



**HAL**  
open science

# Approche des systèmes distribués par automates cellulaires. Application en mécanique des milieux déformables

Marouane Abdellaoui

► **To cite this version:**

Marouane Abdellaoui. Approche des systèmes distribués par automates cellulaires. Application en mécanique des milieux déformables. Autre. Université de Perpignan, 2003. Français. NNT: . tel-00003494

**HAL Id: tel-00003494**

**<https://theses.hal.science/tel-00003494>**

Submitted on 7 Oct 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*UNIVERSITE DE PERPIGNAN*  
*Laboratoire de Théorie des Systèmes*

*Année : 2003*

*N° : .....*

*THESE*

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PERPIGNAN

*Spécialité : Sciences de l'Ingénieur*

présentée par :

**Marouane ABDELLAOUI**

le 20 juin 2003

# Approche des systèmes distribués par automates cellulaires. Application en mécanique des milieux déformables

Directeur de thèse : A. El JAI

JURY :

L. AFIFI	Professeur à la Faculté des Sciences de Casablanca, Maroc	Rapporteur
A. El JAI	Professeur à l'Université de Perpignan, France	Examineur
S. El YACOUBI	Maître de Conférences à l'Université de Perpignan, France	Examineur
M. SHILLOR	Professeur à l'Université d'Oakland, USA	Examineur
M. SOFONEA	Professeur à l'Université de Perpignan, France	Examineur
Y. TOURE	Professeur à l'Université d'Orléans - IUT de Bourges, France	Rapporteur

A MES CHERS PARENTS.

A MA SOEUR MERIEM ET MES FRERES MOHAMED ET MEHDI.

A TOUS CEUX QUI ME SONT CHERS.

## REMERCIEMENTS

Les travaux de recherches présentés dans ce mémoire ont été effectués au laboratoire de Théorie des Systèmes, à l'université de Perpignan.

L'encadrement de cette thèse a été assuré par Monsieur le professeur Abdelhaq EL JAI, de l'université de Perpignan. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance et ma grande admiration, aussi bien pour sa disponibilité, ses remarques, que pour ses encouragements sans lesquels ce travail n'aurait pu aboutir. Ses qualités humaines et pédagogiques m'ont permis tout au long de nos fructueuses discussions de réaliser ce travail dans d'excellentes conditions.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Madame Samira EL YACOUBI, Maître de conférence (HDR) à l'université de Perpignan pour avoir accepté de juger ce travail, et surtout pour son aide et ses conseils qu'elle m'a toujours prodigués tout au long de ce travail.

Messieurs les professeurs Larbi AFIFI, de la faculté des sciences de Casablanca, Yousoufi TOURE de l'université d'Orléans m'ont fait l'honneur de s'intéresser à cette thèse et d'en être rapporteurs. Qu'ils trouvent ici mes sincères remerciements pour leur participation au jury de thèse et ce malgré leurs nombreuses occupations.

Je manifeste également ma très grande gratitude à l'égard de Messieurs Meir SHILLOR professeur à l'université d'Oakland (USA), et Mircea SOFONEA professeur à l'université de Perpignan, qui ont montré l'intérêt qu'ils portaient à mon travail lors de nos nombreuses entrevues en acceptant de siéger à mon jury.

Je remercie vivement Madame Marie El Jai Maître de conférence (HDR) à l'université de Perpignan, pour sa relecture attentive du manuscrit et ses judicieuses corrections.

Que mes collègues du Laboratoire de Théorie des Systèmes trouvent ici l'expression de mon amitié, pour avoir rendu agréable l'ambiance de ces années passées au laboratoire, et pour les moments de détente que nous avons pu avoir ensemble.

Je tiens enfin à exprimer mes remerciements à tous les miens qui, chacun à sa manière, ont contribué à l'achèvement de ce travail.

**"Tout devrait être fait aussi simple que possible, mais non plus simple"**  
A. Einstein

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation des systèmes spatio-temporels par automates cellulaires</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Définition d'automates cellulaires . . . . .	16
2.2.1	L'espace cellulaire . . . . .	16
2.2.2	Voisinage . . . . .	17
2.2.3	Ensemble des états . . . . .	19
2.2.4	Règles de transition . . . . .	19
2.2.5	Conditions aux limites . . . . .	20
2.2.6	Configuration initiale . . . . .	21
2.3	D'autres classes d'automates cellulaires . . . . .	21
2.3.1	Automates cellulaires non-stationnaires . . . . .	21
2.3.2	Automates cellulaires asynchrones . . . . .	22
2.3.3	Automates cellulaires à mémoires . . . . .	22
2.3.4	Automates cellulaires flous . . . . .	22
2.3.5	Automates cellulaires hiérarchiques . . . . .	22
2.3.6	Gaz sur réseau et automates cellulaires . . . . .	23
2.4	Quelques propriétés d'AC . . . . .	24
2.4.1	Auto-organisation . . . . .	24
2.4.2	Auto-reproduction . . . . .	24
2.4.3	Auto-similarité . . . . .	24
2.4.4	Irréversibilité . . . . .	24
2.4.5	Inversibilité . . . . .	25
2.4.6	Indécidabilité . . . . .	25
2.4.7	Les jardins d'Eden . . . . .	25
2.4.8	Les attracteurs . . . . .	25
2.5	Application du modèle d'AC à un problème de diffusion . . . . .	26
2.5.1	Problème de diffusion . . . . .	27
2.5.2	Simulations . . . . .	36
2.5.3	Problème de réaction diffusion . . . . .	41
2.6	Problème de déformation à travers les automates cellulaires . . . . .	43
2.7	Conclusion . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Lois de conservation et modèles d'automates cellulaires</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
3.2	Lois de conservation . . . . .	46
3.2.1	Conservation de l'énergie et la masse . . . . .	46
3.2.2	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	49
3.2.3	Conservation du moment angulaire . . . . .	51
3.2.4	Conservation de la charge électrique . . . . .	52
3.2.5	Les nouvelles lois de conservation . . . . .	53
3.2.6	Les lois de conservation pour un système de particules . . . . .	53
3.3	Lois de conservation à travers les AC . . . . .	54
3.3.1	Conservation de la masse . . . . .	54
3.3.2	Conservation de quantité de mouvement . . . . .	54
3.3.3	Conservation de l'énergie . . . . .	54
3.3.4	Exemple de loi de conservation : Système de particules constituant un gaz en mouvement . . . . .	55
3.3.5	Application des lois de conservation pour un système de diffusion . . . . .	58
3.4	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Modélisation par automates cellulaires d'un problème de déformation</b>	<b>61</b>
4.1	Description microscopique . . . . .	61
4.2	Déformation élastique des solides . . . . .	62
4.2.1	Le champ des déplacements . . . . .	62
4.2.2	Le champ des contraintes . . . . .	62
4.2.3	Le champ des déformations . . . . .	63
4.2.4	La loi de comportement . . . . .	63
4.3	Problème de déformation élastique . . . . .	66
4.3.1	Introduction . . . . .	66
4.3.2	Préliminaires . . . . .	66
4.3.3	Résumé . . . . .	69
4.4	Le modèle d'automate cellulaire pour un solide élastique . . . . .	69
4.4.1	La force exercée . . . . .	70
4.4.2	Puissance et énergie potentielle . . . . .	71
4.4.3	Le déplacement des particules . . . . .	72
4.4.4	La déformation . . . . .	74
4.4.5	La contrainte . . . . .	77
4.5	Traitement numérique et simulation . . . . .	78
4.5.1	Traitement numérique . . . . .	78
4.5.2	Vérification des lois de conservation . . . . .	80
4.5.3	Simulation de la déformation d'un corps élastique . . . . .	81
4.5.4	Représentation du déplacement du centre de masse . . . . .	84
4.5.5	Représentation de l'énergie potentielle . . . . .	86
4.6	Modélisation par automates cellulaires d'une déformation en 3D . . . . .	88
4.6.1	La force exercée . . . . .	88
4.6.2	Puissance et énergie potentielle . . . . .	88
4.6.3	Le déplacement des particules . . . . .	89
4.7	Traitement numérique . . . . .	91
4.7.1	L'ensemble des états . . . . .	91
4.7.2	Règle de transition . . . . .	91
4.7.3	Voisinage . . . . .	91

4.8	Conclusion . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Problème de contact sans frottement</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction-Motivation . . . . .	93
5.2	Rappel sur les conditions aux limites de contact . . . . .	93
5.2.1	Contact avec compliance normale . . . . .	94
5.2.2	Condition de contact de Signorini . . . . .	94
5.2.3	Contact avec réponse normale instantanée . . . . .	95
5.2.4	Contact sans frottement . . . . .	95
5.3	Problème physique . . . . .	95
5.3.1	Résumé . . . . .	97
5.4	Le modèle d'automate cellulaire . . . . .	97
5.4.1	Le contact . . . . .	97
5.5	Traitement numérique et simulation . . . . .	99
5.5.1	Traitement numérique . . . . .	99
5.5.2	Vérification des lois de conservation . . . . .	100
5.5.3	Simulation d'un contact sans frottement avec une base rigide . . . . .	102
5.5.4	Représentation du déplacement du centre de masse dans le cas de contact . . . . .	103
5.5.5	Représentation de l'énergie potentielle dans le cas de contact . . . . .	105
5.6	Conclusion . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Problème Thermoélastique</b>	<b>109</b>
6.1	Introduction-Motivation . . . . .	109
6.2	Préliminaires . . . . .	109
6.3	Modélisation du Problème Thermoélastique . . . . .	111
6.3.1	La force exercée . . . . .	112
6.3.2	Déformation thermoélastique . . . . .	112
6.4	Traitement numérique et simulation . . . . .	115
6.4.1	Traitement numérique . . . . .	115
6.4.2	Vérification des lois de conservation . . . . .	117
6.4.3	Simulation d'une déformation thermoélastique . . . . .	119
6.4.4	Représentation du déplacement du centre de masse d'un solide thermoélastique . . . . .	121
6.4.5	Représentation de l'énergie potentielle d'un solide thermoélastique . . . . .	123
6.5	Conclusion . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
<b>8</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>





# Chapitre 1

## Introduction

C'est en s'intéressant à l'évolution de constructions graphiques engendrées à partir de règles simples que le mathématicien Stanislas Ulam donna naissance aux automates cellulaires. Son point de départ était un quadrillage, soit un espace à deux dimensions définissant un nombre fini de cellules. Chacune des cellules pouvait avoir deux états : allumé ou éteint. Ulam, a commencé par, "allumait" certaines cellules de façon arbitraire et constituait ainsi une configuration de départ. Partant de cette configuration donnée à un temps  $t_0$ , la configuration ou génération de cellule suivante à  $t + 1$  était déterminée en fonction des règles de voisinage entre cellules. Par exemple, si une cellule donnée était en contact avec deux cellules allumées elle s'allumait, sinon elle s'éteignait. Ulam constata rapidement que ces mécanismes simples permettaient de générer des figures complexes et esthétiques qui, dans certains cas, pouvaient se répliquer. Des règles extrêmement simples permettaient de construire des structures très complexes.

L'idée des automates cellulaires est attribuée à Jon von Neumann et Stanislas Ulam [72]. J.V. Neumann a introduit les automates cellulaires dans le but de construire un système simple capable de se reproduire à la manière d'un organisme vivant. C'était un automate bidimensionnel à 29 états, on pouvait observer le phénomène d'autoreproduction, autrement dit certaines configurations initiales se trouvaient multipliées par deux ou plus après un temps fini d'évolution. Les détails de cet automate cellulaire sont exposés dans [72].

Un autre exemple célèbre d'automate cellulaire est celui de J. Conway [31] qui porte le nom de jeu de la vie. C'est un automate cellulaire bidimensionnel, dans lequel l'état d'une cellule peut être 0 ou 1, pour un voisinage constitué de huit cellules. Les états 1 ou 0 d'une cellule représentent respectivement la présence ou l'absence d'un organisme dans le site occupé par la cellule. Au cours de l'évolution, le passage d'un site de l'état 0 à l'état 1 est interprété comme la naissance de cet organisme, le contraire est interprété comme sa mort. La naissance et la mort de cet organisme sont régies par des règles de transition. Les détails sont exposés dans [31]. Au début des années 80 Stephen Wolfram utilise des automates cellulaires mettant en jeu des règles simples afin d'étudier la complexité dans la nature. Il a systématisé cette approche de la complexité dans son dernier livre *A New Kind of Science* (2002) [96] et a contribué au domaine des automates cellulaires en automatisant l'exploration.

Actuellement les travaux sur les automates cellulaires ont pris une orientation différente. On les utilise comme outil de modélisation des systèmes physiques [96, 27, 86] biologiques [40, 36, 37, 44] et informatiques [64]. Notre choix des automates cellulaire est motivé par

le fait qu'ils peuvent représenter un point de vue fondamentalement différent de celui des équations aux dérivées partielles (E.D.P) pour la modélisation des phénomènes naturels [91, 46, 27]. Lorsqu'ils font apparaître des variables d'entrée-sortie, ces systèmes sont dits distribués. Dans le domaine d'analyse et de contrôle des systèmes distribués, beaucoup de travaux ont été développés, particulièrement sur les notions d'observabilité, de contrôlabilité, de détectabilité, de stabilisabilité, etc. Les E.D.P. fournissent des relations entre les variations spatiales et temporelles de certaines grandeurs caractérisant l'état du système, ces grandeurs ainsi que l'espace et le temps sont supposées continues, l'objectif est donc la prédiction des valeurs numériques de ces grandeurs. En revanche dans les automates cellulaires l'espace et le temps sont discrets, les cellules ne peuvent prendre qu'un nombre fini d'états et l'objectif est de reproduire un comportement analogue à celui du système observé.

Les automates cellulaires peuvent fournir beaucoup de renseignements sur les systèmes, par exemple un fluide au niveau microscopique est un ensemble de particules, qui à grande échelle, peut être considéré comme continu et donc peut être décrit par les équations de l'hydrodynamique. La forme de ces équations est insensible aux détails microscopiques, les changements des lois d'interactions moléculaires peuvent affecter certains paramètres comme la viscosité mais non la forme des équations macroscopiques, donc les équations hydrodynamiques peuvent décrire le comportement global sans reproduire exactement les détails de la dynamique moléculaire. Des travaux récents montrent que le comportement global de certains automates cellulaires (AC) peut être décrit par des équations analogues à celles de Naviers-Stokes [27, 21, 52, 76, 86]. A partir de là on peut constater que les automates cellulaires présentent un grand intérêt pour la physique car ils constituent des systèmes dynamiques à espace/temps discret. Rappelons qu'un système dynamique est un système dans lequel les variables changent au cours du temps en fonction de leur état actuel. Souvent le comportement des systèmes dynamiques est régi par un système d'équations différentielles non linéaires, ce qui complique leur analyse ainsi que leur traitement numérique. Un des grands avantages des AC réside dans leur facilité de mise en oeuvre.

Notre étude s'inscrit dans une activité de recherche concernant la description du comportement de certains problèmes de mécanique des milieux déformables. Les thèmes de recherche de notre équipe se subdivisent en trois axes : Modélisation, Analyse et Contrôle des Systèmes.

Notre accent est mis sur la modélisation de systèmes spatio-temporels tels que des systèmes mécaniques. En effet, notre travail consiste à modéliser et à simuler numériquement des systèmes complexes tels que la déformation d'un solide élastique, le contact sans frottement avec une base rigide et la déformation d'un solide thermoélastique.

La mécanique des milieux déformables a fait l'objet de plusieurs applications industrielles, on peut citer à titre d'exemple la déformation thermomécanique avec contact d'un pneumatique en mouvement (voir figure (1.1)). Etudier ce genre de problème nous permet d'accélérer le cycle de conception d'un pneu, celui-ci devant répondre à un certain cahier des charges en terme de performances, mais aussi de mieux appréhender les phénomènes thermo-mécaniques se produisant au sein du pneu, et donc d'améliorer ses performances.

Les difficultés rencontrées par les physiciens sont donc de deux types, des difficultés calculatoires et mathématiques, mais aussi des difficultés de modélisation, c'est-à-dire transformer un problème réel en un problème mathématique. Si le problème mathématique est bien



FIG. 1.1 – *Exemple de déformation-contact d'un pneumatique*

posé, il sera alors possible de le résoudre et de comparer les résultats obtenus avec l'expérience.

Pour élaborer un modèle valable d'automates cellulaires permettant de décrire des phénomènes de déformation et de contact, nous devons posséder des connaissances variées allant des propriétés sur les équations aux dérivées partielles non linéaires à l'analyse numérique, en passant par la mécanique des milieux continus et la thermodynamique. Parmi les références importantes dans le domaine de la mécanique des milieux continus nous citons [16, 25, 45]. Pour l'analyse appliquée à la mécanique de contact on pourra lire [77, 80, 81, 84].

Le problème du solide a été fructueusement abordé par les automates cellulaires. Les premiers travaux sur la déformation et la fracture d'un solide ont été traités par Chopard [27, 28]. Pour notre part les nouveautés qu'apportent les résultats développés dans cette thèse sont la modélisation et la simulation par automates cellulaires d'un couplage déformation-contact sans frottement avec une base rigide [6, 3]. Ce résultat a été étendu au cas d'une déformation thermoélastique [4].

La thèse est composée de cinq principaux chapitres.

Le deuxième chapitre consiste en une présentation générale de l'approche utilisée. Une application des modèles d'automates cellulaires pour représenter un système bidimensionnel de type diffusion et réaction diffusion en considérant différents cas de figures, a été évoquée. La description du problème de déformation par le biais des automates cellulaires est présentée à la fin du chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la définition de toutes les lois de conservation de la physique. Nous avons donnée une forme aux lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie mécanique en utilisant les modèles d'automates cellulaires. Pour tous les modèles d'automates cellulaires considérés dans les chapitres suivants, nous avons essayé, pour chaque cas, de vérifier les lois de conservations liées aux problèmes physiques étudiés.

Dans le quatrième chapitre nous proposons un modèle simple d'automates cellulaires permettant de décrire à l'échelle microscopique le comportement élastique du solide étudié y compris le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte. Les simulations numériques sont réalisées grâce à des codes écrits sous Matlab, afin de visualiser le déplacement et l'énergie potentielle des particules constituant le solide élastique au cours de sa déformation. Un modèle simple de déformation en 3D a été évoqué à la fin du chapitre.

Le cinquième chapitre est consacré à un problème dynamique de contact sans frottement d'un solide élastique avec une base rigide. Le modèle d'automates cellulaires proposé reproduit un comportement analogue à celui du contact sans frottement. Ce modèle a été validé numériquement et les résultats de simulation sont exposés.

Dans le sixième chapitre nous avons étendu les résultats des chapitres précédents au cas d'une déformation thermoélastique. Dans ce cas la déformation est due principalement à une source de chaleur de température  $\theta$ . Le modèle d'automates cellulaires élaboré tient compte du phénomène de diffusion de la chaleur. Les simulations sont présentées à la fin du chapitre.

# Chapitre 2

## Modélisation des systèmes spatio-temporels par automates cellulaires

### 2.1 Introduction

Vers le début des années 70, le développement de l'informatique a été à l'origine d'un fort engouement pour les modèles d'automates cellulaires, introduits auparavant par Stanislas Ulam et Von Neumann [72]. Le plus célèbre d'entre eux est sans aucun doute le Jeu de la Vie de Conway [31], qui semble avoir initialisé l'ère des simulations informatiques.

Vers les années quatre vingts avec les travaux de Stephen Wolfram [96, 97], les automates cellulaires sont devenus un outil à vocation générale. Ils interviennent actuellement dans plusieurs disciplines allant des mathématiques à l'informatique en passant par la physique. Par ailleurs les recherches sur les automates cellulaires concernent de nombreuses applications parmi lesquelles les systèmes biologiques et écologiques constituent les domaines où l'on compte un grand nombre de publications [32, 46].

Les sciences physiques et chimiques furent naturellement les plus prédisposées à exploiter les possibilités d'utilisation des automates cellulaires comme outil de modélisation. Les applications concernent une gamme de domaines divers (écoulement de fluide et granulaire, percolation, modèle d'Ising, modèle cellulaire de gaz, etc.). Citons encore pour exemples les travaux de Hardy et al, 1976 [55] où l'équation de Navier-stokes a été approchée par un modèle simple d'automates cellulaires. Toffoli [86] en 1984 a utilisé cette approche pour élaborer un modèle reproduisant l'équation des ondes. Une autre étude a été réalisée par Chen et ses collaborateurs en 1990 [23], dont le but est de résoudre l'équation de Poisson, à l'aide des automates cellulaires, avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Hershbach [57] a proposé une solution de l'équation de Boltzmann dans le cas monodimensionnel basée sur une règle probabiliste d'automate cellulaire.

Dans cette évolution, les premiers modèles de fluides "volumiques" sont ainsi apparus sous la forme d'automates cellulaires. L'espace est donné sous la forme d'un réseau régulier : on se donne un ensemble de sites reliés entre eux par un graphe de voisinage de portée unitaire.

Les premiers automates cellulaires bidimensionnels ont naturellement été construits sur des grilles carrées avec un graphe de 4 ou de 8 voisins. Chaque site est constitué de cellules binaires. Chaque cellule correspond à un emplacement possible pour un élément constitutif du système simulé. La valeur (ou contenu) d'une cellule vaut ainsi 1 lorsqu'elle est occupée, et 0 lorsqu'elle est libre. Le contenu des cellules est libre de représenter les individus d'une population biologique, les particules élémentaires d'un fluide, des molécules en cours de réaction, ou encore plus simplement les grains d'une texture binaire synthétisée par l'automate [96]. L'état d'un site est caractérisé par les nombres d'occupation de ses cellules ; il existe donc un nombre fini de configurations pour tout site. La valeur d'un site consiste en un nombre entier formé par concaténation des contenus binaires des cellules du site. Ce nombre compris entre 0 et 1 n'a en général comme seule signification que le codage d'une configuration donnée, avec unicité. Cependant, par extension, des automates cellulaires fondés directement sur la valeur des sites ont été conçus : des concentrations ou des pressions locales peuvent par exemple être représentées sous forme de nombres entiers, avec quelques normalisations. Dans ce dernier cas, c'est la notion de cellule binaire qui n'a plus de signification. Pour une approche plus détaillée des automates cellulaires, on consultera par exemple la référence [98].

Remarquons une différence importante par rapport aux systèmes de particules déjà abordés : dans un automate cellulaire, le volume du système peut être rempli de particules avec une densité ou concentration donnée. Alors qu'un système de particules usuel se fonde sur une liste illimitée de particules associées à leur position dans un espace continu, la taille d'un automate cellulaire correspond à son nombre de cellules, qui dépend directement des dimensions du champ de simulation. On passe ainsi de la notion de particules à celle d'emplacements en nombre finis. En contrepartie, la structure d'un automate cellulaire permet d'accéder directement aux particules présentes dans une région donnée de l'espace. Ce point constitue le principal avantage des automates cellulaires. N'oublions pas qu'il s'agit de modèles qui ont avant tout été conçus en réponse à de sévères contraintes informatiques. L'objectif premier résidait dans la mise au point de modèles effectivement opérationnels, dont le niveau de complexité était compatible avec les moyens de calcul alors à disposition. La notion de calculabilité s'avère ainsi primordiale ; c'est elle qui influence souvent la mise au point d'un modèle. L'évolution d'un automate cellulaire est fondée sur l'application de transformations locales, à partir d'un état initial. Ces transformations sont appelées les opérateurs de l'automate ; elles sont appliquées séquentiellement, dans un processus itératif. Tous les sites du réseau sont traités simultanément en appliquant le même ensemble de règles d'évolution. Une transformation quelconque peut être basée sur une table pré-calculée, qui à partir de la configuration d'un site, donne directement sa nouvelle configuration après l'application de la transformation. Ces structures de données sont appelées des look-up tables ; les automates cellulaires leur doivent en grande partie leur rapidité d'exécution. Par ailleurs, l'accès direct aux sites voisins permet d'appliquer efficacement les règles locales.

Les automates cellulaires forment une catégorie de modèles entièrement discrets :

Les éléments dont on simule l'évolution sont représentés sous la forme d'ensembles dénombrables : individus, particules, ou nombres entiers ;

L'espace  $y$  est couvert par un réseau reliant un ensemble fini de positions ;

Le temps est mesuré comme dans tout processus itératif, en nombre d'évolutions élémentaires.

Il en résulte qu'un automate cellulaire peut évoluer indéfiniment, en évitant totalement les erreurs d'arrondis qui caractérisent habituellement les modèles à base de nombres décimaux.

Pour la simulation d'un fluide par exemple, l'automate fonctionne à partir d'un unique opérateur de diffusion. Si le modèle fait intervenir des concentrations locales, la diffusion peut être réalisée de manière simple en remplaçant la concentration en un site par la moyenne des concentrations de son voisinage [91]. Dans le cas d'un modèle à base de particules, celles-ci peuvent à présent interagir puisqu'elles se trouvent toutes simultanément dans le système, contrairement aux marcheurs aléatoires déjà décrits dans [27]. Dans le cas le plus simple, chaque particule se déplace aléatoirement entre sites voisins, avec par exemple la condition qu'il reste une cellule libre dans le site destination. Ce point nous amène à introduire les gaz sur réseau, qui constituent une classe particulière d'automates cellulaires de conception plus récente. Grâce à leur structure, ils représentent bien plus qu'un modèle de diffusion, comme nous allons l'évoquer au cours de ce chapitre.

Pour mieux comprendre ce qu'est un automate cellulaire, prenons un exemple :

Soit un réseau cellulaire monodimensionnel où chaque élément appelé cellule et notée  $c_i$  peut prendre une valeur dans un ensemble d'état  $\mathcal{E} = \{0, 1\}$  et ayant comme voisinage  $v(c_i) = \{c_{i-1}, c_i, c_{i+1}\}$ . On considère la fonction de transition d'état donnée par la formule :

$$e_{t+1}(c_i) = f(e_t(c_{i-1}), e_t(c_i), e_t(c_{i+1})) = e_t(c_{i-1}) + e_t(c_i) + e_t(c_{i+1})$$

Une représentation de cette règle peut être mise sous forme de table de transition d'état :

$e_t(c_{i-1})$	$e_t(c_i)$	$e_t(c_{i+1})$	$e_{t+1}(c_i)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Un automate cellulaire est un système dynamique discret, de conception simple basé sur la donnée d'un réseau uniforme qui définit l'espace cellulaire. Chaque élément de cet espace, appelé cellule, peut prendre plusieurs états possibles dans un ensemble discret donné. L'état d'une cellule est susceptible de changer à des moments fixes, au moyen d'une règle de transition fondée sur la configuration de l'espace d'échange entre cette cellule et ses voisins, appelé voisinage.

Le fonctionnement d'un automate cellulaire peut être déterministe ou probabiliste.

On peut donc résumer les caractéristiques principales d'un automate cellulaire comme étant un ensemble des états, un concept de voisinage et un ensemble de règles de transition.



L'état d'un automate cellulaire est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les cellules à un instant donné, et qui peut être décrit par un nombre, une propriété, une couleur... Toute cellule  $c$  possède un voisinage  $v$  qui constitue l'ensemble des cellules qui échangent des informations avec la cellule  $c$ .

L'état de la cellule  $c$  au temps  $t+1$  est déterminé par une règle de transition qui dépend de l'état de  $c$  et de celui des cellules du voisinage, au temps  $t$ .

## 2.2 Définition d'automates cellulaires

Un automate cellulaire peut être défini par la donnée d'un quadruplet  $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, v, f)$  dont les différents éléments sont décrits ci-dessous :

### 2.2.1 L'espace cellulaire

L'espace cellulaire  $\mathcal{T}$  est un réseau de dimension  $d$  formé par des cellules  $c$  disposées selon un arrangement qui dépendra de la dimension de l'espace et de la forme choisie pour les cellules. C'est  $\mathcal{T}$  qui définit l'espace cellulaire. L'approche habituelle pour définir le réseau cellulaire est de le présenter comme une grille rectangulaire mono ou bidimensionnelle. En outre cette approche est très simple à implémenter sur ordinateur puisque ce type de réseau est naturellement traduit en vecteurs ou tableaux.

Dans le cas monodimensionnel,  $\mathcal{T}$  se limite à une corde linéaire où les éléments peuvent être disposés en ligne droite ou autour d'un tore. Le cas bidimensionnel est le plus intéressant, le réseau peut être triangulaire, carré ou hexagonal (voir figure(2.1)). En dimension trois, les réseaux en général ont une géométrie cubique.

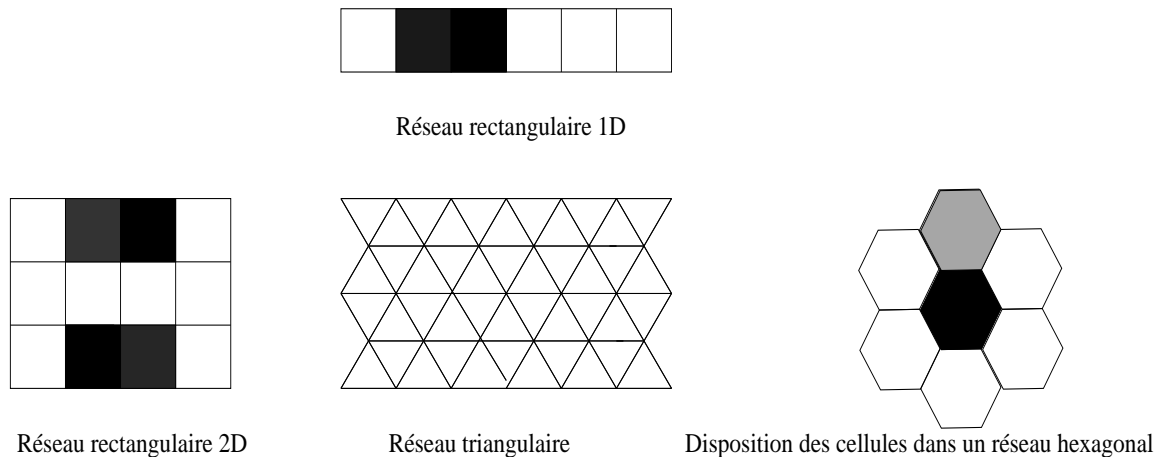


FIG. 2.1 – Formes typiques de réseau cellulaire

Une transformation géométrique d'un réseau triangulaire à un réseau rectangulaire est couramment utilisée (figure(2.2)).

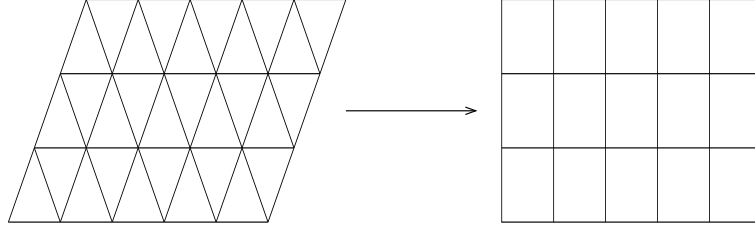


FIG. 2.2 – Un moyen de convertir un réseau triangulaire à un réseau rectangulaire

### 2.2.2 Voisinage

$v$  est un ensemble de cellules avec lesquelles une cellule donnée  $c$  peut interagir, appelé voisinage. Le passage d'un état à l'autre peut être régi à la fois par des règles et par le voisinage. Ces deux points sont les facteurs principaux du changement de la configuration du treillis de l'instant  $t$  à l'instant  $t + 1$ .

Dans le cas monodimensionnel le voisinage peut être représenté par la figure(2.3). En deux dimensions quelques voisinages sont proposés (figure(2.4)) et (figure(2.5)). Cependant les voisinages les plus utilisés sont ceux de type von Neumann et Moore pour des raisons de simulation.

La taille et la forme du voisinage sont fixées suivant le type d'application. On définit sur le treillis  $\mathcal{T}$ , une distance équivalente à la norme  $L_\infty$  par :

$$L(c, c') = \text{Min}\{l(c, c'), c' \in \mathcal{T}\}$$

où  $l(c, c')$  est une ligne polygonale reliant les cellules  $c$  et  $c'$ . Le voisinage d'une cellule  $c$ , de rayon  $R$  peut être donné par :

$$v(c) = \{c' \in \mathcal{T} / L(c, c') \leq R\}$$

Dans le cas d'un treillis carré bidimensionnel, les différents voisinages décrits précédemment peuvent être donnés à partir des ensembles  $v(c_{i,j})$  associés à la cellule  $c_{i,j}$  par :

$$v(c_{i,j}) = \{c_{k,l} \mid |k - i| + |l - j| \leq R\}$$

C'est le cas von Neumann

et

$$v(c_{i,j}) = \{c_{k,l} \mid |k - i| \leq 1 \text{ et } |l - j| \leq R\}$$

C'est le cas Moore

où  $R$  définit le rayon du voisinage.

