'autre part, afin d'évaluer la performance numérique de la méthode AQNM comparée aux codes précédents. Les résultats de la première série ont été obtenus avec le même nombre de processeurs (10) et sur le même ordinateur ; on peut ainsi supposer que la charge du ordinateur a été constante pour chaque calcul, et qu'il n'y a eu aucun allongement des temps de calcul par ce biais. En effet, un calcul mené avec 10 processeurs ne met pas forcément deux fois moins de temps qu'un calcul mené avec 5 processeurs. On cherche alors le comportement de la durée de la préparation en fonction de  $M_\rho$ ,  $M_\theta$  et  $M_\phi$ , sous la forme  $\alpha M_\rho^\beta M_\theta^\gamma M_\phi^\delta$ . Une régression linéaire sur cette durée, prise en échelle logarithmique afin d'avoir un système linéaire, indique qu'on a :

$$\begin{aligned} \beta &\simeq 1, \\ \gamma &\simeq 2, \\ \text{et } \delta &\simeq 1. \end{aligned}$$

Elle est donc proportionnelle à  $M_\rho M_\theta^2 M_\phi$ , pour le nombre de processeurs fixé ici, avec une corrélation remarquable de 99% : ce résultat est tout à fait conforme aux



prévisions. Par contre, le temps nécessaire au calcul du terme de transfert proprement dit au premier pas de temps – et il n’y a pas de raison que cela soit différent aux autres instants– ne suit aucune loi simple. En effet, à cette résolution, le calcul du terme de transfert n’est sûrement pas convergé, et donc l’augmentation de la discrétisation spatiale peut entraîner des changements brusques dans la valeur de l’intégrale surfacique et donc dans sa durée de calcul. Et même si ce calcul était convergé, le nombre de triades retenues pour l’intégrale peut varier significativement d’une résolution à une autre, et leur répartition dans l’espace aussi. Cela rend leur distribution par processeur imprévisible, et donc le temps de traitement par processeur est difficile à estimer.

### 7.2.4.3 Deuxième série

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\frac{\ T_2-T_1\ }{\ T_1\ }$	$\frac{\int T}{\int  T }$
Réf. 2	200	100	100	0,01	10	0 %	-0,00208
$M_\rho$	400	100	100	0,01	10	0,05 %	-0,00016
$M_\theta$	200	300	100	0,01	10	0,05 %	-0,00221
$M_\phi$	200	100	200	0,01	10	0,04 %	-0,00253
$k_{min}$	267	100	100	0,000989	10	0 %	-0,00209
$k_{max}$	267	100	100	0,01	101,15	0 %	-0,00208

La division de  $k_{min}$  par 10 n’a l’air d’avoir aucune influence sur le transfert non linéaire. On conservera donc la valeur  $\mathbf{k}_{min} = \mathbf{0,01}$  pour la prochaine série de paramètres. Pour  $k_{max}$ , la multiplication par 10 n’entraîne presque aucun changement, on garde la valeur  $\mathbf{k}_{max} = \mathbf{10}$ . Le changement de  $M_\rho$  de 200 en 400 entraîne à nouveau une division par 10 de l’intégrale du terme de transfert : ce paramètre semble être important pour la convergence numérique de ce calcul.

On peut néanmoins se demander pourquoi une différence relative de 0,05% entraîne la division par 10 de l’intégrale. Cela tient au fait que la norme de matrices utilisée traite de la même façon les différences entre transfert aux petits nombres d’ondes et aux grands nombres d’ondes, tandis que l’intégrale du transfert sur l’espace pondère beaucoup plus fortement les grands nombres d’ondes, car il y a multiplication par  $k^2$  dans (7.6). Ainsi de faibles changements dans la zone des grands nombres d’ondes sont amplifiés dans le calcul de l’intégrale spatiale. On garde donc la valeur de  $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{400}$ .

Cela amène à reconsidérer les écarts engendrés par le changement de  $M_\theta$  et de  $M_\rho$ , alors qu’on les avait négligés dans la série précédente, car ils sont du même ordre de grandeur que celui généré par le changement de  $M_\rho$ . Par conséquent, on garde maintenant les valeurs  $\mathbf{M}_\theta = \mathbf{300}$  et  $\mathbf{M}_\phi = \mathbf{200}$  : ce n’est pas en contradiction avec l’attitude adoptée pour la première série, mais cela a simplement augmenté le nombre d’essais nécessaires pour atteindre la convergence.

### 7.2.4.4 Troisième série

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\frac{\ T_2 - T_1\ }{\ T_1\ }$	$\frac{\int T}{\int  T }$
Réf. 3	400	300	200	0,01	10	0 %	-0,000394
$M_\rho$	800	300	200	0,01	10	0,02 %	-0,000098
$M_\theta$	400	900	200	0,01	10	pas assez de mémoire vive	
	400	100	200	0,01	10	0,04 %	-0,000576
$M_\phi$	400	300	300	0,01	10	0,02 %	-0,000307
	400	300	100	0,01	10	0,03 %	-0,000059
$k_{min}$	534	300	200	0,00098	10	0 %	-0,000397
	267	300	200	0,099	10	0 %	-0,000394
$k_{max}$	534	300	200	0,01	101,15	0 %	-0,000394
	360	300	200	0,01	5,01	0,02 %	-0,000135

À nouveau,  $k_{min}$  semble avoir peu d'influence sur le calcul si on le divise par 10. Un essai en le multipliant par 10 prouve que les différences sont toujours mineures. On conserve donc la valeur  $\mathbf{k}_{min} = \mathbf{0,1}$  cette fois-ci, car il y a peu de chances que cette zone du spectre intervienne plus fortement ultérieurement. Multiplier  $k_{max}$  par 10 n'entraîne aucun changement notable. Par contre, pour ce qui est de sa division par 10, et bien que l'écart entre matrices de transfert ne soit que d'environ 0,02%, on applique le principe de précaution. En effet, lors de l'évolution temporelle ultérieure du spectre d'énergie, il va y avoir développement d'une cascade d'énergie vers les grands  $k$ , avec augmentation de l'énergie pour ces nombres d'ondes, et il ne faudrait pas que  $k_{max}$  induise une troncature numérique trop radicale du spectre. De plus, l'augmentation du nombre de Reynolds effectif risque aussi d'élargir, en décalant vers les grands nombres d'ondes le lieu de la coupure visqueuse, la zone inertielle, qui pourrait donc être tronquée artificiellement. On garde  $\mathbf{k}_{max} = \mathbf{10}$  temporairement, quitte à l'augmenter plus tard si s'aperçoit de la perte d'une partie du spectre.

On choisit  $\mathbf{M}_\phi = \mathbf{100}$  car les différences avec le cas de référence sont acceptables, et la dépendance risque de peu ou pas évoluer temporellement. On a même une diminution purement fortuite de l'intégrale spatiale. La faible implication de la discrétisation dans cette direction provient en partie de l'axisymétrie du problème, bien que les triades résonantes fassent intervenir une dépendance en  $\phi$ . Pour  $M_\rho$ , on ne voit pas trop de différences entre le transfert en passant de 400 à 800, mais l'intégrale relative est fortement diminuée, d'un facteur 10 à nouveau. Néanmoins,  $M_\rho = 800$  est une résolution relativement importante comparée aux ressources des calculateurs, surtout en ce qui concerne la mémoire vive nécessaire. En effet, il faut se laisser une certaine marge de manœuvre pour le choix des paramètres, car une dépendance plus importante en  $M_\theta$  risque de se manifester ultérieurement. Pour essayer d'arriver à un compromis, on va essayer  $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{300}$  pour pouvoir atteindre ensuite 600 et permettre la comparaison, ainsi que  $\mathbf{M}_\rho = \mathbf{400}$ . Pour  $M_\theta$ , on s'attend à ce que la dépendance soit peut-être plus forte ensuite, donc il ne faut pas choisir une valeur trop basse.  $M_\theta = 100$  est à exclure, 300 est une bonne valeur, mais alors 900 est inatteignable car les besoins en mémoire vive croissent environ en  $M_\theta^2$ . Une solution intermédiaire consiste à partir de  $\mathbf{M}_\theta = \mathbf{200}$ , pour ensuite essayer 600.

### 7.2.4.5 Dernière série

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\frac{\ T_2 - T_1\ }{\ T_1\ }$	$\frac{f(T)}{f(T)}$
Réf. 4.1	300	200	100	0, 1	10	0%	-0, 000350
$M_\rho$	600	200	100	0, 1	10	0, 02%	-0, 000086
$M_\theta$	300	600	100	0, 1	10	0, 02%	-0, 000358
Réf. 4.2	400	200	100	0, 1	10	0%	-0, 000187
$M_\rho$	800	200	100	0, 1	10	0, 01%	+0, 000030
$M_\theta$	400	600	100	0, 1	10	0, 02%	-0, 000174

On choisira donc :

- $\mathbf{M}_\rho = 400$  plutôt que 300, car l'intégrale du terme de transfert diminue fortement avec  $M_\rho$  croissant, mais pas 800 car il faut garder une certaine marge. Une étude plus précise de cette dépendance sera faite par la suite.
- $\mathbf{M}_\theta = 600$ , bien que cela ne soit pas nécessaire à ce stade, et ce pour avoir le moins de problèmes ensuite, la dépendance angulaire risquant de devenir plus forte.
- $\mathbf{M}_\phi = 100$ , car son influence reste minime.
- $\mathbf{k}_{min} = 0, 1$ , car il y aura a priori peu de problèmes vers les petits nombres d'ondes, dans l'hypothèse d'une cascade d'énergie vers les grands nombres d'ondes.
- $\mathbf{k}_{max} = 10$ , quitte à l'augmenter ensuite en cas de déplacement du spectre d'énergie vers la droite, en l'accompagnant éventuellement d'un changement de  $M_\rho$  et/ou de  $M_\theta$ .

## 7.2.5 Méthodes numériques

On s'intéresse maintenant à l'influence du paramètre  $M_\rho$  sur la valeur du terme de transfert, tous les autres paramètres étant fixés, et on cherche à déterminer l'ordre de la méthode de calcul de l'aire d'une surface résonante.

### 7.2.5.1 Dépendance du transfert en $M_\rho$

Maintenant que la convergence du calcul du transfert semble avoir été atteinte, on cherche à quantifier plus précisément l'effet de  $M_\rho$  sur la valeur, au premier pas de temps, de l'intégrale spatiale du terme de transfert, et s'il est vraiment nécessaire de prendre des valeurs très élevées pour ce paramètre. On choisit de prendre  $\mathbf{M}_\theta = 300$ ,  $\mathbf{M}_\phi = 100$ ,  $\mathbf{k}_{min} = 0, 1$  et  $\mathbf{k}_{max} = 10$ , en fonction des commodités de calcul parallèle. La valeur de  $M_\theta$  est en effet suffisamment grande au vu des résultats précédents. En faisant varier  $M_\rho$  à partir de 200 par paliers de 200, on obtient la figure (7.1) pour la valeur absolue de l'intégrale spatiale du transfert.

Il semble d'abord y avoir une décroissance régulière pour les premières valeurs de  $M_\rho$ . Ensuite, à partir de  $M_\rho \simeq 1000$ , cette décroissance s'atténue pour se transformer en oscillation : plus aucun calcul ne donne une valeur inférieure à  $10^{-6}$ . On en déduit que l'on a atteint des résolutions pour lesquelles les grandeurs prises en compte dans le calcul de l'intégrale sont proches de la précision machine. La valeur de l'intégrale

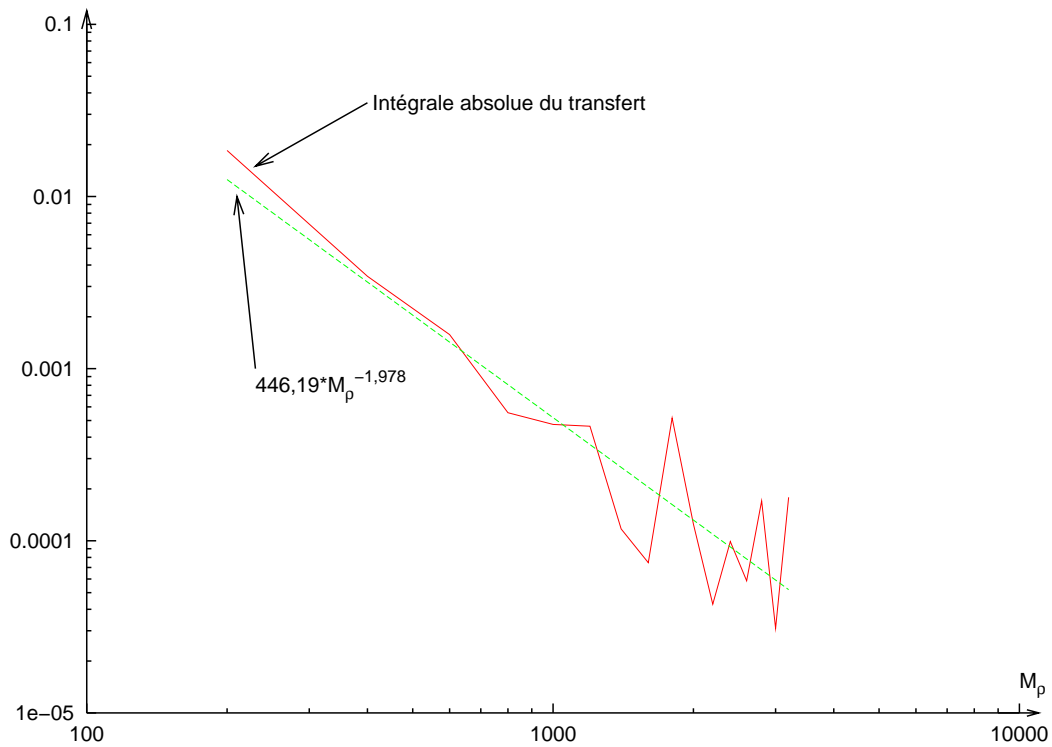


FIG. 7.1 – Variation de la valeur absolue de l'intégrale spatiale du transfert en fonction de  $M_\rho$  pour  $M_\theta = 200$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0,1$  et  $k_{max} = 10$  et droite approchante (moindres carrés).

relative se met alors à osciller entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$ , et on peut supposer qu'avec des valeurs de  $M_\rho$  plus grandes, on constatera toujours cette oscillation.

Néanmoins, si on cherche à écrire que l'intégrale relative s'écrit sous la forme  $\alpha M_\rho^\beta$ , on trouve, par régression linéaire, les valeurs :

$$\alpha \simeq 450,$$

et  $\beta \simeq -2,$

ce qui implique que la valeur de l'intégrale est presque proportionnelle à  $M_\rho^{-2}$ . La pente pour les bas  $M_\rho$  ne descend pas en dessous de  $\beta \simeq -2,5$ . Pour conclure, on voit que le fait d'augmenter  $M_\rho$  n'apporte plus de meilleure précision à partir d'un certain point, que l'on peut situer autour de 800, car on atteint les limites de précision du calculateur. L'essentiel est de savoir quel est l'ordre de l'erreur engendrée, et il vaut environ 2 ici. Afin de conserver une marge, on conservera donc, pour la suite, la valeur maximale acceptable, c'est-à-dire  $M_\rho = 400$ .

### 7.2.5.2 Ordre de la méthode de calcul des aires

La méthode de calcul de l'aire des surfaces résonantes est propre au modèle AQNM. Après avoir identifié si la surface passe au travers d'un cube, on approche son aire à l'intérieur de celui-ci par l'aire d'un plan tangent à la surface qui passerait par son centre, considérée comme passant au centre de la boîte. D'une part, il s'agit

de déterminer si la méthode de sélection des boîtes est efficace. En effet, on ne prend pas en compte les boîtes pour lesquelles la surface passe par une face sans jamais en intersecter une autre. Cela implique que la valeur de la fonction résonante aux quatre coins a le même signe. D'autre part, il faut savoir si l'approximation de l'aire de la surface dans les boîtes par lesquelles elle passe plus d'une fois, est correcte. On pourra négliger ces deux cas particuliers si on prouve la convergence du calcul de l'aire de la surface vers sa valeur réelle.

Il y a quatre types de surfaces résonantes  $\omega(\mathbf{k}) + s'\omega(\mathbf{k}') + s''\omega(\mathbf{k}'') = 0$ , avec  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = 0$ , selon que  $s' = \pm 1$  et  $s'' = \pm 1$ . On s'intéresse, arbitrairement, à la surface  $s' = s'' = 1$ . Comme  $\omega(\mathbf{k})$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  que  $\mathbf{k}$  fait avec  $\Omega$ , on peut associer à chaque  $\theta$  dans  $[0, \pi]$  une surface résonante  $S_\theta$ . De plus, on a que  $S_{\pi-\theta} \equiv S_\theta$ , par symétrie par rapport au plan  $\theta = 0$ ; on choisit donc une valeur de  $\theta$  proche de  $\pi/4$  ( $\theta \simeq 0,80111$ ). Enfin, une surface résonante étant généralement d'aire infinie, il faut se fixer définitivement une valeur pour  $k_{min}$  et  $k_{max}$ , afin de calculer toujours la même portion d'aire. On prendra  $k_{min} = 0,1$  et  $k_{max} = 10$ .

En partant de la configuration de référence  $M_\rho = M_\theta = M_\phi = 100$ , il s'agit de déterminer l'erreur générée par la méthode sous la forme :

$$\text{aire}(M_\rho, M_\theta, M_\phi) = A + \text{err}(M_\rho, M_\theta, M_\phi), \quad (7.9)$$

où  $A$  est la valeur réelle de l'aire de la surface, obtenue idéalement en prenant  $M_\rho \rightarrow +\infty$ ,  $M_\theta \rightarrow +\infty$  et  $M_\phi \rightarrow +\infty$ . Dans la pratique, la valeur considérée comme la valeur réelle sera celle pour  $M_\rho = M_\theta = M_\phi = 700$ . Il faut noter qu'il n'y a pas de dépendance en le nombre de processeurs car changer ce nombre revient simplement à modifier la répartition des calculs, sans générer d'erreurs numériques. On obtient les résultats suivants :

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	Aire
Aire réelle	700	700	700	0,1	10	15,794440
Référence	100	100	100	0,1	10	15,854168
$M_\rho$	200	100	100	0,1	10	15,818696
$M_\rho$	400	100	100	0,1	10	15,800368
$M_\theta$	100	300	100	0,1	10	15,859211
$M_\theta$	100	900	100	0,1	10	15,856406
$M_\phi$	100	100	200	0,1	10	15,851724
$M_\phi$	100	100	400	0,1	10	15,852324

On cherche une solution sous la forme :

$$\text{err}(M_\rho, M_\theta, M_\phi) = \alpha M_\rho^\beta M_\theta^\gamma M_\phi^\delta, \quad (7.10)$$

et on effectue donc une régression linéaire sur la fonction :

$$\begin{aligned} f(M_\rho, M_\theta, M_\phi) &= \ln(\text{aire}(M_\rho, M_\theta, M_\phi) - \text{aire\_exacte}) \\ &= \ln(\text{err}(M_\rho, M_\theta, M_\phi)) \\ &= \ln \alpha + \beta \ln M_\rho + \gamma \ln M_\theta + \delta \ln M_\phi. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Finalement, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\alpha &= 213,183173, \\ \beta &= -1,655991 \simeq -\frac{5}{3}, \\ \gamma &= -0,011512 \simeq 0, \\ \delta &= -0,093014 \simeq 0.\end{aligned}$$

On déduit de ces coefficients que l'aire de la surface résonante ne dépend pratiquement pas de  $M_\theta$  ni de  $M_\phi$  quand ces paramètres prennent des valeurs au-dessus de 100. Pour ce qui est de la direction radiale, par contre, la dépendance est environ en  $M_\rho^{-5/3}$ , l'exposant étant donc compris entre 1 et 2. On espère enfin que les trois autres surfaces résonantes se comportent de façon similaire, et que la méthode de calcul des aires converge avec une discrétisation croissante.

### 7.3 Stabilité et convergence à $\mathfrak{R} = 1$

On cherche à obtenir, pour commencer, une évolution temporelle stable et convergée du spectre d'énergie, pour  $\mathfrak{R} = 1$ . En effet, d'après les modélisations en turbulence isotrope, on sait que les schémas numériques à très grand  $\mathfrak{R}$ , où la viscosité est faible, ont tendance à être instables. Il faut cependant se rappeler qu'initialement, l'analyse AQNM a été menée pour le cas où  $\mathfrak{R}$  tend vers l'infini, la viscosité ayant été volontairement écartée du modèle sauf d'un point de vue numérique. Mais pour des questions de stabilité et d'évacuation éventuelle de l'énergie à la coupure numérique, il faudra certainement se contenter d'un nombre de Reynolds effectif fini.

L'objectif final est de constater l'établissement d'une zone inertielle suffisamment large, et dont la pente ne dépendrait pas de  $\mathfrak{R}$ . En supposant que la viscosité n'affecte pas démesurément l'expression AQNM du terme de transfert, on pourrait alors reconstituer le spectre à n'importe quel autre nombre de Reynolds effectif, en rajoutant une décroissance exponentielle aux nombres d'ondes de l'ordre de l'inverse de l'échelle de Kolmogorov. On décide donc de démarrer avec  $\mathfrak{R} = 1$ , et on cherche à obtenir un premier spectre stable et convergé, pour une discrétisation de départ de  $\mathbf{M}_\rho = 400$ ,  $\mathbf{M}_\theta = 600$ ,  $\mathbf{M}_\phi = 100$ ,  $\mathbf{k}_{\min} = 0, 1$ .

#### 7.3.1 Stabilité

Ce cas préliminaire à  $\mathfrak{R} = 1$  donnera certainement des indices sur le comportement de l'énergie, et l'apparition éventuelle d'instabilités numériques. On cherche maintenant à déterminer des valeurs acceptables pour deux paramètres numériques importants, à savoir la coupure aux grands nombres d'ondes  $k_{max}$  et le pas de temps  $dt$ , afin d'atteindre la stabilité du schéma numérique.

##### 7.3.1.1 Choix de $k_{max}$

Il y a deux aspects qui motivent le choix de  $k_{max}$ . On rappelle d'abord qu'en turbulence isotrope, la coupure visqueuse spectrale s'effectue à des nombres d'ondes

proportionnels à  $Re^{3/4}$ . Plus le nombre de Reynolds est élevé, plus la zone de dissipation visqueuse est repoussée vers les grands nombres d'ondes. Numériquement, il est conseillé de placer la coupure liée à la discrétisation à un nombre d'onde égal à deux fois le nombre d'onde typique lié à la coupure visqueuse, afin d'être certain d'en capter les effets. Ensuite, on cherche à choisir une valeur de  $k_{max}$  de telle façon que les nombres d'ondes qui sont négligés, c'est-à-dire ceux supérieurs à  $k_{max}$ , auraient de toutes façons apporté une contribution négligeable au spectre, même après évolution temporelle.

On a choisi ici une valeur du nombre de Reynolds effectif relativement basse, donc on conserve la valeur de  $\mathbf{k}_{max} = \mathbf{10}$ , parce qu'on a montré précédemment que la prise en compte des nombres d'ondes supérieurs n'engendrait aucun changement dans le calcul du terme de transfert. Enfin, si on imagine une évolution temporelle du spectre, l'amplitude de l'énergie à cet endroit semble suffisamment faible initialement, pour le rester ultérieurement. On verra rapidement si la dissipation à ces nombres d'ondes est suffisante ou pas, et si elle ne l'est pas, on devra alors augmenter la valeur de  $k_{max}$ .

### 7.3.1.2 Choix du pas de temps

Considérant ce choix de  $k_{max}$ , il faut alors donner une valeur convenable au pas de temps numérique  $dt$ . D'une part, sa valeur ne doit pas être trop grande, et ce, pour deux raisons. La première est que le schéma numérique temporel peut se montrer instable pour un pas de temps trop élevé, et tout dépend alors du choix du schéma. La deuxième est que l'on risque d'avoir un temps numérique caractéristique plus élevé que le temps caractéristiques des phénomènes physiques. Or il est très difficile d'estimer l'échelle de temps liée à la non linéarité, car l'expression du terme de transfert est complexe. Le seul phénomène quantifiable en termes de durée est la dissipation visqueuse.

On rappelle que l'équation adimensionnelle d'évolution est :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathfrak{R}^{-1}k^2e = T.$$

Ainsi l'échelle de temps caractéristique de la dissipation pour les nombres d'ondes de module  $k$  est :

$$\tau_{diss}(k) = \frac{\mathfrak{R}}{k^2}. \quad (7.14)$$

Pour n'avoir aucun problème quel que soit le nombre d'ondes, on doit donc toujours au moins vérifier l'inégalité  $dt \ll \tau_{diss}(k_{max})$ , soit :

$$dt \simeq 0, 1 \frac{\mathfrak{R}}{k_{max}^2}. \quad (7.15)$$

Le problème est que certains phénomènes physiques non linéaires peuvent entraîner une évolution du spectre sur des temps inférieurs à  $\tau_{diss}(k_{max})$ , et il s'agira alors de déterminer si c'est le cas.

Enfin, d'un point de vue matériel, la valeur du pas de temps ne doit pas être trop petite. Ce qui est intéressant, c'est d'arriver à un temps final  $t_f$  donné ; et pour un

$dt$  trop petit, le nombre de pas de temps nécessaire peut devenir très élevé. Ainsi, pour  $\mathfrak{R} = 1$  et  $k_{max} = 10$ , le pas de temps doit être petit devant 0,01, et notre valeur de départ sera donc  $\mathbf{dt} = \mathbf{0,001}$ .

### 7.3.1.3 Évolution temporelle

Pour une résolution de  $M_\rho = 400$ ,  $M_\theta = 600$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0,1$ ,  $k_{max} = 10$ ,  $dt = 0,001$  et  $t_f = 0,38$ , on obtient tout de suite un spectre d'énergie intégré  $E(k)$  qui ne présente pas d'instabilité numérique. Les résultats, à savoir l'évolution temporelle du spectre d'énergie intégré, de l'énergie totale, du terme de transfert et de son intégrale relative, sont présentés sur les figures 7.2 et 7.3. Dans la suite, l'évolution temporelle d'une fonction sera illustrée par la superposition de l'évolution spatiale de cette fonction à différents instants. L'écart temporel entre deux courbes est toujours constant, sauf éventuellement entre les deux dernières courbes, la dernière figurant toujours la courbe à  $t = t_f$ .

Le spectre d'énergie  $e(\mathbf{k}, t)$  ne présente pas de valeurs négatives, et ce, à aucun instant. Ce n'est pas forcément le cas pour un modèle de type EDQNM, par exemple. On sait que la réalisabilité est assurée théoriquement, mais on a ici qu'elle est aussi bien vérifiée numériquement. Le spectre d'énergie intégré,  $E(k, t)$ , montre une évolution temporelle classique. Une première phase consiste en une cascade non linéaire, qui apporte de l'énergie aux grands nombres d'ondes. Cette étape s'arrête pour  $t$  de l'ordre de 0,13, et fait apparaître une zone inertielle en  $k^{-4,7}$ . On constate qu'à  $\mathfrak{R} = 1$ , l'effet de la viscosité est trop fort aux petites échelles, car la largeur de cette zone est très réduite, de l'ordre d'une demie-décade de nombres d'ondes. On peut même penser que, la viscosité agissant trop vite par rapport aux effets non linéaires, la cascade n'a pas le temps d'imposer une pente correcte. La deuxième phase d'évolution est le déclin visqueux au-delà du pic d'énergie, qui est un effet purement linéaire. L'énergie ayant augmenté à ces nombres d'ondes, il y a un instant où le terme visqueux de l'équation de Lin prend le pas sur le terme non linéaire, jusqu'à ce que finalement l'énergie soit nulle, par dissipation. En ce qui concerne l'énergie totale, elle décroît faiblement jusqu'à des temps de l'ordre de 0,02, puis montre une décroissance beaucoup plus forte au fur et à mesure que la viscosité impose sa dynamique à l'écoulement.

De plus, le terme de transfert a aussi une évolution caractéristique. Initialement, l'énergie, contenue aux échelles de l'ordre de celle du pic d'énergie, est redistribuée aux autres nombres d'ondes. Elle est perdue au profit des petites échelles majoritairement, mais il y a aussi un transfert d'énergie relativement faible vers les plus grandes échelles. Tant que l'énergie aux grandes échelles est forte, le transfert reste fort, car les gros tourbillons sont très instables. Au cours du temps, le maximum du terme de transfert diminue, et son minimum augmente conjointement, indiquant que les écarts d'énergies entre nombres d'ondes sont de plus en plus faibles, et la cascade ralentit. Finalement, on observe les effets de la dissipation visqueuse, qui fait tendre le transfert uniformément vers zéro. Pour finir, on vérifie remarquablement bien la conservation de l'énergie par le transfert non linéaire : l'intégrale relative ne dépasse jamais  $2,6 \cdot 10^{-4}$ . Ce cas constitue donc notre référence pour  $\mathfrak{R} = 1$ .

On semble avoir atteint la stabilité du schéma, on peut maintenant chercher à



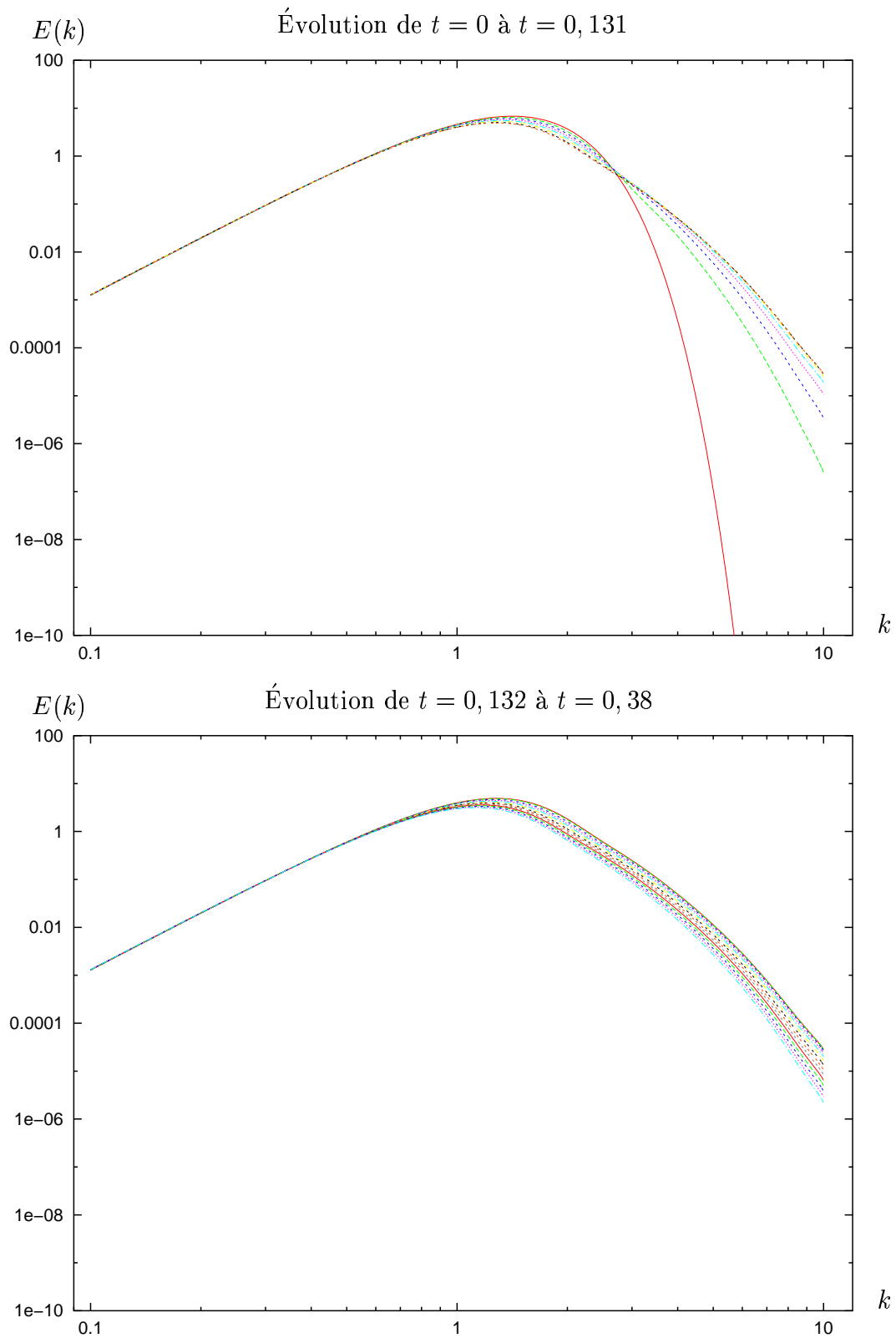


FIG. 7.2 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée à  $\mathfrak{R} = 1$ ,  $k_{max} = 10$ ,  $dt = 0,001$  de  $t_0 = 0$  à  $t_f = 0,38$ .

