



HAL
open science

Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux télécommunications. Calcul Stochastique relativement à des processus fractionnaires.

Nicolas Savy

► **To cite this version:**

Nicolas Savy. Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux télécommunications. Calcul Stochastique relativement à des processus fractionnaires.. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2003. Français. NNT: . tel-00003407

HAL Id: tel-00003407

<https://theses.hal.science/tel-00003407>

Submitted on 22 Sep 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2827

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention : Mathématiques et Applications

PAR

Nicolas SAVY

Equipe d'accueil : IRMAR - Université de Rennes 1

Ecole Doctorale : MATISSE

Composante Universitaire : INSA de Rennes

TITRE DE LA THÈSE :

**Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux
télécommunications.**

Calcul stochastique relativement à des Processus Fractionnaires.

SOUTENUE LE 02 Juin 2003 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Laurent DECREUSEFOND :	Examineur
Jean-Bernard GRAVEREAUX :	Directeur de Thèse
Ying HU :	Examineur
Jean MÉMIN :	Examineur
David NUALART :	Rapporteur
Nicolas PRIVAULT :	Rapporteur

N° d'ordre : 2827

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention : Mathématiques et Applications

PAR

Nicolas SAVY

Equipe d'accueil : IRMAR - Université de Rennes 1

Ecole Doctorale : MATISSE

Composante Universitaire : INSA de Rennes

TITRE DE LA THÈSE :

**Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux
télécommunications.**

Calcul stochastique relativement à des Processus Fractionnaires.

SOUTENUE LE 02 Juin 2003 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

Laurent DECREUSEFOND :	Examineur
Jean-Bernard GRAVEREAUX :	Directeur de Thèse
Ying HU :	Examineur
Jean MÉMIN :	Examineur
David NUALART :	Rapporteur
Nicolas PRIVAULT :	Rapporteur

Table des matières

Introduction	1
0.1 Partie 1	4
0.2 Partie 2	4
0.3 Partie 3	5
0.4 Partie 4	5
I Généralités	9
1 Définitions et Propriétés	13
1.1 Définition et existence	13
1.2 Principales propriétés des trajectoires du processus	15
1.3 Principales propriétés du processus	20
2 Représentations du MBF	25
2.1 Préliminaires : mesures aléatoires Gaussiennes	25
2.2 Représentation Moyenne Mobile	28
2.3 Représentation Harmonisable	28
2.4 Représentation Lévy-Hida	30
3 Domaine d'attraction du MBF	33
3.1 Préliminaires : Un lemme de tension	33
3.2 Le coefficient de normalisation	35
3.3 Hypothèses sur G	38
3.4 Hypothèses sur X	38
3.5 Convergence vers le mouvement Brownien fractionnaire	41
II Capacité de stockage d'une file à entrée Brownienne fractionnaire avec dérive	45
4 Capacité de stockage	49
4.1 Modèle proposé par Norros(1994)	49
4.2 Premier résultat sur la capacité de stockage	50

5	Le résultat de Massoulié et Simonian	55
5.1	Préliminaires	55
5.2	La borne inférieure	58
5.3	La borne supérieure	64
6	Résultat de Hüßler et Piterbarg	67
6.1	Préliminaires	67
6.2	Démonstration de 6.1	69
6.3	Éléments de démonstration	75
6.4	Comportement en horizon fini	76
III	Existence et bicontinuité d'un temps local	79
7	A propos du Temps Local du MBF	81
7.1	MBF et temps d'arrêts	82
7.2	Préliminaires sur le temps local	84
7.3	La question de la bicontinuité	86
7.4	Temps local du MBF	94
IV	Calcul Stochastique pour des processus Fractionnaires	103
8	I. A . pour des Volterra	107
8.1	Différentes définitions d'intégrales	108
8.2	Vers une formule de Tanaka	109
8.3	I.A. relative au Volterra	114
9	C. S. pour des PPM	121
9.1	Intégrales naturelles pour des PPM	121
9.2	Intégrale Anticipative pour des mesures aléatoires	123
9.3	Intégrale Skohorod pour des PPM	141
9.4	Lien entre ces Intégrales	143
10	C.S pour des PPF	145
10.1	Processus de Poisson Filtré	145
10.2	Intégrale "naturelle" pour le FPPM	151
10.3	Intégrale au sens de Skohorod relativement au FPPM	157
10.4	Lien entre ces deux intégrales	159
10.5	A propos du processus $\delta^{\tilde{N}^K}(u \mathbb{I}_{[0,1]})$	160
10.6	Une formule de Itô pour des fonctionnelles cylindriques	163
11	Un théorème de type Girsanov	167
11.1	Énoncé du théorème	167
11.2	Une application	169

12 Du PPF au MBF	175
12.1 Résultats Préliminaires	175
12.2 Le résultat de convergence	177
13 Annexes	183
13.1 Annexe 1 : Résultats cruciaux sur les processus Gaussiens	183
13.2 Annexe 2 : Calcul fractionnaire Déterministe	185
13.3 Simulation de trajectoires B.F.	186
13.4 Simulations de trajectoires P.F.	188

Table des figures

1.1	Représentation graphique de $(H, n) \rightarrow r(n)$	21
2.1	Représentations graphiques de $K^H(1, \cdot)$ et $L^H(1, \cdot)$ (continue sur $[0,1]$) pour $H = 0.2$ à gauche et $H = 0.8$ à droite.	32
13.1	Trajectoire Brownienne fractionnaire pour $H = 0.2$	186
13.2	Trajectoire Brownienne fractionnaire pour $H = 0.5$	186
13.3	Trajectoire Brownienne fractionnaire avec $H = 0.8$	187
13.4	En haut : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$, En bas : Trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow t s$	188
13.5	En haut à gauche : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$. Les autres graphiques représentent les trajectoires de Processus de Poisson filtrés par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H - \frac{1}{2}}$ avec en haut à droite , $H = 0.6$, en bas à gauche , $H = 0.8$ et en bas à droite $H = 1$	188
13.6	En haut : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$ avec des marques Gaussiennes centrées réduites. En bas , trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H - \frac{1}{2}}$ avec $H = 0.8$	189
13.7	En haut : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.01$ avec des marques Gaussiennes centrées réduites. En bas , trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H - \frac{1}{2}}$ avec $H = 0.6$	189

partie

Introduction

L'étude de phénomènes physiques, économiques et biologiques conduit souvent à des situations markoviennes et donc à des modélisations par des diffusions markoviennes. Des outils très puissants ont été développés pour décrire ces modèles notamment le calcul Stochastique de Itô. Cependant plusieurs situations laissent entrevoir les limites de ces modèles. Les expériences de Harold Edwin Hürst (1880-1978) [73] sur le niveau du Nil ont mis en évidence un phénomène non-stationnaire. Hürst introduit la notion de dépendance à long terme et développe des techniques de caractérisation. Mandelbrot et ses travaux en finance met, lui aussi, en évidence la dépendance à long terme. Il propose en 1968 un modèle Gaussien à accroissements à dépendance à long terme : le mouvement Brownien fractionnaire (déjà défini dans les années 40 par Kolmogorov [80]) et en donne les principales propriétés [93]. Dès lors, de plus en plus de domaines, désireux de s'affranchir de la propriété de Markov et de l'indépendance des accroissements développent des modèles Browniens fractionnaires.

Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire présentent aussi beaucoup d'intérêt en imagerie de synthèse et en imagerie médicale par leur caractère auto-similaire [92].

Les efforts pour faire du mouvement Brownien fractionnaire un modèle pratique à utiliser ont été considérables durant ces dernières années. Dans cette thèse nous aborderons le mouvement Brownien fractionnaire sous plusieurs angles : d'abord en temps que processus, puis en terme de modèle en télécommunications. Ensuite, nous nous intéresserons aux processus de Volterra, généralisation du mouvement Brownien fractionnaire, et définis par :

$$\left\{ B_t^K = \int_0^t K(t,s)dB_s : t \in [0, T] \right\}$$

où B est un mouvement Brownien standard. En nous inspirant des techniques utilisées pour définir une notion d'intégrale anticipative pour ces processus, nous allons considérer des processus de Poissons Filtrés, processus définis par la relation ci-dessus en remplaçant le mouvement Brownien par un processus de Poisson marqué. Ces processus font l'objet d'un grand intérêt comme modèles dans des domaines très variés comme en physique, en biologie (voir [135, 96, 109] et leurs références). On peut aussi citer les applications en assurance [34] et en finance voir [27, 123] pour un résumé des applications dans ce domaine. On peut citer aussi les travaux de Kühn [83] qui suggère de représenter l'évolution du prix de capitaux par le processus $\{S_t = exp(B_t + N_t) : t \in \mathbb{R}\}$ avec B un mouvement Brownien standard et N un "shot-noise" (processus de Poisson Filtré de filtre $K(t,s) = k(t-s)$). On peut également évoquer les travaux de Benassi, Cohen, Istas [9] qui ont introduit un processus analogue en partant des représentations harmonisable et moyenne mobile.

0.1 Exposé de base sur le mouvement Brownien fractionnaire

Le **chapitre 1** recense les principales propriétés du mouvement Brownien fractionnaire. On insiste dans le **chapitre 2** sur différentes manières de faire le lien entre mouvement Brownien fractionnaire et mouvement Brownien ordinaire en termes de représentations intégrales. Ces représentations sont des propriétés clés car elles permettent, dans certains cas, de déduire du mouvement Brownien ordinaire des propriétés sur son homologue fractionnaire. Le **chapitre 3** est une présentation des travaux de Taqqu [129] et a pour objectif de mettre en évidence le domaine d'attraction du mouvement Brownien fractionnaire, c'est à dire les conditions sous lesquelles une suite de variables aléatoires convenablement normalisées converge vers un mouvement Brownien fractionnaire.

0.2 Modèle Brownien fractionnaire en Télécommunications

L'introduction du mouvement Brownien en télécommunications est motivée par les mesures faites, principalement, par des chercheurs de Bellcore sur les transferts de données dans les réseaux locaux (LAN). Ils ont mis en évidence la dépendance à long terme [11, 87] et le caractère auto-similaire avec un paramètre d'auto-similarité proche de 0.8 [55, 60, 61, 90, 87, 101, 132, 130]. Coelho et Decreusefond [29], sur des données vidéo, arrivent à des conclusions analogues avec un paramètre d'auto-similarité inférieur à 0.5. Ces mesures sont nombreuses, précises et très étendues dans le temps, elles sont donc très fiables (voir [60, 90, 87, 88, 55] et leurs références). L'impact de ces propriétés sur le comportement de la file est très loin d'être négligeable [100, 54, 88]. L'approximation markovienne classique n'est donc plus envisageable.

Le modèle le plus simple possédant ces propriétés est le modèle à entrée Brownienne fractionnaire et à taux de service constant. Ce modèle a été introduit par Norros [101, 102] en 1994 et fait l'objet du **chapitre 4**. Sur un tel modèle, le plus intéressant est bien sûr de connaître le comportement de la capacité de stockage et notamment le comportement de queue de sa distribution ce qui revient à étudier le comportement asymptotique de :

$$u \rightarrow \mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} (B_t^H - dt) \geq u \right] \quad (A)$$

Les premières pierres sont posées en 1994 par Norros [101] qui donne une borne inférieure de (A) en utilisant principalement les caractères auto-similaire et Gaussien. Duffield O'Connell [49] en 1995 utilisent des techniques de Grandes Déviations pour obtenir un équivalent logarithmique. En 1995, Massoulié et Simonian [94] affinent l'étude en donnant un encadrement de (A) et en déduisent un équivalent logarithmique. Cette étude fait l'objet du **chapitre 5**. La démonstration donnée ici est différente de celle de Massoulié et Simonian puisque basée sur une référence différente permettant une démonstration précise des deux bornes.

On peut noter aussi les travaux du physicien Narayan [97]. Dans cet article, il donne un équivalent de (A) et estime les constantes par simulation numérique. L'idée de Narayan est

d'approximer le mouvement Brownien fractionnaire, *via* la représentation harmonisable et de se placer dans le domaine de Fourier. Pour arriver à ses conclusions, il avance des arguments géométriques en dimension finie. A. Simonian m'a transmis, à l'origine de cette thèse les travaux de Narayan afin d'affiner ses résultats et de revoir les démonstrations que Narayan lui-même considère comme incomplètes.

Dans l'entrefaite, Piterbarg et Hüßler [74] ont donné, en utilisant les outils des processus Gaussiens un équivalent asymptotique de (A) (le même que Narayan) dans le cadre plus général d'une dérive en t^b avec $b > H$. Cette étude fait l'objet du **chapitre 6**. La fin de ce chapitre est consacrée à des considérations en horizon fini. La question est partiellement traitée par Duncan et *al.*[52].

0.3 Mouvement Brownien fractionnaire et Temps d'arrêt

Dans le **chapitre 7**, nous nous sommes intéressés au mouvement Brownien fractionnaire arrêté. Deux questions, sont à l'origine de ces travaux : puisque que le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une martingale, quels sont les temps d'arrêts T pour lesquels $\mathbb{E}[B_T^H] = 0$? et que devient le mouvement Brownien fractionnaire en échelle temps local ? Privé de la propriété de Markov Fort, nous n'avons pas trouvé d'alternative pour répondre à ces questions. Seule subsiste une présentation de l'existence et de la bicontinuité du temps local introduit par Berman [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. C'est le principal objet de cette troisième partie.

0.4 Calcul stochastique anticipatif relativement à des processus fractionnaires

Les travaux de la quatrième partie sont le fruit d'une collaboration avec Laurent Decreusefond de l'ENST Paris. Étant donné que le mouvement Brownien fractionnaire apparaît comme un bon modèle dès que l'on veut s'affranchir de l'indépendance des accroissements, il est important de construire une notion de calcul intégral relativement à ce processus. Malheureusement ceci s'est avéré particulièrement difficile à cause du peu de propriétés classiques vérifiées par le mouvement Brownien fractionnaire (pas à variation finie, pas de semi-martingale,...).

Dans le **chapitre 8** nous ferons un rapide panorama des techniques envisagées. Nous insisterons sur le point de vue de Nualart et *al* [4, 32] qui a permis d'établir une formule de Tanaka complétant ainsi l'étude du temps local. Nous nous attarderons ensuite sur un calcul stochastique relatif aux processus de Volterra [39, 40] (le principe sera similaire pour les processus de Poisson Filtrés). L'idée est d'introduire un opérateur \mathcal{K}^* et de définir l'intégrale stochastique δ^{B^K} par rapport au processus de Volterra de noyau K noté B^K au moyen de l'intégrale anticipative δ^B relative au mouvement Brownien ordinaire par :

$$\delta^{B^K}(u) = \delta^B(\mathcal{K}^*(u))$$

L'introduction d'une intégrale anticipative est motivée par le fait que \mathcal{K}^* est susceptible de transformer un processus adapté en un processus anticipant.

La volonté d'introduire des sauts dans les modèles fractionnaires pousse à remplacer dans l'équation ci-dessus le mouvement Brownien Standard par un processus de Poisson Marqué. Pour définir une intégrale relative aux Processus de Poisson Filtrés, nous allons procéder comme pour les Volterra à savoir construire, *via* un opérateur linéaire l'intégrale relative au processus à partir d'une intégrale anticipative relative au processus sous-jacent : un mouvement Brownien Standard dans le cas des processus de Volterra et un Processus de Poisson Marqué dans le cas du Processus de Poisson Filtré.

Le **chapitre 9** propose une intégrale anticipative relative au processus sous-jacent : un processus Poisson Marqué. La question de la construction d'une intégrale anticipative relative à un processus de Poisson Marqué a fait l'objet de nombreuses publications. L'idée est de considérer l'intégrale comme l'opérateur adjoint d'un opérateur de dérivation. Citons l'approche de Carlen-Pardoux [24] où l'opérateur de dérivation est défini par perturbations des instants de saut pour des processus de Poisson standards, technique étendue par Privault [112], et l'approche de Nualart-Vives [107] où l'opérateur de dérivation est défini à partir des intégrales multiples en utilisant la décomposition chaotique. Toujours basés sur la décomposition chaotique, on peut évoquer les récents travaux sur les processus de Lévy de Di Nunno, Øksendal et Proske [46], de Léon, Solé, Utzet et Vives [89], de Benth et Lokka [10] et de Øksendal et Proske [108].

Ici, nous définissons l'intégrale anticipative comme adjoint d'un gradient stochastique construit à partir de l'opérateur de dérivation introduit par Decreusefond [35].

Dans le **chapitre 10**, on introduit les processus de Poisson Filtrés et on en donne les principales propriétés. Ensuite, on utilise l'intégrale définie au chapitre précédent pour définir une intégrale relative au processus de Poisson Filtré. Le lien entre les intégrales est détaillé ainsi qu'un résultat sur la continuité de Hölder des trajectoires des processus intégrés. Enfin une formule de Itô pour des fonctionnelles cylindriques est obtenue. Les chapitres 9 et 10 font l'objet d'une publication en préparation [42] en collaboration avec L. Decreusefond.

Le **chapitre 11** énonce un théorème de type Girsanov pour le processus de Poisson Filtré. On applique le théorème pour proposer une réponse à un problème d'estimation. Étant donné un processus de Poisson Filtré perturbé par une dérive linéaire de coefficient θ , on propose un estimateur et on prouve la consistance de ce dernier. Ce problème a déjà été étudié dans le cadre Brownien fractionnaire [45, 78, 79]. Ce chapitre fait l'objet d'une publication en collaboration avec L. Decreusefond [43] soumise à "Electronic Communications in Probability".

Enfin le **chapitre 12** propose un théorème de convergence en loi. Il existe de nombreux articles [110, 126] où l'on montre que le mouvement Brownien fractionnaire est limite en loi d'une suite de processus. Le résultat de ce chapitre est inspiré de Szabados [128] où une approximation forte est obtenue par des moyennes mobiles d'une approximation forte du mouvement Brownien Ordinaire. Ici, on garde le principe de la moyenne mobile mais on a seulement une convergence faible puisque que l'on approxime le mouvement Brownien par une suite renormalisée de processus de Poisson.

Plus précisément, le mouvement Brownien fractionnaire de Lévy de paramètre de Hürst $H \in$

$(0, 1)$ est défini par la représentation en moyenne mobile suivante :

$$\left\{ B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB_s : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

où B est un mouvement Brownien ordinaire. Puisque $\hat{N}^\lambda = \{\lambda^{1/2}(N_s^\lambda - \lambda s), s \in \mathbb{R}^+\}$ où N^λ est un processus de Poisson d'intensité λ converge faiblement vers B quand λ tend vers l'infini, il est naturel de se demander si

$$\left\{ N_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} d\hat{N}_s^\lambda : t \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

converge vers B^H au sens faible dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Deux situations sont à envisager : le cas $H > 1/2$ où le résultat peut s'établir en utilisant le critère de tension de Kolmogorov et le cas $H < 1/2$ où il faut envisager une autre technique. Ici, on traite les deux cas selon une méthode unique et nouvelle.

Considérons la famille de processus indexée par $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$\left\{ X_t^\lambda = \int_0^t K(t, s) d\hat{N}_s^\lambda, t \geq 0 \right\} \quad \text{où} \quad \hat{N}_s^\lambda = \frac{\tilde{N}_s^n}{\sqrt{\lambda}} = \frac{N_s^\lambda - \lambda s}{\sqrt{\lambda}}$$

N^λ étant un Processus de Poisson d'intensité constante λ . Les techniques usuelles de convergence de martingales sont bien sûr inutilisables au premier abord puisque X^λ n'est pas une martingale. Cependant, si nous fixons une variable i.e., si l'on considère $\mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n}(r) = \int_0^t K(r, s) d\hat{N}_s^n$ pour r fixé, on obtient un processus qui est une martingale relativement à t et X^n n'est rien d'autre que $\mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n}(t)$. Nous allons transformer le problème initial en un problème de convergence de martingales à valeurs Hilbertiennes et ensuite projeter le résultat pour obtenir la convergence de X^n . Un des problèmes clé est de prouver que $\mathfrak{X}^{\hat{N}^n}$ est une martingale continue dans un espace de Hilbert convenable. C'est pour ce faire que nous utiliserons les résultats de radonification de Badrikian et Üstünel [8, 125]. Le résultat est alors le suivant : les lois des processus

$$\left\{ X_t^n = \int_0^t K(t, s) d\hat{N}_s^n, t \in [0, 1] \right\}$$

dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ convergent vers la loi de

$$\left\{ X_t = \int_0^t K(t, s) dB_s, t \in [0, 1] \right\}$$

Ce résultat fait l'objet d'une publication [41] en collaboration avec L. Decreasefond soumise au "Journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability".

Première partie

Généralités

Introduction

Dans l'introduction, nous avons évoqué la limite des modèles classiques et l'émergence de phénomènes dit à dépendance à long terme et auto-similaire. Pour ces phénomènes, le modèle classique du mouvement Brownien est inadéquat et on voit, par conséquent, la montée en puissance du mouvement Brownien fractionnaire, extension naturelle du mouvement Brownien.

Cette première partie se compose de trois chapitres. Le premier est consacré aux propriétés de base du mouvement Brownien fractionnaire ainsi qu'à sa définition. Nous verrons que ce processus est pauvre en propriétés classiques (semi-martingale, propriété de Markov,...).

Pour faciliter l'étude, on aura recours à des représentations du mouvement Brownien fractionnaire comme intégrale d'un noyau déterministe relativement à un mouvement Brownien Ordinaire. Ce thème fera l'objet du deuxième chapitre.

Enfin, nous consacrerons un troisième chapitre à l'étude du domaine d'attraction du mouvement Brownien fractionnaire c'est à dire aux conditions sur une suite de variables aléatoires convenablement normalisées pour qu'elle converge en loi vers un mouvement Brownien fractionnaire.

Chapitre 1

Définitions et Propriétés

Ce premier chapitre recense, après l'avoir défini, les propriétés de base du mouvement Brownien Fractionnaire : propriétés des trajectoires (auto-similarité, continuité, non-différentiabilité) et des propriétés plus fondamentales (propriétés des accroissements, absence de propriété de Markov, de Martingale).

1.1 Définition et existence

1.1.1 Définition du Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.1 *Un Mouvement Brownien Fractionnaire de paramètre $H \in (0, 1)$ est un processus Gaussien réel centré noté $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant :*

- (i) $B_0^H = 0$ \mathbb{P} -p.s.
- (ii) $\mathbb{E} [[B_t^H]^2] = |t|^{2H} \forall t \in \mathbb{R}$
- (iii) B^H a des accroissements stationnaires

Remarque 1.1 *Le processus $B^{\frac{1}{2}}$ est un Mouvement Brownien Standard.*

On verra au paragraphe 1.2.1 que l'on est contraint, pour avoir de bonnes propriétés, à considérer $0 < H < 1$. Nous verrons également (propriété 1.3) les particularités des cas limites $H = 0$ et $H = 1$. Pour ce qui est des trajectoires dans les cas intermédiaires on peut voir des simulations dans l'annexe 13.3 page 186.

Définition 1.2 *Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst.*

Propriété 1.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire admet la fonction R_H de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par*

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

comme fonction de covariance.

Démonstration :

On a :

$$\mathbb{E} [[B_t^H - B_s^H]^2] = \mathbb{E} [[B_t^H]^2] + \mathbb{E} [[B_s^H]^2] - 2\mathbb{E} [B_t^H B_s^H]$$

Et comme

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{t-s}^H$$

Finalement, on a :

$$\mathbb{E} [B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

◀

1.1.2 Existence du Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.3 Une fonction $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-définie et positive si pour tout $(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m$ et tout $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ on a :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c(s_i, s_j) u_i u_j \geq 0 \quad (1.1)$$

Théorème 1.1 • Soit $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique et semi-définie positive alors il existe un processus Gaussien réel unique à une équivalence près de moyenne m et de fonction de covariance c .

- Deux processus Gaussiens réels de même moyenne et de même fonction de covariance sont équivalents.
- Deux processus Gaussiens réels de même moyenne et de même fonction de covariance à trajectoires \mathbb{P} -p.s. continue à droite sont indistinguables.

Ce théorème découle du théorème d'extension de Kolmogorov (théorème 1 page 244 de Shiryaev [127]) et du fait qu'un vecteur Gaussien est entièrement défini par sa moyenne et sa matrice de covariance (voir Shiryaev [127] page 304).

Propriété 1.2 La fonction R_H est symétrique, semi définie positive et continue.

Démonstration :

La continuité et la symétrie sont immédiates à démontrer.

Soient $(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ il s'agit de montrer (1.1). Pour cela nous allons utiliser le fait que la fonction $s \rightarrow \phi(s) = \exp(-c|s|^{2H})$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire SaS sous-Gaussienne (Proposition 2.5.5 de Samorodnitsky-Taquq [124]). De ce fait c'est une fonction semi-définie positive en s et donc :

$$\forall (u_i, u_j, s_i, s_j) \in \mathbb{R}^4, \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \phi(s_i - s_j) u_i u_j \geq 0 \quad (1.2)$$

Pour cela, considérons une masse à l'origine (s_0) égale à $u_0 = -\sum_{i=1}^m u_i$, on a alors :

$$(1.1) = -\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |s_i - s_j|^{2H} u_i u_j \quad (1.3)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |s_i|^{2H} u_i u_j &= \sum_{i=1}^m |s_i|^{2H} u_i \sum_{j=1}^m u_j \\ &= - \sum_{i=1}^m |s_i|^{2H} u_i u_0 \\ &= - \sum_{i=0}^m |s_i - s_0|^{2H} u_i u_0 \end{aligned}$$

De même on a :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |s_j|^{2H} u_i u_j = - \sum_{j=0}^m |s_i - s_0|^{2H} u_i u_0$$

ce qui montre (1.3). Considérons $c > 0$ suffisamment petit, comme $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m u_i u_j = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \exp(-c|s_i - s_j|^{2H}) u_i u_j &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (\exp(-c|s_i - s_j|^{2H}) - 1) u_i u_j \\ &= -c \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |s_i - s_j|^{2H} u_i u_j + o_{c \rightarrow 0}(c) \end{aligned}$$

Le résultat est démontré en utilisant (1.2). ◀

1.2 Principales propriétés des trajectoires du processus

1.2.1 Auto-similarité

Définition 1.4 Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ est dit *auto-similaire d'ordre* $\beta > 0$ s'il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, les processus :

$$\{X_{\alpha t} : t \in \mathbb{R}\} \text{ et } \{\alpha^\beta X_t : t \in \mathbb{R}\}$$

aient même loi.

Théorème 1.2 Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ de paramètre H est auto-similaire d'ordre H .

Démonstration :

Fixons $\alpha > 0$. Il est évident que $\{B_{\alpha t}^H : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{\alpha^H B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ sont deux processus Gaussiens centrés. Il suffit donc de montrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{\alpha t}^H B_{\alpha s}^H] &= \frac{1}{2} (|\alpha s|^{2H} + |\alpha t|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}) \\ \mathbb{E}[\alpha^H B_t^H \alpha^H B_s^H] &= \frac{1}{2} \alpha^{2H} \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] \\ &= \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{aligned}$$



La propriété suivante montre que parmi les processus Gaussiens, les caractères accroissements stationnaires et auto-similarité sont caractéristiques du mouvement Brownien fractionnaire. Elle fournit également la description des “cas limites” $H = 0$ et $H = 1$.

Propriété 1.3 *Soit $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus non-dégénéré auto-similaire d'ordre H , à accroissements stationnaires et à variance finie. Alors :*

- $X_0 = 0$ \mathbb{P} -p.s.
- $0 < H \leq 1$
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \frac{\text{Var}(X_1)}{2} \{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $0 < H < 1$,

$$\mathbb{E}[X_t] = 0$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour $H = 1$, $X_t = tX_1$ \mathbb{P} -p.s.
- Si de plus X est Gaussien alors il est indistinguable d'un mouvement Brownien fractionnaire.

Démonstration :

- Pour tout $a > 0$ on a :

$$\begin{aligned} X(a \cdot 0) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H X(0) \\ (a^H - 1)X(0) &\stackrel{\mathcal{L}}{=} 0 \end{aligned}$$

Donc $X(0) = 0$ \mathbb{P} -p.s.

- Par stationnarité on a pour tout $s > 0$ et tout $t > s$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t \cdot X_s] &= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]] \\ &= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - \mathbb{E}[X_{t-s}^2]] \end{aligned}$$

Par auto-similarité on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t \cdot X_s] &= \frac{1}{2} [t^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] + s^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] - (t-s)^{2H} \mathbb{E}[X_1^2]] \\ &= \frac{1}{2} R_H(t, s) \mathbb{E}[X_1^2] \end{aligned}$$

- Soient $s > 0$, $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$. Par Minkowski on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{s+t_1+t_2} - X_s)^2]^{\frac{1}{2}} &\leq \mathbb{E}[(X_{s+t_1+t_2} - X_{s+t_1})^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[(X_{s+t_1} - X_s)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \mathbb{E}[X_{t_1+t_2}^2]^{\frac{1}{2}} &\leq \mathbb{E}[X_{t_2}^2]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[X_{t_1}^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2} \cdot [t_1 + t_2]^H &\leq \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2} \cdot [t_2^H + t_1^H] \end{aligned}$$

Par conséquent on a $H \leq 1$. De plus, la variance finie implique $H > 0$.

- Soit $0 < H < 1$, on a :

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2 - X_1] = (2^H - 1)\mathbb{E}[X_1]$$

Par conséquent, on a $\mathbb{E}[X_1] = 0$ par auto-similarité il en est de même pour tout $t > 0$ et comme $\mathbb{E}[X_{-1}] = \mathbb{E}[X_{1-2}] = \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2] = 0$ le résultat est vrai, par auto-similarité, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Soient $t > 0$ et $s > 0$ comme $H = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t X_s] &= \mathbb{E}[X_1^2] \cdot t \cdot s \\ \mathbb{E}[X_t - tX_1] &= \mathbb{E}[X_t^2] - 2 \cdot t \cdot \mathbb{E}[X_t X_1] + t^2 \mathbb{E}[X_1^2] \\ \mathbb{E}[X_t - tX_1] &= (t^2 - 2t^2 + t^2) \mathbb{E}[X_1^2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $X_t = tX_1$ \mathbb{P} -p.s. pour tout t par continuité des trajectoires on en conclue que pour tout t , $X_t = tX_1$ \mathbb{P} -p.s.

- On applique le théorème 1.1, ce sont deux processus Gaussiens centrés ayant la même fonction de covariance ils sont donc indistinguables. ◀

1.2.2 Continuité de Hölder

Théorème 1.3 *Tout Mouvement Brownien Fractionnaire admet une modification dont les trajectoires ont une continuité de Hölder d'ordre $\gamma < H$ sur tout intervalle $[0, p]$ avec $p > 0$.*

Démonstration :

Il suffit de montrer que, pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante C_α telle que, pour tout $(s, t) \in [0, p]^2$:

$$\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] \leq C_\alpha |t - s|^{\alpha H} \quad (1.4)$$

En effet, la condition (1.4) assure, par le théorème de régularité de Kolmogorov (Revuz et Yor [116] théorème 2.1 page 25) que $\{B_t^H : t \in [0, p]\}$ admet une modification dont les trajectoires sont Hölder continues d'ordre $\gamma \in [0, \frac{\alpha H - 1}{\alpha}]$ pour tout $\alpha > 0$ ce qui montre le résultat. La condition (1.4) découle de la stationnarité des accroissements et de l'auto-similarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] &= \mathbb{E}[|B_{t-s}^H|^\alpha] \\ &= |t - s|^{\alpha H} \mathbb{E}[|B_1^H|^\alpha] \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $C_\alpha = \mathbb{E}[|B_1^H|^\alpha] < +\infty$. ◀

Remarque 1.2 *Dans la suite, on ne considérera que des versions continues du mouvement Brownien fractionnaire.*

Une application de la loi du logarithme itéré prouvée dans l'article de Arcones [7] permet d'obtenir la relation suivante :

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{B_u^H}{u^H \sqrt{\log \log(u^{-1})}} = 1 \right] = 1$$

Ce qui démontre le résultat suivant :

Théorème 1.4 *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire n'ont \mathbb{P} - p.s. pas de continuité de Hölder d'ordre supérieur à H sur tout intervalle borné.*

1.2.3 Non-Différentiabilité

Théorème 1.5 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Les trajectoires du mouvement Brownien Fractionnaire sont \mathbb{P} - p.s. non différentiable en t_0 .

Démonstration :

On veut montrer que $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \mathbb{P} \left[\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t - t_0} \right| = +\infty \right] = 1$.

On se ramène au cas $t_0 = 0$ grâce à la stationnarité.

On va donc étudier le comportement de $\left| \frac{B_t^H}{t} \right|$ quand t tend vers t_0

En fait on va démontrer la non-différentiabilité à droite :

On pose : $A(t) = \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B_s^H}{s} \right| \geq M \right]$ avec $M > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A(t)] &\geq \mathbb{P} \left[\left| \frac{B_t^H}{t} \right| \geq M \right] \\ &\geq \mathbb{P} \left[\frac{t^H}{t} |B_1^H| \geq M \right] && \text{par auto-similarité} \\ &\geq \mathbb{P} [|B_1^H| \geq M.t^{1-H}] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \mathbb{P} [|B_1^H| \geq 0] \end{aligned}$$

Ainsi on a $\forall M, \mathbb{P}[A(t)] \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{B_t^H}{t} \right| = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \left| \frac{B_t^H}{t} \right| = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

D'où le théorème. ◀

1.2.4 La variation d'ordre p

Théorème 1.6 *Considérons la variation d'ordre p du mouvement Brownien fractionnaire défini par :*

$$V_p = \mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,p}$$

avec

$$V_{n,p} = \sum_{j=1}^{2^n} |B^H(j.2^{-n}) - B^H((j-1).2^{-n})|^p$$

Alors on a :

$$V_p = \begin{cases} 0 & \text{si } pH > 1, \\ +\infty & \text{si } pH < 1, \\ \mathbb{E} [|B_1^H|^p] & \text{si } pH = 1. \end{cases}$$

Démonstration :

Soit $p \in \mathbb{R}^{+*}$, considérons les suites de variables aléatoires suivantes :

$$\left\{ Y_{n,p} = [2^{-n}]^{pH-1} \sum_{j=1}^{2^n} |B^H(j \cdot 2^{-n}) - B^H((j-1) \cdot 2^{-n})|^p : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et

$$\left\{ \tilde{Y}_{n,p} = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} |B^H(j) - B^H(j-1)|^p : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

L'auto-similarité assure que $B^H(j \cdot 2^{-n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2^{-nH} \cdot B^H(j)$. Par conséquent, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{Y}_{n,p}$. Il suffit maintenant de remarquer que la suite $\{B^H(j) - B^H(j-1) : j \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire et ergodique (comme toute suite issue d'un processus Gaussien à mesure spectrale continue (voir Cornfeld et al. [30, théorème 14.2.1])). Comme on a

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_{n,p}] = \mathbb{E}[|B_1^H|^p] := c_{p,H} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (1.5)$$

le théorème ergodique nous dit que l'on a :

$$\tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{\mathbb{L}^1} c_{p,H} \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{p.s.} c_{p,H} \quad \text{donc} \quad \tilde{Y}_{n,p} \xrightarrow{\mathcal{L}} c_{p,H} \quad (1.6)$$

Pour démontrer (1.5), il suffit d'évoquer la stationnarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Y}_{n,p}] &= 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{E}[|B^H(j) - B^H(j-1)|^p] \\ &= 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{E}[|B^H(1)|^p] \\ &= 2^{-n} 2^n \mathbb{E}[|B^H(1)|^p] \end{aligned}$$

On a (1.6) et comme $Y_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{Y}_{n,p}$ on a donc $Y_{n,p} \xrightarrow{\mathcal{L}} c_{p,H}$ comme $c_{p,H}$ est une constante déterministe, ceci implique que $Y_{n,p} \xrightarrow{\mathbb{P}} c_{p,H}$. Donc $[2^{-n}]^{pH-1} \cdot V_{n,p} \xrightarrow{\mathbb{P}} c_{p,H}$ ce qui démontre le résultat. ◀

Corollaire 1.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire est \mathbb{P} -p.s. à variations non bornées sur tout compact de \mathbb{R} .*

Démonstration :

Par auto-similarité et par stationnarité des accroissements, il suffit de considérer le compact $[0, 1]$. En considérant la subdivision particulière de $[0, 1] : \{0, 2^{-n}, \dots, j \cdot 2^{-n}, \dots, 1\}$, pour avoir la propriété de variation bornée (par b) il faut que $V_{n,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$ \mathbb{P} -p.s. avec $b < \infty$. Or ce n'est pas possible car le théorème 1.6 nous fournit une sous-suite qui tend presque sûrement vers l'infini ($p = 1, H < 1$). ◀

1.3 Principales propriétés du processus

1.3.1 Les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire

On rappelle que les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire sont stationnaires, que l'on considère des versions continues de ce dernier et que $H \in (0, 1)$.

Définition 1.5 *Étant donné un processus stochastique stationnaire $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$, la suite $\{r(n) = \mathbb{E}[X_{n+s}X_s] : n \in \mathbb{N}^*\}$ ne dépend pas de s . On dit alors que X est à dépendance à long terme si*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r(n) = +\infty$$

Propriété 1.4 *Les accroissements de B^H sont à dépendance à long terme si et seulement si $H > \frac{1}{2}$.*

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} r(n) &= \mathbb{E}[B_1^H(B_{n+1}^H - B_n^H)] \\ &= \frac{1}{2} [(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$= 2H(2H-1)n^{2H-2} + o_{n \rightarrow \infty}(n^{2H-2}) \quad (1.8)$$

Par (1.8), on voit que $r(n)$ est le terme général d'une série divergente si et seulement si $2H-2 > -1$ c'est à dire si et seulement si $H > \frac{1}{2}$. ◀

Propriété 1.5 *Les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire sont positivement corrélés si $\frac{1}{2} < H < 1$, négativement corrélés si $0 < H < \frac{1}{2}$ (on parle d'anti-persistence) et indépendants si $H = \frac{1}{2}$.*

Démonstration :

A partir de (1.7) on voit que, si $H = \frac{1}{2}$, $r(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc les accroissements sont indépendants. D'autre part, par (1.8) on voit aussi, au moins pour n grand que $r(n) < 0$ dès que $2H(2H-1) < 0$ c'est à dire $H < \frac{1}{2}$. Le caractère anti-persistant peut également être mis en évidence par le graphique 1.1 21 qui représente $r(n)$ en fonction de n et H . ◀

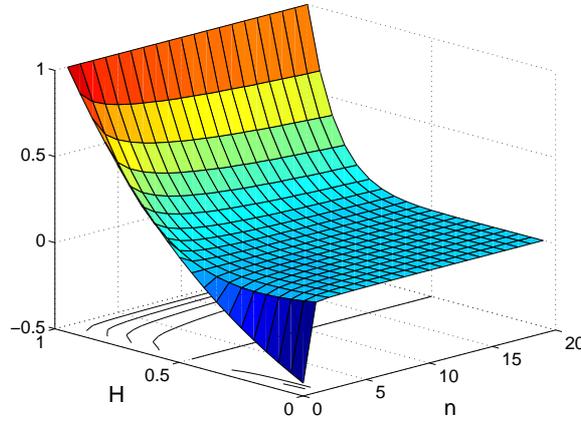
1.3.2 Un processus non-Markovien

Théorème 1.7 (Revuz et Yor [116] page 81) *Soit $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus Gaussien centré. Si X est un processus de Markov, alors $\forall s < t < u$ avec $\Gamma(t, t) > 0$,*

$$\Gamma(s, u)\Gamma(t, t) = \Gamma(s, t)\Gamma(t, u) \quad (1.9)$$

où Γ est la fonction de covariance de X . De plus, si $\Gamma(t, t) = 0$ alors $\{X_s : s \leq t\}$ et $\{X_s : s \geq t\}$ sont indépendants.

Corollaire 1.2 *Soit $0 < H < 1$ et $H \neq \frac{1}{2}$*

FIG. 1.1 – Représentation graphique de $(H, n) \rightarrow r(n)$

1. Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas Markovien.
2. Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}^+\}$ n'est pas Markovien.

Démonstration :

- S'il était Markovien, comme on a $R_H(0, 0) = 0$, les processus $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}^+\}$ et $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}^-\}$ seraient indépendants, ce qui est absurde.
- S'il était Markovien, sa fonction de covariance vérifierait (1.9) et en particulier, comme $1 < 2 < 3$, on aurait :

$$\begin{aligned}
 R_H(1, 3)R_H(2, 2) &= R_H(1, 2)R_H(2, 3) \\
 \frac{1}{2}(1 + 3^{2H} - 2^{2H}).2^{2H} &= \frac{1}{2}(1 + 2^{2H} - 1).\frac{1}{2}(2^{2H} + 3^{2H} - 1) \\
 3 + 3^{2H} - 3.2^{2H} &= 0
 \end{aligned}$$

Après l'étude de la fonction $H \mapsto 3 + 3^{2H} - 3.2^{2H}$, on voit que cette fonction ne s'annule que pour $H = \frac{1}{2}$ et pour $H = 1$ (cas exclu par définition). Le seul cas possible ($H = \frac{1}{2}$) correspond à celui du mouvement Brownien ordinaire qui est Markovien.

◀

1.3.3 Variation quadratique et semi-martingale

Définition 1.6 Un processus X est à variation quadratique finie s'il existe un processus noté $\langle X \rangle$ tel que, pour tout t et toute suite de subdivisions Δ_n de $[0, t]$ telle que le pas $|\Delta_n| \rightarrow 0$ on ait :

$$\mathbb{P} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(t_i, t_{i+1}) \in \Delta_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \langle X \rangle_t$$

Théorème 1.8 Soit $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H . On a :

$$\begin{aligned} \langle B^H \rangle_t &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} && \text{pour } H > \frac{1}{2} \\ \langle B^{\frac{1}{2}} \rangle_t &= t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \langle B^H \rangle_t &= +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^* && \text{pour } H < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$ que l'on suppose strictement positif pour fixer les idées.

Soit $\{\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de subdivisions de $[0, t]$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0.

Considérons $T_t^{\Delta_n} = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2$.

1er cas : $H > \frac{1}{2}$

Nous allons donc montrer la convergence dans L^1 de $T_t^{\Delta_n}$ vers 0.

Par stationnarité des accroissements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [T_t^{\Delta_n}] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k|^{2H} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| |t_{k+1} - t_k|^{2H-1} \\ &\leq |\Delta_n|^{2H-1} \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| \\ &\leq |\Delta_n|^{2H-1} t \end{aligned}$$

Comme $2H - 1 > 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n|^{2H-1} t = 0$ et le résultat en découle.

2ème cas : $H < \frac{1}{2}$

Montrons la divergence de $T_t^{\Delta_n}$ vers l'infini.

Appelons A l'ensemble des subdivisions de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0 et considérons :

$$E = \sup_A \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2 \right]$$

Ceci est donc minoré par la subdivision $\tau_i = \frac{it}{2^n}$ on a donc :

$$\begin{aligned} E &\geq \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (B_{\tau_i}^H - B_{\tau_{i-1}}^H)^2 \right] \\ &\geq (2^n + 1) \left(\frac{t}{2^n} \right)^{2H} \\ &\geq (t^{2H}) \cdot \left(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{(2nH)}} \right) \end{aligned}$$

Comme on a $2H - 1 < 0$ et $2H > 0$, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n(2H-1)}} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{(2nH)}} = 0$$

Ce qui conduit au résultat escompté. ◀

Comme corollaire on a le résultat suivant :

Théorème 1.9 *Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale relativement à sa filtration naturelle.*

Démonstration :

Supposons que ce soit une semi-martingale.

Elle est donc continue et nulle en 0. B^H s'écrit donc, de manière unique, sous la forme $B^H = M + V$ où M est une martingale locale continue, nulle en 0 et V un processus continu à variation finie nul en 0.

1er cas : $H > \frac{1}{2}$

On a $\langle M \rangle_t = \langle B^H \rangle_t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Donc en vertu de la décomposition de Doob-Meyer, $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale locale continue nulle en 0, c'est à dire qu'il existe une suite $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ croissante de temps d'arrêt telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

et

$$\begin{aligned} \forall n, \quad \forall t, \quad \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n}^2] &= \mathbb{E}[M_{0 \wedge T_n}^2] = 0. \\ \forall n, \quad \forall t, \quad M_{t \wedge T_n}^2 &= 0 \quad \mathbb{P} - p.s. \end{aligned}$$

Comme T_n tend en croissant vers $+\infty$ \mathbb{P} -p.s., on a :

$$\forall t, \quad M_t^2 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Donc M^2 est indistinguable du processus nul.

Finalement, $\forall t \quad B_t^H = V_t$ \mathbb{P} -p.s. et donc B^H est \mathbb{P} -p.s. à variation quadratique finie... Absurde.

2ème cas : $H < \frac{1}{2}$

La variation quadratique de M ne serait définie qu'en 0 ce qui contredit l'hypothèse de continuité... Absurde. ◀

La conséquence directe de ce théorème est l'impossibilité de définir directement une intégrale de type Itô pour le mouvement Brownien fractionnaire.

Propriété et Définition 1.1 (Föllmer [59]) *On appelle processus de Dirichlet X un processus qui se décompose de la manière suivante :*

$$X = M + A$$

avec M une martingale de carré intégrable et A un processus à variation quadratique nulle.

Propriété 1.6 *Le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H > \frac{1}{2}$ est un processus de Dirichlet.*

Chapitre 2

Quelques représentations du mouvement Brownien fractionnaire

On se propose maintenant de montrer l'existence de représentations intégrales par rapport à un mouvement Brownien ordinaire ou à une mesure Gaussienne du mouvement Brownien fractionnaire. Ces représentations sont centrales dans l'étude du mouvement Brownien fractionnaire car elles font le lien entre le mouvement Brownien ordinaire riche en propriétés (accroissements indépendants, intégrale de Itô, de Skohorod,...) et le mouvement Brownien fractionnaire beaucoup plus pauvre.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la notion de mesure aléatoire Gaussienne puis nous présenterons trois représentations : la présentation moyenne mobile [93], la représentation harmonisable [124] qui nous servira dans l'étude du temps local de la partie III et enfin la représentation Lévy-Hida [45] qui sera à la base de l'étude de la partie IV.

Dans ce chapitre on se place dans un espace $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vit un mouvement Brownien Ordinaire.

2.1 Préliminaires : mesures aléatoires Gaussiennes

Cette présentation est issue de Samorodnitsky and Taqqu [124] pages 118 et 325.

2.1.1 Mesure aléatoire Gaussienne réelle

Définition 2.1 *Considérons $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) : \lambda(A) < \infty\}$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Une mesure aléatoire Gaussienne de mesure de contrôle λ est une fonction σ -additive :*

$$M : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega)$$

telle que :

•

$$M(A) \sim \mathcal{N}(0, \lambda(A))$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si A_1, \dots, A_k sont des boréliens disjoints de \mathcal{E}_0 alors $M(A_1), \dots, M(A_k)$ sont indépendantes.

On peut alors introduire une notion d'intégrale (voir [124] chapitre 3.4 et 3.5 pour plus de détails) :

Propriété 2.1 Pour tout f tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f^2(t)\lambda(dt) < \infty$$

on peut définir $\int_{\mathbb{R}^+} f(t)M(dt)$ et on a en plus de la linéarité,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)M(dt) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{\mathbb{R}^+} f^2(t)\lambda(dt)\right)$$

2.1.2 Mesure aléatoire Gaussienne complexe

Définition 2.2 On dit que \widetilde{M} est une mesure aléatoire complexe si l'on peut écrire $\widetilde{M} = M_1 + iM_2$ avec M_1 et M_2 deux mesures Gaussiennes réelles indépendantes définies sur \mathbb{R}^+ et de mesure de contrôle $\lambda/2$ et telles que :

$$\begin{aligned} M_1(A) &= M_1(-A) \\ M_2(A) &= -M_2(-A) \end{aligned}$$

pour tout ensemble Borélien A .

L'objectif est de poser des hypothèses sur l'intégrant \tilde{f} de sorte que, sous ces hypothèses $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\zeta)\widetilde{M}(d\zeta)$ soient à valeurs réelles.

Hypothèse 2.1 Considérons $\tilde{f} = f^{(1)} + if^{(2)}$ telle que :

•

$$\tilde{f}(\zeta) = \overline{\tilde{f}(-\zeta)}$$

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(1)}]^2(\zeta)d\zeta < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}]^2(\zeta)d\zeta < \infty$$

Pour de telles fonctions, on peut définir $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\zeta)\widetilde{M}(d\zeta)$ par :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\zeta)\widetilde{M}(d\zeta) &= \int_{-\infty}^0 \hat{f}_t(\zeta)\widetilde{M}(d\zeta) + \int_0^{\infty} \hat{f}_t(\zeta)\widetilde{M}(d\zeta) \\ &= \int_0^{\infty} (f^{(1)}(\zeta) - if^{(2)}(\zeta))(M_1(d\zeta) - iM_2(d\zeta)) \\ &\quad + \int_0^{\infty} (f^{(1)}(\zeta) + if^{(2)}(\zeta))(M_1(d\zeta) + iM_2(d\zeta)) \\ &= 2\left(\int_0^{\infty} f^{(1)}(\zeta)M_1(d\zeta) - \int_0^{\infty} f^{(2)}(\zeta)M_2(d\zeta)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(\zeta)M_1(d\zeta) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(2)}(\zeta)M_2(d\zeta). \end{aligned}$$

Qui est bien à valeurs réelles.

Propriété 2.2 *Considérons $\{f_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ une famille de fonctions réelles de la variable réelle telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on ait :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_t(\zeta)|^2 d\zeta < \infty$$

Alors sa transformée de Fourier \hat{f} vérifie l'hypothèse 2.1.

Démonstration :

Conséquence des propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction à valeurs réelles et de l'égalité de Parseval. ◀

Le résultat essentiel est le suivant :

Propriété 2.3 *Considérons une famille de fonctions réelles de la variable réelle $\{f_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ satisfaisant les hypothèses de la propriété précédente. Alors on a pour tout $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$:*

$$\mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{t_1}(\zeta) \widetilde{M}(d\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{t_2}(\zeta) \widetilde{M}(d\zeta) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{t_1}(x) f_{t_2}(x) dx$$

Et par conséquent :

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) M(dx) : t \in \mathbb{R} \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_t(\zeta) \widetilde{M}(d\zeta) : t \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.1)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_t(\zeta) \widetilde{M}(d\zeta) \right)^2 \right] &= 4 \left\{ \int_0^{\infty} [f_t^{(1)}(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{2} + \int_0^{\infty} [f_t^{(2)}(\zeta)]^2 \frac{d\zeta}{2} \right\} \\ &= 2 \int_0^{\infty} |\hat{f}_t(\zeta)|^2 d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_t(\zeta)|^2 d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_t^2(x) dx, \end{aligned}$$

où la dernière égalité n'est autre que l'identité de Parseval. La seconde partie de la propriété en découle par polarisation.

Pour démontrer le second point, il suffit d'appliquer le théorème 1.1 en précisant que chacun des membres de l'égalité en loi sont des processus Gaussiens centrés et qu'ils ont la même fonction de covariance. Ils sont donc indistinguables. ◀

2.2 Représentation Moyenne Mobile

Théorème 2.1 *Soit $0 < H < 1$, M une mesure aléatoire Gaussienne de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue et B un mouvement Brownien Ordinaire.*

Les processus définis par :

$$\left\{ \frac{1}{C_1(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[[(t-s)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right] M(ds) : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.2)$$

$$\left\{ \frac{1}{C_1(H)} \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.3)$$

avec

$$C_1(H) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left[[(1+s)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 ds}$$

sont des mouvements browniens fractionnaires d'indice H .

Bien que formellement équivalents (en considérant $M(ds) = dB_s$) ces deux processus ne sont pas définis de la même façon. L'intégrale définissant (2.2) (issue de Samorodnitsky et Taqqu [124]) est à comprendre au sens introduit au paragraphe précédent alors que l'intégrale (2.3) (issue de Mandelbrot et Van Ness [93]) est à comprendre au sens “ ω par ω ” par des intégrales fractionnaires au sens de Weyl voir [137] chapitre 12.

Démonstration :

L'existence des intégrales sont montrées dans [124] pour (2.2) et dans [93] pour (2.3).

Les processus définis par (2.3) et (2.2) sont Gaussiens et centrés. Il suffit donc en vertu du théorème 1.1 de montrer qu'ils ont R_H comme fonction de covariance.

Soient $(s, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$\begin{aligned} B_t^H - B_s^H &= \frac{1}{C_1(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[[(t-u)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right] M(du) \\ \mathbb{E} [(B_t^H - B_s^H)^2] &= \frac{1}{C_1^2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[[(t-u)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 du \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = |t-s|v + s$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(B_t^H - B_s^H)^2] &= \frac{1}{C_1^2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(|t-s|(1-v))_+^{H-\frac{1}{2}} - [(-|t-s|v)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 |t-s| dv \\ &= \frac{1}{C_1^2(H)} |t-s|^{2H} \int_{-\infty}^{\infty} \left[[(1-v)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-v)_+]^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dv \\ &= |t-s|^{2H} \end{aligned}$$

Ce qui est suffisant pour montrer le résultat par polarisation. ◀

2.3 Représentation Harmonisable

Théorème 2.2 *Soit $0 < H < 1$, \tilde{M} une mesure aléatoire Gaussienne complexe de mesure de contrôle $\frac{\lambda}{2\pi}$. Le processus défini par :*

$$\left\{ X_t = \frac{1}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta t} - 1}{i\zeta|\zeta|^{H-1/2}} \tilde{M}(d\zeta) : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (2.4)$$

avec

$$C_2(H) = \sqrt{\frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}}$$

est un mouvement brownien fractionnaire d'indice H .

Démonstration :

Moralement, cette représentation est fournie par la relation (2.1) de la propriété 2.3 dans le sens où l'on peut voir

$$\zeta \rightarrow \frac{2\pi}{C_2(H)} \frac{e^{i\zeta t} - 1}{i\zeta|\zeta|^{H-\frac{1}{2}}}$$

comme la transformée de Fourier de :

$$x \rightarrow \frac{1}{C_1(H)} ([(t-x)_+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-x)_+]^{H-\frac{1}{2}})$$

Bien que cette idée soit tout à fait justifiable, il est bien plus facile de montrer que le processus défini par 2.4 est à accroissements stationnaires et auto-similaire. Ceci est suffisant en vertu de la propriété 1.3.

Soient $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned} X_{\alpha t} - X_{\alpha s} &= \frac{1}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} ((e^{i\zeta\alpha t} - 1) - (e^{i\zeta\alpha s} - 1)) \frac{|\zeta|^{-H+\frac{1}{2}}}{i\zeta} \widetilde{M}(d\zeta) \\ &= \frac{1}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta\alpha s} (e^{i\zeta\alpha(t-s)} - 1) \frac{|\zeta|^{-H+\frac{1}{2}}}{i\zeta} \widetilde{M}(d\zeta) \\ \mathbb{E} [[X_{\alpha t} - X_{\alpha s}]^2] &= \frac{1}{C_2^2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\zeta\alpha s} (e^{i\zeta\alpha(t-s)} - 1)|^2 |\zeta|^{-2H-1} \frac{d\zeta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{C_2^2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\zeta\alpha(t-s)} - 1|^2 |\zeta|^{-2H-1} \frac{d\zeta}{2\pi} \end{aligned}$$

On pose $\eta = \alpha\zeta$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [[X_{\alpha t} - X_{\alpha s}]^2] &= \frac{1}{C_2^2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\eta(t-s)} - 1|^2 |\zeta|^{-2H-1} \alpha^{2H+1} \alpha^{-1} \frac{d\eta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{C_2^2(H)} \alpha^{2H} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\eta(t-s)} - 1|^2 |\zeta|^{-2H-1} \frac{d\eta}{2\pi} \\ &= \mathbb{E} [[\alpha^H X_{(t-s)}]^2] \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = 1$ on montre donc que $X_t - X_s$ et X_{t-s} sont deux variables aléatoires Gaussiennes centrées de même variance, donc la stationnarité des accroissements. Pour $\alpha > 0$ on montre par polarisation que $\{X_{\alpha t} : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{\alpha^H X_t : t \in \mathbb{R}\}$ sont deux processus Gaussiens centrés de même fonction de covariances. Par le théorème 1.1 ils sont indistinguables.