Le voisinage de type von Neumann modifié (figure (2.4)) correspond à un voisinage de Moore auquel on ajoute les 4 voisins les plus proches des voisins de Von Neuman qui ne sont pas déjà inclus dans le voisinage de Moore. Ce voisinage revient à construire des sous-structures d'interaction établissant des liens directs avec tous les voisins séparés de l'automate par au plus un automate sur le réseau carré.

D'autres types de voisinages peuvent être définis de façon arbitraire et le choix de ceux-ci peut affecter l'évolution de l'automate cellulaire. On peut citer à titre d'exemple les voisinages de type Cole [30] ou Smith [83] (figure(2.5)).



Voisinages von Neumann et Moore dans le cas 1D

FIG. 2.3 – *Voisinage dans le cas de 1D*

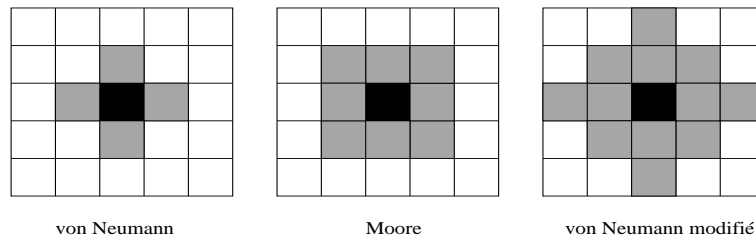


FIG. 2.4 – *Formes de voisinage les plus fréquents*

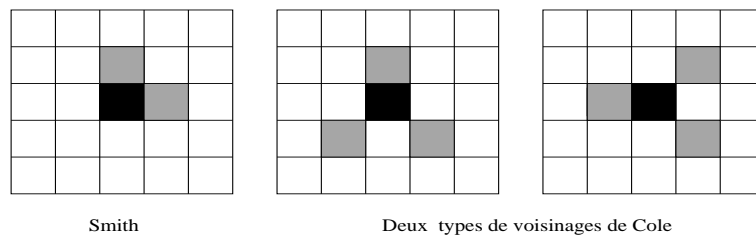


FIG. 2.5 – *Voisinages de Smith et de Cole*

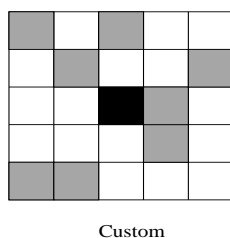


FIG. 2.6 – Voisinage de Custom

Des types arbitraires de voisinage peuvent également être construits (figure(2.6)).

### 2.2.3 Ensemble des états

L'ensemble supposé fini d'état  $\mathcal{E}$  contient des valeurs susceptibles d'être prises par l'état d'une cellule. C'est en général un anneau cyclique avec  $\text{card } \mathcal{E} = k$ .

On parle également de configuration d'un automate cellulaire donnée par l'application  $e : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$  qui fait correspondre à chaque cellule  $c$  de  $\mathcal{T}$  une valeur prise dans  $\mathcal{E}$  qui constituera l'état de la cellule  $c$  à l'instant  $t$ .

La liste des états peut être désignée par des lettres, ou par une combinaison de valeurs entières ou encore définie par une condition, une couleur, etc...

Exemple :

$$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots, k_{\mathcal{E}} - 1\} \text{ avec } k_{\mathcal{E}} \in \mathbb{N}$$

ou

$$\mathcal{E} = \{\text{blanc, noir...}\}$$

ou encore

$$\mathcal{E} = \{\text{vrai, faux}\}$$

L'ensemble des états peut contenir autant d'éléments qu'il est nécessaire pour simuler le phénomène étudié. Ainsi, ce choix est fortement lié aux modèles considérés.

### 2.2.4 Règles de transition

Le choix des règles de transition est un point important pour la construction d'un automate cellulaire. C'est ce qui définit la dynamique locale ou globale de l'automate cellulaire. Ces règles dépendent de la géométrie du réseau, du voisinage, de l'ensemble des états, et peuvent être déterministes ou probabilistes.

#### Règles déterministes

Soit  $\mathcal{T}$  un réseau régulier et  $v$  un type quelconque de voisinage. Une fonction  $g$  définit une règle déterministe si elle est définie par

$$\forall t \in I, \exists ! e_i \in \mathcal{E} \text{ tel que } g(e_t(v)) = e_i$$

où  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  est l'ensemble d'état et  $I$  un intervalle de temps discret.

Si  $v$  est de taille  $n$ ,  $e_t(v)$  est un élément de  $\mathcal{E}^n$ ,  $\forall t \in I$ . Donc  $g$  est définie dans  $\mathcal{E}^n$  et est à valeurs dans  $\mathcal{E}$ .

Il existe des formes particulières de règles déterministes. Considérons la fonction  $g : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}$  définie par

$$g(e_t(v(c))) = \varphi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i e_t(c_i) \right) = e_{t+1}(c)$$

où  $\alpha_i$  sont des entiers constants et  $\varphi$  est une application à valeurs dans  $\mathcal{E}$ . Ainsi on obtient  
-une classe de règles d'automates cellulaires dites **additives** dans le cas où  $\varphi$  est une application linéaire.

-une classe de règles d'automates cellulaires dites **totalistes** dans le cas où  $\alpha_i = 1$ ,  $\forall i$ .

### Règles probabilistes

Les règles probabilistes forment une classe très importante de règles de transition. Dans ce cas la fonction  $g$  n'a pas exactement un seul résultat pour chaque type de voisinage mais fournit une ou plusieurs valeurs possibles avec des probabilités associées. On peut décrire cette règle par une fonction de transition  $F$  définie par

$$F : \begin{array}{l} \mathcal{E}^n \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1] \\ (e_t(v), e_i) \rightarrow p_i \end{array}$$

où  $p_i$  est la probabilité d'obtenir l'état  $e_i$  partant d'une configuration de voisinage  $v$  de taille  $n$  donnée par  $e_t(v) \in \mathcal{E}^n$  avec

$$\sum_{i=1}^{k'} F(e_t(v), e_i) = 1$$

étant le nombre de tous les états envisagés.

Des exemples seront donnés dans la suite de ce chapitre.

## 2.2.5 Conditions aux limites

Pour une caractérisation spatiale complète d'un automate cellulaire, on a besoin de définir des conditions aux limites du réseau. En théorie, l'espace cellulaire peut être infini autrement dit non borné. Comme pour tout système d'évolution, les conditions aux limites doivent être précisées pour la simulation des modèles dans le cas où le domaine spatial est borné. Celles-ci peuvent être périodiques, réflexives, ou fixes (voir figure (2.7)).

**Les conditions aux limites périodiques.** Elle sont devenues, dans la littérature, les conditions aux limites par défaut. Le treillis est vu comme un tore où les cellules les plus à gauche jouent le rôle de voisines des cellules les plus à droites et vice-versa, les cellules du haut jouent le rôle de voisines des cellules du bas et vice-versa.

**Les conditions aux limites réflexives.** Dans cette solution, le réseau est également

augmenté d'un ensemble convenable de cellules virtuelles rangés sur ses bords. Les cellules situées sur les bords du réseau ont comme voisines les images d'elles mêmes.

**Les conditions aux limites fixes.** Elles correspondent aux conditions de Dirichlet rencontrées dans la résolution des équations aux dérivées partielles. La solution est basée sur le fait de rajouter sur les bords du réseau un ensemble de cellules virtuelles. On impose alors une valeur d'état constante à ces cellules ajoutées.

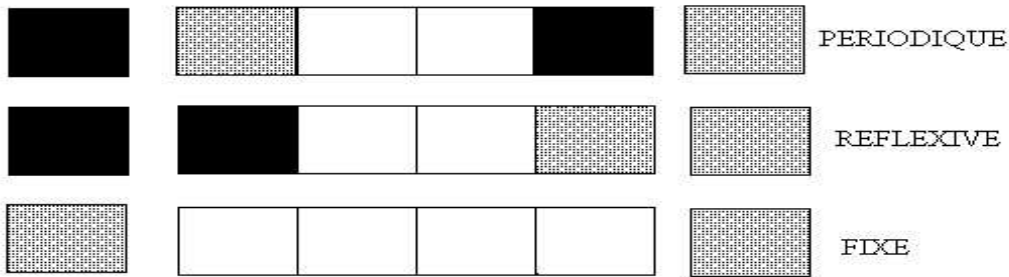


FIG. 2.7 – *Représentation de quelques conditions aux limites*

## 2.2.6 Configuration initiale

Le point de départ d'une simulation est une configuration initiale définissant, pour toute cellule  $c$ , un état  $e_0(c)$ . Cette configuration peut être considérée de façon aléatoire, ou donnée par une fonction connue ou à estimer, définie par

$$e_0 : \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} \\ c \rightarrow e_0(c) \end{array}$$

où  $e_0(c)$  est l'état de la cellule  $c$  à l'instant  $t=0$ .

## 2.3 D'autres classes d'automates cellulaires

### 2.3.1 Automates cellulaires non-stationnaires

Les cellules d'un automate cellulaire non-stationnaire mettent à jour leurs états suivant une règle de la forme

$$e_{t+1}(c) = g_t(e_t(v_t(c)))$$

où  $g_t$  et  $v_t$  dépendent du temps

$$g_t : \varepsilon \times T \rightarrow \varepsilon$$

$$v_t : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^n$$

T un intervalle de temps donné. Les détails sont exposés dans [2, 63].

### 2.3.2 Automates cellulaires asynchrones

Un automate cellulaire est dit asynchrone lorsque la mise à jour des états de ses cellules n'est pas simultanée. Ce type d'AC est souvent utilisé dans les machines cellulaires [20, 79].

### 2.3.3 Automates cellulaires à mémoires

Leur fonction de transition d'état est du type

$$e_{t+1}(c) = f(e_t(v(c)), e_{t-1}(v(c)), \dots, e_{t-m}(v(c)))$$

où m est appelée capacité de mémoire de la cellule c [43, 90].

### 2.3.4 Automates cellulaires flous

C'est une version continue des automates cellulaires introduite par l'investigation des comportements complexes [43] et l'étude de l'impact des perturbations (sources de bruit, erreurs de calcul,...) sur l'évolution de l'automate cellulaire discret [41].

Un automate cellulaire flou est noté

$$\mathcal{A} = (\mathcal{T}, [0, 1], v, f) \text{ où :}$$

$\mathcal{T}$  est un réseau de dimension d.

L'état de chaque cellule est dans l'intervalle [0,1].

$v : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^n$  est un type de voisinage de taille n.

$f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  est la fonction de transition.

$f$  est une fonction à valeurs réelles représentant la fonction discrète sur  $\mathcal{E}$  en se basant sur des principes de logique flou. Les automates cellulaires flous sont appliqués à la théorie d'automates depuis longtemps [62, 63, 79, 90].

### 2.3.5 Automates cellulaires hiérarchiques

Soient  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$  une suite finie d'automates cellulaires monodimensionnels avec :

$$\mathcal{A}_i = (\mathcal{T}_i, \mathcal{E}, v_i, f_i), \quad 0 \leq i \leq p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

- $\mathcal{T}_i$  : un treillis de  $p_i$  cellules,

- $\mathcal{E}$  : un ensemble d'état de cardinal  $k$ ,
- $v_i$  : un voisinage de taille  $n_i$
- $f_i$  : une fonction de transition.

♣ Il y a  $k^{n_i}$  configurations possibles du voisinage pour  $\mathcal{A}_i$  qui peuvent être classées dans un ordre lexicographique par :

$$v : \begin{array}{ll} \mathcal{E}^{n_i} & \rightarrow \{1, 2, \dots, k^{n_i}\} \\ w & \rightarrow j \end{array}$$

$v$  associe à chaque configuration possible du voisinage un entier  $j$ .

♣ La fonction

$$f_i : \begin{array}{ll} \mathcal{E}^{n_i} & \rightarrow \mathcal{E} \\ j & \rightarrow v_{i,j} \end{array}$$

(où  $j$  réfère à la  $j^{\text{ème}}$  configuration du voisinage)

est identifiée par le vecteur  $V_i = (v_{i,j})_{1 \leq j \leq k^{n_i}}$ .

Ainsi une cellule passe à l'état  $v_{i,j}$  au temps  $t+1$  si son voisinage est à l'ordre  $j$  à l'instant  $t$ .

La construction d'un automate cellulaire hiérarchique  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p)$  est obtenue par le couplage de  $\mathcal{A}_i$  avec  $\mathcal{A}_{i+1}$  comme suit :

Le vecteur  $V_i$  est identifié à une configuration global de  $\mathcal{A}_{i+1}$ . Chaque cellule  $c_i$  de  $\mathcal{A}_i$  calcule son état à l'instant  $t+1$  selon la formule :

$$e_{t+1}(c_i) = f(e_t(v_i(c_i)), e_{i+1}^t(\mathcal{T}))$$

où  $i = 0, \dots, p-1$ , et  $e_{i+1}^t(\mathcal{T})$  désigne la configuration de  $\mathcal{A}_{i+1}$  à l'instant  $t$ . Les détails sont exposés dans [2].

### 2.3.6 Gaz sur réseau et automates cellulaires

Le modèle de Gaz sur réseau (Lattice Gaz Automata) est connu plus sous le nom de **HPP** [55]. C'est un modèle entièrement discret basé sur un réseau à symétrie carrée où les noeuds sont les seules positions accessibles aux particules du gaz. Les particules sont supposées avoir la même masse et un champ de vitesse unitaire. Le principe d'exclusion est imposé dans un site donné et une direction donnée, il ne peut y avoir qu'une seule particule.

Dans ce modèle, les lois de conservation sont respectées, à savoir la conservation du moment cinétique et du nombre total de particules. L'évolution du système d'un pas de temps à l'autre se fait en deux étapes :

**Propagation** : chaque particule se déplace dans la direction de son vecteur vitesse vers le noeud immédiatement voisin.



**Collision** : elle traduit le changement éventuel de la vitesse de particule si la configuration du noeud le permet.

Le modèle **HPP**, vu son isotropie limitée ne peut simuler efficacement des phénomènes dont les particules ont des degrés de libertés plus grands. Une solution réside dans le modèle **FHP**[42, 98] qui repose sur les mêmes bases que le modèle **HPP** mais dont la symétrie hexagonale offre une large adaptation et réalisme dans la simulation des phénomènes réels.

## 2.4 Quelques propriétés d'AC

La dynamique des automates cellulaires révèle plusieurs propriétés fondamentales dans le monde réel. Certaines propriétés sont présentées ci-dessous.

### 2.4.1 Auto-organisation

L'évolution des automates cellulaires accuse une tendance à l'organisation qui s'illustre par l'émergence de structures.

### 2.4.2 Auto-reproduction

C'est la propriété essentielle de la vie dont le mécanisme, les conditions de réalisation et autres aspects sont à élucider. Elle a trouvé dans l'approche par automates cellulaires un moyen d'investigation naturel simple. Cette propriété d'auto-reproduction permet de classer les automates cellulaires en deux grandes catégories :

- Les automates cellulaires actifs, c'est à dire auto-reproducteurs.

Les automates cellulaires actifs sont auto-reproducteurs dans le sens où ils contiennent une sous-configuration qui se comporte en **copieur universel** dirigeant activement la réplification assurée par une fonction de transition appropriée.

- Les automates cellulaires passifs.

Les automates cellulaires passifs sont ainsi nommés car leur reproduction est provoquée par la règle de transition et non pas par les caractéristiques de la configuration initiale. Le jeu de la vie est un exemple d'automate cellulaire passif.

### 2.4.3 Auto-similarité

Un modèle d'automate cellulaire est dit auto-similaire lorsque ses portions agrandies sont indifférenciables de la totalité.

### 2.4.4 Irréversibilité

Un automate cellulaire est dit irréversible si il possède au moins une configuration qui n'a pas d'antécédent ou n'en a plus qu'un seul.

### 2.4.5 Inversibilité

On appelle automate cellulaire inversible, celui qui permet de revenir aux états précédents. Un exemple simple d'automate inversible est celui de l'automate déplacement Est. Chaque case peut avoir deux états, 0 et 1 (vide ou plein). L'automate cellulaire regarde l'état de la case voisine Ouest, s'en souvient et agit en le prenant pour nouvel état de la case. Un réseau d'automates déplacement Est sur un plan a pour effet, d'une génération à l'autre, de déplacer d'une case vers l'Est la configuration initiale. Son inverse est l'automate cellulaire déplacement Ouest.

### 2.4.6 Indécidabilité

L'une des caractéristiques importantes des automates cellulaires est le caractère d'indécidabilité qui touche beaucoup de leurs propriétés.

Ainsi, déterminer si un automates cellulaire possède un inverse et indécidable : il ne sera jamais possible d'écrire un programme prenant en paramètres un automate quelconque et pouvant décider si oui ou non cet automate possède un inverse.

De la même façon, l'avenir d'un automate cellulaire est indécidable. On n'a pas de méthode générale permettant de déterminer si un automate ne va pas s'éteindre au bout d'un certain nombre de générations ou s'il va se stabiliser. Les détails sont exposés dans [2, 20, 96].

### 2.4.7 Les jardins d'Eden

Un Jardin d'Eden est l'ensemble des configurations qui ne possède pas d'antécédent. Cela ne se produit bien entendu pas avec les automates cellulaires inversibles. De même, par exemple, une configuration Jardin d'Eden ne peut être un attracteur car elle ne peut apparaître que comme première configuration d'une suite de configurations. L'aspect remarquable de ce concept est que la question de l'existence de Jardin d'Eden est indécidable. Cela a été démontré par J. Kari en 1990.

### 2.4.8 Les attracteurs

Les attracteurs des automates cellulaires [2, 20] sont des configurations qui reviennent indéfiniment. Etant des cas particuliers d'automates cellulaires, ils permettent des études intéressantes sur les automates et la démonstration de certaines de leurs propriétés.

Ainsi, J. Kari a démontré que toute propriété de l'ensemble limite (ensemble des attracteurs) est vraie pour certains automates et fausses pour d'autres est indécidable. Ce résultat est finalement le plus extraordinaire de tous, car il nous montre que nous ne saurons jamais rien à l'infini des réseaux d'automates cellulaires.

## 2.5 Application du modèle d'AC à un problème de diffusion

Généralement on peut distinguer dans les modèles d'automates cellulaires pour le phénomène de diffusion deux types d'approches :

1. La première est une approche microscopique du système, inspirée par le mécanisme réel de la diffusion qui n'est que le résultat de l'effet global des mouvements aléatoires des molécules. Cette réalité est idéalisée dans le cadre d'un système où les molécules sont perçues comme des particules simples évoluant dans un environnement basé sur :

♠ Un treillis discret régulier,

♠ Des déplacements aléatoires de longueurs fixées que peuvent exécuter les particules dans un ensemble de directions possibles à chaque pas de temps.

♠ Un principe d'exclusion assurant qu'il ne peut y avoir plus d'une particule dans un site et une direction donnés.

Une règle de transition régissant l'évolution d'un phénomène de diffusion est divisée en deux phases :

**Phase de propagation** : chaque particule se déplace avec une vitesse bien définie vers une cellule voisine.

**Phase de redistribution** : les collisions dans le système réel qui conduisent à une ré-orientation des particules sont traduites dans les modèles d'automates cellulaires par une affectation d'une vitesse aléatoire à chaque particule et ceci en tenant compte du principe d'exclusion.

L'application répétée des phases de propagation et redistribution génère un déplacement aléatoire de chaque particule (voir figure (2.8)).

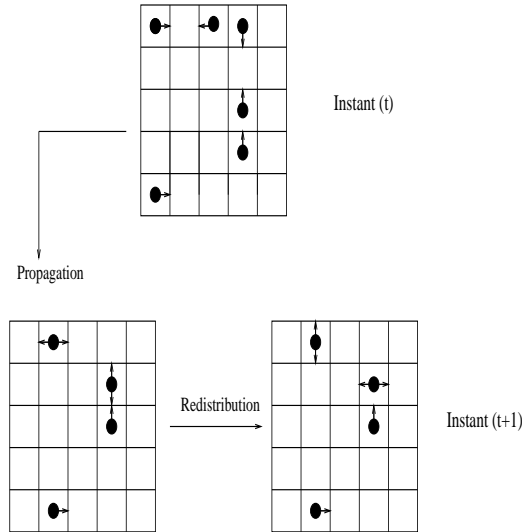


FIG. 2.8 – Exemple de succession d'une phase de propagation et d'une phase de redistribution au cours d'une itération pour un phénomène de diffusion.

Les règles de propagation et de redistribution sont définies suivant la nature du système étudié de manière à relever ses aspects essentiels.

2. La deuxième consiste en une approche macroscopique du phénomène, où la diffusion est implémentée grâce à un schéma aux différences finies appliqué à l'équation aux dérivées partielles gouvernant le système. C'est une technique considérant les déplacements d'une moyenne de particules.

L'équation de diffusion est discrétisée en temps et en espace ce qui donne l'état d'un site en fonction de l'état d'un certain nombre de sites voisins.

## 2.5.1 Problème de diffusion

Pour cet exemple, nous allons élaborer un modèle d'automates cellulaires basé sur une approche purement macroscopique du phénomène.

### Problème considéré

La modélisation des processus thermiques nécessite l'utilisation des lois de conservation de certaines quantités physiques telles que le nombre de particules, le moment de densité etc. La plupart des modèles sont décrits par l'intermédiaire d'une fonction de distribution  $c(r, t)$  qui représente la concentration molaire à l'instant  $t > 0$ , à la position  $r \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Le problème que nous nous sommes posés concerne la recherche d'un modèle d'automate cellulaire simple à mettre en oeuvre permettant de représenter un système thermique dans le cas bidimensionnel. Le système étudié est de type diffusion, habituellement décrit

par un système d'équations aux dérivées partielles, défini sur un domaine géométrique bidimensionnel borné  $\Omega$ , de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2} + \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right) + \kappa c(r, t) \\ \text{avec } r = (r_x, r_y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ c(x, t) = 0 \quad \text{avec } x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ c(r, 0) = c_0 \quad r \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où

- $c(r, t)$  est la concentration molaire,
- $D_1$  est le coefficient de diffusion, suivant  $x$
- $D_2$  est le coefficient de diffusion, suivant  $y$
- $\nu$  est un champ de vitesse donné,
- $\kappa$  est une constante.

Mathématiquement ce problème ne présente pas de difficulté mais sa mise en oeuvre numérique peut être laborieuse.

## Réseau cellulaire

Dans un modèle d'automates cellulaires, on considère un réseau de connexion où chaque particule, représentée par une cellule, prend place dans un treillis régulier bidimensionnel  $\mathcal{T}$ . On considère un treillis formé de cellules carrées notées  $c_{ij}$  et on désigne par  $\Delta\mathcal{T}$  le pas d'espace, qui n'est autre que la longueur du côté de la cellule.

## Le voisinage

On choisit un voisinage  $v$  de rayon  $R$ , de type von Neumann. Chaque particule qui occupe une cellule peut se déplacer dans l'une des directions suivantes, qui sont représentées par les vecteurs impulsions  $v_i$  avec  $1 \leq i \leq 4$ .

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (0, -1), v_4 = (-1, 0)$$

## L'ensemble d'état

$\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  est un ensemble d'état déterminé à partir d'un principe d'exclusion qui n'autorise pas la présence de plus d'une particule par cellule ayant une des directions  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

où

- (0) correspond à une cellule vacante,
- (1) correspond à une cellule possédant une particule qui se déplace dans la direction  $v_1$ , (est)
- (2) correspond à une cellule possédant une particule qui se déplace dans la direction  $v_2$ , (nord)

- (3) correspond à une cellule possédant une particule qui se déplace dans la direction  $v_3$ , (sud)
- (4) correspond à une cellule possédant une particule qui se déplace dans la direction  $v_4$ , (ouest).

### La règle de transition

Il s'agit de trouver un ensemble de règles d'automate cellulaire bidimensionnel qui nous permette d'approcher (2.1) d'un point de vue macroscopique. Chaque cellule du réseau, notée  $c(r, t)$ , se trouve à la position  $r = (r_x, r_y)$  à l'instant  $t$  ( $r_x$  et  $r_y$  représentent les composantes de  $r$  suivant  $v_1$  et  $v_2$ ). L'équation (2.1) est habituellement discrétisée de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\frac{c(r, t + \Delta t) - c(r, t)}{\Delta t} &= D_1 \left[ \frac{c(r_x - \Delta r_x, r_y; t) - 2c(r, t) + c(r_x + \Delta r_x, r_y; t)}{\Delta r_x^2} \right] \\
&+ D_2 \left[ \frac{c(r_x, r_y - \Delta r_y; t) - 2c(r, t) + c(r_x, r_y + \Delta r_y; t)}{\Delta r_y^2} \right] \\
&+ \nu \left[ \frac{c(r_x + \Delta r_x, r_y; t) - c(r, t)}{\Delta r_x} + \frac{c(r_x, r_y + \Delta r_y; t) - c(r, t)}{\Delta r_y} \right] \\
&+ \kappa c(r, t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

En prenant  $\Delta r_x = \Delta r_y = \Delta \mathcal{T}$ , l'équation (2.2) devient

$$\begin{aligned}
c(r, t + \Delta t) &= \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} c(r_x - \Delta \mathcal{T}, r_y; t) + \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} c(r_x, r_y - \Delta \mathcal{T}; t) \\
&+ \left( 1 - \frac{2D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - \frac{2D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - \frac{2\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa \right) c(r, t) \\
&+ \left( \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \right) c(r_x + \Delta \mathcal{T}, r_y; t) + \left( \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \right) c(r_x, r_y + \Delta \mathcal{T}; t)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

On pose

$$r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x + i\Delta \mathcal{T} \\ r_y + j\Delta \mathcal{T} \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
 c(r, t + \Delta t) &= \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} c\left(r + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) + \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} c\left(r + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}; t\right) \\
 &+ \left(1 - \frac{2D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - \frac{2D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - \frac{2\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa\right) c(r, t) \\
 &+ \left(\frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}\right) c\left(r + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) \\
 &+ \left(\frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}\right) c\left(r + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}; t\right)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

A partir de ce qui précède, on peut définir la règle de transition  $\varphi$  comme une règle additive donnée par

$$\varphi : c(v, t) \in \mathcal{E}^{(2R+1)^2} \longrightarrow c(r, t + \Delta t) \in \mathcal{E}$$

où  $c(v, t)$  désigne l'état du voisinage  $v$  de la cellule située à la position  $r$ , au temps  $t$ .  $(2R + 1)$  désigne la taille du voisinage. (ici  $R = 1$ ).

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c\left(r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) \text{ avec } -1 \leq i, j \leq 1 \tag{2.5}$$

où  $a_{ij}$  sont déterminés dans le cas particulier choisi, en identifiant (2.4) avec (2.5). On obtient.

$$\begin{aligned}
 a_{-1-1} &= a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0 \\
 a_{-10} &= \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} \\
 a_{0-1} &= \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} \\
 a_{10} &= \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \\
 a_{01} &= \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \\
 a_{00} &= 1 - 2\frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2\frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2\frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

### Remarques

- La règle de transition ci-dessus, n'est pas une règle unique, on peut obtenir d'autres règles, en utilisant par exemple l'approche microscopique.
- En général le rayon du voisinage  $R$  peut être différent de 1. Le choix de  $R=1$  étant fait dans le but de rendre l'application de la règle plus facile en simulation, et donner des

relations simples entre les coefficients  $a_{ij}$  et les coefficients de diffusion  $D_1$  et  $D_2$ .

• Le choix des coefficients  $a_{ij}$  donnés par (2.6) constitue un cas particulier. On peut généraliser cette approche et utiliser d'autres coefficients  $a_{ij}$ , qui interviennent dans la règle de transition suivante :

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c(r + \binom{i}{j} \Delta \mathcal{T}, t) \quad (2.7)$$

Cette méthode permet d'approcher l'équation (2.1) si les coefficients  $a_{ij}$  satisfont les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} = 1 + \kappa \\ \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} \binom{i}{j} \Delta \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \nu \Delta t \\ \nu \Delta t \end{pmatrix} \\ \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} (i^2 + j^2) \Delta \mathcal{T}^2 = 2D_1 \Delta t + 2D_2 \Delta t + 2\nu \Delta t \Delta \mathcal{T} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Ces conditions sont obtenues en identifiant (2.6) avec (2.7).

• D'autres types de voisinages peuvent être considérés.

### Conditions aux limites

Comme le modèle étudié est de type distribué, il faut préciser les conditions aux limites.

### L'état initial

L'état initial qui permet le démarrage de l'évolution de l'automate cellulaire, doit être précisé pour chaque cas.

### Cas particulier 1 : $D_1 = D_2 = D$

On cherche une approche d'automate cellulaire, qui modélise le système traité auparavant dans le cas où  $D_1 = D_2 = D$  (cas homogène en  $x$  et en  $y$ ). L'équation aux dérivées partielles qui gouverne ce système dans ce cas est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2} \right) + \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right) + \kappa c(r, t) \\ \text{avec } r = (r_x, r_y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ c(x, t) = 0 \quad \text{avec } x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ c(r, 0) = c_0 \quad r \in \Omega \end{array} \right. \quad (2.9)$$



où les divers paramètres ont été précisés précédemment.

**Un modèle convenable d'automate cellulaire pour ce système peut être donné par**

Le réseau, le voisinage et l'ensemble d'état sont les mêmes que pour le cas précédent. La seule différence sera au niveau de la règle de transition. En utilisant la même approche que le cas où  $D_1 \neq D_2$ , on obtient une règle de transition additive décrivant la dynamique locale de l'automate cellulaire donnée par

$$\varphi : c(v, t) \in \mathcal{E}^{(2R+1)^2} \longrightarrow c(r, t + \Delta t) \in \mathcal{E}$$

avec

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c\left(r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) \text{ avec } -1 \leq i, j \leq 1 \quad (2.10)$$

Pour des coefficients  $a_{ij}$  donnés par :

$$\begin{aligned} a_{-1-1} &= a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0 \\ a_{-10} &= a_{0-1} = \frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} \\ a_{10} &= a_{01} = \frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \\ a_{00} &= 1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa \end{aligned} \quad (2.11)$$

Des coefficients arbitraires peuvent être considérés dans (2.10) à condition qu'ils satisfassent l'ensemble des équations :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} &= 1 + \kappa \\ \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T} &= \begin{pmatrix} \nu\Delta t \\ \nu\Delta t \end{pmatrix} \\ \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} (i^2 + j^2) \Delta \mathcal{T}^2 &= 4D\Delta t + 2\nu\Delta t \Delta \mathcal{T} \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

**Cas particulier 2 :  $D_1 = D_2 = D_3$  et  $\kappa = 0$**

Nous voulons chercher une approche d'automates cellulaires dans le cas où  $\kappa = 0$ . On garde les mêmes paramètres de l'automate cellulaire qui modélise les deux cas traités auparavant, sauf la règle de transition qui sera changée.

La règle de transition devient dans ce cas :

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c\left(r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) \text{ avec } -1 \leq i, j \leq 1$$

avec les coefficients  $a_{ij}$  qui satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} a_{-1-1} &= a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0 \\ a_{-10} &= a_{0-1} = \frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} \\ a_{10} &= a_{01} = \frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \\ a_{00} &= 1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta \mathcal{T}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

### Cas particulier 3 : cas avec une source

On considère le système de diffusion dans le cas où  $D_1 = D_2 = D$ , avec un terme source  $\xi$ . Ce système peut être décrit par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y}\right) + \kappa c(r, t) + \xi \\ \text{avec } r = (r_x, r_y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ c(x, t) = 0 \quad \text{avec } x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ c(r, 0) = c_0 \quad r \in \Omega \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Le terme source  $\xi$  représente le contrôle pour les modèles distribués.

Le modèle de l'automate cellulaire dans ce cas est basé sur :

- Un réseau bidimensionnel formé par des cellules carrées.
- Un voisinage de type von Neumann.
- Un ensemble d'état  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- Une règle de transition additive définie par

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c\left(r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \Delta \mathcal{T}, t\right) + b \text{ avec } -1 \leq i, j \leq 1 \tag{2.15}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  peuvent être donnés par les relations suivantes :

$$(i) \quad a_{-1-1} = a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_{-10} = a_{0-1} = \frac{D\Delta t}{\Delta T^2} \\ a_{10} = a_{01} = \frac{D\Delta t}{\Delta T^2} + \frac{\nu\Delta t}{\Delta T} \\ a_{00} = 1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta T^2} - 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta T} + \kappa \\ b = \xi \end{cases} \quad (2.16)$$

### Remarques

- 1- La relation (i) est cohérente avec le type de voisinage choisi. Dans le cas d'un voisinage de type Moore, cette condition n'est plus nécessaire.
- 2- Le terme  $b$  joue le rôle d'un contrôle et donc doit appartenir à un ensemble approprié pour que la relation (2.15) ait un sens.