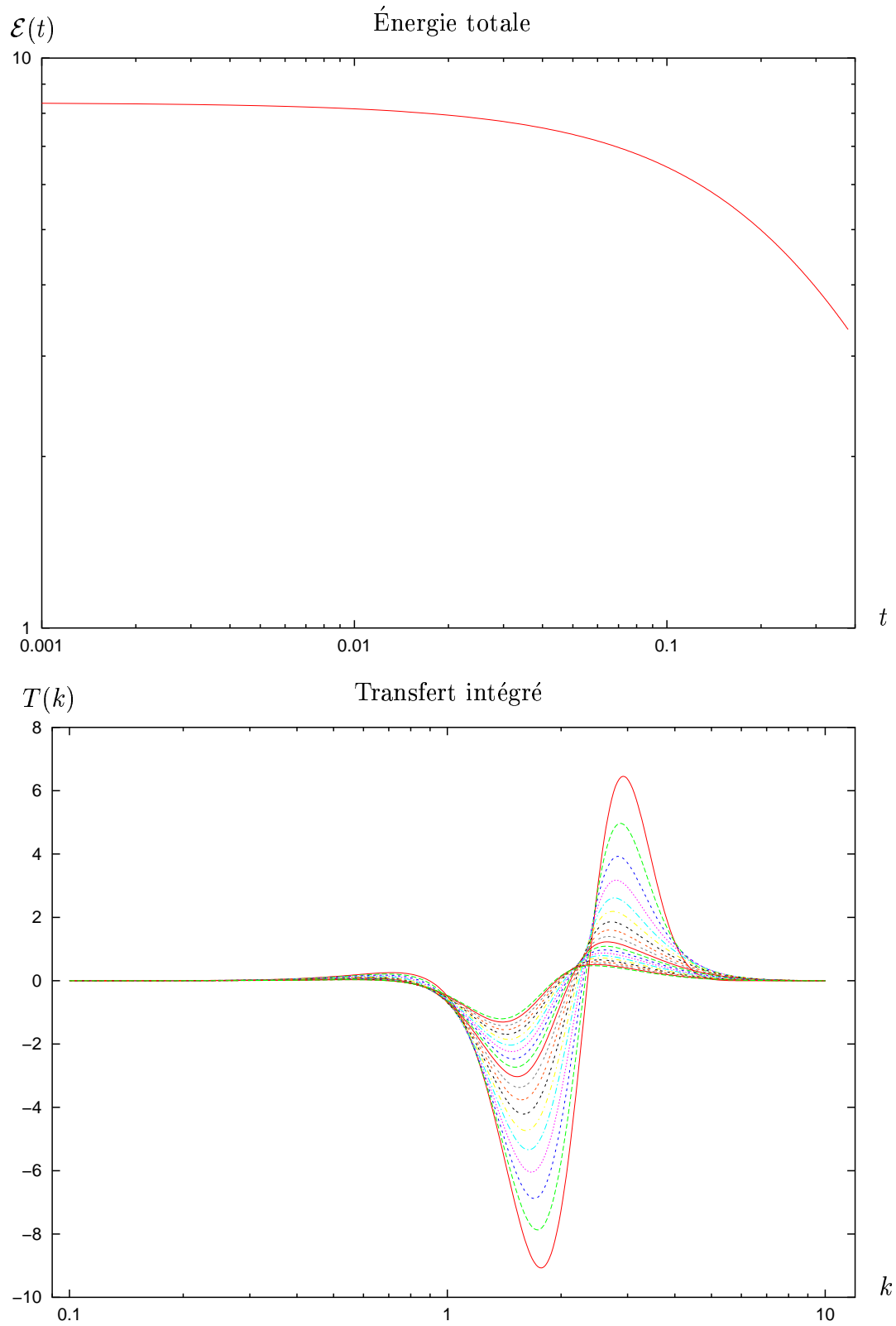


FIG. 7.3 – Évolution temporelle de l'énergie totale et du transfert intégré à  $\mathfrak{R} = 1$ ,  $k_{max} = 10$ ,  $dt = 0,001$  de  $t_0 = 0$  à  $t_f = 0,38$ .

savoir si les discrétisations temporelle et spatiale assurent sa convergence. On cherche à estimer l'influence de la discrétisation numérique, qu'elle soit temporelle ( $dt$ ) ou spatiale ( $M_\rho$ ,  $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $k_{min}$  et  $k_{max}$ ), sur le spectre que l'on obtient à  $\mathfrak{R} = 1$ , et à différents instants.

### 7.3.2 Convergence avec la discrétisation temporelle

On veut déterminer ici l'impact de la valeur du pas de temps  $dt$  sur le spectre d'énergie, du point de vue de sa convergence.

#### 7.3.2.1 Méthodologie

Il s'agit tout d'abord de voir si le calcul est convergé, en choisissant une discrétisation plus fine. Ensuite, et si c'est le cas, il faut déterminer si on peut se permettre d'augmenter le pas de temps, et à quel prix. En effet, on s'attend à ce que le pas de temps lié à la viscosité soit de plus en plus petit pour un nombre de Reynolds effectif croissant, car la valeur de  $\tau_{diss}(k_{max})$  diminue vite, en  $k_{max}^{-2}$ . Comme on pourrait avoir besoin de prendre ultérieurement de plus grands nombres de Reynolds effectifs, pour une question d'établissement de la zone inertielle par exemple, on ne pourra certainement pas se permettre de prendre des valeurs de  $dt$  trop petites. Le calcul mettrait en effet beaucoup trop de temps. Cependant, cette contrainte temporelle disparaît complètement si  $\mathfrak{R}$  tend vers l'infini, car alors les effets visqueux sont repoussés vers l'infini temporellement.

#### 7.3.2.2 Diminution du pas de temps

On choisit la valeur  $dt = 0,0001$ , et on s'intéresse aux instants  $t = 0,01$  et  $t = 0,02$ , ce qui correspond à 100 et 200 pas de temps. On ne peut en effet pas se permettre de prendre un temps final trop important car le nouveau pas de temps est très petit. On garde bien sûr la même discrétisation spatiale, et on obtient les résultats suivants :

- Pour  $t = 0,01$ , les matrices d'énergie diffèrent de moins de 0,01%, celles de transfert de 0,02%.
- Pour  $t = 0,02$ , les matrices d'énergie diffèrent de moins de 0,01%, celles de transfert de 0,04%.

Bien que les écarts aient l'air croissants avec le temps, ils restent très faibles. On peut donc estimer que l'on a atteint la convergence avec le pas de temps du calcul numérique.

#### 7.3.2.3 Augmentation du pas de temps

On passe maintenant à un pas de temps plus raisonnable du point de vue du temps de calcul,  $dt = 0,01$ . Bien que la stabilité soit toujours vérifiée, il apparaît que certaines énergies spectrales  $e(\mathbf{k}, t)$  prennent des valeurs négatives, ce qui va à l'encontre de leur signification physique. On n'a donc plus de réalisabilité numérique, alors que la réalisabilité théorique a été démontrée. Si l'on veut utiliser un tel pas de temps, une étude plus approfondie est nécessaire. On va essayer de déterminer

d'où proviennent ces énergies négatives, ce qui les fait disparaître et si on peut éventuellement s'en accommoder.

### 7.3.3 Étude des énergies négatives

On travaille dans cette partie avec  $\mathfrak{R} = 1$ ,  $M_\rho = 400$ ,  $M_\theta = 600$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0, 1$ ,  $k_{max} = 10$  et un pas de temps de  $dt = 0, 01$ , soit dix fois le pas de temps imposé par la viscosité à cette discrétisation.

#### 7.3.3.1 Observations

On s'aperçoit que, bien que le spectre intégré  $E(k, t)$  reste à tout instant positif, le spectre d'énergie  $e(\mathbf{k}, t)$  peut lui, par contre, être négatif pour certains couples  $(k, \theta)$ , et ce dès les premiers pas de temps. Ce comportement semble inhérent à ce type de modèle car on retrouve les mêmes manifestations en EDQNM. La cause en est certainement que les arrondis numériques font qu'une énergie qui devrait être positive mais proche de zéro peut facilement se transformer en une énergie négative, tout en restant très petite en valeur absolue. L'apparition d'énergies négatives se produit, comme on va le voir, vers les grands nombres d'ondes, du fait de leur faible énergie initiale, et ultérieurement, du fait de la plus forte influence de la viscosité à ces échelles, qui se met à agir rapidement.

On distingue ainsi deux phases d'apparition, la première concernant seulement les premiers pas de temps. On va voir que le schéma numérique est suffisamment stable pour atténuer l'amplitude de ces énergies, ce qui fait que cette phase ne dure que quelques itérations. Dans un deuxième temps, des valeurs négatives apparaissent pour ne plus disparaître, mais en ne mettant en jeu que des énergies très petites en valeur absolue. Pour d'autres nombres de Reynolds effectifs et d'autres discrétisations, l'augmentation de la valeur absolue de ces énergies négatives pourrait conduire à une instabilité numérique. Il s'agit donc de déterminer si les arrondis à l'origine de ce comportement proviennent de la résolution spatiale ou temporelle, et ce que l'on peut faire pour y remédier.

#### 7.3.3.2 Influence de la résolution spatiale

Pour l'étudier, on s'intéresse à la zone d'apparition de ces énergies négatives dans l'espace spectral, ainsi qu'à leur amplitude relative par rapport à la valeur maximale de l'énergie, en considérant l'impact d'un changement de résolution spatiale ou temporelle sur ces indicateurs.

Pour des discrétisations spatiales différentes, et avec  $t_f = 0, 77$ , on choisit d'effectuer une série de calculs qui figurent dans le tableau suivant :

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$
Référence	400	600	100	0, 1	10
$M_\rho$	800	600	100	0, 1	10
$M_\theta$	400	900	100	0, 1	10
$M_\phi$	400	600	200	0, 1	10
$k_{min}$	600	600	100	0, 01	10
$k_{max}$	600	600	100	0, 1	100

On s'intéresse à la zone d'apparition de ces énergies négatives, et à leur amplitude relative maximale, c'est-à-dire  $|\min\{e(\mathbf{k})/\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}|$  divisé par  $\max\{e(\mathbf{k})/\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$ , à différents instants. Les énergies négatives apparaissent, pour chaque calcul, dès le premier pas de temps, et finissent par disparaître au bout d'un certain temps; elles réapparaissent éventuellement à un temps ultérieur. Le spectre d'énergie intégré  $E(k)$  reste par contre positif à tout instant, sauf pour  $k_{max} = 100$ . Dans ce dernier cas, la condition sur le pas de temps imposée par la viscosité est trop loin d'être vérifiée.

On peut faire les constatations suivantes :

1. Les énergies négatives apparaissent systématiquement au-delà de  $k = 5$ , et s'étendent, quand  $k_{max}$  vaut 100, jusqu'à  $k \simeq 27$ , ce qui semble être une valeur limite. L'énergie initiale à cet endroit est en fait très faible, de l'ordre de  $10^{-388}$ . Si on regarde plus attentivement le spectre d'énergie, on s'aperçoit que les énergies positives plus petites que cette valeur sont considérées comme nulles par le code numérique, car on a en fait atteint la précision machine. Cela tend à prouver que c'est aux nombres d'ondes de faible énergie que le passage d'une quantité positive à une quantité négative s'effectue le plus facilement. On ne constate de plus jamais de passage en négatif si l'énergie est exactement égale à zéro au pas de temps précédent. La cause de ce changement de signe semble donc être les erreurs liées aux arrondis numériques du calcul sur les petits nombres non nuls.
2. La répartition de ces énergies négatives selon  $\theta$  indique que seules des valeurs proches de 0 et  $\pi$  sont concernées. Les ondes de vecteur d'onde parallèle à  $\Omega$  ( $\theta = 0$ ) correspondent à une singularité de la représentation sphérique : leur comportement est difficile à étudier, et ce, d'autant plus que la troncature de  $[0, \pi]$  en  $[\epsilon_\theta/2, \pi - \epsilon_\theta/2]$  néglige presque entièrement leur influence. On peut ainsi s'attendre à ce que la non prise en compte des interactions inertielles, surtout locales, faisant intervenir ce type d'ondes, entraîne éventuellement un déficit en énergie se traduisant au total par l'apparition d'énergies négatives. On a donc accumulation de facteurs aggravants aux grands nombres d'ondes proches de la verticale, orientés vers le bas ou vers le haut, car leur énergie est faible et on néglige certaines de leurs interactions inertielles.
3. Enfin, l'amplitude relative de ces énergies négatives reste à peu près constante autour de  $7 \cdot 10^{-11}\%$ , ce qui est une valeur extrêmement petite, et qui ne devrait donc influencer ni sur le terme de transfert au même pas de temps, ni par conséquent sur le spectre d'énergie aux pas de temps suivants. L'augmentation de la résolution spatiale semble n'entraîner, dans l'ensemble, presque aucune variation dans les indicateurs, ce qui conduit à penser que cette instabilité est liée au pas de temps choisi.

### 7.3.3.3 Influence du pas de temps

On essaie donc de quantifier l'influence du pas de temps sur la première phase d'apparition des énergies négatives et sur leur propagation, en choisissant  $t_f = 0,01$  et un pas de temps variable. On fait aussi figurer, à  $t = t_f$ , l'intégrale relative du terme de transfert, ainsi que les écarts entre les matrices d'énergie spectrale :

	$dt$	Zone de nombres d'ondes	Amplitude relative	$\frac{fT}{f T }$	$\frac{\ e_2 - e_1\ }{\ e_1\ }$
$dt$	0,01	$5 \leq k \leq 10$	$0,670620 \cdot 10^{-12}$	-0,0001802	0%
$dt/2$	0,005	$7 \leq k \leq 10$	$0,273319 \cdot 10^{-34}$	-0,0001799	0,020%
$dt/10$	0,001	aucune	0	-0,0001797	0,036%

Il faut noter que le dernier calcul correspond au cas de référence pour  $\mathfrak{R} = 1$ , et qu'il est donc cohérent de ne trouver aucune énergie négative.

On peut faire les remarques suivantes :

1. On s'aperçoit tout d'abord que la diminution du pas de temps entraîne un rétrécissement de la zone d'apparition des énergies négatives dans la direction radiale, la répartition angulaire restant concentrée autour de 0 et  $\pi$ . On constate leur disparition pour des valeurs inférieures à  $dt = 0,001$ , qui correspond bien au dixième de  $\tau_{diss}(k_{max})$ .
2. Ensuite, l'amplitude relative maximale moyenne par pas de temps de ces énergies diminue en même temps de manière exponentielle jusqu'à finalement atteindre 0.
3. De plus, l'intégrale relative du terme de transfert est peu variable quel que soit le pas de temps (la dépendance en la résolution spatiale est beaucoup plus forte).
4. Enfin, les tableaux de l'énergie spectrale subissent peu de variations avec la diminution de  $dt$ .

Ces remarques amènent à la conclusion que, pour une résolution spatiale donnée, on peut toujours faire disparaître complètement ces énergies négatives en diminuant le pas de temps. Ce raisonnement est valable au moins en théorie, car il y a aussi des contraintes de temps de calcul.

### 7.3.3.4 Synthèse

Les énergies négatives proviennent donc bien des arrondis numériques, et ne reflètent en soi aucune réalité physique. Il semble que l'on puisse en théorie toujours les faire disparaître en diminuant suffisamment le pas de temps. Pour le cas de référence ( $dt = 0,001$ ), on peut dire qu'aucune énergie négative n'apparaîtra pendant toute l'évolution temporelle, jusqu'à extinction de la turbulence. C'est le cas jusqu'à  $t = 0,38$ , et ce sera toujours le cas même pour des temps ultérieurs à  $t = 0,38$ , car on a alors largement entamé la phase de décroissance visqueuse, et cela ne pose plus de problèmes numériques a priori.

Pour un nombre de Reynolds effectif donné, on a donc deux options : soit on décide de diminuer le pas de temps jusqu'à atteindre une valeur optimale ne faisant apparaître aucune énergie négative, soit on garde une valeur de pas de temps raisonnable, en espérant que le calcul reste stable et convergé. C'est ce dernier cas qui est intéressant car des valeurs prohibitives du pas de temps seront rapidement atteintes. Ces valeurs négatives étant faibles en valeur absolue, et provenant auparavant d'une zone où l'énergie était basse, mais positive, on aimerait remplacer à chaque pas de temps les énergies négatives par la valeur 0. En résolvant de manière aussi franche

ces erreurs numériques, on espère que la valeur réelle, et positive, de ces énergies n'est pas suffisamment grande pour influencer le spectre.

On va essayer de déterminer si l'on observe ou pas des écarts entre les configurations avec ou sans mise à zéro, et le cas de référence. On rappelle que la valeur  $\mathfrak{R} = 1$  constitue notre cas test pour l'ensemble des nombres de Reynolds effectifs, car il permet une relative souplesse dans le choix des paramètres, surtout du pas de temps.

### 7.3.3.5 Utilisation de la mise à zéro

Pour  $t_f = 0, 3$ , il s'agit de comparer les spectres, intégrés ou pas, obtenus pour  $dt = 0, 01$  avec et sans mise à zéro, par rapport à celui pour  $dt = 0, 001$ . On choisit deux temps caractéristiques de l'évolution temporelle, à savoir  $t = 0, 1$  (établissement de zone inertielle) et  $t = 0, 3$  (phase de déclin visqueux). On obtient :

Cas $t = 0, 1$	$\frac{\ e_2 - e_1\ }{\ e_1\ }$	$\frac{\ E_2 - E_1\ }{\ E_1\ }$
Référence $dt = 0, 001$	0%	0%
$dt = 0, 01$ sans mise à zéro	0, 223%	0, 236%
$dt = 0, 01$ avec mise à zéro	0, 223%	0, 236%
Cas $t = 0, 3$	$\frac{\ e_2 - e_1\ }{\ e_1\ }$	$\frac{\ E_2 - E_1\ }{\ E_1\ }$
Référence $dt = 0, 001$	0%	0%
$dt = 0, 01$ sans mise à zéro	0, 338%	0, 338 %
$dt = 0, 01$ avec mise à zéro	0, 338%	0, 338 %

Ces pourcentages poussent aussi à comparer directement les cas  $dt = 0, 01$  avec et sans mise à zéro : on ne constate pas de différence significatives, étant très inférieures à 0,01%. Pour un pas de temps donné, la mise à zéro est donc une opération qui semble relativement cohérente, car il y a peu de conséquences sur les spectres.

Par contre, on peut se demander si on peut se contenter d'un pas de temps plus élevé que celui normalement nécessaire, au vu des pourcentages d'écart croissants avec le temps. Si l'on regarde attentivement le spectre intégré, on s'aperçoit qu'en fait, les différence significatives se manifestent qu'à partir du pic initial d'énergie, et plus particulièrement aux grands nombres d'ondes, domaine qui n'est pas couvert pas le modèle AQNM. Tant que la dissipation visqueuse joue son rôle et que la pente de la zone inertielle n'est pas affectée, on peut donc conserver  $dt = 0, 01$  avec ou sans mise à zéro.

On étudie maintenant la convergence vis-à-vis de la discrétisation spatiale. On choisit d'utiliser le cas où  $dt = 0, 01$  sans mise à zéro car cela permet d'atteindre des temps plus grands par rapport au cas  $dt = 0, 001$ .

### 7.3.4 Convergence avec la discrétisation spatiale

Il s'agit de recommencer l'étude de convergence déjà faite précédemment sur le terme de transfert, mais à différents instants caractéristiques de l'évolution temporelle.

### 7.3.4.1 Méthodologie

On dispose d'un calcul avec  $dt = 0,01$  et  $t_f = 6,4$ . On choisit un instant donné de l'évolution, et on regarde, au pas de temps suivant, et en changeant la discrétisation spatiale, les différences obtenues sur le terme de transfert calculé. Pour chaque cas, on doit fournir un nouveau tableau d'énergie spectrale, de taille adaptée à la discrétisation. Dès que l'on change un paramètre, sauf  $M_\phi$ , il est clair que la taille de ce tableau va changer. On est donc amenés à générer, à partir du tableau obtenu à partir du cas de référence, de nouveaux tableaux de taille plus grande :

1. Pour  $M_\rho$ , la nouvelle valeur est un multiple quelconque de l'ancienne, et les points de discrétisation rajoutés s'intercalent entre les points de référence. Il s'agit de procéder à une simple interpolation, que l'on prendra sur quatre points voisins.
2. Pour  $M_\theta$ , le problème est similaire car le multiple est un entier impair. La seule différence concerne les angles aux extrémités de  $[0, \pi]$ , qui doivent alors être extrapolés. Or pour  $M_\theta = 1800$ , le calcul nécessite trop de mémoire vive, et on avait pris soin de choisir une valeur de  $M_\theta$  plus grande que nécessaire initialement, en cas d'augmentation de la dépendance angulaire avec le temps. On va donc se contenter d'effectuer un calcul avec  $M_\theta = 300$ . On suppose donc que cette direction de discrétisation n'influence pas le terme de transfert, car on avait initialement pris suffisamment de marge.
3. Pour  $M_\phi$ , la taille du tableau ne change pas, on peut faire une comparaison directe.
4. Pour  $k_{min}$ , on doit extrapoler vers les petits nombres d'ondes, tout en ajustant conjointement  $M_\rho$  afin de garder  $\varepsilon_\rho$  constant. Une extrapolation polynômiale, même si le polynôme est de degré élevé, donne des résultats incohérents. On est donc contraints d'essayer de trouver une extrapolation par une fonction algébrique, en s'aidant de la forme du spectre. Pour les petits nombres d'ondes, on a peu de variation de l'énergie avec le temps. On doit donc toujours avoir un spectre  $e(\mathbf{k})$  isotrope en  $k^2$ , ce qui est bien vérifié numériquement et graphiquement. On complète donc, pour  $0,01 \leq k < 0,1$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$  par  $e(\mathbf{k}) = k^2$ .
5. Pour  $k_{max}$  et les grands nombres d'ondes, c'est un peu plus délicat car il y a une évolution rapide de la pente du spectre. L'observation du comportement de  $e(\mathbf{k})$  montre tout d'abord que la dépendance en  $\theta$  ne peut être négligée. Ensuite, il y a une décroissance proche d'une exponentielle quelle que soit la valeur de  $\theta$ , avec éventuellement une inclinaison variable. On pourrait chercher une forme plus raffinée de comportement vers les grands nombres d'ondes, mais les méthodes fiables manquent, et on sait de plus que la coupure visqueuse impose une décroissance exponentielle. Pour un angle  $\theta$  donné, on raccordera donc numériquement le spectre  $e(\mathbf{k})$  dans la direction radiale par une fonction du type  $\alpha(\theta) e^{-\beta(\theta)k}$  en s'aidant de deux points à l'extrémité du spectre, les plus caractéristiques de la décroissance visqueuse. À  $\theta$  fixé, on élimine donc tous les nombres d'ondes à partir de l'apparition d'une énergie négative, s'il y en a, et on complète numériquement le spectre obtenu par raccordement.



### 7.3.4.2 Vérification à différents instants

On choisit d'étudier le temps  $t = 1$ . La série de calculs à effectuer est la suivante :

	$M_\rho$	$M_\theta$	$M_\phi$	$k_{min}$	$k_{max}$	$\frac{ T-T_{ref} }{ T_{ref} }$	$\frac{\int T}{\int  T }$
Réf.	400	600	100	0,1	10	0%	-0,00024972
$M_\rho$	800	600	100	0,1	10	0,01 %	+0,00007973
$M_\theta$	400	200	100	0,1	10	0,42 %	-0,00044562
$M_\phi$	400	600	200	0,1	10	0,04 %	-0,00038949
$k_{min}$	600	600	100	0,01	10	0 %	-0,00024964
$k_{max}$	600	600	100	0,1	100	0 %	-0,00024974

Il n'y a pratiquement plus aucune dépendance en  $M_\rho$  ni en  $M_\phi$ . Un calcul effectué en augmentant  $M_\theta$  n'est pas possible ; on s'est contenté de diminuer la discrétisation angulaire, en la divisant par deux. On s'aperçoit de l'importance de  $M_\theta$ , pour lequel on observe un demi-pourcent de différence. Enfin, comme on s'y attendait, l'influence de  $k_{min}$  et de  $k_{max}$  ne se fait pas ressentir à travers les deux indicateurs. Dans l'ensemble, le calcul est peu sensible aux variations des paramètres numériques, et on peut dire, sans trop d'hésitations, que le calcul est convergé à cette discrétisation spatiale et à cet instant.

On peut donc dire, avec une forte certitude, que la convergence reste assurée à tout autre instant. On a donc obtenu, à  $\mathfrak{R} = 1$ , un spectre d'énergie stable et convergé, et dont l'évolution temporelle est relativement cohérente avec l'analyse isotrope usuelle. Il s'agit maintenant d'effectuer la même étude pour un nombre de Reynolds effectif infini. Il est très probable qu'en cours d'évolution, on voit l'énergie s'accumuler aux grands nombres d'ondes par manque de dissipation. La recherche d'un nombre de Reynolds effectif optimal s'avérerait nécessaire, et ce cas deviendrait le cas de référence du modèle AQNM.

## 7.4 Recherche de stabilité à $\mathfrak{R}$ infini

Après le cas  $\mathfrak{R} = 1$ , diverses tentatives ont été menées pour essayer d'obtenir un spectre stable et convergé pour des nombres de Reynolds effectifs plus grands, comme 3, 10 ou 100. À  $\mathfrak{R} = 1$ , on avait eu la chance d'obtenir quasiment directement un spectre exploitable, avec la discrétisation choisie. Ce n'est malheureusement pas le cas pour les autres nombres de Reynolds effectifs, et la recherche de la phase de stabilité demande beaucoup d'investigations, sans même être certain d'aboutir à des résultats concrets. On décide donc de passer directement à un nombre de Reynolds effectif infini. D'une part, on cherche à obtenir une évolution stable, quitte à ce que l'énergie s'accumule aux grands nombres d'ondes pendant l'évolution temporelle. D'autre part, on espère ainsi pouvoir estimer l'ordre de grandeur d'un nombre de Reynolds effectif capable de dissiper suffisamment cette énergie.

On prend comme discrétisation de départ  $M_\rho = 400$ ,  $M_\theta = 600$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0,1$  comme pour le cas  $\mathfrak{R} = 1$ , et on cherche à obtenir la stabilité et la convergence du schéma numérique. Le choix de  $k_{max}$  et du pas de temps  $dt$  est sujet à discussion, car le comportement du spectre n'est pas prévisible a priori. Pour un  $k_{max}$  choisi en fonction de l'évolution temporelle présumée du spectre, la stabilité devrait

reposer principalement sur l'ordre de grandeur du pas de temps, qui conditionne en particulier le comportement du schéma temporel. On verra que la valeur de  $dt$  devra être relativement petite afin d'obtenir une évolution temporelle correcte, du moins jusqu'à l'établissement de la zone inertielle. Par la suite, l'accumulation d'énergie sera compensée par l'utilisation d'une dissipation numérique sous la forme d'une viscosité.

### 7.4.1 Rôle de la coupure radiale et du pas de temps

Le choix de la valeur de  $k_{max}$  constitue l'enjeu majeur de l'étude à nombre de Reynolds effectif infini, au moins pour ce qui est de la première phase d'évolution, à savoir la cascade d'énergie. Il faut que ce paramètre permette de capter tous les effets de la cascade non linéaire, et en particulier l'établissement d'une zone inertielle éventuelle. Il ne doit donc pas être trop petit, afin de permettre à cette zone de s'installer. De plus, quand le nombre de Reynolds effectif est fini, on s'attend à ce que la coupure visqueuse soit déplacée vers les grands nombres d'ondes pour un nombre de Reynolds effectif croissant. Elle atteint ainsi l'infini quand il tend vers l'infini, et on a l'impression que la valeur de  $k_{max}$  n'a plus de contrainte liée à la dissipation d'énergie, ce qui est partiellement vrai. Tandis qu'avec une viscosité non nulle, on sait que le transfert d'énergie va finir par s'arrêter à un certain nombre d'onde, dans le cas d'un nombre de Reynolds effectif infini, la cascade est continue, infinie, et c'est la seule responsable de la déperdition d'énergie aux grandes échelles.

La coupure à  $k_{max}$  étant inévitable, elle induit un biais numérique certain qui modifie la valeur de l'énergie en tout point. On a vu que la seule coupure, même avec discrétisation, préservait la propriété de conservation de l'énergie totale. Néanmoins, si les erreurs numériques, liées à la discrétisation, sont trop importantes, le calcul produira un spectre non physique, inexploitable. Et même si la discrétisation est assez fine pour avoir une bonne précision sur les valeurs de l'énergie, le système, tout en restant conservatif, pourrait se diriger vers l'équipartition, ou générer des oscillations dans le spectre intégré, par exemple.

On choisit pour commencer la valeur  $k_{max} = 10$ , tout en sachant que la zone inertielle ne pourra probablement pas s'établir. Dans ce cas, l'accumulation d'énergie aux grands nombres d'ondes se manifestera assez rapidement. Reste à choisir un pas de temps convenable. À  $k_{max}$  fixé, faire tendre le nombre de Reynolds effectif vers l'infini fait tendre le temps caractéristique de la dissipation à  $k_{max}$  vers l'infini. Ainsi, le pas de temps n'a plus aucune contrainte physique à vérifier. Il doit cependant assurer le bon comportement du schéma temporel, et ne doit donc pas être trop grand non plus. Le choix initial se fait donc un peu arbitrairement, en prenant la valeur  $dt = 0,01$ , qui reste très petite devant 1.

### 7.4.2 Évolution temporelle à $k_{max} = 10$ et $dt = 0,01$

Le calcul est mené jusqu'à  $t_f = 0,3$ , ce qui représente 30 pas de temps. Grâce à l'étude du cas  $\mathfrak{R} = 1$ , les énergies négatives éventuelles sont mises systématiquement à zéro, mais on continue à s'intéresser à leur maximum relatif à chaque pas de temps, par sécurité. En effet, si cette valeur devient trop importante, ce n'est plus

un problème d'arrondis numériques, comme on l'avait vu dans le cas  $\mathfrak{R} = 1$ , mais bien une instabilité liée au code. La figure 7.4 présente l'évolution temporelle du spectre d'énergie intégré et du terme de transfert intégré.

On voit très nettement, qu'après un transfert d'énergie vers les grands nombres d'ondes, il n'y a bien aucun phénomène de dissipation susceptible de faire diminuer suffisamment l'énergie qui s'accumule à la coupure. L'hypothèse d'une coupure jouant le rôle d'une dissipation numérique semble donc être écartée, et l'ajout d'une viscosité sera certainement nécessaire par la suite. De plus, l'énergie totale finit par augmenter à partir de  $t = 0, 1$ , ce qui ne correspond à aucun processus physique attendu. Enfin, si l'on regarde attentivement le transfert d'énergie intégré au dernier pas de temps, on s'aperçoit qu'un comportement oscillatoire se manifeste à l'extrémité du spectre. L'analyse des énergies négatives montre qu'après une première période d'apparition, et une deuxième de disparition, elles réapparaissent brusquement à nouveau à  $t = 0, 22$  pour ne plus disparaître. D'après l'étude à  $\mathfrak{R} = 1$ , ce phénomène est certainement lié au pas de temps d'une façon ou d'une autre, et on verra ultérieurement que cette instabilité se présente très fréquemment.

On décide donc maintenant d'augmenter la valeur de  $k_{max}$  au-dessus de 60, dans l'idée d'obtenir une zone inertielle d'une décade de nombres d'ondes en largeur. La valeur du pas de temps est conservée à 0,01, au moins temporairement, et ce, afin de se concentrer sur l'influence de la coupure indépendamment du pas de temps.

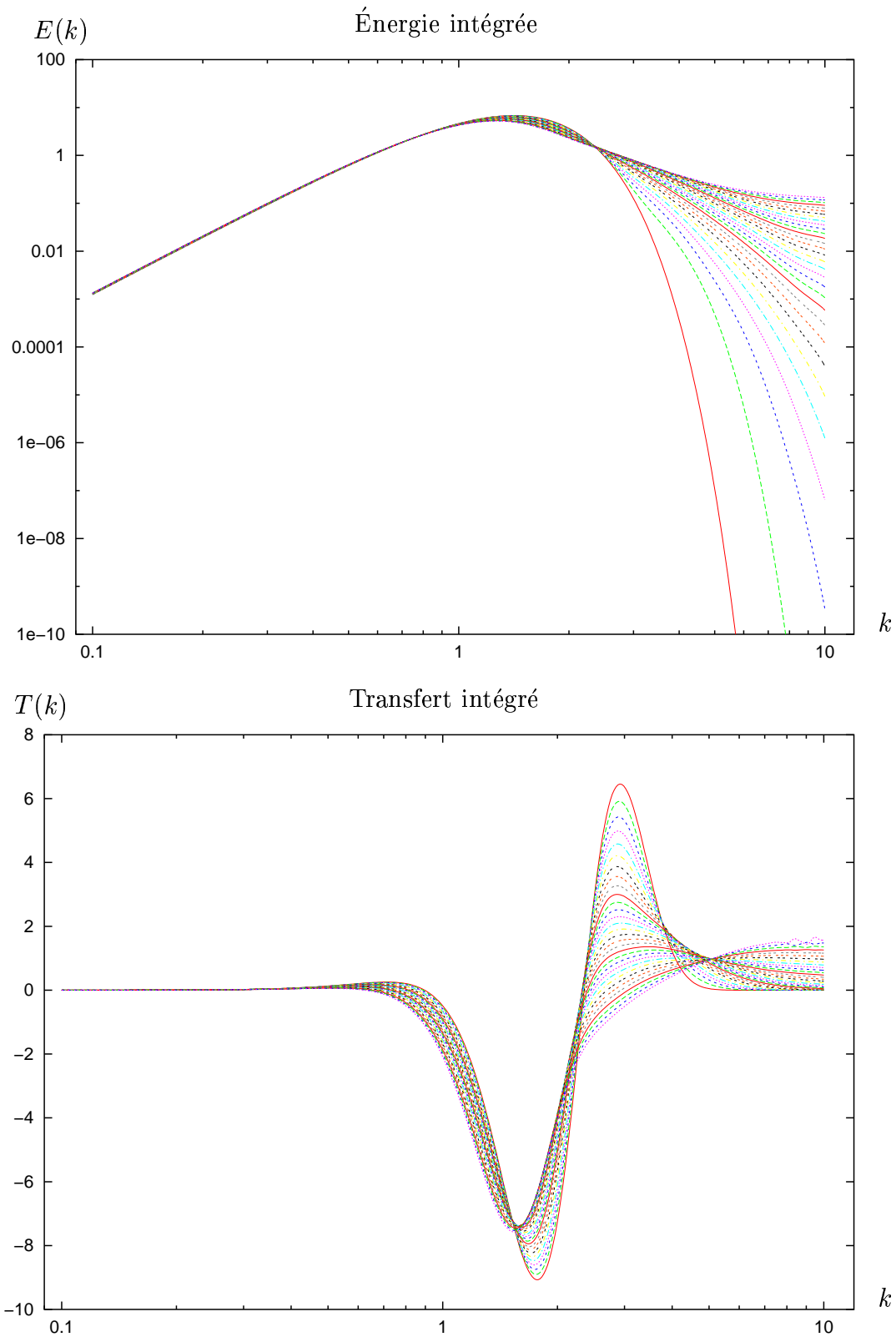


FIG. 7.4 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée et du transfert intégré à  $\mathfrak{R}$  infini,  $k_{max} = 10$  et  $dt = 0,01$ .

