



HAL
open science

Désordre et plasticité dans les milieux divisés : mousses et matériaux granulaires

Alexandre Kabla

► **To cite this version:**

Alexandre Kabla. Désordre et plasticité dans les milieux divisés : mousses et matériaux granulaires. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. NNT : . tel-00003626

HAL Id: tel-00003626

<https://theses.hal.science/tel-00003626>

Submitted on 23 Oct 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS VII - DENIS DIDEROT

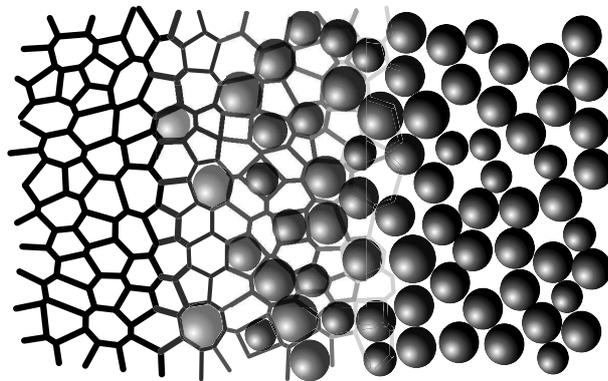
THÈSE

en vue de l'obtention du titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII
Spécialité : Physique

Présentée par
Alexandre KABLA

Sujet :

Désordre et plasticité dans les milieux divisés :
Mousses et matériaux granulaires



Soutenue le 10 septembre 2003 devant le jury composé de :

Mme.	Christiane Caroli	Examineur
Mme.	Elisabeth Charlaix	Rapporteur
M.	Luca Cipelletti	Rapporteur
M.	Georges Debrégeas	Codirecteur de thèse
M.	Pierre-Gilles de Gennes	Président du Jury
M.	Jean-Marc di Meglio	Directeur de thèse
M.	Denis Weaire	Invité

à Jacques,
dont j'aurais aimé sentir la fierté en ce jour,

à Sarah,
qui accepte avec amour le monopole de mes instants bougons,

à mes parents,
qui eurent la gentillesse de faire semblant de me comprendre,

à Mademoiselle Chagall,
ses félines caresses se moquent bien de tout cela.

Remerciements

Le plus naturellement du monde, je tiens à remercier en premier lieu Georges. La tâche n'est pourtant pas aisée tant je lui suis redevable. Il a fortement contribué à faire de mes trois années de thèse une période qui restera, j'en suis sûr, une des plus enrichissantes de mon existence. Merci, Georges, pour ton enthousiasme contagieux, merci de m'avoir fait partager ton imagination et ton sens physique, en particulier lors des quelques deux ou trois mille pauses-café que nous avons dû prendre ensemble! J'y ai beaucoup appris. La liberté de travail que tu m'as offerte, tout en assurant présence et disponibilité, m'a été extrêmement profitable. Je terminerai en remerciant sincèrement l'ami que tu es devenu.

Jean-Marc a joué un double rôle dans cette thèse. Je lui suis très redevable de m'avoir présenté, alors que j'étais en DEA, une image très vivante de la matière molle et de la physique en général. Son discours passionné m'a sans aucune hésitation conduit à engager quelques années d'existence en sa compagnie et celle de Georges. Quatre ans plus tard, je ne peux que le remercier du fond du cœur d'avoir accepté la direction de cette thèse et pris part fortement à sa réalisation.

Elisabeth Charlaix et Luca Cipelletti m'ont fait l'immense plaisir de rapporter cette thèse. Je leur suis très reconnaissant de cet honneur. Ma gratitude s'adresse également à Christiane Caroli, Pierre-Gilles de Gennes et Denis Weaire, qui participèrent activement au jury et manifestèrent un vif intérêt pour ce travail.

Je dois également beaucoup à Olivier Pouliquen qui, avec Christiane Caroli, se sont impliqués dès les débuts dans ce travail et ont pris part à de nombreuses et passionnantes discussions. Je remercie une fois encore Olivier d'avoir animé avec talent le Groupe de Recherche Milieux Divisés. Cette structure profite énormément aux étudiants en leur permettant de rencontrer, dans la convivialité, une communauté par ailleurs très active.

Avant d'aborder les remerciements plus généraux, j'aimerais manifester une très amicale reconnaissance envers ceux qui furent mes chers voisins de bureau, Jérôme et Julien à Strasbourg, et Damien à Paris. Merci infiniment à Damien qui, avec bienveillance, a de nombreuses fois réparé mes oublis. Claudine Williams et Elie Raphaël, directeurs successifs de la structure familiale qu'est le LPMC, je vous remercie très sincèrement pour la chaleur avec laquelle je fus accueilli et l'amitié que vous témoignez depuis.

Un grand merci également à tous ceux qui ont partagé le même espace que moi, et qui ont contribué, chacun à sa façon mais toujours avec sympathie, à ce travail. A l'ICS tout d'abord, en vrac, Martin, Hervé, Florian, Raphaël, Thierry, Pierre, Mounir, Michel, Jérôme, Jean-Marie, Manon, Magali, Axel, Eric, Frank, Vincent, Christophe, Jorg, Albert. Au Collège de France : Elise, Florent, Pascale, Anne-Laure, Mathilde, Etienne, Christophe, Thomas, Marie, Booboo, Raymond, Hubert, Gilles, Alexis, Frédéric, Lionel, Tatiana, Josselin... et enfin, les amis, la famille, tous ceux qui ont su se montrer attentifs dans les instants de déception ou d'enthousiasme,

merci à tous !

Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	13
<hr/>	
PARTIE I CISAILLEMENT DES MOUSSES	15
Introduction	17
1 La mousse : structure et rhéologie	19
1.1 Qu'est-ce qu'une mousse	21
a. Mousses sèches - mousses humides	21
b. Equilibre local	23
1.2 Energie et structure statique	24
a. Energie libre totale	24
b. Hypothèse d'incompressibilité	26
c. Tenseur des contraintes	26
1.3 Dynamique lente et réarrangements	28
a. Mûrissement, loi de von Neumann	28
b. Réarrangement T1	29
c. Evénement T2	30
d. Echelles de temps	30
1.4 Rhéologie des mousses	31
a. Rhéologie linéaire	31
b. Ecoulements permanents	32
c. Localisation d'écoulement	33
2 Simulation quasistatique	37
2.1 Modèle d'évolution quasistatique	39
a. Algorithme quasistatique	39
b. Nature de notre étude	41
2.2 Algorithme de minimisation	43

a.	Conditions d'équilibre	43
b.	Moteur de minimisation	45
c.	Gestion des modes mous	46
d.	Affinage de la structure	50
2.3	Quelques autres modèles numériques...	52
a.	Vertex Model	52
b.	Bubble Model	52
c.	Q-Potts Model	53
3	Cisaillement alterné	55
3.1	Rhéologie quasistatique	57
a.	Relations contrainte-déformation	57
b.	Cycles Limites	59
c.	Développement de contraintes normales	61
3.2	Evolution structurelle	63
a.	Potentiel élastique	64
b.	Module élastique et contraintes normales	68
c.	Relaxation du désordre	72
3.3	Cas des forts cisaillements	74
a.	Relaxation : structure <i>versus</i> contrainte	74
b.	Transition vers l'écoulement	76
c.	Plasticité inhomogène	76
4	Cisaillement continu	79
4.1	Rhéologie quasistatique	81
a.	Relation contrainte-déformation	81
b.	Écoulement plastique	82
4.2	Analyse élasto-plastique	85
a.	Evolution de l'énergie globale	85
b.	Relaxation élémentaire	86
4.3	Déformation associée à un T1	89
a.	Champ de déformation d'un T1	89
b.	Plasticité locale - relaxation globale	91
c.	Une modélisation rhéologique non locale	95
5	Localisation d'écoulement	97
5.1	Du T1 à l'avalanche	99
a.	Champs de contrainte	100
b.	Propagateur élastique	100
c.	Phénomène d'avalanche	102
5.2	Empreinte structurelle de la plasticité	105
a.	Résidus d'une avalanche	105
b.	Distributions des contraintes	106
c.	Hétérogénéités dynamiques et structurelles	107

5.3	Instabilité d'écoulement	109
a.	Seuil de plasticité	109
b.	Mécanisme de localisation	111
c.	Quelques remarques importantes	112
d.	Ouverture sur les granulaires	113

PARTIE II	DYNAMIQUE DE CONTACT	115
Introduction		117
6	Structure et contraintes internes	119
6.1	Empilements de grains	121
a.	Interactions entre grains	121
b.	Empilements statiques	123
6.2	Relaxation de structure	125
a.	Compaction d'un matériau granulaire	125
b.	Modèles de compaction	127
6.3	Charge quasistatique et micro-plasticité	127
a.	Charge quasistatique	127
b.	Localisation et avalanches	129
c.	Sonder le réseau de forces	129
6.4	Objectifs de notre travail	130
a.	Idée générale	130
b.	Principe de l'expérience	130
7	Diffusion multiple de la lumière	133
7.1	Modèle du photon diffusif	135
a.	Transport de la lumière	135
b.	Coefficient de transmission	137
c.	Interférences	138
7.2	Analyse de la dynamique	140
a.	Fonctions de corrélation	140
b.	Interprétation de la décorrélation	143
8	Dispositif expérimental	147
8.1	Système utilisé	149
a.	Grains	149
b.	Préparation	149
c.	Cellule	150
8.2	Contrôle de la densité	151
a.	Mesure de la densité	151
b.	Tassement de l'empilement	152

8.3	Mesures optiques	154
a.	Montage	154
b.	Mesure du libre parcours moyen l^*	155
c.	Calcul des fonctions de corrélation	158
d.	Dynamique en l'absence d'excitation	158
9	Comportement sous vibration	161
9.1	Dynamique sous faible vibration	163
a.	Temps discret	163
b.	Evolution de la densité	164
c.	Fonctions de corrélation	164
9.2	La réponse dépend de l'âge	167
a.	Evolution de la dynamique	167
b.	Réinitialisation dynamique	168
c.	Conclusions	169
9.3	Dépendance vis-à-vis de la densité	169
a.	Les empilements choisis	170
b.	Réponses dynamiques	171
9.4	Cycles en amplitude	173
a.	Principe	173
b.	Dynamique instantanée	174
c.	Evolution générale	176
9.5	Discussion	176
a.	Micro-plasticité et fonctions de corrélation	177
b.	Les granulaires comme systèmes vitreux	179
c.	Extensions possibles	181
10	Modélisation de la dynamique	185
10.1	Présentation du modèle	187
a.	Approche statistique du contact	187
b.	Equation dynamique	189
10.2	Résultats numériques	190
a.	Vibrations fortes	190
b.	Vibrations faibles	190
c.	Cycles	191
10.3	Remarques	191
a.	Contacts indépendants	191
b.	Verres : analogies et différences	192

A	Algorithme de relaxation	197
A.1	Position du problème	197
a.	Modes collectifs pris en compte	197
b.	Champ de déformation résiduelle	198
A.2	Potentiel du champ de déplacement	199
a.	Potentiel du champ résiduel	199
b.	Potentiel et effet des déplacements testés	200

B	Support Multimedia	203
----------	---------------------------	------------

	BIBLIOGRAPHIE	205
--	----------------------	------------

Introduction générale

Les milieux divisés regroupent différents types de matériaux hétérogènes, comprenant les empilements granulaires, les mousses, les émulsions, etc... Ces différents systèmes ont en commun d'une part un désordre structural fort, et d'autre part l'absence totale d'agitation thermique du fait de la taille macroscopique des objets qui les constituent. De ce fait, lorsque l'on étudie une mousse ou un empilement de grains, les mesures expérimentales sont sensibles à la configuration particulière du système à un instant donné. La compréhension du comportement de ces matériaux nécessite donc le développement d'outils théoriques à même de caractériser la réponse d'un système au désordre figé. Deux questions majeures se posent : connaissant la structure, comment peut-on évaluer la réponse du matériau, en particulier son seuil de plasticité et la nature de cette plasticité (rupture locale, avalanche, bande de cisaillement) ? Inversement, comment la plasticité affecte-t-elle en retour la structure du matériau ?

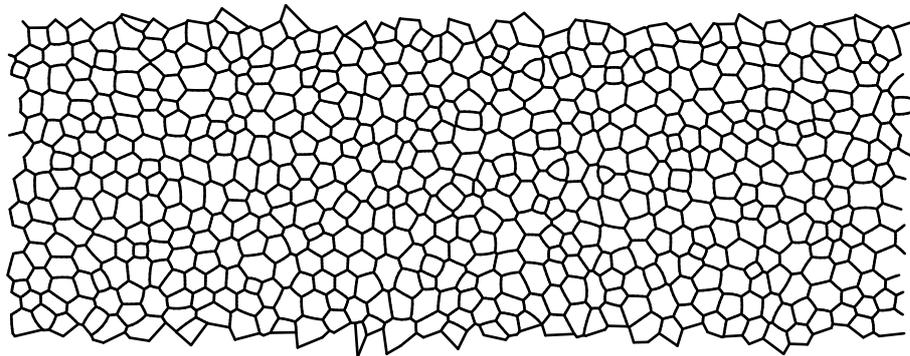
Nous ne prétendons naturellement pas répondre intégralement à ces questions dans les pages qui suivent, mais nous apporterons toutefois quelques éléments nouveaux concernant les liens entre structure et plasticité dans les milieux divisés. A travers une étude numérique du cisaillement des mousses en régime quasi-statique, nous discuterons en détail l'effet de la plasticité locale, de forme extrêmement simple dans ce système, sur l'ensemble de la mousse. Nous développerons à partir de cette analyse une caractérisation statistique de la structure statique et la relierons aux propriétés plastiques. Cette approche nous conduira à une interprétation simple des processus de localisation d'écoulement.

La seconde partie est une étude expérimentale de la microplasticité dans les empilements granulaires, induite par de faibles perturbations mécaniques. Ce travail répondra au précédent en illustrant la complexité qu'occasionne dans les matériaux granulaires la séparation d'échelle entre d'une part la structure de l'empilement (taille des grains) et d'autre part la distribution des forces (taille du contact). Nous utiliserons une technique optique récente, nommée *Diffusion Multiple Multispeckle*, pour sonder d'infimes déplacements de grains survenant dans une colonne granulaire faiblement perturbée.

Du fait de la présence d'un désordre figé, mousses et matériaux granulaires sont souvent considérés comme des systèmes modèles analogues à un verre à température nulle. Cette analogie sera présente en coloration de fond dans l'ensemble du manuscrit. Nous attacherons de ce fait une grande importance aux grandeurs énergétiques et à leur relaxation due aux événements plastiques.

Première partie

Cisaillement des mousses



Introduction

Une mousse, comme système physique, présente a priori une grande complexité. Une mousse est constituée de bulles, une bulle de films liquides et de gaz, et un film liquide se maintient grâce à une bicouche de tensio-actifs. Toutes ces échelles de taille sont impliquées dans les propriétés des mousses. De la physico-chimie des interfaces à la rhéologie non-linéaire, les mousses constituent un système physique riche.

Historiquement, la mousse est d'abord perçue comme un système géométrique. La structure d'une mousse, c'est à dire l'ensemble de ses films, possède à l'équilibre une surface minimale. Cette remarquable particularité permet de faire abstraction, dans un grand nombre de situations, de la réalité physique sous-jacente. Même la plasticité, qui correspond à un réarrangement de bulles, peut être décrite dans une large mesure sans faire appel à un quelconque argument physique. Objet géométrique et topologique, la mousse se prête volontiers aux jeux mathématiques, et marque les esprits par l'élégance et la simplicité de sa description statique.

Mais la mousse est surtout un système à notre échelle. Elle s'observe à l'œil nu et peut être aisément créée et manipulée. Dès les années 1940, la mousse devient un modèle pour l'étude des défauts cristallins, des problèmes de croissance de grains, etc... La mousse acquit ainsi le statut de système heuristique, permettant d'appréhender simplement des problèmes complexes. Son champ d'application ne se limite pas aux structures cristallines. Système athermique, possédant un fort désordre structurel et une plasticité simple, elle inspire aujourd'hui de nombreux travaux concernant la plasticité des amorphes et leur propriétés rhéologiques.

La première partie de ce travail de thèse peut apparaître comme une tentative de conciliation des différents aspects des mousses précédemment évoqués. Nous y présentons un modèle numérique, construit autour des propriétés géométriques, mais dont les résultats font l'objet d'un traitement statistique adapté à la description des écoulements plastiques quasistatiques. Bien que le système soit simple, il présente sous forte déformation un comportement mécanique des plus complexes : une rhéologie non-linéaire, de forts effets de mémoire, associés à des processus de relaxation structurelle, et un profil d'écoulement inhomogène.

Nous espérons, à partir de notre examen des relations entre structure et plasticité dans les mousses, pouvoir atteindre une classe plus large de systèmes, incluant les matériaux granulaires, suspensions et émulsions concentrées.

Chapitre 1

La mousse : structure et rhéologie

Sommaire

1.1	Qu'est-ce qu'une mousse	21
a.	Mousses sèches - mousses humides	21
b.	Equilibre local	23
	i) Loi de Laplace	23
	ii) Lois de Plateau	24
1.2	Energie et structure statique	24
a.	Energie libre totale	24
b.	Hypothèse d'incompressibilité	26
c.	Tenseur des contraintes	26
1.3	Dynamique lente et réarrangements	28
a.	Mûrissement, loi de von Neumann	28
b.	Réarrangement T1	29
c.	Événement T2	30
d.	Echelles de temps	30
1.4	Rhéologie des mousses	31
a.	Rhéologie linéaire	31
b.	Écoulements permanents	32
c.	Localisation d'écoulement	33
	i) Relation $\sigma - \dot{\gamma}$ non-monotone	34
	ii) Localisation quasistatique	34

1.1 Qu'est-ce qu'une mousse

Une mousse liquide est une dispersion de bulles de gaz dans une matrice liquide. Lorsque la quantité de gaz dans l'émulsion devient importante (plus de 70% du volume), les propriétés mécaniques et rhéologiques de la mousse s'écartent singulièrement de celles des phases fluides qui la constituent, l'ensemble du comportement étant alors contrôlé par la grande surface des interfaces eau-air. Tout d'abord, une mousse possède un module élastique, et ne s'écoule qu'au-dessus d'une contrainte seuil. Les industries agro-alimentaire et cosmétique en font un usage fréquent : pour rendre glaces et sauces plus onctueuses ou pour que les crèmes de rasage et produits de nettoyage ne s'écoulent pas trop vite. L'injection d'air dans la phase liquide permet d'en modifier les propriétés physiques sans pour autant jouer sur sa composition. Une mousse possède aussi une structure légère. De nombreux matériaux industriels sont conçus à partir d'une mousse liquide que l'on fige chimiquement une fois mise en forme (par exemple les polymères expansés pour les sièges auto). Les mousses solides sont également largement utilisées pour leur propriétés mécaniques exceptionnelles, qui allient légèreté et grande rigidité (par exemple les structures alvéolaires en nid d'abeille).

La plus simple façon de réaliser une mousse liquide consiste à brasser de l'air dans une solution d'eau savonneuse. La présence de tensio-actifs assure la stabilité du film de savon lorsque la bulle rejoint la surface du bain liquide. Les différentes bulles formées s'accumulent alors en surface, les unes sous les autres ; une mousse naît... Au fur et à mesure que la mousse se forme, les bulles perdent progressivement, du fait de la gravité, l'eau qui les entourent. Ce processus, appelé drainage [1], assèche progressivement la mousse. Les films s'affinent, jusqu'à des tailles sub-microniques, et produisent de magnifiques jeux de couleurs. Puis les bulles éclatent, le plus souvent du fait de l'évaporation de l'eau contenue dans les films liquides.

a. Mousses sèches - mousses humides

Une mousse se caractérise par sa fraction volumique liquide ϕ_l . L'apparition d'un module élastique fini a lieu pour $\phi_l < 0.3$ [2]. Dans cette gamme ($0 < \phi_l < 0.3$), on distingue deux régimes : lorsque la fraction liquide dépasse environ 10%, on parle de mousses humides. Celles-ci sont caractérisées par des bulles de forme arrondie (figure 1.1) et un faible module élastique.

Lorsque la fraction de liquide présent dans la mousse est faible (de l'ordre de quelques pourcents), on parle de mousses sèches. Elles correspondent typiquement aux structures produites par le drainage en surface d'un bain moussant. Les bulles, de forme polyédrique, ne sont alors séparées que par un mince film de liquide (figure 1.2). Les mousses sèches se prêtent bien de ce fait à une description géométrique. Les lignes où se rejoignent trois films sont nommées bords de

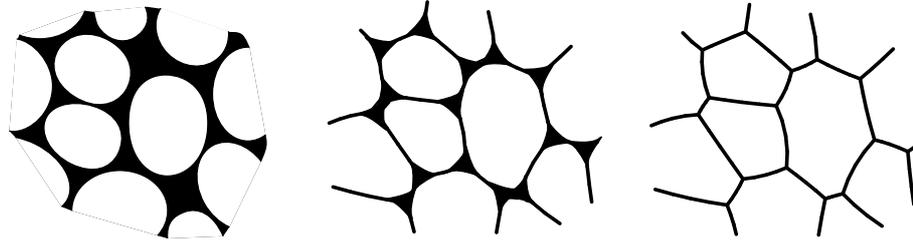


FIG. 1.1 – Des mousses humides aux mousses sèches

Plateau ; ces derniers se coupent eux-même au niveau de ce que l'on appelle des vertex. La géométrie simple des mousses sèches permet de définir précisément les relations de voisinage entre les bulles, laissant ainsi libre cours à des descriptions topologiques de ces systèmes. Les propriétés physiques des mousses sèches seront largement décrites dans la suite du manuscrit.

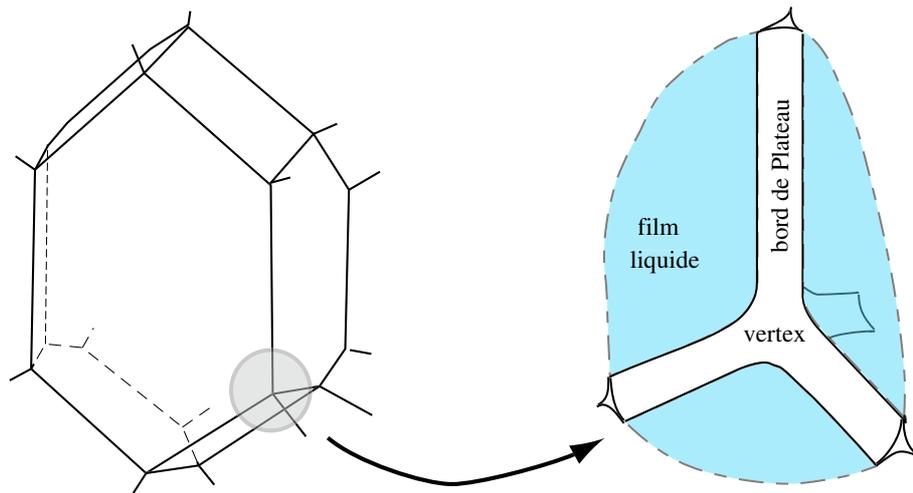


FIG. 1.2 – Mousse 3D : vertex et bords de Plateau

Cas bidimensionnel

La description géométrique que nous venons de présenter peut facilement se transcrire à deux dimensions. Les films liquides deviennent alors de simples lignes se rejoignant par trois au niveau des vertex (voir figure 1.1). L'archétype de la mousse 2D est la mousse de Langmuir [3,4]. Les mousses 3D confinées en géométrie Hele-Shaw (figure 1.3) permettent également d'obtenir des structures dont la description et les propriétés sont similaires aux mousses 2D.

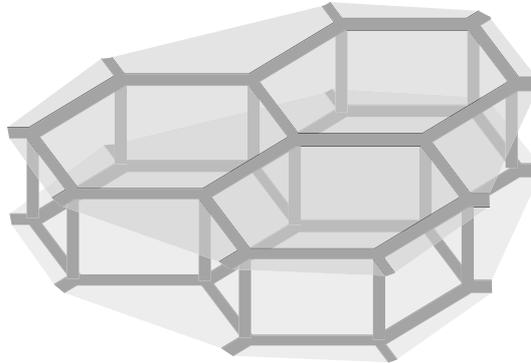


FIG. 1.3 – Mousse 3D confinées

Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'aux mousses sèches, pour lesquelles nous pouvons négliger l'épaisseur des bords de Plateau et des vertex.

b. Equilibre local

Les seules forces en jeu dans une mousse sèche à l'équilibre mécanique sont liées d'une part à la tension de surface des interfaces liquide-air, et d'autre part à la pression du gaz de chaque de bulle. Cela permet d'établir quelques conditions simples concernant la géométrie de la mousse.

i) Loi de Laplace

La loi de Laplace rend compte de l'équilibre mécanique d'un film de tension superficielle¹ γ délimitant deux volumes de gaz de pressions respectives p_1 et p_2 . La courbure locale d'un film produit une force normale au film d'intensité (par unité de surface) $\gamma \cdot (1/R_1 + 1/R_2)$ où R_1 et R_2 représentent les rayons de courbure principaux (pouvant être négatifs) de la surface. Cette contrainte est compensée à l'équilibre par une différence de pression du gaz entre les deux volumes :

$$p_1 = p_2 + \gamma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.1)$$

Dans le cas d'un système 2D tel que celui que nous étudierons par la suite, cela implique qu'un film est nécessairement un arc de cercle (figure 1.4(a)) dont le rayon est relié à la différence de pression entre les bulles qu'il sépare :

$$p_1 = p_2 + \frac{\gamma}{r} \quad (1.2)$$

¹Pour les deux interfaces eau-air.

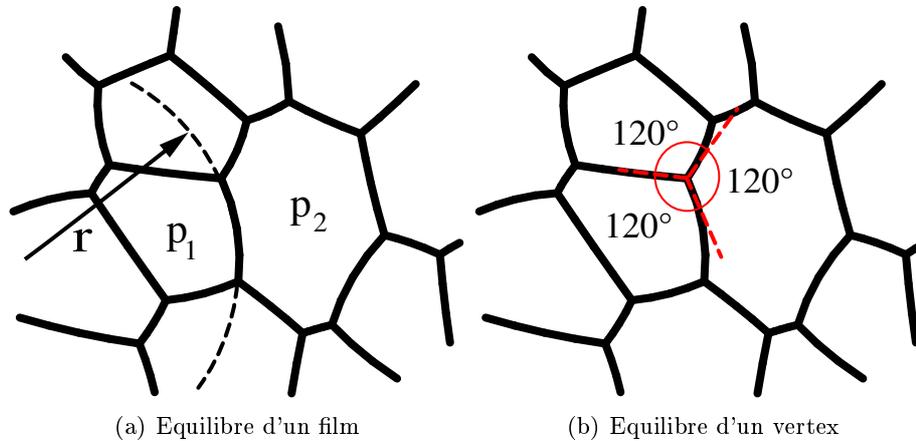


FIG. 1.4 – Equilibre mécanique local

ii) Lois de Plateau

Les lois de Plateau correspondent à un bilan de forces sur un bord de Plateau ou sur un vertex [1]. Les trois films se coupant sur un bord de Plateau exercent chacun sur ce dernier une force due à la tension de surface. De l'équilibre de ces forces résulte la première loi de Plateau : **les films se raccordent aux bords de Plateau avec des angles de 120°** . De même, au niveau d'un vertex, quatre bords de Plateau se rejoignent. Cela permet d'établir la seconde loi de Plateau : **Les bords de plateau se coupent au niveau des vertex avec des angles de $109,5^\circ$** . Pour les mousses 2D, ces deux lois se réduisent à une condition de raccord à 120° entre les films au niveau de chaque vertex (figure 1.4(b)).

1.2 Energie et structure statique

Les différentes bulles des mousses sèches réalisent un pavage de l'espace. De ce pavage, nous pouvons extraire de nombreuses informations d'ordre topologique sur une mousse. L'analyse topologique d'une mousse s'intéresse aux relations de voisinage entre bulles. Pour un même ensemble de bulles d'une mousse, il existe un grand nombre de topologies possibles. Nous allons à présent analyser le lien existant entre la topologie d'une mousse et sa structure réelle, à savoir la position exacte des films et vertex.

a. Energie libre totale

Définir l'énergie libre d'une mousse nécessite de prendre en compte différents paramètres : la tension de surface, l'énergie libre du gaz, la gravité (essentiellement pour la phase liquide), etc... Nous limiterons la description aux mousses sèches bidimensionnelles horizontales, afin de négliger le rôle de la pesanteur et

le drainage du liquide inévitablement associé. L'énergie peut alors être scindée en trois termes :

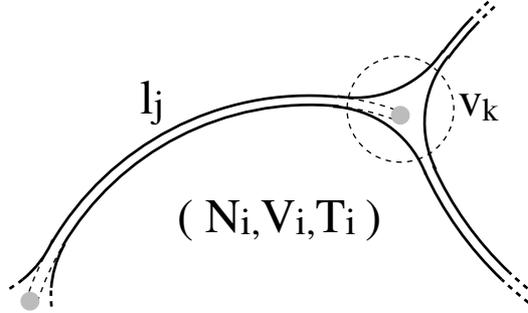


FIG. 1.5 – Grandeurs caractérisant l'énergie

- l'énergie des films liquides E_f , proportionnelle à la longueur totale des films L_{tot} en considérant infiniment petits les vertex (voir figure 1.5). γ correspond alors à une tension de ligne.

$$E_l = \gamma \cdot \sum_j l_j = \gamma \cdot L_{tot}$$

- un terme de correction de E_f rendant compte de la taille finie des vertex. Ce terme est proportionnel au nombre N_v de vertex et dépend dans son préfacteur de la fraction volumique liquide ϕ_l de la mousse.

$$E_v = e_v(\phi_l) \cdot N_v$$

- l'énergie libre de chaque bulle, rendant compte de la thermodynamique du gaz.

$$E_g = \sum_{\text{bulles } i} e_i(N_i, V_i, T_i)$$

De ces expressions découle une écriture de l'énergie libre totale, où les sommes portent respectivement sur les cotés, les vertex et les bulles :

$$E_{tot} = \sum_{\{l_j\}} \gamma \cdot l_j + \sum_{\{v_k\}} e_v(\phi_l) + \sum_{\{b_i\}} e_i(N_i, V_i, T_i) \quad (1.3)$$

Une mousse à l'équilibre possède une structure qui minimise cette énergie, pour une topologie donnée. Les lois d'équilibre local (Laplace, Plateau) en découlent d'ailleurs directement. Toutefois, les lois locales ne permettent pas à elles seules de déterminer la structure exacte de la mousse. Seule une relation thermodynamique (représentée ici par l'expression des énergies libres e_i) peut permettre de déterminer le volume de chaque bulle à l'équilibre. Notons que le terme correctif associé à la taille finie des vertex ne joue aucun rôle dans la structure puisqu'il représente un terme constant dans l'énergie, et sera donc omis dans la suite.

b. Hypothèse d'incompressibilité

Bien que les gaz soient compressibles, les variations d'énergie libre associées à des variations de volume des bulles restent très supérieures à celles des énergies de surface pour des bulles de taille supra-millimétriques sous pression atmosphérique.

La courbure d'un côté d'une bulle est au plus égale à $1/R$ où R est la taille de la bulle. On peut alors estimer, pour une bulle de 1 mm , avec une valeur de tension superficielle $\gamma = 0,1\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, l'ordre de grandeur du maximum des fluctuations de pression d'une bulle à l'autre.

$$\Delta P_{max} \leq \frac{\gamma}{R} \approx 100\text{ Pa} \quad (1.4)$$

La pression moyenne des bulles étant de l'ordre de la pression atmosphérique (10^5 Pa), les variations de pression dues à la courbure des films sont insignifiantes. Les variations relatives de volume des bulles étant elles aussi du même ordre, on en conclut que l'hypothèse d'incompressibilité pour le gaz des bulles est tout à fait justifiée. Sous cette condition, l'énergie totale d'une mousse sèche peut s'écrire :

$$E_{tot} = \sum_{\{l_j\}} \gamma \cdot l_j \quad (1.5)$$

La structure d'équilibre de la mousse se détermine alors simplement en minimisant la longueur de ligne avec une contrainte de volume constant pour chaque bulle. La forme obtenue est totalement indépendante de la valeur γ de la tension superficielle. La détermination de la structure d'équilibre devient un problème purement géométrique.

c. Tenseur des contraintes

Nous avons mentionné au cours des paragraphes précédents que la structure d'une mousse permettait la détermination de son énergie à partir de la mesure de longueur totale de ligne. Nous allons nous pencher à présent sur des caractéristiques plus mécaniques, à savoir la détermination du tenseur moyen des contraintes d'une mousse. Celui-ci peut être séparé en deux contributions, l'une liée à la pression des bulles, et l'autre à la tension superficielle :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_g + \bar{\sigma}_\gamma \quad (1.6)$$

Considérons une surface $A = L_x \cdot L_y$ contenant le volume de mousse que l'on souhaite décrire. L'ensemble des côtés des bulles présents dans le domaine est noté $\{l_j\}$. Les grandeurs p_i et v_i correspondent quant à eux aux pressions et volumes (ou surfaces) des différentes bulles b_i .

Pression du gaz

Le terme le plus simple à déterminer est la pression moyenne p_g du gaz. Celui-ci s'écrit simplement :

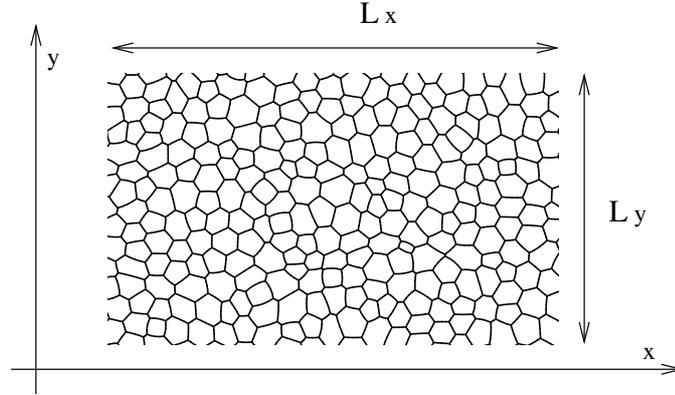


FIG. 1.6 – Echantillon macroscopique

$$p_g = \frac{1}{A} \cdot \sum_{\{b_i\}} v_i \cdot p_i \quad (1.7)$$

L'écriture du tenseur $\overline{\overline{\sigma}}_g$ est alors immédiate, les contraintes de pression étant nécessairement normales et isotropes :

$$\overline{\overline{\sigma}}_g = \begin{bmatrix} -p_g & 0 \\ 0 & -p_g \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Tenseur macroscopique $\overline{\overline{\sigma}}_\gamma$

Examinons à présent la contribution des films dans la contrainte moyenne. Par souci de simplicité, nous négligerons dans un premier temps la courbure des cotés de bulle. Commençons par la composante $\sigma_{\alpha y}^\gamma$, α étant indifféremment x ou y . Pour cela, coupons fictivement la surface de la mousse par une droite D parallèle à l'axe des x et calculons la force exercée par la partie supérieure au niveau de cette droite :

$$L_x \cdot \sigma_{\alpha y}^\gamma(D) = \sum_{\{l_j\} \text{ coupant } D} f_{j,\alpha} \quad (1.9)$$

Dans cette écriture, la somme porte sur tous les films l_j de la mousse coupant la droite D choisie, $f_{j,\alpha}$ étant la composante projetée sur α de la force (due à la tension de ligne) exercée par le côté l_j :

$$f_{j,\alpha} = \gamma \cdot \frac{l_{j,\alpha}}{l_j} \quad (1.10)$$

où $l_{j,\alpha}$ est la longueur projetée du côté selon α (figure 1.7). Pour obtenir l'expression de la contrainte moyenne sur l'ensemble du domaine sélectionné A , il reste

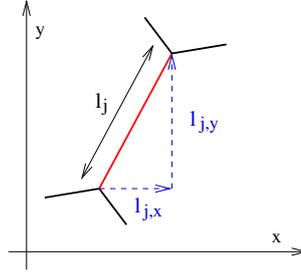


FIG. 1.7 – Coté d'une bulle

à moyenner l'expression 1.9 sur l'ensemble des droites D . Le poids d'un coté de bulle dans cette moyenne étant $l_{j,y}/L_y$, il vient :

$$\sigma_{\alpha y}^{\gamma} = \langle \sigma_{\alpha y}^{\gamma}(D) \rangle_D = \frac{1}{L_x} \cdot \sum_{\{l_j\}} f_{j,\alpha} \cdot \frac{l_{j,y}}{L_y} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{\alpha y}^{\gamma} = \frac{\gamma}{L_x \cdot L_y} \cdot \sum_{\{l_j\}} \frac{l_{j,y} \cdot l_{j,\alpha}}{l_j} \quad (1.12)$$

En procédant de même pour l'autre direction, on obtient l'écriture générale (α et β étant des directions quelconques) :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\gamma}{A} \cdot \sum_{\{l_j\}} \frac{l_{j,\alpha} \cdot l_{j,\beta}}{l_j} \quad (1.13)$$

Les expressions 1.5 et 1.13 sont d'un très grand intérêt. A partir d'une unique image de mousse 2D, nous pouvons obtenir une mesure directe de l'énergie et de la contrainte de cisaillement. Les mesures des contraintes normales devraient en toute rigueur prendre en compte le terme de pression du gaz, qu'il n'est pas facile d'extraire d'une image de mousse. Les écarts de contraintes normales ($\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$) peuvent cependant être évalués. Ces relations peuvent également être établies pour des systèmes 3D, le problème étant alors d'obtenir expérimentalement une image en volume de la mousse.

1.3 Dynamique lente et réarrangements

a. Mûrissement, loi de von Neumann

Une mousse réelle, bien qu'à l'équilibre mécanique, n'est jamais thermodynamiquement stable. Les différences de pression d'une bulle à l'autre provoquent la diffusion du gaz à travers les films liquides. Le flux de gaz au travers d'une interface est égale au produit de la différence de pression ΔP par une grandeur appelée diffusivité D . Cette dernière caractérise l'efficacité du film liquide comme

barrière à la diffusion du gaz. Elle dépend essentiellement de la solubilité du gaz et du coefficient de diffusion de ce dernier dans la phase liquide. On en déduit alors l'expression de la variation de volume d'une bulle au cours du temps :

$$\frac{dA(t)}{dt} = -D \cdot \oint_{\text{bulle}} \Delta P(l) \cdot dl \quad (1.14)$$

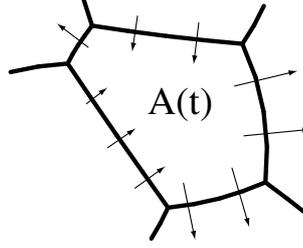


FIG. 1.8 – Diffusion du gaz à travers les films liquides

La loi de Laplace permet à nouveau de géométriser ce problème. Soit $\mathcal{C}(l)$ la courbure locale du film :

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\gamma D \cdot \oint_{\text{bulle}} \mathcal{C}(l) \cdot dl \quad (1.15)$$

L'intégrale curviligne correspond à la déviation angulaire cumulée sur l'ensemble du contour de la bulle. L'angle que font les films au niveau de chaque vertex vaut exactement $2\pi/3$ pour une mousse équilibrée. L'intégrale curviligne est donc reliée au nombre de vertex (ou de cotés) n_v de la bulle :

$$\oint_{\text{bulle}} \mathcal{C}(l) \cdot dl + n_v \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad (1.16)$$

Cela conduit alors à une expression simple de l'évolution de l'aire d'une bulle en fonction du nombre n_v de ses côtés (loi de von Neumann) :

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\gamma D \cdot \frac{\pi}{3} \cdot (6 - n_v) \quad (1.17)$$

Dans une mousse polydisperse, les plus petites bulles sont aussi celles qui possèdent, statistiquement, le plus petit nombre de cotés. La diffusion du gaz provoque alors la diminution de la taille des petites bulles au profit des plus grosses. Ce processus porte le nom de *mûrissement*.

b. Réarrangement T1

Lorsque la longueur d'un film devient du même ordre que la taille des vertex, il devient instable. Les deux vertex qu'il relie fusionnent puis deux nouveaux se créent, modifiant ainsi la topologie de la mousse, c'est-à-dire les relations de

voisinage entre bulles. Ce processus d'instabilité, nommé T1, est rapide (de l'ordre de 0,1s). La figure 1.9 montre comment il modifie la structure d'une mousse en géométrie 2D. Un film sépare initialement les bulles a et b, tandis que c et d ne sont pas en contact. Après le réarrangement, a et b se sont séparées, alors que c et d sont à présent voisines. Notons que cette transformation conserve le nombre de cellules et leur volume, ainsi que le nombre de côtés et de vertex. Parce qu'il correspond au phénomène de plasticité élémentaire dans les mousses aqueuses, il jouera un rôle fondamental dans la suite de cette étude.

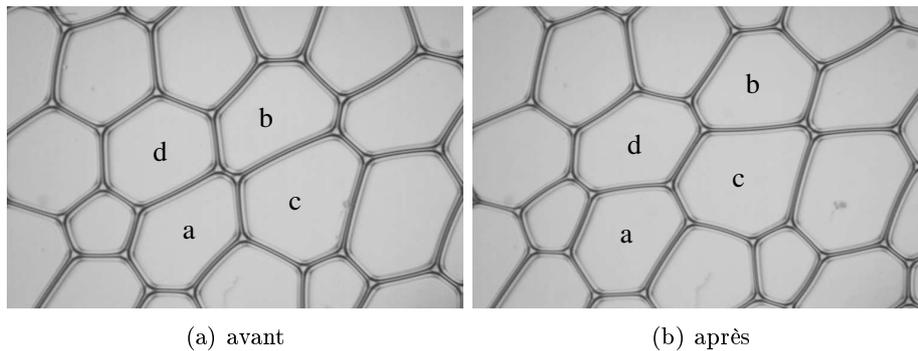


FIG. 1.9 – Réarrangement T1

c. Événement T2

Le mûrissement d'une mousse, en vidant les plus petites bulles, provoque à terme leur disparition. La figure 1.10 décrit les différentes étapes de la disparition d'une bulle. Initialement à quatre côtés, la bulle rétrécit peu à peu jusqu'à déstabiliser un de ses côtés. Un T1 se produit. La bulle continue à se vider, jusqu'à disparaître au cœur d'un vertex. Cette disparition correspond à un type de transformation topologique, dit T2.

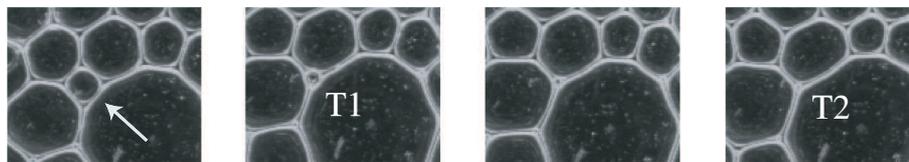


FIG. 1.10 – Mûrissement et T2 dans une mousse confinée

d. Echelles de temps

Le mûrissement des mousses est un effet lent. Il se déroule typiquement sur un temps de l'ordre de quelques dizaines de minutes, pour des mousses constituées de

bulles millimétriques. Il est dès lors possible d'effectuer des mesures sur des temps raisonnables sans que les bulles ne changent significativement de volume², voire ne disparaissent par T2. Dans la suite, nous ne considérerons pas ce processus, et supposerons donc une quantité de gaz par bulle constante.

1.4 Rhéologie des mousses

a. Rhéologie linéaire

Les mesures rhéologiques correspondent essentiellement à la détermination des relations contraintes-déformations. La méthode expérimentale la plus courante pour la caractérisation des propriétés rhéologiques linéaires d'un matériau consiste à mesurer le module dynamique de cisaillement $G(\omega)$. Ce dernier caractérise la réponse contrainte-déformation, supposée linéaire, pour un cisaillement imposé sinusoïdal $\epsilon(t) = \epsilon_0 \cdot \exp(-i\omega t)$, de fréquence ω et d'amplitude ϵ_0 . $G(\omega)$ est obtenu à partir de la mesure du signal de contrainte $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = G(\omega) \cdot \epsilon(t) = (G'(\omega) + i \cdot G''(\omega)) \cdot \epsilon(t) \quad (1.18)$$

La partie réelle de $G(\omega)$ correspond à la composante élastique de la réponse, tandis que $G''(\omega)$ caractérise la composante dissipative. En effet, nous pouvons réécrire la relation précédente sous la forme :

$$\sigma(t) = G'(\omega) \cdot \epsilon(t) - \frac{G''(\omega)}{\omega} \cdot \dot{\epsilon}(t) \quad (1.19)$$

Cette écriture permet d'identifier G' avec un module élastique, et G''/ω avec une viscosité. Les résultats typiques de telles mesures effectuées sur les mousses sont présentés sur la figure 1.11 [2, 5, 6]. Sur des échelles de temps typiquement comprises entre la seconde et la dizaine de minutes, $G(\omega)$ est constant, avec un rapport G'/G'' de l'ordre de 10. Dans ce régime, la mousse est en permanence à l'équilibre mécanique. Les seuls processus dissipatifs mis en jeu sont les réarrangements de type T1, qui se produisent sur des échelles de temps beaucoup plus rapides que le temps caractéristique de la sollicitation ω^{-1} . Aux très basses fréquences, la chute de contrainte observée est associée aux processus de plasticité induits par le mûrissement [5]. Aux fréquences supérieures à 10 s^{-1} (caractéristique de l'événement T1), on constate une augmentation de la contrainte avec le taux de cisaillement, ainsi qu'un renforcement éventuel du module élastique. A ces fréquences, la composante visqueuse de la contrainte (associée aux écoulements dans les films et bords de Plateau) peut devenir non négligeable devant la contrainte de structure.

Les valeurs caractéristiques du module élastique dans le régime intermédiaire sont de l'ordre de γ/R [1, 7, 8], où γ correspond à la tension de surface des films et R à la taille moyenne des bulles. Ces valeurs ne dépendent que de caractéristiques

²Le mûrissement est plus lent dans les systèmes 2D confinés qu'à 3D, où la surface de film est bien supérieure.

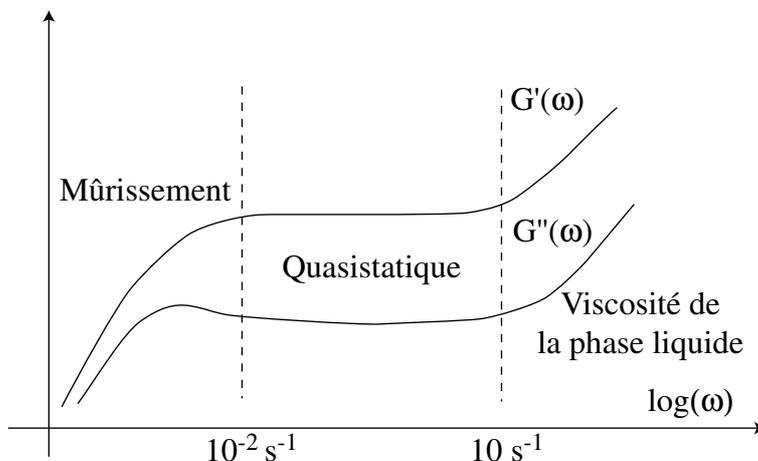


FIG. 1.11 – Module dynamique de cisaillement

statiques de la mousse. L'indépendance de $G''(\omega)$ vis-à-vis de la fréquence donne également un statut très particulier à la dissipation d'énergie. Calculons cette dernière pour un cycle :

$$\Delta E = - \oint_0^T \sigma(t) \cdot \dot{\epsilon}(t) dt = - \frac{G''}{\omega} \cdot \oint_0^T \dot{\epsilon}^2(t) dt \quad (1.20)$$

soit alors ϵ_0 l'amplitude du cisaillement, la perte d'énergie se met sous la forme :

$$\Delta E \simeq - \frac{G''}{\omega} \cdot T \omega^2 \cdot \epsilon_0^2 \simeq G'' \cdot \epsilon_0^2 \quad (1.21)$$

Si G'' est constant, la dissipation d'énergie ne dépend alors que de l'amplitude du cisaillement et pas de la vitesse avec laquelle on déforme le matériau. Le régime rhéologique intermédiaire possède donc la remarquable particularité de n'avoir aucun temps caractéristique; la déformation suffit à déterminer tant l'énergie élastique que la dissipation. Il s'agit d'un régime dit quasi-statique.

Les amplitudes ϵ_0 de cisaillement imposées pour ce type de mesures sont en général assez faibles (de l'ordre de quelques pourcents). Il semble que sous ces petites déformations, la rhéologie soit effectivement linéaire, c'est à dire que $G(\omega)$ ne dépend pas de l'amplitude du cisaillement imposé. Pour des amplitudes plus importantes (supérieure à 10 %), des non-linéarités apparaissent, avec en particulier un affaiblissement du module élastique apparent [9], traduisant une forte augmentation de la fréquence des réarrangements.

b. Ecoulements permanents

Pour caractériser la réponse du matériau sous fortes déformations, d'autres types de mesure sont nécessaires : on impose un écoulement permanent à taux

de cisaillement $\dot{\gamma}$ fixé. Le graphe typique correspondant est présenté sur la figure 1.12. Hormis la chute de la contrainte pour des taux de cisaillement très faibles, le comportement observé correspond à un écoulement fluide à seuil, de type Herschel-Bulkeley ($\sigma = \sigma_y + \beta\dot{\gamma}^n$). L'augmentation de la contrainte avec le taux de cisaillement est essentiellement due à la viscosité de la phase continue [10]. La forme exacte de cette dépendance reste à ce jour inconnue. Pour de faibles taux de cisaillement ($\dot{\gamma} < 0.1\text{s}^{-1}$), nous retrouvons un régime quasistatique, pour lequel la description adéquate est la relation contrainte-déformation (figure 1.13). Celle-ci se décompose essentiellement en une période de charge élastique à faibles déformations, suivie d'un écoulement plastique lorsque la contrainte atteint la contrainte seuil σ_y [2]. La déformation à partir de laquelle commence l'écoulement plastique est typiquement de l'ordre de 1 pour des mousses sèches. Notons que le régime quasistatique se caractérise par le fait que la relation contrainte-déformation ne dépend pas du taux de cisaillement utilisé pour la mesure.

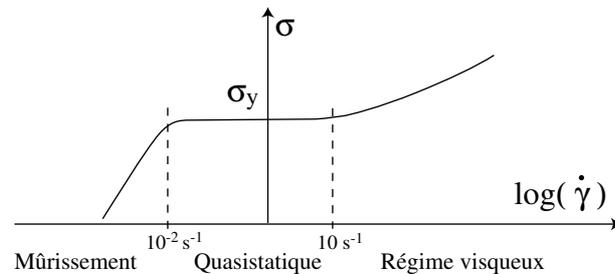


FIG. 1.12 – Contrainte-taux de déformation

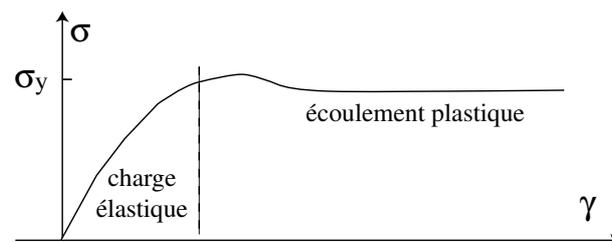


FIG. 1.13 – Contrainte-déformation

c. Localisation d'écoulement

Les mesures rhéologiques que l'on effectue sur un matériau, quel qu'il soit, se font en général en imposant une déformation ou une contrainte par les bords de l'échantillon. Expérimentalement, la déformation imposée correspond en réalité à un déplacement des conditions limites (parois). Mis à part les problèmes de glis-

sement en paroi, une interrogation beaucoup plus fondamentale se pose lorsque l'on souhaite interpréter des relations contrainte-déformation imposée. La déformation (ou l'écoulement) au sein du matériau est-elle homogène ? De nombreuses expériences ont permis récemment d'observer des écoulements non uniformes dans des systèmes physiques variés. En général, une partie de l'échantillon coule tandis que le reste est quasiment figé. Ce phénomène de localisation correspond principalement à deux types de comportements très distincts.

i) Relation $\sigma - \dot{\gamma}$ non-monotone

La contrainte de cisaillement, dans un écoulement plan-plan, est identique dans tout l'échantillon. L'existence d'un plateau dans la mesure expérimentale de la relation contrainte-taux de déformation est le signe d'une relation constitutive $\sigma(\dot{\gamma})$ non-monotone (figure 1.14). Les matériaux qui possèdent une telle caractéristique peuvent ainsi présenter, dans une certaine gamme de taux de cisaillement imposé, une séparation en domaines distincts s'écoulant localement avec des gradients de vitesse différents [11, 12]. Ce comportement a été notamment observé dans des solutions de micelles géantes [13–15]

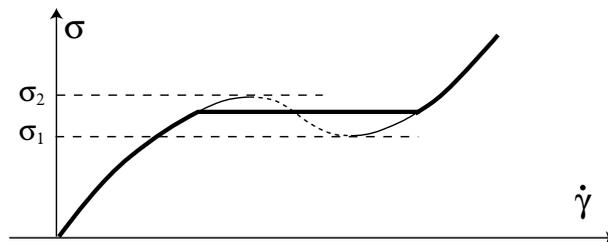


FIG. 1.14 – Contrainte-taux de cisaillement

ii) Localisation quasistatique

Quelques expériences récentes ont mis en évidence dans les matériaux granulaires [16, 17] et les mousses [18] une localisation de l'écoulement sous cisaillement quasistatique. Le profil de vitesse typique de ces écoulements est de forme exponentielle, avec une taille caractéristique de décroissance de l'ordre du grain ou de la bulle. Contrairement aux écoulements traditionnels, il est remarquable ici de voir apparaître explicitement dans la forme de l'écoulement la dimension du constituant élémentaire, à savoir le grain ou la bulle.

Expérience de Debrégeas *et al.*

L'expérience de G. Debrégeas *et al.* [18] fut la motivation essentielle du travail de thèse présenté ici. Le dispositif réalisé permet le cisaillement quasistatique

d'une mousse 2D dans une cellule de Couette (figure 1.15). Les bulles sont confinées à deux dimensions par deux plaques de verre horizontales (géométrie *Hele-Shaw*). La présence d'un film liquide entre les bulles et les vitres qui les confinent assure une lubrification du contact. L'entraînement des bulles est assuré par deux roues dentées; la roue intérieure peut être mise en rotation, tandis que la roue extérieure est fixe. Une camera, associée à un programme d'analyse d'images, permet l'enregistrement de l'ensemble des trajectoires des bulles, ainsi que de leur forme. Les expériences sont réalisées à taux de cisaillement suffisamment faible ($\simeq 10^{-2} \text{s}^{-1}$) pour rendre négligeable toute contrainte visqueuse : la mousse est à chaque instant à l'équilibre mécanique. L'énergie et le champ de contrainte peuvent alors être mesurés directement à partir de l'image de la mousse. Debrégeas *et al.* ont ainsi mis en évidence un écoulement localisé au voisinage de la roue intérieure, avec un profil de vitesse exponentiel³. Loin de la bande de cisaillement, pratiquement aucun T1 ne se produit. Toutefois, l'analyse des fluctuations de position des bulles révèle, dans ces mêmes régions, une importante dynamique, interprétée comme un bruit élastique issu des réarrangements de l'écoulement plastique. L'enregistrement vidéo d'une de ces expériences est disponible sur le CD-ROM accompagnant le manuscrit.

