Aspects des fonctions elliptiques.

Solutions périodiques d'équations différentielles.

Métriques pseudo-cylindriques. Problèmes isopérimètriques plans

Raouf Chouikha

UNIVERSITE DE ROUEN

Mémoire présenté en vue de

L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

par

A. Raouf CHOUIKHA

Aspects des fonctions elliptiques.
Solutions périodiques d'équations différentielles.
Métriques pseudo-cylindriques.
Problèmes isopérimètriques plans

soutenue le 17 octobre 2003 devant le jury composé des professeurs :

M. Claude DELLACHERIE	Président
M. Amédée DEBIARD	Invité
M. Miklos FARKAS	Rapporteur
M. Roberto FERNANDEZ	
M. Peter GREINER	Rapporteur
M. Jean-Marie STRELCYN	

REMERCIEMENTS

J'exprime tout d'abord ma reconnaissance à Amédée Debiard et à Jean-Marie Strelcyn.
Amédée Debiard a manifesté de l'intérêt pour mes activités de recherche dès mon arrivée à l'Université Paris 13 et m'a toujours soutenu et encouragé.
J'ai eu la chance de travailler avec Jean-Marie Strelcyn. Les discussions et les intérêts scientifiques que nous avons partagés m'ont été très utiles et source d'une collaboration fructueuse. Qu'il soit remercié également pour avoir assuré la présentation de cette habilitation et pour tout le temps passé à sa préparation.

Je suis très honoré de l'intérêt que Claude Dellacherie a manifesté pour mes travaux, et je le remercie sincèrement d'avoir accepté de participer à ce jury et d'en assurer aujourd'hui sa présidence.

Je remercie vivement Miklos Farkas de l'Université technique de Budapest, Stefano Marchiafava de l'Université de Rome "La sapienza" et Peter Greiner de l'Université de Toronto pour la lecture détaillée de mes contributions et les rapports qu'ils ont acceptés d'écrire.
Je suis reconnaissant à Miklos Farkas et à Peter Greiner de s'être déplacé spécialement à Rouen pour participer à ce jury.

Je remercie également Marcel Berger, Amédée Debiard, Claude Dellacherie et Jean-Marie Strelcyn pour la lecture attentive et critique de mes travaux et les rapports qu'ils ont bien voulus rédiger.

Roberto Fernandez me fait un grand plaisir et m'honore en participant à ce jury.

Un grand merci pour le Laboratoire Raphaël Salem de l'Université de Rouen pour son hospitalité, la chaleur de son accueil et la gentillesse de ses sécrétaires : Catherine Bourdon et Marguerite Losada.

Merci enfin à mes camarades et collègues du Laboratoire de mathématiques de Paris 13, ainsi qu'à ceux de l'UFR de sciences économiques et de gestion pour leur bonne humeur et, grâce à qui règne une ambiance studieuse et conviviale.

Sans oublier tous les mathématiciens que j'ai eu le plaisir de rencontrer ou avec lesquels j'ai pu communiquer, échanger et discuter : Ravi P. Agarwal, Daniel Battig, Vladimir Balan, Bruce Berndt, Carmen Chicone, Colin Christopher, Shaun Cooper, Harold S.M. Coxeter, Andrzej Derdzinski, Sharief Desmukh, Georges F.D. Duff, Demeter Krupka, Serge Lang, Anatolii A. Martynyuk, Ivailo Mladenov, Franck Pacard, Jean-Pierre Serre, Abdoollah Shidfar, Mohsen Timoumi, Michel Waldschmidt.
J'ai peut-être omis de citer certains...qu'ils ne m'en veuillent pas.

Table des matières

Première partie

Présentation des travaux de recherches

1 Résumé des travaux

Le résumé des travaux de recherche qu'on propose de présenter se compose de quatre parties [1].

* Dans la première, on examine les propriétés de la fonction elliptique $\wp(z, \omega, \omega')$ de Weierstrass et les fonctions $\theta(v, \tau)$ classiques, à la lumière d'un nouveau développement trigonométrique. On détermine explicitement les coefficients en fonction de τ, qui sont en fait des fonctions hypergéométriques. *[P1], [P6].*
Cela permet en particulier une nouvelle construction de la théorie des fonctions elliptiques et de retrouver certaines propriétés. Notamment, celle concernant la fonction zeta de Jacobi $Zn(z, k)$. Aussi, on met en évidence des relations modulaires entre ces coefficients. *[P7], [P19], [P22].*

* Dans la deuxième partie, on s'intéresse aux solutions périodiques de certaines équations différentielles ordinaires et, plus précisèment à la croissance de la fonction période dépendant de l'énergie et, aux conditions de sa monotonie. Nous mettons en évidence une nouvelle condition suffisante. *[P5].* On montre en particulier que tous les critères connus - à savoir ceux de Chow, Schaaf Chicone et Rothe - ne sont pas optimaux. *[P8].*
On s'intéresse aussi à la monotonie de la période du système de Liénard avec un centre à l'origine.On donne en particulier une preuve plus simple d'un résultat de Christopher et Devlin. *[T30]* En utilisant des séries trigonométriques, on montre l'existence de solutions périodiques pour une équation de type Duffing perturbée. *[P10], [P12].*
Enfin, on utilise avec succès une méthode de Farkas concernant la controllabilité de la période pour montrer l'existence d'une solution périodique de l'équation de Liénard perturbée. *[P13]* .

[1] Les références sont celles de la liste des publications.

* Dans la troisième partie, nous mettons en évidence les propriétés des courbures riemannienne et de Ricci de certaines métriques à courbure scalaire constante positive, ainsi que leurs singularités. *[P3], [P4].*
Ces métriques en nombre fini sont appelées pseudo-cylindriques. De plus, elles ont une courbure harmonique et une courbure de Ricci non paralléle, et sont solutions du problème de Yamabe singulier sur la sphère standard privée de deux points $S^n - \{p_1, p_2\}$. On examine aussi leurs propriétés asymptotiques. De plus, pour certaines valeurs de $n = 3, 4$ ou 6 on peut déterminer ces métriques explicitement. On s'intéresse aussi au problème d'existence de métriques tordues de A. Derdzinski. *[P11], [P15].*

* Enfin, dans la dernière partie, on considère des inégalités isopérimètriques de type Bonnesen en rapport avec des conjectures de P. Lévy et de X.M. Zhang sur des polygones plans. Nous proposons en particulier une conjecture plus générale. *[P2], [P9], [P18].*

2 Articles présentés dans ce mémoire

2.1 Les fonctions elliptiques

[P1][2] *Nouveau développement de fonctions elliptiques* C.R. Acad. Sci., Paris, t. 306, p.655-658, 1988

[P22] *Sur des développements de fonctions elliptiques* Publ. Math., Fac. des Sci. de Besançon. Fasc. Th. des nombres (8), 1989

[P6] *Fonctions elliptiques et bifurcations de certaines équations différentielles* Canadian Bull. of Math., vol 40 (3), p.276-284, 1997

[P7] *On the Expansions of Elliptic Functions and Applications* C.R.M. Proc. and Lectures Notes of A.M.S., vol 22, n 1, p.53-57, 1998.

[P19] *Note on Trigonometric Expansions of Theta functions* J. of Comput. and Appl. math., vol 153, p. 119-125, 2003.

[T34] Trigonometric expansions of theta functions prépublication, Villetaneuse 2003

2.2 Solutions périodiques d' équations différentielles

[P5] *Monotonicity properties of the period function for some planar Hamiltonian systems* (Avec A. Kelfa) Comm. on Appl. Nonlin. Anal., vol 4, (3), p.99-120, 1996.

[P8] *Remarks on the monotonicity of the period function* (avec F. Cuvelier) Applicationes Math., vol 26, n. 3, p. 243-252, 1999.

[P10] *Remark on Periodic Solutions of Non Linear Oscillators* Applied Math. Lett., vol 14, n 8, p. 363-368, 2001.

[P12] *Periodic Perturbations of Non-Conservative Second Order Differential Equations* Electr. J. of Qualitat. Theory of Diff. Eq., No 4, p.1-12, 2002.

[T30] *On the monotonicity of the period function for Lienard systems* prépublication, Villetaneuse 2003.

2.3 Métriques pseudo-cylindriques

[P3] *Métriques conformèment plates et Equations de Yang-Mills*
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIII, p.7-12, 1991

[2] voir la liste complète des publications dans la partie 5

[P4] *Famille de métriques conformèment plates et régularité*
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIV, p.257-262, 1992

[P15] *On the properties of certain metrics with constant scalar curvature* Diff. Geom. and Appl., DGA 98. Sat. Conf. of the I C M in Berlin, 1998. Brno, Masaryk Univ., p.39-46, (1999).

[P11] *Non Parallelism of Ricci tensor of Pseudo-cylindric Metrics* Geometria Dedicata, vol 93, p.107-112, 2002 .

[P16] - Existence of Metrics with Harmonic Curvature and non Parallel Ricci Tensor To appear in Balk. J. of Geom and Appl. Vol 8, (2003).

2.4 Inégalités de type Bonnesen dans le plan

[P2] *Problèmes de Paul Lévy sur les polygones articulés*
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol X, p.175-180, 1988

[P9] *Problems on polygons and Bonnesen type inequalities* Indagationes Math., vol 10, n. 4, p.495-506, 1999.

[P18] *On the Bonnesen-Type Inequalities* in Symbolic Computation : New Horizons. Proc of the Fourth Intern Math. Symp., IMS'2001, Tokyo (Japan).Y. Tazawa, S. Sakakibara, S. Ohashi, Y. Uemura.Tokyo Denki Univ. Press, p.213-222, 2001.

Deuxième partie

Aspects des fonctions elliptiques

Articles présentés

[P1] *Nouveau développement de fonctions elliptiques* C.R. Acad. Sci., Paris, t. 306, p.655-658, 1988

[P22] *Sur des développements de fonctions elliptiques* Publ. Math., Fac. des Sci. de Besançon. Fasc. Th. des nombres (8), 1989

[P6] *Fonctions elliptiques et bifurcations de certaines équations différentielles* Canadian Bull. of Math., vol 40 (3), p.276-284, 1997

[P7] *On the Expansions of Elliptic Functions and Applications* C.R.M. Proc. and Lectures Notes of A.M.S., vol 22, n 1, p.53-57, (1998)

[P19] *Note on Trigonometric Expansions of Theta functions* J. of Comput. and Appl. math., vol 153, p.119-125, 2003 .

[T34] *Trigonometric Expansions of Theta Functions* Prepublication, Villetaneuse, 2003 .

3 Les développements trigonométriques classiques

Une fonction elliptique est une fonction méromorphe dans le plan complexe, admettant deux périodes primitives, soit $2\omega,\ 2\omega'$. Celles-ci sont telles que la partie imaginaire du rapport $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ soit strictement positive : $\mathcal{I}m\tau > 0$. On notera $L = [2\omega, 2\omega']$ le réseau des périodes.

On sait que toute fonction elliptique peut s'exprimer au moyen de fonctions elliptiques élémentaires, telle la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass. En effet, celle-ci peut s'écrire comme fonction rationnelle de $\wp(z)$ et de sa dérivée $\wp'(z)$.
De plus, cette fonction peut s'exprimer sous forme de développements en séries trigonométriques divers, appelés $q-$développements, voir Lang [L].

On sait que ces développements ont permis de mettre en évidence de nouvelles propriétés arithmétiques et modulaires.

Par une intégration directe d'une équation différentielle ordinaire, nous montrons que la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass peut s'écrire sous forme d'une nouvelle série trigonométrique.

Les résultats sont présentés dans le paragraphe 2, après une brève introduction.
Nous tenons à préciser cependant, le développement que nous mettons en évidence dans cette partie semble n'avoir pas été connu auparavant, bien que la littérature sur ces questions était très abondante au début du siècle précédent. Pour cela, on a consulté les oeuvres de C. Hermite, E. Picard, H. Weber et d'autres. De plus, une des principales références encyclopédiques de cette période n'en fait aucune allusion à ce type de développement trigonométrique.[3].
Rappelons brièvement quelques propriétés essentielles de cette fonction qui seront utiles pour la suite de l'exposé.

[3] *Enclyclopadie der mathematischen Wissenschaften, tome II, Teubner, Leipzig, 1924*

4 Fonction $\wp(z)$ de Weierstrass

La fonction de Weierstrass $\wp(z) = \wp(z;\omega,\omega')$ est une fonction elliptique de réseau L qui est d'ordre deux. Elle a un double pole en $z = 0$ et $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ est analytique dans un voisinage de $z = 0$. Celle-ci peut s'écrire

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L} \frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \tag{1}$$

dont le développement de Laurent est

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + ...$$

où les paramètres g_2, g_3 sont uniquement déterminés par les périodes.
En calculant les dérivées de cette fonction, on trouve les relations suivantes :

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \tag{2}$$

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

où $e_1 = \wp(\omega)$, $e_2 = \wp(\omega + \omega')$ et $e_3 = \wp(\omega')$.

Notons que la fonction de Weierstrass admet une période réelle seulement si

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$$

En dérivant (2), on obtient l'équation différentielle du second ordre :

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{g_2}{2}.$$

4.1 Action du groupe modulaire

Considèrons $\Gamma(1)$ le groupe modulaire de transformations des périodes, engendré par S et T, ẹfinis par

$$S : (\omega, \omega') \to (\omega, \omega + \omega') \qquad et \qquad T : (\omega, \omega') \to (\omega', \omega).$$

Rappelons que, toute transformation du premier ordre qui laisse le réseau L invariant, fait permuter les e_i, $i = 1, 2, 3$, zéros de $\wp'(z)$. Mais les paramètres g_2 et g_3, fonctions symétriques des e_i, demeurent invariants. Ainsi, le développement (1) de $\wp(z)$ ne varie pas sous l'action de $\Gamma(1)$.

Les développements que nous décrirons plus loin subissent l'action d'une transformation modulaire non triviale, du fait que les coefficients dépendent des e_i ; $i = 1, 2, 3$.

Considérons aussi des tranformations du première ordre

$$U : (\omega, \omega') \to (\omega + \omega', \omega') \qquad ; \qquad V : (\omega, \omega') \to (-\omega + \omega', -\omega)$$

$$et \qquad W : (\omega, \omega') \to (\omega', -\omega - \omega')$$

celles-ci engendrent un sous-groupe de $\Gamma(1)$, et peuvent s'exprimer en termes de S et T.

Notons par ailleurs, que le théorème d'addition de $\wp(z)$ peut s'écrire de plusieurs manières, l'une d'entre elles est :

$$\wp(z + \omega') = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(z) - e_3}. \tag{3}$$

4.2 Les développements classiques

Considèrons maintenant $u(z)$ une fonction complexe définie sur un ouvert de $\mathcal{C}$, solution de l'équation différentielle :

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 = 4u^3 - au - b \qquad a, b \in \mathcal{C}. \tag{4}$$

Alors, celle-ci peut s'écrire $u(z) = \wp(z + c)$ où $\wp$ est la fonction de Weierstrass et, c une constante complexe définie par les conditions initiales sur u. Le réseau associé étant $L = \{2m\omega + 2m'\omega' \ ; \ m, m' \in Z\}$ avec $a = g_2(L)$ et $b = g_3(L)$.

Utilisons la terminilogie classique (Valiron [V]), soit la fonction loxodromique $\rho(z) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{q^n z}{(z-q^n)^2}$, de multiplicateur $q = e^{i\pi \frac{\omega'}{\omega}}$. Celle-ci vérifie l'égalité $\rho(z) = \rho(1/z)$ et la fonction $\eta(z) = \rho(z) + (1/12) - 2\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{n}{q^n - 1}$ est solution de l'équation différentielle

$$z^2(\eta'(z))^2 = 4(\eta(z))^3 - a(\eta(z)) - b, \tag{5}$$

d'où la relation $\eta(z) = -(\omega/\pi)^2 \wp(x)$ avec $z = \exp(i\pi x/\omega)$; 2ω et $2\omega'$ étant les deux périodes (voir Valiron [V], pour plus de détails). Or ces séries sont absolument convergentes dans la couronne $\mid q \mid < \mid z \mid < \mid q^{-1} \mid$.

Aussi, sans nuire à la généralité, et compte tenu de l'homogénéité de cette fonction, on peut prendre $L = [1, \tau]$.
Ecrivons alors :

$$q = e^{i\pi\tau}.$$

Auquel cas, à partir de l'expression de $\eta(z)$, on obtient des q-expansions pour la fonction de Weierstrass (voir Whittaker-Watson [W-W] ou Lang [L]).