### 7.4.3 Évolution temporelle à $k_{max} \geq 60$ et $dt = 0,01$

Des essais avec  $k_{max} = 60, 100$  et  $200$  ont été effectués, tout en remarquant que chacun des spectres obtenus semble être le prolongement du spectre au  $k_{max}$  précédent. Cela semble dénoter une certaine insensibilité du spectre par rapport à la coupure numérique. Ce résultat va dans le sens d'une évolution vers une zone inertielle, de largeur infinie et simplement arrêtée par  $k_{max}$ , pour peu qu'on la laisse s'installer. On donne sur la figure 7.5 l'énergie et le transfert intégrés pour  $k_{max} = 60$ , et  $t_f = 0,2$ .

On constate le même type d'instabilité esquissé dans le cas  $k_{max} = 10$  à  $t = 0,3$ , car des oscillations apparaissent dans le spectre aux grands nombres d'ondes. Elles finissent par mener à une augmentation de l'énergie totale à  $t = 0,18$ , ce qui est un indicateur suffisant pour quantifier l'instabilité. La régularité de cette onde fait que l'on peut identifier des nœuds, qui sont simplement advectés par la cascade, et des pics, qui oscillent entre les nœuds, tout en étant advectés de la même façon. Cela permet de conclure que dans le cas où  $k_{max}$  valait 10, l'accumulation d'énergie avait pris le pas sur l'instabilité, ce qui fait que ce dernière ne s'est manifesté que tardivement, bien que déjà présente.

La réapparition d'énergies négatives dans le spectre non intégré semble être un indicateur de l'instabilité. En regardant ce spectre jusqu'à  $t = 0,15$ , on a soit des énergies négatives très faibles en valeur absolue, soit aucune énergie négative, ce qui est acceptable. Mais dès  $t = 0,16$ , les énergies négatives réapparaissent avec des valeurs absolues relatives beaucoup plus fortes, de l'ordre de  $10^{-7}$ , et croissant jusqu'à complètement déstabiliser le spectre. Elles couvrent d'abord une gamme de vecteurs d'ondes dont le module est compris entre 14 et 25, et d'angles  $\theta$ , inférieurs à  $\pi/2$ , entre 1 et 1,25 (et l'intervalle symétrique si  $\theta > \pi/2$ ), pour ensuite se propager plus largement.

Il est intéressant de remarquer que les mêmes calculs, menés sans mise à zéro, montrent à peu près le même comportement, ce qui implique que la mise à zéro est justifiée mais ne permet tout de même pas de stabiliser le schéma numérique. Ces énergies négatives ont l'air de n'être donc qu'une des manifestations, mais la plus visible, de cette instabilité. Étant donné que la valeur  $k_{max} = 60$  semble être suffisante pour la dynamique, on la conserve, et on va essayer de jouer sur le pas de temps, en le diminuant progressivement afin d'observer l'évolution de l'instabilité.

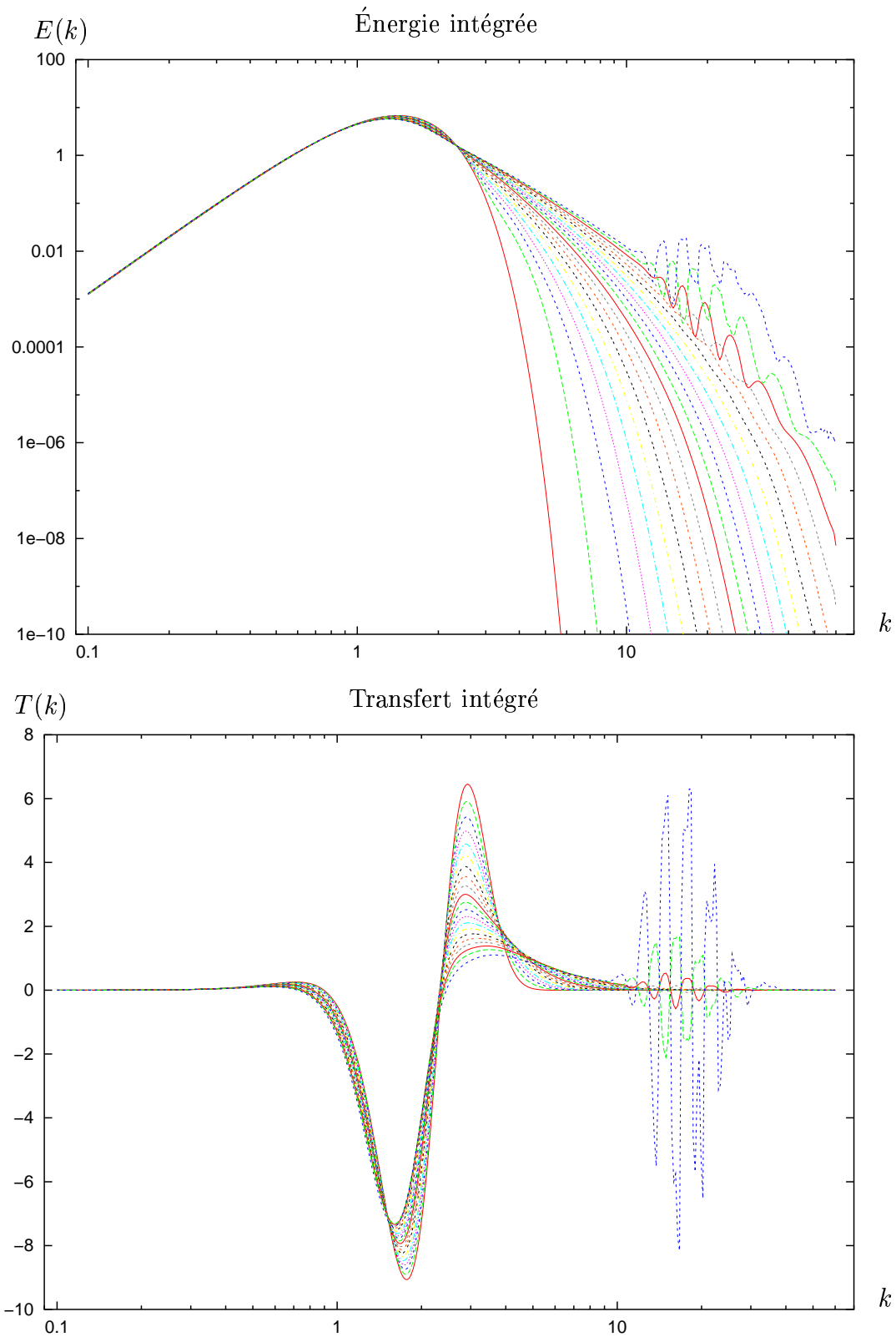


FIG. 7.5 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée et du transfert intégré à  $\mathfrak{R}$  infini,  $k_{max} = 60$  et  $dt = 0,01$ .

7.4.4 Évolution temporelle à  $k_{max} = 60$  et  $0,001 \leq dt < 0,01$ 

Des essais ont été effectués pour  $dt = 0,005$ , et  $dt = 0,001$ , et on peut faire deux remarques principales. Tout d'abord, la diminution du pas de temps a un effet positif sur le spectre : pour  $dt = 0,005$ , on observe un déplacement de l'apparition de l'instabilité vers les grands nombres d'ondes. On espère ainsi qu'en diminuant suffisamment le pas de temps, l'instabilité sera absorbée par la coupure visqueuse, pour finalement disparaître. On constate ainsi une modification radicale de la forme de l'instabilité pour  $dt = 0,001$  et  $t_f = 0,09$ , où les oscillations se transforment en une bosse d'énergie, comme présenté sur la figure 7.6. Sur la courbe du terme de transfert intégré, contrairement au cas  $dt = 0,01$ , l'instabilité n'est pas visible, du moins jusqu'à  $t = 0,09$ .

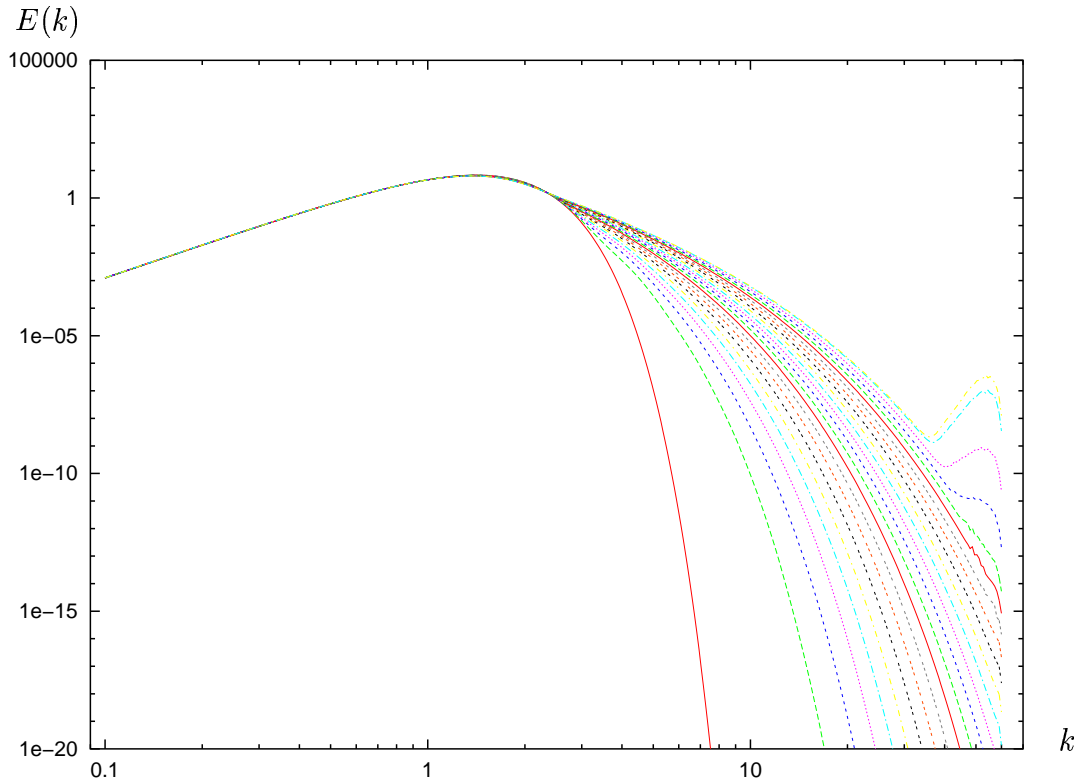


FIG. 7.6 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée à  $\mathfrak{R}$  infini,  $k_{max} = 60$  et  $dt = 0,001$ .

Ensuite, on s'aperçoit que le spectre à grands nombres d'ondes présente un changement brusque de pente au dernier module discrétisé. C'est un comportement qui semble lié à la coupure radiale, et qui pourrait être à l'origine de l'instabilité. On peut par exemple penser que le fait de négliger tout un ensemble d'interactions triadiques au-delà de  $k_{max}$  atténue le spectre plus fortement que ce qui est prévu. En regardant attentivement tous les spectres précédents, il y a une brisure de pente sur chacun d'entre eux, ce qui semble être un biais numérique. Cette hypothèse est mise à l'épreuve dans la partie qui suit.

### 7.4.5 Inclusion de triades résonantes

La discrétisation spatiale impose que l'on ne considère aucun vecteur d'onde dont le module ne se trouve dans l'intervalle  $[k_{min}, k_{max}]$ . Du côté de  $k_{min}$ , on a vu que le spectre d'énergie évoluait peu en fonction des discrétisations temporelle et spatiale. Du côté de  $k_{max}$ , par contre, la sensibilité est beaucoup plus forte. Couper les nombres d'ondes à une certaine valeur entraîne deux phénomènes. Non seulement les nombres d'ondes supérieurs ne sont pas résolus, mais même pour des nombres d'ondes dans  $[k_{min}, k_{max}]$ , les interactions inertielles avec des vecteurs dont le module est supérieur à  $k_{max}$  sont tout simplement négligées. Cette approximation pourrait alors se révéler incorrecte, surtout dans le cas des grands nombres d'ondes, pour lesquels ces interactions sont locales, et donc importantes.

#### 7.4.5.1 Extension du domaine

On rappelle que les vecteurs  $\mathbf{k}$  sont choisis de telle façon que leur extrémité parcourt le maillage de référence, et il en est de même pour  $\mathbf{k}' = k\mathbf{K}'$ . On néglige donc déjà les interactions avec des vecteurs  $\mathbf{k}'$  dont le module est supérieur à  $k_{max}$ . Cependant, l'intégrale permettant de calculer le terme de transfert étant une intégration sur  $\mathbf{k}'$ , il est tout à fait cohérent de faire décrire le même espace à  $\mathbf{k}$  et à  $\mathbf{k}'$ . Le maillage constitue donc en quelque sorte une base de projection, et on ne changera donc pas cette hypothèse.

Par contre, une fois que  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$  sont fixés, on doit alors traiter un nouveau vecteur  $\mathbf{k}'' = -\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , qui n'a aucune raison, en général, de tomber sur un point du maillage. Il peut en particulier avoir un module supérieur à  $k_{max}$ , alors que  $k$  et  $k'$  étaient tous deux inférieurs à  $k_{max}$ . Dans la méthode AQNM initiale, l'influence de tels  $\mathbf{k}''$  était simplement négligée. C'est ici qu'un raffinement de la méthode numérique peut être effectué.

On décide d'augmenter la zone de prise en compte de ces interactions, dans la direction radiale, en autorisant  $k''$  à dépasser  $k_{max}$ . Comme  $k$  et  $k'$  parcourent  $[k_{min}, k_{max}]$ , le vecteur  $\mathbf{k}''$  peut alors atteindre des valeurs entre  $k_{min}$  et  $2k_{max}$ . La méthode d'interpolation sur neuf points pose alors éventuellement problème, car tout ou partie de ces points peuvent ne pas se trouver dans la zone discrétisée. Il y a alors trois cas à considérer :

1.  $k''$  est suffisamment à l'intérieur de  $[k_{min}, k_{max}]$  pour que les neuf voisins soient sur le maillage. On conserve alors la méthode initiale d'interpolation.
2.  $k''$  est à l'intérieur de  $[k_{min}, k_{max}]$ , mais trop proche de  $k_{max}$  pour que les neuf voisins soient tous sur le maillage. Il y a alors deux façons de procéder. On peut extrapoler la valeur aux points en dehors du maillage et continuer à utiliser l'interpolation sur neuf points avec ces nouvelles valeurs. L'inconvénient est qu'on cumule les erreurs car on rajoute une opération qui est loin d'être précise. La deuxième méthode, et c'est celle qui est choisie, consiste à utiliser une interpolation décentrée à gauche, ce qui permet de n'utiliser que des points déjà connus du maillage.
3.  $k''$  est à l'extérieur de  $[k_{min}, k_{max}]$ . Il s'agit alors d'extrapoler la valeur de l'énergie en ce point. Étant donné que le spectre doit tendre vers zéro aux



grands nombres d'ondes, et qu'avec une viscosité, le spectre décroît exponentiellement dans cette zone, on décide d'appliquer un raccord exponentiel avec le vecteur de même  $\theta''$ , mais de module  $k_{max}$ . Une fois identifié ce vecteur, une interpolation unidimensionnelle sur  $\theta''$  est nécessaire pour trouver son énergie. Pour obtenir  $e(\mathbf{k}'')$ , on multiplie cette énergie par une exponentielle du type :

$$\exp[-(k'' - k_{max}) \tau], \quad (7.16)$$

où  $\tau$  est un amortissement à choisir. On peut décider d'avoir un amortissement de 90% à  $2k_{max}$ , ce qui donne :

$$\exp[-k_{max}\tau] = 0,1, \quad (7.17)$$

d'où :

$$\tau = \frac{\ln 10}{k_{max}}. \quad (7.18)$$

La valeur exacte de  $\tau$ , qui reste arbitraire, semble ne pas avoir beaucoup d'importance, tant qu'elle reste pas trop grande pour ne pas trop amortir les nombres d'ondes que l'on tente de prendre en compte.

Avec cette méthode, on espère corriger un défaut lié à la coupure en  $k_{max}$ , qui consiste en un brusque changement de pente pour le spectre d'énergie intégré aux derniers nombres d'ondes résolus, ce qui pose entre autres un problème de différentiabilité.

#### 7.4.5.2 Application à des calculs typiques

Pour la discrétisation  $M_\rho = 400$ ,  $M_\theta = 600$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0,1$ ,  $k_{max} = 60$  et à nombre de Reynolds effectif infini, on a comparé le nouveau code à l'ancien, pour des pas de temps de 0,01 et 0,001, à différents instants. Pour  $dt = 0,01$ , on ne constate aucun écart significatif par rapport au code initial sans extension des triades, la seule différence résidant dans la forme du spectre intégré à grands nombres d'ondes, qui s'est effectivement régularisé. On n'observe plus de brisure de pente comme auparavant, et la courbe est plus lisse. Cependant, cette méthode est beaucoup plus coûteuse en temps, car on prend en compte plus de triades. Sur un pas de temps, on observe une augmentation moyenne de 16% du temps de calcul. Dans le cas où  $dt = 0,001$ , pour lequel l'instabilité atteignait la coupure visqueuse, l'ajout de triades provoque peu de changements sur le spectre intégré, si ce n'est près de  $k_{max}$ . La bosse liée à l'instabilité est elle aussi régularisée. Ces résultats sont rassemblés sur la figure 7.7, qui présente les différences obtenues sur les spectres intégrés à grands nombres d'ondes, pour les cas  $dt = 0,01$  à  $t = 0,2$ , et  $dt = 0,001$  à  $t = 0,089$ .

Pour conclure, on peut obtenir un spectre d'énergie plus lisse aux grands nombres d'ondes, mais c'est au prix d'un temps de calcul plus important et sans arriver à supprimer l'instabilité. On n'utilisera donc plus dans la suite cette extension du code, et on continue à se focaliser sur la valeur du pas de temps.

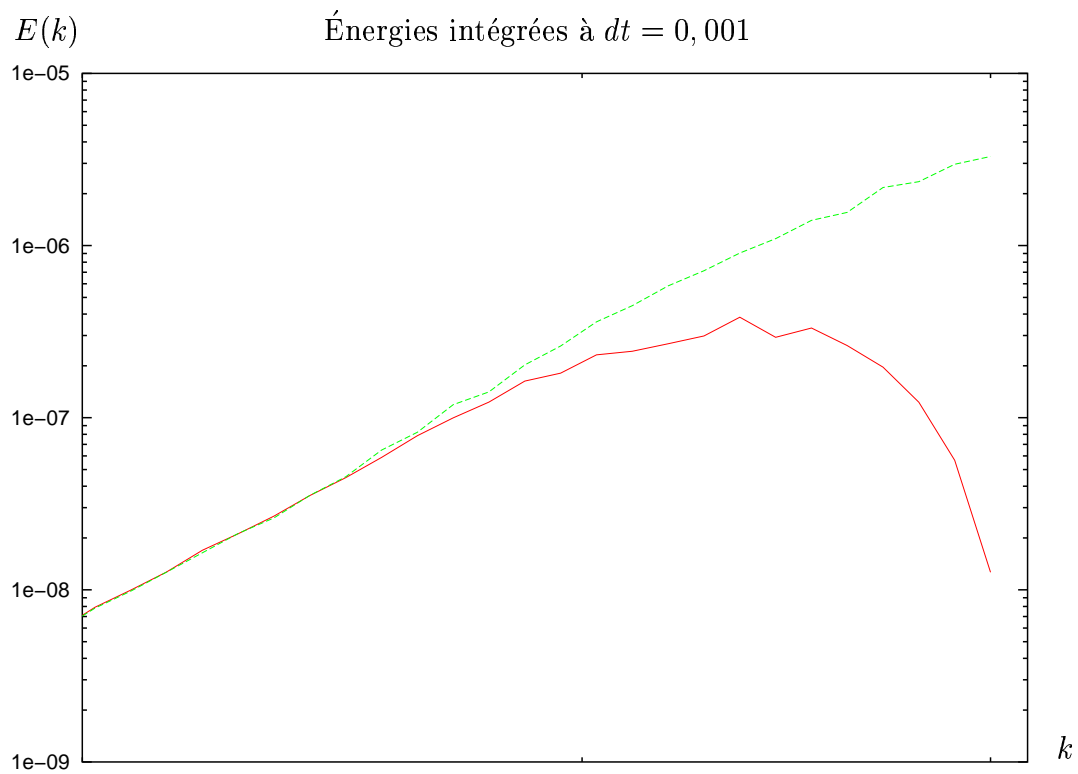
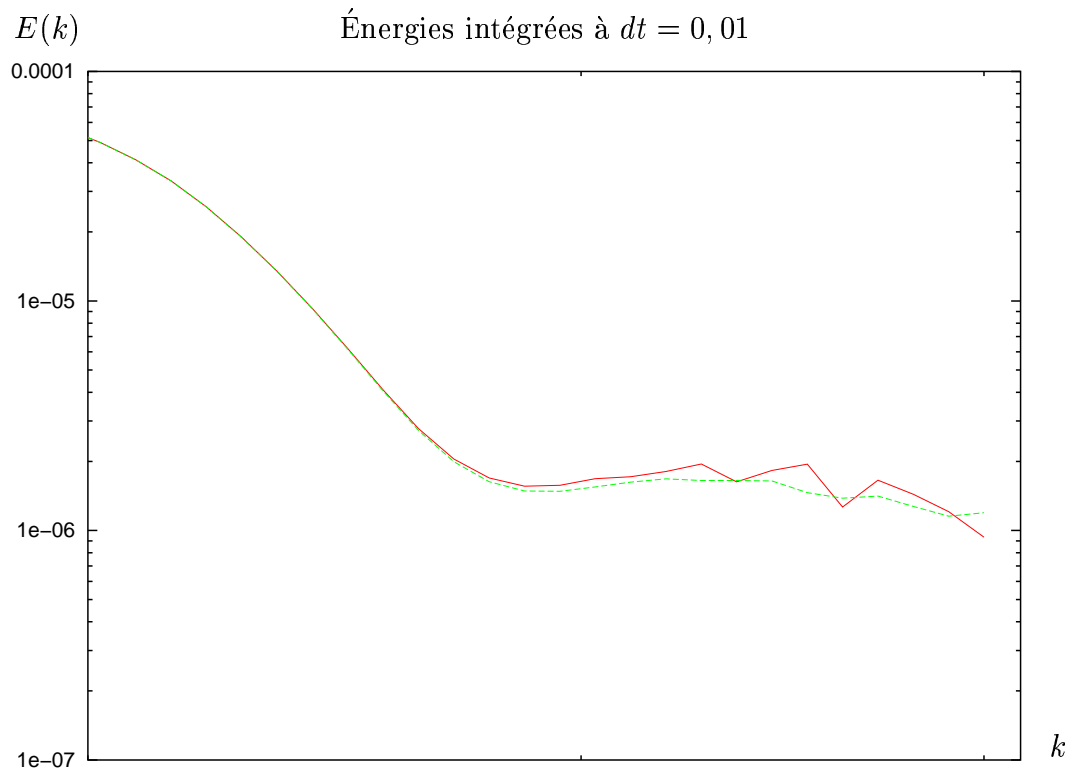


FIG. 7.7 – Différences entre l'énergie intégrée avec et sans extension des triades, pour  $dt = 0,01$  et  $dt = 0,001$ , entre  $k = 40$  et  $k = 60$ .

### 7.4.6 Évolution temporelle à $k_{max} = 60$ et $dt = 0,0001$

On diminue encore le pas de temps en le divisant par 10, c'est-à-dire que l'on choisit  $dt = 0,0001$ .

#### 7.4.6.1 Analyse

Le système dynamique poursuit une évolution temporelle normale jusqu'à environ  $t = 0,2$ . Une zone inertielle commence à se former dans le spectre d'énergie intégrée, à partir de  $k = 1$ , de presque une décade de nombres d'ondes. Néanmoins, l'instabilité prend le pas sur la cascade, et l'énergie totale se met à augmenter à  $t = 0,2017$ . Le spectre d'énergie intégré est présenté sur la figure 7.8, à partir de  $t = 0,2$ .

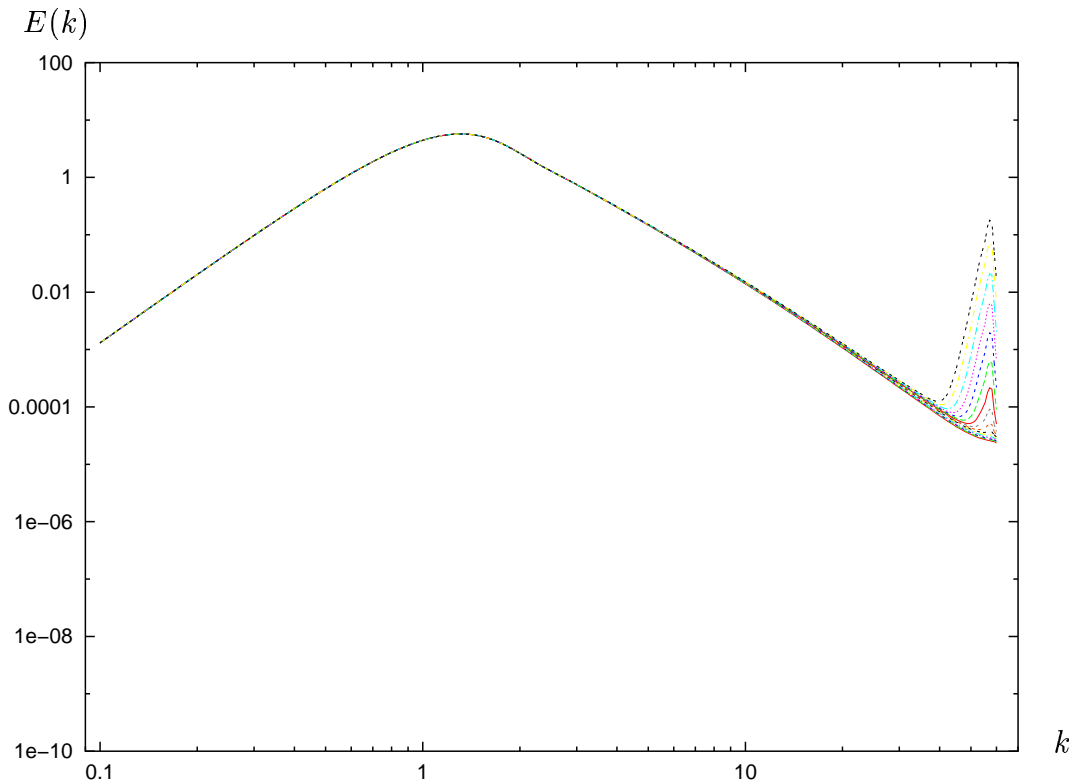


FIG. 7.8 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée à  $\mathfrak{R}$  infini,  $k_{max} = 60$  et  $dt = 0,0001$ .

On remarque que la diminution du pas de temps a permis de produire une évolution stable jusqu'à un temps final plus grand. De plus, la bosse d'énergie semble être plus écrasée à la coupure numérique, ce qui encourage à diminuer encore le pas de temps. Toutefois, une valeur de  $dt$  inférieure à  $0,0001$ , et à  $t_f$  suffisamment grand, devient prohibitive en termes de temps de calcul, sauf si la discrétisation est diminuée. Avant d'en arriver là, on peut penser que, seule une zone réduite de grands nombres d'ondes est concernée, l'ajout d'une viscosité en cours d'évolution pourrait stabiliser le schéma. Des essais ont été menés pour des nombres de Reynolds effectifs de 1, 3 et 10, sans parvenir à éliminer l'instabilité.

### 7.4.6.2 Diminution de $M_\theta$

Il faut donc se résoudre à diminuer à nouveau le pas de temps, et à modifier la discrétisation spatiale. Étant donné que  $k_{min}$  et  $k_{max}$  sont fixés, que  $M_\phi$  est à une valeur déjà assez basse, et que la dépendance en  $M_\rho$  a été clairement établie pour le calcul du terme de transfert, il faut diminuer  $M_\theta$ . On rappelle que la forte valeur de ce paramètre correspondait à l'anticipation de l'augmentation de la dépendance en  $\theta$  du spectre d'énergie, mais cet effet n'a pas été démontré rigoureusement. L'idée est de réduire  $M_\theta$  à une valeur de 300, ce qui donne toujours un grand nombre d'angles.

D'après l'implémentation numérique du modèle AQNM, la division par  $N$  de  $M_\theta$  entraîne une division par  $N$  exactement du nombre d'angles  $\theta$  à parcourir par chaque processus d'une part, et du nombre d'angles  $\theta'$  pour la contribution des cubes d'autre part. Le temps nécessaire à la préparation devrait donc être divisé par  $N^2$  environ, étant donné que le nombre de cubes qui contribuent est une fonction complexe de  $M_\theta$  mais de tout même proche d'être proportionnelle à  $M_\theta^2$ . Pour  $N = 2$ , on constate numériquement que le temps de calcul est divisé par un facteur entre 3 et 4. Le nombre de cubes ayant été divisé par presque  $N^2$ , le nombre de contribution au terme de transfert est aussi divisé par  $N^2$ , et donc le temps de calcul d'un pas en temps devrait l'être aussi. On trouve numériquement un facteur à nouveau entre 3 et 4 pour  $N = 2$ , ce qui est cohérent.

Les autres paramètres étant conservés, l'influence de  $M_\theta$  a été quantifiée pour  $dt = 0,01$  et  $t_f = 0,2$ , ainsi que pour  $dt = 0,001$  et  $t_f = 0,1$ . On s'intéresse plus particulièrement au spectre d'énergie intégrée, car la comparaison de l'énergie spectrale est plus difficile, compte tenu de la parité du rapport entre les  $M_\theta$ . Pour  $dt = 0,01$ , les écarts avec le calcul pour  $M_\theta$  sont croissants, mais faiblement, et atteignent  $7,2 \cdot 10^{-3}\%$  à  $t = 0,2$ . Pour  $dt = 0,001$ , les différences sont très faibles jusqu'à ce que l'instabilité se manifeste plus fortement, et alors la dépendance angulaire en  $\theta$  devient plus forte à partir de  $t = 0,093$ . Dans les deux cas, ce qu'il se passe à partir de l'apparition des oscillations dans le spectre est très sensible aux paramètres, mais ne correspond à aucun processus purement physique. Passer à  $M_\theta = 300$  permet donc, à coût égal et sans différences majeures, de diminuer le pas de temps jusqu'à  $dt = 3 \cdot 10^{-5}$ , et on choisit donc  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ .

### 7.4.7 Évolution temporelle à $k_{max} = 60$ et $dt = 5 \cdot 10^{-5}$

On dispose d'un calcul atteignant  $t_f = 0,3$ , ce qui correspond à 6000 pas de temps, et pour lequel l'évolution temporelle de l'énergie intégrée et du transfert intégrés se trouvent sur la figure 7.9. L'écart entre deux courbes consécutives est de 0,015. L'évolution temporelle fait clairement apparaître une zone inertielle en  $k^{-3}$  entre les nombres d'ondes 2 et 20 environ, soit une décade. Cette fois, la largeur est suffisamment importante pour que le choix de  $k_{max}$  soit justifié a posteriori. L'instabilité semble avoir complètement disparue, ou du moins son apparition a été assez retardée pour que la cascade ait le temps d'imposer sa dynamique. Cependant, on observe à nouveau le phénomène d'accumulation de l'énergie aux grands nombres d'ondes, par manque de dissipation.

On va voir, tout d'abord, qu'une analyse de stabilité sur le schéma d'évolution temporelle du spectre donne des indices sur la disparition de l'instabilité à ce pas

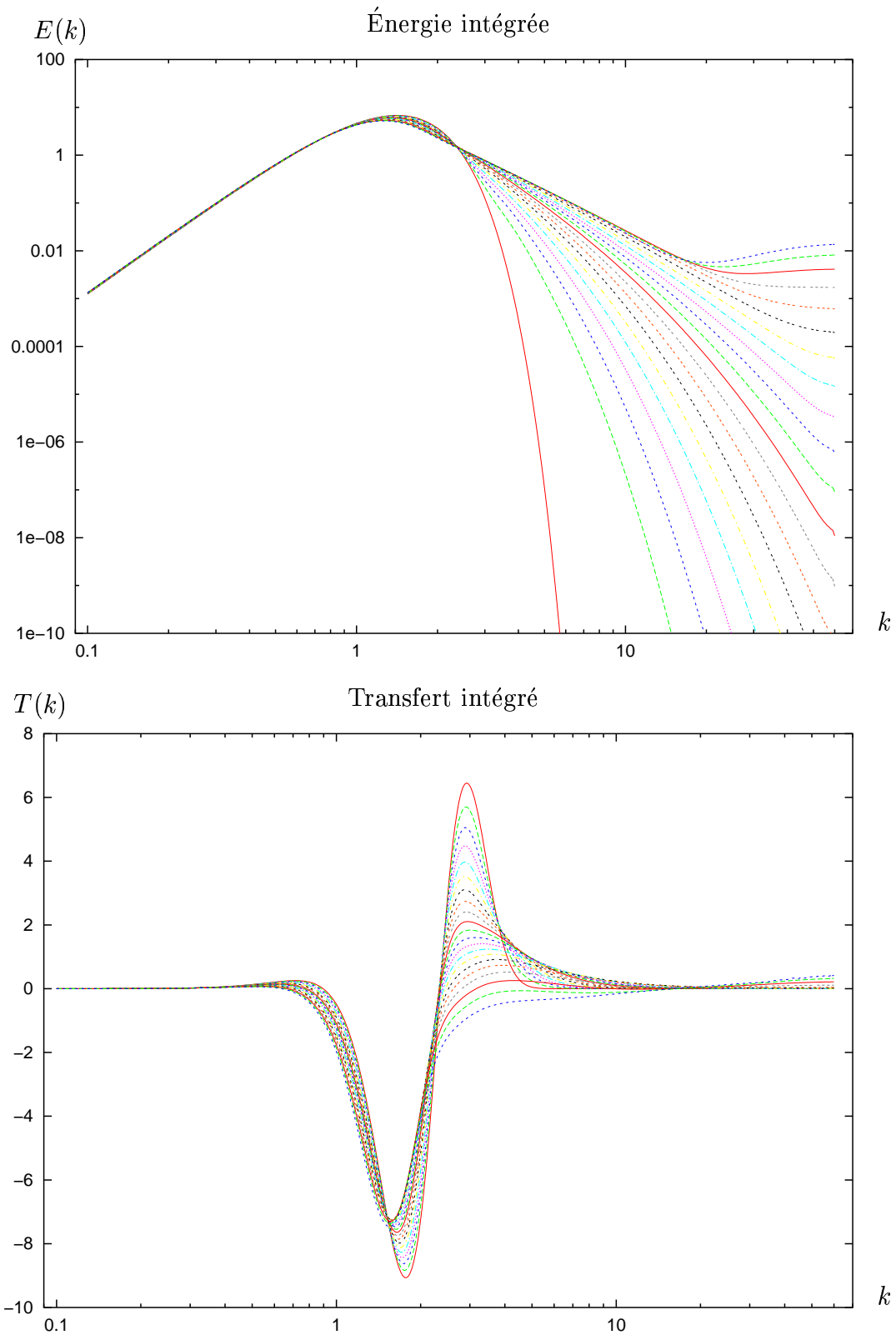


FIG. 7.9 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée et du transfert intégré à  $\mathfrak{R}$  infini,  $k_{max} = 60$  et  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ .

de temps précisément. Ensuite, la poursuite du calcul à  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  conduit à une imprécision sur la valeur des énergies, qui finit par faire augmenter l'énergie totale, et de plus en plus rapidement. Le terme de transfert intégré présente alors des variations brusques, coïncidant avec les points du maillage radial, ce qui est le signe d'une perte de précision due au maillage. On cherchera alors à trouver la valeur du nombre de Reynolds effectif susceptible d'évacuer cette énergie, en démarrant d'un spectre présentant une accumulation nette, par exemple à  $t = 0, 25$ .

