



HAL
open science

Sur les déformations des systèmes complètement intégrables classiques et semi-classiques

Nicolas Roy

► **To cite this version:**

Nicolas Roy. Sur les déformations des systèmes complètement intégrables classiques et semi-classiques. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2003. Français. NNT: . tel-00003400

HAL Id: tel-00003400

<https://theses.hal.science/tel-00003400>

Submitted on 19 Sep 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les déformations des systèmes complètement intégrables classiques et semi-classiques

Nicolas Roy

19 septembre 2003

*L'Homme a besoin de rite(s) et
de rythme(s).*

Ryszard Arciszewski

Remerciements

★ Je tiens tout d'abord à remercier vivement mes deux rapporteurs Horst Knörrer et Didier Robert d'avoir accepté de lire mon manuscrit, de ne pas (trop) s'être énervé de toutes les imperfections ou erreurs qui s'y trouvaient, et de m'avoir autorisé à soutenir ma thèse ! Leurs remarques concernant la première version du manuscrit ont mis en lumière de nombreux points à modifier ou à corriger, et j'espère avoir su tirer profit de leurs conseils pour améliorer quelque peu mon texte.

C'est de plus un honneur pour moi d'avoir eu pour rapporteurs Horst Knörrer, dont certains articles sont à l'origine de la motivation de la deuxième partie de ma thèse, et Didier Robert, qui fut un des premiers à poser les bases du calcul pseudo-différentiel dépendant d'un petit paramètre.

★ Je voudrais aussi remercier Monique Combescure et Alain Joye d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je les remercie aussi pour leurs remarques concernant le manuscrit.

★ Je tiens à remercier Yves Colin de Verdière d'avoir pris, il y a de cela quelques¹ années, le pari quelque peu risqué² de diriger ma thèse. Après diverses déceptions³, ce projet de thèse avec Yves est arrivé en sauveur et, je dois dire, de manière un peu inespérée. Yves Colin de Verdière faisait en effet partie de la liste des directeurs de thèse potentiels que, par modestie ou réalisme, je n'aurais jamais osé contacter, si on ne m'y avait pas poussé !

Je tiens d'abord à le remercier pour son investissement personnel dans ce rôle de directeur. Dès le début de ma thèse, il m'a accordé une grande part de son temps⁴ pour me former⁵ sur les domaines mathématiques assez nouveaux pour moi et, tout au long de ces quelques années⁶, il a toujours été disponible pour m'écouter parler de mes laborieuses découvertes ou de mes angoisses thésardo-existentielles.

Ensuite, il a souvent eu l'attitude juste dans les moments où ma thèse m'apparaissait comme un mirage inaccessible. Même si ces situations de doutes étaient déstabilisantes pour lui aussi, il a toujours su trouver le mot ou le silence approprié⁷.

Je sais que récemment il était quelque peu travaillé par l'idée qu'il ne savait finalement toujours pas ce qu'était le travail de directeur de thèse. A ces questions, je souhaiterais lui

¹Non, je ne dirai pas combien.

²Ce qu'il ne savait peut-être pas encore...

³Un directeur de thèse prévu qui me fait faux bond, une petite amie qui me lâche, une grand-mère qui s'éteint.

⁴Le temps, qui est une des richesses les plus précieuses dans ce métier, il me semble.

⁵Je ne me rends probablement pas encore compte de l'étendue des choses que j'ai apprises auprès de lui .

⁶Mais enfin !! J'ai dit que je ne dirai pas combien !

⁷Cela n'a pas empêché le fait qu'il a eu aussi parfois des remarques hautement non-appropriées à mon sens. Mais j'apprécie beaucoup avoir pu le lui dire, de manière simple et sincère.

répondre qu'il a, pour moi, rempli sa fonction de directeur de thèse de manière quasi⁸-exemplaire.

★ Le parcours de tout homme est fait de rencontres. S'il en est qui n'infléchissent que très légèrement le cours de notre vie, il en est aussi d'autres dont l'influence est telle qu'on imagine mal comment aurait été notre vie sans elle.

J'ai rencontré *scientifiquement*⁹ Frédéric Faure en Septembre 1993 près de la photocopieuse de l'Institut des Sciences Nucléaires où j'effectuais un stage d'été. Après quelques "*salut, comment ça va va ?*" et autres "*tiens, toi aussi tu es là ? !*", la discussion a insidieusement bifurqué vers la mécanique classique et je me rappelle encore l'étrange sensation qui me resta après cette discussion, ainsi que les précieuses feuilles de brouillon peuplées de tores KAM et autres structures ô combien mystérieuses et excitantes.

De par mon parcours de physicien, j'avais des mathématiques une vue assez restreinte¹⁰ et ma rencontre avec Fred fut aussi ma rencontre avec la géométrie différentielle. A partir de ce moment, il me distilla au compte-goutte divers livres de "mathématiques pour physiciens" que je dévorais à vitesse d'escargot et qui devinrent rapidement le sens et l'essence de ma motivation pour les sciences. Pendant longtemps, je n'ai eu que Fred comme interlocuteur scientifique, les collègues d'études montrant un intérêt tout à fait *tiède* pour les sujets "ne tombant pas à l'examen", et la passion, la modestie et la générosité dont il a toujours fait preuve lors de nos nombreux échanges ont changé ma vision des sciences, de la nature, de la vie, du monde¹¹ !

S'il est une personne sans qui *rien de ceci ne serait arrivé*, c'est bien lui ! Je tiens à le remercier pour ce qu'il est et ce qu'il donne, tout simplement, et pour me faire l'honneur d'être dans mon jury.

★ Depuis le début de ma thèse, San VuNgoc a été mon interlocuteur privilégié à l'Institut Fourier. Il n'a jamais rechigné à me consacrer du temps, pour m'écouter, discuter et me transmettre ce qu'il savait. C'est grâce à lui (et son incroyable faculté à ses remémorer les références bibliographiques) que j'ai découvert la plupart des articles et ouvrages qui ont été importants voire décisifs pour moi.

Même si je ne peux cacher une certaine déception de n'avoir jamais été à *la hauteur* suffisante pour l'attirer et l'embarquer dans un projet commun¹², je ne peux que le remercier pour toute son aide aussi bien sur le plan des mathématiques que sur celui du soutien moral lorsque, exténué par une discussion de plusieurs heures pendant laquelle je n'avais pas compris un traître mot à ce que m'avait raconté mon chef qui estimait que "*tout est trivialement fini, il ne reste plus qu'à l'écrire*", il me répondait¹³ "*t'inquiète pas, j'connais !*".

★ Je voudrais remercier aussi l'ensemble des collègues de l'Institut Fourier et en particulier ceux qui m'ont accordé des instants de discussion, toujours généreusement, avec sympathie et sans jamais s'énerver de mes questions débutantes, floues, mal posées et mal formulées ! Je pense en particulier¹⁴, excepté les personnes déjà citées, à : Alain Joye, Marc Joyeux, Roland

⁸Un peu de modération permet d'éviter les enflements excessifs de chevilles.

⁹Nous nous étions déjà rencontrés *musicalement* 6 mois plus tôt.

¹⁰Tables d'additions, matrice 2x2, ...

¹¹N'ayons pas peur de la grandiloquence, lorsqu'elle s'impose !

¹²Je veux dire, écrire quelque chose ensemble.

¹³Cette tirade est bien entendu entièrement fictive et toute ressemblance avec des personnages ou des faits réels est purement fortuite.

¹⁴Je vais forcément en oublier... Pour porter réclamation concernant un nom manquant, merci de contacter

Bacher, Patrick Bernard, Laurent Bonavero, Emmanuel Ferrand, Thierry Gallay, Sylvestre Gallot, Jean-Louis Verger-Gaugry, Eric Lombardi, Paul-Emile Paradan, Bernard Parisse, Emmanuel Peyre, Gaël Rémond.

★ Je souhaite remercier de même l'ensemble du personnel administratif de l'Institut Fourier qui, ayant pleinement conscience du fait que les mathématiciens sont parfois (souvent ?) des *infirmes administratifs*, nous facilite grandement la tâche et nous épargne beaucoup de travail fastidieux en nous préparant les multiples pièces de cet océan de documents administratifs dans lequel, sans cette aide, nous nous noierions inéluctablement.

En particulier, je remercie Arlette Guttin-Lombard pour son aide durant toute la thèse jusqu'à la couverture même de celle-ci (!), Myriam Charles pour ses conseils concernant l'anglais, Jannick Joukoff pour m'avoir fait venir des quatre coins de la France des ouvrages mathématiques, Mick Marchand pour les innombrables et inestimables *sauvetages de vie* informatiques.

★ Je voudrais remercier aussi les *camarades de galère*, toujours prêts à discuter, à écouter ou à compatir, suivant les besoins, j'ai nommé les thésards¹⁵. Le monde des mathématiques étant parfois froid et solitaire, le contact avec les thésards fut un bien précieux et réconfortant. Merci en particulier à Freddy Bouchet, Olivier Bourget, Laurent Charles, Laurent Chaumard, Eric Dumas dit *Granchveu*, Franck Doray, Adrien Dubouloz, Luc Hillairet, Sébastien Jansou, David Pinel, Matthieu Romagny, Vidian Rousse, Konstantin Vernicos.

★ Il serait injuste de ne pas remercier les enseignants qui m'ont marqué durant mes années universitaires, mais aussi au lycée. Il est bien connu qu'à un certain âge, la motivation pour une matière à l'école est fortement influencée par le charisme de la personne qui nous l'enseigne. La plupart de mes enseignants en matières scientifiques étaient des gens passionnés par leur domaine et très soucieux de faire partager cette passion avec leurs étudiants. Je voudrais remercier tous ceux qui ont su éveiller, maintenir ou alimenter en moi la flamme scientifique. Tentative de remémoration chronologique (depuis le lycée) : Jean Bizouard, Christiane Rimbaud, Mireille Durand, Robert Arvieux, Claude Gignoux, Antoine Delon, Thierry Dombre, Pierre Salati, Gérard Sajot, Pascal Degiovanni, Patrick Iglesias, Robert Coquereaux.

★ On ne peut évidemment oublier les parents sans qui rien ne serait. Tout au long de mes études et notamment pendant la thèse, ils m'ont toujours soutenu avec une confiance aveugle et hautement exagérée en ma réussite future certaine, comme il se doit de la part de parents.

Cette confiance remonte même en fait beaucoup loin, au jour¹⁶ où ma mère m'a fait le plaisir de croire que j'avais réellement inventé cette petite "machine" en papier servant à transformer les nombres binaires en nombres décimaux, que j'avais intégralement pompée dans une revue genre *Science et Vie Junior*.

Cette confiance battait aussi son plein lorsque, au début du collège, mon père commentait avec moi ces organigrammes qui décrivent le système éducatif français sous forme d'une pyramide contenant l'éventail des diplômes possibles et couronnée tout en haut de la feuille par le fameux *Doctorat*. Lorsque mes camarades me demandaient "*et toi, kes tu veux faire plus*

roy.nico@free.fr

¹⁵et les fraîchement thésés

¹⁶Je devais avoir dans les 12 ans, à vue de nez.

tard ?", je répondais avec une certitude sans faille *"un doctorat"*, ce à quoi j'ajoutais immédiatement, pour les incultes, *"c'est celui qu'est tout en haut de la feuille"*.

★ Pour finir, je souhaite remercier ma femme Małgosia pour l'inestimable et patient soutien dont elle a fait preuve à mon égard, durant toute cette thèse. Elle a supporté tous mes *"je n'y arriverais jamais"*, *"j'en ai marre de mon chef"* et autres *"c'est trop dur les maths"*, et a réussi petit à petit à me faire prendre du recul sur ma situation de thésard, et me montrer où se trouvent les choses véritablement importantes de la vie.

Grenoble, le 2 septembre 2003

Table des matières

A	Systèmes hamiltoniens complètement intégrables	21
1	Rappels de géométries symplectique et affine	21
1.1	Conventions en géométrie différentielle	21
1.2	Conventions en géométrie symplectique	24
1.3	Feuilletages lagrangiens et connexions affines	25
2	Systèmes hamiltoniens complètement intégrables	27
2.1	Applications moments	27
2.2	Fibrations en tores lagrangiens	29
2.2.1	Quelques propriétés élémentaires des fibrations lagrangiennes	29
2.2.2	Structure affine sur les fibres	31
2.2.3	Le fibré des périodes	32
2.2.4	Structure affine et monodromie sur l'espace de base	35
2.2.5	Séries de Fourier	37
2.3	Action torique semi-globale	39
2.3.1	Fibré torique	39
2.3.2	Action torique	40
2.3.3	Moyennisation par l'action torique	41
2.3.4	Théorème de décomposition des champs de vecteurs symplectiques	42
2.4	Dynamique complètement intégrable	45
2.4.1	Modules de résonance et feuilletages entiers	45
2.4.2	Moyennisations	46
3	Hamiltoniens non-dégénérés	48
3.1	Différentes conditions possibles	49
3.2	Conditions plus fortes et plus faibles...	51
3.3	Applications moments des hamiltoniens non-dégénérés	53
3.4	Exemples	56
3.5	Remarques finales : Liouville vs Duistermaat	57
B	Déformations de systèmes complètement intégrables	61
1	Déformations régulières	62
1.1	Déformations globalement hamiltoniennes	63
1.1.1	Champs de vecteurs dépendant du temps	63
1.1.2	Théorème de déformation globalement hamiltonienne	65
1.2	Fonctions non-résonantes et équation homologique	69
1.2.1	Fonctions résonantes et non-résonantes	69

	1.2.2	Lemme de division	70
	1.2.3	Équation homologique	74
1.3		Déformations régulières formelles	74
	1.3.1	Complète intégrabilité formelle en ε	74
	1.3.2	Déformations régulières formelles	76
2		Déformations singulières	79
2.1		Déformations d'applications moments à $O(\varepsilon^2)$	80
	2.1.1	Applications moments V -déformables	80
	2.1.2	Petit retour sur le cas régulier	81
2.2		Déformations singulières avec 1 résonance	83
	2.2.1	Forme normale résonante	84
	2.2.2	Déformation singulière avec 1 résonance	86
2.3		Déformations singulières avec n résonances	88
	2.3.1	Forme normale résonante	89
	2.3.2	Déformation singulière avec n résonances	91
C		Outils semi-classiques	95
1		Introduction	95
	1.1	Comment lire ce chapitre	95
	1.2	Fibration lagrangienne naturelle associée à un tore affine	95
2		Opérateur pseudo-différentiels sur le tore	96
2.1		Quelques rappels et quelques notations	96
	2.1.1	Séries de Fourier	96
	2.1.2	Quelques trucs et astuces...	98
2.2		Espaces de symboles	99
	2.2.1	Symboles ordinaires	99
	2.2.2	Symboles à la Sjöstrand	101
	2.2.3	Développements asymptotiques	104
2.3		Composition	108
	2.3.1	Lemme de phase stationnaire	108
	2.3.2	Produit de Moyal et composition d'OPD	111
	2.3.3	Commutateurs	112
2.4		Continuité L^2	114
	2.4.1	Continuité L^2 des OPD	114
	2.4.2	Adjoints d'OPD	116
2.5		Calcul fonctionnel	118
	2.5.1	Symboles elliptiques et paramétrixes	119
	2.5.2	Symboles dépendant uniformément d'un paramètre	120
	2.5.3	Résolvante approchée	121
	2.5.4	Exponentielles et conjugaison	121
3		\hbar^α -Microlocalisation dans l'espace des tores	124
	3.1	Opérateurs J -plat sur un tore	124
	3.2	\hbar^α -Microlocalisation autour d'un tore	128
	3.3	Fonctions \hbar^α -microlocalisées sur un tore	130

D	Résonances, quasi-résonances et formes normales	133
1	Introduction	133
1.1	Principe général des formes normales	133
1.1.1	Petite réflexion sur les formes normales	133
1.1.2	Formes normales et équations homologiques	133
1.2	Formes normales partiellement diophantienne et quasi-résonante . . .	134
1.2.1	Forme normale locale partiellement diophantienne	134
1.2.2	Forme normale globale quasi-résonante	135
2	Forme normale locale partiellement diophantienne	135
2.1	Dynamique classique diophantienne	135
2.2	Équation homologique classique	137
2.3	Forme normale quantique	140
2.4	Remarque sur l'uniformité par rapport à l'ensemble des tores	142
3	Forme normale globale quasi-résonante	143
3.1	Résonances et quasi-résonances des hamiltoniens non-dégénérés . . .	144
3.2	Moyennisation quasi-résonante	147
3.3	Forme normale globale quasi-résonante	154
E	Quasimodes et résonances	159
1	Introduction	159
1.1	Quasimodes	159
1.2	Quasimodes et formes normales	161
1.3	Forme normale globale quasi-résonante et quasimodes	162
2	Fonctions de BKW-Liouville	164
2.1	Fonctions de BKW-Liouville	164
2.2	Action des OPD sur les fonctions de BKW-Liouville	164
3	Quasimodes non-résonants et valeurs propres stables	166
3.1	Quasimodes non-résonants	166
3.2	Valeurs propres stables	167
4	Quasimodes résonants	170
4.1	Quasimodes mono-résonants	172
5	Conclusion	176
5.1	Comment choisir tous les exposants : $\gamma, \mu, \delta, \kappa$?	176
5.2	Le cas de la dimension 2	177
	Bibliographie	181

Introduction

Ce qu'il y a dans cette thèse

Systèmes hamiltoniens complètement intégrables réguliers

En dépit et/ou du fait de leurs caractéristiques très particulières, les systèmes complètement intégrables (abrégés C.I.) ont fait et font toujours l'objet d'un nombre incalculable d'études. La plupart du temps, ces systèmes sont censés modéliser des situations physiques mais suffisamment exceptionnelles ou particulières pour que l'on soit en mesure de résoudre les équations qui les décrivent. L'adjectif "*intégrable*" signifie en quelque sorte "*que l'on sait résoudre*", et le choix de "*intégrable*" plutôt que "*soluble*" provient probablement du fait que la majeure partie des systèmes physiques se modélise à l'aide d'équations différentielles dont la résolution fait forcément intervenir quelque part des intégrations.

En ce qui nous concerne, nous allons nous concentrer sur deux types de systèmes complètement intégrables : les hamiltoniens C.I. et les opérateurs pseudo-différentiels C.I, correspondant respectivement aux théories de la Mécanique Classique et de la Mécanique Quantique (ou plus exactement semi-classique). La mécanique classique fait référence à la théorie qui prétend expliquer le comportement des objets matériels de taille raisonnablement "pas trop petite", i.e non-quantique, et de vitesse et de masse raisonnablement "pas trop grandes", i.e non-relativistes. La formulation des lois de cette mécanique en terme d'équations différentielles remonte à Newton et s'est développée jusqu'à nos jours en passant par les habiles mains de Lagrange, Hamilton, Poisson, Poincaré, Moser, Weinstein, Duijstermaat..., pour ne citer qu'eux¹⁷.

- . Dans cette thèse, on se place dans la formulation moderne de la mécanique du point matériel, à savoir en terme de fonctions (nommés *hamiltoniens*) sur une variété symplectique \mathcal{M} (nommée *espace de phase*), et on s'attardera tout le premier chapitre sur les hamiltoniens dit complètement intégrables. Ces hamiltoniens très particuliers et/mais très intéressants font appel aux deux notions d'*application moment* et de *fibration en tores lagrangiens*. La notion d'*application moment* fut la première historiquement¹⁸ et consiste en une collection d'*intégrales premières du mouvement*, i.e de fonctions décrivant des grandeurs qui sont conservées par la dynamique induite par l'hamiltonien H considéré. Le fameux théorème d'Arnol'd-Liouville¹⁹ prédit que lorsqu'un hamiltonien H

¹⁷Je me suis permis de citer parmi les contemporains ceux dont les travaux m'ont marqué d'une manière ou d'une autre.