Il reste à montrer que :

$$\mathbb{E} [(B_1^H)^2] = \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{i\zeta} - 1}{i\zeta|\zeta|^{H-1/2}} \right|^2 \frac{d\zeta}{2\pi} = 1$$

Il est connu [53, relation 319(15)] que l'on a :

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin^2(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)\cos(\frac{\pi\mu}{2})}{2^{\mu+1}a^{\mu}}$$

dès que $a > 0$ et que $-2 < \Re(\mu) < 0$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{i\zeta} - 1}{i\zeta|\zeta|^{H-1/2}} \right|^2 \frac{d\zeta}{2\pi} &= 2 \int_0^{\infty} |\zeta|^{-2H-1} ((\cos(\zeta) - 1)^2 + \sin^2(\zeta)) \frac{d\zeta}{2\pi} \\ &= 8 \int_0^{\infty} |\zeta|^{-2H-1} \sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \frac{d\zeta}{2\pi} \\ &= \frac{8}{2\pi} \frac{\Gamma(-2H)\cos(-\pi H)}{2^{-2H+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2H}} \end{aligned}$$

Or on a :

$$-2H\Gamma(-2H) = \Gamma(1-2H) = \frac{1}{1-2H}\Gamma(2-2H)$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{e^{i\zeta} - 1}{i\zeta|\zeta|^{H-1/2}} \right|^2 \frac{d\zeta}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{2^{2H}(1-2H)}$$

D'où le résultat. ◀

2.4 Représentation Lévy-Hida [45]

Dans ce paragraphe, on considère un mouvement Brownien fractionnaire sur un horizon fini $([0, 1]$ par exemple).

2.4.1 Énoncé du théorème

Théorème 2.3 *Le processus défini par :*

$$\left\{ \frac{1}{C_2(H)} \int_0^t K^H(t, s) dB_s : t \in [0, 1] \right\}$$

avec K^H est un noyau déterministe à définir est indistinguable d'un mouvement Brownien fractionnaire.

2.4.2 Le noyau K^H

Certaines notations relatives au calcul fractionnaire déterministe sont consignées dans l'annexe 13.2 page 185.

Définition 2.3 *On considère la fonction hypergéométrique de Gauss $F(a, b, c, z)$ définie pour tout a , tout b , tout z tel que $|z| < 1$ et tout $c \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$ par :*

$$F(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

avec (a) le symbole de Pochhammer :

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1 \\ (a)_k &= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \end{aligned}$$

On définit dans un premier temps pour tout $H \in (0, 1)$ l'opérateur suivant :

$$K^H : f \rightarrow \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} F \left[H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t}{s} \right] f(s) ds \quad (2.5)$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.4 1. K^H est un isomorphisme de $\mathcal{L}^2([0, 1])$ dans $I_{0+}^{H+\frac{1}{2}}(\mathcal{L}^2([0, 1]))$.

2. K^H est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on notera encore K^H son noyau qui s'écrit :

$$K^H : (t, s) \rightarrow (t-s)^{H-\frac{1}{2}} F \left[H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t}{s} \right] \quad (2.6)$$

3. En termes d'opérateurs on a :

$$R^H = C_2(H)^{-2} K^H [K^H]^*$$

ce qui s'écrit en termes de noyaux :

$$R^H(t, s) = C_2(H)^{-2} \int_0^1 K^H(t, u) K^H(s, u) du \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.7)$$

Démonstration :

- [121] page 187.
- Découle de la définition de K^H comme opérateur à noyau.
- [45] lemme 3.1 page 182.

◀

Remarque 2.1 L'introduction de la constante $C_3(H)$ en dehors du noyau permet de définir ce dernier exactement de la même manière que Samko, Kilbas et Marichev dans [121].

Propriété 2.4 (Decreusefond-Üstünel [45] page 183) Pour tout $0 < H < 1$ et pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$ on peut écrire :

$$K^H(t, s) = s^{-|H-\frac{1}{2}|} (t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} L^H(t, s)$$

avec L^H une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$

Remarque 2.2 Cette propriété est essentielle car elle illustre le fait que, plus H est proche de 1, plus la singularité du noyau K^H est importante (voir figure 2.1) alors que l'opérateur associé lui est de plus en plus régulier, ce qui est en accord avec les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire (des simulations de trajectoires sont présentées dans l'annexe 13.3 page 186). Cette remarque nous pousse à travailler plutôt avec des opérateurs qu'avec leurs noyaux. C'est cette remarque qui dirigera toute l'étude faite à la partie IV.

2.4.3 Démonstration du théorème 2.3

Démonstration :

En conséquence du 3/ du théorème 2.4, nous avons deux processus Gaussiens centrés qui ont la même fonction de covariance; ils sont donc indistinguables en vertu du théorème 1.1.

◀

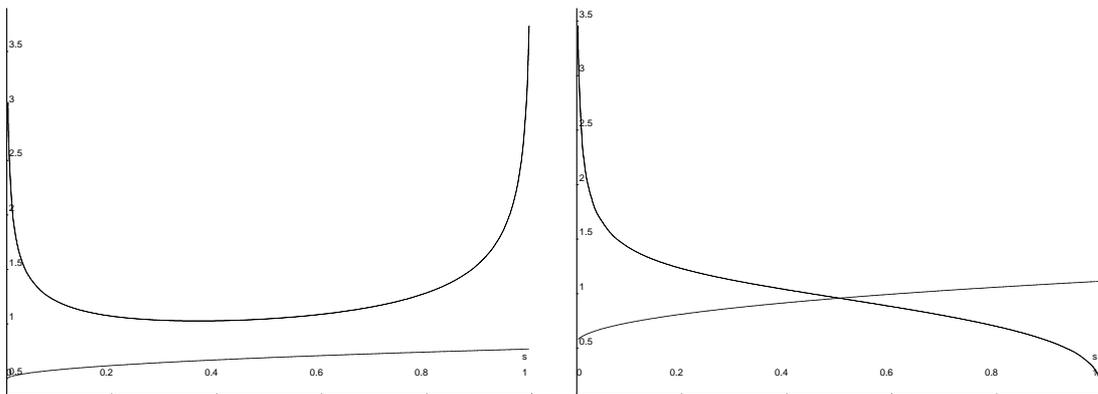


FIG. 2.1 – Représentations graphiques de $K^H(1, \cdot)$ et $L^H(1, \cdot)$ (continue sur $[0, 1]$) pour $H = 0.2$ à gauche et $H = 0.8$ à droite.

Chapitre 3

A propos du domaine d'attraction du mouvement Brownien fractionnaire

On désigne par $X = \{X_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ une suite stationnaire de variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites. L'objet de cette étude est le comportement limite - au sens de la convergence faible dans $\mathcal{D}([0, 1])$ - espace des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} càdlàg - du processus à valeurs réelles défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\left\{ Z_n(t) = \frac{1}{d_n} \sum_{i=1}^{[nt]} G(X_i) \quad : \quad t \in [0, 1] \right\}$$

où G est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\mathbb{E}[G(X_i)] = 0$ et $\mathbb{E}[[G(X_i)]^2] < \infty$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls.

Nous allons voir les hypothèses que doit vérifier G , la suite X et les coefficients de normalisation $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que ce processus converge faiblement vers un mouvement Brownien fractionnaire.

On peut citer le cas particulier bien connu, le théorème de Donsker :

Théorème 3.1 (Revuz et Yor [116] page 485) *Dans le cas où les variables $G(X_i)$ sont indépendantes, alors avec $d_n = \sqrt{n}$ on a une convergence faible de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers un mouvement Brownien ordinaire.*

3.1 Préliminaires : Un lemme de tension

Pour avoir une convergence faible dans $\mathcal{D}([0, 1])$ il suffit d'avoir la convergence fini-dimensionnelle ($\xrightarrow{\mathcal{D}f}$) et une suite tendue. Le lemme suivant nous donne une caractérisation de la tension.

Définition 3.1 *On dit qu'une fonction L de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est à variations lentes à l'infini si*

$$L(bn) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} L(n) \quad \forall b \geq 0$$

On notera \mathcal{H} l'ensemble de ces fonctions.

Lemme 3.1 *Considérons une suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de processus de $\mathcal{D}([0, 1])$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :*

$$Z_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{d_n} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{avec } d_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2H} L(n)$$

avec $0 < H \leq 1$, $L \in \mathcal{H}$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ où X est une suite stationnaire de variables aléatoires centrées de variances finies vérifiant :

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty}(n^{2H} L(n)) \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E}[|S_n|^{2a}] = \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty}(\mathbb{E}[|S_n|^2]^a) \quad \forall a > \frac{1}{2H} \quad (3.2)$$

Cette suite est tendue dans $\mathcal{D}([0, 1])$.

Démonstration :

Soient $0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq 1$ et $a > \frac{1}{2H}$.

Posons

$$J_n(a, t_1, t, t_2) = \mathbb{E}[|Z_n(t_2) - Z_n(t)|^a |Z_n(t) - Z_n(t_1)|^a]$$

En vertu du théorème de Schwartz, on a :

$$J_n(a, t_1, t, t_2) \leq \frac{1}{d_n^{2a}} \left(\mathbb{E}[|S_{[nt_2]} - S_{[nt]}|^{2a}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[|S_{[nt]} - S_{[nt_1]}|^{2a}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

et de la stationnarité de X et donc de S :

$$J_n(a, t_1, t, t_2) \leq \frac{1}{d_n^{2a}} \left(\mathbb{E}[|S_{[nt_2]-[nt]}|^{2a}]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[|S_{[nt]-[nt_1]}|^{2a}]^{\frac{1}{2}} \right)$$

Posons $\alpha_n(t_2, t_1) = \frac{[nt_2]-[nt_1]}{n}$ et $U(x) = x^{2H} L^{\frac{a}{2}}(x)$.

En vertu des hypothèses (3.1) et (3.2) on a :

Il existe une constante K_1 et un entier N_1 tel que $\forall n > N_1$,

$$J_n(a, t_1, t, t_2) \leq K_1 \cdot \frac{U(n \cdot \alpha_n(t_2, t))}{d_n^a} \frac{U(n \cdot \alpha_n(t, t_1))}{d_n^a}$$

D'autre part, comme on a $d_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2H} L(n)$, on a l'existence d'une constante K_2 et d'un entier $N_2 > N_1$ tels que $\forall n > N_2$

$$J_n(a, t_1, t, t_2) \leq K_2 \cdot \frac{U(n \cdot \alpha_n(t_2, t))}{U(n)} \frac{U(n \cdot \alpha_n(t, t_1))}{U(n)}$$

Comme $Ha > 0$ et comme U est bornée sur les intervalles finis, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_2 \cdot \frac{U(n \cdot \alpha_n(t_2, t))}{U(n)} = (t_2 - t)^{Ha}$$

Uniformément pour $0 \leq \alpha_n \leq 1$ (voir de Haan [66] p.21).

Finalement, on a l'existence d'un entier $N_3 > N_2$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} J_n(a, t_1, t, t_2) &\leq C^{2aH} (t_2 - t)^{aH} (t - t_1)^{aH} \\ &\leq (Ct_2 - Ct_1)^{2aH} \end{aligned}$$

Comme $aH > \frac{1}{2}$ ($a > \frac{1}{2H}$), en vertu des théorèmes 15.4 et 15.6 de Billingsley [22] la suite $(Z_n)_{n > N_3}$ est tendue et donc la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est tendue.

3.2 Le coefficient de normalisation

3.2.1 Énoncé du résultat

Le résultat développé dans cette partie affirme que nous n'avons pas le choix du coefficient de normalisation. Ceci est une conséquence de l'auto-similarité développée au paragraphe 1.2.1 et du théorème 3.2 ci-dessous.

3.2.2 Le résultat de Lamperti [85]

Définition 3.2 *Un processus Z est dit propre si pour tout t réel, Z_t a une distribution non dégénérée.*

Théorème 3.2 *Considérons un processus $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ et une fonction f telle que :*

$$\frac{X_{\xi^*}}{f(\xi)} \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{\mathcal{D}f} Z_* \quad (3.3)$$

où Z est un processus propre à trajectoires continues.

Pour que Z soit auto-similaire d'ordre α , il faut et il suffit que l'on ait :

$$f(\xi) = \xi^\alpha L(\xi) \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{H} \quad (3.4)$$

Lemme 3.2 (Karamata [77]) *Étant donnée une fonction q définie sur $(0, \infty)$ et telle que $q(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. Si l'on a :*

$$\frac{q(tx)}{q(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} h(t) \quad \forall t > 0$$

alors q s'écrit pour tout $t \in (0, +\infty)$ de la manière suivante :

$$q(t) = t^a L(t) \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R}$$

sauf s'il existe t_0 tel que $h(t_0) = 0$ (respectivement $h(t_0) = \infty$). Dans ces cas $h(t) = 0$ (respectivement $= \infty$) pour tout $t > 0$.

Lemme 3.3 *Supposons l'existence de quatre suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs, d'une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions de répartition et de deux fonctions de répartition F_1 et F_2 non dégénérées telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$G_n(a_n x + b_n) \rightarrow F_1(x) \quad \text{et} \quad G_n(\alpha_n x + \beta_n) \rightarrow F_2(x)$$

alors on a :

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\alpha_n} < \infty \quad \text{et} \quad \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - \beta_n}{a_n} \right| < \infty$$

et ces limites existent.

Étapes de la démonstration :

Étape 1 : cas où $F_1 = F_2$

Voir Kolmogorov-Gnedenko [65] théorème 2 page 42.

Étape 2 : lien entre F et G

Lemme 3.4 *Si la suite de fonctions de répartition $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction de répartition F propre, alors pour que la suite $(F_n(a_n \cdot + b_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une fonction de répartition G propre il faut qu'il existe $p > 0$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $F(\cdot) = G(p \cdot + q)$.*

Démonstration :

Voir Kolmogorov-Gnedenko [65] théorème 1 page 40.

Étape 3 : Démonstration du lemme 3.3

Par la seconde étape, F_1 et F_2 sont liées par la relation

$$F_2(x) = F_1(px + q) \quad \text{avec } q \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^*$$

Comme

$$\begin{aligned} G_n(\alpha_n x + \beta_n) &\longrightarrow F_2(x) && \text{on a donc} \\ G_n\left(\alpha_n \frac{u - q}{p} + \beta_n\right) &\longrightarrow F_1(u) && \text{et comme} \\ G_n(a_n x + b) &\longrightarrow F_1(x) \end{aligned}$$

La première étape nous dit qu'alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{pa_n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - (\beta_n - \frac{q}{p}\alpha_n)}{a_n} = 0$$

et donc le résultat escompté :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = p \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - \beta_n}{a_n} = \frac{q}{p}$$

d'où le lemme.

Démonstration du théorème 3.2 :

Étape 1 : Si l'on a (3.3)

Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de \mathbb{R}^+ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty$.

En prenant $t = 1$ dans (3.3) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}[X_{\xi_i} \leq f(\xi_i)x] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_1 \leq x] \quad (3.5)$$

Avec $t \neq 0$ quelconque, (3.3) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{\xi_i t} \leq f(\xi_i)x] &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_t \leq x] && \text{on pose } \zeta_i = \xi_i t \\ \mathbb{P}\left[X_{\zeta_i} \leq f\left(\frac{\zeta_i}{t}\right)x\right] &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_t \leq x] && \text{prenons } t' = \frac{1}{t} \\ \mathbb{P}[X_{\zeta_i} \leq f(\zeta_i t')x] &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[Z_{\frac{1}{t'}} \leq x\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

En vertu des hypothèses sur le processus Z on peut appliquer le résultat du lemme 3.3 aux relations (3.5) et (3.6) ce qui nous donne pour tout $t' \in (0, \infty)$:

$$\frac{f(\zeta_i t')}{f(\zeta_i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b(t')$$

Nous sommes alors dans les conditions du lemme 3.2 qui nous donne la conclusion souhaitée sur le comportement de f .

Étape 2 : Si l'on a (3.3) et (3.4)

On notera par commodité d'écriture

$$\{X_t \leq x\} \quad \text{pour} \quad (X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k)$$

Pour $a > 0$ donné, (3.3) nous donne les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \frac{X_{\xi t}}{f(\xi)} \leq x \right\} \right] &= \mathbb{P} [\{Z_t \leq x\}] \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \frac{X_{a\xi t}}{f(\xi)} \leq x \right\} \right] &= \mathbb{P} [\{Z_{at} \leq x\}] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comme on a l'hypothèse (3.4), c'est à dire $f(x) = x^\alpha L(x)$, on a donc

$$\frac{f(a\xi)}{f(\xi)} = a^\alpha \frac{L(a\xi)}{L(\xi)}$$

Comme $L \in \mathcal{H}$, il existe une fonction u telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$ et telle que

$$\frac{f(a\xi)}{f(\xi)} = a^\alpha u(x)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \frac{X_{a\xi t}}{f(a\xi)} u(\xi) a^\alpha \leq x \right\} \right] &= \mathbb{P} [\{Z_{at} \leq x\}] \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \frac{X_{a\xi t}}{f(a\xi)} u(\xi) \leq \frac{x}{a^\alpha} \right\} \right] &= \mathbb{P} [\{Z_{at} \leq x\}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comme $a > 0$ on a $\lim_{\xi \rightarrow \infty} a\xi = +\infty$ et comme $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$, on a donc en vertu de (3.7) la limite suivante vraie en chaque point de continuité du processus X :

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left\{ \frac{X_{a\xi t}}{f(a\xi)} u(\xi) \leq \frac{x}{a^\alpha} \right\} \right] = \mathbb{P} \left[\left\{ Z_t \leq \frac{x}{a^\alpha} \right\} \right] \quad (3.9)$$

Des équations (3.8) et (3.9), on déduit l'égalité suivante :

$$\mathbb{P} [\{a^\alpha Z_t \leq x\}] = \mathbb{P} [\{Z_{at} \leq x\}]$$

Qui signifie précisément que le processus Z est auto-similaire d'ordre α .

3.3 Hypothèses sur G

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On définit

$$\mathcal{G} = \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[G(X)] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[G(X)^2] < \infty\}$$

On a

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{L}^2(n(dx)) = \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) n(dx) < \infty\}$$

avec $n(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$.

Comme les polynômes de Hermite

$$H_q(x) = (-1)^q \exp(\frac{x^2}{2}) \frac{d^q}{dx^q} (\exp(-\frac{x^2}{2})) \quad q \in \mathbb{N}$$

forment un système orthogonal de fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, n(x))$ satisfaisant

$$\mathbb{E}[H_i(X) \cdot H_q(X)] = \delta_{i,q} \cdot q!$$

on a, pour tout $G \in \mathcal{G}$, le résultat suivant :

Propriété 3.1 On pose $J(q) = \mathbb{E}[G(X) \cdot H_q(X)]$. On a alors :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{J(q)}{q!} H_q(X) \xrightarrow{\mathcal{L}^2(n(dx))} G(X)$$

On définit $m = \min(q \in \mathbb{N} \mid J(q) \neq 0)$ et on l'appelle rang de Hermite de G .

On notera $\mathcal{G}_1 = \{G \in \mathcal{G} \mid m = 1\}$.

Nous allons nous intéresser aux fonctions G de \mathcal{G}_1 c'est à dire les fonctions G de \mathcal{G} vérifiant

$$J(1) = \mathbb{E}[X G(X)] \neq 0$$

Nous allons voir que sous de bonnes hypothèses, sur X , on a pour tout $G \in \mathcal{G}_1$, la convergence de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers un mouvement Brownien fractionnaire.

3.4 Hypothèses sur X

Étant donnée une suite stationnaire X de variables aléatoires Gaussiennes, on notera $r(i - j) = \mathbb{E}[X_i X_j]$.

3.4.1 Hypothèses (H1)(H,L)

On dira que la suite X satisfait les hypothèses (H1)(H,L) si on a :

i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = 0 \tag{3.10}$$

ii

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i-j) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2H} L(n) \quad (3.11)$$

iii

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r(i-j)| = \underset{n \rightarrow \infty}{\mathcal{O}}(n^{2H} L(n)) \quad (3.12)$$

avec $\frac{1}{2} < H < 1$ et $L \in \mathcal{H}$.

3.4.2 Hypothèses (H2)(D,L)

On dira que la suite X satisfait les hypothèses (H2)(D,L) si on a :

$$r(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{-D} L(k)$$

avec $0 < D < 1$ et $L \in \mathcal{H}$.

3.4.3 Liens entre ces hypothèses

Propriété 3.2 (Taqqu [129] lemme 3.1 p 293.) On a :

$$\text{Si } X \text{ satisfait (H1)(H,L) alors } X \text{ satisfait (H2) } \left(1 - \frac{H}{2}, \frac{2L}{(1-H)(2-H)}\right)$$

et dans le cas $r(k)$ monotone décroissante pour k grand, on a :

$$\text{Si } X \text{ satisfait (H2)(D,L) alors } X \text{ satisfait (H1)(2-2D, D(2D-1)L)}$$

3.4.4 Caractéristique de ces hypothèses

Le théorème suivant va motiver le choix de l'hypothèse (H1)(H,L) comme hypothèse d'étude :

Théorème 3.3 Soit $G \in \mathcal{G}_1$ et soit X satisfaisant (H1)(H,L).

On a alors :

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n G(X_i) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} J^2(1) \cdot n^{2H} \cdot L(n) \quad \text{avec } \frac{1}{2} < H < 1$$

Démonstration :

En vertu des propriétés des polynômes de Hermite, on a la relation suivante :

$$\mathbb{E}[G(X_i)G(X_j)] = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{J^2(q)}{q!} r^q(i-j)$$

Voir Rozanov [118] p.182.

Posons $G^*(X_i) = G(X_i) - J(1)X_i$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{i=1}^n G(X_i) \right]^2 \right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[G(X_i)G(X_j)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[(G^*(X_i) + J(1)X_i)(G^*(X_j) + J(1)X_j)] \\ &= S_1(n) + S_2(n) + S_3(n) \end{aligned}$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} S_1(n) &= J(1)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i-j) \\ &= \underset{n \rightarrow \infty}{\mathcal{O}} n^{2H} L(n) && \text{par (3.11)} \\ S_2(n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[G^*(X_i)G^*(X_j)] \\ S_3(n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n J(1)(\mathbb{E}[X_i G^*(X_j)] + \mathbb{E}[G^*(X_i)X_j]) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.13) tient au fait que les polynômes de Hermite forment une base orthogonale et que $G^*(X_i)$ n'a pas de composante en " X_i ".

En conclusion de ces remarques, il ne reste plus qu'à montrer que :

$$S_2(n) = \underset{n \rightarrow \infty}{o} (n^{2H} L(n)) \tag{3.14}$$

De l'hypothèse (3.10) et du fait que, X étant normalisée, $|r(i-j)| \leq 1$, on a donc $|r^q(i-j)| \leq |r^2(i-j)| \quad \forall q \geq 2$ et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|G^*(X_i)G^*(X_j)|] &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{q=2}^{\infty} \frac{J^2(q)}{q!} |r^q(i-j)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r^2(i-j)| \sum_{q=2}^{\infty} \frac{J^2(q)}{q!} \\ &\leq C' \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r^2(i-j)| \end{aligned}$$

avec $C' = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{J^2(q)}{q!} = \mathbb{E}[G^*(X_i)^2] < \infty$.

L'hypothèse (3.10) nous assure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad |i-j| > \delta \Rightarrow |r(i-j)| < \varepsilon$$

Donc en majorant $|r(i-j)|$ par 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r^2(i-j)| &= \sum_{|i-j|>\delta} |r^2(i-j)| + \sum_{|i-j|\leq\delta} |r^2(i-j)| \\
 &\leq \varepsilon \sum_{|i-j|>\delta} |r(i-j)| + \sum_{|i-j|\leq\delta} 1 \\
 &\leq \varepsilon \sum_{i,j=1}^N |r(i-j)| + C(\varepsilon)n
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Comme $H > \frac{1}{2}$ on a

$$C(\varepsilon)n = o_{n \rightarrow \infty}(n^{2H}L(n)) \tag{3.16}$$

et par l'hypothèse (3.12) on a $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r(i-j)| = o_{n \rightarrow \infty}(n^{2H}L(n))$ mais ε étant arbitrairement petit, on obtient :

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r(i-j)| = o_{n \rightarrow \infty}(n^{2H}L(n)) \tag{3.17}$$

Les relations (3.15), (3.16) et (3.17) nous donnent le résultat voulu.

3.5 Convergence vers le mouvement Brownien fractionnaire

3.5.1 Énoncé du théorème principal

Théorème 3.4 *Supposons que $G \in \mathcal{G}_1$ et que X satisfasse (H1)(H,L).*

Posons

$$Z_n(t) = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{[nt]} G(X_k) \tag{3.18}$$

avec $d_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2H}L(n)$.

Alors on a

$$Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} J(1)B^H$$

avec $J(1) = \mathbb{E}[XG(X)]$ et B^H un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H > \frac{1}{2}$.

Corollaire 3.1 *Le même résultat est obtenu quand X satisfait l'hypothèse (H2)(D,L) et quand $d_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{(1-D)(2-D)} n^{2-D}L(n)$.*

Démonstration :

Ceci est une conséquence de la propriété 3.2 spécifiant une équivalence entre les hypothèses (H1) et (H2).

3.5.2 Énoncé du théorème de réduction

La démonstration du théorème 3.4 découle du théorème de réduction suivant :

Théorème 3.5 *Soit $G \in \mathcal{G}_1$ et soit X satisfaisant (H1)(H,L).*

Définissons $Z_{n,1}$ par :

$$Z_{n,1}(t) = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k \quad \forall t \in [0, 1] \tag{3.19}$$

et rappelons que Z_n est défini par (3.18).

Si les distributions finies-dimensionnelles de $Z_{n,1}$ convergent, alors Z_n converge faiblement dans $\mathcal{D}([0, 1])$ vers un processus $J(1)\bar{Z}(t)$ où les distributions fini-dimensionnelles de \bar{Z} sont les distributions limites que celles de $Z_{n,1}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Ce théorème affirme que si on arrive à montrer le théorème 12.2 dans le cas particulier où $G(x) = x$ alors grâce à ce résultat, il sera montré pour tout $G \in \mathcal{G}_1$.

3.5.3 Démonstration du théorème 3.4

Première étape : G est l'identité

Convergence des lois finis-dimensionnelles

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^p$.

Comme le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ est Gaussien, il en est de même du vecteur $(Z_{n,1}(t_1), \dots, Z_{n,1}(t_p))$.

Posons $C_n(t_i, t_j) = \mathbb{E}[Z_{n,1}(t_i).Z_{n,1}(t_j)]$ et $C(t_i, t_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t_i, t_j)$.

Quand $n \rightarrow \infty$, la fonction caractéristique de $(Z_{n,1}(t_1), \dots, Z_{n,1}(t_p))$ converge vers celle d'un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance $(C(t_i, t_j))_{i,j=1}^p$. Notons $(\bar{Z}_{t_1}, \dots, \bar{Z}_{t_p})$ ce vecteur.

Posons

$$S_{[nt_i]} = \sum_{u=1}^{[nt_i]} X_u \quad (Z_{n,1} = \frac{S_{[nt_i]}}{d_n})$$

Comme

$$C_n(t_i, t_j) = \frac{1}{2n^{2H}L(n)} \left(\mathbb{E} \left[S_{[nt_i]}^2 \right] + \mathbb{E} \left[S_{[nt_j]}^2 \right] - \mathbb{E} \left[S_{|[nt_i]-[nt_j]|}^2 \right] \right)$$

En vertu de l'hypothèse (3.12), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[S_{[nt_i]}^2 \right] &= \sum_{u=1}^{[nt_i]} \sum_{v=1}^{[nt_i]} r(u-v) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K.[nt_i]^{2H} L([nt_i]) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K.n^{2H} L([nt_i])t_i^{2H} \\ \frac{1}{2n^{2H}L(n)} \mathbb{E} \left[S_{[nt_i]}^2 \right] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{K.L([nt_i])}{2.L(n)} t_i^{2H} \end{aligned}$$

On a donc d'une part :

$$C_n(t_i, t_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{K}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} + |t_i - t_j|^{2H})$$

Et d'autre part :

$$C_n(t_i, t_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C(t_i, t_j)$$

donc on a :

$$C(t_i, t_j) = \frac{K}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} + |t_i - t_j|^{2H})$$

On a donc le résultat voulu à savoir :

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}f} \sqrt{K}B^H$$

Tension de $(Z_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$

Vérifions que $(Z_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait les hypothèses du lemme 3.1 :

- Comme $\frac{1}{2} < H < 1$, on a donc $\frac{1}{2H} < 1$ et donc on a l'hypothèse (3.2) qui est trivialement vérifiée avec $k = 1$.
- La suite X est stationnaire par hypothèse.
- Montrons que l'hypothèse (3.1) est satisfaite :

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[X_i X_j] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r(i-j) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{2H} L(n) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Où (3.20) découle de (3.11). L'hypothèse (3.1) est donc vérifiée.

Le lemme 3.1 est donc applicable ce qui prouve la tension de la suite $(Z_{n,1})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Conclusion

On a donc la convergence fini-dimensionnelle et la tension de la suite donc en vertu du théorème de Prohorov (Billingsley [22, théorème 6.1]) on a la convergence faible dans $\mathcal{D}([0, 1])$.

Seconde étape : cas général

Conséquence du théorème de réduction.

3.5.4 Démonstration du théorème 3.5 de réduction

Convergence des lois finies-dimensionnelles

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$.

Comme les distributions finies-dimensionnelles de $Z_{n,1}$ convergent disons vers celles de \bar{Z} , on a donc :

$$W_{n,1}(p) = \sum_{u=1}^p a_u Z_{n,1}(t_u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} J(1) \sum_{u=1}^p a_u \bar{Z}(t_u) = \bar{W}_1(p)$$

Comme on a :

$$W_n(p) = J(1)W_{n,1}(p) + (W_n(p) - J(1)W_{n,1}(p))$$

Pour avoir la convergence finies-dimensionnelle de Z_n vers $J(1)\bar{Z}$, c'est à dire

$$W_n(p) = \sum_{u=1}^p a_u Z_n(t_u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} J(1) \sum_{u=1}^p a_u \bar{Z}(t_u) = \bar{W}_1(p)$$

il est suffisant, en vertu du théorème 4.1 de Billingsley [22], de montrer que :

$$W_n(p) - J(1)W_{n,1}(p) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \tag{3.21}$$

Mais comme on a :

$$\mathbb{E}[W_n(p) - J(1)W_{n,1}(p)]^2 \leq \sum_{u=1}^p \sum_{v=1}^p |a_u a_v| \frac{1}{d^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathbb{E}[G^*(X_i)G^*(X_j)]|$$

Avec $G^*(X) = G(X) - J(1)X$.

Donc en conséquence de (3.14) on a :

$$\mathbb{E}[W_n(p) - J(1)W_{n,1}(p)]^2 = o_{n \rightarrow \infty}(1)$$

La convergence en probabilité (3.21) en résulte via l'inégalité de Tchebycheff.

Tension de $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Vérifions que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait les hypothèses du lemme 3.1 :

- Comme $\frac{1}{2} < H < 1$, on a donc $\frac{1}{2H} < 1$ et donc on a l'hypothèse (3.2) qui est trivialement vérifiée avec $k = 1$.
- La suite $G(X)$ est stationnaire G étant mesurable et X étant stationnaire par hypothèses.
- Montrons que l'hypothèse (3.1) est satisfaite :
Comme nous l'a montré le théorème 3.3, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left[\sum_{i=1}^n G(X_i) \right]^2 \right] &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} J^2(1) n^{2H} L(n) \\ &= \mathcal{O}_{n \rightarrow \infty}(n^{2H} L(n)) \end{aligned}$$

L'hypothèse (3.1) est donc vérifiée.

Le lemme 3.1 est donc applicable ce qui prouve la tension de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On a donc la convergence fini-dimensionnelle et la tension de la suite donc en vertu du théorème de Prohorov (Billingsley [22, théorème 6.1]) on a la convergence faible dans $\mathcal{D}([0, 1])$.

Deuxième partie

Capacité de stockage d'une file à entrée Brownienne fractionnaire avec dérive

Introduction

Dans cette deuxième partie, nous allons nous développer l'étude de modèle fractionnaire en télécommunications. Dans l'introduction nous avons évoqué le fait que les modèles markoviens classiques ne suffisent pas pour décrire les données réelles. Le modèle le plus simple introduisant le mouvement Brownien fractionnaire est le modèle d'une file à entrée Brownienne fractionnaire et à taux de service constant. Ce modèle a été introduit par Norros [101, 102] en 1994. Sur un tel modèle, le plus intéressant est bien sûr de connaître le comportement de la capacité de stockage et notamment le comportement de queue de sa distribution ce qui revient à étudier le comportement asymptotique de :

$$u \rightarrow \mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} (B_t^H - dt) \geq u \right] \quad (A)$$

Les premières pierres sont posées par Norros [101] en 1994. Les principaux résultats font l'objet du chapitre 4.

Le chapitre suivant présente les travaux de Massoulié et Simonian [94] de 1995. La démonstration donnée ici est différente de l'article originel afin de permettre une démonstration précise des deux bornes.

Le chapitre 6 présente les travaux de Piterbarg et Hüßler [74] qui ont donné, en utilisant les outils des processus Gaussiens un équivalent asymptotique de (A) (le même que Narayan) dans un cadre plus général, celui d'une dérive en t^b avec $b > H$. La fin de ce chapitre est consacrée à des considérations en horizon fini. La question est partiellement traitée par Duncan et *al.* [52].

Chapitre 4

Résultats préliminaires sur la capacité de stockage

4.1 Modèle proposé par Norros(1994)

4.1.1 Processus d'entrée et de service

Le modèle introduit par Norros est le suivant :

- Processus d'entrée : Le processus d'entrée est donc défini pour tout $t \geq 0$ par :

$$A(t) = mt + \sqrt{am}B_t^H \quad \text{et} \quad A(0) = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$$

avec

- $a > 0$ coefficient de variance.
- $m > 0$ taux moyen d'entrée.
- B^H un Mouvement Brownien fractionnaire avec $H > \frac{1}{2}$.

Remarque 4.1 *Les simulations de Bellcore donnent pour ce paramètre une valeur voisine de 0,8.*

- Processus de service : le service est constant, on notera $c > 0$ le taux moyen de service.

4.1.2 Processus de stockage

Définition 4.1 *Le modèle Brownien de stockage à entrée Brownienne fractionnaire est le processus V défini pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par :*

$$V_t = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \leq t}} (A_t - A_s - c(t-s)) \quad (4.1)$$

$$= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \leq t}} (\sqrt{am}(B_t^H - B_s^H) - (c-m)(t-s)) \quad (4.2)$$

Remarque 4.2 *La stationnarité des accroissements du mouvement Brownien fractionnaire entraîne la stationnarité du processus de stockage et de ce fait il suffit de s'intéresser à la variable $V = V(0)$ en régime stationnaire.*

Remarque 4.3 *Pour assurer la stabilité du système, on impose $c > m$.*

4.2 Premier résultat sur la capacité de stockage

Pour donner des propriétés sur la capacité de stockage, il paraît naturel de copier ce qui a été fait pour le mouvement Brownien ordinaire. Dans ce cas, une application du théorème de Girsanov nous fait passer d'un processus avec dérive à un processus sans dérive *via* un changement de probabilité absolument continu. La question est alors close puisque le *sup* du mouvement Brownien ordinaire est parfaitement connu et découle de la propriété de Markov Fort. Bien qu'une version fractionnaire du théorème de Girsanov existe (voir Norros [103, 104]), ceci ne nous rend pas beaucoup de service puisque le *sup* du mouvement Brownien fractionnaire est encore peu connu (on n'a pas la propriété de Markov Fort).

4.2.1 Une relation frontière sur les paramètres

Une condition habituelle dans les applications aux télécommunications est que la probabilité que la charge de travail dans le système dépasse un certain niveau x appelé *Condition de stockage* est nécessairement au plus égale à un paramètre ε appelé *qualité de service*. x est le substitut de la capacité de stockage dans notre modèle à capacité infinie.

La relation suivante a donc lieu au maximum de charge permise :

$$\mathbb{P}[V > x] = \varepsilon \quad (4.3)$$

Elle donne une relation entre les paramètres du système séparant les combinaisons de paramètres admissibles des autres :

Théorème 4.1 *Supposons que (4.3) soit vérifiée. Posons $\rho = \frac{m}{c}$. On a la relation suivante :*

$$\frac{1 - \rho}{\rho^{\frac{1}{2H}}} c^{\frac{H-\frac{1}{2}}{H}} x^{\frac{1-H}{H}} = cste \quad (4.4)$$

Où la constante ne dépend que des paramètres H et ε .

Lemme 4.1

$$V \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sup_{t \geq 0} (A(t) - ct)$$

Démonstration du lemme

En effet, de (4.2) on a :

$$V = \sup_{s \leq 0} (\sqrt{am} (-B^H(s)) - (c - m)(-s))$$

Or les processus $\{-B_s^H : s \in \mathbb{R}\}$ et $\{B_{-s}^H : s \in \mathbb{R}\}$ sont Gaussiens centrés de même fonction de covariance donc indistinguables.

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} V &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sup_{s \leq 0} (\sqrt{am} B^H(-s) - (c - m)(-s)) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sup_{s \geq 0} (\sqrt{am} B^H(s) - (c - m)s) \end{aligned}$$

◀

Démonstration du théorème

Soit $x > 0$. On a :

$$\mathbb{P}[V > x] = \mathbb{P}\left[\sup_{t \geq 0} \left[\frac{\sqrt{am}}{x} B^H(t) - \frac{c-m}{x} t \right] > 1\right]$$

L'auto-similarité du mouvement Brownien fractionnaire nous assure que :

$$\left\{ \frac{\sqrt{am}}{x} B^H(t) : t \in \mathbb{R} \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{ B^H\left(\left[\frac{\sqrt{am}}{x}\right]^{\frac{1}{H}} t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

On pose maintenant $s = \left[\frac{\sqrt{am}}{x}\right]^{\frac{1}{H}} t$ et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V > x] &= \mathbb{P}\left[\sup_{s \geq 0} \left[B^H(s) - \frac{c-m}{x} \left[\frac{\sqrt{am}}{x}\right]^{\frac{-1}{H}} s \right] > 1\right] \\ &= f\left(\frac{(c-m)}{\left[\sqrt{am}\right]^{\frac{1}{H}}} x^{\frac{1}{H}-1}\right) \end{aligned}$$

Avec $f(y) = \mathbb{P}\left[\sup_{t \geq 0} [B_t^H - yt] > 1\right]$. Cette fonction est strictement décroissante et on a $f(0) = 1$ et $f(\infty) = 0$. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$\varepsilon = \mathbb{P}[V > x] = f\left(\frac{(c-m)}{\left[\sqrt{am}\right]^{\frac{1}{H}}} x^{\frac{1}{H}-1}\right)$$

donc

$$f^{-1}(\varepsilon) = \frac{(c-m)}{\left[\sqrt{am}\right]^{\frac{1}{H}}} x^{\frac{1}{H}-1}$$

En substituant $\rho = \frac{m}{c}$, on obtient l'équation voulue à savoir :

$$\frac{1-\rho}{\rho^{1/(2H)}} \cdot c^{(H-\frac{1}{2})/H} \cdot x^{(1-H)/H} = a^{1/(2H)} \cdot f^{-1}(\varepsilon)$$

Par définition de la fonction f , celle ci ne dépend que de H et de ε , d'où le résultat énoncé. ◀

Dans le cas Brownien Dans le cas particulier du mouvement Brownien Ordinaire, $H = \frac{1}{2}$, la formule (4.4) se réduit à :

$$\frac{1-\rho}{\rho} x = cste$$

Cette relation est bien connue et correspond à l'approximation *Heavy-traffic* d'une file $M/D/1$.

Dans le cas Brownien fractionnaire Dans le cas $H > \frac{1}{2}$, la situation est tout autre. Fixons c le taux de service, on peut alors exprimer x en fonction de ρ :

$$x = cste \cdot \rho^{\frac{1}{2(1-H)}} \cdot (1-\rho)^{-\frac{H}{1-H}}$$

On voit que quand H est grand une augmentation conséquente dans l'utilisation de ρ (par exemple en divisant par deux la capacité libre $1-\rho$) nécessite une énorme augmentation de la

place du stockage. Ceci conforte l'idée que dans un réseau par paquets, le facteur d'utilisation du trafic puisse être amélioré en augmentant la taille du buffer. Maintenant, en fixant x , on obtient :

$$C = cste. \rho^{\frac{1}{2H-1}} \cdot (1-\rho)^{-\frac{H}{H-\frac{1}{2}}}$$

La conséquence de cette expression est que les liens de transmission avec grandes capacités peuvent être intensément utilisés sans augmenter le buffer.

4.2.2 Borne inférieure de la capacité

Théorème 4.2 *On a :*

$$\mathbb{P}[V > x] \geq \bar{\Phi} \left(\frac{1}{\sqrt{am}} \cdot \left(\frac{c-m}{H} \right)^H \left(\frac{x}{1-H} \right)^{1-H} \right) \quad (4.5)$$

où $\bar{\Phi}(y) = \mathbb{P}[B_1^H > y]$ est la fonction de répartition résiduelle d'une distribution normale standard.

Démonstration :

On a par définition de la stationnarité de V :

$$\mathbb{P}[V(t) > x] = \mathbb{P}[V > x] \quad (4.6)$$

$$\geq \sup_{y \geq 0} \mathbb{P}[(m-c)y + \sqrt{am}B_y^H > x]$$

$$\geq \sup_{y \geq 0} \mathbb{P}\left[B_1^H > \frac{x + (c-m)y}{\sqrt{am}y^H}\right] \quad (4.7)$$

$$\geq \sup_{y \geq 0} \bar{\Phi}\left[\frac{x + (c-m)y}{\sqrt{am}y^H}\right]$$

Où (4.7) découle de l'auto-similarité de B^H . La dérivée de :

$$t \mapsto \bar{\Phi}\left[\frac{x + (c-m)t}{\sqrt{am}t^H}\right]$$

est donnée par :

$$t \mapsto \left(\frac{(c-m)\sqrt{amt} - \sqrt{am}H(x + (c-m)t)}{t^{H+1}\sqrt{am}} \right) \bar{\Phi}'\left[\frac{x + (c-m)t}{\sqrt{am}t^H}\right]$$

Comme $\bar{\Phi}$ est le complémentaire d'une fonction de répartition, elle est donc décroissante et donc $\bar{\Phi}'(y)$ est négatif pour tout y . Le maximum est donc atteint pour une valeur t^* telle que :

$$(c-m)\sqrt{amt^*} - \sqrt{am}H(x + (c-m)t^*) = 0$$

$$t^* = \frac{Hx}{(1-H)(c-m)}$$

Donc on a le résultat :

$$\mathbb{P}[V(t) > x] \geq \bar{\Phi}\left[\frac{x + (c-m)t^*}{\sqrt{am}(t^*)^H}\right] = \bar{\Phi}\left(\frac{1}{\sqrt{am}} \cdot \left(\frac{c-m}{H}\right)^H \left(\frac{x}{1-H}\right)^{1-H}\right)$$

Ce qui donne le résultat voulu.



Remarque 4.4 *En utilisant l'approximation de $\bar{\Phi}(y)$ par $\exp(-\frac{y^2}{2})$, on obtient l'expression suivante :*

$$\bar{\Phi} \left[\frac{x + (c - m)t^*}{\sqrt{am}[t^*]^H} \right] \sim \exp \left(- \left[\frac{1}{2am(1 - H)^2} \left(\frac{(c - m)(1 - H)}{H} \right)^{2H} \right] x^{2(1 - H)} \right) \quad (4.8)$$

Le comportement de queue du niveau de stockage pour un modèle Brownien fractionnaire est donc dans le meilleur des cas Weibullien c'est à dire du type $\exp(\gamma x^\beta)$ avec $\beta \leq 1$. Cette approximation montre toute l'importance de la valeur du paramètre d'auto-similarité H pour la capacité de stockage ce qui dessine la frontière entre le modèle traditionnel et le modèle de trafic avec entrée auto-similaire. Dans le cas Brownien, l'expression (4.8) se réduit à une distribution exponentielle ce qui est bien connu dans le cadre des approximations de file $M/D/1$.

Chapitre 5

Le résultat de Massoulié et Simonian

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence l'importance de la variable $V = V(0)$:

$$\begin{aligned} V &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \leq 0}} (A_0 - A_s - c(0 - s)) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sup_{s \geq 0} (\sqrt{am} B_s^H - (c - m)s) \end{aligned}$$

Pour simplifier les écritures, nous allons, dans la suite de cette partie, considérer $\sqrt{am} = 1$ et $C = c - m > 0$. On se ramène donc à l'étude du 'Sup' sur un horizon infini d'un mouvement Brownien fractionnaire avec une dérive négative.

L'objectif de cette partie est de raffiner le théorème 4.2 :

Théorème 5.1 *Pour x suffisamment grand, il existe des constantes K et κ telles que l'on ait :*

$$\mathbb{P}[V > x] \geq \frac{1}{K} \cdot x^{(1-H)^2/H} \cdot (\log(x))^{-1/2H} \cdot \bar{\Phi}(\kappa x^{1-H}) \quad (5.1)$$

$$\leq K \cdot x^{(1-H)^2/H} \cdot \bar{\Phi}(\kappa x^{1-H}) \quad (5.2)$$

Ce résultat a été montré par Massoulié et Simonian [94] en utilisant un résultat de Adler [2]. Cependant, les outils utilisés par Simonian et Massoulié pour démontrer la borne inférieure ne sont pas démontrés dans [2]. La preuve de la borne inférieure est donc incomplète. Dans ce chapitre, nous complétons cette démonstration en se basant sur l'article de Samorodnitsky [122] plutôt que sur [2].

5.1 Préliminaires

5.1.1 Introduction du processus $\{G_t : t \in \mathbb{R}^+\}$

Considérons le processus $\{G_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par :

$$G_t = \frac{B_t^H}{1+t}$$

Remarque 5.1 *Le processus $\{G_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ est Gaussien et centré. La condition de stabilité de la file $C > 0$ assure que le 'sup' définissant V_0 est fini presque sûrement et donc que les trajectoires de G sont bornées presque sûrement (Voir Norros [101]).*

Propriété 5.1

$$\mathbb{P}[V > x] = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} G_t > \frac{C^H}{x^{H-1}}\right]$$

Démonstration :

Par définition de V on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} V > x &\Leftrightarrow \exists t > 0, B_t^H - Ct > x \\ &\Leftrightarrow \exists t > 0, B_t^H > x + Ct \\ &\Leftrightarrow \exists t > 0, \frac{B_t^H}{x + Ct} > 1 \end{aligned}$$

Donc on a en posant $ct = xs$:

$$\mathbb{P}[V > x] = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} \frac{B_t^H}{x + Ct} > 1\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{s>0} \frac{B_{\frac{xs}{c}}^H}{x + xs} > 1\right]$$

On utilise maintenant l'auto-similarité pour écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V > x] &= \mathbb{P}\left[\sup_{s>0} \frac{x^{H-1}}{C^H} \frac{B_s^H}{1+s} > 1\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\sup_{s>0} G_s > \frac{C^H}{x^{H-1}}\right] \end{aligned} \tag{5.3}$$

où la validité de (5.3) découle du fait que $C > 0$ et que $x > 0$.

◀

Posons maintenant pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\xi = \frac{C^H}{x^{H-1}} \quad \text{et} \quad r^2(t) = \mathbb{E}[G_t^2] = \frac{t^{2H}}{(1+t)^2}$$

Propriété 5.2 *La fonction r atteint son maximum en un point $\tilde{t} = \frac{H}{1-H}$. La valeur de $r(\tilde{t}) = H^H(1-H)^{(1-H)}$ sera notée \tilde{r} .*

Cette propriété est la principale motivation de l'introduction du processus G . En effet, on est en présence d'un processus qui, contrairement au mouvement Brownien fractionnaire, a un moment d'ordre 2 qui atteint son maximum sur $[0, +\infty[$ (en \tilde{t}). C'est une propriété clé pour appliquer les résultats classiques sur les processus Gaussiens. Certains de ces résultats sont consignés dans l'annexe 13.1 page 183.

5.1.2 Localisation du problème

Étant donné que $t \rightarrow \mathbb{E}[G_t^2]$ atteint son maximum en un point \tilde{t} et que l'on a

$$\mathbb{P}[V > x] = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} G_t > \xi\right]$$

on peut, pour un voisinage T de \tilde{t} borné, écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \xi \right] &\leq \mathbb{P} \left[\sup_{t > 0} G_t > \xi \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \xi \right] + \mathbb{P} \left[\sup_{t \notin T} G_t > \xi \right] \end{aligned}$$

Une application du théorème de Borell 13.2 nous donne :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \notin T} G_t > \xi \right] \leq 2 \exp \left(- \frac{(\xi - M_T)^2}{2 Q_T^2} \right)$$

où $M_T = \mathbb{E} \left[\sup_{t \notin T} G_t \right]$ et $Q_T^2 = \mathbb{E} \left[\sup_{t \notin T} G_t^2 \right] < \tilde{r}^2$

On a donc

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \notin T} G_t > \xi \right] = o_{\xi \rightarrow \infty} \left(\mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \xi \right] \right) \quad (5.4)$$

Cette remarque nous permet de localiser le problème sur un voisinage T borné de \tilde{t} quelconque.

5.1.3 La distance canonique et les d-boules

Les propriétés locales d'un processus Gaussien peuvent être analysées en utilisant un outil propre au processus étudié : la distance canonique.

Définition 5.1 *Étant donné un processus Gaussien centré $\{G_t : t \in \mathbb{R}^+\}$, sa distance canonique d est définie par :*

$$d^2(s, t) = \mathbb{E} [(G_t - G_s)^2] \quad s, t \geq 0$$

Lemme 5.1 (Massoulié et Simonian [94]) *Posons pour tout $t \geq 0$, $G_t = \frac{B_t^H}{1+t}$, on a alors la distance canonique associée qui prend la forme suivante :*

$$d(s, t)^2 = \frac{1}{(1+s)(1+t)} \left[|t-s|^{2H} - (t-s) \left(\frac{t^{2H}}{1+t} - \frac{s^{2H}}{1+s} \right) \right] \quad (5.5)$$

Dans la suite, nous noterons q la fonction définie par :

$$q(t) = \frac{t^{2H}}{1+t} \quad \forall t \geq 0 \quad (5.6)$$

Étant donné $T \subset [0, +\infty[$ et $\varepsilon > 0$, on notera $\mathcal{N}_d(T, \varepsilon)$ le nombre de d -boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir T . De la même manière, on notera $\mathcal{N}_{|\cdot|}(T, \varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε au sens de la norme euclidienne nécessaire pour recouvrir T .

Remarque 5.2 $\mathcal{N}_d(T, \varepsilon) = 1$ dès que $\varepsilon \geq \tilde{r}$.

Nous noterons $\|t\| = \|G_t\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[G_t^2]}$. On utilisera les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} T_\eta^+ &= \{t \in T, \|t\| > \eta\} \\ T_\eta^- &= \{t \in T, \|t\| \leq \eta\} \\ \mathcal{N}^+(\eta, \varepsilon) &= \mathcal{N}(T_\eta^+, \varepsilon) \\ \mathcal{N}^-(\eta, \varepsilon) &= \mathcal{N}(T_\eta^-, \varepsilon) \\ \mathcal{N}(\eta_1, \eta_2, \varepsilon) &= \mathcal{N}(T_{\eta_1}^+ \cap T_{\eta_2}^-, \varepsilon) \end{aligned}$$

5.2 La borne inférieure

5.2.1 Quelques lemmes préliminaires

Lemme 5.2 (Feller [56]) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\lambda^{-1} - \lambda^{-3}) \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2) \leq \mathbb{P}[X > \lambda] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda^{-1} \exp(-\frac{1}{2}\lambda^2)$$

Lemme 5.3 Soient (X_1, X_2) un vecteur Gaussien centré de matrice de corrélation

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad -1 < \rho < 1$$

Et soient $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. On a alors :

(a) Si $\rho \leq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[X_1 > \lambda_1, X_2 > \lambda_2] \\ & \leq \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{2\pi} [(\lambda_1 - \rho\lambda_2)(\lambda_2 - \rho\lambda_1)]^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\rho\lambda_1\lambda_2}{2(1 - \rho^2)}\right) \end{aligned}$$

(b) Si $\rho > 0$ et $\rho < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{1}{\rho}$,

$$\mathbb{P}[X_1 > \lambda_1, X_2 > \lambda_2] \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda_1^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\rho\lambda_1\lambda_2}{2(1 - \rho^2)}\right)$$

(c) Dans le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 1$, on a, sans condition sur ρ , l'existence d'une constante M telle que :

$$\mathbb{P}[X_1 > \lambda, X_2 > \lambda] \leq M \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{(1 + \rho)}\right)$$

Démonstration :

(a) et (b) sont démontrées dans Samorodnitsky [122] lemme 2.2. p.57.

Pour (c), on distingue deux cas, ou bien $\rho > 0$ on peut alors appliquer (b) car $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$ et on a directement :

$$\mathbb{P}[X_1 > \lambda, X_2 > \lambda] \leq M \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 + \rho}\right)$$

ou bien $\rho \leq 0$ et alors on a par (a) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > \lambda, X_2 > \lambda] & \leq \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{2\pi(1 - \rho)^2} \lambda^{-2} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 + \rho}\right) \\ & \leq \frac{((1 - \rho)(1 + \rho))^{3/2}}{2\pi(1 - \rho)^2} \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 + \rho}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{(1 - \rho)^{-1/2}(1 + \rho)^{3/2}}{2\pi} \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 + \rho}\right) \\ & \leq M \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{1 + \rho}\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Où (5.7) vient du fait que $\lambda > 1$ donc $\lambda^{-2} < \lambda^{-1}$ et (5.8) découle directement du signe de ρ .



Lemme 5.4 *Supposons qu'il existe δ_0 tel que pour tout $\delta \leq \delta_0$ on ait :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a_2 \delta^m \varepsilon^{-k} \leq \mathcal{N}^+(\tilde{r} - \delta, \varepsilon) \leq a_1 \varepsilon^{-k_1} + N_0 \quad (5.9)$$

avec $k_1 \geq k > 2m \geq 0$ et a_1, a_2, N_0 des constantes positives.

Alors, pour tout λ assez grand, on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \lambda \right] \geq M \lambda^{k-2m-1} (\ln \lambda)^{-k/2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}^2}}$$

où M est une constante positive.

Démonstration :

Pour tout ε et tout δ , il existe $n = \mathcal{N}^+(\tilde{r} - \delta, \varepsilon)$ points x_1, \dots, x_n de T vérifiant les hypothèses :

H1 : $\|x_i\| > \tilde{r} - \delta$

H2 : $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ pour tout i, j .

Soit $\lambda > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \lambda \right] &\geq \mathbb{P} \left[\max_i G_{x_i} > \lambda \right] \\ &\geq \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbb{P} [G_{x_i} > \lambda]}_{(A)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{i < j} \mathbb{P} [G_{x_i} > \lambda, G_{x_j} > \lambda]}_{(B)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Où (5.10) découle de la formule d'inclusion-exclusion.