### 7.4.8 Étude du schéma temporel

On cherche à étudier la stabilité du schéma temporel implicite, la démarche étant identique pour le schéma Euler visqueux. Pour cela, on calcule tout d'abord son ordre dans le cas général, c'est-à-dire à viscosité non nulle. Puis on verra que le spectre de stabilité du schéma croît avec l'inverse du pas de temps, ce qui pourrait expliquer qu'il faille choisir une valeur de  $dt$  petite.

#### 7.4.8.1 Ordre du schéma temporel

Pour évaluer la différence entre le spectre d'énergie exact et le spectre approché, on rappelle que le spectre d'énergie exact vérifie l'équation (6.71) :

$$e(t + dt) = e(t) + \int_t^{t+dt} \left[ T(u) - \frac{k^2}{\mathfrak{R}} e(u) \right] du.$$

On cherche donc l'ordre de grandeur de la différence :

$$\begin{aligned} e(t + dt) - \tilde{e}(t + dt) &= -\frac{k^2}{\mathfrak{R}} \left[ \int_t^{t+dt} e(u) du - \frac{dt}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2 dt/2} e(t) \right] \\ &+ \left[ \int_t^{t+dt} T(u) du - \frac{dt}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2 dt/2} T(t) \right]. \end{aligned}$$

Avec des développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+dt} e(u) du - \frac{dt}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2 dt/2} e(t) \\ &= \int_0^{dt} \left[ e(t) + \frac{\partial e}{\partial t}(t)v + \dots \right] dv - dt \left[ 1 - \frac{k^2}{2\mathfrak{R}} dt + \dots \right] e(t), \end{aligned}$$

dont le premier terme non nul est

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial e}{\partial t}(t) + \frac{k^2}{\mathfrak{R}} e(t) \right] dt^2 = \frac{1}{2} T(t) dt^2,$$

car les termes d'ordre  $dt$  se compensent. Tous les autres termes étant d'ordre supérieur, on a donc un terme de l'ordre de  $(dt)^2$ . De même :

$$\int_t^{t+dt} T(u) du - \frac{dt}{1 + \mathfrak{R}^{-1}k^2 dt/2} T(t)$$

a pour premier terme non nul :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T}{\partial t}(t) + \frac{k^2}{\Re} T(t) \right] dt^2.$$

Finalement,  $e(t + dt) - \tilde{e}(t + dt)$  est de l'ordre de  $(dt)^2$ , donc le schéma numérique est d'ordre 1, tout comme le schéma Euler visqueux.

#### 7.4.8.2 Schéma à $\Re$ infini

Dans les deux cas, implicite ou Euler visqueux, le schéma temporel à nombre de Reynolds effectif infini devient :

$$e(t + dt) = e(t) + T(e(t))dt,$$

qui est un schéma différence finies en temps, et on cherche à étudier le domaine de stabilité d'un tel schéma. Il est clair que la complexité du problème, via l'expression du terme de transfert, n'autorise pas une approche classique de stabilité, mais le raisonnement qualitatif peut donner des éléments de compréhension. En notant  $e_n$  le spectre au pas de temps  $t_0 + ndt$ , que l'on considère comme connu, on a donc :

$$e_{n+1} = e_n + T(e_n)dt, \quad (7.19)$$

où  $T(e_n)$  est le terme de transfert correspondant au spectre  $e_n$ .

#### 7.4.8.3 Perturbation de la solution

On perturbe le spectre d'énergie à l'instant  $n$ , par un spectre  $\tilde{e}_n$  de faible amplitude, et on cherche l'équation d'évolution du spectre de perturbation. On peut écrire :

$$e_{n+1} + \tilde{e}_{n+1} = e_n + \tilde{e}_n + T(e_n + \tilde{e}_n)dt,$$

car le nouveau spectre perturbé vérifie l'équation de Lin. On en déduit que :

$$\tilde{e}_{n+1} = \tilde{e}_n + [T(e_n + \tilde{e}_n) - T(e_n)] dt.$$

en utilisant (7.19). Or le terme de transfert fait intervenir des énergies au carré, donc en supposant que  $\tilde{e}_n^2$  est un terme du deuxième ordre, on obtient que :

$$T(e_n + \tilde{e}_n) = T(e_n) + L(e_n)\tilde{e}_n,$$

où  $L(e_n)$  est un opérateur de fonctions de  $\mathbf{k}$ , linéaire pour son argument, à savoir  $\tilde{e}_n$ . Finalement :

$$\tilde{e}_{n+1} = [Id + L(e_n)dt] \tilde{e}_n. \quad (7.20)$$

On fait l'hypothèse que la non linéarité est gelée temporellement, donc que  $L(e_n)$  ne dépend pas de  $n$ , et qu'on la note  $L$ . Avec une analyse de stabilité locale s'appuyant sur la théorie de Von Neumann [25], on peut donner un critère nécessaire de stabilité,

et donc suffisant d'instabilité. Si on montre que le rayon spectral de l'opérateur  $(Id + Ldt)$  est strictement supérieur à 1, alors on aura un mode croissant et donc une instabilité possible. Or :

$$\lambda \text{ valeur propre de } L \iff (1 + \lambda dt) \text{ valeur propre de } (Id + Ldt). \quad (7.21)$$

Ainsi, il suffit que  $L$  ait une valeur propre réelle strictement négative, et inférieure à  $-2/dt$ , pour que  $(Id + Ldt)$  voit son rayon spectral strictement supérieur à 1. Ainsi, la diminution de  $dt$  diminue les chances de trouver une valeur propre de  $L$  négative, strictement inférieure à  $-2/dt$ . On peut donc penser que le seuil  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  est critique de ce point de vue.

L'idée pourrait alors de changer le schéma numérique afin qu'il soit plus stable, voire inconditionnellement stable. Un schéma du type implicite, mais cette fois-ci sur le terme de transfert, est une possibilité. Mais l'amélioration de la stabilité va de pair avec l'augmentation de la complexité de l'algorithme temporel, qui fait alors intervenir l'inversion d'une matrice de grande taille.

### 7.4.9 Ajout de viscosité

On a vu qu'au lieu de l'équipartition espérée, l'accumulation d'énergie, combinée aux imprécisions numériques liées à la discrétisation, conduit à une instabilité et à une saturation numérique. C'est donc quand l'énergie augmente aux grands nombres d'ondes, par un processus non physique, qu'il faut que la viscosité numérique intervienne. On choisit donc comme spectre de départ celui à  $t = 0, 25$ , et on cherche une valeur de  $\mathfrak{R}$  qui, d'une part, permette l'évacuation de l'énergie, et d'autre part, ne réduise pas trop la largeur de la zone inertielle.

Quelle que soit la valeur de  $\mathfrak{R}$ , on observe une phase transitoire correspondant à l'application brusque des effets visqueux. Le spectre intégré aux grands nombres d'ondes voit sa forme changée, à des vitesses différentes, en une exponentielle décroissant plus ou moins fortement. Il y a ensuite une phase stationnaire où la cascade et la viscosité imposent conjointement leurs effets. Ensuite, selon la valeur du nombre de Reynolds effectif, on a deux comportements possibles : soit la viscosité est trop faible, et l'accumulation d'énergie reprend le dessus, soit l'énergie décroît petit à petit aux grandes échelles sous l'effet du transfert d'énergie, puis la décroissance se fait uniformément sous l'action de la viscosité. La valeur de  $\mathfrak{R} = 1$  est trop faible, comme on l'a déjà vu auparavant, car il n'y a presque aucune zone inertielle. De plus, le choix  $\mathfrak{R} = 10$  n'empêche pas l'énergie de s'accumuler à nouveau après la période transitoire : il faut donc trouver une valeur intermédiaire. Des essais ont été menés pour  $\mathfrak{R} = 3$  et  $\mathfrak{R} = 5$ , et c'est cette dernière valeur qui est retenue, car elle conserve beaucoup mieux la forme de la zone inertielle. On connaît maintenant la valeur du nombre de Reynolds effectif qui convient, ainsi que les discrétisations spatiale et temporelle qui assurent la stabilité – et on espère, la convergence – du spectre. Il s'agit donc maintenant de recommencer un dernier calcul avec  $M_\rho = 400$ ,  $M_\theta = 300$ ,  $M_\phi = 100$ ,  $k_{min} = 0, 1$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  et  $\mathfrak{R} = 5$ , mais à partir de  $t_0 = 0$ . L'évolution temporelle obtenue constitue ainsi la référence pour le modèle AQNM, et elle est analysée dans ce qui suit.



## 7.5 Analyse et comparaison des résultats

Les résultats du modèle AQNM apportent des indices importants sur l'évolution temporelle de l'énergie spectrale. En mettant en valeur le rôle prééminent joué par les surfaces résonantes dans le terme de transfert, et pour une discrétisation suffisamment élevée, ce modèle prédit un comportement en  $k^{-3}$  dans la zone inertielle. De plus, de multiples quantités physiques et spectrales montrent qu'une grande partie de l'énergie se concentre dans le plan spectral horizontal, au détriment du reste de l'espace. L'ensemble de ces indicateurs pousse à envisager une certaine tendance à la bidimensionnalisation de l'écoulement. Ces résultats peuvent alors être comparés aux prédictions du modèle EDQNM, avec lequel on obtient les mêmes tendances, mais certainement pas la même précision.

### 7.5.1 Résultats AQNM

L'analyse du spectre d'énergie montre une pente en zone inertielle de  $-3$ , phénomène que l'on peut éventuellement attribuer à la bidimensionnalisation de l'écoulement. De plus, l'énergie spectrale se concentre près du plan  $\theta = \pi/2$  et la cohérence verticale s'avère être beaucoup plus forte que pour une turbulence isotrope, ce qui soutient cette hypothèse de bidimensionnalisation.

Les deux phases d'évolution temporelle du spectre d'énergie intégré, à savoir l'établissement de la zone inertielle et la décroissance visqueuse sont présentées sur les figures 7.10, avec un écart de temps de 0,0375 entre deux courbes. La figure 7.11 présente les mêmes résultats, mais pour le terme de transfert non linéaire. La décroissance de l'énergie totale avec le temps, et le transfert total relatif en fonction du temps figurent sur les courbes 7.12.

#### 7.5.1.1 Rotation et turbulence bidimensionnelle

En s'appuyant sur l'hypothèse d'un écoulement quasi-géostrophique, la rotation pourrait conduire à la bidimensionnalisation de l'énergie, et donc à une loi en  $k^{-3}$  dans la zone inertielle du spectre intégré. Pour être tout à fait exact, c'est le raisonnement le plus couramment admis, mais il faut rappeler qu'on trouve dans la littérature des arguments en faveur d'une loi en  $k^{-2}$ , comme par exemple dans Baroud, Plapp, She & Swinney [2] ou Mahalov [41]. De plus, en turbulence forcée périodique, Smith & Waleffe [56] ont montré qu'on observait des manifestations de la bidimensionnalisation de l'écoulement, mais que la loi en  $k^{-3}$  s'établissait dans la gamme des nombres d'ondes inférieurs au nombre d'onde de forçage, contrairement au cas purement bidimensionnel.

On rappelle ici l'origine du  $k^{-3}$  pour une turbulence incompressible homogène et bidimensionnelle dans le plan horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire à  $\Omega$ . Pour une turbulence purement bidimensionnelle, l'écoulement n'est pas du tout affecté par la rotation solide : l'équation pour la vorticité est la même que sans rotation. Ainsi, dans le cas où la viscosité est nulle, non seulement l'énergie totale se conserve, mais aussi une quantité appelée *enstrophie*, définie par :

$$\int_{\mathbb{R}} k^2 E(k) dk \sim k^3 E(k). \quad (7.22)$$

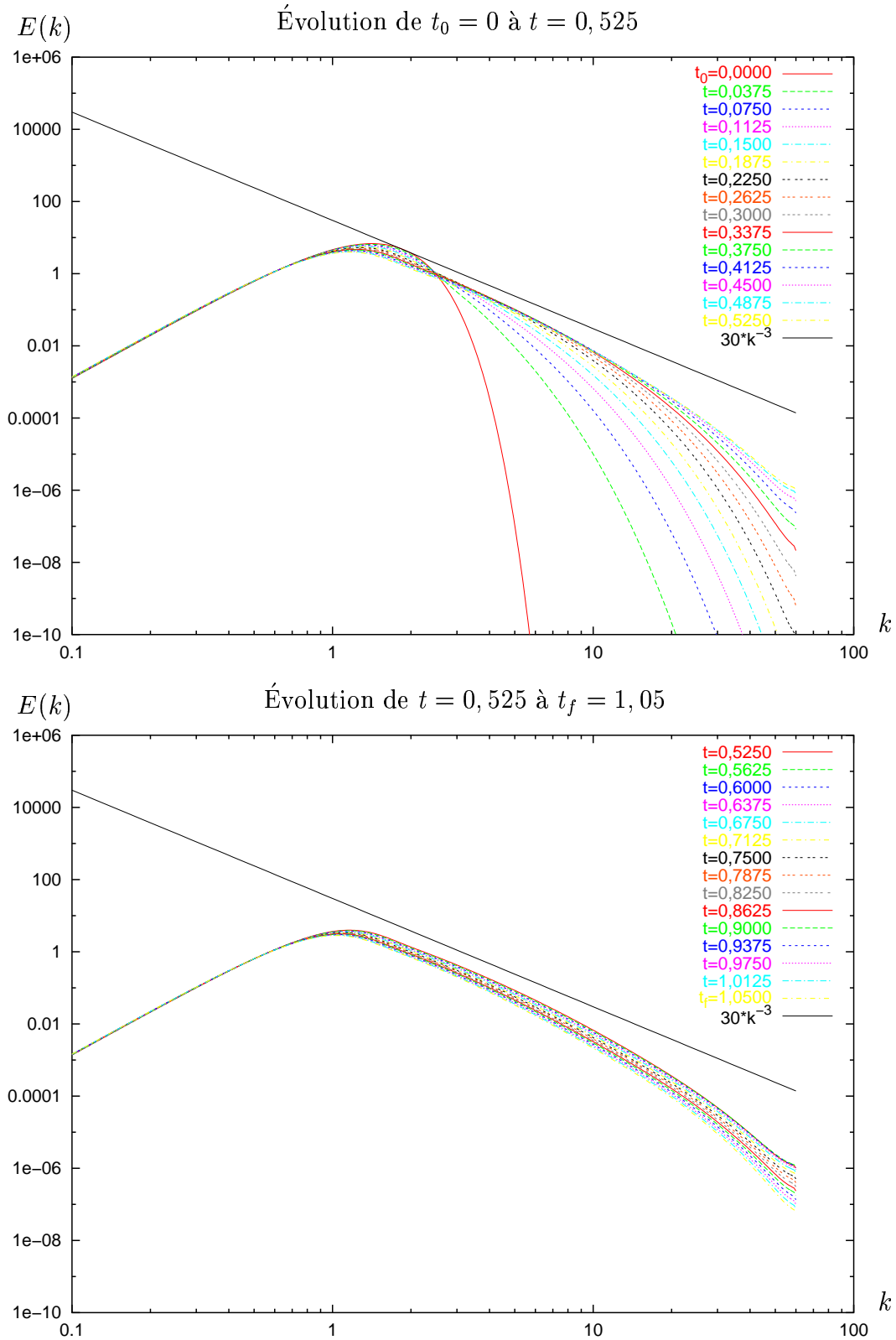
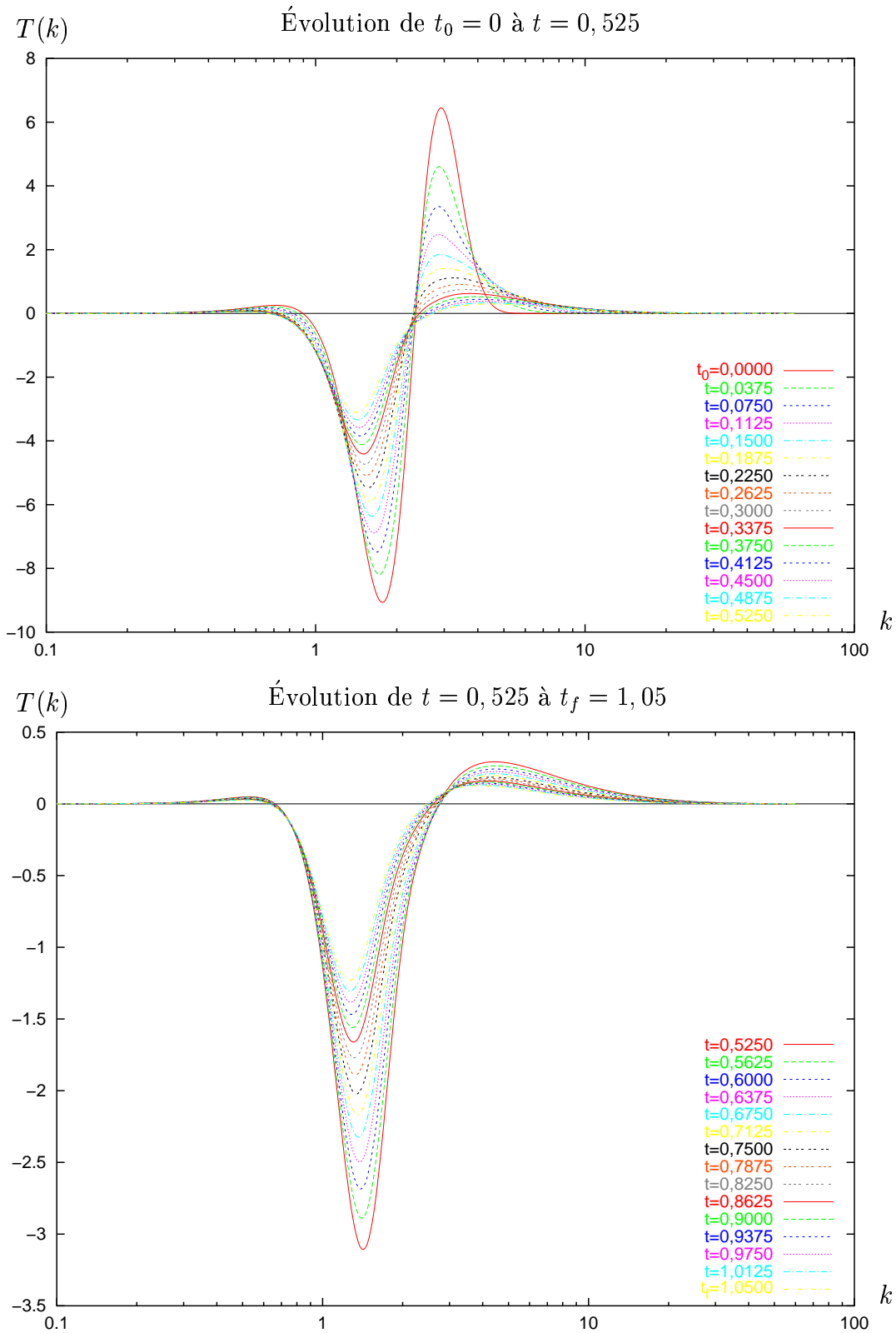


FIG. 7.10 – Évolution temporelle de l'énergie intégrée à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .



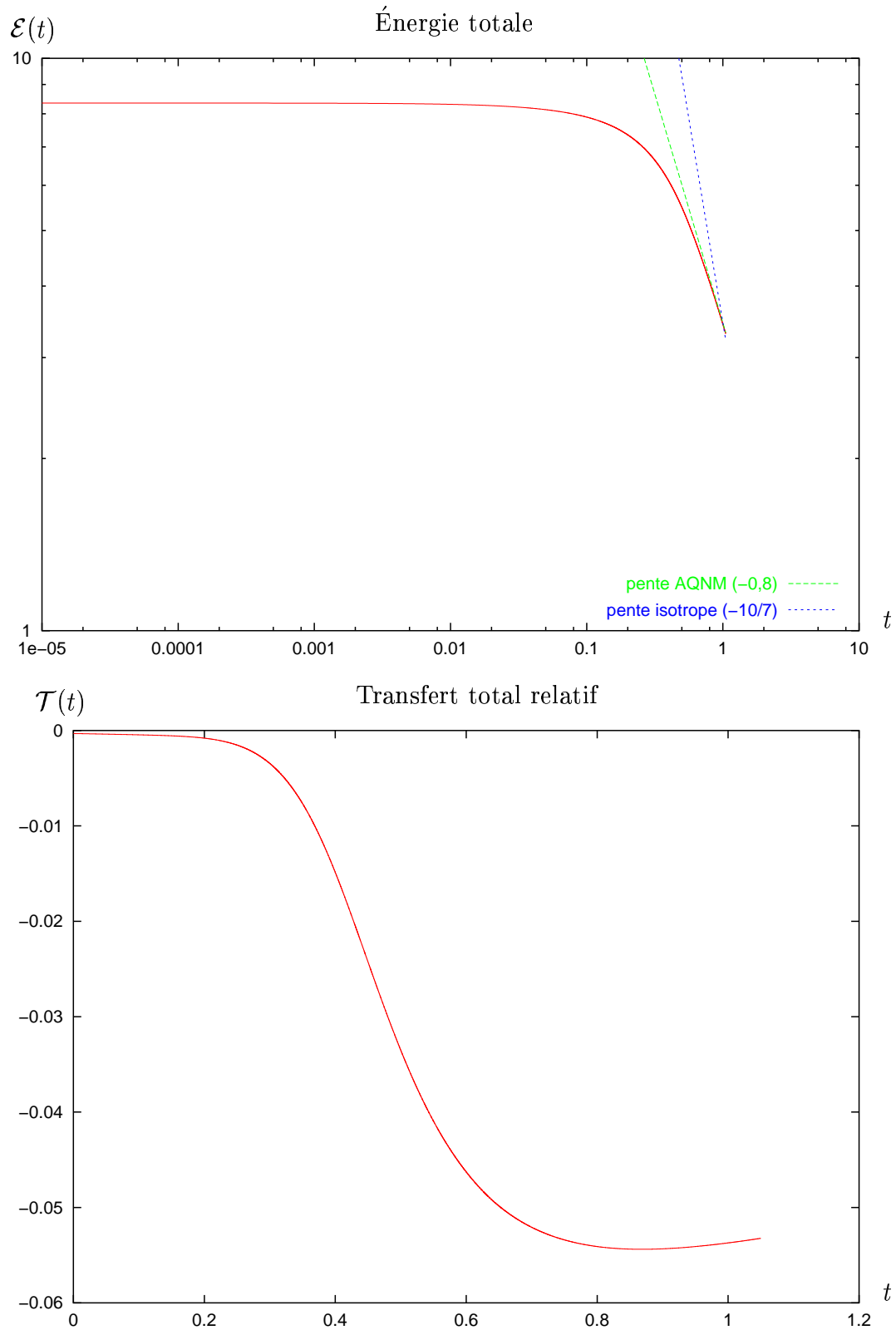


FIG. 7.12 – Évolution temporelle de l'énergie totale et du transfert total relatif à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

La répartition de l'énergie totale et de l'enstrophie reflètent ainsi la dynamique d'un écoulement non visqueux. Si l'analyse dimensionnelle dans la zone inertielle s'appuie sur l'énergie totale, on retrouve la loi en  $k^{-5/3}$ , et qui prédit une cascade inverse. Cependant, on peut aussi prendre comme base de l'analyse les échanges d'enstrophie seuls, et on obtient le comportement de la cascade directe. Ainsi, en supposant que le spectre d'énergie intégré ne dépend que du taux de dissipation d'enstrophie :

$$\chi = \frac{k^3 E(k)}{[k^3 E(k)]^{-1/2}}, \quad (7.23)$$

où on a divisé l'enstrophie par un temps caractéristique, et du nombre d'onde  $k$ , on obtient que :

$$E \sim \chi^{2/3} k^{-3}, \quad (7.24)$$

d'où le résultat attendu. On peut enfin citer Kraichnan ([35], [36]), qui apporte une correction logarithmique au  $k^{-3}$ , due aux interactions triadiques non locales, et propose des valeurs aux constantes d'ajustement.

### 7.5.1.2 Premières remarques

En regardant la figure 7.10, on s'aperçoit que l'énergie intégrée suit l'évolution usuelle en turbulence : la première phase consiste en l'établissement de la zone inertielle par transfert d'énergie des grosses structures aux plus petites. En échelle logarithmique, l'accumulation de l'énergie en fin de spectre se remarque plus aisément que la perte d'énergie au pic, mais celle-ci a bel et bien lieu. Ce transfert conduit à une droite de pente  $-3$  sur le spectre d'énergie intégré, en tracé logarithmique, ce qui correspond à un spectre en  $k^{-3}$ . Ce comportement était plus visible dans le cas où  $\mathfrak{R}$  tendait vers l'infini sur la figure 7.9, mais l'ajout de viscosité change significativement la forme de la courbe aux grands nombres d'ondes.

La figure 7.11 montre un terme de transfert de forme classique, indiquant que les grandes échelles perdent de l'énergie au profit des petites, mais aussi minoritairement au profit des plus grandes, ce qui dénote une cascade inverse. Hossain [28] avait déjà mis ce phénomène en évidence, mais dans le cas d'une turbulence dont la stationnarité est assurée par un forçage. On peut ajouter que la cascade inverse a tendance à diminuer d'intensité avec le temps. Au fur et à mesure de l'évolution temporelle, les courbes sont de plus en plus rapprochées, indiquant le ralentissement de la cascade directe. La détermination de la fin de cette première étape est assez difficile à estimer, à moins de regarder très en détails l'ensemble des pas de temps qui composent le calcul (il y en a 21000). Elle est estimée ici, par rapport aux 24 courbes dont on dispose, à  $t = 0, 525$ , ce qui représente environ 10000 pas de temps.

La deuxième phase d'évolution se résume à la décroissance de la turbulence sous l'effet dominant de la viscosité : il y a dissipation d'énergie dans une grande gamme de nombres d'ondes, à partir du pic d'énergie. On observe alors sur la figure 7.12 une décroissance beaucoup plus rapide de l'énergie totale qui, avant  $t = 0, 2$ , restait à peu près constante. Le terme de transfert suit la décroissance de l'énergie, en voyant ses extrema se rapprocher simultanément de zéro. Le maximum semble cependant décroître plus vite, avec le temps, que le minimum ne croît, ce qui est

confirmé par l'intégrale relative du transfert de la figure 7.12. Elle montre que le rapport de l'intégrale spatiale du transfert sur l'intégrale de la valeur absolue de ce même transfert est négatif, mais augmente en valeur absolue, pour atteindre environ 5%. On rappelle que la petitesse de cette valeur reflétait la conservation de l'énergie totale par le terme de transfert : la discrétisation semble donc être de moins en moins adaptée avec le temps. Or, jusqu'à des temps de l'ordre de 0,4, marquant à peu près la fin d'établissement de la zone inertielle, l'intégrale relative ne dépasse pas 1% en valeur absolue, ce qui est acceptable. Dans la suite de l'évolution temporelle, on peut donc espérer que la dissipation numérique générée par le terme de transfert soit négligeable comparée à la dissipation réelle provenant de la viscosité. Le rapport entre le transfert total et la dissipation totale, dont l'évolution temporelle est présentée sur la figure 7.13, ne dépasse jamais 5%, et a même tendance à diminuer à partir de  $t = 0,7$ , comme semble l'indiquer la remontée de l'intégrale relative pour des temps de 0,8. Cela suffit pour considérer que la perte d'énergie par le transfert d'énergie peut être négligée.

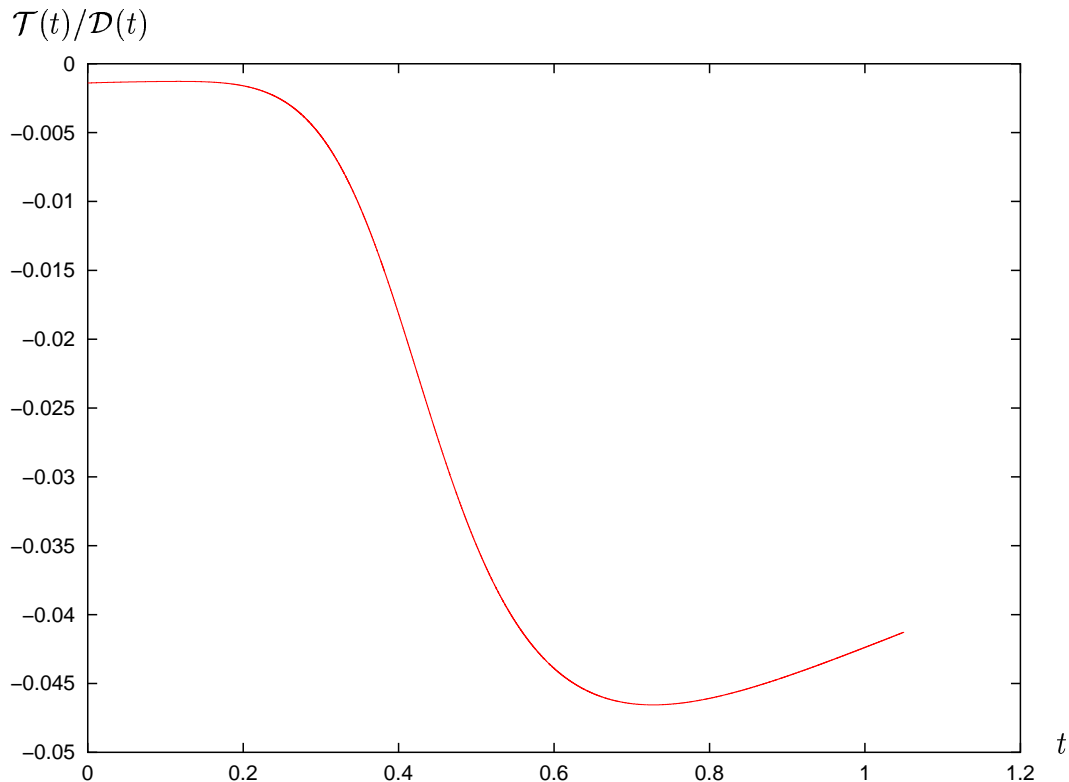


FIG. 7.13 – Évolution temporelle du rapport du transfert total sur la dissipation totale à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

### 7.5.1.3 Taux de décroissance de la turbulence

Différentes tentatives ont été effectuées dans le passé pour déterminer la loi de décroissance de la turbulence en rotation. On peut par exemple citer Squires, Chasnov, Mansour & Cambon [57], qui trouvent, pour un spectre intégré  $E(k)$  en  $k^4$  aux

petits nombres d'ondes, une loi dimensionnelle en  $t^{-5/7}$ , tout à fait en accord avec leur simulation LES (Large Eddy Simulation). On rappelle de plus qu'en turbulence isotrope, l'analyse dimensionnelle donne que  $\mathcal{E}$  décroît selon une loi de puissance, avec un exposant proche de  $-10/7 \simeq -1,43$  toujours pour un spectre intégré  $E(k)$  en  $k^4$  aux petits nombres d'ondes (voir par exemple Kolmogorov [33] ou Chasnov [13]). On recherche donc la loi de décroissance de l'énergie totale en loi de puissance. Il faudrait pouvoir continuer le calcul jusqu'à des temps plus élevés pour observer un comportement spécifique, mais les temps de calcul sont prohibitifs. La loi qui rend le mieux compte de la décroissance est :

$$\mathcal{E}(t) = 3,45 t^{-0,8}, \quad (7.25)$$

asymptotiquement. On a donc une pente environ deux fois plus forte que celle prédite en turbulence isotrope, mais du même ordre que  $-5/7 \simeq -0,71$ .

#### 7.5.1.4 Directionnalité : isovaleurs

L'étude de la directionnalité, à différents instants, du spectre d'énergie  $e(k, \theta, t)$  peut être menée de deux façons. La première consiste à simplement tracer, dans le plan  $(k, \theta)$ , les lignes isovaleurs de l'énergie spectrale, à différents instants. On dispose des courbes de  $t_0 = 0$  à  $t_f = 1,05$  par pas de  $0,0375$ , et les figures 7.14 et 7.15 montrent les instants qui ont été conservés, sur le critère de changements significatifs des isovaleurs.

Une répartition isotrope de l'énergie donnerait des isovaleurs confondues avec les lignes à  $k$  constant, ce que l'on observe à l'instant initial. Très rapidement, en suivant le rythme de la cascade non linéaire, l'énergie a tendance à se concentrer vers le plan  $\theta = \pi/2$ , d'abord près du pic d'énergie, puis autour. Les isovaleurs se brisent à  $\theta = 0$  (et  $\theta = \pi$  par symétrie), pour former des cercles concentriques déformés autour du point  $k = 1$  et  $\theta = \pi/2$ . On constate l'aplatissement progressif des cercles le long du plan horizontal, où les niveaux d'énergie sont les plus importants. Enfin, à partir de  $t = 0,75$ , il n'y a plus de changements notables sur les courbes, et les temps entre  $0,75$  et  $1,05$  ne sont pas tracés.