### Tableau récapitulatif

A partir de ce qui précède, on peut résumer les résultats obtenus sous forme d'un tableau. Pour un réseau carré, un voisinage de type von Neumann, les règles de transition et les coefficients  $a_{ij}$  correspondant aux différentes situations étudiées, sont données par le tableau suivant, où  $c = c_{m,n}$  et  $c' = c_{m+i\Delta T, n+j\Delta T}$ .

Type d'équation	Règle de transition $e_{t+1}(c) =$	Choix particulier des coefficients $a_{ij}$
$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2}$ $+ \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right)$ $+ \kappa c(r, t)$	$\sum_{c' \in v(c)} a_{ij} e_t(c')$	$a_{-1-1} = a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0$ $a_{-10} = \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}; a_{0-1} = \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}$ $a_{10} = \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$ $a_{01} = \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$ $a_{00} = 1 - 2 \frac{D_1 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2 \frac{D_2 \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}$ $- 2 \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa$
$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2} \right)$ $+ \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right)$ $+ \kappa c(r, t)$	$\sum_{c' \in v(c)} a_{ij} e_t(c')$	$a_{-1-1} = a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0$ $a_{-10} = a_{0-1} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}$ $a_{10} = a_{01} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$ $a_{00} = 1 - 4 \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2 \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa$
$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2} \right)$ $+ \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right)$	$\sum_{c' \in v(c)} a_{ij} e_t(c')$	$a_{-1-1} = a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0$ $a_{-10} = a_{0-1} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}$ $a_{10} = a_{01} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$ $a_{00} = 1 - 4 \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2 \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$
$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(r, t)}{\partial y^2} \right)$ $+ \nu \left( \frac{\partial c(r, t)}{\partial x} + \frac{\partial c(r, t)}{\partial y} \right)$ $+ \kappa c(r, t) + \xi$	$\sum_{c' \in v(c)} a_{ij} e_t(c') + b$	$a_{-1-1} = a_{11} = a_{-11} = a_{1-1} = 0$ $a_{-10} = a_{0-1} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2}$ $a_{10} = a_{01} = \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} + \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}}$ $a_{00} = 1 - 4 \frac{D \Delta t}{\Delta \mathcal{T}^2} - 2 \frac{\nu \Delta t}{\Delta \mathcal{T}} + \kappa$ $b = \xi$

## 2.5.2 Simulations

Dans les simulations qui suivent, on considère un réseau rectangulaire de dimensions  $(400 \times 500)$  cellules. Le voisinage est de type von Neumann. L'ensemble des états comporte 5 éléments représentés avec des couleurs noir et blanc. Ainsi à chaque pas de temps, il s'effectue environ 500000 opérations. Dans tous les exemples, on prend des conditions aux limites fixes,  $e_t(c) = e$  pour toutes les cellules du bord du réseau cellulaire. Quant à l'état initial, il est choisi de façon à montrer une évolution à partir d'un des côtés du réseau. Tous les sites du réseau sont initialement vides, les cellules sont à l'état 0, excepté pour les sites de la ligne inférieure, qui sont occupés par des particules orientées vers des directions choisies au hasard. Les simulations qu'on présente sont réalisées sous un code compilé en langage C++.

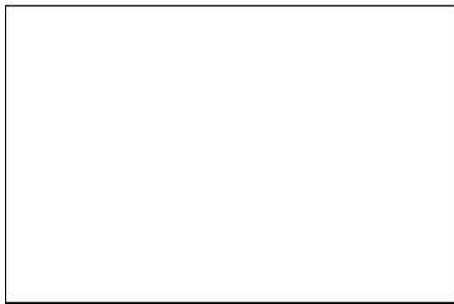
Enfin, on prend les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} D_1 = 0.1 ; & D_2 = 0.05 ; & D = 0.1 ; \\ \nu = 0.5 ; & \kappa = 1 ; & \Delta t = \Delta \mathcal{T} = 1 \end{array}$$

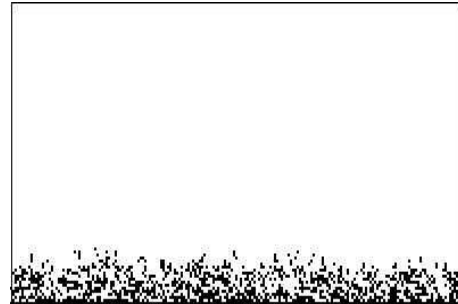
**Cas**  $D_1 \neq D_2, \kappa \neq 0$

Avec les valeurs précisées pour les paramètres, on obtient les coefficients suivants

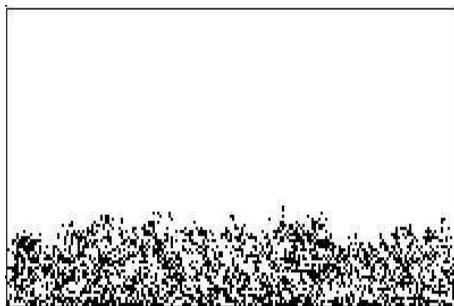
$$\begin{array}{lll} a_{-1,0} = 0.1 & a_{0,-1} = 0.05 & a_{1,0} = 0.6 \\ a_{0,1} = 0.55 & a_{0,0} = 0.7 & a_{1,1} = 0 \\ a_{-1,-1} = 0 & a_{1,-1} = 0 & a_{-1,1} = 0 \end{array}$$



distribution initiale



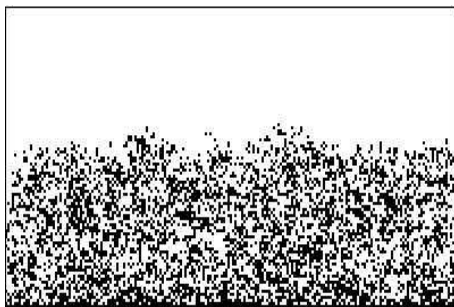
Après 50 itérations



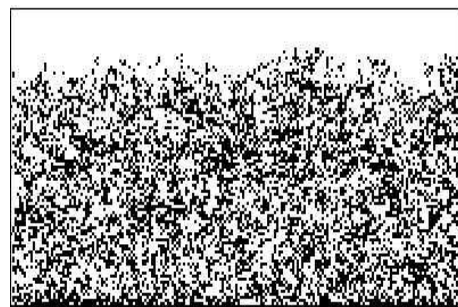
Après 100 itérations



Après 150 itérations



Après 200 itérations



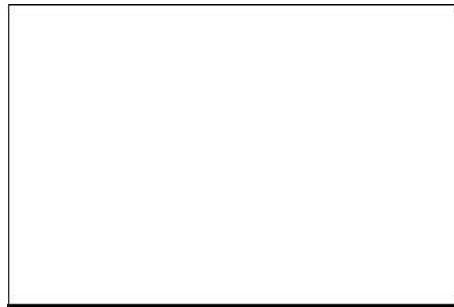
Après 300 itérations

Les figures ci-dessus illustrent la configuration de l'automate cellulaire pour différents pas de temps. Le passage de l'état initial jusqu'à l'instant  $t = 300$  montre que la progression de l'automate cellulaire se fait avec une vitesse significative. Les particules gardent la même densité au cours de cette évolution.

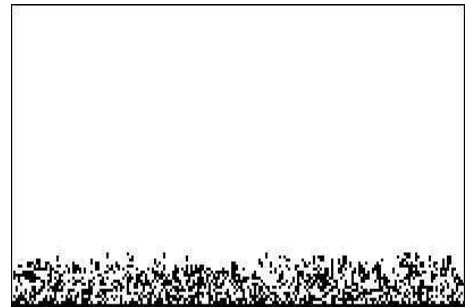
Cas  $D_1 = D_2 = D$ ,  $\kappa \neq 0$

Avec les valeurs précisées plus haut pour les paramètres, on obtient les valeurs suivantes

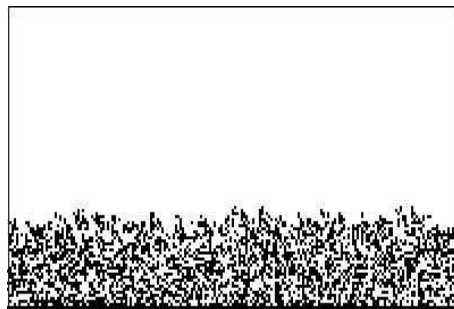
$$\begin{array}{lll} a_{-1,0} = 0.1 & a_{0,-1} = 0.1 & a_{1,0} = 0.6 \\ a_{0,1} = 0.6 & a_{0,0} = 0.6 & a_{1,1} = 0 \\ a_{-1,-1} = 0 & a_{1,-1} = 0 & a_{-1,1} = 0 \end{array}$$



distribution initiale



Après 25 itérations



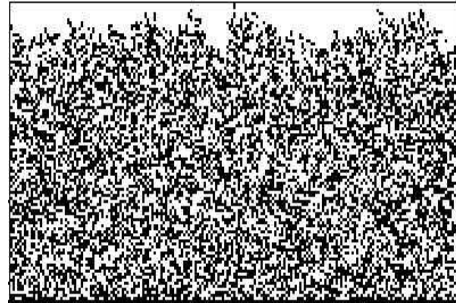
Après 50 itérations



Après 100 itérations



Après 125 itérations



Après 150 itérations

Les figures ci-dessus montrent l'évolution de l'automate cellulaire suivant des pas de temps allant de 0 à 150. Nous constatons que le phénomène évolue de façon plus rapide que le cas où  $D_1 \neq D_2$ , ce qui explique que la dépendance du coefficient de diffusion de la direction influence sur la vitesse de progression du phénomène.

**Cas**  $D_1 = D_2 = D$ ,  $\kappa = 0$

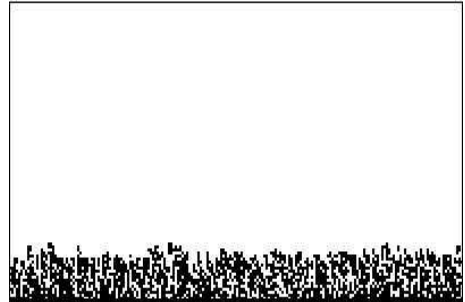
Dans ce dernier cas, on va simuler le modèle bidimensionnel avec  $\kappa = 0$  et  $\nu = 0.2$ . On obtient les valeurs

$$\begin{array}{lll} a_{-1,0} = 0.1 & a_{0,-1} = 0.1 & a_{1,0} = 0.4 \\ a_{0,1} = 0.4 & a_{0,0} = 0.2 & a_{1,1} = 0 \\ a_{-1,-1} = 0 & a_{1,-1} = 0 & a_{-1,1} = 0 \end{array}$$





distribution initiale



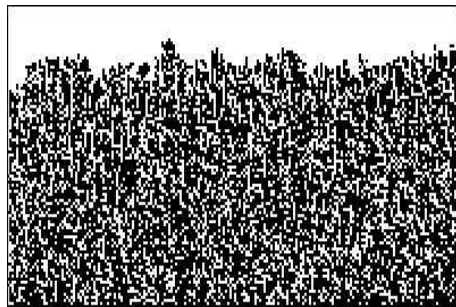
Après 25 itérations



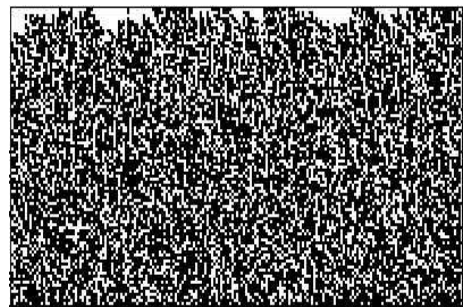
Après 50 itérations



Après 100 itérations



Après 125 itérations



Après 150 itérations

Les figures ci-dessus montrent le comportement de l'automate cellulaire pour différents pas de temps dans le cas où  $\kappa = 0$ . Nous remarquons que l'évolution de l'automate cellulaire se fait de la même manière que dans le cas où  $\kappa \neq 0$ . Cette configuration d'automate conduit à une organisation spatiale beaucoup plus affirmée que les cas précédents. Donc l'absence du terme  $\kappa$  influence sur la distribution des particules au cours de cette évolution.

### 2.5.3 Problème de réaction diffusion

Le modèle d'automate cellulaire qu'on va présenter sera basé sur une approche microscopique du phénomène.

#### Le modèle d'automates cellulaires

La dynamique des milieux excitables est caractérisée par [46, 51] :

- Un état d'équilibre globale et stable.
- Un état excité temporairement en réponse à un stimulus appliqué et qui dépasse un certain seuil.
- Une période réfractaire durant laquelle le milieu ne répond pas aux stimuli ultérieurs et regagne l'équilibre.

Ces milieux sont généralement modélisés par une équation de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + F(C)$$

$C(x, t)$  est l'état du système à un point donné  $x$  et à un instant  $t$ . La fonction non linéaire  $F$  décrit la cinétique du milieu.  $A$  est le coefficient de diffusion.

Un des phénomènes observés dans le comportement des milieux excitables est que, dans certains cas, des états de non équilibre s'établissent et persistent dans le temps.

Sur le réseau carré, le voisinage d'une cellule  $c_{i,j}$  est constitué des cellules  $c_{i+1,j}$ ,  $c_{i-1,j}$ ,  $c_{i,j+1}$ ,  $c_{i,j-1}$ , alors c'est un voisinage de type von Neumann.

Les états possibles sont  $(0, 1, 2, \dots, e, e + 1, \dots, e + r)$ .

Si une cellule est à un état parmi  $(1, 2, \dots, e)$ , elle est excitée.

Si son état appartient à  $(e + 1, \dots, e + r)$ , elle est réfractaire.

Si la cellule possède l'état 0, alors elle est à l'équilibre.

Si  $e_{i,j}^t$  est la configuration à l'instant  $t$ , alors la configuration à l'instant  $t + 1$  est donnée par :

$$e^{t+1}(c_{i,j}) = F(e^t(c_{i,j})) + G(e^t(c_{i,j}), e^t(c_{i+1,j}), e^t(c_{i-1,j}), e^t(c_{i,j+1}), e^t(c_{i,j-1}))$$

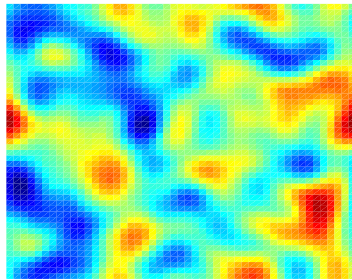
Avec  $F(k) = k$  pour  $1 \leq k \leq e + r - 1$  et  $F(e + r) = F(0) = 0$   
et

$$G(x, x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ et } 1 \leq x_i \leq e \text{ pour un certain } i = 1, \dots, 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

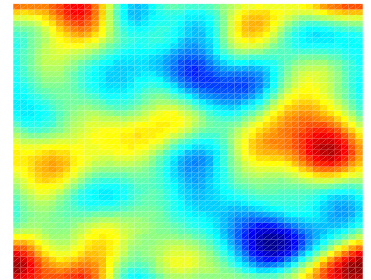
Autrement dit si à un instant une cellule n'est pas à l'état d'équilibre, elle réagira selon la loi locale  $F$ , alors que si elle est à l'état d'équilibre, elle sera excitée à condition qu'une cellule voisine, au moins, soit excitée. Les termes  $F$  et  $G$  sont, par conséquent, respectivement les termes de réaction et de diffusion.

### Simulation

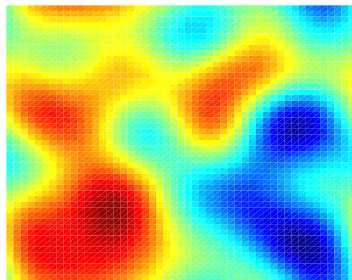
On considère un réseau de dimensions  $(500 \times 600)$  cellules, le voisinage et de type von Neumann et l'ensemble des états comporte des substances représentées par des couleurs différentes. Les simulations présentées ci-dessous sont réalisées sous le code Matlab.



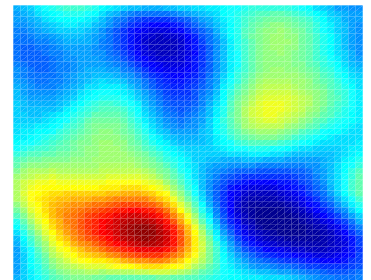
T=0



T=15



T=25



T=40

La simulation illustre un phénomène de réaction-diffusion entre plusieurs substances chimiques. A  $T=15$  le processus de réaction commence à s'activer, puis il est suivi par une diffusion de la substance noire qui apparaît à  $T=12$ .

Ce modèle malgré sa simplicité permet de comprendre dans certaines situations, que des solutions de non-équilibre persistent dans le temps. En effet il existe des configurations initiales qui génèrent des solutions persistantes pour chaque cellule non bornée.

## 2.6 Problème de déformation à travers les automates cellulaires

En mécanique des milieux continus il existe, pour une température donnée, une configuration  $C_0$  qui caractérise le milieu continu, c'est à dire une disposition des particules qui constituent ce milieu, en l'absence d'efforts extérieurs agissant sur ce milieu.

Sous l'effet des forces extérieures, la configuration peut changer en une autre configuration  $C_t$ , considérée à chaque instant  $t$ ,  $t > t_0$  où l'on commence à appliquer ces forces.

On est dans le domaine de l'élasticité si la suppression de ces efforts ramène le solide dans sa configuration initiale, et dans celui de la plasticité si elle la laisse dans une autre configuration.

On passe de la configuration  $C_0$  à la configuration  $C_t$  en définissant un vecteur déplacement  $\vec{U} = \overrightarrow{P_0P_1}$  où  $P_1$  représente la position occupée à l'instant  $t$  par le point  $P_0$  de  $C_0$  (voir figure(2.9)).

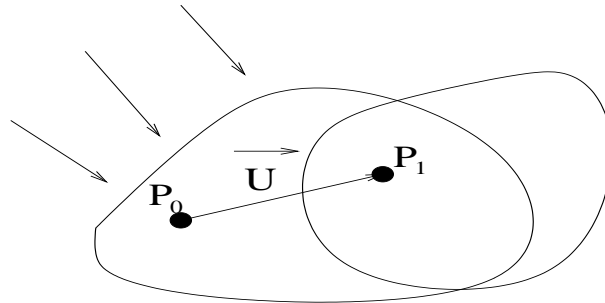


FIG. 2.9 – *Déplacement des particules constituant le solide élastique*

Cette analyse physique du problème va nous permettre de déterminer un modèle d'automates cellulaires qui reproduit le phénomène de déformation. Ce modèle d'automates cellulaires va illustrer les différents déplacements possibles de l'ensemble des particules constituant le milieu continu, sous l'effet des efforts extérieurs. Pour simplifier ce modèle,

on considère les hypothèses suivantes :

- le milieu continu est parfait, il n'y a aucune lacune entre les particules.
- le phénomène de la chaleur est négligeable.

## 2.7 Conclusion

Les automates cellulaires sont des modèles mathématiques considérés comme une simplification des systèmes différentiels. Ils constituent une méthode extrêmement utile dans plusieurs situations pour lesquelles les équations différentielles originales ne peuvent pas être résolues.

Ce chapitre met l'accent sur l'efficacité des AC comme outil de modélisation adéquat qui prend en compte les interactions spatiales dans l'évolution d'un système. On a ainsi montré qu'ils peuvent offrir des modèles simples et réalistes pour des classes de systèmes usuels avec les exemples de la diffusion et de la réaction-diffusion. A travers les simulations, on a montré comment cette approche se prête à une mise en oeuvre beaucoup plus aisée que par utilisation des équations aux dérivées partielles.

# Chapitre 3

## Lois de conservation et modèles d'automates cellulaires

### 3.1 Introduction

Quelles sont les lois qui régissent un système de particules ? Est-il possible de comprendre pourquoi telle particule ou telle autre se désintègre d'une certaine façon, ou de prédire les résultats d'une collision entre deux particules ? La mécanique quantique nous a montré la voie : fonctions d'onde, équations d'onde et ainsi de suite. Mais la théorie est incomplète car nous n'avons aucune connaissance a priori des interactions interparticulaires. De plus, même quand ces interactions sont connues, nous trouvons les calculs trop compliqués à effectuer.

Un certain nombre de lois simples, connues sous le nom de lois de conservation, nous aident à répondre aux deux questions posées précédemment. Chaque loi de ce type établit qu'une quantité physique donnée ne peut se modifier lors des réactions entre particules. La quantité restante, après la réaction, doit être identique à la quantité existante au départ. Nous pouvons illustrer ce fait par des exemples empruntés au domaine économique. Dans un pays où la monnaie n'est imprimée qu'en fonction de la quantité de monnaie retirée de la circulation, la quantité globale de monnaie en circulation reste la même. Une société industrielle dont le montant des revenus est exactement identique à ses dépenses garde un capital constant.

En physique classique, on connaissait plusieurs lois simples de conservation, résultant de décennies d'expérimentation. Certaines d'entre elles, par exemple la loi de conservation de la charge s'imposèrent presque d'elles-mêmes. A partir du moment où la charge électrique a été définie, il était évident qu'elle ne peut ni être créée ni disparaître ; en d'autres termes, sa quantité dans l'univers est conservée. La mise en place des autres lois de conservation fut plus difficile, chacune reposant en fait sur une définition correcte de la quantité conservée. La loi de conservation de l'énergie, par exemple, a subi de nombreuses modifications car elle repose sur une définition exacte de toutes les formes d'énergie, dont certaines d'entre elles, comme la chaleur ou la masse, ne sont pas clairement rattachées à l'énergie mécanique.

En physique classique, les principes de conservation permettent de simplifier les calculs complexes. Dans le cas d'un processus compliqué avec plusieurs étapes, il est bon de savoir que certaines quantités restent constantes durant tout le processus. Mais les lois de

conservation n'étaient pas d'une importance primordiale en physique classique. Les lois physiques fondamentales comme les lois de Newton en mécanique et les équations électromagnétiques de Maxwell traitent des quantités dynamiques ou variables plutôt que des constantes.

Plusieurs lois de conservation furent ajoutées en physique moderne et leur importance relative s'accrut. Ce n'est pas surprenant : dans un monde régi par la probabilité, où les lois comme celles de Newton sont inaptes à prédire ce qui va se produire, des lois déterminant ce qui ne peut pas se produire deviennent primordiales. Si nous savons qu'aucun processus en contradiction avec n'importe quelle loi de conservation ne peut se produire, nous pouvons en conclure que pour tout processus qui n'est pas en contradiction avec une loi de conservation, il existe une certaine probabilité pour qu'il se produise. Les lois de conservation font partie des lois fondamentales de la nature. Connaître toutes les lois de conservation qui régissent un processus donné équivaut à pouvoir déterminer la probabilité de n'importe quel résultat spécifique de la réaction ou de la diffusion. De plus, certaines quantités conservées comme la charge électrique, jouent un rôle dynamique : elle sont à l'origine d'une interaction. L'identification des lois de conservation est donc la clé de la dynamique.

Les lois de conservation connues en physique classique sont les suivantes :

- Conservation de l'énergie et de la masse ;
- Conservation de la quantité de mouvement ;
- Conservation du moment angulaire ;
- Conservation de la charge électrique ;

D'après ce qui est développé dans [47, 48], essayons de voir comment Feynman définit le principe de conservation. Pour lui, une loi de conservation signifie qu'il existe un nombre que l'on peut calculer en un moment donné, puis, bien que la nature subisse de multiples variations, si on calcule cette quantité en un instant ultérieur, elle sera toujours la même, le nombre n'aura pas varié. Autrement dit, le principe de conservation peut être défini comme suit, il existe une grandeur que l'on peut calculer à un moment donné et qui est conservée, d'où l'intérêt d'évoquer ces lois de conservation et de voir comment les vérifier à travers les modèles d'automates cellulaires.

## 3.2 Lois de conservation

Nous allons maintenant examiner les lois de conservation principales d'un point de vue physique puis nous essayerons de les transcrire pour des modèles d'AC.

### 3.2.1 Conservation de l'énergie et la masse

Le principe de la conservation de la masse signifie que la quantité de matière caractérisant un système physique, ne change pas dans les multiples modifications que peut subir ce système, et si on calcule cette quantité en un instant ultérieur, elle sera toujours la même. Nous allons maintenant examiner l'une des lois les plus fondamentales de la physique, la

conservation de l'énergie.

C'est un fait, ou si vous voulez une loi, qui gouverne tous les phénomènes naturels connus à ce jour. Il n'y a pas d'exception connue à cette loi, elle est exacte pour autant que nous le sachions. La loi est appelée conservation de l'énergie. Elle affirme qu'il y a une certaine quantité que nous appelons énergie, qui ne change pas dans les multiples modifications que peut subir la nature. C'est une idée très abstraite, car c'est un principe mathématique, ce principe dit qu'il existe une quantité numérique, qui ne change pas, lorsque quelque chose se passe. Ce n'est pas la description d'un mécanisme, ou de quoi que ce soit de concret ; c'est simplement ce fait étrange que nous puissions calculer un certain nombre que, lorsque nous avons terminé d'observer l'évolution de la nature et que nous recalculons ce nombre, il soit le même.

### **Energie cinétique et potentielle**

Tout corps en mouvement possède une énergie cinétique qui est donnée à des vitesses beaucoup plus faibles que celles de la lumière par

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

où  $m$  est la masse,  $v$  la vitesse du corps. L'énergie potentielle d'un corps dépend des forces extérieures qui s'exercent sur lui. Par exemple, un corps en équilibre, à une distance  $h$  en mètres au-dessus du sol, possède une énergie potentielle  $mgh$  par rapport au sol, en raison de la gravité, où  $g$  représente l'accélération lors de la chute (voir figure (3.1)). Un proton ou un électron qui pénètre dans un accélérateur linéaire avec une énergie cinétique négligeable et une énergie potentielle égale à  $eV$  où  $V$  est la différence de potentiel accélérante, et  $e$  la charge d'un électron, qui sort à l'autre bout avec une énergie cinétique substantielle, est un exemple moderne de la conservation de l'énergie mécanique. Dans une situation relativiste, l'équation suivante donne :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

la vitesse finale de la particule est donc donnée par

$$v = (2eV/m)^{\frac{1}{2}}$$

Dans la plupart des systèmes actuels, l'énergie mécanique n'est pas conservée, en raison des forces de frottement. Toutefois, lorsque la chaleur fut envisagée comme étant une forme d'énergie, une loi de conservation plus générale a été formulée qui garantit que dans ce cas l'énergie mécanique provoque l'élévation de la température du système. Au siècle dernier, on découvrit que l'énergie thermique n'est autre que l'énergie cinétique des molécules à l'intérieur de la substance (voir figure (3.2)). Ainsi, quand on s'occupe de molécules, d'atomes ou de particules subatomiques, on doit considérer leur énergie comme n'étant que l'énergie mécanique, ce qui ne nécessite pas de parler de la chaleur.

### **Autres formes de l'énergie**

Nous pouvons ainsi continuer d'illustrer l'existence de l'énergie sous d'autres formes. Considérons d'abord l'énergie élastique. Si nous tirons un ressort vers le bas, nous devons effectuer du travail, car lorsque cela est réalisé, nous pouvons soulever des poids avec le



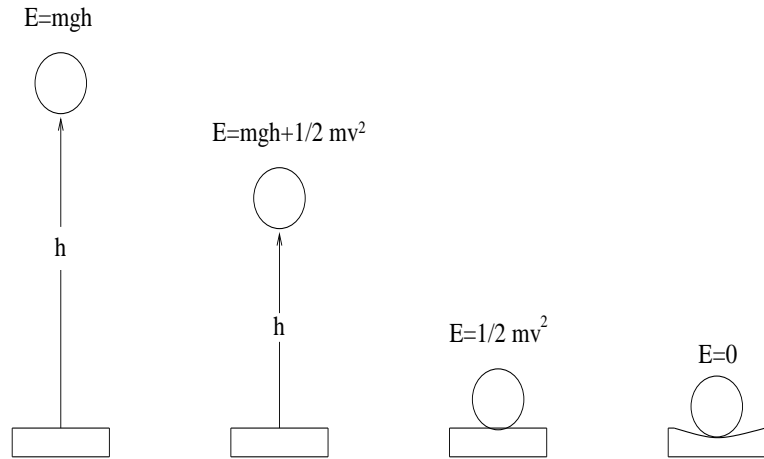


FIG. 3.1 – Une masse  $m$  située à une hauteur  $h$  au dessus du sol a une énergie potentielle de  $mgh$  par rapport au sol. Toute l'énergie d'un corps en chute libre est l'énergie potentielle au début de la chute et de l'énergie cinétique lorsque le corps se rapproche du sol. Quand il touche le sol, son énergie est transformée en chaleur.

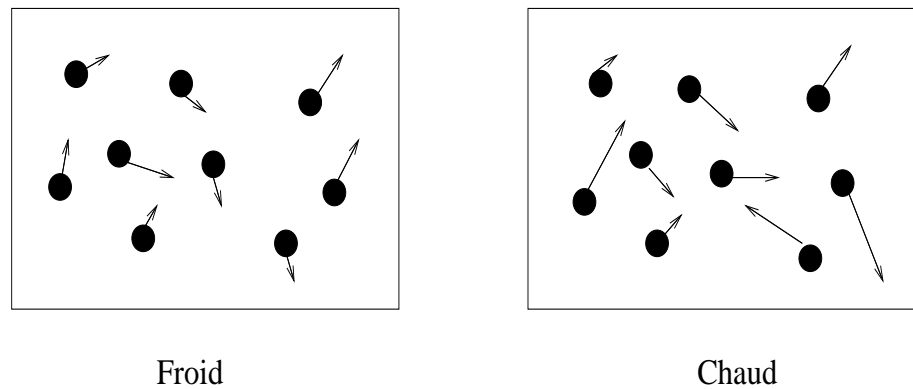


FIG. 3.2 – La chaleur est l'énergie cinétique des atomes et des molécules. L'énergie cinétique moyenne et la vitesse moyenne des molécules est plus élevée dans un gaz chaud que dans un gaz froid. Les flèches représentent les vecteurs de vitesse des molécules de gaz à deux températures différentes.

ressort. Ainsi lorsqu'il est allongé, il a la possibilité de faire un certain travail. Si nous voulions évaluer les sommes des poids que multiplient les hauteurs, nous ne vérifierons pas la loi, nous devons ajouter quelque chose d'autre pour tenir compte du fait que le ressort est sous tension. L'énergie élastique est cette formule pour un ressort lorsqu'il est tendu. Quelle quantité d'énergie cela fait-il ? Si nous laissons partir le ressort, l'énergie élastique est convertie en énergie cinétique, lorsque celui-ci passe à son point d'équilibre et on assiste à un va et vient entre la compression et l'extension du ressort et l'énergie cinétique du mouvement. Où se trouve l'énergie lorsque le ressort a terminé son mouvement de va et vient vertical ? Cela introduit une nouvelle forme de l'énergie : l'énergie thermique.

A l'intérieur d'un ressort ou d'un levier, il y a des cristaux qui sont constitués d'un très grand nombre d'atomes, et avec un grand soin et une grande délicatesse dans l'arrangement des différentes parties, on peut essayer d'ajuster les objets de telle sorte que lorsque quelque chose roule sur quelque chose d'autre, aucun des atomes ne réagit. Mais on doit prendre grand soin. Habituellement, lorsque les objets roulent, c'est chaotique et agité à cause des irrégularités du matériau et les atomes à l'intérieur se mettent à remuer. Nous perdons ainsi la trace de cette énergie ; nous trouvons que les atomes s'agitent à l'intérieur d'une manière aléatoire et confuse après que le mouvement se soit ralenti. Comment savons-nous que c'est encore de l'énergie cinétique ? Il apparaît qu'avec un thermomètre vous pouvez trouver, en fait, que le ressort ou le levier est plus chaud, et qu'il y a réellement augmentation de l'énergie cinétique d'une certaine quantité. C'est une énergie thermique, mais nous savons que ce n'est pas vraiment une nouvelle forme, c'est simplement de l'énergie cinétique d'un mouvement interne.

Il y a beaucoup d'autres formes d'énergie, à titre d'exemple l'énergie électrique qui est en relation avec l'attraction et la répulsion entre les charges électrique. Il y a l'énergie de rayonnement, l'énergie de la lumière, que nous savons être une forme de l'énergie électrique, car la lumière peut être représentée comme des oscillations du champ électromagnétique. Il y a l'énergie chimique, l'énergie libérée dans les réactions chimiques, etc...