La fonction de Weierstrass peut alors s'exprimer sous la forme suivante appelée par Lang [L], **la première $q-$expansion de la fonction** $\wp(z)$:

$$\frac{1}{4\pi^2}\wp(z; 1, \tau) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{\sin^2 \pi z} + \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} nq^{2mn} 2(1 - \cos n\pi z). \tag{6}$$

Cette série est définie dans la bande $\mid q \mid < e^{i\pi x} < \frac{1}{|q|}$, et pour $\mathcal{I}m\tau > 0$, on a : $\mid q \mid < 1$.
Remarquons qu'à part $\frac{1}{12}$, tous les coefficients de cette série sont des entiers.

On obtient aussi **l'expression de la deuxième $q-$expansion de la fonction** $\wp(z)$

$$\frac{1}{4\pi^2}\wp(z; 1, \tau) = -\frac{1}{12} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4\sin^2 \pi(\frac{z}{2} + n\tau)} \tag{7}$$

Il est connu que cette expression est définie pour tout $z \in \mathcal{C}$, pour un τ fixé.
Rappelons aussi que cette deuxième $q-$expansion définit un isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres complexes sur les points complexes de la courbe elliptique correspondante, celle précisèment paramétrée par $(\wp(z, 1, \tau), \wp'(z, 1, \tau))$.

Par ailleurs, on a aussi le développement en séries de Fourier classique de $\wp(z)$ qui peut être aussi obtenu à partir des expressions précédentes (voir Fricke [F])

$$\frac{1}{4\pi^2}\wp(z + \tau; 1, \tau) = -\frac{1}{12} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n nq^n}{1 - q^{2n}} \cos n\pi z \tag{8}$$

5 Un nouveau développement

Considèrons l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} + u^2 - u + \alpha = 0 \\ u(0) = 1 + s \\ \frac{du}{dx}(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

où α et s sont des constantes réelles.

Les solutions dépendent de deux paramètres, à savoir α *et* s. Sous certaines hypothèses sur ces paramètres, l'équation différentielle (8) admet une famille de solutions réelles périodiques, dont la période 2ω dépend de manière évidente de α *et* s.
L'analyse de cette équation montre qu'elle a un centre correspondant à la solution triviale $u_{0,0} = 1$ pour les valeurs des paramètres $\alpha = 0$ *et* $s = 0$. Ce centre est entouré par des orbites fermées. Ainsi, pour α et s voisins de 0, $u_{\alpha,s}$ est une solution périodique de l'équation (9).

On s'intéresse aux solutions 2ω-periodiques réelles s'exprimant sous la forme trigonométrique suivante

$$u(x) = 1 + s + \sum_{p\geq 1} a_{2p}(\sin\frac{\pi x}{2\omega})^{2p}, \tag{10}$$

et à la convergence de cette série. Lorsque les coefficients a_{2p} satisfont certaines conditions de recurrence, et pour x tel que $\mid \sin\frac{\pi x}{2\omega} \mid \leq c \leq 1$, une telle série peut converger absolument. D'une manière plus précise, on obtient le résultat suivant (voir [P6])

Theorem (1-1) :
Supposons que les coefficients a_{2p} *vérifient la condition de récurrence suivante*

$$(\frac{\pi}{2\omega})^2[(2p+2)(2p+1)a_{2p+2} - 4p^2a_{2p}] + (2s+1)a_{2p} + \sum_{0<r<p} a_{2r}a_{2p-2r} = 0 \tag{11}$$

où $a_0 = 1 + s$ *et* α, s *satisfont la condition :*

$$0 < g(\alpha, s) = 2(1+s)^2(2s-1) + 12\alpha(1+s) < 2.$$

Alors toutes les solutions réelles 2ω*-périodiques de l'équation (9) peuvent s'exprimer sous la forme*

$$u_{\alpha,s}(x) = 1 + s + \sum_{p\geq 1} a_{2p}(\sin\frac{\pi x}{2\omega})^{2p}$$

La convergence de la série $u_{\alpha,s}(x)$ est une conséquence du lemme suivant (voir [P6])

Lemme (1-2) - *Sous les conditions du théorème (1-1), pour tout réel* ϵ *vérifiant* $0 < \epsilon \leq 1/6,$ *il existe 3 constantes* k, s_0 *et* α_0 *de façon que les coefficients du développement d'une solution* $u_{\alpha,s}(x)$ 2ω*-périodique satisfont l'estimation :*

$$\mid a_{2p} \mid < \frac{k}{p^{3/2-\epsilon}} \quad \textit{pour tout entier } p \geq 1$$

avec $0 < s < s_0$ et $\mid \alpha \mid < \alpha_0$.

Par conséquent, on déduit de ce lemme que $\sum_{p>0} \mid a_{2p} \mid < +\infty$, et une solution 2ω-périodique de l'équation (9) peut s'exprimer sous la forme $u(x) = 1 + s + \sum_{p\geq 1} a_{2p}(\sin \frac{\pi x}{2\omega})^{2p}$.

Remarquons par ailleurs, que l'équation (9) peut être intégrée entièrement au moyen de la fonction de Weierstrass, de réseau $L = [2\omega, 2\omega']$. En effet, une telle solution peut s'écrire

$$u(x) = \frac{1}{2} - 6\wp(x + x_0; \omega, \omega').$$

Les constantes g_2 and g_3 associées à $\wp$ sont précisèment :

$$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{\alpha}{3} \qquad \textit{et} \qquad g_3 = \frac{1}{6^3}[1 - g(\alpha, s)].$$

On a de plus :

$$e_3 = -\frac{1 + 2s}{12} \qquad \textit{et} \qquad \Delta = \frac{1}{12^3} g(\alpha, s)[2 - g(\alpha, s)].$$

La condition $\Delta > 0$ implique que l'une des deux périodes est nécessairement réelle (soit ω), c'est à dire que $\wp(z)$ est elliptique réelle.

Du fait que $u(x) = \frac{1}{2} - 6\wp(x + x_0; \omega, \omega')$ et compte tenu des conditions initiales, on montre que nécessairememnt $x_0 = \omega'$ (la demi-période imaginaire pure), car $u(0) = \frac{1}{2} - 6\wp(x_0) = 1 + s$.

Donc $e_3 = \wp(x_0)$ d'où les expressions

$$e_2 = \wp(x_0 + \omega) = -\frac{1}{12}[1 + 2s + 2\sum_{p\geq 1} a_{2p}],$$

$$e_1 = \wp(x + \omega + \omega') = -\frac{1}{12}[1 + 2s + 2\sum_{p\geq 1} a_{2p}(\cosh \pi\tau)^{2p}]$$

On peut déduire en particulier l'expression suivante, qui est en fait un nouveau développement

$$\wp(x + \omega') = \frac{1}{12} - \frac{s}{6} - \frac{1}{6}\sum_{p\geq 1} a_{2p}(\sin\frac{\pi x}{2\omega})^{2p}.$$

Ce résultat se généralise sans peine au cas où la fonction $\wp(z)$ est elliptique complexe (cas où ω et ω' ne sont pas des réels purs)

6 Quelques propriétés des fonctions elliptiques

Notons que le théorème (1-1) permet en particulier une nouvelle construction de la théorie des fonctions elliptiques à travers les solutions de l'équation (9) puisqu'elles peuvent toutes s'exprimer sous la forme (10).
L'intérêt de cette méthode est de mettre en évidence une approche différente qui permet pour l'instant de retrouver une partie des propriétés connues de la fonction $\wp(z)$ de Weierstrass. On peut cependant signaler quelques conséquences de notre résultat.

6.1 Développement en série de Fourier

On peut déduire du théorème (1-1) le développement en série de Fourier (8) de la fonction $\wp(z+\omega')$, voir Fricke [F] et Weber [W]. En effet :

Corollaire (1-3) :
La fonction $\wp(z;\omega,\omega')$ *de Weierstrass relative au réseau* $L = [2\omega, 2\omega']$, *peut s'écrire sous la forme*

$$\wp(z+\omega') = \sum_{n\geq 0} \beta_{2n} \cos 2nx \quad o \quad x = \frac{\pi z}{\omega},\ \beta_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2n}{(q^n - q^{-n})}$$

Les coefficients de Fourier sont donnés par les relations

$$\beta_0 = \sum_{p\geq 0} \frac{a_{2p}}{2^p} \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \quad et \quad \beta_{2n} = (-1)^n \sum_{p\geq n} \frac{a_{2p}}{2^{2p-1}} \begin{pmatrix} p-n \\ 2p \end{pmatrix}.$$

Remarque sur les coefficients
Notons que les coefficients de Fourier vérifient l'estimation $\mid \beta_{2n} \mid \leq \dfrac{k'}{(2n)^{2-\epsilon}}$ (où $k' = (\dfrac{2k}{\sqrt{\pi}}) \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(2n)^{2-\epsilon}}$, k étant la constante établie par le lemme (1-2)).
Cela résulte d'abord du lemme (1-2) qui établit une estimation sur les coefficients a_{2p} et du fait que

$$\begin{pmatrix} p-n \\ 2p \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} p \\ 2p \end{pmatrix} \sim \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}$$

pour $n \leq p$ assez grand (cette inégalité découle d'une propriété de la fonction Gamma, à savoir $\Gamma(p+n+1)\Gamma(p-n+1) \geq \Gamma^2(p+1)$ pour tout $n \geq 0$.

Autre conséquence

Corollaire (1-4)
La fonction de Weierstrass $\wp(z;\omega,\omega')$ relative à g_2 et g_3, peut s'écrire sous la forme

$$\wp(z+\omega') = e_3 - \sum_{p\geq 1} a_{2p}(e_3)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p} \tag{12}$$

où z est tel que $|\sin\frac{\pi z}{2\omega}| \leq c \leq 1$, et $a_2(e_3) = (\frac{\omega}{\pi})^2(g_2 - 12{e_3}^2)$, $e_3 = \wp(\omega')$ les autres coefficients vérifiant la condition de récurrence

$$(\frac{\pi}{2\omega})^2[(2p+2)(2p+1)a_{2p+2} - 4p^2 a_{2p}] - 12e_3 a_{2p} + \sum_{0<r<p} a_{2r}a_{2p-2r} = 0 \tag{13}$$

Remarquons que si $\frac{\omega}{\pi}$ est rationel, alors tous les coefficients a_{2p} sont rationels.

Aussi, grâce au théorème d'addition, on obtient l'expression suivante

$$\wp(z) = e_3 - \frac{\pi^2 a_2(e_3)}{(2\omega)^2 \sum_{p\geq 1} a_{2p}(e_3)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p}} \tag{14}$$

et par permutation des e_i on obtient deux autres expressions analogues.

6.2 Homogénéité des coefficients

a)- De manière plus précise, on peut écrire pour tout $p \geq 1$, $a_{2p} = a_2 b_{2p}$. Lorsque ω est réel, on peut montrer aussi que les coefficients b_{2p} sont réels, dépendant seulement du rapport $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$: $b_{2p}(\omega,\omega') = b_{2p}(\tau)$. Ce sont des polynomes en e_3 de degré $p-1$, mais ne sont pas des fonctions modulaires. Ainsi de (14), on peut déduire l'expression

$$\wp(z) = e_3 - \frac{\pi^2}{(2\omega)^2 \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_3)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p}}.$$

Calculons les premières valeurs

$$b_2 = 1 \quad ; \quad b_4 = \frac{1}{3} + (\frac{2\omega}{\pi})^2 e_3 \quad ; \quad b_6 = [\frac{8}{15} + \frac{2}{5}(\frac{2\omega}{\pi})^2 e_3]b_4 - \frac{1}{5}(\frac{2\omega}{\pi})^2 a_2 \quad ,\ldots$$

b)- Notons que le coefficient a_2 peut aussi s'écrire

$$(\frac{2\omega}{\pi})^{-2} a_2^{-1} = \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_3)(\sin\frac{\pi x}{2\omega})^{2p} \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_3)[\sin(\frac{\pi x}{2\omega} + \frac{\pi\tau}{2})]^{2p},$$

c)- Par ailleurs, en considèrant les transformations modulaires, on peut établir des relations entre les différents coefficients b_{2p}. Par exemple, l'action de la transformation T donne les expressions suivantes

$$b_{2p}(\tau+1) = (-1)^p \frac{a_2(e_2)}{a_2(e_3)} \sum_{k\geq p} C_k^p b_{2k}(\tau) \quad ou \quad a_{2p}(\tau+1) = (-1)^p \sum_{k\geq p} C_k^p a_{2k}(\tau). \tag{15}$$

On peut ainsi déduire par notre méthode, au moyen des transformations de premier ordre du groupe modulaire, 3 développements différents de la fonction $\wp(z)$ du même type que (12) ou (14), à savoir :

$$\wp(z) = e_3 - \frac{\pi^2}{(2\omega)^2 \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_3)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p}},$$

$$\wp(z) = e_2 - \frac{\pi^2}{(2\omega)^2 \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_2)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p}},$$

$$\wp(z) = e_1 - \frac{\pi^2}{(2\omega')^2 \sum_{p\geq 1} b_{2p}(e_1)(\sin\frac{\pi z}{2\omega})^{2p}}.$$

Avec

$$b_2 = 1 \quad ; \quad b_4(e_i) = \frac{1}{3} + (\frac{2\omega_i}{\pi})^2 e_i \quad ; \quad b_6(e_i) = [\frac{8}{15} + \frac{2}{5}(\frac{2\omega_i}{\pi})^2 e_i] b_4(e_i) - \frac{1}{5}(\frac{2\omega_i}{\pi})^2 a_2 \quad , \ldots$$

où $\omega_i = \omega$ si $i = 1, 2$ et $\omega_3 = \omega'$.

d)- Ce coefficient a_2 qui semble jouer un rôle central dans ces développements peut aussi s'exprimer en termes des fonctions U_i; $i = 1, 2, 3$ de C. Jordan [J], paragraphe 403. Ces dernières ont des propriétés modulaires intéressantes du même type que les $\theta_i(0, \tau)$. Nous trouvons les relations suivantes

$$a_2(e_3) = (\frac{2\omega}{\pi})^2 \frac{1}{U_3^4} \qquad et \qquad {U_i}^4 = -\sum_p \frac{a_{2p}(e_i)}{2^p}.$$

7 Les fonctions théta de Jacobi

Considèrons les expressions trigonométriques des quatre fonctions théta functions $\theta_j(v,\tau)$; $j=1,2,3,4$, et leur produit infini. Rappelons en particulier, le développement en série de Fourier

$$\theta_4(v,\tau)=\theta_4(0,\tau)exp[4\sum_{n\geq 1}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\frac{(\sin n\pi v)^2}{n}]. \tag{16}$$

Notons que $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ et $v=\frac{z}{2\omega}$.
A partir de la relation entre $\wp(z;\omega,\omega')$ et la dérivée seconde de la fonction théta

$$\wp(z)=(\frac{1}{2\omega})^2[-4\eta\omega-\frac{d^2log\theta(v)}{dv^2}]$$

On obtient le résultat suivant

Theorem (1-6)
Supposons que les coefficients c_{2p} *satisfont la relation de récurrence*

$$(2p+2)(2p+1)c_{2p+2}(\tau)-4p^2c_{2p}(\tau)=\omega^2a_{2p}(\omega,\omega')$$

où les coefficients a_{2p} *vérifient les hypothèses du Théorème (1-1)*

$$(\frac{\pi}{2\omega})^2[(2p+2)(2p+1)a_{2p+2}-4p^2a_{2p}]+(2s+1)a_{2p}+\sum_{0<r<p}a_{2r}a_{2p-2r}=0 \tag{17}$$

Alors, les fonctions théta de Jacobi peuvent s'exprimer sous la forme

$$\theta_2(v,\tau)=\theta_4(0,\tau)exp[i\pi(v+\frac{1}{4}\tau)+\frac{2}{3\pi^2}\sum_{p\geq 1}c_{2p}(\tau)\cos^{2p}\pi(v+\frac{1}{2}\tau)]$$

et

$$\theta_4(v,\tau)=\theta_4(0,\tau)exp[\frac{2}{3\pi^2}\sum_{p\geq 1}c_{2p}(\tau)(\sin\pi v)^{2p}]$$

De plus, ces expressions de θ *sont définie dans la bande* $\mid Imv \mid<\frac{1}{2}Im\tau$.