#### 7.5.1.5 Directionnalité : énergie angulaire

La difficulté de lecture des courbes précédentes consiste en la différenciation des niveaux d'énergie, même si des couleurs sont utilisées. On peut alors recourir à une autre méthode pour rendre compte de l'influence de l'angle  $\theta$  sur les échanges d'énergie. Il s'agit de tracer les fonctions, à un instant  $t$  donné :

$$k \mapsto e(k, \theta, t),$$

en prenant comme paramètre  $\theta$  (au lieu du temps comme précédemment). Ainsi, les écarts de niveaux d'énergie à différents angles apparaissent plus nettement. La figure 7.16 montre la directionnalité aux instants  $t = 0,525$  (fin d'établissement de zone inertielle), et  $t_f = 1,05$ , pour des angles allant de  $0$  à  $0,158 \simeq \pi/2$ , avec un pas de  $0,16$  radians environ. La répartition initiale  $e(k, \theta, 0) = k^2 \exp(-k^2)$ , ainsi que la

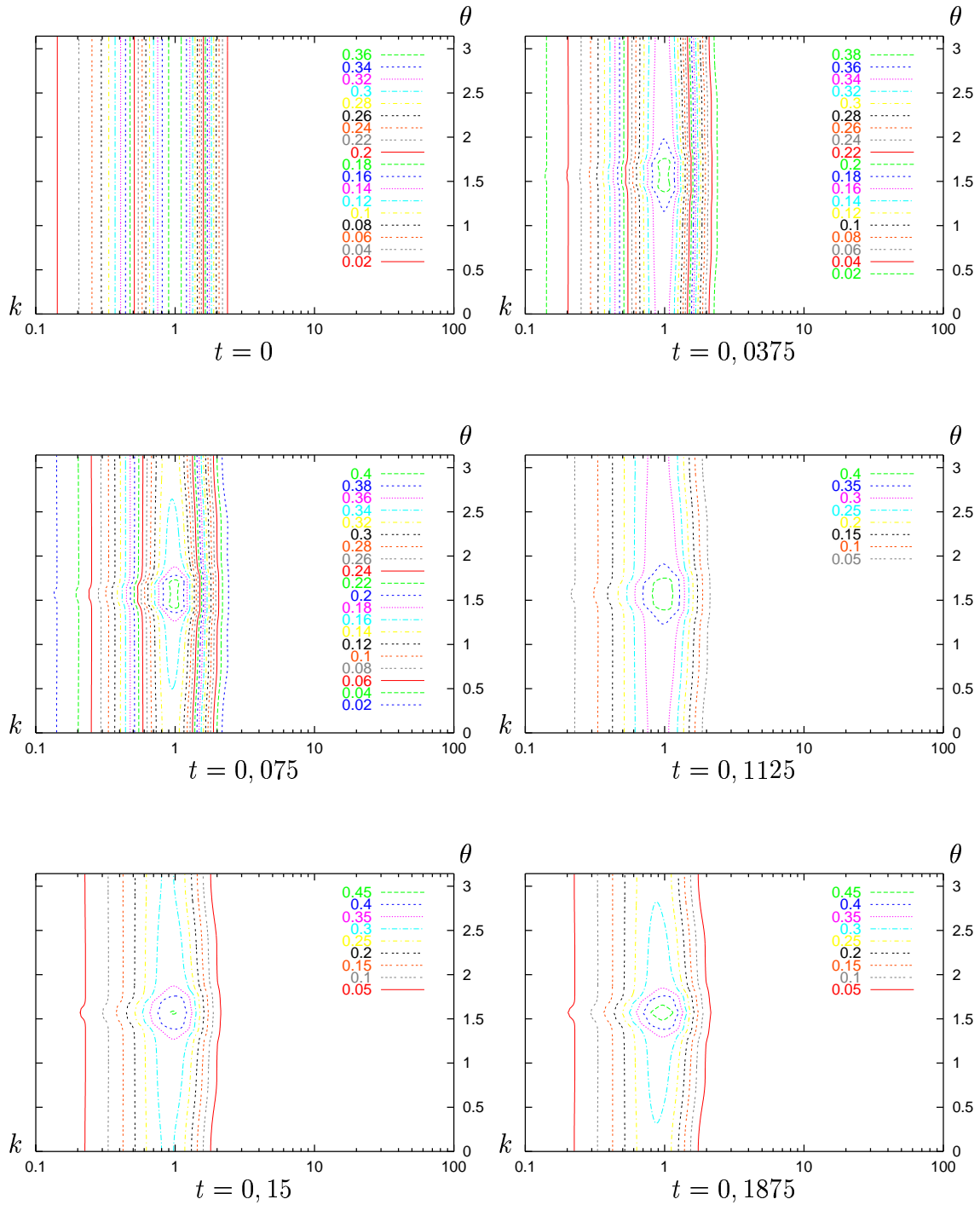


FIG. 7.14 – Isovaleurs de l'énergie spectrale à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  entre  $t_0 = 0$  et  $t = 0,1875$ .



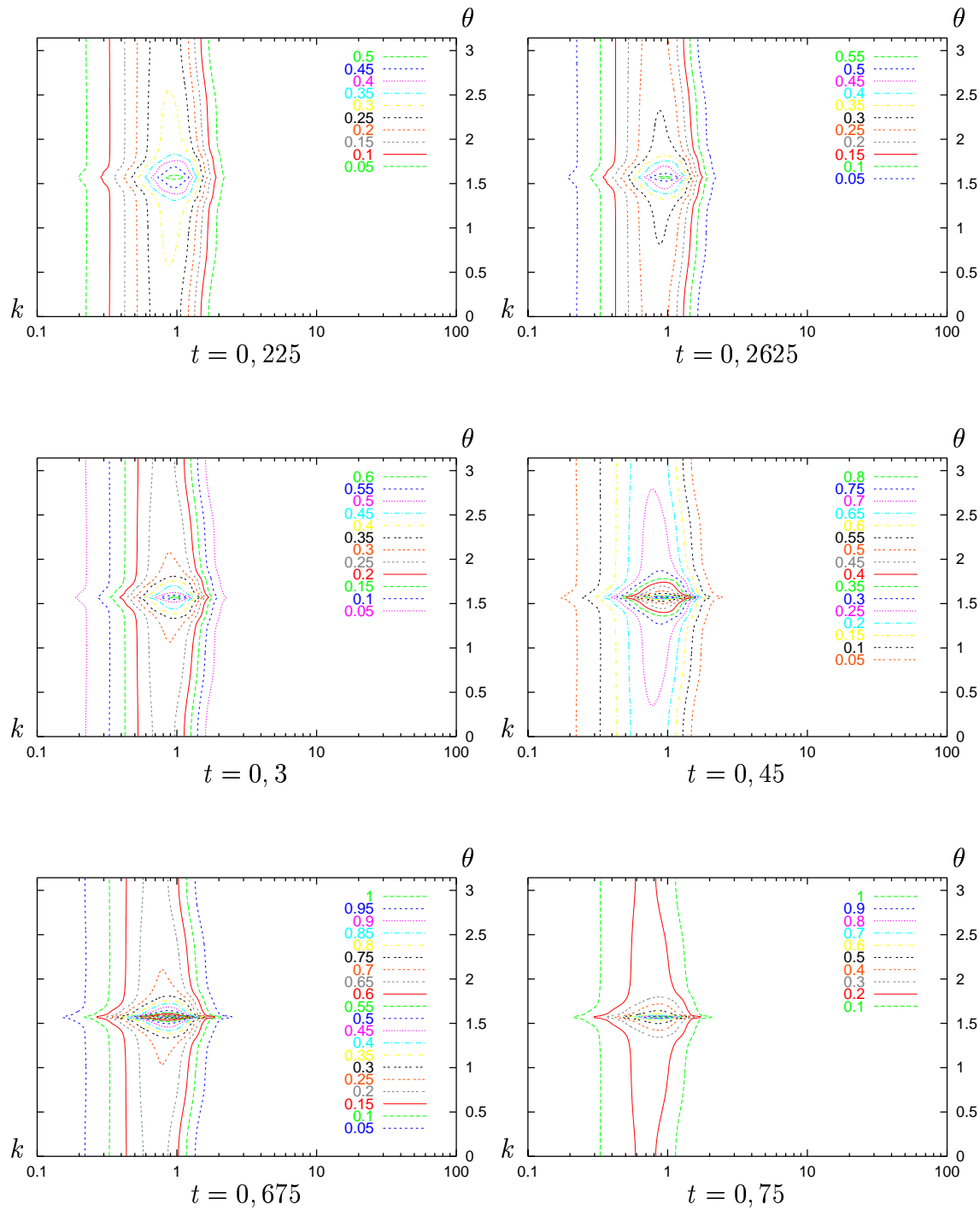


FIG. 7.15 – Isovaleurs de l'énergie spectrale à  $\Re = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  entre  $t = 0, 225$  et  $t = 0, 75$ .

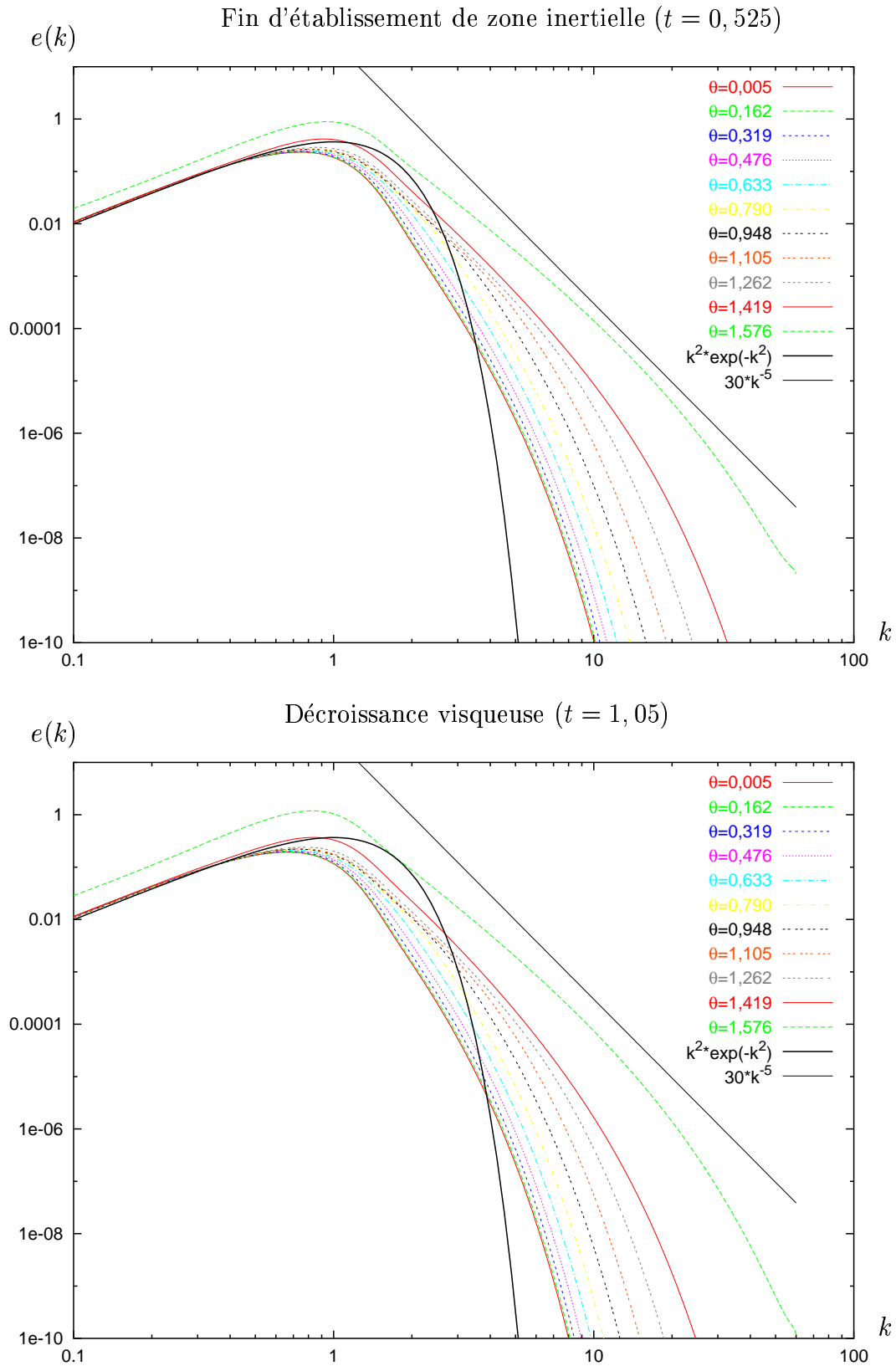


FIG. 7.16 – Énergie spectrale à différents angles à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , à  $t = 0,525$  et  $t_f = 1,05$ .

fonction  $30k^{-5}$ , correspondant à une énergie intégrée en  $k^{-3}$ , ont été ajoutées pour comparaison.

À  $t_0 = 0$ , l'énergie ne dépend pas de  $\theta$ , car la répartition est isotrope. Cette énergie se transfère ensuite angulairement, et de plus en plus fortement avec la proximité de l'angle avec  $\pi/2$ , comme on le voit à  $t = 0,525$ , et enfin les transferts vers l'horizontale cessent. On distingue alors deux comportements avec le temps, selon que le vecteur d'onde est éloigné ou proche de l'horizontale, comme indiqué sur la figure 7.17. Les angles éloignés de  $\pi/2$ , et dans l'ensemble ceux plus petits que 1,3 environ, voient dans un premier temps leur énergie au pic diminuer au profit des grands nombres d'ondes, puis, dans un deuxième temps, on observe la décroissance uniforme de l'énergie au-delà de  $k = 1$ . Il y a une cascade inverse qui fait légèrement augmenter l'énergie en-dessous du pic. Pour un angle proche de 0, on peut identifier une pente en zone inertielle de  $-7,5$ .

Pour les angles proches de  $\pi/2$ , la cascade inverse est beaucoup plus forte, et constamment présente, même lors de la phase de décroissance visqueuse. Aux grands nombres d'ondes, on observe par contre le même comportement qu'aux autres angles, à savoir que l'énergie diminue du fait de la dissipation à partir de  $t = 0,525$ . Enfin, on pourrait penser que ce sont les angles les plus proches de  $\pi/2$  qui sont à l'origine du comportement en  $k^{-3}$  du spectre d'énergie intégré. Or leur pente en zone inertielle n'est pas de  $-5$ , mais de  $-4$ , mais ce sont eux qui ont cependant la plus forte pente (en valeur absolue). La conclusion est que l'intégration sur tous les angles est nécessaire pour récupérer le  $k^{-3}$ .

### 7.5.1.6 Énergie spectrale intégrée sur $k$

De la même façon que l'on a calculé le spectre unidimensionnel  $E(k, t)$  dont l'intégration sur  $k \in \mathbb{R}_+$  donne l'énergie totale, on peut aussi s'intéresser à la fonction similaire, mais dont l'intégration sur  $\theta \in [0, \pi]$  permet d'obtenir l'énergie totale. Cette fonction est définie par :

$$E_\theta : (\theta, t) \mapsto 2\pi \sin \theta \int_0^{+\infty} k^2 e(k, \theta, t) dk, \quad (7.26)$$

et vérifie, à  $t$  fixé :

$$\int_0^\pi E_\theta(\theta, t) d\theta = \mathcal{E}(t). \quad (7.27)$$

En turbulence isotrope, cette fonction est proportionnelle à l'énergie totale, et on a, pour  $\theta \in [0, \pi]$  et à  $t$  fixé :

$$E_{\theta\{iso\}}(\theta, t) = \frac{1}{2} \sin \theta \mathcal{E}(t). \quad (7.28)$$

La fonction  $E_\theta$  est tracée, avec le temps comme paramètre, sur la figure 7.18, deux courbes étant séparées par 0,75. Dès l'instant  $t = 0,075$ , l'écart par rapport à l'isotropie ( $t_0 = 0$ ) se manifeste nettement. Les vecteurs presque horizontaux voient leur énergie augmenter très rapidement en début d'évolution, pour atteindre un maximum à  $t = 0,6$  environ, et décroître ensuite sous l'effet de la viscosité. Pendant

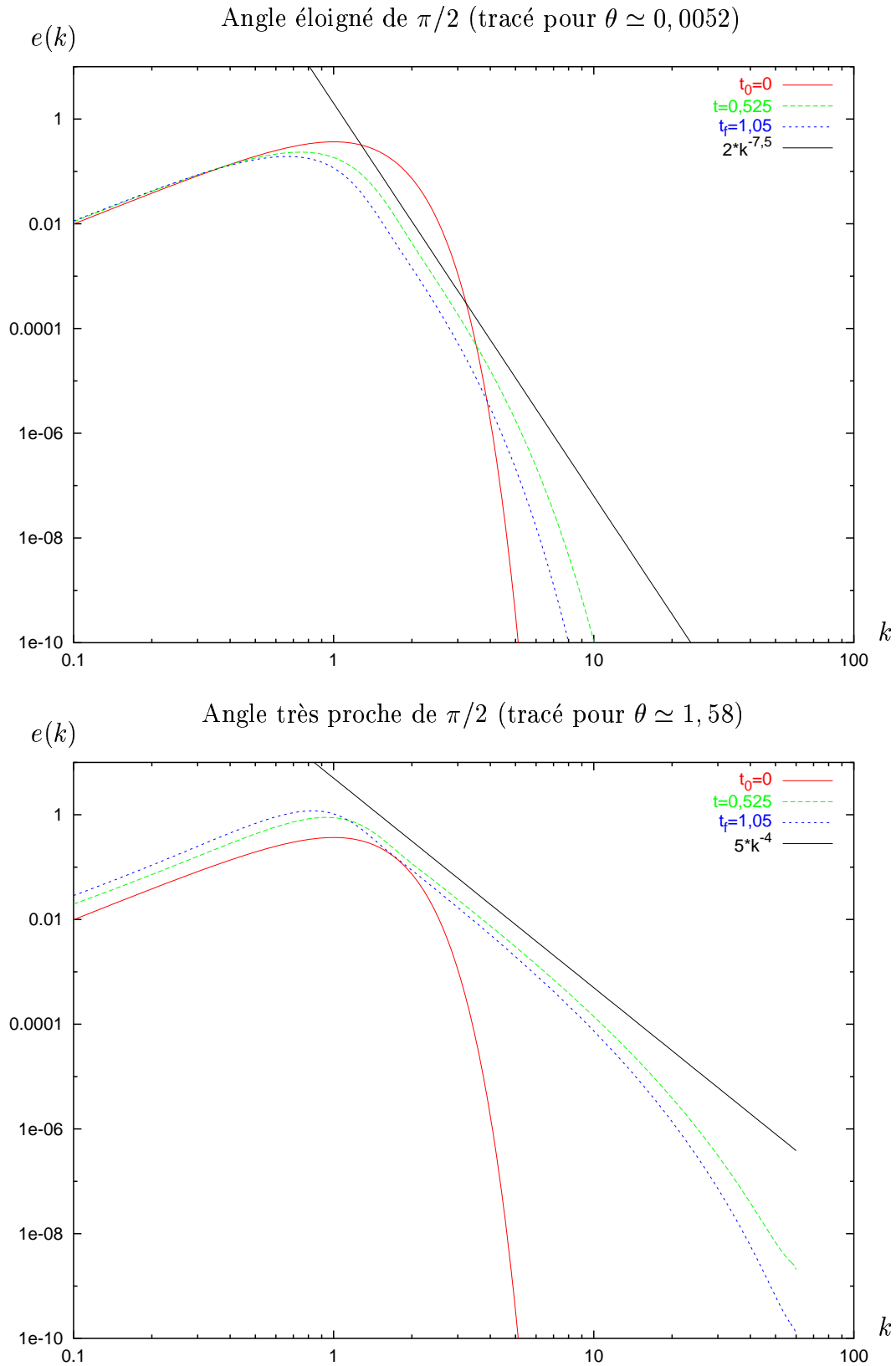


FIG. 7.17 – Évolution angulaire de l'énergie spectrale en fonction du temps, pour deux angles typiques, à  $\Re = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$  entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

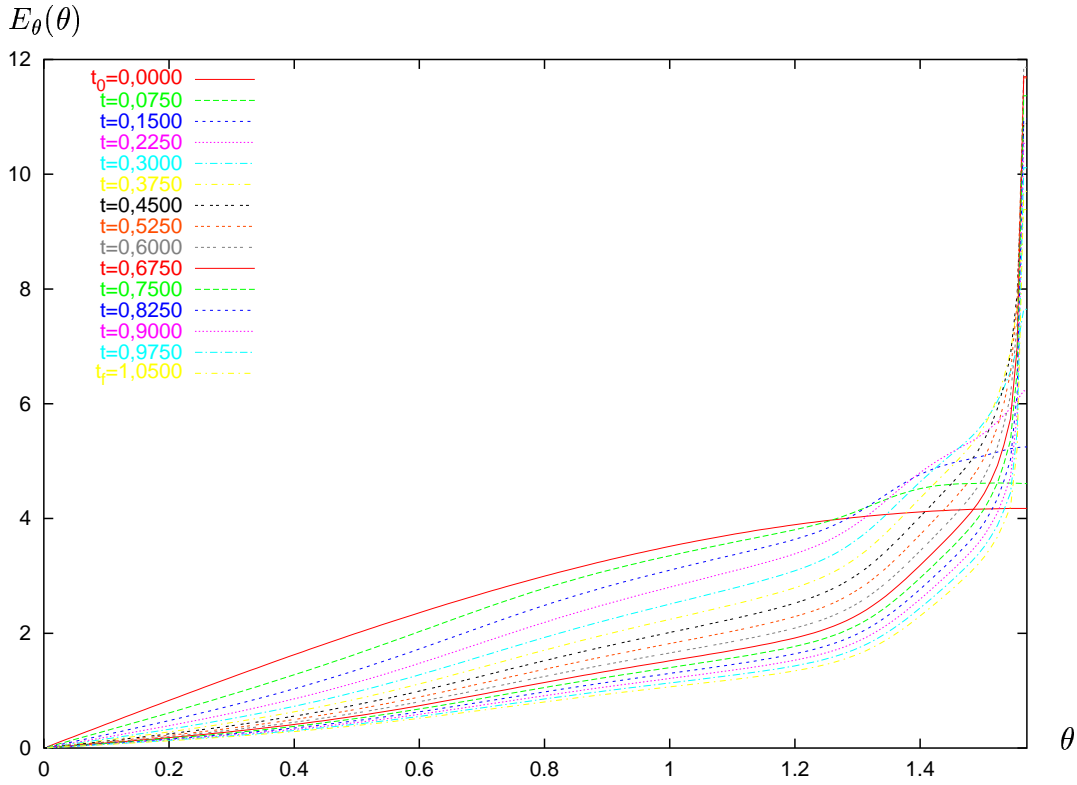


FIG. 7.18 – Évolution temporelle de  $E_\theta$  à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

le même temps, les vecteurs d'ondes dont l'angle est plus éloigné de  $\pi/2$  perdent de l'énergie, d'abord uniquement au profit des vecteurs horizontaux, puis aussi à cause de la dissipation.

Bien que l'énergie se concentre aux vecteurs d'ondes horizontaux (perpendiculaires à  $\Omega$ ), la largeur angulaire concernée semble faible : on cherche donc à quantifier le poids des angles de plus en plus proches de  $\pi/2$  dans l'énergie totale. Ainsi, on peut s'intéresser à l'énergie intégrée sur tous les vecteurs d'ondes d'angle supérieur à un angle  $\theta$  fixé, et inférieur à  $\pi/2$ . La fonction à étudier est donc  $(\theta, t) \mapsto E_\theta^{(sup)}(\theta, t)$ , définie, pour  $\theta$  dans  $[0, \pi/2]$ , et à un instant  $t$  donné, par :

$$E_\theta^{(sup)}(\theta, t) = \int_\theta^{\pi/2} E_\theta(\theta', t) d\theta'. \quad (7.29)$$

Dans le cas isotrope, cette fonction vaut, pour  $\theta$  dans  $[0, \pi/2]$ , et à un instant  $t$  donné :

$$E_\theta^{(sup)}_{\{iso\}}(\theta, t) = \frac{1}{2} \cos \theta \mathcal{E}(t). \quad (7.30)$$

La figure 7.19 donne l'évolution temporelle de la fonction  $E_\theta^{(sup)}$  à différents instants. Le spectre initial a une forme isotrope, et très rapidement, les courbes basculent autour d'un angle  $\theta_t$  : en-dessous, le niveau est plus faible qu'à l'instant précédent, et au-delà, il est plus fort. Cette phase dure tant que la dissipation totale est négligeable,

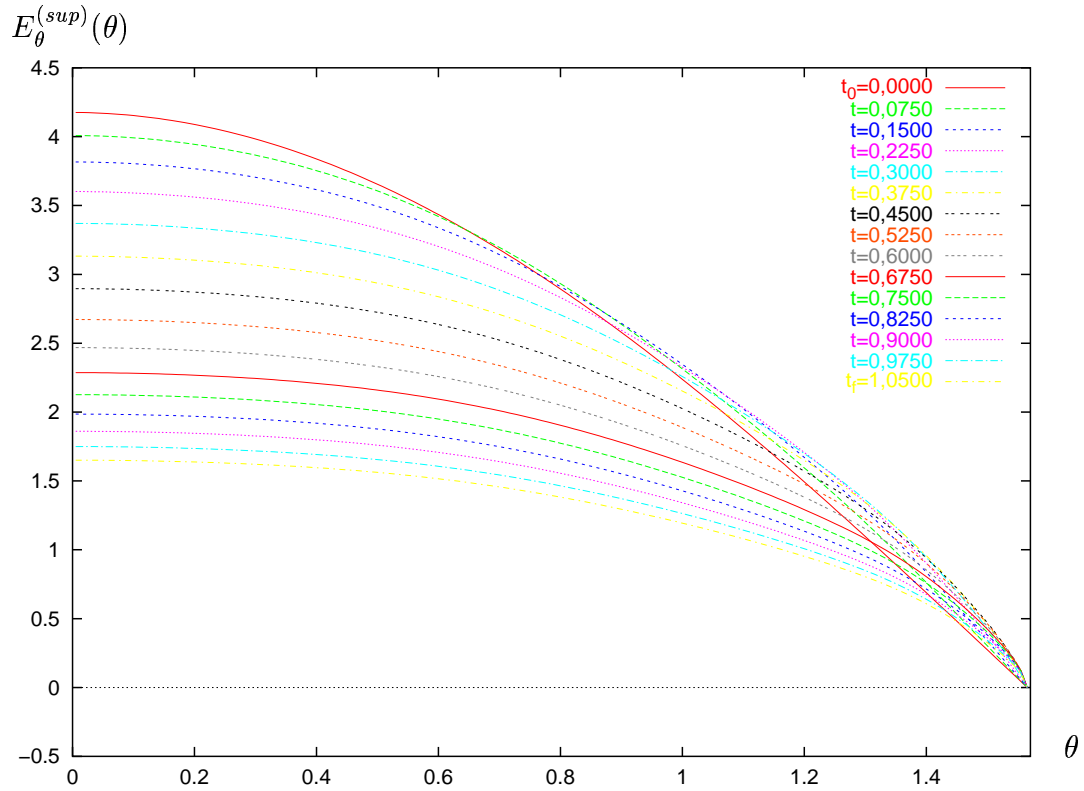


FIG. 7.19 – Évolution temporelle de  $E_\theta^{(sup)}$  à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

c'est-à-dire tant que l'intégrale de  $E_\theta^{(sup)}$  reste à peu près constante. Cela signifie qu'à un angle  $\theta$  donné, l'énergie supérieure à  $\theta$  augmente si  $\theta$  est supérieur à  $\theta_t$ , et diminue si  $\theta$  est inférieur à  $\theta_t$ . Comme  $t \mapsto \theta_t$  est croissante, la contribution des vecteurs d'ondes de plus en plus horizontaux se fait plus importante. Dans un deuxième temps, à partir de  $t = 0,6$  environ, la dissipation n'est plus négligeable, et les niveaux à tout angle diminuent en même temps.

### 7.5.1.7 Transfert intégré sur $k$

On peut étudier de la même façon la fonction qui, intégrée sur les angles  $\theta$ , redonne le transfert total, qui doit être nul. Elle est définie par :

$$T_\theta : (\theta, t) \mapsto 2\pi \sin \theta \int_0^{+\infty} k^2 T(k, \theta, t) dk, \quad (7.31)$$

mais la forme isotrope est plus difficile à déterminer. L'évolution temporelle de  $T_\theta$  est présentée sur la courbe 7.20. Les conclusions sont similaires à celles pour la courbe de  $E_\theta$  : la concentration du transfert vers les angles proches de  $\pi/2$  (positivité de  $T_\theta$ ) se fait de plus en plus forte avec le temps. Le maximum de la fonction augmente jusqu'à environ  $t = 0,5$  pour ensuite diminuer par dissipation visqueuse.

De la même façon, on peut aussi se concentrer sur le transfert intégré sur tous les vecteurs d'ondes d'angle supérieur à un angle  $\theta$  fixé, et inférieur à  $\pi/2$ . C'est un

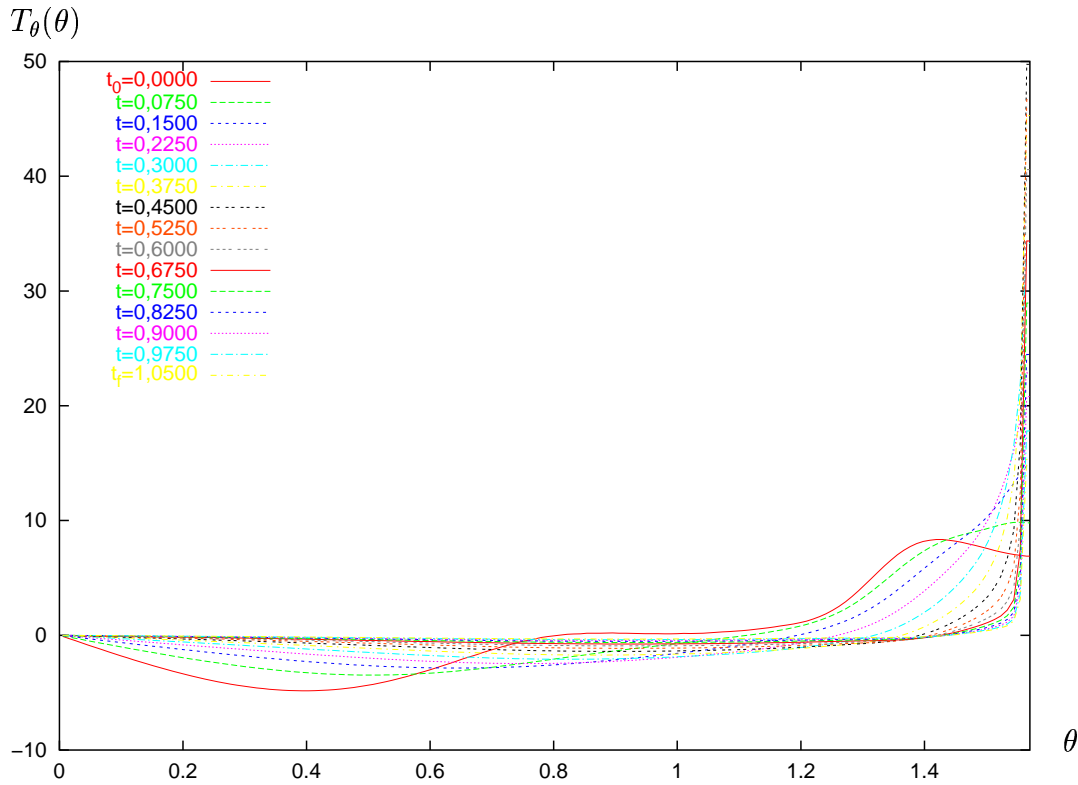


FIG. 7.20 – Évolution temporelle de  $T_\theta$  à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

flux angulaire car c'est la quantité d'énergie passant à travers l'angle  $\theta$ , dans le sens  $\theta \rightarrow \pi/2$ . La fonction à étudier est donc  $(\theta, t) \mapsto T_\theta^{(sup)}(\theta, t)$ , définie, pour  $\theta$  dans  $[0, \pi/2]$ , et à un instant  $t$  donné, par :

$$T_\theta^{(sup)}(\theta, t) = \int_\theta^{\pi/2} T_\theta(\theta', t) d\theta'. \quad (7.32)$$

La figure 7.21 donne l'évolution temporelle de la fonction  $T_\theta^{(sup)}$  à différents instants. L'axe des abscisses a été tracé afin d'identifier le signe du flux.

On a, à tout instant  $t$ ,  $T_\theta(\pi/2, 0) = 0$ , par construction. De plus, avec la symétrie miroir du problème, on devrait avoir, à tout instant  $t$ ,  $T_\theta(0, t) = 0$ , par conservation de l'énergie totale. On a vu précédemment que si c'est vrai initialement, ça l'est un peu moins au cours du temps, ce qui explique l'écart sur les courbes par rapport au zéro. On peut donc penser que sans ces erreurs numériques, le flux d'énergie serait donc positif à tout angle. Sinon, cela signifie qu'il existe un angle  $\theta_t$  tel que le transfert est globalement plus positif que négatif sur  $[\theta_t, \pi/2]$ . Il faut noter que  $t \mapsto \theta_t$  est alors une fonction croissante de  $t$ , ce qui indique que les angles proches de  $\pi/2$  sont de plus en plus privilégiés. Enfin, au fur et à mesure de l'évolution temporelle, les courbes atteignent leur maximum de plus en plus près de  $\pi/2$ , mettant en évidence l'importance des transferts vers des vecteurs d'ondes de plus en plus horizontaux.