### 3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement  $Q$  (ou l'impulsion) d'une masse se déplaçant à une vitesse faible par rapport à celle de la lumière se définit comme étant le produit de la masse par la vitesse :

$$Q = mv$$

Cette équation est également correcte à des vitesses relativistes, c'est-à-dire à des vitesses proches de  $c$ , la vitesse de la lumière, mais alors  $m$  n'est pas la masse au repos de la particule, mais plutôt sa masse relativiste :

$$m(v) = m_0 / (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$$

La quantité de mouvement d'une particule sans masse, comme le photon, se définit comme suit :

$$Q = \frac{E}{c}$$

$E$  représente l'énergie de la particule. Une définition générale donne :

$$Q = \left( \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où  $E$  représente l'énergie totale relativiste de la particule (énergie cinétique et énergie résultant de la masse), et  $m_0$  est la masse au repos. Cette équation est valable pour les particules sans masse  $m_0 = 0$  et également pour les particules ayant une masse, indépendamment de leur vitesse. En fait, quand la vitesse d'une particule est faible, cette formule se simplifie en

$$Q = m_0 v$$

Il faut rappeler que la quantité de mouvement est un vecteur, ce qui signifie que sa direction est tout aussi importante que sa grandeur (une quantité physique qui n'a pas de direction, comme la température est considérée comme une quantité scalaire). La direction de la quantité de mouvement d'une seule particule correspond à la direction de son mouvement respectif, selon un mode géométrique. En vertu de la loi de conservation de la quantité de mouvement, l'impulsion totale d'un système est conservée aussi longtemps que des forces extérieures n'agissent pas sur le système. Lorsque des forces extérieures s'exercent sur un système, en plus des forces intérieures entre des différents composants, sa quantité de mouvement n'est pas conservée, sauf si

$$F_{ext} + F_{int} = 0$$

Dans notre cas, la conservation de la quantité de mouvement au cours du déplacement des particules est vérifiée par la condition suivante

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$$

où

$$f_k(i, j, t) = C \Delta x_k(i, j, t) \quad ; \quad k = 1, \dots, 4 \quad (3.1)$$

avec  $C$  est une constante de proportionnalité qui est fonction de l'énergie de liaison.

Le recul du canon, après avoir tiré un obus, est un exemple de conservation de la quantité de mouvement. Avant de tirer l'obus, les quantités de mouvement du canon et de l'obus sont nulles. L'obus acquiert une quantité de mouvement dans une direction donnée, le canon doit donc acquérir une quantité de mouvement égale dans la direction opposée, de façon à ce que la somme reste égale à zéro. En physique des particules, la conservation de la quantité de mouvement nécessite que la quantité de mouvement totale d'un groupe de particules, avant une réaction, soit égale en quantité de direction à la quantité de mouvement totale après la réaction (à condition qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système). L'application de la loi de conservation de la quantité de mouvement simplifie l'analyse des réactions entre les particules. Par exemple, quand une particule au repos se fractionne en deux particules, ces dernières partiront dans deux directions opposées (voir figure(3.3)). Le rapport de leurs vitesses sera égal à l'inverse du rapport de leurs masses (la particule la plus légère se déplacera plus rapidement). Quand une particule immobile se casse en trois particules, elles doivent, en raison de la conservation de la quantité de mouvement, se déplacer dans un même plan (voir figure (3.4)). Ce principe a un vaste champ d'application, car toute particule peut être considérée comme une particule au repos, à condition que les calculs soient effectués dans un système de coordonnées qui se déplace en même

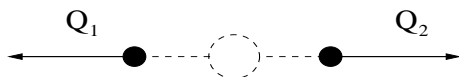


FIG. 3.3 – *Quand une particule au repos se désintègre en deux particules, elles partiront dans des directions opposées. La particule la plus légère se déplacera plus vite.*

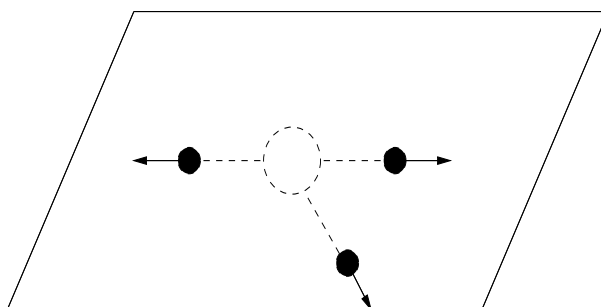


FIG. 3.4 – *Quand une particule au repos se désintègre en trois particules, elles sont contraintes de se déplacer dans le même plan.*

temps que la particule. Mais la loi la plus importante et la plus fondamentale, découlant de la conservation de la quantité de mouvement, est la suivante : aucune particule ne peut se désintégrer spontanément en particules dont la masse excède la sienne. À première vue, il semble possible qu'une partie de l'énergie cinétique d'une particule en mouvement rapide se convertisse en masse, permettant ainsi la désintégration spontanée en particules de masse supérieure. En fait ce n'est pas possible, car on peut démontrer que, dans ce cas, soit la loi de conservation de la quantité de mouvement, soit la loi de l'énergie, serait violée. Pour cette raison, un photon ne peut pas se transformer en une paire positron-électron, excepté au voisinage immédiat d'un noyau qui peut absorber la quantité de mouvement en excès.

### 3.2.3 Conservation du moment angulaire

Le moment angulaire joue le même rôle dans le mouvement de rotation, que l'impulsion dans le mouvement en ligne droite. Le moment angulaire d'une particule en orbite sur cercle est un vecteur  $L$  dont l'intensité est le produit de la masse  $m$  par la vitesse  $v$  et le rayon du cercle  $r$  :

$$L = mvr$$

La direction du vecteur est perpendiculaire au plan de rotation comme le montre la figure (3.5)

Le moment angulaire d'un système de particules est le vecteur somme du moment angulaire des différentes particules. Le moment angulaire d'un corps rigide en rotation peut se

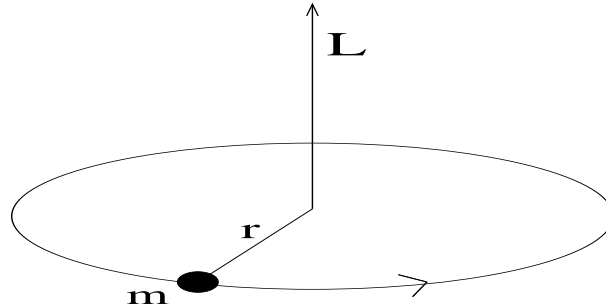


FIG. 3.5 – Le vecteur  $L$  est perpendiculaire au plan de rotation et est lié au sens de la rotation comme le sens de la progression d'une vis vissée à droite l'est à la direction de sa révolution

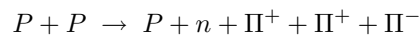
calculer en considérant ce corps comme un ensemble de grains, chacun ayant une masse minuscule et se déplaçant selon une orbite circulaire.

L'importance du moment angulaire réside dans le fait que, comme l'impulsion, il est strictement conservé lorsque aucune force extérieure n'agit sur le système.

Cette loi de conservation permet d'expliquer quelques phénomènes physiques intéressants. Par exemple, à la fin de  $XVII^e$  siècle Johannes Kepler découvrit que les planètes en orbite autour du soleil décrivaient des trajectoires elliptiques et que chacune d'entre elles accélérât à l'approche du soleil et ralentissait en s'en éloignant. Ce phénomène s'explique facilement par la loi de conservation du moment angulaire : le moment angulaire d'une planète est proportionnel à sa vitesse et sa distance par rapport au soleil. Il doit rester constant donc quand la distance décroît, la vitesse doit croître et vice versa.

### 3.2.4 Conservation de la charge électrique

Selon cette loi de conservation, la charge électrique n'est ni créée, ni détruite, sauf en quantités égales de charge positive et négative. Dans une équation décrivant une réaction entre particules, la somme de la partie droite, si dans le calcul de la somme nous additionnons les charges positives et soustrayons les charges négatives. Par exemple, dans la réaction



la somme des charges, dans chaque membre de l'équation, est  $+2$ . Si une équation n'est pas équilibrée, en ce qui concerne la charge, c'est-à-dire si la charge totale de la partie droite n'est pas égale à la charge totale de la partie gauche, l'équation décrit un processus impossible.

Comme toute charge électrique est un multiple entier de l'unité de charge de base, la charge totale d'un système doit toujours être exprimée sous forme d'un entier, positif, négatif ou nul. La loi de conservation de la charge est un exemple de loi de conservation

appelée règle de comptage ou règle additive. La stabilité de l'électron est directement liée à la conservation de la charge. Toutes les particules plus légères que l'électron ne sont pas chargées et donc l'électron ne peut se désintégrer spontanément sans violer la loi de conservation de la charge.

### 3.2.5 Les nouvelles lois de conservation

Nous avons évoqué les trois lois de conservation de la physique classique : la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. Ces lois prévalent également en physique des particules. Cependant, comme il existe de nombreux processus qui n'entrent en contradiction avec aucune des lois de conservation classiques et qui n'ont jamais été observés, les physiciens en vinrent à conclure que les interactions entre les particules obéissent à des lois de conservation supplémentaires non révélées par le comportement des objets macroscopiques. Il peut s'agir de règles approximatives ou bien de règles fondamentales (les plus fondamentales joueraient un rôle dynamique, comme la charge électrique). Dans tous les cas, afin de formuler ces nouvelles lois, il fallait définir de nouvelles **charges** ou nombres quantiques.

Par la suite, les lois de conservation qui vont nous intéresser sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### 3.2.6 Les lois de conservation pour un système de particules

Pour bien comprendre, considérons dans  $\mathbb{R}^2$  et sans perte de généralité, le cas d'un système de quatre particules, chaque particule a une masse  $m_i$  avec  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Le déplacement  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , des particules se fait dans 4 directions (est - ouest - nord - sud).

La masse totale du système est

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (3.2)$$

La quantité de mouvement sera

$$Q = \sum_{i=1}^n m_i u_i \quad (3.3)$$

et l'énergie cinétique sera

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|u_i\|^2 \quad (3.4)$$

### 3.3 Lois de conservation à travers les AC

On considère un automate cellulaire défini par le quadruplet  $\mathcal{A} = (\mathcal{E}, \mathcal{T}, \nu, \mathcal{F})$ , comme cela a été présenté dans le chapitre précédent. Les lois de conservation précédentes vont s'exprimer de la façon suivante. On suppose que le voisinage  $\nu(c)$  de chaque cellule est défini par la donnée de  $n$  particules.

#### 3.3.1 Conservation de la masse

On considère l'application  $M$  définie par :

$$M : \nu_t(c) \in \mathcal{L}^n \longrightarrow M(\nu_t(c)) \in \mathbb{R}^+$$

La loi de conservation de la masse s'exprime par :

$$M(\nu_{t+1}(c)) = M(\nu_t(c)) \tag{3.5}$$

où

$$M(\nu_t(c)) = \sum_{i=1}^n m_i$$

#### 3.3.2 Conservation de quantité de mouvement

On considère l'application  $Q$  définie par :

$$Q : \nu_t(c) \longrightarrow Q(\nu_t(c)) \in \mathbb{R}^2$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement est donnée par

$$Q(\nu_{t+1}(c)) = Q(\nu_t(c)) \tag{3.6}$$

où

$$Q(\nu_t(c)) = \sum_{i=1}^n m_i u_i$$

#### 3.3.3 Conservation de l'énergie

On considère l'application  $E$  définie par :

$$E : \nu_t(c) \longrightarrow E(\nu_t(c)) \in \mathbb{R}^+$$

La loi de conservation de l'énergie s'exprime par

$$E(\nu_{t+1}(c)) = E(\nu_t(c)) \tag{3.7}$$

où

$$E(\nu_t(c)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|u_i\|^2$$

La loi de conservation de l'énergie est considérée comme étant l'une des plus importantes lois de la nature. Dans la mesure où l'énergie peut se présenter sous différentes formes, cette

loi de conservation a été modifiée chaque fois qu'un nouveau type d'énergie était découvert. Une seule loi générale de conservation de la masse et de l'énergie a donc remplacé les deux lois de conservation jusqu'alors distinctes. En vertu de cette loi, la somme de l'énergie et de la masse dans un système clos (quand la masse est exprimée en unités d'énergie, selon l'équation d'Einstein  $E = mc^2$ ), est constante et ne change pas avec le temps. Nous avons insisté sur le terme système Clos (fermé). On peut bien sûr, accroître le contenu masse-énergie d'un système en y ajoutant de la masse ou en exerçant des forces extérieures sur ces composantes et en augmentant ainsi son énergie (provoquant la diminution du contenu masse-énergie d'un autre système).

En effet, si on fait une analogie avec les automates cellulaires, on peut constater qu'un AC peut être considéré comme étant un système clos, limité par la frontière de l'espace cellulaire.

Il est plutôt surprenant d'apprendre que des lois de la physique fondamentale, comme la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement sont fondées sur des vérités simples qui semblent presque évidentes d'elles même. L'une découle de l'homogénéité de l'espace, c'est-à-dire du fait que l'espace est partout uniforme, et l'autre de l'homogénéité du temps. Cette découverte correspond à l'un des objectifs principaux de la physique : fonder des lois essentielles sur des principes aussi simples et généraux que possible.

### 3.3.4 Exemple de loi de conservation : Système de particules constituant un gaz en mouvement

Supposons le cas d'un gaz très dilué dans un système bidimensionnel, les chocs entre les particules sont très rares et ce sont les seules interactions qui existent entre les particules, ce qui peut être assimilé au cas de déformation des particules constituant un solide élastique. Le mouvement de chaque particule est indépendant.

Le modèle d'automates cellulaires considéré est donné par le quadruplet  $\mathcal{A} = (\mathcal{E}, \mathcal{T}, \nu, \mathcal{F})$  tel que :

$$\mathcal{E} = \{e_i, \quad 0 \leq i \leq 4\}$$

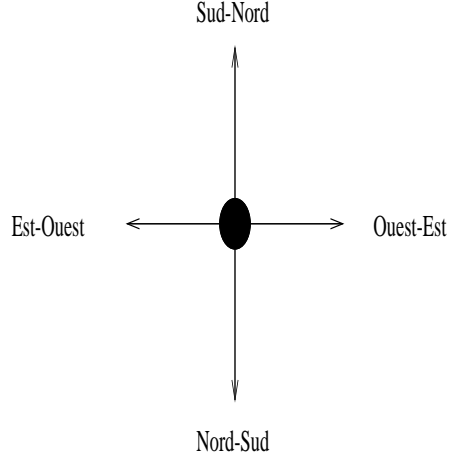
$$e_i = \begin{cases} u_0 & \text{si la particule est immobile.} \\ u_1 & \text{si la particule se déplace dans la direction ouest-est.} \\ u_2 & \text{si la particule se déplace dans la direction sud-nord.} \\ u_3 & \text{si la particule se déplace dans la direction nord-sud.} \\ u_4 & \text{si la particule se déplace dans la direction est-ouest.} \end{cases}$$

Le déplacement des particules se fait dans quatre directions alors le voisinage utilisé sera le voisinage de type **von Neumann**.

#### Règle de transition

On considère que  $u_i$  est le déplacement des particules avec  $i = 1, \dots, 4$ .



FIG. 3.6 – *Voisinage type von Neumann*

Soit  $\varphi$  une grandeur mécanique qui ne dépend que du déplacement. Notons  $\varphi(u_i) = \varphi_i$  et  $\varphi$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^4$  de composantes  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  (l'ensemble des grandeurs mécaniques est donc un espace vectoriel de dimension 4).

On appelle grandeur macroscopique associée à  $\varphi$  la quantité (moyenne) notée  $\bar{\varphi}(x, t)$  dépendant de la position et du temps, donnée par

$$\bar{\varphi}(x, t) = \frac{\sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \varphi_i}{\sum_{i=1}^4 N_i(x, t)} \quad (3.8)$$

$N_i$  est une quantité qui représente le nombre des particules occupant un site donné et qui se déplacent selon une direction  $u_i$ . Physiquement cette quantité désigne la quantité de matière. La quantité  $\rho$  définie par

$$\rho(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \quad (3.9)$$

représente la densité du gaz.

La variation de  $N_i$ , en fonction du temps, s'écrit :

$$N_i(x + u_i, t + 1) = N_i(x, t) + \psi_i(N_j) \quad (3.10)$$

où  $\psi_i(N_j)$  est un terme de collision d'après l'hypothèse de Boltzmann et est donné en fonction de  $N$ .

L'équation d'évolution des particules (d'après l'hypothèse de Boltzmann concernant la cinétique des gaz parfaits) s'obtient en multipliant l'équation (3.10) par  $\varphi_i$  et en sommant

sur  $i$ , on obtient :

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i N_i(x + u_i, t + 1) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i [N_i(x, t) + \psi_i(N_j)] \quad (3.11)$$

Cette équation d'évolution va représenter l'évolution de l'automate cellulaire.

### Conservation de la masse

D'après l'équation (3.10) on a :

$$N_i(x + u_i, t + 1) = N_i(x, t) + \psi_i(N_j) \quad (3.12)$$

On a supposé que le déplacement des particules se fait sans collision entre elles alors

$$\psi_i(N_j) = 0$$

donc (3.12) devient

$$N_i(x + \Delta x, t + 1) = N_i(x, t)$$

Pour un système de quatre particules

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x + u_i, t + 1) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \quad (3.13)$$

d'où la conservation de la quantité de matière.

### Conservation de la quantité de mouvement

On a

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i [N_i(x + u_i, t + 1) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i N_i(x, t) + \psi_i(N_j)] \quad (3.14)$$

avec

$$\psi_i(N_j) = 0$$

alors l'équation (3.14) devient

$$\sum_{i=1}^4 \varphi_i N_i(x + u_i, t + 1) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i N_i(x, t) \quad (3.15)$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement.

### Conservation de l'énergie cinétique

La conservation de l'énergie cinétique s'obtient en multipliant l'équation (3.15) par  $\frac{1}{2}\varphi_i^2$  et en sommant sur  $i$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 N_i(x + u_i, t + 1) \varphi_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \varphi_i^2 \quad (3.16)$$

d'où la conservation de l'énergie cinétique.

### 3.3.5 Application des lois de conservation pour un système de diffusion

Le modèle d'AC élaboré pour le système de diffusion est le suivant :

L'ensemble des états  $\mathcal{E}$  est donné par

$$\mathcal{E} = \{e_i, 0 \leq i \leq 4\}$$

Le voisinage est de type von Neumann.

La règle de transition : la règle de transition est représentée par :

$$c(r, t + \Delta t) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 a_{ij} c\left(r + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, t\right) \Delta \mathcal{T}, t \quad (3.17)$$

#### Hypothèses

On suppose que :

-Le milieu de la diffusion est un milieu homogène, alors le coefficient de diffusion  $D$  reste toujours le même au cours de l'évolution de l'automate cellulaire.

-Le milieu n'est pas réactionnel, autrement dit, la masse reste constante.

Physiquement  $a_{i,j}$  est un coefficient qui dépend du phénomène de diffusion, par contre ce même coefficient représente l'interaction entre la cellule centrale et ses voisines. Supposons que  $a_{i,j} = \beta$ , par conséquent,  $\beta$  n'aura aucun impact sur la masse de la cellule  $c_{i,j}$ .

#### Conservation de la quantité de matière

Supposons que  $N_i$  est le nombre de particules occupant un site  $c_i$ . Alors à partir de (3.17) la conservation de la masse s'écrit

$$N_i(t + 1) = \beta N_i(t) \quad (3.18)$$

Pour  $i = 4$  et  $\beta = 1$ , (3.18) devient

$$\sum_{i=1}^4 N_i(t + 1) = \sum_{i=1}^4 N_i(t) \quad (3.19)$$

d'où la conservation de la quantité de matière.

### Conservation de la quantité de mouvement

On suppose que  $v_i$  est le déplacement des cellules. La conservation de la quantité de mouvement s'obtient en multipliant l'équation (3.19) par  $v_i$  et en sommant sur  $i$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^4 v_i N_i(t+1) = \sum_{i=1}^4 v_i N_i(t) \quad (3.20)$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement.

## 3.4 Conclusion

Evoquer les lois de conservation a pour but de comprendre pourquoi telle particule ou telle autre se désintègre d'une certaine façon, ou de prédire les résultats d'une collision entre deux particules. Dans ce chapitre, nous avons présenté toutes les lois de conservation connues en physique classique, puis nous avons vérifié la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie à travers des modèles d'automates cellulaires reproduisant un phénomène de propagation d'un gaz et une diffusion.

Il s'avère que l'utilisation des automates cellulaires comme outil de modélisation est très intéressante, du fait que les quantités physiques dans la plupart des cas sont conservées.



# Chapitre 4

## Modélisation par automates cellulaires d'un problème de déformation

Pour bien comprendre le comportement des solides et interpréter les résultats des essais de caractérisation, il est nécessaire de posséder quelques notions sur l'origine microscopique de ces comportements. C'est l'objet de la première partie de ce chapitre où l'on explique succinctement l'origine de la cohésion dans les solides.

### 4.1 Description microscopique

Tous les matériaux sont constitués d'atomes. Un atome est lui-même constitué des entités élémentaires qui obéissent aux lois de la mécanique quantique. Le classement des éléments chimiques (atomes) du tableau périodique se fait par remplissage successif des orbitales. Les propriétés chimiques des éléments ne sont fonction que de leurs électrons périphériques (électrons de valence appartenant à la plus grande orbitale).

Les liaisons chimiques entre atomes sont essentiellement électrostatiques. C'est la nature des liaisons qui détermine en grande partie les propriétés des phases liquides ou solides. On distingue principalement quatre types de liaisons : covalente, ionique et métallique en ce qui concerne les liaisons fortes, la liaison de Van des Walls en ce qui concerne les liaisons faibles. La classification des matériaux peut se faire d'après leur type de liaisons.

L'état physique d'une substance (solide, liquide ou gaz) est déterminé par la balance entre son énergie de cohésion qui rapproche les atomes et son énergie thermique qui tend à les séparer. L'énergie thermique est proportionnelle à la température, tandis que l'énergie de cohésion est en première approximation indépendante de celle-ci. Cette situation explique la transition des états de la matière avec la température. Dans un solide, l'arrangement des atomes peut prendre un caractère ordonné ou désordonné et conduire à deux types de structures :

**La structure amorphe** : Les atomes sont peu ordonnés et c'est une structure analogue à celle des liquides. On y rencontre, à courte distance (quelques diamètres atomiques), une certaine périodicité de la distribution des atomes. Cette structure amorphe se rencontre

dans certaines céramiques (verres minéraux) et dans un grand nombre de polymères organiques (verres organiques, caoutchoucs).

**La structure cristalline** : caractérisée par une distribution périodique d'atomes ordonnés à grande distance. L'ensemble des matériaux métalliques, une partie importante des céramiques et un certain nombre de polymères organiques, se présentent sous forme d'un assemblage de microcristaux (grains).

## 4.2 Déformation élastique des solides

La théorie de l'élasticité étudie la relation entre les déformations subies par un objet et le système de forces qui lui est appliqué. En pratique, si on se limite aux petites déformations, l'analyse du comportement élastique d'un matériau se ramène à l'étude d'un certain nombre de types de déformations simples et à la détermination des constantes élastiques correspondantes. Ces déformations simples sont l'extension uniaxiale, le cisaillement simple et la compression uniforme.

**L'extension uniaxiale** : lorsqu'on soumet un corps élastique à une extension uniaxiale en appliquant une force externe  $F$ , il subit un allongement qui est proportionnel à sa longueur initial  $x_0$ .

**Le cisaillement simple** : les forces de cisaillement jouent un rôle très important dans le comportement des matériaux. Ce sont des forces de cisaillement qui interviennent quand on applique les patins d'un frein sur la jante d'une roue de vélo ou les mâchoires d'un frein à disque de voiture.

**La compression uniforme** : elle constitue le troisième type de déformation simple. Celle-ci apparaît lorsqu'un solide est soumis à une pression hydrostatique.

### 4.2.1 Le champ des déplacements

Soit un point matériel initialement en  $x \in \Omega$  à ( $t = 0$ ). Dans le nouvel équilibre à  $t > 0$  le point  $P$  se trouve en position  $x + u(x)$ ,  $u$  nous permet donc de déterminer la configuration finale  $\Omega_f$  du corps considéré. L'application  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  est appelée champ des déplacements (voir figure(4.1)).

### 4.2.2 Le champ des contraintes

La définition du champ de contraintes réside dans certaines hypothèses physiques qui permettent de modéliser les efforts internes engendrés au sein du corps matériel en tout  $x \in \Omega$ . Le tenseur  $\sigma(x)$  est appelé tenseur des contraintes en  $x$ . Une contrainte est homogène à une force par unité de surface donc à une pression. L'unité de la pression dans le S.I., est le pascal noté ( $Pa$ ) avec ( $1Pa = 1N/m^2$ ). En mécanique on travaille dans les bases orthonormées  $(e_1, e_2, e_3)$ . Le tenseur de contrainte  $\sigma$  est donc représenté par une matrice :

$$\sigma = (\sigma_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

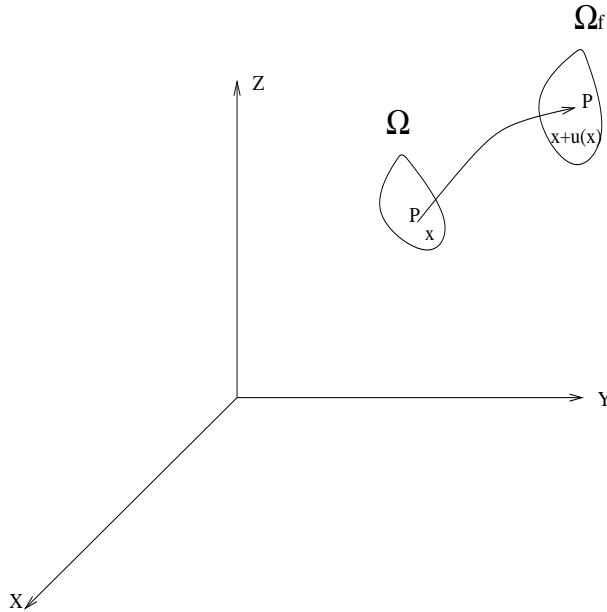


FIG. 4.1 – *Représentation du passage de l'état initial à l'état final : champ des déplacements.*

La loi fondamentale de la mécanique de milieux continus exprimant l'équivalence du tenseur des efforts extérieurs et du tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, après avoir négligé le terme d'inertie conduit à l'équation d'équilibre suivante :

$$\text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1)$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  représente la densité de forces volumiques sur  $\Omega$ .

### 4.2.3 Le champ des déformations

On suppose que le solide s'écarte peu sous l'effet des forces mécaniques. Le champ des déformations se définit comme suit :

$$\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \quad ; \quad \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \quad \text{tel que} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2)$$

### 4.2.4 La loi de comportement

On considère un corps matériel occupant l'ouvert borné connexe  $\Omega \in \mathbb{R}^N$ .

Si le corps matériel est soumis à un champ de contraintes  $\sigma$ , il va subir un champ de déformation  $\varepsilon$ . On peut alors toujours envisager des relations entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  partout dans  $\Omega$ . La loi de comportement est déterminée expérimentalement à partir d'essais. L'essai le plus souvent mis en oeuvre pour déterminer le comportement d'un matériau est l'essai de traction.



## Milieus élastiques

Les milieux élastiques sont définis par les deux propriétés suivantes :

- ♣ Il existe pour chaque particule un état particulier appelé état naturel, dans lequel le tenseur des contraintes  $\sigma$  est nul à la température  $\theta_0$ . En général, on suppose qu'il existe une configuration initiale du milieu continu dans laquelle toutes les particules sont à l'état naturel.
- ♣ Le tenseur des contraintes à l'instant  $t$  ne dépend que de la déformation mesurée à partir de la configuration initiale.

### 1- Milieu élastique linéaire

La loi de comportement élastique linéaire est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{tel que} \quad (\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl})$$

$E$  est le module d'élasticité ou module de Young qui caractérise la résistance du solide à la déformation uniaxiale.

On a rassemblé les valeurs du module d'élasticité d'un certain nombre de matériaux, dans le tableau ci-dessous.

Matériau	E [GPa]
Diamant	1000
Carbure de silicium (SiC)	450
Tungstène	400
Alumine ( $Al_2O_3$ )	400
Fibre de carbone	300
Magnésie (MgO)	250
Acier	210
Cuivre	125
Laiton, bronze	110
Silice vitreuse ( $SiO_2$ )	95
Or	80
Verre à vitre	70
Aluminium	70
Béton	50
Magnésium	40-45
Bois aggloméré	7
Résines époxydes	2,8- 4,2
Polystyrène	2
Polypropylène	2
Caoutchoucs	0,001

## 2- Milieu élastique classique

Le milieu est dit élastique classique s'il a les propriétés suivantes :

- Le milieu est élastique linéaire,
- Le milieu est isotrope,
- Les déformations sont petites.

On admettra sans démonstration que la loi de comportement la plus générale répondant à ces trois conditions est

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{Tr}(\varepsilon)I \quad (4.3)$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés coefficients de Lamé. Ils ont la dimension d'une contrainte (l'unité SI est le Pascal).

## Milieu thermoélastique classique

En thermoélasticité classique, on étudie les milieux élastiques classiques dilatables sous l'effet d'une variation de température. Si on note  $\theta_0$  le champ de température uniforme dans la configuration initiale, et  $\theta(M, t)$  le champ de température non uniforme dans la configuration actuelle, on appelle champ de variation de température le champ  $\theta(M, t) - \theta_0$ .

On suppose que l'élévation de température provoque une dilatation isotrope et linéaire en fonction de la variation de température. Le tenseur des petites déformations dues à  $\theta(M, t) - \theta_0$  est donc un tenseur sphérique.

$$\varepsilon_\theta = \alpha(\theta(M, t) - \theta_0)I \quad (4.4)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique linéaire.

Les deux effets de déformation, l'un dû aux contraintes, l'autre dû à la dilatation, s'ajoutent. On a donc

$$\sigma = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial X} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(\theta - \theta_0) \quad (4.5)$$

### Remarque :

Les quelques lois de comportement qui précèdent sont les plus simples qu'on puisse trouver. Elles modélisent assez correctement le comportement d'un certain nombre de milieux continus. Il ne faut pas cependant oublier les hypothèses qui ont permis de les établir.

Avant de commencer à utiliser une de ces lois, il faut toujours se demander si elle est réaliste, c'est-à-dire si elle reflète correctement le comportement réel du matériau.

Certains milieux fluides ont un comportement de solide déformable (tels les milieux pâteux), certains solides déformables ont un comportement à la fois élastique et visqueux. D'autre part, beaucoup de milieux continus ont un comportement à seuil, c'est à dire que la forme de la loi change au delà de certaines limites. Enfin, beaucoup de matériaux modernes ne sont pas isotropes (matières plastiques armées, fibres de carbone noyées dans un liant, etc).

## 4.3 Problème de déformation élastique

### 4.3.1 Introduction

Modéliser un problème de mécanique des milieux déformables, notamment la déformation d'un solide élastique [16] [25] [45], c'est déterminer une maquette virtuelle qui permet d'illustrer son comportement. L'objet du problème considéré est d'étudier l'évolution dynamique d'un solide élastique déformable qui, à l'instant  $t = 0$  occupe le domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , et subit l'effet d'actions mécaniques exercées. L'utilisation des modèles basés sur des équations aux dérivées partielles [84] est très répandue pour le problème de mécanique considéré. Une alternative consiste à utiliser des automates cellulaires [96] qui peuvent simuler de nombreux phénomènes physiques [9] [27] et qui sont d'une plus grande simplicité sur le plan mathématique et sur le plan de leur mise en oeuvre numérique. Dans ce chapitre, on propose un modèle simple et généralisé d'automates cellulaires, permettant de décrire à l'échelle microscopique le comportement d'un corps élastique dans le cas d'une déformation. Finalement, on va utiliser les modèles d'automates cellulaires, pour simuler numériquement quelques propriétés génériques du phénomène de déformation ainsi que le déplacement des particules constituant le solide élastique et l'énergie potentielle fournie.

### 4.3.2 Préliminaires

On considère un corps qui occupe un domaine borné  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ , avec une surface frontière régulière  $\Gamma$  partitionnée en deux parties mesurables  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , telle que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Soit  $T > 0$  et  $]0, T[$  l'intervalle de temps considéré.

On va étudier, dans un intervalle de temps  $]0, T[$ , l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volume et de surface. A  $t = 0$ , la structure est fixée et ne subit aucune force (voir figure(4.2)).