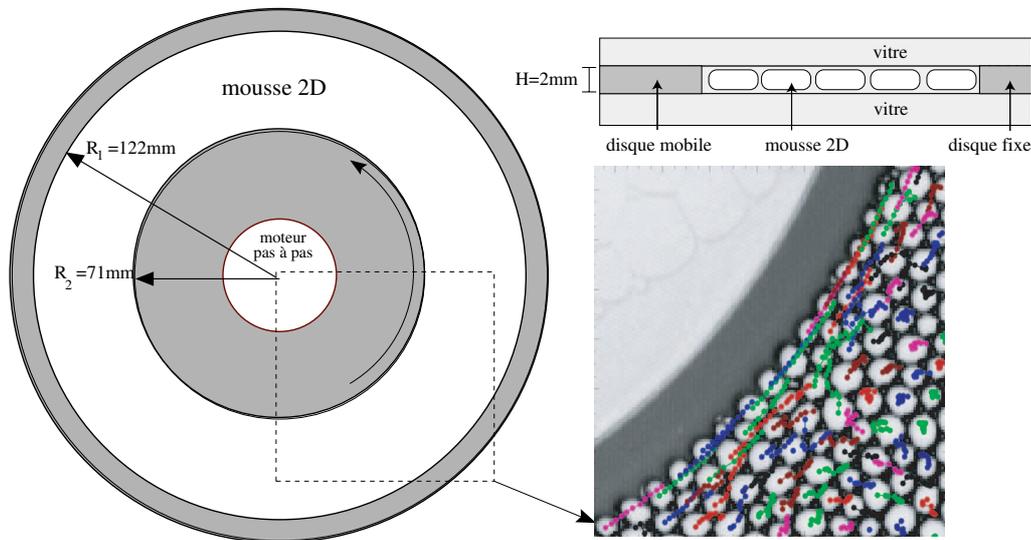


FIG. 1.15 – Cellule de Couette utilisée dans l'expérience de Debrégeas *et al.* [18]

Concernant les mousses, les conditions d'obtention d'un écoulement localisé font encore l'objet de vifs débats. Dans le cas de radeaux de bulles 2D, Lauridsen *et al.* ont observé un profil d'écoulement relativement homogène [19, 20].

³La largeur caractéristique de l'exponentielle, de l'ordre du diamètre moyen des bulles, dépend de la fraction volumique de la mousse.

Mise à part la différence de géométrie, les radeaux de bulles ne possèdent pas une fraction liquide bien déterminée. De plus, les bulles peuvent se déformer selon la direction verticale ; elles sont de ce point de vue compressibles. Notons également que leurs expériences ne sont pas en régime quasistatique et qu'un écoulement liquide est présent sous la mousse. Les expériences de cisaillement sur une mousse de Langmuir [4] ne présentent également pas de localisation d'écoulement. Toutefois, l'auteur suggère fortement que l'entraînement par le liquide visqueux, portant la monocouche de Langmuir, joue un rôle important dans le profil de vitesse des bulles. Concernant les cisaillement des mousses 3D, il n'existe à ce jour que peu de données permettant d'évaluer le profil d'écoulement.

Comment comprendre la localisation d'écoulement en régime quasistatique, dans lequel aucune échelle de temps n'entre en compte ? La non-monotonie de la relation constitutive $\sigma(\dot{\gamma})$ ne peut naturellement plus être invoquée puisque aucune dépendance en $\dot{\gamma}$ n'est observée. Seule une inhomogénéité structurelle (c'est à dire une grandeur statique) peut permettre d'expliquer ces régimes particuliers. L'inconvénient majeur des expériences en cellule de Couette est la variation de la contrainte moyenne en fonction de la distance à l'axe. Expérimentalement, il est difficile de s'affranchir de ce problème tout en conservant de grandes amplitudes de déformation. Cela nous a conduit à développer un modèle numérique permettant le cisaillement d'une mousse périodique (dans la direction du cisaillement) en géométrie plan-plan.

Chapitre 2

Simulation quasistatique

Les expériences de rhéologie des mousses mettent clairement en évidence l'existence d'un régime quasistatique, obtenu pour des taux de cisaillement faibles, mais toutefois suffisamment rapides pour rendre négligeable le mûrissement de la mousse. Le régime quasistatique s'avère simple à décrire : la mousse possède à chaque instant une structure mécaniquement équilibrée, la dissipation visqueuse ne jouant aucun rôle. La plasticité n'est due qu'à des transformations topologiques dites T1, qui agissent sur des temps bien plus courts que le temps caractéristique du cisaillement. Malgré cette simplicité, les propriétés d'écoulement sont loin d'être comprises, en particulier en ce qui concerne l'apparition de bandes de cisaillement.

Ces différentes raisons nous ont conduit à développer un modèle numérique de cisaillement quasistatique des mousses, adapté aux déformations de larges amplitudes dans une géométrie plan-plan. La détermination de la structure statique des mousses sèches, sous l'hypothèse d'incompressibilité du gaz, est un problème géométrique simple. A partir de peu d'ingrédients (topologie et volumes des bulles), une minimisation d'énergie permet d'obtenir la position des bulles, la forme des films, et par conséquent l'énergie et l'état de contrainte de la mousse.

Sommaire

2.1	Modèle d'évolution quasistatique	39
a.	Algorithme quasistatique	39
	i) Déformation quasistatique	39
	ii) Plasticité	39
	iii) Présentation de l'algorithme	40
	iv) Limitations	40
b.	Nature de notre étude	41
	i) Cisaillement plan-plan	41
	ii) Construction de la mousse initiale	41
2.2	Algorithme de minimisation	43
a.	Conditions d'équilibre	43
	i) Discrétisation de la structure	43
	ii) Minimum d'énergie libre	43
	iii) Gaz incompressible	44
b.	Moteur de minimisation	45
	i) Surface Evolver	45
	ii) Principe de fonctionnement	45
	iii) Efficacité de la méthode	46
c.	Gestion des modes mous	46
	i) Relaxation longitudinale	47
	ii) Rotations locales	48
d.	Affinage de la structure	50
2.3	Quelques autres modèles numériques...	52
a.	Vertex Model	52
b.	Bubble Model	52
c.	Q-Potts Model	53

2.1 Modèle d'évolution quasistatique

a. Algorithme quasistatique

i) Déformation quasistatique

Les algorithmes quasistatiques permettent de modéliser les évolutions lentes des mousses, qu'il s'agisse du mûrissement [21–23], ou d'une déformation lentement variable [23–27]. Les déformations quasistatiques sont suffisamment lentes pour qu'à chaque instant la mousse soit à l'équilibre, c'est à dire dans une configuration d'énergie minimale. Cette condition permet de calculer l'évolution de la structure de la mousse sans prendre en compte les détails des processus dissipatifs dynamiques (tels que les écoulements visqueux au sein des films liquides), supposés opérer sur des temps plus courts. Le processus de mûrissement peut être intégré dans ces algorithmes en ajustant à chaque pas de temps les volumes des bulles conformément à la loi de von Neumann (relation 1.17). La littérature des mousses contient un grand nombre de telles études [21–23], ayant en particulier pour objectif de décrire la distribution asymptotique des tailles de bulles. Nous nous limiterons pour notre part aux écoulements opérant sur des temps plus courts que le mûrissement, si bien que la quantité de gaz présente dans chaque bulle sera supposée constante.

ii) Plasticité

de plasticité. Lorsque la structure évolue peu à peu des suites de la déformation cumulée ou de la diffusion du gaz d'une cellule à l'autre, certains films voient leur taille décroître jusqu'à atteindre leur seuil de stabilité vis-à-vis du T1. Au niveau numérique, le programme doit alors intégrer un test sur la structure minimale. Si un coté de très faible taille apparaît, on modifie la topologie de la mousse conformément à la transformation T1 correspondante (figure 2.1 pour le cas 2D), puis on calcule la nouvelle structure minimale. Rappelons que le T1 préserve le volume des bulles, le nombre total de film ainsi que celui des vertex. Lorsque l'on prend également en compte les effets de mûrissement, le code doit par ailleurs permettre la disparition des bulles de petite taille (transformation T2).

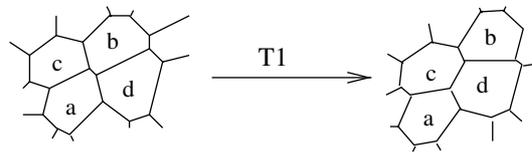


FIG. 2.1 – Transformation T1

Le seuil de stabilité d'un film, s'il correspond numériquement à une longueur critique, caractérise physiquement la fraction liquide de la mousse sèche. En effet, dans une mousse réelle, la quasi intégralité de la phase liquide se trouve au niveau

des vertex. Or la taille des vertex δv conditionne également la limite inférieure de la taille des films en deçà de laquelle le T1 se déclenche.

$$\phi = \frac{\text{nombre de vertex} \cdot \delta v^2}{\text{surface totale de la mousse}} \simeq \frac{\delta v^2}{S} \quad (2.1)$$

où S est le volume (2D) moyen des bulles.

iii) Présentation de l'algorithme

La structure générale des algorithmes quasistatiques est présentée sur la figure 2.2. L'ensemble s'articule autour de l'étape de minimisation d'énergie. Partant d'une mousse équilibrée et stable, on impose un léger incrément de déformation, puis on calcule la structure d'énergie minimale. Si cette structure possède un film de longueur inférieure au seuil, on opère sur la structure une transformation topologique, puis on calcule la structure minimale associée à cette nouvelle topologie. Ces deux étapes sont alors itérées, jusqu'à ce que plus aucun réarrangement ne soit nécessaire. On obtient ainsi la structure stable correspondant à la déformation imposée. L'ensemble de la procédure peut être répété indéfiniment.

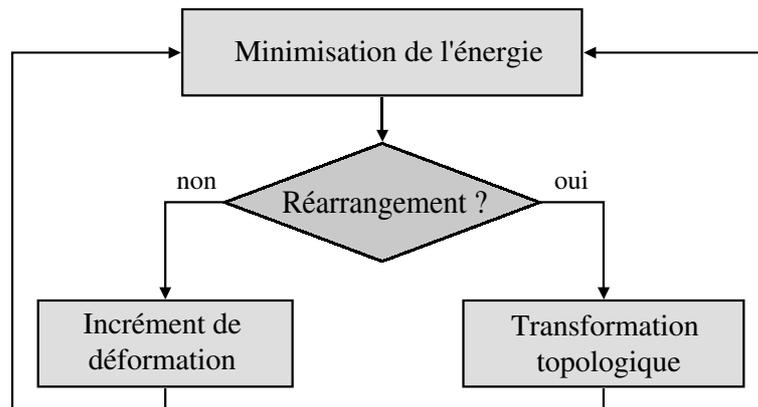


FIG. 2.2 – Boucle principale de l'algorithme

iv) Limitations

Ce type d'algorithme traite l'ensemble de l'évolution comme étant quasistatique, que ce soit la déformation imposée ou la plasticité. Le fait de minimiser totalement l'énergie après chaque réarrangement, puis de tester si celui-ci implique d'autres, ne rend pas totalement compte du vrai processus physique. En particulier, les phénomènes d'avalanche de réarrangements ne peuvent en toute rigueur être considérés comme des processus quasistatiques. Lorsqu'un T1 se produit, il est probable qu'il engendre à son voisinage d'autres réarrangements avant même que la structure macroscopique ne soit parfaitement équilibrée. Seule une

modélisation du régime transitoire, prenant en compte la dissipation visqueuse au sein des films liquides, peut alors rendre compte proprement de tels événements collectifs. Nous présenterons en fin de chapitre quelques modèles intégrant les processus dissipatifs.

b. Nature de notre étude

i) Cisaillement plan-plan

Les simulations que nous avons réalisées correspondent au cisaillement plan-parallèle d'une mousse. Celle-ci est confinée entre deux parois parallèles rigides sur lesquelles les bulles sont fixées (figure 2.3). La structure de la mousse est de plus périodique dans la direction du cisaillement. La diffusion du gaz est supposée opérer sur des temps plus longs que nos expériences, si bien que le volume de chaque bulle est constant tout au long de la simulation. La fraction liquide de la mousse, en relation avec le seuil de stabilité des films, est fixée à 1%. Les déformations sont imposées en déplaçant une des deux parois par incrément d'un vingtième du diamètre moyen des bulles. L'ensemble des films directement reliés aux parois rigides ne peuvent être impliqués dans des réarrangements, puisque cela imposerait de modifier la forme des bords.

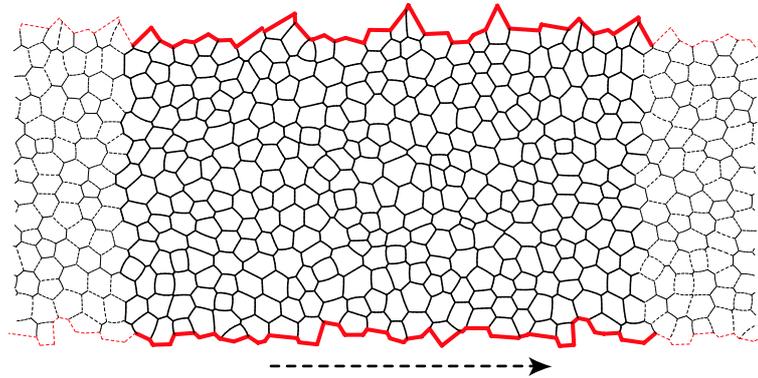


FIG. 2.3 – Cisaillement plan-plan d'une mousse numérique. La structure est périodique suivant la direction horizontale. Les bords supérieurs et inférieurs sont rigides, permettant ainsi un cisaillement par un déplacement relatif des deux murs.

ii) Construction de la mousse initiale

La structure initiale introduite dans l'algorithme correspond à une mousse polydisperse désordonnée. Pour l'obtenir, nous utilisons une tessellation de Voronoi (figure 2.4) :

- on répartit un ensemble de points sur une surface, selon une loi de distribution donnée.

- autour de chaque point, on construit l'ensemble des médiatrices des segments reliant ce point à tous les autres.
- Cet ensemble délimite alors une cellule comme indiqué sur la figure 2.4.

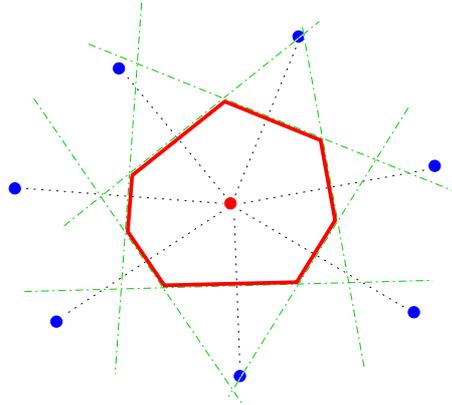


FIG. 2.4 – Construction pour la tessélation de Voronoi

La construction de Voronoi est particulièrement adaptée aux mousses puisqu'elle a le bon goût de fournir une configuration valide : les cellules correspondent aux bulles, leurs arêtes aux films, et les intersections de ces dernières aux vertex. Par construction, chaque vertex est partagé par exactement trois films.

La polydispersité et le désordre sont déterminés par le tirage des points initial. Un simple tirage aléatoire fournit en général des mousses beaucoup trop désordonnées [22]. Pour contrôler la polydispersité et obtenir une répartition homogène du désordre, nous sommes partis d'un réseau ordonné de points, puis nous avons ajouté un bruit gaussien sur l'ensemble de ces positions. La figure 2.5 présente un exemple d'une telle tessélation. Une fois équilibrée, cette structure aboutit à la mousse de la figure 2.3.

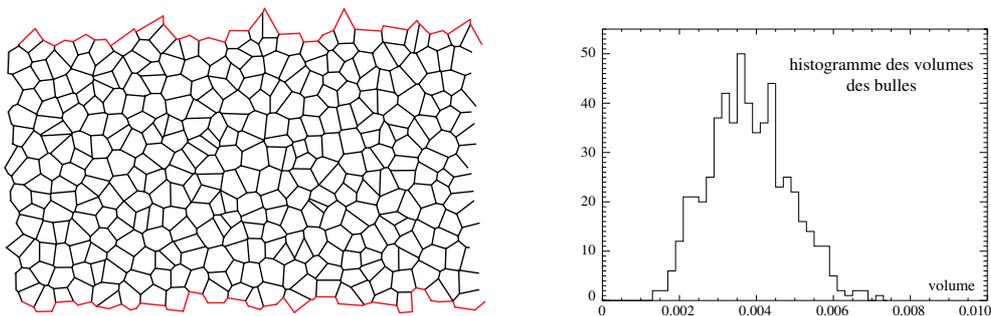


FIG. 2.5 – Exemple de mousse obtenue par une tessélation de Voronoi, accompagnée de la distribution des surfaces des bulles.

2.2 Algorithme de minimisation

La minimisation de l'énergie de la mousse constitue l'étape centrale de l'algorithme. Nous détaillerons dans les paragraphes qui suivent la procédure adoptée pour garantir l'équilibre mécanique de l'ensemble de la mousse.

a. Conditions d'équilibre

i) Discrétisation de la structure

Afin d'être traitée numériquement, la structure de la mousse doit être discrétisée. L'énergie de la mousse doit en particulier être exprimée en fonction d'un nombre restreint de degrés de liberté, rendant compte de la position des vertex ainsi que de la courbure des films. Le mode de discrétisation que nous avons utilisé est illustré sur la figure 2.6. La position de chaque vertex est un degré de liberté évident. Les films liquides seront quant à eux décomposés en segments dont les extrémités sont mobiles. Le nombre de segments peut être ajusté en fonction de la précision désirée sur la courbure des films. L'ensemble de la structure peut ainsi être décrite par un nombre fini de points, que nous noterons dans la suite $\{x_k\}$ ¹.

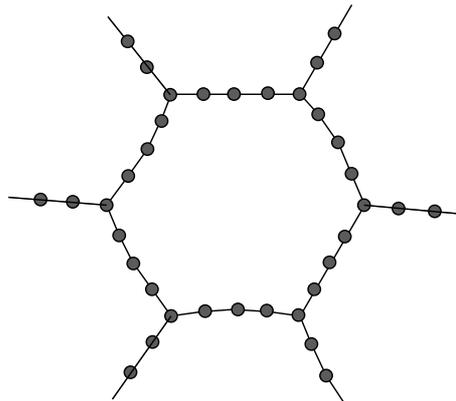


FIG. 2.6 – Exemple de discrétisation de la structure. Les coordonnées de chaque point constituent les degrés de liberté de la structure.

ii) Minimum d'énergie libre

L'énergie de la mousse s'exprime entièrement en fonction des $\{x_k\}$. Les grandeurs thermodynamiques telles que la quantité de gaz dans chaque bulle ou la température sont des paramètres de la minimisation, et non pas des degrés de liberté.

¹D'autres représentations existent; certaines exploitent directement la loi de Laplace, qui impose une forme circulaire aux cotés des bulles 2D [21, 22]. De ce fait, la forme d'un film ne dépend que des positions des deux vertex et de la valeur de la courbure.

$$E_{tot}(\{x_k\}) = E_L(\{x_k\}) + \sum_{\{b_i\}} e_i(N_i, V_i(\{x_k\}), T_i) \quad (2.2)$$

Le premier terme correspond à l'énergie de ligne :

$$E_L(\{x_k\}) = \sum_{\{l_j\}} \gamma \cdot l_j(\{x_k\}) \quad (2.3)$$

où les l_j sont les longueurs des segments constituant la mousse. Le second terme est associé à l'énergie libre du gaz de chaque bulle (N_i étant la quantité de gaz présente dans la bulle, V_i son volume et T_i la température). La condition d'équilibre s'exprime alors par :

$$\frac{\partial E_{tot}(\{x_k\})}{\partial x_k} = 0, \forall k \quad (2.4)$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial E_L(\{x_k\})}{\partial x_k} + \sum_{\{b_i\}} \frac{\partial e_i(N_i, V_i, T_i)}{\partial V_i} \Big|_{N_i, T_i} \frac{\partial V_i(\{x_k\})}{\partial x_k} = 0, \forall k \quad (2.5)$$

La dérivée de l'énergie d'une bulle par rapport à son volume correspondant simplement à la pression de la bulle, il vient :

$$\frac{\partial E_L(\{x_k\})}{\partial x_k} + \sum_{\{b_i\}} P_i(N_i, V_i, T_i) \frac{\partial V_i(\{x_k\})}{\partial x_k} = 0, \forall k \quad (2.6)$$

iii) Gaz incompressible

Du fait du comportement quasi-incompressible du gaz dans les mousses macroscopiques, l'équation d'état du gaz peut être simplifiée en une condition de volume V_i constant pour chaque bulle. Dès lors, la condition d'équilibre se réduit à une longueur de ligne minimale assortie de contraintes géométriques :

$$R_i(\{x_k\}) = V_i(\{x_k\}) - V_{i,0} = 0, \forall i \quad (2.7)$$

Ce type de problème se résout par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes :

$$\frac{\partial E_L(\{x_k\})}{\partial x_k} + \sum_{\{b_i\}} \lambda_i \frac{\partial R_i(\{x_k\})}{\partial x_k} = 0, \forall k \quad (2.8)$$

$$R_i(\{x_k\}) = 0, \forall i \quad (2.9)$$

En remarquant que $\frac{\partial R_i(\{x_k\})}{\partial x_k} = \frac{\partial V_i(\{x_k\})}{\partial x_k}$, il apparaît alors que les valeurs des multiplicateurs de Lagrange correspondent exactement aux pressions internes des bulles à l'équilibre. La position des $\{x_k\}$, assortie de la valeur des multiplicateurs de Lagrange, fournit donc l'ensemble des grandeurs nécessaires à l'analyse énergétique et mécanique de la mousse.

b. Moteur de minimisation

Le paragraphe précédent énonçait les conditions requises par une structure d'énergie minimale. Nous n'aborderons pas dans cette thèse la question de l'unicité du minimum d'énergie. Nous la supposerons et déterminerons ce dernier le plus précisément possible par l'intermédiaire de l'algorithme de convergence présenté dans les prochains paragraphes.

i) Surface Evolver

Surface Evolver² est un programme de minimisation de surface capable de prendre en compte un grand nombre de contraintes, et en particulier des contraintes de volume constant [28,29]. Il constitue aujourd'hui un standard dans la communauté des mousses et a démontré sa robustesse pour le calcul de structures, à 2D comme à 3D [24–27]. Il constituera pour nous l'élément central de la simulation numérique.

ii) Principe de fonctionnement

Sans contrainte : Surface Evolver utilise principalement un algorithme de descente de gradient (ou gradient conjugué) pour converger vers un minimum d'énergie. Cela consiste à calculer, sur chaque degré de liberté x_k , une force :

$$F_k = -\frac{\partial E}{\partial x_k} \quad (2.10)$$

puis à corriger la position des différents x_k en imposant un déplacement proportionnel à la force.

$$\delta x_k = \alpha F_k \quad (2.11)$$

Ces deux étapes sont alors itérées jusqu'à obtenir sur chaque x_k une force F_k inférieure à un seuil ; ce dernier détermine la précision du calcul.

Avec contrainte : Chaque contrainte de volume constant R_i délimite une hyper-surface de l'espace des degrés de liberté sur laquelle ces derniers doivent évoluer. La prise en compte des contraintes R_i sur les x_k se fait en projetant, à chaque itération de la descente de gradient, les forces calculées et les déplacements associés sur les contraintes. Pour plus d'informations sur les détails de la procédure, le lecteur pourra consulter la notice du logiciel, disponible sur le site de *Surface Evolver*.

Une fois le minimum déterminé, le programme fournit alors la position de l'ensemble des points, assortie de la valeur des multiplicateurs de Lagrange pour chaque contrainte. Dans le cas des mousses, cela revient à obtenir la structure complète ainsi que la pression au sein de chaque bulle.

²<http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver/evolver.html>

iii) Efficacité de la méthode

Surface Evolver s'avère être un très bon outil pour la détermination de structures équilibrées, à condition de partir d'une configuration initiale relativement proche de l'équilibre. Le logiciel permet en particulier d'ajuster finement la position des vertex et la courbure des films. Toutefois, son application aux mousses de grande taille et fortement déformées a posé de nombreux problèmes³. Certains modes de déformation, et en particulier ceux que nous utiliserons par la suite, à savoir le cisaillement, sont assez mal pris en charge aux grandes échelles -plus de 4 tailles de bulles environ- par des algorithmes de relaxation fondés sur le déplacement individuel des vertex. Le programme rencontre rapidement des points selles desquels il ne peut s'échapper spontanément.

Les techniques standards de minimisation dans ce cas de figure reposent sur le calcul des dérivées secondes de l'énergie. Les vecteurs propres de la matrice des dérivées secondes indiquent les modes collectifs de déplacements à imposer pour sortir du point selle. De telles techniques deviennent extrêmement lourdes lorsqu'il faut prendre en charge, comme c'est le cas ici, un grand nombre de contraintes et ne sont efficaces que si l'on se trouve déjà au voisinage proche d'un point d'équilibre. Nous avons donc développé une solution alternative, spécifiquement adaptée au cas des mousses, et permettant en un temps raisonnable de converger vers une structure équilibrée à toute échelle.

c. Gestion des modes mous

La relaxation des modes collectifs de déformation constitue la clef de voûte de ce travail numérique. Tout d'abord, nous imposons dans nos expériences numériques un cisaillement par les bords ; il faut être certain que la contrainte se répartisse uniformément dans l'échantillon. D'autre part, nous nous intéresserons particulièrement à l'effet de la plasticité locale sur l'ensemble du système. Pareille analyse ne peut être effectuée que si l'ensemble de la structure est finement équilibrée, même pour les modes de déformation de faible énergie.

La minimisation s'effectue en deux temps. La première phase consiste en une relaxation de la structure aux grandes échelles, et la seconde à un ajustement local de la position des vertex, réalisé par *Surface Evolver*, autour de la structure alors obtenue. Nous décrirons tout d'abord la première phase, correspondant à la relaxation des modes mous de grande échelle. A ce stade, la mousse est simplement modélisée par l'ensemble de ses vertex (les films sont alors plans). Cela permet de restreindre le nombre de degrés de liberté, et donc le temps de calcul⁴.

³Ces difficultés sont essentiellement dues au fait que les mousses sont incompressibles, et possèdent de ce fait un module de compression infiniment plus élevé que le module de cisaillement. La minimisation converge alors rapidement vers une structure respectant l'incompressibilité, mais équilibre très lentement les contraintes de cisaillement.

⁴Cela n'implique pas que les bulles soient toutes à la même pression. La pression d'une bulle correspond toujours au multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de volume constant.

Nous allons tester sur cette structure allégée un grand nombre de déformations collectives de petite amplitude. Chaque test consiste à imposer un champ de déplacement aux vertex puis à calculer la variation de l'énergie associée. Si celle-ci est négative, le déplacement est maintenu, sinon il est annulé. Ce procédé, inspiré des méthodes Monte-Carlo, nous permet de converger rapidement vers une structure proche de l'équilibre. Les champs de déplacement que l'on teste conditionnent l'efficacité et la rapidité de la méthode. Ils ont été choisis en fonction des conditions limites et d'observations des mouvements collectifs ayant lieu dans les mousses réelles. Deux catégories de déformation permettent à elles seules de faire converger la structure.

i) Relaxation longitudinale

La première catégorie de déformation permet d'équilibrer sur la mousse la contrainte de cisaillement. Ce mode est important puisque nous comptons précisément l'exploiter pour déformer la mousse. La figure 2.7 présente l'exemple que nous allons traiter. Partant d'une mousse équilibrée, nous imposons un déplacement fini au mur inférieur. Les films directement en contact avec les bords sont étirés et la mousse n'est à l'évidence plus à l'équilibre.

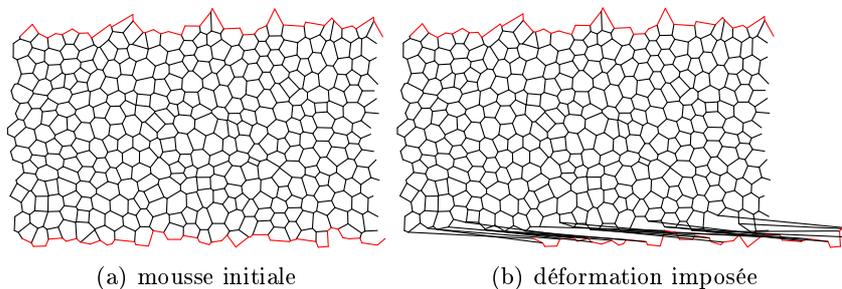


FIG. 2.7 – Déformation longitudinale

Principe : Une méthode, que nous appellerons relaxation longitudinale, sert à équilibrer ce type de déformations dans la mousse. Pour cela, nous exploitons le fait que tout cisaillement dans la direction des bords rigides préserve le volume des bulles. Les déformations similaires à celle présentée sur la figure 2.8 respectent les contraintes d'incompressibilité, la rigidité des parois, mais modifient l'énergie. On en teste alors un grand nombre, pour différentes valeurs de y_L et pour des amplitudes δ_L décroissantes. Le champ de déformation associé s'écrit :

Par contre, dans cette représentation, les films ne se coupent plus nécessairement à 120° .

$$\vec{u}_L(x, y) = \begin{cases} \delta_L \cdot \frac{y}{y_L} & \vec{u}_x & \text{si } y < y_L \\ \delta_L \cdot \frac{L_y - y}{L_y - y_L} & \vec{u}_x & \text{si } y > y_L \end{cases} \quad (2.12)$$

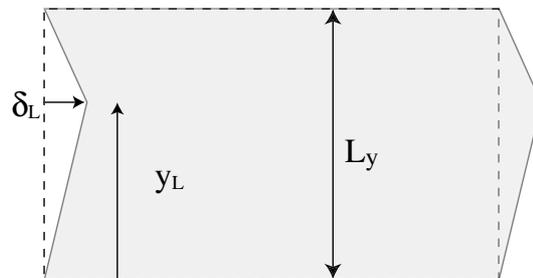


FIG. 2.8 – Type de déformation testé par l’algorithme, permettant la relaxation longitudinale

Résultats : L’application de cette technique sur la déformation précédente parvient en quelques secondes à équilibrer la structure. La figure 2.9 compare l’utilisation du moteur de *Surface Evolver*⁵ et notre algorithme.

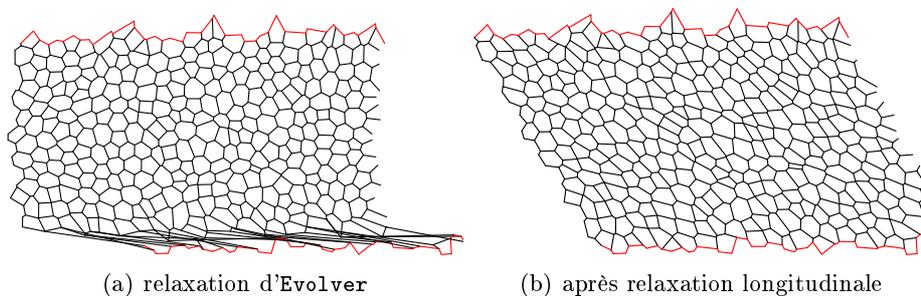


FIG. 2.9 – Résultats de la relaxation longitudinale

ii) Rotations locales

La méthode précédente permet de relaxer la déformation de cisaillement imposée dans la mousse, mais est inopérante pour des déformations ayant lieu sur de plus petites échelles de taille. Lorsqu’un T1 se produit dans la mousse, il induit localement une forte distorsion de la structure et provoque également des mouvements collectifs de bulles. L’examen du champ instantané de déplacement des bulles au cours d’une expérience en cellule de Couette [18] met en évidence

⁵Cette structure est obtenue après une dizaine de minutes.

de nombreux rouleaux, à toute échelle de taille (figure 2.10). Le second mode de relaxation correspondra donc à cette catégorie de déformation.

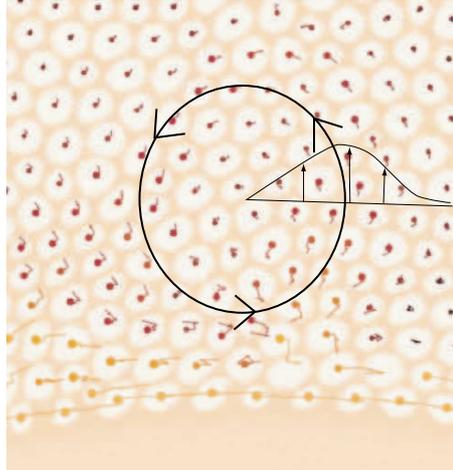


FIG. 2.10 – Déformation rotationnelle dans l'expérience en cellule de Couette. Les lignes tracées au centre des bulles indiquent leur champ de déplacement.

Principe : La technique est assez similaire à celle précédemment décrite, si ce n'est que nous testons à présent des déformations en forme de rouleaux, de rayon R aléatoire (compris entre 2 diamètres de bulle et l'épaisseur de la mousse L_y), positionnés aléatoirement dans la mousse (voir figure 2.11), mais de telle sorte qu'ils ne déforment pas les parois rigides. Le profil de ces déformations en coordonnées polaires est le suivant :

$$\vec{u}_R(r, \theta) = \begin{cases} \delta_R \cdot \sin(\pi \cdot r/R) \vec{u}_\theta & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.13)$$

Cette déformation permet une rotation solide du centre avec un raccord doux au reste de la mousse. Ces déformations ne respectant pas strictement la conservation des volumes, nous utilisons de très faibles amplitudes δ_R et imposons, avant de tester le gain d'énergie, quelques itérations d'Evolver afin de rétablir proprement les contraintes de volume constant. La minimisation s'arrête lorsque, après avoir testé une centaine de rouleaux (de toute taille et en tout point de la mousse), le gain d'énergie est inférieur à un seuil fixé.

Résultats : Les temps de calculs deviennent assez longs avec cette technique⁶, mais le résultat est très satisfaisant. La figure 2.12 en présente un exemple.

⁶De l'ordre d'une vingtaine de minutes pour la structure présentée sur un ordinateur mono-processeur de fréquence 1GHz.

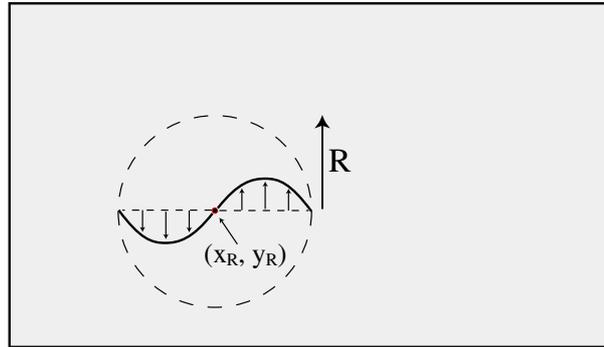


FIG. 2.11 – Exemple de rotation locale

Nous avons imposé une déformation de forte amplitude, ne respectant pas le volume des bulles. Comme nous l'avons déjà souligné, *Surface Evolver* parvient très bien à retrouver une structure respectant les contraintes géométriques. Par contre, il subsiste des résidus de la déformation imposée qu'il n'est pas possible d'équilibrer en un temps raisonnable. Comparativement, notre méthode, en un temps comparable, a pu recalculer la structure d'origine⁷.

Remarque

Nous prétendons que toute déformation incompressible du matériau peut être relaxée, dans notre géométrie, à partir des tests que nous effectuons. La démonstration empirique que nous venons de présenter n'en constitue pas une preuve générale. Une analyse plus formelle est présentée en annexe (page 197). Nous y montrons que tout champ de déplacement incompressible peut être décomposé en une somme de déformations longitudinales et de rouleaux.

d. Affinage de la structure

Une fois relaxées les grandes échelles, nous pouvons pleinement exploiter les fonctionnalités de *Surface Evolver*. Les segments droits reliant les vertex sont alors divisés en quatre sous-segments. On affine ensuite le calcul de l'énergie minimale du système. Cette dernière étape permet d'ajuster les longueurs et les courbures des films (figure 2.13). La minimisation de l'énergie s'achève. La structure alors obtenue est à présent exploitable, puisqu'elle possède une réalité physique. L'ensemble de ses caractéristiques est enregistré. Toutes les grandeurs que nous présenterons par la suite auront été calculées à partir de la structure minimisée.

⁷Nous devons toutefois utiliser *Surface Evolver* pour rétablir les contraintes de volume avant de démarrer notre algorithme.

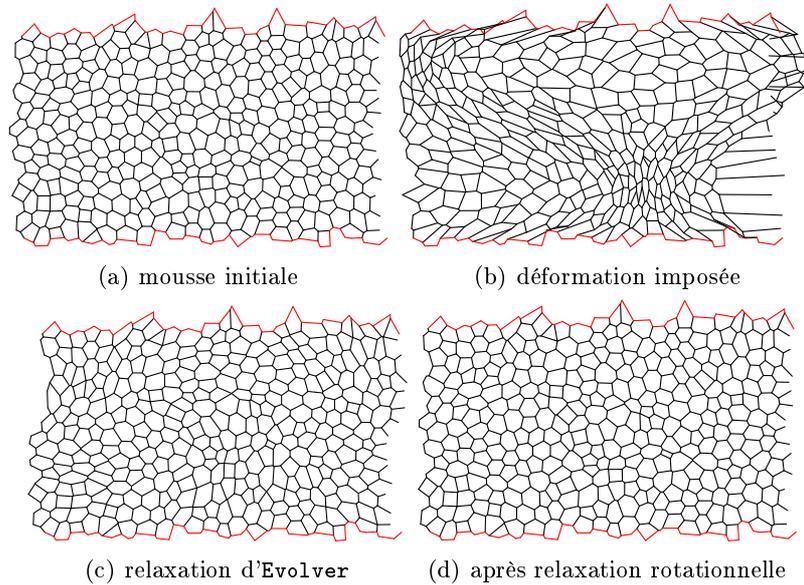


FIG. 2.12 – Résultats de la relaxation rotationnelle : nous avons imposé à la mousse présentée sur la figure (a) une forte déformation, ne conservant pas les contraintes de volume constant (b). Surface Evolver permet de rétablir les contraintes, mais ne parvient pas à lui-seul en un temps fini à relaxer l'ensemble de la structure. L'utilisation conjointe de notre algorithme et de Surface Evolver aboutit par contre à un équilibrage correct de la structure aux grandes échelles.

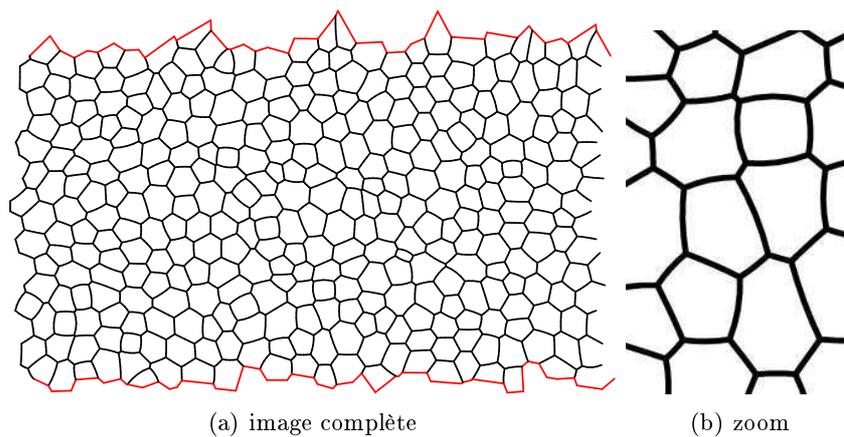


FIG. 2.13 – Etape finale : Minimisation avec courbure

2.3 Quelques autres modèles numériques...

Les modèles quasistatiques sont par nature limités aux déformations lentes. Plusieurs autres approches existent dans la littérature, permettant notamment de prendre en compte une dissipation visqueuse. Il est alors possible de sonder une réponse rhéologique dépendant du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Le principal intérêt de ces modèles est d'améliorer a priori la gestion des avalanches de réarrangements, qui ne peuvent être raisonnablement assimilées à des processus quasistatiques. Reste alors à modéliser les processus de dissipation, contrôlant en grande part la dynamique. Remarquons dès à présent qu'une telle modélisation ne peut se faire sans perte de généralité. Elle doit dépendre du type de confinement (mousse 2D confinée entre deux plaques⁸, radeau de bulles, mousse 3D, etc...).

a. Vertex Model

Le *Vertex Model* [30–32] constitue probablement l'approche la plus simple et la moins arbitraire des modèles dynamiques de mousse sèche. La structure de la mousse est représentée par la position de ses vertex (les films sont donc plans). Le gaz des bulles est supposé incompressible. La différence essentielle avec les modèles quasistatiques réside dans l'introduction d'un terme de dissipation visqueuse dû au déplacement des films liquides. Le taux local de dissipation d'énergie dépendant de la vitesse de déplacement du centre du film. Ces considérations conduisent à l'écriture d'une équation dynamique pour l'ensemble des vertex. Nous renvoyons le lecteur aux références précédemment citées pour plus de détails concernant ces aspects. Nous aurons l'occasion dans la suite de comparer quelques uns de nos résultats avec ceux fournis par ce modèle.

b. Bubble Model

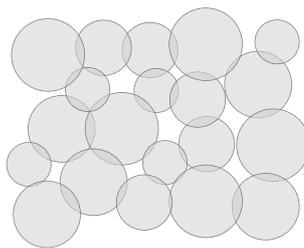


FIG. 2.14 – Représentation d'une mousse dans le *Bubble Model*

Le *Bubble Model* [33–36] propose une vision très simplifiée des mousses. Chaque bulle y est représentée par un disque (ou une sphère à 3D). Du fait

⁸La dissipation a alors lieu principalement au niveau de films liquides et bords de Plateau placés entre les bulles et les parois

de l'absence de film liquide dans ce modèle, les aspects topologiques ne peuvent être étudiés, et la plasticité ne revêt pas le même caractère discret que dans les autres modèles. En revanche, la fraction liquide équivalente peut être ajustée en modifiant la concentration des disques. Le *Bubble Model* est essentiellement un modèle de mousses humides. Les interactions entre bulles sont répulsives, avec un potentiel quadratique, si celles-ci s'interpénètrent (voir figure 2.14), et nulle sinon. Une force de dissipation visqueuse est également introduite. Celle-ci est considérée comme proportionnelle aux différences de vitesses entre une bulle et ses voisines (il y a à ce niveau un fort arbitraire). A partir d'un bilan de forces sur chaque bulle, on en déduit autant d'équations dynamiques permettant de calculer l'évolution du système (l'inertie des bulles étant négligeable).

c. Q-Potts Model

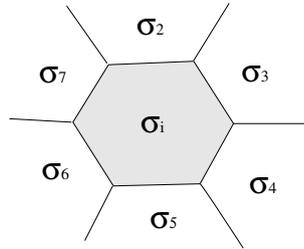


FIG. 2.15 – Représentation d'une mousse dans le *Q-Potts Model*

Le *Q-Potts Model* [37, 38] s'inspire directement d'un modèle de spins sur réseau. A chaque bulle correspond une valeur de spin différente. Une bulle i est constituée de l'ensemble (par construction nécessairement connexe) des sites du réseau possédant le même valeur de spin σ_i (voir figure 2.15). Afin de correspondre à une mousse sèche, un hamiltonien est introduit de telle sorte qu'un spin entouré de spins de même état n'ait aucun coût énergétique, tandis qu'un spin situé à la frontière d'une bulle engendre un incrément d'énergie fixé. L'hamiltonien du système est donc proportionnel à la longueur de ligne, ce qui est de ce point de vue réaliste.

La dynamique de la mousse est gérée par un algorithme de type Monte-Carlo. Si le changement de valeur d'un site du réseau permet une variation d'énergie ΔH négative, celui-ci est accepté, sinon, la transformation reste possible, mais avec une probabilité exponentiellement décroissante $P = \exp(-\Delta H/T)$, la "température" T ayant une signification pour nous mystérieuse. Ce type d'algorithme permet aux films d'avoir une forme quelconque (au pas du réseau près). La structure converge spontanément vers un équilibre vérifiant une condition d'énergie minimale, conformément à ce que nous avons déjà présenté dans ce chapitre. Le point le plus délicat concerne encore une fois la modélisation de la dynamique hors d'équilibre. L'intérêt de l'approche est de permettre un ajustement dynamique de

la forme des films, ce point étant totalement absent dans les autres modèles, mais il n'y a pas de raison particulière pour qu'une dynamique Monte-Carlo sur les sites du réseau soit conforme au déplacement des films d'une mousse réelle.

Imposition de la déformation

Comme nous venons de le voir, le point le plus délicat des modèles dynamiques concerne la dissipation. Mais ce n'est pas le seul problème qui se pose. Dès lors que l'on s'intéresse à des problèmes rhéologiques, il est important de décrire précisément la façon dont on impose au matériau la déformation. Dans une expérience de rhéologie, une contrainte ou une déformation est imposée en déformant par les bords un échantillon. Le rôle de la dynamique doit pas se limiter à la dissipation, il faut de plus s'assurer que les contraintes imposées par un opérateur extérieur peuvent effectivement se propager dans l'échantillon.

Cet aspect des modèles est assez généralement mal décrit dans les publications, or il peut avoir un impact significatif sur les résultats. Il est assez fréquent dans les codes numériques de supposer a priori la forme de l'écoulement, à savoir un profil linéaire ; par exemple, dans les versions rudimentaires du Bubble Model [33,34,36], la dissipation visqueuse n'est pas calculée à partir des véritables écarts de vitesse entre une bulle et ses voisines, mais simplement en mesurant l'écart entre la vitesse d'une bulle et celle qu'elle devrait avoir si elle suivait un écoulement de cisaillement homogène. Cela suppose bien a priori le profil d'écoulement. Une telle approche est également présente dans quelques travaux exploitant le *Vertex Model* [31] ou le *Q-Potts Model* [37].

Supposer la forme de l'écoulement pour accélérer le temps de calcul est un exercice périlleux lorsqu'il est appliqué sur des systèmes dont les écoulements peuvent être inhomogènes. Le cas échéant, cela empêche simplement une éventuelle localisation d'apparaître. Nous nous permettons de souligner fortement cela car cette technique reste un standard du numérique, "a more conventional experiment" pour citer un fragment de l'article de Jiang et al. [37]. Ces derniers présentent dans ce même article des résultats obtenus d'une part en déformant l'échantillon par les bords, et d'autre part en imposant le cisaillement en volume. Dans un cas l'écoulement est localisé près des bords, dans l'autre il est homogène. Si l'on souhaite pouvoir sérieusement comparer un code numérique à quelque expérience réelle, il faut accorder bien plus d'importance aux résultats obtenus à partir d'une déformation imposée de l'extérieur, par les bords de l'échantillon, ou en exploitant des conditions bipériodiques de type Lees-Edwards [32], sans qu'aucune supposition ne soit faite a priori sur la forme de l'écoulement.

Chapitre 3

Cisaillement alterné

Nous amorçons avec ce chapitre l'analyse du comportement rhéologique de nos mousses numériques. Afin d'aborder progressivement la description des écoulements permanents, nous commencerons tout d'abord par un examen détaillé des régimes de faible déformation (de 10 % à 100 %). En soumettant une mousse à des cisaillements alternés de différentes amplitudes, nous soulignerons la forte non-linéarité de sa rhéologie, ainsi que les effets structurels occasionnés par la déformation imposée à la mousse (relaxation d'énergie et développement d'une anisotropie).

Sommaire

3.1	Rhéologie quasistatique	57
a.	Relations contrainte-déformation	57
b.	Cycles Limites	59
c.	Développement de contraintes normales	61
3.2	Evolution structurelle	63
a.	Potentiel élastique	64
i)	Energie de la mousse	64
ii)	Détermination du potentiel élastique	64
iii)	Evolution du module élastique	65
iv)	Evolution de l'énergie de structure E_0	66
b.	Module élastique et contraintes normales	68
i)	Un modèle simple d'élasticité	68
ii)	Modèle anisotrope	69
c.	Relaxation du désordre	72
i)	Mesures topologiques du désordre	72
ii)	Mécanisme de relaxation	74
3.3	Cas des forts cisaillements	74
a.	Relaxation : structure <i>versus</i> contrainte	74
b.	Transition vers l'écoulement	76
c.	Plasticité inhomogène	76

Simulations réalisées

Nous avons utilisé pour ces simulations des mousses de 16×24 bulles (figure 3.1). Les bords supérieurs et inférieurs sont rigides et la mousse est périodique dans la direction du cisaillement. Celui-ci est imposé en déplaçant progressivement, par incrément d'un vingtième de taille de bulle, le bord inférieur¹. La valeur de ce déplacement sera noté d tout au long de la thèse. L'unité de longueur correspond à l'épaisseur de la mousse, si bien que d caractérise autant le déplacement du mur rigide que la déformation imposée à la mousse. Il s'agit de notre seul paramètre de contrôle ; la structure de la mousse, et par là même son énergie et son état de contrainte, découlent directement de la minimisation de l'énergie pour une position donnée d du bord rigide.

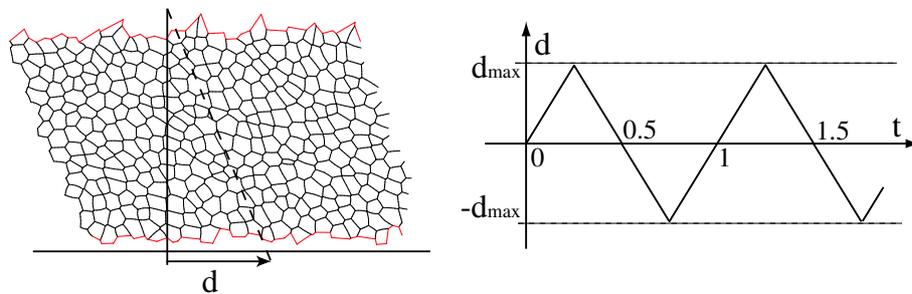


FIG. 3.1 – Cisaillement alterné

Dans les simulations en cisaillement alterné que nous allons présenter, la position du mur inférieur évolue entre deux limites d_{max} et $-d_{max}$, comme indiqué sur la figure 3.1. Le temps physique n'intervenant pas dans les algorithmes quasistatiques, nous noterons t le nombre (non nécessairement entier) de cycles effectués. Une sélection de vidéos, pour des amplitudes de déplacement $d_{max} = 0.3, 0.45$ et 1.0 , est disponible sur le CD-ROM accompagnant le manuscrit. Les flashes de couleur apparaissant pendant le cisaillement soulignent la position des réarrangements.

3.1 Rhéologie quasistatique

a. Relations contrainte-déformation

A chaque valeur de t correspond une structure de la mousse. A partir de celle-ci, nous pouvons extraire la valeur de la contrainte de cisaillement σ_{xy} , en utilisant la relation 1.13 page 28 :

¹Il est indifférent de déplacer dans un algorithme quasistatique l'un ou l'autre des murs. Nous avons toutefois vérifié, en tant que test, qu'il en était bien ainsi.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{S_{tot}} \cdot \sum_{\{l_i\}} \frac{l_{i,x} \cdot l_{i,y}}{l_i} \quad (3.1)$$

où S_{tot} correspond à la surface totale occupée par la mousse. La sommation porte sur tous les cotés des bulles. Sur la figure 3.2 sont présentées les évolutions de la contrainte pour différentes valeurs de l'amplitude de cisaillement d_{max} . Les traits en pointillés correspondent à la position du mur, tandis que les traits pleins indiquent la valeur de la contraintes de cisailment, divisée d'un facteur 10.

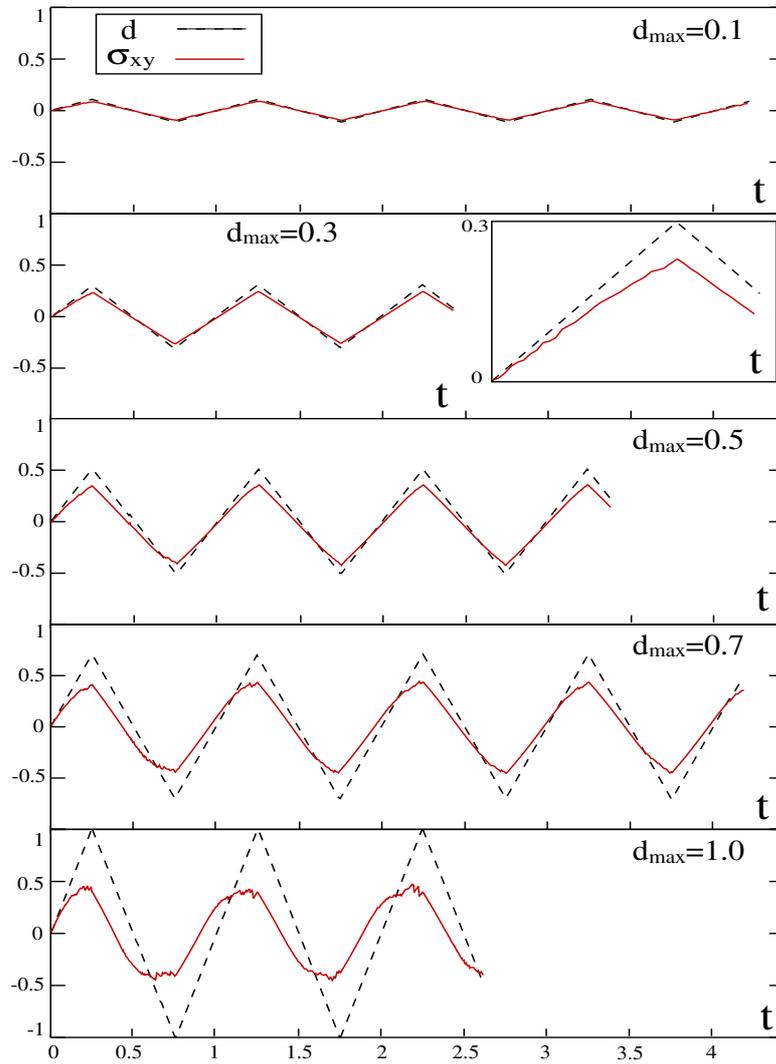


FIG. 3.2 – Contraintes en fonction de t pour différentes valeurs de d_{max} . L'encart représente un agrandissement de la première charge pour une amplitude de déplacement du mur égale à 0.3.

Ce type de graphe illustre le comportement élasto-plastique des mousses sous cisaillement. Pour de faibles amplitudes de cisaillement, la relation contrainte-déformation est linéaire et réversible. Au delà d'une déformation imposée de l'ordre de 1 ($d_{max} \approx 0.5$), la contrainte atteint une valeur limite (ici de l'ordre de 5), que nous noterons dans la suite σ_y . Cette vision très schématique du comportement rhéologique n'est toutefois valable qu'une fois que la mousse a subi plusieurs cycles de charge et décharge élastique. L'encart de la figure 3.2 correspond à un zoom de la première charge élastique de la mousse. Il apparaît alors clairement que même pour des amplitudes de déformation faibles et des contraintes faibles, la mousse n'adopte pas immédiatement un comportement purement élastique. Comme l'atteste la visualisation du film correspondant à ces expériences numériques, quelques T1 se produisent dans la mousse durant les deux premiers cycles, et il faut effectivement attendre le troisième cycle pour qu'apparaisse le régime purement élastique. Nous aurons l'occasion par la suite de décrire l'influence des premiers cycles de cisaillement sur la structure de la mousse.

b. Cycles Limites

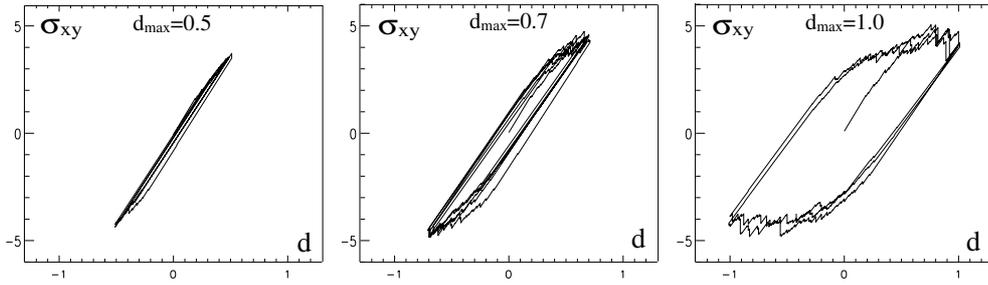


FIG. 3.3 – Cycles d'hystérésis pour différentes amplitudes de cisaillement

La figure 3.3 montre trois cycles déformation-contrainte correspondant, du plus fin au plus large, à des amplitudes de déformation de 0.5, 0.7 et 1.0. La dissipation d'énergie par cycle ΔE peut être aisément calculée à partir de l'aire de chacun des cycles d'hystérésis.

$$\Delta E = L_x \oint_{\text{cycle}} \sigma_{xy}(d) dd \quad (3.2)$$

Nous avons calculé la dissipation par cycle au delà du régime transitoire précédemment décrit. Le résultat est présenté sur la figure 3.4. Aux faibles amplitudes, la perte d'énergie est nulle, conformément à la présence d'un régime limite purement élastique. Lorsque l'amplitude de déformation dépasse le seuil de plasticité, ($2 \cdot d_{max} \simeq 1$), une dissipation d'énergie non nulle ΔE_∞ subsiste en régime permanent. La dissipation d'énergie ayant lieu principalement lorsque la mousse atteint la valeur limite σ_y de sa contrainte, nous pouvons estimer assez précisément la

quantité d'énergie dissipée par cycle en fonction de l'amplitude de cisaillement imposée (figure 3.5).