Le principe de la démonstration va être de donner des valeurs à δ et à ε de sorte que (B) devienne négligeable devant (A) quand λ devient grand.

On pose $\lambda_0^2 = \frac{1}{2} \tilde{r} \frac{1}{\delta_0}$, $\lambda^2 = \frac{1}{2} \tilde{r} \frac{1}{\delta}$ de sorte que $\lambda > \lambda_0$ implique $\delta < \delta_0$. On va également poser $p = \frac{\varepsilon \lambda}{\tilde{r} (\ln \lambda)^{1/2}}$. On remarque que :

$$\tilde{r} - \delta = \tilde{r} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} \right] \quad (5.11)$$

Etape 1 : Minoration de (A) :

Pour tout $1 \leq i \leq n$, l'hypothèse H1 assure que la variance de G_{x_i} est majorée par $\tilde{r} - \delta$. On applique alors le lemme 5.2 pour écrire :

$$\begin{aligned} (A) &\geq M_1 n \lambda^{-1} \exp(-\lambda^2/[2(\tilde{r} - \delta)^2]) \\ &\geq M_1 n \lambda^{-1} \exp(-\lambda^2/[2\tilde{r}^2(1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2})]) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\geq M_1 \lambda^{-1} \exp(-\lambda^2(1 + \lambda^{-2})/[2\tilde{r}^2]) \cdot \delta^m \cdot \varepsilon^{-k} \quad (5.13)$$

$$\geq M_2 \lambda^{k-2m-1} \exp(-\lambda^2/[2\tilde{r}^2]) \cdot p^{-k} \cdot (\ln \lambda)^{-k/2} \quad (5.14)$$

(5.12) vient de (5.11), (5.13) se vérifie à la main et est vraie dès que $\lambda^2 > 1/2$ on utilise également la minoration de n donnée en (5.9). Enfin (5.14) est obtenue en remplaçant δ et ε par

leurs valeurs en fonction de λ .

Etape 2 : Majoration de (B) :

Une application directe du lemme (5.3) - après réduction des variables - nous donne pour tout i et tout j :

$$\mathbb{P} [G_{x_i} > \lambda, G_{x_j} > \lambda] \leq M \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{\bar{r}^2(1 + \rho_{i,j})} \right) \quad (5.15)$$

Pour majorer la double somme, nous allons majorer chacun de ses termes en minorant le coefficient de corrélation $\rho_{i,j}$.

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - \|x_i - x_j\|^2}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \right)$$

Or on sait que par définition de \bar{r} et par l'hypothèse H1, $\bar{r} - \delta < \|x_i\| < \bar{r}$, et par l'hypothèse H2 $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$. Donc en appliquant les définitions de ε et de δ on a :

$$\rho_{i,j} \leq \frac{2\bar{r}^2 - \varepsilon^2}{2(\bar{r} - \delta)^2} \leq \frac{1 - \frac{p^2}{2} \lambda^{-2} \ln \lambda}{1 - \lambda^{-2}} \quad (5.16)$$

En utilisant (5.16) (5.15) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [G_{x_i} > \lambda, G_{x_j} > \lambda] &\leq M_3 \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2(1 - \lambda^{-2})}{2\bar{r}^2(1 - \frac{\lambda^{-2}}{2} - \frac{1}{4}p^2\lambda^{-2}\ln\lambda)} \right) \\ &\leq M_3 \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2(1 - \lambda^{-2})}{2\bar{r}^2(1 - \frac{1}{4}p^2\lambda^{-2}\ln\lambda)} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\leq M_3 \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2(1 - \lambda^{-2})(1 + \frac{1}{4}p^2\lambda^{-2}\ln\lambda)}{2\bar{r}^2} \right) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} &\leq M_3 \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} + \frac{1}{2\bar{r}^2} - \frac{p^2\ln\lambda}{8\bar{r}^2} + \frac{\lambda^{-2}\ln\lambda}{8\bar{r}^2} \right) \\ &\leq M_4 \lambda^{-1} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \exp \left(-\frac{p^2\ln\lambda}{8\bar{r}^2} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\leq M_5 \lambda^{-1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right)$$

(5.18) est vraie pour λ grand en effectuant un développement limité. (5.19) est valide puisque pour λ grand, les termes $\frac{1}{2\bar{r}^2}$ et $\frac{\lambda^{-2}\ln\lambda}{8\bar{r}^2}$ sont négligeables devant les deux autres.

En utilisant l'hypothèse du lemme on obtient :

$$\begin{aligned} (B) &\leq n^2 M_5 \lambda^{-1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \\ &\leq M_5 \lambda^{-1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \cdot (N_0 + a_1 \varepsilon^{-k_1})^2 \\ &\leq M_5 \lambda^{-1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \cdot (N_0 + a_1 \cdot \bar{r}^{-k_1} \cdot p^{-k_1} \cdot (\ln \lambda)^{-k_1/2} \cdot \lambda^{k_1})^2 \\ &\leq M_5 \lambda^{-1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \cdot p^{-2k_1} \cdot (\ln \lambda)^{-k_1} \cdot \lambda^{2k_1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\leq M_5 p^{-2k_1} \lambda^{2k_1 - 1 - \frac{p^2}{8\bar{r}^2}} (\ln \lambda)^{-k_1} \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\bar{r}^2} \right) \quad (5.21)$$

(5.20) vient du fait que, pour λ grand, N_0 est négligeable devant les autres termes .

En comparant les relations (5.14) et (5.21), on voit qu'en prenant p assez grand, ce dernier est négligeable devant le premier ce qui démontre le lemme. ◀

5.2.2 Démonstration de la borne inférieure (5.1)

le processus G vérifie un encadrement de type (5.9) Ce résultat est suffisant pour montrer la borne inférieure.

Lemme 5.5 *Il existe $\Delta \leq \bar{r}$ tel que pour tout $\delta < \Delta$ on ait :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad k(T, H) \sqrt{\delta} \varepsilon^{-\frac{1}{H}} \leq \mathcal{N}^+(\bar{r} - \delta, \varepsilon) \leq k'(T, H) \varepsilon^{-\frac{1}{H}} + N(T)$$

où k, k', N ne dépendent que de H et T .

On remarque que comme $H < 1$, on a $2 \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{H}$.

Démonstration :

Première étape : la borne supérieure

Partant du principe qu'il faut d'autant plus de boules pour recouvrir un espace d'autant plus grand, il nous suffit de montrer que, puisque $T^+(\bar{r} - \delta) \subset T$, l'on a :

$$\mathcal{N}^+(\bar{r} - \delta, \varepsilon) \leq \mathcal{N}(T, \varepsilon) \leq k'(T, H) \varepsilon^{-\frac{1}{H}} + N(T)$$

Considérons $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid [n, n+1[\cap T \neq \emptyset\}$. T est borné donc \mathcal{A} est fini et on a :

$$\mathcal{N}(T, \varepsilon) \leq \sum_{\mathcal{A}} \mathcal{N}([n, n+1[, \varepsilon)$$

D'autre part, la fonction q définie en (5.6) page 57 est croissante sur \mathbb{R}^+ par conséquent le terme $(t-s)(q(t)-q(s))$ de (5.5) est positif et on a pour tout entier n et tout $(s, t) \in [n, n+1]^2$:

$$d(s, t)^2 \leq \frac{|t-s|^{2H}}{(1+t)(1+s)} \leq \frac{|t-s|^{2H}}{(n+1)^2}$$

Si $|t-s| \leq (\varepsilon(n+1))^{\frac{1}{H}}$ alors $d(s, t) \leq \varepsilon$. Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_d([n, n+1[, \varepsilon) &\leq \mathcal{N}_{\lfloor \cdot \rfloor}([n, n+1[, (\varepsilon(n+1))^{\frac{1}{H}}) \\ &\leq \left\lceil \frac{1}{2(\varepsilon(n+1))^{\frac{1}{H}}} \right\rceil + 1 \\ &\leq \frac{1}{2(\varepsilon(n+1))^{\frac{1}{H}}} + 1 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière, (5.22) vient du fait qu'il faut $\lceil \frac{1}{2r} \rceil + 1$ boules de rayon r pour recouvrir un intervalle de longueur 1 . En sommant sur \mathcal{A} on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T, \varepsilon) &\leq \sum_{\mathcal{A}} \frac{1}{2(\varepsilon(n+1))^{\frac{1}{H}}} + \sum_{\mathcal{A}} 1 \\ &\leq k'(T, H) \varepsilon^{-\frac{1}{H}} + N(T) \end{aligned}$$

Deuxième étape : la borne inférieure

Par un développement limité à l'ordre 2 de r au voisinage de \tilde{t} on montre que :

$$r(\tilde{t} + h) = r(\tilde{t}) - \frac{h^2}{C_1^2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \quad \text{avec} \quad C_1 = \sqrt{2}H^{\frac{1-H}{2}}(1-H)^{\frac{H-4}{2}} \quad (5.23)$$

Rappelons que $\mathcal{N}^+(\tilde{r} - \delta, \varepsilon) = \mathcal{N}(T_{\tilde{r}-\delta}^+, \varepsilon)$ avec :

$$T_{\tilde{r}-\delta}^+ = \{t \in T \mid r(t) > \tilde{r} - \delta\}$$

Soit $x = \tilde{t} + h$,

$$\begin{aligned} x \in T_{\tilde{r}-\delta}^+ &\iff r(\tilde{t} + h) > \tilde{r} - \delta \\ &\iff \tilde{r} - \frac{h^2}{C_1^2} + o_{h \rightarrow 0}(h^2) > \tilde{r} - \delta \\ &\iff h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) < C_1^2 \delta \end{aligned} \quad (5.24)$$

On peut trouver δ_0 suffisamment petit pour que quelque soit h tel que $|h| < C_1 \sqrt{\delta}$ et donc $x \in T_{\tilde{r}-\delta}^+$. en d'autres termes,

$$\exists \delta_0, \forall \delta < \delta_0, \quad T_{\tilde{r}-\delta}^+ =]\tilde{t} - k \sqrt{\delta}, \tilde{t} + k \sqrt{\delta}[\quad (5.25)$$

La fonction q est croissante, sa dérivée est continue sur \mathbb{R}^+ et vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} q'(t) = 0 = q'(0)$ donc il existe une constante C telle que $q'(t) \leq C \quad \forall t \geq 0$. La formule de Mac-Laurin appliquée à q assure l'existence de $u \in (s, t)$ telle que :

$$0 \leq (t-s)(q(t) - q(s)) = (t-s)^2 q'(u) \leq C(t-s)^2$$

Or $2 - 2H > 0$ donc

$$C \cdot \frac{(t-s)^2}{|t-s|^{2H}} \xrightarrow{|t-s| \rightarrow 0} 0$$

Donc pour tout $\eta > 0$ il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\delta > \delta_1$ et tout $(s, t) \in [\mathbb{R}^+]^2$, $|t-s| < \delta$ on ait :

$$d(s, t)^2 \geq \frac{|t-s|^{2H}}{(1+s)(1+t)}(1-\eta) \quad (5.26)$$

D'autre part, pour tout $(s, t) \in]\tilde{t} - C_1 \sqrt{\delta}, \tilde{t} + C_1 \sqrt{\delta}[^2$, on a :

$$(1+s)(1+t) \leq (1 + \tilde{t} + C_1 \sqrt{\delta})^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} (1 + \tilde{t})^2$$

On peut donc choisir $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $\delta < \delta_2$ on ait :

$$(1+s)(1+t) \leq (2 + \tilde{t})^2$$

On prend $\eta = \frac{1}{2}$ et on pose $\Delta = \min(\delta_0, \frac{\delta_1^2}{4C_1^2}, \delta_2)$. Pour tout $\delta < \Delta$ on a, comme $\delta < \delta_2$, pour tout $(s, t) \in [T_{\tilde{r}-\delta}^+]^2$, $(s, t) \in]\tilde{t} - C_1 \sqrt{\delta}, \tilde{t} + C_1 \sqrt{\delta}[^2$ par (5.25) et par conséquent :

$$|t-s| < 2C_1 \sqrt{\delta} < 2C_1 \sqrt{\Delta} < 2C_1 \sqrt{\frac{\delta_1^2}{4C_1^2}} < \delta_1$$

et donc par (5.26) on a

$$d(s, t)^2 \geq \frac{|t - s|^{2H}}{2(1+s)(1+t)}$$

et comme $\delta < \delta_2$ on a finalement :

$$d(s, t)^2 \geq \frac{|t - s|^{2H}}{2(2 + \tilde{t})^2}$$

Considérons $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} d(s, t) < \varepsilon &\implies \frac{1}{2} \frac{|t - s|^{2H}}{(2 + \tilde{t})^2} < \varepsilon^2 \\ &\implies |t - s| < [2\varepsilon^2(2 + \tilde{t})^2]^{\frac{1}{2H}} \end{aligned}$$

De cette égalité on déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+(\tilde{r} - \delta, \varepsilon) &= \mathcal{N}_d([\tilde{t} - C_1 \sqrt{\delta}, \tilde{t} + C_1 \sqrt{\delta}], \varepsilon) \\ &\geq \mathcal{N}_{|\cdot|}([\tilde{t} - C_1 \sqrt{\delta}, \tilde{t} + C_1 \sqrt{\delta}], [2\varepsilon^2(2 + \tilde{t})^2]^{\frac{1}{2H}}) \\ &\geq \left\lceil \frac{2C_1 \sqrt{\delta}}{[2\varepsilon^2(2 + \tilde{t})^2]^{\frac{1}{2H}}} \right\rceil + 1 \\ &\geq 2 C_1 \sqrt{\delta} \frac{1}{[2\varepsilon^2(2 + \tilde{t})^2]^{\frac{1}{2H}}} \varepsilon^{-\frac{1}{H}} \\ &\geq k(H, T) \sqrt{\delta} \varepsilon^{-\frac{1}{H}} \end{aligned}$$

D'où le résultat escompté. ◀

Conclusion Le lemme 5.5 assure que nous sommes bien sous les hypothèses d'application du lemme 5.4 avec $k_1 = k = \frac{1}{H}$ et $m = \frac{1}{2}$. Par conséquent on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \lambda \right] \geq M \lambda^{\frac{1}{H}-1-1} (\ln \lambda)^{-\frac{1}{2H}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}^2}\right)$$

On rappelle que $\xi = C^H x^{1-H}$ et que $H < 1$. D'autre part, on pose $\kappa = C^H \tilde{r}^{-1}$. Considérons x suffisamment grand (où ξ suffisamment grand) pour avoir le résultat (5.4) page 57. On peut écrire :

$$\mathbb{P}[V > x] = \mathbb{P} \left[\sup_{t > 0} G_t > \xi \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in T} G_t > \xi \right]$$

En appliquant le résultat du lemme 5.2 on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V > x] &\geq M_1 \xi^{\frac{1}{H}-1-1} (\ln \xi)^{-\frac{1}{2H}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tilde{r}^2}\right) \\ &\geq M_1 \xi^{\frac{1}{H}-1} (\ln \xi)^{-\frac{1}{2H}} \bar{\Phi}\left(\frac{\xi}{\tilde{r}}\right) \\ &\geq M_2 x^{\frac{(1-H)^2}{H}} (\ln(\kappa \tilde{r} x^{1-H}))^{-\frac{1}{2H}} \bar{\Phi}(\kappa x^{1-H}) \end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat voulu. ◀

5.3 La borne supérieure

5.3.1 Quelques lemmes Préliminaires

Considérons $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^+$ et posons $\tilde{r}_{\mathcal{C}} = \sup_{t \in \mathcal{C}} \left[\sqrt{\mathbb{E}[G_t^2]} \right]$.

Lemme 5.6 *Supposons l'existence d'un $\tilde{r}_0 < \tilde{r}_{\mathcal{C}}$ tel que pour tout $\tilde{r}_0 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq \tilde{r}_{\mathcal{C}}$ et tout $\varepsilon > 0$ on ait l'existence de constantes non-négatives a , N_0 , k et m avec $k \geq 2m$ telles que :*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) \leq a\varepsilon^{-k} (\delta_2 - \delta_1)^m + N_0 \quad (5.27)$$

Alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$ et pour $K > 0$ une constante non-négative on ait :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathcal{C}} G_t > \lambda \right] \leq K \lambda^{k-2m-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_{\mathcal{C}}^2}\right)$$

Pour démontrer ce lemme, nous allons utiliser le résultat suivant issu de l'article [122] de Samorodnitsky :

Lemme 5.7 (Samorodnitsky [122] pages 64-65) *Supposons qu'il existe des constantes positives a, k, N_0 telles que :*

$$\mathcal{N}(\mathcal{C}, \varepsilon) \leq a\varepsilon^{-k} + N_0$$

Alors il existe des constantes λ_1 , K_2 , K_3 telles que, pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathcal{C}} G_t > \lambda \right] \leq N_0 K_2 \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_{\mathcal{C}}^2}\right) + a K_3 \lambda^{-k-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_{\mathcal{C}}^2}\right)$$

Démonstration :

Pour un certain $\lambda > 0$ que nous choisirons ultérieurement, nous allons poser :

$$n = n(\lambda) = \lceil \lambda^2(\tilde{r}_{\mathcal{C}}^2 - \tilde{r}_1^2) \rceil \quad \text{avec} \quad \tilde{r}_0 < \tilde{r}_1 < \tilde{r}_{\mathcal{C}}.$$

Posons alors :

$$\delta_i^2 = \tilde{r}_{\mathcal{C}}^2 - (n-i)\lambda^{-2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Premier point :

Nous avons vu au paragraphe 5.1.2 que le problème est localisable à un voisinage compact de \tilde{t} ; pour continuer notre étude, nous allons donc localiser le problème sur un voisinage particulier à savoir $\mathcal{C}_{\tilde{r}_1}^+$.

Comme nous avons, pour λ suffisamment grand $\tilde{r}_0 < \delta_0 \leq \tilde{r}_1$ et que $\delta_n = \tilde{r}_{\mathcal{C}}$, nous avons donc la relation suivante :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathcal{C}_{\tilde{r}_1}^+} G_t > \lambda \right] \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left[\sup_{t \in \mathcal{C}_{\delta_i}^+ \cap \mathcal{C}_{\delta_{i-1}}^-} G_t > \lambda \right] \quad (5.28)$$

Dans la suite nous noterons $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_{\delta_i}^+ \cap \mathcal{C}_{\delta_{i-1}}^-$.

Deuxième point :

Les conditions sont réunies pour appliquer le lemme 5.7 pour chaque \mathcal{A}_i . Ce lemme va nous donner, pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, des constantes λ_1^i, K_2^i et K_3^i telles que pour tout $\lambda > \lambda_1^i$ on ait :

$$\mathbb{P} \left[\text{Sup}_{t \in \mathcal{A}_i} G_t > \lambda \right] \leq N_0 K_2^i \lambda^{-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}\right) + a K_3^i \lambda^{k-1} (\delta_i - \delta_{i-1})^m \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}\right) \quad (5.29)$$

Posons maintenant $\lambda_1^* = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} \lambda_1^i, K_2^* = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} K_2^i$ et $K_3^* = \text{Max}_{i=1,2,\dots,n} K_3^i$.

Troisième point :

Remarquons que l'on a, par la croissance de la suite δ :

$$\begin{aligned} \delta_i(\delta_i - \delta_{i-1}) &\leq \delta_i^2 - \delta_{i-1}^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \\ \delta_i - \delta_{i-1} &\leq \frac{1}{\lambda^2 \delta_i} \leq \frac{4}{R} \lambda^{-2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Conclusion intermédiaire :

On conclue maintenant qu'en vertu de (5.28), de (5.29) et de (5.30), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\text{Sup}_{t \in \mathcal{C}_{\tilde{r}_1}^+} G_t > \lambda \right] &\leq \\ N_0 K_2^* \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}\right) &+ a K_3^* \lambda^{k-2m-1} \left(\frac{4}{\tilde{r}_c}\right)^m \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}\right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Quatrième point :

Pour estimer la somme qui figure dans (5.31), il suffit de remarquer qu'en posant $a_i = \exp(-\lambda^2/2\delta_i^2)$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a_i}{a_{i-1}} &= \exp(-\lambda^2/2\delta_i^2 + \lambda^2/2\delta_{i-1}^2) \\ &= \exp(1/2\delta_i^2 \delta_{i-1}^2) \\ &\leq \exp(1/2\tilde{r}_c^4) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Conclusion :

En remarquant que l'on a une série géométrique de premier terme $e^{-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_c^2}}$ et de raison majorée par (5.32), on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2\delta_i^2}} \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_c^2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{2\tilde{r}_c^4}}}$$

Finalement, nous avons le résultat voulu pour λ grand. En effet, comme $k > 2m$, le second terme de (5.31) domine le premier. Et on a :

$$\mathbb{P} \left[\text{Sup}_{t \in \mathcal{C}_{\tilde{r}_1}^+} G_t > \lambda \right] \leq K \lambda^{k-2m-1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\tilde{r}_c^2}\right)$$

◀

5.3.2 Démonstration de la borne supérieure (5.2)

Le processus G vérifie un encadrement de type (5.27) Ce résultat est suffisant pour montrer la borne supérieure.

Lemme 5.8 *Il existe $\Delta > 0$ tel que pour tout δ_1, δ_2 tels que $\delta_2 - \delta_1 < \Delta$ on ait :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{N}(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) \leq a \sqrt{\delta_2 - \delta_1} \varepsilon^{-\frac{1}{H}} + N_0$$

où a, N_0 sont des constantes (indépendantes de δ et ε).

Démonstration :

Considérons

$$\tilde{T} = T_{\delta_1}^+ \cap T_{\delta_2}^- = \{t \in T : \delta_1 < r(t) \leq \delta_2\}$$

Un raisonnement analogue à celui effectué pour obtenir la relation (5.23) nous permet ici de dire qu'il existe Δ suffisamment petit tel que, pour tout (δ_2, δ_1) , $|\delta_2 - \delta_1| < \Delta$ on ait :

$$\tilde{T} = \underbrace{] \tilde{t} - k\sqrt{\delta_2}, \tilde{t} - k\sqrt{\delta_1} [}_{\text{Intervalle de longueur } k(\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1})} \cup \underbrace{] \tilde{t} + k\sqrt{\delta_1}, \tilde{t} + k\sqrt{\delta_2} [}_{\text{Intervalle de longueur } k(\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1})} \quad (5.33)$$

De ce résultat, on déduit que l'on a la relation suivante :

$$\mathcal{N}(\tilde{T}, \varepsilon) \leq \mathcal{N}(] \tilde{t} - k\sqrt{\delta_2}, \tilde{t} - k\sqrt{\delta_1} [, \varepsilon) + \mathcal{N}(] \tilde{t} + k\sqrt{\delta_1}, \tilde{t} + k\sqrt{\delta_2} [, \varepsilon)$$

Nous allons utiliser la relation suivante qui découle de la définition de d donnée en (5.5) :

$$d^2(s, t) \leq \frac{|t - s|^{2H}}{(1 + s)(1 + t)} \leq |t - s|^{2H}$$

En vertu de celle-ci, le nombre de d -boules de rayon ε nécessaires pour recouvrir l'intervalle disons $] \tilde{t} - k\sqrt{\delta_2}, \tilde{t} - k\sqrt{\delta_1} [$ est inférieur au nombre de $| \cdot |$ -boules de rayon $\varepsilon^{\frac{1}{H}}$ nécessaires pour recouvrir un intervalle de longueur $\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1}$. Comme on a :

$$(\sqrt{\delta_2} - \sqrt{\delta_1})^2 < (\sqrt{\delta_2} - \delta_1)^2$$

Le nombre de $| \cdot |$ -boules de rayon $\varepsilon^{\frac{1}{H}}$ nécessaires pour recouvrir un intervalle de longueur $\sqrt{\delta_2} - \delta_1$ est :

$$\left\lceil \frac{\sqrt{\delta_2} - \delta_1}{2\varepsilon^{\frac{1}{H}}} \right\rceil + 1$$

Il est possible de faire exactement la même chose pour l'autre intervalle, on obtient alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tilde{T}, \varepsilon) &\leq 2 \left\lceil \frac{\sqrt{\delta_2} - \delta_1}{2\varepsilon^{\frac{1}{H}}} \right\rceil + 2 \\ &\leq \sqrt{\delta_2 - \delta_1} \varepsilon^{-\frac{1}{H}} + 2 \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. ◀

Conclusion La démonstration de la borne supérieure (5.2) se montre exactement de la même manière que la borne inférieure démontrée au paragraphe précédent.

Chapitre 6

Résultat de Häussler et Piterbarg

La question initiée par Norros et Massoulié Simonian a trouvé une réponse par l'article de Häussler et Piterbarg [74]. Dans cet article on donne un équivalent asymptotique (quand $u \rightarrow \infty$) de l'instant de premier passage d'un seuil u par un mouvement Brownien fractionnaire avec dérive non linéaire. Les outils sont très proches de ceux utilisés par Simonian et sont principalement basés sur le caractère Gaussien du mouvement Brownien fractionnaire. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 6.1 *Soient $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}^+\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $0 < H < 1$, b et d deux constantes positives avec $b > H$.*

On a l'équivalent suivant :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \geq 0} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} D u^{(1-H/b)(1-H)/H} \bar{\Phi}(E u^{1-H/b}) \quad (6.1)$$

avec $D = D(H, d, b)$ et $E = E(H, d, b)$ des constantes positives.

Remarque 6.1 *On remarque facilement que lorsque $b = 1$, Häussler et Piterbarg retrouvent - et améliorent - le résultat de Massoulié-Simonian dans le sens où l'équivalent n'est plus logarithmique.*

6.1 Préliminaires

6.1.1 La constante H_{2H} de Pickands

Propriété et Définition 6.1 (Piterbarg [111] pages 18-19) *On considère le processus défini par $\{\chi_t^H = \sqrt{2}B_t^H - t^{2H} : t \in \mathbb{R}^+\}$.*

Étant donnés deux réels $0 < H < 1$ et $T > 0$, nous pouvons définir :

$$H_{2H}(T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(\max_{0 \leq t \leq T} \chi_t^H \right) \right] \quad \text{et} \quad H_{2H} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_{2H}(T)}{T} \quad (6.2)$$

Le résultat central est que H_{2H} existe et $0 < H_{2H} < \infty$.

6.1.2 La notion de stationnarité locale

Définition 6.1 Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ est dit localement stationnaire au voisinage de s_0 s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $D > 0$ telles que :

$$\lim_{s \rightarrow s_0, t \rightarrow s_0} \frac{\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2]}{|t - s|^\alpha} = D > 0$$

6.1.3 Le résultat central

Le résultat suivant est la clé de voûte pour démontrer le théorème 6.1 :

Théorème 6.2 Soit $\{X_t, t \in [0, T]\}$ un processus Gaussien centré à trajectoires continues. Nous noterons s^2 la fonction définie par $t \rightarrow \mathbb{E}[X_t^2]$ et r la fonction de corrélation. Supposons qu'il vérifie les conditions suivantes :

1. Unicité du maximum de s^2 :

La fonction s^2 atteint son maximum en un unique $t_0 \in]0, T[$ et $s(t_0) = 1$.

2. Comportement de la variance :

Il existe deux constantes $a > 0$ et $\beta > 0$ telles que :

$$s(t) = 1 - a|t - t_0|^\beta \left(1 + o_{t \rightarrow t_0}(1)\right)$$

3. Stationnarité locale en t_0 :

Il existe une constante α telle que :

$$r(t, s) = 1 - |t - s|^\alpha \left(1 + o_{t \rightarrow t_0, s \rightarrow t_0}(1)\right)$$

4. Régularité :

Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $G > 0$ telles que :

$$\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] \leq G|t - s|^\gamma$$

Sous ces hypothèses, nous avons, selon le comportement relatif de s et r , les équivalents suivants :

- Si $\alpha < \beta$, alors

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0, T]} X_t > u \right] = \frac{2H_\alpha \Gamma(1/\beta)}{\beta a^{1/\beta}} \bar{\Phi}(u) u^{2/\alpha - 2/\beta} (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

- Si $\alpha = \beta$, alors

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0, T]} X_t > u \right] = 2 H_\alpha^a \bar{\Phi}(u) (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

- Si $\alpha > \beta$, alors

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0, T]} X_t > u \right] = \bar{\Phi}(u) (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

Démonstration :

Elle sera discutée au paragraphe 6.3.2, la démonstration complète se situe dans Piterbarg [111] pages 19-20.



6.2 Démonstration de 6.1

L'idée est d'appliquer le théorème 6.2. Bien que les hypothèses 1 et 2 soient vérifiées par $\{Y_t^H = \frac{B_t^H}{t^H} : t \in \mathbb{R}^+\}$ le mouvement Brownien fractionnaire normalisé, ce n'est pas le cas des hypothèses 3 et 4. On va donc avoir recours à un processus intermédiaire \tilde{G}^b défini page 69.

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

Etape 1 : \tilde{G}^b vérifie les hypothèses du théorème 6.2,

Etape 2 : On localise le problème pour se ramener à un intervalle compact (le théorème 6.2 n'est valable quand dans ce cas),

Etape 3 : On compare \tilde{G}^b avec $\{B_t^H - dt^b : t \in \mathbb{R}^+\}$,

Etape 4 : On conclue.

Etape 1 Pour simplifier les calculs, nous allons introduire le processus suivant :

$$\left\{ G_t^b = \frac{B_t^H}{1 + dt^b} : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (6.3)$$

Lemme 6.1 *Considérons la fonction s^b définie par $s^b(t) = \sqrt{\mathbb{E}[[G_t^b]^2]}$. Cette fonction atteint son maximum en un unique $t_0^b \in \mathbb{R}^+$. De plus, nous avons le développement suivant :*

$$s^b(t) = s_0^b - \frac{s_0^{b,2}}{2}(t - t_0^b)^2 + o_{t \rightarrow t_0^b}((t - t_0^b)^2) \quad (6.4)$$

avec s_0^b et $s_0^{b,2}$ deux constantes positives à définir.

Démonstration :

On a :

$$s^b(t) = \frac{t^H}{1 + dt^b}$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}^+ . Après calcul de la dérivée et de la dérivée seconde, on peut dire que la dérivée s'annule une seule fois en :

$$t_0^b = \left[\frac{H}{d(b - H)} \right]^{\frac{1}{b}}$$

On note alors :

$$s_0^b \stackrel{\text{not}}{=} s^b(t_0^b) = \left[\frac{H}{d(b - H)} \right]^{\frac{H}{b}} \frac{b - H}{b} \quad (6.5)$$

$$s_0^{b,2} \stackrel{\text{not}}{=} [s^b]''(t_0^b) = \left[\frac{H}{d(b - H)} \right]^{\frac{H-2}{b}} \frac{H(b - H)^2}{b} \quad (6.6)$$

Le développement (6.4) en découle trivialement. ◀

Le processus G^b défini par (6.3) ne vérifie pas les hypothèses du théorème 6.2 pour des problèmes de constantes. Il nous suffit de faire un changement de temps c'est à dire de définir le processus \tilde{G}^b suivant :

$$\left\{ \tilde{G}_t^b = \frac{1}{s_0^b} G^b \left(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t \right) : t \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (6.7)$$

On notera respectivement \tilde{s}^b et \tilde{r}^b les fonctions de variance et de corrélation du processus \tilde{G}^b .

Lemme 6.2 *Considérons*

$$\tilde{t}_0^b = 2^{-\frac{1}{2H}}$$

Le processus \tilde{G}^b vérifie les hypothèses du théorème 6.2 à savoir :

(MU) \tilde{s}^b atteint son maximum en \tilde{t}_0^b et $\tilde{s}^b(\tilde{t}_0^b) = 1$.

(CV)

$$\tilde{s}^b(t) = 1 - \frac{1}{2} \tilde{a}(t - \tilde{t}_0^b)^2 + o_{t \rightarrow \tilde{t}_0^b}(t^2) \quad (6.8)$$

avec $\tilde{a} = \tilde{a}(b, H)$ une constante positive à définir.

(CC)

$$\tilde{r}^b(t, s) = 1 - |t - s|^{2H} + o_{t \rightarrow \tilde{t}_0^b, s \rightarrow \tilde{t}_0^b}(|t - s|^{2H}) \quad (6.9)$$

(R)

$$\mathbb{E} \left[(\tilde{G}^b(t) - \tilde{G}^b(s))^2 \right] \leq G|t - s|^{2H} \quad (6.10)$$

Démonstration :

Par construction, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{s}^b(t) &= \frac{1}{s_0^b} s^b \left(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t \right) \\ [\tilde{s}^b]'(t) &= \frac{2^{\frac{1}{2H}} t_0^b}{s_0^b} [s^b]' \left(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t \right) \\ [\tilde{s}^b]''(t) &= \frac{2^{\frac{1}{H}} [t_0^b]^2}{s_0^b} [s^b]'' \left(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t \right) \end{aligned}$$

On applique en $\tilde{t}_0^b = 2^{-\frac{1}{2H}}$ on a alors $2^{\frac{1}{2H}} t_0^b \tilde{t}_0^b = t_0^b$ et donc :

$$\tilde{s}^b(\tilde{t}_0^b) = \frac{1}{s_0^b} s_0^b = 1 \quad (6.11)$$

$$[\tilde{s}^b]'(\tilde{t}_0^b) = \frac{2^{\frac{1}{2H}} t_0^b}{s_0^b} [s^b]'(t_0^b) = 0 \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{s}^b]''(\tilde{t}_0^b) &= \frac{2^{\frac{1}{H}} [t_0^b]^2}{s_0^b} s_0^{b,2} \\ &= 2^{\frac{1}{H}} H(b - H) = \tilde{a} \end{aligned} \quad (6.13)$$

(MU) Il ne s'agit que de la multiplication par une constante positive ce qui ne modifie pas la monotonie de la fonction. (6.12) montre que \tilde{s}^b atteint son maximum en \tilde{t}_0^b et en plus on a (6.11).

(CV) Découle directement des relations (6.11), (6.12) et (6.13).

(CC) Étant donné $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[(Y_{t_0^b+h} - Y_{t_0^b})^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{B_{t_0^b+h}^H}{(t_0^b+h)^H} - \frac{B_{t_0^b}^H}{(t_0^b)^H} \right)^2 \right] \\
&= \frac{2[t_0^b(t_0^b+h)]^H - (t_0^b)^{2H} - (t_0^b+h)^{2H} + h^{2H}}{[t_0^b(t_0^b+h)]^H} \\
&= \frac{|h|^{2H} - ((t_0^b)^H - (t_0^b+h)^H)^2}{[t_0^b(t_0^b+h)]^H} \\
&= \underbrace{\left(\frac{h}{t_0^b} \right)^{2H} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{t_0^b} \right)^H}}_{(A)} - \underbrace{\frac{(t_0^b)^{2H} \left(1 - \left(1 + \frac{h}{t_0^b} \right)^H \right)^2}{(t_0^b)^{2H} \cdot \left(1 + \frac{h}{t_0^b} \right)^H}}_{(B)}
\end{aligned}$$

Par développement limité, nous avons, pour h petit :

$$\begin{aligned}
(A) &= \left(\frac{h}{t_0^b} \right)^{2H} (1 + o_{h \rightarrow 0}(1)) \\
(B) &= \frac{H^2}{(t_0^b)^2} h^2 (1 + o_{h \rightarrow 0}(1))
\end{aligned}$$

Comme $2H < 2$, nous avons le résultat suivant :

$$\mathbb{E} \left[(Y_{t_0^b+h} - Y_{t_0^b})^2 \right] = h^{2H} [t_0^b]^{-2H} (1 + o_{h \rightarrow 0}(1))$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}[Y_t Y_s] = 1 - \frac{1}{2} [t_0^b]^{-2H} |t-s|^{2H} (1 + o_{t \rightarrow t_0^b, s \rightarrow t_0^b}(1))$$

On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}
\hat{r}^b(t, s) &= \mathbb{E} \left[Y(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t) Y(2^{\frac{1}{2H}} t_0^b s) \right] \\
&= 1 - \frac{1}{2} [t_0^b]^{-2H} |2^{\frac{1}{2H}} t_0^b t - 2^{\frac{1}{2H}} t_0^b s|^{2H} (1 + o_{t \rightarrow \bar{t}_0^b, s \rightarrow \bar{t}_0^b}(1)) \\
&= 1 - \frac{1}{2} [t_0^b]^{-2H} (2^{\frac{1}{2H}} t_0^b)^{2H} |t-s|^{2H} (1 + o_{t \rightarrow \bar{t}_0^b, s \rightarrow \bar{t}_0^b}(1)) \\
&= 1 - |t-s|^{2H} (1 + o_{t \rightarrow \bar{t}_0^b, s \rightarrow \bar{t}_0^b}(1))
\end{aligned}$$

(R) La vérification de cette hypothèse n'est pas évidente du tout (contrairement à ce qu'affirme Piterbarg et Hüßler dans [74]). Cependant, dans cet article, il est clairement explicité que pour avoir ce résultat il suffit d'avoir la condition (R') suivante au lieu de (R) :

$$\mathbb{E}[(G_t^b - G_s^b)^2] \leq G |t-s|^{2H} \quad \text{avec } t, s \geq \delta \quad \forall \delta > 0 \quad (6.14)$$

La démonstration de (6.14) n'est pas triviale non plus et repose sur la stationnarité locale de G^b . Je vous renvoie à la démonstration donnée dans l'exemple (1) de [74] pages 268-269.

Ce qui termine la démonstration. ◀

Etape 2 : Comparaison des processus

Lemme 6.3 Soit $T > 0$, considérons $\tilde{u} = u^{1-H/b}$ on a alors :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \geq 0} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{s \geq 0} G_s^b > \tilde{u} \right] \quad (6.15)$$

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, T]} G_s^b > \tilde{u} \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T 2^{-1/(2H)} t_0^b]} \tilde{G}_t^b > \frac{1}{s_0^b} \tilde{u} \right] \quad (6.16)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} (B_t^H - ct^b) \geq u &\iff \exists t \geq 0, B_t^H > ct^b + u \\ &\iff \exists t \geq 0, B_t^H > u(1 + dt^b u^{-1}) \\ &\iff \exists s \geq 0, B_{s u^{1/b}}^H > u(1 + ds^b) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\iff \exists s \geq 0, \frac{B_s^H}{(1 + ds^b)} > u^{1-H/b} \quad (6.18)$$

(6.17) s'obtient par changement de variable $s^b = t^b u^{-1}$. L'auto-similarité entraine (6.18) ce qui prouve (6.15).

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, T]} G_s^b \geq \tilde{u} &\iff \exists s \in [0, T], G_s^b \geq \tilde{u} \\ &\iff \exists s \in [0, T], s_0^b \tilde{G}^b \left(\frac{s}{2^{-1/(2H)} t_0^b} \right) > \tilde{u} \\ &\iff \exists t \in [0, T 2^{-1/(2H)} t_0^b], \tilde{G}^b(t) > \frac{\tilde{u}}{s_0^b} \end{aligned}$$

ce qui prouve (6.16). ◀

Etape 3 : Localisation du problème

Lemme 6.4 Il existe un entier T tel que :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \geq 0} G_s^b \geq \tilde{u} \right] \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} G_s^b > \tilde{u} \right] \quad (6.19)$$

Démonstration :

Nous allons subdiviser l'intervalle $]T, \infty[$ en intervalles de longueur 1. Sur chacun de ces intervalles $I_k = [k, k + 1]$, avec $k \geq T$, on a :

$$\frac{\tilde{u}(1 + ds^b)}{s^H} \geq \frac{\tilde{u}(1 + dk^b)}{k^H}$$

Par conséquent, nous avons par continuité des trajectoires :

$$\begin{aligned} \sup_{s > T} G_s^b \geq \tilde{u} &\iff \exists s \in [0, T], Y_s > \frac{\tilde{u}(1 + ds^b)}{s^H} \\ &\implies \exists k > T, \exists s \in I_k, Y_s > \frac{\tilde{u}(1 + ds^b)}{s^H} \\ &\implies \exists k > T, \exists s \in I_k, Y_s > \frac{\tilde{u}(1 + dk^b)}{k^H} \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s>T} G_s^b \geq \tilde{u} \right) \leq \sum_{k \geq T} \mathbb{P} \left[\sup_{s \in I_k} Y_s > \frac{\tilde{u}(1 + dk^b)}{k^H} \right]$$

Le lemme de Fernique 13.3 nous donne deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{s \in I_k} Y_s > \frac{\tilde{u}(1 + ck^b)}{k^H} \right] &\leq C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 \left[\frac{1 + dk^b}{k^H} \right]^2 \right) \\ &\leq C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 k^{2(b-H)} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{s>T} G_s^b \geq \tilde{u} \right] &\leq \sum_{k \geq T} C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 k^{2(b-H)} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq T+1} C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 k^{2(b-H)} \right) \\ &\quad + C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 T^{2(b-H)} \right) \\ &\leq \int_T^\infty \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 t^{2(b-H)} \right) dt \\ &\quad + C_1 \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 T^{2(b-H)} \right) \end{aligned} \tag{6.20}$$

En utilisant le théorème d'intégration de relation de comparaison pour des intégrales convergentes aux fonctions :

$$f : t \rightarrow \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 t^{2(b-H)} \right) \quad \text{et} \quad g : t \rightarrow C_2 \tilde{u}^2 d^2 (1 - t^{2(b-H)}) \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 t^{2(b-H)} \right)$$

Elles vérifient $f = \underset{t \rightarrow \infty}{O} (g)$ donc on a $\int_T^\infty f(t) dt = \underset{T \rightarrow \infty}{O} \left(\int_T^\infty g(t) dt \right)$. Par conséquent il existe une constante C_3 et un entier T_0 tels que, pour tout entier $T > T_0$ on ait :

$$\int_T^\infty \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 t^{2(b-H)} \right) dt \leq C_3 \tilde{u}^{-2} T^{1-2(b-H)} \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 T^{2(b-H)} \right)$$

et donc

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s>T} G_s^b \geq \tilde{u} \right] \leq \underbrace{\exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 T^{2(b-H)} \right) \left[C_1 + C_3 \tilde{u}^{-2} T^{1-2(b-H)} \right]}_{(BS)} \tag{6.21}$$

Nous allons maintenant montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a :

$$(BS) = \underset{u \rightarrow \infty}{o} \left(\tilde{u}^p \exp \left(-\frac{\tilde{u}^2}{2[s_0^b]^2} \right) \right) \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{(BS)}{\tilde{u}^p \exp \left(-\frac{\tilde{u}^2}{2[s_0^b]^2} \right)} &= \frac{C_1 + C_3 \tilde{u}^{-2} T^{1-2(b-H)}}{\tilde{u}^p} \exp \left(-C_2 \tilde{u}^2 d^2 T^{2(b-H)} + \frac{\tilde{u}^2}{2[s_0^b]^2} \right) \\ &= \frac{C_1 + C_3 \tilde{u}^{-2} T^{1-2(b-H)}}{\tilde{u}^p} \exp \left(-\tilde{u}^2 \left(C_2 T^{2(b-H)} + \frac{1}{2[s_0^b]^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme on sait que $b > H$, on peut trouver un entier $T_1 > T_0$ tel que, pour tout $T > T_1$, on ait :

$$C_2 T^{2(b-H)} + \frac{1}{2[s_0^b]^2} > 0$$

Il est donc maintenant évident que pour tout p , on a :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(BS)}{\tilde{u}^p \exp(-\frac{\tilde{u}^2}{2[s_0^b]^2})} = 0$$

Ce qui prouve (6.22).

Nous allons maintenant montrer que :

$$(BS) = \underset{u \rightarrow \infty}{o} \left(\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} G_s^b > \tilde{u} \right] \right) \quad (6.23)$$

Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout T suffisamment grand pour que $t_0^b \in [0, T]$:

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} G_s^b > \tilde{u} \right] \geq \mathbb{P} \left[G_{t_0^b}^b > \tilde{u} \right] \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\tilde{u}}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2[s_0^b]^2}) dt \\ &\underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2[s_0^b]^2 \tilde{u}} \exp(-\frac{\tilde{u}^2}{2[s_0^b]^2}) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Le résultat découle du recouplement des résultats (6.24), (6.22) et (6.25). ◀

Etape 4 : Conclusion On remarque que comme $H > b$, $\tilde{u} \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow \infty$. Ensuite, les relations (6.15) et (6.16) couplées avec la relation (6.19) nous autorisent à écrire :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \geq 0} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T 2^{-1/(2H)} t_0^b]} \tilde{G}_t^b > \frac{1}{s_0^b} \tilde{u} \right]$$

Mais le lemme 6.2 nous dit que l'on peut appliquer à \tilde{G}^b le théorème 6.2 avec $\beta = 2$ et $\alpha = 2H$ ($\alpha < \beta$) ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{t \geq 0} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] &\underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2H_{2H} \Gamma(1/2)}{2\sqrt{\frac{1}{2} \tilde{a}}} \bar{\Phi} \left(\frac{\tilde{u}}{s_0^b} \right) \left(\frac{\tilde{u}}{s_0^b} \right)^{\frac{1}{H}-1} \\ &\underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_{2H} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tilde{a}}} [s_0^b]^{1-\frac{1}{H}} u^{(1-\frac{H}{b})(\frac{1}{H}-1)} \bar{\Phi} \left(\frac{\tilde{u}}{s_0^b} \right) \end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu avec :

$$\begin{aligned} D(H, d, b) &= \frac{H_{2H} \sqrt{2\pi}}{2^{\frac{1}{2H}} \sqrt{H(b-H)}} \left[\frac{H}{d(b-H)} \right]^{\frac{H-1}{b}} \left[\frac{b-H}{b} \right]^{\frac{H-1}{H}} \\ E(H, d, b) &= \frac{1}{s_0^b} = \left[\frac{H}{d(b-H)} \right]^{-\frac{H}{b}} \frac{b}{b-H} \end{aligned}$$
◀

6.3 Quelques éléments de démonstration du théorème 6.2

6.3.1 Le cas des processus stationnaires

Si le processus est stationnaire, nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.3 (Piterbarg [111] Théorème D.2. page 16) *Soit $\{S_t, t \in [0, T]\}$ un processus gaussien stationnaire centré de fonction de corrélation r tel que :*

•

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o_{t \rightarrow 0}(|t|^\alpha)$$

•

$$r(t) < 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

Alors, pour tout $p \leq T$ on a :

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0, p]} B_t^H > u \right] = H_\alpha p u^{2/\alpha} \bar{\Phi}(u) \left[1 + o_{u \rightarrow \infty}(1) \right] \quad (6.26)$$

Démonstration :

La démonstration est très technique et est une application de la méthode des doubles sommes de Pickands. L'idée consiste à encadrer $\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0, p]} S_t > u \right]$. La majoration est une conséquence de la stationnarité et du lemme de Borel 13.2 page 183. La minoration quant à elle vient de la relation d'inclusion-exclusion classique. On obtient alors une somme double dont on majore les différents termes au moyen du lemme de Borel.

◀

6.3.2 Idée de la démonstration du théorème 6.2 à partir du théorème 6.3

Si le processus n'est que localement stationnaire, les choses deviennent encore plus techniques. Donnons néanmoins les étapes du raisonnement :

- On localise le problème à un voisinage \mathcal{V} de t_0 .
- On introduit la famille de processus indexée par $p \in \mathbb{R}^+$ et $q \in \mathbb{R}^+$ suivante :

$$\tilde{S}_t = \frac{\Sigma_t}{1 + p|t|^\beta} \quad t \in \mathcal{V} \quad (6.27)$$

où $\{\Sigma_t : t \in \mathcal{V}\}$ est un processus Gaussien Stationnaire centré de fonction de covariance $t \rightarrow \exp(-q|t|^\alpha)$.

Le lemme de Slépian 13.1 page 183 permet la comparaison de \tilde{S} et X .

- On applique le théorème 6.3 au processus Σ
- On obtient un encadrement en choisissant des valeurs adaptées de p et q pour conclure : Pour tout $\varepsilon > 0$ petit, on peut choisir, \tilde{S}_ε^+ correspondant aux paramètres $p = a + \varepsilon$ et $q = 1 + \varepsilon$ ainsi que \tilde{S}_ε^- correspondant aux paramètres $p = a - \varepsilon$ et $q = 1 + \varepsilon$.

Le lemme de Slépian s'applique alors (\tilde{S} a été construit pour) et nous donne :

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in \mathcal{V}} \tilde{S}_\varepsilon^+(t) > u \right] \geq \mathbb{P} \left[\max_{t \in \mathcal{V}} X_t > u \right] \geq \mathbb{P} \left[\max_{t \in \mathcal{V}} \tilde{S}_\varepsilon^-(t) > u \right]$$

On achève alors la démonstration en avançant l'arbitraire de ε et le fait que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-p|t|^\beta) dt = \Gamma(1/\beta) \cdot \frac{1}{\beta p^{1/\beta}}$$

6.4 Comportement en horizon fini

La question posée dans ce paragraphe est l'existence d'un équivalent du même type quand on travaille en horizon fini c'est à dire pour $t \in [0, T]$. La réponse est partiellement donnée par Duncan et *al.* dans [52] sous certaines conditions. Dans ce paragraphe, nous allons donner un équivalent logarithmique dans un cadre beaucoup plus large que celui de Duncan et *al.* puis énoncerons le résultat principal de l'article concernant l'équivalent en donnant les grandes étapes de la démarche.

6.4.1 Un équivalent logarithmique

Théorème 6.4 Avec les notations du théorème 6.1 on a :

$$\bar{\Phi} \left(\frac{u + dT}{T^H} \right) \leq \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] \leq D T \bar{\Phi} \left(\frac{u + dT}{T^H} \right)$$

avec $D = D(H, d, b)$ une constante positive.

Par conséquent on a l'équivalent logarithmique suivant :

$$\text{Ln} \left[\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] \right] \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(\frac{u + dT}{T^H} \right)^2$$

Démonstration :

La borne inférieure

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] \geq \sup_{t \in [0, T]} \left(\mathbb{P} [(B_t^H - dt^b) \geq u] \right) \geq \sup_{t \in [0, T]} \bar{\Phi} \left(\frac{u + dt^b}{t^H} \right)$$

La fonction $\phi : t \rightarrow t^{-H}(u + dt^b)$ se dérive en $\phi' : t \rightarrow t^{-H+1}(dt^b(H-b) - u^H)$ qui s'annule en $\hat{t} = \left[\frac{u^H}{d(b-H)} \right]^{\frac{1}{b}}$ ϕ est donc décroissante sur $[0, \hat{t}]$ et comme $\hat{t} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \infty$, pour u suffisamment grand pour que $\hat{t} > T$, ϕ est donc décroissante sur $[0, T]$ et donc :

$$\sup_{t \in [0, T]} \bar{\Phi} \left(\frac{u + dt^b}{t^H} \right) \geq \sup_{t \in [0, T]} \bar{\Phi} \left(\frac{u + dT^b}{T^H} \right)$$

La borne supérieure On va faire appel au lemme suivant :

Lemme 6.5 Soit $\{X_t : t \in [0, T]\}$ un processus Gaussien à trajectoires continues sur $[0, T]$. On suppose la condition (R') page 71 satisfaite. Il existe alors une constante $D = D(G, \gamma, T)$ telle que, pour tout $A \subset [0, T]$ et tout $u > 0$ on ait :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in A} X_t \geq u \right] \leq D.T.u^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \bar{\Phi} \left(\frac{u}{\sigma(A)} \right)$$

avec $\sigma(A) = \sqrt{\sup_{t \in A} \mathbb{E}[X_t^2]}$.

Démonstration du lemme :

On fait référence au théorème 8.1 page 119 de Piterbarg [111] avec la condition (R) au lieu de (R'). Pour la justification de ce remplacement, on se réfère encore aux remarques des pages 263, 268 et 269 de l'article de Piterbarg Hüßler [74].

◀

Démonstration :

Nous avons déjà montré que l'on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt^b) \geq u \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} \frac{B_t^H}{u + dt^b} \geq 1 \right]$$

Nous avons déjà évoqué page 71 que le processus G^b satisfait la condition (R') avec $\gamma = 2H$ il en est de même du processus

$$\left\{ G_t^{b,u} = \frac{B_t^H}{u + dt^b} : t \in [0, T] \right\}$$

En copiant la démonstration de Piterbarg et Hüßler, on a donc le résultat avec $A = [0, T]$. La variance de $G^{b,u}$ n'est autre que $\frac{1}{\phi}$ étudiée au paragraphe précédent et qui est croissante sur $[0, T]$ pour u suffisamment grand. On a donc le résultat.

L'équivalent Découle naturellement de l'équivalent de $\bar{\Phi}$.

◀

6.4.2 Un équivalent

Duncan et *al.* ont montré dans [52] le résultat suivant pour un mouvement Brownien fractionnaire avec dérive linéaire :

Théorème 6.5 Pour $\frac{1}{2} < H < 1$ on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt) \geq u \right] = \bar{\Phi} \left(\frac{u + dT}{T^H} \right) (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

Démonstration :

Comme nous l'avons déjà remarqué, on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} (B_t^H - dt) \geq u \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, \frac{T}{u}]} G_t^1 \geq u^{1-H} \right]$$

Le théorème repose sur des techniques "à la Piterbarg" et notamment sur les trois lemmes suivants :

Lemme 6.6 (Localisation, [52] proposition 1 page 939) Pour tout $\delta = u^{-p_1}$ avec $1 < p_1 < 3$ on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, \frac{T}{u}]} G_t^1 \geq u^{1-H} \right] = \mathbb{P} \left[\sup_{\frac{T}{u} - \delta < s < \frac{T}{u}} G_s^1 \geq u^{1-H} \right] (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

Lemme 6.7 (Un processus stationnaire auxiliaire, [52] proposition 2 page 940) On considère Σ introduit page 75 avec $0 < q < 2H$. On introduit le processus suivant :

$$\left\{ Y_s^u = \frac{\left(\frac{T}{u}\right)^H}{\left[1 + d\left(\frac{T}{u}\right)\right] \left[1 + \left(\frac{T}{u} - s\right)\right]} \Sigma_s : s \in \left[0, \frac{T}{u}\right] \right\}$$

Alors, pour tout $\delta = u^{-p_2}$ avec $p_2 > \frac{2}{q}$ on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, \frac{T}{u}]} Y_t^u \geq u^{1-H} \right] = \bar{\Phi} \left(\frac{u + dT}{T^H} \right) (1 + o_{u \rightarrow \infty}(1))$$

Lemme 6.8 (Comparaison des processus, [52] proposition 3 page 941) Pour tout $\delta = u^{-p_3}$ avec $p_3 > \frac{2H}{2H-q}$ on a :

$$\mathbb{P} \left[\sup_{\frac{T}{u} - \delta < s < \frac{T}{u}} G_s^1 \geq u^{1-H} \right] \geq \mathbb{P} \left[\sup_{\frac{T}{u} - \delta < s < \frac{T}{u}} Y_s^u \geq u^{1-H} \right]$$

Le théorème est alors démontré en prenant p_1, p_2 et p_3 égaux à p et q satisfaisant donc les inégalités des lemmes c'est à dire :

$$1 < p < 3 \quad p > \frac{p}{2} \quad p > \frac{2H}{2H-q} \quad 0 < q < 2H \quad (6.28)$$

Pour ce faire, Duncan et al. proposent, pour $\frac{1}{2} < H < 1$ le jeu de paramètres :

$$q = \frac{1+2H}{3} \quad p = \frac{3(3+2H)}{2(1+1H)}$$

◀

Remarque 6.2 On peut en fait voir que l'hypothèse $\frac{1}{2} < H < 1$ est nécessaire puisqu'elle découle des inégalités (6.28). En effet, on a :

$$\begin{aligned} 1 < p < 3 \quad \text{et} \quad 2 < pq < 2Hq - 2H \\ 1 < p < 3 \quad \text{et} \quad 1 < Hq - H \\ \frac{1+H}{H} < p < 3 \\ 3H > 1 + H \end{aligned}$$

et donc $H > \frac{1}{2}$.