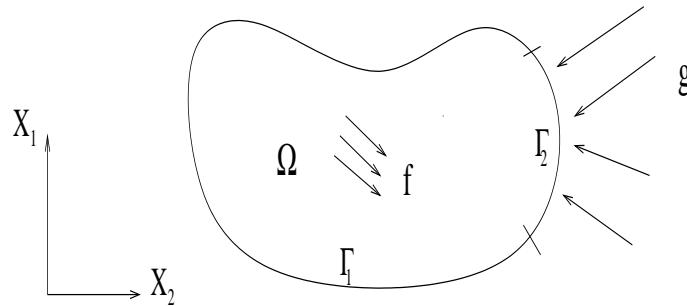


FIG. 4.2 – Le solide élastique soumis à deux types de forces.

Le corps est soumis à deux types de forces.

1- Des forces de volume, définies par un champ de vecteurs  $\vec{f}$  tel que :

$$\vec{f} = (f_1, f_2) \text{ avec } f_i = f_i(x, t) : \Omega \times ]0, T[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.6)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $x = (x_1, x_2)$ .

2- Des forces de surface ou de traction, correspondant à un champ de vecteurs  $\vec{g}$  tel que :

$$\vec{g} = (g_1, g_2); \text{ avec } g_i = g_i(x, t) : \Gamma_2 \times ]0, T[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.7)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $x = (x_1, x_2)$ .

On suppose que le corps est fixé en  $\Gamma_1$ , alors qu' en  $\Gamma_2$  il subit des forces surfaciques de traction.

Sous l'action des forces volumiques (4.6) et des forces de traction (4.7) le corps élastique se déforme, ce qui conduit à une évolution de ce corps (voir figure(4.3)). Le comportement

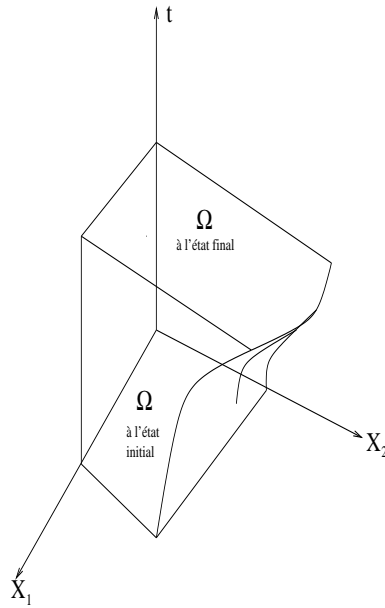


FIG. 4.3 – *Exemple de déformation de  $\Omega$  au cours du temps.*

de  $\Omega$  est caractérisé par :

### Le champs des déplacements

Le déplacement provoqué par l'application des forces surfaciques et volumiques est donné par  $\vec{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tel que

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ avec } u_i = u_i(x, t) : \Omega \times ]0, T[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4.8)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $x = (x_1, x_2)$ .

### Le tenseur de déformations

Le tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}(\vec{u})$  s'exprime comme suit :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En utilisant (4.8), on obtient le résultat suivant

$$\varepsilon(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

On note

$$\varepsilon(\vec{u}) = (\varepsilon_{ij}(\vec{u}))_{1 \leq i, j \leq 2}$$

### Le tenseur de contraintes

Le tenseur de contraintes est représenté par  $\sigma = (\sigma_{ij})$ . Dans le cas élastique, la loi de comportement est de la forme

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I \quad (4.10)$$

où les scalaires  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé.

$\sigma$  se présente comme une matrice  $(2 \times 2)$ , notée

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus conduit à l'équation d'équilibre suivante

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{Div} \sigma + f \quad (4.12)$$

A partir de (4.6) et (4.11), l'équation (4.12) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + f_1 &= \rho \ddot{u}_1 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 &= \rho \ddot{u}_2 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'équilibre de notre système déformable, il faut encore préciser les conditions aux limites.

En  $\Gamma_1$  le solide est supposé fixé, donc

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (4.14)$$

Le vecteur normal unitaire est représenté par

$$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \quad \text{avec } \nu_i = \nu_i(x_1, x_2) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2. \quad (4.15)$$

En utilisant (4.11) et (4.15), on déduit le vecteur contrainte de Cauchy qui est donné par

$$\vec{\sigma\nu} = (\sigma_{12}\nu_1, \sigma_{21}\nu_2) \quad (4.16)$$

on a supposé que  $\Gamma_2$  est soumis aux forces surfaciques de traction.  
Donc on a

$$\sigma\nu = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (4.17)$$

Les conditions initiales sont données par

$$u(x, 0) = u_0 \quad , \quad \dot{u}(x, 0) = u_1 \quad (4.18)$$

### 4.3.3 Résumé

A partir des équations et des conditions aux limites et initiales établies ci-dessus, on obtient un modèle mathématique décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \sigma_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \quad \text{avec } i = 1, 2. \\ \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I \\ \text{avec} \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ \sigma\nu = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \times ]0, T[ \\ \text{et} \\ u(x, 0) = u_0 \quad , \quad \dot{u}(x, 0) = u_1 \quad \text{dans } \Omega \\ \text{où } f, g, u_0, u_1, \rho, \mu \text{ et } \lambda \text{ sont donnés} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

## 4.4 Le modèle d'automate cellulaire pour un solide élastique

Dans le problème considéré, la déformation provient de l'effet global de plusieurs forces exercées sur un corps matériel.

L'approche par automate cellulaire qu'on va utiliser est étroitement liée au mécanisme par lequel la déformation apparaît dans le système étudié. On étudie le mouvement des particules, provoqué par l'action des sollicitations mécaniques. Donc c'est une approche d'un point de vue purement microscopique.

Le solide étudié sera représenté par un réseau de particules dans un système de deux dimensions. La structure de ce solide se rencontre dans certaines céramiques (verres minéraux) et dans un grand nombre de polymères organiques (verres organiques, caoutchouc). Les arrangements se trouvent à l'équilibre lorsque les particules sont distantes d'une certaine valeur  $d_0$  (voir figure(4.4)).

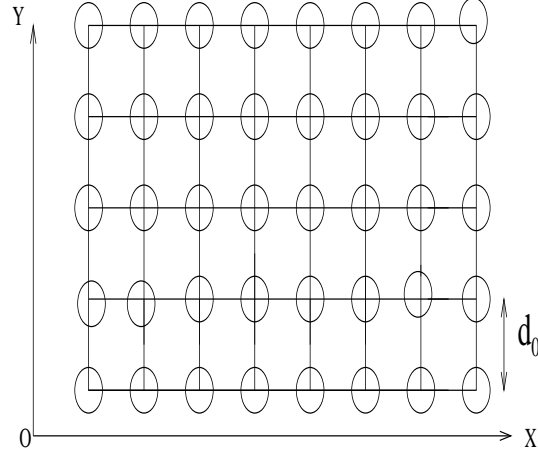


FIG. 4.4 – Différentes particules constituant le solide.

#### 4.4.1 La force exercée

Lorsqu'on déforme élastiquement un solide, la force appliquée induit le déplacement des particules en dehors de leur positions d'équilibre. On se limite au cas de petites déformations. La force  $f_k$  est proportionnelle à la variation de la distance interatomique  $d_0$  parallèlement à la direction de déformation.

$$f_k(i, j, t) = C \Delta x_k(i, j, t) \quad (4.20)$$

$C$  est une constante de proportionnalité qui est fonction de l'énergie de liaison.

Ainsi les forces appliquées sur les quatres voisines blanches sont comme suit (figure(4.5)).

$$f_1(i, j, t) = C \Delta x_1(i, j, t) = C (x(i-1, j, t) - x(i, j, t))$$

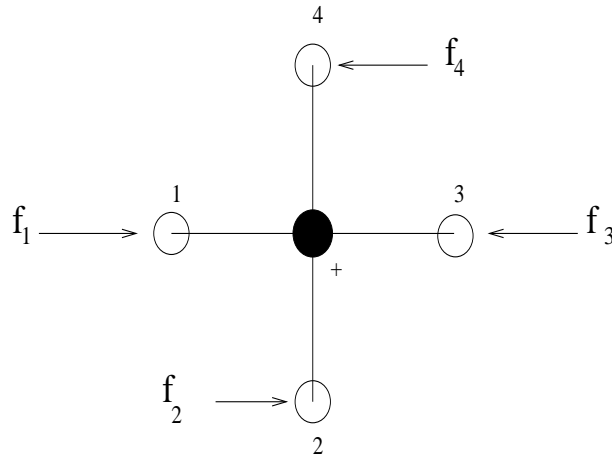
$$f_2(i, j, t) = C \Delta x_2(i, j, t) = C (x(i, j-1, t) - x(i, j, t))$$

$$f_3(i, j, t) = C \Delta x_3(i, j, t) = C (x(i+1, j, t) - x(i, j, t))$$

$$f_4(i, j, t) = C \Delta x_4(i, j, t) = C (x(i, j+1, t) - x(i, j, t))$$

La distribution de la force  $f_k$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} f_1(i, j, t) \\ f_2(i, j, t) \\ f_3(i, j, t) \\ f_4(i, j, t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \Delta x_1(i, j, t) \\ \Delta x_2(i, j, t) \\ \Delta x_3(i, j, t) \\ \Delta x_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

FIG. 4.5 – *La position des forces appliquées sur les quatre particules voisines.*

#### 4.4.2 Puissance et énergie potentielle

Soit une action mécanique de résultante  $f$  appliquée sur une particule en mouvement. On appelle puissance développée par  $f$  la quantité :

$$P = f.v$$

Avec

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

D'autre part, on peut écrire la puissance  $P$  en fonction de l'énergie potentielle  $E_p$ .

$$P = -\frac{\Delta E_p}{\Delta t}$$

Alors

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= -P. \Delta t \\ \Delta E_p &= -f. v. \Delta t \\ \Delta E_p &= -f. \frac{\Delta x}{\Delta t}. \Delta t \\ \Delta E_p &= -f. \Delta x\end{aligned}$$

Finalement, l'énergie potentielle  $E_p$  entre deux positions occupées par la même particule est donnée par :

$$E_p = f. \Delta x \quad (4.22)$$



pour un système de  $n$  particules, l'énergie potentielle totale est la suivante :

$$E_{ptot} = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \Delta x_i \tag{4.23}$$

### 4.4.3 Le déplacement des particules

Toute force appliquée à un matériau se traduit par une déformation qui entraîne un changement de la position des particules. Sous l'effet des forces extérieures les particules se rapprochent ou s'éloignent engendrant ainsi une réaction sous forme d'une force d'attraction ou de répulsion des particules. Supposons que la particule centrale a une couleur noire, et ses quatre voisines subissant des efforts extérieurs le long de l'axe  $OX$ . Alors le mouvement de la particule centrale résulte des forces  $f_1, f_2, f_3, f_4$  appliquées sur les quatre voisines blanches, engendrant leur déplacements  $u_1, u_2, u_3, u_4$  le long de l'axe des abscisses  $OX$ .

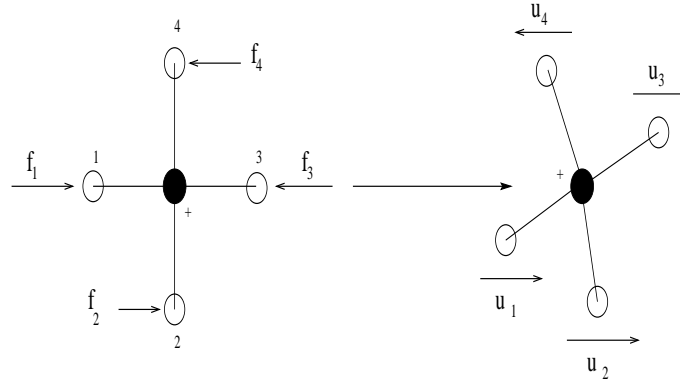


FIG. 4.6 – Le déplacement des particules sous l'effet des forces extérieures.

Le signe + indique l'emplacement du centre de masse des particules blanches (voir figure(4.6)). Le mouvement de la particule centrale (ou noire) va dépendre des déplacements de l'une ou des quatre voisines blanches.

Notons  $r_{i,j}$  la position de la particule noire avec

$$r_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$$

les particules blanches environnantes seront aux positions :

$$r_{i-1,j}, r_{i+1,j}, r_{i,j-1}, r_{i,j+1}$$

On peut définir les déplacements des particules blanches selon l'axe  $OX$  par

$$\begin{aligned} u_1(i, j, t) &= x_{i-1,j}(t) - x_{i,j}(t) \\ u_2(i, j, t) &= x_{i,j-1}(t) - x_{i,j}(t) \\ u_3(i, j, t) &= x_{i+1,j}(t) - x_{i,j}(t) \\ u_4(i, j, t) &= x_{i,j+1}(t) - x_{i,j}(t) \end{aligned}$$

**Remarque :**

De la même manière, on peut définir les déplacements  $v_1, v_2, v_3, v_4$  des particules blanches selon l'axe  $OY$ .

Si l'origine des quatre particules blanches est la particule noire (c-à-d  $r_{i,j}(t) = 0$ ), le centre de masse sert à la description du mouvement d'un système de particules. La position du centre de masse se calcule avec

$$X_{CM} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$Y_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + m_4 v_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

où  $m_i$  est la masse de la particule  $i$ .

Supposons que la masse  $m_i$  de chaque particule est égale à 1. Alors le centre de masse au repos des quatre particules est

$$X_{CM} = \frac{1}{4}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] \quad \text{selon l'axe } OX$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{4}[v_1 + v_2 + v_3 + v_4] \quad \text{selon l'axe } OY$$

Par raison de symétrie, la nouvelle abscisse de la particule centrale est

$$x_{i,j}(t+1) = 2X_{CM}$$

$$= \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4]$$

En effet le déplacement de la particule centrale est le suivant. Par exemple  $u_1(i+1, j, t+1)$  sera le déplacement de la particule noire vue par la particule située à  $r_{i+1,j}$ .

$$u_1(i+1, j, t+1) = 2X_{CM} - x_{i+1,j}$$

$$= \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4] - u_3$$

$$= \frac{1}{2}[u_1 + u_2 - u_3 + u_4]$$

De la même façon, on calcule  $u_2(t+1), u_3(t+1), u_4(t+1)$ , ainsi on va obtenir la loi suivante d'évolution de déplacement des particules noires.

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

où  $W$  est une matrice de propagation donnée par

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4.4.4 La déformation

Si on déforme un matériau de telle sorte que l'on reste au voisinage de la distance interatomique  $r_0$ , la liaison entre particules peut être visualisée comme un ressort de raideur  $K$  (figure(4.7)).

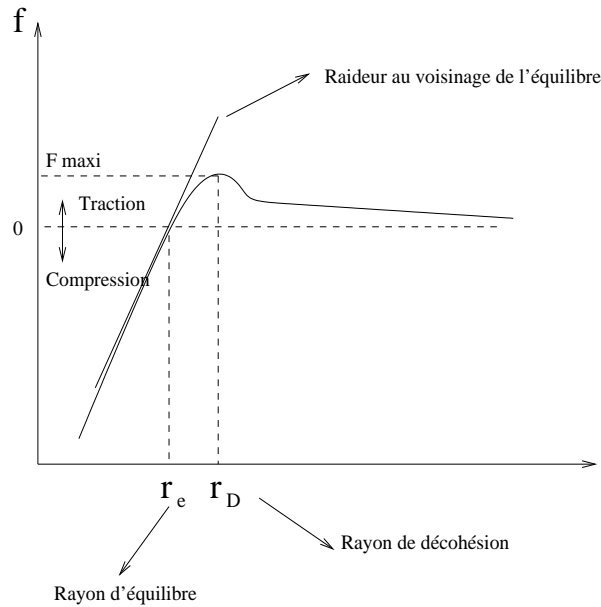
On peut estimer le module d'élasticité  $E$  en fonction de  $K$  et de  $r_0$  par un calcul élémentaire :

$$E = \frac{K}{r_0}$$

La force  $f$  est pratiquement proportionnelle à la distance " $r - r_0$ " pour tous les matériaux, tant en traction qu'en compression. La raideur  $K$  de la liaison est constante aux petites déformations et se trouve à l'origine de la définition du module d'élasticité  $E$ . C'est le cadre de l'élasticité linéaire.



FIG. 4.7 – Ressort de raideur  $K$

FIG. 4.8 – *Le comportement élastique d'un solide*

L'expérience (figure(4.8)) montre que pour tout matériau élastique lors d'une compression, la force est pratiquement proportionnelle aux déplacements. Pour une traction, la force est proportionnelle aux déplacements jusqu'à un certain rayon de décohesion, car au delà de ce niveau, la théorie et l'expérience aboutissent dans un grand nombre de cas à un divorce, qui est lié à l'existence de défauts et en particulier de dislocations dans la structure des matériaux.

On considère un arrangement atomique régulier soumis à une force positive suivant l'axe  $OX$ , cette force est appelée Traction (dans le cas où la force  $f$  est négative, il s'agit de Compression). Un polymere initialement de longueur  $l$  (voir figure(4.9)) se trouve allongé d'une valeur  $\Delta l$ , son allongement relatif vaut donc :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$\varepsilon$  est la déformation longitudinale (sans unité).

Puisque le rapport  $\frac{\Delta l}{l}$  représente le déplacement des particules au cours d'une déformation alors, on peut écrire  $\varepsilon_i$  en fonction du déplacements  $u_i$ . Par exemple

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{u_1} \text{ avec } \Delta u_1 = 2X_{CM} - x_{i+1,j} = u_1(i+1, j, t+1)$$

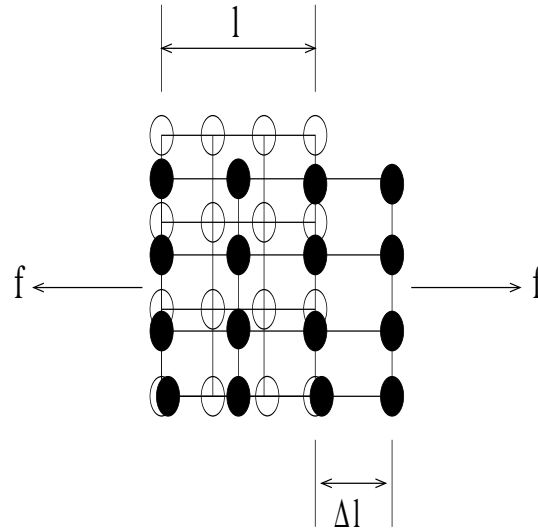


FIG. 4.9 – L'allongement du polymère sous l'effet de la force de traction

Alors  $\varepsilon_1$  devient

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1(i+1, j, t+1)}{u_1} = \frac{1}{2u_1} [u_1 + u_2 - u_3 + u_4]$$

De la même manière, on peut calculer  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ .

La loi d'évolution de la déformation est la suivante

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(i+1, j, t+1) \\ \varepsilon_2(i, j+1, t+1) \\ \varepsilon_3(i-1, j, t+1) \\ \varepsilon_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où  $W'$  est donnée par :

$$W' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_1} & -\frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_2} & -\frac{1}{u_2} \\ -\frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} \\ \frac{1}{u_4} & -\frac{1}{u_4} & \frac{1}{u_4} & \frac{1}{u_4} \end{pmatrix}$$

#### 4.4.5 La contrainte

Notons  $S$  la section du réseau de particules perpendiculairement à l'axe de la traction (voir figure(4.10)).

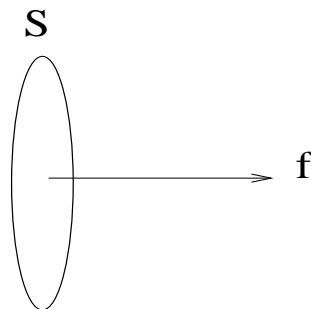


FIG. 4.10 – *La section S.*

Si le comportement du réseau de particules constituant le solide élastique est dans sa phase élastique, on observe que la déformation est proportionnelle au rapport :

$$\sigma = \frac{f}{S}$$

$\sigma$  est la contrainte longitudinale à laquelle est soumis le réseau de particules. Elle s'exprime en  $N/m^2$ .

La relation de proportionnalité est appelée la loi de Hooke. Elle s'écrit :

$$\sigma = E \varepsilon$$

$E$  est le module d'élasticité longitudinal (module d'Young).

Si on exprime par exemple  $\sigma_1$  en fonction des  $u_i$ , alors on obtient :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E \frac{u_1(i+1, j, t+1)}{u_1} = \frac{1}{2u_1} E[u_1 + u_2 - u_3 + u_4]$$

Le calcul des  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  se fait de la même manière que  $\sigma_1$ .

La loi d'évolution de la contrainte est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(i+1, j, t+1) \\ \sigma_2(i, j+1, t+1) \\ \sigma_3(i-1, j, t+1) \\ \sigma_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W'' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

où  $W''$  est donnée par :

$$W'' = \frac{1}{2} E \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_1} & -\frac{1}{u_1} & \frac{1}{u_1} \\ \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_2} & \frac{1}{u_2} & -\frac{1}{u_2} \\ -\frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} & \frac{1}{u_3} \\ \frac{1}{u_4} & -\frac{1}{u_4} & \frac{1}{u_4} & \frac{1}{u_4} \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Sur la frontière  $\Gamma_1$  le déplacement sera nul.

## 4.5 Traitement numérique et simulation

### 4.5.1 Traitement numérique

#### Ensemble des états

Pour la mise en oeuvre de l'AC modélisant le déplacement des particules, on va choisir cinq états que peuvent prendre ces particules. L'ensemble des états est défini comme suit

$$\mathcal{E} = \{e_i, 0 \leq i \leq 4\}$$

$$e_i = \begin{cases} 0 & \text{si la particule est immobile.} \\ 1 & \text{si la particule se déplace dans la direction ouest-est.} \\ 2 & \text{si la particule se déplace dans la direction sud-nord.} \\ 3 & \text{si la particule se déplace dans la direction nord-sud.} \\ 4 & \text{si la particule se déplace dans la direction est-ouest.} \end{cases}$$

### Règle de transition

La loi d'évolution de déplacement des particules s'écrit

$$u_1(i+1, j, t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_2(i, j+1, t+1) = \begin{cases} 2 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_3(i-1, j, t+1) = \begin{cases} 4 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_4(i, j-1, t+1) = \begin{cases} 3 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les valeurs choisies sont déduites de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[u_1 + u_2 - u_3 + u_4] = 1 & \text{pour } u_1(i+1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + u_3 - u_4] = 2 & \text{pour } u_2(i, j+1, t+1) \\ \frac{1}{2}[-u_1 + u_2 + u_3 + u_4] = 4 & \text{pour } u_3(i-1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 - u_2 + u_3 + u_4] = 3 & \text{pour } u_4(i, j-1, t+1) \end{cases}$$

### Voisinage

Le voisinage considéré est de type von Neumann (figure(4.11)).

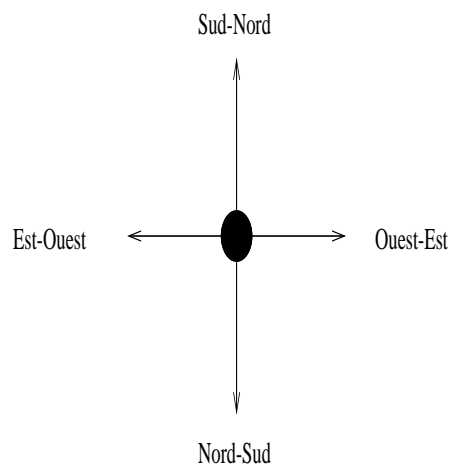


FIG. 4.11 – *Voisinage de type von Neumann*



## 4.5.2 Vérification des lois de conservation

Cette partie consiste à vérifier deux lois de conservation pour le modèle d'automates cellulaires concernant la déformation élastique d'un solide.

### Conservation de la masse

La loi d'évolution de déplacement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

où  $W$  est une matrice de propagation qui représente les interactions entre la particule centrale et ses voisines.

Supposons que  $N_i$  est le nombre des particules qui occupent un site donné, et qui se déplacent en fonction du déplacement  $u_i$ .

D'après les hypothèses de la physique moléculaire, le déplacement de la quantité de matière  $N_i$  est régie par la loi d'évolution des particules (4.27). On a

$$\begin{pmatrix} N_1(i+1, j, t+1) \\ N_2(i, j+1, t+1) \\ N_3(i-1, j, t+1) \\ N_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} N_1(i, j, t) \\ N_2(i, j, t) \\ N_3(i, j, t) \\ N_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Le développement de (4.28) donne

$$\begin{aligned} N_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) - N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] \\ N_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) - N_4(i, j, t)] \\ N_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] \\ N_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) - N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$\begin{aligned} N_1(i+1, j, t+1) + N_2(i, j+1, t+1) + N_3(i-1, j, t+1) + N_4(i, j-1, t+1) &= \\ \frac{1}{2}[2N_1(i, j, t) + 2N_2(i, j, t) + 2N_3(i, j, t) + 2N_4(i, j, t)] & \end{aligned} \quad (4.30)$$

(4.30) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x+u_i, t+1) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \quad (4.31)$$

d'où la conservation de la quantité de matière.

### Conservation de la quantité de mouvement

La loi d'évolution des particules est la suivante

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

le développement de (4.32) donne

$$\begin{aligned} u_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) - u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] \\ u_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) - u_4(i, j, t)] \\ u_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] \\ u_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) - u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$\begin{aligned} u_1(i+1, j, t+1) + u_2(i, j+1, t+1) + u_3(i-1, j, t+1) + u_4(i, j-1, t+1) = \\ \frac{1}{2}[2u_1(i, j, t) + 2u_2(i, j, t) + 2u_3(i, j, t) + 2u_4(i, j, t)] \end{aligned} \quad (4.34)$$

(4.34) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 u_i(x + \Delta x, t+1) = \sum_{i=1}^4 u_i(x, t) \quad (4.35)$$

On suppose que chaque particule possède une masse  $m_i$ . En multipliant l'équation (4.35) par  $m_i$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^4 m_i u_i(x + \Delta x, t+1) = \sum_{i=1}^4 m_i u_i(x, t) \quad (4.36)$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement.

### 4.5.3 Simulation de la déformation d'un corps élastique

L'exemple de simulation qu'on a considéré concerne le déplacement des particules constituant un corps élastique de dimension 15x15. Ce déplacement est engendré par l'application des forces extérieures  $f_k$ .

Au cours de cette simulation, on observe une variation du déplacement du centre de masse ainsi que l'énergie potentielle du système en fonction du temps. On considère pour les simulations, les valeurs numériques

$$\begin{cases} n_x = 15, & n_y = 15 \\ d_0 = c = 1.0 \\ m = 1 \end{cases}$$

On désigne par

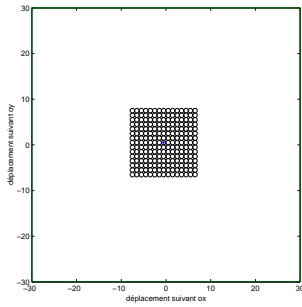
$n_x$  : le nombre de particules selon l'axe  $OX$ .

$n_y$  : le nombre de particules selon l'axe  $OY$ .

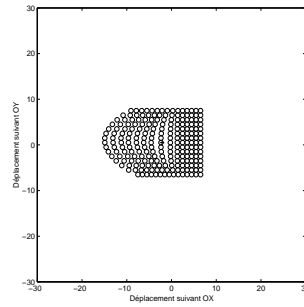
$d_0$  : la distance entre les particules à l'état d'équilibre.

$C$  : une constante qui dépend de l'énergie de liaison.

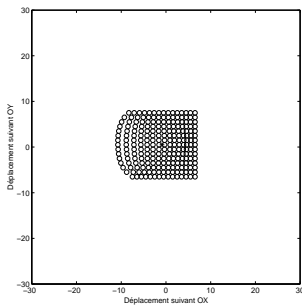
$m$  : la masse de la particule.



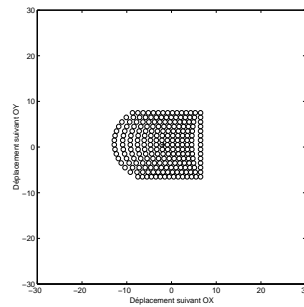
Configuration initiale



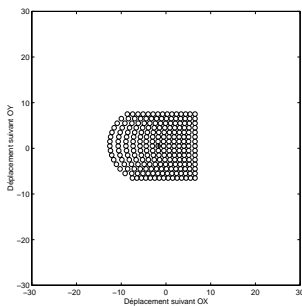
T=14



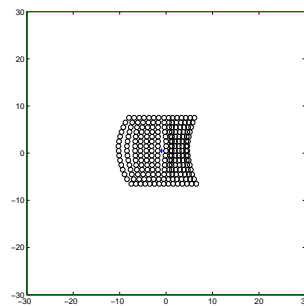
T=40



T=150



T=180



T=250

### 4.5.4 Représentation du déplacement du centre de masse

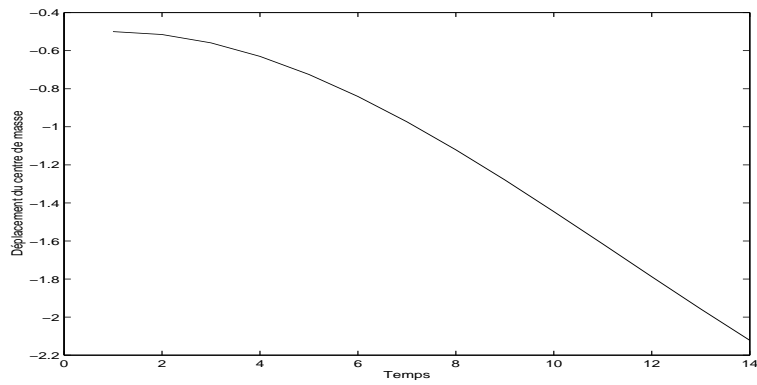


FIG. 4.12 – *Déplacement du centre de masse à  $T=14$*

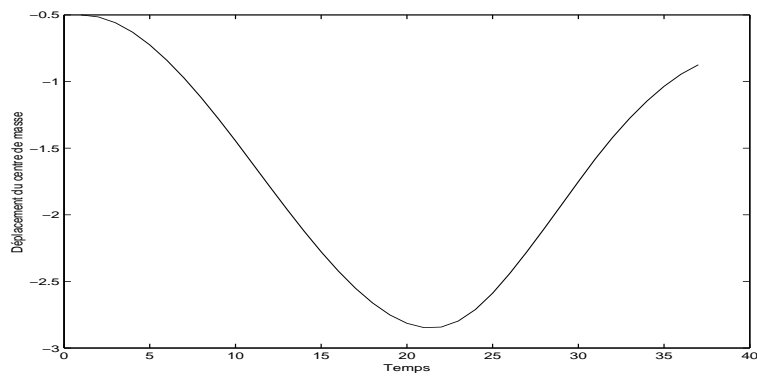
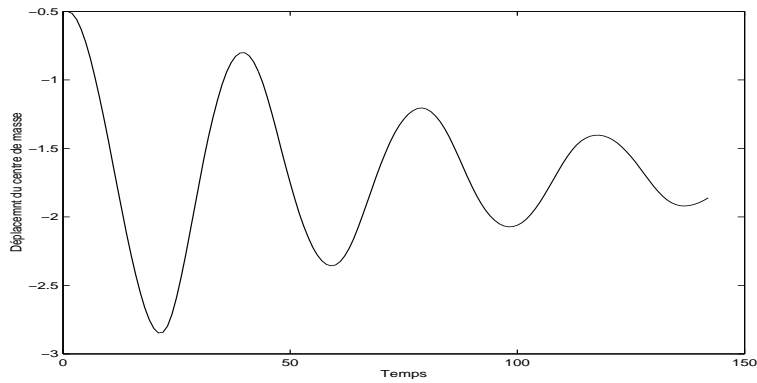
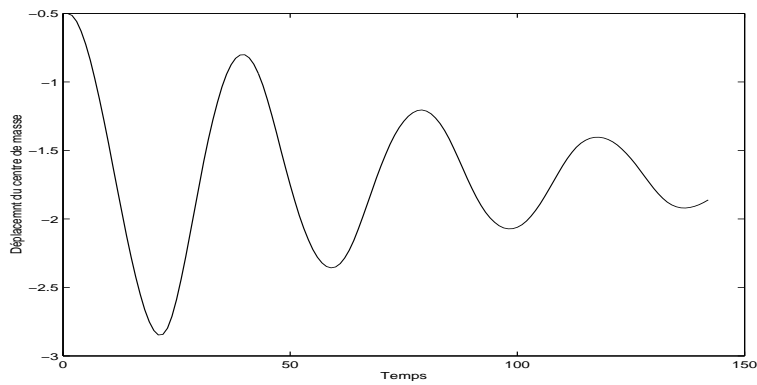


FIG. 4.13 – *Déplacement du centre de masse à  $T=40$*

FIG. 4.14 – *Déplacement du centre de masse à  $T=150$* FIG. 4.15 – *Déplacement du centre de masse à  $T=180$* 

Après plusieurs déformations et répulsions, la courbe illustrant le déplacement du centre de masse aura une forme sinusoidale, ce qu'on peut l'assimiler à une propagation d'onde.