¹⁸On peut au moins la faire remonter à Liouville, même si elle ne portait pas encore ce nom.

¹⁹Qu'on devrait plutôt appeler Mineur-Liouville en référence à l'article [46] bien antérieur à celui d'Arnol'd ([4]), comme l'a fait remarquer S. VuNgoc dans sa thèse [66].

admet une application moment, alors il existe "localement"²⁰ un système de coordonnées particulières dite *angles-actions* ce qui nous montre notamment que "localement" l'espace de phase est fibré par des tores lagrangiens et que sur ces tores, la dynamique est linéaire par rapport aux coordonnées angles sur chaque tore. Bien que ces coordonnées soient "locales", on imagine intuitivement que si l'on applique ce théorème plusieurs fois, on peut récupérer un objet global : une fibration lagrangienne en tores $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, ce qui fut l'objet géométrique d'étude de Duistermaat dans son article [28]. Cet objet recèle et induit de nombreuses et élégantes structures géométriques naturelles. Il y a par exemple l'existence naturelle d'une structure affine sans holonomie sur chacun des tores (remarqué par Weinstein [69, 70]), d'une structure affine sur l'espace de base \mathcal{B} qui peut présenter de l'holonomie que l'on appelle monodromie (remarqué par Duistermaat dans [28]). Il y a aussi divers fibrés vectoriels et fibrés en réseau au dessus de \mathcal{B} , ainsi qu'un fibré en groupe²¹ \mathcal{G} , tous munis d'une connexion plate naturelle.

- Après avoir présenté ces différents objets, on discutera un moment du fibré en groupe \mathcal{G} précédemment cité et de son action naturelle sur la fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ qui permet de définir l'opération de moyennisation d'un champ de tenseurs quelconque et de parler de tenseurs constants ou invariants sous cette action. On donnera notamment un théorème dit de "décomposition des champs de vecteurs symplectiques" qui assure que tout champ de vecteurs symplectique X se décompose en $X = X_1 + X_2$, où X_2 est invariant sous l'action de \mathcal{G} et X_1 est globalement hamiltonien. Le flot de X_1 préserve globalement la fibration²² et constitue en quelque sorte la partie triviale de X . Cette décomposition sera très utile lors de l'étude des déformations des systèmes complètement intégrables comme on le verra.
- Pour finir ce premier chapitre, on discutera de la propriété, ou plutôt des différentes propriétés de non-dégénérescence pour un hamiltonien complètement intégrable H . Ces propriétés de non-dégénérescence (dont la plus célèbre est certainement celle de Kolmogorov) ont toutes pour conséquence que le champ de vecteurs X_H associé à l'hamiltonien H "varie" suffisamment d'un tore à l'autre, induisant ainsi une dynamique alternativement périodique, partiellement résonante, ergodique... d'un tore à l'autre. Le très célèbre théorème KAM²³ contient une telle condition parmi ses hypothèses et assure que sous une petite perturbation d'un hamiltonien C.I, un grand nombre de tores de la fibration initiale sont simplement déformés et continuent d'exister dans le système perturbé comme des tores invariants par la dynamique. Dans ce théorème, la condition de non-dégénérescence n'est pas vraiment là pour assurer que ces tores sont préservés par la perturbation, mais plutôt qu'il sont en grande quantité²⁴. Pour ce qui nous intéressera dans le deuxième chapitre, la propriété de non-dégénérescence nous permettra d'exhiber les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à une perturbation εV pour que l'hamiltonien perturbé $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ soit une déformation²⁵ de H_0 .

²⁰Il s'agirait en fait plutôt de "semi-globalement", notion qu'on énoncera précisément plus tard.

²¹Qui n'est pas un fibré principal, mais qui a une structure de groupoïde.

²²Il envoie chaque tore sur un autre tore.

²³KAM vaut pour pour Kolmogorov ([41]), Arnol'd ([2]) et Moser ([47]). Ces travaux initiateurs ont donné lieu à tout un tas de "théorèmes de type KAM". On peut consulter par exemple les livres [43] et [15], et l'article [54].

²⁴Il s'agit des tores sur lesquels X_H vérifie une condition diophantienne.

²⁵Voir plus loin.

Toutes ces conditions de non-dégénérescence s'expriment de manière géométrique à l'aide de la connexion affine ∇ sur l'espace de base \mathcal{B} de la fibration en tores lagrangiens $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$. Dans un premier temps, on explicitera plusieurs de ces conditions²⁶ en donnant pour chacune d'elles une formulation géométrique faisant intervenir la connexion ∇ et une formulation standard en coordonnées actions. Ensuite, on montrera les relations d'implication qui lient ces différentes conditions. Enfin, on donnera quelques unes de leurs conséquences sur la structure des systèmes C.I, notamment l'unicité de la fibration lagrangienne en tores ou le fait que toute application moment est un tiré-arrière de fonctions sur la base \mathcal{B} .

Déformations de systèmes hamiltoniens complètement intégrables

Ceci nous amènera au deuxième chapitre dans lequel on considèrera un hamiltonien perturbé H_ε dépendant de manière C^∞ du paramètre réel de perturbation ε , avec H_0 un hamiltonien complètement intégrable régulier associé à une fibration lagrangienne en tores $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$.

Les hamiltoniens complètement intégrables sont très particuliers et mais aussi très instables en ce sens qu'un hamiltonien perturbé H_ε d'un hamiltonien C.I H_0 n'est en général pas C.I dès que $\varepsilon \neq 0$, ce que l'on sait depuis probablement Poincaré qui considèrait que cette question était l'un des problèmes fondamentaux de la dynamique. La dynamique de H_ε peut être radicalement différente de celle de H_0 , des trajectoires proches peuvent se séparer de manière exponentielle et elle peuvent même remplir de manière dense certaines couches d'énergie. Bref, c'est le chaos !

L'ajout d'une perturbation à un hamiltonien C.I ne détruit cependant pas entièrement le "caractère C.I". Le théorème KAM précédemment cité a justement pour objet les structures du système non perturbé qui seront préservées par la perturbation.

Dans ce deuxième chapitre, on se posera la question de savoir quelles sont les perturbations εV pour lesquelles l'hamiltonien perturbé $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ est en fait une déformation de H_0 , i.e reste C.I. Cette question comporte deux facettes puisqu'un hamiltonien C.I peut être soit régulier soit singulier.

- Dans un premier temps, on cherchera à exhiber les conditions à imposer à la perturbation εV pour que $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ soit C.I régulier, i.e constant le long d'une fibration en tores lagrangiens, pour tout ε . On dira dans ce cas que H_ε est une déformation régulière de H_0 . On remarquera alors qu'il n'est pas évident que la fibration dépend de manière C^∞ de ε , même lorsque c'est le cas pour H_ε . On fait cependant la conjecture que si H_0 vérifie une condition de non-dégénérescence alors les déformations régulières de H_0 sont forcément de la forme

$$H_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi^\varepsilon,$$

où ϕ^ε est une famille de symplectomorphismes et I_ε est famille de fonctions constantes le long de la fibration initiale $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, tout le monde dépendant gentilement de ε .

On donnera alors un théorème, basé sur le théorème de décomposition des champs de vecteurs symplectiques précédemment cité, qui nous assure que l'on peut toujours se ramener au cas où ϕ^ε est le flot d'un champ de vecteurs²⁷ globalement hamiltonien, ce

²⁶Dont celles de Kolmogorov, d'Arnol'd, de Rüssmann...

²⁷En fait, c'est un champ de vecteurs dépendant du "temps" ε , ou champ de vecteurs non-autonome.

qui simplifie nettement l'analyse ultérieure.

On donnera ensuite les conditions formelles en ε nécessaires et suffisantes pour que H_ε soit une déformation (formelle) régulière de H_0 . Cette condition s'exprime en terme de conditions de non-résonance que l'on expliquera.

- Ceci nous amènera au deuxième point de ce chapitre, à savoir les déformations singulières. En relaxant quelque peu les conditions imposées à la perturbation V , en autorisant certaines résonances, on peut quand même assurer que l'hamiltonien restera C.I, mais il apparaîtra des singularités, donnant ainsi lieu à une fibration singulière dans laquelle presque toutes les fibres sont des tores.

Une telle fibration ne peut certainement pas s'obtenir par application d'une famille de symplectomorphismes ϕ^ε à la fibration initiale $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, comme c'est le cas pour les déformations régulières. On doit alors travailler en terme de déformations d'applications moments. On expliquera de quelle manière on doit choisir une application moment singulière de l'hamiltonien régulier H_0 pour pouvoir la déformer en une application moment de H_ε , et on donnera des conditions suffisantes²⁸ à imposer à la perturbation pour que H_ε soit une déformation (éventuellement) singulière de H_0 .

Outils semi-classiques

Après ce léger détour dans le monde classique, on va durant le reste de la thèse s'immerger dans le monde des ondes et de l'indéterminisme incontournable, j'ai nommé le déroutant monde *quantique*.

On souhaite avoir une théorie quantique faisant intervenir un "petit" paramètre, que l'on nomme \hbar pour faire honneur à Planck²⁹, qui contrôle la "quantité" du système : "plus \hbar est petit, plus le système se comporte de manière classique³⁰", et dans la limite dite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$, on doit retrouver un système hamiltonien classique. De plus, on souhaite avoir une notion de microlocalisation qui nous permette de préciser quantitativement l'idée qu'une particule quantique (décrite par une onde) se comporte comme une particule classique (décrite par un point dans l'espace de phase) dans la limite semi-classique. Outre la mécanique quantique "académique" des ouvrages de second cycle, de nombreux candidats se bousculent au portillon : analyse semi-classique et opérateurs pseudo-différentiels, quantification géométrique, quantification par déformation... Cette dernière a deux défauts à mon goût. Premièrement, elle s'intéresse uniquement aux observables (les opérateurs) et laissent de côté les "états de la particule" (les fonctions sur lesquels agissent ces opérateurs)³¹. Mais surtout, c'est une théorie formelle par rapport au paramètre \hbar . Dans cette théorie, un opérateur "d'ordre \hbar^N " ne signifie pas qu'il est $O(\hbar^N)$ en norme, mais simplement formellement par rapport à \hbar , ce qui n'est pas suffisant pour faire de l'analyse³². La quantification

²⁸La partie *nécessaire* reste à faire.

²⁹Planck, qui le premier a émis l'hypothèse que l'énergie pourrait être quantifiée, ce dont il s'est servi pour expliquer le rayonnement du corps noir, un des derniers "petits détails techniques" à régler, disait-on à l'époque, avant de pouvoir proclamer que la physique était une science aboutie et achevée.

³⁰Cette phrase ne veut évidemment rien dire et il serait préférable de dire "plus \hbar est petit, plus le système se comporte de manière classique *pendant longtemps*". Le problème de la double limite $\hbar \rightarrow 0$ et "grand temps" est très actuel et fait apparaître dans bon nombre de problèmes des temps caractéristiques comme par exemple le fameux "temps d'Ehrenfest". On peut citer quelques articles récents dans des domaines différents mais où apparaît ce temps : [13], [7], [32], [37].

³¹Il y a cependant certains travaux qui vont dans cette direction : [10], [68].

³²Là aussi, il y a des travaux concernant les \star -produits non formels, c'est ce qu'on appelle la "quantification

géométrique m'a beaucoup éclairé sur le contenu géométrique de la mécanique quantique, mais je n'ai cependant pas réussi personnellement à en tirer un outil efficace pour faire de l'analyse.

L'outil efficace pour faire de l'analyse semi-classique est le concept d'opérateur pseudo-différentiel (abrégé en OPD). Ces opérateurs furent introduits par Hörmander ([38, 29]) et par la suite étudiés par de nombreuses personnes. Initialement développée pour étudier la régularité des solutions d'EDP en faisant intervenir la limite "grandes longueurs d'onde", cette théorie peut être adaptée pour étudier la limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$. Là encore, on trouve pas mal d'ouvrages et d'articles plus ou moins introductifs au sujet. Personnellement, j'ai appris (une partie de) la technique dans le livre [45] et je me suis forgé un soupçon d'intuition géométrique à l'aide de [23]. On peut aussi consulter les ouvrages [57] et [26] ainsi que le "survey" [58]. Ces ouvrages sont cependant principalement dédiés aux OPD sur \mathbb{R}^d et l'extension aux variétés quelconques se fait en principe par recollement d'OPD définis localement dans des cartes. Ceci ne permet pas par exemple de définir un symbole global. D'aucuns penseront peut-être que c'est un faux problème, mais il est néanmoins très confortable dans certaines situations d'avoir un symbole défini globalement sur la variété.

- On propose un calcul pseudo-différentiel adapté à la situation classique complètement intégrable que l'on veut être sous-jacente à notre système quantique, qui est la fibration en tores lagrangiens, dans le but d'obtenir des opérateurs qui sont complètement intégrables au niveau classique mais pas au niveau quantique. Comme on l'a dit précédemment, cette situation classique particulière implique l'existence d'une structure affine naturelle sur chaque tore. La théorie des OPD étant nécessairement définie sur des cotangents³³, on va considérer des variétés symplectiques $\mathcal{M} = T^*\mathcal{T}$ où \mathcal{T} est un tore muni d'une structure affine ∇ qui induit une fibration naturelle "horizontale" en tores lagrangiens, les fibres étant les sections constantes de $T^*\mathcal{T}$, et l'espace de base \mathcal{B} est ici un espace vectoriel. Cette donnée nous permet de définir de manière géométrique des OPD agissant sur $L^2(\mathcal{T})$ et ayant la propriété d'avoir un symbole total globalement défini. Il faut noter que les OPD "globaux" sur le tore (appelés en général OPD périodiques) ont été étudiés dans divers articles ([22],[31], [64], [65]) qui ont montré notamment que ces OPD sont aussi des OPD au sens de Hörmander. Cependant, ces articles traitent tous des OPD sans petit paramètre.
- Enfin, pour des raisons que l'on expliquera plus loin, on souhaite pouvoir considérer des OPD dont le symbole voit sa régularité se dégrader lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Précisément, on a besoin de symboles $P_\hbar(x, \xi) \in C^\infty(T^*\mathcal{T})$ vérifiant $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi) \sim \hbar^{-\delta|\beta|}$, où δ est une constante positive. Ces symboles, similaires à ceux introduits par Sjöstrand ([61, 26]) pour étudier les états semi-excités, ont encore de bonnes propriétés si l'on impose³⁴ $\delta < 1$. Après avoir défini cette classe de symboles, on montrera les propriétés de calcul symbolique (produit de Moyal) et la continuité L^2 pour ces OPD. On définira ensuite un calcul fonctionnel "approché" (à $O(\hbar^\infty)$ près) et enfin, on discutera la notion de \hbar^α -

par déformation stricte". Voir par exemple [56].

³³Il ne faut tout de même pas oublier les opérateurs de Toeplitz qui permettent en principe de faire de l'analyse avec des variétés symplectiques compactes. On peut consulter les travaux initiateurs [12], et les articles plus récents [11], [19, 20].

³⁴Dans la théorie de Sjöstrand, on doit imposer $\delta < \frac{1}{2}$ du fait que les dérivées par rapport à x apportent aussi les désagréables facteurs $\hbar^{-\delta}$. Par contre, sa théorie est invariante par changement de "quantification" (gauche, droite, Weyl) ce qui n'est pas notre cas où l'on considère exclusivement des symboles gauches.

microlocalisation qui permet de manier des sortes d'états semi-excités non pas près d'un point, mais près d'un tore.

Résonances, quasi-résonances et formes normales

Fort de ces outils semi-classiques, on se trouvera en condition pour étudier des opérateurs pseudo-différentiels dont la limite classique est complètement intégrable. Pour cela, on se donnera un hamiltonien $H(\xi)$ complètement intégrable au sens classique et on considérera le quantifié \hat{H} de ce symbole qui a un spectre très simple donné par les valeurs $H(\hbar k)$ où k parcourt un réseau de dimension³⁵ d , et les vecteurs propres associés sont simplement les exponentielles e^{ikx} . On souhaite ensuite perturber cet opérateur en $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}$, où \hat{K} est un OPD et où $\kappa > 0$ est une constante permettant de contrôler l'intensité de la perturbation. Le spectre de l'opérateur perturbé ne s'exprimera pas en général de manière aussi simple que celui de \hat{H} et c'est le but des deux derniers chapitres que de dire des choses à propos du spectre de cet opérateur perturbé. Cette question est à rapprocher des articles [33, 34] dans lesquels les auteurs considèrent l'opérateur de Schrödinger (sans petit paramètre) $-\Delta + V$ sur l'espace euclidien \mathbb{R}^d avec un potentiel V périodique, agissant sur les fonctions vérifiant une condition de périodicité. Leur cadre de travail est différent du notre sur deux points. Tout d'abord, les théories sur le tore et sur l'espace euclidien avec potentiel périodique ne sont pas strictement équivalentes, cette dernière faisant intervenir la théorie de Floquet. D'autre part, ils travaillent avec une théorie sans petit paramètre et la limite asymptotique considérée est la limite "grandes valeurs propres". Néanmoins, en définissant le petit paramètre comme étant l'inverse de la valeur propre, on se ramène à étudier les valeurs propres bornées de l'opérateur $-\hbar^2 \Delta + \hbar^2 V$. En appliquant la recette "limite semi-classique \iff limite grandes valeurs propres", et en considérant $\hbar^2 V$ comme une perturbation, on peut comparer les résultats de ces deux types de théories. Dans l'article [33], les auteurs montrent que la "majorité" des grandes valeurs propres de l'opérateur "perturbé" $-\Delta + V$ sont seulement légèrement modifiées par rapport aux valeurs propres de $-\Delta$. Au premier ordre, la modification est donnée par la moyenne $\langle V \rangle$ du potentiel et les vecteurs propres associés sont proches de ceux de $-\Delta$.

Notre étude permet d'étendre ou de compléter les résultats de l'article [33] puisque tout d'abord on peut considérer des perturbations quelconques et non pas seulement des potentiels (symboles ne dépendant que de x). D'autre part, on contrôle l'intensité de la perturbation à l'aide du paramètre κ . Il faut noter que notre méthode ne permet pas d'atteindre la limite $\kappa = 0$ ce qui laisse supposer que lorsque κ est inférieur ou égal à 0, l'intensité de la perturbation commence en quelque sorte à se faire ressentir au niveau classique que l'on ne peut plus considérer comme complètement intégrable. Concernant ces perturbations d'ordre \hbar^1 , dans [23] l'auteur suggère d'appliquer d'abord la théorie KAM pour le symbole $H + \hbar K$ en considérant \hbar comme un paramètre classique.

On se propose d'étudier l'opérateur $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}$ à l'aide de deux outils, les formes normales et les quasimodes, la stratégie générale consistant à d'abord chercher une "bonne" forme normale, puis à chercher des quasimodes de cette forme normale, ce qui fournira des quasimodes de l'opérateur perturbé.

Le quatrième chapitre est dédié à l'élaboration de formes normales pour l'hamiltonien perturbé. On cherche donc à le conjuguer à $\hat{U} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K} \right) \hat{U}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}$, où \hat{U} est un

³⁵i.e la dimension du tore \mathcal{T} .

OPD unitaire³⁶ et où l'opérateur \hat{M} doit avoir des propriétés sympathiques, ou en tout cas plus sympathiques que celles de \hat{K} . Dans une première approche, on donnera une forme normale au voisinage d'un tore sur lequel la dynamique vérifie une condition partiellement diophantienne³⁷. Cette propriété particulière permettra d'assurer que près du tore considéré, M est la moyenne de K , i.e est constante dans certaines directions³⁸ et par là-même mérite son nom de forme normale. Par contre cette propriété ne sera vraie que localement près du tore considéré.