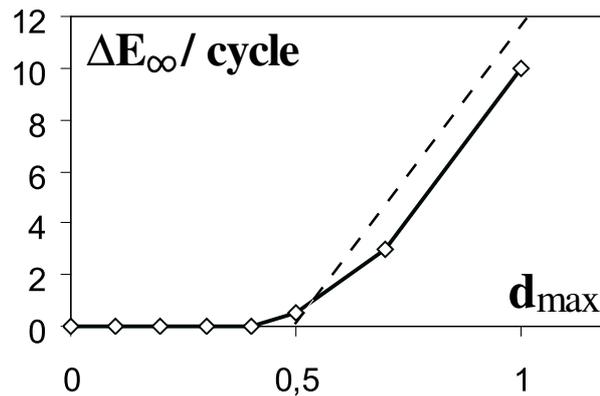


FIG. 3.4 – Dissipation d'énergie par cycle en régime permanent

$$\Delta E_{\infty} = (2d_{max} - 1) \cdot 2\sigma_y \cdot L_x \quad (3.3)$$

Cette expression fournit une dépendance affine de l'énergie dissipée en fonction de l'amplitude de cisaillement que l'on retrouve sur les mesures numériques (trait en pointillés de la figure 3.4).

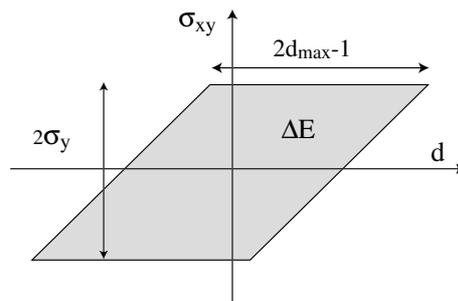


FIG. 3.5 – Dissipation d'énergie par cycle

Une rhéologie fortement non-linéaire

Les mesures rhéologiques sur les mousses 2D présentent donc deux difficultés majeures. La première concerne la dépendance de la mesure vis-à-vis de l'histoire

du matériau. Sous faible cisaillement, le régime purement élastique n'apparaît qu'après quelques cycles d'oscillations. Même lorsque le système ne possède à l'échelle des bulles aucune évolution physique (par exemple du mûrissement), la mousse présente des caractéristiques rhéologiques dépendantes a priori du temps. Nous verrons par la suite que le régime transitoire est dû à une évolution de la structure de la mousse.

L'autre point qu'il est important de souligner concerne la forte non-linéarité des caractéristiques rhéologiques avec l'amplitude de cisaillement. Nos mesures contrastent fortement avec les mesures expérimentales effectuées sur des systèmes 3D. Ces dernières ne semblent pas mettre en évidence de régime purement élastique, à quelque amplitude que ce soit, et le comportement rhéologique est expérimentalement linéaire [2, 5, 6]. Ces différences peuvent provenir du fait que les mousses 3D possèdent une plus grande richesse de réarrangements que les mousses 2D, dont certains peuvent se produire à des amplitudes de déformation assez faible. Kraynik *et al.* ont récemment publié un remarquable travail numérique dans lequel des mousses 3D sont soumises à des déformations élongationnelles répétées selon tous les axes, d'une amplitude de l'ordre de 15 % [27]. A de telles amplitudes, la plasticité reste indéfiniment présente, bien qu'un état stationnaire soit atteint. L'existence même d'un régime linéaire dans les mousses 3D reste toutefois un problème entier.

c. Développement de contraintes normales

La mesure des contraintes de cisaillement a permis d'établir le comportement élastoplastique des mousses sous cisaillement. En deçà d'un certain seuil de déformation ($d_{max} < 0.5$), le comportement limite devient purement élastique. L'élasticité des mousses, malgré une relation contrainte-déformation parfaitement linéaire, présente quelques subtilités lorsque l'on s'intéresse aux contraintes normales. Nous nous concentrerons ici sur les graphes obtenus sous un cisaillement de forte amplitude ($d_{max} = 1$) afin d'illustrer les forts effets non-linéaires qui s'y développent. La figure 3.6 présente les graphes de l'écart des contraintes normales $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ en fonction du nombre t de cycles effectués et de la contrainte de cisaillement σ_{xy} lors du cisaillement alterné.

Ces graphes illustrent le fort couplage entre les contraintes normales et les contraintes de cisaillement. Les profils obtenus peuvent être décrits par une relation quadratique entre les contraintes normales et le cisaillement, à laquelle s'ajoute un décalage dépendant du nombre total de cycles effectués t . La relation empirique suivante peut alors être posée :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Delta\sigma_{n,0}(t) + \beta \cdot \sigma_{xy}^2 \quad (3.4)$$

où β est supposé constant. Nous avons estimé par extrapolation l'évolution du décalage $\Delta\sigma_{n,0}$ en fonction du nombre de cycles afin d'en préciser la forme (figure 3.7). Assez curieusement, nous n'avons pas remarqué dans la littérature de référence à ce type de comportement, si ce n'est les articles de Reinelt *et al.* [25,26], qui

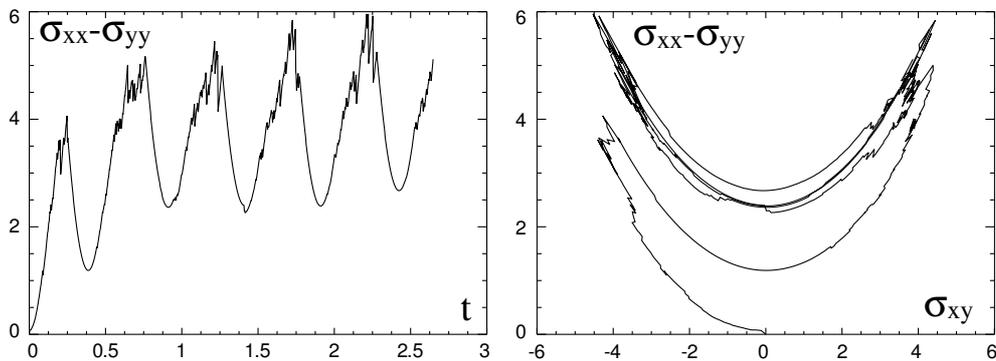


FIG. 3.6 – Contraintes normales en fonction du nombre de cycles et de la contrainte de cisaillement

ont effectués des mesures numériques similaires sur des mousses 3D cristallines. La dépendance quadratique y est bien présente, mais sur ces systèmes ordonnés, aucune évolution majeure du paramètre $\Delta\sigma_{n,0}$ ne peut être observée. Ces mesures présentent toutefois à nos yeux un grand intérêt, puisqu'elles fournissent, à partir d'une simple mesure des contraintes externes sur une mousse, une information sur son histoire, en particulier en terme d'évolution structurelle.

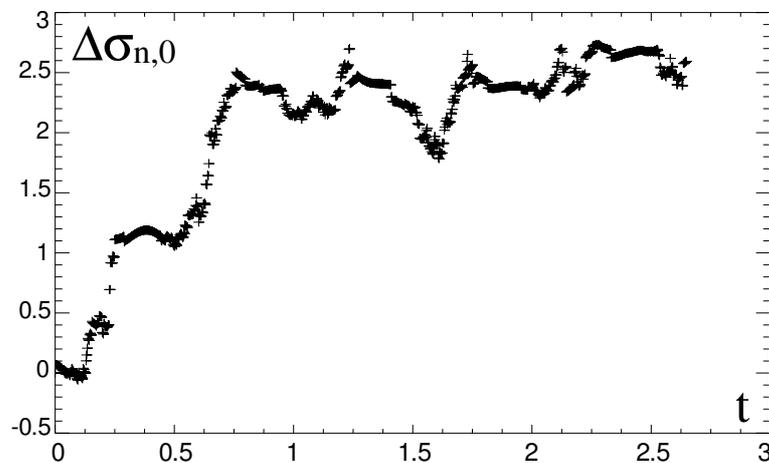


FIG. 3.7 – Différence des contraintes normales sous contrainte de cisaillement nulle en fonction du nombre de cycles

Remarque : La relation quadratique entre la différence des contraintes normales et la contrainte de cisaillement est également observée dans les matériaux polymères [39]. Toutefois, contrairement aux mousses, l'état moyen de déformation élastique des chaînes dépend du taux de cisaillement et non pas de la déformation imposée.

Résumé :

Les propriétés rhéologiques des mousses 2D sèches sont fortement non-linéaires :

- ◊ Pour de faibles amplitudes de déformation ($d_{max} < 0.5$), le comportement après quelques cycles est parfaitement élastique.
- ◊ Pour de plus grandes déformations, nous entrons dans un régime plastique, l'écoulement ayant lieu sous une contrainte seuil σ_y .

Pour de faibles déformations, le régime élastique n'est atteint qu'après un régime transitoire durant lequel des T1 se produisent. Nous assistons donc à un élargissement du domaine élastique, signe d'une évolution structurelle.

Le cisaillement alterné provoque également le développement de contraintes normales. La relation entre la différence des contraintes normales et la contrainte de cisaillement se met sous la forme :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Delta\sigma_{n,0}(t) + \beta \cdot \sigma_{xy}^2$$

Le terme $\Delta\sigma_{n,0}(t)$ traduit un effet de mémoire de la mousse.

3.2 Evolution structurelle

Les mesures rhéologiques, si elles permettent une caractérisation mécanique du matériau, peuvent difficilement suffire lorsqu'il s'agit de comprendre en détail les mécanismes de la plasticité opérant dans le système. Parmi l'ensemble des résultats que nous avons d'ores et déjà présentés, les plus marquant concernent la présence d'un régime transitoire pour les cisaillements de faible amplitude. Lors des premiers cycles, les réarrangements conduisent à une consolidation durable de la structure, jusqu'à ce que la matériau possède un comportement purement élastique pour cette amplitude de déformation. Simultanément se développent dans la mousse des contraintes normales. Ces deux effets, qui affectent la réponse mécanique de la mousse, ne peuvent provenir que de l'accumulation des réarrangements du régime transitoire. Comment caractériser l'empreinte de la plasticité sur la mousse ?

a. Potentiel élastique

i) Energie de la mousse

Comme nous l'avons de nombreuses fois souligné, l'énergie d'une mousse 2D correspond simplement à la longueur de ligne de sa structure. En analysant l'évolution de l'énergie du système, nous allons pouvoir extraire de nombreuses informations supplémentaires quant à l'action de la plasticité sur la structure de la mousse. La figure 3.8 présente quelques graphes typiques de la longueur totale de ligne en fonction de la déformation.

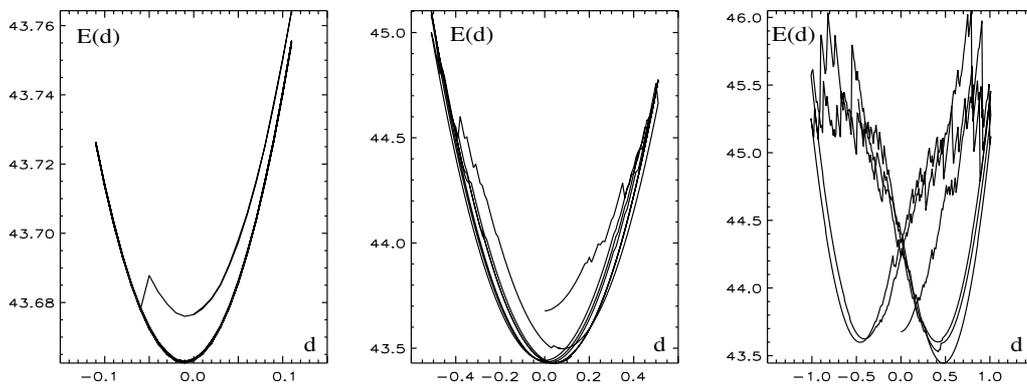


FIG. 3.8 – Energie en fonction de la déformation imposée pour différents d_{max}

Le premier de ces graphes est le plus simple à décrire. Pour une amplitude de déformation imposée de l'ordre de 0.1, le comportement de la mousse est essentiellement élastique. L'énergie de la mousse évolue en décrivant un potentiel quadratique en déformation. Comme l'atteste le brusque saut dans la courbe tracée, un événement plastique (T1) se produit toutefois lorsque le bord inférieur atteint la position -0.05 pour la première fois. La structure de la mousse change alors, et cela affecte la forme du potentiel élastique.

Lorsque l'on augmente l'amplitude de cisaillement, le nombre de réarrangements provoqués par la déformation imposée augmente. Il n'est pas facile à partir des simples tracés énergie-déformation de déterminer systématiquement, après chaque événement plastique, la forme exacte du potentiel, le domaine élastique entre réarrangements pouvant être de très petite taille.

ii) Détermination du potentiel élastique

Pour remédier à ces difficultés, nous avons mis à profit les possibilités offertes par la simulation numérique. Les seuls événements responsables d'un changement du potentiel sont les T1. Pour déterminer précisément la forme du potentiel élastique d'une structure, nous réalisons, en partant de cette structure, une expérience non-réaliste dans laquelle la mousse est cisailée sans jamais réaliser les transfor-

mations topologiques nécessaires. Cela permet d'évaluer avec précision le profil du potentiel sur des amplitudes de déformation de l'ordre de 1, que la structure soit physiquement stable ou pas. Un exemple d'une telle réalisation est présenté sur la figure 3.9. Les symboles correspondent aux valeurs numériques, et la ligne continue à un fit parabolique. L'accord est excellent. De cet ajustement, nous pouvons extraire la forme précise du potentiel élastique.

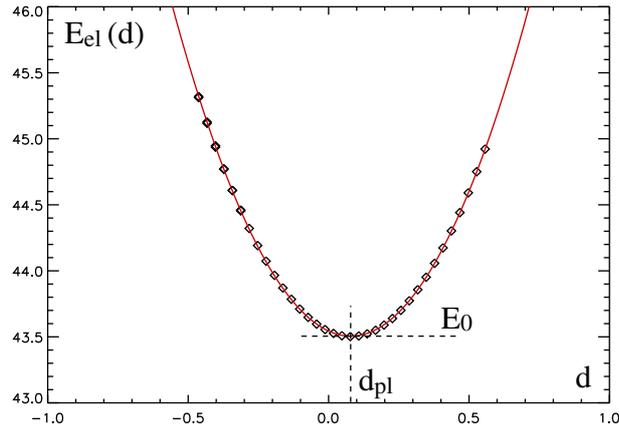


FIG. 3.9 – Forme parabolique du potentiel élastique d'une structure

$$E(x) = E_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x - d_{plast})^2 \quad (3.5)$$

E_0 correspond à l'énergie minimale de la structure (à contrainte nulle), que nous nommerons par la suite *énergie de structure*. Le coefficient k est relié au module élastique de cisaillement de la mousse μ , via la relation $k = \mu \cdot L_x/L_y$. L'offset horizontal d_{plast} caractérise simplement la position du minimum d'énergie. La détermination précise du potentiel élastique fournit donc d'une part une mesure précise du module de cisaillement, pour la direction que nous sondons, et d'autre part une mesure énergétique intrinsèque à la structure, qui elle ne peut être obtenue par des mesures de forces.

Comme l'illustre la figure 3.8, chaque réarrangement de bulles provoque un changement de structure et affecte la forme exacte du potentiel élastique. Les paramètres E_0 , k et d_{plast} dépendent alors a priori de l'histoire complète du système, c'est à dire dans notre cas de t (voir figure 3.1 page 57). Analysons à présent en détail l'évolution de ces paramètres.

iii) Evolution du module élastique

La rigidité de la mousse, représentée par le paramètre k de l'ajustement 3.5, fournit une mesure directe du module élastique de cisaillement μ via la relation $k = \mu \cdot L_x/L_y$. La figure 3.10 présente l'évolution de k en fonction du nombre

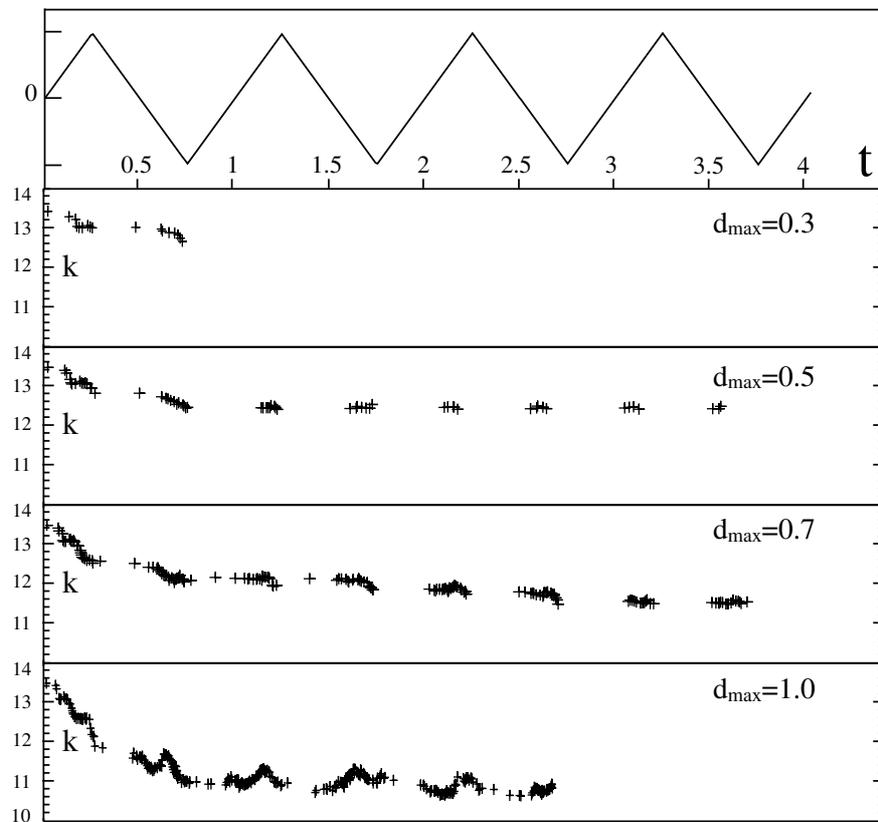


FIG. 3.10 – Evolution du module élastique en fonction du nombre de cycles pour différentes amplitudes de déformation imposée

de cycles t , pour différentes amplitudes de cisaillement. Les valeurs ne sont placées sur les graphes qu'aux instants où se produisent les réarrangements T1. La courbe supérieure indique la déformation imposée d . Quelle que soit l'amplitude maximale, la déformation imposée engendre un assouplissement significatif de la structure vis-à-vis du cisaillement, d'autant plus important que l'amplitude du cisaillement imposé est grande.

Nous avons précédemment indiqué que des contraintes normales apparaissent sous cisaillement alterné, et traduisait un effet de mémoire de la structure. En voici donc un second. Nous montrerons dans la suite que ces deux effets proviennent d'un accroissement de l'anisotropie de la structure, induit par le cisaillement alterné.

iv) Evolution de l'énergie de structure E_0

La figure 3.11 présente l'évolution de l'énergie de structure E_0 en fonction du nombre de cycles t , pour différentes amplitudes de cisaillement. Pour des cisaille-

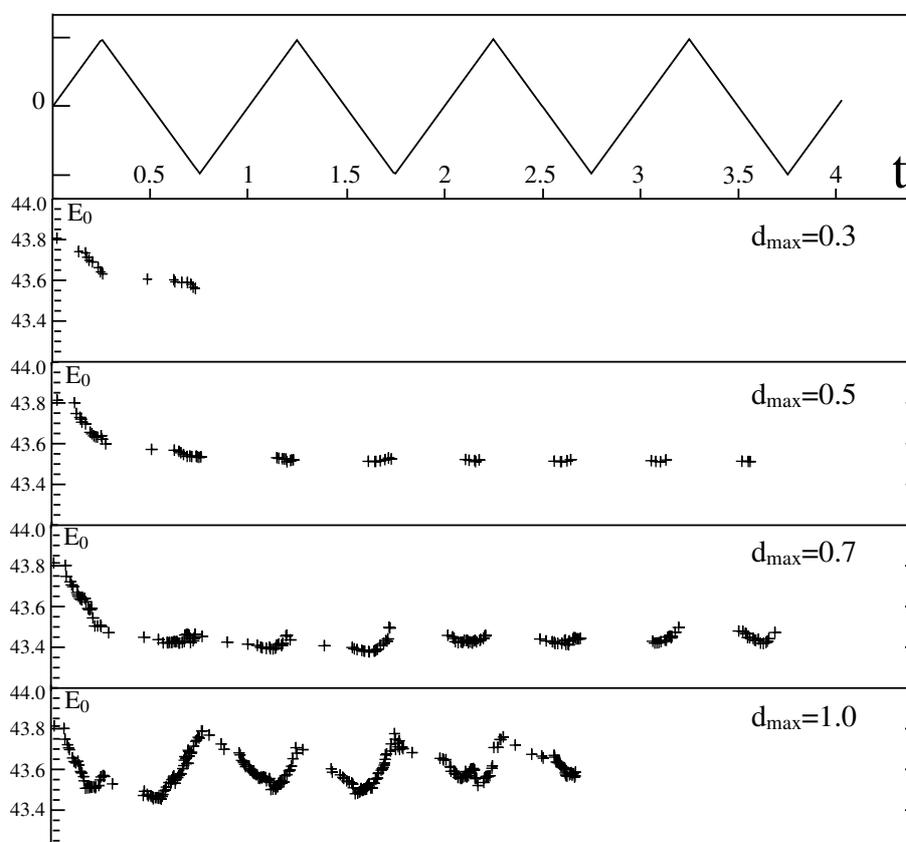


FIG. 3.11 – Evolution de l'énergie E_0 en fonction du nombre de cycles pour différentes amplitudes de déformation imposée

ments de faible amplitude, nous assistons à une diminution progressive de l'énergie de structure, d'autant plus prononcée une fois encore que l'amplitude de déformation est importante. Toutefois, à l'approche du régime plastique ($d_{max} > 0.7$), le comportement change radicalement. L'évolution monotone cède la place à des oscillations dont la fréquence correspond à celle des changement de sens du déplacement imposé.

Les résultats que nous venons de présenter mettent en évidence les principales caractéristiques de l'évolution structurelle opérée par le cisaillement sur la mousse : un assouplissement de la structure vis-à-vis de la déformation imposée, un développement de contraintes normales, mais aussi une relaxation énergétique qu'il serait impossible de sonder par des mesures rhéologiques. Il n'est pas simple d'associer l'évolution de chacun des termes à un processus particulier. Nous essaierons toutefois d'interpréter ces phénomènes par des modèles simples.

b. Module élastique et contraintes normales

i) Un modèle simple d'élasticité

La forme quadratique du potentiel élastique d'une mousse sous cisaillement peut être interprétée à partir d'une construction géométrique. Par souci de simplicité, la structure sera représentée par un pavage de parallélogrammes de surface égale au volume moyen des bulles R^2 (figure 3.12). Une telle mousse n'existe naturellement pas, mais cette approche fournira à peu de frais les idées nécessaires à l'interprétation des graphes précédents.

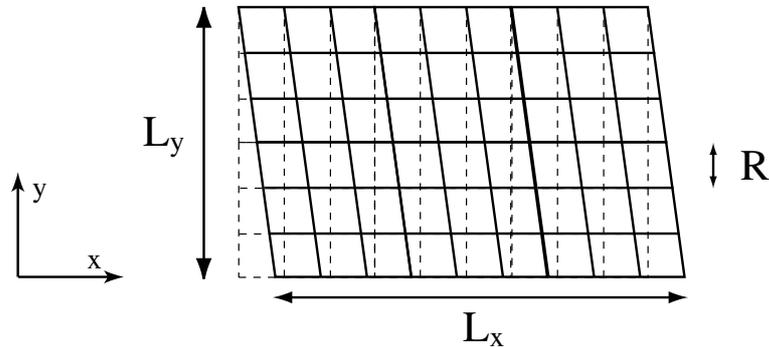


FIG. 3.12 – Modèle simplifié de mousse à bulles carrées sous contrainte de cisaillement nulle

Le cisaillement du maillage est imposé en déplaçant la paroi inférieure d'une distance d_{el} ; les lignes verticales s'allongent, tandis que la longueur des lignes horizontales reste inchangée. L'allongement d'une ligne verticale en fonction du déplacement d_{el} s'écrit :

$$\delta l(d_{el}) = L_y \cdot \sqrt{1 + \frac{d_{el}^2}{L_y^2}} - L_y \quad (3.6)$$

La longueur totale de ligne, que nous assimilons à l'énergie de la mousse, prend alors (au second ordre) la forme suivante :

$$E(d_{el}) = E_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot d_{el}^2 \quad (3.7)$$

avec :

$$E_0 = \frac{L_x}{R} \cdot \gamma L_y + \frac{L_y}{R} \cdot \gamma L_x = \frac{2\gamma S}{R} \quad (3.8)$$

$$k = \frac{\gamma}{R} \cdot \frac{L_x}{L_y} \quad (3.9)$$

Ce premier modèle nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur de E_0 et de k . Les valeurs numériques correspondantes à notre mousse sont $E_0 = 43.2$ et

$k = 26.6$; l'estimation fournit le bon ordre de grandeur, mais un écart d'un facteur environ 2 subsiste entre le module élastique mesuré et la valeur fournie par notre modèle qu'il faut avouer simpliste. L'origine de cet écart tient essentiellement au fait qu'une mousse réelle sous cisaillement ne se déforme pas exactement en suivant un champ homogène de déformation, mais s'ajuste à l'échelle des bulles pour conserver l'équilibre mécanique local des vertex (angle de 120° entre les films).

Contraintes normales

Nommons $\epsilon_{xy} = d_{el}/L_y$ la déformation de cisaillement imposée et déterminons à présent les valeurs du tenseur des contraintes. La contrainte de cisaillement découle directement du calcul précédent :

$$\sigma_{xy} = \frac{\gamma}{R} \cdot \epsilon_{xy} \quad (3.10)$$

Concernant les contraintes normales, il faut prendre en compte le fait que les lignes verticales s'inclinent. Cela provoque une diminution de σ_{yy} , assortie d'une augmentation de σ_{xx} . Le calcul donne à l'ordre 2 :

$$\sigma_{xx} = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 + \epsilon_{xy}^2) \quad (3.11)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\gamma}{R} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon_{xy}^2\right) \quad (3.12)$$

Ces résultats établissent ainsi la dépendance quadratique de la différence des contraintes normales en fonction du cisaillement :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{3}{2} \frac{\gamma}{R} \cdot \epsilon_{xy}^2 = \frac{3R}{2\gamma} \cdot \sigma_{xy}^2 \quad (3.13)$$

L'expression que nous venons d'obtenir est à nouveau conforme en ordre de grandeur avec les mesures numériques obtenues (figure 3.6). Cette première modélisation ne permet toutefois pas de comprendre les variations du module élastique, ainsi que la valeur non-nulle de la différence des contraintes normales sous cisaillement nul, que nous avons notée $\Delta\sigma_{n,0}$.

ii) Modèle anisotrope

Un écart entre les contraintes normales est souvent assimilé en rhéologie à la présence d'une anisotropie dans le système étudié [39]. Le fait que cet écart soit observé dans notre système sous une déformation nulle (figure 3.7) suggère fortement une anisotropie *structurelle* de la mousse, que nous avons représentée selon le même schéma que précédemment sur la figure 3.13.

En remplaçant le pavage carré de la figure 3.12 par un pavage de rectangles de même surface $R_x \cdot R_y = R^2$, nous brisons la symétrie de la structure. L'anisotropie de la mousse, telle que nous la présentons, correspond simplement à un

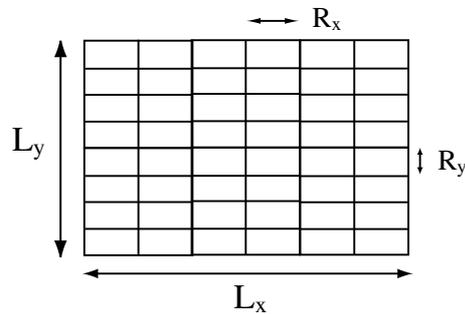


FIG. 3.13 – Maillage anisotrope sous cisaillement nul

cisaillement élongationnel *préassigné* à la mousse dans les directions (x, y) , la déformation correspondante étant définie à l'ordre un par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} &= R_x/R - 1 \\ \varepsilon_{yy} &= R_y/R - 1 \\ \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} &= 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sous cisaillement nul, les contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy} sont alors différentes :

$$\sigma_{xx}(\varepsilon_{xy} = 0) = \frac{\gamma}{R_y} = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{yy}) \quad (3.15)$$

$$\sigma_{yy}(\varepsilon_{xy} = 0) = \frac{\gamma}{R_x} = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \quad (3.16)$$

Qu'en est-il des propriétés élastiques? Pouvons-nous interpréter, à partir de ce modèle anisotrope, la diminution du module élastique de la mousse? En reprenant les calculs précédents sur la structure allongée, nous obtenons les expressions suivantes :

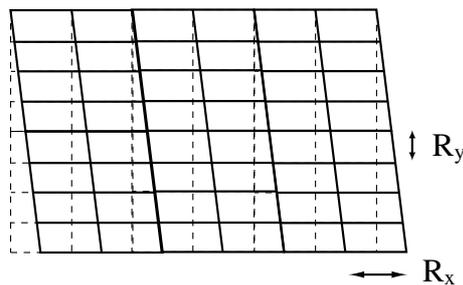


FIG. 3.14 – Déformation du maillage anisotrope

$$E(d_{el}) = E_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot d_{el}^2 \quad (3.17)$$

avec :

$$E_0 = \frac{L_x}{R_x} \cdot \gamma L_y + \frac{L_y}{R_y} \cdot \gamma L_x \quad (3.18)$$

$$k = \frac{\gamma}{R_x} \cdot \frac{L_x}{L_y} \quad (3.19)$$

L'anisotropie affecte donc aussi bien le module élastique que l'énergie E_0 . Exprimé à l'aide des grandeurs ε_{xx} et ε_{yy} que nous venons d'introduire, le potentiel élastique prend la forme suivante :

$$E(d) = E_0 + \gamma \cdot \frac{L_x}{2R \cdot L_y} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \cdot d_{el}^2 \quad (3.20)$$

avec :

$$E_0 = \frac{2\gamma S}{R} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{yy}^2 \right) \quad (3.21)$$

$$k = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \cdot \frac{L_x}{L_y} \quad (3.22)$$

L'expression des contraintes normales sous une déformation imposée de cisaillement présente également une dépendance quadratique vis-à-vis de ε_{xy} :

$$\sigma_{xx} = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{yy}) + \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \cdot \varepsilon_{xy}^2 \quad (3.23)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) - \frac{\gamma}{2R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \cdot \varepsilon_{xy}^2 \quad (3.24)$$

La différence des contraintes normales prend alors la forme que nous avons mesurée sur la simulation numérique (relation 3.4), à savoir :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \underbrace{\frac{\gamma}{R} \cdot (2\varepsilon_{xx})}_{\Delta\sigma_{n,0}} + \frac{3}{2} \frac{\gamma}{R} \cdot (1 - \varepsilon_{xx}) \cdot \varepsilon_{xy}^2 \quad (3.25)$$

L'ensemble de ces calculs permet ainsi d'établir une correspondance entre l'écart des contraintes normales sous déformation de cisaillement nulle et l'évolution du module élastique :

$$k = k_0 - \frac{L_x}{2L_y} \cdot \Delta\sigma_{n,0} \quad (3.26)$$

où k_0 correspond à une mesure sur une mousse isotrope ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$). La relation ci-dessus peut être vérifiée numériquement. On observe effectivement une relation de proportionnalité entre $k_0 - k$ et $\Delta\sigma_{n,0}$. Par contre, le coefficient de proportionnalité fourni par le modèle est faux d'un facteur environ 1.5, traduisant essentiellement le caractère approximatif de notre approche sur un maillage parallélépipédique. Nous avons représenté sur la figure 3.15 les valeurs de $\Delta\sigma_{n,0}$, ainsi que les variations du module élastique $k_0 - k$, rectifiées d'un facteur 0.8 pour en permettre la superposition.

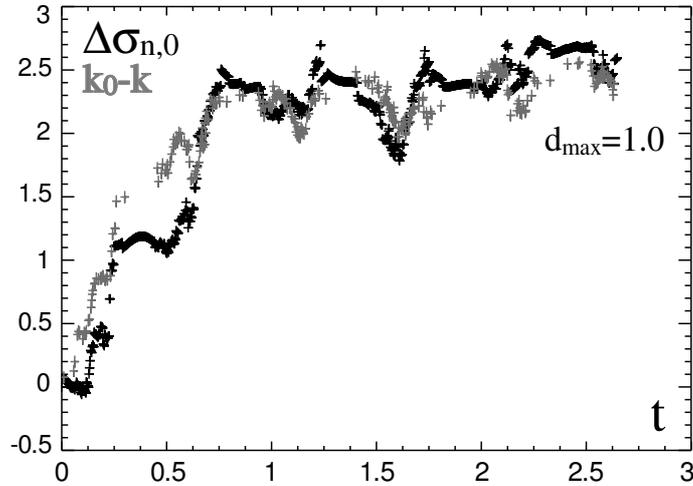


FIG. 3.15 – Ecart des contraintes normales et variations du module $k_0 - k$

Ce modèle nous permet d'associer l'évolution du module élastique, ainsi que le développement de contraintes normales, à une unique cause : la mise en place sous cisaillement d'une structure de plus en plus anisotrope. Le fait de cisailier la mousse selon une unique direction induit très certainement une sélection orientée des réarrangements et impose peu à peu une empreinte sur la structure de la mousse.

c. Relaxation du désordre

Le calcul que nous venons de réaliser nous a permis d'obtenir une estimation de l'énergie de structure E_0 (de l'ordre de $2\gamma S/R$) mais en précisait également la dépendance vis-à-vis de l'anisotropie de la mousse, via un terme d'énergie élastique (relation 3.21). Or ce terme ne peut expliquer la diminution observée de E_0 (figure 3.11), l'énergie élastique ne pouvant qu'augmenter avec ε_{xx} . D'où provient alors la diminution de l'énergie de structure ?

Nous commençons ici à pointer du doigt les principales complications associées aux systèmes désordonnés. Une grandeur énergétique telle que E_0 intègre bien plus qu'un simple champ de déformation homogène. Le désordre introduit à toutes les échelles de taille des inhomogénéités de déformation, et par là même un coût en énergie. La baisse de l'énergie de structure traduirait alors une réorganisation de la structure, conduisant progressivement à une réduction des frustrations internes.

i) Mesures topologiques du désordre

La caractérisation usuelle du désordre dans les mousses est topologique, c'est à dire qu'elle ne prend en compte que les relations de voisinage des bulles et non pas leur déformation. L'idée consiste à associer le désordre à la présence dans la

mousse de bulles possédant un nombre de voisins différent de 6. Nous construisons pour cela la distribution du nombre de voisins par bulle $P_v(n)$. Dans une mousse 2D, le nombre moyen de cotés par bulle \bar{n} vaut exactement 6 [1]. La moyenne de $P_v(n)$ ne contient donc pas d'information sur la structure. Par contre, le second moment de cette distribution μ_2 permet de caractériser le désordre topologique :

$$\mu_2 = \sum_n (n - 6)^2 \cdot P_v(n) = \frac{1}{N_{\text{bulles}}} \cdot \sum_{\text{bulle } i} (n(i) - 6)^2 \quad (3.27)$$

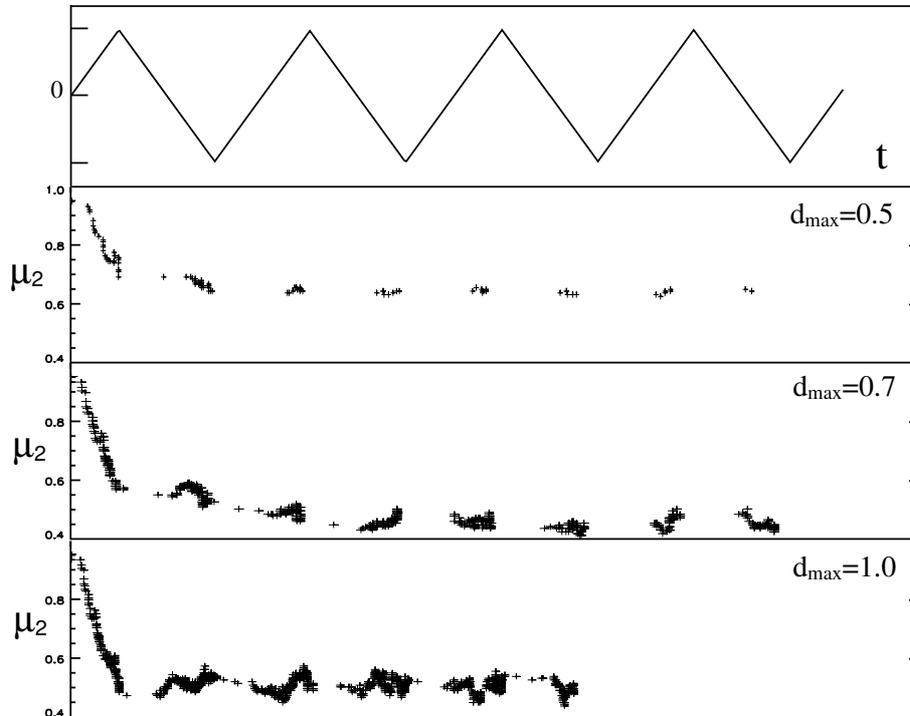


FIG. 3.16 – Evolution du désordre topologique

De nombreuses études, expérimentales [40] et numériques [27, 41], ont déjà démontré que le cisaillement provoquait une relaxation topologique de la mousse. Nos données, présentées sur la figure 3.16, vont également dans ce sens, la diminution de μ_2 augmentant avec l'amplitude du cisaillement. Il est intéressant à ce stade de mettre en parallèle l'évolution du désordre topologique et celle de l'énergie de structure E_0 (figure 3.11). Tant que les amplitudes de cisaillement restent faibles, relaxation du désordre topologique et relaxation de l'énergie de structure semblent aller de paire.

ii) Mécanisme de relaxation

Pourquoi le cisaillement conduit-il à une relaxation structurelle? Les régions de la mousse possédant un fort désordre, caractérisé ici par le nombre de voisins des bulles, contiennent également une forte dispersion des longueurs des films liquides qu'elles contiennent. Une légère déformation imposée peut alors suffire à à déstabiliser l'un d'eux, et par là-même à déclencher le T1. Il apparaît ainsi que le désordre local fragilise la mousse vis-à-vis du cisaillement. Les réarrangements qui surviennent aux faibles déformations correspondent donc à la réorganisation des régions les plus désordonnées de la mousse, lesquelles disparaissent alors peu à peu. La présence d'un régime transitoire plastique pour des amplitudes d_{max} inférieures à 0.5 traduit ce mécanisme. Partant d'une structure très désordonnée, et donc fragile, nous opérons par le cisaillement une rupture sélective des régions de la mousse les plus distordues, jusqu'à ce que le niveau de désordre soit suffisamment bas pour que le domaine élastique englobe la déformation imposée.

Résumé :

L'analyse de l'évolution du potentiel élastique de la mousse sous cisaillement alterné nous a permis de mettre en évidence :

- ◊ Une diminution du module élastique, en relation avec le développement des contraintes normales, traduisant l'évolution vers une structure anisotrope.
- ◊ Une diminution de l'énergie de ligne sous contrainte de cisaillement nulle (ou énergie de structure E_0), que nous associons à un processus de relaxation du désordre topologique (diminution de μ_2).

3.3 Cas des forts cisaillements

a. Relaxation : structure *versus* contrainte

Lorsqu'un réarrangement T1 se produit dans la mousse, il relaxe de l'énergie (voir figure 3.8). Cette énergie δE est essentiellement de l'ordre de $-\gamma \cdot R$ où R est la taille moyenne d'une bulle. L'impact d'un réarrangement sur le potentiel élastique est schématisé sur la figure 3.17. Oublions pour l'instant d'éventuels changements du module élastique. La perte d'énergie se caractérise alors par, d'une part une réorganisation impliquant un changement δE_0 de l'énergie de structure E_0 , et d'autre part une relaxation de la contrainte $\delta \sigma_{xy}$, associée à un décalage du potentiel de $\delta d_{plast} = -\delta \sigma_{xy}/k$. Ces deux termes sont reliés par la relation :

$$\delta E = \delta E_0 - L_x \cdot \sigma_{xy} \cdot \delta d_{plast} \quad (3.28)$$

La répartition de la relaxation d'énergie entre les composantes de structure et de contrainte dépend fortement des conditions dans lesquelles s'effectue le réarrangement. Notons que rien n'empêche a priori de le terme δE_0 d'être positif.

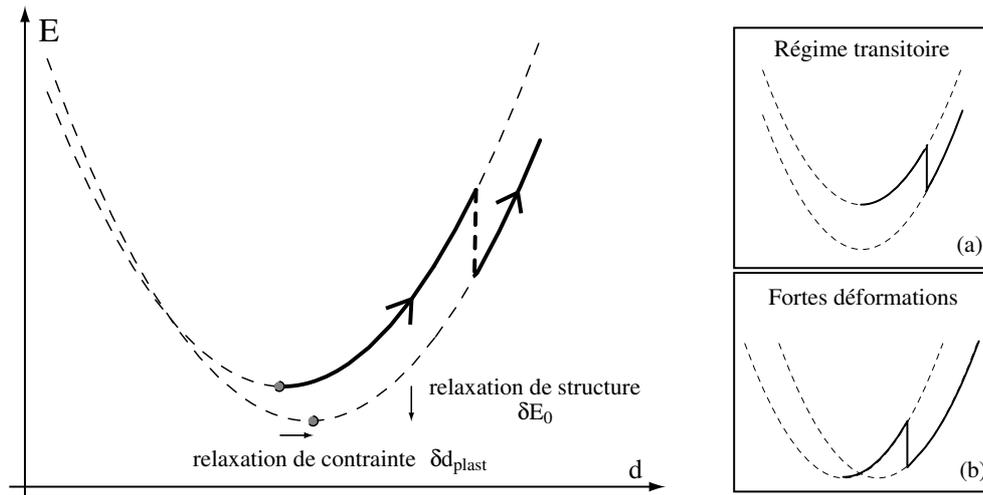


FIG. 3.17 – Décalage du potentiel suite à un T1

En reconsidérant les figures 3.8 et 3.11, nous pouvons observer que sous faible cisaillement, le mécanisme dominant est la relaxation de l'énergie de structure (encart (a) de la figure 3.17). Une analyse plus fine montrerait qu'elle évolue de façon quasi-linéaire avec le nombre de T1, du moins sur le premier cycle. La contrainte relâchée par ces réarrangements reste très faible. Ce comportement explique en particulier le fait que les relations contrainte-déformation obtenues aient l'air parfaitement lisses alors que de nombreux réarrangements se produisent lors du premier cycle (voir pour cela la figure 3.2, page 58, ainsi que les films fournis sur le support CDROM).

Lorsque l'amplitude du cisaillement devient importante, le mécanisme s'inverse. La relaxation de contrainte prend le pas sur la relaxation structurelle (encart (b) de la figure 3.17). Sous de fortes déformations, même la mousse la plus stable qui soit atteindra sa limite de plasticité. Les réarrangements qui apparaissent ne sont plus liés à l'existence locale d'un "défaut" topologique dans la mousse initiale, mais à la nécessité de relaxer la contrainte imposée par un écoulement. L'expérience montre alors que, sous une forte déformation, le gain d'énergie δE dû au T1 se répercute essentiellement sous la forme d'un décalage en déformation δd_{pl} , au détriment de la relaxation structurelle (voir figure 3.8).

b. Transition vers l'écoulement

A l'instant où l'on passe d'une relaxation structurelle à un écoulement plastique, un grand nombre de comportements atypiques se produisent. Comment comprendre en particulier les larges oscillations de l'énergie de structure E_0 observées pour une amplitude de cisaillement $d_{max} = 1.0$ (figure 3.11)? Celles-ci ne peuvent être mises en concordance ni avec une évolution du désordre topologique, ni avec une déformation longitudinale de la mousse. D'autres modes de déformation sont-ils alors sollicités?

c. Plasticité inhomogène

Jusqu'à présent, nous ne nous étions intéressé qu'à des caractéristiques globales de la mousse. De telles grandeurs ne peuvent décrire d'éventuelles inhomogénéités au sein de la structure. Afin d'en évaluer l'importance, nous avons simplement représenté, sur la figure 3.18, la hauteur dans la mousse des réarrangements qui se produisent lors du cisaillement. Tant que l'on reste dans une gamme de cisaillement de faible amplitude ($d_{max} \leq 0.5$), les T1 se répartissent de façon relativement homogène dans la mousse, leur position étant essentiellement déterminée par l'uniformité du désordre initial.

Lorsque l'on accroît la déformation maximale, la plasticité se concentre principalement sur les bords de la mousse. L'hétérogénéité de la dynamique a-t-elle un lien avec les remontées de l'énergie de structure observées sur le graphe 3.11? Au stade actuel, il nous est impossible de répondre à ces questions. Elles feront l'objet des deux prochains chapitres dédiés aux écoulements permanents.

Analogie avec les systèmes vitreux

Bien souvent, mousses et matériaux granulaires sont considérés comme des systèmes vitreux modèles, du fait de leur structure désordonnée et de l'insignifiance de la température aux échelles de taille macroscopiques. L'application sur ces systèmes de perturbations extérieures, par exemple ici un cisaillement oscillant, leur permet d'explorer, en changeant de structure, leur espace des phases. Ce comportement suggère une analogie entre excitation externe et température interne. Celle-ci a récemment été testée expérimentalement, avec quelques succès, sur des systèmes colloïdaux [42–44]. Il a été montré en particulier que le cisaillement produisait un rajeunissement partiel ou complet du système, en fonction de son amplitude.

Sous faible déformation, l'énergie de la mousse est relaxée, tandis que la dynamique s'affaiblit (c'est-à-dire que le nombre de réarrangements par cycle diminue) jusqu'à s'éteindre complètement (régime élastique). Le processus ainsi décrit est en quelque sorte analogue au vieillissement des verres. Sous fort cisaillement, l'énergie de structure remonte. Il est également possible d'observer dans ce régime une

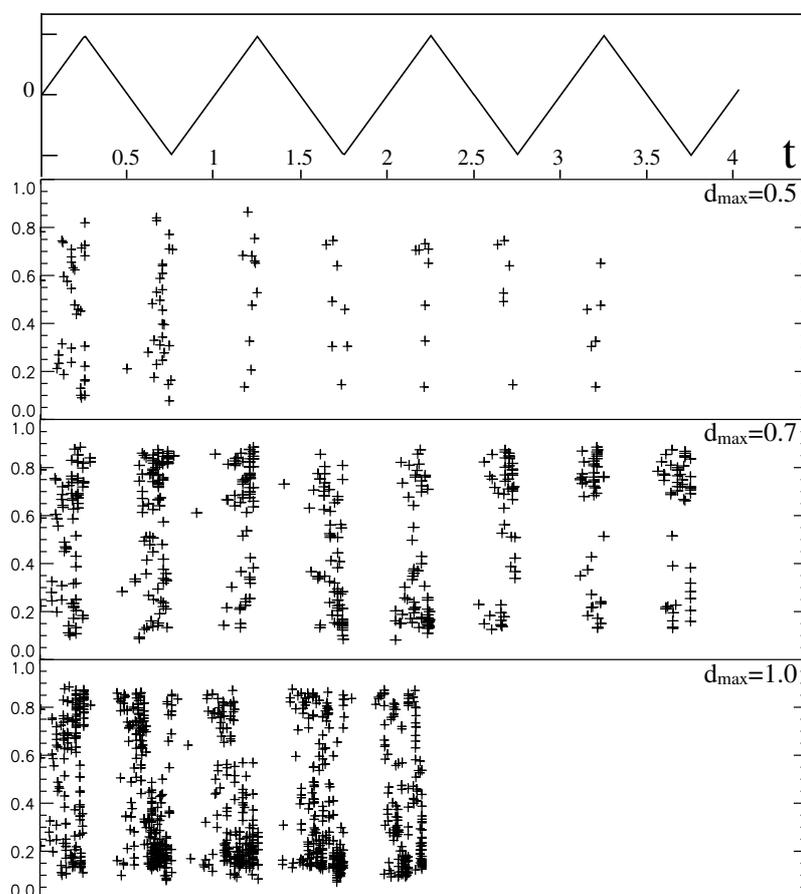


FIG. 3.18 – Position dans la mousse des réarrangements survenant lors du cisaillement, pour différentes amplitudes maximales de déformation. Les valeurs en ordonnée indiquent la distance séparant le réarrangement du mur inférieur, la valeur 1 correspondant au mur supérieur.

diminution de la taille du domaine élastique. S'agirait-il d'un rajeunissement ?

Nous avons déjà poussé cette analogie plus que de raison dans le cas qui nous concerne. Le problème essentiel que pose la substitution d'une température par un cisaillement provient de l'anisotropie générée. Le chemin que parcourt la structure dans l'espace des phases est totalement biaisé par l'orientation du cisaillement. De plus, une forte déformation ne semble pas à même de régénérer l'état initial de la mousse. Nous n'avons pas pu produire une augmentation significative de μ_2 par cisaillement, et l'anisotropie semble irréversible.

D'autres modes de perturbation peuvent être imaginés pour contourner ces difficultés, comme par exemple imposer des déformations aléatoires, selon des

axes aléatoires, etc... La question reste toutefois posée : dans quelle mesure une sollicitation mécanique sur un système athermique peut-elle jouer le rôle d'une température réelle sur un verre ?

Chapitre 4

Cisaillement continu

Le chapitre précédent nous a permis de caractériser la relaxation structurelle induite par un cisaillement alterné de faible amplitude sur la mousse. Sous de plus fortes déformations, la relaxation associée au T1 n'est plus structurelle mais mécanique, l'effet dominant étant alors la relaxation de la contrainte imposée par le cisaillement. Ce changement de régime s'accompagne de l'apparition d'une inhomogénéité dans la répartition spatiale des T1.

Nous allons à présent entrer plus en profondeur dans les mécanismes de relaxation de contrainte associés à l'écoulement plastique de la mousse. Pour cela, nous étendrons l'étude précédente au cas d'un cisaillement continu.

Sommaire

4.1	Rhéologie quasistatique	81
a.	Relation contrainte-déformation	81
b.	Ecoulement plastique	82
	i) Localisation des réarrangements	82
	ii) Profil de vitesse	82
4.2	Analyse élasto-plastique	85
a.	Evolution de l'énergie globale	85
	i) Potentiel élastique	85
	ii) Déformations plastiques et élastiques	86
b.	Relaxation élémentaire	86
4.3	Déformation associée à un T1	89
a.	Champ de déformation d'un T1	89
	i) Champ moyen de déformation	89
	ii) Profil de déplacement	90
	iii) Relaxation élémentaire	91
b.	Plasticité locale - relaxation globale	91
c.	Une modélisation rhéologique non locale	95

Description de la mousse utilisée

Pour réaliser les simulations en déformation continue, nous avons essentiellement utilisé des mousses de rapport d'aspect 2,5:1, afin de réduire le plus possible les effets de couplage élastique dus aux conditions limites périodiques. La mousse représentée sur la figure 4.1 sera à l'origine de l'essentiel des résultats présentés dans ce chapitre, sauf indication contraire. D'autres réalisations ont naturellement été utilisées afin de sonder la généralité des comportements observés. Cela sera discuté plus loin.

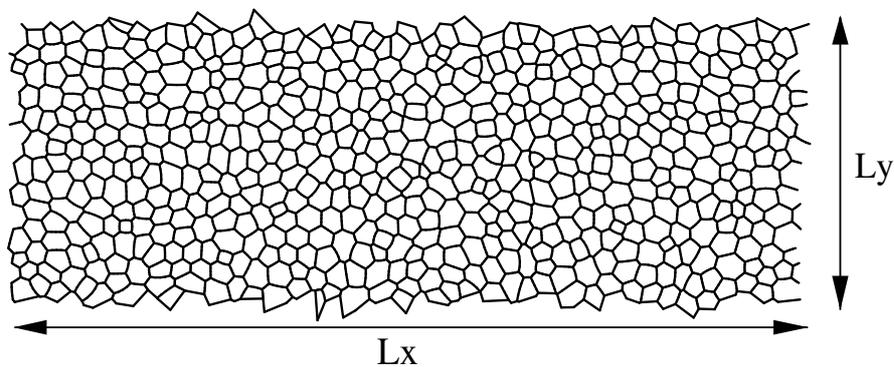


FIG. 4.1 – Mousse utilisée

Le film du cisaillement continu de cette mousse est disponible sur le CD-ROM.

4.1 Rhéologie quasistatique

a. Relation contrainte-déformation

Comme au chapitre précédent, nous commencerons par la caractérisation rhéologique de la mousse dans la limite quasistatique. La relation entre la contrainte et la déformation imposée est présentée sur la figure 4.2. Nous retrouvons sans grande surprise une phase de charge élastique, entachée de quelques réarrangements, suivie d'un écoulement plastique sous une contrainte relativement constante, la transition s'effectuant pour une déformation¹ appliquée de l'ordre de 1. Le régime d'écoulement se décompose en une succession de charges élastiques et de relaxations plastiques de forte amplitude.

¹Nous rappelons que la position du mur inférieur d est assimilable numériquement à la déformation imposée, compte tenu du fait que l'unité de longueur correspond à l'épaisseur de la mousse, c'est à dire L_y .

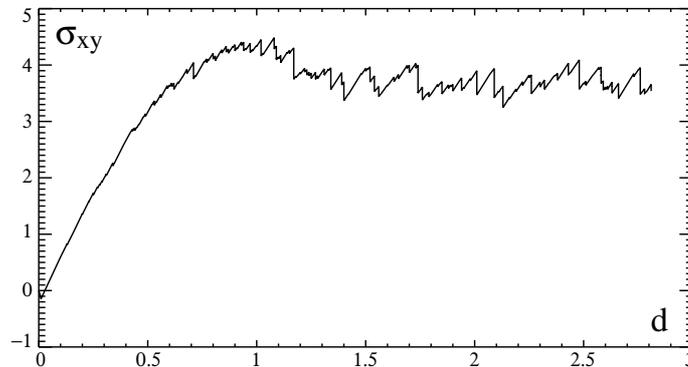


FIG. 4.2 – Relation contrainte-déformation imposée

b. Ecoulement plastique

La visualisation du film de cette simulation, disponible sur le CD-ROM, met immédiatement en évidence la caractéristique majeure de l'écoulement plastique : il est localisé sur une bande située à proximité du bord inférieur de la mousse, d'épaisseur trois ou quatre tailles de bulles. La caractérisation de la localisation peut se faire de deux manières : soit en mesurant le profil de vitesse moyenne des bulles, soit en analysant la répartition des réarrangements dans la mousse.

i) Localisation des réarrangements

Afin d'illustrer la localisation des transformations plastiques (T1) au cours du cisaillement, nous avons tracé sur la figure 4.3 la position de chaque réarrangement survenant dans la mousse en fonction du déplacement imposé d . A partir d'une déformation imposée à nouveau de l'ordre de 1, une transition s'opère entre un régime où les T1 sont uniformément répartis dans la mousse (figure 4.4) et un autre où la plasticité prend place sur une fine bande de 3 à 4 bulles de largeur (figure 4.5). Ces deux régimes seront nommés respectivement transitoire et permanent.

ii) Profil de vitesse

En suivant l'évolution de la position de chaque bulle durant le régime permanent, nous pouvons extraire le profil de vitesse moyen de l'écoulement. Ces mesures permettent en particulier une comparaison quantitative de l'écoulement simulé avec les expériences de Debrégeas [18] que nous avons présentées dans le premier chapitre. La figure 4.6 permet de comparer le profil de vitesse moyenné dans le temps $\bar{v}(y)$ mesuré sur une mousse de fraction liquide 1% et celui de la simulation numérique. Les déplacements de bulles sont normalisés par le déplacement du mur inférieur, et la distance indiquée en abscisse est exprimée en

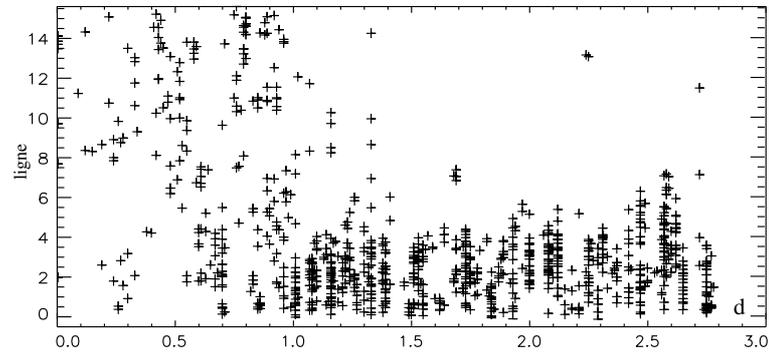


FIG. 4.3 – Position de chaque réarrangement dans la mousse en fonction du déplacement imposé d . L'ordonnée du graphe indique la distance, en taille de bulle, séparant la position du réarrangement de la paroi mobile.