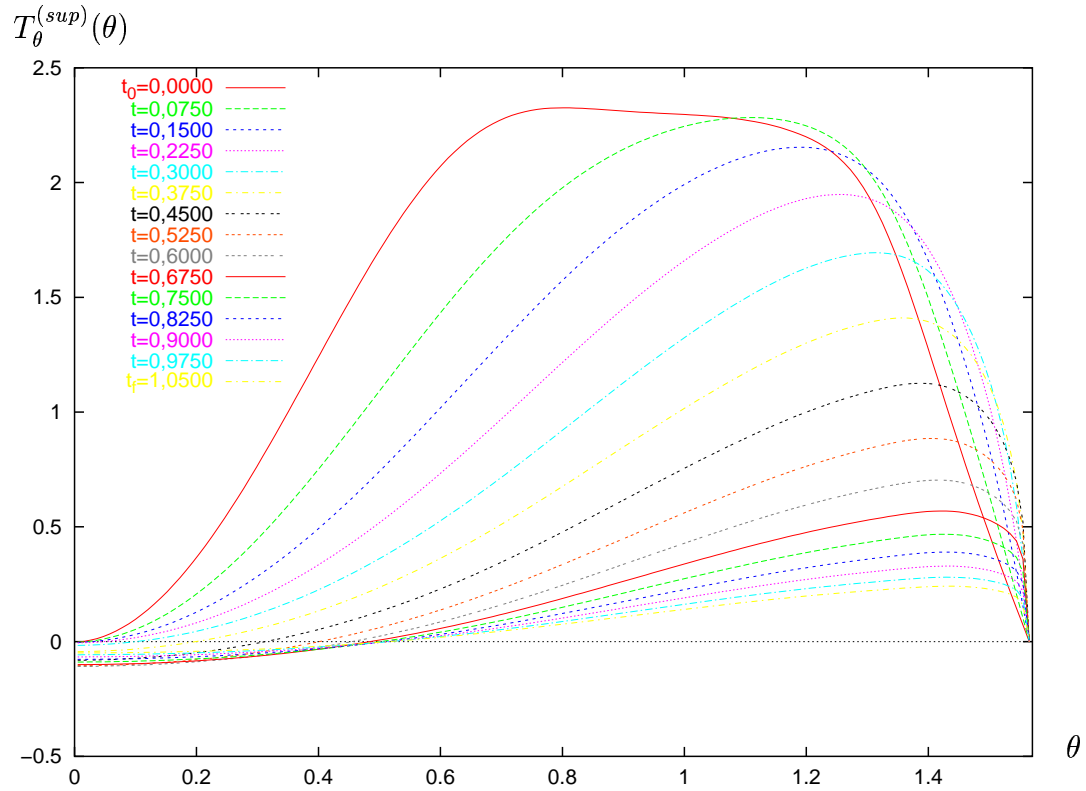


FIG. 7.21 – Évolution temporelle du flux d'énergie angulaire  $T_\theta^{(sup)}$  à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

### 7.5.1.8 Spectres d'énergie unidimensionnels

Les spectres d'énergie unidimensionnels sont des intermédiaires de calcul, permettant d'obtenir l'expression de diverses quantités intéressantes. On se place dans le repère cartésien initial  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tel que décrit par la figure 3.1, le vecteur  $\mathbf{e}_3$  correspondant au vecteur  $\mathbf{\Omega}/\Omega$ . Les spectres unidimensionnels sont définis par :

$$\begin{aligned}
 E_{ij}^{(1)}(k_1, t) &= \iint \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) dk_2 dk_3, \\
 E_{ij}^{(2)}(k_2, t) &= \iint \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) dk_1 dk_3, \\
 E_{ij}^{(3)}(k_3, t) &= \iint \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) dk_1 dk_2,
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

On peut en déduire alors que l'énergie totale s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(1)}(k_1, t) dk_1 = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(2)}(k_2, t) dk_2 = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(3)}(k_3, t) dk_3. \tag{7.34}$$

On rappelle que, comme  $z$  et  $h$  sont nuls :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = e(\mathbf{k}, t) \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \tag{7.35}$$



d'après (3.63). La difficulté dans le calcul des expressions (7.33) provient du fait qu'il faut intégrer sur des plans, et que l'on ne dispose du tenseur spectral que dans l'espace sphérique, fonction de  $k$  et  $\theta$ .

Les valeurs intéressantes des trois spectres unidimensionnels sont celles pour  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  et  $k_3 = 0$  respectivement, ces conditions formant des plans passant par l'origine et facilement décrits en coordonnées sphériques. Cela permettra le calcul des composantes bidimensionnelles horizontale et verticale de l'énergie,  $E_h(t)$  et  $E_v(t)$ , ainsi que des longueurs intégrales. Par exemple, le plan défini par  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  ( $k_1 = 0$ ) est décrit par  $k$  et  $\theta$  quelconques, et  $\phi = \pi/2$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} E_{ij}^{(1)}(0, t) &= \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \Phi_{ij}(k, \theta, \phi = \frac{\pi}{2}, t) k dk d\theta, \\ &= \int_0^{+\infty} k \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \Delta_{ij}(0, k \sin \theta, k \cos \theta) d\theta \right] dk, \end{aligned} \quad (7.36)$$

car  $e$  est axisymétrique, et avec :

$$k_1 \rightarrow k \sin \theta \cos \phi, \quad (7.37a)$$

$$k_2 \rightarrow k \sin \theta \sin \phi, \quad (7.37b)$$

$$\text{et } k_3 \rightarrow k \cos \theta. \quad (7.37c)$$

De même :

$$E_{ij}^{(2)}(0, t) = \int_0^{+\infty} k \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \Delta_{ij}(k \sin \theta, 0, k \cos \theta) d\theta \right] dk, \quad (7.38)$$

et on retrouve une expression très similaire à celle de  $E_{ij}^{(1)}(0, t)$ . Enfin :

$$E_{ij}^{(3)}(0, t) = \int_0^{+\infty} k e(k, \frac{\pi}{2}, t) \left[ \int_0^{2\pi} \Delta_{ij}(k \cos \phi, k \sin \phi, 0) d\phi \right] dk. \quad (7.39)$$

### 7.5.1.9 Composantes bidimensionnelles de l'énergie

On peut former différentes quantités à partir des éléments diagonaux des tenseurs  $E_{ij}^{(1)}(0, t)$  (préféré à  $E_{ij}^{(2)}(0, t)$  de manière arbitraire) et  $E_{ij}^{(3)}(0, t)$ . La somme des composantes  $i = j = 1$  et  $i = j = 2$  d'un des deux tenseurs quantifie l'énergie horizontale dans une direction (1 ou 3), tandis que la composante  $i = j = 3$  quantifie l'énergie verticale dans une direction (1 ou 3). On peut donc calculer les quantités :

$$E_h^{(1)}(t) = E_{11}^{(1)}(0, t) + E_{22}^{(1)}(0, t), \quad (7.40a)$$

$$E_v^{(1)}(t) = E_{33}^{(1)}(0, t), \quad (7.40b)$$

$$E_h^{(3)}(t) = E_{11}^{(3)}(0, t) + E_{22}^{(3)}(0, t), \quad (7.40c)$$

$$E_v^{(3)}(t) = E_{33}^{(3)}(0, t). \quad (7.40d)$$

On sépare le calcul des composantes horizontale et verticale de l'énergie.

1. Calcul des composantes à séparation horizontale :

(a) Cas général

En notant :

$$\Delta_{ij}^{k\theta}(k, \theta) = \Delta_{ij}(0, k \sin \theta, k \cos \theta), \quad (7.41)$$

on a :

$$\Delta_{11}^{k\theta}(k) = 1, \quad (7.42a)$$

$$\Delta_{22}^{k\theta}(k) = \cos^2 \theta, \quad (7.42b)$$

$$\Delta_{33}^{k\theta}(k) = \sin^2 \theta, \quad (7.42c)$$

$$\Delta_{12}^{k\theta}(k) = \Delta_{13}^{k\theta}(k) = 0, \quad (7.42d)$$

$$\Delta_{23}^{k\theta}(k) = -\sin \theta \cos \theta. \quad (7.42e)$$

On en déduit facilement la valeur des quantités suivantes :

$$E_{11}^{(1)}(0, t) = \int_0^{+\infty} k \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) d\theta \right] dk, \quad (7.43a)$$

$$E_{22}^{(1)}(0, t) = \int_0^{+\infty} k \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \cos^2 \theta d\theta \right] dk, \quad (7.43b)$$

$$E_{33}^{(1)}(0, t) = \int_0^{+\infty} k \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \sin^2 \theta d\theta \right] dk, \quad (7.43c)$$

et on remarque qu'on a toujours  $E_{11}^{(1)}(0, t) = E_{22}^{(1)}(0, t) + E_{33}^{(1)}(0, t)$ .

(b) Cas isotrope

Dans le cas isotrope, et d'après ces définitions, on obtient :

$$E_{11}^{(1)} \{iso\}(0, t) = 2E_{22}^{(1)} \{iso\}(0, t) = 2E_{33}^{(1)} \{iso\}(0, t), \quad (7.44)$$

ce qui implique que  $E_h^{(1)} \{iso\}(t) = 3E_v^{(1)} \{iso\}(t)$ .

(c) Cas purement bidimensionnel

Si l'énergie est entièrement concentrée dans le plan horizontal, on peut écrire :

$$e_{\{2D\}}(\mathbf{k}, t) = \frac{E(k, t)}{2\pi k} \delta(k_3). \quad (7.45)$$

Cette expression permet de retrouver, par intégration sur tout l'espace, l'énergie totale. On pourra par exemple se référer à Cambon, Mansour, Godefert [10]. En utilisant les définitions premières (7.33), on obtient alors :

$$E_{11}^{(1)} \{2D\}(0, t) = E_{33}^{(1)} \{2D\}(0, t), \quad (7.46a)$$

$$E_{22}^{(1)} \{2D\}(0, t) = 0, \quad (7.46b)$$

d'où  $E_h^{(1)} \{2D\}(t) = E_v^{(1)} \{2D\}(t)$ .

2. Calcul des composantes à séparation verticale :

(a) Cas général

Dans tous les cas :

$$E_{11}^{(3)}(0, t) = E_{22}^{(3)}(0, t) = \frac{1}{2} E_{33}^{(3)}(0, t) = \pi \int_0^{+\infty} k e(k, \frac{\pi}{2}, t) dk, \quad (7.47)$$

et donc :

$$E_h^{(3)}(t) = E_v^{(3)}(t) = E_{hv}^{(3)}(t) = 2\pi \int_0^{+\infty} k e(k, \frac{\pi}{2}, t) dk. \quad (7.48)$$

(b) Cas isotrope

On trouve bien sûr le même résultat :

$$E_{hv \{iso\}}^{(3)}(t) = E_{hv}^{(3)}(t). \quad (7.49)$$

(c) Cas purement bidimensionnel

D'après (7.45) et la relation (7.48), on peut tout simplement calculer la valeur de  $E_{hv \{2D\}}^{(3)}(t)$  :

$$E_{hv \{2D\}}^{(3)}(t) = \mathcal{E}(t). \quad (7.50)$$

L'évolution temporelle des énergies  $E_h^{(1)}$ ,  $3E_v^{(1)}$  (correspondant à  $E_v^{(1)}_{\{iso\}}$  pour  $E_h^{(1)}$  fixé),  $E_{hv}^{(3)} = E_{hv \{iso\}}^{(3)}$  et  $E_{hv \{2D\}}^{(3)} = \mathcal{E}$  est donc portée sur la figure 7.22, le calcul de  $E_{hv}^{(3)}$  ayant été mené pour un angle le plus proche possible de  $\pi/2$ , en l'occurrence environ 1,566. La première remarque est que l'énergie à séparation verticale est donc plus importante que les énergies à séparation horizontale, ce qui semble être un argument de plus en faveur de la structuration bidimensionnelle de l'écoulement. La cohérence verticale est en effet plus forte que la cohérence horizontale, que ce soit pour les composantes verticale ou horizontale de la vitesse. Cependant, on ne peut absolument pas dire que l'écoulement est purement bidimensionnel, car  $E_{hv}^{(3)}$  devrait alors être égal à l'énergie totale, ce qui est loin d'être vérifié. Enfin, l'anisotropie à séparation horizontale reste faible, vu l'écart entre les courbes de  $E_h^{(1)}$  et  $3E_v^{(1)}$ .

### 7.5.1.10 Tenseur de Reynolds

On a :

$$\begin{aligned} & \overline{u_i u_j}(t) \\ &= R_{ij}(\mathbf{0}, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) d^3 \mathbf{k} \\ &= \int_0^{+\infty} k^2 \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \sin \theta \left( \int_0^{2\pi} \Delta_{ij}(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi, k \cos \theta) d\phi \right) d\theta \right] dk. \end{aligned} \quad (7.51)$$

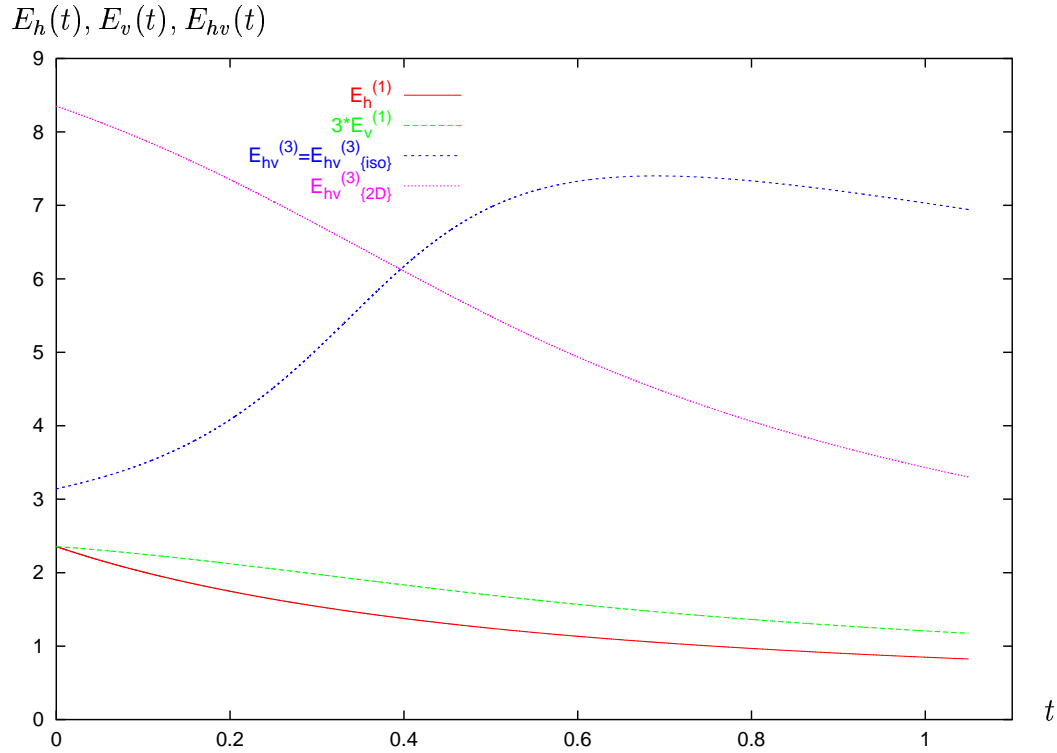


FIG. 7.22 – Évolution temporelle de  $E_h^{(1)}$ ,  $3E_v^{(1)}$ ,  $E_{hv}^{(3)} = E_{hv}^{(3)}_{\{iso\}}$  et  $E_{hv}^{(3)}_{\{2D\}} = \mathcal{E}$ , à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

Les spectres d'énergie unidimensionnels permettent aussi de retrouver le tenseur de Reynolds directement :

$$\overline{u_i u_j}(t) = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(1)}(k_1, t) dk_1 = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(2)}(k_2, t) dk_2 = \int_0^{+\infty} E_{ij}^{(3)}(k_3, t) dk_3. \quad (7.52)$$

### 1. Cas général

C'est l'expression (7.51) qui sera plutôt utilisée, car elle ne fait intervenir que des coordonnées sphériques. L'intégration sur  $\phi$  peut alors se faire algébriquement. Ainsi, si on note, pour  $k$  et  $\theta$  fixés :

$$\Delta_{ij}^\phi(k, \theta) = \int_0^{2\pi} \Delta_{ij}(k \sin \theta \cos \phi, k \sin \theta \sin \phi, k \cos \theta) d\phi, \quad (7.53)$$

alors :

$$\Delta_{11}^\phi(k, \theta) = \Delta_{22}^\phi(k, \theta) = 2\pi \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right), \quad (7.54a)$$

$$\Delta_{33}^\phi(k, \theta) = 2\pi \sin^2 \theta, \quad (7.54b)$$

$$\Delta_{12}^\phi(k, \theta) = \Delta_{13}^\phi(k, \theta) = \Delta_{23}^\phi(k, \theta) = 0. \quad (7.54c)$$

On peut en conclure que  $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2}$ , ce qui était déjà prédit par l'axisymétrie. De plus, les corrélations croisées  $\overline{u_1 u_2}$ ,  $\overline{u_1 u_3}$  et  $\overline{u_2 u_3}$  sont toutes égales à 0.

Restent donc deux quantités intéressantes, par exemple :

$$u_1'^2(t) = \overline{u_1^2}(t) = 2\pi \int_0^{+\infty} k^2 \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \sin \theta \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) d\theta \right] dk, \quad (7.55a)$$

$$\text{et } u_3'^2(t) = \overline{u_3^2}(t) = 2\pi \int_0^{+\infty} k^2 \left[ \int_0^\pi e(k, \theta, t) \sin^3 \theta d\theta \right] dk. \quad (7.55b)$$

On s'intéressera aussi au déviateur du tenseur de Reynolds, noté  $\text{dev}$ , qui se réduit ici aux composantes diagonales suivantes :

$$\text{dev}_{11}(t) = u_1'^2(t) - \frac{2}{3}\mathcal{E}(t), \quad (7.56a)$$

$$\text{et } \text{dev}_{33}(t) = u_3'^2(t) - \frac{2}{3}\mathcal{E}(t), \quad (7.56b)$$

donnant l'écart par rapport à une turbulence isotrope.

On peut enfin regarder le comportement du paramètre de structure :

$$S_{31}(t) = \frac{u_3'^2(t) - u_1'^2(t)}{u_3'^2(t) + u_1'^2(t)}, \quad (7.57)$$

introduit par Townsend [60]. Ce paramètre est compris entre  $-1$  et  $1$ .

## 2. Cas isotrope

On doit bien sûr avoir, à tout instant  $t$  :

$$u_1'^2(t) = u_2'^2(t) = u_3'^2(t) = \frac{2}{3}\mathcal{E}(t), \quad (7.58a)$$

$$\text{dev}_{11}(t) = \text{dev}_{33}(t) = 0, \quad (7.58b)$$

$$S_{31}(t) = 0. \quad (7.58c)$$

## 3. Cas purement bidimensionnel

On utilisera plutôt les expressions (7.52) pour trouver :

$$u_1'^2_{\{2D\}}(t) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{E(k)}{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \right] dk, \quad (7.59a)$$

$$\text{et } u_3'^2_{\{2D\}}(t) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{E(k)}{2\pi} d\phi \right] dk. \quad (7.59b)$$

Donc finalement :

$$u_1'^2_{\{2D\}}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{2}, \quad (7.60a)$$

$$u_3'^2_{\{2D\}}(t) = \mathcal{E}(t), \quad (7.60b)$$

$$\text{dev}_{11\{2D\}}(t) = -\frac{\mathcal{E}(t)}{6}, \quad (7.60c)$$

$$\text{dev}_{33\{2D\}}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{3}, \quad (7.60d)$$

$$S_{31\{2D\}}(t) = \frac{1}{3}. \quad (7.60e)$$

La figure 7.23 donne les évolutions temporelles, pour le modèle AQNM, pour le cas isotrope et pour le cas bidimensionnel, des deux composantes du tenseur de Reynolds, ainsi que de celles de son déviateur, en fonction du temps. Le paramètre de structure est présenté de la même façon en fonction du temps sur la figure 7.24.

On a initialement une turbulence isotrope, donc on retrouve naturellement que  $u_1'^2$  et  $u_3'^2$  sont égaux, et donc que le déviateur est nul à  $t_0 = 0$ . Le paramètre de structure est lui aussi nul initialement, par construction. Avec le temps, on voit que la turbulence s'écarte de l'isotropie : d'une part, les composantes  $u_1'^2$  et  $u_3'^2$  sont nettement différentes, ce qui est confirmé par la valeur de  $S_{31}$  qui augmente durant l'évolution temporelle. D'autre part, le déviateur s'éloigne de plus en plus du tenseur nul, ce qui implique que non seulement les vitesses  $u_1'^2$  et  $u_3'^2$  sont différentes, mais qu'elles sont en plus assez éloignées de leur valeur pour le cas isotrope. Enfin, on ne peut pas dire que la turbulence est purement bidimensionnelle, même asymptotiquement en temps.

### 7.5.1.11 Longueurs intégrales

Il est intéressant de comparer les échelles intégrales caractéristiques d'une part de l'extension verticale, et d'autre part des extensions horizontales des structures. On choisit de calculer les échelles d'auto-corrélation dans les différentes directions de l'espace.

#### 1. Cas général

On raisonne d'abord sur les longueurs intégrales dans la direction 3, notées  $L_{11}^{(3)}(t)$ ,  $L_{22}^{(3)}(t)$  et  $L_{33}^{(3)}(t)$ . On peut relier ces trois quantités au spectre d'énergie, car on a par définition, à un instant  $t$  donné :

$$L_{ii}^{(3)}(t) = \frac{\int_0^{+\infty} \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x} + r_3 \mathbf{e}_3, t)} dr_3}{\overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t)}} = \frac{\int_0^{+\infty} R_{ii}(r_3 \mathbf{e}_3, t) dr_3}{u_i'^2(t)}, \quad (7.61)$$

où il n'y a pas de sommation sur l'indice  $i$ , ni dans la suite. Or, d'après (2.57) du tenseur spectral, on peut écrire, pour un triplet  $(r_1, r_2, k_3)$  donné :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{ii}(\mathbf{r}, t) e^{-ik_3 r_3} d\mathbf{r}_3 = 2\pi \iint \Phi_{ii}(\mathbf{k}, t) e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} dk_1 dk_2. \quad (7.62)$$

On en déduit en particulier que, pour  $r_1 = r_2 = k_3 = 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} R_{ii}(r_3 \mathbf{e}_3, t) dr_3 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ii}(r_3 \mathbf{e}_3, t) dr_3 \\ &= \pi \iint \Phi_{ii}(k_1, k_2, 0, t) dk_1 dk_2 \\ &= \pi E_{ii}^{(3)}(0, t), \end{aligned} \quad (7.63)$$

car  $R_{ii}$  est paire. On peut en conclure que :

$$L_{11}^{(3)}(t) = L_{22}^{(3)}(t) = \pi \frac{E_{11}^{(3)}(0, t)}{u_1'^2(t)} = \pi \frac{E_{11}^{(3)}(0, t)}{\int_0^{+\infty} E_{11}^{(3)}(k_3, t) dk_3}, \quad (7.64)$$

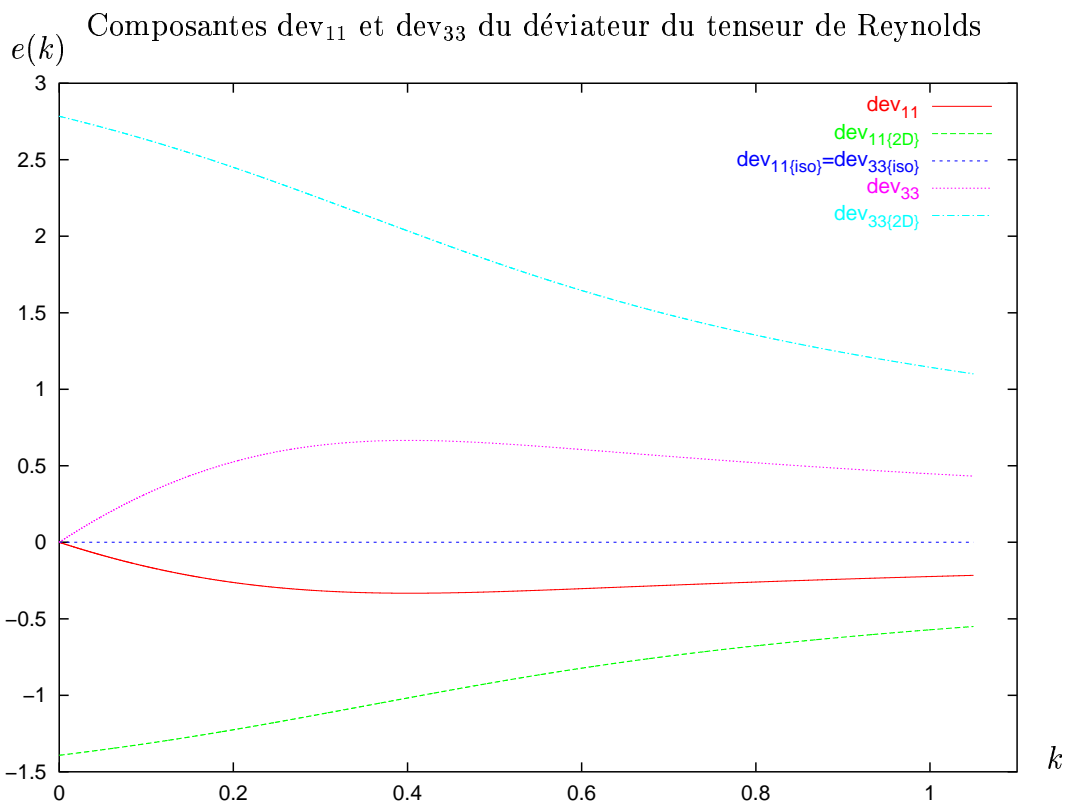
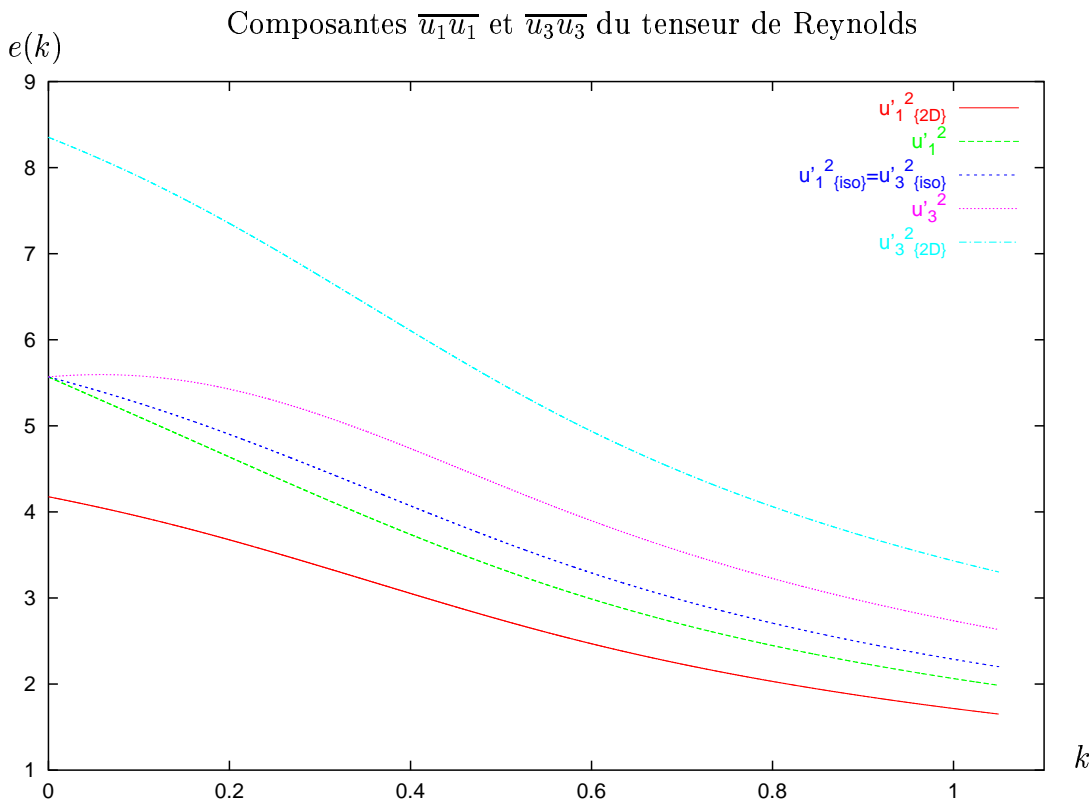


FIG. 7.23 – Évolution temporelle des composantes significatives du tenseur de Reynolds et de son déviateur à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

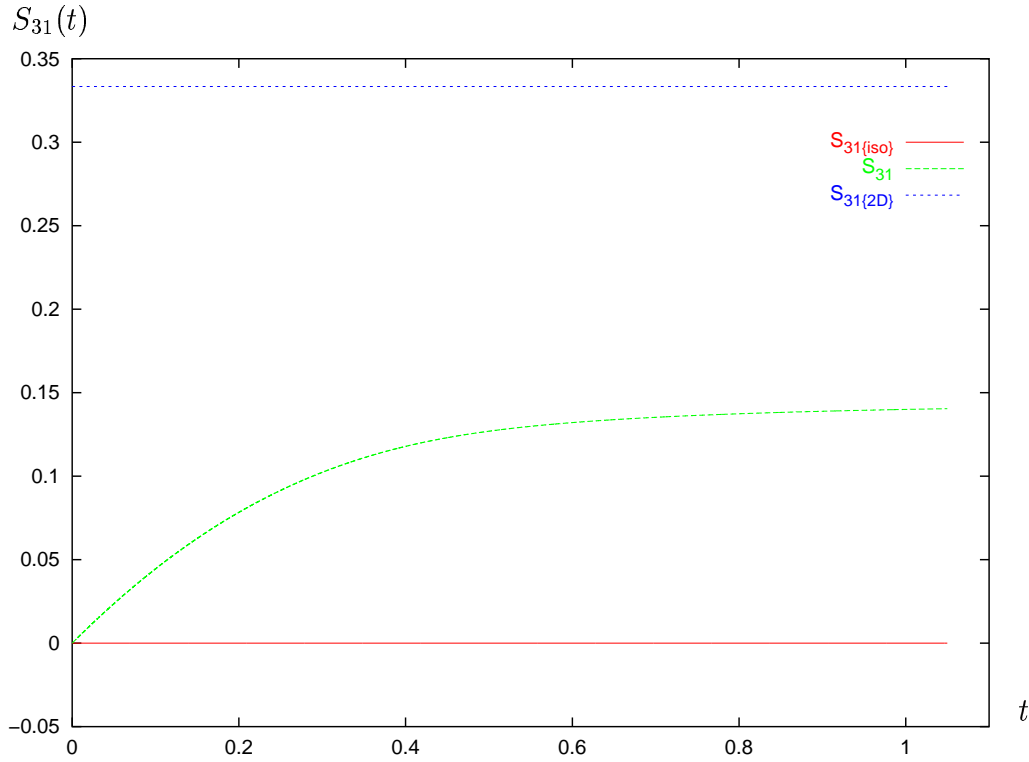


FIG. 7.24 – Évolution temporelle du paramètre de structure à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

ce qui confirme, à nouveau, l'axisymétrie du spectre d'énergie. De même :

$$L_{33}^{(3)}(t) = \pi \frac{E_{33}^{(3)}(0, t)}{u_3'^2(t)} = \pi \frac{E_{33}^{(3)}(0, t)}{\int_0^{+\infty} E_{33}^{(3)}(k_3, t) dk_3}. \quad (7.65)$$

### 2. Cas isotrope

En turbulence isotrope, à un instant  $t$ , les quantités  $u_1'^2_{\{iso\}}(t)$  et  $u_3'^2_{\{iso\}}(t)$  sont égales. Comme on a vu aussi que  $E_{33}^{(3)}_{\{iso\}}(0, t) = 2E_{11}^{(3)}_{\{iso\}}(0, t)$ , on doit avoir :

$$L_{11}^{(3)}_{\{iso\}}(t) = \frac{1}{2}L_{33}^{(3)}_{\{iso\}}(t). \quad (7.66)$$

### 3. Cas bidimensionnel

On obtient que les longueurs intégrales sont égales :

$$L_{11}^{(3)}_{\{2D\}}(t) = L_{33}^{(3)}_{\{2D\}}(t). \quad (7.67)$$

On a donc tracé sur la figure 7.25, l'évolution temporelle de la longueur intégrale  $L_{11}^{(3)}$  et celle de la moitié de la longueur intégrale  $L_{33}^{(3)}$  (qui correspond à  $L_{11}^{(3)}$  pour  $L_{33}^{(3)}$  fixée). On aurait aussi pu comparer  $L_{33}^{(3)}$  par rapport à  $2L_{11}^{(3)}$ , mais on s'attend à ce que  $L_{33}^{(3)}$  soit relativement peu affectée par la rotation, et soit donc proche de



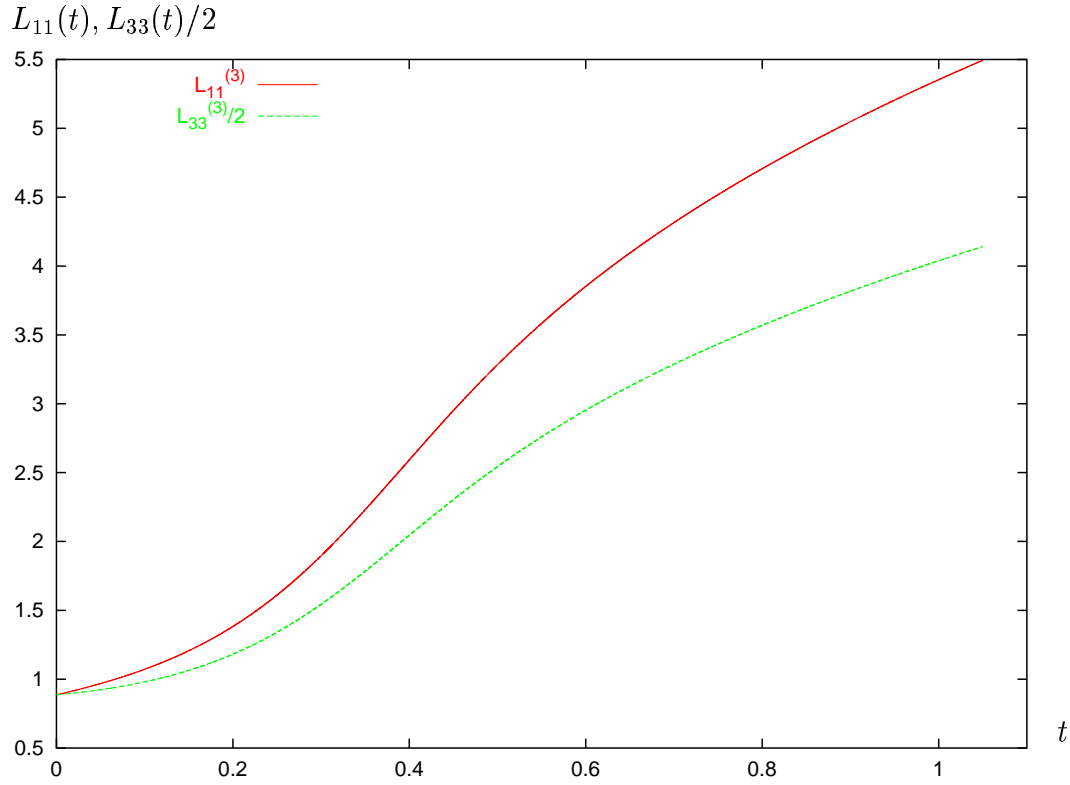


FIG. 7.25 – Évolution temporelle des longueurs intégrales dans la direction verticale à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

sa valeur en turbulence isotrope. Ainsi, la valeur de la longueur intégrale dans la direction 1 est bien plus élevée que dans le cas purement isotrope. Il y a donc plus de cohérence verticale entre les composantes horizontales de la vitesse, ce qui pourrait correspondre encore une fois à une structuration bidimensionnelle en colonnes de Taylor. En définitive, les longueurs intégrales sont calculées en divisant les composantes bidimensionnelles de la vitesse par les éléments diagonaux du tenseur de Reynolds, ce qui explique que leurs comportements respectifs sont très liés.