Dans le but d'avoir une vue plus globale du problème, on introduit ensuite un découpage de l'espace des tores \mathcal{B} en zones et blocs dit de quasi-résonance. C'est le type de construction qui est utilisée dans les théorèmes de type Nekhoroshev³⁹, où l'on considère des ensembles de tores ayant des propriétés voisines. On cherchera alors à construire une forme normale ayant une forme simple dans chacune de ces régions. On verra que pour assurer, dans la limite semi-classique, la petitesse des termes de reste dans la forme normale, on est obligé de considérer un nombre de blocs de quasi-résonance qui tend vers l'infini lorsque $\hbar \rightarrow 0$ et de faire tendre en même temps la taille de ces blocs vers 0. Ceci aura pour conséquence que les symboles des différents opérateurs impliqués dans la forme normale, et notamment M , auront une régularité qui se dégrade dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. Ils seront cependant dans la classe de symboles justement définie et étudiée dans le troisième chapitre, ce qui permettra de donner un sens précis à cette forme normale.

Dans le dernier chapitre, on va utiliser la forme normale quasi-résonante précédemment citée dans le but de construire des quasimodes pour l'opérateur perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K}$. Dans un premier temps, on s'intéressera à la zone dite non-résonante, pour laquelle l'analyse est la plus facile, et dans un deuxième temps à la zone dite mono-résonante. En dimension 2, ce sont les seules zones à considérer et l'analyse permet de recouvrir tous les types de quasimodes. D'autre part, concernant les deux paramètres⁴⁰ caractérisant la décomposition en blocs de quasi-résonance, on peut les choisir de telle sorte que la zone non-résonante devient prédominante⁴¹ dans la limite semi-classique, ce qui fait que dans cette limite la plupart des quasimodes sont de type non-résonant. On montre que ces quasimodes sont égaux à une exponentielle e^{ikx} plus quelque chose qui tend vers 0 avec \hbar et que les quasi-valeurs propres associées sont égales aux valeurs propres non-perturbées plus la moyenne de la perturbation sur tout le tore plus quelque chose de plus petit. Ces résultats complètent et étendent ceux de l'article [33] précédemment mentionné.

³⁶En fait, \hat{U} sera unitaire" à $O(\hbar^\infty)$ près".

³⁷"partiellement diophantienne" signifie que les trajectoires sont confinées dans des sous-variétés (des sous-tores) mais à l'intérieur de ces sous-variétés la dynamique est diophantienne.

³⁸Les directions tangentes aux sous-tores mentionnés dans le \footnote précédent.

³⁹Voir l'article "initiateur" de Nekhoroshev [50]. Voir aussi les articles [9, 35, 55], le livre [43] ainsi que le "review" introductif [53].

⁴⁰Le paramètre qui contrôle la taille des blocs et le paramètre qui contrôle le nombre de ces blocs.

⁴¹Son volume relatif tend vers 1 lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

Chapitre A

Systemes hamiltoniens complètement intégrables

1 Rappels de géométries symplectique et affine

1.1 Conventions en géométrie différentielle

Toutes les variétés considérées dans cette thèse seront de classe C^∞ et de dimension finie. On peut référer le lecteur à de nombreuses références traitant de géométrie différentielle, plus ou moins bonnes, plus ou moins claires, plus ou moins complètes. Pour ma part, j'ai vu pour la première fois la définition d'un atlas et d'un système de coordonnées dans le livre [6]. J'ai ensuite utilisé (chronologiquement) principalement les livres [49], [67] puis [40]. J'ai aussi apprécié les livres [39] (pour le chapitre sur les espaces fibrés), [62] (pour le chapitre sur le calcul des variations), [71] (pour différents aspects), et j'en oublie.

Pour tous les objets considérés (variétés, champs de vecteurs, applications,...) on utilisera le terme *différentiable* pour dire *de classe C^∞* .

Fibrés tensoriels

Ceci étant dit, si \mathcal{M} est une variété de dimension d , on notera $T\mathcal{M}$ son **espace tangent** et $T^*\mathcal{M}$ son **espace cotangent**. On notera aussi $T_m^{p,q}(\mathcal{M})$ l'**espace des tenseurs** au point $m \in \mathcal{M}$ de type (p, q) et $T^{p,q}(\mathcal{M}) = \bigcup_m T_m^{p,q}(\mathcal{M})$ le **fibré tensoriel** de type (p, q) . En particulier, on a $T\mathcal{M} = T^{1,0}(\mathcal{M})$ et $T^*\mathcal{M} = T^{0,1}(\mathcal{M})$.

Si F est un fibré, on notera $\Gamma(F)$ l'**espace des sections** de F . Bien que jamais précisé, il s'agira toujours de sections C^∞ . Pour les sections du fibré tensoriel (i.e l'espace des champs de tenseurs de type (p, q)), on simplifiera la notation en $\Gamma^{p,q}(\mathcal{M}) = \Gamma(T^{p,q}(\mathcal{M}))$.

On utilisera surtout $\mathcal{V}(\mathcal{M}) = \Gamma^{1,0}(\mathcal{M})$ l'**espace des champs de vecteurs** et on notera $\Omega^q(\mathcal{M}) \subset \Gamma^{0,q}(\mathcal{M})$ l'**espace des champs de q -formes différentielles antisymétriques**. Dans la suite, on dira simplement " q -forme" au lieu de "champ de q -formes antisymétriques".

Fibrés, sections locales et globales, connexions

Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est une fibration localement triviale¹, on notera $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, les **fibres**. On notera $\Gamma(\mathcal{F})$ l'**espace des sections globales** de la fibration. Si $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ est une sous-

¹On considérera toujours uniquement des fibrations localement triviales.

variété de \mathcal{B} , on notera $\Gamma(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ l'espace des sections locales au dessus de \mathcal{O} , i.e l'espace des applications différentiables $s : \mathcal{O} \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O})$, vérifiant $\pi \circ s = \mathbb{I}$ sur \mathcal{O} . On notera aussi $\mathcal{F}|_{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$ le **fibré restreint** à \mathcal{O} . En particulier, on $\Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est un fibré vectoriel muni d'une connexion de dérivée covariante ∇ plate (i.e sans courbure), on notera $\Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ l'espace des sections constantes locales au dessus de \mathcal{O} .

Fonctions C^∞ uniformément par rapport à un paramètre

Dans diverses situations, on aura besoin de travailler avec une variété \mathcal{M} et un ensemble de paramètres P , et de considérer des fonctions $f : \mathcal{M} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ dont la régularité par rapport à \mathcal{M} est uniforme par rapport à P .

Définition A.1. On définit $C_P^\infty(\mathcal{M}) \subset C^\infty(\mathcal{M})$, l'espace des fonctions C^∞ uniformément par rapport à P , comme étant l'ensemble des fonctions $f : P \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ bornées pour la famille de semi-normes $\|\cdot\|_{C^k(K)}$, pour tout compact $K \subset \mathcal{M}$. Précisément, ce sont les fonctions $f : \mathcal{M} \times P \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

- Pour tout $p \in P$ alors $f_p \in C^\infty(\mathcal{M})$.
- Dans tout système de coordonnées locales $\{x_j\}$, pour tout compact K contenu dans le domaine de définition des coordonnées locales, pour tout point $m \in K$ et pour tout $p \in P$, on a $|\partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} f_p(m)| \leq C(i_1, \dots, i_l, K)$, où la constante $C(i_1, \dots, i_l, K)$ est positive et indépendante de p .

De la même manière, on parlera de l'espace des champs de vecteurs C^∞ uniformément par rapport à P et de l'espace des difféomorphismes de \mathcal{M} dans \mathcal{M} uniformes par rapport à P .

Pull-backs et push-forwards

Si φ est une application différentiable d'une variété \mathcal{M} dans une seconde variété \mathcal{N} , et si $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{N})$ est une q -forme, on notera $\varphi^* \alpha$ le **tiré-arrière** ("pull-back") de α qui est une q -forme sur \mathcal{M} . Lorsque φ est un difféomorphisme, on définit le **poussé-avant** ("push-forward"), ou encore l'**application dérivée**, $\varphi_* : \mathcal{V}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{N})$. Cette application s'étend naturellement en une application $\varphi_* : \Gamma^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma^{p,q}(\mathcal{N})$ qui préserve le type des tenseurs et commute avec les contractions. Notamment, pour toute q -forme $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{N})$, on a $\varphi_* \alpha = (\varphi^{-1})^* \alpha$.

Flots, dérivée Lie et crochets de Lie

Tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ induit un groupe local à 1 paramètre de transformations locales que l'on appelle le **flot** de X et que l'on note ϕ_X^t . Pour tout t , son inverse vérifie $(\phi_X^t)^{-1} = \phi_X^{-t} = \phi_{-X}^t$. On définit la **dérivée de Lie** d'un champ de tenseurs $T \in \Gamma^{p,q}(\mathcal{M})$ le long d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ par

$$\mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt} ((\phi_X^{-t})_* T)|_{t=0}.$$

Cette opération préserve le type des tenseurs, commute avec les contractions et obéit à la règle de Leibniz pour les produits tensoriels. Dans le cas d'une q -forme $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{N})$, on a

$$\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt} ((\phi_X^t)^* \alpha) \Big|_{t=0}.$$

Si X et Y sont deux champs de vecteurs, on définit leur **crochet de Lie** par $[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$.

Produits intérieur et extérieur, dérivée extérieure

Dans la littérature, on trouve différentes définitions de la dérivée extérieure d et des produits extérieur \wedge et intérieur \lrcorner , et il convient de se choisir des définitions cohérentes pour pouvoir retrouver la fameuse formule de Elie Cartan qui assure que si $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un champ de vecteurs et $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{M})$ une q -forme, alors on a

$$\mathcal{L}_X \alpha = d(X \lrcorner \alpha) + X \lrcorner d\alpha.$$

Pour toutes formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$, on définit le **produit extérieur** $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q}(\mathcal{M})$ par

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta),$$

où \mathcal{A} est l'antisymétriseur. Il s'agit de la convention utilisée par exemple dans les livres [1, 6, 44, 21, 49, 67]. De cette définition suit celle de la **dérivée extérieure** $d : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ à laquelle on impose de vérifier la relation $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, pour tous $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ et $\beta \in \Omega^q(\mathcal{M})$. Avec notre convention pour le produit extérieur, on a en particulier, si $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{M})$,

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

Pour retrouver la formule de Cartan, on définit le **produit intérieur** $X \lrcorner \alpha \in \Omega^{q-1}(\mathcal{M})$ d'une q -forme $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{M})$ par un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ comme étant la contraction tensorielle

$$(X \lrcorner \alpha)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

On notera parfois simplement $X \lrcorner \alpha = \alpha(X, \cdot)$.

Calcul différentiel en coordonnées

Lorsque l'on effectuera des calculs dans un système de coordonnées locales, disons $\{x_j\}_{j=1..d}$ on notera $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_j . On utilisera aussi la notation suivante

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial (x_1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial (x_d)^{\alpha_d}},$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice. Pour ces multi-indices, on utilise aussi plusieurs conventions très pratiques :

- La norme : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$
- Le factoriel : $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$

- Le coefficient binomial $C_\beta^\alpha = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$
- $\beta \leq \alpha$ signifie que $\beta_j \leq \alpha_j$ pour tout $j = 1..d$.
- La formule de Leibniz : si F et G sont deux fonctions C^∞ , alors on a

$$\partial_x^\alpha (FG) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \beta \leq \alpha}} C_\beta^\alpha \left(\partial_x^\beta F \right) \left(\partial_x^{\alpha-\beta} G \right).$$

1.2 Conventions en géométrie symplectique

En géométrie symplectique, et en mécanique hamiltonienne en particulier, il existe différentes conventions de signe indépendantes possibles. On donne ici les conventions utilisées par la suite.

Une **variété symplectique** est la donnée d'une variété \mathcal{M} munie d'une 2-forme $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M})$, nommée **forme symplectique**, fermée et non-dégénérée dans le sens suivant. En tout point $m \in \mathcal{M}$, la forme symplectique induit une application $\omega_m : T_m\mathcal{M} \rightarrow T_m^*\mathcal{M}$ définie par $\omega_m(X) = \omega_m(X, \cdot)$, et on demande que cette application soit un isomorphisme. On notera aussi $\omega : \mathcal{V}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M})$. Dans toute la suite, on considérera une variété symplectique donnée \mathcal{M} et on notera $2d$ sa dimension.

Le théorème de Darboux assure l'existence locale de **coordonnées dites canoniques** $(x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d)$ dans lesquelles la forme symplectique s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^d d\xi_i \wedge dx_i.$$

On a pris pour habitude d'appeler **hamiltoniens** les fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$. Pour tout hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ on définit son **champ de vecteurs hamiltonien associé** par $X_H = -\omega^{-1}(dH)$. En coordonnées canoniques, il est donc donné par

$$X_H = \sum_{i=1}^d \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \partial_{x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \partial_{\xi_i}.$$

Le **crochet de Poisson** de deux fonctions F et G est défini par $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$ et s'écrit en coordonnées canoniques

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{\partial G}{\partial \xi_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right).$$

On a donc aussi $\{F, G\} = X_F(G)$ et on notera parfois $X_H = \{H, \cdot\}$ en tant qu'opérateur de dérivation sur $C^\infty(\mathcal{M})$.

On rappelle qu'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est dit **symplectique** ou **localement hamiltonien** si sa 1-forme associée $\alpha = \omega(X)$ est fermée. Il est dit **(globalement) hamiltonien** α est exacte. On considérera aussi des champs de vecteurs ayant ces propriétés seulement sur un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$. Par exemple, on dira que $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est dit **symplectique sur un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$** si sa 1-forme associée $\alpha = \omega(X)$ vérifie $(d\alpha)_m = 0$ en tout point $m \in \mathcal{O}$.

1.3 Feuilletages lagrangiens et connexions affines

Variétés affines

On appelle **variété affine** une variété \mathcal{N} de dimension d munie d'une **dérivée covariante** $\nabla : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \times \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{N})$ plate et sans torsion, c'est à dire que pour tous champs de vecteurs $X, Y, Z \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$, on a :

- ∇ est **sans torsion** : $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
- ∇ est **sans courbure** : $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z$.

Cette dérivée covariante s'étend en un unique opérateur $\nabla : \Gamma^{p,q}(\mathcal{N}) \rightarrow \Gamma^{p,q+1}(\mathcal{N})$ en demandant les propriétés suivantes :

- Pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathcal{N})$ on a

$$\nabla_X F = X(F).$$

- ∇ commute avec les contractions de tenseurs, i.e notamment

$$\nabla_X (Y \lrcorner \alpha) = (\nabla_X Y) \lrcorner \alpha + Y \lrcorner \nabla_X \alpha,$$

pour tous $X \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ et $\alpha \in \Omega^q(\mathcal{N})$.

- ∇ observe la règle de Leibniz pour les produits tensoriels, i.e

$$\nabla_X (A \otimes B) = (\nabla_X A) \otimes B + A \otimes (\nabla_X B).$$

Champs de tenseurs constants et holonomie

La donnée d'une telle structure géométrique permet de faire du transport parallèle avec des tenseurs de tout type. Pour nos besoins, on définit l'**espace des champs de vecteurs constants** ou **parallèles**

$$\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{N}) = \{X \in \mathcal{V}(\mathcal{N}); \nabla X = 0\}$$

ainsi que l'**espace des q -formes constantes** ou **parallèles**

$$\Omega_\nabla^q(\mathcal{N}) = \{\alpha \in \Omega^q(\mathcal{N}); \nabla \alpha = 0\}.$$

En particulier, on a l'**espace des formes volumes constantes** $\Omega_\nabla^d(\mathcal{N})$.

Pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$ simplement connexe, l'espace $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{O})$ est un espace vectoriel de dimension d naturellement isomorphe à chacun des espaces tangents $T_m \mathcal{N}$, pour $m \in \mathcal{O}$, mais ce n'est en général pas le cas pour \mathcal{N} tout entier à cause de la présence d'un **groupe d'holonomie** non-trivial. Localement, on peut toujours trouver des **systèmes de coordonnées plates**, i.e des coordonnées $\{y_j\}_{j=1..d}$ définies dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$ telles que $\nabla(dy_j) = 0$. Dans un tel système de coordonnées, un champ de vecteurs $X = \sum_j X^i \partial_{y_j}$ est constant si et seulement si ses composantes X^j le sont.

Les structures affines sont des structures géométriques relativement "restrictives" et l'étude du groupe d'holonomie permet d'avoir des informations assez fortes sur la topologie de la variété. On rappelle quelques résultats concernant cette question dans le théorème suivant².

²Voir par exemple le chapitre V.4 du le livre [40].

Théorème A.2. Soit (\mathcal{N}, ∇) une variété affine.

- Le groupe d'holonomie est discret.
- Si la connexion est complète³, alors \mathcal{N} est recouvert par le cylindre affine $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{d-p}$.
- \mathcal{N} est recouvert par le tore affine \mathbb{T}^d si et seulement si \mathcal{N} est compact.
- Si l'holonomie est triviale, alors \mathcal{N} est isomorphe au cylindre affine $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{d-p}$.

Feuilletages lagrangiens et connexions affines

Un feuilletage $L = \bigcup L_m$ est une distribution intégrable (au sens de Frobenius) de sous-espaces $L_m \subset T_m\mathcal{M}$, $m \in \mathcal{M}$. On utilisera la notation $X \in \Gamma(L)$ pour dire qu'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est tangent à L_m en tout point $m \in \mathcal{M}$.

On considère un **feuilletage lagrangien**, i.e une distribution $L = \bigcup L_m$ de sous-espaces lagrangiens $L_m \subset T_m\mathcal{M}$, $m \in \mathcal{M}$. Dans les ouvrages de quantification géométrique, on utilise traditionnellement le terme **polarisation** au lieu de feuilletage lagrangien. On pourra consulter par exemple le livre [71] pour une présentation détaillée des polarisations réelles et complexes.

Alan Weinstein, dans ses articles [69] et [70], a donné plusieurs résultats importants et très jolis concernant les sous-variétés lagrangiennes de variétés symplectiques. Notamment, il a montré que toute feuille d'un feuilletage lagrangien est munie d'une structure affine naturelle. On trouve dans [71] une reformulation de ce résultat qui est plus "concrète" dans le sens où l'on a une expression explicite de la dérivée covariante de la connexion affine. C'est cette formulation que nous allons présenter maintenant et utiliser par la suite.

Définition A.3. Soit \mathcal{N} une feuille d'un feuilletage lagrangien L . On définit l'opérateur de dérivation $\nabla : \mathcal{V}(\mathcal{N}) \times \mathcal{V}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{N})$ de la manière suivante. Pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$, on pose

$$\nabla_X Y = \omega^{-1} \left(\tilde{X} \lrcorner d \left(\tilde{Y} \lrcorner \omega \right) \right),$$

où $\tilde{X} \in \Gamma(L)$ et $\tilde{Y} \in \Gamma(L)$ sont des extensions à $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ de X et Y , partout tangentes au feuilletage L .

Théorème A.4. L'opérateur ∇ définit une connexion affine plate et sans torsion sur \mathcal{N} .

La définition de ∇ , qu'on appellera **dérivée covariante** ou **connexion affine**, dépend de la feuille \mathcal{N} mais aussi du germe à l'ordre de 1 du feuilletage L près de \mathcal{N} . D'autre part, si on a une variété lagrangienne \mathcal{N} , il n'est pas toujours possible de trouver un feuilletage lagrangien L tel que \mathcal{N} soit une de ses feuilles. Par exemple, si l'on choisit $\mathcal{N} \subset T^*S^2$ la section nulle du cotangent de la sphère S^2 , alors il n'existe pas de polarisation L telle que \mathcal{N} soit une de ses feuilles car sinon le théorème précédent impliquerait l'existence d'une connexion affine plate et sans torsion sur la sphère, ce qui est impossible.