Troisième partie

Existence et bicontinuité d'un temps local

Chapitre 7

A propos du temps Local du Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence d'une version continue du temps local $(t, x) \rightarrow L^X(t, x)$ défini comme densité du temps d'occupation d'un processus Gaussien X dans l'état x sur la période $[0, t]$. L'objectif est d'appliquer ce résultat au mouvement Brownien fractionnaire. Le résultat central est le suivant :

Théorème 7.1 *Soit $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}^+\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $0 < H < 1$.*

- B^H admet un temps local

$$(t, x) \rightarrow L^H(t, x)$$

- $(t, x) \rightarrow L^H(t, x)$ est une application continue \mathbb{P} -p.s.

Ce chapitre s'articule de la manière suivant :

Dans une première partie, nous allons décrire les deux problématiques qui nous ont conduit à l'étude du temps local du mouvement Brownien fractionnaire. La première consiste à se demander quels sont les temps d'arrêt T qui vérifient $\mathbb{E}[B_T^H] = 0$ et la seconde à regarder ce qu'est le mouvement Brownien fractionnaire en échelle temps local. Dans le cas Brownien Ordinaire, ces questions donnent des résultats intéressants notamment pour caractériser des processus (voir les théorèmes 7.3 et 7.2). Malheureusement, ces réponses reposent massivement sur la propriété de Markov fort et nous n'avons pas trouvée d'alternative pour le cas Brownien fractionnaire.

Dans une seconde partie, nous allons nous intéresser au temps local. Le théorème 7.1 est dû à Berman dans ces nombreux travaux sur le temps local [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. L'effort est fait ici pour recentrer le problème sur le mouvement Brownien fractionnaire.

7.1 Le mouvement Brownien fractionnaire et les temps d'arrêt

7.1.1 Que devient le MBF en échelle temps local ?

Dans le cadre des processus de Markov et plus précisément du mouvement Brownien, il est très intéressant de se placer en, ce qu'il est habituel d'appeler, "échelle temps local". En effet le théorème ci-dessous affirme que les diffusions et les processus de naissance et de mort peuvent être obtenus à partir d'un mouvement Brownien en échelle temps local. Développons un peu ce résultat :

Propriété et Définition 7.1 ([116] Proposition 3.1 page 278)

Soit X un processus de Markov continu à valeurs dans E un intervalle ouvert de $]l, r[\subset \mathbb{R}$. On note $T_x = \text{Inf}\{s \geq 0 : X_s = x\}$. Alors il existe une fonction s strictement croissante continue sur E et telle que, pour tout $l < a < x < b < r$ on ait :

$$\mathbb{P}_x [T_b < T_a] = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}$$

s est unique à une transformation affine près.

La fonction s est appelée fonction d'échelle de X et on appellera un processus en échelle naturelle un processus pour lequel s est l'identité.

Propriété et Définition 7.2 ([116] Proposition 3.6 page 282)

Soit X un processus de Markov continu à valeurs dans E de fonction d'échelle s et soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de E . La fonction de Green est définie par :

$$G_I^X(x, y) = \frac{(s(x) - s(a))(s(b) - s(y))}{s(b) - s(a)} \mathbb{I}_{[a \leq x \leq y \leq b]} + \frac{(s(y) - s(a))(s(b) - s(x))}{s(b) - s(a)} \mathbb{I}_{[a \leq y \leq x \leq b]}$$

Il existe une unique mesure de Radon m à support dans E telle que

$$\mathbb{E}_x [T_a \wedge T_b] = \int_{\mathbb{R}} G_I^X(x, y) m(dy)$$

m est appelée la mesure de vitesse du processus X .

Soit m une mesure de Radon sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de support E . Pour $y \in E$ et $\omega \in \Omega$ fixés, on définit :

$$A_{y, \omega}(t) = \frac{1}{2} \int_E L^{\frac{1}{2}}(t, x - y)(\omega) m(dx) \quad \text{pour tout } t > 0,$$

$$A_{y, \omega}(0) = 0.$$

On considère ensuite la famille de temps d'arrêt $\{\tau_t = \text{Inf}\{s \geq 0 : A_s > t\} : t \geq 0\}$ et le processus $\{Y_t = B_{\tau_t} + y : t \geq 0\}$.

Théorème 7.2 ([131] Théorème 3.11 page 25)

1. Si E est un intervalle, alors $(Y, (\mathfrak{F}_{\tau_t})_{t \geq 0}, \mathbb{P}_y, y \in E)$ est un processus de Markov fort, continu sur E , en échelle naturelle, de mesure de vitesse m et tel que $Y_0 = y$.
2. Si E est un ensemble dénombrable formé de points isolés, alors $(Y, (\mathfrak{F}_{\tau_t})_{t \geq 0}, \mathbb{P}_y, y \in E)$ est un processus de naissance et de mort, en échelle naturelle, de mesure de vitesse m .

La question que nous nous sommes posée est : que devient le théorème 7.2 quand on remplace le mouvement Brownien par un mouvement Brownien fractionnaire ? Nous n'avons malheureusement pas trouvé de réponse à cette question mais elle nous a amenés à l'étude du temps local du mouvement Brownien fractionnaire objet du paragraphe 7.4 ainsi qu'à l'étude du temps de sortie des intervalles. Dans le cas Brownien, la distribution de ce temps d'arrêt est connue puisque la distribution du supremum d'un Brownien est connue (principe de réflexion [116, proposition 3.7 page 100]). Dans le cas fractionnaire, le supremum du mouvement Brownien fractionnaire est mal connu on peut cependant écrire, en utilisant l'auto-similarité :

Propriété 7.1 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :*

$$T_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left[\frac{x}{Z^*} \right]^{\frac{1}{H}} \quad \text{avec} \quad Z^* = \sup_{u \in [0,1]} B_u^H$$

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_x \leq t] &= \mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0,t]} B_s^H \geq x \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{u \in [0,1]} B_{tu}^H \geq x \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\sup_{u \in [0,1]} B_u^H \geq \frac{x}{t^H} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[Z^* \geq \frac{x}{t^H} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\left[\frac{x}{Z^*} \right]^{\frac{1}{H}} \leq t \right] \end{aligned}$$

◀

7.1.2 Quels sont les temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{E}[X_T] = 0$?

Théorème 7.3 ([116] Proposition 3.5 page 67) *Soit $\{M_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus càdlàg. Soit \mathcal{T}_b l'ensemble des martingales bornées.*

M est une martingale si et seulement si pour tout $T \in \mathcal{T}_b$, on a $X_T \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}[X_T] = 0$.

Le mouvement Brownien fractionnaire n'étant pas une martingale il est naturel de se demander pour quelle famille \mathcal{T}_0 de temps d'arrêt on a $\mathbb{E}[B_T^H] = 0$ pour tout $T \in \mathcal{T}_0$. Là encore très peu de réponses. Bien sûr, les temps d'arrêt constants sont dans \mathcal{T}_0 mais on a aussi :

Propriété 7.2 *Considérons \mathcal{T}_s l'ensemble des temps de sortie d'intervalles symétriques du type $[-a, a]$ noté $T_{[-a,a]}$. On a :*

$$\mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_0$$

La démonstration résulte du fait que les processus $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}^+\}$ et $\{-B_t^H : t \in \mathbb{R}^+\}$ ont même loi.

Les efforts pour construire un espace \mathcal{T}_0 convenables furent vains. La piste des quasi-martingales introduites par Hu et Øksendal [68] n'a pas été développée.

7.2 Préliminaires sur le temps local

7.2.1 Cas d'une fonction mesurable

Définition 7.1 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On appelle temps d'occupation de f en x la fonction :

$$F : x \mapsto \int_0^1 \mathbb{I}_{[f(t) \leq x]} dt \quad (7.1)$$

On remarque que F est une fonction de répartition. Si F est absolument continue, sa dérivée au sens de Radon-Nikodym, Φ sera appelée temps local de f . On a alors pour tout $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 g(f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) \Phi(x) dx$$

Remarque 7.1 Il est intéressant de se restreindre à un intervalle de temps $[0, t]$ avec $t \in [0, 1]$. On définit alors le temps d'occupation de f en x sur $[0, t]$ et si elle existe une notion de temps local $(x, t) \rightarrow \Phi(x, t)$.

Théorème 7.4 Si F a une fonction caractéristique \mathcal{L}^2 , alors F est absolument continue et sa dérivée est \mathcal{L}^2 .

Pour montrer l'existence du temps local, l'outil est le théorème d'inversion de la fonction caractéristique :

Lemme 7.1 (Shiryaev [127] Théorème 3, page 281.) Soit F une fonction de répartition et \hat{F} sa fonction caractéristique :

$$\hat{F}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x)$$

Alors :

a) Pour tout a, b points de continuité de la fonction F , on a :

$$F(b) - F(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it} \hat{F}(t) dt \quad (7.2)$$

b) Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(u)| dt < \infty$, alors F a une densité Φ et on a pour tout x réel :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \hat{F}(u) du \quad (7.3)$$

et Φ est continue presque partout.

Démonstration :

Posons

$$\begin{aligned} S : \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \hat{F}(-u) du \end{aligned}$$

\hat{g} désigne la transformée de Fourier de g . Outre la linéarité, on a :

$$|S(g)|^2 \leq \|\hat{g}\|_2^2 \|\hat{F}\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{F}\|_2^2 \|g\|_2^2$$

Le théorème de représentation nous assure l'existence d'une fonction $\Phi \in \mathcal{L}^2$ telle que :

$$S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \Phi(u) du \quad (7.4)$$

Pour montrer que Φ est la dérivée de F , on dit que, par Parseval :

$$S(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \hat{\Phi}(u) du \quad (7.5)$$

On prend $g = \mathbb{I}_{[a,b]}$ avec a et b des points de continuité de F , on a :

$$\hat{g}(u) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{2\pi i u}$$

On a alors, par la relation (7.4) et par définition de S :

$$S(g) = \int_a^b \Phi(u) du \quad (7.6)$$

$$S(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iub} - e^{iua}}{2\pi i u} \hat{F}(-u) du \quad (7.7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iub} - e^{-iua}}{i u} \hat{F}(u) du \quad (7.8)$$

On applique maintenant le résultat (7.2) du lemme 7.1 qui nous assure que la relation (7.7) n'est autre que $F(b) - F(a)$. On obtient donc pour tout point a et b de continuité de F :

$$\int_a^b \Phi(u) du = S(g) = F(b) - F(a) \quad (7.9)$$

Mais comme Φ est \mathcal{L}^2 , elle est \mathcal{L}^1 sur tout intervalle borné. Par conséquent, comme on a (7.9), F ne peut être discontinue et donc on a :

$$\int_a^b \Phi(u) du = F(b) - F(a) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Ce qui démontre le résultat. ◀

Corollaire 7.1 *Si on a la condition sur f suivante :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \exp(iuf(t)) dt \right|^2 du < \infty$$

Alors il existe un temps local Φ , et Φ est \mathcal{L}^2 et si on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \exp(iuf(t)) dt \right| du < \infty$$

Alors il existe un temps local Φ , et Φ est continue.

Démonstration :

Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 7.4 et de la relation :

$$\hat{F}(u) = \int_0^1 \exp(iuf(t)) dt \quad (7.10)$$

Le second point découle aussi du théorème 7.4 mais la condition plus forte imposée à f a pour conséquence l'existence d'une version continue de Φ .



Dans le cas d'un temps local du type $(x, t) \rightarrow \Phi(x, t)$, on a la propriété fondamentale suivante qui nous donne un critère d'existence du temps local :

Propriété 7.3 • Si $x \rightarrow \Phi(x, 1)$ existe alors $x \rightarrow \Phi(x, t)$ existe pour tout $t \in [0, 1]$.
 • Pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$, $s < t$ on a $\Phi(x, s) \leq \Phi(x, t)$ pour presque tout x .

7.2.2 Cas d'un processus stochastique

Définition 7.2 Soient $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé et $\{X_t : t \in [0, 1]\}$ un processus stochastique mesurable et séparable. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on peut définir le processus temps d'occupation de $] -\infty, x]$ par X de la manière suivante :

$$F(x, \omega) = \int_0^1 \mathbb{I}_{[X_t(\omega) \leq x]} dt \quad (7.11)$$

Si $F(\cdot, \omega)$ est absolument continue, sa dérivée (au sens de Radon Nikodym) $\Phi(\cdot, \omega)$ sera appelée processus temps local de X .

Théorème 7.5 Si l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[\exp[iu(X_t - X_s)]] ds dt \right| du < \infty \quad (7.12)$$

Alors on a \mathbb{P} -presque sûrement :

- F est absolument continue,
- Φ existe,
- Φ est \mathcal{L}^2 .

Démonstration :

La condition (7.12) implique que :

$$\mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \exp[iuX_t] dt \right|^2 du \right] < \infty$$

condition qui implique que, pour \mathbb{P} -presque tout ω , la fonction caractéristique en x de $F(\cdot, \omega)$ est \mathcal{L}^2 . La conclusion est alors une application du théorème 7.4.



7.3 La question de la bicontinuité

Dans ce paragraphe, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et un processus stochastique mesurable et séparable $\{X_t : t \in [0, 1]\}$. On notera F le temps d'occupation par X de $] -\infty, x]$ et Φ le temps local associé (on se place dans les conditions du paragraphe précédent, Φ existe).

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, x, t) \rightarrow \int_0^t \mathbb{I}_{[X_s(\omega) \leq x]} ds \quad \text{et} \quad F(\omega, x, t) = \int_{-\infty}^x \Phi(\omega, u, t) du$$

Pour définir Φ comme un processus stochastique, il faut qu'il soit mesurable en (ω, x, t) ce qui n'est pas le cas avec la définition ci-dessus - le presque sûr dépendant de x et t . Pour avoir un

tel résultat, il suffit de prouver la séparabilité et la bicontinuité de Φ .

Nous allons en fait construire le temps local en quatre étapes :

1. Introduire - après avoir donné un critère d'existence (théorème 7.6) - le processus Ψ :

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \int_0^t e^{iuX_s} ds du \quad (7.13)$$

2. Montrer qu'il existe une version mesurable de Ψ (théorème 7.6),
3. Montrer que si Ψ est bicontinue alors $\Psi = \Phi$ et c'est la dérivée du temps d'occupation (théorème 7.7),
4. Enfin, on donnera des outils pour montrer la bicontinuité de Ψ (paragraphe 7.3.3).

7.3.1 Existence de Ψ

Théorème 7.6 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, on définit la suite de variables aléatoires suivante :*

$$\left\{ \Psi_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{-iux} \int_0^t e^{iuX_s} ds du \quad n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad (7.14)$$

Si l'hypothèse suivante est satisfaite :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbb{E}[\exp[iuX_s + ivX_{s'}]]| ds ds' du dv < \infty \quad (7.15)$$

Alors on a,

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 1]$, il existe une variable aléatoire $\Psi(x, t)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [(\Psi_n - \Psi)^2] = 0 \quad \text{et ce uniformément en } (x, t). \quad (7.16)$$

- *Il existe une version séparable du processus stochastique Ψ .*

Démonstration :

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, t) - \Psi_m(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{-m} \exp(-iux) \int_0^t \exp(iuX_s) ds du \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_m^n \exp(-iux) \int_0^t \exp(iuX_s) ds du \end{aligned}$$

En appliquant la relation $|x + y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$ nous obtenons la relation :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Psi_n(x, t) - \Psi_m(x, t)|^2] &\leq \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\mathbb{E} \left[\left| \int_{-n}^{-m} \exp(-iux) \int_0^t \exp(iuX_s) ds du \right|^2 \right]}_{(A)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \underbrace{\mathbb{E} \left[\left| \int_m^n \exp(-iux) \int_0^t \exp(iuX_s) ds du \right|^2 \right]}_{(B)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$(A) \leq \mathbb{E} \left[\left| \int_{-n}^{-m} \int_0^t \exp(-iux) \exp(iuX_s) ds du \right|^2 \right] \\ \leq \mathbb{E} \left[\int_{-n}^{-m} \int_{-n}^{-m} \int_0^1 \int_0^1 \exp(-i(v+u)x) \exp(iuX_s + ivX_{s'}) du dv ds ds' \right]$$

On utilise maintenant l'hypothèse (7.15) qui nous permet d'intervertir l'ordre d'intégration et donc de majorer (A) :

$$|(A)| \leq \int_{-n}^{-m} \int_{-n}^{-m} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbb{E}[\exp(iuX_s + ivX_{s'})]| du dv ds ds'$$

On obtient une relation similaire pour (B) en changeant les bornes d'intégration en x . En vertu de l'hypothèse (7.15), les intégrales (A) et (B) convergent vers 0 (uniformément en (x, t)). Nous avons donc montré que la suite de fonctions $\{\Psi_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est de Cauchy dans l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$. La suite converge donc vers une fonction Ψ elle aussi \mathbb{L}^2 et ce uniformément en (x, t) .

Pour montrer le second point, il suffit d'appliquer le théorème fondamental de la séparabilité [48] p.57.

◀

7.3.2 Si Ψ est bicontinue alors $\Psi = \Phi$

Théorème 7.7 *Si les trajectoires du processus Ψ est continu en (x, t) \mathbb{P} -ps, alors Ψ est \mathbb{P} -ps la dérivée du temps d'occupation de X .*

Démonstration :

L'application

$$x \rightarrow \frac{1}{2\pi} \exp(-iux) \int_0^t \exp(iuX_s) ds$$

est continue en x pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent, Ψ_n est une fonction continue de x comme intégrale sur un domaine borné d'une fonction continue. Par conséquent $\int_a^b \Psi_n(u, t) du$ existe pour tout intervalle fini $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Comme l'intégrale existe, on peut donc appliquer le théorème de Fubini et obtenir ainsi :

$$\int_a^b \Psi_n(u, t) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \int_a^b \exp(-iux) dx \int_0^t \exp(iuX_s) ds du$$

On est maintenant en mesure d'appliquer la relation (7.2) du théorème d'inversion en tout (a, b) où F est continue c'est à dire en tout (a, b) puisque F est absolument continue. On obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Psi_n(u, t) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \frac{e^{-iub} - e^{-iua}}{-iu} \int_0^t \exp(iuX_s) ds du \\ = F(b, t) - F(a, t) \quad (7.17)$$

et ce \mathbb{P} -presque sûrement.

Remarque 7.2 *Le problème est que l'ensemble des ω où (7.17) est vraie est certes négligeable mais susceptible de dépendre de l'intervalle $[a, b]$.*

D'une part, l'application $x \rightarrow \Psi_n(x, \omega)$ est continue et bornée (par $\frac{n}{\pi}$), l'application $x \rightarrow \mathbb{E} [|\Psi_n(x)|^2]$ est donc continue. D'autre part, la relation (7.16) nous assure que $\mathbb{E} [|\Psi(x)|^2] < \infty$ et l'application $x \rightarrow \mathbb{E} [|\Psi(x)|^2]$ est continue et donc intégrable sur tout intervalle fini. Par Fubini, nous avons :

$$\int_a^b \mathbb{E} [|\Psi(x)|^2] dx = \mathbb{E} \left[\int_a^b |\Psi(x)|^2 dx \right]$$

De cette relation, on conclut que $\int_a^b |\Psi(x)|^2 dx < \infty$ \mathbb{P} -p.s.

On a donc montré que $x \rightarrow \Psi(x, \omega)$ est de carré intégrable sur tout $[a, b]$ \mathbb{P} -p.s. Ce qui implique que $x \rightarrow \Psi(x, \omega)$ est absolument intégrable sur tout $[a, b]$ \mathbb{P} -p.s. Et donc, on a \mathbb{P} -p.s., $x \rightarrow \Psi(x, \omega)$ est absolument intégrable sur tout $[a, b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| F(b, \omega) - F(a, \omega) - \int_a^b \Psi(x, \omega) dx \right| \\ & \leq \underbrace{\left| F(b, \omega) - F(a, \omega) - \int_a^b \Psi_n(x, \omega) dx \right|}_{(A)} + \underbrace{\left| \int_a^b \Psi_n(x, \omega) dx - \int_a^b \Psi(x, \omega) dx \right|}_{(B)} \end{aligned}$$

D'une part, on a (7.17) et donc (A) tend vers 0 \mathbb{P} -p.s. et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} (B)^2 & \leq \left[\int_a^b |\Psi_n(x, \omega) dx - \Psi(x, \omega)| dx \right]^2 \\ & \leq \int_a^b |\Psi_n(x, \omega) dx - \Psi(x, \omega)|^2 dx \cdot \int_a^b 1 dx \\ \mathbb{E} [(B)^2] & \leq |b - a| \mathbb{E} \left[\int_a^b |\Psi_n(x, \omega) dx - \Psi(x, \omega)|^2 dx \right] \\ & \leq |b - a| \int_a^b \mathbb{E} [|\Psi_n(x, \omega) dx - \Psi(x, \omega)|^2] dx \end{aligned}$$

La dernière étape découle de Fubini puisque l'intégrale est définie. Il ne reste plus qu'à faire intervenir la relation (7.16) pour conclure à la convergence vers 0 \mathbb{P} -p.s. de (B). On a donc montré que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(b, t, \omega) - F(a, t, \omega) = \int_a^b \Psi(u, t, \omega) du \quad (7.18)$$

Pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$. Il nous reste maintenant à montrer que le " \mathbb{P} -presque sûrement" ne dépend pas ni de a , ni de b , ni de x .

Du résultat (7.18) et en appliquant le théorème de Fubini, on montre que, pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, l'équation (7.18) est vérifiée pour presque tout (a, b) . Nous savons également que

pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $\Psi(\cdot, \omega)$ est absolument continue sur tout intervalle fini. Ainsi cette intégrale indéfinie est une fonction absolument continue. On sait aussi que, par hypothèse, $F(\cdot, \omega)$ est absolument continue pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$. Par conséquent, pour \mathbb{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, les deux membres de l'égalité (7.18) sont déterminés pour tout (a, b) à partir du moment où ils le sont pour presque tout (a, b) ce qui est le cas en vertu du résultat (7.18). ◀

7.3.3 Des outils pour prouver la continuité jointe de Ψ

Pour montrer que Ψ est bicontinue, nous allons utiliser le théorème suivant qui est une généralisation au cas bidimensionnel du critère de Kolmogorov :

Théorème 7.8 (Berman [16] Théorème 5.1 page 1266) *Soit $\{\Psi(t, s) : (t, s) \in [0, 1]^2\}$ un processus stochastique séparable stochastiquement continu. S'il existe des constantes m, C, ε telles que :*

- $\mathbb{E}[|\Psi(s+h, \tau) - \Psi(s, \tau)|^m] \leq C|h|^{1+\varepsilon}$
avec $(s, s+h) \in [0, 1]^2$ et $\tau = 0$ et 1.
- $\mathbb{E}[|\Psi(\sigma, t+h') - \Psi(\sigma, t)|^m] \leq C|h'|^{1+\varepsilon}$
avec $(t, t+h') \in [0, 1]^2$ et $\sigma = 0$ et 1.
- $\mathbb{E}[|\Psi(s+h, t+h') - \Psi(s+h, t) - \Psi(s, t+h') - \Psi(s, t)|^m] \leq C|hh'|^{1+\varepsilon}$
avec $(s, s+h, t, t+h') \in [0, 1]^4$.

Alors Ψ est continue \mathbb{P} -p.s.

Pour démontrer la bicontinuité, il suffit donc de majorer le moment d'ordre m où m est un entier strictement supérieur à 1 de la quantité :

$$Q_{x,t}^{h,h'} = \Psi(x+h, t+h') - \Psi(x+h, t') - \Psi(x, t+h') + \Psi(x, t)$$

par une expression en $(hh')^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$. Il est facile de montrer la propriété suivante :

Propriété 7.4 *Pour tout t, x, h, h' , nous avons le résultat suivant :*

$$\mathbb{E}\left[|Q_{x,t}^{h,h'}|^m\right] \leq \frac{h^{m\delta}}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{M_{t,h'}^m} |v_m|^\delta \prod_{j=1}^{m-1} |v_j - v_{j+1}|^\delta \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^m v_j (X_{s_j} - X_{s_{j-1}})}\right]}_{(A)} \left(\prod_{j=1}^m ds_j\right) \left(\prod_{j=1}^m dv_j\right) \quad (7.19)$$

où $M_{t,h'}^m$ est le domaine défini par :

$$\{(t_1, \dots, t_m) | t < t_1 < \dots < t_m < t + h'\} \quad (7.20)$$

Démonstration :

Ce sont des considérations de calcul intégral. ◀

La difficulté réside maintenant dans la majoration de la quantité (A). Les choses sont relativement simples dans le cas d'un processus Gaussien à accroissements indépendants. Mais en vue de l'application au mouvement Brownien fractionnaire, il nous faut plus de généralité. Pour obtenir ces résultats, nous allons introduire la propriété d'accroissements localement indépendants (ALI).

7.3.4 Cas des Processus Gaussien à Accroissements Localement Indépendants

Définition 7.3 On dira qu'un tel processus Gaussien $\{X_t : t \in [0, 1]\}$ possède la propriété d'Accroissements Localement Indépendants (ALI), si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $B_m > 0$ telle que, pour tout $h > 0$, pour tout $t > 0$, pour tout $h \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq t + h$, on ait :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^m v_j (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) \right) \right] \leq \exp \left(-B_m \sum_{j=1}^m v_j^2 \sigma_j^2 \right) \quad (7.21)$$

avec $t_0 = 0$ et pour tout $j = 1, \dots, m$, $\sigma_j^2 = \mathbb{E} [(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^2]$.

Remarque 7.3 La relation (7.21) est apparue pour la première fois dans Nolan [99]. Elle fût utilisée pour montrer l'existence d'un temps local pour des processus stables. On y trouve également la démonstration de l'équivalence entre cette notion et celle de Non-déterminisme Local introduit par Berman [17]. On la retrouve ensuite dans Kôno et Shieh [81] pour démontrer l'existence d'un temps local pour certains processus auto-similaires.

Théorème 7.9 Si le processus X vérifie :

- La propriété ALI,
 - La propriété technique suivante :
- Pour tout $\vec{\theta} \in \{0, 1, 2\}^m$ il existe $\delta > 0$, et $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\int_{M_{t,h}^m} \prod_{j=1}^m (\sigma(t_j - t_{j-1}))^{-1-\delta\theta_j} \prod_{j=1}^m ds_j = \mathcal{O}_{h' \rightarrow t} (h'^{1+\varepsilon}) \quad (7.22)$$

Alors Ψ est bicontinue.

Démonstration :

On introduit la propriété ALI dans l'expression (7.19) et l'on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\left| Q_{x,t}^{h,h'} \right|^m \right] \leq \frac{h^{m\delta}}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{M_{t,h'}^m} \underbrace{|v_m|^\delta \prod_{j=1}^{m-1} |v_j - v_{j+1}|^\delta}_{(B)} \exp \left[-B_m \sum_{j=1}^m v_j^2 \sigma_j^2 \right] \left(\prod_{j=1}^m ds_j \right) \left(\prod_{j=1}^m dv_j \right)$$

Du fait que $|v_j - v_{j-1}|^\delta \leq |v_j|^\delta + |v_{j-1}|^\delta$, (B) est dominé par la somme de 2^{n-1} termes, chacun de ces termes contenant au plus n facteurs $|v_1|^\delta, \dots, |v_m|^\delta$ élevés à la puissance 0, 1 ou 2. Ce sont donc des termes du type :

$$|v_1|^{\delta\theta_1} |v_2|^{\delta\theta_2} \dots |v_m|^{\delta\theta_m}$$

Regardons, pour un des termes de la somme, l'intégrale suivante :

$$(I) \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{R}^m} |v_1|^{\delta\theta_1} |v_2|^{\delta\theta_2} \dots |v_m|^{\delta\theta_m} \exp \left[-B_m \sum_{j=1}^m v_j^2 \sigma_j^2 \right] \prod_{j=1}^m dv_j$$

Posons maintenant $w_j = v_j \sigma_j$ on obtient alors :

$$\begin{aligned} (I) &= \int_{\mathbb{R}^m} |w_1|^{\delta\theta_1} |w_2|^{\delta\theta_2} \dots |w_m|^{\delta\theta_m} \prod_{j=1}^m \sigma_j^{-\delta\theta_j} \exp \left[-B_m \sum_{j=1}^m w_j^2 \right] \prod_{j=1}^m \sigma_j^{-1} \prod_{j=1}^m dw_j \\ &= \prod_{j=1}^m \sigma_j^{-1-\delta\theta_j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} |w_1|^{\delta\theta_1} |w_2|^{\delta\theta_2} \dots |w_m|^{\delta\theta_m} \exp \left[-B_m \sum_{j=1}^m w_j^2 \right] \prod_{j=1}^m dw_j}_{D(\delta, m, \vec{\theta})} \end{aligned}$$

$D(\delta, m, \vec{\theta})$ est une constante (on peut majorer θ_j par 2). En utilisant cette relation, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\left| Q_{x,t}^{h,h'} \right|^m \right] \leq K \frac{h^{m\delta}}{(2\pi)^m} D(\delta, m, \vec{\theta}) \int_{M_{i,h'}^m} \prod_{j=1}^m \sigma_j^{-1-\delta\theta_j} \left(\prod_{j=1}^m ds_j \right)$$

On peut majorer, dans $D(\delta, m, \vec{\theta})$ les θ_j par 2, on majore alors $D(\delta, m, \vec{\theta})$ par $D(\delta, m, (2, \dots, 2)) = D(\delta, m)$. Cette intégrale est convergente car $B_m > 0$. On utilise maintenant la condition (7.22) qui assure l'existence d'une constante $K' > 0$ telle que :

$$\mathbb{E} \left[\left| Q_{x,t}^{h,h'} \right|^m \right] \leq K' \frac{h^{m\delta}}{(2\pi)^m} D(\delta, m) h^{1+\varepsilon}$$

Il suffit alors de jouer sur la valeur de m pour démontrer le théorème. ◀

Nous avons restreint le problème à la vérification de la propriété ALI. Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour voir cette propriété satisfaite :

Théorème 7.10 *Si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice de covariance K du vecteur Gaussien :*

$$\left\{ \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{\sigma(t_i - t_{i-1})} : i = 1, \dots, m \right\}$$

est borné par une constante strictement positive sur

$$\{(t_0, \dots, t_m) : 0 = t_0, t \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq t + h'\}$$

Alors X satisfait la propriété ALI.

Démonstration :

On considère \vec{Y} le vecteur Gaussien $(X_{t_1}, \dots, X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{i-1}})$ et $\sigma_i^2 = \text{Var}(Y_i)$. On notera également K_Y la matrice de covariance de \vec{Y} , (Y_1, \dots, Y_m) , $K_Y(i, j)$ l'élément de la i -ème ligne et j -ème colonne et $\|K_Y\|$ son déterminant.

En vertu de la propriété de développement selon les lignes et les colonnes du déterminant, nous avons la relation suivante entre $\|K\|$ et $\|K_Y\|$:

$$\|K\| = \frac{\|K_Y\|}{\prod_{i=1}^m \sigma_i^2} \quad (7.23)$$

Considérons C_j le cofacteur de $K_Y(j, j)$.

Par définition, C_k est le déterminant de la sous-matrice obtenue en ôtant une composante du vecteur Gaussien \vec{Y} . Par conséquent, c'est le déterminant d'une matrice de covariance donc d'une matrice semi-définie positive (SDP) dont les termes diagonaux sont les σ_i^2 avec $i \neq k$. Les propriétés des matrices SDP nous assurent que ce déterminant est majoré par le produit des termes diagonaux. On a donc :

$$C_k \leq \prod_{i \neq k} \sigma_i^2 \quad (7.24)$$

D'où le résultat escompté.

La distribution de Y_k connaissant $\{Y_l : l \neq k\}$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne $\mathbb{E}[Y_k | Y_l : l \neq k]$ et de variance $\frac{K_Y}{C_k}$ (voir Shiryaev [127] p.236). Par conséquent, nous avons pour tout $k = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i\right)\right) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{i=1}^m v_i Y_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{i=1}^m v_i Y_i\right) \mid Y_l : l \neq k\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j \neq k} v_j Y_j\right) \mathbb{E}\left[\exp(i v_k Y_k) \mid Y_l : l \neq k\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j \neq k} v_j Y_j\right) \exp\left(-\frac{1}{2} u_k^2 \frac{K_Y}{C_k} + i u_k \mathbb{E}[Y_k | Y_l : l \neq k]\right)\right] \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2} u_k^2 \frac{K_Y}{C_k}\right) \end{aligned}$$

De cette expression, on peut conclure que :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i\right) \geq u_k^2 \frac{K_Y}{C_k} \quad \text{donc} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i\right) \geq \sum_{k=1}^m u_k^2 \sigma_k^2 \frac{K_Y}{m C_k \sigma_k^2}$$

Il ne nous reste plus qu'à appliquer la minoration (7.24) pour avoir la minoration suivante :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i\right) \geq \frac{1}{m} \underbrace{\frac{K_Y}{\prod_{i=1}^m \sigma_i^2}}_{(II)} \sum_{k=1}^m u_k^2 \sigma_k^2 \quad (7.25)$$

(7.23) nous montre que l'expression (II) est, à une constante près, $\|K\|$. L'hypothèse d'uniforme bornitude nous assure l'existence d'une constante B_m telle que :

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i\right) \geq B_m \sum_{k=1}^m u_k^2 \sigma_k^2 \quad (7.26)$$

On a donc les relations suivantes qui nous montre que le processus X possède la propriété ALI.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left[i \sum_{i=1}^m v_i Y_i \right] \right] &= \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^m v_i Y_i \right) \right) \leq \exp \left(-\frac{1}{2} B_m \sum_{k=1}^m u_k^2 \sigma_k^2 \right) \\ &= \prod_{k=1}^m \mathbb{E} [\exp [i B_m u_k Y_k]] = \exp \left(-\frac{1}{2} B_m \sum_{k=1}^m u_k^2 \sigma_k^2 \right) \end{aligned}$$

◀

C'est la première condition introduite par Berman [13]. L'idée d'ALI existe déjà en filigrane dans cet article mais sans la mettre en évidence. Dans la suite, Berman a formalisé cette notion en introduisant la notion de Non-Déterminisme Local (NDL) (Berman [17]) les idées ne sont pas très différentes (voir Nolan [99]). L'idée centrale commune à ces deux notions est de se demander ce que devient le processus lorsque les accroissements deviennent petits. L'objectif est d'avoir un processus qui soit régulier. En restant sur ce point de vue, on peut énoncer le lemme suivant qui est démontré dans Berman [17] :

Lemme 7.2 *Si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ on a :*

$$\liminf_{t_m \downarrow t} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^m b_j \frac{Y_j}{\sigma_j} \right) > 0 \quad (7.27)$$

Alors l'hypothèse du lemme 7.10 est satisfaite.

Sur l'ensemble (7.20), la variable aléatoire $\sum_{j=1}^m b_j \frac{Y_j}{\sigma_j}$ est Gaussienne et régulière pour tous les $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Que se passe-t-il maintenant quand les accroissements tendent vers 0? La condition (7.27) oblige précisément la variable à rester Gaussienne et régulière.

7.4 Temps local du mouvement Brownien fractionnaire

7.4.1 Existence du temps local

Théorème 7.11 *Le Mouvement Brownien fractionnaire admet un temps local*

$$(t, x) \rightarrow L^H(t, x)$$

pour tout $0 < H < 1$.

Démonstration :

Par la stationnarité des accroissements du mouvement Brownien fractionnaire, son caractère Gaussien et du fait que $Z_0 = 0$, la condition (7.12) d'existence du temps local s'écrit :

$$(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \exp \left(-\frac{u^2}{2} |t-s|^{2H} \right) ds dt du < \infty$$

Le changement de variable $v = u|t-s|^H$ nous permet d'isoler le terme en v :

$$(I) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right) dv}_{(I_1)} \cdot \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{|t-s|^H} ds dt}_{(I_2)}$$

(I_1) est finie et il est facile de vérifier que pour $0 < H < 1$, (I_2) est également finie. L'hypothèse du théorème 7.5 est donc satisfaite ce qui démontre le théorème .

◀

7.4.2 Bicontinuité du temps local

Théorème 7.12 *Le temps local associé au mouvement Brownien fractionnaire $(t, x) \rightarrow L^H(t, x)$ est continu pour tout $H \in (0, 1)$.*

Démonstration :

On va appliquer le théorème 7.9. pour ce faire, il faut montrer que le mouvement Brownien fractionnaire satisfait la propriété d'ALI (objet du théorème 7.13) et que la propriété technique (7.22) est vraie (résultat du lemme 7.5 page 100). ◀

Théorème 7.13 *Le mouvement Brownien fractionnaire satisfait la propriété ALI pour tout $H \in (0, 1)$.*

Démonstration :

Le cas $0 < H < \frac{1}{2}$ Dans ce cas, la fonction variance $\sigma^2(t) = R^H(t, t) = t^{2H}$ est concave. Le résultat découle donc d'un résultat de Berman [16] théorème 6.1 p.1269 qui affirme que dans le cas d'une variance concave, le résultat du théorème 7.10 est vrai.

Le cas $\frac{1}{2} < H < 1$ Soit (t_1^n, \dots, t_m^n) une suite de m-uplets de $M_{t, h'}^m$ telle que $t_m^n \downarrow t$. L'idée est de démontrer que la condition (7.27) est vraie. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. On va supposer qu'il existe un m-uplet (b_1, \dots, b_m) de réels tel que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^m b_j \frac{X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n}}{\sigma(t_j^n - t_{j-1}^n)} \right) = 0 \quad (7.28)$$

et démontrer que cela conduit à $b_1 = \dots = b_m = 0$.

L'expression (7.28) peut s'écrire, en développant la variance :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m b_i b_j \underbrace{\mathbb{E} \left[\frac{X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}}{\sigma(t_i^n - t_{i-1}^n)} \frac{X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n}}{\sigma(t_j^n - t_{j-1}^n)} \right]}_{A_{i,j}^n} = 0 \quad (7.29)$$

Nous allons maintenant exprimer $A_{i,j}^n$ en fonction de " σ " :

$$A_{i,j}^n = \frac{\sigma^2(t_i^n - t_j^n) + \sigma^2(t_{i-1}^n - t_{j-1}^n) - \sigma^2(t_i^n - t_{j-1}^n) - \sigma^2(t_j^n - t_{i-1}^n)}{\sigma(t_i^n - t_{i-1}^n)\sigma(t_j^n - t_{j-1}^n)}$$

Nous allons maintenant introduire quelques notations :

$$\begin{aligned} \tau_i^n &= t_i^n - t_{i-1}^n && \text{"longueur" du } i\text{-ème accroissement} \\ \theta_{i,j}^n &= t_{j-1}^n - t_i^n && \text{durée entre deux accroissements} \end{aligned}$$

En introduisant ces notations, nous obtenons l'expression suivante :

$$A_{i,j}^n = \frac{\sigma^2(\tau_i^n + \theta_{i,j}^n) + \sigma^2(\tau_j^n + \theta_{i,j}^n) - \sigma^2(\tau_i^n + \tau_j^n + \theta_{i,j}^n) - \sigma^2(\theta_{i,j}^n)}{\sigma(\tau_i^n)\sigma(\tau_j^n)}$$

Bien sûr, quand $n \rightarrow \infty$, toutes ces quantités tendent vers 0.

Nous allons maintenant regarder le comportement asymptotique de $A_{i,j}^n$, en fonction de la vitesse de convergence vers 0 de τ_i^n par rapport à τ_j^n . Ainsi nous verrons la contribution de ce couple (i, j) à la limite (7.29). Nous allons énoncer ces résultats sous forme de deux lemmes que nous démontrerons en dernier lieu.

Lemme 7.3 *Si*

$$\frac{\tau_j^n}{\tau_i^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\tau_i^n}{\tau_j^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Alors

$$A_{i,j}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Lemme 7.4 *Si*

$$\frac{\tau_j^n}{\tau_i^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau_{i,j} \quad \text{avec} \quad 0 < \tau_{i,j} < \infty$$

et si

$$\frac{\theta_{i,j}^n}{\tau_j^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \quad i < j$$

Alors

$$\frac{\theta_{i,j}^n}{\tau_i^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$$

et on a

$$A_{i,j}^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Par conséquent, l'expression (7.29) est égale à la somme des limites des formes quadratiques du même type que celles intervenant dans (7.29) mais où la somme est prise sur les couples (i, j) tels que :

$$\frac{\tau_j^n}{\tau_i^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tau_{i,j} \quad 0 < \tau_{i,j} < \infty \quad (7.30)$$

$$\frac{\theta_{i,j}^n}{\tau_i^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta_{i,j} \quad 0 < \theta_{i,j} < \infty \quad (7.31)$$

Pour continuer la démonstration, nous allons utiliser la représentation harmonisable du mouvement Brownien fractionnaire. Cette représentation va nous permettre d'obtenir une représentation "spectrale" de $A_{i,j}^n$. En vertu de (2.4) page 28 nous avons :

$$X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n} = \frac{1}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it_j^n \lambda} - e^{it_{j-1}^n \lambda}}{i\lambda} \frac{\tilde{M}(d\lambda)}{|\lambda|^{H-1/2}}$$

Et par définition de cette intégrale, nous avons, pour $j > k$:

$$\begin{aligned} A_{k,j}^n &= \frac{1}{C_2(H)^2} \mathbb{E} \left[\frac{X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n}}{|\tau_j^n|^H} \frac{X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}}{|\tau_k^n|^H} \right] \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{it_j^n \lambda} - e^{it_{j-1}^n \lambda})(e^{-it_k^n \lambda} - e^{-it_{k-1}^n \lambda})}{|\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H |\lambda|} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2H}} \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_{j-1}^n - t_k^n)\lambda} \frac{(e^{i(t_j^n - t_{j-1}^n)\lambda} - 1)(1 - e^{-i(t_{k-1}^n - t_k^n)\lambda})}{|\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2H+1}} \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_{k,j}^n \lambda} \frac{(e^{i\tau_j^n \lambda} - 1)(1 - e^{i\tau_k^n \lambda})}{|\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{2H+1}} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Posons maintenant $h^n = \max_{1 \leq j \leq m} |\tau_j^n|$ et $u = \lambda h^n$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} A_{k,j}^n &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\theta_{k,j}^n}{h^n} u} \frac{(e^{i \frac{\tau_j^n}{h^n} u} - 1)(1 - e^{i \frac{\tau_k^n}{h^n} u})}{|\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H} \frac{(h^n)^{2H+1} du}{|u|^{2H+1} h^n} \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\theta_{k,j}^n}{h^n} u} \frac{(e^{i \frac{\tau_j^n}{h^n} u} - 1)(1 - e^{i \frac{\tau_k^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_k^n|}{h^n}\right]^H \left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n}\right]^H} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \theta_{k,j}^n &= t_{j-1}^n - t_k^n \\ &= \sum_{l=k+1}^{j-1} (t_l^n - t_{l-1}^n) \\ &= \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n - \sum_{l=1}^k \tau_l^n \end{aligned} \quad (7.34)$$

Des relations (7.33) et (7.34), on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} A_{k,j}^n &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u} (e^{i \frac{\tau_j^n}{h^n} u} - 1) e^{-i \frac{\sum_{l=1}^k \tau_l^n}{h^n} u} (1 - e^{i \frac{\tau_k^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n}\right]^H \left[\frac{|\tau_k^n|}{h^n}\right]^H} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \\ &= \frac{1}{C_2(H)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i \frac{\sum_{l=1}^j \tau_l^n}{h^n} u} - e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u}) (e^{-i \frac{\sum_{l=1}^k \tau_l^n}{h^n} u} - e^{-i \frac{\sum_{l=1}^{k-1} \tau_l^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n}\right]^H \left[\frac{|\tau_k^n|}{h^n}\right]^H} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \end{aligned}$$

Une fois ceci remarqué, on peut écrire la relation (7.29) sous la forme :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_E b_j \frac{(e^{i \frac{\sum_{l=1}^j \tau_l^n}{h^n} u} - e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n}\right]^H} \right|^2 \frac{du}{|u|^{2H+1}} = 0 \quad (7.35)$$

Où la somme est prise sur E qui est l'ensemble des couples (i, j) satisfaisant les conditions (7.30) et (7.31).

En fait, pour tout $M > 0$ nous avons la relation suivante qui est vérifiée :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \underbrace{\left| \sum_E b_j \frac{(e^{i \frac{\sum_{l=1}^j \tau_l^n}{h^n} u} - e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n}\right]^H} \right|^2}_{|\phi_n(u)|^2} \frac{du}{|u|^{2H+1}} = 0 \quad (7.36)$$

Posons

$$\phi(u) = \sum_E b_j \frac{(e^{i \sum_{l=1}^j \tau_l u} - e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u})}{\tau_j^H}$$

Montrons que $\phi_n \xrightarrow{u} \phi$.

Pour ce faire, il suffit de montrer que, pour tout $k \in E$, on a :

$$e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u} \xrightarrow{u} e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u}$$

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in [-M, M]} \left| e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u} - e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u} \right| &\leq 2 \left| \sum_{l=1}^{j-1} \left(\frac{\tau_l^n}{h^n} - \tau_l \right) \right| M \\ &\leq 2 \sum_{l=1}^{j-1} \left| \frac{\tau_l^n}{h^n} - \tau_l \right| M \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut intervertir limite et intégrale dans (7.36) et on a :

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_E b_j \frac{(e^{i \frac{\sum_{l=1}^j \tau_l^n}{h^n} u} - e^{i \frac{\sum_{l=1}^{j-1} \tau_l^n}{h^n} u})}{\left[\frac{|\tau_j^n|}{h^n} \right]^H} \right|^2 \frac{du}{|u|^{2H+1}} &= 0 \\ \int_{-M}^M \left| \sum_E b_j \frac{(e^{i \sum_{l=1}^j \tau_l u} - e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u})}{\tau_j^H} \right|^2 \frac{du}{|u|^{2H+1}} &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\left| \sum_E b_j \frac{(e^{i \sum_{l=1}^j \tau_l u} - e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u})}{\tau_j^H} \right|^2 = 0$$

sur un ensemble de mesure strictement positive. Et par conséquent, sur cet ensemble, nous avons :

$$\sum_E b_j \frac{(e^{i \sum_{l=1}^j \tau_l u} - e^{i \sum_{l=1}^{j-1} \tau_l u})}{\tau_j^H} = 0$$

Par définition de E , les τ_l sont tous non nuls et comme l'exponentielle complexe est entière en u , cette fonction ne peut être constante sur un ensemble de mesure strictement positive par conséquent, tous les b_k sont nuls pour $k \in E$. On enlève ces valeurs de k de la somme initiale et on recommence le raisonnement jusqu'à obtenir tous les b_k nuls.

◀

Démonstration du lemme 7.4 :

$$A_{i,j}^n = \frac{1}{C_2(H)^2} \frac{(\theta_{k,j}^n)^{2H}}{(\tau_j^n \tau_k^n)^H} \left(\left| 1 + \frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} \right|^{2H} + \left| 1 + \frac{\tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right|^{2H} - 1 - \left| 1 + \frac{\tau_k^n + \tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right|^{2H} \right)$$

Nous avons :

$$\frac{\tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} = \frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} \cdot \frac{\tau_j^n}{\tau_k^n}$$

Et donc en vertu des hypothèses du lemme, nous avons :

$$\frac{\tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire un développement limité à l'ordre 2 de $A_{i,j}^n$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} \right|^{2H} &= 1 + 2H \frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} + 2H(2H-1) \left[\frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} \right]^2 + o(\dots) \\ \left| 1 + \frac{\tau_k^n + \tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right|^{2H} &= 1 + 2H \frac{\tau_k^n + \tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} + 2H(2H-1) \left[\frac{\tau_k^n + \tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right]^2 + o(\dots) \end{aligned}$$

Dans le développement, nous avons les termes unité qui se simplifient ainsi que les termes du premier ordre. Il ne reste que :

$$\begin{aligned} A_{i,j}^n &= \frac{2H(2H-1)(\theta_{k,j}^n)^{2H}}{C_2(H)^2(\tau_j^n \tau_k^n)^H} \left[\left[\frac{\tau_k^n}{\theta_{k,j}^n} \right]^2 + \left[\frac{\tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right]^2 - \left[\frac{\tau_k^n + \tau_j^n}{\theta_{k,j}^n} \right]^2 + o(\dots) \right] \\ &= \frac{2H(2H-1)(\theta_{k,j}^n)^{2H}}{C_2(H)^2(\tau_j^n \tau_k^n)^H} \left[-2 \frac{\tau_k^n \tau_j^n}{(\theta_{k,j}^n)^2} + o(\dots) \right] \\ &= -\frac{4H(2H-1)}{C_2(H)^2} \left[\frac{(\theta_{k,j}^n)^2}{(\tau_j^n \tau_k^n)} \right]^{H-1} + o(\dots) \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de remarquer que, d'une part,

$$\frac{(\theta_{k,j}^n)^2}{(\tau_j^n \tau_k^n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

et d'autre part $H-1 < 0$ par conséquent nous avons le résultat voulu à savoir

$$A_{i,j}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration du lemme 7.3 :

On va partir de la représentation (7.32) de $A_{i,k}^n$:

$$A_{k,j}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_{k,j}^n u} \frac{(1 - e^{i\tau_j^n u})(1 - e^{i\tau_k^n u})}{C_2(H)^2 |\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H} \frac{du}{|u|^{2H+1}}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut séparer le domaine d'intégration en 2 parties :

$\{\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon/\tau_j^n\}$ et $\{\lambda : |\lambda| > \varepsilon/\tau_j^n\}$ ce qui nous donne une décomposition de $A_{k,j}^n$ en 2 intégrales : $A_{k,j}^{n, \leq \varepsilon}$ et $A_{k,j}^{n, > \varepsilon}$ dont les limites sont nulles. En effet, on a, par Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \left[A_{k,j}^{n, \leq \varepsilon} \right]^2 &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta_{k,j}^n u} \frac{(1 - e^{i\tau_j^n u})(1 - e^{i\tau_k^n u})}{C_2(H)^2 |\tau_k^n|^H |\tau_j^n|^H} \mathbb{I}_{\{|u| \leq \varepsilon/\tau_j^n\}} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \right]^2 \\ &\leq \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|1 - e^{i\tau_k^n u}|^2}{|\tau_k^n|^{2H}} \frac{du}{|u|^{2H+1}}}_{=1} \cdot \int_{\{|u| \leq \varepsilon/\tau_j^n\}} \frac{|1 - e^{i\tau_j^n u}|^2}{C_2(H)^2 |\tau_j^n|^{2H}} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \end{aligned}$$

On va maintenant utiliser l'inégalité $|1 - e^{ix}| \leq 2|x|$ et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \left[A_{k,j}^{n, \leq \varepsilon} \right]^2 &\leq \int_{\{u : |u| \leq \varepsilon / \tau_j^n\}} \frac{4|\tau_j^n u|^2}{|\tau_j^n|^{2H}} \frac{du}{|u|^{2H+1}} \\ &\leq K \int_{\{u : |u| \leq \varepsilon / \tau_j^n\}} (\tau_j^n)^{2-2H} |u|^{1-2H} du \end{aligned}$$

Le changement de variable $x = u\tau_j^n$ donne :

$$\begin{aligned} \left[A_{k,j}^{n, \leq \varepsilon} \right]^2 &\leq K \int_{\{x : |x| \leq \varepsilon\}} \frac{|x|^{1-2H}}{(\tau_j^n)^{1-2H}} (\tau_j^n)^{2-2H} \frac{dx}{\tau_j^n} \\ &\leq K \int_{\{x : |x| \leq \varepsilon\}} \frac{1}{|x|^{2H-1}} dx \\ &\leq K \varepsilon^{2-2H} \end{aligned} \tag{7.37}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand ε tend vers 0. De la même manière, on montre que :

$$\left[A_{k,j}^{n, > \varepsilon} \right]^2 \leq K \int_{\{u : |u| > \varepsilon / \tau_j^n\}} (\tau_j^n)^{2-2H} |u|^{1-2H} du$$

L'inégalité de troncation, introduite dans Loève ([91] p. 196), nous permet d'avoir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left[A_{k,j}^{n, > \varepsilon} \right]^2 &\leq K \varepsilon \frac{\tau_k^n}{\tau_j^n} \int_0^{\varepsilon \frac{\tau_j^n}{\tau_k^n}} \left[\int_0^{+\infty} (1 - \cos(vx)) |x|^{1-2H} dx \right] dv \\ &\leq K \varepsilon \frac{\tau_k^n}{\tau_j^n} \int_0^{\varepsilon \frac{\tau_j^n}{\tau_k^n}} |v|^{2H-2} \underbrace{\int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) |t|^{1-2H} dt}_{(I)} dv \\ &\leq K \varepsilon \frac{\tau_k^n}{\tau_j^n} \int_0^{\varepsilon \frac{\tau_j^n}{\tau_k^n}} |v|^{2H-2} dv \end{aligned} \tag{7.38}$$

(I) est définie du fait que $0 < 2H - 1 < 1$. On en déduit facilement que l'on a :

$$\left[A_{k,j}^{n, > \varepsilon} \right]^2 \leq K \varepsilon \left(\frac{\tau_k^n}{\tau_j^n} \right)^{1-2H}$$

Par hypothèse, on sait que $\frac{\tau_k^n}{\tau_j^n}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et comme $1 - 2H < 0$, cette dernière quantité converge vers 0 quand n tend vers l'infini. ◀

Lemme 7.5 *Pour tout $H \in (0, 1)$, le mouvement Brownien fractionnaire satisfait l'hypothèse (7.22).*

Démonstration du lemme :

Le cas $0 < H < \frac{1}{2}$ Comme σ^2 est concave, la fonction $t \rightarrow \sigma^2(t)/t$ est décroissante. Par conséquent, nous avons la relation $\sigma^2(t) \geq t\sigma^2(1)$ et donc $\sigma(t) \geq t^{\frac{1}{2}}\sigma^2(1)$. Il est alors facile de voir que l'hypothèse (7.22) est satisfaite pour n assez grand ($n \geq 4$).

Le cas $\frac{1}{2} < H < 1$ Dans le cas Brownien fractionnaire, le terme de gauche de la condition (7.22) s'écrit sous la forme :

$$(G) \leq \int_{M_{t,h'}^m} |s_1|^{-H(1+\delta\theta_1)} \prod_{j=2}^m |s_j - s_{j-1}|^{-H(1+\delta\theta_j)} \left(\prod_{j=1}^m ds_j \right) \quad (7.39)$$

On va maintenant poser $t_1 = s_1$ et $t_j = s_j - s_{j-1}$ pour tout $1 < j \leq m$. Le domaine d'intégration peut alors s'écrire : $[t, t+h'] \times [0, h']^{m-1}$ et de ce fait, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} (G) &\leq \int_t^{t+h'} \int_0^{h'} \dots \int_0^{h'} \prod_{j=1}^m |t_j|^{-H(1+\delta\theta_j)} \left(\prod_{j=1}^m dt_j \right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m |h'|^{-H(1+\delta\theta_j)+1} \int_t^{t+h'} |t_1|^{-H(1+\delta\theta_1)} ds_1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=2}^m |u_j|^{-H(1+\delta\theta_j)} \left(\prod_{j=2}^m du_j \right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m |h'|^{-H(1+\delta\theta_j)+1} \int_0^1 |t_1|^{-H(1+\delta\theta_1)} ds_1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=2}^m |u_j|^{-H(1+\delta\theta_j)} \left(\prod_{j=2}^m du_j \right) \end{aligned} \quad (7.40)$$

où (7.40) provient du changement de variable $h'u_j = t_j$ pour $2 \leq j \leq m$.