Rappelons que du fait $\theta_1(v,\tau)=\theta_2(v+\frac{1}{2},\tau)$ et $\theta_3(v,\tau)=\theta_4(v+\frac{1}{2},\tau)$, on en déduit alors

Corollaire (1-7)
Sous les hypothèses du Théorème (1-6), on a les expressions des autres fonctions théta

$$\theta_1(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)exp[i\pi(v+\frac{1}{4}\tau) + \frac{2}{3\pi^2}\sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)\sin^{2p}\pi(v+\frac{1}{2}\tau)]$$

et

$$\theta_3(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)exp[\frac{2}{3\pi^2}\sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)(\cos\pi v)^{2p}]$$

Remarque (1-8)
En considèrant l'équation de la chaleur, on trouve un système d'équations différentielles en τ satisfait par les coefficients c_{2p}. En particulier, le coefficient $c_2(\tau)$ vérifie l'équation différentielle

$$-a_2(1,\tau) + (\frac{4}{3\pi})^2 c_2^2(\tau) = 4\pi\frac{dc_2(\tau)}{d\tau}$$

Par ailleurs, si on examine la paire de coefficients a_{2p} et c_{2p}, on remarque qu'ils jouissent de propriétés analogues sous l'action du groupe modulaire $\Gamma(1)$. Par exemple, en considèrant la relation theta $\theta_4(v+\frac{1}{2},\tau+1) = \theta_4(v,\tau)$, on trouve

$$c_{2p}(\tau+1) = (-1)^p \sum_{k\geq p} C_k^p c_{2k}(\tau) \tag{18}$$

qui est similaire à la relation (15), satisfaite par b_{2p} ou par les a_{2p}.

On obtient évidemment des relations du même type pour les autres fonctions $\theta_i(v,\tau)$ $i=1,2,3$.
En fait, les coefficients c_{2p} vérifient une relation de récurrence indépendante des a_{2p}, comme le montre le résultat suivant

Theorem (1-9) *La fonction théta $\theta_4(v,\tau)$ peut s'exprimer sous la forme*

$$\theta_4(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)\ \exp[\sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)(\sin\pi v)^{2p}]$$

où les coefficients c_{2p} vérifient la relation $p\geq 1$

$$(A)\quad \begin{cases} 4!\ \binom{2p+4}{4}\ c_{2p+4} = (2p+1)(2p+2)[(2p+2)(2p+3)+4p^2-c_0]c_{2p+2} \\ +(2p)^2[c_0-(2p)^2]c_{2p} - 6[(2p+1)(2p+2)c_{2p+2} - 2c_2 - \sum_{k=1}^{p} 2kc_{2k}]^2 \end{cases}$$

où $c_0 = -4[\theta_2^4(0,\tau)+\theta_3^4(0,\tau)]$, $c_2 = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\theta_4''(0,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}$ *et*
$c_4 = \frac{1}{3}\theta_2^4(0,\tau)\theta_3^4(0,\tau) + \frac{1}{3}c_2$.
De plus, cette expression de θ_4 est définie dans la bande $\mid Imv \mid < \frac{1}{2}Im\tau$.

8 L'équation de la chaleur

Il est bien connu que les fonctions $\theta_j(v,\tau); j = 1,2,3,4$ sont solutions d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 4i\pi \frac{\partial y}{\partial \tau}$$

De cette équation on peut déduire que les coefficients c_{2p} (comme fonction de τ) sont solutions d'un système différentiel

Propositon (1-10) *Les coefficients $c_{2p}(\tau)$ definis plus haut sont solutions du système différentiel suivant*

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{4}{\pi} c'_{2p} = (2p+2)(2p+1)\ c_{2p+2} - 4p^2\ c_{2p} - \\ 4\sum_{m=0}^{p-1} m\ c_{2m}[(p-m)\ c_{2p-2m} - (p-m+1)\ c_{2p-2m+2}]. \end{cases} \tag{19}$$

où $c'_{2p} = \dfrac{dc_{2p}}{d\tau}$.
En particulier, le coefficient $c_2(\tau)$ vérifie l'équation différentielle

$$3c_4(\tau) - c_2(\tau) + c_2^2(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{dc_2(\tau)}{d\tau} \tag{20}$$

En fait, on montre que ces coefficients sont des fonctions hypergéométriques de τ. D'une manière plus précise, on montre

Proposition (1-11) *Les coefficients c_{2p} definis plus haut peuvent s'écrire sous la forme*

$$c_{2p}(\tau) = (-1)^{p+1}2^{2p}\Big[\frac{q^p}{p(1-q^{2p})} + 2\sum_{m>p}\binom{m+p-1}{m-p-1}\frac{q^m}{(m-p)(1-q^{2m})}\Big].$$

$$= (-1)^{p+1}\frac{2^{2p+1}}{(2p)!}\sum_{n\geq p}\frac{(n+p-1)!}{(n-p)!}\frac{q^n}{(1-q^{2n})}.$$

Le résultat suivant donne une expression plus simple des coefficients c_{2p} en fonction de τ, et permet en conséquence de retrouver une propriété de la fonction zeta de Jacobi $Zn(z,k)$.

Theorem (1-12) *Les coefficients c_{2p} definis par le Theorem 1-6 peuvent s'écrire sous la forme*

$$c_{2p}(\tau) = -\frac{1}{p}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)^{2p}} = -\frac{1}{p}\sum_{k\geq 0}\Big[\frac{(-4)q^{2k+1}}{(1-q^{2k+1})^2}\Big]^p.$$

Les fonctions theta peuvent alors s'exprimer alors de la manière suivante

$$\theta_4(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)\ \ \exp[-\sum_{p\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{p}\Big(\frac{\sin\pi v}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)}\Big)^{2p}],$$

$$\theta_3(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)\ \ \exp[-\sum_{p\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{p}\Big(\frac{\cos\pi v}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)}\Big)^{2p}],$$

$$\theta_2(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)\ \ \exp[i\pi(v+\frac{1}{2}\tau) - \sum_{p\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{p}\Big(\frac{\cos\pi(v+\frac{1}{2}\tau)}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)}\Big)^{2p}],$$

$$\theta_1(v,\tau) = \theta_4(0,\tau)\ \ \exp[i\pi(v+\frac{1}{2}\tau) - \sum_{p\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{p}\Big(\frac{\sin\pi(v+\frac{1}{2}\tau)}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)}\Big)^{2p}].$$

De plus, , les expressions θ_4 et θ_3 sont définies dans la bande $\mid Imv \mid < \frac{1}{2}Im\tau$, celles de θ_2 et θ_1 sont définies dans la bande $\mid Imv \mid < Im\tau$.

Par ailleurs, on sait que la fonction zeta de Jacobi peut être définie de la manière suivante

$$Zn(z,k) = \frac{1}{2K}\frac{d}{dz}\log\theta_4(v,\tau),$$

où $v = \frac{z}{2K}$ et $K = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, est l'intégrale elliptique complète du prermier type dont le module k est telle que $0 < k < 1$.

Corollaire (1-13) *La fonction zeta de Jacobi peut s'écrire sous la forme*

$$Zn(z,k) = \frac{\pi}{2K}\sin(\pi 2v)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{\sin^2(\pi v) - \sin^2(k+\frac{1}{2}\pi\tau)}$$

où $v = \frac{z}{2K}$.
En particulier, on obtient une expression de la dérivée logarithmique de la fonction theta

$$\frac{\theta_4'(v,\tau)}{\theta_4(v,\tau)} = 4\pi\sin(\pi 2v)\sum_{k\geq 0}\frac{q^{2k+1}}{1-2q^{2k+1}\cos 2\pi v + q^{4k+2}}$$

On peut aussi retrouver ces expressions à partir des développements de theta en produit infini (voir [W-W], p. 489) :

$$\theta_4(v,\tau) = \prod_1^\infty(1-q^k)\prod_1^\infty(1-2q^{2k+1}\cos 2\pi v + q^{4k+2}).$$

Remarque : Comme conséquence du Théorème (1-12), on peut déduire l'expression exacte des coefficients a_{2p} du développement de la fonction $(\wp(z), 1, \tau)$:

$$\wp(z+\tau) = \wp(\tau) - \sum_{p\geq 1} a_{2p}(\tau)(\sin\frac{\pi z}{2})^{2p}.$$

On trouve

$$a_{2p}(\tau) = -2(2p+1)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)^{2p+2}} + 4p\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(\sin(k+\frac{1}{2})\pi\tau)^{2p}}$$

9 Transformations de $\wp(z)$ et de la fonction thêta

Les formules de transformations d'ordre 2 ou d'ordre impair permettent d'exhiber des relations modulaires entre les coefficients $c_{2p}(n\tau)$ et $c_{2p}(\tau)$.

Pour les tranformations d'ordre 2 (par exemple la transformation de Landen), on a la relation de duplication $\theta_4(2v,2\tau) = \frac{\theta_3(v,\tau)\theta_4(v,\tau)}{\theta_4(0,\tau)}$. Celle-ci permet d'obtenir l'égalité suivante

$$4\sum_{p\geq 1} c_{2p}(\tau)(\sin^{2p} v + \cos^{2p} v - 1) = \sum_{p\geq 1} c_{2p}(2\tau)\sin^{2p} 2v$$

Les formules de trigonométrie permettent alors d'identifier les coefficients

$$\sum_{p\geq n\geq \frac{p}{2}} 2^{2n}(-1)^{p-n}C_{p-n}^{n} c_{2n}(2\tau) = 4c_{2p} + 4(-1)^p \sum_{m\geq p} C_m^p c_{2m}(\tau).$$

Des formules déduites de la transformations d'ordre impair sur $\theta(nv, n\tau)$, on trouve aussi des relations modulaires analogues entre les coefficients.

Par ailleurs, de l'expression trigonométrique (16), on montre le résultat suivant.

Corollaire (1-14)
Sous les hypothèses du Théorème (1-6), les coefficients c_{2p} vérifient la relation pour $m \geq 1$

$$\frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}} = -\frac{2m}{3\pi^2}\sum_{p\geq m} C_{2p}^{p-m}\frac{c_{2p}(\tau)}{2^{2p}}.$$

Pour $m = 1$ on en déduit la formule d'inversion

$$q = \frac{\sqrt{1 + [\frac{1}{6\pi^2}\sum_{p\geq 1} C_{2p}^{p-1}\frac{c_{2p}(\tau)}{2^{2p}}]^2} - 1}{\frac{1}{3\pi^2}\sum_{p\geq 1} C_{2p}^{p-1}\frac{c_{2p}(\tau)}{2^{2p}}}.$$

Autre conséquence, on peut aussi montrer

Corollaire (1-15)

Les coefficients a_{2p} *du développement de la fonction* $\wp(z)$ *de Weierstrass (donné par le Théorème (1-1)) jouissent de la propriété suivante*
n *et* k *sont deux diviseurs de* m, *si et seulement si*

$$\frac{(-1)^k}{k}\sum_{p\geq k}\frac{C_{2p}^{p-k}}{2^{2p}}a_{2p}(\frac{m}{k}\tau) = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{p\geq n}\frac{C_{2p}^{p-n}}{2^{2p}}a_{2p}(\frac{m}{n}\tau)$$

De manière similaire, on a aussi

Corollaire (1-16)

Les coefficients c_{2p} *du développement de la fonction théta de Jacobi (donné par le Théorème (1-6)) jouissent de la propriété suivante*
n *et* k *sont deux diviseurs de* m, *si et seulement si*

$$(-1)^k k\sum_{p\geq k}\frac{C_{2p}^{p-k}}{2^{2p}}c_{2p}(\frac{m}{k}\tau) = (-1)^n n\sum_{p\geq n}\frac{C_{2p}^{p-n}}{2^{2p}}c_{2p}(\frac{m}{n}\tau)$$

REFERENCES

[A-L] P.Appel et E.Lacour *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications* Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1922.

[Cha] Chandrasekhar *Elliptic functions* Springer-Verlag, New-York, 1985.

[Er] A. Erdelei *Higher transcendental functions* vol 2, chap. 13, Mc graw-Hill, New-York, 1953.

[F] R. Fricke *Elliptische Funktionen.* Encycl. der Math. Wissensch., t.II, B.3, Teubner, Leipzig (1924).

[F1] R.Fricke *Die elliptische Funktionen* Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften,

V.2, Bd 1,2, B.G. Teubner, Leipzig, 1913, p.181-348.

[Ha] L. Halphen *Traité des fonctions elliptiques*, tome I,II, et III, Gauthiers-Villars, 1886-1891, Paris.

[He] Y. Hellegouarch *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles* Ed. Masson, Paris, 1997.

[Hu] P. Humbert *Introduction à l'étude des fonctions elliptiques* Ed. Hermann et Cie, Paris, 1922.

[J] C. Jordan *Cours d'analyse* Tome II et III, Ecole polytechnique, 1937.

[L] S. Lang *Elliptic Functions* Addison-Wesley ed., New-York (1973).

[T-M] J. Molk et J. Tannery *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques* Ed. Masson, Paris, 1902.

[S] J.P. Serre *Cours d'arithmétique* P.U.F., Paris, 1970.

[T] F.G. Tricomi *Funzioni ellitische* Zanichelli, Bologna, 1951.

[V] G. Valiron *Théorie des fonctions* Ed. Masson, Paris, 1955.

[W-W] E.T. Whittaker,G.N. Watson *A course of Modern Analysis* Cambridge (1963).

[W] H. Weber *Lehrbuch der Algebra* Tome III, Chelsea, New-York, 1962

Troisième partie
Solutions périodiques d'équations différentielles

Articles présentés :

[P5] *Monotonicity properties of the period function for some planar Hamiltonian systems* (Avec A. Kelfa) Comm. on Appl. Nonlin. Anal., vol 4, (3), p.99-120, (1996).

[P8] *Remarks on the monotonicity of the period function* (avec F. Cuvelier) Applicationes Math., vol 26, n. 3, p. 243-252 (1999).

[P10] *Remark on Periodic Solutions of Non Linear Oscillators* Applied Math. Lett., vol 14, n 8, p. 363-368 (2001).

[P12] *Periodic Perturbations of Non-Conservative Second Order Differential Equations* Electr. J. of Qualitat. Theory of Diff. Eq., No 4, p.1-12, 2002.

[P13] *Series Solutions of some Anharmonic Motion Equations* J of Math. Anal. and appl. vol 272, p.79-88, 2002.

[T30] *On the monotonicity of the period function for Lienard systems* Prépublication, Villetaneuse, 2003.

10 Fonction période dépendant de l'énergie

10.1 La période minimale d'une orbite

Considèrons le système hamiltonien $\mathcal{H}(x,y) = (1/2)y^2 + G(x)$, avec un centre à l'origine. Cette équation peut d'écrire

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \tag{21}$$

où g a un seul zéro en l'origine 0. G étant une primitive de g, telle que $G(0) = 0$. Au voisinage de l'origine, chaque orbite appartient à un niveau

d'énergie, $\mathcal{H}(x,y) = c$, et est déterminée par c.
La fonction période $T(c)$ est la période minimale de cette orbite, elle est définie par :

$$T(c) = \sqrt{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{c - G(x)}}.$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la croissance de la période de l'orbite dépendant de l'énergie, et ont trouvé des conditions suffisantes assurant sa monotonie. Citons parmi eux : C.Chicone, S.N.Chow, D.Wang, F.Rothe ainsi que R.Shaaf.

10.2 Remarque sur le problème

L'intérêt de cette question est bien connue, il a été souligné par Arnold dans son étude sur la dynamique hamiltonienne, ([A], Appendice 8,D, p.418 et [R], p.130). La condition de non dégéneresscence de l'hamiltonien $\mathcal{H}(p,q)$, $(p,q) \in IR^2$ peut s'exprimer dans certains cas en termes de fonction énergie-période au lieu des variables action-angle.
En effet, on substitue la transformation $(p,q) \to (t,c)$ dans l'intégrale de l'aire $A(c)$ entourée par l'orbite $\gamma_c(t)$.
On obtient $A(c) = \int_{\mathcal{H}^{-1}(c)} dpdq = \int_0^c T(\tilde{c})d\tilde{c}$. Ainsi,

$$T(c) = \frac{dA}{dc}.$$

Dans le système de variables action-angle (J,φ), on a $\mathcal{H} = \mathcal{H}(J)$ et $\frac{d\mathcal{H}}{dJ} = \frac{2\pi}{T(\mathcal{H})}$.
D'où, $\frac{d^2\mathcal{H}}{dJ^2} = -\frac{4\pi^2}{T^3}\frac{dT}{d\mathcal{H}}$, et la condition de non dégénérescence est

$$\frac{d^2\mathcal{H}}{dJ^2} = -\frac{4\pi^2}{T^3}\frac{dT}{d\mathcal{H}} \neq 0$$

.