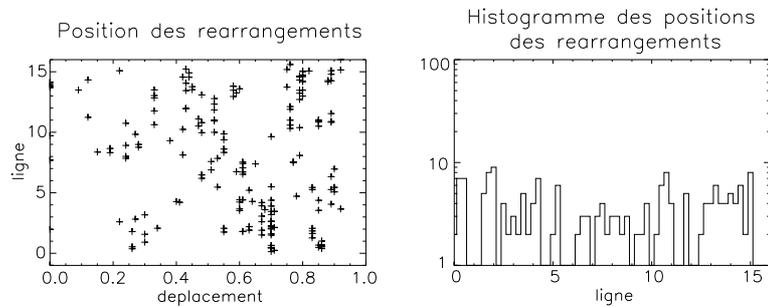


FIG. 4.4 – Zoom sur le régime transitoire

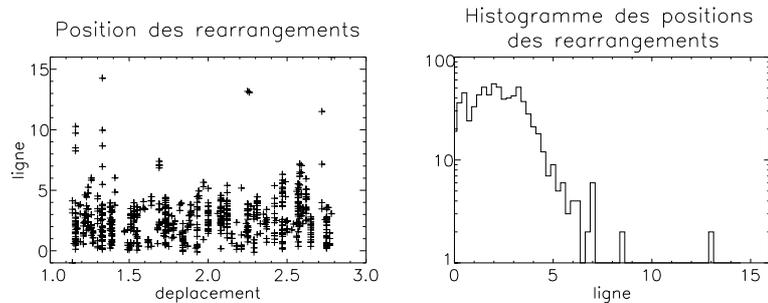


FIG. 4.5 – Zoom sur le régime permanent

diamètres de bulle. L'accord entre les deux profils est bon. La rugosité forte de la paroi, dans le modèle numérique, est à l'origine de l'adoucissement de la courbe au voisinage du mur. Au delà, on retrouve dans les deux cas une décroissance exponentielle, sur une distance caractéristique λ de l'ordre de la bulle :

$$v_x(y) = \exp(-y/\lambda) \quad (4.1)$$

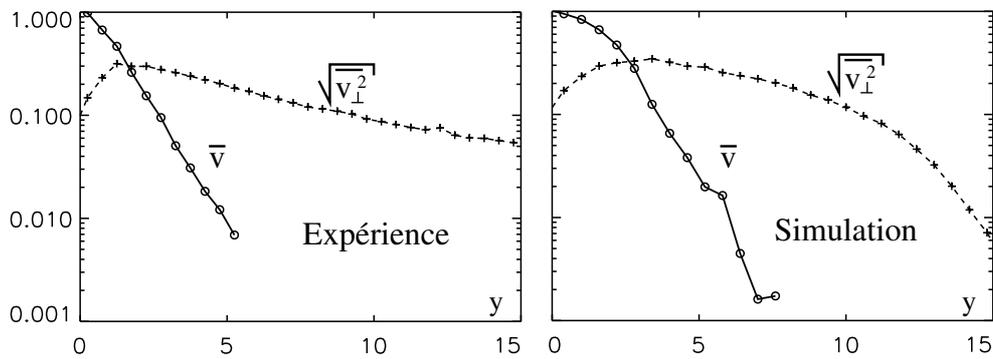


FIG. 4.6 – Profil de vitesse et fluctuations transverses

Les graphes en pointillés correspondent dans les deux cas aux moyennes quadratiques des fluctuations des positions des bulles dans la direction normale au cisaillement, pour un déplacement du mur de l'ordre d'un quart du diamètre des bulles. Cette grandeur caractérise essentiellement la déformation élastique lointaine de la mousse associée aux T1 se produisant dans la bande de cisaillement. Une fois encore l'accord entre les deux profils est bon. La brusque décroissance sur le graphe correspondant à la simulation provient de la présence du bord rigide supérieur en $y = 16$ (le bord se situant en $y = 25$ dans l'expérience).

Ces résultats établissent la localisation comme une instabilité intrinsèque au cisaillement des mousses. L'étroite concordance entre les profils de vitesses et les fluctuations élastiques entre l'expérience en cellule de Couette et la simulation, en cisaillement plan parallèle, démontrent que l'apparition de la localisation ne dépend pas de la géométrie utilisée.

Résumé :

L'analyse du cisaillement quasistatique continu des mousses met en évidence un comportement typique de matériau plastique à seuil : un régime transitoire durant lequel nous assistons à une charge élastique, suivi d'un écoulement plastique en régime permanent.

L'écoulement plastique est localisé. L'ensemble des réarrangements se produisant dans le régime permanent sont répartis sur une mince région de quelques tailles de bulle d'épaisseur. Le profil d'écoulement plastique obtenu dans le code numérique est similaire au profil expérimental en cellule de Couette.

4.2 Analyse élasto-plastique

a. Evolution de l'énergie globale

La figure 4.7 montre l'évolution de l'énergie de la mousse en fonction du déplacement du mur. De même que sur le graphe 4.2, nous y observons un régime transitoire, associé à une forte augmentation de l'énergie stockée. Le régime permanent est caractérisé par une alternance de charges élastiques et de fortes restructurations de la mousse, associées à de brusques diminutions de l'énergie totale.

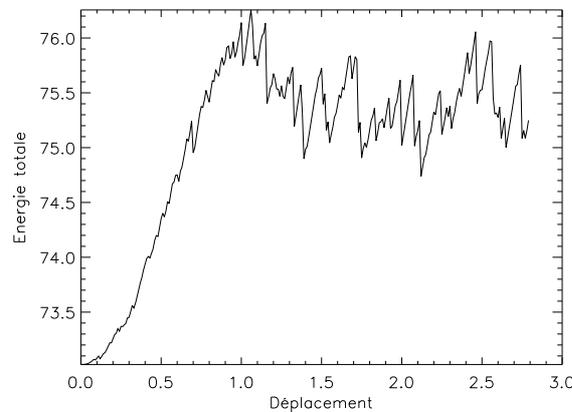


FIG. 4.7 – Evolution de l'énergie totale

i) Potentiel élastique

Nous utiliserons la même technique qu'au chapitre précédent pour déterminer, lors du cisaillement de la mousse, les caractéristiques exactes du potentiel élastique (voir page 64). Le potentiel élastique de la mousse après un déplacement d du bord rigide se met sous la forme :

$$E_{el}(x) = E_0(d) + k(d) \cdot (x - d_{plast}(d))^2 \quad (4.2)$$

L'ensemble des caractéristiques du potentiel dépend a priori de l'histoire complète de la mousse (représentée par d). Les graphes de $E_0(d)$ et $k(d)$ sont présentés sur les figures 4.8(a) et 4.8(b). On observe alors aux petites déformations le scénario désormais classique de la relaxation structurelle, accompagnée d'une diminution du module élastique due à la mise en place d'une structure anisotrope. L'entrée dans le régime localisé engendre une brusque augmentation de l'énergie de structure E_0 , tandis que le module élastique reste inchangé. Bien que la dynamique de réarrangement soit alors très intense, le potentiel élastique atteint des caractéristiques stationnaires.

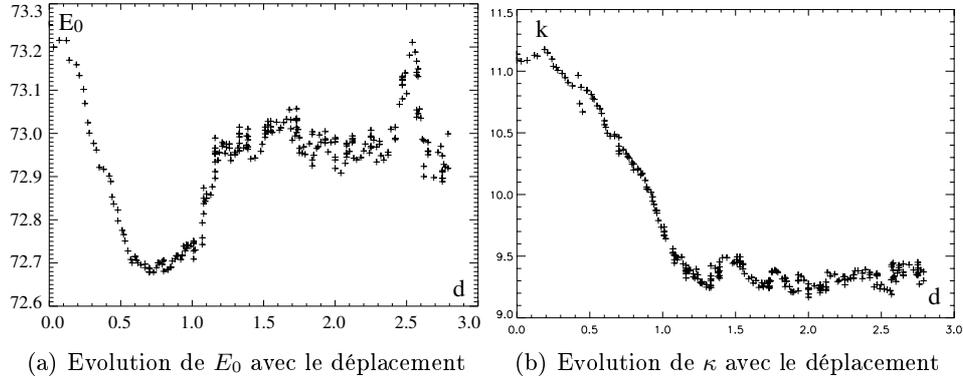


FIG. 4.8 – Evolution du potentiel élastique lors du cisaillement

ii) Déformations plastiques et élastiques

La mesure du potentiel élastique fournit, outre l'énergie de structure et le module de cisaillement, une détermination de la position en abscisse du minimum d'énergie, que nous avons nommée d_{plast} . Il est dès lors possible de décomposer le déplacement imposé en deux contributions, l'une élastique (proportionnelle à l'état de contrainte) et l'autre plastique :

$$d = d_{plast}(d) + d_{elast}(d) \quad (4.3)$$

Les évolutions de d_{plast} et d_{elast} sont présentées sur la figure 4.9. Chaque restructuration de la mousse s'accompagne d'un transfert de la charge élastique vers la déformation plastique. En l'absence de réarrangement, cette dernière est naturellement constante.

En régime permanent, la déformation élastique atteint, aux fluctuations près, une valeur constante, proportionnelle à l'état de contrainte moyen dans la mousse. La déformation plastique évolue en moyenne linéairement avec le déplacement imposé. Ainsi, pour un déplacement δd du bord de la mousse, les déplacements élastique et plastique moyens valent :

$$\begin{cases} \langle \delta d_{elast} \rangle = 0 \\ \langle \delta d_{plast} \rangle = \delta d \end{cases} \quad (4.4)$$

Ces relations sont valables pour tout écoulement plastique. La spécificité des mousses apparaîtra dans les paragraphes qui suivent.

b. Relaxation élémentaire

La plasticité des mousses sèches en régime quasistatique résulte uniquement d'événements discrets appelés T1. Nous allons à présent tâcher de relier les fluctuations de d_{plast} et d_{elast} au nombre de réarrangements de bulles se produisant à

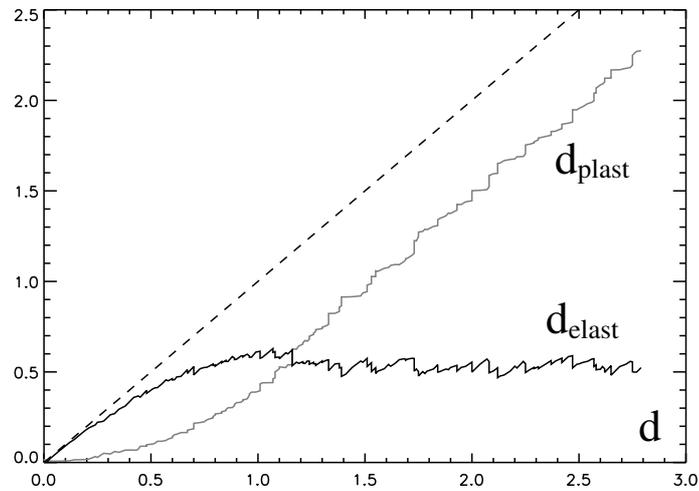


FIG. 4.9 – Déplacements plastique et élastique en fonction du déplacement total imposé au mur inférieur d . En pointillés : la somme $d_{\text{plast}}(d) + d_{\text{elast}}(d)$.

chaque instant. La figure 4.10 met en parallèle l'évolution du déplacement plastique (symbole $+$) et le nombre de T1 (symbole \diamond) survenant à chaque incrément de déplacement de la paroi rigide (ce graphe ne correspond qu'à une portion restreinte du régime permanent).

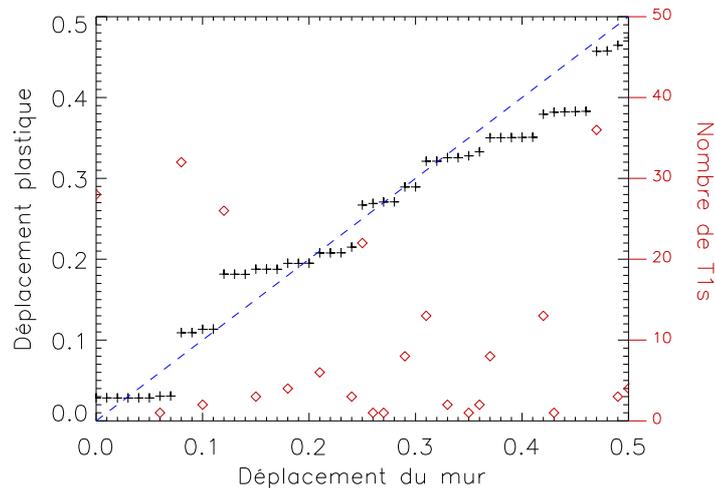


FIG. 4.10 – Déplacement plastique en fonction du déplacement du mur d (symboles $+$) et nombre de T1 pour chaque incrément de déplacement du mur (symboles \diamond). Seul un fragment du régime permanent est représenté.

L'amplitude des sauts de d_{plast} , que nous observons sur la figure, 4.10 est d'autant plus importante que le nombre de réarrangements survenant au même instant est grand. Plus généralement, nous avons placé sur la figure 4.11(a) le déplacement plastique cumulé en fonction du nombre total de réarrangements survenus pendant le régime permanent. La relation entre ces deux grandeurs est simplement linéaire. Cette extrême simplicité rend compte du fait que chaque T1, pendant le régime permanent, engendre le même effet sur la mousse que n'importe quel autre, à savoir une relaxation élémentaire de la déformation imposée, que nous noterons δd_{T1} .

$$d_{plast} = \delta d_{T1} \cdot \int n_{T1} \quad (4.5)$$

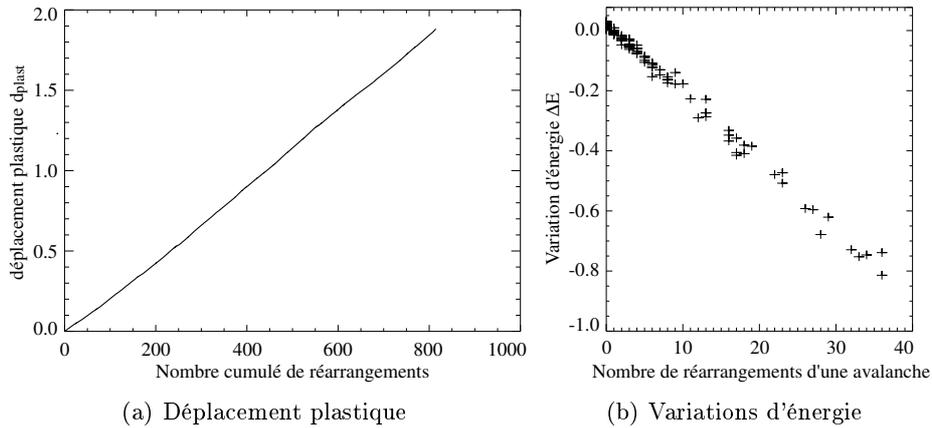


FIG. 4.11 – Relaxation par T1

La même démarche peut être adoptée pour associer les fluctuations d'énergie du graphe 4.7 à la statistique des réarrangements. La figure 4.11(b) montre que l'amplitude des relaxations d'énergie est également directement proportionnelle au nombre de réarrangements qui en sont à l'origine. La pente de cette droite est reliée à δd_{T1} par la relation énergétique suivante :

$$\frac{\Delta E}{n_{T1}} = L_x \cdot \bar{\sigma}_{xy} \cdot \delta d_{T1} \quad (4.6)$$

Cet accord numérique est cohérent avec la constance de l'énergie de structure E_0 de la mousse en régime permanent : la perte d'énergie associée aux T1 est intégralement transmise sous la forme d'une relaxation élastique.

Résumé :

En régime permanent, les caractéristiques du potentiel élastique sont stationnaires. L'énergie de structure augmente brutalement au départ de l'écoulement plastique localisé.

La relaxation de contrainte ainsi que la variation de l'énergie à un instant donné sont proportionnelles au nombre de T1 survenant à ce même instant. Ces considérations permettent d'associer à un réarrangement une relaxation plastique élémentaire δd_{T1} .

4.3 Déformation associée à un T1

L'analyse conjointe de la plasticité et de la fréquence d'apparition des réarrangements a permis d'associer quantitativement la déformation imposée et le nombre de réarrangements qu'elle engendre. La simplicité des résultats suggère fortement que, bien que la mousse soit désordonnée, les réarrangements qui se produisent sous cisaillement possèdent des caractéristiques communes. Nous cherchons à préciser les paramètres géométriques qui contrôlent la valeur de l'amplitude δd_{T1} de la relaxation plastique élémentaire.

a. Champ de déformation d'un T1

La comparaison des structures avant et après un unique réarrangement permet une caractérisation complète de l'effet du T1 sur la mousse. En particulier, la mesure du déplacement de chaque bulle permet le calcul du champ de déplacement provoqué par un T1.

i) Champ moyen de déformation

Afin de mesurer le champ moyen de déformation avec une résolution spatiale suffisante, nous avons été conduite à réaliser des mesures moyennes sur un grand nombre de réarrangements (typiquement une centaine). La seule symétrie exploitable pour cela est l'invariance du système dans la direction du cisaillement. Le champ de déformation dépend par contre de la distance entre la position du réarrangement et les parois rigides. Deux mesures différentes en sont présentées sur la figure 4.12, les réarrangements se produisant au voisinage du bord rigide d'une part, et au milieu de la mousse d'autre part. L'orientation des traits indique la direction du déplacement, leur taille correspond à l'amplitude du mouvement, et leur couleur traduit le sens du déplacement (le rouge correspond à une orientation vers le haut).

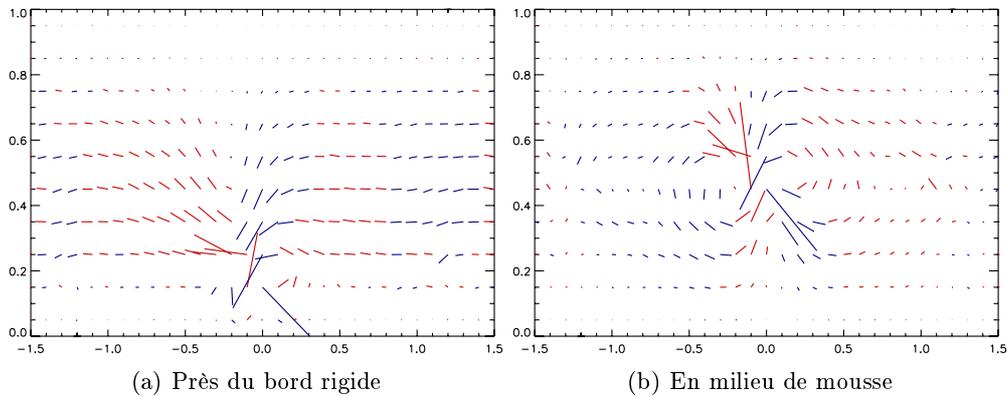


FIG. 4.12 – Champ de déplacement moyen associé à un T1

Ces cartes fournissent de précieuses informations sur la plasticité. En particulier, elles indiquent les directions préférentielles de déplacement des bulles impliquées dans le réarrangement. Le fait que chaque réarrangement relaxe la même contrainte (égale à $k \cdot \delta d_{T1}$) provient essentiellement du fait qu'ils se produisent tous selon les mêmes axes, tels qu'ils sont représentés sur la figure 4.13. Quelle que soit la structure locale de la mousse, seule l'orientation du cisaillement conditionne celle du T1.

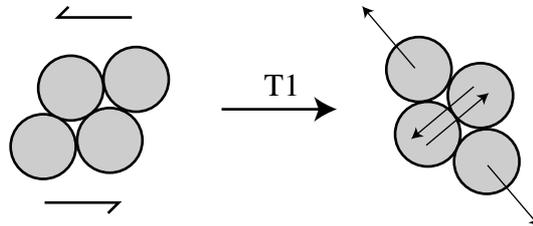


FIG. 4.13 – Orientation des T1 par rapport au cisaillement

ii) Profil de déplacement

Nous avons déjà mentionné le fait que chaque réarrangement relaxait la même déformation élastique δT_1 . Nous allons à présent relier cette grandeur au champ de déformation associé à un T1. Pour cela, nous avons calculé le profil selon y du déplacement moyen des bulles dans la direction du cisaillement, noté $\overline{u_x}(y)$. Les graphes correspondants sont tracés sur la figure 4.14.

Ces deux courbes permettent de proposer une modélisation simple du T1. Du point de vue des déplacements moyens dans la direction du cisaillement, un T1 est assimilable à une fracture à l'emplacement du réarrangement, permettant un glissement de la partie supérieure de la mousse par rapport à la partie inférieure.

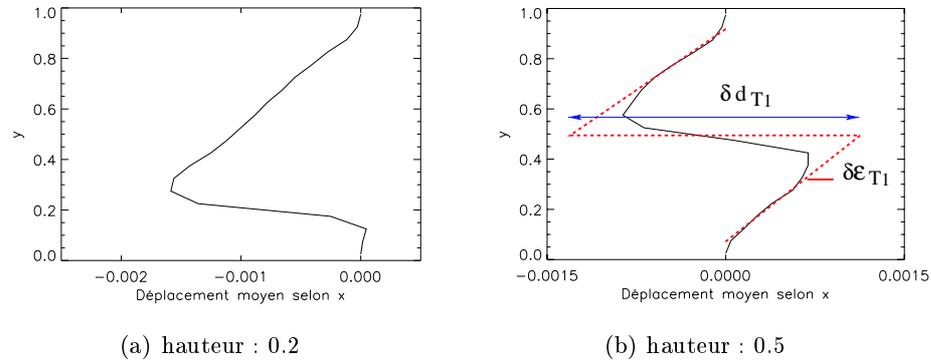


FIG. 4.14 – Profil de déplacement moyen, dans la direction du cisaillement, associé à un T1, pour deux positions de celui-ci. Les courbes résultent de la moyenne d'environ 100 réalisations.

Le T1 provoque ainsi une relaxation élastique de l'ensemble de la mousse, identique en moyenne sur chaque ligne. L'amplitude du glissement mesurée sur les graphes 4.14 ne semble pas dépendre de la position des réarrangements dans la mousse et correspond parfaitement numériquement à la quantité δd_{T1} que nous avons précédemment définie.

iii) Relaxation élémentaire

L'amplitude du glissement δd_{T1} peut être estimée de la façon suivante. Sur la ligne du réarrangement, nous avons une bulle qui glisse de sa taille R , tandis que les autres, au nombre de L_x/R , restent essentiellement immobiles. Ainsi, l'amplitude moyenne du glissement peut s'écrire :

$$\delta d_{T1} = R \cdot \frac{R}{L_x} \quad (4.7)$$

La déformation élastique $\delta \epsilon_{T1}$ relaxée dans la mousse, mesurée par la pente des graphes 4.14, vaut alors :

$$\delta \epsilon_{T1} = \frac{\delta d_{T1}}{L_y} = \frac{R^2}{S} \quad (4.8)$$

où S est la surface totale de la mousse. Nous avons vérifié cette relation sur des mousses de trois tailles S différentes, possédant la même distribution de tailles de bulle (graphe 4.15).

b. Plasticité locale - relaxation globale

Nous avons souligné plus haut le fait que chaque rangée de bulles bénéficiait en moyenne de la même relaxation de déformation $\delta \epsilon_{T1}$, quelle que soit sa distance

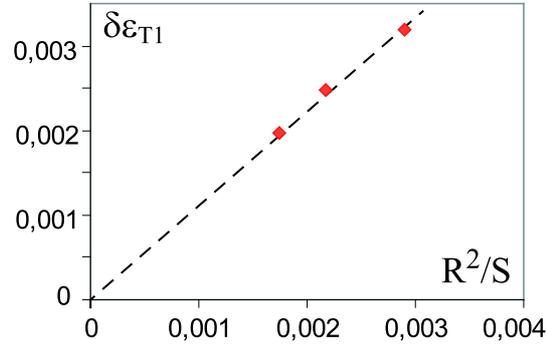


FIG. 4.15 – Déformation élastique $\delta\epsilon_{T1}$ relaxée par un T1 en fonction de la géométrie de la mousse.

vis-à-vis de la position du T1. Cette propriété découle en fait directement de l'équilibre mécanique de la mousse. En particulier, la contrainte de cisaillement moyenne $\langle\sigma_{xy}\rangle_x(y)$ doit être la même sur chaque ligne. Ainsi, la relaxation de contrainte plastique au niveau du T1 doit nécessairement s'accompagner d'un ajustement élastique de l'ensemble de la mousse. Bien que locale, la plasticité engendre une relaxation collective de la structure.

Nous pouvons à présent tenter une description plus analytique. Prenons une mousse de dimension $(Lx; Ly)$, cisailée dans la direction x , et considérons le régime permanent. Le taux de cisaillement est noté $\dot{\gamma}$ (nous restons naturellement dans une limite quasistatique). Nous ne nous intéresserons qu'à des grandeurs moyennées ligne à ligne, c'est-à-dire selon la direction x . La déformation d'une ligne suite au cisaillement à l'instant t sera notée $\varepsilon(y, t)$, et possède une contribution de déformation élastique $\varepsilon_{elast}(y, t)$ et un terme cumulatif de déformation plastique² $\varepsilon_{plast}(y, t)$.

$$\varepsilon(y, t) = \varepsilon_{elast}(y, t) + \varepsilon_{plast}(y, t) \quad (4.9)$$

Lorsqu'un réarrangement se produit, à une position y_{T1} , il modifie l'état de déformation de toutes les lignes en provoquant d'une part une relaxation élastique uniforme égale à $\delta\varepsilon_{T1}$, et d'autre part une déformation plastique localisée sur la ligne du T1. En dérivant les profils de déformation de la figure 4.14 (idéalisés par des segments droits) par rapport à la position dans la mousse, on obtient en effet :

$$\delta\varepsilon(y) = \underbrace{-\delta\varepsilon_{T1}}_{\text{élastique}} + \underbrace{\delta(y - y_{T1}) \cdot \delta d_{T1}}_{\text{plastique}} \quad (4.10)$$

Ainsi, connaissant l'histoire plastique du matériau, c'est à dire les positions et instants auxquels se produisent les réarrangements, nous pouvons obtenir l'évo-

²Nous reproduisons simplement à une échelle plus locale la décomposition que nous avons effectuée sur la position du mur $d = d_{elast} + d_{plast}$.

lution complète, ligne par ligne, de la déformation $\varepsilon(y, t)$. Pour cela, introduisons la fonction $\omega(y, t)$ caractérisant le nombre de réarrangements se produisant en y à l'instant t :

$$\omega(y, t) = \sum_{\text{réarrangements } i} \delta(y - y_i) \cdot \delta(t - t_i) \quad (4.11)$$

La somme porte sur tous les réarrangements ayant lieu durant le cisaillement, les y_i et t_i correspondant à leurs positions en espace et en temps. Nous pouvons alors relier la déformation locale à l'histoire plastique par la relation :

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{elast}}(y, t)}{\partial t} = \dot{\gamma} - \delta\varepsilon_{T1} \cdot \int_y \omega(y', t) dy' \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{plast}}(y, t)}{\partial t} = \omega(y, t) \cdot \delta d_{T1} \quad (4.13)$$

Comme le montre les relations ci-dessus, la déformation élastique intègre nécessairement tous les réarrangements survenant au cours du cisaillement et reste de ce fait homogène. La contrainte dans la mousse étant proportionnelle à la déformation élastique locale, la relation 4.12 assure notamment l'équilibre mécanique du système.

Nous pouvons également, à partir des équations 4.12 et 4.13, relier le profil de vitesse en régime permanent $v(y)$ à la répartition statistique des réarrangements.

$$\frac{dv(y)}{dy} = \left\langle \frac{\partial \varepsilon(y, t)}{\partial t} \right\rangle_t = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \varepsilon_{\text{elast}}(y, t)}{\partial t} \right\rangle_t}_{=0} + \left\langle \frac{\partial \varepsilon_{\text{plast}}(y, t)}{\partial t} \right\rangle_t \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \frac{dv(y)}{dy} = \langle \omega(y, t) \rangle_t \cdot \delta d_{T1} \quad (4.15)$$

Cette relation se vérifie particulièrement bien sur les écoulements que nous avons étudiés. A titre d'exemple, nous avons tracé sur la figure 4.16 le gradient du profil de vitesse et la fréquence d'apparition des réarrangements sur chaque ligne en régime permanent.

L'étude moyennée dans la direction du cisaillement que nous venons de présenter constitue une première étape vers la modélisation de la rhéologie quasitatique des mousses. Connaissant la répartition des réarrangements, nous pouvons reconstruire l'évolution temporelle de l'ensemble des grandeurs élastiques et plastiques moyennes sur chaque ligne de bulles.

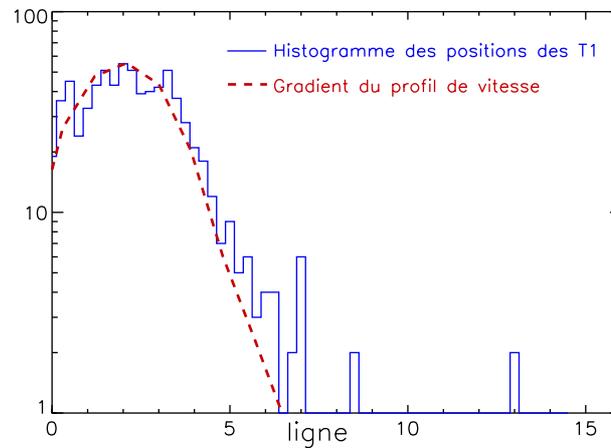


FIG. 4.16 – Gradient du profil de vitesse et fréquence d'apparition des réarrangements sur chaque ligne.

Résumé :

L'analyse du champ de déplacement interne engendré par un T1 permet d'interpréter ce dernier, dans une approche moyennée sur une ligne, comme une micro-fracture locale. Celle-ci provoque au niveau du réarrangement le glissement de la partie supérieure de la mousse par rapport à la partie inférieure. La longueur de glissement correspond à la grandeur δd_{T1} que nous avons précédemment mesurée.

Un réarrangement (local) provoque une relaxation *élastique* $\delta \epsilon_{T1}$ de l'ensemble de l'échantillon. Nous pouvons associer, en régime permanent, la longueur de glissement δd_{T1} et la relaxation de déformation $\delta \epsilon_{T1}$ aux caractéristiques géométriques de la mousse :

$$\delta d_{T1} = \frac{R^2}{L_x} \quad \text{et} \quad \delta \epsilon_{T1} = \frac{R^2}{S}$$

Le profil d'écoulement est lié à la fréquence locale d'apparition des réarrangements $\omega(y, t)$ par la relation :

$$\frac{dv(y)}{dy} = \langle \omega(y, t) \rangle_t \cdot \delta d_{T1}$$

c. Une modélisation rhéologique non locale

L'originalité des équations 4.12 et 4.13 réside dans leur écriture non-locale. Cette dernière traduit simplement le fait que, lorsque le temps de mise à l'équilibre mécanique est plus court que le temps caractéristique $\dot{\gamma}^{-1}$ du cisaillement, il est nécessaire d'intégrer aux échelles locales la relaxation élastique associée aux réarrangements lointains. Cette particularité ne se limite pas à la rhéologie des mousses, mais est intrinsèque aux écoulements quasistatiques de matériaux dits athermiques (par exemple les matériaux granulaires) ou plus généralement aux déformations de matériaux dont le temps caractéristique de relaxation dépasse largement $\dot{\gamma}^{-1}$ (émulsions concentrées, verres colloïdaux, etc...).

L'application du principe fondamental de la mécanique aux fluides simples (équation de Navier-Stokes) permet généralement la détermination du profil d'écoulement, en exploitant le fait que contrainte et plasticité locales sont reliées ($\sigma = \eta \vec{\nabla} \vec{v}$). La possibilité d'obtenir une localisation d'écoulement dans certains systèmes plus complexes impose de nombreuses précautions lorsque l'on cherche à établir un modèle rhéologique. En particulier, toute approche, associant contraintes, déformations, taux de déformation, et éventuellement d'autres grandeurs internes, mais uniquement à une échelle locale [45–48], ne peut rendre compte des écoulements inhomogènes. Si la charge élastique ne peut être relaxée par une plasticité lointaine, un écoulement localisé est mécaniquement impossible.

En prenant en compte les effets de longue portée associés à la relaxation élastique du système, la situation est très différente : quel que soit le profil d'écoulement introduit dans les équations 4.12 et 4.13, l'équilibre mécanique est assuré. Une telle approche peut donc aboutir à une modélisation des processus de localisation d'écoulement. D'autres paramètres, associés notamment à la structure locale du matériau, et dépendant de son histoire plastique locale, doivent alors être introduits pour déterminer le profil d'écoulement sélectionné. Ce point sera discuté dans le prochain chapitre.

Chapitre 5

Localisation d'écoulement

L'approche moyennée ligne à ligne que nous avons discutée lors du précédent chapitre nous a permis d'associer le profil d'écoulement et les fluctuations élastiques à la répartition spatiale et temporelle de la plasticité dans la mousse. La question la plus profonde reste toutefois posée : pourquoi les écoulements plastiques, du moins dans le cas qui nous concerne, tendent à la localisation ?

Pour répondre à cette question, nous procéderons par étape. Le premier mécanisme jouant un rôle essentiel est l'avalanche de réarrangements. A cette échelle, chaque réarrangement provoque directement autour de lui une perturbation mécanique qui favorise le déclenchement d'autres ruptures à son voisinage, et plus particulièrement sur sa ligne.

Au-delà de l'avalanche, il nous faut aussi comprendre comment la structure de la mousse mémorise son histoire plastique. Si les avalanches se succèdent sur une mince région, il doit nécessairement y avoir des caractéristiques locales intégrant les effets de la plasticité.

Sommaire

5.1	Du T1 à l'avalanche	99
a.	Champs de contrainte	100
b.	Propagateur élastique	100
c.	Phénomène d'avalanche	102
5.2	Empreinte structurale de la plasticité	105
a.	Résidus d'une avalanche	105
b.	Distributions des contraintes	106
c.	Hétérogénéités dynamiques et structurales	107
5.3	Instabilité d'écoulement	109
a.	Seuil de plasticité	109
i)	Seuil local	109
ii)	Liens entre seuil global et seuil local	109
iii)	Un problème de fond	110
b.	Mécanisme de localisation	111
i)	Régime transitoire	112
ii)	Départ d'avalanche	112
iii)	Écoulement permanent	112
c.	Quelques remarques importantes	112
i)	Position de la bande de cisaillement	112
ii)	Profil de vitesse	113
iii)	Stabilité de la bande de cisaillement	113
iv)	Rôle de la polydispersité	113
d.	Ouverture sur les granulaires	113

5.1 Du T1 à l'avalanche

La statistique des fluctuations d'énergie survenant durant l'écoulement plastique (cf figure 4.7 page 85) peut fournir de précieuses informations sur les mécanismes en jeu lors d'une avalanche de réarrangements. Nous avons reporté sur la figure 5.1 le spectre de ces fluctuations. Malgré la pauvreté de la statistique, la distribution montre un comportement de type loi de puissance, avec un exposant proche de la valeur $-\frac{3}{2}$. Le même profil est obtenu pour les tailles d'avalanches (en nombre de réarrangements) et les fluctuations de contraintes. Nos résultats sont sur ce point en accord avec ceux du *Vertex Model* [32], qui intègre dans la dynamique d'avalanche des forces visqueuses. Cela laisse supposer que notre approximation, qui traite l'avalanche comme un processus quasi-statique, n'introduit qu'un faible biais sur les résultats¹. La présence de fluctuations en loi de puissance traduit un comportement critique auto-organisé (*self-organized criticality*) [49, 50]. L'incrément de déformation imposé en déplaçant le mur inférieur ne provoque en général qu'un unique réarrangement dans la mousse. Par contre, la perturbation provoquée par ce T1 engendre la plupart du temps d'autres réarrangements. Ce mécanisme de déclenchement en chaîne est responsable du profil particulier du spectre des fluctuations d'énergie.

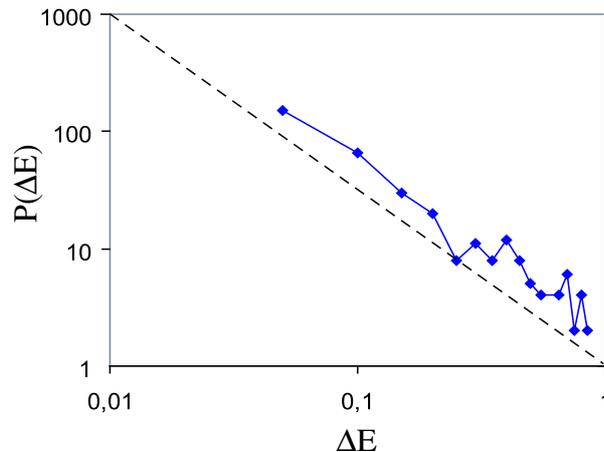


FIG. 5.1 – Distribution des fluctuations d'énergie

Le coefficient de la loi de puissance du spectre de fluctuations dépend de la nature de la perturbation engendrée par un T1 sur le reste du système. Chen *et al.* [51] ont proposé en 1991 un modèle sur réseau de propagation de fracture, où la plasticité locale provoque des fluctuations de contrainte élastiques à longue portée dans le matériau. Cette approche conduit à des distributions de fluctuations assez similaires aux nôtres. Cela laisse penser que la perturbation élastique induite par

¹Le *Bubble Model* [34], ainsi que le *Q-Potts Model* [37] ne semblent toutefois pas permettre d'obtenir de tels spectres.

chaque réarrangement joue un rôle important dans la statistique des avalanches de T1.

a. Champs de contrainte

Le champ moyen de déplacement engendré par un T1 dans l'ensemble de la mousse a déjà été présenté au chapitre précédent. Lorsque l'ensemble du squelette subit une déformation aussi hétérogène, cela introduit inévitablement des variations de la contrainte locale en tout point du système. Nous avons quantifié ces dernières en mesurant les fluctuations de contraintes de cisaillement provoquées par un unique T1.

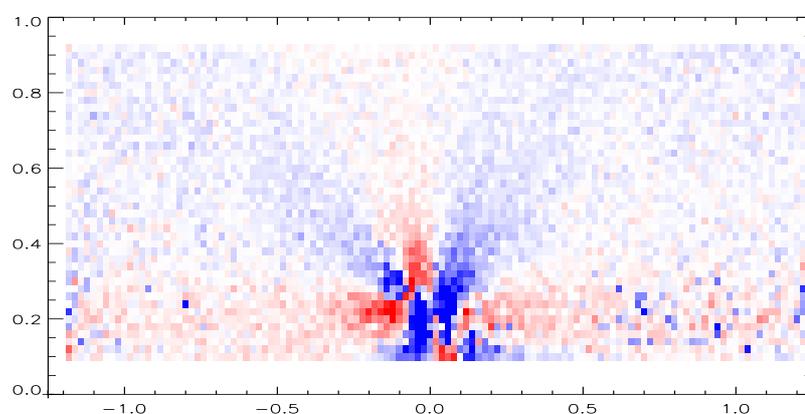
La mesure des contraintes locales dans la mousse peut être obtenue à partir la relation 1.13 (page 28). L'aire de la zone utilisée pour la détermination de la contrainte moyenne peut être considérablement réduite en moyennant sur un grand nombre de réalisations. Ainsi, en prenant en compte quelques centaines de réarrangements, la carte des variations de contrainte peut être calculée avec une résolution spatiale inférieure à la taille de la bulle. La figure 5.2 présente le résultat de ces mesures pour des réarrangements se produisant soit près du bord rigide, soit en milieu de structure. Le code couleur correspond à la différence de la contrainte de cisaillement avant et après le réarrangement. Plus la coloration rouge est intense, plus la contrainte est accentuée. Inversement, la couleur bleue indique une relaxation locale du cisaillement.

Ces cartes décrivent à la fois la relaxation plastique locale et l'équilibrage élastique de la mousse. La forte coloration bleue saturée au niveau du T1 indique un basculement brutal vers un état de contrainte opposé à la direction du cisaillement. Le réarrangement correspond donc bien à une relaxation locale de l'état de contrainte. Le champ plus lointain présente quant à lui de fortes hétérogénéités. On y retrouve toutefois la symétrie quadrupolaire du réarrangement T1 que nous avons décrite page 90, légèrement brisée par les conditions limites et l'orientation du cisaillement. La valeur moyenne sur chaque ligne² de la contrainte relaxée est constante; cette valeur correspond exactement à $\mu \cdot \delta\varepsilon_{T1}$, où μ est le module élastique de cisaillement en régime permanent. Toutefois, la répartition sur une ligne de la relaxation de contrainte dépend fortement de la distance séparant la ligne en question du réarrangement. En particulier, plus on se rapproche de la position du T1, plus les variations de contraintes produites par le T1 sont importantes. La situation extrême correspond à la ligne même du réarrangement, sur laquelle l'ensemble des bulles, exceptées celles impliquées dans le T1, voient s'accroître leur contrainte de cisaillement.

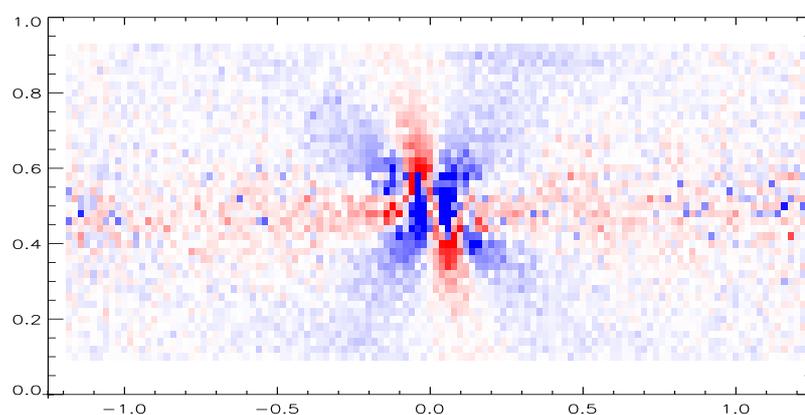
b. Propagateur élastique

En absence de réarrangement, la réponse de la mousse au cisaillement est élastique. Qu'en est-il à une échelle plus locale ? La forme des variations de contraintes

²C'est à dire chaque ensemble de bulles situées à la même distance des bords rigides



(a) hauteur : 0.2



(b) hauteur : 0.5

FIG. 5.2 – Carte des variations de contrainte tangentielle lors d'un T1

associées au T1 peut-elle également être considérée comme une réponse élastique ? Nous n'avons pour l'heure qu'une réponse illustrative à fournir à cette question³. Nous avons mesuré, par l'intermédiaire d'un logiciel de calcul en éléments finis⁴, la redistribution élastique des contraintes pour un quadrupole de forces localisé au milieu d'un matériau incompressible élastique et isotrope, confiné dans la même

³La méthode la mieux adaptée à ce problème consiste à suivre la démarche d'Eshelby [52,53] en l'adaptant à notre géométrie. L'idée du calcul serait alors d'extraire (conceptuellement) d'une matrice élastique 2D un fragment elliptique, de déformer ce fragment comme le ferait un T1 dans la mousse, puis de le réintroduire dans la matrice. Le champ élastique résultant dans l'ensemble de la structure fournit alors l'information que l'on recherche.

⁴Logiciel CASTEM 2000

géométrie que la nôtre⁵. L'état initial ne comporte aucune contrainte préassignée et le calcul s'effectue dans le cadre stricte de l'élasticité linéaire. L'effet du quadropole en terme de contrainte de cisaillement est décrit, avec le même code couleur que précédemment, sur la figure 5.3.

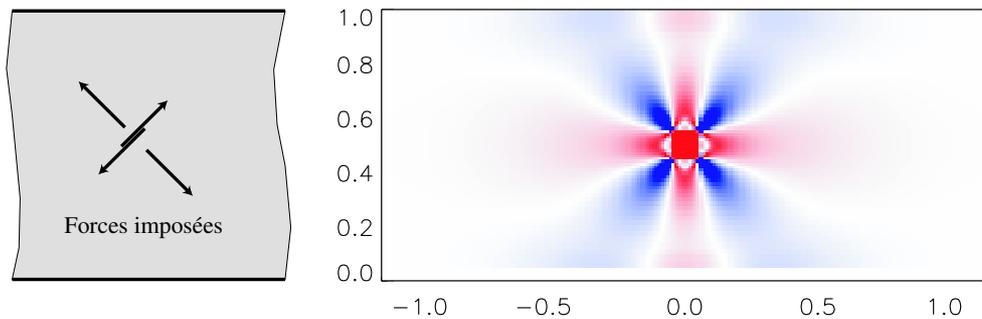


FIG. 5.3 – Contraintes de cisaillement d'un quadropole de forces

L'image obtenue reproduit les caractéristiques majeures des fluctuations de contraintes mesurées dans la mousse. Il en va de même pour les champs de déformation correspondants. Dans un cas comme dans l'autre on retrouve notamment un effet à longue portée avec une atténuation des fluctuations de contrainte en fonction de la distance au réarrangement plus proche d'une loi de puissance que d'une exponentielle. Il reste toutefois difficile de préciser davantage la nature de cette décroissance compte tenu de la faible taille des systèmes et de l'anisotropie des conditions limites. L'analogie entre les deux mesures suggère toutefois une redistribution élastique des contraintes dans la mousse, la figure 5.2 illustrant ce que l'on pourrait appeler le propagateur élastique d'un réarrangement dans la mousse.

c. Phénomène d'avalanche

Le résultat précédent confirme donc ce que nous avons suggéré en début de chapitre, à savoir l'effet élastique à longue portée d'un réarrangement sur l'état de contrainte de la mousse. Nous allons à présent nous pencher sur la répartition spatiale des T1 se succédant lors d'une avalanche. Deux animations sont disponibles sur le CD-ROM d'accompagnement. Elles permettent de suivre, T1 après T1, deux avalanches consécutives, respectivement de 34 et 17 réarrangements. Les variations des champs de déformations et de contraintes cumulées depuis le début de l'avalanche y sont représentées. Les cercles tracés sur les figures indiquent la position des réarrangements ayant lieu au cours de l'avalanche. La figure 5.4 en présente les dernières images.

⁵C'est à dire deux bords rigides sur lesquels tout déplacement est interdit et une condition limite périodique dans l'autre direction.

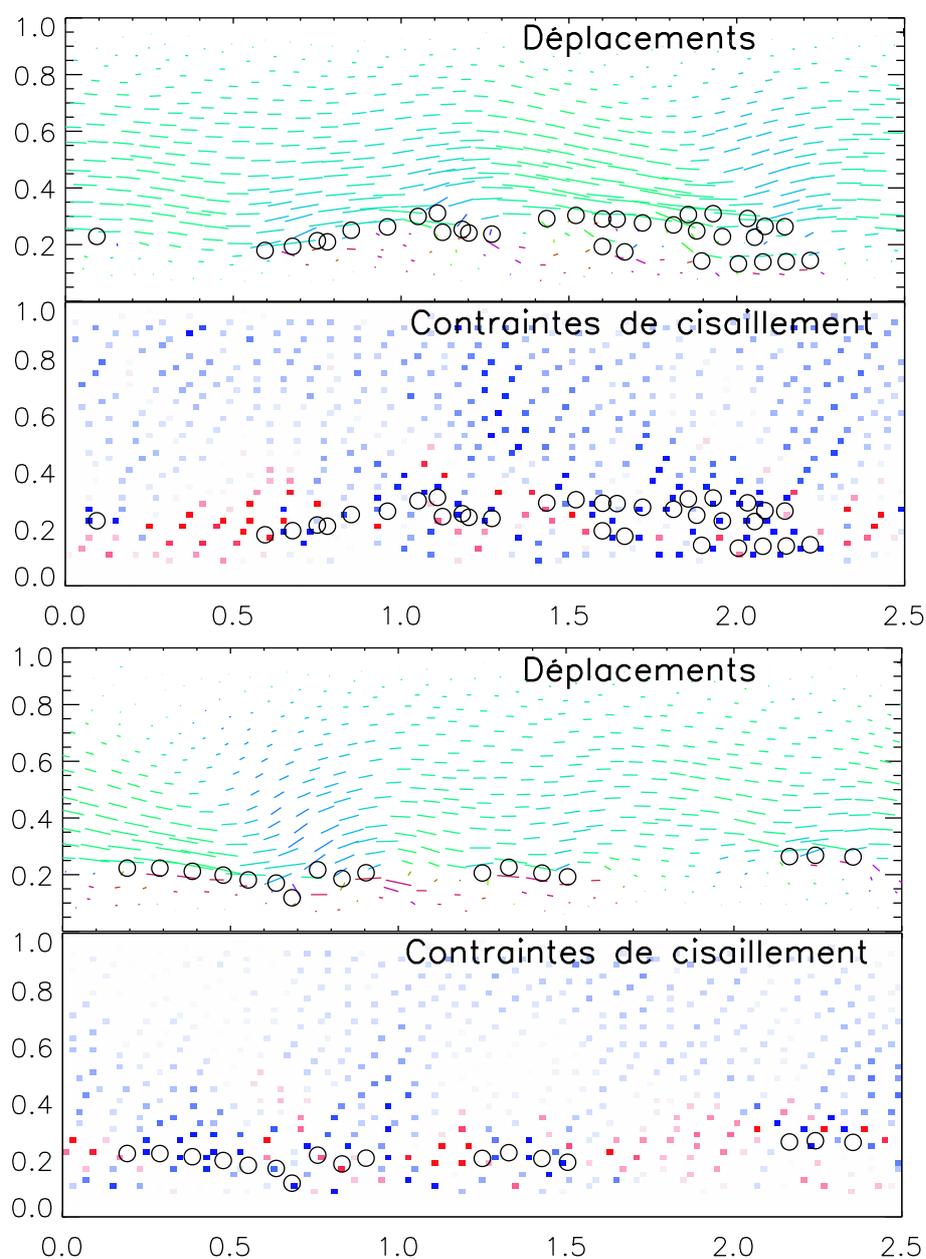


FIG. 5.4 – Déplacements et variations de contraintes de cisaillement induits par une unique avalanche. Les cercles indiquent la position des réarrangement ayant eu lieu. Deux mesures sont présentées, correspondant à deux avalanches consécutives.

Lors du déroulement de l'avalanche, nous pouvons observer comment l'accumulation des T1 produit peu à peu une relaxation homogène de la partie supérieure de la mousse, tandis qu'elle accroît significativement l'état de déformation

des bulles de la bande de cisaillement. En comparant de plus la répartition spatiale des réarrangements de la seconde avalanche avec la disposition des zones surchargées par la première, nous pouvons en conclure que la répartition spatiale des états de contraintes, induite par les réarrangements précédents, contrôle la position de l'avalanche suivante.

Nous avons illustré grâce à ces deux séries de réarrangements le mécanisme complet de relaxation de la contrainte lors du cisaillement. Le résultat en est d'une part une fracture complète sur toute la longueur de la mousse, aboutissant à une relaxation plastique de toute la bande de cisaillement, et d'autre part une relaxation élastique quasiment uniforme dans le reste de la mousse. Cette fracture s'effectue ici en deux avalanches consécutives, mais il y en a en général davantage. Celles-ci se succèdent toutefois de telle sorte que chaque avalanche poursuit la déchirure de la précédente.

Ces observations permettent de comprendre la localisation d'écoulement sur des échelles de temps courts, correspondant à un déplacements du bord rigide de l'ordre d'une taille de bulle. Le mécanisme de fracture suggéré engendre un glissement d'une ligne complète par rapport à sa voisine. A l'issue de ce phénomène, la mousse se retrouve parfaitement relaxée, que ce soit dans la bande de cisaillement ou dans le reste du système. Le cas des mousses cristallines en est très illustratif. La figure 5.5 compare les structures avant qu'une ligne complète de T1 ne se produise et la mousse qui en résulte. Du fait de l'invariance de la structure dans la direction perpendiculaire au cisaillement, le choix de la ligne qui glisse est totalement arbitraire. La relaxation engendrée par la fracture est parfaitement homogène, et rien ne permet de distinguer, structurellement, la mousse initiale de la mousse finale. En imaginant poursuivre le cisaillement de cette mousse, rien ne permet d'affirmer que la prochaine avalanche se produira sur la même ligne.

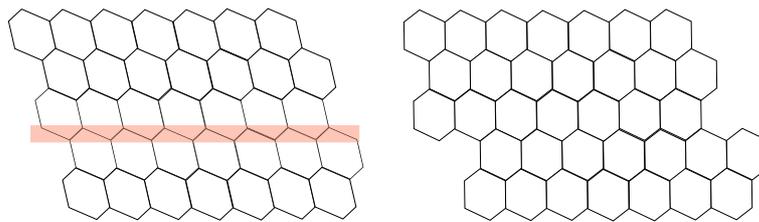


FIG. 5.5 – Glissement d'une ligne dans une mousse cristalline

Le problème de la localisation reste donc entièrement posé. L'approche simple du glissement de ligne rend compte des corrélations spatiales des réarrangements à l'échelle de quelques avalanches, mais ne permet pas d'expliquer que celles-ci se produisent, sur des échelles de temps longues (c'est-à-dire pour des déplacements du bord rigide largement supérieurs à la taille de la bulle), au même emplacement dans la mousse. Pour que cela soit possible, une information structurelle locale doit être gravée dans la bande de cisaillement.

5.2 Empreinte structurelle de la plasticité

La question à laquelle nous tâcherons à présent de répondre est la suivante : pourquoi les amorces d'avalanches se produisent-elles de façon systématique dans la même région de la mousse ?

a. Résidus d'une avalanche

La différence majeure entre la fracture d'un édifice cristallin (figure 5.5) et la plasticité dans notre système est le désordre. Lorsqu'une fracture complète se produit dans une mousse désordonnée, la structure résultante au niveau de la bande de cisaillement est très différente de la structure initiale. Une succession d'avalanches aboutissant à une fracture peut être représentée par une transformation plastique d'une fine zone de l'échantillon, d'épaisseur comparable à la taille des bulles et traversant de part en part la mousse (figure 5.6). A la différence des mousses cristallines (figure 5.5), le désordre structurel engendre une rugosité dans le profil de la zone plastique de l'ordre également de la taille des bulles R . Après l'avalanche, cette bande se trouve déformée ; les détails de sa forme, à l'échelle de la bulle, sont alors entièrement et aléatoirement redéfinis.