Il suffit maintenant de choisir une valeur de δ de sorte que les intégrales soient définies. Pour ce faire, il suffit que, pour tout $2 \leq j \leq m$, on ait $H(1+\delta\theta_j) < 1$. Comme $\theta_j \leq 2$, il suffit de choisir

$$\delta < \frac{1}{2H} - \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2H} - \frac{1}{2} < 1$$

On obtient alors la domination suivante :

$$(G) = \mathcal{O}_{h' \rightarrow 0} (|h'|^{(m-1)(1-H)-H\delta \sum_{j=2}^m \theta_j})$$

Comme $|h'| < 1$, comme $\theta_j \leq 2$ et comme on a choisi δ tel que $1 - H - 2H\delta > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} (m-1)(1-H) - H\delta \sum_{j=2}^m \theta_j &> (m-1)(1-H) - 2H\delta(m-1) \\ &> (m-1)(1-H-2H\delta) \end{aligned} \quad (7.41)$$

δ étant choisi, on peut maintenant choisir m suffisamment grand pour que (7.41) soit plus grand que 1. ◀

Quatrième partie

Calcul Stochastique pour des
processus Fractionnaires

Introduction

Dans cette quatrième partie, nous allons poser les bases de calcul anticipatif relatif à des processus fractionnaires. Cette étude est basée sur le cas du mouvement Brownien fractionnaire. Dans ce cas, il est nécessaire, pour définir une notion d'intégrale, de s'affranchir des propriétés classiques (variation finie et semi-martingale). Un résumé des différentes techniques explorées fait l'objet d'un premier chapitre. Dans ce chapitre, on insistera sur les travaux de Nualart [4] et Decreusefond [45] qui permettent de définir une intégrale pour une classe plus large de processus appelés Processus de Volterra. L'idée commune est de définir l'intégrale relative au processus de Volterra par le biais de l'intégrale relative au processus sous-jacent, un mouvement Brownien.

Dans la suite, on remplace le mouvement Brownien sous-jacent par un processus de Poisson Marqué. Le processus ainsi obtenu appelé Processus de Poisson Filtré est - dans la plupart des cas - une semi-martingale. Cependant, on peut utiliser la technique présentée au chapitre 8 pour obtenir une intégrale anticipative. Pour ce faire, il est nécessaire de définir une intégrale anticipative relative au Processus de Poisson Marqué sous-jacent. C'est l'objet du chapitre 9.

Dans le chapitre 10, on introduit une notion d'intégrale relative à des Processus de Poisson filtrés. On donnera aussi des hypothèses sur le noyau et sur l'intensité des sauts pour obtenir de bonnes propriétés statistiques. Enfin, nous ferons le lien avec l'intégrale au sens de Stieltjes-Lebesgue.

Au chapitre 11 nous continuons l'étude des Processus de Poisson Filtrés en démontrant un théorème de type Girsanov. Une application à l'estimation du coefficient de dérive linéaire est donnée et la consistance de cet estimateur établie.

Enfin, par le chapitre 12 nous ferons le lien entre les deux classes de processus centraux dans cette partie : les processus de Volterra et les processus de Poisson Filtrés en montrant un théorème limite qui prouve qu'une famille de Processus de Poisson Filtrés d'intensité constante convenablement normalisée converge faiblement quand n tend vers l'infini vers un processus de Volterra de même noyau. Pour obtenir ce résultat dans une grande généralité, nous allons transformer le problème initial en un problème de convergence de martingales à valeurs Hilbertiennes et ensuite projeter le résultat pour obtenir la convergence souhaitée.

Chapitre 8

Intégrale Anticipative pour des processus de type Volterra ¹

Définir une intégrale stochastique pour le mouvement Brownien fractionnaire ou plus généralement pour des processus de type Volterra est, dans la plupart des cas, particulièrement difficile. En effet, ce processus n'est pas à variation finie et ce n'est pas une semi-martingale. Les outils classiques sont donc exclus. Il faut donc ou bien faire appel à de nouveaux outils ou bien se ramener aux outils classiques.

La première partie de ce chapitre présente succinctement les différentes voies explorées dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire. Pour un résumé de ces techniques, je vous renvoie à l'article de synthèse de Decreasefond [36]. Nous insisterons sur la définition de l'intégrale de Wiener et son extension à l'intégrale Anticipative de type Skohorod.

Dans une seconde partie, on spécifie la voie de Nualart et al [4, 32]. On présente sommairement la définition de l'intégrale et on évoque les formules de Itô et de Meyer-Tanaka ; on montrera le lien avec le temps local de la partie III et les différences avec le cas Brownien.

Enfin, une troisième partie sera consacrée aux grandes étapes de la construction d'une intégrale anticipative pour des processus de type Volterra. Cette partie est un résumé des travaux de Decreasefond [39, 38, 37, 31] et fournit les principales idées utilisées pour définir une intégrale anticipative relativement aux Processus de Poisson Filtrés objets des prochains chapitres.

Remarque 8.1 *Certaines notations (comme par exemple les espaces $Hol(\nu)$ et $\mathcal{L}_{\alpha,1}$) relatives au calcul fractionnaire déterministe sont consignées dans l'annexe 13.2 page 185.*

¹ Cette terminologie vient de la nature du noyau définissant le processus. Ce noyau triangulaire est usuellement appelé noyau de type Volterra (voir Dieudonné [47] problème 9 p. 338).

8.1 Aperçu des différentes voies pour définir une intégrale relativement au mouvement Brownien fractionnaire

8.1.1 A partir des propriétés des trajectoires

On considère les sommes de Riemann :

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} u_{i2^{-n}} [B_{(i+1)2^{-n}}^H - B_{i2^{-n}}^H] \quad (8.1)$$

et on cherche à identifier les conditions sur u pour que (8.1) converge.

On notera dans cette idée les travaux de Föllmer [58] sur les processus de Dirichlet qui permet dans le cas $H > \frac{1}{2}$ de définir une notion d'intégrale. On notera les travaux de Bertoin [20] sur les processus à α -variation bornée qui assure la convergence de (8.1) pour des processus u à $\frac{1}{\beta}$ -variation bornée avec $\beta + H > 1$ et $\beta \geq 2$. La même idée a été suivie par Day et Heyde [33] dans le cadre du mouvement Brownien fractionnaire. On peut aussi évoquer les travaux de Feyel et de la Pradelle [57] qui assure la convergence de (8.1) pour $u \in Hol(1 - H)$. On peut aussi faire référence à Ciesielski et *al.* [28].

Zälhe [136] définit, pour tout $u \in \mathcal{I}_{\alpha,1}$ avec $\alpha > 1 - H$ une intégrale relative au mouvement Brownien fractionnaire en utilisant une intégration par parties. Elle montre en plus que pour $H > \frac{1}{2}$ et pour $u \in Hol(1 - H)$ cette intégrale est limite des sommes de Riemann (8.1).

Le principal défaut de ces points de vue trajectoriels (qui s'affranchissent certes de conditions d'adaptabilité des intégrants) est l'impossibilité dans la plupart des cas de calculer ne serait-ce que l'espérance de l'intégrale.

8.1.2 A partir du caractère Gaussien

Il est bien connu que l'on peut construire une intégrale relative à un processus Gaussien pour des intégrants déterministes (voir [98, 72] et leurs références). Cette intégrale dite de Wiener coïncide dans le cas du mouvement Brownien ordinaire avec l'intégrale de Itô elle-même pouvant être perçue comme la restriction aux intégrants prévisibles de l'intégrale de Skohorod [133, 105]. Dans le cas Brownien fractionnaire et plus généralement dans le cas des processus de Volterra on peut définir une intégrale de Skohorod. Cette construction fera l'objet du paragraphe 8.3. Nous verrons également qu'il existe en fait deux principales intégrales de type Wiener qui s'étendent chacune en une intégrale de type Skohorod différente. Nous restreindrons l'étude à l'une de ces deux intégrales que nous étendrons aux processus de Poisson Filtrés. Elles s'obtiennent à partir de la représentation de Lévy-Hida.

Les principaux auteurs ayant suivi cette idée sont : Decreusefond et Üstünel [45, 44] - avec un travail basé sur les opérateurs linéaires de noyau le noyau de la représentation de Lévy-Hida - et Alòs, Mazet et Nualart [5] avec un travail basé sur les noyaux eux-mêmes. Nous verrons dans les prochaines parties que le travail sur les opérateurs est plus confortable quand on travaille avec les Processus de Poisson Filtrés et les processus de type Volterra.

8.1.3 Autres voies

Pour $H < \frac{1}{2}$, les travaux de Alós, Mazet et Nualart [4] et de Carmona, Coutin [25] : Dans ces papiers, l'intégrale relative au mouvement Brownien fractionnaire est obtenue en approchant B^H par une suite de semi-martingales. L'intégrale est alors définie pour toute approximation et l'intégrale relativement à B^H est obtenue par passage à la limite.

Pour $H > \frac{1}{2}$, les travaux de Duncan, Hu et Pasik-Duncan [51] : Les travaux de Duncan et al. [51, 50] repris, complétés et appliqués à la finance par Øksendal, Hu [68] et en collaboration avec Sulem [70] sont basés sur les sommes de types Riemann en terme de produits de Wick :

Considérons $\phi(s, t) = H(2H - 1)|t - s|^{2H-2}$ et l'espace suivant

$$\mathcal{L}_\phi^2 = \{f \text{ mesurable telle que } |f|_\phi^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(s)f(t)\phi(s, t)dsdt < \infty\}$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 8.1 ([51] Lemme 2.1) *Si f et g sont dans \mathcal{L}_ϕ^2 alors $\int f(s)dB_s^H$ est défini comme variable Gaussienne centrée de variance $|f|_\phi^2$ et on a :*

$$\mathbb{E} \left[\int f(s)dB_s^H \cdot \int g(s)dB_s^H \right] = \langle f, g \rangle_\phi$$

On définit alors, pour $g \in \mathcal{L}_\phi^2$, $\epsilon(g) = \exp \left[\int f(s)dB_s^H - \frac{1}{2}|f|_\phi^2 \right]$, on montre que l'espace vectoriel \mathcal{E} engendré par les $\epsilon(g)$ est dense dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Le produit de Wick est défini, pour f et g dans \mathcal{L}_ϕ^2 par :

$$\epsilon(f) \diamond \epsilon(g) = \epsilon(f + g)$$

On étend ensuite cette définition à une classe plus large de variables aléatoires. Pour définir l'intégrale d'un processus $\{F_t : t \in [0, 1]\}$, on considère une partition π de $[0, 1]$: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et on définit :

$$S(F, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{t_i} \diamond [B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H]$$

et on a le théorème suivant :

Théorème 8.1 ([51] Théorème 3.9) *Soit $\{F_t : t \in [0, 1]\}$ un processus d'un bon espace $\mathcal{L}(0, 1)$ (défini dans [51] page 591). $S(F, \pi)$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ quand le pas de la subdivision π tend vers 0. La limite définit une intégrale (PW)- $\int f(s)dB_s^H$.*

8.2 Vers une formule de Tanaka

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la notion d'intégrale anticipative développée par Alós, Mazet et Nualart [5] pour des processus Gaussiens. Cette construction de l'intégrale a permis de présenter un autre point de vue sur le temps local du mouvement Brownien fractionnaire. En effet, Coutin, Nualart et Tudor [32] ont obtenue une formule de Tanaka pour

$H > \frac{1}{3}$. Cette intégrale a récemment été développée par Cheridito et Nualart [26] et la formule de Tanaka étendue à H quelconque (dans $]0, 1[$).

8.2.1 Construction d'une intégrale anticipative pour le mouvement brownien fractionnaire

Cette présentation restera succincte puisque développée au paragraphe suivant dans le cadre plus général des processus de Volterra.

Considérons les deux espaces suivants :

– L'espace auto-reproduisant :

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Vect}(\{\mathbb{I}_{[0,t]} : t \in [0, T]\})}^{\langle, \rangle_{\mathcal{H}}}$$

est un sous-espace de $\mathcal{L}^2([0, T], \mathbb{R})$ auquel on donne une structure d'espace de Hilbert en introduisant le produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbb{I}_{[0,t]}, \mathbb{I}_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R(t, s)$$

– Le premier chaos de Wiener :

$$H_1 = \overline{\text{Vect}(\{B_t^H : t \in [0, T]\})}^{\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R})}$$

est un sous espace de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

Propriété 8.1 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} B^H : & \mathcal{H} & \longrightarrow & H_1 \\ & \mathbb{I}_{[0,t]} & \longrightarrow & B_t^H \\ & \phi & \longrightarrow & B^H(\phi) \end{array}$$

est une isométrie.

Cette isométrie permet déjà de définir une notion d'intégrale pour des intégrands déterministes, l'intégrale de Wiener. Elle sera discutée au paragraphe 8.3.2 page 115.

Pour des variables aléatoires dites cylindriques c'est à dire de la forme :

$$F = f(B^H(\phi_1), B^H(\phi_2), \dots, B^H(\phi_n))$$

où n est un entier quelconque non nul, $\phi_i \in \mathcal{H}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à dérivées bornées, on définit la notion de dérivée au sens faible par :

$$D^H(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(\phi_1), B^H(\phi_2), \dots, B^H(\phi_n)) \phi_i$$

L'intérêt de ces définitions réside dans les propriétés suivantes :

Propriété 8.2 *L'espace \mathcal{S} des fonctions cylindriques est dense dans \mathbb{L}^2 .*

Propriété 8.3 pour tout $F, G \in \mathcal{S}$ et tout $h \in \mathcal{H}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[D^H(FG)] &= \mathbb{E}[FD^H(G)] + \mathbb{E}[GD^H(F)] \\ \mathbb{E}[\langle D^H(F), h \rangle_{\mathcal{H}}] &= \mathbb{E}[FB^H(h)]\end{aligned}$$

Propriété 8.4 L'opérateur

$$D^H : \mathbb{L}^p(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{H})$$

est fermé et non borné pour tout $p \geq 1$.

Propriété 8.5 Par itération, on peut définir des opérateurs de dérivations successives :

$$D^{H,k} : \mathbb{L}^p(\Omega, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes k})$$

ils sont fermés et non bornés pour tout $p \geq 1$ et tout $k \geq 1$.

Remarque 8.2 Cet opérateur transforme les variables aléatoires \mathbb{L}^p en une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{H}^{\otimes k}$ c'est à dire un processus à k variables de puissance p -ième intégrable.

En définissant sur \mathcal{S} la norme suivante :

$$\|F\|_{H,k,p}^p = \|F\|_{\mathbb{L}^p(\Omega, \mathbb{R})}^p + \sum_{j=1}^k \|D^{H,j}F\|_{\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes j})}^p$$

on peut étendre la définition de l'opérateur de dérivation à un espace $\mathbb{D}^{B,k,p}$, fermeture de \mathcal{S} relativement à la norme $\|\cdot\|_{H,k,p}$.

Dans le cas Brownien ordinaire, il est connu que l'opérateur adjoint de D noté δ et appelé divergence coïncide pour des processus prévisibles, avec l'intégrale de Itô [106, 62]. Cette analogie faite, il est naturel de penser que l'adjoint de D^H noté δ^H fournira une notion d'intégrale convenable.

Propriété 8.6 Le domaine $Dom(\delta^H)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{H})$ est l'ensemble des u tels que :

$$|\mathbb{E}[\langle D^H F, u \rangle_{\mathcal{H}}]| \leq c\|F\|_2$$

pour tout $F \in \mathcal{S}$.

Si u est dans le $Dom(\delta^H)$, $\delta^H(u)$ est l'élément de $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$ définie par la relation de dualité suivante :

$$\langle \delta^H(u), F \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \mathbb{E}[\langle D^H F, u \rangle_{\mathcal{H}}] \quad \forall F \in \mathbb{D}^{H,1,2}(\mathcal{H})$$

Le gros du travail consiste maintenant à caractériser le domaine de δ^H . La première idée consiste à faire le lien entre δ et δ^H de façon à avoir une représentation plus simple du domaine de δ^H [45, 4]. On introduit un opérateur linéaire continu noté \mathcal{K}^* qui vérifie :

$$\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0,t]}) = K^{(H)}(t, \cdot)$$

En vertu de la représentation Lévy-Hida théorème 2.3 page 30 étendue au moyen de la construction ci-dessus, on obtient la relation :

$$\delta^H(u) = \delta(\mathcal{K}^*(u))$$

On peut également citer les travaux de Nualart [6] pour un travail direct sur le brownien fractionnaire.

8.2.2 Un Énoncé de la formule de Itô

On note $\delta^H(u)_t = \delta^H(\mathcal{K}_t^*(u))$ avec $\mathcal{K}_t^*(u) = \mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[0,t]})$.

Théorème 8.2 ([5] Théorèmes 2 page 14 et 3 page 18) *Soit F une fonction \mathcal{C}^2 satisfaisant la condition (CC) suivante :*

$$\max \{|F(x)|, |F'(x)|, |F''(x)|\} \leq ce^{\lambda|x|^2}$$

où λ et c sont des constantes positives telles que :

$$\lambda < \left(\sup_{0 \leq t \leq T} R_t \right)^{-1}$$

Alors pour tout $H \in (\frac{1}{4}, 1)$, on a :

$$F(B_t) = F(B_0^H) + \delta^H(F'(B^H))_t + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s^H) 2H s^{2H-1} ds \quad (8.2)$$

8.2.3 Le Temps local du point de vue calcul stochastique

Tout d'abord rappelons ce qui se passe dans le cas du mouvement Brownien Ordinaire. De la formule de Itô :

$$F(B_t^{\frac{1}{2}}) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^{\frac{1}{2}}) dB_s^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s^{\frac{1}{2}}) ds$$

on déduit la formule de Tanaka. Elle assure qu'il existe un processus continu croissant L^a tel que, pour tout a , on ait :

$$|B_t^{\frac{1}{2}} - a| = |a| + \int_0^t \text{signe}(B_s^{\frac{1}{2}} - a) dB_s^{\frac{1}{2}} + L_t^a$$

A ce processus croissant, est associée une mesure notée dL_t^a sur \mathbb{R}^+ et on montre qu'elle est à support dans $\{t : B_t^{\frac{1}{2}} = a\}$: temps passé dans l'état a . On peut ensuite étendre la formule de Itô à des fonctions F qui sont la différence entre deux fonctions convexes. On obtient la formule de Meyer-Tanaka :

$$F(B_t^{\frac{1}{2}}) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^{\frac{1}{2}}) dB_s^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a F''(a) da$$

où la dérivée est à prendre au sens des distributions. De là, on déduit la formule de temps d'occupation :

$$\int_0^t \Phi(B_s^{\frac{1}{2}}) ds = \int_{\mathbb{R}} L_t^a \Phi(a) da \quad (8.3)$$

presque sûrement pour tout t et toute fonction Φ borélienne positive. Pour finir, on établit la continuité de $(a, t) \rightarrow L_t^a$. Voir Revuz et Yor [116].

Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire, le théorème 7.11 page 94 nous assure l'existence d'un temps local L^H , bicontinu, densité du temps d'occupation dans le sens où, pour toute fonction Φ borélienne positive, on a presque sûrement pour tout t :

$$\int_0^t \Phi(B_s^H) ds = \int_{\mathbb{R}} L^H(t, a) \Phi(a) da$$

La formule de Itô (8.2) met en évidence l'importance du noyau $s \rightarrow 2H s^{2H-1}$ dans le terme de trace. Il faut évidemment en tenir compte pour établir une formule de Tanaka. Pour ce faire, dans [32, Proposition 2 page 6], on introduit un temps local Λ^H par :

Théorème 8.3 Soit $H \in (0, 1)$ et soit $p_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon}\right)$ avec $\epsilon > 0$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, T]$ on a :

$$2H \int_0^t p_\epsilon(B_s^H - a) s^{2H-1} ds \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\mathbb{L}^2(\Omega)} \Lambda^H(t, a)$$

Λ_t^a est la densité du temps d'occupation dans le sens suivant :

$$\int_0^t \Phi(B_s^H) 2H s^{2H-1} ds = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^H(t, a) \Phi(a) da$$

La formule de Tanaka pour B^H s'énonce alors ainsi :

Théorème 8.4 Pour tout $H \in (\frac{1}{3}, 1)$, on a :

$$\begin{aligned} |B_t^H - a| &= |a| + \delta_t^H(B_t^H - a) + \Lambda^H(t, a) \\ (B_t^H - a)^+ &= (-a)^+ + \delta_t^H(\mathbb{I}_{(a, \infty)}(B_t^H)) + \frac{1}{2}\Lambda^H(t, a) \end{aligned}$$

Idée de la démonstration :

- Cas $H > \frac{1}{2}$: Théorème 3 page 11 de [32]
On considère $F'_\epsilon = 2 \int_{-\infty}^x p_\epsilon(y) dy - 1$. On applique la formule de Itô 8.2 à F'_ϵ et on passe à la limite quand ϵ tend vers 0. La difficulté réside ici en la convergence de $\delta(\mathcal{K}^* [F'_\epsilon(B_t^H - a)])_t$ vers $\delta^H(\text{signe}(B_t^H - a))_t$.
- Cas $\frac{1}{3} < H < \frac{1}{2}$: Théorème 6 page 17 de [32]
L'idée est la même mais la convergence demande plus de travail à cause de la singularité de $\frac{\partial K}{\partial r}$ en 0. On montre (proposition 5 page 15 de [32]) que :

$$\left\{ \int_0^t [F'_\epsilon(B_r^H - a) - F'_\epsilon(B_s^H - a)] \frac{\partial K}{\partial r}(r, s) dr : s \in [0, T] \right\}$$

converge dans $\mathbb{L}^2([0, t] \times \Omega)$ vers

$$\left\{ \int_0^t [\text{signe}(B_r^H - a) - \text{signe}(B_s^H - a)] \frac{\partial K}{\partial r}(r, s) dr : s \in [0, T] \right\}$$

◀

Remarque 8.3 Récemment, Cheridito et Nualart [26] ont étendu le domaine de l'opérateur δ . Cette extension leur a permis d'établir une formule de Itô valable pour $H \in (0, \frac{1}{2})$ [26, Lemme 9 page 16] et ont comme corollaire démontré la formule de Tanaka pour tout $H \in (0, 1)$ [26, Théorème 10 page 19].

Remarque 8.4 On peut également citer les travaux de Hu, Øksendal [67]. Dans cet article, une décomposition chaotique pour le temps local est établie. Il est intéressant de remarquer que pour obtenir une formule de Tanaka dans le cadre du calcul stochastique développé par Hu et Øksendal [68], il est nécessaire de pondérer le temps local (par le noyau $s \rightarrow 2H(2H-1) s^{2H-2}$) (voir Øksendal, Hu et Salopek [69]).

Propriété 8.7 Nous avons la relation suivante entre les temps locaux associés au mouvement Brownien fractionnaire :

$$\begin{aligned}\Lambda^H(t, a) &= \int_0^t 2H s^{2H-1} L^H(s, a)(ds) \\ &= 2H t^{2H-1} L^H(t, a) - 2H(2H-1) \int_0^t s^{2H-2} L^H(s, a) ds\end{aligned}$$

Démonstration :

Pour toute fonction g borélienne bornée on a :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \Lambda^H(t, x) dx = \int_0^t 2H g(B_s^H) s^{2H-1} ds \quad (8.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) L^H(t, x) dx = \int_0^t g(B_s^H) ds \quad (8.5)$$

De (8.5) on tire que

$$g(B_s^H) ds = \int_{\mathbb{R}} g(x) L^H(dt, x) dx$$

et en réintroduisant dans (8.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x) \Lambda^H(t, x) dx &= \int_0^t 2H \int_{\mathbb{R}} g(x) s^{2H-1} L^H(ds, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t 2H s^{2H-1} g(x) L^H(ds, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_0^t 2H s^{2H-1} L^H(ds, x) dx\end{aligned}$$

et on en déduit que :

$$\Lambda^H(t, x) = \int_0^t 2H s^{2H-1} L^H(ds, x)$$

La seconde relation découle d'une intégration par parties. ◀

8.3 Intégrale anticipative relativement au Processus de type Volterra

8.3.1 Définitions et hypothèses

Définition 8.1 On appelle processus de type Volterra (ou processus de Volterra pour faire court) un processus Gaussien centré $\{X_t : t \in [0, 1]\}$ qui s'écrit sous la forme :

$$X_t = \int_0^t K(t, s) dB_s \quad (8.6)$$

avec K un noyau borélien. On notera $\{\mathfrak{F}_t : t \in [0, 1]\}$ sa filtration naturelle complétée. On introduit également l'opérateur (de Hilbert-Schmidt) - également noté K - suivant :

$$\begin{aligned}K &: \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2 \\ f &\rightarrow \int_0^t K(t, s) f(s) ds\end{aligned}$$

Hypothèse 8.1 Dans la suite on supposera :

1. K est triangulaire dans le sens où $K(t, s) = 0$ pour tout $s > t$.
2. Il existe $\gamma > 0$ tel que K soit un opérateur continu de \mathcal{L}^2 dans $\mathcal{I}_{\gamma+1/2, 2}$.
3. $I^{-1} \circ K$ est un opérateur de \mathcal{L}^2 dans \mathcal{L}^2 fermable à domaine dense. On notera \mathcal{K} son extension maximale et $\text{dom}(\mathcal{K})$ le domaine de cette extension.
4. $I^{-1} \circ K$ est continu de $\mathcal{I}_{(1/2-\gamma)_+, 2}$ dans \mathcal{L}^2 .

Propriété 8.8 La fonction de covariance de X notée R s'écrit KK^* (avec K^* l'opérateur adjoint de K ou encore :

$$R(t, s) = \int_0^{s \wedge t} K(t, u)K(s, u) du \quad (8.7)$$

Remarque 8.5 Les hypothèses 8.1 sont satisfaites par le noyau K^H de la représentation de Hida (théorème 2.3 page 30) avec $\gamma = H$ [121]. D'autre part, les hypothèses sont également vérifiées par le noyau associé au mouvement Brownien multifractionnaire (H fonction continue du temps) avec $\gamma = \text{Inf}_{t \in [0, 1]} H(t) > 0$ [39] exemple 3 page 9.

On se place maintenant sur l'espace Ω des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, nulles en 0 et équipé de la topologie de la norme uniforme. On note \mathbb{P} la probabilité qui fait de X -processus canonique- un processus Gaussien centré de fonction de covariance R .

Théorème 8.5 (Decreusefond et Üstünel [45]) L'espace auto-reproduisant \mathcal{H} associé à X est la fermeture de l'espace engendré par les indicatrices $\{\mathbb{I}_{[0, t]} : t \in [0, 1]\}$ au sens du produit scalaire :

$$\langle \mathbb{I}_{[0, t]}, \mathbb{I}_{[0, s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R(t, s)$$

C'est l'espace des fonctions de la forme :

$$f(t) = \int_0^t K(t, s)\hat{f}(s)ds \quad \text{avec } \hat{f} \in \mathcal{L}^2 \quad (8.8)$$

On a $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\hat{f}\|_{\mathcal{L}^2}$.

8.3.2 Intégrale de Wiener

Pour définir une intégrale au sens de Wiener, il nous faut considérer un espace de fonctions en isométrie avec l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$. Deux candidats :

$$\begin{array}{lll} \text{(w1)} \cdot \int : \mathcal{L}^2 & \rightarrow & \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P}) \\ K(t, \cdot) & \rightarrow & X_t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} \text{(w2)} \cdot \int : \mathcal{H} & \rightarrow & \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P}) \\ \mathbb{I}_{[0, t]} & \rightarrow & X_t \end{array}$$

Remarque 8.6 De deux choses l'une, ou bien on perturbe le produit scalaire ou bien on change l'antécédent de B_t^H . Il est à noter que dans le cas $B^{\frac{1}{2}}$, ces deux points de vue sont identiques en vertu de l'identification faite entre \mathcal{H} et \mathcal{L}^2 (I_{0+}^1 est une isométrie bijective entre \mathcal{H} et \mathcal{L}^2).

On définit - pour tout $u = \mathcal{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ avec u_n combinaison linéaire de fonctions $K(t, \cdot)$, $u_n = \sum \alpha_i^n K(t_i^n, \cdot)$ - l'intégrale par :

$$\begin{aligned} \text{(w1)} \cdot \int u(s) dX_s &= \mathbb{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{(w1)} \cdot \int u_n(s) dX_s \\ &= \mathbb{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \alpha_i^n X_{t_i^n} \end{aligned}$$

De même, on définit alors - pour tout $u = \mathcal{H} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ avec u_n combinaison linéaire de fonctions indicatrices $u_n = \sum \alpha_i^n \mathbb{I}_{[0, t_i^n]}$ - l'intégrale par :

$$\begin{aligned} {}_{(W_2)}\int u(s) dX_s &= \mathbb{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(W_2)}\int u_n(s) dX_s \\ &= \mathbb{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \alpha_i^n X_{t_i^n} \end{aligned}$$

Théorème 8.6 (Decreusefond [36]) *Pour tout $u \in \mathcal{L}^2$, les intégrales ${}_{(RS)}\int$ et ${}_{(W_2)}\int$ coïncident et on a, pour $H > \frac{1}{2}$:*

$${}_{(W_1)}\int \mathcal{K}^*(u)(s) dX_s = {}_{(W_2)}\int u(s) dX_s$$

évidemment les intégrales ${}_{(W_1)}\int$ et ${}_{(RS)}\int$ ne coïncident pas sur les processus déterministes.

8.3.3 Extension aux processus

Là encore deux points de vue sont envisageables. Ou bien on construit directement une intégrale de Skohorod à partir du processus Gaussien X , ou bien on définit une intégrale anticipative à partir de celle existant pour le mouvement Brownien ordinaire *via* un opérateur linéaire.

Intégrale de Skohorod pour X

Considérons H un espace de Hilbert ou de Besov $\mathcal{I}_{\alpha, p}$. Une application ϕ de Ω dans H est dite cylindrique si elle s'écrit :

$$\phi(\omega) = \sum_{l=1}^k f_l(\langle v_1, \omega \rangle, \dots, \langle v_n, \omega \rangle) \cdot x_l$$

avec $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $v_i \in \Omega^*$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $x_l \in H$ pour tout $l = 1, \dots, k$. On définit alors la dérivée de Gross-Sobolev par :

$$\nabla \phi(\omega) = \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^n \partial f_l(\langle v_1, \omega \rangle, \dots, \langle v_n, \omega \rangle) K^* \circ i^*(v_i) \otimes x_l$$

où i est l'injection de $H \hookrightarrow \Omega$. On sait que ∇ est fermable et on note ∇ sous extension maximale et $dom(\nabla)$ le domaine de cette extension. Pour $p \geq 1$ on note $\mathbb{D}_{p,1}(H)$ l'adhérence de l'ensemble des fonctionnelles cylindriques pour la norme :

$$\|\phi\|_{p,1} = \|\phi\|_{\mathbb{L}^p} + \|\nabla \phi\|_{\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{L}^2 \otimes H)}$$

La divergence est, par définition, l'adjoint de ∇ , son domaine est noté $dom(\delta)$ et c'est l'ensemble des processus de $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, 1])$ tels que, pour toute fonctionnelle cylindrique il existe $c \geq 0$ on ait :

$$\mathbb{E}[\langle u, \nabla \phi \rangle_{\mathcal{L}^2(H)}] \leq c \|\phi\|_2$$

et alors :

$$\mathbb{E}[\langle u, \nabla \phi \rangle_{\mathcal{L}^2(H)}] = \mathbb{E}[\phi \delta(u)]$$

On notera indifféremment δ ou ${}_{(SK1)}\int$.

Théorème 8.7 1. Le processus $\{\tilde{B}_t = \delta(\mathbb{I}_{[0,t]}) : t \in [0, 1]\}$ est un mouvement Brownien Ordinaire dont la filtration coïncide avec $\{\mathfrak{F}_t : t \in [0, 1]\}$.

2.

$$\left\{ {}_{(w)}\int K(t, s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) d\tilde{B}_s : t \in [0, 1] \right\} = \{X_t : t \in [0, 1]\}$$

3. Pour tout u déterministe on a :

$${}_{(sk1)}\int u(s) dX_s = {}_{(w1)}\int u(s) dX_s$$

Démonstration :

Les deux premiers points sont montrés dans [45]. En ce qui concerne le troisième point, on a les relations :

$$X_t = {}_{(w1)}\int K(t, s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) dX_s$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} X_t &= {}_{(w)}\int K(t, s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) d\tilde{B}_s \\ &= {}_{(sk1)}\int K(t, s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) dX_s \end{aligned}$$

◀

Remarque 8.7 δ n'est pas la divergence de \tilde{B} . En effet, l'opérateur de dérivation associé à \tilde{B} n'est pas ∇ mais $\tilde{\nabla}$ avec la relation $\mathcal{K}^* \circ \tilde{\nabla} = \nabla$.

Cette intégrale fournit un bon outil pour démontrer les résultats comme Girsanov ou la représentation de Clark (voir [45]).

Utilisation de l'intégrale de Skohorod pour B

On notera ${}_{(sk)}\int$ l'intégrale de Skohorod relativement à B [105, 133]. On peut à partir de cette intégrale définir une intégrale anticipative relative à X :

Définition 8.2 Pour tout processus u tel que $\mathcal{K}^*(u) \in \text{dom}({}_{(sk)}\int)$, on définit l'intégrale relative à X par :

$${}_{(sk1)}\int u(s) dX_s = {}_{(sk)}\int \mathcal{K}^*(u)(s) dB_s$$

Propriété 8.9 Soit u déterministe à valeurs dans \mathcal{H} . On a alors :

$${}_{(sk2)}\int u(s) dX_s = {}_{(w2)}\int u(s) dX_s$$

Démonstration :

Soit u à valeurs dans \mathcal{H} , $u = \mathcal{H} - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ avec $u_n = \sum \alpha_i^n \mathbb{I}_{[0, t_i^n]}$.

Dans un premier temps, on va montrer que $\mathcal{K}^*(u_n) = \sum \alpha_i^n K(t_i^n, \cdot)$. Par linéarité, il suffit de montrer que $\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0, t_i^n]}) = K(t_i^n, \cdot)$. Or on a formellement, en notant $\epsilon_{t_i^n}$ la masse de Dirac en

t_i^n les relations suivantes pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
(I_{0+}^1)^*(\epsilon_{t_i^n})(t) &= I_{1-}^1(\epsilon_{t_i^n})(t) = \int_t^1 \epsilon_{t_i^n}(s) ds \\
&= \mathbb{I}_{[0, t_i^n]}(t) \\
K^*(\epsilon_{t_i^n})(t) &= \int_0^t K(s, t) \epsilon_{t_i^n}(s) ds \\
&= K(t_i^n, t)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

(8.9) vient du fait que, comme K est Hilbert-Schmidt de noyau $(s, t) \rightarrow K(t, s)$, K^* est Hilbert-Schmidt de noyau $(s, t) \rightarrow K(s, t)$. On vient donc de mettre en évidence que :

$$\begin{aligned}
K^* \circ [(I_{0+}^1)^*]^{-1}(\mathbb{I}_{[0, t_i^n]}) &= K(t_i^n, \cdot) \\
K^*(\mathbb{I}_{[0, t_i^n]}) &= K(t_i^n, \cdot)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
{}_{(\text{sk2})}\text{-}\int u(s) dX_s &= {}_{(\text{sk})}\text{-}\int \mathcal{K}^*(u)(s) dB_s \\
&= {}_{(\text{w})}\text{-}\int \mathcal{K}^*(u)(s) dB_s
\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(\text{w})}\text{-}\int \mathcal{K}^*(u_n)(s) dB_s \\
&= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(\text{w})}\text{-}\int \sum \alpha_i^n K(t_i^n, s) dB_s \\
&= \mathbb{L}^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} {}_{(\text{w})}\text{-}\int \sum \alpha_i^n X_{t_i^n}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$= {}_{(\text{w2})}\text{-}\int u(s) dX_s \tag{8.12}$$

(8.10) est une propriété classique de l'intégrale de Skohorod. (8.11) n'est autre que la définition du processus X . Enfin, (8.12) vient du choix de l'approximation de u .

Remarque 8.8 *Il est nécessaire de prendre une intégrale anticipative du mouvement Brownien Ordinaire car même avec un processus u adapté, le processus $\mathcal{K}^*(u)$ n'a aucune raison de l'être. Pour s'en rendre compte, on peut prendre l'exemple du mouvement Brownien fractionnaire de Lévy qui correspond au noyau $(t, s) \rightarrow (t-s)^{H+\frac{1}{2}}$. On a alors $K = I^{H+\frac{1}{2}}$ et donc $\mathcal{K} = I^{H-\frac{1}{2}}$. Par conséquent on a :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(f)(t) &= \int_0^t (t-s)^{H-\frac{3}{2}} f(s) ds \\
&= \int_0^1 (t-s)^{H-\frac{3}{2}} \mathbb{I}_{[0, t]}(s) f(s) ds
\end{aligned}$$

par conséquent, son dual s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^*(f)(t) &= \int_0^1 (s-t)^{H-\frac{3}{2}} \mathbb{I}_{[0,s]}(t) f(s) ds \\ &= \int_0^1 (s-t)^{H-\frac{3}{2}} \mathbb{I}_{[t,1]}(s) f(s) ds \\ &= \int_t^1 (s-t)^{H-\frac{3}{2}} f(s) ds\end{aligned}$$

Il est donc anticipant...

Cette intégrale est la seconde intégrale développée par Decreusefond Üstünel dans [45]. Elle coïncide avec celle développée par Duncan, Hu et Pasik-Duncan [51], a celle développée par Øksendal et al [71] ainsi que celle développée par Privault [113].

Outre la formule de Itô qui peut s'exprimer à partir de cette intégrale [45], on a le résultat suivant :

Théorème 8.8 (Decreusefond [37]) • Si u est déterministe et si les deux membres de l'égalité existent, on a :

$${}_{(Sk2)}\int u(s)dX_s = {}_{(RS)}\int u(s)dX_s$$

• Si $u \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{L}^2)$ et si toutes les expressions de l'égalité existent alors on a :

$${}_{(Sk2)}\int u(s)dX_s = \lim_{|\pi_n| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \pi_n} u(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) - \int_0^1 D_s u(s) ds$$

avec $D = \mathcal{K} \circ \nabla$.

Remarque 8.9 D ne coïncide avec $\tilde{\nabla}$ que dans le cas d'un opérateur \mathcal{K} orthogonal.

Le deuxième point nous pousse à introduire une troisième intégrale :

$${}_{(Sk3)}\int = {}_{(Sk2)}\int u(s)dX_s + \int_0^1 D_s u(s) ds$$

Théorème 8.9 (Decreusefond [37]) Sous de bonnes hypothèses décrites dans Decreusefond [37], on a :

$${}_{(Sk3)}\int u(s)dX_s = \mathbb{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^{n-1} n \int_{i/n}^{(i+1)/n} u(s) ds (X_{(i+1)/n} - X_{i/n}) \right]$$

communément appelées sommes de Stratonovitch (voir Nualart [105, 3] pour un développement détaillé).

L'intégrale ${}_{(Sk3)}\int$ correspond à la troisième intégrale introduite dans [45] et à beaucoup des autres intégrales définies. Par exemple celle de Alòs, Mazet et Nualart [4], de Carmona et Coutin [25], de Feyel et de la Pradelle [57], de Russo et Valois [119, 120], et de Zähle [136].

Chapitre 9

Calcul Stochastique pour des Processus de Poisson Marqués

Ce chapitre a pour objectif de définir une intégrale anticipative relativement à des Processus de Poisson Marqués. Cette intégrale sera à la base de la construction de l'intégrale relative à des Processus de Poisson Filtrés. Elle jouera le même rôle que l'intégrale de Skohorod pour le mouvement Brownien étudié dans le chapitre précédent.

L'idée est la même à savoir définir l'intégrale comme opérateur adjoint d'un gradient stochastique. Nous allons construire ces objets à partir de l'opérateur de dérivation introduit par Decreasefond dans [35].

Après avoir mis en évidence les propriétés de cette intégrale, nous regarderons le lien avec l'intégrale dite "naturelle" c'est à dire définie au sens de Stieltjès-Lebesgue.

9.1 Intégrales naturelles pour des PPM

9.1.1 Notations, Définitions et Hypothèses

Soit \mathbb{R}^d muni de sa tribu borélienne.

Considérons T déterministe fini ou non et $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. On introduit maintenant deux suites de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que :

Hypothèse 9.1 :

- $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite strictement croissante de $[0, T]$ (les instants de saut) vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$$

- $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite à valeurs dans \mathbb{R}^d (les marques).

Définition 9.1 On appelle processus ponctuel marqué la mesure aléatoire à valeurs entières définie par :

$$\mu_{t,z} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \delta_{(T_n, Z_n)}(t, z)$$

¹Les deux prochains chapitres font l'objet d'une publication en préparation [42]

et le processus de saut associé le processus définie par :

$$N_t = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n \mathbb{I}_{[T_n \leq t]}$$

9.1.2 "Intégrale naturelles"

Définition 9.2 • Pour tout processus f mesurable et ou bien localement borné, ou bien non-négatif, on définit le processus :

$$\left\{ (f * \mu)_t(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \int_0^t \int_E f(s, z)(\omega) \mu(\omega, s, z) : t \in [0, T] \right\} \quad (9.1)$$

Cette intégrale est définie par :

$$\left\{ (f * \mu)_t(\omega) = \sum_{n \geq 1} f(T_n(\omega), Z_n(\omega)) \mathbb{I}_{[T_n(\omega) \leq t]} : t \in [0, T] \right\} \quad (9.2)$$

- Le processus N est à variation finie sur les compacts de temps, par conséquent, pour tout processus X mesurable et ou bien localement borné ou bien non-négatif, le processus

$$\left\{ (X \overset{(SL)}{*} N)_t(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \int_0^t X_s(\omega) dN_s(\omega) : t \in [0, T] \right\}$$

cette intégrale existe pour tout ω et tout $t \in \mathbb{R}^+$ au sens de Stieltjès-Lebesgue et on a :

$$\left\{ (X \overset{(SL)}{*} N)_t(\omega) = \sum_{n \geq 1} Z_n(\omega) X_{T_n(\omega)}(\omega) \mathbb{I}_{[T_n(\omega) \leq t]} : t \in [0, T] \right\}$$

9.1.3 Le compensateur prévisible, Intégrale stochastique

compensateur prévisible, mesure martingale aléatoire

Hypothèse 9.2 • La filtration $\{\mathfrak{F}_t : t \in [0, T]\}$ satisfait aux conditions habituelles de la théorie générale des processus.

- Le processus N est adapté.
- $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ pour tout t .

Propriété 9.1 Soit μ un processus ponctuel marqué sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ satisfaisant les hypothèses 9.2. Il existe une unique mesure ν sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ telle que :

- Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, le processus $\{\nu([0, t] \times B) : t \in [0, T]\}$ est prévisible.
- Pour tout processus prévisible non-négatif $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ (c'est à dire défini sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ et mesurable relativement à $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$) le processus défini par :

$$\left\{ (f \overset{(SI)}{*} (\mu - \nu))_t \stackrel{\text{not}}{=} (f * \mu)_t - (f \overset{(L)}{*} \nu)_t : t \in [0, T] \right\} \quad (9.3)$$

est une $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -martingale ($\overset{(L)}{*} \nu$ désigne l'intégrale de Lebesgue relative à la mesure ν).

Définition 9.3 La mesure ν s'appelle le compensateur prévisible de μ , on notera $\tilde{\mu} = \mu - \nu$ la mesure compensée.

Démonstration :

Pour pouvoir écrire ceci, il nous faut montrer que l'intégrale de droite de l'expression (9.3) a un sens. Pour cela, il suffit que la mesure ν soit de Radon sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. L'existence du compensateur est démontré dans Jacod [75] page 18. ◀

Théorème 9.1 (Jacod [75] page 86) Deux processus ponctuels marqués ayant le même compensateur ont même loi.

Propriété 9.2 Le processus de saut N admet pour compensateur prévisible le processus A suivant :

$$\left\{ A_t = \int_0^t \int_E z \nu(ds, dz), t \in [0, T] \right\}$$

on appellera processus de saut compensé le processus $\tilde{N} = N - A$.

Les propriétés de la martingale ainsi obtenue sont les suivantes :

Théorème 9.2 Pour tout processus f prévisible, $f \in \mathcal{L}^2(\nu)$, on a, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $s \in [0, T]$:

•

$$\mathbb{E} \left[(f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu})_t \right] = 0$$

•

$$[f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu} ; f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu}]_t = (f^2 \underset{*}{\mu})_t$$

•

$$\langle f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu} ; f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu} \rangle_t = (f^2 \underset{*}{(L)} \nu)_t$$

•

$$\mathbb{E} \left[(f \underset{*}{(SI)} \tilde{\mu})_t^2 \right] = \mathbb{E} \left[(f^2 \underset{*}{(L)} \nu)_t \right]$$

Remarque 9.1 Nous avons des énoncés équivalents avec \tilde{N} , N et A .

9.2 Intégrale au sens de Skohorod pour des mesures aléatoires

9.2.1 Restriction du cadre, motivations et mise en place de la problématique

Restriction du cadre

Hypothèse 9.3 Le compensateur ν s'écrit sous la forme :

$$\nu(\omega, ds, dz) = \lambda(s) ds \eta(dz)$$

où η est une mesure de probabilité (loi des Z_k).

Théorème 9.3 (Jacod [75] page 81) *Un Processus Ponctuel Marqué dont le compensateur est déterministe est un processus de Poisson marqué.*

Pour tout h déterministe, on a donc, en vertu du théorème 9.2 :

$$\| (h \overset{(SI)}{*} \tilde{N})_T \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \| h \|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \quad (9.4)$$

Cette relation va nous permettre de faire jouer à l'espace $\mathcal{L}^2(\nu)$ un rôle comparable à celui joué par l'espace de Cameron-Martin dans le cas Brownien.

Plongement dans l'espace de Poisson

L'idée de cette construction est de définir un opérateur de dérivation. Pour ce faire, le bon cadre est l'espace de Poisson Ω défini de la manière suivante :

On appelle Ω l'espace des mesures entières, simples et localement finies sur $[0, T] \times E$. T est déterministe fixé fini ou non. On notera (E, \mathcal{E}) l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

On définit la probabilité \mathbb{P} comme l'unique mesure sur Ω faisant de la mesure ω (mesure canonique) une mesure aléatoire de Poisson de compensateur ν . On définit également la filtration canonique \mathfrak{F} par :

$$\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_t = \sigma \left\{ \int_0^s \int_B \omega(ds, dz), s \leq t, B \in \mathcal{E} \right\}$$

On notera enfin, \mathcal{P} la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times E$.

Mise en place de la problématique

L'objectif du travail de Decreusefond est de trouver un opérateur de dérivation c'est à dire qu'étant donné une variable aléatoire F et une direction h déterministe, on puisse définir une variable aléatoire $DF(h)$ telle que :

- Ce soit un opérateur de dérivation :

$$DFG(h) = FDG(h) + GDF(h) \quad (9.5)$$

- qui vérifie la formule d'intégration par parties :

$$\mathbb{E}[DF(h)] = \mathbb{E} \left[F \cdot (h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T \right] \quad (9.6)$$

Remarque 9.2 *C'est l'extension de la relation (9.6) à des processus stochastiques h qui nous fournira une notion d'intégrale anticipative.*

9.2.2 L'opérateur de dérivation de Decreusefond [35]

Les hypothèses

Outre les hypothèses 9.1 page 121, 9.2 page 122 et 9.3 page 123, nous allons demander au compensateur de satisfaire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 9.4 • λ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, T]$.

•

$$\exists m > 0, \forall s \in [0, T], 0 < m < \lambda(s)$$

L'idée générale et démonstration de certaines étapes clé dans le cas Poisson standard

L'idée est basée sur les considérations suivantes : étant donnée $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$, il s'agit de déterminer un opérateur T^h et une mesure de probabilité \mathbb{P}_{T^h} absolument continue par rapport à la probabilité \mathbb{P} et tels que :

$$\mathcal{L}(\omega, \mathbb{P}) = \mathcal{L}(T_w^h, \mathbb{P}_{T^h})$$

En introduisant le processus défini par :

$$L_{T^h}(t) = \left. \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_{T^h}} \right|_{\mathfrak{F}_t}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [F(T^h\omega)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T^h}} [F(\omega)] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [F(\omega) \cdot L_{T^h}] \end{aligned}$$

En perturbant l'opérateur on obtient la relation :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{1}{\epsilon} (F(T_\epsilon^h\omega) - F(\omega)) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[F(\omega) \frac{1}{\epsilon} (L_{T_\epsilon^h} - 1) \right]$$

Il s'agit de déterminer un opérateur T^h de sorte que :

$$\mathcal{L}^2 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (L_{T_\epsilon^h} - 1) = \int_0^T \int_E h(s, z)(\omega - \nu)(ds, dz) \quad (9.7)$$

et de définir l'opérateur par :

$$\bar{D}F(h) = \mathcal{L}^2 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F(T_\epsilon^h\omega) - F(\omega))$$

La relation (9.5) est alors vérifiée. La relation (9.6) n'est pas facile à montrer à ce stade.

Il est naturel, pour avoir (9.7) de poser :

$$L_{T_\epsilon^h}(t) = \mathcal{E}\mathcal{D} \left(\epsilon \int_0^t \int_E h(s, z)(\omega - \nu)(ds, dz) \right)_t \quad (9.8)$$

$\mathcal{E}\mathcal{D}(X)$ désigne l'exponentielle de Doléans de X (voir Jacod [75] p. 190).

La difficulté est de trouver l'opérateur T_ϵ^h . Pour ce faire, Decreusefond a considéré $T_\epsilon^h\omega$ comme étant le processus qui saute à l'instant $s + v_\epsilon^h(s, z)$ avec la marque z quand le processus ω saute à l'instant s avec la marque z avec :

$$\begin{aligned} v_\epsilon^h(s, z) &= v^{-1} \left(\int_0^s (1 + \epsilon h(u, z)\lambda(u)) du \right) - s \\ v^{-1}(s) &= \inf \{ r \geq 0 : v(r) = s \} \\ v(s) &= \int_0^s \lambda(u) du \end{aligned}$$

Pour donner une idée de la démonstration, regardons ce qui se passe sur le processus de Poisson standard (λ constant). Dans ce cas le théorème de Girsanov nous dit que l'on passe d'un Processus de Poisson d'intensité λ à un processus de Poisson d'intensité $\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \epsilon h(t))$ en utilisant le changement absolument continu de probabilité de densité :

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathfrak{F}_t} = \mathcal{E}\mathcal{D} \left(\epsilon \int_0^t h(s)(\omega - \lambda)(ds) \right)_t$$

Par conséquent, le compensateur de $T_\epsilon^h \omega$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$ est donné par :

$$(I) = \int_0^T \mathbb{I}_{[0,t)}(s + v_\epsilon^h(s))(1 + \epsilon h(s)) \lambda ds$$

mais ici on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= \lambda t \\ v^{-1}(t) &= \frac{t}{\lambda} \\ v_\epsilon^h(t) &= \int_0^t (1 + \epsilon h(s)) ds - t \end{aligned}$$

On effectue, dans (I) le changement de variable $u = s + v_\epsilon^h(s)$, comme on a :

$$\begin{aligned} du &= (1 + (v_\epsilon^h)'(s)) ds \\ &= (1 + ((1 + \epsilon h(s)) - 1)) ds \\ &= (1 + \epsilon h(s)) ds \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (I) &= \int_0^{T+v_\epsilon^h(T)} \mathbb{I}_{[0,t)}(u) \lambda du \\ &= \int_0^t \lambda du \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que $t \leq T$ et $v_\epsilon^h(T) > 0$ (h étant non-négative). Par conséquent, $T_\epsilon^h \omega$ sous $\tilde{\mathbb{P}}$ a le même compensateur que ω sous \mathbb{P} . En vertu du théorème 9.1, ils ont même loi.

Les opérateurs introduits par Decreusefond

Définition 9.4 Une fonctionnelle $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite lisse dès que, pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$, il existe une variable aléatoire de carré intégrable $\hat{D}F(h)$ telle que :

$$\mathbb{L}^2 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(F(\omega) - F(T_\epsilon^h \omega) - \epsilon \hat{D}F(h) \right) = 0$$

Cet opérateur nous permet d'établir la relation (9.6) malheureusement d'une part il est difficile de voir à partir de cette écriture si (9.5) est vérifiée et d'autre part les fonctions lisses sont difficiles à identifier.

Définition 9.5 Considérons \mathcal{S} l'espace des variables aléatoires de la forme

$$F = f\left(\int_0^T \int_E f_1(s)g_1(z)\omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s)g_n(z)\omega(ds, dz)\right)$$

où f est une fonction deux fois dérivable bornée et à dérivées bornées. $f_i g_i \in \mathcal{L}^2(\nu)$ f_i est continûment dérivable avec une dérivée bornée pour tout $i = 1 \dots n$.

Définition 9.6 Pour toute fonctionnelle $F \in \mathcal{S}$ et tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$, $DF(h)$ est définie par

$$\begin{aligned} DF(h) = & \\ - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} & \left(\int_0^T \int_E f_1(s)g_1(z)\omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s)g_n(z)\omega(ds, dz) \right) \\ & \cdot \int_0^T \int_E f'_i(s)g_i(z) \left(\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s h(r, z)\lambda(r) dr \right) \omega(ds, dz). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Théorème 9.4 Soient $F, G \in \mathcal{S}$, et $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$.

- F est dense dans \mathbb{L}^2 et F dans \mathcal{S} implique F lisse.

-

$$\hat{D}F(h) = DF(h)$$

Remarque 9.3 Les résultats valables pour D sont donc valables pour \hat{D} .

- $FG \in \mathcal{S}$

$$DFG(h) = FDG(h) + GDF(h)$$

-

$$\mathbb{E}[DF(h)] = \mathbb{E}\left[F \cdot (h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T\right]. \quad (9.10)$$

Démonstration :

Voir Decreasefond [35].

- Théorème 4 page 509,
- Théorème 4 page 509,
- Lemme 2 page 506,
- Théorème 5 page 511.