10.3 Critères de monotonie de la fonction période

Considèrons tout d'abord l'hypothèse technique suivante

$$(\mathcal{J}) \quad \begin{cases} (i) \quad \text{il existe deux nombres} \quad a < 0 < b, \quad \text{tels que} \\ 0 < G(a) = G(b) = c. \\ (ii) \quad G(0) = g(0) = 0. \\ (iii) \quad xg(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0, x \in (a,b). \\ (iv) \quad g'(0) > 0. \end{cases}$$

Cette hypothèse nous assure que l'équation (21) a un centre unique en l'origine, entouré par des orbites périodiques.

Nous donnons ci-aprés la liste de ces critères, chacun d'eux entrainant $T(c)$ croissante sous réserve que l'hypothèse $(\mathcal{J})$ soit vérifiée.

$$(\mathcal{C}_0) \quad \begin{cases} H(x) = g(x)^2 + (\dfrac{g''(0)}{3g'(0)^2})g(x)^3 - 2G(x)g'(x) \geq 0 \\ \text{pour} \quad x \in (a,b). \end{cases}$$

$$(\mathcal{C}_1) \quad \begin{cases} (i) \quad g''(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \in (a,b). \\ (ii) \quad \Delta(x) = x(g''(0)g'(x) - g'(0)g''(x)) \geq 0 \\ \text{pour} \quad x \in (a,b). \end{cases}$$

$$(\mathcal{C}_2) \quad \begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{G(x)}{g(x)^2} \quad \text{est une fonction convexe pour} \quad x \in (a,b). \end{cases}$$

$$(\mathcal{C}_3) \quad \begin{cases} (i) \quad g''(x) > 0 \; for \quad x \in (a,b). \\ (ii) \quad \Delta_1(x) = 5g''(x)^2 - 3g'(x)g^{(3)}(x) \geq 0 \\ \text{pour} \quad x \in (g'^{-1}(0), b). \end{cases}$$

$$(\mathcal{C}_4) \quad \left\{ x[3g'(x)^2 - g(x)g''(x) - (3\tfrac{g'(0)^2}{g''(0)})g''(x)] \geq 0 \quad \text{pour} \quad x \in (a,b). \right.$$

Les conditions $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ sont donnés par Chow et Wang ([C-W] , Corollary (2-5) et Proposition (3-1)). $(\mathcal{C}_2)$ apparait dans Chicone [C]. $(\mathcal{C}_3)$ est dû à R. Schaaf, mais (i) est remplacé par une condition plus faible :

$$\text{si} \quad g'(x) = 0, \quad \text{alors} \quad g(x)g''(x) < 0.$$

[Sc1], [Sc2]. Notons que $(\mathcal{C}_3)(ii)$ est équivalente à $(G'')^{-\frac{2}{3}}$ convexe. Enfin, $(\mathcal{C}_4)$ a été découverte par F. Rothe, et notée f_4 (voir [R]).

Proposition (2-1) :
Sous l'hypothèse $\mathcal{J}$, *chacune des conditions* $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$, *et* $(\mathcal{C}_4)$ *entraine* $T'(c) > 0$ *pour* $0 < c < c_0$.

Notons que la condition $(\mathcal{C}_3)$ a été retrouvée plus tard par Bidault-Veron et Bouhar, voir lemme (2-1) de [BV-B], où l'intervalle $(0, b_+)$ correspond à l'intervalle (a, b).

Précisons que Coppel et Gavrilov (voir [C-G]) ont donné une autre expression de la dérivée $T'(c)$ sous forme d'une intégrale définie à l'intérieur de l'orbite

$$T'(c) = \int\int_{\sigma(c)} \frac{d^2}{dx^2}(\frac{G}{g^2})$$

où $\sigma(c)$ est la région bordée par l'orbite $\gamma(c)$. Leur condition qui est certes moins forte que celle de Chicone $(\mathcal{C}_2)$, n'exige pas cependant l'hypothèse supplémentaire $g'' > 0$.

11 Nouvelle condition suffisante de monotonie

Il existe en réalité des relations d'inclusions entre ces divers critères. Notons cependant que les critères restrictifs ne sont pas inintéressants, dans la mesure où leur utilisation est plus pratique, et permet une vérification plus aisée.
On montre tout d'abord que parmi toutes ces conditions, $(\mathcal{C}_0)$ est la plus fine. On a donc la

Proposition (2-2)
Chacune des conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$, *et* $(\mathcal{C}_4)$ *entraine* $(\mathcal{C}_0)$.

On propose un nouveau critère (voir [P5]) qui est plus restrictif que $(\mathcal{C}_0)$ mais relativement facile à utiliser. Notre condition est par contre moins restrictive que les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_3)$, et, avec une hypothèse supplémentaire, plus générale que $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_4)$. Soit

$$(\mathcal{C}_5) \quad \begin{cases} (i) \quad g''(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in (a, b). \\ (ii) \quad 3g'(x)^2 - g(x)g''(x) - (\dfrac{3g'(0)^2}{g''(0)})g''(x) \leq 0 \\ \text{pour} \quad x \in (g'^{-1}(0), 0). \\ (iii) \quad \dfrac{g'(x)g''(0)}{g''(x)g'(0)^2} \geq \dfrac{2G(x)}{g(x)^2} \quad \text{pour} \quad x \in (0, b). \end{cases}$$

Plus précisèment, on démontre le résultat suivant (voir [P7] pour la preuve)

Théorème (2-3) :
Sous l'hypothèse $(\mathcal{J})$, *on a les implications suivantes*
a) La condition $(\mathcal{C}_5)$ *entraine* $(\mathcal{C}_0)$
b) Chaque condition $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_3)$ *entraine* $(\mathcal{C}_5)$. *De plus, si* $g'' > 0$, $(\mathcal{C}_2)$ *entraine* $(\mathcal{C}_5)$.

On peut déduire de la partie a) de ce Théorème que la condition $(\mathcal{C}_5)$ entraine la monotonie de la fonction période dépendant de l'énergie, en plus le fait que $(\mathcal{C}_5)$ est moins fine que $(\mathcal{C}_0)$. Notons que l'hypothèse $g(x)$ convexe sur l'intervalle (a, b) est nécessaire afin d'établir que $(\mathcal{C}_5)$ est plus fine que la condition $(\mathcal{C}_2)$ de Chicone. Cependant, on n'a pas été en mesure de trouver un contre-exemple à cette hypothèse. On peut espèrer qu'elle soit superflue.

Autre aspect intéressant, on peut prouver aussi que la condition $(\mathcal{C}_5)$ est strictement moins restrictive que les autres. Pour cela, on va produire un exemple de fonction g de façon que $(\mathcal{C}_5)$ soit satisfaite, mais pas $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ ni $(\mathcal{C}_3)$.
La fonction suivante répond à notre question

$$g(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)\sinh(2x) - \frac{\cosh(2x)}{4} + \frac{1}{4} \quad avec \quad c = 0.636,$$

sur l'intervalle

$$(a,b) \quad avec \quad a = -0,3 \quad et \quad b = 0,3.$$

Notons que $g(x)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{J})$, $g(0) = 0 \quad et \quad g'(0) = c > 0.$
Cet exemple est une variante plus compliquèe de celui étudié d'abord par Chow-Wang puis par Chicone, à savoir

$$g(x) = e^x - 1.$$

Plus précisèment, celui-ci a été le point de départ de leur étude sur les critères de monotonie de la fonction période.
L'exemple que nous exhibons est plus enrichissant, en ce sens qu'il vérifie évidemment la condition $(\mathcal{C}_5)$ mais pas les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_3)$ ni $(\mathcal{C}_2)$, bien que cette fonction g soit convexe sur l'intervalle considéré. Toutes ces vérifications pour l'exemple considéré, peuvent être faites grâce à *Mathematica.*
De plus, on verra que pour d'autres valeurs de c, toutes ces conditions ne sont pas optimales pour le même exemple.

On obtient donc le

Corollaire (2-4) :
La condition (C_5) est strictement plus fine que (C_1), (C_3), ainsi que (C_2) dès que l'hypothèse $g'' > 0$ est vérifiée.

12 Non optimalité des conditions suffisantes

12.1 Autre expression de la dérivée

Rappelons que parmi tous les critères considèrés plus haut, (C_0) est incontestablement le plus fin. L'exemple exhibé plus bas prouve que la fonction période peut être toujours monotone bien que la condition (C_0) ne soit pas vérifiée. Ceci prouve en particulier qu'on atteint les limites de cette approche du problème de la monotonie. On utilise pour cela le résultat suivant dû à Chow et Wang, qui est une conséquence directe de l'expression de la dérivée

$$cT'(c) = \int_a^b \frac{g(x)}{\sqrt{c - G(x)}}[\frac{R(x)}{g^3(x)} - \frac{R(A(x))}{g^3(A(x))}]dx$$

où A est la fonction définie par

$$G(A(x)) = G(x), \quad \textit{pour tout} \quad x \in (\alpha, 0), \quad A(x) \in (0, \beta)$$

Proposition (2-5)
Supposons que la fonction $H(x)$ *s'annule en* $x_0 \neq 0$ *et que l'hypothèse* $(\mathcal{J})$ *soit satisfaite, on a alors :*
(i) $H(x) > 0$ *pour* $A^{-1}(x_0) < x < x_0$ *entraine* $\frac{R(x)}{g^3(x)} - \frac{R(A(x))}{g^3(A(x))} < 0$
(ii) $H(x) < 0$ *pour* $x_0 < x < A(x_0)$ *entraine* $\frac{R(x)}{g^3(x)} - \frac{R(x)}{g^3(x)} > 0$

Cette proposition entraine évidemment la monotonie de la fonction période. Notons cependant que la fonction A définie ci-dessus n'est connu que de manière implicite. Sa dérivée étant

$$A'(x) = \frac{g(x)}{g(A(x))}.$$

Ce point précis rend donc le critère de la Proposition (2-3) difficilement applicable.

12.2 Un exemple

On utilise de nouveau la fonction g_c précédente, pour la valeur de c, $c = 0.5443$

Les vérifications numériques ont été obtenus par MAPLE.
L'utilisation de *Mathematica* pour cette valeur de $c = 0,6443$ s'est avérée infructueuse, contrairement au cas précédent $c = 0,636$. En ce sens, que le logiciel n'a pas pu déceler le zéro de la fonction $H(x)$, qui est de l'ordre de 10^{-13}. Pour une précision maximale, il indique constamment $H(x) \geq 0$.
L'utilisation de MAPLE a été concluante puisqu'il pousse la précision à 10^{-50}. On montre donc l'existence du point $x_0 \neq 0$ vérifiant $H(x_0) = 0$, de manière à ce qu'on puisse appliquer la proposition précédente, prouvant la monotonie de la fonction période, bien que la fonction $H(x)$ change de signe. On montre de plus, toujours grace à MAPLE, que toutes les conditions ne sont pas vérifiées (puisque (C_0) ne l'est plus), voir [P8].

Allure de la fonction H qui s'annule pour $x_0 = 0.009389$, $H(x) > 0$ pour $x < x_0$.

13 Perturbation périodiques d'équations différentielles

Soit l'équation différentielle du second ordre

$$x'' + \phi(t, x, x', \epsilon) = 0. \tag{22}$$

Supposons que pour $\epsilon = 0$, l'équation $x'' + \phi(t, x, x', 0) = 0$ admette une solution périodique. Il n'existe pas en général de solution périodique non constante pour l'équation (22) comme le prouve l'exemple suivant dû à Moser [H].
En effet, soit

$$\phi(t, x, y) = x + x^3 + \epsilon f(t, x, y), \qquad \epsilon > 0$$

vérifiant les conditions pour $\phi \in C^1(R^3)$, $f(t+1, x, y) = f(t, x, y)$, avec $f(0,0,0) = 0$, $f(t, x, y) = 0$ *if* $xy = 0$, $\frac{\phi}{x} \to \infty$ *si* $x \to \infty$ uniformément en $(t, y) \in R^2$. $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ *si* $xy > 0$, *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ailleurs. x, y tels que $\mid x \mid < \epsilon, \mid y \mid < \epsilon$. En fait, on a $xf(t, x, y)$ et $yf(t, x, y)) > 0$ if $xy > 0, \mid x \mid < \epsilon, y$ arbitraire et $\phi = 0$ ailleurs.
La fonction $V = 2x^2 + x^4 + 2x'^2$ vérifie $V' = -4\epsilon x' f(t, x, x')$, de façon que $V' < 0$ if $xx' > 0, \mid x \mid < \epsilon, \mid x' \mid < \epsilon$ et $V' = 0$ ailleurs. Ainsi x ne peut être périodique .
Il existe cependant des cas où l'équation différentielle perturbée (22) admet une solution périodique non constante, comme le montre l'étude des cas suivants.

13.1 Equation de type Duffing perturbée

Considèrons la famille des oscillateurs non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + f(u) = \epsilon g(t) \\ u(0) = a_0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

où $g(t)$ est une fonction $2T-$périodique, f est une fonction ne dépendant que de u et ϵ est un paramètre voisin de 0. On s'intéresse aux solutions periodiques de période minimale $2T$, lorsque f et g vérifient certaines conditions.
En utilisant la méthode des séries trigonométriques on prouve l'existence d'une solution périodique de cette équation de type Duffing.
Plus précisèment, supposons que la fonction $g(u)$ peut s'exprimer sous la forme d'une série en puissance de sinus

$$g(t) = b_0 + b_2 \sin^2(\frac{\pi t}{2T}) + ... + b_{2n} \sin^{2n}(\frac{\pi t}{2T}) + ... = \sum_{n \in N} b_{2n} \sin^{2n}(\frac{\pi t}{2T}),$$

alors on peut avoir une expression des solutions de l'équation

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u + u^2 = \epsilon \sum_{n\in N} b_{2n} \sin^{2n}(\frac{\pi t}{2T}) \\ u(0) = a_0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Plus exactement, on montre le résultat suivant améliore celui de A. Shidfar et A. Sadeghi [S-S],

Théorème (2-6) *Supposons que les coefficients du développement de la fonction* $g(t)$ *vérifient*

$$\mid b_{2n} \mid < \frac{1}{(2n)^\beta}, \;\; avec \;\; \beta \geq 1,$$

alors les solutions de l'équation (13) peuvent s'exprimer sous la forme de la série trigonométrique convergente

$$u(t) = a_0 + c_2 \sin^2(\frac{\pi t}{2T}) + c_4 \sin^4(\frac{\pi t}{2T}) + c_6 \sin^6(\frac{\pi t}{2T}) + ... = \sum_{n\in IN} c_{2n} \sin^{2n}(\frac{\pi t}{2T}).$$

Les coefficients c_{2n} *verifiant les conditions* $\mid a_0 \mid < C, \; a_0 = c_0,$
$2\omega^2 c_2 = -\omega^2 c_0 - c_0^2 + \epsilon b_0, \; (\omega = \frac{\pi}{2T})$ *et la formule de récurrence*

$$(2n+1)(2n+2)c_{2n+2} = (4n^2-1)c_{2n} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{r=0}^{n} c_{2r}c_{2n-2r} + \frac{\epsilon}{\omega^2} b_{2n}, \quad pour \; n > 0$$

13.2 Equation de Liénard perturbée

Considérons l'équation de Lienard perturbée de la forme

$$(L_R) \qquad \ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = \epsilon\gamma(\frac{t}{\tau}, u, \dot{u})$$

où $t \in R, \epsilon \in R$ est un paramétre assez petit, $\mid \epsilon \mid < \epsilon_0, \tau$ est un paramétre réel.
On peut aussi écrire le système du premier ordre équivalent en dimension 2

$$(S_L) \qquad \dot{x} = h(x) + \epsilon q(\frac{t}{\tau}, x)$$

où $q = \binom{q_1}{q_2}$. On suppose que l'équation de Lienard (non perturbée)

$$(L) \qquad u'' + f(u)u' + g(u) = 0$$

a une solution périodique unique, telle que $u(0) = a$ et $\dot{u}(0) = 0$, et que les fonctions f and g sont de classe C^2.
Plaçons nous sous les hypothèses standards qui assurent l'existence et l'unicité d'une solution périodique stable $u_0(t)$ de période τ_0 pour l'équation de Liénard (voir [C-L] p. 402-403).
En particulier, on suppose que les integrales

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

de f et g respectivement sont telles que $lim_{x\to\infty}F(x) = lim_{x\to\infty}G(x) = \infty$.