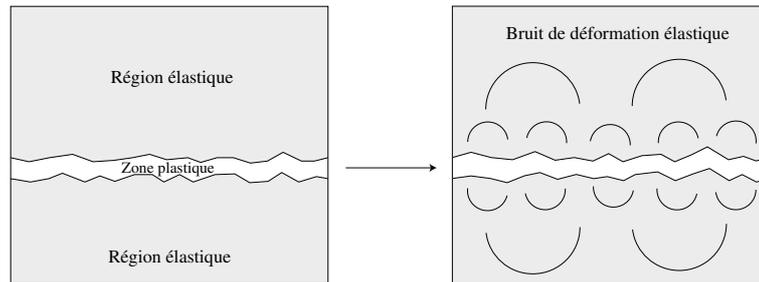


FIG. 5.6 – Déformation plastique d'une ligne

Mise à part la relaxation homogène de la contrainte de cisaillement, l'effet de cette transformation sur les domaines élastiques entourant la fracture correspond à une déformation aléatoire imposée au niveau de la fracture. Cette déformation pénètre alors dans le matériau et engendre, en particulier près de la fracture, des variations locales de déformation et de contrainte. Afin de sonder ces perturbations élastiques, nous avons suivi l'évolution de l'énergie de structure E_0 (c'est à dire de la longueur de ligne sous contrainte nulle, cf relation 4.2, 85) en séparant la mousse en trois bandes distinctes de même largeur : la première correspond à la bande de cisaillement, la seconde au milieu de la mousse, et la dernière au voisinage du bord rigide supérieur. Les trois graphes obtenus sont présentés sur la figure 5.7. Comme nous pouvions nous y attendre, l'entrée dans le régime d'écoulement localisé provoque la séparation des valeurs des énergies de structure associées à ces différentes régions de l'échantillon. Alors que loin de la bande de

cisaillement la mousse reste relaxée, au voisinage immédiat de l'écoulement, nous assistons à une augmentation importante de l'énergie de structure.

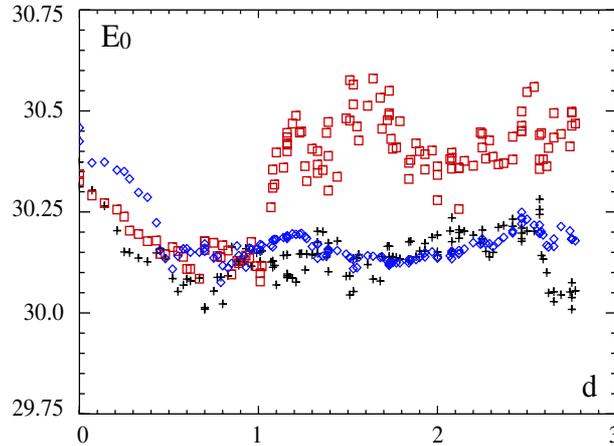


FIG. 5.7 – Evolutions locales de l'énergie de structure : les symboles \square correspondent à la bande de cisaillement, $+$ au milieu de la mousse, et \diamond à la partie supérieure.

b. Distributions des contraintes

Afin de démontrer que l'augmentation locale de l'énergie de structure E_0 est bien liée aux hétérogénéités de contraintes, nous avons également mesuré les distributions statistiques de contraintes des bulles dans ces trois mêmes régions. Nous définissons la contrainte de cisaillement d'une bulle à partir de la relation suivante :

$$\sigma_{xy}(b_i) = \frac{\gamma}{2 \cdot v_{b_i}} \cdot \sum_{\{l_j \in b_i\}} \frac{l_{j,x} \cdot l_{i,y}}{l_i} \quad (5.1)$$

où b_i représente la bulle en question, v_{b_i} la surface qu'elle occupe et les l_j correspondent aux différents films qui l'entourent. Cette expression est obtenue en extrapolant la relation 1.13 (page 28) à une unique bulle. Le facteur 1/2 prend en compte le fait que chaque côté est partagé par deux bulles. La figure 5.8 contient les distributions des contraintes de bulles, l'une mesurée dans la bande de cisaillement, l'autre au milieu de la mousse. Elles ont été obtenues sur l'ensemble du régime d'écoulement. A l'emplacement de la bande de cisaillement, l'hétérogénéité de la contrainte est effectivement plus importante.

Plus quantitativement, nous pouvons mesurer en continu lors du cisaillement l'évolution de la largeur des distributions de contraintes. La largeur $\Delta\sigma^2$ correspond au second moment de la distribution de contrainte, et peut être obtenu

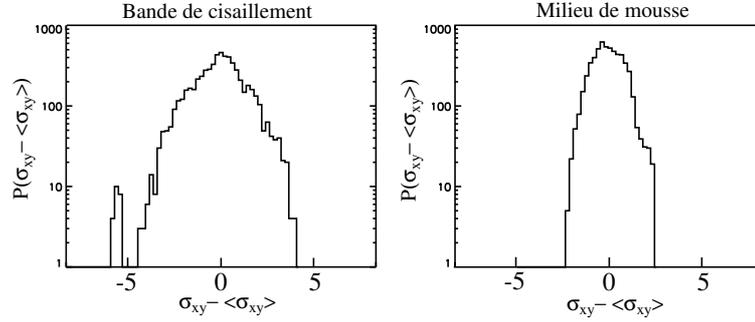


FIG. 5.8 – Distributions de contrainte : le graphe de gauche a été obtenu dans la bande de cisaillement et le graphe de droite en milieu de mousse

numériquement à l'aide des relations suivantes, où les sommes portent sur les bulles de la région de la mousse que l'on souhaite décrire :

$$\Delta\sigma^2 = \frac{\sum_{b_i} v_i \cdot (\sigma_{xy} - \langle\sigma_{xy}\rangle)^2}{\sum_{b_i} v_i} \quad (5.2)$$

$$\langle\sigma_{xy}\rangle = \frac{\sum_{b_i} v_i \cdot \sigma_{xy}}{\sum_{b_i} v_i} \quad (5.3)$$

Nous avons en particulier analysé séparément la taille des distributions dans les trois domaines de la mousse ayant servis aux mesures de l'énergie de structure présentées plus haut (figure 5.7). Les résultats sont en présentés sur la figure 5.9. Nous y retrouvons un élargissement des distributions de contraintes dans la région en écoulement, tandis que les autres parties de la mousse conservent des largeurs de distribution identiques.

Comparaison avec les expériences en cellule de Couette

L'élargissement des distributions de contrainte dans la bande de cisaillement est également observé expérimentalement. La figure 5.10 permet la comparaison directe des mesures numériques et expérimentales (obtenues durant le stage de DEA de Julien Scheibert dans notre groupe). Les formes des distributions de contraintes, ainsi que les dépendances des largeurs des distributions en fonction de la distance à la bande de cisaillement, sont similaires.

c. Hétérogénéités dynamiques et structurelles

En mesurant localement des grandeurs telles que l'énergie structurelle ou la largeur des distributions de contrainte, nous caractérisons les hétérogénéités structurelles de la mousse. Les résultats précédents nous permettent d'établir un lien

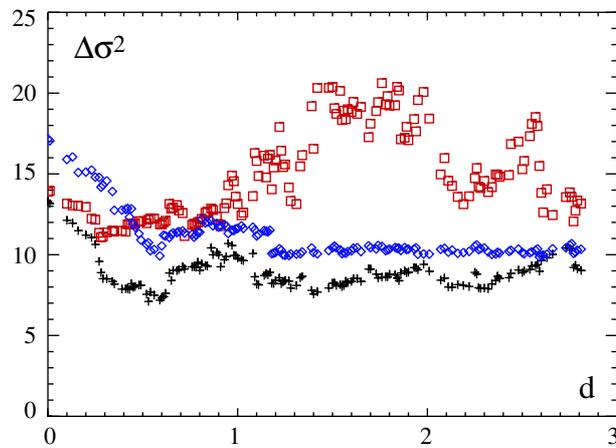


FIG. 5.9 – Largeur des distributions de contraintes : les symboles \square correspondent à la bande de cisaillement, $+$ au milieu de la mousse, et \diamond à la partie supérieure.

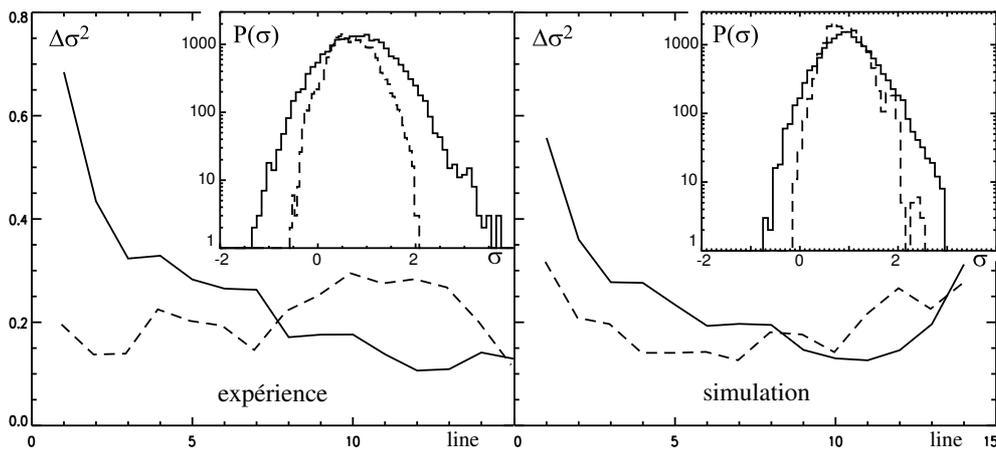


FIG. 5.10 – Largeur des distributions de contraintes en fonction de la distance à la bande de cisaillement, en diamètre de bulle. Les traits pleins correspondent aux mesures moyennes en régime permanent, et les traits en pointillés aux caractéristiques des mousses initiales. Les encarts présentent la forme des distributions de contraintes en régime permanent dans la bande de cisaillement (trait plein) et à une distance de 8 diamètres de bulles de la bande de cisaillement (trait en pointillés). Les valeurs des contraintes ont été normalisées par la contrainte moyenne en régime permanent, afin de permettre la comparaison directe des mesures expérimentales et numériques.

étroit entre le désordre structural local et la présence d'un écoulement plastique. Cela implique en particulier qu'à partir d'une unique image de mousse en écou-

lement, nous sommes à présent à même de fournir la position de la bande de cisaillement. Nous étions à la recherche d'une empreinte structurelle laissée par les avalanches de réarrangement, la voici obtenue. Il nous reste à comprendre comment cette empreinte permet la stabilisation de la bande de cisaillement.

5.3 Instabilité d'écoulement

a. Seuil de plasticité

Le seuil de plasticité σ_y d'un matériau correspond à la contrainte minimale à imposer pour qu'il subisse une transformation plastique. Cette contrainte-seuil dépend a priori de l'état structural. En particulier, lorsque de fortes hétérogénéités de contraintes sont présentes, certaines régions possèdent localement une contrainte supérieure à la moyenne et abaissent de ce fait le seuil de plasticité de l'ensemble.

i) Seuil local

À cette vision macroscopique, nous pouvons opposer une description plus locale. Existe-t-il un seuil local de plasticité $\sigma_{y,l}$, que nous pourrions définir comme étant la contrainte locale maximale, à l'échelle de bulle, que celle-ci peut supporter sans se réarranger ? Il n'a malheureusement pas été possible d'obtenir, à partir de nos mesures numériques, une caractérisation précise de ce seuil, probablement parce que la question est mal posée. Deux bulles se réarrangent lorsque le coté qui les unit atteint une taille critique. Cette limite n'est donc pas un seuil en contrainte à proprement parler et dépend très sensiblement de la topologie locale. Le seuil local ne peut alors qu'être statistiquement distribuée.

Nous pourrions poursuivre indéfiniment ce débat, en développant par exemple les liens qui unissent le seuil local à d'autres grandeurs telles que le nombre de voisins de la bulle, etc... La suite de ce chapitre a essentiellement pour vocation d'exprimer le mécanisme qui selon nous conduit à la localisation d'écoulement. Nous nous permettrons en conséquence d'adopter une vision minimale contournant les difficultés, certes réelles, que nous venons de mentionner et supposons l'existence d'un unique seuil local de plasticité $\sigma_{y,l}$.

ii) Liens entre seuil global et seuil local

Pour qu'un réarrangement se produise dans la mousse, il suffit qu'une seule bulle dépasse le seuil local de plasticité. La dynamique des réarrangements en régime quasistatique est donc extrême, c'est à dire qu'elle est contrôlée par les queues des distributions statistiques. Lorsqu'une bulle (la plus contrainte) dépasse le seuil local de plasticité, que vaut la contrainte moyenne de la mousse, identifiable dès lors au seuil de plasticité macroscopique du système ? Une réponse schématique en est apportée par la figure 5.11. L'écart entre la contrainte moyenne de la

mousse et la plus forte contrainte d'une bulle dans le système varie certainement comme $\sqrt{\Delta\sigma^2}$. Nous pouvons dès lors établir une relation très qualitative entre le seuil de plasticité global et la distribution des contraintes :

$$\sigma_y \approx \sigma_{y,l} - \sqrt{\Delta\sigma^2} \quad (5.4)$$

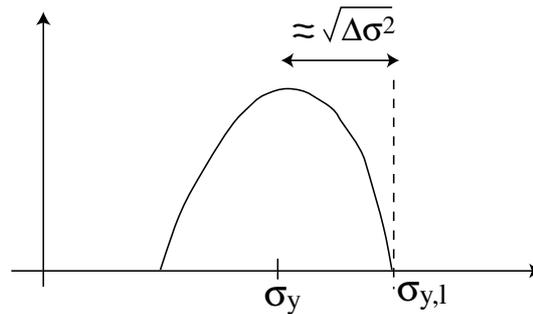


FIG. 5.11 – Relation schématique entre seuil de global et seuil local de plasticité

Lorsque la mousse contient une répartition hétérogène du désordre, il ne faut naturellement considérer que la région la plus désordonnée pour définir le seuil de plasticité. La relation précédente permet alors de comprendre la forme de la relation contrainte-déformation et plus particulièrement la présence d'une légère bosse précédant le régime permanent (voir figure 4.2 page 82). Cette bosse, communément dénommée *overshoot* dans le jargon anglo-saxon, est une caractéristique très fréquemment rencontrée dans la rhéologie des matériaux élastoplastiques [2, 54, 55]. Elle traduit un abaissement du seuil de plasticité σ_y lors de l'entrée dans le régime plastique. Nous nous proposons ici d'associer cette caractéristique à l'élargissement des distributions de contraintes piégées lorsqu'apparaît la localisation.

iii) Un problème de fond

S'il paraît raisonnable d'associer l'élargissement des distributions de contraintes à une chute de la contrainte seuil, la relation 5.4 n'a en réalité aucune raison d'être valide. Pourquoi la statistique des queues de distribution serait-elle définie par la largeur quadratique de ces mêmes distributions? Même en supposant connue la forme des distributions, une statistique extrême doit prendre en compte une échelle de taille. En effet, plus l'échantillon que l'on considère contient de bulles, plus on a de chances a priori d'y trouver quelques objets fortement déformés. Autrement dit, la contrainte seuil n'a pas de raison d'être une grandeur intensive. Comment dépend-elle précisément de la taille du système? Cette question reste ouverte et appelle certainement des investigations futures.

b. Mécanisme de localisation

Nous allons à présent suggérer quelques pistes permettant de comprendre le mécanisme de la localisation dans les mousses, et peut-être plus généralement dans les systèmes désordonnés. Le scénario proposé est décrit sur la figure 5.12 et dans le texte qui suit.

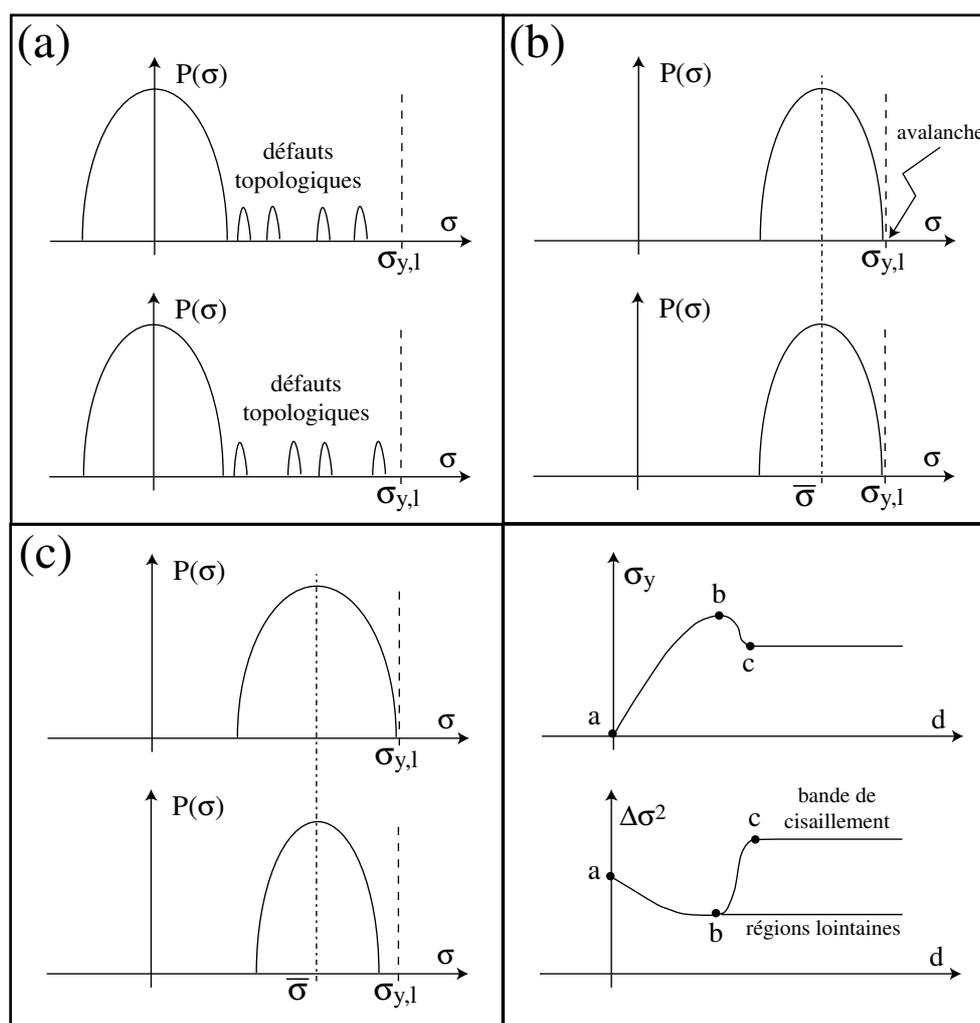


FIG. 5.12 – Scénario conduisant à la localisation d'écoulement. Les figures (a), (b) et (c) présentent, à trois instants différents, les distributions de contrainte de deux bandes de mousse, correspondant par exemple aux régions proches des bords rigides supérieur et inférieur.

i) Régime transitoire

Le système initial (a), sous contrainte moyenne nulle, possède une structure désordonnée. Ce désordre se caractérise essentiellement par la présence de quelques défauts topologiques induisant localement de fortes distorsions de bulle. Le seuil de plasticité de la mousse est donc très faible. En augmentant progressivement la contrainte, nous provoquons la réorganisation de ces défauts et, en conséquence, une diminution de l'énergie de structure, de μ_2 , mais aussi de la largeur des distributions de contrainte. Le seuil de plasticité augmente également. Etant encore sous un cisaillement faible, aucune avalanche ne se développe. Cette phase correspond au régime transitoire; que ce soit en cisaillement continu, ou en cisaillement alterné, l'ensemble de la structure devient plus stable.

ii) Départ d'avalanche

Le processus précédent ne peut se poursuivre indéfiniment. Peu à peu l'ensemble de la distribution se rapproche du seuil local de plasticité $\sigma_{y,l}$, si bien qu'un grand nombre de bulles atteignent simultanément des états instables. Le système devient alors critique -situation (b)-. Le premier réarrangement provoque le départ d'une série d'avalanches, dont le résultat est une fracture complète d'une ligne, et brise la symétrie du système. La région de la fracture accumule brutalement de fortes déformations, tandis que les régions lointaines sont très peu affectées.

iii) Ecoulement permanent

Au delà de la première fracture, le système est donc séparé en deux régions possédant la même contrainte moyenne, mais des caractéristiques structurales différentes. Loin de la bande de cisaillement, la mousse est restée structurellement relaxée. Les distributions de contraintes n'y ont pas évolué, simplement parce que ces régions n'ont pas connu de réarrangement. Au niveau de la fracture, la situation est toute autre. La fracture y a laissé une forte empreinte, essentiellement visible au niveau de la largeur des distributions des contraintes -situation (c)-. Le seuil de plasticité au niveau de la fracture est à présent plus bas que celui des régions lointaines. La fracture a donc fragilisé la mousse à son voisinage. Les prochains réarrangements se produiront donc plus probablement sur les traces de la première avalanche. La bande de cisaillement est ainsi établie.

c. Quelques remarques importantes

i) Position de la bande de cisaillement

Sur la dizaine de simulations en cisaillement continu que nous avons réalisées, le plus grand nombre a provoqué la localisation près des bords rigides de la mousse. Deux d'entre elles ont toutefois produit une bande de cisaillement au milieu du système. Pourquoi cette prédisposition pour une localisation au niveau des bords rigides? Aux parois de la mousse, la structure initiale est figée du fait du collage

des bulles. La relaxation du régime transitoire ne peut donc pas y être aussi efficace que loin des bords rigides. Cet effet y entraîne statistiquement une fragilité plus importante. L'utilisation d'un système bi-périodique (par exemple avec des conditions limites du type Lees-Edwards [32]) devrait permettre de trancher cette question.

ii) Profil de vitesse

Nous ne sommes pas en mesure à partir de la démarche précédente de rendre compte du profil de vitesse de l'écoulement. Il faudrait pour cela prendre en considération les fluctuations temporelles locales de contrainte dans l'ensemble du système. Un écoulement localisé induit en permanence un bruit élastique susceptible de provoquer des réarrangements sur les lignes lointaines. La répartition spatiale de ce bruit dans la mousse pourrait alors être à l'origine de la forme exponentielle du profil de vitesse.

iii) Stabilité de la bande de cisaillement

Les simulations à notre disposition ne nous permettent pas de conclure définitivement sur la stabilité aux temps longs de la bande de cisaillement. Le profil exponentiel de l'écoulement plastique pourrait être à l'origine d'une augmentation progressive du désordre des régions lointaines, sur des temps croissant exponentiellement avec la distance au centre de la bande de cisaillement. La localisation serait dès lors un phénomène transitoire.

iv) Rôle de la polydispersité

Nous n'avons utilisé que des systèmes de polydispersité identique. Or l'apparition d'une bande de cisaillement peut a priori en être dépendante. Nous pourrions imaginer en particulier que la présence de grosses bulles puisse faire obstacle à la propagation des avalanches de réarrangements. Cette question peut également faire l'objet d'une étude future.

d. Ouverture sur les granulaires

Qu'y a-t-il de spécifique aux mousses dans le mécanisme que nous venons de décrire? Pourrait-il en particulier s'appliquer à la localisation dans les granulaires? Dans un empilement granulaire confiné sous une contrainte normale externe P_{ext} , il est possible d'associer l'inverse de la fraction volumique ϕ des grains à une énergie de structure E_0 ($\delta E_0 = \delta V \cdot P_{ext} \propto -\delta\phi \cdot P_{ext}$). Cette définition permet d'établir une correspondance entre la localisation d'écoulement dans les granulaires et les mousses. Pour prendre l'exemple d'un test triaxial, partant d'un empilement lâche, la charge du matériau peut être décomposée selon les étapes suivantes : on assiste tout d'abord une augmentation progressive de la

contrainte, tandis que l'ensemble du matériau se tasse de façon homogène (diminution de l'énergie de structure). Lorsque la contrainte dépasse un certain seuil, la localisation apparaît. Une bosse dans la relation contrainte-déformation peut être observée; cela indique que la formation de la bande de cisaillement fragilise l'empilement. Enfin, la densité locale des grains dans la bande de cisaillement se réduit fortement au départ de l'écoulement plastique. Cet effet serait la contrepartie de l'augmentation locale de l'énergie de structure dans les mousses. Cette analogie suggère une unité des mécanismes rhéologiques à l'œuvre dans ces deux systèmes : sous forte déformation, la plasticité relaxe la contrainte de cisaillement mais affecte en retour la structure en abaissant localement son seuil de stabilité. Pourtant, mousses et matériaux granulaires sont très différents en ce qui concerne les propriétés élastiques et plastiques, ces dernières étant aujourd'hui au centre de nombreux travaux, dont la seconde partie de ce manuscrit.

Conclusion

Nous avons mis à profit dans cette première partie du manuscrit la géométrie simple des mousses sèches statiques pour élaborer un code numérique adapté au cisaillement quasistatique des mousses sous de fortes déformations. L'exploitation de l'algorithme nous a permis d'illustrer les processus de relaxation structurelle des mousses désordonnées, lorsque celles-ci sont faiblement déformées. L'étude du cisaillement continu a mis de plus en évidence la présence d'une instabilité d'écoulement, conduisant à la localisation de la plasticité sur une mince région de la mousse, d'une largeur de l'ordre de 3 tailles de bulle. L'origine de cette bande de cisaillement résulte de deux caractéristiques essentielles de la transformation plastique engendrée par le cisaillement. D'une part, chaque réarrangement produit une relaxation de contrainte partagée sur l'ensemble de la mousse. D'autre part, le réarrangement du bulle (une fois la mousse sous contrainte) produit localement une augmentation du désordre, ce dernier pouvant être quantitativement décrit par la largeur des distributions de contrainte de bulle. Ces observations nous ont alors permis de proposer un mécanisme d'instabilité susceptible d'être à l'origine de la localisation d'écoulement dans les mousses. En analysant en détail le comportement rhéologique des mousses en régime quasistatique, nous espérons fournir de sérieux arguments concernant la pertinence, dans les modèles rhéologiques des matériaux amorphes, des questions liées d'une part à l'élasticité du milieu, et d'autre part à l'évolution structurelle locale du matériau associée à son histoire plastique.

Deuxième partie

Dynamique de contact d'un matériau granulaire vibré



Introduction

La structure d'une mousse à l'échelle des bulles est une donnée suffisante pour décrire le système et ses caractéristiques mécaniques (énergie, module élastique, états de contrainte, etc...). Les transformations plastiques survenant dans le cadre de déformations quasistatiques résultent également de transformations géométriques simples, que ce soit au niveau du seuil de stabilité -déterminé par une taille critique de côté- ou en ce qui concerne le résultat de la transformation plastique, à savoir une permutation de voisinage, induisant des déplacements de l'ordre d'une taille de bulle.

Bien qu'une phénoménologie commune unisse les mousses et les matériaux granulaires -plasticité locale, régime d'écoulement quasistatique, formation de bandes de cisaillement, etc...-, les matériaux granulaires présentent une plus grande complexité à l'échelle microscopique. La connaissance de la structure exacte (positions des grains) ne permet pas de remonter directement à la répartition des forces. En effet, pour distinguer clairement un contact, la précision sur la position des grains doit être de l'ordre de la rugosité des surfaces. De plus, même en ayant identifié les contacts, la nature même des interactions entre grains (du type sphère dure avec friction solide) laisse les forces indéterminées.

La réponse d'un empilement à une déformation quasistatique ne relève plus simplement de considérations géométriques à l'échelle de grains, mais doit prendre en compte l'état de contrainte au niveau microscopique. Une transformation plastique élémentaire, pour autant qu'elle existe dans les matériaux granulaires, opère sur des échelles de taille bien inférieures à celle du grain, puisqu'un très faible déplacement est suffisant pour redistribuer localement les contraintes dans l'empilement.

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons précisément à cette forme de micro-plasticité locale. Nous soumettons des empilements compacts à un bruit mécanique de faible amplitude afin de sonder, par des mesures optiques sensibles, leur réponse. Il est ainsi possible d'estimer la fréquence des micro-réarrangements et d'analyser les relations entre structure globale à l'échelle des grains et micro-plasticité locale.

Chapitre 6

Structure et contraintes internes

Ce chapitre introductif contient quelques généralités sur les empilements de grains. Ces derniers seront essentiellement présentés comme des structures désordonnées et statiques, dans lesquelles l'énergie thermique est insignifiante. Une configuration particulière constitue alors un état métastable dans un potentiel énergétique généralement lié à la gravité.

Les processus de relaxation macroscopique pour ces systèmes requièrent un apport externe d'énergie. En communiquant des accélérations fortes aux grains, nous autorisons le système à explorer différentes configurations, en restructurant l'empilement à l'échelle des grains ; cela se traduit notamment par un processus lent de tassement.

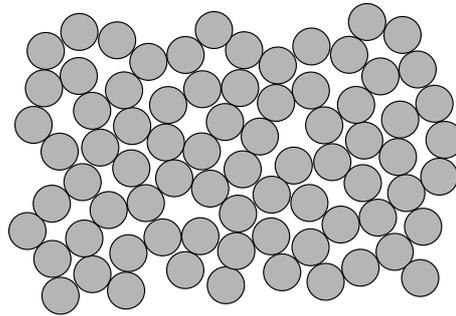
D'autres modes de sollicitation, comme par exemple l'application d'un champ de contraintes externes évoluant lentement dans le temps, provoquent également des déplacements de grains, mais les restructurations ainsi obtenues sont de nature locale et semblent préserver la majorité des contacts entre grains. Cette forme de micro-plasticité, si elle permet effectivement la relaxation de la contrainte imposée, n'opère pourtant pas nécessairement dans le sens de la relaxation de la structure globale en terme de densité, et peut éventuellement engendrer une déstabilisation mécanique de l'empilement, conduisant à une avalanche de grains ou à la formation d'une bande de cisaillement.

Sommaire

6.1	Empilements de grains	121
a.	Interactions entre grains	121
i)	Contact	121
ii)	Friction solide	122
iii)	Humidité	123
iv)	Electrostatique	123
b.	Empilements statiques	123
i)	Géométrie et énergie	123
ii)	Distributions de forces	124
6.2	Relaxation de structure	125
a.	Compaction d'un matériau granulaire	125
b.	Modèles de compaction	127
6.3	Charge quasistatique et micro-plasticité	127
a.	Charge quasistatique	127
b.	Localisation et avalanches	129
c.	Sonder le réseau de forces	129
6.4	Objectifs de notre travail	130
a.	Idée générale	130
b.	Principe de l'expérience	130

6.1 Empilements de grains

Les matériaux granulaires sont des empilements compacts d'objets rigides dont les dimensions suffisamment grandes pour être insensibles à l'agitation thermique. Ces objets sont communément appelés *grains*. Pourquoi s'intéresser à ces objets ? Tout d'abord parce qu'ils nous entourent. Du paquet de farine aux amas rocheux, des processus industriels (par exemple pour le stockage en silos ou en pharmacologie) aux problèmes géologiques (avalanches, mouvements de dunes, etc...), la matière en grain occupe une place majeure.



La simplicité de la définition d'un empilement est en fort contraste avec les difficultés que l'on rencontre dès lors que l'on souhaite en décrire les propriétés physiques. Tout d'abord la statique : comment caractériser la réponse mécanique d'un empilement ? Celui-ci est trop complexe, trop fractionné, pour être modélisé de façon simple à l'aide de la mécanique traditionnelle. Une approche statistique s'impose, mais quelle statistique réaliser lorsque rien ne bouge ? Le physicien éprouve de grandes peines à calculer des moyennes sur des systèmes figés. On pourrait croire que toutes ces difficultés s'évanouissent dès lors que l'on aborde la question des écoulements de grains. C'est en partie vrai. En partie seulement, car la dissipation d'énergie n'est pas simple à décrire.

Ce chapitre se limitera à quelques aspects de la matière en grains, essentiellement ceux qui nous seront utiles par la suite, à savoir quelques propriétés statiques ou quasistatiques.

a. Interactions entre grains

i) Contact

Les interactions entre grains se font essentiellement par contact. Si les grains ne se touchent pas, aucune force ne s'exerce entre eux. Dès lors qu'ils sont en contact, ils se repoussent avec un potentiel élastique variant d'autant plus rapidement que les grains sont rigides (figure 6.1). Le modèle standard de Hertz [56, 57] permet de calculer le potentiel d'interaction associé :

$$F \propto \frac{E \cdot \sqrt{R}}{1 - \sigma^2} \cdot d^{3/2} \quad (6.1)$$

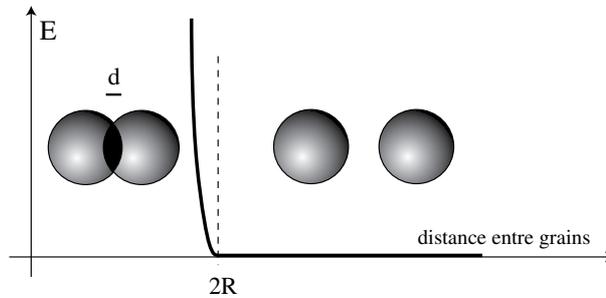


FIG. 6.1 – Interaction entre grains

où E représente le module d'Young, σ le module de poisson, R le diamètre des grains et d l'interpénétration des deux objets. Dans la limite de grains infiniment rigides (c'est-à-dire avec une pression de confinement de plusieurs ordres de grandeur inférieure au module élastique) l'interaction se modélise simplement par un potentiel de type sphère dure.

ii) Friction solide

Une fois le contact entre grains réalisé, la friction entre les deux solides est susceptible de jouer un rôle. Ainsi, pour une force normale N donnée, le contact peut supporter une force tangentielle T telle que $T \leq \mu_s \cdot N$, où μ_s est le coefficient de frottement statique entre grains. Ce dernier traduit à l'échelle du contact les caractéristiques microscopiques des surfaces. Malgré la grande diversité des matériaux utilisables, μ_s est toujours de l'ordre de 0.5 ± 0.2 .

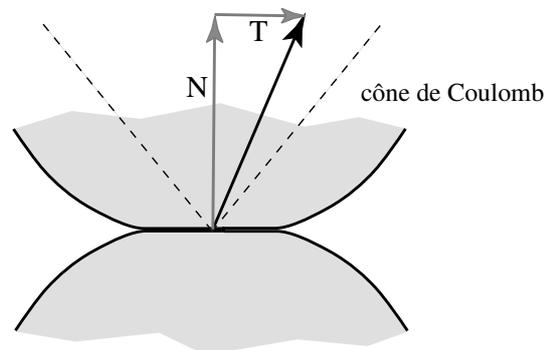


FIG. 6.2 – Friction entre grains

iii) Humidité

L'atmosphère ordinaire contient toujours un peu de vapeur d'eau. La présence au niveau des contacts de surfaces rapprochées favorise fortement la condensation de la vapeur et conduit à la formation de ponts capillaires entre les grains [58]. L'empilement bénéficie alors d'une certaine cohésion, certes fort utile pour la réalisation de châteaux de sable, mais conduisant à de nombreuses difficultés expérimentales en laboratoire, avec en particulier la nécessité de contrôler précisément l'atmosphère lorsque l'on utilise des grains de petite taille (inférieure à quelques millimètres).

iv) Electrostatique

Chacun d'entre nous a certainement gardé quelque souvenir d'un professeur de physique astiquant vigoureusement un brave baton d'ébonite avec la peau d'un pauvre chat. Cruel mais amusant, cela démontrait surtout que le frottement engendrait des transferts de charges susceptibles d'avoir des effets à longue portée. Sans qu'il soit possible de préciser de façon générale l'impact des effets électrostatiques sur un empilement de grains, soulignons que ceux-ci peuvent constituer une perturbation difficilement contrôlable, notamment sur de petits grains [56].

b. Empilements statiques

Revenons à présent à l'échelle de l'empilement. Deux principales approches peuvent être opposées. L'une est géométrique et s'intéresse à la répartition spatiale des grains. L'autre est plus mécanique, et décrit les forces en jeu dans le matériau.

i) Géométrie et énergie

Un empilement de grains se maintient grâce à la gravité. Cette dernière impose à chaque grain d'occuper la position la plus basse possible et assure ainsi la compacité des empilements. De ces considérations élémentaires découle l'expression d'une énergie associée à la structure géométrique :

$$E_s = \sum_{\text{grains } i} mgz_i = S \cdot \int_z \phi(z) \cdot \rho g z \cdot dz \quad (6.2)$$

où m est la masse d'un grain et z_i sa hauteur dans la colonne. L'introduction de la fraction volumique ϕ de l'empilement, que nous dénommerons également *densité*, permet le passage à la limite continue de cette expression.

L'énergie dépend de la configuration particulière adoptée par les grains. Plus l'empilement est dense, plus l'énergie sera faible à nombre égal de grains. L'application d'un principe d'énergie minimale nous dirait naïvement que l'empilement devrait adopter spontanément la structure la plus compacte possible. Naturellement, ce n'est pas vrai.

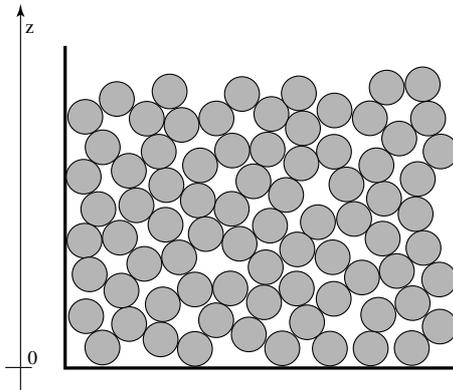


FIG. 6.3 – Empilement sous gravité

Du fait de l'insignifiance de l'agitation thermique à l'échelle des grains, une structure obtenue en versant des grains dans un récipient n'évoluera pas spontanément vers un état compact. Pour que la structure évolue vers des états de plus basse énergie, il faut que certains grains bougent ; cela ne peut se faire en l'absence de sollicitation externe. Ainsi, un empilement au repos est une structure métastable, vis-à-vis de la gravité.

ii) Distributions de forces

Au-delà de la vision très géométrique de l'empilement en tant que superposition d'objets rigides, la description complète d'un empilement rigide nécessite de connaître le champ de force, c'est à dire les infimes déformations des grains au niveau des contacts.

De nombreuses études, qu'elles soient expérimentales [59, 60] ou numériques [61, 62], semblent s'accorder sur une distribution statistique de ces forces dont l'allure typique est présentée sur la figure 6.4. Pour des forces supérieures à la contrainte moyenne \bar{f} , la décroissance est exponentielle. Pour des forces plus faibles que \bar{f} , la distribution présente un plateau pour l'instant encore mal défini. Ainsi, une fraction non négligeable des contacts transmettent des forces largement supérieures à la valeur moyenne.

De façon surprenante, cette répartition des forces semble ne dépendre d'aucun paramètre structurel de l'empilement tels que la densité ou l'ordre [63]. Même dans le cas d'empilements cristallins, on retrouve une distribution des forces de contact identique. Le résultat est en outre indépendant du coefficient de friction [62, 63] et de la compressibilité des grains¹ [62, 64].

¹Lorsque la pression de confinement est de l'ordre du module élastique des grains, ce résultat tombe. La distribution suit alors une loi gaussienne

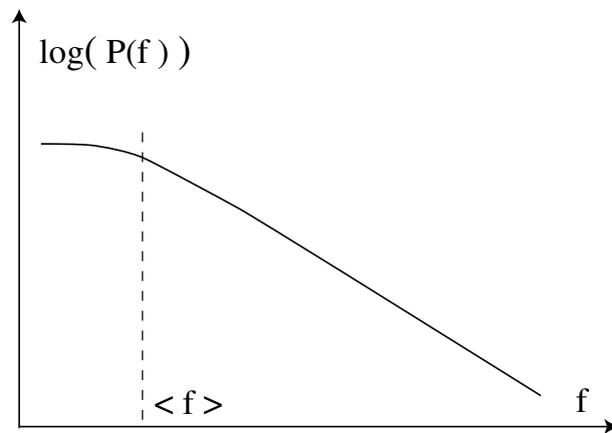


FIG. 6.4 – Distributions de forces dans un empilement

L'universalité de ces résultats (en particulier vis-à-vis de la structure macroscopique) provient essentiellement de la séparation d'échelle entre le grain et le contact. Aussi soigneux que l'on soit dans la réalisation d'un empilement cristallin de sphères, il est impossible d'en contrôler la structure aux échelles des contacts, du fait d'inévitables dispersions des tailles de grains ou de leur rugosité. A l'échelle de l'empilement, la répartition des contacts est donc toujours totalement aléatoire. La présence de friction entre grains complique encore davantage le passage de la connaissance de la structure à celle des forces. Ce problème n'a pas de solution unique, la mobilisation de la friction dépendant, en plus de la position des grains, de la façon dont ceux-ci ont été amenés les uns contre les autres.

6.2 Relaxation de structure

Un empilement au repos est un objet métastable, piégé dans un état dont l'énergie n'est pas minimale. Il est donc légitime de s'attendre à ce qu'en injectant de l'énergie dans le système, via par exemple une perturbation mécanique, nous provoquions un dépiégeage du système et son évolution vers des états plus stables. Cette partie du chapitre discutera de les différents aspects de ce processus.

a. Compaction d'un matériau granulaire

La façon la plus simple d'injecter de l'énergie dans un matériau granulaire est de communiquer une impulsion mécanique de relativement forte amplitude à l'empilement. Chacun sait qu'en tapotant un seau de sable, il se tasse. Le monde industriel fait d'ailleurs un fréquent usage de ce procédé pour réduire la taille des emballages de céréales, pâtes diverses, etc... Il s'agit bien là d'un dépiégeage mécanique de l'empilement conduisant son évolution vers des états plus denses.

Les premières études expérimentales systématiques de la compaction ont été réalisées en 1995 dans le groupe de Jaeger et Nagel à Chicago [65, 66]. Un tube (1m de haut et 2cm de diamètre), rempli de billes de rayon 1mm, est soumis à un grand nombre de "tapes" discrètes. Chaque tape correspond à une accélération verticale a du tube; un paramètre adimensionné $\Gamma = a/g$ peut être introduit pour quantifier l'impact de cette dernière sur l'empilement. Les auteurs suivent alors l'évolution de la densité $\phi(t)$ pour différentes valeurs de Γ , dans la gamme $1 < \Gamma < 6$. Les courbes de la figure 6.5 en reproduisent la forme typique. Plus Γ est élevé, plus le tassement est rapide et important. Leurs courbes de compaction sont correctement ajustées par la loi suivante, où t correspond au nombre de tapes communiquées :

$$\phi(t, \Gamma) = \phi(\infty, \Gamma) - \frac{\phi(\infty, \Gamma) - \phi(0, \Gamma)}{1 + \ln(1 + t/\tau)} \quad (6.3)$$

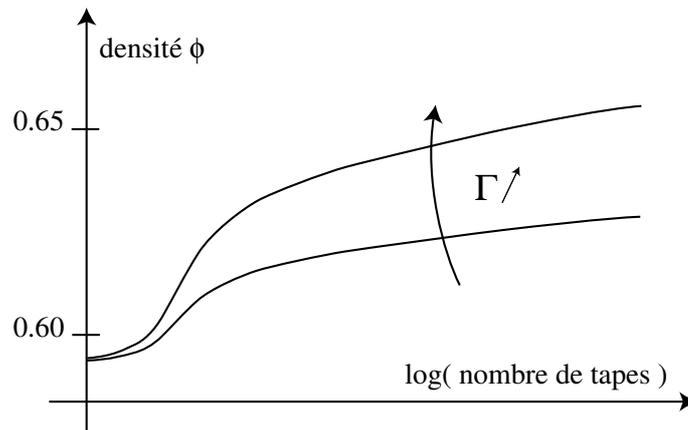


FIG. 6.5 – Courbes typiques de compactations

Nous ne mentionnons cette expression qu'afin de souligner d'une part l'existence dans leurs expériences d'une densité limite $\phi(\infty, \Gamma)$, et d'autre part l'extrême lenteur du processus de tassement, avec une convergence logarithmique.

Depuis lors, d'autres expériences ont été réalisées et démontrent essentiellement que le tassement, aussi universel soit-il, reste lié dans ses détails à la forme précise de l'excitation et de l'empilement. Philippe *et al.* [67] ont reproduit des mesures similaires sur un empilement de plus grande largeur devant la taille des grains, afin de réduire d'éventuels effets de bord. En revanche, un mouvement de convection apparaît aux temps longs et contrôle probablement la densité finale de l'empilement. Nicolas *et al.* [68] perturbèrent l'empilement en le soumettant à un cisaillement horizontal oscillant. Ce mode d'excitation provoque quant à lui la cristallisation des grains [69], empêchant alors la saturation de la densité sur leur temps d'expérience. Notons que des expériences réalisées avec des empilements

de billes de verres saturés d'huiles silicones de différentes viscosités [70] fournissent également des comportements qualitativement similaires aux expériences du groupe de Chicago.

b. Modèles de compaction

Les résultats expérimentaux sur la compaction ont rapidement suscité un vif intérêt au niveau théorique, probablement du fait des analogies existantes entre compaction et relaxation vitreuse [71,72]. La principale notion émergente fut celle de volume libre : pour que le système se tasse, il est nécessaire qu'une ouverture qui ait au moins la taille d'un grain se crée dans l'empilement [73–75]. Nous éviterons une présentation détaillée de ces modèles, qui sortent largement du cadre de notre étude, mais notons toutefois que la nature des interactions, ainsi que la répartition des forces entre grains n'y joue aucun rôle.

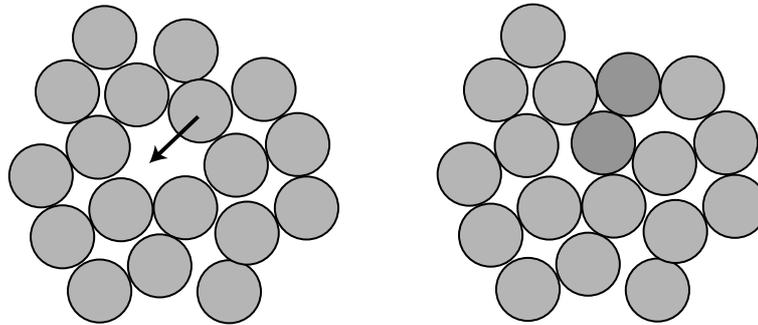


FIG. 6.6 – Glissement de grain suite à l'ouverture d'un pore

6.3 Charge quasistatique et micro-plasticité

Les expériences de compaction traduisent l'évolution d'une colonne sous des impulsions de forte amplitude. Même si la densité n'évolue que lentement, la répartition des forces dans l'empilement est radicalement affectée par la réorganisation des grains. Le fait de communiquer de plus subtiles perturbations au système induit un comportement de nature différente, dans lequel ce n'est plus la structure et sa relaxation à l'échelle des grains qui sont prépondérantes, mais la répartition des forces au niveau des contacts et leur stabilité.

a. Charge quasistatique

Si l'on déforme lentement un matériau granulaire, par exemple en le cisillant (figure 6.7), on provoque aux temps courts une alternance de charges élastiques, suivies de brusques chutes de la contrainte [76–79]. Ce processus de *stick-slip*

possède un temps caractéristique correspondant à un déplacement des parois de l'ordre d'une infime fraction de la taille des grains.

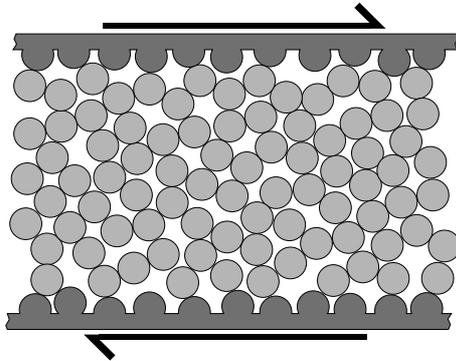


FIG. 6.7 – Cisaillement d'un empilement de grains

Le processus physique à l'œuvre dans ces expériences se sépare principalement en deux phases. La première correspond à la charge élastique au niveau des contacts entre grains. Ceux-ci sont alors de plus en plus déformés et accumulent de l'énergie. L'énergie en question n'est plus alors une énergie de structure macroscopique telle que nous l'avions précédemment définie (formule 6.3), mais correspond à celle du réseau de forces dans l'empilement. Lorsque les contraintes au niveau d'un grain atteignent le seuil de glissement (figure 6.8), le grain se déplace. Du fait de la rigidité des grains, un infime déplacement engendre alors une variation significative du réseau de contrainte et de l'énergie associée.

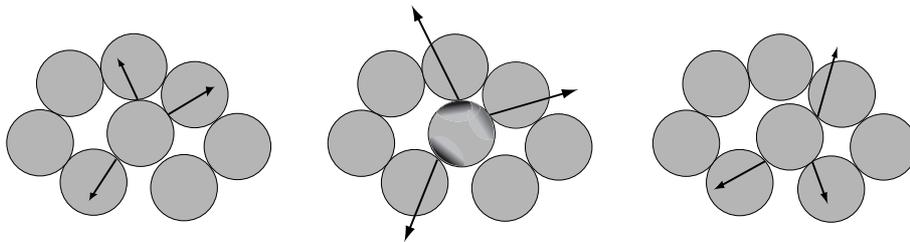


FIG. 6.8 – Micro-glissement de grain

Ce comportement a également été illustré dans le cadre de la déstabilisation des pentes granulaires sous l'effet de la gravité [80]. En modifiant lentement l'orientation du tas par rapport à la gravité, Staron *et al.* montrent que, dès que l'on incline un empilement, et bien avant le déclenchement d'une avalanche, on engendre des micro-réarrangements correspondant à de petits déplacements de quelques grains. Cette forme de plasticité, que nous nommerons *micro-plasticité*, permet, par une adaptation très fine de la structure, la relaxation ou l'adaptation

du réseau de forces aux contraintes imposées.

b. Localisation et avalanches

Nous ne pouvons aborder les problèmes de charges lentes sans mentionner les effets collectifs catastrophiques qu'elles peuvent occasionner. Dans le cas de l'inclinaison lente d'un tas à surface libre, la structure ne peut s'équilibrer localement que pour de faibles angles. Au-delà d'un angle limite, la densité des micro-réarrangements devient trop importante et des mouvements collectifs conduisant à une avalanche apparaissent [56, 80, 81].

Il existe également en géométrie confinée quelques effets remarquables. Les tests triaxiaux permettent de mesurer la réponse mécanique d'un matériau sous un écart lentement croissant des contraintes normales (figure 6.9). Une carotte cylindrique est placée sous une pression radiale contrôlée (P_0), tandis que deux pistons imposent aux extrémités de l'échantillon une contrainte normale (P_1) de plus en plus importante. Quelle que soit la densité initiale de l'empilement, il se forme une bande oblique de cisaillement, dont l'épaisseur est contrôlée par la taille des grains, et dans laquelle se concentre la plasticité [55]. Des effets analogues sont également obtenus sous cisaillement quasistatique en cellule de Couette [17, 82].

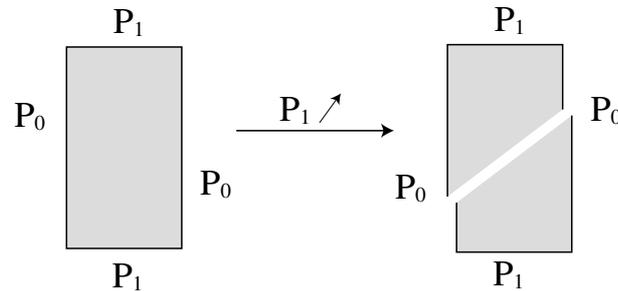


FIG. 6.9 – Test triaxial

La compréhension des mécanismes de déstabilisation mobilise à l'heure actuelle de nombreux efforts de recherche, tant pour les aspects liés au déclenchement d'avalanche (dont l'intérêt n'est pas à souligner) qu'au niveau de la modélisation mécanique des milieux divisés.

c. Sonder le réseau de forces

Différentes techniques expérimentales permettent de sonder les fluctuations des forces dans un empilement -par photo-élasticité [16, 83–85], par mesure directe sur les bords [86], etc.-, les plus fines étant à l'heure actuelle des mesures acoustiques. La propagation du son dans un matériau granulaire est très sensible à la répartition des forces en son sein. En effet, la variation des contraintes entre

grains, en modifiant l'état de déformation des contacts, altère rapidement transmission de l'onde acoustique dans le milieu [87]. La comparaison des codas d'une onde acoustique traversant un empilement avant et après une légère perturbation fournit alors une très bonne indication sur la redistribution des forces [88]. Liu *et al.* [89,90] montrèrent notamment qu'une faible dilatation d'un grain produisaient de larges effets sur la répartition des forces.

6.4 Objectifs de notre travail

a. Idée générale

Les résultats précédents suggèrent une description des matériaux granulaires comme un système à deux échelles de tailles : d'une part celle des grains et de la géométrie de l'empilement, d'autre part celle des contacts et des forces. L'analyse du réseau de forces montre combien il est difficile de passer de la structure macroscopique aux forces entre grains.

Les expériences de compaction décrivent le tassement d'un empilement comme un processus de relaxation de la densité. Dans ces expériences, les accélérations communiquées sont en général plus importantes que la gravité, si bien que d'une impulsion à l'autre tous les contacts sont brisés et se reforment aléatoirement. Le réseau de forces est donc totalement renouvelé. Inversement, les études expérimentales et numériques d'un empilement faiblement perturbé mécaniquement démontrent que la dynamique est contrôlée par le réseau de forces, dont les zones les plus fragiles se restructurent peu à peu, sans nécessairement endommager l'édifice complet. Toutefois, lorsque la charge devient importante, les effets collectifs (avalanches ou bandes de cisaillement) sont inévitables.

En substituant la charge quasistatique par une perturbation mécanique de très faible amplitude s'apparentant davantage à un bruit de contrainte, nous comptons provoquer la rupture de quelques contacts isolés sans pour autant aboutir à terme à une déstabilisation massive de l'empilement. La réponse du matériau à ces vibrations devrait alors permettre de caractériser la dynamique temporelle du réseau de force. De quoi dépend-elle ? Est-elle stationnaire ? Ce sont autant de questions auxquelles nous essaierons de répondre.

b. Principe de l'expérience

L'expérience que nous présenterons par la suite s'articule autour de trois étapes principales :

- *La construction d'un empilement de grains à une densité donnée.* Cette étape correspond à la préparation du système initial. Nous tâcherons d'établir un protocole reproductible.
- *L'excitation de cet empilement par un bruit de faible amplitude.* Ce bruit apportera l'énergie nécessaire à provoquer la rupture des contacts.

- *La mesure des déplacements de grains* occasionnés par des ruptures de contacts, a priori de faible taille par rapport à celle des grains.

La mesure des déplacements de grains sur des petites tailles sera effectuée au moyen d'une technique de diffusion multiple de la lumière (Diffusive Wave Spectroscopy). Le prochain chapitre décrira cette technique. Par la suite, nous présenterons l'ensemble du dispositif expérimental réalisé puis les résultats qu'il a été possible d'obtenir.

Chapitre 7

Diffusion multiple de la lumière

Les techniques de diffusion de lumière permettent de sonder en volume un matériau. Dans la limite de la diffusion simple, il est possible d'en tirer de précieuses informations sur l'arrangement spatial des objets qui le constituent (facteur de structure), permettant par exemple la détermination des structures des cristaux. Des techniques plus récentes (DLS - Dynamic Light Scattering [91]) rendent également possibles des mesures dynamiques à partir de l'analyse des fluctuations temporelles de l'intensité diffractée. De nombreuses grandeurs thermodynamiques peuvent alors être extraites sous une hypothèse d'ergodicité de la dynamique du milieu sondé.

La diffusion simple de lumière s'applique aux matériaux essentiellement transparents aux longueurs d'onde lumineuse utilisées; l'analyse suppose au plus un seul événement de diffusion pour chaque photon. Dans le cas contraire, où la lumière incidente subit plusieurs événements diffusifs, l'étude devient a priori beaucoup plus complexe. Cependant, dans la limite d'un grand nombre de collisions entre les photons et le matériau avant la sortie de l'échantillon, il redevient possible d'interpréter simplement les fluctuations temporelles du signal lumineux et d'en tirer des informations sur le comportement dynamique moyen de l'échantillon [92, 93]. Cette méthode d'analyse se nomme *Diffusion Multiple de la Lumière* (Diffusing Wave Spectroscopy). Ce chapitre décrira cette technique en s'attachant à en extraire les concepts essentiels. Le travail s'appuiera en grande part sur quelques articles de revue détaillés [94–96].