La connexion affine plate et sans torsion est une structure géométrique intrinsèquement liée aux systèmes complètement intégrables définis par des fibrations lagrangiennes en tores puisqu'elle apparaît à la fois sur les fibres et sur l'espace de base.

³i.e les géodésiques de ∇ sont définies pour tout temps.

Proposition A.5. Soit \mathcal{N} une feuille d'un feuilletage lagrangien L . Si $X \in \Gamma(L)$ est un champ de vecteurs partout tangent à L et localement hamiltonien sur N , alors sa restriction à \mathcal{N} est un champ de vecteurs constant, i.e $X|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{N})$.

Démonstration. En effet, si X est localement hamiltonien sur \mathcal{N} cela signifie que $(d(X \lrcorner \omega))_m = 0$ en tout point $m \in \mathcal{N}$. D'après la définition de ∇ , pour tout $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{N})$ pour tout point $m \in \mathcal{N}$, on a alors

$$\begin{aligned} (\nabla_Y (X|_{\mathcal{N}}))_m &= \omega_m^{-1}(Y_m \lrcorner d(\omega(X))_m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $X|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{N})$. ■

Il faut noter que la réciproque est en générale fausse. Lorsque le feuilletage ne définit pas une fibration près de la feuille \mathcal{N} , un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{N})$ n'est pas forcément la restriction à \mathcal{N} d'un $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ localement hamiltonien sur \mathcal{N} . C'est par contre le cas lorsque le feuilletage définit une fibration, comme l'implique la proposition A.20 de la section suivante.

2 Systèmes hamiltoniens complètement intégrables

2.1 Applications moments

On se donne une variété symplectique (\mathcal{M}, ω) de dimension $2d$.

Définition A.6. Une **application moment** $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ d'un hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est la donnée de d fonctions $A_j \in C^\infty(\mathcal{M})$ vérifiant

- $\{A_j, A_k\} = 0$, pour tous $j, k : 1..d$. On dit que les A_j sont en **involution**.
- $\{A_j, H\} = 0$, pour tout $j : 1..d$. On dit que les A_j sont des **constantes du mouvement**.
- Les différentielles dA_j sont linéairement indépendantes presque partout.

Pour une application moment donnée \mathbf{A} , on définit son **lieu singulier** $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{M}$ comme l'ensemble des **points singuliers**, i.e les points $m \in \mathcal{M}$ où les différentielles dA_j sont linéairement dépendantes. En tout point $m \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, on définit $\text{corang}(m)$, le **corang** de la différentielle en m

$$d\mathbf{A}_m = (dA_1, \dots, dA_d)_m : T_m\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

On voit facilement que le corang est aussi donné par

$$\text{corang}(m) = \dim \bigcap_{j=1}^d \ker (dA_j)_m - d.$$

Une **valeur régulière** de l'application moment est un $a \in \mathbb{R}^d$ tel que tous les points $m \in \mathbf{A}^{-1}(a)$ sont régulier, i.e tel que $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{A}^{-1}(a) = \emptyset$.

Définition A.7. Un **hamiltonien** $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ est dit **complètement intégrable (CI)** lorsqu'il admet une application moment.

En général, un hamiltonien CI admet plusieurs applications moments et un point m peut être singulier ($\text{corang}(m) > 0$) pour une application moment et régulier ($\text{corang}(m) = 0$) pour une autre. Les singularités de l'application moment proviennent parfois de la topologie de \mathcal{M} (ou des surfaces de niveau $S_E = \{m; H(m) = E\}$) qui impose aux applications moments d'avoir au moins un certain nombre de points singuliers, mais sans imposer quels points doivent être singuliers. Il se peut aussi que la relation de commutation $\{A_j, H\} = 0$ impose à un point précis d'être singulier.

Exemple A.8. Soit la variété $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ munie de la forme symplectique $\omega = d\xi \wedge dx + d\eta \wedge dy$ et soit le hamiltonien $H(x, y, \xi, \eta) = x\xi + y\eta$. Si $A \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une fonction commutant avec H , cela veut dire que

$$\{H, A\} = x \frac{\partial A}{\partial x} - \xi \frac{\partial A}{\partial \xi} + y \frac{\partial A}{\partial y} - \eta \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0.$$

Notamment, si $x = \xi = y = 0$, pour tout η on a $\eta \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0$. Cela implique que $\frac{\partial A}{\partial \eta}(0, 0, 0, \eta) = 0$ pour tout $\eta \neq 0$ et donc aussi pour $\eta = 0$ par continuité. En faisant le même raisonnement pour les autres variables, on en déduit que la différentielle dA est nulle au point $(0, 0, 0, 0)$. Cela montre que toute application moment de H sera forcément singulière en $(0, 0, 0, 0)$.

Définition. On dira que $m \in \mathcal{M}$ est un **point singulier du hamiltonien** s'il est singulier pour toutes les applications moments. Un hamiltonien H est dit **complètement intégrable régulier (CIreg)** s'il ne possède aucun point singulier, autrement dit si pour tout point m il existe une application moment de H régulière en m .

On sait depuis déjà longtemps que l'image réciproque d'une valeur régulière de l'application moment a un aspect bien sympathique que l'on rappelle dans la proposition suivante.

Théorème A.9. Supposons que A est une application moment propre de H . Si $a \in \mathbb{R}^N$ est une valeur régulière de A , alors :

- Les composantes connexes de $A^{-1}(a)$ sont des tores lagrangiens isomorphes au tore \mathbb{T}^d affine⁴. On les appelle **tores de Liouville**.
- Dans un voisinage \mathcal{O} d'un de ces tores, il existe un système de "coordonnées" canoniques dit "angles-actions" $(x_1, \dots, x_d, \xi_1, \dots, \xi_d) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ dans lesquelles l'hamiltonien H est indépendant des x_j .

Ce théorème de *coordonnées angles-actions*, est connu sous le nom de *théorème d'Arnold-Liouville*, en références aux articles [42] et [4]. Ce théorème était cependant déjà contenu dans un article de Henri Mineur ([46]), comme remarqué par [66].

Malgré un avantage pratique incontestable de ces coordonnées angles-actions, il est aussi pertinent de les oublier un moment et de se concentrer sur les structures géométriques induites par une application moment. D'après le théorème précédent, une application moment A définit au voisinage d'une composante connexe d'une fibre régulière $A^{-1}(a)$ une fibration localement triviale en tores lagrangiens. D'autre part, lorsque le hamiltonien est non-dégénéré, on montrera dans la proposition A.80 que cette fibration est unique (indépendante de l'application moment). On a alors en notre possession un objet global : une fibration

⁴Il s'agit ici de la structure affine standard sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Il existe d'autres structures affines sur le tore, comme par exemple celle de Nagano-Yagi ([48]) en dimension deux, qui présente de l'holonomie. Des auteurs (par exemple [24, 25]) ont montré que de telles structures affines peuvent apparaître sur les feuilles de certains feuilletages lagrangiens. Il s'agit alors forcément de feuilletages non réductibles.

$\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ dont les fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, sont des tores lagrangiens, et où \mathcal{B} est une variété différentiable. L'espace de base \mathcal{B} est l'espace des tores⁵ et une application moment donne un système de coordonnées locales sur \mathcal{B} .

2.2 Fibrations en tores lagrangiens

A partir de maintenant, on adoptera la définition suivante pour un système complètement intégrable régulier, qui est celle de Duistermaat dans [28].

Définition A.10. Un **système complètement intégrable régulier (CIreg)** $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est la donnée d'une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ dont les fibres sont des tores, et d'un hamiltonien $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ constant sur les fibres. Un **hamiltonien** H est dit **CIreg** lorsqu'il existe une telle fibration lagrangienne le long des fibres de laquelle H est constant.

L'existence d'une telle fibration lagrangienne en tores implique la présence naturelle de structures affines plates et sans torsion à la fois sur chacun des tores $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$ (remarqué par Weinstein [69]) et sur l'espace de base \mathcal{B} (remarqué par Duistermaat [28]). Ces structures géométriques permettent d'introduire, entre autre, les séries de Fourier sur les fibres, les invariants topologiques que sont la monodromie et la classe de Chern, une action torique locale et l'opération de moyennisation associée.

On commence par donner quelques propriétés satisfaites par les fibrations lagrangiennes.

2.2.1 Quelques propriétés élémentaires des fibrations lagrangiennes

On considère une fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ localement triviale⁶ à fibres connexes et on note $L = \bigcup_m L_m$ le **feuilletage**, dit **vertical**, défini par les espaces tangents aux fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$, i.e $L_m = T_m \mathcal{M}_{\pi(m)} \subset T_m \mathcal{M}$.

Définition A.11. On utilisera le terme **semi-globalement** pour dire "localement dans un ouvert $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{M}$ de la forme $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$, avec $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ ".

Définition A.12. On dit d'un **champ de vecteurs** $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ qu'il est **vertical** s'il est tangent aux fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$, i.e $X \in \Gamma(L)$.

Définition A.13. Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ un champ de vecteurs sur l'espace de base. On dit que $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un **relevé** de X si pour tout $b \in \mathcal{B}$ et pour tout $m \in \mathcal{M}_b$, on a

$$\pi_* \left(\tilde{X}_m \right) = X_b.$$

Proposition A.14. Un champ de vecteurs $\tilde{Y} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un relevé d'un champ $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ si et seulement si pour tout $X \in \Gamma(L)$ vertical on a

$$\mathcal{L}_X \tilde{Y} \in \Gamma(L).$$

⁵Il peut être éventuellement compact.

⁶On considérera toujours uniquement des fibrations localement triviales

Démonstration. En effet, si on note ϕ^t le flot de X on a, en tout point m , par définition de la dérivée de Lie :

$$\begin{aligned}\pi_* \left(\mathcal{L}_X \tilde{Y} \right)_m &= \pi_* \frac{d}{dt} \left(\phi_*^{-t} \left(\tilde{Y}_{\phi^t(m)} \right) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\pi_* \phi_*^{-t} \left(\tilde{Y}_{\phi^t(m)} \right) \right) \Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

Du fait que X est vertical, son flot ϕ_*^{-t} reste inclus à l'intérieur des fibres π^{-1} , i.e $\pi \circ \phi^{-t} = \pi$, si bien que

$$\pi_* \left(\mathcal{L}_X \tilde{Y} \right)_m = \frac{d}{dt} \left(\pi_* \left(\tilde{Y}_{\phi^t(m)} \right) \right) \Big|_{t=0}.$$

La dérivée de Lie $\left(\mathcal{L}_X \tilde{Y} \right)_m$ est verticale si et seulement si $\pi_* \left(\mathcal{L}_X \tilde{Y} \right)_m$ est nul, i.e si et seulement si $\pi_* \tilde{Y}_{\phi^t(m)} = \pi_* \tilde{Y}_{m'}$, et ce pour tout $X \in \Gamma(L)$. Cela est vrai si et seulement si pour tous m et m' tels que $\pi(m) = \pi(m')$ on a $\pi_* \tilde{Y}_{m'} = \pi_* \tilde{Y}_m$, c'est à dire si et seulement si $\tilde{Y} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un relevé d'un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$. ■

D'autre part, on peut montrer facilement que l'on a la propriété suivante.

Proposition A.15. Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ une p -forme. Elle s'écrit $\alpha = \pi^* \beta$ avec $\beta \in \Omega^p(\mathcal{B})$ si et seulement si pour tout $X \in \Gamma(L)$ on a $X \lrcorner \alpha = 0$ et $X \lrcorner d\alpha = 0$.

On considère à partir de maintenant un feuilletage lagrangien. Parmi les champs de vecteurs symplectiques, ceux qui sont verticaux sont caractérisés de la manière suivante.

Proposition A.16. Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs symplectique. X est vertical si et seulement si sa 1-forme associée $\omega(X)$ est un pull-back, i.e

$$X \in \Gamma(L) \iff \omega(X) \in \pi^* \left(\Omega^1(\mathcal{B}) \right).$$

Démonstration. Notons $\alpha = \omega(X)$ la 1-forme associée à X . La proposition A.15 nous apprend que α est dans $\pi^* \left(\Omega^1(\mathcal{B}) \right)$ si et seulement si les restrictions $\alpha|_L$ et $d\alpha|_L$ sont nulles. Comme le feuilletage vertical est lagrangien, $\alpha|_L$ est nulle si et seulement si X est vertical. D'autre part, $d\alpha = 0$ puisque X est symplectique, ce qui prouve l'assertion. ■

On en tire immédiatement les deux corollaires suivants.

Proposition A.17. Soit $X_H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs hamiltonien. X_H est vertical si et seulement si son hamiltonien H est un pull back, i.e

$$X_H \in \Gamma(L) \iff H \in \pi^* \left(C^\infty(\mathcal{B}) \right).$$

Démonstration. La 1-forme associée à X_H est par définition $\omega(X_H) = -dH$. La proposition précédente nous assure que X_H est vertical si et seulement si dH est un pull-back, i.e $dH = \pi^* \beta$ avec $\beta \in \Omega^1(\mathcal{B})$. De plus, ceci est vrai si et seulement si H est lui-même un pull-back. En effet, $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ étant une fibration à fibres connexes, tout cycle $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$ sur la base est l'image par π d'un cycle $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$. On a alors

$$\int_\gamma \beta = \int_{\tilde{\gamma}} dH = 0$$

puisque dH est exacte. Ceci étant vrai pour tout cycle γ , cela prouve que β est une forme exacte, i.e $\beta = df$, et donc que $H = \pi^* f$. ■

Proposition A.18. *Pour tout couple de fonctions $F, G \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$, on a*

$$\{F, G\} = 0.$$

Démonstration. Par définition, on a $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$. Cela est nul puisque d'après la proposition précédente X_F et X_G sont tangents aux fibres qui sont lagrangiennes. ■

2.2.2 Structure affine sur les fibres

Le feuilletage lagrangien associé à une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ implique l'existence d'une connexion affine naturelle ∇ sur chacune des fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$, pour $b \in \mathcal{B}$, donnée par la définition A.3.

Lemme A.19. *Pour tout b , l'holonomie sur le tore \mathcal{M}_b est nulle. De plus, le fibré $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ est C^∞ .*

Démonstration. Pour tout point $b \in \mathcal{B}$, dans un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ de ce point, on peut trouver d fonctions $\xi_j \in C^\infty(\mathcal{O})$, $dj = 1..$, dont les différentielles $d\xi_j$ sont linéairement indépendantes dans \mathcal{O} . Les tirés-arrières $\xi_j \circ \pi$, sont linéairement indépendants dans $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$, et il en est de même pour les champs de vecteurs hamiltoniens associés $X_j = X_{\xi_j \circ \pi}$. D'autre part, d'après la proposition A.17 les X_j sont verticaux et donc, d'après la proposition A.5, constants sur chaque fibre \mathcal{M}_b . On a donc d champs de vecteurs formant, pour tout $b \in \mathcal{O}$, une base des champs de vecteurs constants sur \mathcal{M}_b , ce qui montre que l'holonomie sur le tore \mathcal{M}_b est nulle. De plus, cette base dépend de manière C^∞ de b ce qui implique que le fibré $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ est C^∞ . ■

L'holonomie étant nulle, les fibres \mathcal{M}_b sont donc isomorphes (en tant qu'espaces affines) au tore affine plat standard $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. De plus, l'espace $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ des champs de vecteurs constants, l'espace $\Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$ des 1-formes constantes, et l'espace $\Omega_\nabla^N(\mathcal{M}_b)$ des formes volumes constants, sont des espaces vectoriels de dimensions respectives d , d et 1.

On a ensuite la caractérisation suivante des champs de vecteurs verticaux constants.

Proposition A.20. *Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est vertical et constant sur chaque fibre si et seulement si sa 1-forme associée $\omega(X)$ est un pull-back, i.e*

$$X \in \Gamma\left(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)\right) \iff \omega(X) \in \pi^*(\Omega^1(\mathcal{B})).$$

Démonstration. Notons $\alpha = \omega(X)$ la 1-forme associée à X et $L = \bigcup_m L_m$ le feuilletage vertical défini par les espaces tangents aux fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$. La proposition A.15 nous apprend que α est dans $\pi^*(\Omega^1(\mathcal{B}))$ si et seulement si les restrictions α_L et $d\alpha|_L$ sont nulles. Comme le feuilletage est lagrangien, $\alpha|_L$ est nulle si et seulement si X est vertical. D'autre part, on voit d'après la définition A.3 de la connexion affine associée au feuilletage lagrangien, que X est constant si et seulement si $d\alpha|_L$ est nulle. ■

2.2.3 Le fibré des périodes

Sur chaque fibre \mathcal{M}_b , on va considérer parmi les champs de vecteurs constants sur \mathcal{M}_b ceux qui sont 1-périodiques.

Définition A.21. On définit le **réseau des périodes** $\Lambda_b \subset \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ par

$$\Lambda_b = \{X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b); \phi_X^1 = \mathbb{I}\},$$

où ϕ_X^1 est le flot au temps 1 du champ de vecteurs X .

On montre facilement que Λ_b est effectivement un réseau de $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$, i.e un module sur \mathbb{Z} de dimension d .

Définition A.22. On définit ensuite le réseau $\Lambda_b^* \subset \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$, dual⁷ du précédent, par

$$\Lambda_b^* = \{\alpha \in \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b); \forall X \in \Lambda_b \Rightarrow \alpha(X) \in 2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Définition A.23. On définit le **fibré des périodes**

$$\Lambda = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Lambda_b$$

et son dual (contenant le facteur 2π)

$$\Lambda^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Lambda_b^*.$$

On va maintenant montrer que les réseaux Λ_b dépendent de b de manière C^∞ et forment donc une fibration C^∞ au dessus de \mathcal{B} . Pour le prouver, on montre d'abord un lemme qui est l'essence du théorème de coordonnées angles-actions.

Lemme A.24. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ un ouvert et soit θ un potentiel symplectique dans $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $b \rightarrow \gamma(b)$ une famille de cycles dépendant de manière C^∞ de b et telle que $\gamma(b) \subset \mathcal{M}_b$ pour tout $b \in \mathcal{O}$. Soit la fonction **action** $\xi \in C^\infty(\mathcal{B})$ définie par

$$\xi(b) = \int_{\gamma(b)} \theta.$$

Alors, le champ de vecteurs $X_{\xi \circ \pi}$ associé au hamiltonien $\xi \circ \pi$ est vertical, constant et 1-périodique. De plus, pour tout $b \in \mathcal{O}$, ses trajectoires sur \mathcal{M}_b sont homotopes au cycle $\gamma(b)$.

Démonstration. Le fait que $X_{\xi \circ \pi}$ est vertical et constant sur chaque fibre découle directement de la proposition A.16. On va montrer ensuite que, pour tout $b_0 \in \mathcal{O}$, il existe un cycle $\tilde{\gamma}(b_0)$ homotope à $\gamma(b_0)$ qui est une trajectoire de $X_{\xi \circ \pi}$. En utilisant l'invariance de la fonction action par changement homotope de cycle, on pourra conclure.

- Si $\tilde{\gamma}(b) \subset \mathcal{M}_b$ est une autre famille de cycles dépendant de manière C^∞ de b et telle que $\tilde{\gamma}(b)$ est homotope dans \mathcal{M}_b à $\gamma(b)$ pour tout $b \in \mathcal{O}$, alors

$$\xi(b) = \int_{\gamma(b)} \theta = \int_{\tilde{\gamma}(b)} \theta.$$

⁷Attention à l'introduction du facteur 2π dans la définition même de l'espace Λ_b^* .