Soit $x \equiv x(t, \epsilon, p_0 + h, \tau, \phi)$ une solution du système (S_L) de période $\tau(\epsilon, \phi)$, où ϕ est la variable auxiliaire introduite par Farkas [F] telle que $x(\phi) = p_0 + h$, $p_0 = \binom{a}{0}$ et $h = \binom{h_1}{h_2}$, vérifiant $h(0, 0) = 0$.
La condition de périodicité est : $z = x(t + \phi, \epsilon, p_0 + h, \tau, \phi) - p_0 - h = 0$.

D'après Farkas [F], la matrice de Jacobi J de la fonction z est de la forme

$$J(\tau_0) = -I + \begin{pmatrix} g(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + Y(\tau_0)$$

$I = Id_2$ et $Y(t)$ est la solution du système variationel associé tel que $Y(0) = I$.

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} O & g'(u_0(t)) \\ -1 & -f(u_0(t)) \end{pmatrix} y. \tag{25}$$

On prouve alors, que si $detJ(\tau_0) \neq 0$ alors il existe des fonctions déterminées de manière unique $\tau(\epsilon, \phi)$ et $h(\epsilon, \phi)$ définies dans un voisinage de $(0,0)$ telles que la fonction

$$x(t; \phi, p_0 + h(\epsilon, \phi), \epsilon, \tau(\epsilon, \phi))$$

est une solution périodique du système (S_L) avec $\tau(0,0) = \tau_0$.

Plus exactement, on établit le résultat suivant qui est plus général que celui obtenu par [F-A]

Théorème (2-7) *Si* $\int_0^{\tau_0} f(u_0(\tau))d\tau > 0$, *alors il existe deux fonctions* $\tau, h : U \to R$ *et une constante* $\tau_1 < \frac{\tau_0}{2}$ *telles qu'une solution périodique* $u(t, \phi, a + h(\epsilon, \phi), \epsilon, \tau(\epsilon))$ *de l'équation*

$$(L_R) \qquad \ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = \epsilon\gamma(\frac{t}{\tau(\epsilon)}, u, \dot{u})$$

existe pour $(\epsilon, \phi) \in U$, *et* $\mid \tau - \tau_0 \mid < \tau_1$, $\tau(0,0) = \tau_0$, $h(0,0) = 0$.

14 Fonction période du système différentiel de Lienard

L'équation de Lienard

$$(L) \qquad x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$

ou son équivalent dans le plan,

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \tag{L'}$$

occupe une place importante en théorie des systèmes dynamiques.

On suppose que $g(0) = 0$, de façon que l'origine soit un point critique du problème plan équivalent (L').

Lorsque 0 est un centre pour (L'), le plus grand voisinage de 0 noté γ_0 couvert par des orbites γ est appelé *anneau des périodes* de 0. La fonction T qui associe à toute orbite périodique γ dans γ_0 sa période est appelée *fonction période* . Le centre 0 est dit *nondegeneré* lorsque le champ de vecteurs en 0 a deux valeurs propres non nulles.

On dira que T est croissante lorsque, pour tout couples de cycles , γ_1 inclus dans γ_2 , on a $T(\gamma_1) \leq T(\gamma_2)$.
0 est un centre isochrone lorsque T is constant dans un voisinage de 0.

Christopher, Devlin , Lloyd et Sabatini ont montré le résultat suivant dans la cas analytique

Proposition (2-8) *Supposons que f et g soient des fonctions analytiques impaires de x avec $xg(x) > 0$ dans un voisinage de l'origine* 0*. Alors, le système (L') a un centre isochrone à l'origine si et seulement si $g'(0) > 0$ et*

$$g(x) = g'(0)x + \frac{1}{x^3}\left(\int_0^x \xi f(\xi)\, d\xi\right)^2. \tag{$*$}$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont seulement des fonctions de classe C^1, alors (*) est une condition suffisante pour que le centre 0 soit isochrone.
Cette proposition a été généralisée par Christopher et Devlin, qui ont proposé

Proposition (2-9) *Le système (L') avec les fonctions f et g analytiques en x telles que $f(0) = g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ a un centre isochrone à l'origine si et seulement si*

$$g = ss'\Big(1 + \frac{1}{s^4}\Big(\int_0^x s(\xi)f(\xi)\,d\xi\Big)^2\Big),$$

où $s(x) \neq x$ est une solution de l'équation fonctionnelle

$$F(x - 2s(x)) = F(x), \qquad s(0) = 0, s'(0) = 1.$$

Nous proposons une autre démonstration plus simple de la généralisation de Christopher et Devlin.

Preuve

Tout d'abord, on peut montré pour que (L') admette un centre isochrone alors $g(x)$ a $x = 0$ comme zéro unique et $f'(0) \neq 0$. De plus, si on suppose que $g''(0) = 0$ on doit alors avoir $f''(0) = 0$.

Par ailleurs, un résultat de Cherkas montre que le système (L') a un centre si et seulement si il existe des polynomes A et B tels que les primitives

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

vérifient

$$F(x) = A(M(x)), \qquad G(x) = B(M(x)),$$

pour tout polynome $M(x) = x^2 + ...$ En particulier, si $g(x)$ (et $f(x)$) sont impaires alors $M = x^2$.

Ce dernier cas se produit si et seulement si $s(x) = x$. La fonction s est unique et analitique dans un voisinage de $x = 0$. d'après la définition de s, on trouve que

$$F(x) = F(x - 2s(x)) = F(x - 2s(x) - 2s(x - 2s(x)))$$

D'après l'unicité, on a

$$x = x - 2s(x) - 2s(x - 2s(x)), \qquad x(-s) = x(s) - 2s.$$

Ainsi, on a $x = s + \phi(s)$, où ϕ est impaire en s.

D'après ce qui précède, on peut écrire $F(x) = \tilde{F}(s)$, où $\tilde{F}$ est une fonction analytique paire. On écrit aussi, $G(x) = \tilde{G}(s)$.

Le système obtenu à partir de (L') en changeant x en s donne

$$ds/dt = y, \qquad dy/dt = -\tilde{g}(s) - \tilde{f}(s)y, \qquad (L'')$$

où
$$\tilde{f} = \frac{d\tilde{F}}{ds}, \qquad \tilde{g} = \frac{d\tilde{G}}{ds}.$$

Considèrons maintenant la transformation de (L'') donnée par $Y = y + sN(s)$ avec
$$N = \frac{1}{s^2}\int_0^s \xi \tilde{f}(\xi)\, d\xi,$$
un polynome impair en s, le système obtenu est

$$\dot{s} = Y - sN(s), \qquad \dot{Y} = -s - yN(s) + K(s),$$

où $K(s) = s + \frac{1}{s^3}\left(\int_0^s \xi \tilde{f}(\xi)\, d\xi\right)^2 - \tilde{g}$, qui est impair par rapport à s. En coordonnée polaire, $\dot{\theta} = -1$, signifie que $K(s) = 0$ si et seulement si le centre de (L'') est isochrone. C'est précisèment la relation (*).

REFERENCES

$A]$ V.I. Arnold *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* Ed. Mir, Moscou, 1976.

$[BV-B]$ M.F.Bidault-Véron et M.Bouhar *On Characterization of solutions of some non linear differential equations and applications* SIAM J.Math. Anal., 25, 1994, p. 859-875.

$[C]$ C. Chicone *The monotonicity of the period function for planar hamiltonian vector fields*, J. Diff Equations, 69 (1987), p.310-321.

$[C-W]$ S.N. Chow et D. Wang, *On the monotonicity of the period function of some second order equations*, Casopis pro pestovani mat., 111 (1986), p.14-25.

[C-D] C. Christopher and J. Devlin, *On the classification of Lienard Systems with Amplitude-Independent Periods*, To appear in *J. Differential Equations* .

$[C-L]$ E.Coddington et N.Levison *Theory of ordinary differential equations* Mc Graw-Hill, New-York, (1955).

$[F]$ M.Farkas *Periodic motions.* Applied Mathematical Sciences. 104. New York, NY, Springer-Verlag. (1994).

$[F-A]$ M.Farkas et A.Abdelkarim *On controllably periodic perturbations of Lienard equation* Period. Polytech. Elec. Eng., 16, p. 41-45 (1972).

$[H]$ P.Hartman *On boundary value problems for superlinear second order differential equation* J. of Diff Eq. , vol 26, p. 37-53, (1977).

$[L]$ W.S. Loud *Behavior of the period of solutions*
Contr. Diff. Equations, 3, 1964, p.21-36

$[Op]$ Z. Opial *Sur les périodes des solutions de l'équation différentielle* $x''+g(x)=0$,
Ann. Polon. Math., 10, 1961, p.49-72

$[R1]$ F. Rothe *The energy-period function and perturbations of Hamiltonian systems in the plane* Dans Oscillations, Bifurcations and Chaos, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, 8, 1987, p. 621-635.

$[R]$ F. Rothe *Remarks on periods of planar Hamiltonian systems*, SIAM J. Math. Anal., 24 (1993), p129-154.

[S] M. Sabatini, On the period function of Liénard systems, *J. Differential Equations* **152**, (1999), 467-487.

$[Sc]$ R. Schaaf *Global solution branches of two point boundary value problems*, Lectures Notes in Math., 1458 (1990), Springer-Verlag.

$[Sc1]$ R. Schaaf *A class of Hamiltonian systems with increasing periods*
J. Reine Angew. Math., 363, 1985, p.96-109.

$[S-S]$ A. Shidfar et A. Sadeghi *The Periodic Solutions of Certain Non-linear Oscillators*, Appl. Math. Lett., vol 3, n 4, p. 21-24, (1990).

$[Wa]$ D. Wang *The critical points of the period function of* $x''-x^2(x-\alpha)(x-1)$ $(0 \leq \alpha < 1)$ Nonlinear anal., 11, 1987, p.1029-1050.

Quatrième partie
Métriques pseudo-cylindriques

Articles présentés

[P3] *Métriques conformèment plates et Equations de Yang-Mills* Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIII, p.7-12, 1991

[P4] *Famille de métriques conformèment plates et régularité* Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIV, p.257-262, 1992

[P15] *On the properties of certain metrics with constant scalar curvature* Diff. Geom. and Appl., DGA 98. Sat. Conf. of the I C M in Berlin, 1998. Brno, Masaryk Univ., p.39-46, (1999).

[P11] *Non Parallelism of Ricci tensor of Pseudo-cylindric Metrics* Geometria Dedicata, vol 93, p.107-112, 2002.

[P16] *Existence of Metrics with Harmonic Curvature and non Parallel* Ricci Tensor To appear in Balk. J. of Geom and Appl. Vol 8, (2003).

15 Introduction

15.1 Cas de multiplicité de solutions au problème de Yamabe

Considèrons une variété riemannienne C^∞, (M, g_0) de dimension $n \geq 3$, où g_0 est une métrique riemannienne sur M . dv_{g_0} étant la forme volume de g_0, et R_{g_0} est la courbure scalaire associée.

Soit $[g_0]$ la classe conforme de g_0 : $g \in [g_0]$, si et seulement si, il existe une fonction C^∞ positive u, telle que $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ soit une métrique riemannienne complète sur M.
Du point de vue de l'analyse, cela revient à déterminer une fonction positive

u solution de l'équation différentielle sur (M, g_0)

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta_{g_0}u + R_{g_0}u - R_g u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0,$$

où $g = u^{\frac{4}{n-2}}g_0$ est complète sur M.
R_{g_0} et R_g étant les courbures scalaires associées respectivement à g_0 et g, Δ_{g_0} étant l'opérateur de Laplace-Beltrami sur (M, g_0).

Le problème de Yamabe consiste à déterminer dans chaque classe conforme $[g_0]$ au moins une métrique, soit g, dont la courbure scalaire associée est constante.
Ce problème a été complètement résolu dans le cas compact de la variété par H. Yamabe, T. Aubin et R. Schoen depuis 1984.

Notons qu'une métrique de Yamabe est unique à une homothétie près si
- La variété compacte (M, g_0) est telle que sa courbure totale soit négative, i.e. $\int_M R_{g_0} dv \leq 0$.
- (M, g_0) est une variété d'Einstein .

Cependant, des métriques de Yamabe multiples peuvent exister dans le cas positif de la courbure totale.
Le problème général demeure ouvert dans le cas non compacte de la variété (lorsque (M, g_0) est complète).
Considèrons la question suivante qui est une sorte de réduction du cas général

15.2 Problème de Yamabe singulier

Soit $\Lambda \subset (S^n, g_0)$ *un sous-ensemble fermé de la sphère standard de rayon* r. *On cherche une métrique complète* g *sur* $S^n - \Lambda$, *conformèment équivalente à la métrique standard, dont la courbure scalaire* R_g *est une constante positive. (ici* $R_{g_0} = \frac{n(n-1)}{r^2}$ *)*

Cela revient à résoudre l'équation différentielle

$$4\frac{n-1}{n-2}\Delta_{g_0}u + R_{g_0}u - R_g^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \tag{26}$$

$$g = u^{\frac{4}{n-2}}g_0 \quad \text{soit complète sur} \quad S^n - \Lambda\,, \qquad R_g = \text{constante} > 0.$$

Soit $\mathcal{L}_g = \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)}R_g$ le laplacian conforme de la variété riemannienne (M, g). $\mathcal{L}_g$ possède des propriétés intéressantes, remarquée en particulier par W.Ding, [D] :

Propriété d'invariance du laplacien conforme :
Soit (M,g) *et* (N,h) *deux variétés riemanniennes, telles qu'il existe un difféomorphisme conforme* $f : M \to N$ *(cela signifie que si* f *est un difféomorphisme, il existe une fonction* $v : M \to IR^+$, *telle que* $f^*h = v^{\frac{4}{n-2}} g$*).*
Autrement dit, pour toute fonction $\varphi : N \to IR$ *de classe* C^2*, on a*

$$\mathcal{L}_h(\varphi) \circ f = v^{\frac{n+2}{n-2}} \mathcal{L}_g(v\varphi \circ f)$$

lorsque $\varphi = 1$ *et* $f = Id$ *on obtient l'équation de Yamabe*

Par conséquent, on peut déduire que si v est une solution positive de

$$\mathcal{L}_{g_0} v - \frac{n-2}{4(n-1)} K v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \tag{27}$$

Alors K est précisèment la courbure scalaire de la métrique $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$.
De plus, la condition g complète nécessite que $lim_{x \to \Lambda} v(x) = \infty$.

On s'intéresse aux propriétés des courbures riemannienne et de Ricci de certaines métriques de Yamabe sur la sphère standard, ayant deux points singuliers.

Nos résultats sont exposés dans les sections qui suivent.

16 Singularités et métriques pseudo-cylindriques

Considèrons maintenant le cas où les singularitès d'une solution singulière de Yamabe sont isolées. On notera $\Lambda = \Lambda_k = (p_1, p_2, ..., p_k)$ un sous ensemble fini de la sphère standard.

Soit $\Pi : S^n - \{pt\} \to R^n$ la projection stéréographique. On sait que la réciproque, Π^{-1} définie par

$$\Pi^{-1}(x) = [\frac{2x}{|x|^2+2}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}]$$

est un difféomorphisme conforme, on a de plus $(\Pi^{-1})^\star(g_0) = \frac{4}{(|x|^2+1)^2}dx^2$, où dx^2 est la métrique euclidienne de R^n.

Par conséquent, la résolution de (26) est équivalente à la résolution de

$$\Delta u + \frac{n(n-2)}{4}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \tag{28}$$

Sur $R^n - \tilde{\Lambda}_k$, où $\tilde{\Lambda}_k = \Pi(\Lambda_k)$. De plus, u vérifie $lim_{x\to\tilde{\Lambda}_k}u(x) = \infty$.

16.1 Résultats d'existence pour k = 2

Dans le cas $k = 2$, l'équation de Yamabe se réduit à une EDO. Grâce à une étude préalable, il sera alors possible de décrire toutes les métriques de Yamabe sur $S^n - \Lambda_2$.
Il est bien connu que si u est une solution sur $S^n - \{p_1, p_2\}$, alors, elle invariante par toute transformation conforme fixant ces points.
Si on suppose que ces points sont antipodaux, alors u est invariante par rotations. On projettera la sphère S^n sur R^n, par l'un des points singuliers, p_1, de facon que p_2 se projette en $0 \in R^n$.
Ainsi, $\tilde{\Lambda}_k = (0, \infty)$.