Sommaire

7.1	Modèle du photon diffusif	135
a.	Transport de la lumière	135
i)	Equation de diffusion de la lumière	136
ii)	Conditions limites	136
iii)	Chemin parcouru par la lumière	136
iv)	Validité du modèle diffusif	137
b.	Coefficient de transmission	137
i)	Coefficient de partage	138
ii)	Absorption	138
c.	Interférences	138
i)	Speckle	138
ii)	Distribution d'intensité	139
7.2	Analyse de la dynamique	140
a.	Fonctions de corrélation	140
i)	Fonction de corrélation de l'intensité	140
ii)	Calcul des moyennes	141
iii)	Détermination du déphasage	142
b.	Interprétation de la décorrélation	143
i)	Déplacement diffusif	143
ii)	Restructuration locale	144
iii)	Une interprétation difficile	146

7.1 Modèle du photon diffusif

L'analyse de la lumière diffusée par les milieux turbides repose sur l'hypothèse que la lumière subit un grand nombre de collisions avec les diffuseurs lors de sa traversée du milieu. Il est alors possible de représenter le trajet de la lumière par une marche aléatoire et d'utiliser des approches statistiques pour caractériser d'une part les propriétés de transmission et de retro-diffusion, et d'autre part la dynamique de décorrélation du signal lumineux.

a. Transport de la lumière

Dans un premier temps, nous allons nous attacher à décrire le transport de la lumière dans un milieu turbide. Les longueurs qui caractérisent la marche aléatoire de la lumière dans le milieu sont (figure 7.1) :

- la distance l_s parcourue par la lumière entre deux événements de diffusion,
- le libre parcours moyen d'un photon l^* , distance au delà de laquelle toute corrélation angulaire est perdue.
- la géométrie de l'échantillon, représentée par la longueur L .

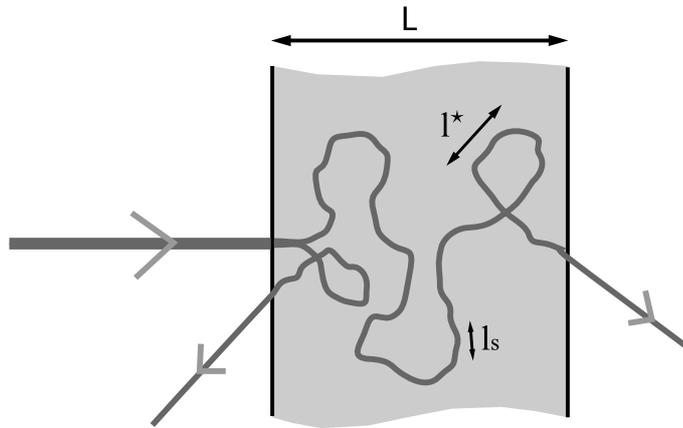


FIG. 7.1 – Trajet d'un photon dans un milieu turbide

Le rapport entre l^* et l_s correspond au nombre d'événements de diffusion nécessaires pour perdre toute corrélation angulaire dans la trajectoire du photon. Ces deux grandeurs sont reliées par la distribution des angles θ_i de diffusion (figure 7.2).

$$\frac{l_s}{l^*} = \langle 1 - \cos(\theta_i) \rangle = 2 \langle \sin^2(\theta_i/2) \rangle \quad (7.1)$$

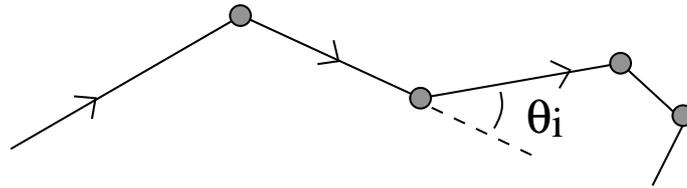


FIG. 7.2 – Trajet d'un photon dans un milieu turbide

i) Equation de diffusion de la lumière

Aux échelles de taille supérieures à l^* , on définit un coefficient de diffusion des photons $D = cl^*/3$, où c est la célérité de la lumière dans le milieu. Le transport de la lumière est alors décrit par une équation de diffusion :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \nabla^2 U, \quad (7.2)$$

où U est la densité de photons (ou l'énergie) par unité de volume. Notons qu'il s'agit d'une représentation scalaire de la lumière. La polarisation du faisceau incident se trouve rapidement perdue des suites des nombreux événements de diffusion.

ii) Conditions limites

Les conditions limites à imposer pour l'équation de diffusion dépendent de la façon dont on éclaire le milieu, de sa géométrie, ainsi que de la réflexion aux parois, etc... L'hypothèse la plus simple consiste à dire que lorsqu'un photon atteint une des parois, il s'échappe (figure 7.3).

L'apport d'énergie, ou de photons, dans le matériau se fait en éclairant ce dernier à l'aide d'un laser. L'aspect directionnel du faisceau s'articule mal avec un modèle diffusif, dans lequel il n'existe aucune corrélation d'orientation, la seule variable étant une concentration locale d'énergie. Lorsque les photons pénètrent dans l'échantillon, ils ne gardent leur orientation préférentielle que sur une distance comparable à l^* , notée z sur la figure 7.3 [94]. L'apport de lumière dans le système peut être simplement modélisé par un point source isotrope situé à une profondeur z derrière le point incident du faisceau.

iii) Chemin parcouru par la lumière

Durant la traversée de l'échantillon, il y a en moyenne $N = (L/l^*)^2$ collisions. La distance parcourue par un photon après N collisions étant de l'ordre de $\sqrt{N} \cdot l^*$, la longueur typique du chemin d'un photon traversant le milieu est :

$$\bar{s} = \left(\frac{L}{l^*}\right)^2 \cdot l^* = \frac{L^2}{l^*} \quad (7.3)$$

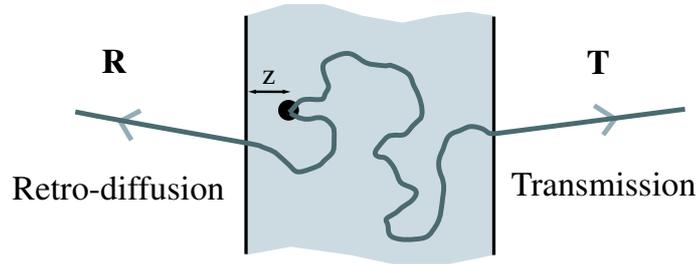


FIG. 7.3 – Diffusion de la lumière dans un matériau turbide. Les photons proviennent d'un faisceau laser (non-représenté) pénétrant l'échantillon par la gauche. Au-delà d'une distance z , le nombre d'événements diffusifs est suffisant pour que soient perdues les corrélations angulaires. L'apport d'énergie peut donc être modélisé par une source isotrope de photons à une profondeur z (cercle noir).

iv) Validité du modèle diffusif

Puisque le modèle du photon diffusif repose sur l'hypothèse d'une marche aléatoire de la lumière entre son entrée dans l'échantillon et sa sortie, il faut que la taille du milieu traversé L soit suffisamment grande pour qu'il y ait beaucoup de collisions. Plus quantitativement, ce critère impose que le trajet du photon soit grand devant l^* . Compte tenu du paragraphe précédent, cela impose la condition :

$$\bar{s} \gg l^* \iff \frac{L}{l^*} \gg 1 \quad (7.4)$$

b. Coefficient de transmission

Le modèle du photon diffusif permet également d'estimer le coefficient de transmission de la lumière d'un milieu turbide. La résolution des équations de diffusion pour la lumière, prenant en compte la longueur d'absorption l_a du milieu, fournit l'expression suivante [94, 97] :

$$T = \frac{\frac{5l^*}{3L} \cdot \beta}{\left(1 + \frac{4l^*}{3L}\right) \cdot \sinh(\beta)} \text{ avec } \beta = \sqrt{\frac{3L^2}{l^*l_a}} \quad (7.5)$$

Cette expression, bien qu'a priori complexe dans sa formulation générale, peut-être interprétée à partir d'idées relativement simples dans la limite $L \gg l^*$. Le coefficient de transmission s'écrit alors :

$$T \propto \frac{l^*}{L} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{s}}{2l_a}\right) \quad (7.6)$$

i) Coefficient de partage

Oublions pour l'instant les complications liées à l'absorption du milieu. Il reste, dans le cas $L \gg l^*$, la relation suivante :

$$T \propto \frac{l^*}{L} \quad (7.7)$$

Comment comprendre cette relation ? Comme nous l'avons expliqué précédemment, tout se passe comme si l'on avait une source isotrope de photons dans le milieu à une profondeur $z \propto l^*$. Dans un cas simple à une dimension et sans réflexion aux parois, le flux de lumière transmise J_t est $J_t = D \cdot I_0 / (L - z)$, où I_0 est la concentration de photons au point source. Inversement, le flux retro-diffusé vaut $J_r = D \cdot I_0 / z$. Le coefficient de transmission est alors aisément dérivable :

$$T = \frac{J_t}{J_t + J_r} = \frac{z}{L} \propto \frac{l^*}{L} \quad (7.8)$$

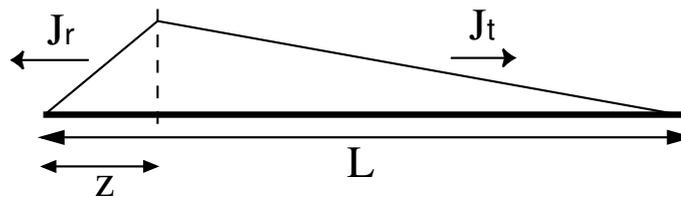


FIG. 7.4 – Modèle unidimensionnel de diffusion des photons

ii) Absorption

Le terme exponentiel d'absorption (équation 7.6) est lui-aussi très simple. Il correspond à un terme de décroissance exponentielle standard, mais à la place de l'épaisseur de l'échantillon, on retrouve la longueur moyenne du trajet parcouru par un photon.

c. Interférences

La principale différence entre le transport de la lumière (ou d'ondes en général) et le transport de matière ou de chaleur est la possibilité de voir interférer les différents rayons si la longueur de cohérence de la source lumineuse est grande devant la longueur moyenne \bar{s} des rayons lumineux.

i) Speckle

Lorsque l'on éclaire un matériaux diffusant fortement la lumière et dont la structure est figée (par exemple un verre dépoli) avec un laser, on obtient une

figure d'interférence, dite figure de *speckle*, extrêmement complexe, totalement désordonnée, constituée de petits spots lumineux dispersés dans toutes les directions. La figure 7.5 décrit bien mieux que le texte l'image observée.

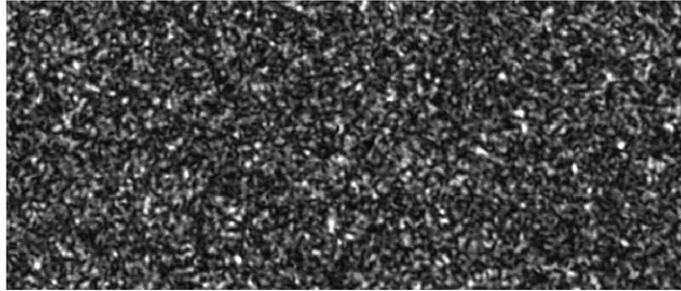


FIG. 7.5 – Figure de speckle

L'intensité mesurée en chaque point de la figure de speckle correspond à l'interférence de tous les différents chemins optiques allant jusqu'au capteur et ayant traversé le milieu. L'amplitude complexe du champ électrique reçu en un point peut donc s'écrire :

$$\underline{E} = \sum_p E_p e^{i\phi_p} \quad (7.9)$$

où la somme porte sur les différents chemins. E_p dépend essentiellement de la longueur du chemin s_p , chaque diffuseur réduisant l'amplitude du champ en éclatant le front d'onde. ϕ_p est la phase du rayon à son arrivée sur le capteur, et fluctue très rapidement avec la longueur du chemin. La distribution des tailles de chemins $P(s)$ étant beaucoup plus large que la longueur d'onde du laser λ , les différentes phases ϕ_p se retrouvent distribuées uniformément sur $[-\pi; \pi]$ et ne sont pas corrélées avec les valeurs de E_p .

Nous nous intéresserons exclusivement dans la suite aux chemins traversant l'échantillon. La distribution de leurs tailles est une fonction relativement piquée autour de \bar{s} ; cela signifie que l'essentiel des trajets optiques contribuant à l'intensité mesurée possèdent une longueur proche de $\bar{s} = L^2/l^*$. Afin de simplifier la suite des calculs, nous supposons que tous les chemins ont pour longueur \bar{s} . Cette approximation ne retirera que peu de chose à la généralité des résultats. La relation précédente peut alors être écrite :

$$\underline{E} = E_{\bar{s}} \cdot \sum_p e^{i\phi_p} \quad (7.10)$$

ii) Distribution d'intensité

Nous allons à présent décrire la distribution d'intensité des différentes taches de speckle. Pour cela, il nous faut évaluer la probabilité d'avoir en un point un

champ d'amplitude complexe \underline{E} . La relation 7.10 permet de décrire la statistique du champ par celle d'une marche aléatoire à deux dimensions (figure 7.6). La distribution des valeurs de \underline{E} peut alors s'écrire :

$$P(\underline{E}) \sim \exp\left(-\frac{|\underline{E}|^2}{\langle |\underline{E}|^2 \rangle}\right) \quad (7.11)$$

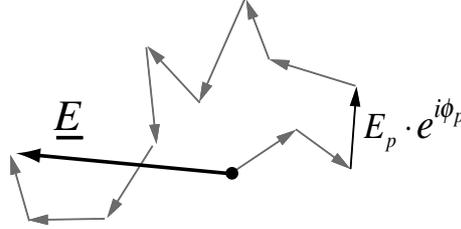


FIG. 7.6 – Champ électrique \underline{E} reçu en un point du speckle et sa décomposition en une somme sur les différents chemins.

On peut en dériver la distribution des intensités $P(I)$:

$$P(I) = \int_{|\underline{E}|^2=I} P(\underline{E}) \frac{\partial(|\underline{E}|^2)}{\partial I} = \frac{1}{\langle I \rangle} \cdot \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (7.12)$$

Cette relation n'est expérimentalement vérifiée que si le détecteur est ponctuel. Si l'extension spatiale du détecteur est plus grande qu'une tache de speckle, l'effet de moyenne spatiale provoque une chute de contraste.

7.2 Analyse de la dynamique

Lorsque les diffuseurs se déplacent au sein du matériau éclairé, les différents rayons sont déphasés et cela modifie l'intensité lumineuse mesurée en chaque point du speckle. Cette partie décrira dans quelle mesure il est possible d'exploiter les fluctuations d'intensité obtenues sur un capteur afin de sonder la dynamique des déplacements des diffuseurs.

a. Fonctions de corrélation

i) Fonction de corrélation de l'intensité

Le champ électrique $\underline{E}(t)$ reçu sur un détecteur correspond à l'interférence d'une famille de chemins $\{p\}$. Les déplacements des diffuseurs entre t et $t + \tau$ provoquent un déphasage, que nous noterons $\Delta\phi_p(t, \tau)$, de chaque chemin p .

$$\underline{E}(t) = \sum_p \underline{E}_s \cdot e^{i\phi_p(t)} \mapsto \underline{E}(t + \tau) = \sum_p \underline{E}_s \cdot e^{i(\phi_p(t) + \Delta\phi_p(t, \tau))} \quad (7.13)$$

Le terme $\Delta\phi_p(t, \tau)$ contient l'information sur la dynamique. C'est donc lui qu'il faut extraire du signal optique, et cela ne peut se faire que par une approche statistique. On calcule pour cela la fonction d'auto-corrélation de l'intensité.

$$g_2(t, \tau) = \frac{\langle I(t) \cdot I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \quad (7.14)$$

Les valeurs moyennes présentes dans l'équation 7.14 doivent lever l'arbitraire de la famille choisie de chemins $\{p\}$. Si nous éclairions une zone différente de l'échantillon, ou si nous placions le détecteur ailleurs, nous obtiendrions d'autres valeurs pour les $\{\phi_p(t)\}$ et $\{\Delta\phi_p(t, \tau)\}$. Les moyennes doivent alors porter sur toutes les réalisations possibles de $\{\phi_p(t)\}$ et $\{\Delta\phi_p(t, \tau)\}$ ¹.

ii) Calcul des moyennes

Pour les systèmes dont la dynamique est stationnaire et dont la structure se renouvelle rapidement à l'échelle de la longueur du laser -c'est en particulier le cas des systèmes ergodiques-, il est possible d'effectuer cette moyenne sur le temps [91]. Un récepteur fixe recevra alors un échantillon significatif des $\{\phi_p(t)\}$ et $\{\Delta\phi_p(t, \tau)\}$ sur une durée de l'ordre de 10 fois le temps de corrélation de l'intensité. Un détecteur tel qu'un photo-multiplicateur permet d'atteindre par cette méthode des résolutions en temps de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes.

La technique précédente, aussi usitée soit-elle, suppose une décorrélation totale du signal sur des temps courts, ainsi qu'une dynamique stationnaire durant l'intervalle de temps nécessaire à la mesure. De nombreux systèmes n'offrent pas ces qualités. Mentionnons plus particulièrement les suspensions et émulsions concentrées [98–100], qui font actuellement l'objet de nombreux travaux, en particulier concernant leur dynamique de vieillissement [43, 101–103].

Plusieurs techniques permettent de contourner ces difficultés. Une première consiste à placer, entre le capteur et l'échantillon à sonder, un système dont la dynamique est ergodique ; connaissant la fonction de corrélation du système ergodique seul, nous pouvons alors remonter à celle de notre échantillon. Cette technique, dite de la *deuxième cellule* [104], a le mérite de conserver un unique récepteur, en général un photo-multiplicateur, dont la réponse peut être très rapide.

¹De nombreux auteurs attachent de l'importance à ce que les moyennes soient des **moyennes d'ensemble** du milieu diffusant. Cela provient essentiellement du fait que, pour les systèmes ergodiques, la détermination du facteur de structure dynamique permet de remonter à des grandeurs thermodynamiques. La vision que nous en offrons ici est simplement pragmatique. L'évaluation du déplacement des diffuseurs nécessite la connaissance du déphasage moyen des chemins. Celui-ci ne peut être déterminé précisément que si l'on dispose d'une bonne statistique sur les valeurs possibles de l'intensité en un point et sur les fluctuations moyennes autour de chacune d'elles.

Une seconde méthode, dite *multi-speckle* [105,106], consiste à utiliser un grand nombre de photo-récepteurs qui analysent simultanément l'intensité en différentes taches de speckle. Cette technique est de plus en plus utilisée actuellement du fait de la démocratisation des cameras CCD, offrant une matrice complète de photo-détecteurs (typiquement un million). L'inconvénient majeur réside alors dans la lenteur de l'acquisition, restreignant son utilisation à des temps caractéristiques supérieurs à quelques millisecondes. Notons également que cette méthode de calcul offre l'énorme avantage de permettre la mesure d'authentiques fonctions à deux temps ; il suffit de prendre une image à t et à $t + \tau$ pour calculer la valeur $g_2(t, \tau)$ de la fonction de corrélation.

iii) Détermination du déphasage

Corrélation du champ électrique

La fonction de corrélation de l'intensité doit à présent être reliée au déphasage moyen des chemins. Nous verrons que celui-ci s'exprime de façon simple à partir de la fonction d'auto-corrélation du champs électrique $g_1(t, \tau)$, définie par :

$$g_1(t, \tau) = \frac{\langle \underline{E}(t) \cdot \underline{E}^*(t + \tau) \rangle}{\langle |\underline{E}(t)|^2 \rangle} \quad (7.15)$$

Relation de Siegert

La relation de Siegert permet de lier les fonctions de corrélation de l'intensité et du champ électrique [91]. Le coefficient β est un coefficient d'instrument, il dépend de la résolution en temps et en espace du capteur. Il est compris entre 0 et 1, limite qu'il atteint lorsque le détecteur est plus petit qu'une tâche de speckle et plus rapide que tous les temps caractéristiques de la dynamique.

$$g_2(t, \tau) = 1 + \beta \cdot |g_1(t, \tau)|^2 \quad (7.16)$$

Lien entre g_1 et $\Delta\phi_p$

En décomposant le champ reçu en somme sur les chemins (relation 7.10), nous pouvons réécrire la relation 7.15 :

$$g_1(t, \tau) = \frac{E_s^2}{\langle I \rangle} \left\langle \sum_p \sum_{p'} e^{i(\phi_p(t) - \phi_{p'}(t) - \Delta\phi_{p'}(t, \tau))} \right\rangle \quad (7.17)$$

$$= \frac{E_s^2}{\langle I \rangle} \cdot \left\langle \sum_p e^{-i\Delta\phi_{p'}(t, \tau)} + \underbrace{\sum_p \sum_{p' \neq p} e^{i(\phi_p(t) - \phi_{p'}(t) - \Delta\phi_{p'}(t, \tau))}}_{=0} \right\rangle \quad (7.18)$$

Du fait de la répartition totalement aléatoire des phases sur les différents chemins, seuls contribuent dans la moyenne les termes tels que $p = p'$. En remarquant que l'intensité moyenne correspond à la somme des énergies $E_{\bar{s}}^2$ apportées par chaque chemin, l'expression ci-dessus prend alors une forme très simple :

$$g_1(\tau) = \left\langle e^{-i\Delta\phi_p(t,\tau)} \right\rangle \quad (7.19)$$

Le déphasage moyen contient une information sur la dynamique microscopique en volume du matériau, qu'il faut à présent extraire.

b. Interprétation de la décorrélation

La modélisation du déplacement des diffuseurs est nécessaire si l'on souhaite relier quantitativement les mesures de corrélation de l'intensité à une dynamique microscopique. Nous présentons ici deux cas limites communément utilisés.

i) Déplacement diffusif

Le premier cas de figure correspond à des diffuseurs en suspension, sans corrélation spatiale dans leur champ de déplacement. Il faut alors relier le déphasage moyen $\phi_p(t+\tau) - \phi_p(t)$ d'un chemin quelconque p , de longueur \bar{s} , au déplacement $\vec{r}_i(t+\tau) - \vec{r}_i(t)$ des diffuseurs qu'il rencontre. Le vecteur d'onde de la lumière entre les diffuseurs i et $i+1$ est noté \vec{k}_i .

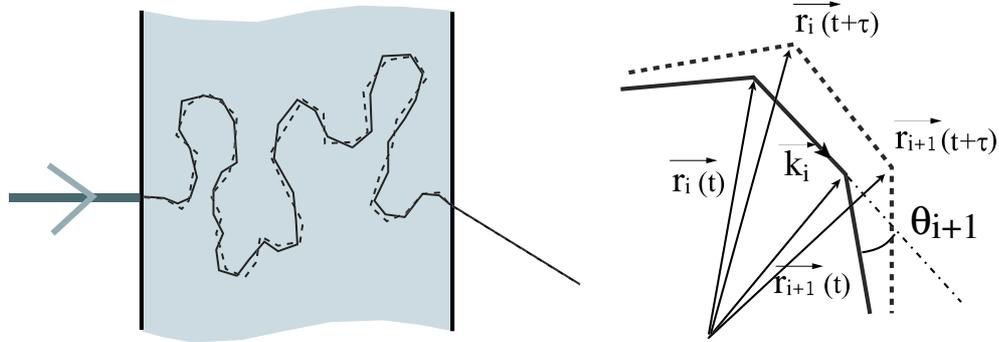


FIG. 7.7 – Evolution d'un chemin lumineux entre les instants t (trait plein) et $t + \tau$ (pointillés).

$$\begin{aligned} \phi_p(t+\tau) - \phi_p(t) &= \sum_i \vec{k}_i(t+\tau) \cdot (\vec{r}_i(t+\tau) - \vec{r}_{i+1}(t+\tau)) \\ & \quad \left[- \sum_i \vec{k}_i(t) \cdot (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{i+1}(t)) \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Au premier ordre, le vecteur d'onde \vec{k}_i n'est pas affecté par le mouvement des diffuseurs. L'expression précédente devient alors :

$$\begin{aligned}\phi_p(t + \tau) - \phi_p(t) &\approx \sum_i (\vec{k}_i(t) - \vec{k}_{i-1}(t)) \cdot (\vec{r}_i(t + \tau) - \vec{r}_i(t)) \\ &\approx \sum_i 2k_0 \sin(\theta_i/2) \cdot (\vec{r}_i(t + \tau) - \vec{r}_i(t))\end{aligned}\quad (7.21)$$

où θ_i est l'angle de diffusion sur le $i^{\text{ème}}$ diffuseur et k_0 le module du vecteur d'onde de la lumière. Les déphasages des différents chemins deviennent, dans l'hypothèse des déplacements décorrélés, des variables gaussiennes aléatoires. L'équation 7.19 peut alors être approximée par :

$$g_1(t, \tau) = e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta\phi_p(t, \tau))^2 \rangle} \quad (7.22)$$

$$\text{avec : } \langle \Delta\phi_p^2(t, t + \tau) \rangle = \frac{1}{3} N_s \langle [2k_0 \sin(\theta_i/2)]^2 \rangle \langle \delta r^2(t, t + \tau) \rangle \quad (7.23)$$

où N_s correspond au nombre d'événements de diffusion sur le trajet, et vaut approximativement \bar{s}/l_s . La moyenne statistique sur les angles de diffraction θ_i a déjà été calculée en début de chapitre. A partir de la relation 7.1, nous pouvons simplifier l'écriture ci-dessus.

$$\langle \Delta\phi_p^2(t, t + \tau) \rangle = \frac{1}{3} \frac{s}{l_s} 2k_0^2 \frac{l}{l^*} \langle \delta r^2(t, t + \tau) \rangle = \frac{2}{3} k_0^2 \frac{s}{l^*} \langle \delta r^2(t, t + \tau) \rangle \quad (7.24)$$

Finalement, la fonction de corrélation s'écrit simplement :

$$g_1(t, \tau) = e^{-\frac{1}{3} k_0^2 \frac{\bar{s}}{l^*} \langle \delta r^2(t, t + \tau) \rangle} = e^{-\frac{1}{3} k_0^2 \left(\frac{l}{l^*}\right)^2 \langle \delta r^2(t, t + \tau) \rangle} \quad (7.25)$$

La mesure de la fonction de corrélation permet donc, dans l'hypothèse de déplacements aléatoires et décorrélés des diffuseurs, la détermination du déplacement quadratique moyen $\delta r^2(t, t + \tau)$ des diffuseurs entre deux instants t et $t + \tau$. Si la dynamique suit une loi de diffusion brownienne, la fonction de corrélation est simplement exponentielle.

ii) Restructuration locale

De nombreux systèmes, comme par exemple les mousses [97, 107] et les émulsions concentrées [108], possèdent des dynamiques provenant de restructurations isolées et intermittentes. Chacun de ces événements, parce qu'il affecte la répartition spatiale des diffuseurs, introduit une décorrélation du speckle. L'approche précédemment décrite ne peut s'appliquer à de telles dynamiques. Ce paragraphe décrira le modèle proposé par Durian *et al.* [97] de la décroissance de la corrélation. Il repose sur les hypothèses suivantes :

- La restructuration locale apparaît aléatoirement dans le matériau (figure 7.8), avec un taux Γ par unité temps et de volume,
- Le volume impliqué dans cette transformation est D^3 ; le reste du système est inchangé,
- Au sein du volume D^3 , les diffuseurs se sont déplacés d’une distance caractéristique δ supérieure à la longueur d’onde de la lumière utilisée, si bien que tout chemin traversant cette zone voit sa phase totalement et aléatoirement redistribuée.

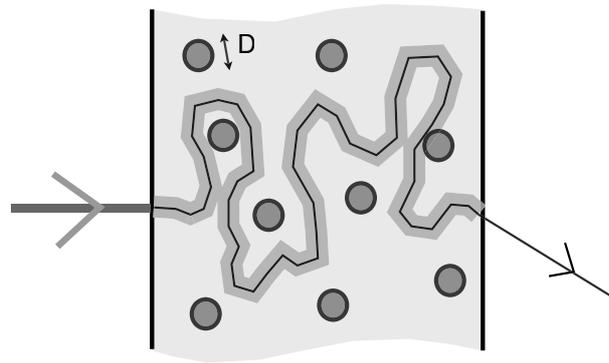


FIG. 7.8 – Représentation schématique des déplacements locaux dans le modèle de Durian. Un chemin est perturbé si un événement se produit à moins d’une distance D du chemin.

Séparons dans l’expression 7.19 les chemins perturbés par une transformation locale de ceux restés inchangés :

$$g_1(\tau) = \frac{E_{\bar{s}}^2}{\langle I \rangle} \cdot \left[\sum_{p \text{ inchangés}} e^{i \cdot 0} + \sum_{p \text{ modifiés}} \langle e^{i(\phi_p(t) - \phi_p(t+\tau))} \rangle \right] \quad (7.26)$$

La somme sur les chemins perturbés est nulle du fait de leur redistribution totalement aléatoire des phases. La fonction de corrélation se réduit alors à l’expression de la proportion P_{in} de chemins restés inchangés durant le temps τ , proportion qu’il faut à présent exprimer.

Un chemin est perturbé par une restructuration locale si celle-ci a lieu à moins d’une distance D du trajet optique en question. Cela revient à calculer la probabilité qu’à un événement de se produire quelque part dans le tube de longueur \bar{s} et de section D^2 entourant le trajet optique durant le temps τ . La fraction de chemins non perturbés s’écrit alors :

$$g_1(\tau) = P_{in}(\tau) = e^{-\Gamma \cdot \bar{s} D^2 \cdot \tau} \quad (7.27)$$

On retrouve à nouveau une décroissance de type exponentielle de la fonction de corrélation. Notons toutefois que la dynamique mesurée ne correspond plus

à un déplacement moyen des diffuseurs, mais au volume transformé au sein du matériau.

iii) Une interprétation difficile

Considérant les deux exemples de modélisation que nous venons de présenter, nous mesurons combien il peut être difficile de décrire quantitativement la dynamique d'un système uniquement à partir de mesures en DWS, si l'on ne dispose pas au préalable d'informations sur la nature des déplacements que l'on cherche à évaluer. La même forme d'une fonction de corrélation, à savoir une décroissance exponentielle, peut cacher des dynamiques internes de nature extrêmement différentes.

Chapitre 8

Dispositif expérimental

Rappelons tout d'abord les objectifs de cette expérience : nous souhaitons sonder la réponse d'un empilement granulaire à un bruit mécanique de faible amplitude. Cette perturbation est supposée provoquer la rupture de contacts fragiles au sein de la colonne, conduisant alors à de micro-déplacements de grains.

La figure de speckle obtenue en éclairant un matériau granulaire au moyen d'un laser fournit une signature interférentielle très sensible à la disposition des grains. L'analyse des fluctuations temporelles d'intensité du speckle permet de sonder, de façon non-invasive, les restructurations au sein d'un empilement. La diffusion multiple de la lumière (DWS) se présente comme un outil idéal pour l'étude en volume des déplacements de grains à des échelles de l'ordre du micron.

Nous présenterons dans ce chapitre le dispositif expérimental réalisé pour, d'une part, préparer un empilement de grains de façon reproductible, en contrôlant la densité, et d'autre part, sonder sa dynamique interne de restructuration par DWS.

Sommaire

8.1	Système utilisé	149
a.	Grains	149
b.	Préparation	149
c.	Cellule	150
8.2	Contrôle de la densité	151
a.	Mesure de la densité	151
b.	Tassement de l'empilement	152
	i) Excitation mécanique	152
	ii) Courbe de compaction	153
8.3	Mesures optiques	154
a.	Montage	154
b.	Mesure du libre parcours moyen l^*	155
c.	Calcul des fonctions de corrélation	158
d.	Dynamique en l'absence d'excitation	158
	i) Empilements lâches	158
	ii) Empilements denses	158

8.1 Système utilisé

a. Grains

Le choix de grains est souvent un problème délicat dans les expériences granulaires : naturel ou industriel, rugueux ou pas, réfléchissant ou transparent, etc... sont autant de questions auxquelles il n'est pas toujours facile a priori de répondre. Dans la cas qui nous concerne, et en vue d'une analyse par DWS, nous avons privilégié des billes sphériques de verre possédant une surface optiquement lisse. La taille des grains conditionne naturellement celle de l'empilement, et par conséquent le dispositif d'excitation mécanique de la colonne. Afin d'alléger le plus possible l'ensemble, nous nous sommes tourné vers des billes de petit diamètre.

Interactions parasites

Comme nous l'avions signalé lors du chapitre d'introduction, un empilement de grains de petite taille (inférieure à 1 mm) pose de nombreux problèmes expérimentaux. L'humidité, même faible, tend à former des ponts capillaires entre grains rendant l'empilement cohésif [56, 58]. L'électrostatique modifie également les interactions entre grains, et cela de façon non contrôlable. Ces différentes considérations nous ont conduit à utiliser un empilement granulaire saturé d'eau. Forces capillaires et interactions électrostatiques sont alors fortement écartées.

En choisissant de travailler avec des empilements saturés d'eau, nous pouvons utiliser des grains de très petite taille (quelques dizaines de microns) sans perdre l'aspect granulaire : les grains coulent, s'empilent, possèdent un angle d'avalanche, etc... Les propriétés statiques de l'empilement saturé sont similaires à celles de l'empilement sec. Par contre, le rôle du fluide incompressible lors des déplacements de grains peut être important.

b. Préparation

Les grains que nous avons utilisé pour nos expériences sont des billes sphériques de verre¹, de diamètre 45 ± 3 microns (figure 8.1). Cette fourchette de taille a été obtenue par double tamisage à sec des grains (tamis de 40 et 50 microns). Les billes sont ensuite immergées dans l'eau. Après cette étape, de nombreuses poussières se détachent des grains et restent en suspension. Ces dernières rendent impossibles des mesures propres en DWS. L'utilisation d'un bain à ultrasons permet d'accélérer le décollement des poussières et leur passage dans la solution. Les grains sont ensuite lavés à l'eau. Ces deux dernières étapes sont répétées une dizaine de fois jusqu'à l'obtention d'un surnageant totalement limpide². Notons que l'utilisation d'ultrasons permet également le détachement des poches d'air entre grains, inévitablement présentes lorsque l'on place une poudre dans de l'eau.

¹Fabricant : Polysciences, Inc., Glass Beads, 30-50 μ m, ref :[65997-17-3]

²La véritable validation sera l'observation de figures de speckle contrastées et statiques.

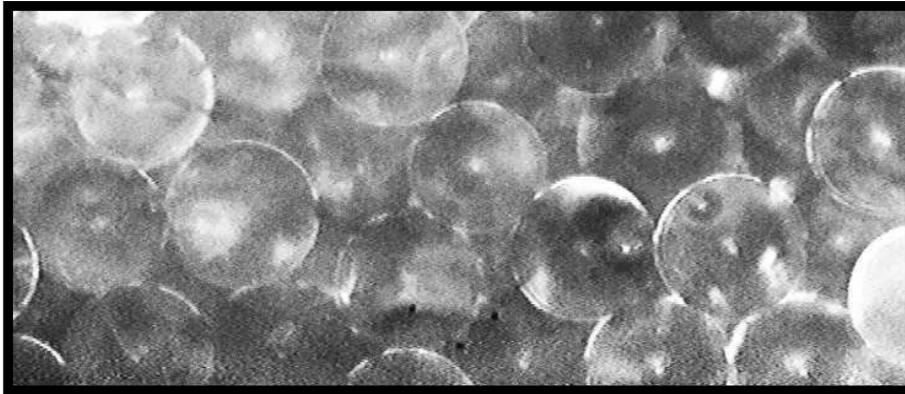


FIG. 8.1 – Empilement lâche de grain ($\varnothing 45\mu\text{m}$) - image en paroi

c. Cellule

Les billes de verre sont ensuite placées dans une cellule de spectrophométrie dont les dimensions sont (figure 8.2) 9,5mm de large, 40mm de haut, et 2mm d'épaisseur. Avec 40 diamètres de grains dans l'épaisseur, nous garantissons ainsi la réalisation d'un empilement tridimensionnel. Le dépôt des grains par sédimentation fournit un empilement relativement homogène. Nous pouvons utiliser cette dernière pour obtenir simplement un empilement reproductible : on retourne la cellule, puis on laisse à nouveau les grains se déposer.

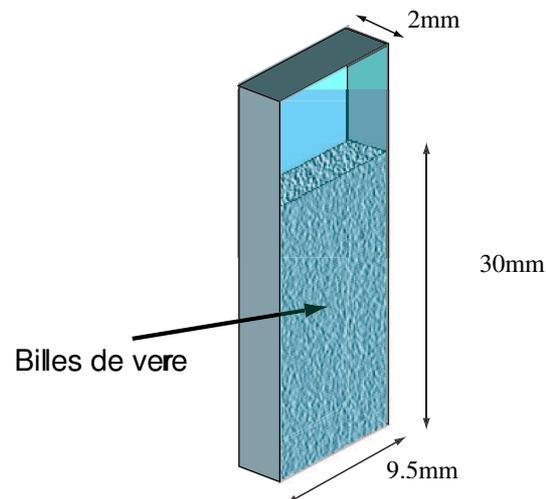


FIG. 8.2 – Schéma proportionné de la cellule contenant les grains

8.2 Contrôle de la densité

La réalisation d'un empilement par sédimentation, telle que nous venons de la décrire, ne constitue que la première phase de la préparation de l'empilement. Il nous faut à présent conduire l'empilement jusqu'à une densité donnée. Nous utiliserons pour cela le processus de compaction. En communiquant à l'empilement une vibration de forte amplitude, nous provoquons son évolution, lente, vers des états plus denses. Avant de discuter l'effet des vibrations fortes sur l'empilement, nous présenterons tout d'abord la méthode de mesure de la densité mise en place.

a. Mesure de la densité

Pour suivre l'évolution de la densité moyenne tout au long de l'expérience, nous mesurons simplement la hauteur de l'empilement. Conformément au schéma 8.3, l'échantillon est éclairé l'instant de la mesure en lumière blanche. Un verre dépoli placé entre la lampe et la cellule produit un fond lumineux diffus. Sur la face opposée, une caméra prend une image du profil de l'ensemble de la surface supérieure du tas, de telle sorte qu'au dessus des grains l'intensité reçue sature légèrement les pixels de la CCD. En seuillant l'image (figure 8.4), puis en intégrant le nombre de pixels sombres, nous pouvons mesurer la hauteur moyenne h_c du volume occupée par les grains dans le champ de la camera.

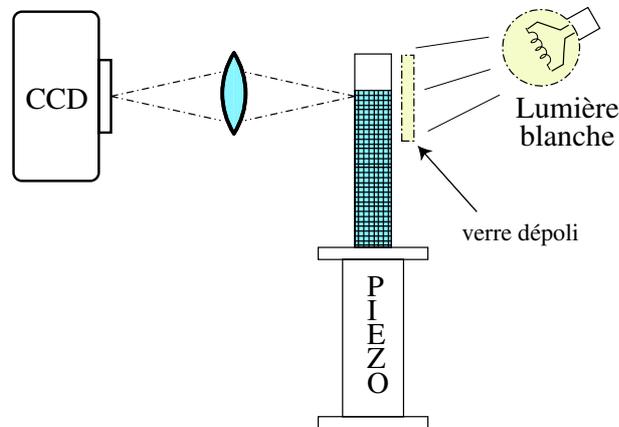


FIG. 8.3 – Schéma du dispositif en position pour la mesure de densité

La hauteur totale $h(t)$ de la colonne est égale à la somme d'un terme $h_{hc}(t)$ correspondant à la hauteur de grains en dehors du champ de la camera et de $h_c(t)$. Une boucle d'asservissement permet, en déplaçant finement la cellule dans la direction verticale, d'ajuster très précisément $h_{hc}(t)$ (à quelques microns près) de telle sorte que l'on ait toujours le même volume intégré dans le champ de la camera. Cela permet d'éviter d'une part qu'en cas de tassement important la surface ne quitte le champ de l'image, et d'autre part améliore la qualité de la mesure

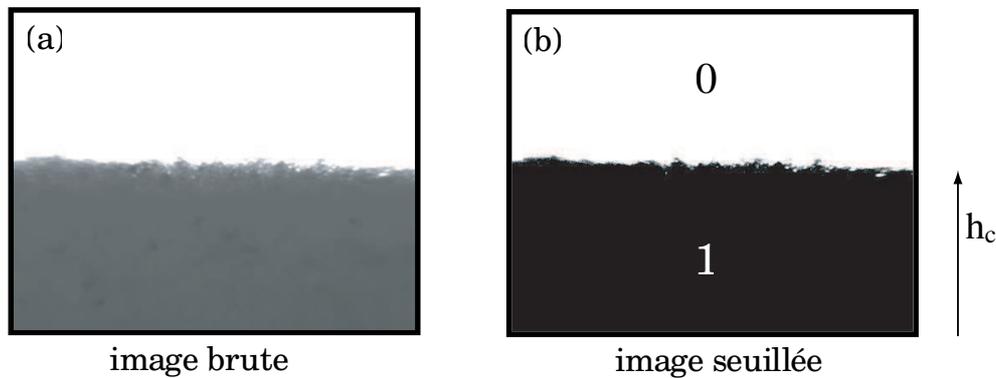


FIG. 8.4 – Traitement de l’image de la surface permettant la mesure de la hauteur moyenne h_c de l’empilement de grains dans le champ de la caméra.

en assurant que la surface des grains se trouve toujours dans les mêmes conditions d’éclairage (déterminées essentiellement par la position de cette dernière par rapport à la source diffuse et à la caméra). Ce type de mesure permet d’évaluer très finement des variations de la densité moyenne, mais par contre ne peut fournir précisément une valeur absolue à mieux de 2 %, liée à la calibration. Toutes les mesures présentées dans ce manuscrit auront été obtenues avec la même calibration, c’est à dire la même erreur systématique. Il reste donc possible de comparer entre elles les différentes expériences.

b. Tassement de l’empilement

Nous avons déjà présenté durant le chapitre d’introduction le processus de compaction. Lorsque l’on perturbe mécaniquement un empilement, sa densité tend à croître par un processus de tassement. Nous allons exploiter cet effet pour obtenir des empilements de différentes densités.

i) Excitation mécanique

Pour cela, nous envoyons à un vibreur piezo-électrique, placé sous la cellule (figure 8.3), un signal électrique carré de fréquence 1 kHz, sur une durée de 100 ms, et induisant des amplitudes de déplacement de l’ordre de 0,3 mm. Ces trains d’impulsions seront dénommés dans la suite *tapes fortes*. La figure 8.5 présente l’évolution de la densité de l’empilement en fonction du nombre de tapes fortes communiquées. Partant d’une densité faible, correspondant à l’empilement lâche engendré par sédimentation, nous voyons qu’il est possible d’obtenir, après un grand nombre d’impulsions, des systèmes dont la densité peut être jusqu’à 10 % plus élevée.

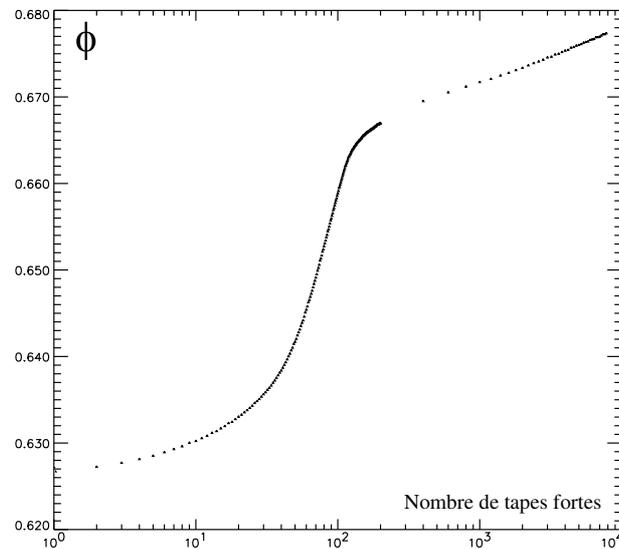


FIG. 8.5 – Evolution de la densité en fonction du nombre de tapes

ii) Courbe de compaction

Le profil de la courbe de compaction ainsi obtenue présente quelques caractéristiques remarquables. Comme nous le mentionnions au paragraphe précédent, la mesure des variations de densité est extrêmement précise. Les mesures de hauteur que nous avons effectuées nous permettent donc de conclure sur l'absence de fluctuation de la densité moyenne au cours du tassement. Ce résultat contraste fortement avec les études de Nowak *et al.* [66]. Ces derniers ont observé de larges fluctuations de la densité au cours de la compaction, qu'ils estimèrent intrinsèques à la dynamique de tassement. La compaction des empilements saturés semble se dérouler différemment. Comme l'ont suggéré Lesaffre *et al.* [70], la viscosité du fluide peut amortir les mouvements balistiques de grains lors de l'agitation. Le processus est plus doux, en ce sens que la densité ne fluctue pas, mais également plus efficace puisque la compacité atteint des valeurs élevées.

Une autre différence majeure distingue nos mesures des courbes standard de compaction : il ne semble pas exister de saturation franche de la densité aux temps longs. Bien au contraire, une cristallisation progressive s'opère dans l'échantillon. La figure 8.6 présente une image de la surface latérale de la cellule en fin d'expérience. Il y apparaît très clairement un ordre cristallin en paroi, induit par la planéité des surfaces. La dynamique de compaction aux temps longs est alors gouvernée par un processus lent de cristallisation. Un tel comportement a déjà été observé dans le cas d'une excitation par cisaillement de la colonne [68].

La conséquence à tirer de ces courbes de compactions est certainement qu'il n'existe pas d'universalité dans la forme des graphes. Ces expériences sont très sensibles à la forme de l'excitation, à la géométrie de l'échantillon, à la présence de

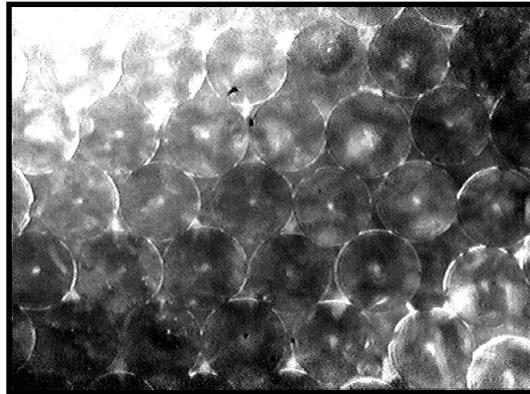


FIG. 8.6 – Image à la paroi de la cellule à $\phi = 0.68$

convection, au caractère sec ou saturé, etc... Pour ce qui nous concerne, nous nous limiterons à utiliser la compaction pour construire des empilements de différentes densités, la courbe 8.5 pouvant alors servir d'étalon.

8.3 Mesures optiques

Cette partie du chapitre décrira le montage optique réalisé en vue de sonder par DWS le déplacement des grains. Les fonctions de corrélation seront calculées par la technique multispeckle [105] (voir page 142). Celle-ci s'avère parfaitement adaptée à notre étude; en effet, un matériau granulaire sous vibration pose a priori tous les problèmes de dynamique lente et non-stationnaire. Les échelles de temps utilisées seront de l'ordre de la seconde, permettant ainsi des acquisitions d'images au moyen d'une camera numérique standard.

a. Montage

La traversée de l'échantillon par un faisceau laser peut engendrer une surchauffe locale. Afin de réduire la plus possible cet effet, nous avons utilisé un laser de très faible puissance (He-Ne 5 mW, le faisceau ayant une section d'environ 1 mm^2)³. Cela implique en particulier la réalisation d'un montage optique permettant la collecte d'un maximum de lumière au niveau du capteur CCD.

Pour cela nous faisons l'image directe de la paroi de la cellule sur une camera CCD au moyen d'un objectif standard (figure 8.7). La figure de speckle obtenue ne possède pas une intensité uniformément répartie sur l'image, le maximum de lumière étant émis au niveau de l'entrée du laser dans l'échantillon. Nous exploi-

³Le fait d'avoir placé les grains dans un solvant permet également de réduire l'impact des transferts thermiques au niveau des contacts, la conduction de la chaleur étant alors assurée en partie par le fluide interstitiel.

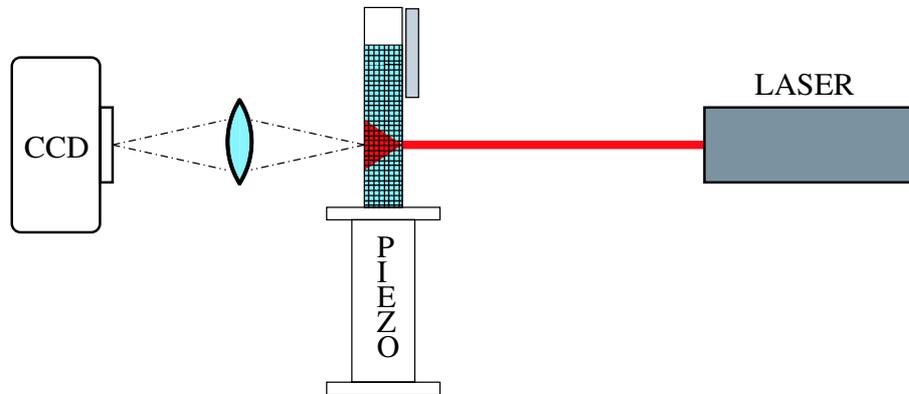


FIG. 8.7 – Schema du dispositif en position pour la mesure de dynamique

terons la partie centrale de cette image (voir figure 8.8) pour effectuer les mesures des fonctions de corrélation. Le choix de cette region permet d'assurer que tous les chemins pris en compte possèdent la même longueur moyenne⁴.

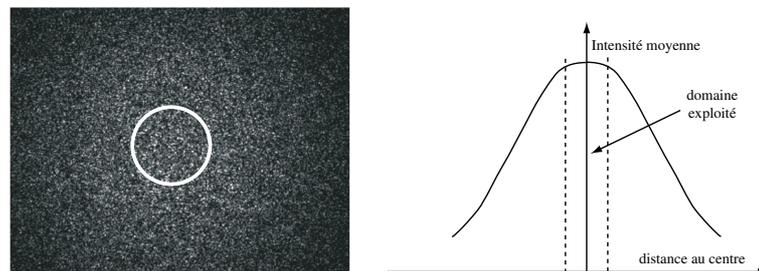


FIG. 8.8 – Image de speckle et distribution typique d'intensité sur cette dernière

b. Mesure du libre parcours moyen l^*

Avant d'exploiter les mesures des fonctions de corrélation, il faut s'assurer que l'on est bien dans un régime de diffusion multiple. Cela passe notamment par l'estimation du libre parcours moyen de la lumière l^* dans notre échantillon.

⁴Les régions plus lointaines de l'image correspondent à des chemins plus longs, puisqu'ils ont parcouru l'échantillon en biais. La réponse dynamique de ces portions de l'image est de ce fait plus rapide.

Détermination standard du libre parcours moyen l^*

Il existe plusieurs techniques expérimentales conduisant à la mesure de l^* . Sur des systèmes browniens, la comparaison directe des temps dynamiques mesurés en transmission et rétro-diffusion permet d'extraire la valeur de l^* [94]. Ce type de mesures suppose que la dynamique est homogène dans l'ensemble du système et en particulier sur les bords l'échantillon. Pareille hypothèse serait injustifiable dans le cas qui nous concerne puisque les bords de la cellule risquent fort d'affecter la structure et la dynamique locale du matériau granulaire.

Une autre technique repose sur la mesure du coefficient de transmission pour différentes épaisseurs traversées. Cette méthode ne nécessitant aucune hypothèse sur la dynamique, elle conviendrait parfaitement pour notre système. Nous avons toutefois préféré une technique hybride entre les deux précédentes, qui est beaucoup moins couteuse en grains et évite d'avoir à faire une mesure absolue de la transmission.

Méthode utilisée

La relation qui lie le coefficient de transmission à la géométrie de l'échantillon et au libre parcours moyen de la lumière en son sein ne fait intervenir ni la nature exacte du système, ni sa dynamique. Ainsi, si l'on dispose d'un système pour lequel on connaît l^* et qui possède le même coefficient de transmission que nos grains, dans la même géométrie, il est alors possible d'identifier les deux libres parcours moyens (nous négligerons l'absorption des matériaux utilisées dans les deux cas).

Le système de référence utilisé est une suspension de billes de latex de diamètre 160 nm, de concentration 50 %. Le libre parcours moyen l^* de ce système dépend de la concentration de la suspension. La relation qui les relie a été mesurée expérimentalement⁵ par comparaison des dynamiques en transmission et retro-diffusion.

Plutôt que d'estimer le vrai coefficient de transmission de l'échantillon, nous allons simplement mesurer, dans la géométrie qui est la nôtre, l'intensité moyenne reçue au centre de la figure de speckle, celle-ci étant directement proportionnelle au coefficient de transmission. Cela nous permet alors d'obtenir une courbe étalon associant pour chaque intensité lumineuse mesurée la concentration équivalente de la suspension colloïdale (figure 8.9), et par là même le libre parcours moyen correspondant.

Une fois ces différentes étapes accomplies, il ne reste plus qu'à effectuer les mêmes mesures d'intensité sur des colonnes de grains. Nous avons utilisé trois tailles de grains différentes : 45 μm , 67 μm et 85 μm . La mesure de l'intensité

⁵Ce travail a été réalisé par Deniz Gunes au cours de sa thèse au Laboratoire de Dynamique des Fluides Complexes (LDFC) à Strasbourg.

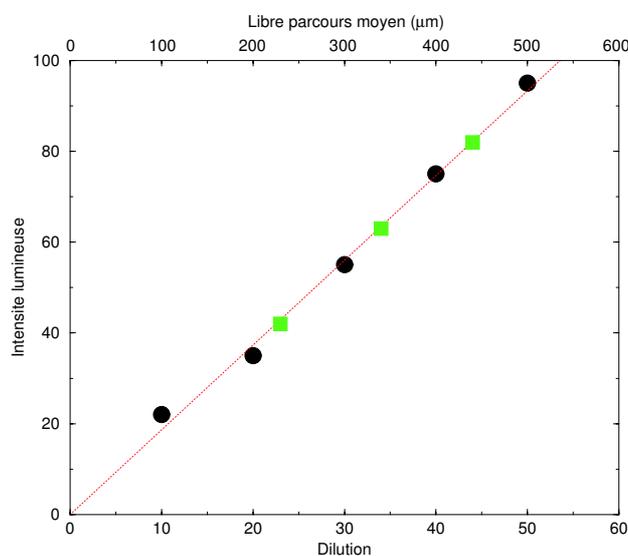


FIG. 8.9 – Intensité transmise pour les différentes dilutions de la suspension (●), et intensité mesurées pour les trois tailles de grains (■)

transmise⁶ pour ces trois échantillons permet de remonter, via le graphe 8.9 au libre parcours moyen. Les résultats en sont présentés sur le tableau suivant.

Diamètre des grains (μm)	l^* (μm)	L/l^*
40-50	230	8,7
63-71	340	5,9
80-90	440	4,6

Conformément à ce que l'on peut attendre, l^* croît linéairement avec le diamètre D des grains ($l^* \sim 5 \cdot D$). Pour des systèmes dont les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde λ de la lumière, l'optique reste essentiellement géométrique et la seule taille caractéristique des empilements compacts est celle des grains.

Les valeurs de l^* obtenues rendent délicate l'utilisation des plus grosses billes en DWS. C'est la raison pour laquelle toutes les mesures furent effectuées sur les grains de taille $45\mu\text{m}$, offrant un rapport L/l^* acceptable⁷.

⁶Les empilements étaient lâches. Nous n'avons pas cherché à mettre en évidence l'influence de la densité sur l^* . Toutefois, si de telles variations existent, elle seront de l'ordre de quelques pourcents et n'auront pas d'influence forte sur la suite de ce travail.