### 4.5.5 Représentation de l'énergie potentielle.

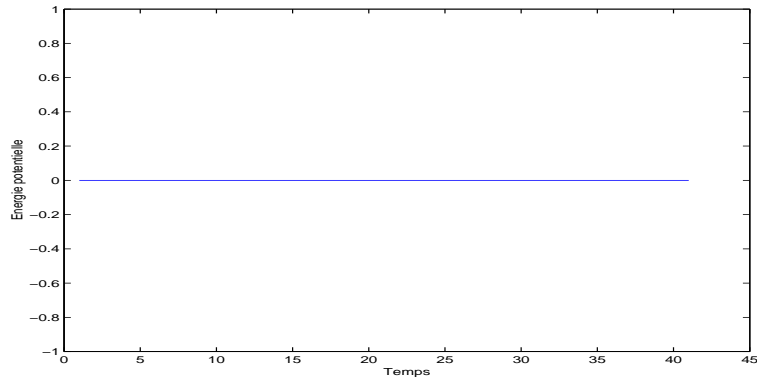


FIG. 4.16 – *L'énergie potentielle à  $T=0$*

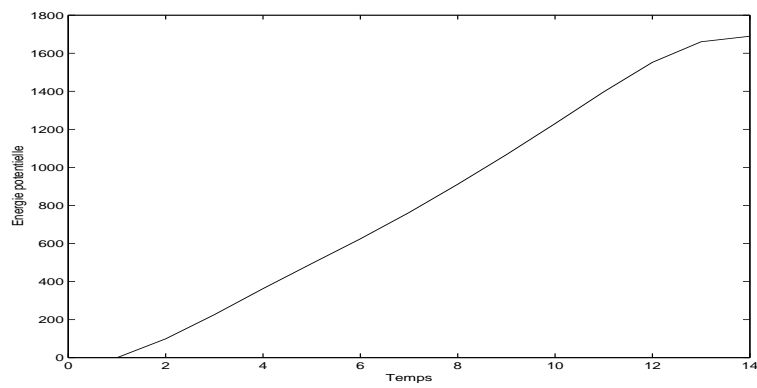
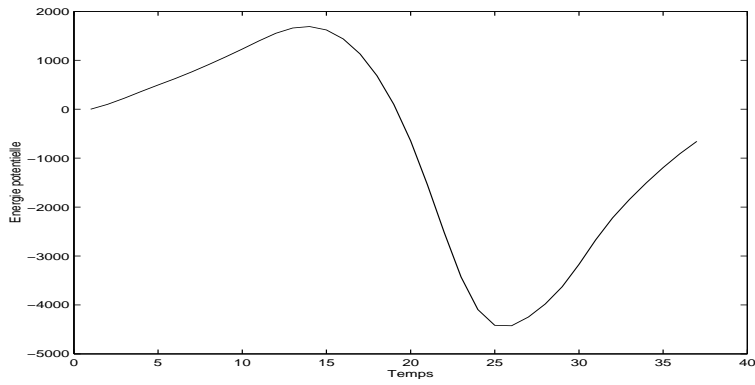
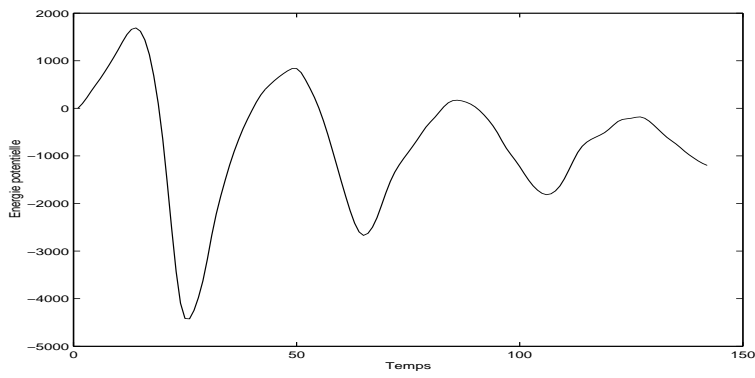
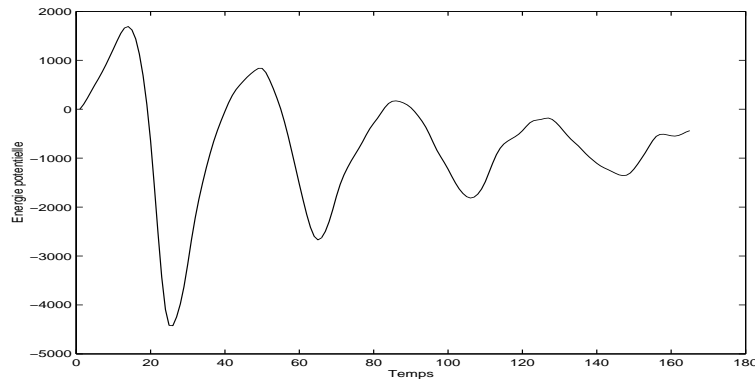


FIG. 4.17 – *L'énergie potentielle à  $T=14$*

FIG. 4.18 – *L'énergie potentielle à  $T=40$* FIG. 4.19 – *L'énergie potentielle à  $T=150$*



FIG. 4.20 – L'énergie potentielle à  $T=180$ 

On constate que la variation de l'énergie potentielle est identique aux variations du déplacement du centre de masse.

Le fait d'avoir étudié la déformation et la répulsion du corps élastique, a pour but d'approcher le comportement de ce corps au cas réel. Des simulations identiques seront très utiles dans l'industrie pneumatique, surtout dans la conception d'un lit de percolation pour un composé de pneu.

## 4.6 Modélisation par automates cellulaires d'une déformation en 3D

Le solide étudié sera représenté par un réseau de particules dans un système de trois dimensions (voir figure(4.21)).

### 4.6.1 La force exercée

Lorsqu'on déforme élastiquement un solide, la force appliquée induit le déplacement des particules en dehors de leurs positions d'équilibre. On se limite aux petites déformations, la force  $f_k$  est proportionnelle à la variation de la distance interatomique  $d_0$  parallèlement à la direction de déformation.

$$f_k(i, j, k, t) = C \Delta x_k(i, j, k, t) \quad (4.37)$$

$C$  est une constante de proportionnalité qui est en fonction de l'énergie de liaison.

### 4.6.2 Puissance et énergie potentielle

Pour un système de  $n$  particules l'énergie potentielle totale est la suivante :

$$E_{ptot} = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \Delta x_i \quad (4.38)$$

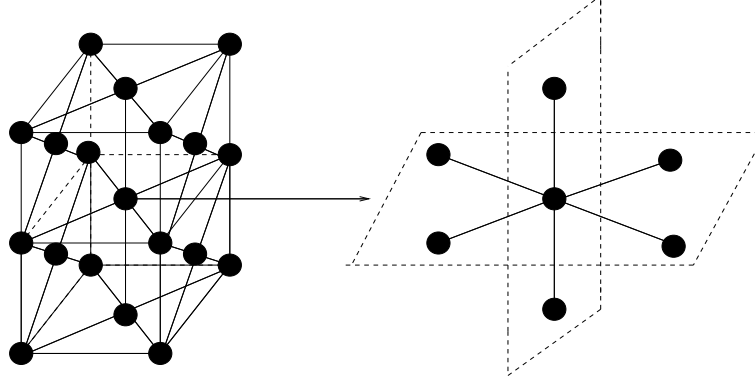


FIG. 4.21 – Différentes particules constituant le solide.

### 4.6.3 Le déplacement des particules

Dans un système de trois dimensions, supposons une particule centrale entourée de six voisines subissant des efforts extérieurs. Alors le mouvement de la particule centrale résulte des forces  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  appliquées sur les six voisines, engendrant leur déplacements  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  le long de l'axe des abscisses  $OX$ . Le signe + indique l'emplacement du centre de masse des particules blanches.

Le mouvement de la particule centrale va dépendre des déplacements de l'une ou des quatre voisines blanches (figure(4.22)).

Notons  $r_{i,j,k}$  la position de la particule noire avec

$$r_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$$

les particules blanches environnantes seront aux positions :

$$r_{i-1,j,k}, r_{i+1,j,k}, r_{i,j-1,k}, r_{i,j+1,k}, r_{i,j,k-1}, r_{i,j,k+1}$$

On peut définir les déplacements des particules voisines selon l'axe  $OX$  par

$$\begin{aligned} u_1(i, j, k, t) &= x_{i-1,j,k}(t) - x_{i,j,k}(t) \\ u_2(i, j, k, t) &= x_{i,j-1,k}(t) - x_{i,j,k}(t) \\ u_3(i, j, k, t) &= x_{i+1,j,k}(t) - x_{i,j,k}(t) \\ u_4(i, j, k, t) &= x_{i,j+1,k}(t) - x_{i,j,k}(t) \\ u_5(i, j, k, t) &= x_{i,j,k+1}(t) - x_{i,j,k}(t) \\ u_6(i, j, k, t) &= x_{i,j,k-1}(t) - x_{i,j,k}(t) \end{aligned}$$

Si l'origine des quatre particules voisines est la particule centrale (c-à-d  $r_{i,j,k}(t) = 0$ ), le centre de masse sert à la description du mouvement d'un système de particules. La

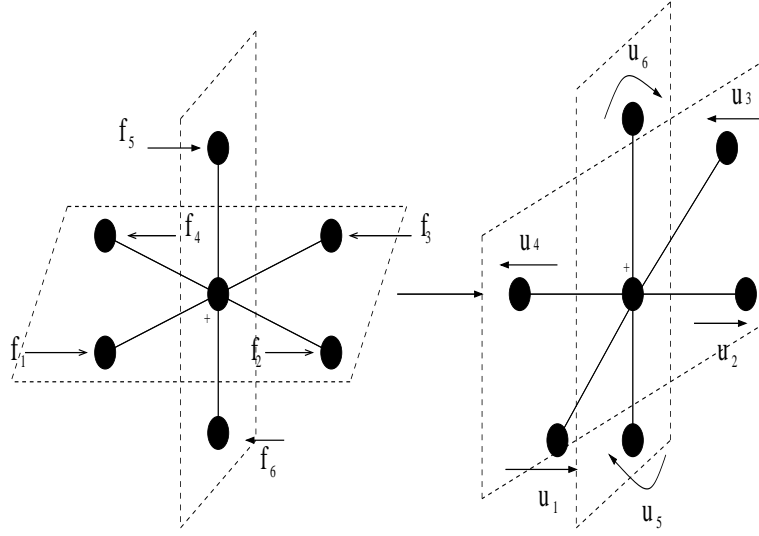


FIG. 4.22 – Le déplacement des particules sous l'effet des forces extérieures.

position du centre de masse se calcule avec

$$X_{CM} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6}$$

Supposons que la masse  $m_i$  de chaque particule est égale à 1, alors le centre de masse au repos des quatres particules est

$$X_{CM} = \frac{1}{6}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6] \text{ selon l'axe } OX$$

Pour une raison de symétrie, la nouvelle abscisse de la particule centrale est

$$\begin{aligned} x_{i,j,k}(t+1) &= 2X_{CM} \\ &= \frac{1}{3}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6] \end{aligned}$$

En effet le déplacement de la particule centrale est le suivant. Par exemple  $u_1(i+1, j, t+1)$  sera le déplacement de la particules noire vu par la particule située à  $r_{i+1,j}$ .

$$\begin{aligned} u_1(i+1, j, k, t+1) &= 3X_{CM} - x_{i+1,j} \\ &= \frac{1}{3}[u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6] - u_3 \\ &= \frac{1}{3}[u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5 + u_6] \end{aligned}$$

De la même façon, on calcule  $u_2(t+1), u_3(t+1), u_4(t+1), u_5(t+1), u_6(t+1)$ , ainsi on va

obtenir la loi suivante d'évolution de déplacement des particules noires.

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, k, t+1) \\ u_2(i, j+1, k, t+1) \\ u_3(i-1, j, k, t+1) \\ u_4(i, j-1, k, t+1) \\ u_5(i, j, k+1, t+1) \\ u_6(i, j, k-1, t+1) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1(i, j, k, t) \\ u_2(i, j, k, t) \\ u_3(i, j, k, t) \\ u_4(i, j, k, t) \\ u_5(i, j, k, t) \\ u_6(i, j, k, t) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

où  $\alpha$  est une matrice de propagation donnée par :

$$\alpha = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 4.7 Traitement numérique

### 4.7.1 L'ensemble des états

L'ensemble des états est défini comme suit

$$\mathcal{E} = \{e_i, \quad 0 \leq i \leq 6\}$$

$$e_i = \begin{cases} 0 & \text{si la particule est immobile.} \\ 1 & \text{si la particule se déplace dans la direction ouest-est.} \\ 2 & \text{si la particule se déplace dans la direction sud-nord.} \\ 3 & \text{si la particule se déplace dans la direction nord-sud.} \\ 4 & \text{si la particule se déplace dans la direction est-ouest.} \\ 5 & \text{si la particule effectue une rotation autour de l'axe OZ+} \\ 6 & \text{si la particule effectue une rotation autour de l'axe OZ-} \end{cases}$$

### 4.7.2 Règle de transition

La loi d'évolution de déplacement des particules est donnée par (4.39).

### 4.7.3 Voisinage

Le voisinage de la cellule  $c_{i,j}$  est donné comme suit

$$c_{i-1,j-1}, c_{i-1,j+1}, c_{i,j-1}, c_{i+1,j+1}, c_{i+1,j-1}, c_{i,j+1}$$

**Remarque :**

Les simulations en 3D font partie des perspectives de ce travail.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle d'automates cellulaires permettant de décrire le comportement élastique d'un solide au cours de sa déformation. Malgré la simplicité de ce modèle, les résultats de simulation confirment et valident le bon choix du modèle. Le modèle présenté sera utilisé comme modèle de référence afin d'établir les deux modèles d'AC pour le contact sans frottement et la déformation thermoélastique.

# Chapitre 5

## Problème de contact sans frottement

### 5.1 Introduction-Motivation

Depuis toujours, on s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Les problèmes de contact avec ou sans frottement, entre corps déformables ou entre un corps avec une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du sabot de frein avec la roue, du train d'atterrissage avec le sol, le piston avec la chemise, les frottements entre plaques tectoniques, ne sont que quelques exemples, parmi bien d'autres. Les contacts entre solides constituent une source importante de dégradations telles que l'usure et la fatigue. Ces dernières peuvent revêtir plusieurs aspects (usure douce ou sévère, fatigue à faible ou à grand nombre de cycles : écaillage, pitting, fretting, ...). Elles sont responsables de dysfonctionnements et de mises hors service de nombreux mécanismes et systèmes. Il est donc important de comprendre afin de prévenir les conséquences de ces contacts.

Dans ce chapitre, on propose un modèle simple d'automates cellulaires, permettant de décrire à l'échelle microscopique le comportement d'un corps élastique en contact sans frottement avec une base rigide.

### 5.2 Rappel sur les conditions aux limites de contact

Dans ce paragraphe, nous décrivons quelques conditions aux limites de contact considérées dans la littérature et utilisées dans ce mémoire.

Avant de définir les conditions aux limites de contact, nous tenons à présenter quelques repères bibliographiques concernant les problèmes de contact. Des résultats d'analyse mathématique des problèmes de contact sans frottement entre un corps déformable et une base rigide ont été établis dans [84, 77, 80, 53]. D'autres résultats numériques concernant l'étude des problèmes de contact dans le cas dynamique sont exposés dans [61].

### 5.2.1 Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation de contact est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale  $\sigma_\nu$  satisfait la condition dite compliance normale.

$$-\rho_\nu = p(u_\nu - g_a) \quad (5.1)$$

où  $u_\nu$  est le déplacement normal,  $g_a$  représente l'interstice entre le corps et la fondation et  $p$  est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration ( $u_\nu - g_a$ ). Dans le cas où l'interpénétration est permise mais pénalisée où l'interstice est nul, la condition devient

$$-\rho_\nu = \frac{1}{h} p(u_\nu) \quad (5.2)$$

$h$  étant un paramètre positif petit, qui peut être interprété comme le coefficient de déformation de la fondation. Des conditions de contact avec compliance normale ont été proposées dans [65].

Comme exemple de fonction de compliance normale  $p$  nous pouvons considérer

$$p(r) = cr_+ \quad (5.3)$$

où  $c$  est une constante positive et  $r_+ = \max\{0, r\}$ . Nous pouvons aussi considérer la fonction

$$p(r) = \begin{cases} cr_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c\alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\alpha$  est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (5.1) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, quand elle dépasse  $\alpha$ , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

### 5.2.2 Condition de contact de Signorini

Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide. Puisque la fondation est considérée rigide, elle ne subira donc pas de déformations. Le corps ne pourra donc pas y pénétrer. Cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u_\nu \leq 0 \quad (5.5)$$

En supposant que l'interstice entre le corps et la fondation est nul. Aux points de la frontière de contact tel que  $u_\nu \leq 0$  le corps déformable quitte la base rigide. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a

$$u_\nu \leq 0 \Rightarrow \rho_\nu = 0 \quad (5.6)$$

Aux points de la frontière de contact tels que  $u_\nu = 0$ , le contact est maintenu et la base rigide exerce une réaction normale orientée vers le corps déformable. Nous avons donc

$$u_\nu \leq 0 \Rightarrow \rho_\nu \leq 0 \quad (5.7)$$

Pour résumer, les conditions de contact (5.5) et (5.7) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante

$$u_\nu \leq 0, \quad \rho_\nu \leq 0, \quad \rho_\nu u_\nu = 0 \quad (5.8)$$

Les conditions (5.8) s'appellent les conditions de contact de Signorini.

### 5.2.3 Contact avec réponse normale instantanée

La condition avec réponse normale instantanée sur la surface potentielle de contact s'écrit

$$-\rho_\nu = p(\dot{u}_\nu) \quad (5.9)$$

où  $\dot{u}_\nu$  désigne la vitesse normale et  $p$  est une fonction donnée. Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse normale. Elle peut modéliser le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact. On peut aussi utiliser la condition de contact avec réponse normale instantanée pour une fonction  $p$  particulière, :

$$-\rho_\nu = \beta(\dot{u}_\nu)_+ + p_0 \quad (5.10)$$

où  $\beta$  et  $p_0$  sont des fonctions données à valeurs positives. Cette condition de contact a été considérée dans [77] où la frontière de contact a été supposée couverte d'un liquide lubrifiant. La condition de contact (5.10) modélise le fait que la couche du liquide présente une résistance seulement lorsqu'il y a compression. Du point de vue physique, la fonction  $p_0$  représente la pression du liquide, alors que  $\beta$  est le coefficient de réponse normale.

### 5.2.4 Contact sans frottement

Dans le cas d'un contact où on suppose que le frottement est négligeable, ceci se traduit par l'égalité

$$\rho_\tau = 0$$

Autrement dit, la contrainte tangentielle s'annule à la surface du contact, tout au long du processus. Cette condition représente une première approche dans l'étude des phénomènes plus réalistes, avec frottement.

## 5.3 Problème physique

On envisage un corps matériel élastique qui occupe un domaine borné  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ , avec une surface frontière régulière  $\Gamma$  partitionnée en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , tel que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Soit  $T > 0$  et  $]0, T[$  l'intervalle de temps en question (voir figure(5.1)). On va étudier, pendant un intervalle de temps  $]0, T[$ , l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volume  $f$  et de surface  $g$ . A  $t = 0$ , la structure est fixée et ne subit aucune force.

Le comportement du corps matériel est engendré par la loi de comportement des matériaux élastiques, qui est comme suit :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I \quad (5.11)$$

où les scalaires  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé, et  $\varepsilon$  est le tenseur de déformation.



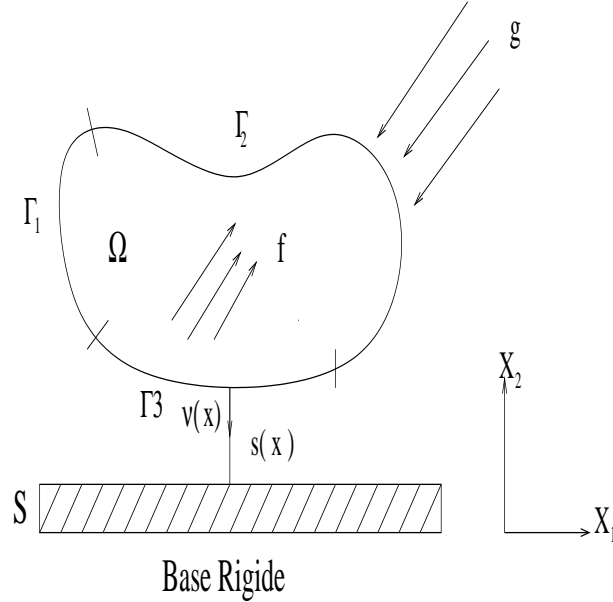


FIG. 5.1 – Contact avec une base rigide

Sur la portion  $\Gamma_1$ , le corps matériel est fixé, le champ des déplacements  $u$  est par conséquent nul

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

Sur  $\Gamma_2$ , on impose les conditions aux limites en déplacement-traction qui sont données par :

$$\sigma \nu = g \text{ sur } \Gamma_2 \quad (5.12)$$

Sur la frontière  $\Gamma_3$ , on suppose que le corps élastique est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide  $S$ . Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de  $\Gamma_3$  est restreint par la présence du solide rigide  $S$  de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance  $s(x)$  de chaque point  $x \in \Gamma_3$  à  $S$  dans la direction de la normale  $\nu(x)$  est connue.

On note d'autre part que  $u_\nu = u \cdot \nu$  est la composante normale du déplacement  $u$ .

Supposons que le contact entre le corps élastique et la base rigide se produit si et seulement si  $u_\nu = s(x)$ . Ce contact se fait sans aucun frottement, ce qui implique des mouvements tangentiels libres.

Puisque  $S$  représente une base rigide, alors le corps déformable ne peut pas pénétrer dedans. Mathématiquement, ce concept se traduit par l'inégalité suivante, dite condition de non-pénétration.

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq s(x) \text{ sur } \Gamma_3 \quad (5.13)$$

Pour les points matériels de  $\Gamma_3$  dans le cas où  $u_\nu < s(x)$ , il n'y a aucun contact entre la structure mécanique et  $S$ , donc le vecteur de contrainte de Cauchy s'annule. Si on note

respectivement  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle du vecteur  $\sigma$  dans le repère orthonormé  $(\nu, \tau)$  donc on a :

$$u_\nu < s \implies \sigma_\nu = 0, \sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad (5.14)$$

Pour les points matériels de  $\Gamma_3$  où  $u_\nu = s$ , on est dans le cas de contact entre  $\Omega$  et  $S$ . On va supposer pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers  $\Omega$ . Ce qui donne les conditions suivantes.

$$u_\nu = s \implies \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad (5.15)$$

Enfin les conditions de contact (6.6) et (5.15) se résument ainsi :

$$u_\nu \leq s, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0, \sigma_\nu(u_\nu - s) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \quad (5.16)$$

### 5.3.1 Résumé

D'après ce qui précède, le modèle mathématique pour ce problème peut être formulé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \sigma_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \text{ avec } i = 1, 2. \\ \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr}(\varepsilon)I \\ \text{avec} \\ u_\nu \leq s, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0, \sigma_\nu(u_\nu - s) = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \\ \sigma_\nu = g \text{ sur } \Gamma_2 \times ]0, T[ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ \text{et} \\ u(x, 0) = u_0, \dot{u}(x, 0) = u_1 \text{ dans } \Omega \\ \text{où } f, g, u_0, u_1, \rho, \mu, \text{ et } \lambda \text{ sont donnés} \end{array} \right. \quad (5.17)$$

## 5.4 Le modèle d'automate cellulaire

L'approche par automate cellulaire que l'on va utiliser, est étroitement liée au mécanisme par lequel le contact apparaît dans le système étudié. On étudie le mouvement des particules, provoqué par l'action des sollicitations mécaniques, que ce soit la force de traction  $f$  ou la force engendrée par le contact  $F_c$  (voir figure(5.2)).

### 5.4.1 Le contact

Le contact considéré est un contact sans frottement.

Dans le cas où le déplacement  $u_i$  des particules constituant le corps élastique est inférieur

à la distance  $s$ , alors il n'y a aucun contact entre le corps élastique et la base rigide. En effet les particules se déplacent selon la règle (3-19).

Dans le cas où  $u_i = s$ , le contact entre le corps élastique et la base rigide est réalisé.

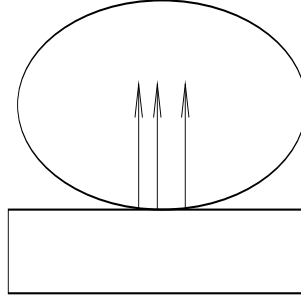


FIG. 5.2 – Contact avec une base rigide

Au cours du contact, la base rigide exerce une force  $F_c$  inconnue suivant la direction de la normale, en effet les particules qui sont en contact direct avec la base vont subir cette force  $F_c$ . Par conséquent le déplacement des particules va être modifié, car cela va engendrer un déplacement  $u_c$  provoqué par la force  $F_c$  qui se rajoute au déplacement  $u_i$  provoqué par la force de traction  $f$ .

Alors la loi d'évolution de déplacement des particules sera comme suit

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} + u_c \quad (5.18)$$

où  $W'$  est une matrice de propagation donnée par :

$$W' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Tableau récapitulatif**

Déformation	Déformation avec contact
$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix}$ $W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} + u_c$ $W' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## 5.5 Traitement numérique et simulation

### 5.5.1 Traitement numérique

#### Ensemble des états

L'ensemble des états est défini comme suit

$$\mathcal{E} = \{e_i, \quad 0 \leq i \leq 5\}$$

$$e_i = \begin{cases} 0 & \text{si la particule se déplace sous l'action de la force exercée par} \\ & \text{l'obstacle.} \\ 1 & \text{si la particule se déplace dans la direction ouest-est.} \\ 2 & \text{si la particule se déplace dans la direction sud-nord.} \\ 3 & \text{si la particule se déplace dans la direction nord-sud.} \\ 4 & \text{si la particule se déplace dans la direction est-ouest.} \\ 5 & \text{si la particule est immobile.} \end{cases}$$

#### Voisinage

Le voisinage considéré est de type von Neumann.

### Règle de transition

$$u_1(i+1, j, t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3, u_c = 0 \\ 5 & \text{si non} \end{cases}$$

$$u_2(i, j+1, t+1) = \begin{cases} 2 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3, u_c = 0 \\ 5 & \text{si non} \end{cases}$$

$$u_3(i-1, j, t+1) = \begin{cases} 4 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3, u_c = 0 \\ 5 & \text{si non} \end{cases}$$

$$u_4(i, j-1, t+1) = \begin{cases} 3 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3, u_c = 0 \\ 5 & \text{si non} \end{cases}$$

Les valeurs choisies sont déduites de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[u_1 + u_2 - u_3 + u_4] + u_c = 1 & \text{pour } u_1(i+1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + u_3 - u_4] + u_c = 2 & \text{pour } u_2(i, j+1, t+1) \\ \frac{1}{2}[-u_1 + u_2 + u_3 + u_4] + u_c = 4 & \text{pour } u_3(i-1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 - u_2 + u_3 + u_4] + u_c = 3 & \text{pour } u_4(i, j-1, t+1) \end{cases}$$

**Remarque :**

Quand il n'y a pas de contact, l'évolution de déplacement des particules est engendré par la règle (4.25).

## 5.5.2 Vérification des lois de conservation

### Conservation de la masse

La loi d'évolution de déplacement avec contact sans frottement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} + u_c \quad (5.19)$$

où  $W'$  est une matrice de propagation qui représente les interactions moléculaires.

Supposons que  $N_i$  est le nombre des particules occupant un site donné, et qui se déplacent en fonction de  $u_i$ . On suppose également que les  $N_{ic}$  représente la densité des particules qui se déplacent sous l'effet de la force exercée par la base rigide.

La loi d'évolution des particules en terme de quantité de matière est donnée à partir de (5.19). On a

$$\begin{pmatrix} N_1(i+1, j, t+1) \\ N_2(i, j+1, t+1) \\ N_3(i-1, j, t+1) \\ N_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} N_1(i, j, t) \\ N_2(i, j, t) \\ N_3(i, j, t) \\ N_4(i, j, t) \end{pmatrix} + N_{ic} \quad (5.20)$$

Le développement de (5.20) donne

$$\begin{aligned}
N_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) - N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] + N_{1c} \\
N_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) - N_4(i, j, t)] + N_{2c} \\
N_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] + N_{3c} \\
N_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) - N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] + N_{4c}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$\begin{aligned}
&N_1(i+1, j, t+1) + N_2(i, j+1, t+1) + N_3(i-1, j, t+1) + N_4(i, j-1, t+1) = \\
&\frac{1}{2}[2N_1(i, j, t) + 2N_2(i, j, t) + 2N_3(i, j, t) + 2N_4(i, j, t)] + N_{1c} + N_{2c} + N_{3c} + N_{4c}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

(5.22) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x + u_i, t+1) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) + \sum_{i=1}^4 N_{ic} \tag{5.23}$$

(5.23) devient

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x + u_i, t+1) = \sum_{i=1}^4 (N_i(x, t) + N_{ic}) \tag{5.24}$$

d'où la conservation de la quantité de matière.

## Conservation de la quantité de mouvement

La loi d'évolution des déplacements avec contact est

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W' \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} + u_c \tag{5.25}$$

Le développement de (5.25) donne

$$\begin{aligned}
u_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) - u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] + u_{1c} \\
u_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) - u_4(i, j, t)] + u_{2c} \\
u_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] + u_{3c} \\
u_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) - u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] + u_{4c}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$u_1(i+1, j, t+1) + u_2(i, j+1, t+1) + u_3(i-1, j, t+1) + u_4(i, j-1, t+1) = \frac{1}{2}[2u_1(i, j, t) + 2u_2(i, j, t) + 2u_3(i, j, t) + 2u_4(i, j, t)] + u_{1c} + u_{2c} + u_{3c} + u_{4c} \quad (5.27)$$

(5.27) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 u_i(x + \Delta x, t+1) = \sum_{i=1}^4 u_i(x, t) + \sum_{i=1}^4 u_{ic} \quad (5.28)$$

(5.28) devient

$$\sum_{i=1}^4 u_i(x + \Delta x, t+1) = \sum_{i=1}^4 (u_i(x, t) + u_{ic}) \quad (5.29)$$

On suppose que chaque particule possède une masse  $m_i$ . Alors, en multipliant (5.29) par  $m_i$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^4 m_i u_i(x + u_i, t+1) = \sum_{i=1}^4 m_i (u_i(x, t) + u_{ic}) \quad (5.30)$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement.

### 5.5.3 Simulation d'un contact sans frottement avec une base rigide

Les simulations présentées ci-dessous illustrent un solide élastique déformable rentrant en contact avec une base rigide. Une telle simulation a pour but d'étudier le comportement du solide dans le cas de contact sans frottement. La distance entre le solide et l'obstacle est  $S = 3mm$ . On considère pour les simulations, les valeurs numériques suivantes

$$\begin{cases} n_x = 15, & n_y = 15 \\ d_0 = c = 1.0 \\ m = 1 \\ S = 3mm \end{cases}$$

On désigne par

$n_x$  : le nombre de particules selon l'axe  $OX$ .

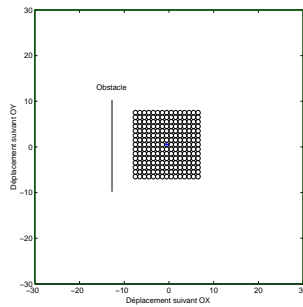
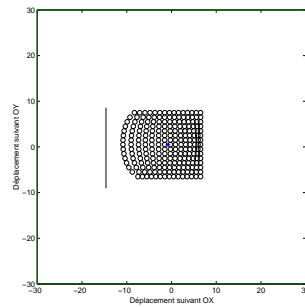
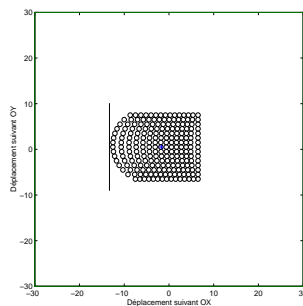
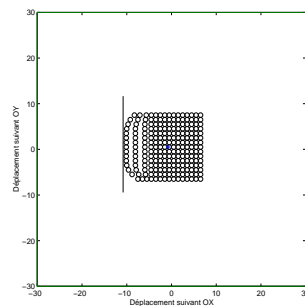
$n_y$  : le nombre de particules selon l'axe  $OY$ .