Par ailleurs, Cafarelli, Gidas et Spruck [C,G,S] ont montré que toutes les solutions de (28) sur $R^n - \tilde{\Lambda}$ sont radiales. On définit alors le changement de fonctions

$$u(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}}v(log\frac{1}{|x|}).$$

Celui-ci correspond au difféomorphisme conforme

$$\beta : R^n - \{0\} \to R \times S^{n-1}$$

où $\beta(x) = (log\frac{1}{|x|}, \frac{x}{|x|})$.

On en déduit que $v : R \rightarrow R^+$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2}{dt^2}v - \frac{(n-2)^2}{4}v + \frac{n(n-2)}{4}v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0. \qquad (29)$$

L'analyse de l'équation (29) nous montre qu'elle admet un seul centre $(\alpha, 0)$ correspondant à la solution constante $\alpha = (\frac{n-2}{n})^{\frac{n-2}{2}}$.
Toutes les orbites périodiques $\gamma_c(t)$, sont paramétrées par $(v_c(t), \frac{d}{dt}v_c(t))$, c vérifiant $0 < c < c_0$. Elles sont entourées par l'orbite homocline γ_{c_0}.
On a $v_{c_0}(t) = (\cosh t)^{\frac{n-2}{2}}$. La période est dépendante de c : $T = T(c)$.

Les métriques

$$g = v_c^{\frac{4}{n-2}}(dt^2 + d\xi^2)$$

sont appelées métriques pseudo-cylindriques . Elles sont définies sur la variété produit $(S^1 \times S^{n-1}, dt^2 + d\xi^2)$ un cercle de longueur T par la sphère standard de dimension $n-1$. Elles appartiennent toutes à la classe conforme de la métrique cylindrique $[dt^2 + d\xi^2]$.

Rappelons brièvement les propriétés des métriques pseudo-cylindriques voir [Sc], [P12] et [Tr2]) :
- Ce sont des métriques conformèment plates, invariantes par rotation.
- Elles sont en nombre fini (dans une même classe conforme), et ce nombre dépend naturellement des valeurs de T; $g_c{}^j = (v_c{}^j)^{\frac{4}{n-2}}(dt^2 + d\xi^2)$, où $j = 1, 2..., k$ et $0 < c < c_0$.

En particulier, si $T \leq 2\pi\sqrt{\frac{n-1}{R_{g_0}}}$ $(= \frac{2\pi}{\sqrt{n-2}}$ lorsque le rayon de S^{n-1} est égal à 1), on a une seule métrique, à savoir la métrique cylindrique.
Nous obtenons des cas de non unicité dès que la condition suivante est remplie : $T > 2\pi\sqrt{\frac{n-1}{R_{g_0}}}$.

16.2 Comportement asymptotique

Dans le cas général où k est quelconque, une conséquence d'un résultat de [C-G-S] (utilisant des arguments de réflexion) est que la solution de l'équation de Yamabe singulier sur $S^n - \{p_1, ..., p_k\}$ est asymptotique à une métrique pseudo-cylindrique correspondante au voisinage du point p_i, $i = 1, .., k$.
Celle-ci correspond à une solution $u(t, \xi)$ de l'équation (28) sur un domaine de $IR \times S^{n-1}$. Ainsi, la métrique pseudo-cylindrique correspondante est unique.

17 Propriétés de la courbure

17.1 La courbure harmonique

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, $\mathcal{R}(g)$ désignant sa courbure riemannienne, $r = Ric(g)$ est le tenseur de Ricci, et D est la connexion de Levi-Civita. Rappelons que cette courbure est harmonique si la divergence formelle s'annule : $\delta\mathcal{R} = 0$.

Ce qui peut s'exprimer dans un système de coordonnées locales $D_k\mathcal{R}_{ij} = D_i\mathcal{R}_{kj}$. Auquel cas, $Ric(g)$ est un tenseur de Codazzi. En particulier, pour toute variété riemannienne à tenseur de Ricci parallèle $Dr = 0$ (i.e. $D_i\mathcal{R}_{kj} = 0$) la courbure associée est harmonique.

Notons que pour les variétés d'Einstein et les variétés conformèment plates à courbure scalaire constante, la coubure riemannienne est harmonique, (voir Besse [B], chap. 16).

Par ailleurs, A. Derdzinski a donné des exemples de métriques à courbure harmonique mais à tenseur de Ricci non parallèle $Dr \neq 0$, [De].
Ces variétés sont des fibrés sur le cercle S^1 (paramétrisé par la longueur d'un arc t) , dont les fibres sont des variétés d'Einstein (N, g_0) de dimension $n-1$. La métrique qu'il construit est une métrique "tordue" $dt^2 + h^{4/n}(t)g_0$ définie sur le produit $S^1 \times N$. La fonction $h(t)$ définie sur le premier facteur est une solution périodique non constante de l'équation différentielle ordinaire mise en évidence par Derdzinski

$$h'' - \frac{nR}{4(n-1)}h^{1-4/n} = -\frac{n}{4}Ch \ , \qquad \text{pour une constante} \qquad C > 0. \tag{30}$$

Il prouve que le tenseur de Ricci associé à cette métrique est non paralléle.

Nous montrons que les métriques pseudo-cylindriques partagent cette même propriété.

18 Résultats principaux

Le résultat suivant donne une estimation du nombre de métriques pseudo-cylindriques dans la classe conforme dela métrique produit

Therorem (3-1)
Soit $(S^1(T) \times S^{n-1}, g_0 = dt^2 + d\xi^2)$ *le produit riemannien d'un cercle de longueur* T *et de la (n-1)-sphere standard de rayon 1. Supposons que la valeur de* T *satisfait la condition*

$$T_{k-1} = \frac{2\pi(k-1)}{\sqrt{n-2}} < T \leq T_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{n-2}}, \tag{31}$$

où l'entier $k \geq 1$.
Alors, il existe dans la classe conforme $[g_0]$ *au moins k métriques pseudo-cylindriques invariante par rotation*

$$g^j{}_c = (u^j{}_c)^{\frac{4}{n-2}}(dt^2 + d\xi^2) \quad , \quad j = 0, 1, 2, .., k-1 \quad avec \quad g^0{}_c = g_0.$$

$k = 1$ *correspondant à la métrique produit triviale* $C^{te}(dt^2 + d\xi^2)$.

Le théorème qui suit décrit les propriétés des courbures de ces métriques

Theorem (3-2)
Soit la variété produit $(S^1(T) \times S^{n-1}, dt^2 + d\xi^2)$ *: un cercle de longueur* T *par la (n-1) sphère standard, de rayon 1.*
Supposons $T > \frac{2\pi}{\sqrt{n-2}}$, *alors le tenseur de Ricci d'une métrique pseudo-cylindrique est non paralléle et la courbure riemannienne est harmonique.*
De plus, toute métrique pseudo-cylindrique peut être identifiée à une métrique de Derdzinski à un diffeomorphisme conforme prés.

Pour le cas général (k entier quelconque ≥ 2), on a le

Corollaire(3-3)
Soit $\bar{g}$ *une métrique à courbure scalaire constante positive et conforme à la métrique standard* g_0 *sur la variété* $S^n - \Lambda_k$ *avec* $\Lambda_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ $k \geq 2$. *Si* $\bar{g} \neq g_0$, *alors son tenseur de Ricci est non paralléle .*

18.1 Commentaires

Les métriques pseudo-cylindriques étant conformèment plates, alors leurs courbures riemanniennes sont harmoniques, (Besse [B], Chap. 16).
Si de plus, $T \leq \frac{2\pi}{\sqrt{n-2}}$, la seule solution est la métrique cylindrique, et son tenseur de Ricci est bien sûr paralléle.
Par contre, si $T > \frac{2\pi}{\sqrt{n-2}}$, alors il existe au moins une métrique pseudo-cylindrique non triviale, soit $g_c = v_c{}^{\frac{4}{n-2}}(dt^2 + d\xi^2)$, [Sc], et [Tr2] . On écrit $g_0 = dt^2 + d\xi^2$.
Considèrons une carte locale sur cette variété, les coordonnées étant $(x^0, x^1, ..., x^{n-1})$, et $x^0 = t$ est la coordonnée sur le cercle S^1.
Tout tenseur métrique $\bar{g}$ dans la classe conforme $[g_0]$ peut s'écrire :
$\bar{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g_0$, où la fonction C^∞ v, est définie sur le cercle. On obtient alors les expressions dans ce système de coordonnées locales.

D'aprés (29), v doit être une solution périodique non constante. On en déduit que si la fonction u est non constante, alors $D_0 \bar{\mathcal{R}}_{00} \neq 0$. La courbure de Ricci associée à une métrique pseudo-cylindrique est donc non paralléle, sauf pour la métrique cylindrique.

Par ailleurs, pour les métriques de Derdzinski décrites plus haut, on remarque que dans le cas conformèment plat, le facteur N peut être identifié à la sphère standard S^{n-1} . Aussi, les métriques qui sont conformèment plates, sont conformes à la métrique cylindrique.
En effet, on peut écrire

$$dt^2 + f^2(t) d\xi^2 = f^2(t)[(\frac{dt}{f})^2 + d\xi^2].$$

Après un changement de variables, on peut exprimer ainsi

$$dt^2 + f^2(t) g_0 = \phi^2(\theta)[d\theta^2 + d\xi^2]$$

qui est conformèment plate, d'où le lemme, voir Yau [Y]

Lemme (3-4)
Toute métrique tordue $dt^2 + f^2(t) g_0$ *sur la variété riemannienne produit* $(S^1(T) times S^{n-1}, dt^2 + g_0)$ *doit être conformèment plate, et conforme à la métrique cylindrique* $d\theta^2 + d\xi^2$ *où* θ *est une* S^1*-parametrisation de longueur* $\int_{S^1} \frac{dt}{f(t)}$.

Par conséquent, toute métrique de Derdzinski s'identifie à une métrique pseudo-cylindrique à un difféomorphisme conforme prés, soit F ce difféomorphisme. On peut alors écrire

$$dt^2 + f^2(t)d\xi^2 = F^*({v^j}_c^{\frac{4}{n-2}}(dt^2 + d\xi^2)),$$

où ${v^j}_c$ sont les solutions pseudo-cylindriques appartenant à la même classe conforme.

18.2 Connexions de Yang-Mills

On met ainsi en évidence des métriques "tordues" (autres que celles de A. Derdzinski [De]) $g = dt^2 + h^2(t)g_0$ sur la variété $S^1 \times S^{n-1}$, lorsque la longueur du cercle vérifie :

$$\mathcal{T} = \int_{S^1} \frac{dt}{h(t)} = 2\pi\sqrt{n - 1/R}$$

où R est la courbure scalaire de (S^{n-1}, g_0).

Cette condition qui est de nature purement géométrique correspond en fait à la condition de bifurcation de l'équation (29), permettant l'apparition de famille de solutions non triviales.
D'ailleurs, ces solutions peuvent être déterminées explicitement, voir [P5] et [P6]. En outre, pour cette variété produit, la courbure riemannienne est harmonique : $D^iR_{hijk} = 0$ et, le tenseur de Ricci associé à ${v^j}_c$ est non parallèle, auquel cas la connexion de Levi-Civita est une connexion de Yang-Mills sur le fibré tangent.

On en déduit par ailleurs sur R^n pour $n = 4, 6$ une famille de métriques à courbure scalaire constante positive. Pour $n = 4$, on obtient des solutions aux équations de Yang-Mills euclidiennes.

19 Estimation globale des solutions

Comme on vient justement de le remarquer, l'équation (29) peut être résolue de manière explicite, au moins pour certaines dimensions.
Plus précisèment, pour les dimensions 4 et 6, l'équation (29) peut s'intégrer au moyen des fonctions elliptiques. Pour ces dimensions, les fonctions ${v^j}_c$ qui ont nécessairement une période réelle T, sont des fonctions méromorphes.

De plus, T est la période de $\gamma_c(t)$, la courbe intégrale de l'équation (29), qui est une courbe elliptique. Rappelons que toute solution correspondante à ${v^j}_c$ de l'équation (28) doit avoir deux points singuliers 0 et ∞ , comme cela a été prouvé par Cafarelli-Gidas-Spruck [C-G-S].
Ils ont donné de plus une estimation de cette solution au voisinage d'un point singulier $p \in \Lambda$.

19.1 Autre résultat

Lorsque r est voisin de 0, u doit satisfaire les inégalités

$$C^{-1}\, r^{\frac{2-n}{2}} \leq u(r) \leq C\, r^{\frac{2-n}{2}}$$

Pour une certaine constante C , ne dépendant que de n. Autrement dit, la métrique ${g^j}_c = ({u^j}_c)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ doit être cylindriquement bornée à l'approche du point $p \in \Lambda$, voir [Sc]. En fait, l'estimation de u ne nécessite pas cette hypothèse, au moins pour les dimensions 4 et 6.
On obtient plus précisèment le résultat suivant, [P12] et [Tr4].

Théorème (3-5)
Soient ${g^j}_c = ({u^j}_c)^{\frac{4}{n-2}} g_0$, *les métriques pseudo-cylindriques, définies plus haut. Pour les dimensions* $n = 4$ *et* 6, *on a les inégalités suivantes, définies pour tout* r

$$r^{\frac{n-2}{2}} {u^j}_c(r) \leq {C^1}_n(T) \qquad et \qquad r^{\frac{n}{2}} \frac{d{u^j}_c(r)}{dr} \leq {C^2}_n(T),$$

où les constantes ${C^1}_n$ *et* ${C^2}_n$ *ne dépendent que de la période* T.

19.2 Remarques générales

Considèrons les orbites du système autonome associé à l'équation (29)

$$v'^2 = (\frac{n-2}{2})^2 \Big[v^2 - v^{\frac{2n}{n-2}} \Big] - c. \tag{32}$$

Les orbites sont fermées lorsque la constante énergie c vérifie la condition $0 < c < c_0$ où

$$c_0 = \frac{2}{n}(\frac{n-2}{2})^2(\frac{n-2}{n})^{\frac{n-2}{2}}.$$

D'après le changement utilisé plus haut, on a

$$u(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}}(log\frac{1}{|x|}).$$

Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que la fonction $v(t)$ est bornée.
Or, pour la dimension $n = 4$, (31) devient

$$v'^2 = v^2 - v^4 - c,$$

et toutes les solutions s'expriment au moyen des fonctions elliptiques de Jacobi. Pour $n = 6$, (31) devient

$$v'^2 = 4(v^2 - v^3)$$

et toutes les solutions sont des fonctions elliptiques de Weierstrass : $v(t) = \frac{1}{3} - \wp(t + \beta)$.

De plus, on sait que lorsque t croit dans l'intervalle $]0, \frac{T}{2}[$, la fonction de Weierstrass $\wp(t + \beta)$ décroit de manière monotone dans l'intervalle $[\wp(\frac{T}{2} + \beta), +\infty[$. On obtient ainsi explicitement la borne pour $n = 6$

$$r^2u(r) \leq e^{-T}u(e^{\frac{-T}{2}}).$$

Par ailleurs, pour la dimension $n = 4$, on obtient de manière analogue la borne suivante

$$ru(r) \leq e^{\frac{-T}{2}}u(e^{\frac{-T}{2}}).$$

20 Existence des métriques de Derdzinski

A. Derdzinski a donné des exemples de variétés compactes à courbure harmonique et à tenseur de Ricci non paralléle : $\delta\mathcal{R} = 0$ et $\nabla r \neq 0$. Il obtient de plus une classifcation de toutes ces métriques, [D].

Les variétés correspondantes sont des fibrés de fibre N sur le cercle S^1 (paramétrisé par l'arc t et de longueur $T = \int_{S^1} dt$) munies de métriques "tordues" $dt^2 + h^{4/n}(t)g_0$ sur le produit $S^1 \times N$.

Ici, (N, g_0) est une variété d'Einstein de dimension $n-1, n \geq 3$, de courbure scalaire R et la fonction $h(t)$ est une solution périodique d'une EDO

$$h'' - \frac{nR}{4(n-1)}h^{1-4/n} = -\frac{n}{4}Ch \qquad \text{pour une constante} \qquad C > 0. \qquad (33)$$

Cette fonction est non constante, sinon la métrique correspondante a un tensor de Ricci parallele.