En effet, si $\tilde{\gamma}(b)$ est homotope à $\gamma(b)$, alors $\tilde{\gamma}(b) - \gamma(b) = \partial S$, où S est un 2-cycle dans \mathcal{M}_b . On a donc

$$\int_{\tilde{\gamma}(b)} \theta - \int_{\gamma(b)} \theta = \int_{\partial S} \theta = \int_S \omega,$$

ce qui est nul puisque S est inclu dans une variété lagrangienne.

- Il existe une famille de cycles $\tilde{\gamma}(b) \subset \mathcal{M}_b$ dépendant de manière C^∞ de b et telle que $\tilde{\gamma}(b)$ est homotope à $\gamma(b)$ pour tout $b \in \mathcal{O}$, et telle que $\tilde{\gamma}(b_0)$ est une géodésique pour la connexion affine de la fibre \mathcal{M}_{b_0} . Il suffit de choisir une géodésique $\tilde{\gamma}(b_0)$ homotope à $\gamma(b_0)$ et de choisir une famille $\tilde{\gamma}(b)$ coïncidant avec $\tilde{\gamma}(b_0)$ en b_0 , en utilisant le fait que la fibration est localement triviale.
- Il existe un champ de vecteurs $X_{\tilde{\gamma}}$ vertical, hamiltonien et tangent au cycle $\tilde{\gamma}(b_0) \subset \mathcal{M}_{b_0}$. En effet, le cycle $\tilde{\gamma}(b_0)$ étant une géodésique sur le tore \mathcal{M}_{b_0} , il existe un unique champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_{b_0})$ coïncidant avec le vecteur tangent $\dot{\tilde{\gamma}}(b_0)$ en tout point de $\tilde{\gamma}(b_0)$. Grâce à la proposition A.19, on peut étendre X en un champ de vecteurs $X' \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ vertical et constant sur chaque fibre. Soit $\alpha = \omega(X')$ sa 1-forme associée. Sa restriction $\alpha|_L$ au feuilletage vertical $L = \bigcup_m L_m$ défini par les espace tangents aux fibres \mathcal{M}_b , est nulle puisque que X' est vertical et que L est lagrangien. De plus, le fait que X' est constant sur chaque feuille implique, d'après la définition A.3, que $d\alpha|_L$ est nulle aussi. Ceci permet d'appliquer la proposition A.15 et d'en déduire que α est de la forme $\alpha = \pi^*\beta$, avec $\beta \in \Omega^1(\mathcal{B})$. On peut ensuite choisir une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{B})$ telle que $(df)_{b_0} = \beta_{b_0}$. On définit alors $X_{\tilde{\gamma}}$ comme étant le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction $f \circ \pi$, soit vecteurs $X_{\tilde{\gamma}} = X_{f \circ \pi}$. Le champ de vecteurs ainsi construit $X_{\tilde{\gamma}}$ est donc bien hamiltonien et, grâce à la proposition A.16, il est aussi vertical. Par construction, il coïncide avec X en tout point de \mathcal{M}_{b_0} et coïncide donc avec $\dot{\tilde{\gamma}}(b_0)$ en tout point de $\tilde{\gamma}(b_0)$.

Pour tout point $m \in \mathcal{M}_{b_0}$, on veut montrer que $(X_{\tilde{\gamma}})_m = (X_{\xi \circ \pi})_m$. On va montrer que pour tout $\tilde{Y}_m \in T_m \mathcal{M}$, on a $\omega(\tilde{Y}_m, X_{\tilde{\gamma}}) = \omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi})$. On choisit pour cela un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ dont le relevé $\tilde{Y} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ coïncide avec \tilde{Y}_m au point m . On a alors

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi}) &= (d(\xi \circ \pi))(\tilde{Y})_m \\ &= \left. \frac{d}{dt} \xi \circ \pi \circ \phi_{\tilde{Y}}^t(m) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \xi \circ \phi_{\tilde{Y}}^t \circ \pi(m) \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition ?? dans la dernière ligne. Par définition de ξ , on a

$$\omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi}) = \left. \frac{d}{dt} \int_{\tilde{\gamma}(\phi_{\tilde{Y}}^t(b_0))} \theta \right|_{t=0}.$$

On se rappelle que l'on peut remplacer la famille de cycle $\tilde{\gamma}(b)$ par une famille homotope,

par exemple par la famille $\tilde{\gamma}(\phi_Y^t(b_0)) = \phi_Y^t(\tilde{\gamma}(b_0))$, ce qui fait que

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi}) &= \frac{d}{dt} \int_{\tilde{\gamma}(b_0)} (\phi_Y^t)^* \theta \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\tilde{\gamma}(b_0)} \mathcal{L}_{\tilde{Y}} \theta.\end{aligned}$$

La formule de Cartan nous donne $\mathcal{L}_{\tilde{Y}} \theta = d(\omega(\tilde{Y})) + \tilde{Y} \lrcorner \omega$. Le premier terme est une forme exacte, son intégrale sur le cycle $\tilde{\gamma}(b_0)$ donne donc 0. Il reste

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi})(m) &= \int_{\tilde{\gamma}(b_0)} \tilde{Y} \lrcorner \omega \\ &= \int_0^1 (\omega(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) \circ \phi_{X_{\tilde{\gamma}}}^t(m)) dt,\end{aligned}$$

puisque $X_{\tilde{\gamma}}$ coïncide avec $\dot{\tilde{\gamma}}(b_0)$ en tout point de $\tilde{\gamma}(b_0)$. Il reste à montrer que l'intégrand est constant par rapport à t . En effet, on a

$$\frac{d}{dt} [\omega(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) \circ \phi_{X_{\tilde{\gamma}}}^t(m)] = [\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \omega(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}})] \circ \phi_{X_{\tilde{\gamma}}}^t(m),$$

avec

$$\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \omega(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) = (\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \omega)(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) + \omega(\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) + \omega(\tilde{Y}, \mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} X_{\tilde{\gamma}}).$$

Le premier terme est nul car $X_{\tilde{\gamma}}$ est hamiltonien. D'autre part, $\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \tilde{Y}$ est vertical comme l'assure la propriété A.14, ce qui fait que $\omega(\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} \tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) = 0$. Enfin, le troisième terme est nul du fait que $\mathcal{L}_{X_{\tilde{\gamma}}} X_{\tilde{\gamma}} = 0$. Cela prouve donc que $\omega(\tilde{Y}, X_{\tilde{\gamma}}) \circ \phi_{X_{\tilde{\gamma}}}^t(m)$ est constant par rapport à t , et donc que

$$\omega(\tilde{Y}_m, X_{\xi \circ \pi}) = \omega(\tilde{Y}_m, X_{\tilde{\gamma}}).$$

Ceci étant vrai pour tout $\tilde{Y}_m \in T_m \mathcal{M}$, cela prouve que $(X_{\tilde{\gamma}})_m = (X_{\xi \circ \pi})_m$, pour tout point $m \in \mathcal{M}_{b_0}$. De plus, par construction le champ de vecteurs $X_{\tilde{\gamma}}$ engendre le cycle $\tilde{\gamma}(b_0)$ qui est homotope à $\gamma(b_0)$, ce qui implique que $X_{\xi \circ \pi}$ est 1-périodique et que ses trajectoires sont homotopes à $\gamma(b_0)$. Enfin, on peut refaire tout ce raisonnement avec les autres points $b_0 \in \mathcal{O}$, ce qui achève la preuve. ■

Ce lemme nous permet de prouver que les réseaux Λ_b dépendent de manière C^∞ de b .

Proposition A.25. *Le fibré des périodes Λ est un sous-fibré C^∞ du fibré $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$. Le fibré dual Λ^* est un sous-fibré C^∞ du fibré $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$.*

Démonstration. Tout d'abord, la fibration étant localement triviale on peut trouver, dans un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ suffisamment petit, N familles de cycles $\gamma_j(b)$, $j = 1..N$, dépendant de manière C^∞ de b et formant pour tout b une base de l'homologie du tore \mathcal{M}_b . D'autre part, un théorème bien connu de Weinstein ([69]) implique entre autre l'existence d'un potentiel symplectique θ dans un voisinage d'une fibre \mathcal{M}_b . Quitte à réduire l'ouvert \mathcal{O} , cela nous assure de l'existence d'un potentiel symplectique θ dans $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$. Pour tout $j = 1..N$, on construit la fonction action $\xi_j \in C^\infty(\mathcal{B})$ du lemme A.24. Il résulte de ce lemme que les

champs de vecteurs hamiltoniens $X_j = X_{\xi_j \circ \pi}$ associés aux hamiltoniens $\xi_j \circ \pi$ sont dans le réseau Λ_b pour tout $b \in \mathcal{O}$. De plus, ce sont des éléments primitifs du réseau du fait que leurs trajectoires sont homotope aux cycles $\gamma_j(b)$ qui forment une base de l'homologie des tores \mathcal{M}_b . Enfin, ils sont linéairement indépendants pour la même raison. Les champs de vecteurs X_j forment donc une famille de bases du réseau Λ_b dépendant de manière C^∞ de b , ce qui achève la preuve. ■

2.2.4 Structure affine et monodromie sur l'espace de base

On sait que la forme symplectique, du fait de son caractère non-dégénéré, fournit un isomorphisme naturel entre $T_m\mathcal{M}$ et $T_m^*\mathcal{M}$, en tout point m . Cela induit un isomorphisme $\omega : \mathcal{V}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M})$ entre les champs de vecteurs et les champs de 1-formes. On va voir que cela induit aussi un isomorphisme entre les champs de vecteurs constants sur une fibre et les 1-formes sur l'espace de base \mathcal{B} .

Proposition A.26. *Pour tout point $b \in \mathcal{B}$, l'application suivante*

$$\begin{aligned} \iota_b : T_b\mathcal{B} &\rightarrow \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{M}_b) \\ X &\rightarrow \omega(\tilde{X})\Big|_{\mathcal{M}_b}, \end{aligned}$$

où $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un relevé de $X \in T_b\mathcal{B}$, est bien définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration.

- Tout d'abord, l'application $\iota_b : T_b\mathcal{B} \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}_b)$ ne dépend pas du choix du relevé puisque si \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 sont deux relevés de X , alors $\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2$ est vertical. La fibre \mathcal{M}_b étant lagrangienne, cela implique que $\omega(\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2)\Big|_{\mathcal{M}_b} = 0$.
- On montre ensuite que $\iota_b(X) \in \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{M}_b)$, i.e $\nabla(\iota_b(X)) = 0$. En effet, pour tout $Y \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$, on peut étendre Y en un champ de vecteurs $Y' \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ vertical et constant sur chaque fibre, i.e $Y' \in \Gamma(\bigcup_b \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b))$. D'après la proposition A.20, cela signifie que $\omega(Y') = \pi^*\beta$, avec $\beta \in \Omega^1(\mathcal{B})$. Pour tout point $m \in \mathcal{M}_b$, on a donc

$$\begin{aligned} (\iota_b(X))(Y')_m &= \omega(\tilde{X}, Y')_m \\ &= -(\pi^*\beta)(\tilde{X})_m \\ &= -\beta(X)_b, \end{aligned}$$

puisque que \tilde{X} est un relevé de X . Cette quantité est constante par rapport à $m \in \mathcal{M}_b$, ce qui prouve que $\iota_b(X)$ est une 1-forme constante sur \mathcal{M}_b .

- Enfin, l'application ι_b est injective dans $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{M}_b)$. En effet, si $X_1 \in T_b\mathcal{B}$ et $X_2 \in T_b\mathcal{B}$ sont tels que $\omega(\tilde{X}_1)\Big|_{\mathcal{M}_b} = \omega(\tilde{X}_2)\Big|_{\mathcal{M}_b}$, cela signifie que pour tout $m \in \mathcal{M}_b$ et tout vecteur $Y \in T_m\mathcal{M}$ vertical, on a $\omega(\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2, Y)_m = 0$, ce qui implique que $\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2$ est vertical et donc que $X_1 = X_2$. On a donc une injection entre deux espaces vectoriels de même dimension, c'est donc un isomorphisme.

■

Proposition A.27. L'application transposée $\iota_b^* : \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$ vérifie

$$\begin{aligned} (\iota_b^*)^{-1} : T_b^*\mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \\ \beta &\rightarrow -\omega^{-1}(\pi^*\beta)|_{\mathcal{M}_b}. \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, par définition de ι_b^* , pour tout $X \in T_b\mathcal{B}$ et tout $Y \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$, on a

$$\begin{aligned} (\iota_b^*(Y))(X) &= (\iota_b(X))(Y) \\ &= -\omega(Y, \tilde{X}), \end{aligned}$$

où $\tilde{X} \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un relevé de X . D'autre part, la proposition A.20 implique que $\omega(Y) = \pi^*\beta$, avec $\beta \in \Omega^1(\mathcal{B})$. En utilisant le fait que \tilde{X} est un relevé de X , on obtient $(\iota_b^*(Y))(X) = -\beta(X)$. ■

On étend ensuite de manière naturelle ces deux applications en deux applications

$$\iota : T\mathcal{B} \rightarrow \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$$

et

$$\iota^* : \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b) \rightarrow T^*\mathcal{B},$$

que l'on montre être des difféomorphismes d'espaces fibrés au dessus de \mathcal{B} .

Proposition A.28. Les applications ι et ι^* sont des difféomorphismes d'espaces fibrés au dessus de \mathcal{B} .

Démonstration. On va montrer que localement, ι envoie des sections C^∞ sur des sections C^∞ . En effet, si $X \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ alors pour tout $b \in \mathcal{B}$ on a

$$\begin{aligned} (\iota(X))_b &= \iota_b(X_b) \\ &= \omega(\tilde{X})|_{\mathcal{M}_b}, \end{aligned}$$

qui est bien la restriction à \mathcal{M}_b d'une 1-forme $\omega(\tilde{X}) \in \Omega^1(\mathcal{M})$, ce qui prouve que $b \rightarrow (\iota(X))_b$ est une section C^∞ de $\bigcup_b \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$, et donc que ι est un difféomorphisme. On montre ensuite de manière tout à fait similaire que ι^* est un difféomorphisme. ■

Définition A.29. On définit $E^* \subset T^*\mathcal{B}$ le **fibré des actions** sur \mathcal{B} par

$$E^* = \iota^*(\Lambda).$$

Grâce à la proposition A.25, c'est un sous-fibré C^∞ de $T^*\mathcal{B}$, $E^* = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} E_b^*$, dont la fibre $E_b^* = \iota_b^*(\Lambda_b)$ est appelée **réseau des 1-formes entières en b** .

Définition A.30. On définit $E \subset T\mathcal{B}$, le fibré 2π -dual du précédent

$$E = \iota^{-1}(\Lambda^*).$$

C'est un sous-fibré C^∞ de $T\mathcal{B}$, $E = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} E_b$, dont la fibre $E_b = \iota_b^{-1}(\Lambda_b^*)$ est appelée **réseau des vecteurs entières en b** .

L'existence de ce fibré en réseaux permet d'identifier les espaces tangents $T_b\mathcal{B}$ pour des b voisins, ce qui donne une structure de connexion affine sur \mathcal{B} .

Proposition A.31. *Le fibré $T\mathcal{B}$ est muni d'une connexion affine naturelle.*

L'holonomie de cette connexion est appelée **monodromie**, terme introduit par Duistermaat dans [28].

2.2.5 Séries de Fourier

Les fibres \mathcal{M}_b étant compactes, on peut choisir une mesure constante particulière $|d\mu_b|$, $d\mu_b \in \Omega_{\nabla}^d(\mathcal{M}_b)$: celle définie de manière unique par $\int_{\mathcal{M}_b} |d\mu_b| = 1$. Sur chaque tore affine \mathcal{M}_b on définit l'espace des fonctions de carré sommable à l'aide du produit scalaire suivant

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathcal{M}_b} \bar{f}g |d\mu_b|$$

pour tout couple (f, g) de fonctions de \mathcal{M}_b à valeurs complexes. On définit alors la norme L^2 associée par $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f | f \rangle$ et l'espace $L^2(\mathcal{M}_b)$ par $L^2(\mathcal{M}_b) = \{f; \|f\|_{L^2} < \infty\}$.

Soit un point de référence $x_0 \in \mathcal{M}_b$ fixé. Pour tout point $x \in \mathcal{M}_b$, il existe un champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ tel que $x = \phi_X^1(x_0)$. On a en fait une classe d'équivalence, puisque deux vecteurs $X, Y \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ ayant cette propriété vérifient que $X - Y \in \Lambda_b$. On notera $X = x - x_0$ un représentant de cette classe.

Pour tout $k \in \Lambda_b^*$, on définit l'onde plane $e_k \in L^2(\mathcal{M}_b)$ par

$$e_k(x) = e^{ik(x-x_0)}$$

et on définit la série de Fourier $\tilde{f}(k)$ de la fonction $f : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(k) = \langle e_k | f \rangle = \int_{\mathcal{M}_b} e^{-ik(x-x_0)} f(x) |d\mu_b|.$$

On peut ensuite reconstituer la fonction par la formule inverse

$$f(x) = \sum_{k \in \Lambda_b^*} \tilde{f}(k) e^{ik(x-x_0)}.$$

Cette série de Fourier a toutes les propriétés bien connues. Notamment, on voit facilement que pour tout champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$ et toute fonction $f \in C^1(\mathcal{M}_b)$, on a

$$\widetilde{X(f)}(k) = ik(X) \tilde{f}(k).$$

Moyennant le choix d'un point origine $x_0 \in \mathcal{M}_b$ on peut donc définir, pour toute fonction $f_b : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$, sa série de Fourier $\tilde{f}_b : \Lambda_b^* \rightarrow \mathbb{C}$. Naturellement, pour toute fonction $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, on souhaiterait définir globalement sa série de Fourier $\tilde{f} : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{C}$, ou encore $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{C}$, en utilisant l'identification $\iota(E) = \Lambda^*$. Pour cela, il faut choisir un point origine $x_0(b)$ pour tout b , i.e une section du fibré $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$. Ainsi définie, la série de Fourier d'une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ aura des coefficients de Fourier dans $C^\infty(\mathcal{B})$ si et seulement si la section $x_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}$ est C^∞ , ce qui n'est en général possible que localement, comme on l'a dit précédemment.

D'autre part, les sections du fibré E sont, par construction, constantes par rapport à la connexion sur \mathcal{B} , ce qui permet d'identifier localement chaque espace $E_b \subset T_b\mathcal{B}$ avec l'espace des sections $\Gamma(E)$.

Définition A.32. On notera

$$\Gamma = \Gamma(E)$$

l'espace des sections du fibré E . On l'appelle **espace de Fourier**.

Comme on l'a dit, on ne pourra faire les identifications $\Gamma \cong E_b$ que localement à cause de la présence de monodromie. Cependant, à l'intérieur de toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, la monodromie est nulle et il existe une section origine globale $x_0(b)$. Pour tout $k \in E_b$, on notera $\tilde{k} \in \Lambda_b^*$ son image $\tilde{k} = \iota_b(k)$ et on utilisera implicitement l'identification entre E_b et l'espace Γ des sections du fibré E .

Définition A.33. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ une boule. Pour toute fonction $f : \pi^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$, on définit sa **série de Fourier** $\tilde{f} : \mathcal{O} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(b, k) = \tilde{f}_b(\tilde{k}),$$

où \tilde{f}_b est la série de Fourier de la fonction restreinte à la fibre \mathcal{M}_b .

Dans la suite, lorsque que l'on parlera de série de Fourier $\tilde{f} : \mathcal{B} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, il sera sous-entendu que l'on travaille dans une boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, et on notera abusivement Γ au lieu de $\Gamma(\mathcal{O}, E)$. On utilisera toujours implicitement l'égalité $\tilde{f}(b, k) = \tilde{f}_b(\tilde{k})$ et on notera simplement la série de Fourier $\tilde{f}(b, k)$.