Par un raisonnement similaire sur les longueurs intégrales à séparation horizontale, on aboutit à :

### 1. Cas général

$$L_{11}^{(1)}(t) = \pi \frac{E_{11}^{(1)}(0, t)}{\int_0^{+\infty} E_{11}^{(1)}(k_1, t) dk_1} = \pi \frac{E_{11}^{(1)}(0, t)}{u_1'^2}, \quad (7.68a)$$

$$L_{22}^{(1)}(t) = \pi \frac{E_{22}^{(1)}(0, t)}{\int_0^{+\infty} E_{22}^{(1)}(k_1, t) dk_1} = \pi \frac{E_{22}^{(1)}(0, t)}{u_2'^2}, \quad (7.68b)$$

$$\text{et } L_{33}^{(1)}(t) = \pi \frac{E_{33}^{(1)}(0, t)}{\int_0^{+\infty} E_{33}^{(1)}(k_1, t) dk_1} = \pi \frac{E_{33}^{(1)}(0, t)}{u_3'^2}. \quad (7.68c)$$

### 2. Cas isotrope

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a, en turbulence isotrope :

$$L_{11}^{(1)}(t) = 2L_{22}^{(1)}(t) = 2L_{33}^{(1)}(t), \quad (7.69a)$$

### 3. Cas purement bidimensionnel

$$L_{11}^{(1)}(t) = 2L_{33}^{(1)}(t), \quad (7.70a)$$

$$L_{22}^{(1)}(t) = 0. \quad (7.70b)$$

La longueur intégrale pour les composantes horizontales de vitesse est, comme dans le cas isotrope, le double de celle pour les composantes verticales. Le résultat pour  $L_{22}^{(1)}$  manque par contre de pertinence.

Tout cela conduit à tracer l'évolution temporelle de  $L_{11}^{(1)}/2$  et  $L_{22}^{(1)}$  comparée à celle de  $L_{33}^{(1)}$  sur la figure 7.26. Les longueurs  $L_{11}^{(1)}/2$  et  $L_{33}^{(1)}$  évoluent relativement

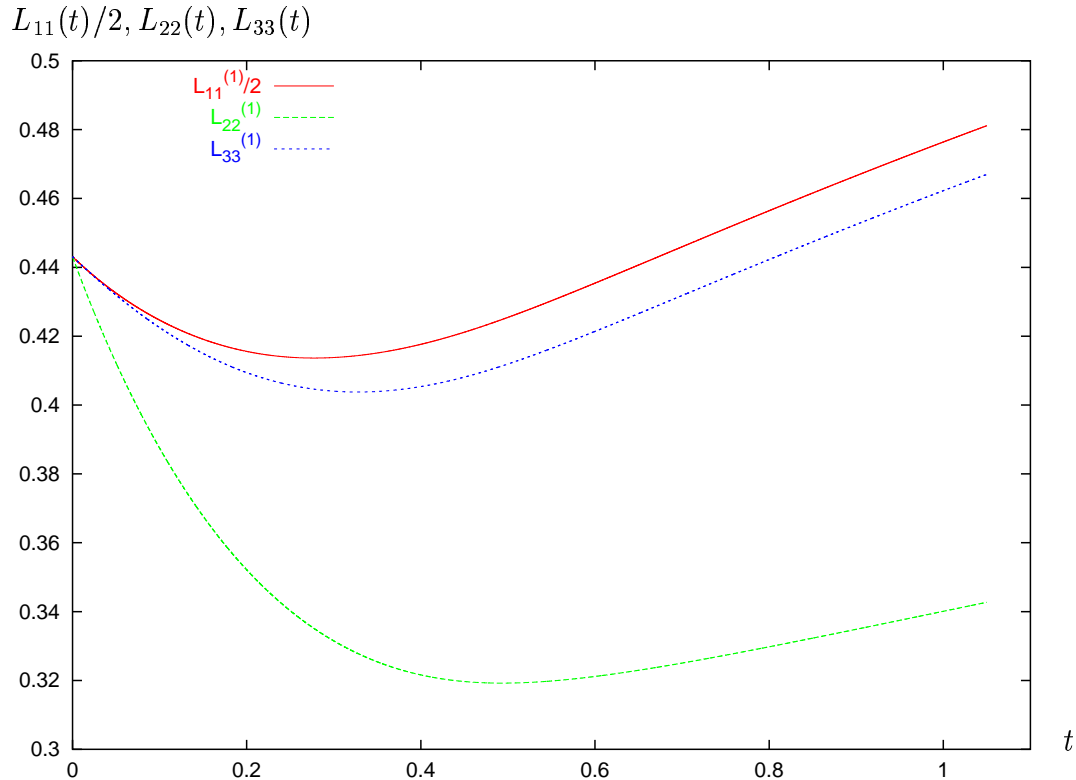


FIG. 7.26 – Évolution temporelle des longueurs intégrales dans une des directions horizontales à  $\mathfrak{R} = 5$ ,  $k_{max} = 60$ ,  $dt = 5 \cdot 10^{-5}$ , entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1,05$ .

en parallèle avec le temps ; par contre  $L_{22}^{(1)}$  chute brutalement dès les premiers instants. Ces courbes sont plus difficiles à interpréter, mais ce que l'on peut toutefois dire, c'est qu'ici encore, par rapport à la référence de la direction 1, l'échelle verticale est nettement supérieure à l'échelle horizontale dans la direction 2. C'est une manifestation de la cohérence verticale.

## 7.5.2 Comparaison avec l'expérience ?

On aimerait pouvoir comparer les résultats obtenus avec le modèle AQNM à ceux provenant d'expériences, et de l'EDQNM classique, même si le cas où le nombre de Reynolds, au sens usuel, est fini ne rentre pas exactement dans le cadre du modèle AQNM. On peut toutefois donner l'expression du nombre de Reynolds effectif et du nombre de Rossby aux grandes échelles en fonction de données physiques accessibles à l'expérience. Mais les comparaisons avec les expériences s'avèrent difficiles à effectuer, sauf peut-être de manière qualitative.

### 7.5.2.1 Estimation physique de $\mathfrak{R}$ et $Ro_L$

On rappelle que le nombre de Reynolds effectif vaut :

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi A k_0^3}{2\Omega\nu},$$

avec :

$$e(\mathbf{k}, 0) = A \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 \right]. \quad (7.72)$$

On a en général accès à  $\Omega$  et  $\nu$  dans les comptes-rendus d'expérience. Le terme  $Ak_0^3$  n'a de sens que pour un spectre d'énergie à la Orszag, ce qui n'est pas le cas lors d'une expérience quelconque. Cependant, ce terme provient d'une adimensionnalisation de l'énergie spectrale, et a en fait la dimension d'une énergie cinétique turbulente totale à  $t = 0$ . Comme celle-ci ne dépend pas de la position en turbulence homogène :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) &= \int_{\mathbb{R}^3} e(\mathbf{k}, 0) d^3\mathbf{k} \\ &= 4\pi A k_0^2 \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{k}{k_0} \right)^4 \exp \left[ - \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 \right] dk \\ &= 4\pi A k_0^3 \int_{\mathbb{R}} k^4 \exp [-k^2] dk \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\pi^3} A k_0^3. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Donc  $Ak_0^3$  est au spectre de type Orszag ce que  $2/(3\sqrt{\pi^3})\mathcal{E}(0)$  est à un spectre quelconque. Ainsi on en déduit dans le cadre le plus général :

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathcal{E}(0)}{3\sqrt{\pi}\Omega\nu}. \quad (7.74)$$

De même, le nombre de Rossby aux grandes échelles, de taille  $L$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} Ro_L &= \frac{u'}{\Omega L} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{\mathcal{E}(0)}}{\Omega L}, \end{aligned} \quad (7.75)$$

car :

$$u' = \sqrt{\frac{2}{3}\mathcal{E}(0)},$$

d'après (2.38).

### 7.5.2.2 Conditions de validité

La comparaison directe avec des expériences risque néanmoins de ne pas être très concluante. En effet, le confinement obligatoire de la turbulence restreint considérablement le domaine de validité de l'homogénéité. De plus, obtenir une turbulence développée sur des échelles assez importantes est difficile. Enfin, il faut un dispositif de suffisamment grandes dimensions pour observer les différentes échelles de la turbulence. L'expérience de Jacquin, Leuchter, Cambon & Mathieu [31] semble remplir ces conditions. Le dispositif fait tourner relativement rapidement un nid d'abeilles en amont d'une conduite horizontale, de section circulaire et contenant une grille générant la turbulence. Différentes vitesses de rotation sont utilisées, entre 0 et 63 radians par seconde, soit 600 tours par minute. Pour se rapprocher le plus de la forte rotation, il faut considérer le cas où  $\Omega = 63 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . En estimant la taille des grandes échelles par le pas de maillage de la grille, on choisit le maximum  $L \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ , car des pas de 10, 15 et 20 mm sont utilisés. De plus, on a accès par extrapolation à l'énergie à l'entrée de la partie en rotation, et cela donne  $\mathcal{E}(0) = 1 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ . Enfin, le fluide est de l'air sec, et à 20 °C, sa viscosité est donc  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Ces données permettent de calculer :

$$Ro_L = 0,65, \tag{7.76a}$$

$$\mathfrak{R} \simeq 200. \tag{7.76b}$$

Tout le problème provient du fait que le nombre de Rossby n'est pas petit devant un, bien qu'inférieur. Les résultats obtenus (tenseur de Reynolds, échelles intégrales) ne peuvent être alors comparés à ceux du modèle AQNM que qualitativement. Il faudrait donc soit augmenter la vitesse de rotation (ce qui est coûteux en énergie), soit augmenter la taille du dispositif (de tels dispositifs sont peu répandus) ou encore augmenter l'intensité de la turbulence. On peut penser effectuer à l'avenir des simulations sur la plate-forme Coriolis à Grenoble.

### 7.5.3 Résultats EDQNM

La comparaison des résultats AQNM avec ceux provenant de l'EDQNM se révèle très enrichissante. Avec l'EDQNM, Cambon & Jacquin [9] ont produit différentes quantifications de l'anisotropie, comme le transfert et l'énergie en fonction de l'angle, ou encore le rapport d'échelles intégrales. Comme on dispose d'un code numérique EDQNM3 (sachant que les différences avec un code EDQNM2 sont minimales si  $|z|$  reste faible), on peut donc essayer de reproduire ces comportements, pour une discrétisation plus importante. L'objectif est d'arriver à obtenir l'évolution temporelle d'un spectre d'énergie initiale, et la comparaison avec le modèle AQNM se fera en adimensionnalisant les grandeurs.

### 7.5.3.1 Paramètres EDQNM

On peut spécifier en entrée du code EDQNM :

1. Les paramètres physiques : la viscosité  $\nu$  et le taux de rotation  $\Omega$ .
2. Les paramètres spectraux : le spectre initial isotrope de type Orszag sous la forme  $e(\mathbf{k}, 0) = A(k/k_{pic})^2 \exp[-(k/k_{pic})^2]$ , en spécifiant le nombre d'onde du pic  $k_{pic}$  et l'amplitude du spectre  $A$ .
3. Les paramètres numériques spatiaux : le nombre  $ls$  de modules  $k$  (équivalent à  $M_\rho$ ), le nombre  $nd$  d'angles  $\theta$  (équivalent à  $M_\theta$ ), le nombre  $nia$  d'angles  $\lambda$  autour de  $\mathbf{k}$  (qui joue le même rôle que  $M_\phi$ ), le nombre d'onde minimal  $k_{inf}$  (équivalent à  $k_{min}$ ) et le nombre d'onde maximal  $k_{sup}$  (équivalent à  $k_{max}$ ). On rappelle en effet que les intégrations, pour le calcul du terme de transfert, sont faites dans un repère liée au triangle de vecteurs d'ondes.
4. Les paramètres numériques temporels : le temps initial  $t_{init}$ , le pas de temps  $pdt$  et le nombre de pas de temps  $mdt$ .

### 7.5.3.2 Évolution temporelle

Le calcul a été mené avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \nu &= 0,01 \text{ et } \Omega = 10, \\ A &= 1 \text{ et } k_{pic} = 1, \\ ls &= 43, nd = 21 \text{ et } nia = 20, \\ k_{inf} &= 0,1 \text{ et } k_{sup} = 60, \\ t_{init} &= 0, pdt = 0,001 \text{ et } mdt = 9720. \end{aligned}$$

en ayant pris soin de choisir des paramètres les plus proches possibles du modèle AQNM, surtout en ce qui concerne le spectre initial et les coupures radiales. On a en effet choisi  $A = k_{pic} = 1$ , ce qui donne directement un spectre adimensionnel, et  $k_{inf} = k_{min}$ ,  $k_{sup} = k_{max}$ , ce qui adimensionne aussi la direction radiale, d'après (6.31). Par contre, la discrétisation spatiale est bien moindre pour l'EDQNM, car le temps de calcul croît très rapidement avec le nombre de points du maillage, ce qui donne un avantage certain à l'AQNM pour une discrétisation similaire. Ces paramètres donnent aussi les valeurs suivantes :

$$\mathfrak{R} \simeq 15,7, \tag{7.77}$$

$$t_f = \frac{\pi A k_{pic}^5}{\Omega} (t_{init} + pdt mdt) \simeq 3,05, \tag{7.78}$$

où  $t_f$  est le temps adimensionnel final correspondant, toujours d'après (6.31). On dispose donc d'une évolution temporelle contenant largement celle effectuée pour le modèle AQNM (qui s'arrêtait à  $t_f = 1,05$ ), et pour un nombre de Reynolds effectif plus important, mais néanmoins du même ordre de grandeur. On a vu de toutes façons qu'avec le modèle AQNM, la valeur de  $\mathfrak{R}$  modifiait simplement le spectre d'énergie aux grands nombres d'ondes, mais que la pente en zone inertielle n'était pas affectée.

### 7.5.3.3 Comparaisons

Le mode de gestion des données avec la version initiale du code EDQNM ne permet pas le stockage de tous les pas de temps, et l'obtention des grandeurs aux mêmes pas de temps pour les deux codes est difficile à mettre en œuvre. On ne propose donc ici qu'une comparaison assez générale, en utilisant des grandeurs adimensionnées. Pour le calcul EDQNM, on dispose de :

1. l'évolution temporelle du spectre d'énergie intégré  $E(k)$ , et de l'énergie totale (figure 7.27 et 7.28). Étant donné que la viscosité est plus forte dans le cas AQNM, la fin d'établissement de la zone inertielle se situait vers  $t = 0,5$  contre  $t = 0,6$  avec l'EDQNM. L'observation de l'évolution de l'énergie totale montre qu'avec l'EDQNM, la dissipation se manifeste significativement que plus tardivement que pour l'AQNM. Pour ce qui est du taux de décroissance, aucune loi simple ne correspondait parfaitement à la courbe sauf peut-être :

$$\mathcal{E}(t) = 5,1 t^{-0,86}. \quad (7.79)$$

La pente prend une valeur proche de celle observée avec le modèle AQNM.

2. la dépendance angulaire du spectre d'énergie à deux instant caractéristiques :  $t = 0,62$  pour la fin d'établissement de la zone inertielle, et  $t = 3,05$  pour la fin du calcul (figure 7.29). Dans l'ensemble, l'EDQNM prédit une plus forte concentration d'énergie aux vecteurs horizontaux qu'aux autres. On n'observe cependant pratiquement pas de cascade inverse, alors que celle-ci était relativement marquée pour les angles proches de  $\pi/2$  dans le modèle AQNM.

Pour des angles  $\theta = 0,31$  (éloigné de  $\pi/2$ ) et  $\theta = 1,57$ , on a de plus tracé l'évolution des niveaux d'énergie au cours du temps sur la figure 7.30. Il semble clair que l'angle proche de  $\pi/2$  possède plus d'énergie que l'angle qui en est éloigné, mais cette tendance est beaucoup moins nette que cela ne l'était avec le modèle AQNM. De plus, l'effet de la discrétisation se fait sentir sur les courbes qui montrent des irrégularités dues au faible nombre (comparé à l'AQNM) de points dans la direction radiale.

3. l'évolution temporelle des composantes horizontale et verticale de l'énergie, à séparation verticale,  $E_h^{(3)}_{\{EDQNM\}}$  et  $E_v^{(3)}_{\{EDQNM\}}$ , par rapport à celle de  $E_{hv}^{(3)}_{\{AQNM\}}$ , et portées sur la figure 7.31. Les différences viennent principalement du fait que le modèle EDQNM ne produit pas un  $z$  identiquement nul à tout instant s'il l'est initialement, contrairement au modèle AQNM. L'anisotropie de  $z$  se retrouve donc dans ces composantes de l'énergie, et modifient sensiblement leur valeur. Néanmoins, on devrait vérifier :

$$E_h^{(3)}_{\{EDQNM\}} + E_v^{(3)}_{\{EDQNM\}} = 2E_{hv}^{(3)}_{\{AQNM\}}, \quad (7.80)$$

d'après les définitions initiales des trois quantités, et en s'appuyant sur un tenseur spectral réellement anisotrope, dont la forme est donnée en 3.63 avec  $h$  nul. La valeur  $2E_{hv}^{(3)}_{\{AQNM\}}$  est en réalité beaucoup plus importante que la somme de  $E_h^{(3)}_{\{EDQNM\}}$  et  $E_v^{(3)}_{\{EDQNM\}}$ .

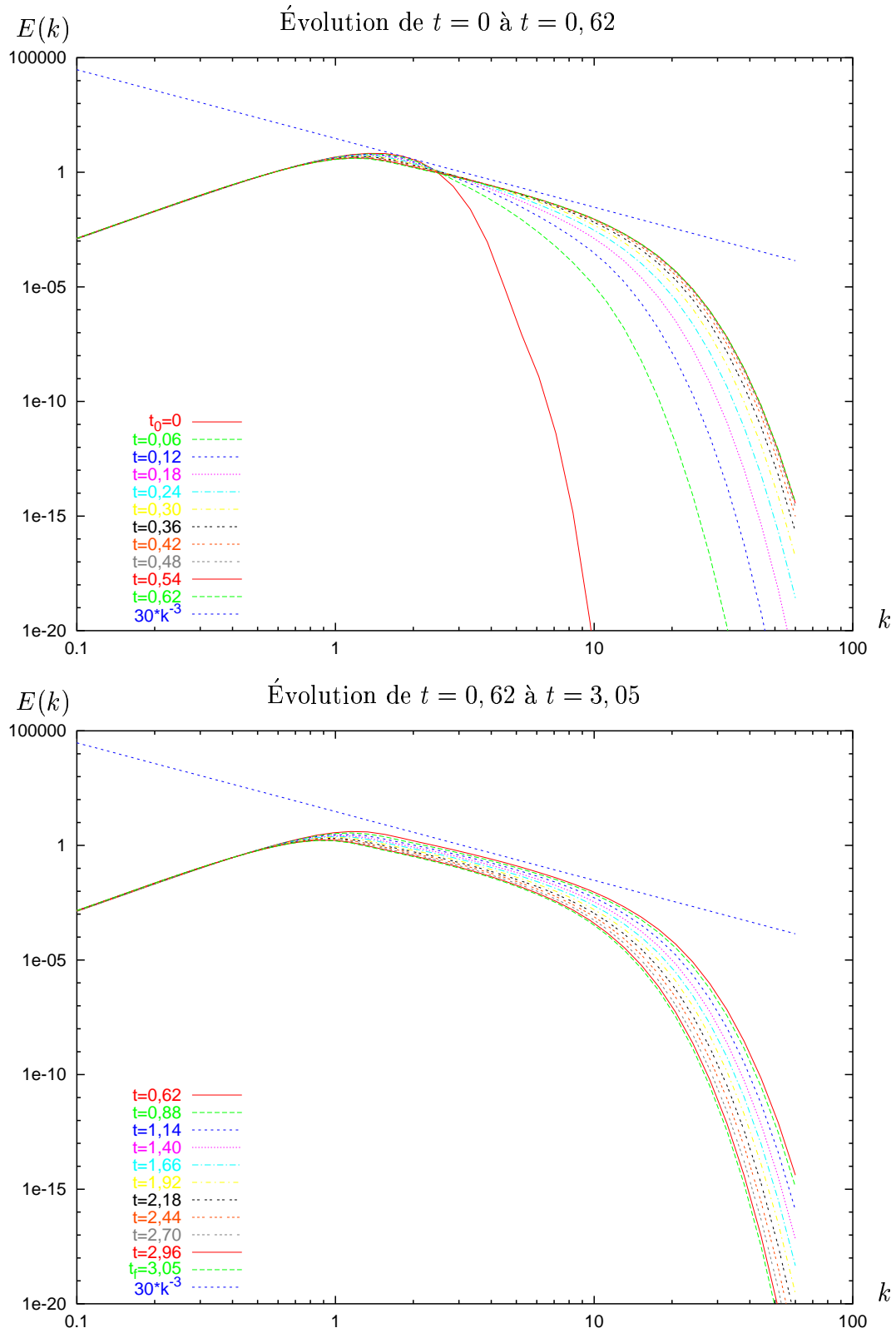


FIG. 7.27 – Évolution temporelle EDQNM de l'énergie intégrée de  $t_0 = 0$  à  $t_f = 3,05$ .

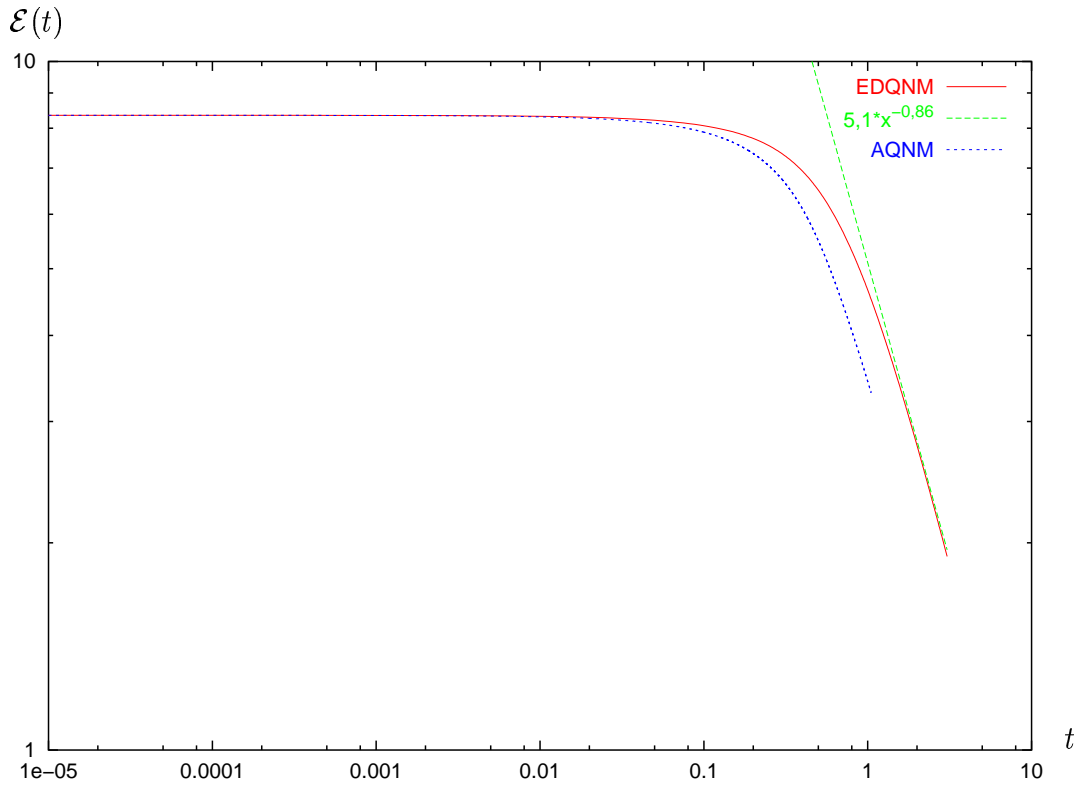


FIG. 7.28 – Évolution temporelle EDQNM et AQNM de l'énergie totale de  $t_0 = 0$  à  $t_f = 3,05$ .

4. l'évolution temporelle des composantes intéressantes du tenseur de Reynolds, de son déviateur, et du paramètre de structure, présentées sur les figures 7.32 et 7.33 avec la comparaison avec le modèle AQNM.

Dans l'ensemble, les tendances sont très similaires entre les deux modèles que ce soit pour le tenseur de Reynolds, son déviateur ou le paramètre de structure, ce qui est rassurant. La viscosité étant plus forte dans le cas AQNM, la turbulence est globalement affaiblie plus rapidement, ce qui explique les différences de niveaux. Enfin, les irrégularités numériques du modèle EDQNM se remarquent nettement sur les courbes du déviateur et du paramètre de structure, ce qui est peut-être dû à la valeur trop élevée du pas de temps adimensionnel.

5. l'évolution temporelle des échelles intégrales à séparation verticale et horizontale  $L_{11}^{(1)} \{EDQNM\}$ ,  $L_{33}^{(1)} \{EDQNM\}$ ,  $L_{11}^{(3)} \{EDQNM\}$  et  $L_{33}^{(3)} \{EDQNM\}$ , comparées à celles pour le modèle AQNM, et se trouvant sur les figures 5.

Ici encore, les quantités provenant des deux modèles semblent avoir le même comportement, même si les valeurs prises ne sont pas forcément identiques. Ainsi, le modèle AQNM fournit des valeurs plus importantes que l'EDQNM, et met en évidence l'importance de l'échelle  $L_{11}^{(3)}$ , qui donne un bon indicateur de l'extension des tourbillons dans la direction verticale.



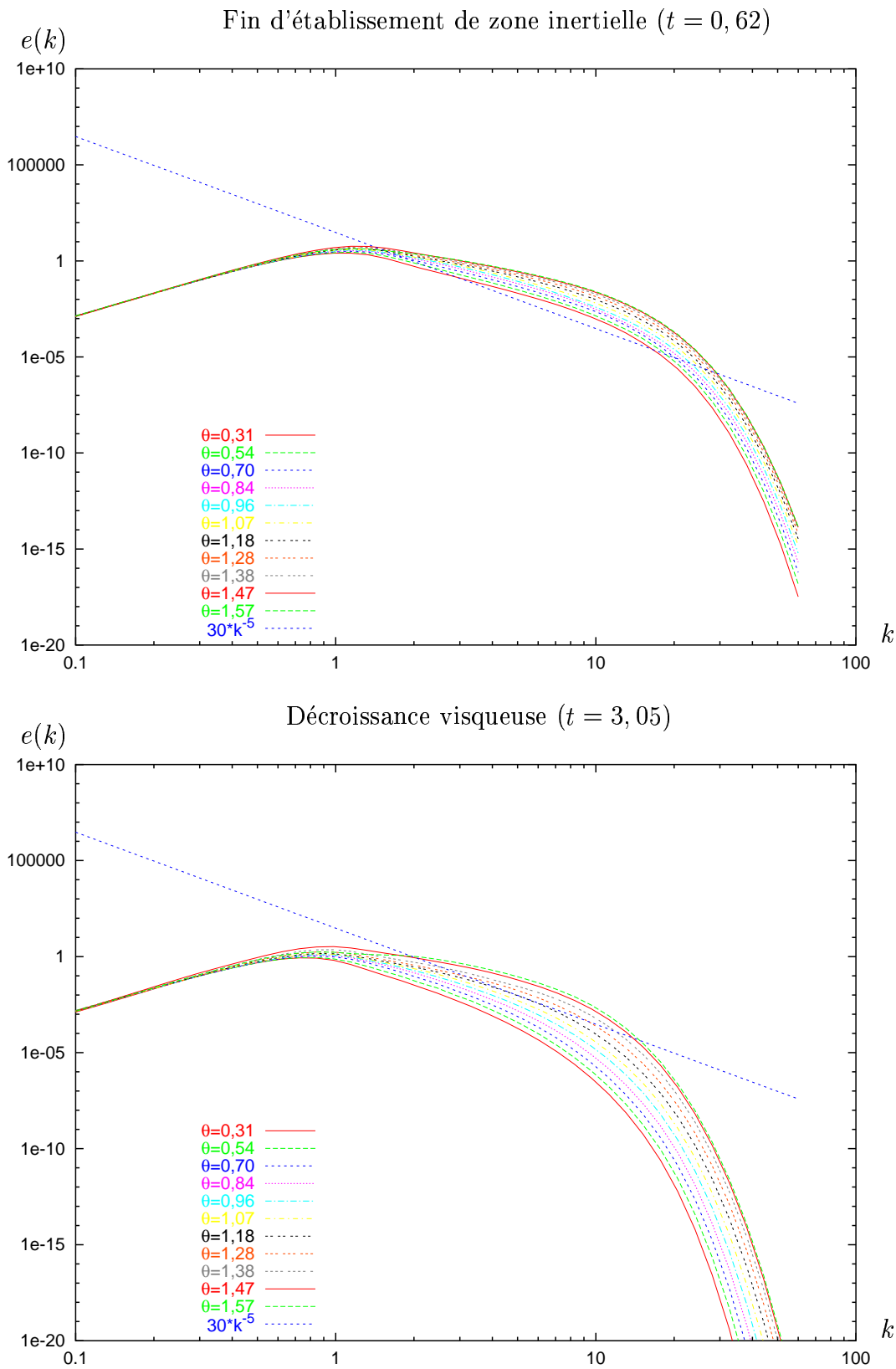


FIG. 7.29 – Énergie spectrale EDQNM à différents angles à  $t = 0,62$  et  $t_f = 3,05$ .

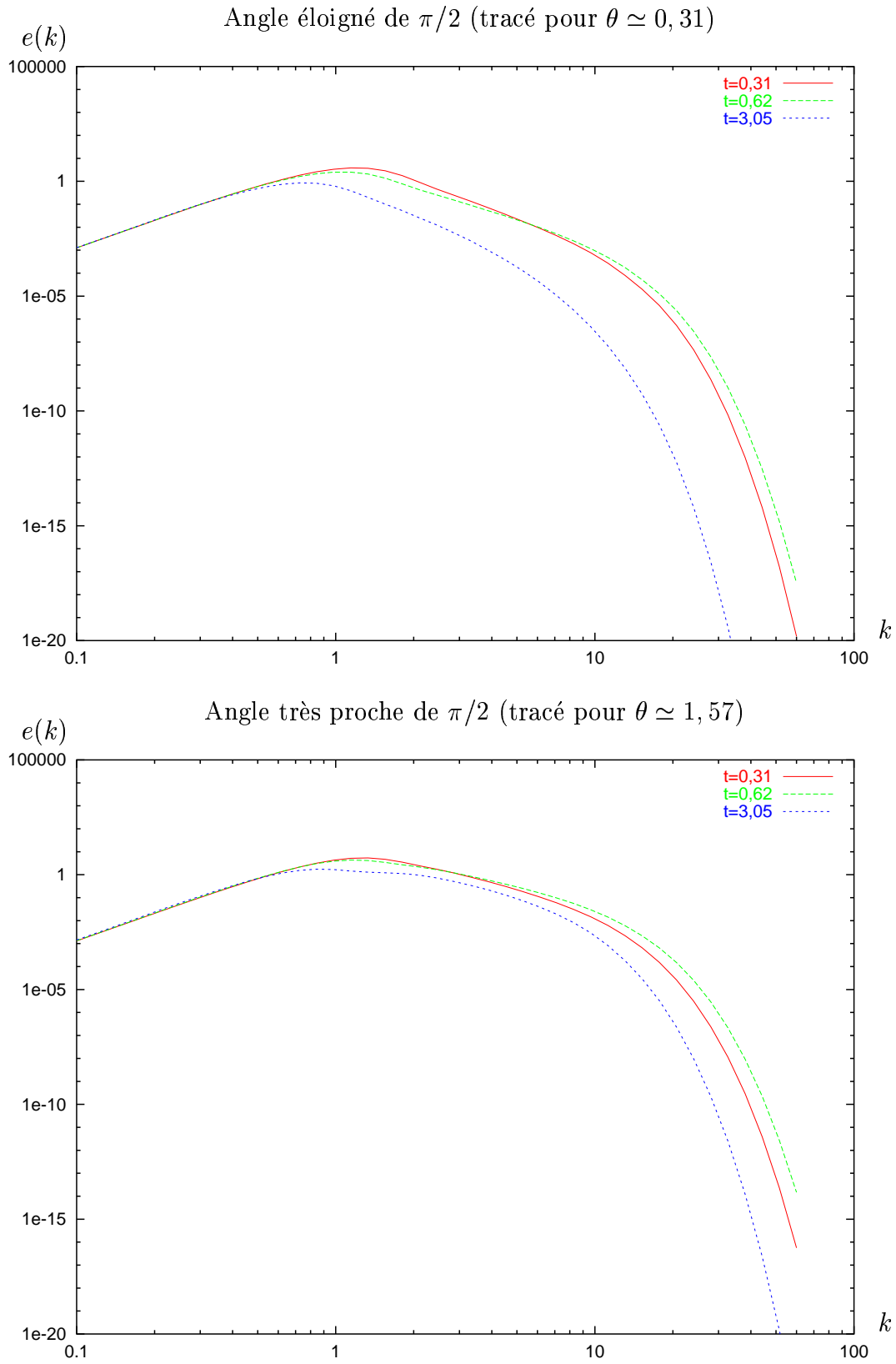


FIG. 7.30 – Évolution angulaire typique EDQNM de l'énergie spectrale en fonction du temps entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 3,05$ .