Considèrons le changement

$$h(t) = \alpha + j(t)$$

où la constante $\alpha = \left(\frac{R}{4(n-1)C}\right)^{n/4}$.
L'équation (32) devient

$$(32') \qquad j'' - \frac{nC}{4}(1+j)^{1-4/n} = -\frac{n}{4}C(1+j)$$

$$(32') \qquad j'' - \frac{nC}{4}(1 + (1-4/n)j + (-2/n)j^2 + ...) + \frac{n}{4}C(1+j) = 0$$

$$(32') \qquad j'' + Cj + ... = 0$$

Lorsque h est proche de α , j s'approche de 0.
Ceci signifie que l'équation (32') bifurque en $j \equiv 0$ lorsque $C = (\frac{2\pi}{T})^2$. De même l'équation (32) bifurque en $h \equiv \alpha$ lorsque $C = (\frac{2\pi}{T})^2$.
Ainsi, il existe une borne positive T_0 telle que lorsque $T \leq T_0$ cette équation n'admet que des solutions constantes, i.e. $h(t) \equiv \alpha = \left(\frac{R}{4(n-1)C}\right)^{n/4}$.

Nous pouvons alors déduire le résultat suivant

Theorem (3-6) *Considèrons la variété riemannienne produit* $(S^1 \times N, dt^2 + g_0)$ *øù* (S^1, dt^2) *est un cercle de longueur* T *et* (N, g_0) *est une variété d'Einstein de dimension* $n-1, n \geq 3$ *à courbure scalaire constante positive* R.
Il existe alors une constante positive T_0 *telle que si* $T \leq T_0$ *cette variété n'admet pas de métrique riemannienne tordue* $dt^2 + h^{4/n}(t)g_0$ *dont le tensor de Ricci est non parallele.*

D'une manière générale, en utilisant la clssification de Derdzinski, on peut prouver un résultat plus général

Theorem (3-7) *Considerons le produit riemannien tordu* $(S^1(T) \times N, dt^2 + h^{4/n}(t)g_0)$. *La fonction positive périodique non constante* $h(t)$ *satisfait l'équation (32) et* (N, g_0) *est une variété d'Einstein de dimension* $n-1, n \geq 3$ *à courbure scalaire constante positive* R . *Alors, si la longueur du cercle* T *satisfait les inégalités suivantes*

$$2\pi \frac{(k-1)}{\sqrt{C}} < T \leq \frac{k}{\sqrt{C}} \ , \qquad \text{où } k \ \text{ est un entier} > 1,$$

il existe alors au moins k *métriques tordues invariantes par rotations* $dt^2 + h^{4/n}(t)g_0$ *sur la variété produit* $S^1(T) \times N$.
De plus, ces métriques ont une courbure harmonique. Leur tensor de Ricci est non paprallele seulement si $T > \frac{2\pi}{\sqrt{C}}$.
Réciproquement, si la métrique tordu du type $dt^2 + h^{4/n}(t)g_0$ *sur la variété* $S^1(T) \times N$ *a une courbure harmonique, alors la fonction* $h(t)$ *sur le cercle satisfait l'EDO (32).*

REFERENCES

[B] A.L.Besse *Einstein Manifolds* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 10. Springer. New-York, Berlin (1987).

[$C-G-S$] L.Cafarelli, B.Gidas and J.Spruck *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev Growth* Comm. Pure and Appl. Math., vol XLII (1989), 271-297.

[De] A. Derdzinski *On compact Riemannian manifolds with harmonic curvature* Math. Ann., vol 259, (1982), 145-152.

[$De1$] A. Derdzinski *Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non parallel Ricci tensor* Math. Z., 172, 1980, p. 277-280

[D] W. Y. Ding *On a conformally invariant elliptic equation on* R^n. Comm. Math. Phys., 107, (1986) 331-335.

[$K-N$] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of differential geometry* vol. I, II, New-York, London, Interscience, 1963 et 1966.

[$M-Pa$] R.Mazzeo and F.Pacard *Constant scalar curvature metrics with isolated singularities* MSRI, dg-ga server, preprint (1996).

[Sc] R.Schoen *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics* Lectures Notes in Math., 1365, Springer-Verlag (1989), 120-154.

[Y] S.T. Yau *Remarks on conformal transformations* J. Diff. Geom.,8, 1973, p. 369-381.

Cinquième partie

Problèmes isopérimètriques plans

Articles présentés

[P2] *Problèmes de Paul Lévy sur les polygones articulés*
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol X, p.175-180, 1988

[P9] *Problems on polygons and Bonnesen type inequalities* Indagationes Math., vol 10, n. 4, p.495-506 (1999).

[P18] *On the Bonnesen-Type Inequalities* in Symbolic Computation : New Horizons. Proc of the Fourth Intern Math. Symp., IMS'2001, Tokyo (Japan).Y. Tazawa, S. Sakakibara, S. Ohashi, Y. Uemura.Tokyo Denki Univ. Press, p.213-222 (2001).

21 Présentation du problème

Pour une courbe simple fermée $\mathcal{C}$ dans le plan euclidien, de longueur L, entourant un domaine d'aire A, on a l'inégalité

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{34}$$

L'égalité étant atteinte si et seulement si cette courbe est un cercle euclidien. Ce qui signifie que parmi tous les domaines d'aire fixée, le cercle euclidien est celui qui a le plus petit périmètre.

Par ailleurs, la quantité $L^2-4\pi A$ appelée *la déficience isopérimètrique* de $\mathcal{C}$ est en rapport avec la géométrie de cette courbe. En ce sens, que la courbe se rapproche de la forme circulaire, lorsque $L^2 - 4\pi A$ est le plus petit possible. L'inégalité classique de Bonnesen donne une estimation de cette déficience isopérimétrique

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R-r)^2 \tag{35}$$

où R le rayon du cercle circonscrit à la courbe $\mathcal{C}$ et r est le rayon du cercle inscrit.

D'une manière générale, des inégalités de la forme

$$L^2 - 4\pi A \geq K \tag{36}$$

où K est positif, dépendant seulement de la géometrie de la courbe ($K = 0$ correspondant au cercle euclidien), sont appelées inégalités de type Bonnesen (voir Osserman [O]).

Soit Π_n un polygone à n côtés, de périmètre L_n et entourant une aire A_n, On a l'inégalité connue

$$L_n^2 - 4(n \tan \frac{\pi}{n}) A_n \geq 0, \tag{37}$$

L'égalité est atteinte si et seulement si le polygone est régulier.

De plus, on sait qu'un polygone a une aire maximale s'il est convexe et inscriptible dans un cercle. Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ les longueurs des côtés de Π_n. Pour un triangle, la formule de Heron exprime l'aire en fonction des côtés

$$A_3 = \frac{1}{4} L_3^2 \sqrt{(1 - \frac{2a_1}{L_3})(1 - \frac{2a_2}{L_3})(1 - \frac{2a_3}{L_3})}.$$

pour un quadrilatère, la formule de Brahmagupta donne une estimation de l'aire

$$A_4 \leq \frac{1}{4} L_4^2 \sqrt{(1 - \frac{2a_1}{L_4})(1 - \frac{2a_2}{L_4})(1 - \frac{2a_3}{L_4})(1 - \frac{2a_4}{L_4})},$$

avec égalité si et seulement si, Π_4 est inscriptible dans un cercle.

22 De nouvelles constantes isopérimètriques

22.1 Conjecture de Paul Lévy

Une question intéressante est de savoir s'il n'existe pas d'autres formules du même type pour des polygones plans à n côtés. Plus précisèment, peut-on comparer l'aire A_n avec

$$P_n = \frac{L_n^2}{4}\sqrt{(1-\frac{2a_1}{L_n})(1-\frac{2a_2}{L_n})(1-\frac{2a_3}{L_n}).....(1-\frac{2a_n}{L_n})} \tag{38}$$

Cette question a été abordée par plusieurs géomètres, notamment par P. Levy [L] qui s'est intéressé à ce problème, et a même proposé la

Conjecture 1 : *Soit le rapport* $\varphi_n = \frac{A_n}{P_n}$. *Pour tout n-polygone* Π_n, *de côtés* $a_1, a_2, ..., a_n$ *entourant une aire* A_n, *et* P_n *défini plus haut, ce rapport vérifie les inégalités*

$$a)\quad \frac{e}{\pi} \leq \varphi_n \qquad et \qquad b)\quad \varphi_n \leq 1.$$

A l'origine, la Conjecture 1 a été motivée par l'étude des polygones cycliques. Plus exactement, pour un polygone régulier, on a $\frac{a_i}{L_n} = \frac{1}{n}$. D'où la valeur correspondante de φ_n

$$\varphi_n{}^0 = \frac{(1-\frac{2}{n})^{-n/2}}{n\tan\frac{\pi}{n}} \tag{39}$$

qui vérifie évidemment la Conjecture 1. On peut remarquer de plus, que $\varphi^0{}_n$ est une fonction décroissante en n.

Définissons alors

$$\tau_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_n{}^0}\ . \tag{40}$$

Notons que ce rapport approche la valeur 1 chaque fois que Π_n tend à être régulier. On verra plus loin que τ_n est lié à une nouvelle inégalité de type Bonnesen pour les polygones plans.

22.2 Conjecture de Zhang

Par ailleurs, H.T. Ku, M.C. Ku et X.M. Zhang, ([K.K.Z] et [Z]) se sont intéressés à ce même problème, mais leur approche est différente. Ils considèrent ce qu'ils appellent le pseudo-périmètre du second type $\hat{L}_n$, defini par

$$\hat{L}_n = (\frac{n}{n-2})L_n[(1-\frac{2a_1}{L_n})(1-\frac{2a_2}{L_n})(1-\frac{2a_3}{L_n}).....(1-\frac{2a_n}{L_n})]^{1/n} \tag{41}$$

En fait, il y a une relation entre $\hat{L}_n$ et P_n, à savoir :

$$\hat{L}_n = (\frac{n}{n-2})(4P_n)^{\frac{2}{n}} L_n^{\frac{n-4}{n}}. \tag{42}$$

X.M. Zhang ([Z] p. 196) a proposé la

Conjecture 2 : *Pour tout n-polygone cyclic* Π_n, *on a*

$$\hat{L}_n^2 - 4(n\tan\frac{\pi}{n})A_n \geq 0.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si Π_n *est regulier.*

Pour un n-polygone Π_n, on a déjà l'inégalité naturelle $\hat{L}_n \leq L_n$. L'égalité $\hat{L}_n = L_n$ est obtenue si et seulement si Π_n est régulier (voir Lemme (4-6) de [Ch]).

D'une manière générale, on peut se pencher sur le problème suivant, analogue à cette conjecture

Problème 2' : *Soit une courbe simple rectifiable dans le plan euclidien* $\mathcal{C}$ *de longueur* L *et entourant une aire* A. *Soit* $(\Pi_n)_n$ *une suite de n-polygones approchant* $\mathcal{C}$. L_n, $\hat{L}_n$ *et* A_n *sont respectivement le périmètre, the pseudo-périmètre et l'aire de* Π_n. *On suppose que la limite* $\hat{L} = \lim_{n\to\infty}\hat{L}_n$ *existe, a-t'on l'inégalité de type Bonnesen*

$$\hat{L}^2 - 4\pi A \geq 0 \quad ?$$

Des exemples étudiés plus loin, montrent que le Problem 2' peut avoir des solutions.

23 Résultats

Revenons aux polygones, on montre le résultat suivant

23.1 Theorem (4-1) :

Soit $\tau_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_n{}^0}$ *et* $\nu_n = (\frac{L_n}{\hat{L}_n})^{\frac{n}{2}-2}$ *les constantes associées à un polygone cyclique* Π_n *, de côtés* $(a_1, a_2, ..., a_n)$. L_n *et* $\hat{L}_n$ *étant respectivement le périmètre et le pseudo-périmètre. On a alors :*
(i) L'inégalité $\tau_n \leq 1$ *implique la Conjecture 1 b) et la Conjecture 2. De plus, cette implication est stricte.*
(ii) La double inégalité $1 \leq \tau_n \leq \nu_n$ *entraine la Conjecture 1 a) et la Conjecture 2.*
(iii) L'inégalité $\nu_n < \tau_n$ *contredit la Conjecture 2.*
Pour ces trois cas, l'égalité $1 = \tau_n = \nu_n$ *est atteinte si et seulement si* Π_n *est régulier .*

Le cas (i) du Théorème 1 entraine en particulier que

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_n{}^0} \leq 1 \leq (\frac{L_n}{\hat{L}_n})^{\frac{n}{2}-2}.$$

Seul le cas (ii) sera illustré par divers exemples, .
On en déduit en particulier à partir de ii) and iii) que $\tau_n \leq \nu_n$ est équivalente à la Conjecture 2.
En conséquence, on obtient le résultat suivant.

Corollaire (4-2)
Supposons l'hypothèse $\tau_n \leq 1$ *est vérifiée pour un n-polygone cyclique, on a alors l'inégalité isopérimètrique de type Bonnesen suivante*

$$L_n^2 - 4(n \tan \frac{\pi}{n}) A_n \;\geq\; L_n^2(1 - \frac{\varphi_n}{\varphi_n{}^0}).$$

L'égalité est atteinte si et seulement si Π_n *est régulier (i.e.* $\varphi_n = \varphi_n{}^0$*).*
De plus, cette inégalité est la plus fine.

23.2 Remarques

1. Soient $L_n, \hat{L}_n,$ A_n respectivement le périmètre, le pseudo-périmètre et l'aire d'un polygone quelconque Π_n . Les côtés étant de longueur $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Soit le rapport $\varphi_n = \frac{A_n}{P_n}$, où

$$P_n = \frac{L_n^2}{4}\sqrt{(1-\frac{2a_1}{L_n})(1-\frac{2a_2}{L_n}).....(1-\frac{2a_n}{L_n})} = \frac{1}{4}(\frac{n-2}{n})^{\frac{n}{2}}(\hat{L}_n)^{\frac{n}{2}}(L_n)^{\frac{4-n}{2}}. \tag{43}$$

On trouve l'expression

$$\varphi_n = \frac{4A_n}{L_n^2}(\frac{n-2}{n})^{-\frac{n}{2}}(\frac{L_n}{\hat{L}_n})^{\frac{n}{2}}$$

Aprés simplification, on a

$$\frac{\varphi_n}{{\varphi_n}^0} = \frac{4n\tan(\frac{\pi}{n})A_n}{L_n^2}(\frac{L_n}{\hat{L}_n})^{\frac{n}{2}}$$

Par conséquent, on obtient une relation entre les rapports τ_n et ν_n,

$$\tau_n = \frac{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}{\hat{L}_n^2}\nu_n. \tag{44}$$

Ce qui prouve que la Conjecture 2 est équivalente à l'inégalité

$$\tau_n \leq \nu_n.$$

Par ailleurs, puisque les exemples exhibés plus bas vérifient la condition (ii) du Theorem 1 $1 \leq \tau_n \leq \nu_n$, on en déduit que l'implication (i) est nécessairement stricte.
De plus, $\varphi_n \leq {\varphi_n}^0 \leq 1$ entraine que $(\frac{L_n}{\hat{L}_n})^{\frac{n}{2}} \leq \frac{{L_n}^2}{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}$. C'est à dire entrainant l'inégalité

$$\nu_n \leq \frac{\hat{L}_n^2}{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n},$$

qui est précisèment équivalente à la Conjecture 2, car $\nu_n \geq 1$.
On peut aussi déduire d'aprés ce qui précéde des conditions nécessaires satisfaites par τ_n. On montre aussi l'inégalité

$$\tau_n \leq {\nu_n}^{\frac{n}{n-4}}$$

Précisons que toutes les égalités sont atteintes pour un polygone régulier seulement si $1 = \nu_n$. Ce qui prouve le Théorème 1.

2. Pour prouver le Corollaire 2, remarquons que, du fait $\nu_n \geq 1$ on peut alors déduire ce qui suit

$$\frac{\varphi_n}{{\varphi_n}^0} \geq \frac{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}{L_n^2}.$$

On obtient l'inégalité suivante qui permet de montrer l'inégalité de type Bonnesen

$$1 - \frac{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}{L_n^2} \geq 1 - \frac{\varphi_n}{{\varphi_n}^0}.$$

De plus, cette inégalité est la plus fine car

$$1 \geq \tau_n \geq \frac{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}{\hat{L}_n^2} \tag{45}$$

Ainsi,

$$0 \leq \hat{L}_n^2(1-\tau_n) \leq \hat{L}_n^2 - 4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n$$

Il est clair cependant que l'égalité est atteinte si le polygone Π_n est régulier. Réciproquement, supposons

$$L_n^2 - 4(n\tan\frac{\pi}{n})A_n \ = \ L_n^2(1 - \frac{\varphi_n}{{\varphi_n}^0}).$$

Ce qui est équivalent à

$$\tau_n = \frac{4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n}{L_n^2}. \tag{46}$$

Ceci signifie que $\nu_n = 1$, i.e. Π_n est régulier (voir [Ch], Lemme(4.6)).