$d_0$  : la distance entre les particules à l'état d'équilibre.

$C$  : une constante qui dépend de l'énergie de liaison.

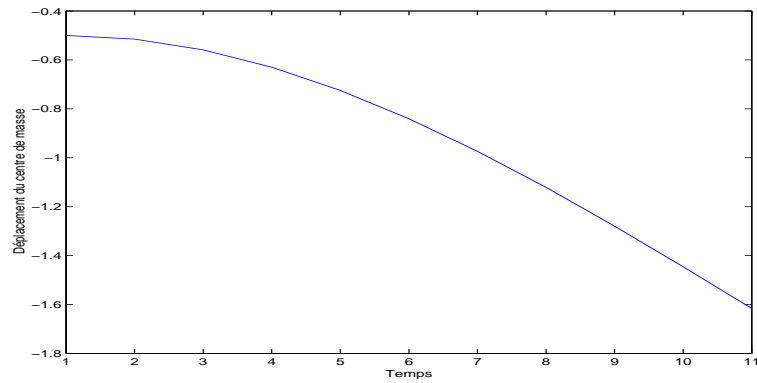
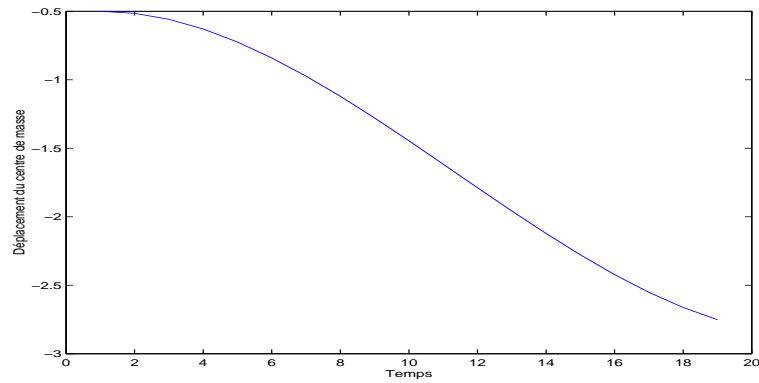
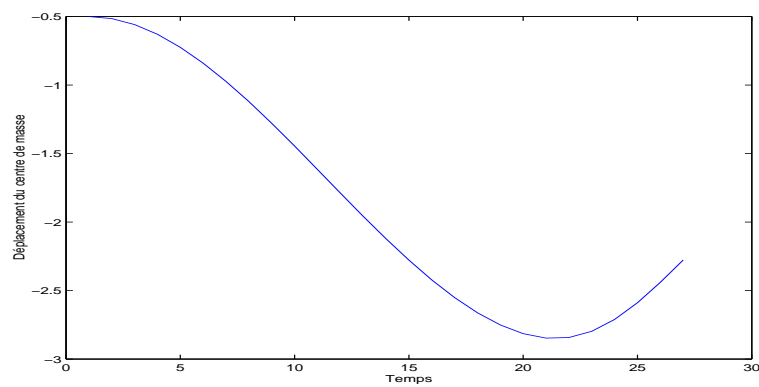
$m$  : la masse de la particule.

$S$  : la distance entre le solide et l'obstacle.

 $T=0$  $T=11$  $T=20$  $T=25$ 

#### 5.5.4 Représentation du déplacement du centre de masse dans le cas de contact



FIG. 5.3 – *Déplacement du centre de masse à  $T=11$* FIG. 5.4 – *Déplacement du centre de masse à  $T=20$* FIG. 5.5 – *Déplacement du centre de masse à  $T=25$*

La simulation montre une déformation d'un corps élastique provoquée par les différentes actions mécaniques. Ce corps est susceptible de rentrer en contact avec une base rigide. A travers cette simulation, on observe la variation du centre de masse en fonction du temps. Cela permet d'étudier le comportement du solide élastique au cours d'une déformation et d'un contact sans frottement.

### 5.5.5 Représentation de l'énergie potentielle dans le cas de contact

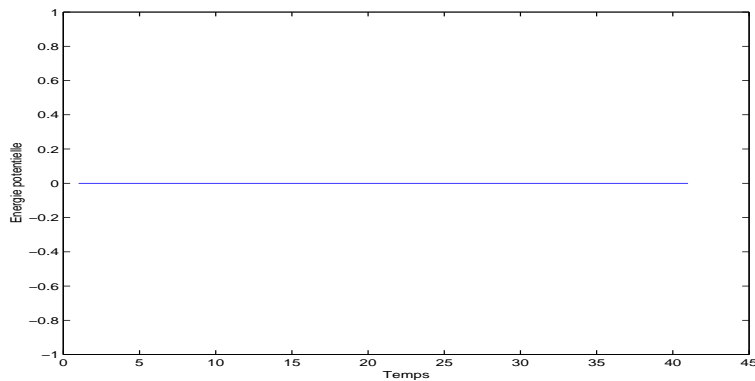


FIG. 5.6 – *L'énergie potentielle à  $T=0$*

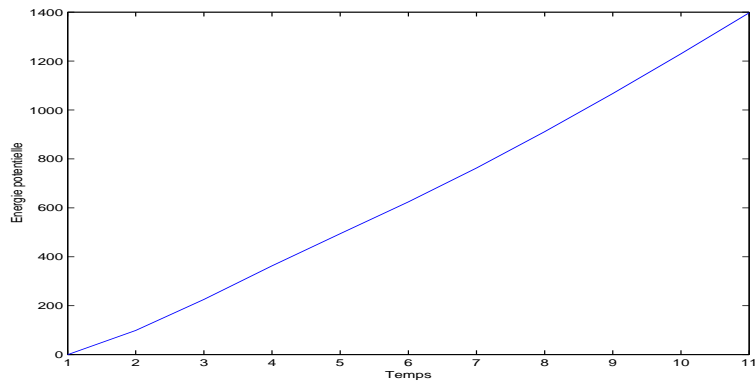
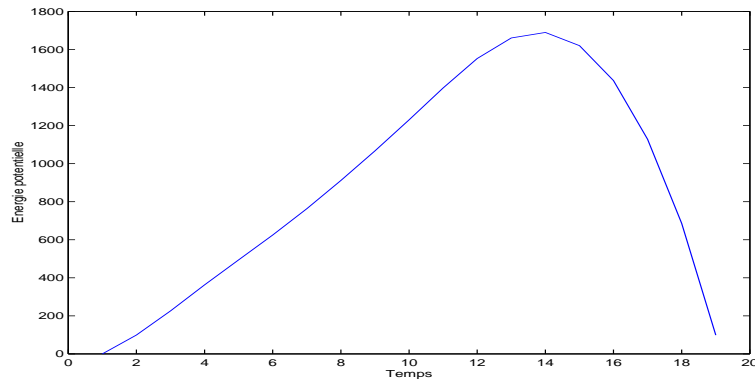
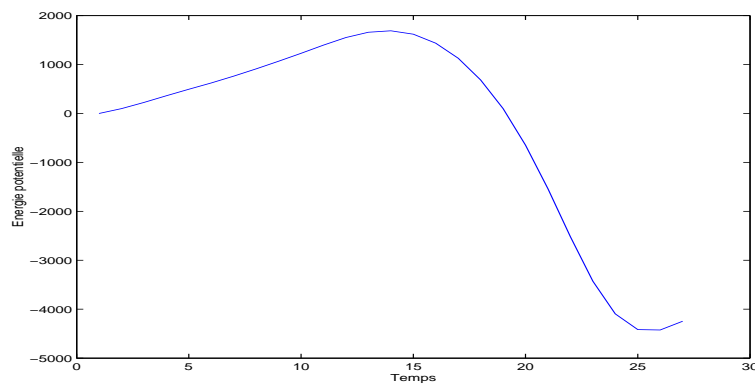


FIG. 5.7 – *L'énergie potentielle à  $T=11$*

FIG. 5.8 – *L'énergie potentielle à  $T=20$* FIG. 5.9 – *L'énergie potentielle à  $T=25$* 

On constate que l'énergie potentielle et le déplacement du centre de masse varie d'une manière proportionnelle aux déplacements des particules jusqu'aux zones de contact. Une fois que la particule rentre en contact avec l'obstacle rigide le déplacement du centre de masse change de direction puis l'énergie potentielle chute d'une manière considérable (-450 KJ).

## 5.6 Conclusion

Les modèles que l'on a proposés représentent une évolution par automates cellulaires analogue à celui des modèles d'EDP. On a validé nos modèles numériquement avec un corps élastique en déformation et en contact.

La simplicité des modèles tient compte de beaucoup de paramètres que l'on a négligés et

---

qui peuvent toujours être considérés. Finalement, on tient à souligner que cette simplicité des modèles implique leur mise en oeuvre facile sur n'importe quelle sorte d'ordinateur, et qui semble manquer dans beaucoup de modèles d'équations aux dérivées partielles.



# Chapitre 6

## Problème Thermoélastique

### 6.1 Introduction-Motivation

La modélisation de la déformation thermoélastique a fait l'objet de plusieurs applications industrielles, notamment dans l'industrie pneumatique. A cause de l'importance du phénomène, les études consacrées à ce vaste sujet sont considérables. L'étendue de la littérature concerne aussi bien l'analyse mathématique que l'approximation numérique des problèmes.

Le comportement thermoélastique des matériaux nous est révélé par des expériences quotidiennes : dilatations ou contractions linéiques et volumiques sous l'effet de variations de température, utilisation des propriétés élastiques des métaux, mais aussi de polymères, pour la fabrication de ressorts, clavettes et clips en tous genres,.. Ainsi, du point de vue phénoménologique, le concept de thermoélasticité est-il associé à une notion de réversibilité? la réponse du matériau à la sollicitation thermique et mécanique qui lui est imposée est instantanée et l'annulation de la sollicitation entraîne le retour du matériau à son état initial sans aucun effet rémanent.

La construction des modèles thermoélastiques s'appuie sur les principes généraux qui s'imposent à toute loi de comportement, parmi lesquels les principes de la thermodynamique des milieux continus exprimés par : l'équation de l'énergie et la loi fondamentale de la mécanique des milieux continus.

L'objet de ce chapitre est d'élaborer un modèle simple d'automates cellulaires pour un problème de déformation thermoélastique due aux forces mécaniques et à une source de chaleur.

### 6.2 Préliminaires

On considère un corps matériel qui occupe un domaine borné  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ , avec une surface frontière régulière  $\Gamma$  partitionnée en deux parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , telle que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Soit  $X = (x, y) \in \Omega$ ,  $T > 0$  et  $]0, T[$  l'intervalle de temps en question.

On va étudier, pendant un intervalle de temps  $]0, T[$ , l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volume  $f$  et une source de chaleur de température  $\theta$  (voir figure(6.1)). A  $t = 0$ , la structure est fixée et ne subit aucune force.

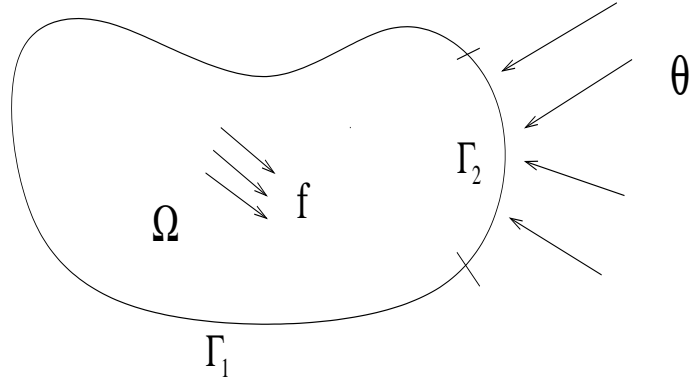


FIG. 6.1 – Le corps matériel.

Le comportement du corps matériel est engendré par la loi de comportement thermoélastique.

$$\sigma = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial X} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(\theta - \theta_0) \quad (6.1)$$

où les scalaires  $\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé,  $\alpha$  est le coefficient de diffusion de la chaleur, et  $\theta_0$  est la température initiale.  $\theta$  représente la variation de la température au cours du temps.

Soit  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$  et  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$  une partition de  $\Gamma$ .

Sur la portion  $\Gamma_1$ , le corps matériel est fixé, le champ des déplacements  $u$  est par conséquent nul

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (6.2)$$

Sur  $\Gamma_2$  on impose les conditions aux limites thermiques

$$\theta(t) = h(X) \text{ sur } \Gamma_2 \quad (6.3)$$

L'équation de mouvement est donnée par la loi de Newton.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{Div} \sigma + f \quad (6.4)$$

L'évolution de la température est gouvernée par l'équation de l'énergie.

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial \theta^2}{\partial X^2} = -\alpha \theta_0 \frac{\partial u^2}{\partial t \partial X} \quad (6.5)$$

avec  $c$  est la capacité calorifique du matériau et  $k$  est le coefficient de transfert conductif.

Les conditions initiales sont données par

$$u(X, 0) = u_0 \quad , \quad \dot{u}(X, 0) = u_1 \quad , \quad \theta(X, 0) = \theta_0 \quad (6.6)$$

A partir des équations et des conditions limites et initiales établies ci-dessus, on obtient un modèle mathématique décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div } \sigma + f = \rho \ddot{u} \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial \theta^2}{\partial X^2} = -\alpha \theta_0 \frac{\partial u^2}{\partial t \partial X} \text{ dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial X} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (\theta - \theta_0) \\ \text{avec} \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ \theta(t) = h(X) \text{ sur } \Gamma_2 \times ]0, T[ \\ \text{et} \\ u(X, 0) = u_0 \quad , \quad \dot{u}(X, 0) = u_1 \quad , \quad \theta(X, 0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega \\ \text{où } f, \theta_0, u_0, u_1, \alpha, c, k, \rho, \mu \text{ et } \lambda \text{ sont donnés.} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

### 6.3 Modélisation du Problème Thermoélastique

Le solide étudié sera représenté par un réseau de particules dans un système de deux dimensions (figure(6.2)). Les arrangements se trouvent à l'équilibre lorsque les particules

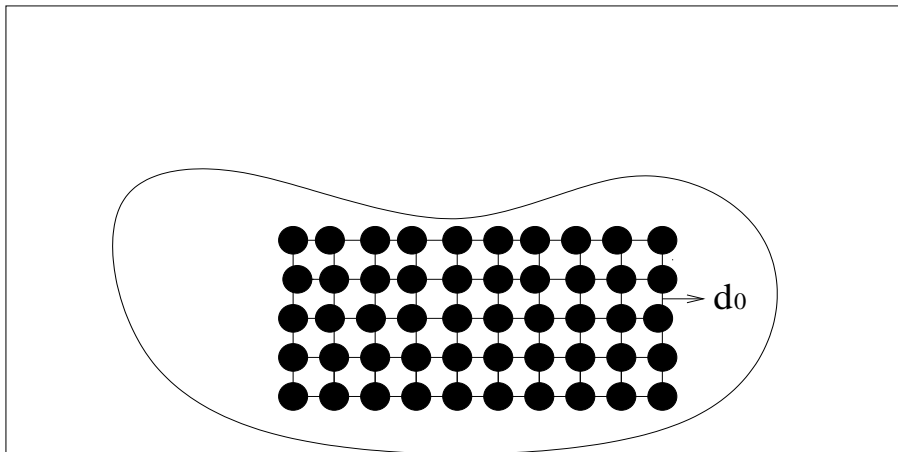


FIG. 6.2 – Différentes particules constituant le solide.

sont distantes d'une certaine valeur  $d_0$ .



### 6.3.1 La force exercée

Lorsqu'on déforme thermoélastiquement un solide, la force appliquée induit le déplacement des particules en dehors de leur positions d'équilibre. On se limite aux petites déformations, la force  $f_k$  est proportionnelle à la variation de la distance interatomique  $d_0$  parallèlement à la direction de déformation (voir figure(6.3)).

$$f_k(i, j, t) = C \Delta x_k(i, j, t) + \alpha \Delta \theta \quad (6.8)$$

$C$  est une constante de proportionnalité qui est fonction de l'énergie de liaison et  $\alpha$  est le coefficient de diffusion de la chaleur.

Alors les forces appliquées sur les quatres voisines blanches sont comme suit.

$$f_1(i, j, t) = C \Delta x_1(i, j, t) = C (x(i-1, j, t) - x(i, j, t)) + \alpha (\theta - \theta_0)$$

$$f_2(i, j, t) = C \Delta x_2(i, j, t) = C (x(i, j-1, t) - x(i, j, t)) + \alpha (\theta - \theta_0)$$

$$f_3(i, j, t) = C \Delta x_3(i, j, t) = C (x(i+1, j, t) - x(i, j, t)) + \alpha (\theta - \theta_0)$$

$$f_4(i, j, t) = C \Delta x_4(i, j, t) = C (x(i, j+1, t) - x(i, j, t)) + \alpha (\theta - \theta_0)$$

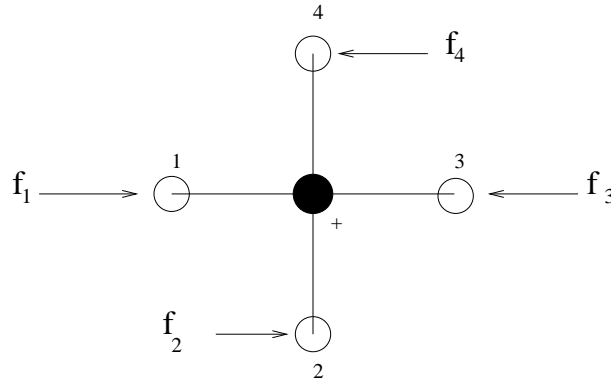


FIG. 6.3 – La position des forces appliquées sur les quatres particules voisines.

### 6.3.2 Déformation thermoélastique

#### Formation des lacunes

Lorsque la température dépasse un certain seuil  $\theta_f$  ( $\theta_f$  est la température de fusion du solide), les mouvements des particules deviennent importants en raison de l'augmentation du nombre des lacunes avec la température  $\theta$  et la vitesse de diffusion des particules  $v(\theta)$ .

$$v(\theta) = v_0 \exp \left( \frac{\Delta H_t + \Delta H_f}{R \cdot \theta} \right) \quad (6.9)$$

$\Delta H_t$  est l'enthalpie d'activation de migration de la lacune.

$\Delta H_f$  est l'enthalpie de formation des lacunes.

$R$  est la constante des gaz parfaits.

Dans ces conditions de température, on observe que lorsqu'on applique une contrainte constante, il se produit une déformation en fonction du temps, même dans le cas où la contrainte est très faible. Cette déformation se produit plutôt par un réarrangement atomique suivant le champ de contrainte, c'est la déformation par diffusion.

Les lacunes constituent un type de défaut ponctuel très important, provoquées par l'application d'un flux de chaleur à haute température. Ce phénomène est appelé déplacement par diffusion dans un corps solide et qui contrôle dans une large mesure le comportement des matériaux à haute température.

Pour qu'une particule située au voisinage d'une lacune se déplace, il faut qu'elle ait l'éner-

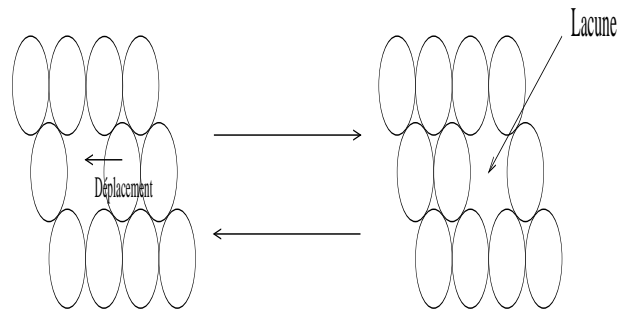


FIG. 6.4 – Le déplacement aléatoire et réversible d'une particule au voisinage d'une lacune.

gie suffisante pour écarter légèrement les particules adjacentes de leur position d'équilibre (figure(6.4)). C'est un processus qui est activé par une élévation de température et par une faible énergie de liaison.

Dans un solide élastique, le nombre de particules qui possèdent l'énergie suffisante pour franchir une barrière de potentiel  $\Delta G_t$  est donné par une distribution du type exponentielle (Maxwell-Boltzmann), où  $\theta$  la température absolue est exprimée en degré Kelvin(K).

Le déplacement des particules qui dépend fortement de la température et de la force mécanique appliquée, varie proportionnellement par rapport au coefficient de diffusion  $\alpha$ .

$$u_i = A \alpha \sigma_i^n \quad (6.10)$$

$A$  est une constante et  $n$  est un exposant dont la valeur pour la déformation par diffusion est 1.

Puisque la déformation dans ce cas est provoquée par une source de chaleur, alors

$$n = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_i^n = \frac{f_i}{S}$$

$S$  est la surface sur laquelle la force  $f_i$  est appliquée.

Alors  $u_i$  devient

$$u_i = A' \frac{f_i}{S} \quad (6.11)$$

Ce qui donne le déplacement des particules

$$\begin{aligned} u_1 &= A' \frac{f_1}{S} \\ u_2 &= A' \frac{f_2}{S} \\ u_3 &= A' \frac{f_3}{S} \\ u_4 &= A' \frac{f_4}{S} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Avec

$$f_k(i, j, t) = C \Delta x_k(i, j, t) + \alpha(\theta - \theta_0) \quad \text{avec} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (6.13)$$

Alors, le déplacement des particules devient

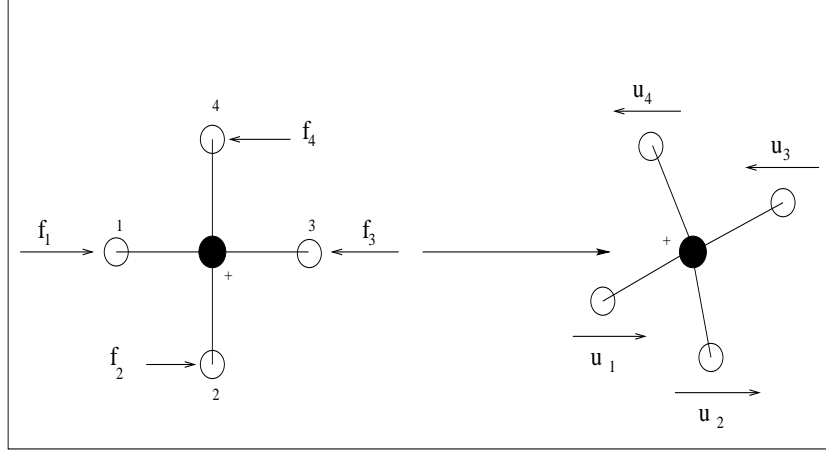
$$\begin{aligned} u_1(i, j, t) &= \frac{1}{S} (D(x(i-1, j, t) - x(i, j, t)) + D'(\theta - \theta_0)) \\ u_2(i, j, t) &= \frac{1}{S} (D(x(i, j-1, t) - x(i, j, t)) + D'(\theta - \theta_0)) \\ u_3(i, j, t) &= \frac{1}{S} (D(x(i+1, j, t) - x(i, j, t)) + D'(\theta - \theta_0)) \\ u_4(i, j, t) &= \frac{1}{S} (D(x(i, j+1, t) - x(i, j, t)) + D'(\theta - \theta_0)) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$D$  et  $D'$  sont des constantes.

### Déplacement des particules

Supposons que la particule centrale a une couleur noire, et ses quatre voisines subissent des efforts extérieurs le long de l'axe  $OX$ . Alors le mouvement de la particule centrale résulte des forces  $f_1, f_2, f_3, f_4$  appliquées sur les quatre voisines blanches, engendrant leur déplacements  $u_1, u_2, u_3, u_4$  le long de l'axe des abscisses  $OX$  (voir figure(6.5)).

Le mouvement de la particule centrale (ou noire) va dépendre des déplacements de l'une ou des quatre voisines blanches.

FIG. 6.5 – *Le déplacement des particules sous l'effet des forces extérieures.*

On peut définir les déplacements des particules blanches selon l'axe  $OX$  par les déplacements (6.14).

La loi d'évolution de déplacement des particules noires est obtenue en utilisant la même démarche représentée dans le cas de la déformation élastique.

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

où  $A$  est une matrice de propagation donnée par :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6.4 Traitement numérique et simulation

### 6.4.1 Traitement numérique

L'automate cellulaire est défini comme suit :

#### Ensemble des états

Afin d'assurer l'évolution de l'ensemble des règles de transition concernant le déplacement des particules, on va choisir cinq états que peuvent prendre ces particules.

$$\mathcal{E} = \{e_i, \quad 0 \leq i \leq 4\}$$

$$e_i = \begin{cases} 0 & \text{si la particule est immobile} \\ 1 & \text{si la particule se déplace dans la direction ouest-est.} \\ 2 & \text{si la particule se déplace dans la direction sud-nord} \\ 3 & \text{si la particule se déplace dans la direction nord-sud} \\ 4 & \text{si la particule se déplace dans la direction est-ouest} \end{cases}$$

### Règle de transition

La loi d'évolution de déplacement est générée par la règle suivante

$$u_1(i+1, j, t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_2(i, j+1, t+1) = \begin{cases} 2 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_3(i-1, j, t+1) = \begin{cases} 4 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$u_4(i, j-1, t+1) = \begin{cases} 3 & \text{si } u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les valeurs choisies sont déduites de

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[u_1 + u_2 - u_3 + u_4] = 1 & \text{pour } u_1(i+1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 + u_2 + u_3 - u_4] = 2 & \text{pour } u_2(i, j+1, t+1) \\ \frac{1}{2}[-u_1 + u_2 + u_3 + u_4] = 4 & \text{pour } u_3(i-1, j, t+1) \\ \frac{1}{2}[u_1 - u_2 + u_3 + u_4] = 3 & \text{pour } u_4(i, j-1, t+1) \end{cases}$$

### Voisinage

On considère un voisinage de type von Neumann présenté dans la figure (6.6). Ce type de voisinage est complètement adapté à la configuration considérée du treillis bidimensionnel.

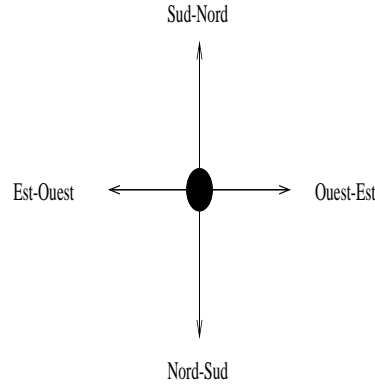


FIG. 6.6 – Voisinage de type von Neumann

## 6.4.2 Vérification des lois de conservation

### Conservation de la masse

La loi d'évolution de déplacement est donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

où  $W$  est une matrice de propagation qui représente les interactions entre la particule centrale et ses voisins.

Supposons que  $N_i$  est le nombre des particules qui occupent un site donné, et qui se déplacent en fonction de  $u_i$ .

D'après les hypothèses de la physique moléculaire, le déplacement de la quantité de matière  $N_i$  est régie par la loi d'évolution des particules (6.16). On a

$$\begin{pmatrix} N_1(i+1, j, t+1) \\ N_2(i, j+1, t+1) \\ N_3(i-1, j, t+1) \\ N_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} N_1(i, j, t) \\ N_2(i, j, t) \\ N_3(i, j, t) \\ N_4(i, j, t) \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Le développement de (6.17) donne

$$\begin{aligned}
N_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) - N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] \\
N_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) - N_4(i, j, t)] \\
N_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-N_1(i, j, t) + N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)] \\
N_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[N_1(i, j, t) - N_2(i, j, t) + N_3(i, j, t) + N_4(i, j, t)]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$\begin{aligned}
N_1(i+1, j, t+1) + N_2(i, j+1, t+1) + N_3(i-1, j, t+1) + N_4(i, j-1, t+1) = \\
\frac{1}{2}[2N_1(i, j, t) + 2N_2(i, j, t) + 2N_3(i, j, t) + 2N_4(i, j, t)]
\end{aligned} \tag{6.19}$$

(6.19) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 N_i(x + u_i, t+1) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) \tag{6.20}$$

d'où la conservation de la quantité de matière.

## Conservation de la quantité de mouvement

La loi d'évolution des particules est la suivante

$$\begin{pmatrix} u_1(i+1, j, t+1) \\ u_2(i, j+1, t+1) \\ u_3(i-1, j, t+1) \\ u_4(i, j-1, t+1) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} u_1(i, j, t) \\ u_2(i, j, t) \\ u_3(i, j, t) \\ u_4(i, j, t) \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

le développement de (6.21) donne

$$\begin{aligned}
u_1(i+1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) - u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] \\
u_2(i, j+1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) - u_4(i, j, t)] \\
u_3(i-1, j, t+1) &= \frac{1}{2}[-u_1(i, j, t) + u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)] \\
u_4(i, j-1, t+1) &= \frac{1}{2}[u_1(i, j, t) - u_2(i, j, t) + u_3(i, j, t) + u_4(i, j, t)]
\end{aligned} \tag{6.22}$$

En sommant membres à membres, on obtient

$$u_1(i+1, j, t+1) + u_2(i, j+1, t+1) + u_3(i-1, j, t+1) + u_4(i, j-1, t+1) = \frac{1}{2}[2u_1(i, j, t) + 2u_2(i, j, t) + 2u_3(i, j, t) + 2u_4(i, j, t)] \quad (6.23)$$

(6.23) peut avoir la forme suivante

$$\sum_{i=1}^4 u_i(x + \Delta x, t + 1) = \sum_{i=1}^4 u_i(x, t) \quad (6.24)$$

On suppose que chaque particule possède une masse  $m_i$ . On multipliant l'équation (6.24) par  $m_i$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^4 m_i u_i(x + \Delta x, t + 1) = \sum_{i=1}^4 m_i u_i(x, t) \quad (6.25)$$

d'où la conservation de la quantité de mouvement.

### 6.4.3 Simulation d'une déformation thermoélastique

L'exemple de simulation que l'on a considéré, concerne le déplacement des particules constituant le solide élastique de dimension  $15 \times 15$ . Ce déplacement est engendré par l'application des forces extérieures  $f$  et la source de chaleur de température  $\theta$ . Au cours de cette simulation, on observe aussi la variation du déplacement du centre de masse ainsi que l'énergie potentielle du système en fonction du temps. On considère pour les simulations, les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} n_x = 15, & n_y = 15 \\ d_0 = c = 1.0 \\ m = 1 \\ \theta = 0.1 \end{cases}$$

On désigne par

$n_x$  : le nombre de particules selon l'axe  $OX$ .

$n_y$  : le nombre de particules selon l'axe  $OY$ .

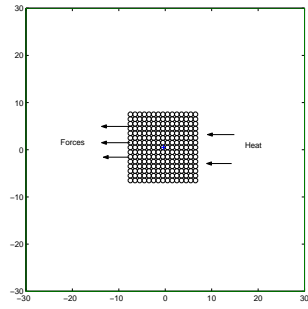
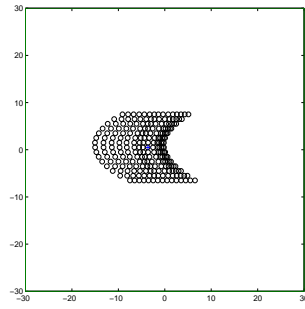
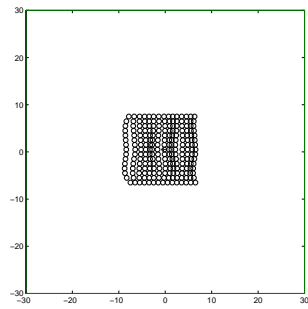
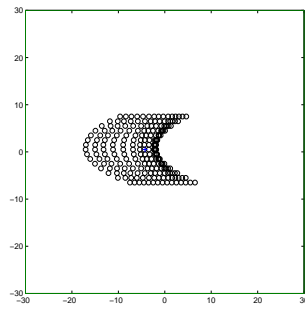
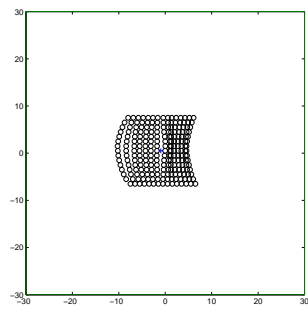
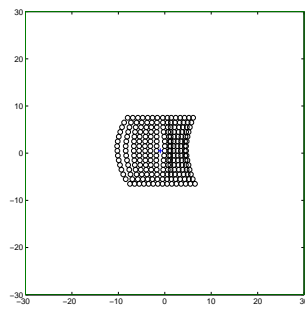
$d_0$  : la distance entre les particules à l'état d'équilibre.

$C$  : une constante qui dépend de l'énergie de liaison.

$m$  : la masse de la particule.

$\theta$  : la température de la source de chaleur.