◀

9.2.3 Introduction du gradient stochastique

Théorème 9.5 Pour tout $F \in \mathcal{S}$ il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$, on ait :

$$\mathbb{E}[|DF(h)|^2] \leq c \|h\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2$$

Démonstration :

En utilisant le fait que les variables f_i , f'_i et g_i sont bornées, il existe une constante c_1 telle que :

$$\mathbb{E}[|DF(h)|^2] \leq n \cdot c_1 \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T \int_E \frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s h(r, z)\lambda(r) dr \omega(ds, dz)\right|^2\right] \quad (9.11)$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse (9.4) de minoration de λ on a :

$$\mathbb{E} [|DF(h)|^2] \leq \frac{n \cdot c_1}{m^2} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \int_E \left[\int_0^s h(r, z) \lambda(r) dr \right] \omega(ds, dz) \right|^2 \right]$$

D'autre part, en remarquant que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse 9.3 sur la mesure ν (déterministe) on a, pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \int_E h(s, z) \omega(ds, dz) \right|^2 \right] \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \int_E h(s, z) (\omega - \nu)(ds, dz) \right|^2 \right] \\ & \quad + 2 \left| \int_0^T \int_E h(s, z) \nu(ds, dz) \right|^2 \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E h(s, z)^2 (\omega - \nu)(ds, dz) \right] \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E (\omega - \nu)(ds, dz) \right] \\ & \quad + 2 \int_0^T \int_E h(s, z)^2 \nu(ds, dz) \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E h(s, z)^2 \nu(ds, dz) \right] \cdot \nu([0, T] \times E) \\ & \quad + 2 \int_0^T \int_E h(s, z)^2 \nu(ds, dz) \\ & \leq 2 \left(1 + \nu([0, T] \times E) \right) \int_0^T \int_E h(s, z)^2 \nu(ds, dz) \end{aligned}$$

On obtient alors la relation suivante, :

$$\mathbb{E} [|DF(h)|^2] \leq \frac{n \cdot c_2}{m^2} \int_0^T \int_E \left[\int_0^s h(r, z) \lambda(r) dr \right]^2 \nu(ds, dz) \quad (9.12)$$

On utilise maintenant la forme spéciale de la mesure ν (hypothèse 9.3) pour écrire :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_E \left[\int_0^s h(r, z) \lambda(r) dr \right]^2 \lambda(s) \eta(dz) ds \\ & \leq \int_0^T \int_E \left(\int_0^s h^2(r, z) \lambda(r) dr \right) \left(\int_0^s \lambda^2(r) dr \right) \lambda(s) \eta(dz) ds \\ & \leq \int_0^T \int_E \left(\int_0^T h^2(r, z) \lambda(r) dr \right) \left(\int_0^T \lambda^2(r) dr \right) \lambda(s) \eta(dz) ds \\ & \leq \int_0^T \int_E \left(\int_0^T h^2(r, z) \|\lambda\|_2^2 \lambda(r) dr \right) \lambda(s) \eta(dz) ds \quad (9.13) \\ & \leq \|\lambda\|_2^2 \int_0^T \lambda(s) ds \int_0^T \int_E h^2(r, z) \lambda(r) dr \eta(dz) \\ & \leq \|\lambda\|_2^2 \|\lambda\|_1 \int_0^T \int_E h^2(r, z) \lambda(r) dr \eta(dz) \end{aligned}$$

De la relation (9.12) et du résultat précédent on déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\mathbb{E}[|DF(h)|^2] \leq C \int_0^T \int_E h^2(r, z) \lambda(r) dr \eta(dz)$$

Ce qui démontre le résultat. ◀

Corollaire 9.1 *Pour tout $F \in \mathcal{S}$, il existe $\nabla F \in \mathbb{L}^2([0, T] \times E \times \Omega, \nu \otimes d\mathbb{P})$ mesurable en les trois variables et telle que :*

$$DF(h) = \langle \nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \quad \forall h \in \mathcal{L}^2(\nu)$$

Démonstration :

Soit $F \in \mathcal{S}$ fixé. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \theta_F : \mathcal{L}^2(\nu) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h \otimes G &\rightarrow \mathbb{E}[GDF(h)] \end{aligned}$$

C'est une application linéaire, montrons qu'elle est continue. Pour cela, on considère le produit tensoriel projectif (voir Köthe [82] chapitre 41 pour plus de détails) équipé de la semi-norme :

$$\|z\| = \inf \sum_{i=1}^n \|h_i\|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \|G_i\|_2$$

où l'inf est pris sur les z de la forme $z = \sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i$.

Pour montrer la continuité, il suffit de montrer, pour un tenseur, l'existence d'une constante C telle que :

$$|\phi_F(\sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i)| \leq C \|\sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i\| \quad (9.14)$$

Mais on a,

$$\begin{aligned} |\phi_F(\sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i)| &\leq \sum_{i=1}^n |\mathbb{E}[G_i DF(h_i)]| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|G_i\|_2 \|DF(h_i)\|_2 \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n \|G_i\|_2 \|h_i\|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \quad (9.16)$$

(9.15) n'est autre que l'inégalité de Hölder et (9.16) vient du théorème précédent. C ne dépend ni de h ni de G donc :

$$|\phi_F(\sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i)| \leq C \|\sum_{i=1}^n h_i \otimes G_i\|$$

Donc, ϕ_F est linéaire continue. En utilisant l'identification des produits tensoriels d'espaces de type \mathcal{L}^2 :

$$\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T] \times E; d\mathbb{P} \otimes \nu) \sim \mathcal{L}^2(\nu) \otimes \mathbb{L}^2(\Omega)$$

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation de Riesz qui nous donne l'existence d'une variable mesurable $\nabla F \in \mathbb{L}^2([0, T] \times E \times \Omega, \nu \otimes d\mathbb{P})$ telle que :

$$\begin{aligned}\phi_F(G \otimes h) &= \langle \nabla F ; G \otimes h \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega) \otimes \mathcal{L}^2(\nu)} \\ &= \mathbb{E}[G \langle \nabla F ; h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}]\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}[GDF(h)] = \mathbb{E}[G \langle \nabla F ; h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}]$$

ceci est vrai pour tout $G \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ce qui conclue la démonstration. ◀

Définition 9.7 On appelle gradient stochastique l'application :

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{L}^2([0, T] \times E \times \Omega, \nu \otimes d\mathbb{P}) \\ F &\longrightarrow \nabla F\end{aligned}$$

Propriété 9.3 Pour tout F et G dans \mathcal{S} et tout h dans $\mathcal{L}^2(\nu)$ on a :

•

$$\nabla FG = F\nabla G + G\nabla F$$

•

$$\mathbb{E}[\langle \nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] = \mathbb{E}\left[F \cdot (h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T\right]$$

Théorème 9.6 L'application $F \rightarrow \nabla F$ est fermable dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$.

Démonstration :

Soit $\{F_n, n \geq 1\}$ une suite de \mathcal{S} telle que F_n converge vers 0 dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ et telle que ∇F_n converge vers une limite appelée ζ .

Pour tout $G \in \mathcal{S}$ et tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle \zeta, h \rangle \cdot G] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle \nabla F_n, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \cdot G] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\langle \nabla F_n \cdot G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[\langle \nabla(F_n G), h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] - \mathbb{E}[\langle \nabla G \cdot F_n, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}[\langle \nabla(F_n G), h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] - \mathbb{E}[\langle \nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} F_n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}\left[F_n G \cdot (h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T\right] - \mathbb{E}[\langle \nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} F_n]) \\ &= 0\end{aligned}$$

Cette limite est nulle car F_n tend vers 0. Comme \mathcal{S} est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}[\langle \zeta, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \cdot G] = 0$$

pour tout G et donc $\langle \zeta, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} = 0$ \mathbb{P} -*p.s.* et comme cette relation est vraie pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$ on en déduit que $\zeta = 0$ \mathbb{P} -*p.s.*

Définition 9.8 On introduit sur \mathcal{S} la norme :

$$\forall F \in \mathcal{S}, \quad \|F\|_{2,1}^2 = \|F\|_2^2 + \mathbb{E} \left[\|\nabla F\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right]$$

et on introduit l'espace $\mathbb{D}_{2,1}$ est la fermeture de \mathcal{S} relativement à la norme $\|\cdot\|_{2,1}$.

Remarque 9.4 Si $F \in \mathbb{D}_{2,1}$ alors F est lisse au sens de la définition 9.4 et pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$, on a $DF(h) = \hat{D}F(h)$.

Définition 9.9 On appelle gradient stochastique associé à l'opérateur de dérivation directionnel l'application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathbb{D}_{2,1} &\longrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{L}^2(\nu)) \\ F &\longrightarrow \nabla F \end{aligned}$$

Théorème 9.7 Pour $(F, G) \in (\mathbb{D}_{2,1})^2$, et $f \in \mathcal{C}^1$, on a :

•

$$\nabla FG = G\nabla F + F\nabla G$$

•

$$\nabla(f(F)) = f'(F)\nabla F$$

Démonstration :

1/ Soit $h \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{L}^2(\nu))$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla FG, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} &= DFG(h) \\ &= GDF(h) + FDG(h) \\ &= G \langle \nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} + F \langle \nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \\ &= \langle G\nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} + \langle F\nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \\ &= \langle G\nabla F + F\nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \end{aligned} \tag{9.17}$$

(9.17) est due au fait que F et G sont des variables aléatoires et ne dépendent donc que de ω .

Ceci est vrai pour tout h ce qui prouve le résultat.

2/ Soit $h \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{L}^2(\nu))$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(F), h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} &= D(f(F))(h) \\ &= f'(F)DF(h) \\ &= f'(F) \langle \nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \\ &= \langle f'(F)\nabla F, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout h ce qui prouve le résultat.

Propriété 9.4 Si $F \in \mathbb{D}_{2,1}$ est \mathfrak{F}_t -mesurable alors pour tout h à support dans $]t, T] \times E$, $DF(h) = 0$.

Démonstration :

On va démontrer le résultat sur une fonction de \mathcal{S} le résultat en découlera par passage à la limite. Une fonction de \mathcal{S} \mathfrak{F}_t -mesurable est de la forme :

$$F = f\left(\int_0^T \int_E f_1(s)g_1(z)\omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s)g_n(z)\omega(ds, dz)\right)$$

avec les f_i à support dans $[0, t]$. On peut alors écrire pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$ à support dans $]t, T] \times E$:

$$\begin{aligned} DF(h) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^T \int_E f_1(s)g_1(z)\omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s)g_n(z)\omega(ds, dz) \right) \\ &\quad \cdot \int_0^t f'_i(s)g_i(z) \left(\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s h(r, z)\lambda(r) dr \right) \omega(ds, dz) \\ &\quad + - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^T \int_E f_1(s)g_1(z)\omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s)g_n(z)\omega(ds, dz) \right) \\ &\quad \cdot \int_t^T f'_i(s)g_i(z) \left(\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s h(r, z)\lambda(r) dr \right) \omega(ds, dz) \end{aligned}$$

D'une part, le premier terme de la somme de droite est nul car $h(r, z) = 0$ sur $[0, s] \times E$ pour tout $s \in [0, t]$ et d'autre part, le second terme de la somme est également nul car la dérivée $f'_i(s) = 0$ sur $]t, T]$.

◀

9.2.4 L'intégrale comme opérateur adjoint

Définition 9.10 Soit ζ une variable aléatoire de Ω dans $\mathcal{L}^2(\nu)$. on dit que ζ appartient au domaine de δ ($dom(\delta)$) s'il existe une constante $c(\zeta)$ telle que, pour tout $F \in \mathcal{S}$ on a :

$$|\mathbb{E}[DF(\zeta)]| \leq c(\zeta) \|F\|_2$$

Et dans ce cas, $\delta(\zeta)$ est défini par :

$$\mathbb{E}[F\delta(\zeta)] = \mathbb{E}[DF(\zeta)]$$

Propriété 9.5 •

$$\mathcal{L}^2(\nu) \subset dom(\delta)$$

•

$$\forall h \in \mathcal{L}^2(\nu), \quad \delta(h) = (h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T$$

Démonstration :

- Du résultat 4/ du théorème 9.4 qui nous assure que si $h \in \mathcal{L}^2(\nu)$ alors, pour tout $G \in \mathcal{S}$ on a :

$$\mathbb{E}[DG(h)] = \mathbb{E}\left[G.(h \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T\right] \quad (9.18)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[DG(h)] &= \mathbb{E}\left[G.(h \overset{(SI)}{*}(\omega - \nu))_T\right] \\ &\leq \|G\|_2 \cdot \|(h \overset{(SI)}{*}(\omega - \nu))_T\|_2 \\ &\leq \|G\|_2 \cdot \|h\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}\end{aligned}$$

Ce qui assure que $h \in \text{dom}(\delta)$.

- D'autre part, par définition de δ on a :

$$\mathbb{E}[G\delta(h)] = \mathbb{E}[\langle \nabla G, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}]$$

on en déduit donc en comparant avec (9.18) que :

$$\mathbb{E}\left[G.(h \overset{(SI)}{*}(\omega - \nu))_T\right] = \mathbb{E}[G\delta(h)] \quad \forall G \in \mathcal{S}$$

le résultat en découle en raison de la densité de \mathcal{S} .

◀

Théorème 9.8 Pour tout $a \in \mathcal{S}$ et tout $\zeta \in \mathcal{L}^2(\nu)$ on a :

•

$$a\zeta \in \text{dom}(\delta)$$

•

$$\delta(a\zeta) = a \delta(\zeta) - Da(\zeta) \quad (9.19)$$

Démonstration :

Soit $F \in \mathcal{S}$. Il est facile de voir par définition de $DF(\zeta)$ que si a est une variable aléatoire, on a :

$$DF(a\zeta) = aDF(\zeta)$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur de dérivation on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[DF(a\zeta)] &= \mathbb{E}[a DF(\zeta)] \\ &= \mathbb{E}[D(aF)(\zeta) - FD(a)(\zeta)] \\ &= \mathbb{E}[F a \delta(\zeta)] - \mathbb{E}[FD(a)(\zeta)]\end{aligned} \quad (9.20)$$

•

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[DF(a\zeta)]| &\leq |\mathbb{E}[F a \delta(\zeta)]| + |\mathbb{E}[FD(a)(\zeta)]| \\ &\leq \|F a\|_2 \|\delta(\zeta)\|_2 + \|F\|_2 \|D(a)(\zeta)\|_2 \\ &\leq C (\|F\|_2 \|\delta(\zeta)\|_2 + \|F\|_2 \|\zeta\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}) \\ &\leq C \|F\|_2\end{aligned}$$

La troisième inégalité vient de la bornitude de la variable a . Ceci démontre que $a.F \in \text{dom}(\delta)$.

- La relation (9.20) assure que, pour tout $F \in \mathcal{S}$ on a :

$$\mathbb{E}[F \delta(a\zeta)] = \mathbb{E}[DF(a\zeta)] = \mathbb{E}[F a \delta(\zeta)] - \mathbb{E}[FD(a)(\zeta)]$$

Ce qui démontre (9.19).

◀

9.2.5 Un sous espace particulier du domaine de δ

Construction

On va généraliser la construction précédente en considérant des variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{L}^2(\nu)$. Pour ce faire, on va définir la famille $\mathcal{S}(\mathcal{L}^2(\nu))$ des "processus" cylindriques de la forme :

$$\Phi = \sum F_i v_i \quad F_i \in \mathcal{S}, v_i \in \mathcal{L}^2(\nu)$$

et l'opérateur de dérivation de la forme :

$$D\Phi(h) = \sum DF_i(h) \otimes v_i \quad F_i \in \mathcal{S}, v_i \in \mathcal{L}^2(\nu)$$

Propriété 9.6 *Considérons une base orthonormée complète $\{a_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathcal{L}^2(\lambda(\cdot)dt)$ $\stackrel{not}{=} \mathcal{L}^2(\lambda)$ et une base orthonormée complète $\{b_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathcal{L}^2(\eta)$.*

Si $\lambda \in \mathcal{L}^2(\nu)$ et si $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{L}^2(\nu))$ alors l'opérateur $\nabla\zeta$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Démonstration :

Tout d'abord, remarquons que l'opérateur :

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{L}^2(ds) &\rightarrow \mathcal{L}^2(ds) \\ f &\rightarrow \int_0^\cdot f(r)\lambda(r)dr \end{aligned}$$

est de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{L}^2(ds)$ dans lui-même. En effet, on peut écrire

$$\theta_f(t) = \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\lambda(r)f(r)dr,$$

et le noyau $(t, r) \mapsto \mathbf{1}_{[0,t]}(r)\lambda(r)$ est clairement de carré intégrable dans $[0, 1]^2$. Il suffit maintenant d'utiliser (9.11) pour écrire :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sum_{j,k=1}^{\infty} \langle D\Phi(a_j \otimes b_k); D\Phi(a_j \otimes b_k) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right] \\ &\leq c \mathbb{E} \left[\sum_{j,k=1}^{\infty} \left[\int_0^T \int_E \left[\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s a_j(r)b_k(z)\lambda(r)dr \right] \omega(ds, dz) \right]^2 \right] \\ &\leq c \sum_{j,k=1}^{\infty} \left[\int_0^T \int_E \left[\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s a_j(r)b_k(z)\lambda(r)dr \right]^2 \nu(ds, dz) \right] \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \int_E b_k^2(z)\eta(dz) \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left[\frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s a_j(r)\lambda(r)dr \right]^2 \lambda(s)ds \right] \\ &\leq c \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \theta_{a_j}^2(s)ds, \\ &< \infty \end{aligned}$$

(la constante c varie d'une ligne à l'autre). Le résultat est établi. ◀

Propriété 9.7 Soit $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{L}^2(\nu))$, alors $\zeta \in \text{dom}(\delta)$

Démonstration :

C'est une conséquence directe du théorème 9.8, de la linéarité de δ et de la définition de $\mathcal{S}(\mathcal{L}^2(\nu))$. ◀

Pour motiver ce qui suit, on rappelle que dans le cas Brownien, on sait que :

$$\mathbb{E}[\delta(u)^2] = \mathbb{E}[\|u\|_{\mathcal{L}^2}^2] + \mathbb{E}[\text{trace}(\nabla u \circ \nabla u)] \quad (9.21)$$

Cette relation permet de définir une norme sur $\mathcal{S}(\mathcal{L}^2)$ et donc d'étendre le domaine de l'opérateur. Malheureusement, (9.21) n'est plus vraie dans le cas Poisson et on vise maintenant à trouver son homologue.

Propriété et Définition 9.1 Considérons l'espace \mathcal{H}^ν suivant :

$$\mathcal{H}^\nu = \left\{ h \in \mathcal{L}^2(\nu) : \frac{\partial h}{\partial s} \in \mathcal{L}^2(\nu) \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire :

$$\langle g, h \rangle_{\mathcal{H}^\nu} = \langle g, h \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} + \left\langle \frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}$$

On considère maintenant $\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ une base orthonormée complète de \mathcal{H}^ν qui vérifie

$$\varepsilon_i(T, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad (9.22)$$

On peut prendre, par exemple, quand T est fini la base de $\mathcal{L}^2([0, T])$ formée des fonctions :

$$\left\{ x \rightarrow \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et une base orthonormée quelconque de $\mathcal{L}^2(\nu)$. On note toujours $\{e_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ la base orthonormée complète de $\mathcal{L}^2(\nu)$.

Remarque 9.5 Il est évident que $\mathcal{H}^\nu \subset \mathcal{L}^2(\nu)$.

On définit maintenant l'espace $\mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ avec des notations évidentes et l'on considère l'opérateur Γ suivant :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T] \times E, d\mathbb{P} \otimes \nu) \\ \zeta &\rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \Gamma(\varepsilon_i) \end{aligned}$$

avec $\Gamma(\varepsilon_i) = \nabla(\delta(\varepsilon_i))$.

Démonstration :

On va montrer l'existence de l'application Γ . Pour ce faire, on doit montrer que, pour tout $h \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$,

$$\mathbb{E}[\|\nabla(\delta(h))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2] < \infty$$

Soit $h \in \mathcal{H}^\nu$, on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\delta(h))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \nabla(\delta(h)), e_i \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} D(\delta(h))(e_i)^2 \end{aligned}$$

Comme $\delta(h)$ est cylindrique, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\|\nabla(\delta(h))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right] &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left[\int_0^T \int_E \frac{\partial h}{\partial s}(s, z) \frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s e_i(r, z) \lambda(r) dr \omega(ds, dz) \right]^2 \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \int_E \left[\frac{\partial h}{\partial s}(s, z) \frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s e_i(r, z) \lambda(r) dr \right]^2 \nu(ds, dz) \\
&\leq \int_0^T \int_E \left[\frac{\partial h^2}{\partial s}(s, z) \frac{1}{\lambda(s)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, \mathbb{I}_{[0, T]} \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right] \nu(ds, dz) \\
&\leq \frac{1}{m^2} \int_0^T \int_E \frac{\partial h^2}{\partial s}(s, z) \|\mathbb{I}_{[0, T]}\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \nu(ds, dz) \\
&\leq \frac{1}{m^2} \int_0^T \int_E \frac{\partial h^2}{\partial s}(s, z) \nu(ds, dz) \\
&\leq \frac{1}{m^2} \left\| \frac{\partial h}{\partial s} \right\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\|\delta(h)\|_{2,1} &= \mathbb{E}[\delta(h)^2] + \mathbb{E} \left[\|\nabla(\delta(h))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right] \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 + \frac{1}{m^2} \left\| \frac{\partial h}{\partial s} \right\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \\
&\leq \left(1 \wedge \frac{1}{m^2} \right) \|h\|_{\mathcal{H}^\nu}^2
\end{aligned}$$

De ce fait, on a $\delta : \mathcal{H}^\nu \rightarrow \mathbb{D}_{2,1}$ est continue et $\nabla : \mathbb{D}_{2,1} \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T] \times E, d\mathbb{P} \otimes \nu)$ est continue par construction donc l'application

$$\nabla \circ \delta : \mathcal{H}^\nu \rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T] \times E, d\mathbb{P} \otimes \nu)$$

est linéaire et continue. Par conséquent, il existe une constante C telle que :

$$\mathbb{E} \left[\|\nabla(\delta(h))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right] \leq C \|h\|_{\mathcal{H}^\nu}^2 \quad (9.23)$$

et en particulier on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{E} \left[\|\nabla(\delta(\varepsilon_i))\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right] \leq C \quad (9.24)$$

On prend maintenant $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ de la forme $\zeta = Fh$ avec $F \in \mathcal{S}$ (donc bornée) et $h \in \mathcal{H}^\nu$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\|\Gamma(\zeta)\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \Gamma(\varepsilon_i) \right\|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right]^2 \\
&\leq \|F\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}^2 \mathbb{E} \left[\|\Gamma(\varepsilon_i)\|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right]^2 \\
&\leq C \|F\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}^2 \\
&\leq C \|F\|_\infty^2 \|h\|_{\mathcal{H}^\nu}^2 < \infty
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat.



Remarque 9.6 Dans le cas Brownien, cet opérateur n'est autre que l'identité. Ici ce n'est plus vrai cependant, en moyenne on a encore cette propriété :

Propriété 9.8 Pour tout $h \in \mathcal{H}^\nu$, on a $\mathbb{E}[\Gamma(h)] = h$.

Démonstration :

En vertu de la démonstration précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varepsilon_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \Gamma(\varepsilon_i), e_j \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} e_j \\
\mathbb{E}[\Gamma(\varepsilon_i)] &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[\langle \Gamma(\varepsilon_i), e_j \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] e_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} - \int_0^T \int_E \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s}(s, z) \frac{1}{\lambda(s)} \int_0^s e_j(r, z) \lambda(r) dr \nu(ds, dz) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} - \int_0^T \int_E \int_0^T \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s}(s, z) e_j(r, z) \mathbb{I}_{[0, s]}(r) \lambda(r) dr ds \eta(dz) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} - \int_0^T \int_E e_j(r, z) \left[\int_0^T \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial s}(s, z) \mathbb{I}_{[r, T]}(s) ds \right] \lambda(r) dr \eta(dz) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} - \int_0^T \int_E e_j(r, z) (\varepsilon_i(T, z) - \varepsilon_i(r, z)) \lambda(r) dr \eta(dz) e_j
\end{aligned}$$

Avec la condition (9.22) on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Gamma(\varepsilon_i)] &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T \int_E e_j(r, z) \varepsilon_i(r, z) \lambda(r) dr \eta(dz) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} e_j \\
&= \varepsilon_i
\end{aligned}$$

Finalement, on a, pour $h \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(h) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \Gamma(\varepsilon_i) \\
\mathbb{E}[\Gamma(h)] &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle h, \varepsilon_j \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \mathbb{E}[\Gamma(\varepsilon_j)] \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \langle h, \varepsilon_j \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \varepsilon_j \\
&= h
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la propriété.



Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 9.9 • Pour tout $a \in \mathbb{D}_{2,1}$ et tout $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ on a :

$$\delta(a\zeta) = a \delta(\zeta) - \langle \nabla a, \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \quad (9.25)$$

• Pour tout $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ on a :

$$\delta(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \delta(\varepsilon_i) - \langle \langle \nabla \cdot \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \quad (9.26)$$

. désigne la variable sur laquelle agit le produit scalaire.

• Pour tout $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ on a :

$$\nabla_* \delta(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \nabla_*(\delta(\varepsilon_i)) + \delta(\nabla_* \zeta)$$

* désigne la variable restant libre.

• Pour tout $\zeta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ on a :

$$\mathbb{E}[\delta(\zeta)^2] = \mathbb{E}[\langle \zeta; \Gamma \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] + \mathbb{E}[\text{trace}(\nabla \zeta \circ \nabla \zeta)] \quad (9.27)$$

Démonstration :

- Même démonstration que pour le théorème 9.8.
- On a par définition :

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta; \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \varepsilon_i$$

Par conséquent, par linéarité et continuité de δ on a :

$$\delta(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(\langle \zeta; \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \varepsilon_i)$$

On applique maintenant la propriété 1/ avec $a = \langle \zeta; \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}$ et l'on obtient :

$$\delta(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \zeta; \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \delta(\varepsilon_i) - \langle \nabla \cdot (\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}), \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}]$$

Mais comme ε_i est déterministe, on peut intervertir le produit scalaire et le gradient on a :

$$\langle \nabla \cdot (\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}), \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} = \langle \langle \nabla \cdot \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}$$

Ce qui démontre le résultat.

- On sait que :

$$\delta(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \delta(\varepsilon_i) - \langle \langle \nabla \cdot \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \quad (9.28)$$

et donc que :

$$\delta(\nabla_* \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \nabla_* \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \delta(\varepsilon_i) - \langle \langle \nabla \cdot (\nabla_* \zeta), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \quad (9.29)$$

En dérivant (9.28) et en utilisant les propriétés de continuité et de dérivation de l'opérateur ∇ , on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_*(\delta(\zeta)) &= \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \nabla_*(\delta(\varepsilon_i)) + \nabla_*(\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}) \delta(\varepsilon_i) \\ &\quad - \nabla_* \langle \langle \nabla \cdot \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \end{aligned} \quad (9.30)$$

On intervertit l'opérateur ∇ et le produit scalaire, ε_i étant déterministe on obtient alors :

$$\begin{aligned} \nabla_*(\delta(\zeta)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \nabla_*(\delta(\varepsilon_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} [\langle \nabla_*(\zeta), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \delta(\varepsilon_i) - \langle \langle \nabla_*(\nabla \cdot \zeta), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \end{aligned}$$

On reconnaît par le deuxième terme le début du développement (9.29). Il suffit de donc de montrer que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle \langle \nabla_*(\nabla \cdot \zeta), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} &= \nabla_* \langle \langle \nabla \cdot \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \\ &= \langle \langle \nabla_*(\nabla \cdot \zeta), \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu}, \varepsilon_i(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \end{aligned}$$

Ce n'est donc rien d'autre qu'une interversion des opérateurs, le résultat est donc acquis.

•

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta(\zeta)^2] &= \mathbb{E}[\delta(\zeta)\delta(\zeta)] \\ &= \mathbb{E}[\langle \zeta_*, \nabla_* \delta(\zeta) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \\ &= \mathbb{E} \left[\langle \zeta_*, \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \nabla_*(\delta(\varepsilon_i)) + \delta(\nabla_* \zeta) \right) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\langle \zeta_*, \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^\nu} \nabla_*(\delta(\varepsilon_i)) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)} \right] \end{aligned} \quad (9.31)$$

$$+ \mathbb{E}[\langle \zeta_*, \delta(\nabla_* \zeta) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \quad (9.32)$$

$$= \mathbb{E}[\langle \zeta, \Gamma(\zeta) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] + \mathbb{E}[\langle \zeta_*, \delta(\nabla_* \zeta) \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \quad (9.33)$$

Remarque 9.7 $\nabla \zeta$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt par conséquent $\text{trace}(\nabla \zeta \circ \nabla \zeta)$ existe et de plus on a :

$$\mathbb{E}[\text{trace}(\nabla \zeta \circ \nabla \zeta)] \leq \mathbb{E}[\|\nabla \zeta\|_{\mathcal{L}^2(\nu) \otimes \mathcal{L}^2(\nu)}^2] \quad (9.34)$$

Par Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
(9.33) &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E \zeta_{s,z} \delta(\nabla_{s,z} \zeta) \nu(ds, dz) \right] \\
&= \int_0^T \int_E \mathbb{E} [\zeta_{s,z} \delta(\nabla_{s,z} \zeta)] \nu(ds, dz) \\
&= \int_0^T \int_E \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E \nabla_{u,v} \zeta_{s,z} \nabla_{s,z} \zeta_{u,v} \nu(du, dv) \right] \nu(ds, dz) \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_E \int_0^T \int_E \nabla_{u,v} \zeta_{s,z} \nabla_{s,z} \zeta_{u,v} \nu(du, dv) \nu(ds, dz) \right] \\
&= \mathbb{E} [\text{trace}(\nabla \zeta \circ \nabla \zeta)]
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat. ◀

Considérons pour $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ la norme suivante :

$$[\|\Phi\|_{2,1}^\Gamma]^2 = \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} [\|\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2] + \mathbb{E} [\|\Gamma\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2] \right) + \mathbb{E} [\|\nabla\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\nu) \otimes \mathcal{L}^2(\nu)}^2]$$

Et considérons $\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^\nu)$ la fermeture de $\mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ au sens de cette norme.

Remarque 9.8 Dans le cas Brownien, Γ n'est autre que l'identité et l'on retrouve la définition usuelle de la norme $\mathbb{D}_{2,1}$.

Propriété 9.9 On a :

$$\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^\nu) \subset \text{dom}(\delta)$$

Démonstration :

Soit $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^\nu)$ et soit $\{\zeta_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathcal{H}^\nu)$ convergente vers ζ dans $\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^\nu)$. On a donc pour $F \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[DF(\zeta_n)]| &= |\mathbb{E}[F\delta(\zeta_n)]| \\
&\leq \|\delta(\zeta_n)\|_2 \|F\|_2 \\
&\leq [\mathbb{E}[\langle \zeta_n ; \Gamma\zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] + \mathbb{E}[\text{trace}(\nabla\zeta_n \circ \nabla\zeta_n)]]^{\frac{1}{2}} \|F\|_2 \quad (9.35)
\end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \zeta_n ; \Gamma\zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] &\leq \mathbb{E}[\|\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu)} \|\Gamma\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}] \\
&\leq \mathbb{E}[\|\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2] \mathbb{E}[\|\Gamma\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2]
\end{aligned}$$

Donc par la définition de la norme, la suite

$$\{\mathbb{E}[\langle \zeta_n ; \Gamma\zeta_n \rangle_{\mathcal{L}^2(\nu)}] : n \in \mathbb{N}^*\}$$

est convergente donc bornée par une constante disons A_1 . D'autre part,

$$\mathbb{E}[\text{trace}(\nabla\zeta_n \circ \nabla\zeta_n)] \leq \mathbb{E}[\|\nabla\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu) \otimes \mathcal{L}^2(\nu)}^2]$$

donc les suites

$$\left\{ \mathbb{E} \left[\|\nabla \zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}^2 \otimes \mathcal{L}^2(\nu) \right] : n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et donc} \quad \left\{ \mathbb{E}[\text{trace}(\nabla \zeta_n \circ \nabla \zeta_n)] : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

sont convergentes donc bornées par une constante disons A_2 . Enfin on a $\zeta_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\nu)} \zeta$ donc $DF(\zeta_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\nu)} DF(\zeta)$. Il ne reste plus qu'à faire tendre n à l'infini dans (9.35) pour écrire :

$$|\mathbb{E}[DF(\zeta)]| \leq (A_1 + A_2) \|F\|_2$$

ce qui prouve que $\zeta \in \text{dom}(\delta)$. ◀

Propriété 9.10 *Les résultats du théorème 9.9 sont encore valables pour ζ un processus de $\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^\nu)$.*

9.3 Intégrale de Skohorod pour les processus de Poisson marqués

Définition 9.11 *Pour tout processus u de la variable temporelle s on note*

$$\tilde{u} : (s, z) \rightarrow z.u(s)$$

Si $\tilde{u} \in \text{dom}(\delta)$, on note :

$$\delta^{\tilde{N}}(u) = \delta(\tilde{u})$$

On introduit également $\tilde{\lambda}$ la mesure définie par :

$$\tilde{\lambda}(ds) = \int_E z^2 \nu(ds, dz) = \int_E z^2 \eta(dz) \lambda(s) ds$$

Proposition 9.1 •

$$\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \subset \text{dom}(\delta^{\tilde{N}})$$

•

$$\forall h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}), \quad \delta^{\tilde{N}}(h) = (h \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_T$$

Démonstration :

Soit $u \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$. On a en utilisant la propriété 9.5 :

$$\begin{aligned} \delta^{\tilde{N}}(u) &= \delta(z.u) \\ &= (z.u \overset{(L)}{*} (\omega - \nu))_T \\ &= \int_0^T \int_E z u(s) (\omega - \nu)(ds, dz) \\ &= \int_0^T u(s) \int_E z (\omega - \nu)(ds, dz) \\ &= (u \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_T \end{aligned}$$

◀

Lemme 9.1 *On a alors :*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} = \|\tilde{u}\|_{\mathcal{L}^2(\nu)}$$

Démonstration :

$$\int_0^T \int_E \tilde{u}^2(s, z) \nu(ds, dz) = \int_0^T u^2(s) \int_E z^2 \nu(ds, dz) = \int_0^T u^2(s) \tilde{\lambda}(ds)$$

Il est alors naturel de définir l'opérateur de dérivation par :

$$D^{\tilde{N}}F(u) = DF(\tilde{u}) \quad \forall F \in \mathcal{S}$$

En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[D^{\tilde{N}}F(u) \right] &= \mathbb{E} [DF(\tilde{u})] \\ &= \mathbb{E} [F\delta(\tilde{u})] \\ &= \mathbb{E} \left[F\delta^{\tilde{N}}(u) \right] \end{aligned} \tag{9.36}$$

L'introduction du gradient apparaît alors être égal à :

$$\nabla^{\tilde{N}}F = \frac{1}{\int_E z^2 \eta(dz)} \int_E \nabla_{s,z} F z \eta(dz)$$

En effet, on a, pour tout $F \in \mathcal{S}$ et tout u :

$$\begin{aligned} D^{\tilde{N}}F(u) &= DF(\tilde{u}) \\ &= \int_0^T \int_E \nabla_{s,z} F z u(s) \nu(ds, dz) \\ &= \int_0^T \int_E \nabla_{s,z} F z \eta(dz) u(s) \lambda(s) ds \\ &= \int_0^T \frac{1}{\int_E z^2 \eta(dz)} \int_E \nabla_{s,z} F z \eta(dz) u(s) \tilde{\lambda}(ds) \\ &= \langle \nabla^{\tilde{N}}F, u \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \end{aligned}$$

Remarque 9.9 *En vertu de (9.36) $\nabla^{\tilde{N}}$ est l'adjoint de $\delta^{\tilde{N}}$.*

On montre ainsi l'existence d'une variable aléatoire $\nabla^{\tilde{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ telle que :

$$D^{\tilde{N}}F(u) = \langle \nabla^{\tilde{N}}F; u \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}$$

Une fois ces outils mis en place, on peut définir les mêmes objets que pour une mesure aléatoire marquée c'est à dire définir un espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}}$, un espace de fonctionnelles cylindriques $\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$, un opérateur $\Gamma^{\tilde{N}}$ qui nous permet de définir une norme $\|\cdot\|_{2,1}^{\Gamma^{\tilde{N}}}$ et enfin un espace $\mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$ par fermeture au sens de la norme (voir définition 9.1 page 135). Cet espace est inclu dans le domaine de $\delta^{\tilde{N}}$ et on montre que :

Théorème 9.10 • *Pour tout $a \in \mathbb{D}_{2,1}$ et tout $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$ on a :*

$$\delta^{\tilde{N}}(a\zeta) = a \delta^{\tilde{N}}(\zeta) - \langle \nabla^{\tilde{N}}a; \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \tag{9.37}$$

- Soit $\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ une base orthonormée complète de $\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}}$ et considérons $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$ on a :

$$\delta^{\tilde{N}}(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}}} \delta^{\tilde{N}}(\varepsilon_i) - \langle \langle \nabla^{\tilde{N}} \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}}}, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \quad (9.38)$$

- Pour $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$ on a :

$$\nabla_*^{\tilde{N}} \delta^{\tilde{N}}(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \zeta, \varepsilon_i \rangle_{\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}}} \nabla_*^{\tilde{N}}(\delta^{\tilde{N}}(\varepsilon_i)) + \delta^{\tilde{N}}(\nabla_*^{\tilde{N}} \zeta)$$

* désigne la variable restant libre.

- Pour tout $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{H}^{\tilde{\lambda}})$ on a :

$$\mathbb{E} \left[\delta^{\tilde{N}}(\zeta)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\langle \zeta ; \Gamma^{\tilde{N}} \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] + \mathbb{E} \left[\text{trace}(\nabla^{\tilde{N}} \zeta \circ \nabla^{\tilde{N}} \zeta) \right] \quad (9.39)$$

9.4 Lien entre ces Intégrales

9.4.1 Lien avec les sommes de Riemann-Stieltjès

Théorème 9.11 • Soit $u \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{L}^2(\nu))$, alors on a :

$$\delta(u) = (u \overset{(SI)}{*} (\omega - \nu))_T - \int_0^T \int_E \nabla_{s,z} u_{s,z} \nu(ds, dz)$$

- Soit $u \in \mathbb{D}_{2,1}^{\tilde{N}}(\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}))$, alors on a :

$$\delta^{\tilde{N}}(u) = (u \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_T - \int_0^T \nabla_s^{\tilde{N}} u_s \tilde{\lambda}(ds)$$

Démonstration :

Pour alléger les notations nous allons démontrer le deuxième point. Le premier se démontre rigoureusement de la même façon mais fait intervenir deux variables, le temps et l'espace.

Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$ avec $u_i \in \mathbb{D}_{2,1}$ et soit $\phi \in \mathcal{S}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(u \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) \cdot \phi \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n u_i (\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}) \overset{(SL)}{*} \tilde{N} \phi \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) u_i \phi \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\delta^{\tilde{N}}(\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})}) u_i \phi \right] \end{aligned} \quad (9.40)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle \nabla^{\tilde{N}}[u_i \phi] ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle \phi \nabla^{\tilde{N}} u_i ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \quad (9.41)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle u_i \nabla^{\tilde{N}} \phi ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \quad (9.42)$$

$$\begin{aligned}
(9.41) &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \int_0^T \phi \nabla_s^{\tilde{N}}(u_i) \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \tilde{\lambda}(ds) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \nabla_s^{\tilde{N}} \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(s) \right) \tilde{\lambda}(ds) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \nabla_s^{\tilde{N}} u_s \tilde{\lambda}(ds) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(9.42) &= \mathbb{E} \left[\left\langle \nabla^{\tilde{N}} \phi ; \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi \delta^{\tilde{N}} \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]} \right) \right]
\end{aligned} \tag{9.43}$$

9.40 est due à l'équivalence entre les intégrales de Skohorod et de Stieltjès-Lebesgue pour des processus déterministes appliquée aux indicatrices.

9.43 les u_i sont des variables aléatoires, elles n'interviennent pas dans le produit scalaire.

L'égalité est vraie pour tout ϕ , on a donc démontré le résultat pour un processus u de la forme $u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$, le résultat général en découle par passage à la limite quand les deux membres de l'égalité convergent.

◀

9.4.2 Restriction de δ aux intégrants prévisibles

Théorème 9.12 • Les intégrales δ et $\overset{(SI)}{*}$ coïncident sur les processus prévisibles.

• Les intégrales $\delta^{\tilde{N}}$, $\overset{(SL)}{*}$ et $\overset{(SI)}{*}$ coïncident sur les processus prévisibles de la variable s .

Démonstration :

Considérons ϕ une fonction test.

Considérons un processus prévisible élémentaire u de la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

avec les u_i \mathfrak{F}_{t_i} -mesurables. Démontrer la propriété sur ces processus suffit, le cas général s'obtient par passage à la limite.

On applique la propriété 9.4 aux u_i qui sont \mathfrak{F}_{t_i} -mesurables en remarquant que $\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$ est à support dans $]t_i, T]$ on a :

$$\langle \nabla^{\tilde{N}} u_i ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} = 0 \quad \forall i$$

Comme ϕ est une variable aléatoire, elle n'intervient pas dans le produit scalaire. En réinjectant ceci dans la relation (9.41) on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\left(u \overset{(SL)}{*} \tilde{N} \right) \cdot \phi \right] = \mathbb{E} \left[\phi \delta^{\tilde{N}}(u) \right]$$

Ce qui montre que $\delta^{\tilde{N}}$ et $\overset{(SL)}{*}$ coïncident sur les processus prévisibles.

◀

Chapitre 10

Calcul stochastique pour des Processus de Poisson Filtrés

Dans ce chapitre, nous allons introduire une classe de processus que nous allons définir comme des perturbés d'un processus ponctuel marqué par un noyau déterministe. Le processus ainsi construit s'appellera un processus de Poisson Filtré.

Nous allons d'abord étudier les propriétés d'un tel processus puis définir une notion de calcul stochastique anticipatif relatif au processus de Poisson Filtré. Pour ce faire, nous allons utiliser le calcul anticipatif défini pour le processus ponctuel marqué sous-jacent. En dernier lieu, nous ferons le lien entre cette intégrale et l'intégrale au sens de Stieltjès-Lebesgue relative à ce processus.

10.1 Processus de Poisson Filtré

10.1.1 Définitions et conditions d'existence

Avec les notations du chapitre précédent, on introduit pour un noyau K donné les processus, quand ils existent, suivants :

$$\begin{aligned} N_t^K &= \int_0^t K(t, s) dN_s \\ &= \int_0^t \int_E z K(t, s) \omega(ds, dz) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Nous l'appellerons processus ponctuel marqué filtré. On introduit également le processus :

$$\tilde{N}_t^K = \int_0^t \int_E z K(t, s) (\omega - \nu)(ds, dz) \quad (10.2)$$

que nous appellerons processus ponctuel marqué filtré compensé.

Considérons maintenant la suite $\{(T_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}^*\}$ associée au processus ponctuel marqué, on obtient :

$$N_t^K = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} K(t, T_n) Z_n \mathbb{I}_{[T_n \leq t]} \quad (10.3)$$

Hypothèse 10.1 • L'application $(s, z) \rightarrow z K(t, s)$ est dans $\mathcal{L}^2(\nu)$ pour tout $t > 0$.

- K est triangulaire dans le sens où :

$$K(t, s) = 0 \quad \forall s > t > 0$$

- K n'explose pas sur la diagonale :

$$K(t, t) < \infty \quad \forall t \in [0, T]$$

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction :

$$K(t, \cdot) : \begin{array}{l} [0, t[\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longrightarrow K(t, s) \end{array}$$

est càdlàg.

1. Pour tout $s \geq 0$ la fonction :

$$K(\cdot, s) : \begin{array}{l} [s, T[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow K(t, s) \end{array} \quad \text{est à variation bornée}$$

Propriété 10.1 Sous l'hypothèse 10.1, les processus N^K et \tilde{N}^K sont bien définis.

Exemple 1

A partir de l'expression (10.3), on peut remarquer que cette classe de processus recouvre le "shot Poisson process" développé par exemple dans l'article de Samorodnitsky [123] et qui correspond à un noyau de type convolution. Ce processus a déjà fait preuve de beaucoup d'intérêt notamment en mathématiques financières.

Exemple 2

On peut également prendre comme noyau le noyau définissant le mouvement Brownien fractionnaire : $K^{(H)}$. On appellera Processus de Poisson Fractionnaire le processus défini par (10.1) et dont le processus ponctuel sous jacent est un processus de Poisson de paramètre λ non nécessairement constant.

Remarque 10.1 L'hypothèse 10.1 3/ exclut le cas du noyau $K^{(H)}$ avec $H < \frac{1}{2}$.

Exemple 3

On peut également introduire un processus du style Ornstein-Uhlenbeck en considérant le noyau :

$$(s, t) \rightarrow e^{\alpha(t-s)}$$

α une constante positive. On le notera $N^{(OU)}$.

10.1.2 Propriétés trajectorielles

Propriété 10.2 • N^K n'est pas un processus ponctuel marqué.

- Si K est continu,
 N^K a les mêmes instants de saut que N ,
- Si K est nul sur la diagonale et si K est continu,
 N^K est continu.

Théorème 10.1 Sous les hypothèses 10.1, le processus N^K est à variation finie sur les compacts de \mathbb{R} .

Démonstration :

Ce processus est défini comme une intégrale de Stieltjès-Lebesgue par rapport à un PPM. Le résultat en découle. ◀

Remarque 10.2 L'hypothèse 10.1 3/ assure à N^K d'être limité à gauche. Si de plus K est continu à droite alors le processus N^K est càdlàg.

10.1.3 Calcul des moments et de la fonction de covariance

Théorème 10.2 On a le résultat suivant pour tout $t \in [0, T]$ et tout $t' \in [0, T]$:

•

$$\mathbb{E}[\tilde{N}_t^K] = 0$$

•

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\tilde{N}_t^K)^2] &= \int_0^t \int_E z^2 K(t, s)^2 \nu(ds, dz) \\ &= \int_0^t K(t, s)^2 \tilde{\lambda}(ds) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{N}_t^K; \tilde{N}_{t'}^K) &= \int_0^{t \wedge t'} \int_E z^2 K(t, s) K(t', s) \nu(ds, dz) \\ &= \int_0^{t \wedge t'} K(t, s) K(t', s) \tilde{\lambda}(ds) \end{aligned}$$

Démonstration :

Ces formules sont connues sous le nom de formules de Campbell.

Cependant, on peut donner une idée de la démonstration en utilisant le lemme suivant qui est un résultat très intéressant en soi :

Lemme 10.1 Si pour tout $r \in [0, T]$ on a :

$$\int_0^T \int_E z^2 K^2(r, s) \nu(ds, dz) < \infty$$

Alors, pour tout $r \in [0, T]$ fixé, le processus :

$$\left\{ M_t^r = \int_0^t \int_E z K(r, s) (\omega - \nu)(ds, dz), t \in [0, T] \right\}$$

est une $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -martingale de variation quadratique :

$$\langle M^r, M^r \rangle_t = \int_0^t \int_E z^2 K^2(r, s) \nu(ds, dz) \quad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration :

Une fois r fixé, nous sommes en présence d'une intégrale stochastique relativement à la mesure martingale $(\omega - \nu)$ et donc en présence d'une martingale. ◀

- Évident.
- Comme M^r est une $(\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -martingale, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t^r)^2] &= \mathbb{E}[\langle M^r, M^r \rangle_t] \\ &= \int_0^t \int_E z^2 K^2(r, s) \nu(ds, dz) \end{aligned}$$

il suffit maintenant de prendre $r = t$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}[(M_t^t)^2] = \mathbb{E}[(N_t^K)^2] = \int_0^t \int_E z^2 K^2(t, s) \nu(ds, dz)$$

- S'obtient par polarisation.

10.1.4 Fonction caractéristique

Théorème 10.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$. La fonction caractéristique du vecteur $(N_{t_1}^K, \dots, N_{t_n}^K)$ est :

$$\begin{aligned} \Psi_{(t_1, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n x_j N_{t_j}^K \right) \right] \\ &= \exp \left[\int_0^T \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j K(t_j, u) \right] - 1 \right) \nu(du, dz) \right] \end{aligned}$$

Démonstration :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$.

$$\Psi_{(t_1, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n x_j N_{t_j}^K \right) \right] \quad (10.4)$$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p x_j Z_k K(t_j, T_k) \right) \mid N(T) = p \right] \right] \quad (10.5)$$

Or (10.5) ne change pas si on réordonne les T_k . D'autre part, on sait que $(T_k, Z_k)_{k=1, \dots, p}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de densité (voir Miller et Snyder [96] page 63) :

$$\frac{\lambda(t)}{\int_0^T \lambda(t) dt} \nu(dt, dz)$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 (10.5) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^p \frac{1}{\int_0^T \lambda(t) dt} \int_0^T \int_E \exp \left(i \sum_{i=1}^n x_j z K(t_j, t) \right) \nu(dt, dz) \mid N_T = p \right] \right] \\
 &= \mathbb{P}[N_T = 0] + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\int_0^T \lambda(t) dt \right]^p} \left[\int_0^T \int_E \exp \left(i \sum_{i=1}^n x_j z K(t_j, t) \right) \nu(dt, dz) \right]^p \mathbb{P}[N_T = p]
 \end{aligned}$$

Or on sait, (Voir Miller et Snyder [96] page 67), que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[N_T = p] = \frac{\left[\int_0^T \lambda(t) dt \right]^p}{p!} \exp \left(- \int_0^T \lambda(t) dt \right)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 (10.5) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[\int_0^T \int_E \exp \left(i \sum_{i=1}^n x_j z K(t_j, t) \right) \nu(dt, dz) \right]^p \exp \left(- \int_0^T \lambda(t) dt \right) \\
 &= \exp \left\{ \int_0^T \int_E \exp \left(i \sum_{i=1}^n x_j z K(t_j, t) \right) \nu(dt, dz) - \int_0^T \lambda(t) dt \right\}
 \end{aligned}$$

Pour finir, comme $\int_E \eta(dz) = 1$, on a :

$$\Psi_{(t_1, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \exp \left\{ \int_0^T \int_E \left[\exp \left(i \sum_{i=1}^n x_j z K(t_j, t) \right) - 1 \right] \nu(dt, dz) \right\}$$

◀

10.1.5 A propos de la stationnarité, de la stationnarité des accroissements et de la dépendance à long terme

Pour traiter la question de la stationnarité, il est nécessaire de se considérer un processus de Poisson Filtré \bar{N}^K sur \mathbb{R} c'est à dire considérer un processus de Poisson Marqué \bar{N} de compensateur $\bar{\nu}$, mesure sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ (et non seulement sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$:

$$\left\{ \bar{N}_t^K = \int_{-\infty}^t \int_E K(t, s) d\bar{N}_s : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Il est alors facile de démontrer que pour un noyau du type $K(t, s) = k(t - s)$, et si le processus sous jacent à pour compensateur $\bar{\nu}(ds, dz) = ds\eta(dz)$ ce processus est stationnaire. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}$ on a :

$$\bar{\Psi}_{(t_1+h, \dots, t_n+h)}(x_1, \dots, x_n) = \exp \left[\int_{\mathbb{R}} \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j K(t_j + h - u) \right] - 1 \right) d\eta(dz) \right]$$

Le changement de variable $v = u - h$ donne alors le résultat :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_{(t_1+h, \dots, t_n+h)}(x_1, \dots, x_n) &= \exp \left[\int_{\mathbb{R}} \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j K(t_j - v) \right] - 1 \right) d\eta(dz) \right] \\
 &= \bar{\Psi}_{(t_1, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

On a alors des critères sur K de dépendance à long terme (voir Surgailis et al. [64, 63] ou Ramirez-Perez et Serfling [115] pour des généralisations) par exemple, si le noyau vérifie :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} k(u+n)k(u)du = \infty$$

alors le processus est à dépendance à long terme.

Malheureusement, ces considérations ne donnent aucune information sur notre processus puisque l'on a :

$$N_t^K = \bar{N}_t^K - \bar{N}_0^K$$

Par contre, il serait intéressant d'avoir des informations sur la stationnarité des accroissements puisque N^K et \bar{N}^K ont les mêmes accroissements. Outre le résultat du paragraphe 10.2.4, aucun critère simple sur K ne permet d'avoir la stationnarité des accroissements. On peut cependant évoquer le cas du processus de Poisson fractionnaire qui possède la propriété de stationnarité faible des accroissements ce qui suffit pour démontrer la dépendance à long terme de ces accroissements. En effet, la fonction de covariance de ce processus est la même que celle du mouvement Brownien fractionnaire.

10.1.6 Conditions d'Auto-similarité

A partir de l'expression de la fonction caractéristique résultat du théorème 10.3, il est possible de donner des critères d'auto-similarité du processus N^K :

Propriété 10.3 1. On se place en horizon infini ($T = +\infty$).

Hypothèse 10.2 Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^{+2}$ on a $K(\alpha t, \alpha s) = \alpha^H K(t, s)$.

Sous l'hypothèse 10.2 alors on a le résultat général suivant :

$$\{N_{\alpha t}^K : t \in [0, T]\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\alpha^H \hat{N}_t^K : t \in [0, T]\}$$

\hat{N}^K est un processus de Poisson Filtré de filtre K et de processus sous-jacent un processus de Poisson marqué de compensateur $\alpha \lambda(\alpha s) ds \eta(dz)$.

2. Si $\lambda(s) = \frac{1}{s}$, alors N^K est auto-similaire d'ordre H .

3. Si pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $(s, t) \in [0, T]^2$ on a $K(\alpha t, s) = \alpha^H K(t, s)$ alors N^K est auto-similaire d'ordre H .

Démonstration :

Il suffit de regarder la fonction caractéristique :

$$\Psi_{(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \exp \left[\int_0^T \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j K(\alpha t_j, u) \right] - 1 \right) \nu(du, dz) \right]$$

Dans le cas 3/, on a alors :

$$\begin{aligned} \Psi_{(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \exp \left[\int_0^T \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j \alpha^H K(t_j, u) \right] - 1 \right) \nu(du, dz) \right] \\ &= \Psi_{(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)}(\alpha^H x_1, \dots, \alpha^H x_n) \end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat. Dans le cas du 1/ on a alors par changement de variable $u = \alpha s$:

$$\begin{aligned} \Psi_{(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \exp \left[\int_0^\infty \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j K(\alpha t_j, \alpha s) \right] - 1 \right) \lambda(\alpha s) \alpha ds \eta(dz) \right] \\ &= \exp \left[\int_0^\infty \int_E \left(\exp \left[i \sum_{j=1}^n z x_j \alpha^H K(t_j, s) \right] - 1 \right) \lambda(\alpha s) \alpha ds \eta(dz) \right] \\ &= \hat{\Psi}_{(\alpha t_1, \dots, \alpha t_n)}(\alpha^H x_1, \dots, \alpha^H x_n) \end{aligned}$$

Le résultat du 2/ est immédiat. ◀

Remarque 10.3 *La condition 3/ n'est pas compatible avec un noyau triangulaire.*

Exemple 10.1 *Le processus $N^{(H)}$ vérifie l'hypothèse 10.2 avec $\alpha = H$. Le processus $N^{(OU)}$ ne la vérifie pas.*

10.1.7 Remarques concernant la propriété de Martingale

Propriété 10.4 *Si l'application $(s, t) \rightarrow K(t, s)$ est continue alors le processus de Poisson filtré*

$$\left\{ \tilde{N}_t^K = \int_0^t K(t, s) d\tilde{N}_s : t \geq 0 \right\}$$

n'est pas une martingale.

Démonstration :

En effet, c'est un processus à variation finie donc une semi martingale et ses trajectoires sont continues. Si c'était une martingale alors il serait indistinguables du processus nul ce qui est absurde. ◀

Il est cependant important de noter le résultat suivant qui est une conséquence de la construction de l'intégrale stochastique :

Propriété 10.5 *Le processus défini pour tout $r \in \mathbb{R}$ fixé par :*

$$\left\{ \tilde{N}_t^{K,r} = \int_0^t K(r, s) d\tilde{N}_s : t \geq 0 \right\}$$

est une martingale.

Cette propriété est très importante puisqu'à la base des résultats des chapitres 11 et 12.

10.2 Intégrale "naturelle" pour le FPPM

10.2.1 Intégrale de Stieltjès-Lebesgue relativement à N^K

Théorème 10.4 *Pour toute fonction f localement bornée, on peut définir, au sens de Stieltjès-Lebesgue, le processus suivant :*

$$\left\{ (f \overset{(SL)}{*} N^K)_t : t \in [0, T] \right\}$$

Démonstration :

Découle du théorème 10.1, le processus N^K étant à variation finie. L'intégrale est donc bien définie. ◀

Théorème 10.5 *Il existe une application :*

$$\mathcal{K}^* : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$$

tels que :

- \mathcal{K}^* est linéaire, continue et $\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0,t]}) = K(t, \cdot)$,
- Pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ localement bornée, on a :

$$(f \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t = (\mathcal{K}^*(f) \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_t \quad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration :

- • **Lemme 10.2** *Il existe une constante C telle que, pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ on a :*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(dt)} \geq C \|f\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \quad (10.6)$$

Démonstration :

Par définition on a :

$$\tilde{\lambda}(ds) = \int_E z^2 \eta(dz) \lambda(s) ds$$

donc en utilisant l'hypothèse 9.4 on peut écrire :

$$\int_0^T f^2(s) \tilde{\lambda}(ds) = \int_E z^2 \eta(dz) \int_0^T f^2(s) \lambda(s) ds \geq m \int_E z^2 \eta(dz) \int_0^T f^2(s) ds$$

En introduisant la constante $C^2 = m \int_E z^2 \eta(dz)$ on obtient la relation (10.6). ◀

- On introduit maintenant l'opérateur K suivant :

$$\begin{aligned} K : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) &\rightarrow \mathcal{L}^2(dt) \\ f &\rightarrow \int_0^T K(t, s) f(s) \tilde{\lambda}(ds) \end{aligned}$$

On sait par [45] que K est un opérateur continu de $\mathcal{L}^2(dt)$ dans $\mathcal{L}^2(dt)$ donc il existe une constante c_1 telle que :

$$\begin{aligned} \|K(f)\|_{\mathcal{L}^2(dt)} &\leq c_1 \|f\|_{\mathcal{L}^2(dt)} \\ &\leq c_2 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \end{aligned} \quad (10.7)$$

donc K est un opérateur continu de $\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ dans $\mathcal{L}^2(dt)$.