Proposition A.34. Une fonction f de \mathcal{M} dans \mathbb{C} est C^∞ si et seulement si, dans un système de coordonnées locales $\{\xi_j\}$ sur \mathcal{B} , pour toute boule compacte $K \subset \mathcal{B}$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $b \in K$, pour tout $k \in \Gamma$ et pour tout entier $a > 0$, il existe une constante $C(\alpha, a, K)$ telle que

$$\left| \partial_\xi^\alpha \tilde{f}(b, k) \right| \leq \frac{C(\alpha, a, K)}{(1 + |k|^2)^{\frac{a}{2}}},$$

où l'on s'est donné une norme $||$ sur Γ .

La série de Fourier hérite naturellement des propriétés des séries de Fourier sur chaque fibre, comme par exemple la suivante.

Proposition A.35. Soit une fonction $f \in C^1(\mathcal{M})$. Soit $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ un hamiltonien de la forme $H = F \circ \pi$ et $X_H \in \mathcal{V}(M)$ son champ de vecteurs associé. La série de Fourier \tilde{f} vérifie alors

$$\widetilde{X_H(f)}(b, k) = idF(k)_b \tilde{f}(b, k).$$

Démonstration. D'après les définitions précédentes, on a $\widetilde{X_H(f)}_b(\tilde{k}) = i\tilde{k}(X_{F \circ \pi}) \tilde{f}_b(k)$. D'autre part, la relation entre k et \tilde{k} donne

$$\begin{aligned} \tilde{k}(X_{F \circ \pi}) &= \iota_b(k)(X_{F \circ \pi}) \\ &= (\iota_b)^*(X_{F \circ \pi})(k). \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant $\omega(X_{F \circ \pi}) = -\pi^*(dF)$, la proposition A.27 donne $\tilde{k}(X_{F \circ \pi}) = dF(k)$. ■

2.3 Action torique semi-globale

On voit facilement, à l'aide d'un système de coordonnées angles-actions (x_j, ξ_j) , que semi-globalement⁸ on a une action de \mathbb{T}^d sur \mathcal{M} . En effet, si l'on considère les champs de vecteurs $X_j = \partial_{x_j}$ associés aux coordonnées actions ξ_j et si l'on fait agir leurs flots $\phi_{X_j}^{t_j}$ pendant un temps $t_j \in [0, 1]$, on obtient l'action

$$\begin{aligned} [0, 1]^d \times (x_j, \xi_j) &\rightarrow (x_j, \xi_j) \\ ((t_1, \dots, t_d), (x_j, \xi_j)) &\rightarrow (x_j + t_j, \xi_j). \end{aligned}$$

On va tout d'abord donner une version géométrique de cette action, en remarquant que l'on a un fibré en tores naturel, qui ne dépend pas du choix d'un système de coordonnées angles-actions. De plus, ce fibré est muni d'une connexion naturelle qui permet de parler de sections locales constantes et de définir l'action torique semi-globale. D'autre part, bien que cette action ne soit pas globale, on peut définir globalement l'opération de moyennisation. Après avoir donné quelques propriétés élémentaires de l'opération de moyennisation, on donnera le théorème A.52 de "décomposition des champs de vecteurs symplectiques" en deux parties : une partie constante par rapport à l'action torique et une partie globalement hamiltonienne.

2.3.1 Fibré torique

Définition A.36. Pour tout point $b \in \mathcal{B}$, on définit \mathcal{G}_b le **groupe torique en b** par le quotient

$$\mathcal{G}_b = \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b) / \Lambda_b.$$

Les éléments de \mathcal{G}_b seront notés $[X]$, avec $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$, puisque ce sont des classes d'équivalence. On définit ensuite le **fibré torique** $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ par

$$\mathcal{G} = \bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{G}_b.$$

En tout point b , le groupe torique mérite bien son nom du fait que \mathcal{G}_b est isomorphe au tore \mathbb{T}^d en tant que groupe, moyennant le choix d'une base de Λ_b . D'autre part, le fibré torique \mathcal{G} est un fibré C^∞ au dessus de \mathcal{B} du fait que Λ est un sous-fibré C^∞ de $\bigcup \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$, comme l'indique la proposition A.25. On serait tenté de croire que c'est un fibré principal, avec \mathbb{T}^d comme groupe structural. Ce n'est malheureusement pas vrai en général, à cause de la monodromie qui nous empêche de pouvoir choisir une base globale de Λ . Par contre, lorsque la monodromie est nulle, \mathcal{G} est un fibré principal qui, de plus, possède une section globale particulière (la section nulle).

On aurait pu aussi définir \mathcal{G} de la manière équivalente suivante.

Proposition A.37. *Le fibré $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ est naturellement isomorphe, par l'application ι^* de la proposition A.27, au fibré*

$$\bigcup_{b \in \mathcal{B}} (T_b^* \mathcal{B} / E_b^*).$$

⁸On rappelle que *semi-globalement* signifie localement dans un ouvert de la forme $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, avec $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ un ouvert.

Il existe une manière naturelle de parler de sections locales constantes du fibré torique \mathcal{G} , induite par la connexion sur le fibré vectoriel $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

Définition A.38. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, on définit l'espace $\Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ des **sections locales constantes** du fibré \mathcal{G} comme l'espace des sections locales de la forme $b \rightarrow [X_b]$, où $b \rightarrow X_b$ est une section locale constante de $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

Cet espace est bien défini car si $b \rightarrow Y_b$ est une section (a priori non constante) de $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ telle que $[X_b] = [Y_b]$ pour tout $b \in \mathcal{O}$, cela signifie que $X_b - Y_b \in \Lambda_b$ pour tout b . Cela implique que $b \rightarrow X_b - Y_b$ est une section du fibré des périodes Λ . Étant donné que, par définition de la connexion affine sur \mathcal{B} , les sections de Λ sont des sections constantes de $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$, cela implique que Y est aussi une section constante de $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

On pourrait en fait parler de la connexion plate naturelle de ce fibré \mathcal{G} mais on ne peut pas utiliser la théorie standard des connexions sur les fibrés principaux, puisque \mathcal{G} n'en est pas un à proprement parler. On se contentera d'utiliser les sections locales constantes $\Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ que l'on vient de définir et la notation avec le signe ∇ évocateur.

Proposition A.39. Pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, l'espace $\Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ est un groupe de Lie abélien compact naturellement isomorphe à chacune des fibres \mathcal{G}_b , $b \in \mathcal{O}$, et donc isomorphe au tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

Démonstration. Si \mathcal{O} est une boule, alors la monodromie est nulle et il existe donc des sections locales $X_1, \dots, X_d \in \Gamma(\mathcal{O}, \Lambda)$ formant pour tout $b \in \mathcal{O}$ une base du réseau Λ_b . A tout élément $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d$ on associe $[X] = [t_1 X_1 + \dots + t_d X_d] \in \Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$. ■

2.3.2 Action torique

Définition A.40. Pour tout $b \in \mathcal{B}$, on définit l'action de \mathcal{G}_b sur \mathcal{M}_b de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_b \times \mathcal{M}_b &\rightarrow \mathcal{M}_b \\ ([X], m) &\rightarrow [X](m) = \phi_X^1(m), \end{aligned}$$

où $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ est un représentant de la classe $[X]$.

Proposition A.41. L'action de \mathcal{G}_b sur \mathcal{M}_b est bien définie, commutative, libre, effective et transitive.

Démonstration. Cette action est clairement commutative puisque si $X, Y \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ sont deux champs de vecteurs constants, alors ils commutent, et donc leurs flots aussi. L'action est bien définie puisque si X et Y sont deux représentants de la même classe $[X] = [Y]$, cela signifie que $X - Y \in \Lambda_b$, si bien que $\phi_X^1(\phi_Y^1)^{-1} = \phi_{X-Y}^1 = \mathbb{I}$. D'autre part, l'action est libre car si $[X]$ n'est pas identiquement nul, cela signifie que X n'est pas dans le réseau Λ_b , ce qui fait que le difféomorphisme ϕ_X^1 n'a pas de point fixe. Enfin, l'action est transitive car tous points $m_1, m_2 \in \mathcal{M}_b$ peuvent être joints par une trajectoire d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$. Si on note t le temps de cette trajectoire, i.e $\phi_X^t(m_1) = m_2$, alors le champ de vecteurs $Y = \frac{1}{t}X$ permet de joindre m_1 à m_2 en un temps 1. ■

Définition A.42. L'espace des sections de $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ agit verticalement sur le fibré $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{G}) \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ ([X], m) &\rightarrow [X](m) = \phi_X^1(m), \end{aligned}$$

où $X \in \Gamma(\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b))$ est un représentant de la classe $[X]$.

Proposition A.43. *Pour tout sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, l'espace $\Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ des sections constantes de $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{B}$ agit sur $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$ de manière symplectique. On appelle cette action : **action torique de \mathcal{G} sur \mathcal{M}** .*

Démonstration. Soit $[X] \in \Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ une section locale constante de \mathcal{G} et soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ un représentant de $[X]$, qui est donc une section constante de $\bigcup_b \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{M}_b)$. Par construction, cela signifie que $\beta = \iota^*(X)$ est une section constante de $T^*\mathcal{B}$, i.e une 1-forme constante ; elle est donc fermée, $d\beta = 0$. Le champ de vecteurs X est donc symplectique puisque $d(\omega(X)) = d(-\pi^*\beta) = 0$. ■

2.3.3 Moyennisation par l'action torique

Muni d'une action de groupe, on ne peut s'empêcher de considérer les objets qui sont invariants par rapport à cette action et d'introduire l'opération de moyennisation qui est définie globalement. Dans notre cas, on n'a qu'une action semi-globale. Cependant, il est possible de définir globalement l'action de moyennisation.

Définition A.44. On dit qu'un tenseur $T \in \Gamma^{p,q}(\mathcal{M})$ est **invariant sous l'action torique de \mathcal{G}** , ou simplement **\mathcal{G} -invariant**, si pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ et toute section constante $[X] \in \Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ on a

$$(\phi_X^1)_*(T) = T$$

ou, de manière équivalente, si

$$\mathcal{L}_X T = 0.$$

On rappelle que pour toute boule \mathcal{O} , l'espace $\Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ est naturellement un groupe de Lie compact, et donc est muni de sa mesure de Haar. Cela permet d'effectuer l'opération standard de moyennisation suivante.

Définition A.45. On définit $\langle T \rangle$ la **moyenne d'un tenseur T par rapport l'action torique de \mathcal{G}** , ou la **\mathcal{G} -moyenne** de T , comme suit. Pour tout $m \in \mathcal{M}$, on pose

$$\langle T \rangle_m = \int_{\Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})} (\phi_X^1)_*(T) d\mu_{\mathcal{G}},$$

où $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ est une boule voisinage de $b = \pi(m)$ et $d\mu_{\mathcal{G}}$ est la mesure de Haar du groupe $\Gamma_{\nabla}(\mathcal{O}, \mathcal{G})$.

Proposition A.46. *La définition de la moyenne d'un tenseur ne dépend pas du choix de la boule \mathcal{O} . Si X_1, \dots, X_d est une base de $\Gamma(\mathcal{O}, \Lambda)$, la moyenne est donnée par*

$$\langle T \rangle_m = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_d (\phi_{X_1}^{t_1})_* \circ \dots \circ (\phi_{X_d}^{t_d})_*(T).$$

Proposition A.47. *On a les propriétés élémentaires suivantes.*

1. T est invariant sous l'action de \mathcal{G} si et seulement si $\langle T \rangle = T$.
2. $\langle \langle T \rangle \rangle = \langle T \rangle$.
3. Si $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ est une p -forme, alors $\langle d\alpha \rangle = d\langle \alpha \rangle$.
4. Un tiré-arrière est \mathcal{G} -invariant, i.e $\langle \pi^*\beta \rangle = \pi^*\beta$, pour tout $\beta \in \Omega^p(\mathcal{B})$.

5. Si $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une fonction, alors $\langle f \rangle(m) = \tilde{f}(\pi(m), 0)$, où $\tilde{f}(b, k)$ est la série de Fourier de f .

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents. Le troisième découle du fait que la dérivée extérieure commute avec les difféomorphismes. Le quatrième point se montre en remarquant que pour tout $[X] \in \Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$, on a $(\phi_X^1)^*(\pi^*\beta) = (\pi \circ \phi_X^1)^*\beta = \pi^*\beta$ puisque X est vertical. Le dernier point se voit directement d'après la définition de la série de Fourier. ■

Proposition A.48. On a les propriétés à peine moins élémentaires suivantes.

1. Si T et S sont deux tenseurs, et si T est \mathcal{G} -invariant, alors la contraction $T \lrcorner S$ par rapport à deux indices quelconques vérifie $\langle T \lrcorner S \rangle = T \lrcorner \langle S \rangle$.
2. En particulier, si $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est le champ de vecteurs associé à une 1-forme $\alpha = \omega(X)$, alors on a $\omega(\langle \alpha \rangle) = \langle \omega(\alpha) \rangle$.
3. Si $X_A \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un champ de vecteurs hamiltonien, alors sa \mathcal{G} -moyenne $\langle X_A \rangle$ est verticale et constante sur chaque fibre, i.e est une section de $\bigcup_b \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.
4. Si $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ une fonction et $g \circ \pi \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ est un tiré-arrière, alors

$$\langle \{f, g \circ \pi\} \rangle = 0.$$

Démonstration.

1. Le premier point vient du fait que si T est \mathcal{G} -invariant, alors pour tout $[X] \in \Gamma_\nabla(\mathcal{O}, \mathcal{G})$ on a

$$(\phi_X^1)_*(T \lrcorner S) = ((\phi_X^1)_* T) \lrcorner ((\phi_X^1)_* S) = T \lrcorner ((\phi_X^1)_* S).$$

2. Le deuxième point découle du premier, en utilisant de plus le fait que l'action de \mathcal{G} est symplectique, i.e $(\phi_X^1)_*\omega = \omega$.
3. En conséquence du deuxième point, la 1-forme associée au champ de vecteurs moyenné $\langle X_A \rangle$ est donnée par

$$\omega^{-1}(\langle X_A \rangle) = \langle -dA \rangle = d\langle -A \rangle.$$

La fonction $\langle -A \rangle$ est \mathcal{G} -invariante, ce qui fait qu'elle est constante le long des fibres et donc dans $\pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$. D'après la proposition A.20, son champ de vecteurs associé $\langle X_A \rangle$ est vertical et constant sur chaque fibre.

4. Tout d'abord on a $\{f, g \circ \pi\} = (\pi^*dg)(X_f)$. D'après le quatrième point de la proposition précédente, on a $\langle \{f, g \circ \pi\} \rangle = (\pi^*dg)\langle X_f \rangle$. En utilisant ensuite le point précédent, on obtient $(\pi^*dg)\langle X_f \rangle = 0$. ■

2.3.4 Théorème de décomposition des champs de vecteurs symplectiques

On va maintenant étudier les propriétés des champs de vecteurs \mathcal{G} -invariants d'une part et de moyenne nulle d'autre part. On considérera en particulier les champs de vecteurs hamiltoniens et on donnera le théorème A.52 de décomposition qui assure que tout champ de vecteurs symplectique se décompose en une somme d'un champ de vecteurs globalement hamiltonien et d'un relevé symplectique d'un champ de vecteurs sur \mathcal{B} .

Proposition A.49. *Si $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est un champ de vecteurs \mathcal{G} -invariant, alors il est le relevé d'un champ de vecteurs $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$, $X = \tilde{Y}$.*

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ une boule voisinage d'un point $b \in \mathcal{B}$. L'action de \mathcal{G} étant transitive, pour tous points m et m' appartenant à une même fibre \mathcal{M}_b , il existe un élément $[Z] \in \Gamma_{\nabla}(\mathcal{G}, \mathcal{O})$ du groupe torique tel que $m' = \phi_Z^1(m)$. Comme par ailleurs X est \mathcal{G} -invariant, on a $X_{m'} = (\phi_Z^1)_* X_m$. En utilisant ensuite le fait que $\pi \circ \phi_Z^1 = \pi$, on voit que

$$\begin{aligned} \pi_* X_{m'} &= \pi_* (\phi_Z^1)_* X_m \\ &= \pi_* X_m, \end{aligned}$$

ce qui prouve que X est un relevé. ■

On donne maintenant un lemme qui assure qu'une 1-forme fermée de moyenne nulle est forcément exacte. Ce lemme est à rapprocher du résultat similaire dans le domaine des actions de groupes connexes compacts qui affirme que la cohomologie et la cohomologie invariante sont isomorphes⁹.

Lemme A.50. *Si α est une 1-forme fermée et de \mathcal{G} -moyenne nulle, alors elle est exacte et*

$$\alpha = df, \text{ avec } \langle f \rangle = 0.$$

Démonstration. Supposons que α est une 1-forme fermée de \mathcal{G} -moyenne nulle.

- Pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, il existe une base (X_1, \dots, X_d) de $\Gamma(\mathcal{O}, \Lambda)$. En choisissant un "point initial" $m(b)$ pour tout $b \in \mathcal{O}$, i.e une section du fibré restreint $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$, on construit une famille de cycles $\gamma_j(b)$, comme étant les orbites des champs de vecteurs X_j , partant du point $m(b)$. Cette famille dépend de manière C^∞ du point b et les classes d'homologie $[\gamma_j(b)]$ forment, pour tout b , une base de l'homologie du tore \mathcal{M}_b . D'autre part, du fait que la fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est localement triviale et que \mathcal{O} est une boule, les classes $[\gamma_j(b)]$ forment une base de l'homologie de $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$.
- On montre tout d'abord que pour tout j et tout b , on a $\int_{\gamma_j(b)} \langle \alpha \rangle = \int_{\gamma_j(b)} \alpha$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j(b)} \langle \alpha \rangle &= \int_0^1 dt \langle \alpha \rangle (X_j) \circ \phi_{X_j}^t (m(b)) \\ &= \int_0^1 dt X_{j \lrcorner} \left(\phi_{X_j}^{-t} \right)_* \langle \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Ensuite, d'après la proposition A.46, pour tout j et tout b on a

$$\int_{\gamma_j(b)} \langle \alpha \rangle = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_d \int_0^1 dt \left(\phi_{X_1}^{t_1} \right)_* \circ \dots \circ \widehat{\left(\phi_{X_j}^{t_j} \right)_*} \circ \dots \circ \left(\phi_{X_d}^{t_d} \right)_* \left(X_{j \lrcorner} \left(\phi_{X_j}^{t_j - t} \right)_* \alpha \right),$$

où le signe $\widehat{}$ signifie que le terme est omis. On vérifie ensuite facilement, par un changement de variable trivial, que

$$\int_0^1 dt_j \int_0^1 dt \left(X_{j \lrcorner} \left(\phi_{X_j}^{t_j - t} \right)_* \alpha \right) = \int_{\gamma_j(b)} \alpha,$$

ce qui fait que $\int_{\gamma_j(b)} \langle \alpha \rangle = \int_{\gamma_j(b)} \alpha$.

⁹Voir par exemple le livre [36] page 151.

- En utilisant ensuite l'hypothèse que $\langle \alpha \rangle = 0$, on en déduit que

$$\int_{\gamma_j(b)} \alpha = 0,$$

où les classes $[\gamma_j(b)]$ forment une base de l'homologie de $\tilde{\mathcal{O}} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$. Comme α est par hypothèse fermée, cela implique que α est une forme exacte. Il existe donc une fonction $f \in C^\infty(\tilde{\mathcal{O}})$ telle que $\alpha = df$. Cette fonction est unique à une constante près. D'autre part, en utilisant le fait que $\langle df \rangle = d\langle f \rangle$ et l'hypothèse $\langle \alpha \rangle = 0$, on en déduit que $\langle f \rangle$ est une constante, ce qui permet de choisir de manière unique la primitive f en demandant que $\langle f \rangle = 0$. Ce critère étant indépendant du choix de la base (X_1, \dots, X_d) , il permet de choisir globalement sur \mathcal{B} une fonction f telle que $\alpha = df$. ■

On en tire immédiatement le corollaire suivant.