⁷La littérature regorge de discussions sur les valeurs admissible pour L/l^* . Il semble qu'au delà d'un rapport 5 les mesures de temps caractéristiques soient correctes [94]. Des études réalisées par Lemieux *et al.* [109] semblent toutefois montrer qu'en deçà de 15, les détails du processus de diffusion -tels que l'anisotropie de la diffraction- continuent de jouer un rôle.

c. Calcul des fonctions de corrélation

Les fonctions de corrélations sont directement calculées à partir des images de speckle au moyen de la relation suivante :

$$g(t_0, t) = \frac{\langle I(t_0 + t) \cdot I(t_0) \rangle_{spkl} - \langle I(t_0) \rangle_{spkl}^2}{\langle I(t_0)^2 \rangle_{spkl} - \langle I(t_0) \rangle_{spkl}^2} \quad (8.1)$$

où les moyennes sont calculées à partir des différents pixels de la région centrale de l'image. Cette expression fournit une fonction de corrélation normalisée entre 1 et 0, correspondant au calcul de $|g_1(t_0, t)|^2$. Afin de prendre en compte les fluctuations d'intensité du faisceau laser incident, il convient de normaliser plus finement la fonction de corrélation pour compenser les éventuelles différences d'intensité moyenne des images.

$$g(t_0, t) = \frac{\langle I(t_0 + t) \cdot I(t_0) \rangle - \langle I(t_0) \rangle \cdot \langle I(t_0 + t) \rangle}{\frac{\langle I(t_0 + t) \rangle}{\langle I(t_0) \rangle} \cdot \langle I(t_0)^2 \rangle - \langle I(t_0) \rangle \cdot \langle I(t_0 + t) \rangle} \quad (8.2)$$

d. Dynamique en l'absence d'excitation

Un point important de l'expérience que nous présentons concerne l'absence de mouvement dans les empilements lorsqu'ils ne sont soumis à aucune perturbation volontaire. Pour cela, nous avons mesuré des fonctions de corrélation d'une part sur un empilement lâche juste après sédimentation, et d'autre part sur un empilement dense $\phi \simeq 0.66$ obtenu après environ 200 tapes fortes.

i) Empilements lâches

Les empilements obtenus à l'issue de la sédimentation présentent une forte instabilité. L'image de speckle se décorrèle spontanément en quelques dizaines de minutes, traduisant ainsi la présence de mouvements de grains dans la cellule. La figure 8.10 présente la fonction de corrélation de l'intensité mesurée environ une minute après la fin de la sédimentation.

Le comportement de l'empilement lâche pourrait mériter à lui-seul une étude. On y observe notamment un ralentissement dynamique sur l'échelle de quelques heures. Toutefois, ces mesures ne laissent aucun contrôle à l'expérimentateur. En particulier, il faudrait être certain de maîtriser le niveau du bruit ambiant, probablement responsable de ces mouvements.

ii) Empilements denses

Les premières sollicitations mécaniques communiquées à l'empilement permettent d'accroître rapidement sa densité ainsi que sa stabilité. A titre d'exemple, nous avons mesuré la fonction de corrélation de l'intensité en l'absence de toute perturbation appliquée sur un empilement amené par compaction à une densité

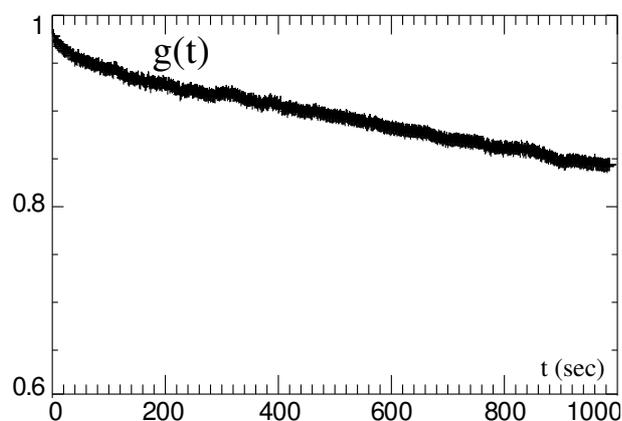


FIG. 8.10 – Empilement lâche sans excitation

de 0,66 (voir figure 8.11). La décorrélation spontanée reste très faible (de l'ordre de 5 %) sur des temps allant jusqu'à une vingtaine d'heures.

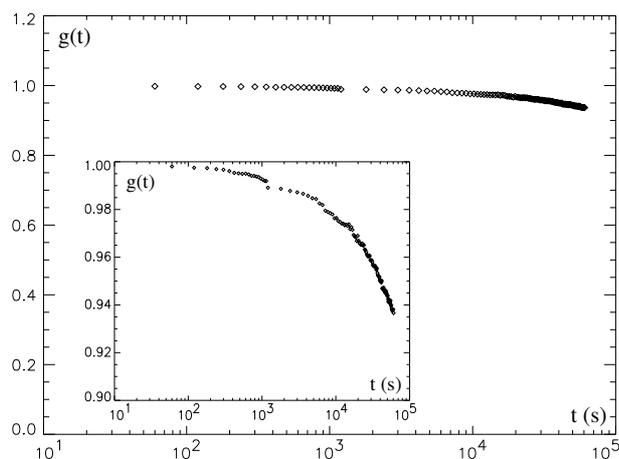


FIG. 8.11 – Empilement dense sans excitation

L'origine de cette décorrélation reste indéterminée. Il est naturellement difficile de travailler dans un environnement à bruit nul, et ce bruit est probablement responsable de ce signal. Toutefois les échelles de temps devenant rapidement gigantesques, des effets liés à une dérive thermique ou à une modification de la friction (fluage de contact) peuvent également être responsables des très faibles déplacements observés.

Ces deux mesures mettent en avant d'une part l'extrême fragilité des empilements lâches vis-à-vis du simple bruit ambiant, d'autre part la possibilité d'obtenir

des structures d'empilements très stables en tassant le système, si bien que sur des temps de quelques heures le système ne bouge pas. Le prochain chapitre décrira l'effet de petites vibrations sur ces empilements par ailleurs relativement stables.

Chapitre 9

Comportement sous vibration

Le chapitre précédent nous a permis de mettre en place les différents points préliminaires à l'étude. Nous savons réaliser des empilements de grains à densité donnée. De plus, si ceux-ci ont été tassés, ils ne présentent aucune dynamique interne sur des temps de l'ordre de quelques dizaines d'heures.

Nous allons à présent communiquer à de tels empilements des impulsions mécaniques de faible amplitude et sonder leur réponse, que ce soit en terme de variations de densité, ou en terme de dynamique interne, via des mesures en DWS. Mettant à profit l'extrême sensibilité de la diffusion multiple, nous montrerons dans quelle mesure cette dynamique interne peut être décorrélée de l'évolution de la structure macroscopique de l'empilement.

Sommaire

9.1	Dynamique sous faible vibration	163
a.	Temps discret	163
b.	Evolution de la densité	164
c.	Fonctions de corrélation	164
	i) Forme des fonctions de corrélation	164
	ii) Paramètres dynamiques	165
	iii) Intermittence	166
9.2	La réponse dépend de l'âge	167
a.	Evolution de la dynamique	167
b.	Réinitialisation dynamique	168
c.	Conclusions	169
9.3	Dépendance vis-à-vis de la densité	169
a.	Les empilements choisis	170
b.	Réponses dynamiques	171
	i) Coefficient $\alpha(t_w)$	171
	ii) Temps caractéristique $\tau(t_w)$	172
9.4	Cycles en amplitude	173
a.	Principe	173
b.	Dynamique instantanée	174
c.	Evolution générale	176
9.5	Discussion	176
a.	Micro-plasticité et fonctions de corrélation	177
	i) Ralentissement et fréquence de glissement	177
	ii) Exposant $1/\alpha$ et corrélations spatiales	177
	iii) Conclusions	179
b.	Les granulaires comme systèmes vitreux	179
	i) Systèmes vitreux	179
	ii) Compaction	180
	iii) Nos expériences	180
c.	Extensions possibles	181
	i) Amplitude et forme de l'excitation	181
	ii) Pression contrôlée	182
	iii) Granulaires secs	182
	iv) Autres outils de mesure	182

9.1 Dynamique sous faible vibration

Les fonctions de corrélation obtenues en l'absence d'excitation sur des empilements denses démontraient l'absence de mouvement dans le système au repos. Seule une perturbation extérieure peut alors faire évoluer le système.

a. Temps discret

La figure 9.1 présente le chronogramme typique d'une de nos expériences. Après avoir préparé un empilement, par sédimentation puis compaction jusqu'à une densité donnée ϕ_0 , nous le soumettons à une longue série d'impulsions mécaniques de faible amplitude, que nous nommerons dans la suite *tapes faibles*. L'amplitude de ces vibrations a été ajustée de sorte que son impact sur la densité moyenne soit faible tout en offrant un signal dynamique important en DWS. Comme le montrera le reste de ce chapitre, une amplitude de vibration¹ verticale de 40 à 50nm a permis d'atteindre raisonnablement ces objectifs.

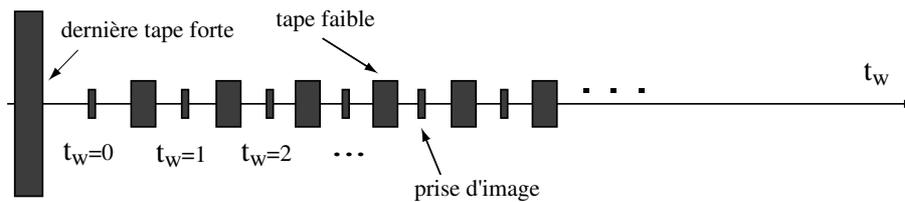


FIG. 9.1 – Chronogramme

Du fait de l'absence de mouvements significatifs au sein de l'empilement non perturbé, la variable temporelle est ici identifiée au nombre total de tapes faibles communiquées. Nous prendrons comme origine la dernière tape forte. Ce temps sera noté t_w (waiting time), par analogie aux systèmes vitreux dans lesquels il caractérise l'âge du système depuis une trempe thermique. Dans le cas qui nous concerne, le temps devient un paramètre discret.

Les images de speckle, servant au calcul des fonctions de corrélation, sont prises entre deux tapes, alors que l'empilement est au repos. Il est ainsi possible d'associer un temps t_w à chaque image, caractérisé par le nombre de tapes faibles communiquées depuis la dernière tape forte. A intervalle de temps régulier dans cette série de tapes faibles, nous effectuons également des mesures de la hauteur moyenne de l'échantillon afin de suivre l'évolution de la densité.

¹Il s'agit d'impulsion mécaniques similaires à celles que nous employons pour tasser l'empilement (trains de 100 ms d'impulsions carrées de fréquence 1 kHz), mais avec une amplitude plus faible.

b. Evolution de la densité

Le première grandeur caractérisant la réponse aux vibrations est la densité. La figure 9.2 en présente l'évolution tout au long de l'expérience. La première phase correspond à la préparation de l'échantillon, que l'on amène par compaction jusqu'à une densité ϕ_0 égale à 0,66. Au delà de 150 tapes fortes (trait en pointillé), le système est alors soumis à une longue série d'impulsions de faible amplitude.

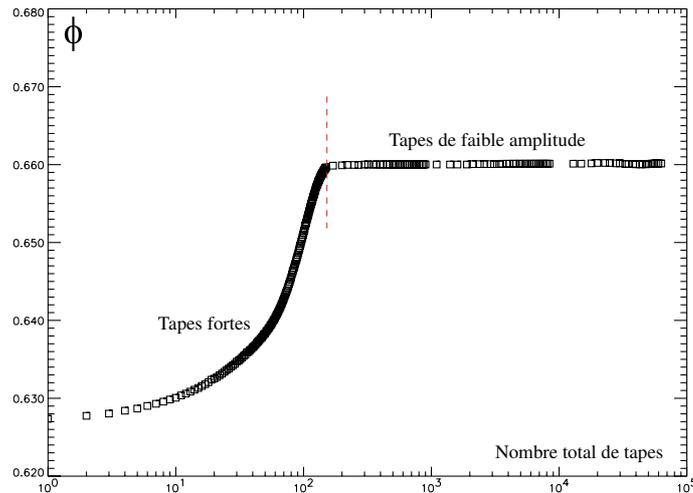


FIG. 9.2 – Préparation et perturbation faible

Les faibles tapes semblent n'avoir aucun effet décelable sur la densité moyenne (la hauteur de l'empilement fluctue de moins d'une taille de grain). Nous discuterons plus loin dans ce chapitre le rôle du tassement préalable de l'empilement sur sa robustesse, en terme de densité, vis-à-vis des tapes faibles. Retenons pour l'instant qu'il est effectivement possible de construire des systèmes suffisamment rigides pour ne plus être affectés macroscopiquement par un bruit mécanique de faible amplitude. Une analyse en DWS permettra cependant de mettre en évidence dans ce même régime la présence de déplacements de grains dans l'échantillon.

c. Fonctions de corrélation

i) Forme des fonctions de corrélation

A partir des images prises entre chaque tape faible, il est possible de calculer toutes les fonctions de corrélation à 2 temps $g(t_0, t)$ ². Un exemple d'une telle fonction est présenté sur la figure 9.3 (pour $t_0 = 2000$ à une densité de l'ordre de 0,66). Il est remarquable ici d'observer la présence d'une nette décorrélation opérant sur des temps courts -ici, quelques centaines de tapes-. Cette réponse est

²Rappelons que t_0 et t correspondent à des nombres de tapes faibles. La fonction $g(t_0, t)$ compare directement l'image obtenue après t_0 tapes à celle prise après $t_0 + t$ tapes.

à comparer à celle obtenue en l'absence de perturbation sur un empilement de même densité (figure 8.11, page 159) ; les mouvements internes que traduit cette mesure sont donc effectivement induits par les vibrations faibles de l'actuateur piezo-électrique.

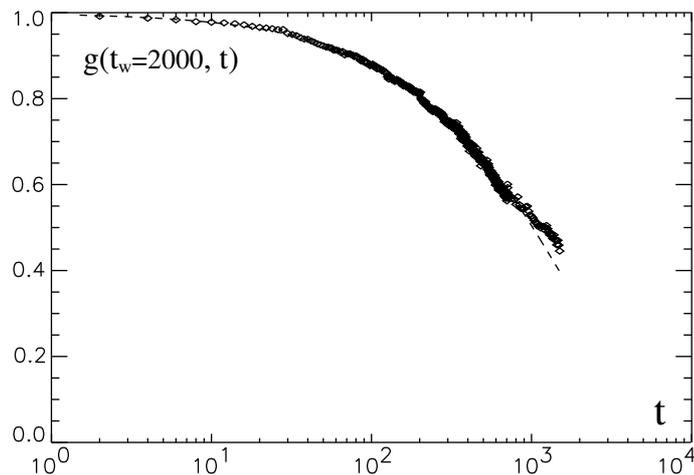


FIG. 9.3 – Exemple de fonction de corrélation

Si ces calculs de fonction de corrélation démontrent l'existence de déplacements de grains dans la cellule, une interprétation quantitative de ces derniers nécessite au préalable une modélisation du milieu et de son comportement (voir le chapitre sur la DWS, page 133). Une discussion sur ce sujet aura lieu en fin de chapitre. Pour l'instant, les seules caractéristiques exploitables de la dynamique sont contenues dans la forme de la courbe de $g(t_w, t)$.

ii) Paramètres dynamiques

De prime abord, le profil de $g(t_w, t)$ se révèle très simple. Une analyse systématique des fonctions de corrélation montre qu'elles peuvent être raisonnablement ajustées par une *exponentielle étirée* :

$$g(t_w, t) \propto e^{-\left(\frac{t}{\tau(t_w)}\right)^{\frac{1}{\alpha(t_w)}}} \quad (9.1)$$

De cet ajustement, nous pouvons extraire deux paramètres $\tau(t_w)$ et $\alpha(t_w)$ caractérisant la réponse dynamique de l'échantillon à l'instant t_w . Le temps τ indique le nombre de tapes nécessaires pour induire une décorrélation du signal lumineux. Ce nombre n'est pas un vrai temps caractéristique du système. Il dépend, au delà de la dynamique microscopique des grains, de la géométrie de l'échantillon, de la lumière utilisée, etc... La valeur de $\tau(t_w)$ ne permet à ce stade qu'une comparaison de l'amplitude moyenne du déplacement des grains associé à une tape.

iii) Intermittence

Une analyse plus minutieuse des fonctions de corrélation révèle toutefois, derrière l'apparente simplicité des profils obtenus, une dynamique relativement complexe. La figure 9.4 détaille en échelle linéaire une fonction de corrélation obtenue après 1000 tapes faibles, sur un échantillon de densité de l'ordre de 0,66.

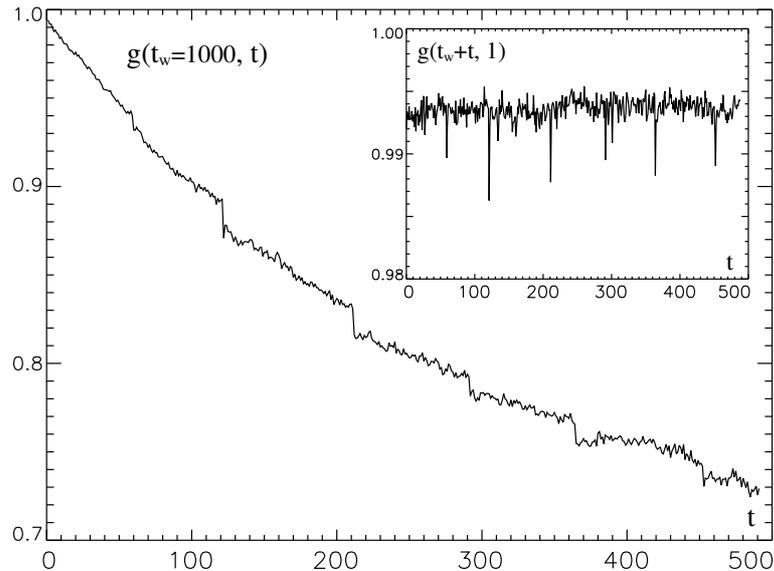


FIG. 9.4 – Dynamique intermittente

Le profil de la courbe présente, sur un fond continu de décorrélation, de brusques chutes. Cette particularité est symptomatique d'une intermittence partielle de la dynamique. Les mécanismes sous-jacents possèdent donc une complexité que ne reproduit pas l'ajustement exponentiel.

Une méthode d'analyse, dénommée *Time-Resolved Correlation*, a été récemment développée par Cipelletti *et al.* [110,111]. Elle s'avère particulièrement adaptée aux dynamiques hétérogènes dans le temps. Plutôt que d'étudier la fonction complète $g(t_w, t)$ -comparant les instants t_w et t_w+t -, on concentre l'analyse sur la distribution statistique des fluctuations de corrélation, sur un intervalle de temps donné. On calcule alors $g(t_w + t, \delta t)$ pour différentes valeurs de t en maintenant δt fixé. L'encart de la figure 9.4 représente, pour le même exemple, le graphe de cette fonction pour $\delta t = 1$. Les restructurations brusques se manifestent alors par des pics vers le bas d'autant plus grands que les déplacements occasionnés le sont.

L'analyse détaillée de ce phénomène d'intermittence dans notre système, si elle permettrait certainement d'enrichir la compréhension globale de la micro-plasticité, n'a toutefois pas pu être réalisée, essentiellement faute de statistique. L'analyse que nous présentons se concentrera davantage dans la suite sur les grandeurs τ et α , permettant de caractériser le comportement dynamique moyen.

9.2 La réponse dépend de l'âge

Le calcul de la fonction $g(t_w, t)$ fournit des informations quantitatives sur la dynamique au temps t_w , via un temps caractéristique $\tau(t_w)$ et un exposant $\alpha(t_w)$. Nous allons à présent nous intéresser à l'évolution de ces grandeurs en fonction du nombre t_w de tapes faibles communiquées au système avant de faire la mesure. La figure 9.5 présente des fonctions de corrélation mesurées à trois âges différents $t_1 = 0$, $t_2 = 100$ et $t_3 = 250$. Le premier constat est une dépendance nette de la réponse dynamique du système avec le nombre total t_w de tapes faibles subies. Plus précisément, on observe un net ralentissement de la dynamique ; chaque tape induit un déplacement moyen de plus en plus faible.

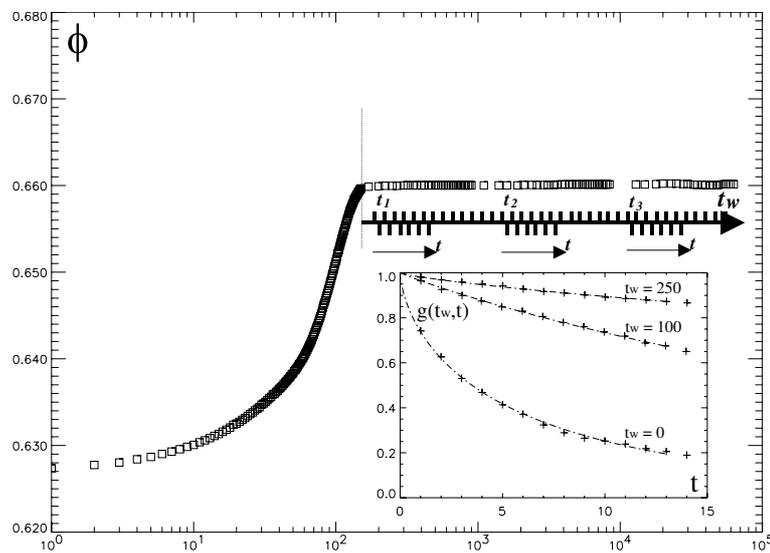


FIG. 9.5 – Quelques fonctions de corrélation, mesurées à différents instants t_w

a. Evolution de la dynamique

Afin de décrire quantitativement le ralentissement observé, nous avons tracé sur la figure 9.6 l'évolution des grandeurs $\tau(t_w)$ et $\alpha(t_w)$ en fonction de l'âge du système t_w . De nombreuses remarques s'imposent :

$\alpha(t_w)$: L'exposant de l'exponentielle étirée correspond à $1/\alpha$; plus α est grand, plus l'exponentielle est étirée. Celui-ci est compris entre 1 et 2, et reste, aux fluctuations près, à peu près constant tout au long de l'expérience. La décroissance de la fonction de corrélation est donc plus lente qu'une exponentielle.

$\tau(t_w)$: Le temps caractéristique de la décorrélation τ augmente rapidement, et ce sur plus de cinq décades de temps. La principale tendance de cette

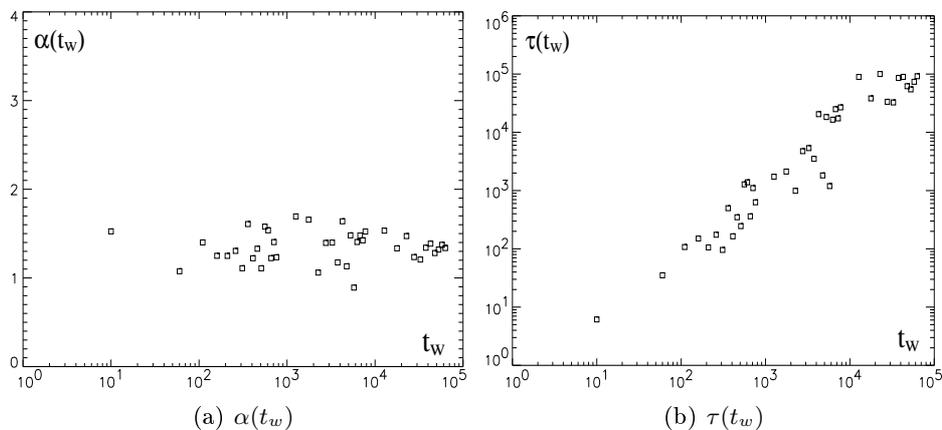


FIG. 9.6 – Evolution des paramètres dynamiques

courbe correspond, toujours aux fluctuations près, à une évolution de τ en loi de puissance de t_w .

$$\tau(t_w) \propto t_w^{1.2 \pm 0.2} \quad (9.2)$$

Il ne nous a pas été possible de conclure sur l'existence d'une valeur limite de τ , ou à l'inverse d'une divergence à temps fini de cette même quantité.

Fluctuations : Les deux graphiques présentent d'importantes fluctuations, que ce soit sur l'exposant ou sur le temps τ . Ce bruit apparent traduit de réelles fluctuations de la dynamique. Il convient à ce stade de faire remarquer que l'évaluation de τ et α s'effectue sur un nombre de tapes $N(t_w)$ du même ordre ou inférieur au temps de décorrélation $\tau(t_w)$ (en général d'un facteur 10). Nous obtenons par extrapolation des mesures relativement locales en temps et suffisamment sensibles pour caractériser les fluctuations de la dynamique avec une précision plus grande que la dispersion expérimentale des valeurs présentées sur la figure 9.6.

b. Réinitialisation dynamique

Les différents résultats qui viennent d'être présentés démontrent que la réponse de l'empilement est essentiellement caractérisée par ce que nous avons appelé son âge, c'est à dire le nombre de tapes faibles t_w reçues depuis la dernière tape forte. Cette forme de mémoire peut être réinitialisée par l'utilisation des vibrations de forte amplitude. Après avoir communiqué 40000 tapes faibles à un empilement de densité 0.65, nous avons soumis ce dernier pendant 15s à des vibrations de forte amplitude. La figure 9.7 présente les résultats de la seconde mesure de dynamique alors réalisée.

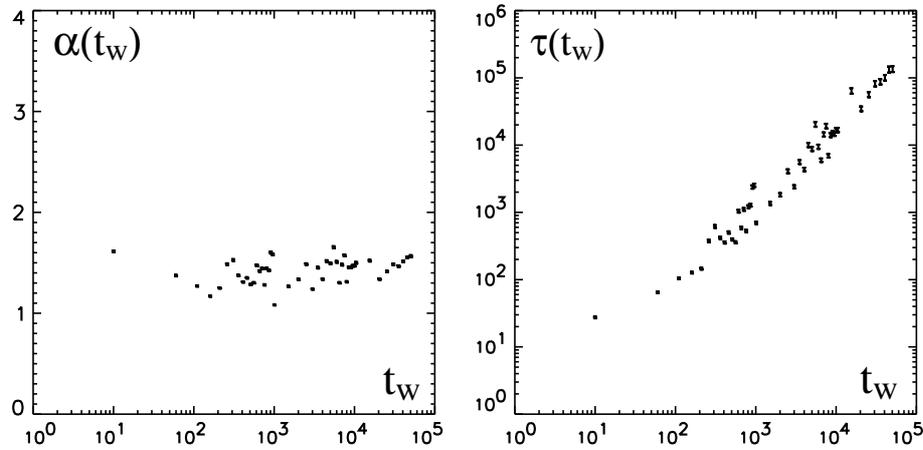


FIG. 9.7 – Evolution de la dynamique après réinitialisation

Comme le montre la figure 9.7, les mesures dynamiques sont en tout point similaires à celles obtenues sur les systèmes *neufs*, c'est à dire n'ayant jamais subi de tape faible. Cela démontre en particulier que la réponse est uniquement déterminée par le temps t_w . L'empilement ne retient rien de son histoire antérieure à la dernière tape forte, du moins aux échelles de taille sondées par la DWS³.

c. Conclusions

L'expérience présentée illustre clairement la possibilité d'effectuer des mesures fines de corrélation en diffusion multiple sur une colonne granulaire soumise à de faibles perturbations mécaniques. Bien qu'au niveau des paramètres macroscopiques (en particulier ici la densité) aucune évolution n'apparaisse, il se dessine au niveau microscopique une nette tendance à la consolidation de l'empilement vis-à-vis de la perturbation imposée.

9.3 Dépendance vis-à-vis de la densité

Dans l'exemple précédent, nous avons choisi de présenter la dynamique sous vibration d'empilements de densités voisines de $\phi_0 = 0,66$. La réponse du matériau dépendant a priori de ce paramètre, nous comparerons à présent les comportements d'empilements de différentes fractions volumiques initiales.

³Aux échelles macroscopiques, la densité constitue une "mémoire" du nombre de tapes fortes qu'il n'est naturellement pas possible d'effacer autrement qu'en retournant la cellule.

a. Les empilements choisis

Afin de couvrir une large gamme de densité, nous analyserons, en plus de l'exemple précédent -noté (c)-, trois autres empilements de grains préparés de la façon suivante :

	Nombre de tapes fortes	Densité
(a)	aucune, départ 30min après la sédimentation	$\phi_0 = 0,625$
(b)	50 tapes	$\phi_0 = 0,64$
(c)	150 tapes	$\phi_0 = 0,66$
(d)	8000 tapes	$\phi_0 = 0,68$

Les quatre empilements ainsi obtenus sont étudiés selon le même protocole expérimental que celui précédemment décrit. La figure 9.8 montre pour chacun d'eux l'évolution de la densité du tas au cours de l'expérience, que ce soit pendant la phase de compaction ou dans celle de vibration faible.

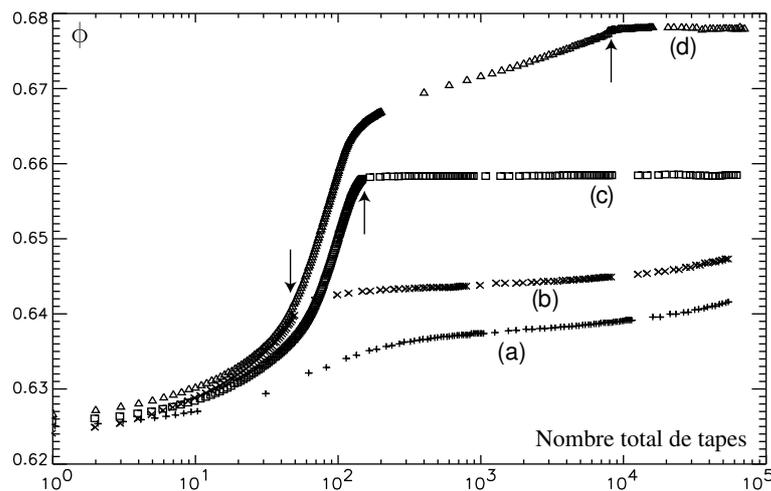


FIG. 9.8 – Evolution de la densité des quatre empilements. Les flèches indiquent les instants où l'on change l'intensité de vibration.

Une nette différence de comportement est alors observée. Dans le cas des empilements faiblement tassés -(a) et (b)-, la densité du système continue de croître pendant le regime de faible vibration. Inversement, pour les empilements les plus denses -(c) et (d)-, la densité reste constante. Il apparaît ainsi une fraction volumique limite, probablement dépendant de l'amplitude des vibrations faibles, au delà de laquelle la structure de l'empilement reste globalement stable, et en deçà de laquelle des restructurations de grande échelle conduisant au tassement se produisent.

b. Réponses dynamiques

Discutons à présent les différentes histoires dynamiques de chacun de ces empilements.

i) Coefficient $\alpha(t_w)$

Commençons tout d'abord par analyser succinctement le coefficient de l'exponentielle étirée α . Les différentes mesures effectuées sont présentées sur la figure 9.9. De façon générale, α apparaît comme une grandeur variant peu avec le nombre de tapes faibles et la densité du système. Les empilements les plus denses semblent toutefois fournir des profils plus étirés que les systèmes lâches.

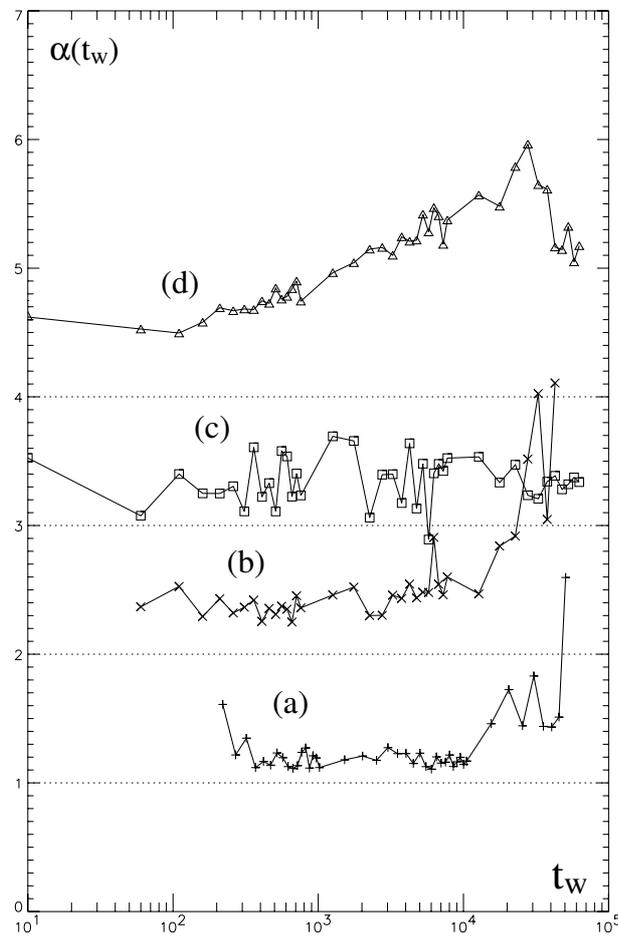


FIG. 9.9 – $\alpha(t_w)$ pour différentes densités de départ. Pour plus de clarté, les courbes (b), (c) et (d) ont été respectivement décalées de 1, 2 et 3 unités vers le haut.

ii) Temps caractéristique $\tau(t_w)$

Les graphes présentant l'évolution du temps caractéristique de décorrélation $\tau(t_w)$ aux 4 densités étudiées sont tracés sur la figure 9.10. Tout d'abord, il est remarquable que ces quatre réalisations présentent le même trait commun, à savoir une rapide augmentation de τ avec le nombre de tapes communiquées. Une analyse plus détaillée révèle toutefois une distinction de comportement entre empilements denses ou lâches.

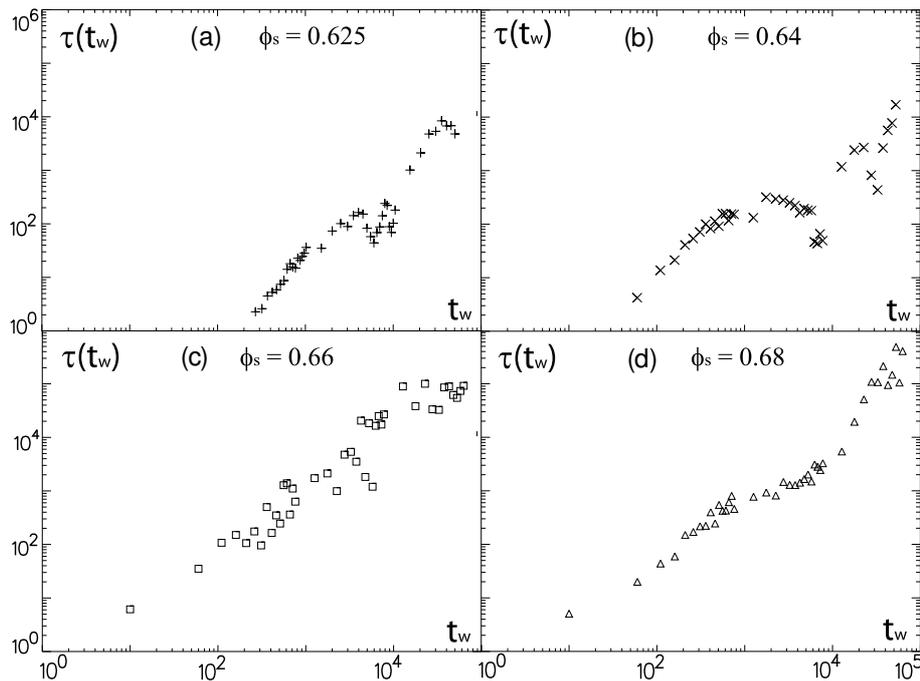


FIG. 9.10 – $\tau(t_w)$ pour différentes densités de départ

Empilements denses : Dans le cas des empilements denses -(c) et (d)-, pour lesquels la densité évolue très peu, on retrouve systématiquement le même ralentissement avec une dépendance de $\tau(t_w)$ en loi de puissance. Cette caractéristique semble donc être intrinsèque à la dynamique des empilements vibrés dont la structure est, au vu de la densité, stable.

Empilements lâches : Le cas des empilements lâches -(a) et (b)- est plus complexe. Tout d'abord, ces empilements présentent aux temps courts des déplacements trop importants pour pouvoir être sondés en DWS par notre dispositif. Les premiers points ne sont donc pas calculables. La dynamique mesurée au-delà des temps courts se révèle également qualitativement différente. On y observe la

présence de larges décrochements vers la bas. Ceux-ci correspondent à des accélérations brusques de la dynamique, se poursuivant par de nouvelles phases de ralentissement.

Il n'est pas surprenant de voir apparaître de telles caractéristiques dans des systèmes où la densité évolue significativement sous vibrations. Un tassement de l'empilement implique nécessairement des restructurations globales et des déplacements relatifs de grains de l'ordre de leur propre taille. La compaction rapide aux temps courts provoque alors une décorrélation trop forte pour être sondée par notre dispositif. Après quelques tapes -environ 150 pour l'empilement le plus lâche, et 50 pour l'échantillon (b)-, la structure semble se stabiliser et le ralentissement dynamique devient observable, avec une loi de comportement similaire à celle des empilements denses (avec un offset en temps). Pourtant, comme l'atteste l'évolution lente de la densité, la structure globale reste fragile. Les décrochements brusques du temps de décorrélation τ sont probablement associés à une réorganisation collective d'une partie de la région de l'empilement éclairée par le laser. Cette restructuration spontanée produirait alors localement un système plus jeune.

9.4 Cycles en amplitude

L'expérience suivante illustrera, par un protocole expérimental différent, l'indépendance de la réponse vis-à-vis de la densité du système, ainsi que l'effet de réinitialisation dû aux vibrations fortes.

a. Principe

Plutôt que de séparer l'expérience en une phase de préparation suivie d'une mesure dynamique sur des temps longs, nous allons à présent soumettre un empilement neuf à un très grand nombre de tapes de forte amplitude en sondant régulièrement, sur 50 tapes faibles⁴, sa réponse dynamique aux temps courts.

La figure 9.11 décrit schématiquement le déroulement d'une telle expérience. Le nombre de tapes fortes communiquées sera noté T . Bien qu'une mesure continue de la densité n'ait pas été réalisée simultanément sur ces expériences, il reste toutefois possible d'associer à chaque valeur de T une densité par l'intermédiaire des graphes de compaction (figure 9.2).

Pour certaines valeurs de T , le processus de compaction est arrêté momentanément pour laisser place à une brève série de tapes faibles entrecoupée de prises d'image. Ces séries, obtenues à des valeurs de T différentes, constitueront autant de mesures de la dynamique.

⁴L'amplitude des tapes faibles dans ces expériences étant 25% plus petite que précédemment.

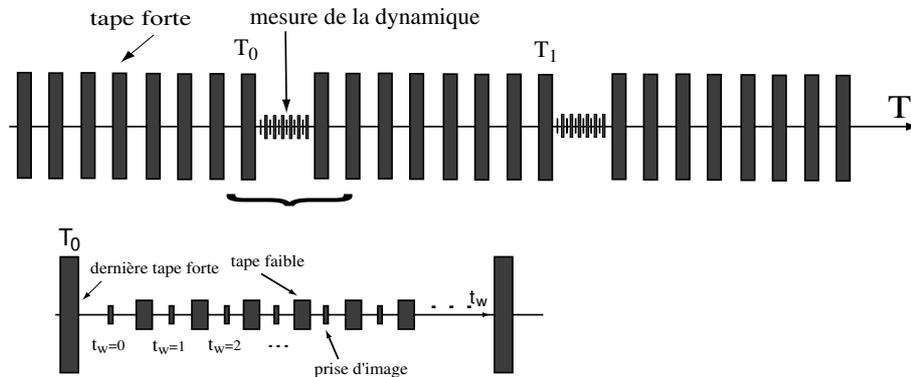


FIG. 9.11 – Chronogramme

b. Dynamique instantanée

L'exploitation de la série de 50 images obtenue après T tapes fortes ne peut se faire de la même façon que précédemment. En effet, les temps de corrélation évoluaient suffisamment lentement pour que l'on puisse calculer les fonctions de corrélation $g(t_w, t)$ avec $t < t_w$ et en extrapoler par un fit un temps caractéristique local $\tau(t_w)$. A présent que l'on étudie le voisinage proche du changement d'amplitude, on doit s'attendre à ce que la dynamique évolue sur un temps de l'ordre d'une seule tape. Le calcul du temps caractéristique s'effectuera donc simplement à partir de deux images consécutives, tout comme nous l'avions fait pour illustrer l'intermittence dynamique (page 166). La figure 9.12 en illustre le principe.

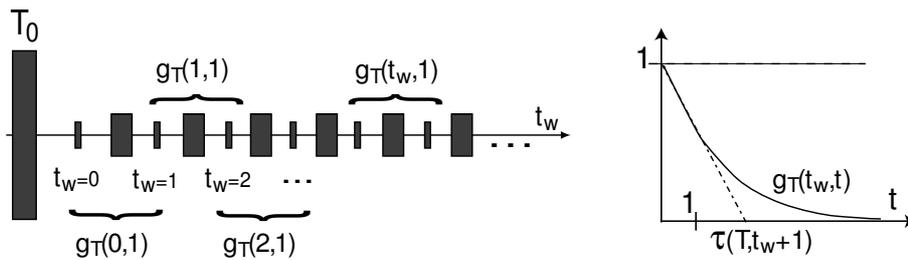


FIG. 9.12 – Chronogramme

La corrélation de deux images consécutives, prises respectivement à t_w et $t_w + 1$, permet le calcul du premier point $g_T(t_w, 1)$ de la fonction de corrélation $g_T(t_w, t)$. L'indice T se réfère au nombre de tapes fortes communiquées avant de sonder la réponse dynamique, c'est à dire avant de démarrer l'acquisition de la série d'images. De la valeur de $g_T(t_w, 1)$, nous pouvons extraire directement un temps caractéristique par la relation suivante :

$$\tau(T, t_w + 1) = -\frac{1}{\ln(g_T(t_w, 1))} \quad (9.3)$$

Nous avons tracé sur la figure 9.13 quelques graphes des fonctions $\tau(T, t_w + 1)$, en fonction de t_w , pour différentes valeurs de T . On retrouve à nouveau sur ces représentations l'expression de l'ensemble des résultats précédents, à savoir :

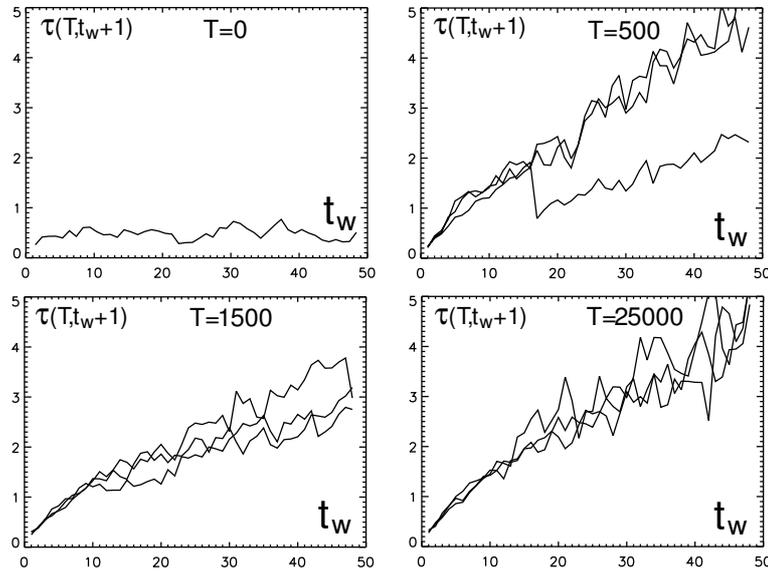


FIG. 9.13 – Dynamique aux temps courts

- Une dynamique rapide et constante sur l'empilement neuf.
- Pour des empilements denses, une évolution générale de $\tau(T, t_w)$ en loi de puissance de t_w . La réponse est alors indépendante de T , paramètre caractérisant essentiellement la densité.
- Une réinitialisation de la dynamique par les tapes de forte amplitude.

Notons également la présence de brusques décrochements vers le bas, significatifs d'une accélération de la dynamique. Ces accidents sont à mettre en parallèle avec les sauts identifiés sur le graphe 9.4. Le plus surprenant ici est que la dynamique reste plus rapide après le décrochement. En terme de vieillissement, cela signifie que le système a rajeuni. Ces sauts constituent en quelques sortes des miniatures des effets de rajeunissement observés sur les graphes $\tau(t_w)$ des empilements lâches (figure 9.10).

c. Evolution générale

Il est également possible de représenter directement l'évolution de $\tau(T, t_w + 1)$ en fonction de T pour différentes valeurs de t_w (figure 9.14). Ce type de représentation permet d'appréhender plus facilement l'évolution de la dynamique tout au long du tassement. On y identifie aisément le domaine sur lequel la réponse dynamique est indépendante de T ($300 < T < 30000$). Pour les temps T extrêmement longs (supérieurs à 30000 tapes cumulées), il semble également que la dynamique devienne de plus en plus lente. La réponse aux T faibles s'avère nettement moins intuitive. Quel est l'origine de la bosse observée pour T valant environ 100 ? Cette particularité, systématique dans ces expériences, reste à ce jour sans explication.

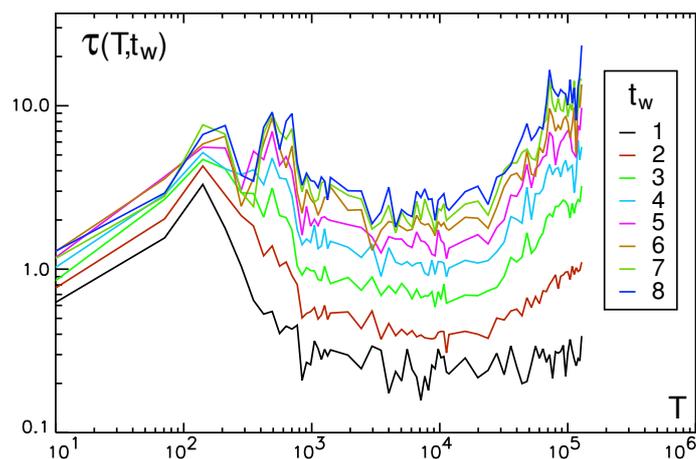


FIG. 9.14 –

9.5 Discussion

Bilan

Ces différents résultats suggèrent deux types de comportements pour un empilement de grains placé sous vibration. Dans le cas d'empilements fragiles, la perturbation mécanique provoque une rupture globale de l'édifice et un tassement du système. Les empilements plus robustes semblent quant à eux pouvoir supporter la vibration. La dynamique de ralentissement alors observée est indépendante de la densité moyenne et semble simplement contrôlée par l'âge du système, que nous avons défini comme étant le nombre de tapes faibles depuis la

dernière tape forte. La nature précise des événements ayant lieu dans la colonne reste pour l'instant indéterminée.

a. Micro-plasticité et fonctions de corrélation

Après avoir présenté les résultats bruts, nous allons à présent tâcher de relier les mesures en DWS au comportement réel des grains. Quelle peut être l'origine microscopique de la décorrélation mesurée? Nous nous proposons ici d'associer la décorrélation à une réorganisation locale du réseau de forces dans l'échantillon. Sous vibration, certaines régions de l'empilement ne résistent pas aux fluctuations de contrainte imposées, et les grains concernés glissent, sur des distances infimes (inférieures à la taille du grain), mais suffisantes pour redistribuer localement les forces. Ce sont ces déplacements qui contribuent à décorréler le signal lumineux transmis. Les paramètres physiques caractérisant cette forme de micro-plasticité sont les suivants :

- L'amplitude des déplacements de grains $\delta \ll R$, où R est le rayon des grains.
- Le volume de grains impliqués dans la réorganisation D^3 , probablement de l'ordre de quelques R^3 .
- La fréquence Γ de ces glissements, c'est à dire le nombre de glissements provoqués par un train de vibration.

Cette formulation présente beaucoup de similitudes avec l'approche de Durian présentée page 144 [97]. Le seul problème est que nous ne savons pas si les déplacements de grains sont plus amples que la longueur d'onde du laser. Ainsi, le temps de décorrélation mesuré dépend a priori de δ , D et Γ . Aucune échelle de taille ne peut donc être précisément extraite de nos mesures.

i) Ralentissement et fréquence de glissement

Du fait de l'évolution sur cinq décades des temps mesurés, et de l'indépendance de la dynamique vis-à-vis de la densité, il paraît improbable que le ralentissement soit dû à une simple diminution des longueurs impliquées. Bien que ces dernières soient susceptibles d'évoluer légèrement, l'essentiel de la réponse est plus vraisemblablement décrit par la fréquence même des événements discrets responsables de la décorrélation. Ainsi, nous ne nous attacherons pas à décrire plus précisément l'événement plastique. Nous supposerons simplement qu'il s'agit de micro-glissements de grains, apparaissant de façon discrète dans le système sous vibration, et dont la fréquence caractéristique d'apparition est proportionnelle à l'inverse du temps de corrélation τ , mesuré dans nos expériences. Le ralentissement dynamique résulte alors d'une diminution de cette fréquence.

ii) Exposant $1/\alpha$ et corrélations spatiales

Il est important de s'interroger également sur la forme étirée de la fonction de corrélation. Les calculs du chapitre 7 prédisait une forme exponentielle des fonctions de corrélations. Comment interpréter les valeurs de α systématiquement

supérieures à 1 dans nos expériences ? Plusieurs raisons liées à d'éventuelles corrélations spatiales peuvent être invoquées.

Si les grains se déplacent d'une fraction de la longueur d'onde, un phénomène de *cage* [112, 113] peut conduire les diffuseurs à se déplacer au voisinage proche de leur position initiale. La présence de nombreux grains dans le voisinage d'un diffuseur impose des contraintes d'ordre stérique, si bien qu'après un déplacement dans un sens, le mouvement suivant se fait préférentiellement dans l'autre. Cela conduit alors à un ralentissement apparent de la dynamique. L'augmentation d' α pour les empilements les plus denses s'expliquerait par une augmentation des contraintes stériques.

L'origine de la forme étirée peut également provenir de corrélations spatiales entre les différents domaines qui se restructurent. En effet, la forme exponentielle prédite par le modèle de restructuration locale ne vaut que si les événements discrets apparaissent avec une probabilité uniforme dans tout l'échantillon. Dès lors que l'on introduit l'existence de corrélations entre les zones qui se restructurent (c'est-à-dire que le prochain déplacement aura lieu préférentiellement près du précédent), les différentes zones impliquées pourront alors se recouvrir, ne serait-ce que partiellement (voir figure 9.15). Le volume total transformé évoluera moins vite que linéairement, rendant ainsi compte d'une forme "étirée" de la fonction de corrélation.

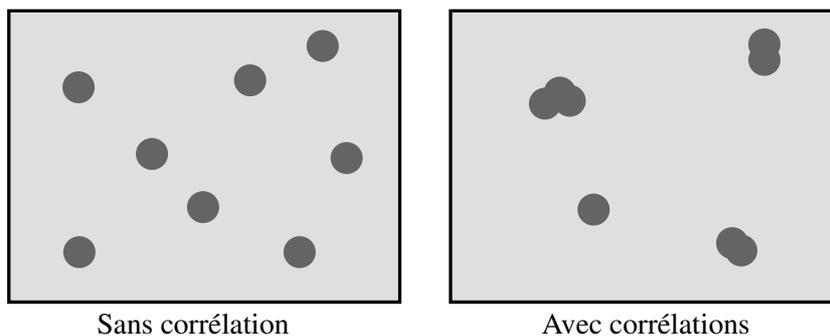


FIG. 9.15 – Effet des corrélations spatiales entre les différents événements de restructuration locale. Les cercles foncés représentent les volumes restructurés. En cas de recouvrement de ces domaines, le volume totale impliqué est plus faible qu'en l'absence de corrélation.

iii) Conclusions

L'interprétation du signal de décorrélation nécessite beaucoup de prudence, dans la mesure où la DWS fournit des mesures trop globales pour apporter à elles seules une information précise sur la plasticité. Quelques points essentiels ressortent toutefois :

- Les micro-réarrangements ont lieu à des échelles beaucoup plus petites que le grain,
- Leur fréquence est principalement contrôlée par l'âge du système,
- Leur impact sur la structure macroscopique est faible,
- La forme étirée de la fonction de corrélation traduit toutefois des corrélations spatiales dans la répartition des événements plastiques.

Remarque : La présence d'une dynamique partiellement intermittente (figure 9.4, page 166) dans notre système pourrait fort bien correspondre à des mouvements collectifs impliquant des échelles plus grandes que le grain.

b. Les granulaires comme systèmes vitreux

i) Systèmes vitreux

On regroupe sous l'appellation de *systèmes vitreux* les matériaux dont les temps de relaxation sont expérimentalement infinis. Ces systèmes ne sont donc jamais à l'équilibre thermodynamique, du moins dans une partie de leur diagramme des phases. Mentionnons sans être exhaustifs les verres structuraux [114], polymères [115], suspensions colloïdales concentrées [101], verre d'électrons (*Anderson insulators*) [116], verre de spins [117]. Les origines microscopiques d'un tel comportement peuvent être extrêmement différentes d'un système à l'autre, et sont pour une large part mal connues. Il semble toutefois que la dynamique vitreuse apparaisse en présence de fortes frustrations associées à un désordre interne important. Une image communément utilisée pour décrire ces systèmes consiste à imaginer leur espace des phases comme constellé d'états métastables, séparés les uns des autres par des barrières d'énergie supérieures à l'énergie thermique kT . Le caractère hors d'équilibre des systèmes vitreux provient alors du fait qu'ils ne parviennent, aux échelles de temps expérimentales, à explorer l'ensemble de tous ces états. Ils partagent donc tous la particularité de posséder une dynamique non-ergodique.

Expérimentalement, les systèmes vitreux présentent quelques signatures caractéristiques. Du fait de leur dynamique lente et hors-d'équilibre, leur réponse à une perturbation externe (par exemple un champ magnétique pour les verres de spins) ou les fonctions d'auto-corrélation de certaines grandeurs internes (densité pour les suspensions colloïdales) dépendent fortement de la façon dont ils ont été préparés, et du temps écoulé depuis. Ces matériaux mémorisent en quelque sorte leur histoire. Certains protocoles expérimentaux précis doivent donc être établis.

Nous nous intéresserons tout particulièrement ici aux manifestations du vieillissement des systèmes vitreux. Le phénomène de vieillissement semble être une des caractéristiques les plus robustes des systèmes vitreux. En mesurant l'évolution du temps caractéristique de relaxation du système en l'absence de toute perturbation externe, il apparaît que celui-ci évolue spontanément en loi de puissance du temps écoulé depuis sa préparation en phase vitreuse (par trempe thermique pour les polymères, écoulements forts pour les colloïdes, etc...) [43, 101, 102, 111, 117], la relation étant le plus souvent simplement linéaire.

ii) Compaction

Les matériaux granulaires (et les mousses) sont également souvent considérés comme des systèmes vitreux. Ils disposent d'une structure désordonnée, de frustrations liées à leur compacité élevée, et ne possèdent pas d'énergie pour explorer l'ensemble des configurations qu'ils pourraient adopter. Les expériences de compaction ont contribué à renforcer cette analogie en fournissant également des arguments dynamiques (relaxation lente, forte dépendance vis à vis de l'histoire d'excitation). Mentionnons particulièrement les effets de mémoires observés [68, 118] établissant une correspondance avec l'effet Kovaks [119]. Nous ne souhaitons pas ici soulever la question de savoir si le forçage mécanique joue ou pas le même rôle qu'une température pour ces systèmes [120]. Rappelons toutefois que le mode d'excitation (tapes verticales, cisaillement, etc...) semble affecter significativement la forme des courbes de compaction.

iii) Nos expériences

Comment se positionnent nos expériences au sein de cette analogie ?

Nos expériences ont mis en évidence une dynamique de grains similaire au vieillissement des verres à partir de mesures de corrélations à deux temps. L'évolution en loi de puissance du temps caractéristique ainsi que la possibilité de rajeunir totalement le système constituent des arguments forts vers une analogie vitreuse. Il nous semble toutefois que la dynamique mesurée ici est sans rapport avec l'approche concernant la dynamique de tassement esquissée au paragraphe précédent. Pourquoi nos observations sont elles presque insensibles à la densité de l'empilement alors que celle-ci joue un rôle fondamental dans le processus de compaction ? Il semble à présent qu'il faille faire ressurgir les deux échelles de taille que nous décrivions en introduction, à savoir le grain et le contact. A chaque échelle correspond une vision différente du matériau. Une description de la structure au niveau du grain se concentre essentiellement sur des grandeurs géométriques, telles que la densité, éventuellement la distribution des interstices entre grains et néglige totalement les aspects liés à la répartition des forces. Cette vision est présente dans l'analogie entre la compaction et la relaxation des verres. L'utilisation de modèles de volume libre pour caractériser l'évolution de la densité

en est une parfaite illustration.