- On introduit maintenant l'opérateur :

$$I_{T-}^T : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \rightarrow \mathcal{L}^2(dt)$$

$$f \rightarrow \int_0^T f(s) ds$$

On a :

$$\begin{aligned} \|I_{T-}^T(f)\|_{\mathcal{L}^2(dt)}^2 &= \int_0^T \left(\int_s^T f(u) du \right)^2 ds \\ &\leq \int_0^T \int_s^T f^2(u) du ds \\ &\leq \int_0^T \int_0^T f^2(u) du ds \\ &\leq m^{-1}T \int_0^T f^2(u) \tilde{\lambda}(u) du \\ &\leq c_3 \|f\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \end{aligned}$$

donc I_{T-}^T est continu de $\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ dans $\mathcal{L}^2(dt)$.

- On introduit pour $g \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$, la forme linéaire :

$$\theta_g : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \int_0^T g(s) K(f)(s) ds$$

En utilisant Cauchy-Schwartz et la relation (10.7) on montre que :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T g(s) K(f)(s) ds \right| &\leq \|g\|_{\mathcal{L}^2(dt)} \|K(f)\|_{\mathcal{L}^2(dt)} \\ &\leq c_4 \|g\|_{\mathcal{L}^2(dt)} \|f\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &\leq C \|f\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \end{aligned}$$

L'application linéaire est donc continue par conséquent il existe un opérateur K^* tel que :

$$\theta_g = \langle K^*(g), f \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}$$

c'est à dire

$$\int_0^T g(s) K(f)(s) ds = \int_0^T K^*(g)(s) f(s) \tilde{\lambda}(s) ds$$

- On définit finalement l'opérateur :

$$\mathcal{K}^* : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$$

$$f \rightarrow K^* \circ [I_{T-}^T]^{-1}(f)$$

Formellement, en considérant ϵ_t la mesure de Dirac en t , on a, pour tout $f \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$:

$$\int_0^T K^*(\epsilon_t) f(s) \tilde{\lambda}(ds) = K(f)(t) = \int_0^T K(t, s) f(s) \tilde{\lambda}(ds)$$

ce qui montre que

$$K^*(\epsilon_t) = K(t, \cdot)$$

et d'autre part on a :

$$I_{T-}^T(\epsilon_t) = \mathbb{I}_{[0, T]}$$

On en déduit donc que

$$\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0, t]}) = K(t, \cdot) \quad (10.8)$$

- On définit la notion d'intégrale relative à \tilde{N}^K par :

$$(f * \tilde{N}^K) = (\mathcal{K}^*(f) \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$$

Nous avons maintenant deux notions d'intégrales relativement à \tilde{N} . Voici le premier résultat :

Lemme 10.3 *Pour tout $t \in [0, T]$, on a :*

$$(\mathbb{I}_{[0, t]} * \tilde{N}^K)_t = \tilde{N}_t^K = (\mathbb{I}_{[0, t]} \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_{[0, t]} * \tilde{N}^K)_t &= (\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0, t]}) \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_t \\ &= (K(t, \cdot)(\mathbb{I}_{[0, t]}) \overset{(SL)}{*} \tilde{N})_t \\ &= \tilde{N}_t^K \\ &= (\mathbb{I}_{[0, t]} \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t \end{aligned}$$

L'extension à toutes les fonctions déterministes de $\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ s'effectue par continuité. ◀

10.2.2 Propriétés de l'intégrale de Stieltjès-Lebesgue

On définit sur l'espace vectoriel

$$\mathcal{I} = \{\mathbb{I}_{[0, t]} : t \in [0, T]\}$$

le produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbb{I}_{[0, t]}; \mathbb{I}_{[0, s]} \rangle_{\hat{\mathcal{I}}} = \langle K(t, \cdot); K(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}$$

Enfin, on définit l'espace $\hat{\mathcal{I}}$ fermeture de \mathcal{I} au sens du produit scalaire $\langle; \rangle_{\hat{\mathcal{I}}}$.

Théorème 10.6 • $\mathcal{K}^* : \hat{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ est une isométrie.

- Pour tout $f \in \hat{\mathcal{I}}$, $g \in \hat{\mathcal{I}}$ on a :

$$\mathbb{E} \left[(f \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K) \cdot (g \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K) \right] = \langle f, g \rangle_{\hat{\mathcal{I}}}$$

Démonstration :

- Soit $\mathbb{I}_{[0,t]} \in \mathcal{I}$, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{I}_{[0,t]}\|_{\hat{\mathcal{I}}} &= \|K(t, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \|\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0,t]})\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \end{aligned}$$

L'isométrie est donc vérifiée pour les éléments de \mathcal{I} , par passage à la limite, \mathcal{K}^* étant continue, on a le résultat voulu.

•

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(f \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K) \cdot (g \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K) \right] &= \mathbb{E} \left[(\mathcal{K}^*(f) \underset{*}{(SL)} \tilde{N}) \cdot (\mathcal{K}^*(g) \underset{*}{(SL)} \tilde{N}) \right] \\ &= \langle \mathcal{K}^*(f) \cdot \mathcal{K}^*(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \langle f, g \rangle_{\hat{\mathcal{I}}} \end{aligned} \quad (10.9)$$

La relation (10.9) est une conséquence de la relation 9.4 page 124 obtenue par polarisation. La dernière relation est due à l'isométrie au sens de $\langle, \rangle_{\hat{\mathcal{I}}}$.

◀

10.2.3 Question de filtration...

Théorème 10.7 *Les processus \tilde{N}^K et \tilde{N} ont les mêmes filtrations.*

Démonstration :

Dans un premier temps, on a, pour tout $t \in [0, T]$, il existe $(\alpha_i, t_i) \in (\mathbb{R} \times [0, T])^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$K(t, \cdot) = \mathcal{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{[0, t_i]} \quad (10.10)$$

Dans un deuxième temps, on a, pour tout $s \in [0, T]$, il existe $(\beta_i, s_i) \in (\mathbb{R} \times [0, T])^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$\mathbb{I}_{[0, s]} = \mathcal{L}^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i K(s_i, \cdot) \quad (10.11)$$

On applique maintenant la linéarité et la continuité de l'intégral $\underset{*}{(SL)} \tilde{N}$ de \mathcal{L}^2 dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ on en déduit :

D'une part, de (10.10),

$$\begin{aligned} (K(t, \cdot) \underset{*}{(SL)} \tilde{N}) &= \mathbb{L}^2(\mathbb{P}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbb{I}_{[0, t_i]} \underset{*}{(SL)} \tilde{N}) \\ \tilde{N}_t^K &= \mathbb{L}^2(\mathbb{P}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{N}_{t_i}}_{\in \mathfrak{F}_t} \\ \tilde{N}_t^K &\in \mathfrak{F}_t \end{aligned}$$

Ce qui démontre une première inclusion, on écrit maintenant à partir de (10.11) :

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_{[0,s]} \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) &= \mathbb{L}^2(\mathbb{P}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \beta_i (K(s_i, \cdot) \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) \\ \tilde{N}_s &= \mathbb{L}^2(\mathbb{P}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{N}_{s_i}^K}_{\in \mathfrak{F}_t^K} \\ \tilde{N}_t &\in \mathfrak{F}_t^K \end{aligned}$$

Ce qui démontre le théorème. ◀

10.2.4 Retour sur les accroissements stationnaires

Propriété 10.6 *Si N est un processus de Poisson standard, alors \tilde{N}^K est à accroissements stationnaires si et seulement si K vérifie les relations suivantes pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{cases} \int_0^T \mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[a,b]})(s) ds = \int_0^T \mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0,b-a]})(s) ds \\ \int_0^T \exp(\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[a,b]})(s)) ds = \int_0^T \exp(\mathcal{K}^*(\mathbb{I}_{[0,b-a]})(s)) ds \end{cases}$$

Démonstration :

Soit f une fonction déterministe.

On sait que

$$\int_0^T f(s) d\tilde{N}_s^K = (f \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K) = (\mathcal{K}^*(f) \overset{(SL)}{*} \tilde{N})$$

Comme N est un processus de Poisson, on connaît sa transformée de Laplace ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(- (f \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K) \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- (\mathcal{K}^*(f) \overset{(SL)}{*} \tilde{N}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \mathcal{K}^*(f)(s) dN_s \right) \right] \exp \left(\int_0^T \mathcal{K}^*(f)(s) ds \right) \\ &= \exp \left(\int_0^T -(1 - \exp(-\mathcal{K}^*(f)(s))) ds \right) \exp \left(\int_0^T \mathcal{K}^*(f)(s) ds \right) \end{aligned}$$

On utilise les relations :

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{I}_{[a,b]}(s) d\tilde{N}_s^K &= \tilde{N}_b^K - \tilde{N}_a^K \\ \int_0^T \mathbb{I}_{[0,b-a]}(s) d\tilde{N}_s^K &= \tilde{N}_{b-a}^K - \tilde{N}_0^K \end{aligned}$$

Le résultat en découle puisque deux variables ont même loi si et seulement si elles ont la même transformée de Laplace. ◀

10.3 Intégrale au sens de Skohorod relativement au FPPM

10.3.1 Définition de l'intégrale

Définition 10.1 Pour tout u tel que $\mathcal{K}^*(u) \in \text{dom}(\delta^{\tilde{N}})$ on définit l'intégrale relative à \tilde{N}^K par :

$$\begin{aligned}\delta^{\tilde{N}^K}(u) &= \delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u)) \\ &= \delta(z.\mathcal{K}^*(u))\end{aligned}$$

10.3.2 Dérivée directionnelle et gradient associés

Définition 10.2 Pour tout $F \in \mathcal{S}$, pour tout $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ on définit la dérivée directionnelle par :

$$\begin{aligned}D^{\tilde{N}^K} F(h) &= D^{\tilde{N}} F(\mathcal{K}^*(h)) \\ &= DF(z.\mathcal{K}^*(h))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{\tilde{N}^K} F(h) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\int_0^T \int_E f_1(s) g_1(z) \omega(ds, dz), \dots, \int_0^T \int_E f_n(s) g_n(z) \omega(ds, dz) \right) \\ &\quad \cdot \int_0^T \int_E f'_i(s) g_i(z) \left(\frac{z}{\lambda(s)} \int_0^s \mathcal{K}^*(h)(r) \lambda(r) dr \right) \omega(ds, dz)\end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes qui motivent cette définition :

Propriété 10.7 Pour tout $F, G \in \mathcal{S}$ et tout $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ on a :

•

$$D^{\tilde{N}^K}(FG)(h) = F.D^{\tilde{N}^K}G(h) + G.D^{\tilde{N}^K}F(h)$$

•

$$\mathbb{E} \left[D^{\tilde{N}^K} F(h) \right] = \mathbb{E} \left[F.\delta^{\tilde{N}^K} F(h) \right]$$

Démonstration :

• Soient $F, G \in \mathcal{S}$ et $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$ on a :

$$\begin{aligned}D^{\tilde{N}^K}(FG)(h) &= D^{\tilde{N}}(FG)(\mathcal{K}^*(h)) \\ &= F.D^{\tilde{N}}(G)(\mathcal{K}^*(h)) + G.D^{\tilde{N}}(F)(\mathcal{K}^*(h)) \\ &= F.D^{\tilde{N}^K}G(h) + G.D^{\tilde{N}^K}F(h)\end{aligned}$$

• En effet, soit $F \in \mathcal{S}$ et $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[D^{\tilde{N}^K} F(h) \right] &= \mathbb{E} \left[D^{\tilde{N}} F(\mathcal{K}^*(h)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[F.\delta^{\tilde{N}} F(\mathcal{K}^*(h)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[F.\delta^{\tilde{N}^K} F(h) \right]\end{aligned}$$

Propriété 10.8 *Il existe une variable aléatoire $\nabla^{\tilde{N}^K}$ à valeurs dans $\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$. Cette variable sera appelée gradient associé à $D^{\tilde{N}^K}$. On a, de plus :*

$$\nabla^{\tilde{N}^K} = \mathcal{K} \circ \nabla^{\tilde{N}}$$

Démonstration :

soit $F \in \mathcal{S}$ et $h \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$, on a :

$$\begin{aligned} D^{\tilde{N}^K} F(h) &= D^{\tilde{N}}(F)(\mathcal{K}^*(h)) \\ &= \langle \nabla^{\tilde{N}} F ; \mathcal{K}^*(h) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \langle \mathcal{K} \circ \nabla^{\tilde{N}} F ; h \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \end{aligned}$$

Il est maintenant trivial de vérifier que le gradient défini ci-dessus vérifie les propriétés d'intégration par parties et que c'est l'opérateur adjoint de $\delta^{\tilde{N}^K}$.

Propriété 10.9 *L'application $F \rightarrow \nabla^{\tilde{N}^K} F$ est fermable dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$.*

10.3.3 Introduction d'un sous espace particulier du domaine de $\delta^{\tilde{N}^K}$

L'espace qui va intervenir ici est l'espace :

$$\mathcal{H}^K = \left\{ \zeta \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) : \mathcal{K}^*(\zeta) \in \mathcal{H}^{\tilde{\lambda}} \right\}$$

Avec des notations maintenant classiques, on définit $\mathcal{S}(\mathcal{H}^K)$ et l'opérateur Γ^K par :

$$\begin{aligned} \Gamma^K : \mathcal{S}(\mathcal{H}^K) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega \times [0, T] \times E, d\mathbb{P} \otimes \nu) \\ \zeta &\rightarrow \mathcal{K} \circ \Gamma^{\tilde{N}} \circ \mathcal{K}^*(\zeta) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à étendre $\mathcal{S}(\mathcal{H}^K)$ au moyen d'une norme adéquate.

$$\|\Phi\|_{2,1}^{\Gamma^K} = \frac{1}{2} \left[\mathbb{E} \left[\|\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|\Gamma^K \Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|\nabla^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^* \Phi)\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \otimes \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] \right]$$

Considérons $\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^K)$ la fermeture de $\mathcal{S}(\mathcal{H}^K)$ au sens de cette norme.

Propriété 10.10

$$\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^K) \subset \text{dom}(\delta^{\tilde{N}^K})$$

On peut alors montrer la propriété suivante :

Théorème 10.8 • *Pour tout $a \in \mathbb{D}_{2,1}$ et tout $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}^K(\mathcal{H}^K)$ on a :*

$$\delta^{\tilde{N}^K}(a\zeta) = a \delta^{\tilde{N}^K}(\zeta) - \langle \nabla^{\tilde{N}^K} a ; \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \quad (10.12)$$

• *Pour tout $\zeta \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H}^K)$ on a :*

$$\mathbb{E} \left[\delta^{\tilde{N}^K}(\zeta)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\langle \zeta ; \Gamma^K \zeta \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] + \mathbb{E} \left[\text{trace}(\nabla^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^* \zeta) \circ \nabla^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^* \zeta)) \right] \quad (10.13)$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème 9.10 page 142 à $\mathcal{K}^* \zeta$ les résultats en découlent naturellement.

10.4 Lien entre ces deux intégrales

Théorème 10.9 Soit $u \in \mathbb{D}_{2,1}^K(\mathcal{L}^2([0, T]))$, alors, si les différents termes convergent, on a l'égalité suivante :

$$\delta^{\tilde{N}}(u) = (u \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K)_T - \int_0^T \nabla_s^{\tilde{N}} u_s \tilde{\lambda}(ds)$$

Démonstration :

Soit $u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}$ avec $u_i \in \mathbb{D}_{2,1}$ et soit $\phi \in \mathcal{S}$.

On a alors :

$$\mathbb{E} \left[\phi (u \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K)_T \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (u_i (\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}] \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K)_T) \phi \right] \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[((\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}] \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K)_T) u_i \phi) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\delta^{\tilde{N}}(\mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} u_i \phi) \right] \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle \nabla^{\tilde{N}}[u_i \phi] ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle \phi \nabla^{\tilde{N}}[u_i] ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle u_i \nabla^{\tilde{N}}[\phi] ; \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \quad (10.17)$$

$$\begin{aligned} (10.16) &= \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \sum_{i=1}^n \nabla_s^{\tilde{N}}[u_i] \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})}(s) \tilde{\lambda}(ds) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \sum_{i=1}^n \nabla_s^{\tilde{N}}[u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})}(s)] \tilde{\lambda}(ds) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\phi \int_0^T \nabla_s^{\tilde{N}} u_s \tilde{\lambda}(ds) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10.17) &= \mathbb{E} \left[\left\langle \nabla^{\tilde{N}}[\phi] ; \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\phi \delta^{\tilde{N}} \left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\phi \delta^{\tilde{N}}(u) \right] \end{aligned}$$

On a donc la relation suivante :

$$\mathbb{E} \left[\phi (u \underset{*}{(SL)} \tilde{N}^K)_T \right] = \mathbb{E} [\phi \text{trace}(\nabla^K u)] + \mathbb{E} [\phi \delta^K(u)]$$

qui est vraie pour tout ϕ , on a donc démontré le résultat pour un processus u de la forme $u = \sum_{i=1}^n u_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1]})}$, le résultat général en découle par passage à la limite quand les deux membres de l'égalité convergent.

◀

10.5 A propos du processus $\delta^{\tilde{N}^K}(u \mathbb{I}_{[0,.]})$

10.5.1 Résultat préliminaire

Théorème 10.10 Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Considérons \mathcal{K}_t^* l'adjoint de \mathcal{K} dans $\mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda}) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{L}_t^2([0, t], \tilde{\lambda})$. Pour tout $u \in \mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda})$, on a alors :

$$\mathcal{K}_t^*(u) = \mathcal{K}_1^*(u \mathbb{I}_{[0,t]}) \mathbb{I}_{[0,t]} \quad (10.18)$$

Démonstration :

Pour alléger les notations on écrira $\mathcal{L}^2 \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{L}^2(dt)$.

Rappelons les opérateurs définis au paragraphe 10.2.1 et les relations d'adjonction entre ceux-ci.

$$\begin{array}{lll} K : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) & \rightarrow & \mathcal{L}^2 \\ f & \rightarrow & \int_0^1 K(., s) f(s) \tilde{\lambda}(ds) \end{array} \quad \begin{array}{lll} K^* : \mathcal{L}^2 & \rightarrow & \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \\ f & \rightarrow & \int_0^1 K(s, .) f(s) ds \end{array}$$

K et K^* sont adjoints dans le sens suivant :

$$\langle g, Kf \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle K^*g, f \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}$$

En effet, pour tout $g \in \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})$, en utilisant Fubini à la troisième égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle K^*f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \langle f, Kg \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \int_0^1 f(s) \int_0^1 K(s, v) g(v) \tilde{\lambda}(v) dv ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(s) K(s, v) g(v) \tilde{\lambda}(v) ds dv \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(s) K(s, v) ds \right] g(v) \tilde{\lambda}(v) dv \end{aligned}$$

Le résultat en découle par identification. ◀

De même, les opérateurs suivants sont adjoints l'un de l'autre :

$$\begin{array}{lll} I_{1-} : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) & \rightarrow & \mathcal{L}^2 \\ f & \rightarrow & \int_t^1 f(s) ds \end{array} \quad \begin{array}{lll} I_{0+} : \mathcal{L}^2 & \rightarrow & \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \\ f & \rightarrow & \frac{1}{\tilde{\lambda}(.)} \int_0^t f(s) ds \end{array}$$

$$\begin{aligned} \langle f, I_{0+}(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} &= \int_0^1 f(s) \frac{1}{\tilde{\lambda}(s)} \int_0^s g(t) dt \tilde{\lambda}(s) ds \\ &= \int_0^1 f(s) \int_0^1 g(t) \mathbb{I}_{[0,s]}(t) dt ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(s) g(t) \mathbb{I}_{[t,1]}(s) dt ds \\ &= \int_0^1 g(t) \int_t^1 f(s) ds dt \\ &= \langle g, I_{1-}(f) \rangle_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}$$

Enfin, on note :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) &\rightarrow \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \\ f &\rightarrow [I_{0+}]^{-1} \circ K(f) \end{aligned}$$

Pour montrer 10.18, il suffit de montrer que pour tout $g \in \mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda})$ on a :

$$\langle \mathcal{K}_t^*(u), g \rangle_{\mathcal{L}_t^2} = \langle \mathcal{K}_1^*(u \mathbb{I}_{[0,t]}) \mathbb{I}_{[0,t]}, g \rangle_{\mathcal{L}_t^2} \quad (10.19)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_t^*(u), g \rangle_{\mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda})} &= \langle u, \mathcal{K}(g) \rangle_{\mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \langle u \mathbb{I}_{[0,t]}, \mathcal{K}(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \langle [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]}), K(g) \rangle_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(j, v) g(v) \tilde{\lambda}(v) dv \cdot [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj \end{aligned}$$

En appliquant Fubini entre “ dv ” et “ dj ”, on obtient :

$$\langle \mathcal{K}_t^*(u), g \rangle_{\mathcal{L}_t^2(\tilde{\lambda})} = \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{K(j, v) \cdot [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj}_{\Psi(t, v)} g(v) \tilde{\lambda}(v) dv$$

Montrons maintenant que $\Psi(t, v) = 0$ dès que $v \geq t$.

$$\Psi(t, v) = \int_v^1 K(j, v) \cdot [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj \quad (10.20)$$

$$+ \int_0^v K(j, v) \cdot [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj \quad (10.21)$$

D’une part, par triangularité, $K(j, v) = 0$ dès que $v \geq j$ et (10.21) est nul. D’autre part, par la régularité du noyau, il existe des constantes c_1 et c_2 telles que $c_1 \leq K(t, s) \leq c_2$ et donc :

$$\begin{aligned} c_1 \int_v^1 [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj &\leq (10.20) \leq c_2 \int_v^1 [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(j) dj \\ c_1 I_{1-} \circ [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(v) &\leq (10.20) \leq c_2 I_{1-} \circ [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(v) \\ c_1 u(v) \mathbb{I}_{[0,t]}(v) &\leq (10.20) \leq c_2 u(v) \mathbb{I}_{[0,t]}(v) \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$(10.23)$$

par conséquent (10.20) est nul dès que $t \leq v$. On en déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi(t, v) &= K^* \circ [I_{1-}]^{-1}(u \mathbb{I}_{[0,t]})(v) \\ &= \mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[0,t]})(v) \mathbb{I}_{[0,t]}(v) \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ◀

Remarque 10.4 Ce résultat est important puisqu’il permet de dire que l’on a :

$$\delta(\mathcal{K}_t^*(u)) - \delta(\mathcal{K}_s^*(u)) = \delta(\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{]s,t]})) \quad (10.24)$$

10.5.2 Continuité de Hölder des trajectoires des Intégrales

Hypothèse 10.3 Il existe α tel que K soit continue et bijective de \mathcal{L}^2 dans $\mathcal{I}_{\alpha+1/2,2}$. On suppose toujours K triangulaire.

Hypothèse 10.4 on suppose l'opérateur Γ continu de $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, 1], d\mathbb{P} \otimes \tilde{\lambda})$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times [0, 1], d\mathbb{P} \otimes \tilde{\lambda})$.

Considérons pour une constante M à définir la norme suivante pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$:

$$\|\Phi\|_{2,1}^M = \frac{M}{2} \left(\mathbb{E} \left[\|\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|\nabla^{\tilde{N}} \Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \otimes \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] \right)$$

et on définit alors $\mathbb{D}_{2,1}^M(\mathcal{H})$ comme la fermeture de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ relativement à cette norme.

Propriété 10.11 Sous l'hypothèse 10.3, on a :

$$\mathbb{D}_{2,1}^M(\mathcal{H}) \subset \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H})$$

Démonstration :

Par l'hypothèse 10.4, l'opérateur Γ est continu, il existe donc une constante M_1 telle que :

$$\mathbb{E} \left[\|\Gamma \Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] \leq M_1 \mathbb{E} \left[\|\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right]$$

donc

$$\|\Phi\|_{2,1} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{M_1}{2} \right) \wedge 1 \left(\mathbb{E} \left[\|\Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\|\nabla^{\tilde{N}} \Phi\|_{\mathcal{L}^2(\tilde{\lambda}) \otimes \mathcal{L}^2(\tilde{\lambda})}^2 \right] \right)$$

On pose maintenant $M = \left(\frac{1}{2} + \frac{M_1}{2} \right) \wedge 1$ et on a :

$$\|\Phi\|_{2,1} \leq M \|\Phi\|_{2,1}^M \quad (10.25)$$

donc $\Phi \in \mathbb{D}_{2,1}^M(\mathcal{H})$ implique $\Phi \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H})$ ce qui démontre le résultat. ◀

Théorème 10.11 Pour tout $\alpha \in [1/2, 1[$, sous les hypothèses 10.3 et 10.4, en considérant $u \in \mathbb{D}_{p,1}(\mathcal{H}) \cap \text{dom}(\delta^K)$ avec $\alpha p > 1$, le processus

$$\{\delta^K(\mathcal{K}_t^*(u)) = \delta^{\tilde{N}^K}(u \mathbb{I}_{[0,t]}) : t \in [0, 1]\}$$

admet une modification à trajectoires $(\alpha-1/p)$ -Hölder continues. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|\delta^K(u)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega; \text{Hol}(\alpha-1/p))} \leq c \|\mathcal{K}_1^*\| \cdot \|u\|_{\mathbb{D}_{p,1}}$$

Démonstration :

Soit $(s, t) \in [0, 1]^2$. Par la relation 10.24 et par la continuité de la divergence de $\mathbb{D}_{2,1}(\mathcal{H})$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on a l'existence d'une constante c_1 telle que :

$$\mathbb{E} \left[|\delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[s,t]}))|^2 \right] \leq c_1 \left[\|\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[s,t]})\|_{2,1} \right]^2 \quad (10.26)$$

$$\leq c_1 M \left[\|\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[s,t]})\|_{2,1}^M \right]^2 \quad (10.27)$$

10.27 vient de 10.25 dès lors que l'hypothèse 10.4 est satisfaite. D'autre part, l'hypothèse 10.3 de continuité de K de \mathcal{L}^2 dans $\mathcal{I}_{\alpha+1/2,2}$ couplé avec le fait que $\alpha > \frac{1}{2}$ assure que \mathcal{K} est continu

de \mathcal{L}^2 dans $\mathcal{I}_{\alpha-1/2,2}$ par conséquent \mathcal{K}^* est continu de $[\mathcal{I}_{\alpha-1/2,2}]^* = \mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}$ dans \mathcal{L}^2 et donc en notant $\|\mathcal{K}\|$ la norme de cet opérateur on a :

$$\mathbb{E} \left[|\delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[s,t]}))|^2 \right] \leq c_1 M \|\mathcal{K}^*\| \left(\mathbb{E} \left[\|u \mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^1 \|\nabla^{\tilde{N}} u \mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}}^2 dr \right] \right)$$

Maintenant, on applique le 2/ de la proposition 13.1 de l'annexe page 185 avec $\beta = \alpha - 1/2$ et $q = 2$ on sait donc que $\mathcal{I}_{\alpha-1/2,2}$ est continûment inclus dans \mathcal{L}^p avec $2 = p(1 - 2(\alpha - 1/2))$ d'où $p = (1 - \alpha)^{-1}$ et par conséquent on a :

$$\mathcal{L}^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\mathcal{L}^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^* \subset [\mathcal{I}_{\alpha-1/2,2}]^* = \mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}$$

L'inclusion étant continue. On a :

$$\|u \mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}} \leq c_2 \|u \mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{L}^{\frac{1}{\alpha}}}$$

On applique maintenant l'inégalité de Hölder pour avoir :

$$\|u \mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{I}_{1/2-\alpha,2}} \leq c_2 \|u\|_{\mathcal{L}^p} \|\mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{L}^q}$$

avec $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (on a par hypothèse $\alpha p > 1$). Il est facile de voir que $\|\mathbb{I}_{[s,t]}\|_{\mathcal{L}^q} = |t-s|^{\alpha-1/p}$ et en posant $c = c_1 M c_2$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|\delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u \mathbb{I}_{[s,t]}))|^2 \right] &\leq c \|\mathcal{K}^*\| |t-s|^{\alpha-1/p} \mathbb{E} \left[\|u\|_p + \int_0^1 \|\nabla^{\tilde{N}} u\|_p dr \right] \\ &\leq c \|\mathcal{K}^*\| |t-s|^{\alpha-1/p} \|u\|_{p,1} \end{aligned}$$

et donc, par définition de la norme sur l'espace de Hölder on a :

$$\|\delta^K(u)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega; Hol(\alpha-1/p))} \leq c \|\mathcal{K}_1^*\| \cdot \|u\|_{\mathbb{D}_{p,1}}$$

Ce qui démontre le théorème. ◀

10.6 Une formule de Itô pour des fonctionnelles cylindriques

Théorème 10.12 *Soit F une fonction \mathcal{C}_b^2 et supposons que $u \in \mathcal{S}(\mathcal{L}^2(\nu))$ c'est à dire que $u = F.v$ avec $F \in \mathcal{S}$ et $v \in \mathcal{L}^2(\nu)$. Soit $Z_t = z + (u \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t$. Alors $u.F' \circ Z$ est dans $Dom \delta_{\tilde{N}^K}$ et on a de manière \mathbb{P} presque sûre :*

$$F(Z_t) = F(z) + (u(s) F'(Z_s) \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t \quad (10.28)$$

Démonstration :

Soit $\epsilon > 0$.

On a :

$$F(Z_{t+\epsilon}) - F(Z_t) = F'(Z_t)(Z_{t+\epsilon} - Z_t) + (Z_{t+\epsilon} - Z_t)^2 \int_0^1 F''((1-u)Z_{t+\epsilon} + uZ_t)(1-u) du$$

Maintenant, pour une fonction test Ψ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[[F(Z_{t+\epsilon}) - F(Z_t)] \cdot \Psi] &= \mathbb{E}[F'(Z_t)(Z_{t+\epsilon} - Z_t) \cdot \Psi] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[(Z_{t+\epsilon} - Z_t)^2 \int_0^1 F''((1-u)Z_{t+\epsilon} + uZ_t)(1-u) du \cdot \Psi\right] \\ &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Par la relation 10.9, on a :

$$\begin{aligned} Z_{t+\epsilon} - Z_t &= (u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]} \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_T \\ &= \delta^{\tilde{N}^K}(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]}) + \int_0^1 \nabla_s^{\tilde{N}^K}(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})(s) \tilde{\lambda}(s) ds \\ &= \delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})) + \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s u(s) \tilde{\lambda}(s) ds \end{aligned}$$

Donc A_1 se sépare en deux termes :

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{E}\left[F'(Z_t) \delta^{\tilde{N}}(\mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})) \cdot \Psi\right] + \mathbb{E}\left[F'(Z_t) \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s u(s) \tilde{\lambda}(s) ds \cdot \Psi\right] \\ &= B_1 + B_2 \end{aligned}$$

D'une part, il est évident que :

$$\frac{1}{\epsilon} B_2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t u(t) \tilde{\lambda}(t) \cdot \Psi\right] \quad (10.29)$$

D'autre part, on a :

$$B_1 = \mathbb{E}\left[\int_0^1 \nabla_s^{\tilde{N}}(F'(Z_t)\Psi) \mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right]$$

Une application de la formule de dérivation sépare B_1 en deux parties et en utilisant la propriété d'adjonction on a :

$$\begin{aligned} B_1 &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \Psi \nabla_s^{\tilde{N}}(F'(Z_t)) \mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^1 F'(Z_t) \nabla_s^{\tilde{N}}(\Psi) \mathcal{K}^*(u\mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]})(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \Psi (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s(F'(Z_t)) u(s) \mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]}(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^1 F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s(\Psi) u(s) \mathbb{I}_{[t,t+\epsilon]}(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Psi \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s(F'(Z_t)) u(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[F'(Z_t) \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s(\Psi) u(s) \tilde{\lambda}(s) ds\right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{\epsilon} \mathbb{E} \left[\Psi \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (F'(Z_t)) u(s) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\Psi (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (F'(Z_t)) u(t) \tilde{\lambda}(t) \right] \quad (10.30)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \mathbb{E} \left[F'(Z_t) \int_t^{t+\epsilon} (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (\Psi) u(s) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (\Psi) u(t) \tilde{\lambda}(t) \right] \quad (10.31)$$

Remarquons que :

$$(\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (F'(Z_t)) u(t) + F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t u(t) = (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (F'(Z_t) u(t))$$

Par conséquent, par les relations (10.29), (10.30) et (10.31), on a montré que :

$$\frac{1}{\epsilon} A_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (\Psi) u(t) \tilde{\lambda}(t) \right] + \mathbb{E} \left[\Psi \cdot (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (F'(Z_t) u(t)) \tilde{\lambda}(t) \right]$$

F'' est bornée par conséquent on a :

$$\frac{1}{\epsilon} A_2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad (10.32)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E} [[F(Z_{t+\epsilon}) - F(Z_t)] \cdot \Psi] &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[F'(Z_t) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (\Psi) u(t) \tilde{\lambda}(t) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\Psi \cdot (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_t (F'(Z_t) u(t)) \tilde{\lambda}(t) \right] \end{aligned} \quad (10.33)$$

On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} (A) &= \mathbb{E} [F(Z_t) \Psi] - F(z) \\ &= \int_0^t \mathbb{E} [F'(Z(s)) \Psi] ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E} [[F(Z_{t+\epsilon}) - F(Z_t)] \cdot \Psi] ds \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant Fubini on obtient :

$$\begin{aligned} (A) &= \mathbb{E} \left[\int_0^t F'(Z_s) (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (\Psi) u(s) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\Psi \cdot \int_0^t (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (F'(Z_s) u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t \nabla_s^{\tilde{N}} (\Psi) \mathcal{K}_t^* (F'(Z_s) u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\Psi \cdot \int_0^t (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (F' \circ Z(s) \cdot u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\Psi \cdot \delta^{\tilde{N}} (\mathcal{K}_t^* (F'(Z_s) u(s))) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\Psi \cdot \int_0^t (\mathcal{K}\nabla^{\tilde{N}})_s (F' \circ Z(s) \cdot u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème 10.10 pour écrire :

$$\begin{aligned}
(A) &= \mathbb{E} \left[\Psi . \delta^{\tilde{N}} (\mathcal{K}^* (F'(Z_s) u(s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s))) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\Psi . \int_0^t (\mathcal{K} \nabla^{\tilde{N}})_s (F' \circ Z(s) . u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\Psi . \delta^{\tilde{N}^K} (F'(Z_s) u(s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s)) \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\Psi . \int_0^t (\mathcal{K} \nabla^{\tilde{N}})_s (F' \circ Z(s) . u(s)) \tilde{\lambda}(s) ds \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\Psi . \left(\delta^{\tilde{N}^K} (F' \circ Z(s) . u(s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s)) + \int_0^1 (\mathcal{K} \nabla^{\tilde{N}})_s (F' \circ Z(s) . u(s)) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) \tilde{\lambda}(s) ds \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\Psi . (F' \circ Z . u \overset{(SL)}{*} \tilde{N}^K)_t \right]
\end{aligned}$$

La relation (10.28) est obtenue par identification pour tout $t \in [0, 1]$ \mathbb{P} -a.e. mais les deux termes de l'équation sont continus et le résultat est donc vrai \mathbb{P} -a.e. pour tout $t \in [0, 1]$. ◀

Chapitre 11

Un théorème de type Girsanov

L'objectif de cette partie est d'établir un théorème de changement de loi pour des processus de Poisson Filtrés. Une application à l'estimation de la dérive d'un Processus de Poisson Filtré perturbé par une dérive positive est donnée. La consistance de l'estimateur est également établie sous de bonnes hypothèses notamment satisfaites pour le Processus de Poisson Fractionnaire.

11.1 Énoncé du théorème

Dans ce chapitre nous allons considérer que K vérifie $K(t, t) = 0$ pour tout t de façon à travailler avec des processus continus.

Théorème 11.1 *Considérons les processus suivants :*

- $\{N_t : t \geq 0\}$ un processus de Poisson Marqué dont le compensateur prévisible est $\nu(ds, dz)$,
- $\{\tilde{N}_t : t \geq 0\}$ le Processus de Poisson Marqué Compensé associé,
- $\{\tilde{N}_t^K = \int_0^t K(t, s)d\tilde{N}_s : t \geq 0\}$ le processus de Poisson Filtré associé.

Considérons une fonction

$$h \in \mathcal{L}^1(\nu)$$

On introduit maintenant la mesure de probabilité \mathbb{P}_h , absolument continue relativement à \mathbb{P} et dont la densité est donnée par :

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{d\mathbb{P}_h}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathfrak{F}_t} \\ &= \mathcal{E}\mathcal{D} \left(\int_0^t \int_E h(s, z)(\omega - \nu)(ds, dz) \right)_t \end{aligned} \quad (11.1)$$

où $\mathcal{E}\mathcal{D}(X)_t$ désigne l'exponentielle de Doléans-Dade du processus X à l'instant t .

On introduit également les processus suivants :

- $\{N_t^h : t \geq 0\}$ un processus de Poisson Marqués de compensateur $h(s, z)\nu(ds, dz)$,
- $\{\tilde{N}_t^h : t \geq 0\}$ le Processus de Poisson Marqué Compensé associé,
- $\{\tilde{N}_t^{h, K} = \int_0^t K(t, s)d\tilde{N}_s : t \geq 0\}$ le processus de Poisson Filtré associé.

²Ce chapitre fait l'objet d'une publication soumise à "Electronic Communications in Probability" [43]

Le résultat est le suivant :

$$\mathcal{L}(\tilde{N}^K, \mathbb{P}_h) = \mathcal{L}(\tilde{N}^{h,K}, \mathbb{P})$$

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n$ fixés. Une fois ces instants fixés, les processus

$$M_r^i : r \rightarrow \int_0^r \int_E zK(t_i, s)\omega(ds, dz)$$

sont des processus ponctuels marqués dont les compensateurs sont :

$$\Phi_r^i : r \rightarrow \int_0^r \int_E zK(t_i, s)\nu(ds, dz)$$

Donc $(M^i - \Phi^i)_{i=1}^n$ est une \mathbb{P} -martingale et le théorème de Girsanov 7.24 p. 224 dans Jacod [75] nous assure que :

$$\left(M^{i,h} : r \rightarrow M_r^i - \Phi_r^i - \int_0^r \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle M^i - \Phi^i, Z \rangle_s \right)_{i=1}^n$$

est une \mathbb{P}_h -martingale.

Z est défini par (11.1) donc Z est solution de l'équation :

$$R_t = 1 + \int_0^t \int_E R_{s^-} [h(s, z) - 1](\omega - \nu)(ds, dz)$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} (A) &= \langle M^i - \Phi^i, Z \rangle_s \\ &= \left\langle \int_0^{\cdot} \int_E zK(t_i, s)(\omega - \nu)(ds, dz), 1 + \int_0^{\cdot} \int_E Z_{s^-} [h(s, z) - 1](\omega - \nu)(ds, dz) \right\rangle_s \\ &= \left\langle \int_0^{\cdot} \int_E zK(t_i, s)(\omega - \nu)(ds, dz), \int_0^{\cdot} \int_E Z_{s^-} [h(s, z) - 1](\omega - \nu)(ds, dz) \right\rangle_s \\ &= \int_0^s zK(t_i, s)Z_{s^-} [h(s, z) - 1] d \left\langle \int_0^{\cdot} \int_E (\omega - \nu)(ds, dz); \int_0^{\cdot} \int_E (\omega - \nu)(ds, dz) \right\rangle_s \\ &= \int_0^s \int_E zK(t_i, s)Z_{s^-} [h(s, z) - 1]\nu(ds, dz) \end{aligned}$$

On en conclue que :

$$\begin{aligned} M_r^{i,h} &= M_r^i - \Phi_r^i - \int_0^r \frac{1}{Z_{s^-}} d\langle M^i - \Phi^i, Z \rangle_s \\ &= M_r^i - \Phi_r^i - \int_0^r \frac{1}{Z_{s^-}} \int_E zK(t_i, s)Z_{s^-} [h(s, z) - 1]\nu(ds, dz) dz \\ &= M_r^i - \Phi_r^i - \int_0^r \int_E zK(t_i, s)[h(s, z) - 1]\nu(ds, dz) \\ &= \int_0^r \int_E zK(t_i, s)\omega(ds, dz) - \Phi_r^i - \int_0^r \int_E zK(t_i, s)h(s, z)\nu(ds, dz) + \Phi_r^i \\ &= \int_0^r \int_E zK(t_i, s)\omega(ds, dz) - \int_0^r \int_E zK(t_i, s)h(s, z)\nu(ds, dz) \end{aligned} \quad (11.2)$$

donc,

$$r \rightarrow \int_0^r \int_E zK(t_i, s)\omega(ds, dz) - \int_0^r \int_E zK(t_i, s)h(s, z)\nu(ds, dz)$$

est une \mathbb{P}_h -martingale et

$$r \rightarrow \int_0^r \int_E zK(t_i, s)h(s, z)\nu(ds, dz) \quad (11.3)$$

est le \mathbb{P}_h -compensateur de M^i .

A partir de (11.2), $M^{i,h}$ s'écrit :

$$M^{i,h} : r \rightarrow \int_0^r \int_E zK(t_i, s)(\omega(ds, dz) - h(s, z)\nu(ds, dz))$$

Donc son compensateur sous \mathbb{P} est (11.3).

Le théorème 9.1 page 123 montre que deux Processus Ponctuels Marqués de même compensateur ont même loi. Donc,

$$\mathcal{L} \left([r \rightarrow M_r^i]_{i=1}^n ; \mathbb{P}_h \right) = \mathcal{L} \left([r \rightarrow M_r^{i,h}]_{i=1}^n ; \mathbb{P} \right)$$

Il suffit maintenant de remarquer que, le noyau étant triangulaire, en prenant $r = \sup_{1 \leq i \leq n} t_i$ on a $M_r^i = M_{t_i}^i$ et le résultat en découle. ◀

11.2 Une application

11.2.1 Position du problème

Étant donné un noyau K , on observe les trajectoires d'un processus de Poisson Filtré perturbé par une dérive linéaire négative :

$$X_t^\theta = \tilde{N}_t^K - \theta t$$

avec $\theta > 0$. Le problème posé est comment estimer θ ? Ce genre de problème a déjà été beaucoup étudié dans le cas où le processus sous-jacent est Brownien et quand le noyau est $K^{(H)}$ défini par 2.5 page 31. Dans ce cas \tilde{N}^K est un mouvement Brownien fractionnaire [45, 78, 79].

Pour ce faire, nous allons supposer que ν et K sont tels qu'il existe une et une seule fonction ϕ telle que :

$$\int_0^t \int_E zK(t, s)\phi(s)\nu(ds, dz) = t$$

Alors, par le théorème 11.1, il suffit d'introduire la fonction de vraisemblance :

$$Z_t^\theta = \left. \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathfrak{F}_t} = \mathcal{E} \mathcal{D} \left(\int_0^\cdot \int_E \theta \phi(s)(\omega - \nu)(ds, dz) \right)_t$$

En effet, les processus X^θ sous \mathbb{P} et $\tilde{N}^{K,\theta}$ sous \mathbb{P}_θ ont la même loi et par conséquent, un estimateur de θ est donné par :

$$\hat{\theta}_t = \underset{\theta \in [0,1]}{\text{Argmax}} Z_t^\theta$$

11.2.2 Existence et unicité de l'estimateur

Malheureusement, l'expression exacte de l'exponentielle de Doléans est tellement peu manipulable dans le cas d'un processus avec sauts que nous sommes contraint de trouver une autre expression de Z^θ pour prouver l'existence et l'unicité de $\hat{\theta}_t$. C'est l'objectif du lemme suivant :

Lemme 11.1 *Si $\phi \in \mathcal{L}^1(\nu)$ et si $\ln(1 + \phi) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ alors :*

$$\left\{ \mathcal{ED} \left(\int_0^\cdot \int_E \theta \phi(s) (\omega - \nu)(ds, dz) \right)_t : 0 \leq t \leq T \right\} = \{ \exp(Y_t^\theta) : 0 \leq t \leq T \}$$

avec pour tout $0 \leq t \leq T$:

$$Y_t^\theta = \int_0^t \int_E \ln(1 + \theta \phi(s)) \omega(ds, dz) - \int_0^t \int_E \theta \phi(s) \nu(ds, dz)$$

Démonstration du lemme :

C'est une application de la formule de Itô pour la fonction $x \rightarrow \exp(x)$ relativement au processus de saut Y^θ . On obtient pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \exp(Y_t^\theta) - 1 \\ &= \int_0^t \exp(Y_{s^-}^\theta) dY_s^\theta + \sum_{s \leq t} [\exp(Y_s^\theta) - \exp(Y_{s^-}^\theta) - \exp(Y_{s^-}^\theta)(Y_s^\theta - Y_{s^-}^\theta)] \\ &= \int_0^t \exp(Y_{s^-}^\theta) dY_s^\theta + \int_0^t \int_E [\exp(Y_{s^-}^\theta + \ln(1 + \theta \phi(s))) - \exp(Y_{s^-}^\theta) \\ &\quad - \exp(Y_{s^-}^\theta)(\ln(1 + \theta \phi(s))) \omega(ds, dz)] \\ &= \int_0^t \exp(Y_{s^-}^\theta) dY_s^\theta + \int_0^t \int_E [\exp(Y_{s^-}^\theta + \ln(1 + \theta \phi(s))) \\ &\quad - \exp(Y_{s^-}^\theta)(1 + \ln(1 + \theta \phi(s))) \omega(ds, dz)] \end{aligned}$$

Mais on a :

$$dY_s^\theta = \int_E \ln(1 + \theta \phi(s)) \omega(ds, dz) - \int_E \theta \phi(s) \nu(ds, dz)$$

donc :

$$\begin{aligned} & \exp(Y_t^\theta) - 1 \\ &= \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) [\ln(1 + \theta \phi(s)) \omega(ds, dz) - \theta \phi(s) \nu(ds, dz)] \\ &\quad + \int_0^t \int_E [\exp(Y_{s^-}^\theta + \ln(1 + \theta \phi(s))) \\ &\quad - \exp(Y_{s^-}^\theta)(1 + \ln(1 + \theta \phi(s)))] \omega(ds, dz) \\ &= \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) [\ln(1 + \theta \phi(s)) - (1 + \ln(1 + \theta \phi(s))) \\ &\quad + \exp(\ln(1 + \theta \phi(s)))] \omega(ds, dz) \\ &\quad - \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) \theta \phi(s) \nu(ds, dz) \\ &= \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) \theta \phi(s) \omega(ds, dz) - \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) \theta \phi(s) \nu(ds, dz) \\ &= \int_0^t \int_E \exp(Y_{s^-}^\theta) \theta \phi(s) (\omega - \nu)(ds, dz) \end{aligned}$$

Donc, le processus $\exp(Y^\theta)$ est solution de l'équation différentielle stochastique définissant l'exponentielle de Doléans. Par l'unicité de la solution, le résultat est obtenu. ◀

Le résultat s'énonce ainsi :

Proposition 11.1 *On suppose les marques du processus sous jacent positives ou nulles. Si $\phi \in \mathcal{L}^1(\nu)$ et si $\ln(1 + \phi) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ alors il existe un estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_t$ pour tout $t \in [0, T]$ et il est unique.*

Démonstration :

A t fixé, la fonction de vraisemblance atteint son maximum quand la fonction :

$$f : \theta \rightarrow \int_0^t \int_E \ln(1 + \theta\phi(s))\omega(ds, dz) - \int_0^t \int_E \theta\phi(s)\nu(ds, dz)$$

atteint son maximum.

Mais on remarque que :

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \int_0^t \int_E \frac{\phi(s)}{1 + \theta\phi(s)}\omega(ds, dz) - \int_0^t \int_E \phi(s)\nu(ds, dz) \\ f''(\theta) &= \int_0^t \int_E \frac{-\phi(s)^2}{[1 + \theta\phi(s)]^2}\omega(ds, dz) \end{aligned}$$

La fonction f est donc concave sur $[0, 1]$ et donc, elle admet un unique maximum. ◀

Remarque 11.1 *Le Processus de Poisson fractionnaire a été défini au paragraphe 10.1.1 page 145. Dans ce cas, on sait qu'en considérant que le bon candidat pour la fonction ϕ est :*

$$s \rightarrow \phi(s) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(2 - 2H)} \frac{s^{\frac{1}{2} - H}}{\lambda} \quad (11.4)$$

(voir Decreasefond Üstünel [45]). Le théorème s'applique si $\phi \in \mathcal{L}^1(\nu)$ ce qui est vrai dès que $\frac{1}{2} < H < 1$ de plus, si cette condition est vraie alors $\ln(1 + \phi) \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Le théorème s'applique donc pour toutes les valeurs de H possibles.

11.2.3 Consistance de l'estimateur

Nous allons maintenant montrer que, pour $\theta > 0$, $\hat{\theta}_t$ est fortement consistant c'est à dire que $\hat{\theta}_t$ converge presque sûrement vers θ . Il est à noter que l'on ne considère que le cas $\theta > 0$ en effet, si $\theta < 0$, la quantité $1 + \theta\phi(s)$ peut s'annuler ce qui nuit à l'intégrabilité du logarithme.

Lemme 11.2 *Le processus $\hat{\theta}_t : t \in [0, T]$ est décroissant sur chacun des intervalles $[T_n, T_{n+1}[$.*

Démonstration :

Considérons

$$\psi(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

Il est clair que pour tout $x > 0$, l'application partielle $(y \mapsto \psi(x, y))$ est décroissante. D'autre part, on sait que $\hat{\theta}_t$ est solution de l'équation :

$$\sum_{T_j \leq t} \psi(\phi(T_j), \hat{\theta}_t) = \int_0^t \phi(s) \lambda(s) ds. \quad (11.5)$$

Pour tout $t \in [T_n, T_{n+1}[$, le nombre de termes du membre de gauche de l'équation (11.5) est constant et le membre de droite est une fonction croissante de t . Par conséquent $\hat{\theta}_t$ n'a pas d'autre choix que de décroître entre T_n et T_{n+1} . ◀

Pour aller plus loin, nous avons besoin d'hypothèses complémentaires sur ϕ . Remarquons tout de suite que ces hypothèses sont satisfaites par le ϕ associé au processus de Poisson fractionnaire défini en (11.4). Nous ne savons pas si la suite $\hat{\theta}_{T_n}$ est décroissante on ne peut donc pas conclure à la convergence de $\hat{\theta}_t$ on va cependant montrer que c'est un processus borné.

Lemme 11.3 *Supposons $\theta > 0$ que ϕ et $\ln(1 + \theta\phi)$ soient dans $L^1([0, T], \lambda(s) ds)$ pour tout $T > 0$. supposons aussi que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds = \infty$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \phi^{2+j}(s) \lambda(s) ds}{\int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds} = 0, \text{ pour tout } j > 0. \quad (11.6)$$

Alors $\{\hat{\theta}_t, t \geq 0\}$ est \mathbb{P}_θ -p.s. borné.

Démonstration :

Soit $M > \theta$ et considérons

$$A_M = \{\omega \in \Omega, \limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_t(\omega) \geq M\}.$$

Sur A_M , il existe une suite $\{t_n, n \geq 1\}$ de réels positifs tels que $\hat{\theta}_{t_n} \geq M$ pour tout $n \geq 1$. Donc

$$\sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), \hat{\theta}_{t_n}) \leq \sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), M)$$

Par définition de $\hat{\theta}_t$,

$$\sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), \hat{\theta}_{t_n}) = \int_0^{t_n} \phi(s) \lambda(s) ds,$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \phi(s) \lambda(s) ds - \int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)(1 + \theta\phi(s)) \lambda(s) ds \\ \leq \sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), M) - \int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)(1 + \theta\phi(s)) \lambda(s) ds. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Le membre de gauche de l'équation (11.7) se simplifie :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \phi(s) \lambda(s) ds - \int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)(1 + \theta\phi(s)) \lambda(s) ds \\ = (M - \theta) \int_0^{t_n} \frac{\phi^2(s) \lambda(s)}{1 + M\phi(s)} ds. \end{aligned}$$

Donc l'équation (11.7) s'écrit :

$$(M - \theta) \int_0^{t_n} \frac{\phi^2(s)\lambda(s)}{1 + M\phi(s)} ds \leq \sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), M) - \int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)(1 + \theta\phi(s))\lambda(s) ds. \quad (11.8)$$

De plus, comme $\phi \geq 0$, et $M > \theta$ on a :

$$\int_0^t \frac{\phi^2(s)\lambda(s)(1 + \theta\phi(s))}{(1 + M\phi(s))^2} ds \leq \int_0^t \frac{\phi^2(s)\lambda(s)}{1 + M\phi(s)} ds. \quad (11.9)$$

D'autre part, le théorème de la limite centrale pour les martingales nous assure que, \mathbb{P}_θ p.s. on a :

$$\frac{\sum_{T_j \leq t_n} \psi(\phi(T_j), M) - \int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)(1 + \theta\phi(s))\lambda(s) ds}{\int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)^2 \lambda(s)(1 + \theta\phi(s)) ds} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Alors, en divisant les deux membres de (11.8) par $\int_0^{t_n} \psi(\phi(s), M)\phi(s)\lambda(s) ds$ et en faisant tendre n vers l'infini, en vertu de (11.6) et (11.9), on obtient la contradiction que, sur A_M , $\theta \geq M$. Finalement, $\mathbb{P}_\theta(A_M) = 0$ et donc $\{\hat{\theta}_t, t > 0\}$ est \mathbb{P}_θ -p.s. borné. ◀

Théorème 11.2 *Supposons $\theta > 0$ que ϕ et $\ln(1 + \theta\phi)$ soient dans $L^1([0, T], \lambda(s)ds)$ pour tout $T > 0$. supposons aussi que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi^2(s)\lambda(s) ds = \infty$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \phi^{2+j}(s)\lambda(s) ds}{\int_0^t \phi^2(s)\lambda(s) ds} = 0, \text{ pour tout } j > 0. \quad (11.10)$$

Alors $\hat{\theta}_t$ tend P_θ -p.s. vers θ .