 $T=0$  $T=15$  $T=40$  $T=70$  $T=200$  $T=250$

#### 6.4.4 Représentation du déplacement du centre de masse d'un solide thermoélastique

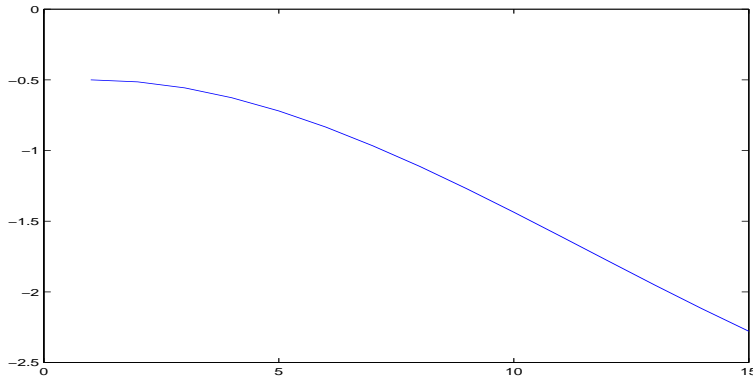


FIG. 6.7 – *Déplacement du centre de masse à  $T=15$*

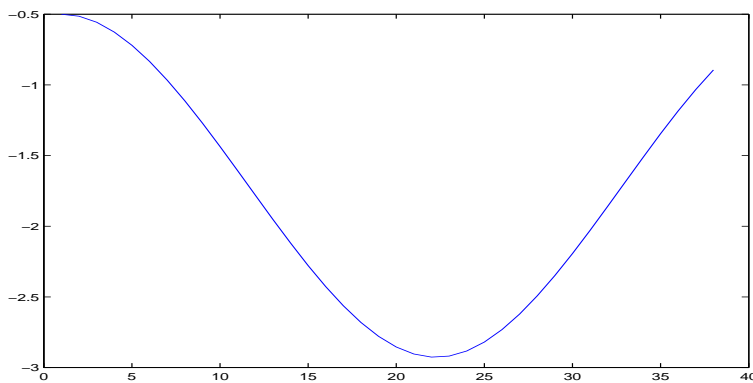
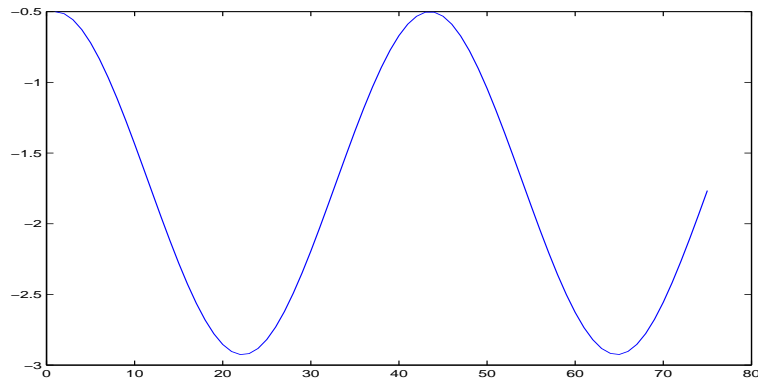
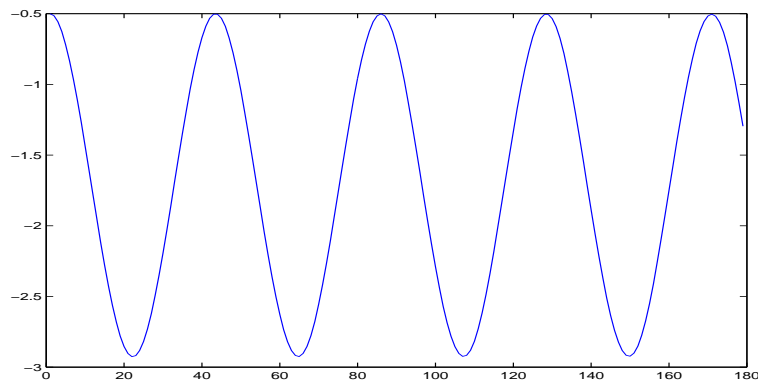
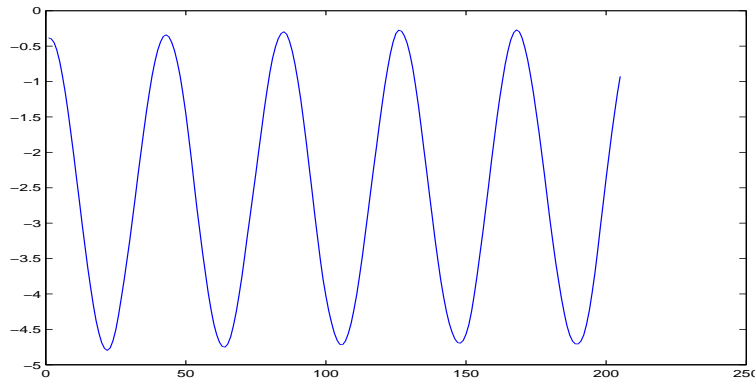


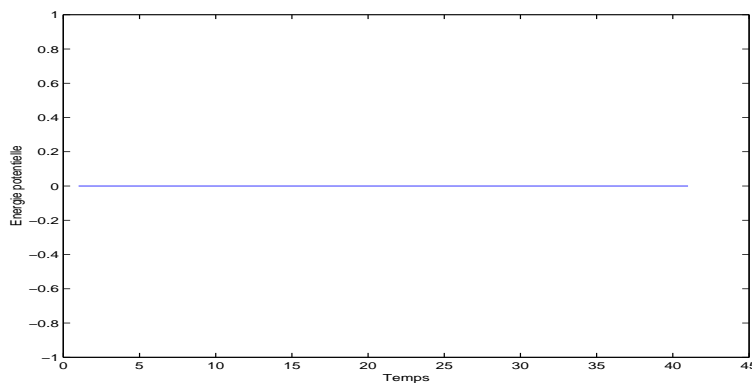
FIG. 6.8 – *Déplacement du centre de masse à  $T=40$*

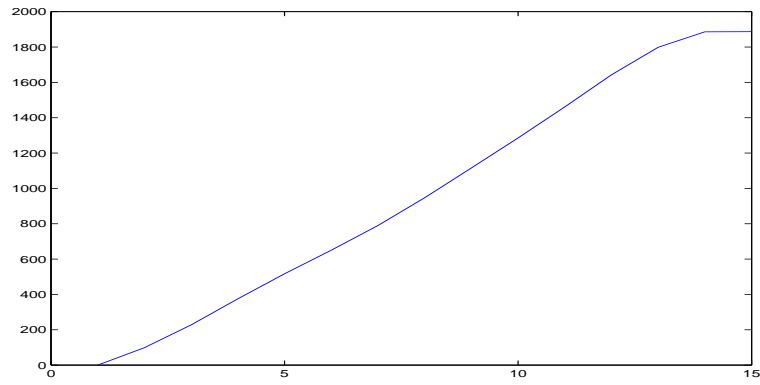
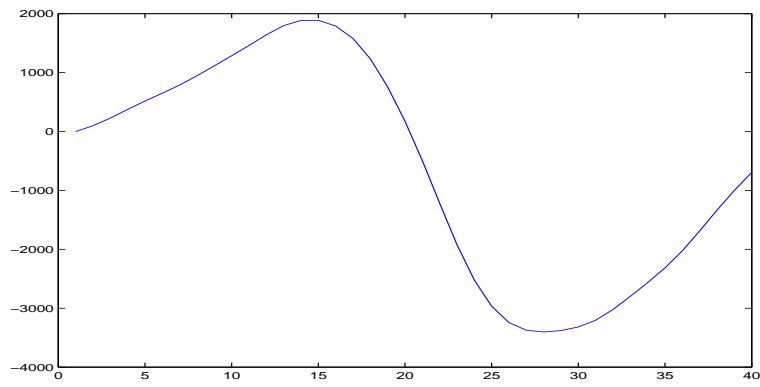
FIG. 6.9 – *Déplacement du centre de masse à  $T=70$* FIG. 6.10 – *Déplacement du centre de masse à  $T=180$*

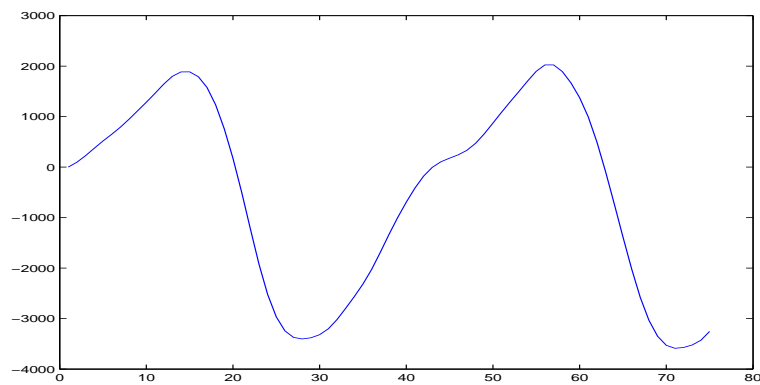
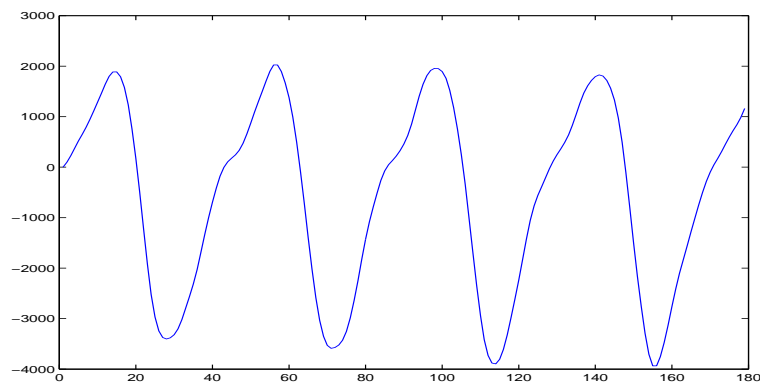
FIG. 6.11 – *Déplacement du centre de masse à  $T=250$* 

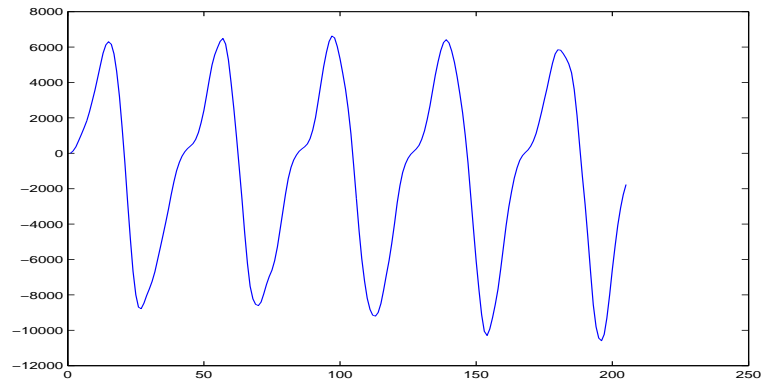
Les simulations obtenues montrent la déformation thermoélastique d'un solide représenté par un ensemble de particule. On constate que la chaleur a un effet considérable sur la déformation en comparant avec les résultats de simulation du travail [6]. Le centre de masse varie d'une manière importante sous l'effet de la chaleur.

#### 6.4.5 Représentation de l'énergie potentielle d'un solide thermoélastique

FIG. 6.12 – *L'énergie potentielle à  $T=0$*

FIG. 6.13 – *L'énergie potentielle à  $T=15$* FIG. 6.14 – *L'énergie potentielle à  $T=40$*

FIG. 6.15 – *L'énergie potentielle à  $T=70$* FIG. 6.16 – *L'énergie potentielle à  $T=180$*

FIG. 6.17 – *L'énergie potentielle à  $T=250$* 

L'énergie potentielle varie d'une manière sinusoidale en fonction du temps. Cette variation peut être assimilée à une propagation d'onde.

## 6.5 Conclusion

L'objectif de cette partie consistait à utiliser les automates cellulaires pour l'étude d'un problème de déformation thermoélastique. Notre choix pour ce type de modèles est motivé par les nombreux avantages qu'ils offrent tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. D'une part, ils constituent un outil de modélisation efficace pour plusieurs phénomènes difficiles à représenter ou à mettre en oeuvre par des approches classiques tels que les problèmes de déformation et de contact. D'autre part, ils permettent la simulation d'une large variété de systèmes complexes incluant les processus physiques ou environnementaux. L'usage des modèles d'automates cellulaires pour représenter et simuler la déformation thermoélastique est très satisfaisant. Grâce aux simulations, nous avons pu visualiser le comportement thermoélastique et le comparer avec le comportement élastique étudié dans [6].

# Chapitre 7

## Conclusion

Les automates cellulaires sont des modèles mathématiques qui peuvent se substituer aux modèles classiques donnés par des systèmes différentiels. Ils constituent une approche de modélisation extrêmement utile dans plusieurs situations pour lesquelles les approches classiques conduisent à des équations trop complexes.

Notre choix pour ce type de modèles est motivé par les nombreux avantages qu'ils offrent tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. D'une part, ils constituent un outil de modélisation efficace pour plusieurs phénomènes difficiles à représenter ou à mettre en oeuvre par des approches classiques. D'autre part, ils permettent la simulation d'une large variété de systèmes complexes incluant les processus chimiques ou environnementaux.

Dans ce travail, nous avons montré que l'utilisation des automates cellulaires comme un outil mathématique de modélisation est satisfaisante car, on a pu vérifier à travers les modèles d'AC proposés la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement.

Nous avons ensuite proposé un modèle d'automates cellulaires pour un solide élastique. Des résultats de simulations sont obtenus, illustrant le déplacement des particules sous l'effet des contraintes mécaniques, ainsi que l'énergie potentielle. Par ailleurs, l'avantage de ce modèle réside dans sa facilité de mise en oeuvre numérique. Nous avons étendu le modèle précédent pour un problème de contact sans frottement. En effet, les simulations réalisées montrent le processus de contact sans frottement ainsi que la variation de l'énergie potentielle.

Enfin, nous avons considéré les résultats obtenus dans le cas d'une déformation thermoélastique. Nous avons proposé un modèle d'automates cellulaires reproduisant le phénomène de déformation thermoélastique afin de comparer les résultats de simulation avec le cas élastique.

Certes, les modèles d'AC que l'on a proposés paraissent très simples à cause de beaucoup de paramètres qui ont été négligés et qui peuvent toujours être pris en compte, mais l'usage des modèles d'AC pour représenter et simuler des systèmes mécaniques reste très satisfaisante.



Enfin, à ces quelques pistes précédemment entrevues, il paraît intéressant d'élargir l'utilisation des automates cellulaires à d'autres classes de systèmes plus généraux tels que la déformation viscoélastique, thermoviscoélastique, plastique et le problème de contact avec une base déformable. Ensuite, il peut être aussi enrichissant de mettre en place toute l'implémentation et les simulations numériques en 3D, puis comparer les modèles d'AC avec les modèles classiques (éléments finis). Finalement, il peut être aussi intéressant, pour un réel ancrage en théorie des systèmes de considérer des termes d'observation et de contrôle. Cela constitue un travail en cours de développement au laboratoire.

# Chapitre 8

## Bibliographie



# Bibliographie

- [1] S. Aassine  
*Couplage de type prédiction-correction d'un automate cellulaire et d'un modèle localisé pour un problème de dynamique de végétation*. Thèse de doctorat, Université de Perpignan, 1999.
- [2] A. Adamatzky  
*Identification of cellular automata*. Taylor and Francis Ed.,1994.
- [3] M. Abdellaoui and A. El Jai  
*Cellular automata model for a continuous mechanics problem*. SIAM conference on computational science and engineering (CSE03), February 10-13, 2003, San Diego, USA.
- [4] M. Abdellaoui and A. El Jai  
*Modélisation par automates cellulaires d'un système thermoélastique*. Annals of the University of Craiova, Mathematics and computer science series, Décembre 2002, 30 (2003) 1-14.
- [5] M. Abdellaoui and A. El Jai  
*Automates cellulaires pour un solide thermoélastique*. Actes du 6e Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Perpignan (2-6 Sept 2002).
- [6] M. Abdellaoui, A. El Jai and M. Shillor  
*Cellular automata model for a contact problem*. International Journal of Mathematical and Computer Modelling, 36 (2002) 1099-1114.
- [7] M. Abdellaoui and A. El Jai  
*Cellular automata for contact mechanics problem*. CD-ROM du Congrès International des Mathématiques Appliquées. Les 7e Journées d'Analyses Numérique et d'Optimisation (JANO7), Tanger, Maroc (17-19 avril 2002).
- [8] M. Abdellaoui  
*Modélisation par automates cellulaires d'un solide déformable*. Journée Thématique sur Quelques Approches Théoriques et Numériques pour l'Etude des Systèmes, Université de Perpignan, 2001.
- [9] S. Bandini, G. Giuliani, M. Magagnini  
*A Cellular automata based on computational model for the simulation of dynamic properties of filled rubber compounds*. Cellular Automata Research Towards Industry, Springer, 1998.
- [10] D. Batani, S. Biava, S. Bittanti, F. Previdi  
*A cellular automaton model of laser-plasma interaction*. MTNS2000, Perpignan, France, june 19-23, 2000.

- [11] E. Banks  
*Information processing and transmission in cellular automata*. MIT, 1971. MAC TR-81.
- [12] A. Berezovski  
*Continious cellular automata algorithm for simulation of heat conduction*. Estonian Academy of Sciences, IMACS, Vol 4, 653-658, 1997.
- [13] A. Berezovski and Rosenblum  
*Thermodynamical modelling of one-dimensional heat conduction in gravitationnal field*. Proceeding of 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfert conference (Rome), Vol 2, 885-891, 1996.
- [14] P. Bhatnager, E.P. Gross and P. Lallemand  
*A model for collision process in gases*. Phys.Rev, 94 :511, 1954.
- [15] N. Boccara, G.Y. Vichniac and R. Bideau  
*Cellular automata and modeling of complex physical systems*. Proceedings in physics 46, 206-231, Springer Verlag, 1989
- [16] R. Boudet and A. Chauvin  
*Mécanique des milieux continus*. Collection Matériaux, Hermès, Paris 1996.
- [17] M. Bouyekhf  
*Etude des invariants dynamiques dans une classe d'automates cellulaires*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1987.
- [18] L.M. Brieger and E. Bonomi  
*A stochastic cellular automaton model of nonlinear diffusion and diffusion with reaction*. J. Comp.phys., 94 :467-486,1991.
- [19] A.W. Burks  
*Von Neumann's self-reproducing automata*. Essays on cellular automata, 3-64, University of Illinois, 1970.
- [20] J. Byl  
*Self-reproduction in small cellular automata*. Physica D, 34, 259-299, 1989.
- [21] P. Calvin, D. d'Humière, P. Lallemand and Y. Pomeau  
*Lattice gas methods for partial differential equations*. P.415, Addison-Wesley, 1990.
- [22] R. Channa, A. El Jaï and S. Aassine  
*Comparison of two-dimensional models for a nonlinear heat transfer problem* Journal of Mathematical and Computer Modelling, accepté.
- [23] H. Chen, W. H. Matthaeus and L. W. Klein  
*Theory of multicolor lattice gas : a cellular automata poisson solver*. j. Comput. Phys, 1990.
- [24] H. Chen, S. Chen and W. H. Matthaeus  
*Recovery of Navier-Stokes equations using a lattice-gas boltzmann method*. Phys.Rev. A, 45 :R5339-42, 1992.
- [25] L. Chevalier  
*Mécanique des systèmes et des milieux déformables*. Ellipses, édition marketing S.A, 1996.
- [26] B. Chopard  
*A cellular automata model for large scale moving objects*. Journal of physics, A, 1990.

- [27] B. Chopard and M. Droz  
*Cellular automata modeling of physical systems*. Cambridge University, 1998.
- [28] B. Chopard and S. Marconi  
*A lattice boltzmann wave model applied to fracture phenomena*. MTNS2000, Perpignan, France. June 19-23, 2000.
- [29] E.F. Codd  
*Cellular automata*. Academic Press, 1968.
- [30] S. Cole  
*Real-time computation by n-dimensional iterative arrays of finite-state machine*. IEEE Trans. Comput, C-18 :349-365, 1969.
- [31] J. H. Conway  
*Game of life*. 1976.
- [32] R. L. Colasanti and J. P. Grime  
*Ressource dynamics and vegetation process : a deterministic model using two-dimensional cellular automata*. Functional Ecology. Vol 7, 169-176, 1993.
- [33] A. Dorin  
*Physically based, self-organizing cellular automata*. Computer Science, Vol 1544, 1998.
- [34] G. Doolen  
*Lattice gas method for partial differential equations*. Addison-Wesley, 1990.
- [35] A. Dupuis and B. Chopard  
*An object oriented approach to lattice gas modeling*. Future generation computer system, 16(5), 523-532, March 2000. Best selected papers from HPCN 99.
- [36] A. El Jai  
*Nouvelle approche pour la modélisation des systèmes en expansion spatiale : Dynamique de végétation, Tendances nouvelles en modélisation pour l'environnement*. Elsevier, 439-445, 1999.
- [37] S. El Yacoubi, A. El Jai and P. Jacewicz  
*Lucas : an original tool for landscape modeling*. Environmental Modeling and Software Journal, Vol 18, Issue 5, pp 429-437, 2003.
- [38] S. El Yacoubi, A. El Jai and N. Ammor  
*Regional Controllability with Cellular Automata Models*. Proceeding ACRI 2002, Lecture Note on Computer Sciences, LNCS 2493, Springer, pp : 357-367, 2002.
- [39] S. El Yacoubi and A. El Jai  
*Cellular Automata Modelling and Spreadability*. Journal of Mathematical and Computer Modelling, 36 (2002) 1059-1074.
- [40] S. El Yacoubi  
*Théorie des systèmes spatio-temporels. Des EDP aux automates cellulaires*. Habilitation à diriger des recherches- Université de Perpignan, 26 mars 1999.
- [41] P. Flocchini and N. Santoro  
*The chaotic evolution of information in the interaction between knowledge and uncertainty* Complexity International Journal, Vol 2, 1995.
- [42] U. Frish, B. Hasslacher and Y. Pomeau  
*Lattice-gaz automata for the Navier-Stokes equation*. Phys. Rev. Lett, Vol 56, 1505-1508, 1986.

- [43] G. Gattaneo, P. Flocchini, G. Mauri and N. Santoro  
*Cellular automata in fuzzy backgrounds*. Physica D, 105-120, 1997.
- [44] R.J. Gaylord and K. Nishidate  
*Modeling nature with cellular automata using mathematica* . Springer-Verlag, 1996.
- [45] P. German  
*Mécanique des milieux continus*. Tome1 (théorie générale). Masson et Cie, Paris, 1973.
- [46] J.M Greenberg and S. P. Hasting  
*Spatial Patterns for Discrete Models of Diffusion in Excitable Media*. Siam J. App. Math, Vol. 34, pp. 515-523, 1978.
- [47] R. P. Feynman  
*La nature de la physique*. Points sciences ; Le seuil, 1980.
- [48] R. P. Feynman  
*Leçon sur la physique*. Ed. Odiles, Jacob. Sciences, 2000.
- [49] R. Fisch, J.Gravner and D. Griffeath  
*Threshold-range scaling of excitable cellular automata*. Statistics and Computing, 1 :23, 1991.
- [50] D. François and A. Pineau  
*Comportement mécanique des matériaux*. Volume 1, Hermès, Paris,1991.
- [51] J.M Greenberg, B.D. Hassard and S. P. Hasting  
*Pattern and periodic structures in system modeled by reaction diffusion equations*. American mathematical society, Vol 84, 1296-1327, 1978.
- [52] P. Grosfils, J.P. Boon and P. Lallemand  
*Spontaneous fluctuation correlation in thermal lattice gas automata*. Phys.Rev.Lett., 68 :1077, 1992.
- [53] W. Han and M. Sofonea  
*Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*. American Mathematical Society, International Press, 2002
- [54] J.E. Hanson and J.P. Crutchfield  
*Computational mechanics of cellular automata :An example*. Physica D,103, 169-189, 1997.
- [55] J. Hardi, O. De Pazzis and Y. Pomeau  
*Molecular dynamics of classical lattice gas : transport properties and time correlation functions*. Physical Review, Vol. 13, pp. 1949-1960, 1976.
- [56] A. Hemmingsson  
*A totalistic three-dimensional cellular automaton with quasiperiodic behaviour*. Physica A, 183, 225-261, 1992.
- [57] H. Hershbach  
*A cellular automata for a solvable boltzmann equation*. Complex Systems Vol. 4, 251-268, 1990.
- [58] C.G. Langton  
*Studying artificial life with cellular automata*. Physica D 22, 120-149, 1986.
- [59] C.G. Langton  
*Self-reproduction in cellular automata*. Physica D 10, 135-144, 1986.
- [60] C.G. Langton, C. Taylor, J.D. Framer and S. Rasmussen  
*Artificial life II* .Addison-Wesley, 1992.

- [61] T. A. Larsen  
*Computational contact and impact mechanics*. Springer-Verlag, 2002.
- [62] B.J. Lipton, R.E. Miller and L. Synder  
*Synchronization and computing capabilities of linear asynchronous structures*. J. Compt. Syst. Sci, Vol 14, 49-72, 19977.
- [63] M.A. Manzoul  
*Facults in fuzzy logic systolic arrays*. Int. J. Cybern. Systems, Vol 21, 513-24, 1990.
- [64] N. Margolus  
*Physics-like models of computation*. Physica, 10D :128-134, 1984.
- [65] J.A.C. Martins, J.T. Oden  
*Existence and uniqueness results for dynamics contact problem with nonlinear normal and friction interface laws*. Nonlinear Analysis TMA, 11, 407-428, 1987.
- [66] V. Marx, F. R. Reher and G. Gottstein  
*Simulation of primary recrystallisation using a modified three-dimensional cellular automaton*. Acta Materialia, Vol 47, 1219-1230, 1999.
- [67] A. C. Matei  
*Modélisation mathématique en mécanique du contact*. Thèse de doctorat, Université de Perpignan, 2002.
- [68] G.G. McNamara and G. Zanetti  
*Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata*. Phys.Rev.Lett., 61, 2332-2335, 1998.
- [69] J.P. Mercier, G. Zambelli, W. Kurz  
*Introduction à la science des matériaux*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Troisième édition, 1999.
- [70] T. Naitoh, L.H. Ernst and J.M. Duffy  
*Long-time tails in two-dimensional cellular automata fluids*. Phys.Rev.A, 42 :7187,1990.
- [71] Y. Ne'eman and Y. Kirsh  
*Les chasseurs de particules*. Ed. Odile. Jacobe. Sciences, 1999.
- [72] J.v Neumann  
*Theory of self-reproducing automata*. In : Burks, A.(Ed.), University of Illinois Press, 1966.
- [73] J.v Neumann  
*The general and logical theory of automata*. in collected works ; Vol 5, Mac-millan : New York, 288-328, 1963.
- [74] A. Pires, D.P. Landau and H. Herrmann  
*Computational physics and cellular automata*. World Scientific, 1990.
- [75] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea  
*Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction*. Journal of Elasticity 51 (1998), 105-126.
- [76] D. Rothman and S. Zaleski  
*Lattice gas cellular automata : Simple models of complex hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1997.
- [77] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea  
*Quasistatic contact problem with directional friction and damped reponse*. Application Analysis, 68, 409-422, 1998.



- [78] P. Rujan  
*Cellular automata and statistical mechanical models*. J.Stat.Phys., 49, :139, 1987.
- [79] E.S. Santos  
*Maxmin automata*. Inform. Control, Vol 13, 363-77, 1968.
- [80] M. Shillor  
*Recent advances in contact mechanics*. Special issue of Math. Computer. Modelling, Vol 28, 4-8, 1998.
- [81] M. Shillor and M. Sofonea  
*A quasistatic viscoelastic contact problem with friction*. Int. J. Eng. Sci, 38, 1517-1533, 2000.
- [82] M. Sipper  
*Co-evolving non-uniform cellular automata to perform computations*. Physica D, 92, 193-208, 1996.
- [83] A. Smith III  
*Simple computation-universal spaces*. Journal of ACM, 18 :339-353, 1971.
- [84] M. Sofonea  
*On a contact problem for elastic-viscoplastic bodies*. Nonlin. Anal. TMA 29, 1037-1050, 1997.
- [85] G.I. Taylor  
*Diffusion by continuous movements*. Proc.Lond.Math.Soc, 20 :196-212, 1921.
- [86] T. Toffoli  
*Cellular automata as an alternative to differential equation in modeling physics*. Physica D, Vol. 10, pp 117-127, 1984.
- [87] T. Toffoli and N. Margolus  
*Cellular automata machines. A new environment for modeling*. MIT Press, Cambridge, MA, 1987.
- [88] T. Toffoli, D. Farmer and S. Wolfram  
*Cellular automata proceedings of an interdisciplinary workshop*. Physica D, Vol 10, North-Holland, 1984.
- [89] G. Vichniac  
*Simulating physics with cellular automata*. Physica D, 10, 96-115, 1984.
- [90] W. Wechler  
*The concept of fuzziness in automata and language theory*. Berlin : Academic Verlag.
- [91] J.R. Weimar  
*Cellular automata for reactive systems*. PhD Thesis, Univ.Libre de Bruxelles, 1995.
- [92] J.R. Weimar and J.P. Boon  
*Class of cellular automata for reaction-diffusion systems* . Physical Review, 49(2), 1749-1752, 1994.
- [93] J.R. Weimar, D. Dab, J.P. Boon and S. Succi  
*Fluctuations correlation in reaction-diffusion systems : Relative lattice gaz automata approach*. Europhysics letters, 20(7), 627-623, 1992.
- [94] J.R. Weimar, J.J. Tyson and L.T. Watson  
*Diffusion and wave propagation in cellular automata models of excitable media* . Physica D, 55, 309-327, 1992.

- 
- [95] J.R. Weimar, J.J. Tyson and L.T. Watson  
*Third generation cellular automaton for modeling excitable media* . Physica D, 55, 328-339, 1992.
- [96] S. Wolfram  
*A new kind of science*. Wolfram. Media. INC, 2002.
- [97] S. Wolfram  
*Cellular automata and complexity* : collected papers. Addison-Wersley Publishing company, 1994.
- [98] S. Wolfram  
*Cellular automata fluid 1 : Basic theory*. J. Stat. Phys, Vol 45, 471-526, 1986.
- [99] S. Wolfram  
*Theory and application of cellular automata*. World Scientific, 1986.
- [100] A. Wunsche and M. Lesser  
*The global dynamics of cellular automata. An atlas of bassin of attraction fields of one-dimensional cellular automata*. Addison-Wesley Ed., 1992.
- [101] S. Yakowitz, J. Gani and R. Hayes  
*Cellular automaton modelling of epidemics*. Appl.Math.Comput, Vol 40, 41-54, 1990.

## Résumé

Modéliser un système c'est lui trouver une représentation mathématique aussi fidèle que possible. Lorsque ce système est distribué (spatio-temporel), son modèle mathématique usuel est, depuis les années 60, un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Depuis une décennie, les automates cellulaires (AC) se présentent comme de bons candidats pour décrire les systèmes distribués. De plus, leur mise en oeuvre est plus aisée. Dans ce travail, on montre que les automates cellulaires peuvent être utilisés pour décrire des systèmes dans le domaine des milieux déformables, tels que les déformations élastiques et thermoélastiques et le contact sans frottement.

Les modèles d'automates cellulaires proposés permettent de simuler numériquement quelques propriétés génériques des phénomènes de déformation élastique-thermoélastique et le contact sans frottement tels que le déplacement des particules constituant le solide et l'énergie potentielle fournie. Ces modèles d'AC sont élaborés de telle sorte que la conservation de la masse et de la quantité de mouvement soit vérifiée. La mise en oeuvre de ces modèles est réalisée à l'aide d'un code Matlab.

**Mots clés** : Automate cellulaire, Modélisation, Solide élastique, Contact sans frottement, Solide thermoélastique, Lois de conservation.

## Abstract

Modelling a distributed parameter system is usually made by means of partial differential equations. Since the beginning of the 90's, cellular automata models represent a good candidate to describe spatio-temporal systems mainly for modellers who are not familiar with PDE's jargon. In this work, we show that cellular automata can be used to describe systems in the domain of solid deformation, such as deformation of elastic, thermoelastic and frictionless contact problems.

The proposed cellular automata models are issued from generic properties of the deformation phenomena. They take into account conservation laws properties of the considered systems. Various applications and illustrative simulations have been developed with Matlab.

**Keywords** : Cellular Automata, Modelling, Elastic body, Frictionless contact, Thermoelastic body, Conservation laws.