Autre Remarque

Sous les hypothèses du Corollaire 2, supposons de plus, que $\tau_n\nu_n \geq 1$. Alors, on obtient une meilleure inégalité isopérimètrique

$$\hat{L}_n^2(1-\tau_n) \leq \hat{L}_n^2(1-\frac{1}{\nu_n}) \leq \hat{L}_n^2 - 4n(\tan\frac{\pi}{n})A_n.$$

24 Etude de quelques exemples

Nous allons tester l'hypothèse (ii) du Théorème 1 qui entraine la Conjecture 2.

24.1 Des polygones particuliers

1 - Considèrons le polygone de Macnab, qui est un polygone cyclique à $2n$ côtès, parmi eux n sont de longueur a et les n autres sont de longueur b.
Cet exemple a déjà été utilisé par [K,K,Z] et par [Z], pour tester leurs conjectures.
En fait, on est en mesure de montrer le résultat suivant

Proposition (4-3)
Soit $\Pi_{n,n}$, un 2n-polygone cyclique dont n côtès sont de longueur a et n de longueur b, la constante associée étant $\varphi_{n,n}$. On a alors,

$$1 \leq \frac{\varphi_{n,n}}{\varphi^0} \leq (\frac{L_{n,n}}{\hat{L}_{n,n})^{\frac{n}{2}-2}}.$$

2 - Voici un autre exemple. Soit Π_n^0 le n-polygone régulier, les côtès a_i^0 sont sous-tendus par l'angle $\frac{\pi}{n}$. Considèrons Π_n^ε le polygone obtenu à partir de Π_n^0 en variant a_1, a_2 qui sont sous-tendus respectivement par $\frac{\pi}{n} - \varepsilon$ et $\frac{\pi}{n} + \varepsilon$. Les autres côtès de longueur a_i^0, $3 \leq i \leq n$. sont inchangés. Pour ce cas là encore, l'hypothèse (ii) est vérifiée par Π_n^ε.

Proposition (4-4)
Soit Π_n^ε le n-polyogne défini plus haut, φ_n^ε étant la constante associée. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $1 \leq \frac{\varphi_n^\varepsilon}{\varphi_n^0} \leq (\frac{L_{n,n}}{\hat{L}_{n,n}})^{\frac{n}{2}-2}$.

Il semble que la fonction $\varphi(a_{1,}a_{2,}...., a_n)$ associée à un n-polygone possède un minimum local pour le polygone régulier.

24.2 Les polygones de Lévy

Dans cette partie, on va discuter de la Conjecture 1, et de son lien avec certaines inégalités de Bonnesen au moyen d'exemples appropriés. A part les polygones réguliers, nous connaissons peu de cas de polygones vérifiant la Conjecture 1. P. Levy a remarqué les propriétés suivantes concernant la fonction φ_n qui est en fait une fonction des longueurs

$$\varphi_n = \varphi_n(a_1, a_2, a_3, ..., a_n).$$

En effet, φ_n est une fonction algébrique symétrique et bornée. Sa borne est indépendante de n et doit vérifiée l'égalité

$$\varphi_n(a_1, a_2, a_3, ..., 0) = \varphi_{n-1}(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\tau_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) < \tau_n(a_1, a_2, alpha.$$

On a alors,

$$\varphi(\alpha) = \frac{(\pi-\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)}{(\pi-\alpha+\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi-\alpha-\sin\alpha}} e^{\frac{\pi-\alpha}{\pi-\alpha+\sin\alpha}}.$$

$$\tau = \frac{\pi(\pi-\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)}{e(\pi-\alpha+\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi-\alpha-\sin\alpha}} e^{\frac{\pi-\alpha}{\pi-\alpha+\sin\alpha}}$$

et

$$\nu = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{(\pi-\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha)}{+}\sin\alpha}$$

Ainsi pour $0 \leq \alpha \leq \pi$ on obtient la double inégalité (voir [Ch], Proposition(2.1))

$$\frac{e}{\pi} \leq \varphi(\alpha) \leq \sqrt{\frac{e}{3}}.$$

Cette inégalité peut être aussi vérifiée plus rapidement par *Mathematica.*

On déduit par ailleurs les expressions $\frac{4\pi A}{\hat{L}^2}$ en fonction de α.

$$\frac{4\pi A}{\hat{L}^2} = \pi\frac{(\pi-\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha)}{(\pi-\alpha+\sin\alpha)^2}.$$

Avec *Mathematica*, on prouve aisément que le membre de droite est une fonction décroissante en α, et pour $\alpha = 0$, il est égal à 1. D'où la partie b) de la Proposition 1.

P. Levy a considéré un autre polygone courbé. Soit $\Pi(\alpha,\theta)$ le polygone obtenu à partir de $\Pi(\alpha)$ en remplacant le côtès de longueur $l = 2\sin\alpha$ par deux autres côtès, dont l'un est de longueur $2\sin\theta$.

On obtient les expressions du périmètre et de l'aire de ce nouveau polygone $\Pi(\alpha,\theta)$, $L(\alpha,\theta) = 2[\pi - \alpha + \sin\theta + \sin(\alpha+\theta)]$, $A(\pi-\alpha,\theta) = \pi - \alpha + \sin\alpha\cos(\alpha+2\theta)$. avec $0 \le \theta \le \alpha$.

Pour $\theta = 0$ on retrouve $\Pi(\alpha,0) \equiv \Pi(\alpha)$.

Proposition (4-5)
Soit $L(\alpha,\theta)$, $\hat{L}(\alpha,\theta)$, $A(\alpha,\theta)$ *respectivement le périmètre, le pseudo-périmètre et l'aire du "polygon"* $\Pi(\alpha,\theta)$ *ainsi défini,avec* $0 \le \alpha \le \pi$, *et* $0 \le \theta \le \pi - \alpha$. *On a les inégalités suivantes*

a) $\varphi(\alpha,\theta_0) \le \varphi(\alpha,\theta) \le \varphi(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2}) \le 1$ *pour un* $\theta_0 > 0$.
b) $1 \le \frac{\varphi(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}{\varphi^0} \le \frac{\pi}{e}$ *with* $\varphi(\pi,0) = 1.$ *and* $\varphi(0,\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{e}$.
c) $\hat{L}^2(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2}) - 4\pi A(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2}) \ge 0$.
L'égalité est atteinte si et seulement si $\alpha = \pi$.

Preuve
Calculons l'expression de la fonction $\varphi(\alpha,\theta)$ définie plus haut

$$\varphi(\alpha,\theta) = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+2\theta)}{[\alpha + \sin\theta + \sin(\alpha+\theta)]\sqrt{\alpha^2 - 4\sin^2(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{2}+\theta)}} e^{\frac{\alpha}{[\alpha+\sin\theta+\sin(\alpha+\theta)]}}$$

On peut trouver les détails des calculs dans [L] et [Ch]. En particulier, pour $0 \le \alpha \le \pi$ on a vu ([Ch], Proposition (3-1)) que $\varphi(\alpha,\theta)$ admet un maximum $\theta_0 = \frac{\pi-\alpha}{2}$, et deux minimums θ_1, θ_2 symétriques par rapport à θ_0 , tels que $\varphi(\alpha,\theta_1) = \varphi(\alpha,\theta_2)$.

On montre de plus que $\frac{\varphi(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}{\varphi^0}$ est une fonction décroissante, on a

$$\varphi(\pi,0) = 1, \quad et \quad \varphi(0,\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{e}.$$

Par ailleurs, en calculant l'expression de $\frac{4\pi A(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}{\hat{L}^2(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}$ en fonction de α, on trouve

$$4\pi\frac{A(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}{\hat{L}^2(\alpha,\frac{\pi-\alpha}{2})}=\pi\frac{(\pi-\alpha+\sin\alpha)}{(\pi-\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2})^2}.$$

On vérifie aisément avec *Mathematica* que cette fonction est décroissante et est minorée par 1. Ainsi la partie c) de la Proposition 2 est démontrée.

25 Une conjecture

D'aprés l'étude précédente, on peut s'attendre tout naturellement à) ce que l'hypothèse (ii) du Theorem 1 soit vérifiée par tout polygone cyclique. On peut donc énoncer la

Conjecture 3 : *Pour tout n-polygone* Π_n, *on a les inégalités*

$$1 \leq \tau_n \leq \nu_n,$$

et $1 = \tau_n = \nu_n$ *si et seulement si* Π_n, *est régulier.*

Celle-ci entraine évidemment la Conjecture 2 et la partie a) de la Conjecture 1 . Cette Conjecture 3 apparait donc mieux adaptée. Aussi, peut-on remarquer dans cette direction, que d'aprés le Théorème 1, on a l'implication

$$\nu_n = 1 \Rightarrow \tau_n = 1$$

REFERENCES

[Ch]ÿ R. Chouikha *Problème de P. Levy sur les polygones articulés* C. R. Math. Report, Acad of Sc. of Canada, vol 10, p. 175-180, 1988.

[F] B. Fuglede *Bonnesen inequality for the isoperimetric deficiency of closed curves in the plane* Geometriae Dedicata, vol 38, p. 283-300, 1991.

[K.K.Z] H.T. Ku, M.C. Ku, X.M. Zhang *Analytic and geometric isoperimetric inequalities* J. of Geometry, vol 53, p.100-121, 1995.

[L] P. Levy *Le problème des isopérimètres et des polygones articulés* Bull. Sc. Math., 2eme serie, 90, p.103-112, 1966.

[O2] R. Osserman *Bonnesen-style isoperimetric inequalities* Amer. Math. Monthly, vol 1, p. 1-29, 1979.

[Z] X.M. Zhang *Bonnesen-style isoperimetric inequalities and pseudo-perimeters* J. of Geometry, vol 60, p.188-201, 1997.

Sixième partie

LISTE DES PUBLICATIONS

A - CONTRIBUTIONS PRINCIPALES PARUES OU ACCEPTEES

A - Publications parues dans des revues à comité de lecture

[P1] - Nouveau développement de fonctions elliptiques
C..R. Acad. Sci., Paris, t.306, série I, p.655-658 (1988).

[P2] - Problèmes de Paul Levy sur les polygones articulés
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol X, p.175-180 (1988).

[P3] - Métriques conformèment plates et Equations de Yang-Mills
Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIII, p.7-12 (1991).

[P4] - Famille de métriques conformèment plates et régularité
C.R. Math. Rep. Acad. Sci. of Canada, vol XIV, p.257-262 (1992).

[P5] - (with A. Kelfa) Monotonicity properties of the period function of some planar
Hamiltonian systems. Commun. on Appl. Nonlin. Anal., vol 4, n°3, p. 99-120, (1996).

[P6] - Fonctions elliptiques et bifurcations de certaines équations différentielles
Canadian Bull. of Math., vol 40 (3), p.276-284, (1997).

[P7] - On the Expansions of Elliptic Functions and Applications.
C.R.M. Proc. and Lectures Notes of A.M.S., vol 22, n 1, p.53-57, (1998).

[P8] - (with F. Cuvelier) Remarks on the monotonicity of the period function.
Applicationes Math., vol 26, n. 3, p. 243-252 (1999).

[P9] - Problems on polygons and Bonnesen type inequalities.
Indagationes Math., vol 10, n. 4, p.495-506 (1999).

[P10] - Remark on Periodic Solutions of Non Linear Oscillators
Applied Math. Lett., vol 14, n 8, p. 363-368 (2001).

[P11] - Periodic Perturbations of Non-Conservative Second Order Differential Equations
Electr. J. of Qualitat. Theory of Diff. Eq., vol 4, n 4, p. 1-12, (2002).
http ://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/2002/200204.html

[P12] - Non Parallelism of Ricci tensor of Pseudo-cylindric Metrics
Geometria Dedicata, vol 93, p. 107-112, (2002)

[P13] - Series Solutions of some Anharmonic Motions Equations
J. Math. Anal. and Appl., vol 272, p. 79-88, (2002)

[P14] - On the Series Solutions of some Anharmonic Motions Equations Simul.
Electr. J. of Diff Equations, vol 10, p.115-122, (2003)

[P15] - Note on Trigonometric Expansions of Theta functions
Journal of Computation Applied Mathematics, vol 153, p. 119-125, (2003)

B - Publications acceptées et à paraître dans des revues à comité de lecture

[P16] - Existence of Metrics with Harmonic Curvature and non Parallel Ricci Tensor To appear in Balk. J. of Geom and Appl. Vol 8, (2003).

C - Publications parues ou à paraître dans des Proceedings à comité de lecture

[P17] - Comparison of some monotonicity conditions for period functions
Innovations in Mathematics (Rovaniemi 1997), ed. V. Keranen
Comp. Mech., Publ., Southampton, p. 83-89, (1997).

[P18] - On the properties of certain metrics with constant scalar curvature
Diff. Geom. and Appl., DGA 98. Sat. Conf. of the I C M in Berlin, 1998.
Brno, Masaryk Univ., p.39-46, (1999).

[P19] - Properties of the period function of some ODE.
Proceedings of Conference on Applied Mathematics. C.A.M. 98, Edmond, Oklahoma, Feb. 20-21, 1998, p. 97-103, (1999).

[P20] - The period function of non homogeneous differential equations.
EQUADIFF 99, Proc. of the Int. Conf. On Diff. Eq. B. Fiedler, K. Groeger, and J.Sprekels, ed. Singapore ; World Scientific. Vol. 1, p. 85-87 (2000).

[P21] - On the Bonnesen-Type Inequalities
in Symbolic Computation : New Horizons. Proc of the Fourth Intern Math. Symp., IMS'2001, Tokyo (Japan).Y. Tazawa, S. Sakakibara, S. Ohashi, Y. Uemura.Tokyo Denki Univ. Press, p.213-222 (2001).

[P22] - On the Multiplicity of certain Yamabe Metrics
Proc. of the 3rd Intern. Conf. On Geometry, Integrablity and Quantization June 14-23, 2001, Varna, Bulgaria. I. M. Mladenov and G. L. Naber Editors, Coral Press, Sofia, 2001, pp. 185-195

[P23]- Ricci Tensor of Pseudo-cylindric Metrics
Proc. of the 8th Diff. Geom. and Appl. DGA01. Aug. 27-31, Opava, (2001).

D - Publications dans des actes de séminaires

[P24] - Sur des développements de fonctions elliptiques
Publ. Math., Fac. des Sci. de Besançon. Fasc. Th. des Nombres, vol 8, (1989).

[P25] - Application de l'analyse en élasticité non linéaire. Problèmes de bifurcations
Publ. Math., Fac. des Sci. de Besançon. Fac. Analyse non linéaire vol 12, (1990).

E - Travaux soumis pour publication

[T26] - The Period Function of Second Order Differential Equations

[T27] - The Behavior of the Period Function of Lienard Systems

[T28] - On the Classification of Lienard Systems with Isochronous Center

[T29] - A New Look at Trigonometric Expansions of Theta Functions

[T30] - Remark on the conjecture of the conformal transformations

F - Travaux en cours

[T31] - Periodic Solutions of Duffing type Equations

[T32] - Note on Certain Expansions of Theta Functions

[T34] - Trigonometric Expansions of Theta Functions

[T35] - (avec J.M. Strelcyn) On the Period Function of the Lienard Equations

G - Travaux pré-publiés

[Tr1] - Semi-groupe d'opérateurs et inclusions de Sobolev sur des variétés riemanniennes
Pré-publ., Fac. des Sci. de Besançon (1991).

[Tr2] - (avec F. Weissler) Monotonicity properties of the period function and the number of constant positive scalar curvaturemetrics on $S^1 \times S^{n-1}$.
Pré-publ. Math., Université Paris-Nord n° 94-14 (Juillet 94).

[Tr3] - (with D. Bättig) On the spectrum of a periodic Schrodinger operator with a constant magnetic field. (Mai 1994).

[Tr4] - Properties of some complete metrics with constant positive scalar curvature .
Pré-publ. Math., Université Paris-Nord n° 96-4 (Février 96).