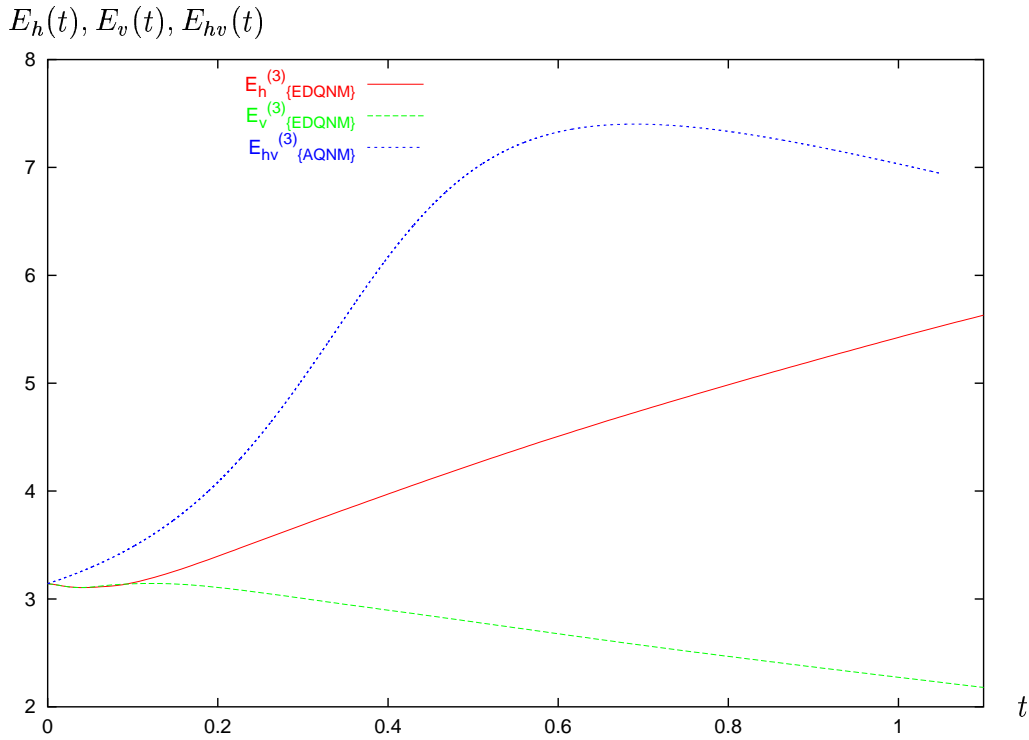


FIG. 7.31 – Évolution temporelle de  $E_h^{(3)}_{\{EDQNM\}}$  et  $E_v^{(3)}_{\{EDQNM\}}$  par rapport à celle de  $E_{hv}^{(3)}_{\{AQNM\}}$  entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 3,05$ .

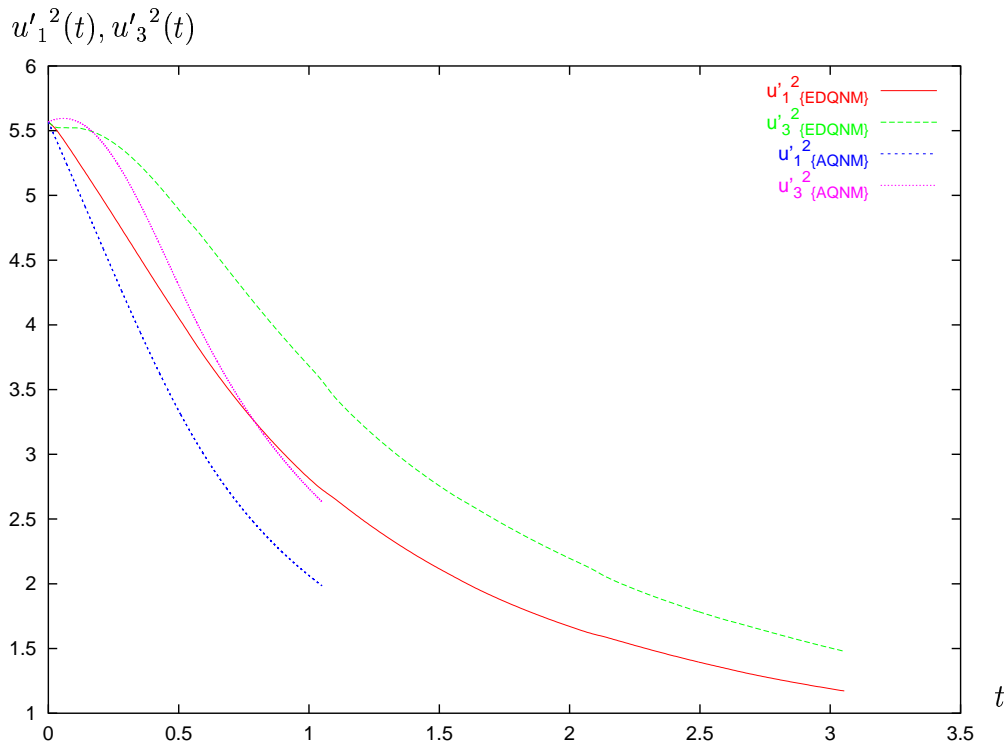


FIG. 7.32 – Évolution temporelle EDQNM et AQNM des composantes significatives du tenseur de Reynolds entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 3,05$ .

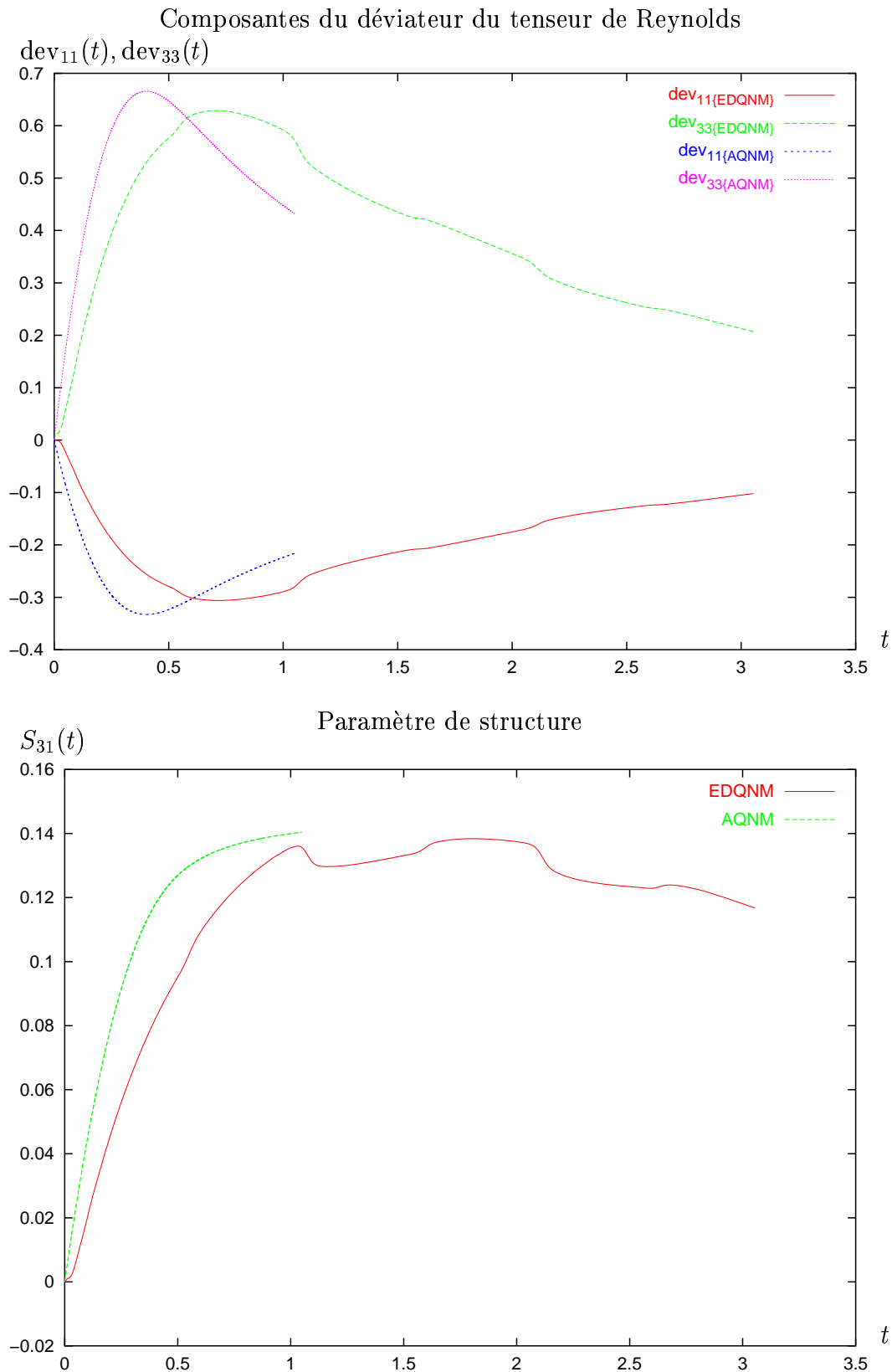


FIG. 7.33 – Évolution temporelle EDQNM et AQNM des composantes significatives du déviateur du tenseur de Reynolds et du paramètre de structure entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 3,05$ .

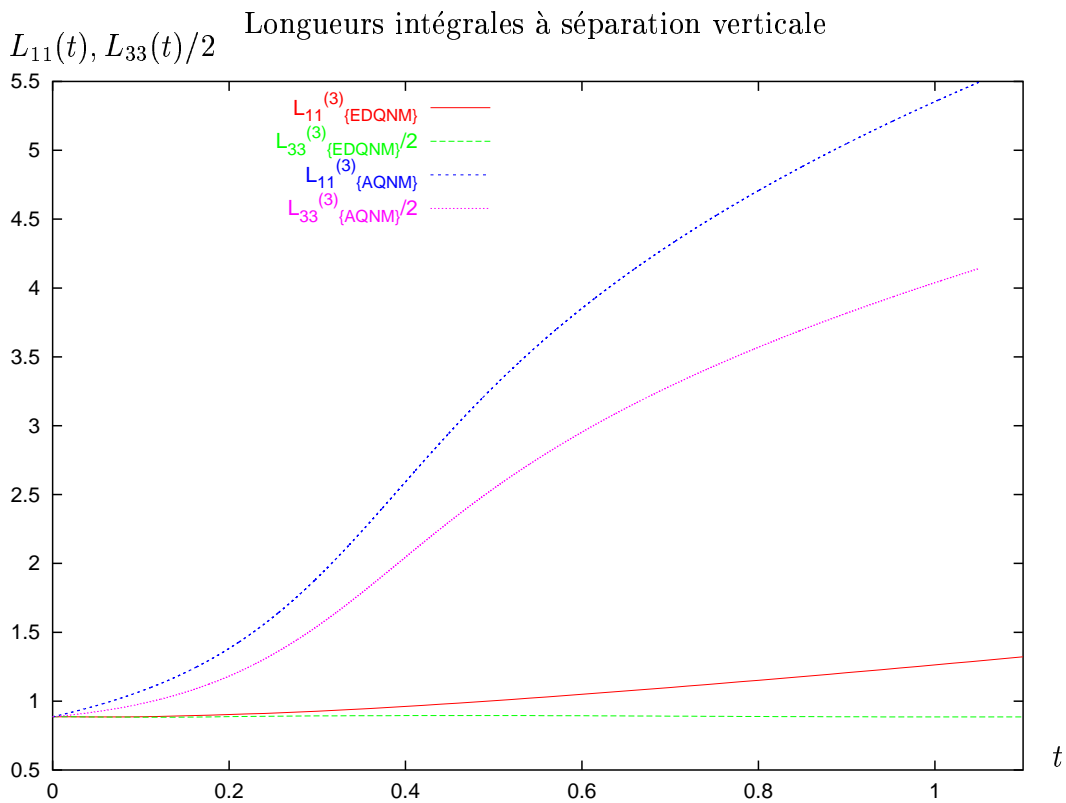
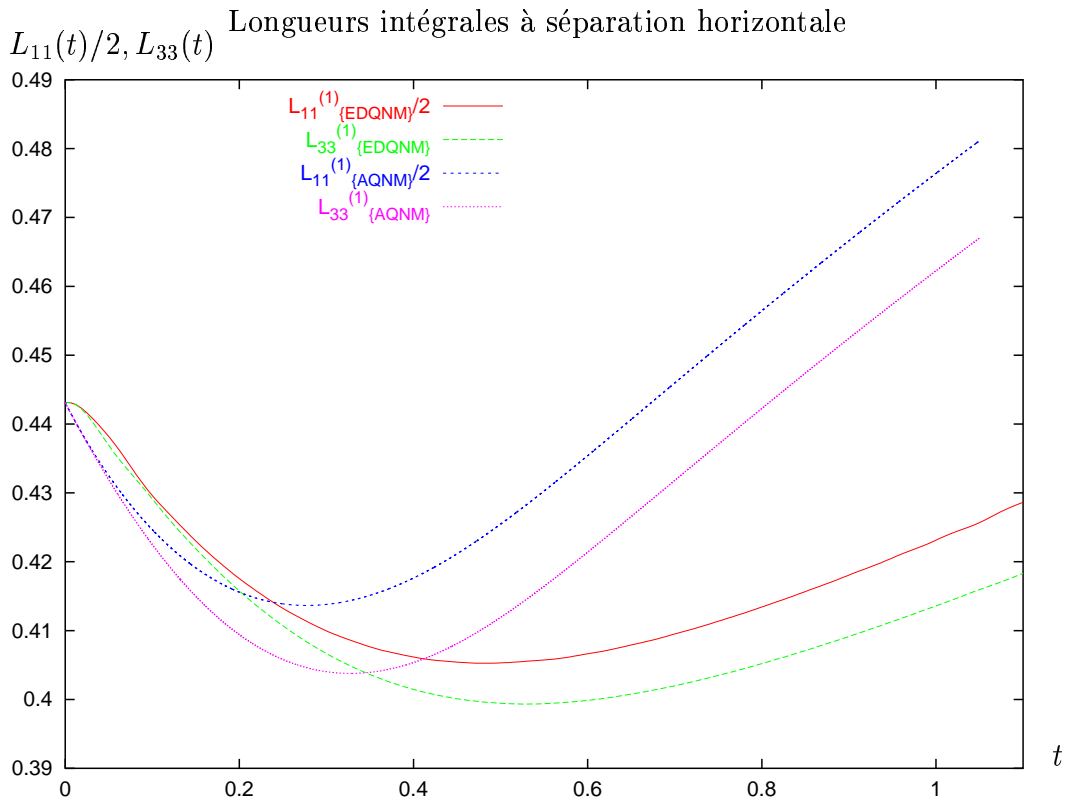


FIG. 7.34 – Évolution temporelle EDQNM et AQNM des longueurs intégrales dans les directions horizontale et verticale entre  $t_0 = 0$  et  $t_f = 3,05$ .

# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

En turbulence confinée sous l'effet d'une forte rotation, l'expérience montre l'organisation de l'écoulement en une colonne de Taylor, et donc la tendance à la bidimensionnalisation du champ de vitesse. Ce comportement trouve une première justification dans l'hypothèse quasi-géostrophique, qui implique la faible dépendance de la vitesse le long de  $\Omega$ , et donc que sa composante verticale est identiquement nulle du fait de la condition limite à la paroi. Cependant, l'effet linéaire de la force de Coriolis ne peut expliquer seul l'anisotropie d'un tel écoulement, et un couplage avec le transfert non linéaire doit être envisagé. Une approche possible est celle de la turbulence d'ondes, qui consiste à considérer la non linéarité comme un ensemble d'interactions entre ondes, l'adaptation d'une telle méthode à la turbulence en rotation étant remarquable. En effet, une perturbation périodique en temps, localisée dans l'espace, met en évidence l'existence des ondes inertielles, et leurs interactions sont éventuellement à l'origine de la formation de croix de Saint-André. Une fermeture triadique en deux points peut alors être envisagée, via par exemple le modèle EDQNM qui a prouvé sa robustesse dans le cas d'écoulements avec force extérieure.

Avec ce modèle, privilégiant dans le cas isotrope les triades de vecteurs d'ondes de somme nulle, la force de Coriolis fait ressentir ses effets non linéaires via un tenseur de Green. Moyennant des approximations s'appuyant sur la physique des phénomènes, le nouveau modèle EDQNM montre l'importance de surfaces particulières de l'espace spectral, correspondant aux triades résonantes sélectionnées par la rotation. Finalement, la bidimensionnalisation provient d'une dynamique plus complexe que celle des modes lents linéaires uniquement, telle que le suggérerait l'approche quasi-géostrophique. Dans le cas d'une rotation forte par rapport à la non linéarité, une analyse multi-échelles permet de se concentrer sur l'évolution asymptotique en temps des composantes du tenseur spectral, conduisant à un nouveau modèle baptisé AQNM. En se plaçant directement dans la phase de cascade non linéaire, la dynamique du problème s'avère être alors complètement déterminée par les interactions ondulatoires sur les seules surfaces résonantes. À partir d'une turbulence initialement isotrope, ne subsiste qu'une équation de type Lin pour l'énergie spectrale, dont la précision est grandement accrue par rapport au modèle EDQNM, et ne dépendant plus que d'un paramètre adimensionnel. L'implémentation numérique du modèle AQNM est plus délicate du fait de la complexité géométrique des surfaces résonantes, dont il faut évaluer des portions d'aire élémentaires. En particulier,

la discrétisation spatiale et les méthodes d'interpolation doivent être choisies avec soin, ce qui rend indispensable une étude extensive de stabilité et de convergence des schémas choisis.

Les résultats suivants ont été obtenus :

1. le spectre d'énergie intégré présente une loi très nette en  $k^{-3}$  dans la zone inertielle, ce qui pourrait être un signe de bidimensionnalisation de l'écoulement,
2. l'énergie totale turbulente décroît temporellement selon  $t^{-0,8}$ ,
3. l'énergie spectrale se concentre, au cours du temps, vers des vecteurs d'ondes de plus en plus horizontaux,
4. la dynamique des vecteurs horizontaux ne présente pas de loi en  $k^{-3}$  et se démarque de celle des autres vecteurs, non seulement en ce qui concerne les niveaux d'énergie, mais aussi par la présence d'une cascade inverse non négligeable,
5. le transfert et l'énergie angulaires montrent conjointement que les vecteurs d'ondes horizontaux sont privilégiés,
6. le tenseur de Reynolds et le paramètre de structure, ainsi que les longueurs intégrales, reflètent une plus grande cohérence verticale qu'horizontale, tout en restant relativement éloigné de la pure bidimensionnalité.

La comparaison avec les résultats provenant du modèle EDQNM corrobore, au moins qualitativement, toutes ces observations. L'ensemble de ces indicateurs laisse à penser que la turbulence, sans être véritablement confinée dans un plan, autorise les mouvements verticaux mais possède quand même une structuration verticale forte. Finalement, les résultats du modèle AQNM et ceux du modèle EDQNM volumique sont très cohérents. Ils sont aussi plus riches que prévu, puisque la loi en  $-3$  qui s'établit avec fiabilité sur le spectre d'énergie intégré sphériquement ne répercute pas directement une loi analogue pour la densité d'énergie dans le plan horizontal. Il s'avère en effet que la densité d'énergie compensée  $k^2 e(k, \theta, t)$  calculée par AQNM suit une loi plus proche de  $k^{-2}$  que de  $k^{-3}$  pour un angle  $\theta$  proche de  $\pi/2$ .

Beaucoup d'auteurs sont prêts à accepter que la contribution des modes horizontaux à la densité d'énergie devienne dominante, mais la notion même de transfert angulaire vers les modes lents ( $\cos\theta$  petit quand le nombre de Rossby est petit) de la part des modes rapides, est très controversée (Kaneda, Bartello, Rubinstein, communications privées). La complexité de la zone angulaire proche de  $\pi/2$  suggère naturellement un complément d'analyse et de calcul. A priori, les hypothèses de base du modèle AQNM, en particulier la séparation modes lents / modes rapides, tombent en défaut pour traiter en détail cette zone, que l'on pourrait appeler une couche limite quasi-bidimensionnelle. Une conséquence est que la limite analytique  $\theta = \pi/2$  du modèle AQNM – elle n'est pas traitée numériquement, mais le maillage angulaire est suffisamment fin pour s'en approcher aussi près que nécessaire – ressemble beaucoup à l'équation de Lin du modèle QNM bidimensionnel (sans amortissement tourbillonnaire). Toutefois, le terme de transfert contient toujours un facteur  $1/\Omega$ , qui devrait disparaître pour la turbulence purement bidimensionnelle, insensible au taux de rotation.

Il serait donc intéressant de redévelopper les équations EDQM3 dans la zone proche du plan horizontal, en utilisant la valeur principale des intégrales volumiques.

Le modèle AQNM garderait tout son intérêt pour fournir le flux d'énergie correct, provenant des modes rapides, à la frontière de cette zone. Cette dernière étape, que l'on peut espérer beaucoup moins difficile à mettre en œuvre que ce qui a déjà été réalisé pour l'intégration numérique du modèle AQNM, mettrait un point final à l'étude anisotrope de turbulence d'ondes en rotation rapide. Il faut aussi noter que l'anisotropie de polarisation, qui ne joue aucun rôle dans AQNM si elle est nulle initialement, redeviendrait importante dans la couche limite quasi-bidimensionnelle, avec une dynamique bien distincte pour  $e - Z$  (contribution horizontale) et  $e + Z$  (contribution verticale). Ces résultats sont suggérés par l'EDQNM2 et l'EDQNM3, des modèles caricaturaux (Cambon & Godeferd [8]) et même les résultats de Jacquín, Leuchter, Cambon & Mathieu [31] sur les deux composantes bidimensionnelles de l'énergie accessibles à la mesure. Une telle étude serait plus pertinente que les résultats analytiques suggérés par Zakharov [63], qui cherchent une dépendance de l'énergie en puissances de  $k_{\perp} = k \sin \theta$  et  $k_{\parallel} = k \cos \theta$  au voisinage de  $\theta = \pi/2$ , mais dans le même cadre d'hypothèses qu'AQNM (Rubinstein, communication privée, et Galtier [20]).

Enfin, le sujet proposé au début de cette thèse incluait également la turbulence en milieu stablement stratifié, et même éventuellement le couplage rotation et stratification stable. Une approche EDQNM2 a été aussi largement développée dans le cas de la stratification seule, avec des résultats convaincants sur les densités d'énergie anisotropes et les flux angulaires (Godeferd & Cambon [22], Godeferd & Staquet [58]). Il y a actuellement une prise de conscience de la communauté sur l'importance de l'anisotropie fine en turbulence stratifiée, et le fait que la structuration des champs de vitesse n'a rien à voir avec une bidimensionnalisation. La description anisotrope détaillée inclut aussi le spectre de variance de densité et des corrélations entre densité et vitesse, de sorte que la base de grandeurs spectrales pour développer les corrélations doubles en deux points est plus large que  $e$ ,  $z$  et  $h$ . Il est donc important de simplifier et expliquer les résultats des modèles EDQNM et des DNS, en essayant d'approcher des valeurs extrêmes des paramètres tels que les nombres de Froude et de Reynolds, et comme il a été fait en rotation. La différence essentielle avec la rotation pure est la coexistence de modes onde et d'un mode stationnaire (vortex vertical, vorticité potentielle linéarisée). Si on néglige dans un premier temps le mode stationnaire, les ondes de gravité ont des manifestations physiques très proches des ondes d'inertie, comme des croix de Saint-André, et un modèle de type AQNM peut conduire à quelques prédictions analytiques (Caillol & Zeitlin [6]). La résolution numérique de ce modèle AQNM à vortex nul n'a jamais été abordée et serait certainement aussi complexe que pour la rotation. Cependant, négliger le mode vortex est peu cohérent physiquement, et sa présence, par les conditions initiales ou le forçage, peut alors complètement changer la nature des transferts d'énergie dominants. Les résultats EDQNM suggèrent que les interactions volumiques vortex-vortex sont essentielles pour la structuration anisotrope, et font de la turbulence d'ondes de gravité un problème peu pertinent. En particulier, l'EDQNM et la DNS s'accordent sur la concentration de la densité spectrale d'énergie en direction des modes verticaux, qui forment les modes lents des ondes de gravité. La comparaison avec le cas en rotation pure s'arrête là, car ce dernier résultat est beaucoup plus sûrement et rapidement attribuable aux transferts volumiques des interactions vortex-vortex.





# Bibliographie

- [1] C. Bailly and G. Comte-Bellot. Turbulence. C. N. R. S. Éditions, Paris, 2003.
- [2] C. N. Baroud, B. B. Plapp, Z. S. She, and H. L. Swinney. Anomalous self-similarity in a turbulent rapidly rotating fluid. Physical Review Letters, 88(11), 2002.
- [3] G. Batchelor. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, Cambridge, 1953.
- [4] D. J. Benney and P. G. Saffman. Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium. Proc. Roy. Soc. London, A289 :301–320, 1966.
- [5] N. N. Bogoliubov and Y. A. Mitropolsky. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Gordon and Breach Science Publisher, 1985.
- [6] P. Caillol and V. Zeitlin. Kinetic equations and stationary energy spectre of weakly nonlinear internal gravity waves. Dyn. Atmos. Oceans, 32 :81–112, 2000.
- [7] C. Cambon, J.-P. Bertoglio, and D. Jeandel. Spectral closure for homogeneous turbulence. In AFOSR - Stanford conference on complex turbulent flows, 1981.
- [8] C. Cambon and F. S. Godeferd. Inertial transfers in freely decaying, rotating, stably stratified and MHD turbulence. In Progress in Astronautics and Aeronautics. H. Branover and Y. Unger, 1993.
- [9] C. Cambon and L. Jacquin. Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. J. Fluid Mech, 202 :295–317, 1989.
- [10] C. Cambon, N. N. Mansour, and F. S. Godeferd. Energy transfer in rotating turbulence. J. Fluid Mech., 337 :303–332, 1997.
- [11] C. Cambon and J. Scott. Linear and nonlinear models of anisotropic turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech., 31 :1–53, 1999.
- [12] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [13] J. R. Chasnov. Similarity states of passive scalar transport in isotropic turbulence. Phys. Fluids, 6(2) :1036–1051, 1994.
- [14] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. Simple eulerian time-correlation of full and narrow-band velocity signals in grid-generated isotropic turbulence. J. Fluid Mech., 48 :273–337, 1971.
- [15] N. G. de Bruijn. Asymptotic methods in analysis. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

- [16] A. Colin de Verdière. Quasi-geostrophic turbulence in a rotating homogeneous fluid. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 15 :213–251, 1980.
- [17] C. Fediaevski, I. Voïtkounski, and Y. Faddéev. Mécanique des fluides. Mir, Moscou, 1974.
- [18] U. Frisch. Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [19] W. Frost and T. Moulden. Handbook of Turbulence : fundamentals and applications, volume 1. Plenum Press, 1977.
- [20] S. Galtier. A weak inertial wave turbulence theory. *Physical Review E* (to be published), 2003.
- [21] F. S. Godeferd. Introduction d'une partition ondes-turbulence dans les modèles de transport pour les écoulements turbulents stablement stratifiés. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [22] F. S. Godeferd and C. Cambon. Detailed investigation of energy transfers in homogeneous stratified turbulence. Phys. Fluids, 6(6) :2084–2100, 1994.
- [23] F. S. Godeferd and L. Lollini. Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation. J. Fluid Mech., 393 :257–308, 1999.
- [24] H. Greenspan. The theory of rotating fluids. Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
- [25] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows : Fundamentals of numerical discretization, volume 1. John Wiley and sons, Chichester, 1988.
- [26] J. Hladik. Le calcul tensoriel en physique. Masson, Paris, 2ème edition, 1995.
- [27] E. J. Hopfinger, F. K. Browand, and Y. Gagne. Turbulence and waves in a rotating tank. J. Fluid Mech, 125 :505–534, 1982.
- [28] M. Hossain. Inverse cascades in incompressible fluid and magnetofluid turbulence. J. Plasma Physics, 56(3) :467–491, 1996.
- [29] J. C. Hunt and D. J. Carruthers. Rapid distortion theory and the problems of turbulence. J. Fluid Mech, 212 :497–532, 1990.
- [30] A. Ibbetson and D. J. Tritton. Experiments on turbulence in a rotating fluid. J. Fluid Mech., 68 :639–672, 1975.
- [31] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, and J. Mathieu. Homogeneous turbulence in the presence of rotation. J. Fluid Mech, 220 :1–52, 1990.
- [32] T. Karman and L. Howarth. On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Royal Soc. London, A164 :192–215, 1938.
- [33] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30 :299–303, 1941.
- [34] R. H. Kraichnan. The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers. J. Fluid Mech., 5(2) :497–543, 1958.
- [35] R. H. Kraichnan. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 10(7) :1417–1423, 1967.

- 
- [36] R. H. Kraichnan. Inertial-range transfer in two and three-dimensional turbulence. J. Fluid Mech., 47(3) :525–535, 1971.
- [37] L. Landau and E. Lifshitz. Fluid Mechanics. Pergamon, Pergamon, 1959.
- [38] M. J. Lighthill. Fourier Analysis and Generalized Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [39] L. Lollini. Ondes et turbulence dans un écoulement confiné en rotation. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1997.
- [40] J. L. Lumley and A. M. Yaglom. A century of turbulence. Flow, Turbulence and Combustion, 66 :241–286, 2001.
- [41] A. Mahalov and Y. Zhou. Analytical and phenomenological studies of rotating turbulence. Phys. Fluids, 8(8) :2138–2152, 1996.
- [42] E. Manoukian. Guide de statistique appliquée. Hermann, Paris, 1986.
- [43] J. Mathieu and J. Scott. An introduction to turbulent flows. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [44] M. Maurin. Polycopié de calcul des probabilités et statistique. École Centrale de Lyon, 1997.
- [45] A. D. McEwan. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. J. Fluid Mech., 40(3) :603–640, 1970.
- [46] A. Monin and A. Yaglom. Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence II. MIT Press, Cambridge, MA, 1975.
- [47] A. H. Nayfeh. Perturbation methods. John Wiley and Sons, 1973.
- [48] S. Orszag. Analytical theories of turbulence. J. Fluid Mech., 1970.
- [49] S. Orszag. Lectures on the statistical theory of turbulence. In Summer school of theoretical physics, Les Houches, France, July 1973.
- [50] S. B. Pope. Turbulent flows. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [51] A. Pouquet, M. Lesieur, J. C. André, and C. Basdevant. Evolution of high reynolds number two-dimensionnal turbulence. J. Fluid Mech., 72 :305–320, 1975.
- [52] V. Pugachev. Théorie des probabilités et statistiques mathématiques. Éditions Mir, Moscou, 1982.
- [53] M. Rieutord. Une introduction à la dynamique des fluides. Masson, Paris, 1997.
- [54] H. P. Robertson. The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Cambridge Phil. Soc., 36 :209–223, 1940.
- [55] R. Schiestel. Modélisation et simulation des écoulements turbulents. Hermès, Paris, 1993.
- [56] L. Smith and F. Waleffe. Transfer of energy to two-dimensionnal large scales in forced, rotating three-dimensionnal turbulence. Phys. Fluids, 11(6) :1608–1622, Juin 1999.
- [57] K. D. Squires, J. R. Chasnov, N. N. Mansour, and C. Cambon. The asymptotic state of rotating homogeneous turbulence at high reynolds number. In Application of Direct and Large Eddy Simulation to transition and turbulence, Chania, Crete, Greece, April 1994.

- [58] C. Staquet and F. S. Godeferd. Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. part 1. flow energetics. J. Fluid Mech., 360 :295–340, 1998.
- [59] G. I. Taylor and G. K. Batchelor. The scientific papers of Sir G. I. Taylor, volume IV. Cambridge University Press, Cambridge, 1971.
- [60] A. A. Townsend. The uniform distortion of homogeneous turbulence. Q. J. Mech. Appl. Maths, 7 :706–727, 1954.
- [61] D. Tritton. Physical Fluid Dynamics. Van Nostrand Reinhold, London, second edition, 1977.
- [62] D. C. Wilcox. Perturbation methods in the computer age. D. C. W. Industries Inc., La Canada, 1995.
- [63] V.E. Zakharov, V. Lvov, and G. Falkovich. Wave turbulence. Springer-Verlag, New-York, 1992.



# Résumé

Il s'agit de déterminer l'influence d'une rotation solide sur la structure de la turbulence homogène incompressible. Les résultats du modèle spectral EDQNM étant probants en turbulence purement isotrope, la discrétisation spatiale devient un facteur limitant dans le cas anisotrope. Dans le cas où le nombre de Rossby est faible, un développement asymptotique en temps est possible. Le rôle joué par les surfaces résonantes étant dominant, le nouveau modèle conduit à une équation intégrodifférentielle fermée pour l'énergie spectrale. Par un traitement numérique précis, un code parallélisé donne des résultats quantitatifs. Il apparaît que l'énergie se concentre avec le temps vers le plan perpendiculaire au vecteur rotation. De plus, le spectre intégré suit une loi de pente -3 dans la zone inertielle, sans que cela soit dû aux seuls vecteurs d'ondes horizontaux. Il n'y a donc pas de vraie bidimensionnalisation, mais les vecteurs proches du plan horizontal ont une dynamique spécifique.

# Abstract

The objective of this work is the description of the influence of a solid-body rotation on the structure of incompressible homogeneous turbulence. The results from the EDQNM spectral model are accurate in purely isotropic turbulence, but the spatial discretization becomes limiting in the anisotropic case. If the Rossby number is small, an asymptotic development in time is possible. The role played by the resonant surfaces being dominant, the new model leads to a closed integro-differential equation for the spectral kinetic energy. By a precise numerical treatment, a parallelized program gives quantitative results. The energy seems indeed to concentrate with time towards the plane perpendicular to the rotation vector. Moreover, the integrated spectra follows, in the inertial zone, a -3 slope law, resulting from the whole range of vectors. Therefore, there is no true two-dimensional structure, but the vectors that are close to the horizontal plane have a specific dynamical behavior.