Lemme A.51. *Si X est un champ de vecteurs symplectique de \mathcal{G} -moyenne nulle, i.e $\langle X \rangle = 0$, alors X est globalement hamiltonien et*

$$X = X_H \text{ avec } \langle H \rangle = 0.$$

Démonstration. En effet, soit $\alpha = \omega(X, \cdot)$ la 1-forme fermée associée à X . D'après la proposition A.47, $\langle X \rangle = 0$ si et seulement si $\langle \alpha \rangle = 0$. D'après le lemme précédent, cela est équivalent au fait que α est une forme exacte $\alpha = dF$, avec $\langle F \rangle = 0$, i.e X est globalement hamiltonien $X = X_H$, avec $H = -F$. ■

Théorème A.52. *Tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ symplectique se décompose de manière unique en*

$$X = X_1 + X_2,$$

où

- $X_1 = \{A, \cdot\}$ est globalement hamiltonien et $\langle A \rangle = 0$,
- X_2 est un relevé symplectique.

De plus, X_2 est simplement donné par $X_2 = \langle X \rangle$.

Démonstration. Soit $\alpha = \omega(X, \cdot)$ la 1-forme associée à X , qui est fermée puisque X est symplectique. Soit $\alpha_2 = \langle \alpha \rangle$ la moyenne de α par rapport à l'action de \mathcal{G} et soit $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$. Les formes α_1 et α_2 sont fermées puisque $d\langle \alpha \rangle = \langle d\alpha \rangle$. Les champs de vecteurs X_1 et X_2 associés à α_1 et α_2 sont donc symplectiques. D'autre part, on a $\langle \alpha_1 \rangle = 0$ et donc $\langle X_1 \rangle = 0$, ce qui implique, d'après le lemme A.51, que X_1 est globalement hamiltonien $X_1 = \{A, \cdot\}$ avec $\langle A \rangle = 0$. Enfin, $\langle \alpha_2 \rangle = \alpha_2$ ce qui implique que $\langle X_2 \rangle = X_2$ et donc que X_2 est \mathcal{G} -invariant. C'est donc un relevé, d'après la proposition A.49.

De plus, ces champs de vecteurs X_1 et X_2 forment l'unique décomposition du type décrit. En effet, supposons que l'on a une deuxième décomposition $X = X'_1 + X'_2$ avec les mêmes propriétés. En prenant la moyenne de $\langle X \rangle$ pour les deux expressions, on a $\langle X_1 + X_2 \rangle = \langle X'_1 + X'_2 \rangle$ et donc $\langle X_2 \rangle = \langle X'_2 \rangle$ puisque $\langle X_1 \rangle = \langle X'_1 \rangle = 0$. D'autre part, la \mathcal{G} -invariance de X_1 et X'_1 implique que $X_1 = X'_1$ et donc aussi que $X_2 = X'_2$. ■

2.4 Dynamique complètement intégrable

Par définition, un hamiltonien complètement intégrable associé à une fibration en tores lagrangiens $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est une fonction $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ constante le long des fibres. Les fibres étant connexes, cette fonction est un pull-back, i.e $H \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$, et d'après la proposition A.20 le champ de vecteurs hamiltonien associé X_H est vertical et constant sur chaque fibre \mathcal{M}_b , $b \in \mathcal{B}$. La dynamique induite par de tels champs de vecteurs constants sur le tore est assez simple.

Dans cette section, on considérera un tore \mathcal{M}_b et on étudiera les propriétés des différentes dynamiques possibles engendrées par les champs de vecteurs constants sur \mathcal{M}_b . Ces propriétés sont en fait indépendantes du fait que l'on a une fibration lagrangienne d'une variété symplectique, elles s'appliquent pour tout tore affine standard. D'autre part, on définira l'opération de moyennisation d'une fonction le long d'un sous-tore affine de \mathcal{M}_b , et on étudiera les propriétés des séries de Fourier des fonctions moyennées.

2.4.1 Modules de résonance et feuilletages entiers

Définition A.53. Pour tout champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$, on note $\mathcal{R}_X \subset \Lambda_b^*$ le **module de résonance du champ de vecteurs X** défini par

$$\mathcal{R}_X = \{k \in \Lambda_b^*, k(X) = 0\}.$$

Définition A.54. Un **feuilletage constant entier** \mathcal{P} de dimension p est un sous-espace vectoriel de dimension p de l'espace $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ tel que $\mathcal{P} \cap \Lambda_b$ est un sous-réseau de Λ_b de dimension p . Autrement dit, c'est un feuilletage de \mathcal{M}_b qui admet une base globale $\{X_1, \dots, X_p\}$ constituée de champs de vecteurs entiers $X_i \in \Lambda_b$.

Définition A.55. Pour tout champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$, on définit \mathcal{P}_X son **feuilletage minimal**, comme étant le feuilletage constant entier de dimension minimale contenant X .

Proposition A.56. Soit $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ un champ de vecteurs constant. Alors le feuilletage minimal \mathcal{P}_X et le module de résonance \mathcal{R}_X sont reliés par

$$\mathcal{R}_X = \mathcal{P}^\circ \cap \Lambda^*,$$

où $\mathcal{P}_X^\circ \subset \Omega_\nabla^1(\mathcal{M}_b)$ désigne l'annulateur de \mathcal{P}_X .

Démonstration. Considérons le feuilletage entier \mathcal{P} défini par $\mathcal{P} = (\mathcal{R}_X \otimes \mathbb{R})^\circ$. Ce feuilletage contient bien X , il reste à montrer qu'il est minimal. Supposons qu'il ne l'est pas et donc qu'il existe un feuilletage entier $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ de dimension $q < \dim(\mathcal{P})$ et contenant X . Construisons alors une 1-forme $\beta \in \Lambda_b^*$ entière vérifiant $\mathcal{Q} \subset \ker \beta$ et $\mathcal{P} \not\subset \ker \beta$; il suffit pour cela de choisir une base (e_1, \dots, e_d) de Λ_b , avec (e_1, \dots, e_q) formant une base de \mathcal{Q} et (e_1, \dots, e_p) formant une base de \mathcal{P} , et de définir β à partir de $\beta(e_p) = 1$ et $\beta(e_j) = 0$ pour $j \neq p$. Comme $X \in \mathcal{Q}$, on a $\beta(X) = 0$, mais la propriété $\mathcal{P} \not\subset \ker \beta$ implique alors que $\mathcal{P} \neq (\mathcal{R}_X \otimes \mathbb{R})^\circ$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Proposition A.57. Soit $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ un champ de vecteurs constant et \mathcal{P}_X son feuilletage minimal de dimension p . Toute feuille F du feuilletage \mathcal{P}_X est isomorphe au tore affine standard \mathbb{T}^p et le flot de X est ergodique dans F .

Démonstration. Le feuilletage minimal \mathcal{P}_X admet une base globale $\{X_1, \dots, X_p\}$ de champs de vecteurs entiers $X_i \in \Lambda_b$. On peut alors paramétrer toute feuille F par

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^p = \mathbb{R}^p / \mathbb{Z}^p &\rightarrow \mathcal{M}_b \\ (t_1, \dots, t_p) &\rightarrow \phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_p}^{t_p} (m_0), \end{aligned}$$

où $m_0 \in \mathcal{M}_b$ est un point "origine". La structure affine naturelle sur F est donnée en demandant que les champs de vecteurs X_j soit constant sur F . A l'intérieur de $\mathcal{V}_\nabla(F)$, le champ de vecteurs X n'a plus de relation de résonance puisque \mathcal{P}_X est justement le feuilletage minimal. On sait alors¹⁰ que ses trajectoires sont ergodiques dans F . ■

En résumé, on a les différentes dynamiques possibles suivantes engendrées par un champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

Définition A.58. Soit $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ un champ de vecteurs constant, soit \mathcal{P}_X son feuilletage minimal et \mathcal{R}_X son module de résonance. On distingue les différents cas suivants.

- $\dim \mathcal{P}_X = d, \dim \mathcal{R}_X = 0$: on dit que X est **non-résonant** ou **ergodique**.
- $\dim \mathcal{P}_X < d, \dim \mathcal{R}_X > 0$: on dit que X est **résonant** ou **partiellement ergodique**. On précisera aussi parfois que X est **\mathcal{R}_X -résonant** ou seulement que X est **r -résonant**, où $r = \dim \mathcal{R}_X$. En particulier, on dira :
 - $\dim \mathcal{P}_X = 1, \dim \mathcal{R}_X = d - 1$: on dit que X est **rationnel** ou **périodique**.

Définition A.59. Si \mathcal{P} est un feuilletage entier, on définit $\mathcal{R}_\mathcal{P} \subset \Lambda_b^*$ le **module de résonance associé** par

$$\mathcal{R}_\mathcal{P} = \{k \in \Lambda_b^*; \forall X \in \mathcal{P} \Rightarrow k(X) = 0\}.$$

D'après les définitions et propositions précédentes, on a la relation suivante.

Proposition A.60. Soit $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ un champ de vecteurs constant, soit \mathcal{P}_X son feuilletage minimal et \mathcal{R}_X son module de résonance. Alors on a

$$\mathcal{R}_X = \mathcal{R}_{\mathcal{P}_X}.$$

2.4.2 Moyennisations

Définition A.61. Soit f une fonction de \mathcal{M}_b dans \mathbb{C} et \mathcal{P} un feuilletage constant entier. On appelle **moyenne de f le long de \mathcal{P}** , la fonction $\text{moy}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\text{moy}(f, \mathcal{P})(x) = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_p f \circ \phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_p}^{t_p}(x),$$

où (X_1, \dots, X_p) est une base entière de \mathcal{P} . On notera parfois $\bar{f} = \text{moy}(f, \mathcal{P})$ la fonction moyennée. On notera $\langle f \rangle$ la moyenne sur tout le tore, i.e lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

On montre facilement que cette définition ne dépend pas de la base (X_1, \dots, X_p) choisie. La proposition suivante relie la série de Fourier d'une fonction à celle de sa moyenne.

¹⁰Voir par exemple [6], page 284.

Proposition A.62. Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ un feuilletage entier et $\mathcal{R} \subset \Lambda_b^*$ son module de résonance associé. Soit $f : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $\bar{f} = \text{moy}(f, \mathcal{P})$ sa moyenne le long de \mathcal{P} . Si on note \tilde{f} la série de Fourier de f et $\tilde{\bar{f}}$ la série de Fourier de \bar{f} , alors on a la propriété suivante

$$\tilde{\bar{f}}(k) = \begin{cases} \tilde{f}(k) & \text{si } k \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } k \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

En particulier, la série de Fourier de $\langle f \rangle$ est

$$\langle \tilde{f} \rangle(k) = \begin{cases} \tilde{f}(k) & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Démonstration. En effet, la série de Fourier de la fonction moyennée est par définition

$$\tilde{\bar{f}}(k) = \int_{\mathcal{M}_b} d\mu e^{-ik(x-x_0)} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_p f \circ \phi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \phi_{X_p}^{t_p}(x).$$

En intervertissant ensuite les intégrales et en utilisant le fait que $d\mu$ et \mathcal{M}_b sont invariants par l'action des flots $\phi_{X_j}^{t_j}$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{f}}(k) &= \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_p \int_{\mathcal{M}_b} d\mu e^{-ik(x-x_0)} e^{ik(\sum_j t_j X_j)} f \\ &= \tilde{f}(k) \int_0^1 dt_1 e^{it_1 k(X_1)} \dots \int_0^1 dt_p e^{it_p k(X_p)}. \end{aligned}$$

Chaque intégrale $\int_0^1 dt_1 e^{it_1 k(X_j)}$ donne 1 si $k(X_j) = 0$ et 0 sinon. De plus $k(X_j) = 0$ pour tout j est équivalent à $k \in \mathcal{R}$, si bien que

$$\tilde{\bar{f}}(k) = \begin{cases} \tilde{f}(k) & \text{si } k \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{si } k \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

■

Définition A.63. Si $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$ est un champ de vecteurs constant T -périodique et si $f : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, on définit \bar{f} , sa **moyenne le long du flot de X** , par

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \phi_X^t(x) dt.$$

Proposition A.64. Cette définition coïncide avec celle de la moyenne de f le long du feuilletage minimal de X qui est simplement la droite $\mathcal{P}_X = X \otimes \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, par définition si X est T -périodique, il s'écrit $X = \frac{1}{T}X_0$, où $X_0 \in \Lambda$ est primitif et génère le feuilletage minimal $\mathcal{P}_X = \mathbb{R} \otimes X_0$ de X . ■

3 Hamiltoniens non-dégénérés

Considérons un système complètement intégrable régulier $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$. Par définition, le hamiltonien est constant sur les fibres et s'écrit donc $H = F \circ \pi$, avec $F \in C^\infty(\mathcal{B})$. Comme on l'a vu, le champ de vecteurs X_H est vertical et constant sur chaque tore \mathcal{M}_b , engendrant ainsi une dynamique périodique, partiellement ergodique ou ergodique. Toutes les conditions de non-dégénérescence utilisées dans la littérature reviennent à demander que X_H "change" suffisamment d'un tore à l'autre.

Le prototype de l'hamiltonien dégénéré est donné en coordonnées angles-actions par $H = \sum \xi_j \beta_j$, où les β_j sont des constantes. Les composantes du champ de vecteurs hamiltonien associé $X_H = \sum_j \beta_j \partial_{x_j}$ sont indépendantes de ξ , ce qui veut dire que la dynamique sera la même sur tous les tores. On dit parfois que ce hamiltonien est isochrone.

Les conditions de non-dégénérescence sont demandées pour assurer que X_H "tourne" suffisamment d'un tore à l'autre, induisant une dynamique alternativement périodique, ergodique, etc... C'est ce type de condition qui est nécessaire pour le théorème K.A.M, de même que pour les résultats de type Nekhoroshev.

Les conditions de non-dégénérescence pour un hamiltonien complètement intégrable $H = F \circ \pi$ sont toutes des conditions ne faisant intervenir que la structure affine sur \mathcal{B} notée ∇ , et la fonction $F \in C^\infty(\mathcal{B})$.

Définition A.65. Les conditions de non-dégénérescence s'expriment à l'aide de $F'' = \nabla \nabla F \in \Gamma^{2,0}(\mathcal{B})$, le champ de tenseurs de type $(2, 0)$ appelé **hessienne** de F , qui est représenté en coordonnées plates¹¹ $\{\xi_j\}$ par la matrice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right)$. Ce tenseur est symétrique, grâce au fait que ∇ est sans torsion. En tout point $b \in \mathcal{B}$, F''_b peut être vu comme une application linéaire de $T_b \mathcal{B}$ dans $T_b^* \mathcal{B}$.

Les conditions de non-dégénérescence sont des conditions locales, en un point $b \in \mathcal{B}$. On dira que la fonction F est non-dégénérée si elle est non-dégénérée en tout point $b \in \mathcal{B}$. En chaque point b , ces conditions font usage de l'espace $\mathcal{V}_\nabla(\mathcal{O})$ des champs de vecteurs constants, où $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ est une boule voisinage du point b considéré. On utilisera cependant un léger abus de notation, pour ne pas avoir à introduire la boule \mathcal{O} à chaque fois. Quand on écrira " F est non-dégénérée si pour tout $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$..." il faudra comprendre " F est non-dégénérée si pour tout $b \in \mathcal{B}$, pour toute boule voisinage \mathcal{O} de b , et pour tout $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{O})$..."

Définition A.66. Pour tout champ de vecteurs constant $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$, on définit la fonction $\Omega_X \in C^\infty(\mathcal{B})$ par

$$\Omega_X = dF(X)$$

et la **surface de résonance** $\Sigma_X \subset \mathcal{B}$ par

$$\Sigma_X = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_X(b) = 0\}.$$

On utilisera le terme surface de résonance bien qu'il ne soit approprié que lorsque X est dans le réseau $\Gamma \subset \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$ des champs de vecteurs entiers¹².

On va tout d'abord donner une liste de conditions possibles, incluant les conditions historiques de Kolmogorov ([41]) et d'Arnold ([6]), de même que les conditions plus récentes de

¹¹Par exemple, les coordonnées actions d'un système de coordonnées angles-actions.

¹²Voir définition A.30.

Bryuno ([14]) et de Russmann ([59]), avec pour chacune une formulation intrinsèque et une formulation en coordonnées plates. En second lieu, on donnera les relations d'implication entre ces différentes conditions. Ensuite, on étudiera certaines propriétés qu'ont les hamiltoniens complètement intégrables, notamment en ce qui concerne les applications moments de ces hamiltoniens. Enfin, on donnera quelques exemples d'hamiltoniens vérifiant l'une ou l'autre des conditions de non-dégénérescence.

3.1 Différentes conditions possibles

On notera $\mathcal{K} = \bigcup_b \mathcal{K}_b$ la distribution d'hyperplans $\mathcal{K}_b \subset T_b\mathcal{B}$ tangents aux surfaces $F = cst$, i.e.

$$\mathcal{K}_b = \ker dF|_b.$$

On utilisera aussi la notation $X \sim Y$ pour dire que les vecteurs X et Y sont colinéaires.

Condition de Kolmogorov : il s'agit simplement de demander qu'en tout point b , la hessienne $F''_b : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$, vue comme application linéaire de $T_b\mathcal{B}$ dans $T_b^*\mathcal{B}$, soit inversible.

$$X \in T_b\mathcal{B} \text{ tq } \nabla_X \nabla F = 0 \implies X = 0,$$

où la 1-forme $\nabla_X \nabla F$ est la contraction de la hessienne $\nabla \nabla F$ par le champ de vecteurs X . En coordonnées plates, cette condition s'écrit :

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right) \neq 0.$$

Cela signifie aussi que l'application "fréquence"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ \xi_j & \rightarrow & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \end{array}$$

est un difféomorphisme local.

Condition iso-énergétique : on demande qu'en tout point b , la hessienne $F''|_{\mathcal{K}_b} : \mathcal{K}_b \rightarrow \mathcal{K}_b^*$, restreinte à \mathcal{K}_b (pour les deux entrées), soit inversible, i.e

$$X \in \mathcal{K}_b \text{ et } \nabla_X \nabla F \sim dF \implies X = 0.$$

En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ & & \ddots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \end{array} \right] \\ \left[\cdots \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \quad \cdots \right] & 0 \end{array} \right) \neq 0.$$

Condition de Bryuno : On demande qu'en tout point b , l'ensemble des vecteurs $X \in T_b\mathcal{B}$ vérifiant $\nabla_X \nabla F \sim dF$ soit de dimension 1 :

$$X, Y \in T_b\mathcal{B} \text{ tq } \nabla_X \nabla F \sim dF \text{ et } \nabla_Y \nabla F \sim dF \implies X \sim Y.$$

Cela est équivalent à demander que l'application \mathbf{U} , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : T_b\mathcal{B} \oplus \mathbb{R} &\rightarrow T_b^*\mathcal{B} \\ (X, \alpha) &\rightarrow \nabla_X \nabla F + \alpha \nabla F, \end{aligned}$$

soit de rang d (ait un noyau de dimension 1). En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\text{rang} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ & & \ddots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \end{array} \right] \end{array} \right) = d.$$

Condition "N" : on demande qu'en tout point b , la hessienne $F''|_{\mathcal{K}_b} : \mathcal{K}_b \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$, restreinte à \mathcal{K}_b (pour la première entrée), soit injective :

$$X \in \mathcal{K}_b, \nabla_X \nabla F = 0 \implies X = 0.$$

Cela est équivalent à demander que l'application \mathbf{V} , définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{V} : T_b\mathcal{B} &\rightarrow T_b^*\mathcal{B} \oplus \mathbb{R} \\ X &\rightarrow (\nabla_X \nabla F, \nabla_X F), \end{aligned}$$

soit de rang d (ait un noyau de dimension 0). En coordonnées plates, cela s'écrit :

$$\text{rang} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ & & \ddots \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_k} & \cdots \end{array} \right] \end{array} \right) = d.$$

Condition de fréquences tournantes : On définit l'application fréquence

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B} &\rightarrow T_b^*\mathcal{B} \cong \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \\ b &\rightarrow dF_b \end{aligned}$$

et on note $\pi : \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. On demande alors que l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ soit une submersion. Dans un système de coordonnées plates $\{\xi_j\}$, cela revient à demander que l'application

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi : \mathbb{R}^d &\rightarrow P(\mathbb{R}^d) \\ \xi &\rightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial \xi^j}(\xi) \right] \end{aligned}$$

soit une submersion.