Démonstration :

Considérons $N_t(\phi) = \sum_{T_n \leq t} \phi(T_n)$. Par définition de $\hat{\theta}_t$ on a :

$$\sum_{T_n \leq t} \frac{\phi(T_n)}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} - \int_0^t \phi(s)\lambda(s) ds = 0$$

D'autre part, on a la relation suivante :

$$\sum_{T_n \leq t} \frac{\phi(T_n)}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} = N_t(\phi) - \hat{\theta}_t N_t(\phi^2) + \hat{\theta}_t^2 \sum_{T_n \leq t} \frac{\phi^3(T_n)}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)}$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= N_t(\phi) - \int_0^t \phi(s)\lambda(s)(1 + \theta\phi(s)) ds \\ &\quad - \hat{\theta}_t \left(N_t(\phi^2) - \int_0^t \phi^2(s)\lambda(s)(1 + \theta\phi(s)) ds \right) \\ &\quad + \hat{\theta}_t^2 \sum_{T_n \leq t} \frac{\phi(T_n)^3}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} - \theta \hat{\theta}_t \int_0^t \phi^3(s)\lambda(s) ds \\ &\quad + (\theta - \hat{\theta}_t) \int_0^t \phi^2(s)\lambda(s) ds. \end{aligned}$$

Des calculs du même type nous donnent :

$$\begin{aligned}
& (\theta - \hat{\theta}_t) \left(\int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds + \hat{\theta}_t \int_0^t \phi^3(s) \lambda(s) ds \right) \\
&= -(N_t(\phi) - \int_0^t \phi(s) \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds) \\
&+ \hat{\theta}_t \left(N_t(\phi^2) - \int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds \right) \\
&- \hat{\theta}_t^2 \left(N_t(\phi^3) - \int_0^t \phi^3(s) \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds \right) \\
&- \hat{\theta}_t^2 \sum_{T_n \leq t} \left(\frac{\phi(T_n)^3}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} - \phi(T_n)^3 \right) + \theta \hat{\theta}_t^2 \int_0^t \phi^4(s) \lambda(s) ds.
\end{aligned} \tag{11.11}$$

Pour tout ζ , déterministe, le processus $\{N_t(\zeta) - \int_0^t \zeta(s) \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds, t \geq 0\}$ est une martingale dont le crochet est donné par :

$$\int_0^t \zeta(s)^2 \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds.$$

On en déduit par les hypothèses et le théorème de la limite centrale pour des martingales que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t(\phi^j) - \int_0^t \phi(s)^j \lambda(s) (1 + \theta \phi(s)) ds}{\int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds} = 0, \tag{11.12}$$

Pour tout $j \geq 1$, de plus,

$$\sum_{T_n \leq t} \left(\frac{\phi(T_n)^3}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} - \phi(T_n)^3 \right) = \hat{\theta}_t \sum_{T_n \leq t} \frac{\phi(T_n)^4}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)}. \tag{11.13}$$

Donc,

$$0 \leq \sum_{T_n \leq t} \left(\frac{\phi(T_n)^3}{1 + \hat{\theta}_t \phi(T_n)} - \phi(T_n)^3 \right) \leq \hat{\theta}_t N_t(\phi^4).$$

D'après la relation (11.12) et les hypothèses (11.6), on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t(\phi^4)}{\int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds} = 0, \mathbb{P}_\theta \text{ p.s.} \tag{11.14}$$

On divise (11.11) par $\int_0^t \phi^2(s) \lambda(s) ds$, on fait tendre t vers l'infini et il découle de (11.12) et (11.14) que $\hat{\theta}_t$ converge vers θ .

◀

Chapitre 12

Un Théorème limite pour des Processus de Poisson Filtrés

Dans ce chapitre, nous faisons le lien entre les deux processus centraux de cette thèse à savoir les processus de Volterra et les processus de Poisson Filtrés. Nous allons montrer la convergence en loi, sur un espace de Hölder, d'un processus de Poisson filtré vers un processus de Volterra quand l'intensité du processus de Poisson sous-jacent tend vers l'infini.

Dans une première partie, nous introduirons les outils à savoir la notion de martingale hilbertienne et la technique de radonification. Dans une seconde partie, nous présenterons le résultat de convergence de martingale hilbertienne. Enfin, nous projeterons le résultat pour répondre à la question originelle.

12.1 Résultats Préliminaires

12.1.1 Martingales à valeurs Hilbertiennes

La référence choisie pour les martingales à valeurs dans un espace de Hilbert est le livre de Michel Métivier [95]. Nous énonçons ici les principaux résultats utilisés.

Soit $(\Omega, \mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Soit V un espace de Hilbert séparable.

Définition 12.1 *On dit que X un processus à valeurs dans V est une \mathfrak{F} -martingale si et seulement si :*

•

$$E[\|X_t\|_V] < \infty \quad \text{pour tout } t,$$

• pour tout $s \geq t$,

$$E[X_t | \mathfrak{F}_s] = X_s, \quad \mathbb{P} \text{ p.s..}$$

³Ce chapitre fait l'objet d'une publication [41] soumise à la revue Journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability

L'analogie des crochets obliques est ici défini par $\langle X \rangle$, et c'est l'unique processus prévisible à variation finie et à valeurs dans l'espace des opérateurs nucléaires symétriques, positifs de V dans V , tels que, pour tout $u, v \in V$,

$$\{\langle X_t, u \rangle_V \langle X_t, v \rangle_V - \langle \langle X \rangle_t u, v \rangle_V, t \geq 0\}$$

est une martingale.

Puisque $\langle X \rangle_t$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on peut parler de sa racine carrée notée $\langle X \rangle_t^{1/2}$. On notera également $\mathcal{L}_2(V; V)$, l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt de V dans V . Le plus important résultat pour nous est le théorème 4.6 de [95, page 40] qui établit que :

Proposition 12.1 *Soit $\{X^n : n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de martingales locales continues à valeurs dans V . Si les lois des processus $\{\langle X^n \rangle_t^{1/2}, n \geq 1\}$ forment une suite tendue de probabilités sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}_2(V; V))$ Alors les lois des processus $\{X^n, n \geq 1\}$ forment une suite tendue de probabilités sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; V)$.*

12.1.2 Radonification

A part les exemples triviaux du mouvement Brownien à valeurs dans V ou des diffusions, il est relativement difficile de voir quand un processus à valeurs dans V est une martingale. Au contraire, il est très facile de vérifier si c'est une martingale cylindrique, i.e., si $\{\langle X_t, u \rangle_V, t \geq 0\}$ est une martingale réelle pour tout $u \in V$. Le résultat de "radonification" suivant est donc d'un intérêt remarquable :

Théorème 12.1 (voir [8, 125]) *Soit E et F deux espaces de Hilbert et considérons $u : E \rightarrow F$ un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soit $\mathcal{M}_c([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des martingales réelles continues muni de la norme*

$$\|M\|_{\mathcal{M}_c([0,1],\mathbb{R})}^2 = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,1]} |M_s|^2 \right].$$

Si L est dans $\mathcal{L}(E^; \mathcal{M}_c([0, 1], \mathbb{R}))$, l'ensemble des applications linéaires continues du dual de E , noté E^* , dans $\mathcal{M}_c([0, 1], \mathbb{R})$, alors $u \circ L$ est une martingale continue à valeurs dans F .*

Supposons maintenant donné un opérateur de Hilbert-Schmidt de \mathcal{L}^2 dans lui-même noté K , tel que :

Hypothèse 12.1 *Il existe $\alpha > 0$ tel que K soit une application linéaire continue bijective de \mathcal{L}^2 dans $\mathcal{I}_{\alpha+1/2,2}$.*

Remarque 12.1 *Puisque l'injection de $\mathcal{I}_{\alpha+1/2,2}$ dans \mathcal{L}^2 est Hilbert-Schmidt, le caractère Hilbert-Schmidt de K de \mathcal{L}^2 dans lui-même est garanti. Donc, il existe un noyau que nous noterons encore K de sorte que l'opérateur K soit de la forme :*

$$(Kf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \int_0^1 K(t,s)^2 dt ds < \infty \quad (12.1)$$

On suppose également que :

Hypothèse 12.2 *K soit triangulaire, i.e., $K(t,s) = 0$ pour tout $s \geq t \geq 0$.*

Remarque 12.2 On remarque que ces deux hypothèses sont vérifiées pour tout α par le noyau $K(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/2)}(t-s)^{\alpha-1/2}\mathbf{1}_{[0,t)}(s)$ qui correspond à B^α puisque, dans ce cas, K , en temps que fonction, coïncide avec $I_{0+}^{\alpha+1/2}$. Le mouvement Brownien fractionnaire admet la représentation $\int_0^t J_\alpha(t, s) dB_s$, avec J_α de la forme :

$$J_\alpha(t, s) = L_\alpha(t, s)(t-s)^{\alpha-1/2}s^{-|\alpha-1/2|},$$

où L_α est une fonction bicontinue (voir paragraphe 2.4). De plus, [121] assure que J_α est un isomorphisme de $\mathcal{L}^2([0, 1])$ dans $I_{0+}^{\alpha+1/2}(\mathcal{L}^2([0, 1]))$. Par conséquent J_α satisfait les deux hypothèses 12.1 et 12.2 pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

Lemme 12.1 Soit M une martingale continue telle que $\langle M \rangle_t = ct$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soit K satisfaisant les hypothèses 12.1 et 12.2. Alors, pour tout $\Phi \in (\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*$,

$$\left\{ \mathfrak{Z}_t^M(\Phi) := \int_0^t K^* \Phi(s) dM_s, t \in [0, 1] \right\}$$

est une martingale continue. De plus, pour tout $\varepsilon \in (0, \alpha]$, Il existe un processus à valeurs dans $\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}$ appelé \mathfrak{X}^M tel que, pour tout $\Phi \in (\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*$ on ait :

$$\mathfrak{Z}_t^M(\Phi) = \langle \Phi, \mathfrak{X}_t^M \rangle_{(\mathbb{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*, \mathbb{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}}$$

Démonstration :

Fixons $\varepsilon \in (0, \alpha]$. Considérons l'application linéaire

$$\begin{aligned} L : (\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^* &\longrightarrow \mathcal{M}_c([0, 1], \mathbb{R}) \\ \Phi &\longrightarrow \{ \mathfrak{Z}_t^M(\Phi), t \in [0, 1] \}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Doob nous assure que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq 1} |\mathfrak{Z}_t^M(\Phi)|^2 \right] \leq c \|K^* \phi\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq c \|\phi\|_{(\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*}^2.$$

Donc L est dans $\mathcal{L}((\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*, \mathcal{M}_c([0, 1], \mathbb{R}))$. Comme l'injection de $\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2}$ dans $\mathcal{I}_{\beta+1/2, 2}$ est Hilbert-Schmidt pour $\beta < \alpha - 1/2$, le résultat découle du théorème 12.1. ◀

12.2 Le résultat de convergence

12.2.1 Convergence de Martingales Hilbertiennes

L'espace des mesures entières simples, localement finies sur $[0, 1]$ sera noté Ω . On définit la probabilité \mathbb{P} comme l'unique mesure sur Ω qui fait de la mesure canonique ω une mesure de Poisson de compensateur λds . La filtration canonique \mathfrak{F} est définie par :

$$\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \text{ et } \mathfrak{F}_t = \sigma \left\{ \int_0^s \omega(ds), s \leq t \right\}, \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

On pose $N_s^\lambda = \omega([0, s])$. Notre objet de base est le processus X^λ , défini par :

$$\begin{aligned} X_t^\lambda &= \lambda^{-1/2} \int_0^t K(t, s) (dN_s^\lambda - \lambda ds) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n \geq 1} K(t, T_n) \mathbb{I}_{[T_n \leq t]} - \int_0^t K(t, s) \sqrt{\lambda} ds, \end{aligned}$$

où K satisfait les hypothèses 12.1 et 12.2. En vertu de la continuité de $K(t, \cdot)$, il est clair que X^λ est à trajectoires continues.

Lemme 12.2 *On note ϵ_t la masse de Dirac en t . Considérons $\alpha > \frac{1}{2}$.*

On a pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathfrak{Z}_t^M(\epsilon_t)$ est bien défini et s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_t^M(\epsilon_t) &= \int_0^t K(t, s) dM_s \\ &= \langle \epsilon_t, \mathfrak{X}_t^M \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}}\end{aligned}$$

Démonstration du lemme :

Remarque 12.3 *Selon que l'on travaille avec le $M = B$ ou $M = \tilde{N}$, on utilise le calcul stochastique introduit dans les chapitres 8 ou 10. Ça ne change rien au raisonnement.*

Une relation importante Soit $\phi \in (\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*$, Ψ une fonctionnelle cylindrique et $t \in [0, 1]$ fixé. On a :

$$\mathbb{E}[\mathfrak{Z}_t(\phi) \cdot \Psi] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K^* \Phi(s) d\hat{N}_s^n \cdot \Psi\right] \quad (12.2)$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^t K^*(\Phi)(s) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \nabla_s \Psi \lambda ds\right] \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 K(r, s) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Phi(r) dr \nabla_s \Psi \lambda ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^t K(r, s) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \nabla_s \Psi \lambda ds \Phi(r) dr\right]\end{aligned}$$

On utilise maintenant Fubini pour écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathfrak{Z}_t(\phi) \cdot \Psi] &= \int_0^1 \mathbb{E}\left[\int_0^t K(r, s) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \nabla_s \Psi \lambda ds\right] \Phi(r) dr \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}\left[\int_0^t K(r, s) d\hat{N}_s^n \Psi\right] \Phi(r) dr \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^t K(r, s) d\hat{N}_s^n \Phi(r) dr \cdot \Psi\right]\end{aligned} \quad (12.4)$$

Où (12.3) vient de la définition de K^* comme adjoint de l'opérateur de Hilbert-Schmidt K .

Montrons que $\epsilon_t \in \mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2}$ Comme on peut le voir dans l'annexe 1 page 185, on a :

$$\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2} \subset \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2} \subset \text{Hol}(\alpha - \varepsilon - 1/2)$$

donc,

$$(\text{Hol}(\alpha - \varepsilon - 1/2))^* \subset (\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^* \subset (\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*$$

comme $\alpha - \varepsilon - 1/2 > 0$ pour ε assez petit, $\epsilon_t \in (\text{Hol}(\alpha - \varepsilon - 1/2))^*$ et donc $\epsilon_t \in (\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*$.

Conclusion partielle On applique (12.4) à ϵ_t et on obtient $\mathbb{P} - p.s.$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_t^{\hat{N}^n}(\epsilon_t) &= \int_0^1 \int_0^t K(r, s) d\hat{N}_s^n \epsilon_t(dr) \\ &= X_t^\lambda\end{aligned} \quad (12.5)$$

Montrons que le “ $\mathbb{P} - p.s.$ ” ne dépend pas de t Pour ce faire, il suffit de montrer que les deux termes de l'équation (12.5) sont continus. C'est connu pour X^λ .

$$\begin{aligned}
& | \langle \epsilon_t, \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} - \langle \epsilon_s, \mathfrak{X}_s^{\hat{N}^n} \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} | \\
&= \langle \epsilon_t - \epsilon_s, \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} - \langle \epsilon_t, \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} - \mathfrak{X}_s^{\hat{N}^n} - s \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} \\
&\leq \| \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} - \mathfrak{X}_s^{\hat{N}^n} \|_{\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} \| \epsilon_t \|_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*} - \| \mathfrak{X}_s^{\hat{N}^n} \|_{\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} \| \epsilon_t - \epsilon_s \|_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*} \\
&\xrightarrow{t \rightarrow s} 0.
\end{aligned}$$

Les deux côtés de l'inégalité sont des processus continus donc on peut dire que $\mathbb{P} - p.s.$, pour tout $t \in [0, 1]$, il y a une version de chacun des processus telle que :

$$\mathfrak{Z}_t(\epsilon_t) = X_t$$

◀

Remarque 12.4 Quand $\alpha \leq 1/2$, ϵ_t n'est plus dans $(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*$ et on ne peut plus donner de sens à $\mathfrak{Z}_t^M(\epsilon_t)$. D'autre part, on sait que pour $K(t, s) = (t-s)^{\alpha-1/2}$ et pour M est un processus de Poisson, quand $\alpha < 1/2$, $\int_0^t K(\cdot, s) dM_s$ est un processus qui est saute à l'infini dès que le processus de Poisson saute et qui prend des valeurs finies partout ailleurs. D'autre part, $\varepsilon^{-1} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathfrak{Z}_t^M(s) ds$ est, lui, parfaitement défini et peut servir, pour ε petit, comme substitut de $\int_0^t K(t, s) dM_s$.

Par le lemme 12.1, on définit deux processus à valeurs dans $\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}$: $\mathfrak{X}^{\hat{N}^n}$ et \mathfrak{X}^B définis à partir des martingales continues \hat{N}^n et B , un mouvement Brownien standard. Le résultat clé est le suivant :

Théorème 12.2 Quand n tend vers l'infini, la loi de $\mathfrak{X}^{\hat{N}^n}$ dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})$ converge vers la loi de \mathfrak{X}^B .

Démonstration :

Nous avons,

$$\begin{aligned}
A_t &:= \langle u, \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} \langle v, \mathfrak{X}_t^{\hat{N}^n} \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} \\
&= \int_0^t K^*(u)(s) d\hat{N}_s^{\hat{N}^n} \int_0^t K^*(v)(s) d\hat{N}_s^{\hat{N}^n} \\
&= \int_0^t K^*(u)(s) \frac{1}{\sqrt{n}} d\tilde{N}_s^{\hat{N}^n} \int_0^t K^*(v)(s) \frac{1}{\sqrt{n}} d\tilde{N}_s^{\hat{N}^n}
\end{aligned}$$

\tilde{N} est un Processus de Poisson compensé de compensateur $n ds$, donc la variation quadratique de A prend la forme :

$$\int_0^t K^*(u)(s) \frac{1}{\sqrt{n}} K^*(v)(s) \frac{1}{\sqrt{n}} n ds,$$

donc,

$$\langle \langle \mathfrak{X}^{\hat{N}^n} \rangle_t u, v \rangle = \int_0^t K^*(u)(s) K^*(v)(s) ds$$

La suite $\{ \langle \mathfrak{X}^{\hat{N}^n} \rangle : n \geq 1 \}$ est déterministe et ne dépend pas de n donc elle est évidemment tendue. En vertu de la proposition 12.1, la suite $\{ \mathfrak{X}^{\hat{N}^n} : n \geq 1 \}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})$.

Soit $\{\mathfrak{X}^{n_k} : k \geq 1\}$ une sous suite qui converge vers une limite disons L . Pour faciliter les écritures, nous noterons la sous-suite par $\{\mathfrak{X}^n : n \geq 1\}$. Soit $u \in (\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*$, la suite de processus :

$$\left\{ \left\langle u, \mathfrak{X}_t^n \right\rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} : t \in [0, 1] \right\} : n \geq 1$$

n'est rien d'autre que la suite de processus

$$\left\{ \left\{ \int_0^t K^* u(s) d\hat{N}_s^n : t \in [0, 1] \right\} : n \geq 1 \right\}$$

Puisque $\{\hat{N}^n : n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi vers B et comme

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} \Delta \tilde{N}_s^n \right] \leq \sup_n n^{-1/2} < \infty$$

On en conclue (voir [76, 84]) que $\{\langle u, \mathfrak{X}^n \rangle : n \in \mathbb{N}^*\}$ converge en loi vers $\int_0^1 K^* u(s) dB_s$, donc $\langle u, L \rangle = \langle u, \mathfrak{X}^B \rangle$. Cela revient à dire que toutes les sous-suites convergentes convergent vers la même limite. Il s'en suit que les lois de $\mathfrak{X}^{\hat{N}^n}$ dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})$ convergent vers les lois de \mathfrak{X}^B . ◀

12.2.2 Retour au problème initial

Nous devons maintenant différentier deux cas selon la position de α par rapport à $1/2$. Quand $\alpha > 1/2$, $\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}$ est un sous-espace de l'espace des fonctions continues et donc son dual contient les mesures de Dirac. D'autre part, quand $\alpha < 1/2$, la fonction $s \mapsto f(s) = \langle \epsilon_s, f \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}}$ n'est pas définie pour $f \in \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}$.

Corollaire 12.1 *Sous les hypothèses 12.1 et 12.2, les lois des processus*

$$\left\{ X_t^n = \int_0^t K(t, s) d\hat{N}_s^n : t \in [0, 1] \right\}$$

dans $\text{Hol}(\alpha - 1/2 - \varepsilon)$, convergent vers la loi de

$$\left\{ X_t = \int_0^t K(t, s) dB_s : t \in [0, 1] \right\}$$

Démonstration :

Pour ε suffisamment petit, $\alpha - 1/2 - \varepsilon > 0$ et pour tout $f \in \mathbb{I}_{\alpha-\varepsilon,2}$,

$$|f(s) - f(t)| \leq c \|f\|_{\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}} |t - s|^{\alpha-1/2-\varepsilon}$$

Donc, l'application suivante :

$$\begin{aligned} B : \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2} &\longrightarrow \text{Hol}(\alpha - 1/2 - \varepsilon) \\ f &\longrightarrow (s \mapsto f(s) = \langle \epsilon_s, f \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}}), \end{aligned}$$

est bien définie et est continue. Donc, pour tout F bornée et continue de $\text{Hol}(\alpha - 1/2 - \varepsilon)$ dans \mathbb{R} , $F \circ B$ est continue de $\mathcal{C}(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon,2}, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} . Par le théorème 12.2, nous avons :

$$E[F \circ B(\mathfrak{X}^{\hat{N}^n})] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[F \circ B(\mathfrak{X}^B)],$$

cela revient à dire que

$$E[F(X^n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[F(X)].$$

Et la démonstration est terminée. ◀

De la même manière, nous avons :

Corollaire 12.2 *Soit $\alpha \in (0, 1/2)$ et soit η continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}^*$. Sous les hypothèses 12.1 et 12.2, les lois des processus*

$$\left\{ \langle \eta_t, \mathfrak{X}_t^n \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}} : t \in [0, 1] \right\}$$

dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$ convergent vers la loi de

$$\left\{ \langle \eta_t, \mathfrak{X}_t \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}} : t \in [0, 1] \right\}$$

Par exemple, on peut choisir η pour que :

$$\begin{aligned} \langle \eta_t, f \rangle_{(\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2})^*, \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}} &= \varepsilon^{-1} \int_{(t-\varepsilon) \vee 0}^{(t+\varepsilon) \wedge 1} f(s) ds \\ &= \varepsilon^{-1} (I_{0+}^1 f((t+\varepsilon) \wedge 1) - I_{0+}^1 f((t-\varepsilon) \vee 0)). \end{aligned}$$

Puisque $f \in \mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}$, $I_{0+}^1 f$ est dans $\mathcal{I}_{1+\alpha-\varepsilon}$ lui-même sous-espace de $\text{Hol}(1/2 + \alpha - \varepsilon)$. Il est alors clair que η est continu de $[0, 1]$ dans $\mathcal{I}_{\alpha-\varepsilon, 2}^*$. Par conséquent, la loi du processus

$$\left\{ \varepsilon^{-1} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathfrak{X}_t^n(s) ds : t \in [0, 1] \right\}$$

dans $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R})$, converge vers la loi du processus

$$\left\{ \varepsilon^{-1} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathfrak{X}_t(s) ds : t \in [0, 1] \right\}.$$

Remarque 12.5 *Une conséquence du corollaire 12.1 est la convergence en loi dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Nous allons maintenant montrer comment l'hypothèse 12.1 et le critère de Kolmogorov suffisent pour obtenir ce résultat. Puisque $K(t, s) = K^*(\varepsilon_t)$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_t^n - X_s^n|^2] &= \int_0^1 |K(t, r) - K(s, r)|^2 dr \\ &\leq c \|K^*(\varepsilon_t - \varepsilon_s)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\leq c \|\varepsilon_t - \varepsilon_s\|_{(\mathcal{I}_{\alpha+1/2, 2})^*}^2 \\ &= c |t - s|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Ceci est suffisant, en vertu du critère de Tension de Kolmogorov ([116] théorème 1.8 page 474), pour montrer que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est tendue et donc, la convergence des lois fini-dimensionnelles étant acquise, elle converge en loi dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, vers X .

Chapitre 13

Annexes

13.1 Annexe 1 : Résultats cruciaux sur les processus Gaussiens

Lemme 13.1 (de comparaison de Slepian, Adler [2]) Soient $\{X_t, t \in T\}$ $\{Y_t, t \in T\}$ deux processus Gaussiens séparables réels tels que :

•

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] \quad \forall t \in T$$

•

$$r_X(t, t) = r_Y(t, t) \quad \forall t \in T$$

•

$$r_X(t, s) \leq r_Y(t, s) \quad \forall (t, s) \in T^2$$

Alors, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in T} X_t > u \right] \geq \mathbb{P} \left[\max_{t \in T} Y_t > u \right]$$

Lemme 13.2 (Borell, Adler [2] pages 43-47) Soit $\{X_t : t \in T\}$ un processus Gaussien centré à trajectoires bornées presque partout. Posons $\sigma_T^2 = \sup_{t \in T} \mathbb{E}[X_t^2]$. On a alors : Alors, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in T} X_t > u \right] \leq 2 \cdot \bar{\Phi} \left(\frac{u}{\sigma_T} \right)$$

Lemme 13.3 (Fernique, Leadbetter [86] lemme 12.2.1 page 219) Soient $\{X_t, t \in [0, 1]\}$ un processus Gaussien centré tel que :

•

$$\text{Var}(X_0) = \sigma^2 > 0$$

•

$$\mathbb{E} \left[(X_t - X_s)^2 \right] \leq K |t - s|^\alpha$$

avec $0 < \alpha \leq 2$.

Alors, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que :

$$\mathbb{P} \left[\max_{t \in [0,1]} X_t > u \right] \leq 4 \cdot \exp \left(-\frac{C_\alpha}{K} u^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \exp \left(-\frac{1}{8\sigma^2} u^2 \right)$$

13.2 Annexe 2 : Calcul fractionnaire Déterministe

Pour $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$, les intégrales fractionnaires de f à droite et à gauche sont définies par :

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x \geq 0,$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt, \quad x \leq b,$$

où $\alpha > 0$ et $I^0 = Id$.

Pour tout $\alpha \geq 0$, tout $f \in \mathcal{L}^p([0, 1])$ et $g \in \mathcal{L}^q([0, 1])$ où $p^{-1} + q^{-1} \leq \alpha$, nous avons :

$$\int_0^1 f(s)(I_{0+}^\alpha g)(s) ds = \int_0^1 (I_{1-}^\alpha f)(s)g(s) ds. \quad (13.1)$$

L'espace de Besov $I_{0+}^\alpha(\mathcal{L}^p) \stackrel{not}{=} \mathcal{I}_{\alpha,p}$ est habituellement équipé de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{I}_{\alpha,p}} = \|I_{0+}^{-\alpha} f\|_{\mathcal{L}^p}.$$

En particulier $\mathcal{I}_{\alpha,2}$ est un espace de Hilbert (séparable) et on a le résultat suivant :

Proposition 13.1 ([57, 121])

- Si $\alpha - 1/p < 0$, Alors $\mathcal{I}_{\alpha,p}$ est isomorphe à $I_{1-}^\alpha(\mathcal{L}^p)$.
- Si $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, Alors I_{0+}^α est un opérateur borné de $\mathcal{L}^p([0, 1])$ dans $\mathcal{L}^q([0, 1])$ avec $q = p(1 - \alpha p)^{-1}$.
- Pour tout $0 < \alpha < 1$ et tout $p \geq 1$, $\mathcal{I}_{\alpha,p}$ est continûment inclus dans $Hol(\alpha - 1/p)$ pourvu que $\alpha - 1/p > 0$. Pour $0 < \nu \leq 1$, $Hol(\nu)$ est l'espace des fonctions Hölder-continues nulles en zéro équipé de la norme :

$$\|f\|_{Hol(\nu)} = \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\nu}.$$

13.3 Annexe 3 : Simulations de trajectoires Browniennes fractionnaires

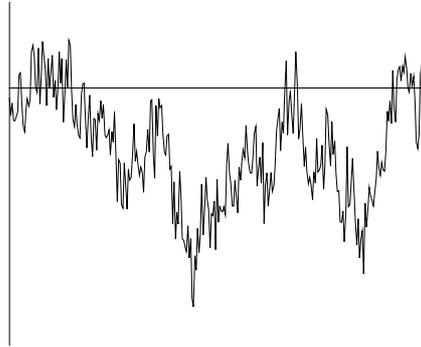


FIG. 13.1 – Trajectoire Brownienne fractionnaire pour $H = 0.2$

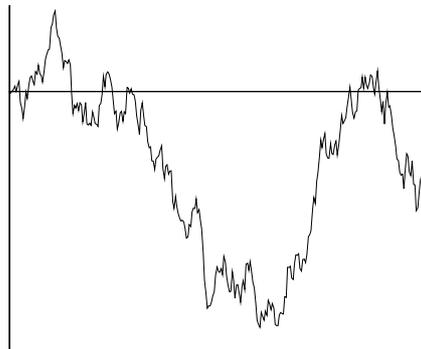


FIG. 13.2 – Trajectoire Brownienne fractionnaire pour $H = 0.5$

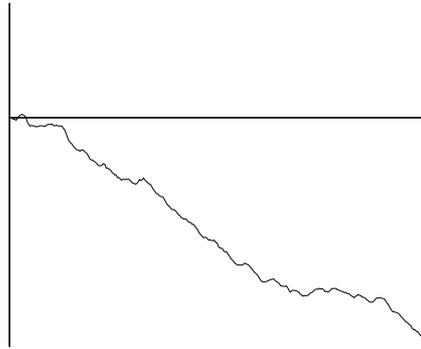


FIG. 13.3 – Trajectoire Brownienne fractionnaire avec $H = 0.8$

13.4 Annexe 4 : Simulations de trajectoires de Processus de Poisson Filtrés

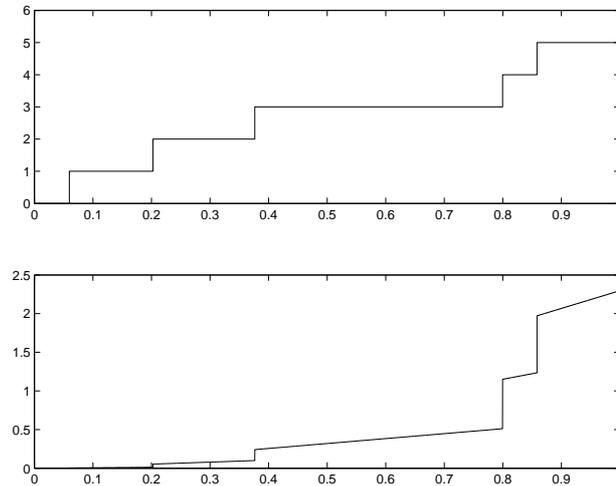


FIG. 13.4 – **En haut** : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$, **En bas** : Trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow t s$.

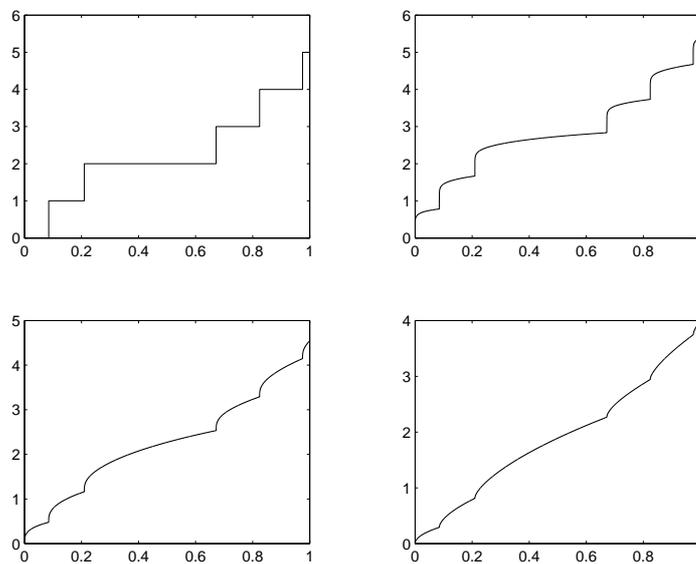


FIG. 13.5 – **En haut à gauche** : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$. Les autres graphiques représentent les trajectoires de Processus de Poisson filtrés par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H-\frac{1}{2}}$ avec **en haut à droite**, $H = 0.6$, **en bas à gauche**, $H = 0.8$ et **en bas à droite** $H = 1$.

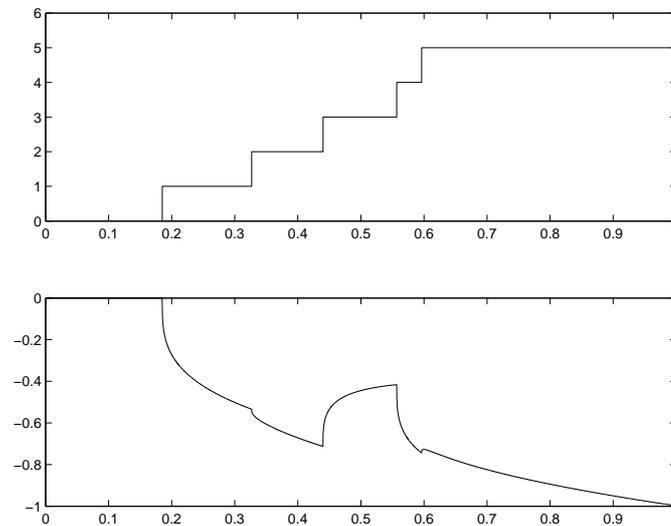


FIG. 13.6 – **En haut** : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.3$ avec des marques Gaussiennes centrées réduites. **En bas**, trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H - \frac{1}{2}}$ avec $H = 0.8$.

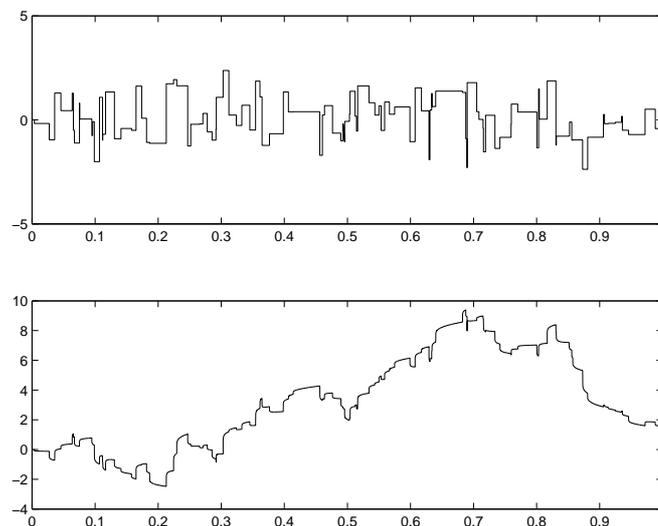


FIG. 13.7 – **En haut** : Trajectoire du processus sous-jacent, un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 0.01$ avec des marques Gaussiennes centrées réduites. **En bas**, trajectoire du Processus de Poisson filtré par le noyau $(t, s) \rightarrow (t - s)^{H - \frac{1}{2}}$ avec $H = 0.6$.

Bibliographie

- [1] K. AASE, B. ØKSENDAL, N. PRIVAULT et J. UBØE – « White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance », *Finance Stoch.* **4** (2000), no. 4, p. 465–496.
- [2] R. ADLER – *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, vol. 12, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1990.
- [3] E. ALÒS, J. LEÓN et D. NUALART – « Stochastic Stratonovich calculus fBm for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than $1/2$ », *Taiwanese J. Math.* **5** (2001), no. 3, p. 609–632.
- [4] E. ALÒS, O. MAZET et D. NUALART – « Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$ », *Stochastic Process. Appl.* **86** (2000), no. 1, p. 121–139.
- [5] — , « Stochastic calculus with respect to Gaussian processes », *Ann. Probab.* **29** (2001), no. 2, p. 766–801.
- [6] E. ALÒS et D. NUALART – « Stochastic integration with respect to fractional brownian motion », Preprint, 2002.
- [7] M. ARCONES – « On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes », *J. Theoret. Probab.* **8** (1995), no. 4, p. 877–903.
- [8] A. BADRIKIAN et A. ÜSTÜNEL – « Radonification of cylindrical semimartingales on Hilbert spaces », *Ann. Math. Blaise Pascal* **3** (1996), no. 1, p. 13–21.
- [9] A. BENASSI, S. COHEN et J. ISTAS – « Identification and properties of moving average fractional lévy motions », Preprint, 2001.
- [10] A. BENTH, F.E. LOKKA – « Anticipative calculus for lévy processes and stochastic differential equations », Preprint, 2002.
- [11] J. BERAN, R. SHERMAN, M. TAQQU et W. WILLINGER – « Long range dependence in variable bite rate video traffic », *IEEE Trans. Commun.* **43** (1995), p. 1566–1579.
- [12] S. BERMAN – « Harmonic analysis of local times and sample functions of Gaussian processes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **143** (1969), p. 269–281.
- [13] — , « Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **137** (1969), p. 277–299.
- [14] — , « Gaussian processes with stationary increments : Local times and sample function properties », *Ann. Math. Statist.* **41** (1970), p. 1260–1272.

- [15] — , « Occupation times of stationary Gaussian processes », *J. Appl. Probability* **7** (1970), p. 721–733.
- [16] — , « Gaussian sample functions : Uniform dimension and Hölder conditions nowhere », *Nagoya Math. J.* **46** (1972), p. 63–86.
- [17] — , « Local nondeterminism and local times of Gaussian processes », *Indiana Univ. Math. J.* **23** (1973/74), p. 69–94.
- [18] — , « Local nondeterminism and local times of general stochastic processes », *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **19** (1983), no. 2, p. 189–207.
- [19] — , « Spectral conditions for local nondeterminism », *Stochastic Process. Appl.* **27** (1987), no. 1, p. 73–84.
- [20] J. BERTOIN – « Sur une intégrale pour les processus à α -variation bornée », *Ann. Probab.* **17** (1989), no. 4, p. 1521–1535.
- [21] K. BICHTLER, J. GRAVEREAUX et J. JACOD – *Malliavin calculus for processes with jumps*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1987.
- [22] P. BILLINGSLEY – *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [23] P. BRÉMAUD – *Point processes and queues*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [24] E. A. CARLEN et E. PARDOUX – « Differential calculus and integration by parts on Poisson space », *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics* (Marseille, 1988), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, p. 63–73.
- [25] P. CARMONA et L. COUTIN – « Intégrale stochastique pour le mouvement brownien fractionnaire », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 3, p. 231–236.
- [26] P. CHERIDITO et D. NUALART – « Stochastic integral of divergence type with respect to fractional brownian motion with hurst parameter $h \in (0, \frac{1}{2})$ », Preprint, Université de Barcelone, 2002.
- [27] G. CHOBANOV – « Modeling financial asset returns with shot noise processes », *Math. Comput. Modelling* **29** (1999), no. 10-12, p. 17–21.
- [28] Z. CIESIELSKI, G. KERKYACHARIAN et B. ROYNETTE – « Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens », *Studia Math.* **107** (1993), no. 2, p. 171–204.
- [29] R. COELHO et L. DECREUSEFOND – « Fractional brownian motion usage for smoothed video traffic bandwidth allocation », *Globecom'97*, 1997.
- [30] I. CORNFELD, S. FOMIN et Y. SINAI – *Ergodic theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 245, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [31] L. COUTIN et L. DECREUSEFOND – « Volterra stochastic differential equations with singular kernels », Tech. report, Submitted, 1999.
- [32] L. COUTIN, D. NUALART et C. TUDOR – « Tanaka formula for the fractional Brownian motion », *Stochastic Process. Appl.* **94** (2001), no. 2, p. 301–315.
- [33] W. DAI et C. HEYDE – « Itô's formula with respect to fractional Brownian motion and its application », *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **9** (1996), no. 4, p. 439–448.

- [34] A. DASSIOS et J. JANG – « The shot-noise process and its distribution at claim times as the intensity of a doubly stochastic process », Preprint, 2001.
- [35] L. DECREUSEFOND – « Perturbation analysis and malliavin calculus », *Annals of Applied Probability* **8** (1998), no. 2, p. 496–523.
- [36] — , « Stochastic calculus with respect to fractional brownian motion », Long Range Dependence : theory and applications, Murad S. Taqqu, 2000.
- [37] — , « A Skohorod-Stratonovitch integral for the fractional Brownian motion », *Proceedings of the 8-th Workshop on stochastic analysis and related fields*, 2000.
- [38] — , « Regularity properties of some stochastic Volterra integrals with singular kernel », *Potential Anal.* **16** (2002), no. 2, p. 139–149.
- [39] — , « Stochastic calculus with respect to volterra processes », Submitted, 2002.
- [40] — , « Stochastic integration with respect to Gaussian processes », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 10, p. 903–908.
- [41] L. DECREUSEFOND et N. SAVY – « Filtered brownian motion as weak limit of filtered poisson processes », Soumis à "Journal of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability", 2002.
- [42] — , « Anticipative integral for filtered poisson processes », En préparation, 2003.
- [43] — , « Girsanov theorem for filtered poisson processes », Soumis à "Electronic Communications in Probability", 2003.
- [44] L. DECREUSEFOND et A. ÜSTÜNEL – « Fractional Brownian motion : theory and applications », Systèmes différentiels fractionnaires (Paris, 1998), ESAIM Proc., vol. 5, Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998, p. 75–86.
- [45] — , « Stochastic analysis of the fractional Brownian motion », *Potential Anal.* **10** (1999), no. 2, p. 177–214.
- [46] G. DI NUNNO, B. ØKSENDAL et F. PROSKE – « White noise analysis for lévy processes », Submitted, 2002.
- [47] J. DIEUDONNÉ – *Éléments d'analyse. Tome II : Chapitres XII à XV*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXI, Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1968.
- [48] J. DOOB – *Stochastic processes*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1953.
- [49] N. DUFFIELD et N. O'CONNELL – « Large deviations and overflow probabilities for the general single-server queue, with applications », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **118** (1995), no. 2, p. 363–374.
- [50] T. DUNCAN – « Some aspect of fractional brownian motion », *Nonlinear Analysis* **47** (2001), p. 4775–4782.
- [51] T. DUNCAN, Y. HU et B. PASIK-DUNCAN – « Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory », *SIAM J. Control Optim.* **38** (2000), no. 2, p. 582–612 (electronic).
- [52] T. DUNCAN, Y. YAN et P. YAN – « Exact asymptotics for a queue with fractional Brownian input and applications in ATM networks », *J. Appl. Probab.* **38** (2001), no. 4, p. 932–945.

- [53] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et F. TRICOMI – *Tables of integral transforms. Vol. I*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1954.
- [54] A. ERRAMILI, O. NARAYAN et W. WILLINGER – « Experimental studies on the performance impacts of long range dependence », *IEEE/ACM Trans. Networking* **4** (1996), p. 209–223.
- [55] A. ERRAMILI, M. TAQQU et W. W. – « A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks », *Stochastic networks : Theory and applications* (I. Z. E. F.P. Kelly, S. Zachary, éd.), Clarendon Press, Oxford, 1996, p. 339 :366.
- [56] W. FELLER – *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, Third edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.
- [57] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE – « On fractional Brownian processes », *Potential Anal.* **10** (1999), no. 3, p. 273–288.
- [58] H. FÖLLMER – « Calcul d'Itô sans probabilités », *Seminar on Probability, XV* (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French), *Lecture Notes in Math.*, vol. 850, Springer, Berlin, 1981, p. 143–150.
- [59] — , « Dirichlet processes », *Stochastic integrals* (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), *Lecture Notes in Math.*, vol. 851, Springer, Berlin, 1981, p. 476–478.
- [60] H. FOWLER et W. LELAND – « Lan traffic characteristics, with applications for broadband network congestion management », *IEEE JSAC* **9** (1991), no. 7, p. 1139–1149.
- [61] M. GARRETT et W. WILLINGER – « Analysis and generation of self similar vbr video traffic », *SIGCOMM'94* (London UK), 1994, p. 269–290.
- [62] B. GAVEAU et P. TRAUBER – « L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel », *J. Funct. Anal.* **46** (1982), no. 2, p. 230–238.
- [63] L. GIRAITIS, S. MOLCHANOV et D. SURGAILIS – « Long memory shot noises and limit theorems with application to Burgers' equation », *New directions in time series analysis, Part II, IMA Vol. Math. Appl.*, vol. 46, Springer, New York, 1993, p. 153–176.
- [64] L. GIRAITIS et D. SURGAILIS – « On shot noise processes with long range dependence », *Probability theory and mathematical statistics, Vol. I* (Vilnius, 1989), "Mokslas", Vilnius, 1990, p. 401–408.
- [65] B. GNEDENKO et A. KOLMOGOROV – *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge, Mass., 1954.
- [66] L. DE HAAN – *On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes*, *Mathematical Centre Tracts*, vol. 32, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1970.
- [67] Y. HU et B. ØKSENDAL – « Chaos representation of local time of fractional brownian motions », Preprint, 2000.
- [68] — , « Fractional white noise calculus and applications to finance », Preprint, 2000.
- [69] Y. HU, B. ØKSENDAL et D. SALOPEK – « Weighted local time for fractional brownian motion and applications to finance », Preprint, 2001.

- [70] Y. HU, B. ØKSENDAL et A. SULEM – « Optimal consumption and portfolio in a black-scholes market driven by fractional brownian motion », Preprint, 2000.
- [71] Y. HU, B. ØKSENDAL et T. ZHANG – « Stochastic partial differential equations driven by multiparameter fractional white noise », *Stochastic processes, physics and geometry : new interplays, II* (Leipzig, 1999), CMS Conf. Proc., vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 327–337.
- [72] S. HUANG et S. CAMBANIS – « Gaussian processes : nonlinear analysis and stochastic calculus », *Measure theory applications to stochastic analysis* (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 695, Springer, Berlin, 1978, p. 165–177.
- [73] H. HURST – « Long-term storage in reservoirs », *Tans. Amer. Soc. civil Eng.* **116** (1951), p. 400–410.
- [74] J. HÜSLER et V. PITERBARG – « Extremes of a certain class of Gaussian processes », *Stochastic Process. Appl.* **83** (1999), no. 2, p. 257–271.
- [75] J. JACOD – *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 714, Springer, Berlin, 1979.
- [76] A. JAKUBOWSKI, J. MÉMIN et G. PAGÈS – « Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace \mathbf{d}^1 de Skorokhod », *Probab. Theory Related Fields* **81** (1989), no. 1, p. 111–137.
- [77] J. KARAMATA – « Sur un mode de croissance régulière », *Bull. Soc. Math. France* **61** (1933), p. 55–62.
- [78] M. KLEPTSYNA et A. LE BRETON – « A Cameron-Martin type formula for general Gaussian processes—a filtering approach », *Stoch. Stoch. Rep.* **72** (2002), no. 3-4, p. 229–250.
- [79] M. KLEPTSYNA, A. LE BRETON et M. ROUBAUD – « General approach to filtering with fractional Brownian noises—application to linear systems », *Stochastics Stochastics Rep.* **71** (2000), no. 1-2, p. 119–140.
- [80] A. KOLMOGOROV – « Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum », *C/R (Doklady), Acad. Sci. URSS (N.S.)* **26** (1940), p. 115–118.
- [81] N. KÔNO et N. SHIEH – « Local times and related sample path properties of certain self-similar processes », *J. Math. Kyoto Univ.* **33** (1993), no. 1, p. 51–64.
- [82] G. KÖTHE – *Topological vector spaces. II*, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [83] C. KÜHN – « Shocks and choices - an analysis of complete markets models », Thèse, Technische Universität München, 2002.
- [84] T. KURTZ et P. PROTTER – « Weak convergence of stochastic integrals and differential equations », *Probabilistic models for nonlinear partial differential equations* (Montecatini Terme, 1995), Springer, Berlin, 1996, p. 1–41.
- [85] J. LAMPERTI – « Semi-stable stochastic processes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **104** (1962), p. 62–78.
- [86] R. LEADBETTER, G. LINDGREN et H. ROOTZÉN – *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1983.

- [87] W. LELAND, M. TAQQU, W. WILLINGER et D. WILSON – « On the self-similar nature of ethernet traffic », *IEEE/ACM Trans. Netw.* (1994), p. 1–15.
- [88] W. LELAND et D. WILSON – « High-time resolution measurement and analysis of lan traffic : implications for lan interconnection », *IEEE INFOCOMM'91*, 1991.
- [89] J. A. LÉON, J. SOLÉ, F. UTZET et J. VIVES – « On lévy processes, malliavin calculus and market models with jumps », *Finance Stochast.* **6** (2002), p. 197–225.
- [90] M. LIFSHITS – *Gaussian random functions*, Mathematics and its Applications, vol. 322, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [91] M. LOÈVE – *Probability theory*, Third edition, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1963.
- [92] O. MAGRÉ – « Mouvement brownien fractionnaire : contribution à la modélisation, à la synthèse et à l'analyse. », Thèse, Ecole Centrale de Nantes, 1996.
- [93] B. MANDELBROT et J. VAN NESS – « Fractional Brownian motions, fractional noises and applications », *SIAM Rev.* **10** (1968), p. 422–437.
- [94] L. MASSOULIE et A. SIMONIAN – « Large buffer asymptotics for the queue with fractional Brownian input », *J. Appl. Probab.* **36** (1999), no. 3, p. 894–906.
- [95] M. MÉTIVIER – *Stochastic partial differential equations in infinite-dimensional spaces*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1988.
- [96] D. L. MILLER, M.I. SNYDER – *Random point processes in time and space*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [97] O. NARAYAN – « Exact asymptotic queue length distribution for fractional brownian motion », *Advances in performance analysis* **1** (1998), no. 1, p. 39–63.
- [98] J. NEVEU – *Processus aléatoires gaussiens*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 34 (Été, vol. 1968, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1968.
- [99] J. NOLAN – « Local nondeterminism and local times for stable processes », *Probab. Theory Related Fields* **82** (1989), no. 3, p. 387–410.
- [100] I. NORROS – « On the use of fractional brownian motion in the theory of connectionless networks », Preprint, 1994.
- [101] — , « A storage model with self-similar input », *Queueing Systems Theory Appl.* **16** (1994), no. 3-4, p. 387–396.
- [102] — , « Four approaches to the fractional brownian storage », Preprint, 1996.
- [103] — , « A girsanov formula approach to the fractional brownian storage », Preprint, 1996.
- [104] I. NORROS, E. VALKEILA et J. VIRTAMO – « An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions », *Bernoulli* **5** (1999), no. 4, p. 571–587.
- [105] D. NUALART – *The Malliavin calculus and related topics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [106] D. NUALART et É. PARDOUX – « Stochastic calculus with anticipating integrands », *Probab. Theory Related Fields* **78** (1988), no. 4, p. 535–581.

- [107] D. NUALART et J. VIVES – « Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space », Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89, Springer, Berlin, 1990, p. 154–165.
- [108] B. ØKSENDAL et F. PROSKE – « White noise of poisson random measure », Preprint Université de Oslo, 2002.
- [109] E. PARZEN – *Stochastic processes*, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1962.
- [110] V. PIPIRAS et M. TAQQU – « Convergence of the weierstrass-mandelbrot process to fractional brownian motion », *Fractals*, vol. 8, 2000, p. 369–384.
- [111] V. PITERBARG – *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 148, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [112] N. PRIVAULT – « Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process », *Stochastics Stochastics Rep.* **51** (1994), no. 1-2, p. 83–109.
- [113] — , « Skorohod stochastic integration with respect to non-adapted processes on Wiener space », *Stochastics Stochastics Rep.* **65** (1998), no. 1-2, p. 13–39.
- [114] P. PROTTER – *Stochastic integration and differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [115] F. RAMIREZ-PEREZ et R. SERFLING – « Shot noise on cluster processes with cluster marks, and studies of long range dependence », *Adv. in Appl. Probab.* **33** (2001), no. 3, p. 631–651.
- [116] D. REVUZ et M. YOR – *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [117] L. ROGERS – « Arbitrage with fractional Brownian motion », *Math. Finance* **7** (1997), no. 1, p. 95–105.
- [118] Y. ROZANOV – *Stationary random processes*, Translated from the Russian by A. Feinstein, Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1967.
- [119] F. RUSSO et P. VALLOIS – « The generalized covariation process and Itô formula », *Stochastic Process. Appl.* **59** (1995), no. 1, p. 81–104.
- [120] — , « Itô formula for C^1 -functions of semimartingales », *Probab. Theory Related Fields* **104** (1996), no. 1, p. 27–41.
- [121] S. G. SAMKO, A. KILBAS et O. MARICHEV – *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
- [122] G. SAMORODNITSKY – « Probability tails of Gaussian extrema », *Stochastic Process. Appl.* **38** (1991), no. 1, p. 55–84.
- [123] — , « A class of shot-noise models for financial applications », *Athens conference on Applied Probability and Time Series Analysis* (New York) (L. N. in Statistics, éd.), vol. I, Springer-Verlag, 1996, p. 332–353.
- [124] G. SAMORODNITSKY et M. TAQQU – *Stable non-Gaussian random processes*, Stochastic Modeling, Chapman & Hall, New York, 1994.

- [125] L. SCHWARTZ – « Semi-martingales banachiques : le théorème des trois opérateurs », Séminaire de Probabilités, XXVIII, Springer, Berlin, 1994, p. 1–20.
- [126] R. SHERMAN, M. TAQQU et W. WILLINGER – « Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling », *Computer Communication Review* (1997).
- [127] A. SHIRYAYEV – *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [128] T. SZABADOS – « Strong approximation of fractional Brownian motion by moving averages of simple random walks », *Stochastic Process. Appl.* **92** (2001), no. 1, p. 31–60.
- [129] M. TAQQU – « Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **31** (1974/75), p. 287–302.
- [130] M. TAQQU, W. WILLINGER et D. WILSON – « Self-similarity through high variability analysis of ethernet lan traffic at the source level », *Proc. ACM SIGCOM'95*, 1995.
- [131] E. THIBAUT – « Files d'attente, approximations diffusions, caractéristiques transitoires », Thèse, Université de Rennes 1, 1998.
- [132] B. TSYBAKOV et N. GEORGANAS – « Self-similar processes in communications networks », *IEEE Trans. Inform. Theory* **44** (1998), no. 5, p. 1713–1725.
- [133] A. ÜSTÜNEL – *An introduction to analysis on Wiener space*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1610, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [134] A. ÜSTÜNEL et M. ZAKAI – *Transformation of measure on Wiener space*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [135] S. YUE et M. HISHINO – « The general cumulants for a filtered point processes », *Applied Mathematical Modelling* **25** (2001), p. 193–201.
- [136] M. ZÄHLE – « Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I », *Probab. Theory Related Fields* **111** (1998), no. 3, p. 333–374.
- [137] A. ZYGMUND – *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II*, Cambridge University Press, New York, 1959.

Résumé

Le mouvement brownien fractionnaire est devenu en quelques années un processus incontournable dès que l'on veut s'affranchir de la propriété de markov et d'indépendance des accroissements. Nous verrons au cours de ce travail les principales propriétés de ce processus, nous insisterons sur son utilisation comme modèle de file fluide et sur le comportement asymptotique de la capacité de stockage d'une telle file. Enfin, nous discuterons de la définition du temps local.

Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale, des techniques alternatives ont été développées pour définir une notion d'intégrale relativement à ce processus ou plus généralement à des processus Gaussien de type Volterra. Après une présentation sommairement de ces techniques, on développe la construction d'une intégrale anticipative relative au mouvement Brownien fractionnaire à partir de l'intégrale anticipative relative au mouvement Brownien *via* un opérateur linéaire. Fort de cette idée, nous avons introduit une intégrale anticipative relative à des processus de Poisson Filtrés à partir d'une intégrale anticipative pour des processus de Poisson marqués, intégrale que nous relierons à l'intégrale de Stieltjes. L'étude de cette intégrale se poursuit par une formule de Itô pour des fonctionnelles cylindriques et par un résultat sur la continuité de Hölder de processus intégrés.

Des techniques de radonification et des résultats de convergence de martingales Hilbertiennes sont utilisés pour établir un théorème de convergence en loi d'une suite de processus de Poisson Filtrés d'intensité constante vers un processus de Volterra quand l'intensité tend vers l'infini.

Mots clés : Mouvement Brownien fractionnaire, Auto-similarité, Dépendance à long terme, Processus Gaussiens, Temps Local, Intégrale Anticipative, Processus de Poisson Marqué, Processus de Poisson Filtré, Théorème de Girsanov, Convergence de Martingales Hilbertienne.