Le structure vue à l'échelle des contacts est toute autre, puisqu'elle rend compte de la répartition des forces. Cette dernière est extrêmement sensible à l'organisation des grains, mais en même temps sans corrélation apparente dans sa statistique avec la géométrie de l'empilement, tant la séparation des échelles de taille est importante. Nos mesures expérimentales sont plus adéquatement décrites en terme de réorganisation du réseau de forces qu'en tant que relaxation structurelle de la densité. Autour de la structure initiale que nous avons préparée, nous assistons à des nombreux micro-réarrangements qui peu à peu entraînent une évolution de la répartition des contraintes, et en conséquence de la réponse mécanique, sans pour autant modifier considérablement la structure à l'échelle des grains. La dynamique sondée coïnciderait davantage au "vieillessement" du réseau de forces plutôt qu'à celui de l'empilement géométrique. Cela ne constitue naturellement qu'une piste possible d'interprétation, qui ne peut être totalement validée à partir de nos mesures.

c. Extensions possibles

Les expériences que nous avons présentées ne constituent qu'un point de départ et soulèvent un nombre considérable de questions. L'analogie vitreuse, bien qu'importante à souligner, n'explique en réalité absolument rien. Seule une investigation expérimentale plus poussée peut permettre de préciser la généralité du phénomène. Nous souhaitons ici proposer quelques élargissements possibles et en profiter pour souligner les réels problèmes expérimentaux qui se sont posés lors de la réalisation de l'expérience.

i) Amplitude et forme de l'excitation

L'amplitude des vibrations que nous avons imposées a été choisie empiriquement, de telle sorte que la dynamique mesurée soit précise. Des variations de l'ordre de 50% de l'excitation n'entraînent pas de changement qualitatif concernant la réponse. Toutefois, d'une expérience à l'autre, toute chose égale par ailleurs, le graphe $\tau(t_w)$ peut fluctuer d'une décade. Ce point rend particulièrement délicat l'étude de l'effet de l'amplitude des vibrations sur le temps de décorrélation. Une statistique importante pour chaque amplitude est certainement nécessaire.

Un point important à aborder concerne également la forme de l'excitation communiquée. Cette question doit être posée à chaque fois l'on souhaite caractériser des effets en volume induit par une perturbation externe. Comment se propage-t-elle à travers la structure de l'empilement ? Est-elle isotrope ? Le rôle du spectre en fréquence de l'excitation doit en particulier être approfondi, d'autres formes d'excitation explorées (par exemple des vibrations horizontales), etc... Un point toutefois nous semble particulièrement crucial : la perturbation doit être une

fluctuation de contrainte sans déplacement imposé, afin de ne pas contraindre des contacts pouvant être stables à la rupture.

ii) Pression contrôlée

L'étude de système possédant une surface libre laisse toujours indéterminée la valeur de la pression dans l'empilement. En particulier, nous ne savons pas si celle-ci évolue pendant l'expérience. Un confinement mieux contrôlé serait certainement préférable pour réaliser ces expériences, par exemple en imposant une charge au niveau de la surface supérieure de l'empilement.

iii) Granulaires secs

L'utilisation de granulaires saturés nous a permis d'obtenir des mesures reproductibles de l'évolution dynamique. Dans l'histoire de l'expérience, ce choix n'est en réalité apparu que tardivement, après de nombreux essais infructueux sur les granulaires secs. Nous avons utilisés les mêmes grains que précédemment (billes de silice de diamètre environ $50\mu\text{m}$). Les aspects liés à l'humidité ont été écartés le plus possible en séchant les grains à l'étuve, puis en les plaçant durant l'expérience sous vide (pression de l'ordre de quelques centaines de Pascals). Malgré ces précautions, le signal était extrêmement bruités et la reproductibilité très mauvaise. Avec le recul de nos expériences en milieu saturé, nous disposons aujourd'hui d'un protocole plus précis, et il serait probablement bon de se remettre à l'investigation des systèmes secs. Nous nous permettons quelques recommandations, issues de nos échecs et constatations diverses :

- Commencer par l'étude des systèmes tassés (ce que nous n'avions pas fait), et porter un soin excessif à la préparation d'empilements reproductibles. C'est trivial à dire, mais pas à faire, en particulier si les grains sont de petite taille. Les hétérogénéités de densité constituent les pires ennemis.
- Etudier différents rapports L/l^* . La taille de l'échantillon conditionne en DWS la sensibilité de la mesure. Il se peut que le bruit de nos mesures sur les systèmes secs (pour lesquels l^* était plus faible) proviennent d'une sensibilité excessive.
- Les grains achetés dans le commerce contiennent en général une quantité importante de poussières collées à leur surface. Celles-ci peuvent affecter de façon non contrôlée les propriétés de friction et perturber des mesures en DWS.

iv) Autres outils de mesure

La compréhension que nous avons du phénomène de ralentissement observé repose essentiellement sur l'idée que le réseau de forces évolue. Il serait intéressant de confirmer cette approche par exemple par des mesures de codas acoustiques, qui, à l'inverse de nos mesures, sondent directement les forces et leur dynamique.

Il serait préférable pour ces mesures de travailler sur des systèmes secs.

L'utilisation de code numérique pourrait également fournir un complément utile à ces expériences. Il serait par exemple possible d'imposer au niveau de chaque contact un véritable bruit de contrainte et d'observer ainsi si la fréquence des mouvements de grains évolue de quelque façon que ce soit. La question de la dimensionnalité pourrait être également posée, les corrélations étant probablement plus importantes à 2D qu'à 3D.

Chapitre 10

Modélisation de la dynamique

Les expériences présentées décrivent la rigidification d'un empilement de grains sous de faibles vibrations. Le phénomène observé possède une forte analogie dans sa dynamique avec les systèmes vitreux. Cela suggère un processus lent de relaxation. Mais de relaxation de quoi ? S'agit-il en particulier d'une grandeur énergétique ? L'image que nous avons du processus s'exprime essentiellement en terme d'évolution du réseau de forces. Comment concilier cette idée avec un ralentissement dynamique ?

Nous présenterons dans ce chapitre un modèle analytique construit autour de l'idée que la dynamique est contrôlée par le glissement local de grains, celui-ci étant provoqué par un bruit mécanique externe. Nous développerons une approche naïve, mais qui a le mérite d'être simple et de refléter notre perception du problème.

Sommaire

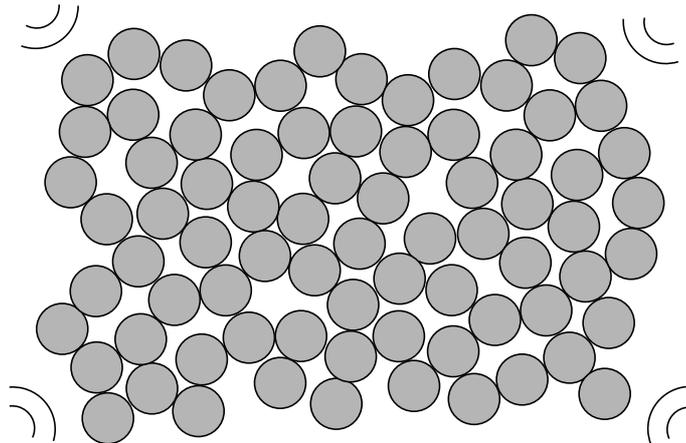
10.1	Présentation du modèle	187
a.	Approche statistique du contact	187
i)	Distribution des contraintes	188
ii)	Fluctuations de contrainte	188
iii)	Probabilité de glissement	189
iv)	Distribution de retour	189
b.	Equation dynamique	189
10.2	Résultats numériques	190
a.	Vibrations fortes	190
b.	Vibrations faibles	190
c.	Cycles	191
10.3	Remarques	191
a.	Contacts indépendants	191
b.	Verres : analogies et différences	192

10.1 Présentation du modèle

Le contact entre grains est stable lorsque le rapport entre la contrainte tangentielle σ_t et la contrainte normale σ_n est inférieur au coefficient de friction statique (Loi d'Amontons-Coulomb). Ce critère doit être vérifié pour tous les contacts d'un tas au repos.

Lors d'une sollicitation mécanique extérieure (vibration, onde acoustique, etc...), l'ensemble des contacts subissent des fluctuations des contraintes, à la fois tangentielle et normale. Même si ces fluctuations sont bien plus faibles que les contraintes typiques dans l'empilement (due par exemple au simple poids des grains), elles peuvent néanmoins provoquer des ruptures de contact : simplement en perturbant le rapport σ_t/σ_n des contacts de telle sorte que le glissement se produise. Une fois que le glissement apparaît, le contact peut se refaire soit entre les mêmes grains, soit entre d'autres grains, et les valeurs des contraintes tangentielle et normale du nouveau contact seront à nouveau dans le cône de Coulomb.

Nous allons dans ce chapitre construire un modèle simple reproduisant la phénoménologie observée. Il ne s'agit pas de fournir un modèle quantitatif, mais simplement de tester les implications du scénario que nous venons de présenter.

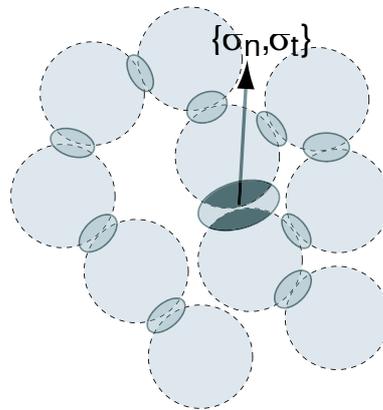


a. Approche statistique du contact

La répartition des forces dans un matériau granulaire est un problème extrêmement complexe qui suscite à l'heure actuelle de nombreux efforts de recherche. Même dans le cas d'un empilement cristallin, il apparaît de fortes hétérogénéités dans la répartition des contraintes à l'échelle des grains. Cette complexité rend difficile la modélisation mécanique de l'empilement sous vibration, en particulier du point de vue de la cohérence mécanique. L'approche que nous présentons ici simplifie fortement la description du matériau en négligeant les corrélations spatiales aux profits de la statistique de rupture des contacts.

i) Distribution des contraintes

L'état de l'empilement à un instant donné sera représenté par la distribution des contraintes tangentielle et normale au niveau des contacts $P_\sigma(\sigma_n, \sigma_t)$, où σ_n est la contrainte normale, et σ_t le module de la contrainte tangentielle. Nous nous limiterons à une situation bidimensionnelle. Aucune information spatiale, que ce soit la position ou l'orientation des contacts, ne sera prise en compte. En particulier, les informations structurelles telles que la densité seront totalement absentes.



ii) Fluctuations de contrainte

Les fluctuations de contraintes occasionnées par la perturbation mécanique sont transmises par le réseau désordonné des contacts. On peut donc s'attendre à ce qu'elles soient également largement distribuées. Nous supposons que la fluctuation locale est décorrélée de la valeur actuelle de la contrainte au niveau de chaque contact, et qu'elle agit indifféremment sur les composantes normale et tangentielle. La distribution statistique $\chi(\delta\sigma)$ de ces fluctuations dépend a priori du mode d'injection du bruit mécanique. Une fois encore nous adopterons les hypothèses conduisant à la formulation la plus simple, et choisirons une distribution exponentielle, dont la moyenne $\overline{\delta\sigma}$ caractérise l'amplitude d'excitation :

$$\chi(\delta\sigma) = \frac{1}{\overline{\delta\sigma}} \exp\left(-\frac{\delta\sigma}{\overline{\delta\sigma}}\right) \quad (10.1)$$

Remarque : Les résultats qui suivent ont aussi été vérifiés, du moins qualitativement, pour une distribution gaussienne des fluctuations, probablement plus cohérente avec la propagation d'une onde acoustique dans un milieu aléatoire.

10.2 Résultats numériques

a. Vibrations fortes

Lorsque l'empilement est soumis à un bruit de forte amplitude, c'est à dire lorsque $\overline{\delta\sigma}$ est grand devant σ_0 , la distribution de contrainte converge rapidement vers une solution stationnaire de l'équation **10.4** correspondant à une distribution proche de $P_{ret}(\sigma_n, \sigma_t)$.

b. Vibrations faibles

L'évolution obtenue sous un bruit de faible amplitude (*ie* $\overline{\delta\sigma} \ll \sigma_0$) est qualitativement très différente. Dans ce régime, il n'existe plus de solution stationnaire. La dynamique obtenue dépendra donc crucialement des conditions initiales imposées.

Conditions initiales

Nous prendrons comme état de départ la distribution P_{ret} précédemment définie. Celle-ci correspond à un système neuf ou préalablement soumis à des vibrations fortes. L'évolution de la distribution des contraintes sera calculée pour une amplitude de bruit constante $\overline{\delta\sigma}$ égale à $\sigma_0/20$.

Dynamique lente

L'état de la distribution de contrainte pour $t = 1, 10, 100, 1000$ et 10000 est décrit sur la figure **10.1**. Le volet gauche présente les distributions des contraintes normales, tandis que nous avons tracé sur le droit le profil de $P_\sigma(\sigma_n = 1, \sigma_t)$ en fonction de σ_t aux mêmes instants.

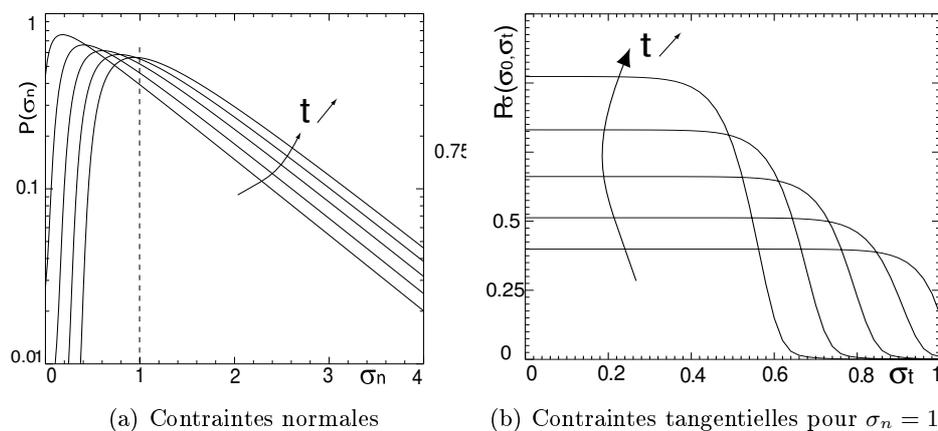


FIG. 10.1 – Evolution des distributions de contrainte

Le résultat est assez simple à interpréter. Les contacts sont d'autant plus fragiles qu'ils sont proches du seuil de glissement, le temps moyen nécessaire à la rupture étant de l'ordre de $\omega_y^{-1}(\sigma_n, \sigma_t)$. Nous assistons donc à une déplétion de la distribution à la limite du cône de Coulomb, pénétrant logarithmiquement vers les états plus stables.

Lien avec les expériences

La fréquence totale de glissement $F(P_\sigma)$ correspond directement à l'inverse du temps caractéristique $\tau(t)$ expérimentalement mesuré. Nous avons tracé sur la figure 10.2 l'évolution de F^{-1} en fonction du temps. On obtient une loi de puissance, et plus exactement une relation linéaire.

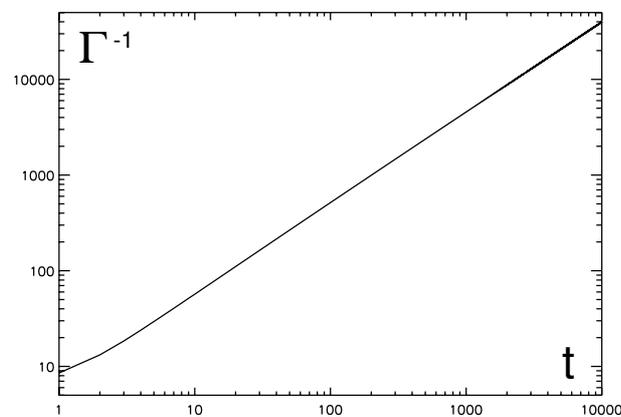


FIG. 10.2 – Evolution du temps entre ruptures

c. Cycles

Des cycles d'excitation fortes puis faibles peuvent également être réalisés. La figure 10.3 présente les valeurs du temps caractéristique F^{-1} pour 3 cycles de 50 excitations fortes suivies de 200 faibles. On retrouve bien les propriétés de rajeunissement dynamique et de vieillissement avec pour seul temps propre le temps passé sous un bruit faible depuis la dernière vibration forte.

10.3 Remarques

a. Contacts indépendants

Le modèle que nous venons de présenter reproduit l'essentiel de la phénoménologie expérimentalement observée dans les empilements denses, sans faire intervenir aucun paramètre structurel. Cela concorde de ce fait avec l'indépendance de

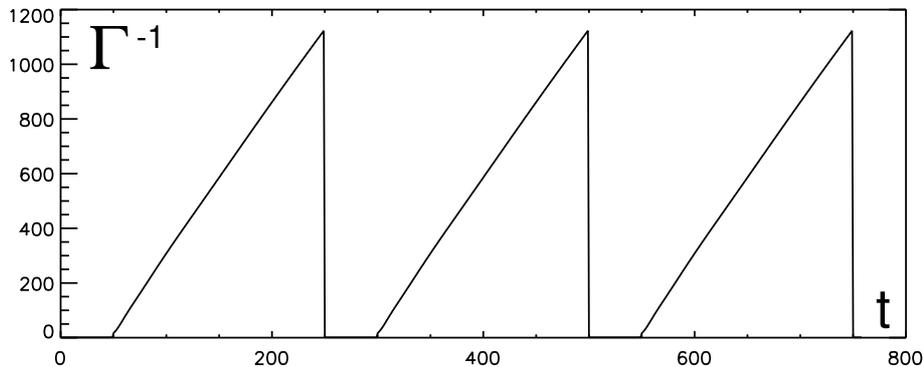


FIG. 10.3 – Cycles de Vibrations fortes/faibles

la réponse expérimentale vis-à-vis de la densité, mais ne constitue toutefois pas un gage de validité. L'hypothèse la plus critique dans notre approche concerne la statistique sur des contacts indépendants. Lorsqu'un contact est rompu dans un empilement réel, les forces sur le grain doivent être redistribuées en conservant une somme et un moment nuls. Ce rééquilibrage doit alors se poursuivre de grain en grain sur un domaine macroscopique, la portée de la perturbation étant probablement de l'ordre de quelques grains.

b. Verres : analogies et différences

L'équation dynamique 10.4 présente de fortes ressemblances dans sa formulation avec le *Trap-Model* de J.-P. Bouchaud [121,122]. Ce modèle consiste à décrire, dans son écriture simple, l'évolution d'un système vitreux comme une succession de sauts thermiquement activés à travers un paysage énergétique constitué de puits de profondeurs distribuées exponentiellement. Il offre une vision simple de transition vitreuse et de la dynamique de vieillissement. Formellement, notre approche est strictement équivalente au *Trap-Model*.

L'originalité de notre modélisation réside simplement dans le choix des grandeurs statistiques. Nous ne parlons pas d'énergie, mais de contraintes. Le seuil correspond à un glissement mécanique, et non à un processus activé. De ce fait, ce n'est pas la valeur absolue de la contrainte qui importe, mais uniquement l'écart entre contraintes normale et tangentielle. Les vibrations, en provoquant la rupture des contacts fragiles, engendrent (du moins dans le modèle) une augmentation de la contrainte moyenne, et donc de l'énergie élastique associée, qui diverge logarithmiquement. Ce que nous décrivons n'est donc pas un processus de relaxation d'énergie.

Conclusion

Nous avons pu mettre en évidence expérimentalement un ralentissement de la dynamique microscopique d'une colonne granulaire soumise à des vibrations de faible amplitude. La fréquence des micro-déplacements de grains, évaluée par une technique de diffusion multiple de la lumière, évolue en loi de puissance du nombre d'impulsions mécaniques communiquées. Nous avons interprété le processus de ralentissement dynamique en l'associant à une restructuration progressive du réseau de contacts, conduisant à rendre la colonne plus robuste vis-à-vis d'un bruit mécanique externe.

La consolidation de l'empilement illustrée par ces expériences peut-elle avoir des conséquences aux grandes échelles de taille ? Serait-il possible de modifier certaines caractéristiques mécaniques macroscopiques de l'empilement en le soumettant à de faibles perturbations mécaniques ? Pourrions-nous par exemple modifier l'angle de départ d'avalanche d'un tas en faisant vieillir sous vibration son réseau de contraintes ? Les liens entre réseau de forces, structure de l'empilement et réponse mécanique d'un empilement restent des problèmes totalement ouverts.

Annexes

Annexe A

Algorithme de relaxation

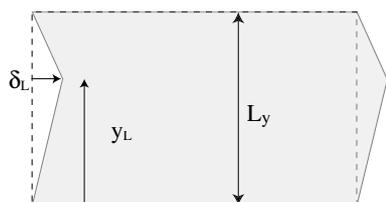
A.1 Position du problème

Le moteur de minimisation de Surface Evolver est très efficace pour équilibrer localement la structure d'une mousse en prenant en compte les contraintes de volume constant. Par contre, il semble inadapté lorsqu'il s'agit de relaxer les modes de déformations sur des échelles de taille supérieures à quelques bulles, en particulier si l'échantillon est de grande dimension (typiquement plus de 100 bulles).

a. Modes collectifs pris en compte

L'algorithme que nous avons utilisé pour relaxer les modes collectifs de déformation procède par tests successifs. On impose un champ de déformation à l'échantillon, correspondant soit à un petit cisaillement, soit à une infime rotation d'un fragment de la mousse. Ces deux types de transformation, présentées dans le chapitre 2 (page 46) correspondent aux champs de déplacement suivants :

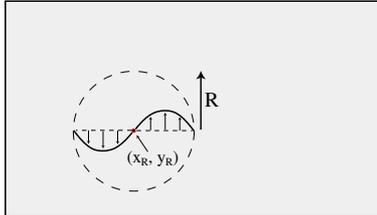
i) Cisaillement longitudinal



$$\vec{u}_C(x, y) = \begin{cases} \delta_L \cdot \frac{y}{y_L} & \vec{u}_x \quad \text{si } y < y_L \\ \delta_L \cdot \frac{L_y - y}{L_y - y_L} & \vec{u}_x \quad \text{si } y > y_L \end{cases}$$

où y_L et δ_L correspondent respectivement à la position et l'amplitude du maximum de déplacement.

ii) Rotation locale



$$\vec{u}_R(r, \theta) = \begin{cases} \delta_R \cdot \sin(\pi \cdot r/R) \vec{u}_\theta & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

La périphérie du rouleau ne doit pas être en contact avec les bords rigides.

Si le champ de déplacement imposé apporte un gain d'énergie, il est maintenu, sinon, on conserve la structure initiale. En testant un grand nombre de telles déformations, nous avons montré, à partir d'exemples, que nous pouvions relaxer des structures extrêmement éloignées de leur configuration d'équilibre. Sommes-nous toutefois certains de pouvoir relaxer *toute* déformation résiduelle à partir de ces deux types de transformation ?

b. Champ de déformation résiduelle

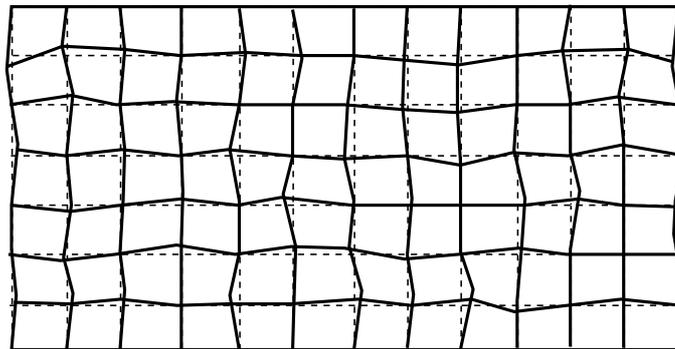


FIG. A.1 – Champ de déformation résiduelle

Soit $\vec{u}_0(x, y)$ le champ 2D de déplacement permettant de passer de la structure non-relaxée à la structure d'équilibre que l'on souhaite obtenir (illustration sur la figure A.1). Du fait de la prise en compte correcte des contraintes de volume constant par *Surface Evolver*, nous savons que ce champ est un champ incompressible. Nous pouvons alors reformuler la question précédente. Existe-il toujours une décomposition, non nécessairement unique, du champ $\vec{u}_0(x, y)$, en une somme de champs de déplacements de type cisaillement ou rotation locale? Nous montrerons dans cette annexe que les modes de déplacement collectifs que nous avons introduits constituent une famille génératrice de champs de déplacement incompressibles de la mousse.

A.2 Potentiel du champ de déplacement

Les champs vectoriels sont des objets difficiles à manipuler formellement, même à 2D. Le champ $\vec{u}(\vec{x})$ étant un champ incompressible (c'est à dire de divergence nulle), il dérive d'un potentiel vecteur, que l'on note en général $\vec{A}(\vec{x})$, par analogie avec l'électromagnétisme : $\vec{u}(\vec{x}) = \text{rot}(\vec{A}(\vec{x}))$. A deux dimensions, ce potentiel se réduit à un champ scalaire $\psi(x, y)$ tel que :

$$u_x = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \quad (\text{A.1})$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

a. Potentiel du champ résiduel

Nous pouvons donc associer au champ résiduel un potentiel $\psi_0(x, y)$, défini à une constante près. Les conditions limites imposent à ψ_0 d'être périodique dans la direction x . Au bord de la mousse, aucun déplacement n'est permis :

$$u_x = u_y = 0 \Rightarrow \partial \psi / \partial x = \partial \psi / \partial y = 0$$

Le potentiel doit avoir une valeur constante le long des bords rigides, la surface $\psi(x, y)$ se raccordant avec une pente nulle (figure A.2). En imposant des déformations à la mousse, nous ne faisons rien d'autre que rectifier progressivement la forme de la surface $\psi(x, y)$ jusqu'à ce que cette dernière se réduise à une fonction constante. Analysons sous cet angle l'effet des champs de déplacement utilisés pour les tests.

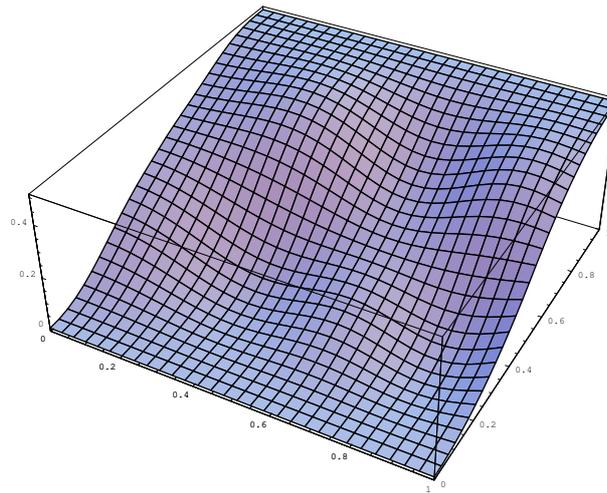


FIG. A.2 – Exemple de potentiel ψ_0

b. Potentiel et effet des déplacements testés

Les déformations que l'on impose dérivent également d'un potentiel. Etudions tout d'abord la forme de ψ_C , le potentiel associé aux transformations de cisaillement \vec{u}_C . En fonction de y_l et δ_L , celui-ci s'écrit :

$$\text{si } y < y_L, \quad \psi_C = \frac{1}{2} \frac{\delta_L}{y_L} \cdot y^2 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{si } y > y_L, \quad \psi_C = -\frac{1}{2} \frac{\delta_L}{L_y - y_L} \cdot (L_y - y)^2 + \frac{1}{2} \delta_L L_y \quad (\text{A.4})$$

Le profil de $\psi_C(x, y)$ pour $y_L = 0.7$ est tracé sur la figure A.3. Le premier algorithme de relaxation, utilisant ces transformations, permet de corriger la dénivellée entre les deux parois rigides, qui se trouvent alors au même potentiel. Après cette étape, le potentiel de la déformation résiduelle, que nous noterons ψ_1 ressemble au graphe de la figure A.4.

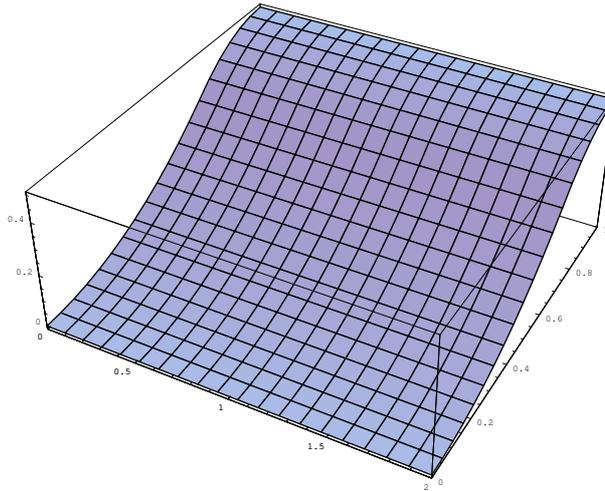


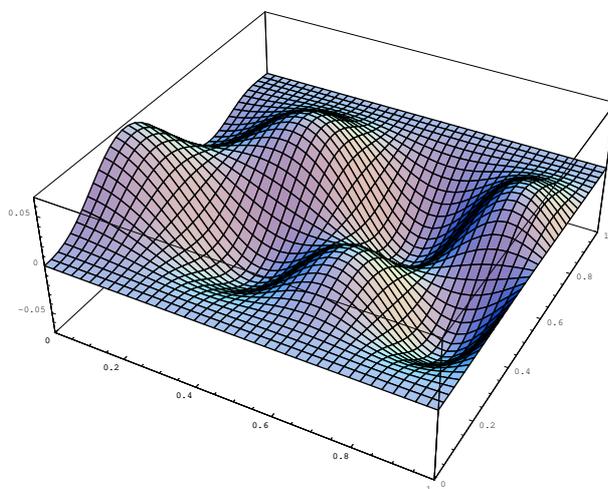
FIG. A.3 – Potentiel des déplacements ψ_C pour $y_L = 0.7$

Le second mode de relaxation, utilisant des rotations locales, possède un potentiel de la forme suivante :

$$\text{si } r < R, \quad \psi_R = \frac{\delta_r \cdot R}{\pi} \cdot \left(\cos \left(\pi \frac{r}{R} \right) + 1 \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\text{si } r > R, \quad \psi_R = 0 \quad (\text{A.6})$$

Cela correspond à une famille de fonctions "cloches", dont un exemplaire est tracé sur la figure A.5. Ces cloches sont de largeur R variable, et peuvent être centrées

FIG. A.4 – Potentiel résiduel ψ_0 après correction par la famille des ψ_C

en un point quelconque de la mousse, à condition de ne pas affecter la valeur du potentiel au bord. Il est toujours possible de décomposer une fonction quelconque en une somme de fonctions cloches. Nous pouvons donc aplanir totalement la surface $\psi_1(x, y)$ en utilisant la famille des fonctions $\psi_R(r, \theta)$.

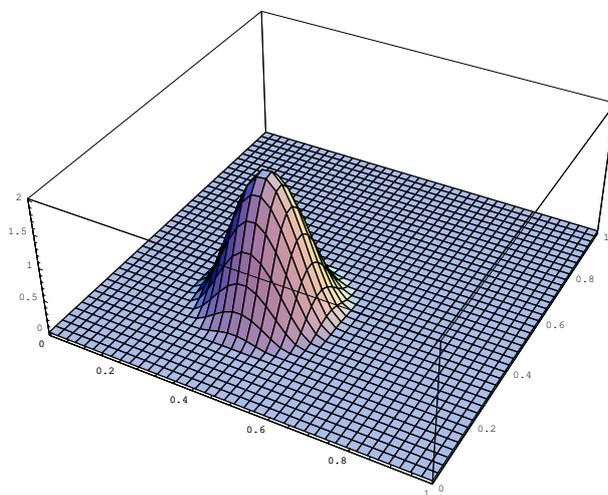


FIG. A.5 – Potentiel des déplacements associé à une rotation locale

Annexe B

Support Multimedia

Ouvrir le fichier these.htm du CD-ROM dans un navigateur web, ou consulter le site internet [http ://alexandre.kabla.free.fr](http://alexandre.kabla.free.fr)

Bibliographie

- [1] D. WEAIRE et S. HUTZLER. The Physics of Foams. Clarendon Press - Oxford, 1999.
- [2] S.A. KHAN, C.A. SCHNEPPER et R.C. ARMSTRONG. Foam Rheology : III. Measurement of Shear Flow Properties. *Journal of Rheology*, **32**(1), 69–92 (1988).
- [3] K.J. STINE, S.A. RAUSEO, B.G. MOORE, J.A. WISE et C.M. KNOBLER. Evolution of foam structures in Langmuir monolayers of pentadecanoic acid. *Physical Review A*, **41**, 6884 (1990).
- [4] M. DENNIN et C.M. KNOBLER. Experimental Studies of Bubble Dynamics in a Slowly Driven Monolayer Foam. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(12), 2485 (1997).
- [5] S. COHEN-ADDAD, H. HOBALLAH et R. HOHLER. Viscoelastic response of a coarsening foam. *Phys. Rev. E*, **57**(6), 6897 (1998).
- [6] A.D. GOPAL et D.J. DURIAN. Relaxing in foam. *cond- mat/*, **0208181** (2003).
- [7] H.M. PRINCEN. *Journal of Colloid and Interface Science*, **91**, 160 (1983).
- [8] T.G. MASON, J. BIBETTE et D.A. WEITZ. Elasticity of Compressed Emulsions. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(10), 2051 (1995).
- [9] A. SAINT-JALMES et D.J. DURIAN. Vanishing elasticity for wet foams : Equivalence with emulsions and role of polydispersity. *Journal of Rheology*, **43**(6), 1411 (1999).
- [10] R.K. PRUD'HOMME et S.A. KHAN. Experimental Results on Foam Rheology.
- [11] M.E. CATES, T.C.B. MCLEISH et G. MARRUCCI. *Europhysics Letters*, **21**, 451 (1993).
- [12] P.D. OLMSTED. Two-state shear diagrams for complex fluids in shear flow. *Europhysics Letters*, **48**, 339–345 (1999).
- [13] G. PORTE, J.-F. BERRET et J.L. HARDEN. Inhomogeneous Flows of Complex Fluids : Mechanical Instability Versus Non-Equilibrium Phase Transition. *J. Phys. II*, **7**, 459 (1997).

- [14] J.-F. BERRET, G. PORTE et J.P. DECRUPPE. Inhomogeneous shear flows of wormlike micelles : A master dynamic phase diagram. *Phys. Rev. E*, **55**(2), 1668 (1997).
- [15] O. RADULESCU, P.D. OLMSTED, J.P. DECRUPPE, S. LEROUGE, J.-F. BERRET et G. PORTE. Time scales in shear banding of wormlike micelles. *Europhysics Letters*, **62**(2), 230 (2003).
- [16] D. HOWELL, R.P. BEHRINGER et C. VEJE. Stress Fluctuations in a 2D Granular Couette Experiment : A Continuous Transition. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(26), 5241 (1999).
- [17] D.M. MUETH, G. DEBRÉGEAS, G.S. KARZMAR, P.J. ENG, S.R. NAGEL et H.M. JAEGER. Signatures of granular microstructure in dense shear flows. *Nature*, **406**, 385 (2000).
- [18] G. DEBRÉGEAS, H. TABUTEAU et J.-M. di MEGLIO. Deformation and Flow of a Two-Dimensional Foam under Continuous Shear. *Phys. Rev. Lett.*, **87**(17), 178305 (2001).
- [19] G. LAURISDEN, M. TWARDOS et M. DENNIN. Shear-Induced Stress Relaxation in a Two-Dimensional Wet Foam. *cond- mat/*, page 0205346 (2002).
- [20] E. PRATT et M. DENNIN. Nonlinear stress and fluctuation dynamics of sheared disordered wet foams. *cond- mat/*, **0212548** (2002).
- [21] T. HERDTLE et H. AREF. Numerical experiments on two-dimensional foam. *Journal of Fluid Mechanics*, **241**, 233–260 (1992).
- [22] D. WEAIRE et J.P. KERMODE. Computer simulation of a two-dimensional soap froth I. Method and motivation. *Philosophical Magazine B*, **48**(3), 245–259 (1983).
- [23] D. WEAIRE et J.P. KERMODE. Computer simulation of a two-dimensional soap froth II. Analysis of results. *Philosophical Magazine B*, **50**(3), 379–395 (1984).
- [24] A.M. KRAYNIK et D.A. REINELT. Linear Elastic Behavior of Dry Soap Foams. *Journal of Colloid and Interface Science*, **181**, 511–520 (1996).
- [25] D.A. REINELT et A.M. KRAYNIK. Simple shearing flow of a dry Kelvin soap foam. *Journal of Fluid Mechanics*, **311**, 327–343 (1996).
- [26] D.A. REINELT et A.M. KRAYNIK. Simple shearing flow of dry soap foams with tetrahedrally close-packed structure. *Journal of Rheology*, **44**(3), 453 (2000).
- [27] A.M. KRAYNIK, D.A. REINELT et F. van SWOL. Structure of random monodisperse foam. *Phys. Rev. E*, **67**, 031403 (2003).
- [28] K.A. BRAKKE. The Surface Evolver. *Experimental Mathematics*, **1**(2), 141–165 (1992).
- [29] K.A. BRAKKE. The Surface Evolver and the stability of liquid surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, (1995). Disponible sur le site : <http://www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/evolver>.

- [30] K. KAWASAKI, T. OKUZONO et T. NAGAI. Mechanical and flow behavior of two-dimensional foams. *J. Mech. Behav. Mater.*, **4**, 51 (1992).
- [31] T. OKUZONO, K. KAWASAKI et T. NAGAI. Rheology of random foams. *Journal of Rheology*, **37**, 571 (1993).
- [32] T. OKUZONO et K. KAWASAKI. Intermittent flow behavior of random foams : A computer experiment on foam rheology. *Phys. Rev. E*, **51**(2), 1246 (1995).
- [33] D.J. DURIAN. Foam Mechanics at the Bubble Scale. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(26), 4780 (1995).
- [34] D.J. DURIAN. Bubble-scale model of foam mechanics : Melting, nonlinear behavior, and avalanches. *Phys. Rev. E*, **55**(2), 1739 (1997).
- [35] S. TEWARI, D. SCHIEMANN, D.J. DURIAN, C.M. KNOBBLER, S.A. LANGER et L. A.J.. Statistics of shear-induced rearrangements in a two-dimensional model foam. *Phys. Rev. E*, **60**(4), 4385 (1999).
- [36] B.S. GARDINER, B.Z. DLUGOGORSKI et G.J. JAMESON. The steady shear of three-dimensional wet polydisperse foams. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **92**, 151–166 (2000).
- [37] Y. JIANG, J.P. SWART, A. SAXENA, M. ASIPAUSKAS et J. GLAZIER. Hysteresis and avalanches in two-dimensional foam rheology simulations. *Phys. Rev. E*, **59**(5), 5819 (1999).
- [38] F. ELIAS, C. FLAMENT, J. GLAZIER, F. GRANER et Y. JIANG. Foams out of stable equilibrium : cell elongation and side swapping. *Philosophical Magazine B*, **79**(5), 729–751 (1999).
- [39] H.A. BARNES, J.F. HUTTON et K. WALTERS. An Introduction to Rheology, Vol. 3 *Rheology series*. Elsevier, 1989.
- [40] A. Abd el KADER et J.C. EARNSHAW. Shear-Induced Changes in Two-Dimensional Foam. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(12), 2610–2613 (1999).
- [41] D. WEAIRE, F. BOLTON, T. HERDTLE et H. AREF. *Philosophical Magazine Letter*, **66**, 293 (1992).
- [42] D. BONN, S. TANASE, B. ABOU, H. TANAKA et J. MEUNIER. Laponite : Aging and Shear Rejuvenation of a Colloidal Glass. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(1), 015701 (2002).
- [43] V. VIASNOFF et F. LEQUEUX. Rejuvenation and Overaging in a Colloidal Glass under Shear. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(6), 065701 (2002).
- [44] F. OZON, T. NARITA, A. KNAEBEL, G. DEBRÉGEAS et P. HÉBRAUD. Aging and memory effects in colloidal glasses. *cond-mat/*, **0210554** (2002).
- [45] P. SOLLICH, F. LEQUEUX, P. HÉBRAUD et M.E. CATES. Rheology of Soft Glassy Materials. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(10), 2020 (1997).
- [46] P. SOLLICH. Rheological constitutive equation for a model of soft glassy materials. *Phys. Rev. E*, **58**(1), 738 (1998).

- [47] M.L. FALK et J.S. LANGER. Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids. *Phys. Rev. E*, **57**(6), 7192 (1998).
- [48] C. DEREK, A. AJDARI et F. LEQUEUX. Rheology and aging :A simple approach. *Eur. Phys. J. E*, **4**, 355–361 (2001).
- [49] P. BAK, C. TANG et K. WIESENFELD. Self-Organized Criticality : An Explanation of 1/f Noise. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(4), 381 (1987).
- [50] C. TANG et P. BAK. Critical Exponents and Scaling Relations for Self-Organized Critical Phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, **60**(23), 2347 (1988).
- [51] K. CHEN, P. BAK et S.P. OBUKHOV. Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes. *Physical Review A*, **43**(2), 625 (1991).
- [52] J.D. ESHELBY. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. (1957).
- [53] J.D. ESHELBY. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. (1959).
- [54] B. CHALMERS. *Physical Metallurgy*. New-York, 1963.
- [55] P. BESUELLE, J. DESRUES et S. RAYNAUD. Experimental characterisation of the localisation phenomenon inside a Vosges sandstone in a triaxial cell. *Int. J. Rock Mech. & Mining Sci.*, **37**, 1223 (2000).
- [56] J. DURAN. *Sables, poudres et grains*. 1997.
- [57] B.N.J. PERSSON. *Sliding Friction : Physical Principles and Applications*. Springer, 1998.
- [58] L. BOCQUET, E. CHARLAIX, S. CILIBERTO et J. CRASSOUS. Moisture-induced ageing in granular media and the kinetics of capillary condensation. *Nature*, **396**, 735 (1998).
- [59] D.M. MUETH, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL. Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, **57**(3), 3164 (1998).
- [60] G. LOVOLL, K.J. MALOY et E. FLEKKOY. Force measurements on static granular materials. *Phys. Rev. E*, **60**(5), 5872 (1999).
- [61] F. RADJAI, M. JEAN, J.-J. MOREAU et S. ROUX. Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems. *Phys. Rev. Lett.*, **77**(2), 274 (1996).
- [62] H.A. MAKSE, D.L. JOHNSON et L.M. SCHWARTZ. Packing of Compressible Granular Materials. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(18), 4160 (2000).
- [63] D.L. BLAIR, N.W. MUEGGENBURG, A.H. MARSHALL, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL. Force distributions in three-dimensional granular assemblies : Effects of packing order and interparticle friction. *Phys. Rev. E*, **63**, 041304 (2001).
- [64] J.M. ERIKSON, N.W. MUEGGENBURG, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL. Force Distributions in three dimensional compressible granular packs. *Phys. Rev. E*, **66**, R40301 (2002).

- [65] J.B. KNIGHT, C.G. FANDRICH, C.N. LAU, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL. Density relaxation in a vibrated granular material. *Phys. Rev. E*, **51**(5), 3957–3963 (1995).
- [66] E.R. NOWAK, J.B. KNIGHT, E. BEN-NAIM, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL. Density fluctuations in vibrated granular materials. *Phys. Rev. E*, **57**(2), 1971 (1998).
- [67] P. PHILIPPE et D. BIDEAU. Compaction dynamics of a granular medium under vertical tapping. *Europhysics Letters*, **60**(5), 677–683 (2002).
- [68] M. NICOLAS, P. DURU et O. POULIQUEN. Compaction of a granular material under cyclic shear. *Eur. Phys. J. E*, **3**, 309–314 (2000).
- [69] O. POULIQUEN, M. NICOLAS et P.D. WEIDMAN. Crystallization of non-Brownian Spheres under Horizontal Shaking. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(19), 3640 (1997).
- [70] C. LESAFFRE, V. MINEAU, D. PICART et H. Van DAMME. Densification under vibration of a saturated granular packing. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **1**(IV), 647–653 (2000).
- [71] S.F. EDWARDS et D.V. GRINEV. Statistical Physics of the Jamming Transition : The Search for Simple Models. Paru dans A.Liu and S.R.NAGEL, éditeur, *Jamming and Rheology*. Taylor & Francis, New-York, 2001. cond-mat/9905114.
- [72] D.A. HEAD. Phenomenological glass model for vibratory granular compaction. *Phys. Rev. E*, **62**, 2439 (2000).
- [73] T. BOUTREUX et P.G. de GENNES. Compaction of granular mixture : a free volume model. *Physica A*, **244**, 59–67 (1997).
- [74] A. CONIGLIO et M. NICODEMI. The jamming transition of granular media. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **12**, 6601 (2000).
- [75] A.J. KOLAN, E.R. NOWAK et A.V. TKACHENKO. Glassy behavior of the parking lot model. *Phys. Rev. E*, **59**, 3094 (1999).
- [76] S. NASUMO, A. KUDROLLI et J.P. GOLLUB. Friction in Granular Layers : Hysteresis and Precursors. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(2), 949 (1997).
- [77] J.-C. GÉMINARD, W. LOSERT et J.P. GOLLUB. Frictional mechanics of wet granular material. *Phys. Rev. E*, **59**(5), 5881 (1999).
- [78] W. LOSERT, J.-C. GÉMINARD, S. NASUNO et J.P. GOLLUB. Mechanisms for slow strengthening in granular materials. *Phys. Rev. E*, **61**(4), 4060 (2000).
- [79] E. AHARONOV et D. SPARK. Rigidity phase transition in granular packings. *Phys. Rev. E*, **60**(6), 6890 (1999).
- [80] L. STARON, J.-P. VILOTTE et F. RADJAI. Preavalanche Instabilities in a Granular Pile. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(20), 204302 (2002).
- [81] H.M. JAEGER, C. h. LIU et S.R. NAGEL. Relaxation of angle of repose. *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1), 40 (1989).

- [82] D.M. MUETH. Measurements of Particle Dynamics in Slow, Dense Granular Couette Flow. *Phys. Rev. E*, **67**, 011304 (2001).
- [83] T. TRAVERS, M. AMMI, D. BIDEAU, A. GERVOIS, J.C. MESSENGER et J.P. TROADEC. Uniaxial Compression of 2d Packings of Cylinders. Effects of Weak Disorder. *Europhysics Letters*, **4**(3), 329–332 (1987).
- [84] C. h. LIU, S.R. NAGEL, D.A. SCHECTER, S.N. COPPERSMITH, S. MAJUMDAR, O. NARAYAN et W.T. A.. Forces Fluctuations in Bead Packs. *Science*, **269**, 513 (1995).
- [85] J. GENG, D. HOWELL, E. LONGHI, R.P. BEHRINGER, G. REYDELLET, L. VANEL et E. CLEMENT. Footprints in Sand : The Response of a Granular Material to Local Perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, **87**(3), 035506 (2001).
- [86] G. REYDELLET et E. CLEMENT. Green's Function Probe of a Static Granular Piling. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3308 (2001).
- [87] C. COSTE et B. GILLES. On the validity of Hertz contact law for granular material acoustics. *European Physical Journal B*, **7**, 155 (1999).
- [88] X. JIA, C. CAROLI et B. VELICKY. Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(9), 1863 (1999).
- [89] C. h. LIU et S.R. NAGEL. Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity. *Physical Review B*, **48**(21), 15646 (1993).
- [90] C. h. LIU. Spatial patterns of sound propagation in sand. *Physical Review B*, **50**(2), 782 (1994).
- [91] B.J. BERNE et R. PECORA. Dynamic Light Scattering. Wiley-Interscience, 1976.
- [92] G. MARET et P.E. WOLF. Multiple light scattering from disordered media : the effect of brownian motion of the scatterers. *Z. Phys. B*, **65**, 409 (1987).
- [93] D.J. PINE, D.A. WEITZ, P.M. CHAIKIN et E. HERBOLZHEIMER. Diffusing-Wave Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, **60**(12), 1134 (1988).
- [94] D.A. WEITZ et D.J. PINE. Diffusing-wave Spectroscopy. Paru dans W BROWN, éditeur, *Dynamic Light Scattering : The method and some applications*, page 652–720. Oxford U. Press, 1993.
- [95] G. MARET. Recent experiments on multiple scattering and localization of light. Paru dans *Mesoscopic Quantum Physics*, page 147–179, Les Houches, 1994.
- [96] G. MARET et M. HECKMEIER. Imaging of dynamics heterogeneities in multiple light scattering. Paru dans P. SEBBAH, éditeur, *Waves and Imaging through Complex Media*, page 349–367. Kluwer Academic, 2001.
- [97] D.J. DURIAN, D.A. WEITZ et D.J. PINE. Multiple Light-Scattering Probes of Foam Structure and Dynamics. *Science*, **252**, 686 (1991).
- [98] P.N. PUSEY et W. van MEGEN. Observation of a Glass Transition in Suspensions of Spherical Colloidal Particles. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(18), 1987 (1987).

- [99] W. van MEGEN, S.M. UNDERWOOD et P.N. PUSEY. Nonergodicity Parameters of Colloidal Glasses. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(12), 1586 (1991).
- [100] J.-Z. XUE, D.J. PINE, S.T. MILNER, X. I. WU et P.M. CHAIKIN. Nonergodicity and light scattering from polymer gels. *Physical Review A*, **46**(10), 6550 (1992).
- [101] L. CIPELLETTI, S. MANLEY, R.C. BALL et D.A. WEITZ. Universal Aging Features in the Restructuring of Fractal Colloidal Gels. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(10), 2275 (2000).
- [102] A. KNAEBEL, M. BELLOUR, J.P. MUNCH, V. VIASNOFF, F. LEQUEUX et J.L. HARDEN. Aging behavior of laponite clay particle suspensions. *Europhysics Letters*, **52**(1), 73–79 (2000).
- [103] L. RAMOS et L. CIPELLETTI. Ultralow Dynamics and Stress Relaxation in the Aging of a Soft Glassy System. *Phys. Rev. Lett.*, **87**(24), 245503 (2001).
- [104] F. SCHEFFOLD, S.E. SKIPETROV, S. ROMER et P. SCHURTENBERGER. Diffusing-wave spectroscopy of non-ergodic media. *Phys. Rev. E*, **63**, 061404 (2001).
- [105] L. CIPELLETTI et D.A. WEITZ. Ultralow-angle dynamic light scattering with a charge coupled device camera based multispeckle, multitaup correlator. *Rev. Sci. Instrum.*, **70**(8), 3214–3221 (1999).
- [106] V. VIASNOFF, F. LEQUEUX et D.J. PINE. Multispeckle diffusing-wave spectroscopy : a tool to study slow relaxation and time-dependent dynamics. *Rev. Sci. Instrum.*, **73**, 2336 (2002).
- [107] S. COHEN-ADDAD et R. HOHLER. Bubble Dynamics Relaxation in Aqueous Foam Probed by Multispeckle Diffusing-Wave Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, **86**(20), 4700 (2001).
- [108] P. HÉBRAUD, F. LEQUEUX, J.P. MUNCH et D.J. PINE. Yielding and Rearrangements in Disordered Emulsions. *Phys. Rev. Lett.*, **78**(24), 4657 (1997).
- [109] P.-A. LEMIEUX, M.U. VERA et D.J. DURIAN. Diffusing-light spectroscopies beyond the diffusion limit : The role of ballistic transport and anisotropic scattering. *Phys. Rev. E*, **57**(4), 4498–4515 (1998).
- [110] L. CIPELLETTI, H. BISSIG, V. TRAPPE, P. BALLESTA et S. MAZOYER. Time-resolved correlation : a new tool for studying temporally heterogeneous dynamics. *Journal of Physics : Condensed Matter*, **15**, S257–S262 (2003).
- [111] H. BISSIG, V. TRAPPE, S. ROMER et L. CIPELLETTI. Intermittency and non-Gaussian fluctuations in the dynamics of aging colloidal gels. *cond-mat/*, page 0301265 (2003).
- [112] E.R. WEEKS et D.A. WEITZ. Properties of Cage Rearrangements Observed near the Colloidal Glass Transition. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(9), 095704 (2002).
- [113] E.R. WEEKS et D.A. WEITZ. Subdiffusion and the cage effect studied near the colloidal glass transition. *Chemical Physics*, **284**, 361–367 (2002).

-
- [114] C.A. ANGELL. Formation of glasses from liquids and biopolymers. *Science*, **267**, 1924 (1995).
- [115] L. BELLON, S. CILIBERTO et C. LAROCHE. Memory in the aging of a polymer glass. *Europhysics Letters*, **51**(5), 551–556 (2000).
- [116] A. VAKNIN et Z. OVADYAHU. Aging Effects in an Anderson Insulator. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(15), 3402 (2000).
- [117] M. ALBA, M. OCIO et J. HAMMANN. Ageing Process and Response Function in Spin Glasses : an Analysis of the Thermoremanent Magnetization Decay in Ag :Mn (2.6 *Europhysics Letters*, **2**(1), 45–52 (1986).
- [118] C. JOSSERAND, A.V. TKACHENKO, D.M. MUETH et H.M. JAEGER. Memory Effects in Granular Materials. *Phys. Rev. Lett.*, **85**(17), 3632 (2000).
- [119] A.J. KOVACS. *Adv. Polym. Sci.*, **3**, 394 (1963).
- [120] L. BERTHIER, L.F. CUGLIANDOLO et J.L. IGUAIN. Glassy systems under time-dependent driving forces : Application to slow granular rheology. *Phys. Rev. E*, **63**, 051302 (2001).
- [121] J.-P. BOUCHAUD. Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems. *J. Phys. I*, **2**, 1705–1713 (1992).
- [122] J.-P. BOUCHAUD et D.S. DEAN. Aging on a Parisi's Tree. *J. Phys. I*, **5**, 265–386 (1995).

Désordre et plasticité dans les milieux divisés : mousses et matériaux granulaires

Les *soft-glassy systems* constituent une classe de matériaux présentant de nombreuses caractéristiques mécaniques communes, liées à la présence d'un désordre structural totalement ou partiellement figé. Ces matériaux regroupent entre autres les suspensions colloïdales et les émulsions concentrées, les polymères vitreux, les mousses et les matériaux granulaires. La réponse mécanique de ces matériaux amorphes dépend a priori fortement de leur état structural particulier.

La première partie du manuscrit traite précisément, dans le cas d'une mousse 2D, du couplage entre structure statique et plasticité sous déformation. La réalisation d'une simulation numérique réaliste nous permet alors de distinguer deux tendances principales : aux petites déformations, les réarrangements de bulles engendrent une relaxation de la structure (élargissement du domaine élastique). Aux fortes déformations, la plasticité permet la relaxation de la contrainte imposée ; les réarrangements se localisent alors sur une mince région dont l'épaisseur typique est la taille d'une bulle. Cette étude nous conduit à proposer un scénario pour l'apparition de la bande de cisaillement.

La seconde partie s'intéresse à la microplasticité des empilements granulaires. Par de faibles vibrations, nous induisons des micro-déplacements de grains que nous détectons par une technique de diffusion multiple de la lumière. La dynamique sondée présente de forts effets de mémoire et s'avère indépendante de la densité de l'empilement. Une interprétation en terme d'évolution lente du réseau de forces permet de rendre compte de l'ensemble de nos observations.

Disorder and plasticity in divided media : foams and granular materials

The strong coupling between static structure and mechanical response in divided media makes difficult their rheological description. The first part of the manuscript addresses this question, through a simulation of the quasistatic shearing of bidimensional foams. Under low deformation, bubble rearrangements relax homogeneously the structure. Under high deformation they are localized in a thin shear band. This study leads us to propose a mechanism for the shear band instability. The second part is dedicated to the micro-plasticity in granular materials. We detect, by multiple light scattering, grains displacement induced by controlled low amplitude vibrations. The probed dynamics exhibits strong memory effects and is independent of the pile density. An interpretation in term of a slow evolution of forces network accounts for our observations.

Mots-clefs :

Mousses, matériaux granulaires, rhéologie, systèmes vitreux