Condition de fréquences tournantes iso-énergétique : On considère l'application fréquence $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ de la définition précédente. On demande que l'application φ restreinte

à toute couche d'énergie $S_E = \{b; F(b) = E\}$ soit un difféomorphisme local de S_E dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$.

Condition d'hypersurface régulière : on demande que pour tout champ de vecteurs constant non nul $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$ et tout point $b \in \Sigma_X$, on ait

$$d(\Omega_X)_b \neq 0.$$

Cela implique notamment que le sous-ensemble Σ_X est une sous-variété de codimension 1.

Condition de Rüssmann : On demande que pour tout champ de vecteurs constant non nul $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$, le sous-ensemble Σ_X soit d'intérieur nul. En coordonnées plates, on considère l'application φ définie dans la condition "fréquence tournante". On demande que pour tout point ξ_0 , l'image de φ ne soit pas inclus dans un hyperplan passant par $\varphi(\xi_0)$.

3.2 Conditions plus fortes et plus faibles...

On va démontrer d'abord que l'on a les équivalences suivantes.

$$\boxed{\text{Bryuno}} \iff \boxed{\text{Fréquences tournantes}} \iff \boxed{\text{N}} \iff \boxed{\text{Hypersurface régulière}}$$

Définition. En conséquence, on regroupera les quatre conditions équivalentes "Bryuno", "Fréquences tournantes", "N" et "Hypersurface régulière", sous le nom de **condition de non-dégénérescence au sens faible**.

On va montrer ensuite que

$$\boxed{\text{Iso-énergétique}} \iff \boxed{\text{Fréquences tournantes iso-énergétique}}$$

Enfin, on montrera que l'on a le diagramme suivant, pour les implications entre les différentes conditions.

$$\boxed{\text{Rüssmann}} \iff \boxed{\text{ND Faible}} \iff \boxed{\begin{array}{c} \text{Kolmogorov} \\ \text{ou} \\ \text{Iso-énergétique} \end{array}}$$

Lemme A.67. La condition "Bryuno" est équivalente à la condition "N".

Démonstration. Soient les applications $\mathbf{U} : T_b\mathcal{B} \oplus \mathbb{R} \rightarrow T_b^*\mathcal{B}$ et $\mathbf{V} : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$ définies dans les conditions "Bryuno" et "N". Soit le tenseur $T_{ij} = \nabla_i \nabla_j F$ (on utilise la notation en "indices abstraits" de Penrose [52]). On va montrer que $\mathbf{U}^t = \mathbf{V}$. En effet, la transposée $\mathbf{U}^t : T_b\mathcal{B} \rightarrow T_b^*\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$ vérifie, pour tout $X \in T_b\mathcal{B}$ et tout $(Y, \alpha) \in T_b\mathcal{B} \oplus \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^t(X)(Y, \alpha) &= \mathbf{U}(Y, \alpha)(X) \\ &= X^j Y^i T_{ij} + \alpha X^j \nabla_j F \\ &= Y^j X^i T_{ij} + \alpha X^j \nabla_j F, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de symétrie de la hessienne. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^t(X)(Y, \alpha) &= (X^i T_{ij}, X^j \nabla_j F)(Y, \alpha) \\ &= \mathbf{V}(X)(Y, \alpha). \end{aligned}$$

Cela implique que $\text{rang}(\mathbf{V}) = \text{rang}(\mathbf{U}^t) = \text{rang}(\mathbf{U})$ et donc que les deux conditions "N" et "Bryuno" sont équivalentes. ■

Lemme A.68. *La condition "Bryuno" est équivalente à la condition "Fréquences tournantes".*

Démonstration. Notons $dF_b^\nabla = \varphi(b)$. Par définition, c'est une forme constante qui coïncide avec dF au point b . La condition FT ("fréquence tournante") signifie que la dérivée $(\pi \circ \varphi)_*$ de l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$ est surjective. Étant donné que \mathcal{B} est de dimension N et $P(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$ de dimension $N-1$, la condition signifie que $(\pi \circ \varphi)_*$ a un noyau de dimension 1. Or le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ est l'espace des vecteurs X tels que $\varphi_*(X)$ soit dans le noyau de π_* , c'est à dire tangent aux fibres π^{-1} . En utilisant implicitement l'isomorphisme naturel entre l'espace vectoriel $\Omega_\nabla^1(\mathcal{B})$ et son tangent $T(\Omega_\nabla^1(\mathcal{B}))$, on voit que le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ est l'espace des X tels que pour tout point b , on ait $\varphi_*X_b \sim \varphi(b)$. La condition FT est donc équivalente à demander que si X_b et Y_b sont deux vecteurs tels que $\varphi_*X_b \sim \varphi(b)$ et $\varphi_*Y_b \sim \varphi(b)$, alors $X_b \sim Y_b$.

D'autre part, on va montrer que $\varphi_*X_b = \nabla_{X_b}\nabla F$. Soit une géodésique $t \rightarrow b(t)$, passant par b à l'instant $t = 0$, et de vecteur tangent X_b en b . Dans un voisinage de b , on peut étendre X_b de manière unique en un champ de vecteurs constant X , et on a notamment $\phi_X^t(b) = b(t)$. Il nous faut calculer $\varphi_*X_b = \frac{d}{dt}(\varphi(b(t)))_{t=0}$. Par définition, pour tout t , $\varphi(b(t))$ est une 1-forme constante coïncidant en $b(t)$ avec $dH_{b(t)}$. Elle est invariante par le flot de tout champ de vecteurs constant, notamment par celui de X , i.e $(\varphi(b(t)))_b = ((\phi_X^t)^*dH)_b$. En utilisant la définition de la dérivée de Lie, on voit que l'on a $\varphi_*X_b = (\mathcal{L}_X(dH))_b$. En utilisant la formule de Cartan, on obtient $\varphi_*X_b = d(dH(X))_b$. En utilisant enfin le fait que X est constant, on trouve finalement $\varphi_*X_b = (\nabla_X\nabla H)_b$. En reprenant le résultat du paragraphe précédent, on a donc prouvé que si X_b et X_b sont deux vecteurs tels que $(\nabla_{X_b}\nabla H)_b \sim dH_b$ et $(\nabla_{Y_b}\nabla H)_b \sim dH_b$, alors ils doivent être colinéaires, ce qui est la condition de non-dégénérescence de Bryuno. ■

Lemme A.69. *La condition "N" est équivalente à la condition "Hypersurface régulière".*

Démonstration. En effet, pour tout champ $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$, on a $\Omega_X = \nabla_X F$ et donc $d(\Omega_X) = \nabla\nabla_X F = \nabla_X\nabla F$. La condition "hypersurface régulière" se réécrit donc

$$\forall X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B}), \forall b \text{ tq } X \in \mathcal{K}_b \implies (\nabla_X\nabla F)_b \neq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall b, \forall X \in \mathcal{K}_b \implies (\nabla_X\nabla F)_b \neq 0,$$

ce qui est justement la condition "N". ■

Lemme A.70. *La condition "Iso-énergétique" implique la condition "Faible".*

Démonstration. La condition "iso-énergétique" signifie que pour tout $X \in \mathcal{K}_b$, la 1-forme $\nabla_X\nabla F|_{\mathcal{K}_b}$ est non nulle. Cette propriété reste vraie lorsque l'on retire la restriction à \mathcal{K}_b , i.e

$$X \in \mathcal{K}_b \implies \nabla_X\nabla F \neq 0,$$

ce qui est la condition "N". ■

Lemme A.71. *La condition "Kolmogorov" implique la condition "Faible".*

Démonstration. La condition "Kolmogorov" signifie que pour tout $X \in T_b\mathcal{B}$, on a $\nabla_X\nabla F \neq 0$. Par restriction, cela est aussi vrai pour tout $X \in \mathcal{K}_b$, ce qui est la condition "N". ■

Lemme A.72. *La condition "Faible" implique "Kolmogorov ou Iso-énergétique".*

Démonstration. On va montrer la contraposée, à savoir que si la condition "faible" est satisfaite mais pas la condition "Kolmogorov", alors la condition "Iso-énergétique" est satisfaite. Supposons donc qu'il existe un $X \in T_b\mathcal{B}$ tel que $\nabla_X \nabla F = 0$ en b . On étend X autour de b en un champ de vecteurs constant et par symétrie de la hessienne, on a $\nabla \nabla_X F = 0$ en b , c'est à dire $(d\Omega_X)_b = 0$. Si par ailleurs la condition "hypersurface régulière" est satisfaite, cela signifie que b ne peut pas être sur la surface Σ_X , i.e $X \notin \mathcal{K}_b$. D'autre part, la condition "Bryuno" nous assure que tout Y vérifiant $\nabla_X \nabla F \sim dF$ en b est forcément colinéaire à X , i.e $Y \sim X$. En résumé, pour tout $Y \in \mathcal{K}_b$ vérifiant $\nabla_Y \nabla F \sim dF$, on a $Y \sim X$ et donc $Y \notin \mathcal{K}_b$, ce qui fait que $Y = 0$. C'est exactement la condition "Iso-énergétique".

De même, avec un peu de logique booléenne, on trouve

$$\begin{aligned} \text{Faible et non-Iso-E} &\implies \text{Faible et (non-Faible ou Kolmogorov)} \\ &\implies \text{Kolmogorov} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemme A.73. *La condition "Iso-énergétique" est équivalente à la condition "Fréquences tournantes iso-énergétique".*

Démonstration. La condition "Fréquence tournante iso-énergétique" revient à demander qu'en tout point b , l'application $(\pi \circ \varphi)_*$ restreinte à une surface d'énergie S_E soit bijective de $T_b S_E$ dans $T_{\pi(\varphi(b))} P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, i.e que le noyau de $(\pi \circ \varphi)_*$ soit transverse à S_E . D'après ce qu'on a vu dans la démonstration du lemme A.68, cela revient à demander que si X_b est tel que $(\nabla_{X_b} \nabla H)_b \sim dH_b$, alors X_b doit être transverse à S_E , i.e $dH(X_b) \neq 0$, ce qui est la condition iso-énergétique. \blacksquare

Lemme A.74. *La condition "Faible" implique la condition "Rüssmann".*

Démonstration. En effet, la formulation "hypersurface régulière" de la condition "faible" implique que pour tout champ de vecteurs constant non nul $X \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$, le sous-ensemble Σ_X est une sous-variété de codimension 1, ce qui est bien d'intérieur nul. \blacksquare

3.3 Applications moments des hamiltoniens non-dégénérés

Proposition A.75. *Soit $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ un hamiltonien non-dégénéré au sens faible. Si $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{B})$ sont des champs de vecteurs constants linéairement indépendants, alors dans un voisinage de l'intersection $\bigcap_i \Sigma_{X_i}$ les différentielles $d\Omega_{X_j}$ sont linéairement indépendantes. Cela implique notamment que les sous-variétés Σ_{X_j} sont transverses.*

Démonstration. Tout d'abord, la formulation "hypersurface régulière" de la condition de non-dégénérescence faible implique que les sous-ensembles $\Sigma_{X_j} = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_{X_j}(b) = 0\}$ sont des sous-variétés de codimension 1. D'autre part, pour tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{k_i}$ et pour tout $j = 1..n$, on a $dF(X_j)_b = 0$. Pour tout n -uplet $\alpha \in \mathbb{R}^n$, on a donc $dF\left(\sum_j \alpha_j X_j\right)_b = 0$ et la formulation "N" de la condition de non-dégénérescence implique que

$$\left(\nabla_{\sum_j \alpha_j X_j} \nabla F\right)_b \neq 0$$

soit

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j \nabla_{X_j} \nabla F)_b \neq 0.$$

En utilisant la propriété de symétrie de la hessienne $\nabla\nabla F$ et le fait que les X_j sont constants, on a donc en tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{X_i}$:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j \nabla\nabla_{X_j} F)_b \neq 0$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j (d\Omega_{X_j})_b \neq 0,$$

ce qui implique que les différentielles des fonctions Ω_{X_j} sont indépendantes en tout point $b \in \bigcap_i \Sigma_{X_i}$ et donc que les surfaces Σ_{X_j} sont transverses. De plus, l'indépendance linéaire des $d\Omega_{X_j}$ étant une condition ouverte, cela reste vrai dans tout un voisinage de $\bigcap_i \Sigma_{X_i}$. ■

Lemme A.76. *Si $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénéré au sens de "Rüssmann", alors l'ensemble des tores, sur lesquels la dynamique est ergodique, est dense dans \mathcal{B} .*

Démonstration. Si b est un tore ergodique, cela signifie que dF_b n'a aucune relation de résonance, i.e b n'appartient à aucun des sous-ensembles $\Sigma_k = \{b; dF_b(k) = 0\}$, et donc que b appartient à $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{k \in E} \Sigma_k$. On va montrer que $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est dense dans \mathcal{B} , en montrant que $\bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est un ensemble d'intérieur vide. En effet, lorsque la fonction $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénérée au sens de Rüssmann, alors pour tout $k \neq 0$, le sous-ensemble Σ_k est d'intérieur nul. C'est de plus un ensemble fermé puisque que c'est l'image réciproque de $0 \in \mathbb{R}$ par l'application continue $dF(k) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Baire (voir par exemple [27]) qui nous assure que $\bigcup_{k \in E} \Sigma_k$ est un ensemble d'intérieur vide. ■

Lemme A.77. *Si $F \in C^\infty(\mathcal{B})$ est non-dégénéré au sens faible, alors :*

1. *L'ensemble des tores, sur lesquels la dynamique est périodique, est dense dans \mathcal{B} .*
2. *Pour tout $k \in \Gamma$, l'ensemble des tores appartenant à Σ_k et sur lesquels la dynamique est périodique, est dense dans Σ_k .*

Démonstration.

1. Utilisons la formulation "fréquences tournantes" de la condition faible. Si on définit l'application "fréquence"

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B} &\rightarrow T_b^* \mathcal{B} \cong \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \\ b &\rightarrow dF_b \end{aligned}$$

et si l'on note $\pi : \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}) \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, alors la condition de "fréquence tournante" signifie que l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ est une submersion. Une submersion étant toujours une application ouverte, l'image de \mathcal{B} par $\pi \circ \varphi$ est un ouvert de $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. Notons $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$ cet ouvert. D'autre part, l'ensemble $\mathcal{P}_{er} \subset \mathcal{B}$ des tores périodiques est par définition $\mathcal{P}_{er} = \{b \in \mathcal{B}; \varphi(b) \in \mathbb{R}E^*\}$, ou $E^* \subset \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ est le réseau des 1-formes constantes entières. Considérons $\pi(E^*) \subset P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$ l'image par π du réseau E^* . Dans un système de coordonnées plates entières, on a $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cong \mathbb{R}P^{d-1}$ et $\pi(E^*) \cong \mathbb{Z}P^{d-1}$. On voit que les tores périodiques sont donnés par $\mathcal{P}_{er} = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(\pi(E^*)))$. Par ailleurs, on vérifie facilement (par exemple en coordonnées plates entières) que $\pi(E^*)$ est dense dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. Cela reste

vrai par restriction à l'ouvert \mathcal{O} , i.e $\pi(E^*) \cap \mathcal{O}$ est dense dans $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{O}$. Enfin, l'application $\pi \circ \varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}$ étant une submersion, on peut montrer que cela implique que l'image réciproque d'un sous-ensemble dense dans \mathcal{O} est dense dans \mathcal{B} . On a donc que $(\pi \circ \varphi)^{-1}(\pi(E^*) \cap \mathcal{O})$ est dense dans $(\pi \circ \varphi)^{-1}(P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})) \cap \mathcal{O})$, i.e \mathcal{P}_{er} est dense dans \mathcal{B} .

2. Notons comme précédemment $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$ et $\mathcal{P}_{er} \subset \mathcal{B}$ l'ensemble des tores périodiques. Par définition, pour tout $k \in E$, Σ_k est donné par $\Sigma_k = \varphi^{-1}(k^\perp \cap \mathcal{O})$, où $k^\perp \subset \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ est l'hyperplan formé par les $\alpha \in \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$ tels que $\alpha(k) = 0$. De plus, k appartient au réseau E ce qui implique que $k^\perp \cap E^*$ est un sous-réseau de dimension $d-1$ de $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B})$, c'est à dire que $k^\perp \cap E^*$ est un réseau de k^\perp . Si on note $\pi' : k^\perp \rightarrow P(k^\perp)$ la projection dans le projectif, on a que $\pi'(k^\perp \cap E^*)$ est dense dans $P(k^\perp)$. D'autre part, $P(k^\perp)$ est naturellement isomorphe à $\pi(k^\perp) \subset P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$, où π est la projection dans le projectif $P(\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{B}))$. De même $\pi'(k^\perp \cap E^*)$ est naturellement isomorphe à $\pi(k^\perp \cap E^*)$, ce qui fait que $\pi(k^\perp \cap E^*)$ est dense dans $\pi(k^\perp)$. Cela reste vrai par restriction à l'ouvert $\mathcal{O} = \pi \circ \varphi(\mathcal{B})$, i.e $\pi(k^\perp \cap E^*) \cap \mathcal{O}$ est dense dans $\pi(k^\perp) \cap \mathcal{O}$. Enfin, par définition l'ensemble des tores périodiques appartenant à Σ_k est donné par $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k = \varphi^{-1}(\pi^{-1}(\pi(E^*)) \cap (k^\perp \cap \mathcal{O}))$, c'est à dire $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k = (\pi \circ \varphi)^{-1}(\pi(k^\perp \cap E^*) \cap \mathcal{O})$. On voit de même que $\Sigma_k = (\pi \circ \varphi)^{-1}(\pi(k^\perp) \cap \mathcal{O})$. Le fait que $\pi \circ \varphi$ est une submersion implique alors que $\mathcal{P}_{er} \cap \Sigma_k$ est dense dans Σ_k . ■

Proposition A.78. Soit $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ un hamiltonien C.I régulier non-dégénéré au sens de "Rüssmann". Alors l'espace des fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$ constantes le long des fibres est égal à l'espace des fonctions $C^\infty(\mathcal{M})$ qui Poisson-commutent avec H .

Démonstration. En effet, si A est une fonction telle que $\{H, A\} = 0$, alors elle est constante le long des trajectoires de X_H . Pour chaque tore \mathcal{M}_b sur lequel la dynamique de X_H est ergodique, cela implique que A est constante sur ce tore. De plus, la proposition A.76 nous assure que lorsque H est non-dégénéré au sens de "Rüssmann", alors l'ensemble des tores ergodiques est un sous-ensemble dense de \mathcal{B} . Par continuité par rapport à b , cela prouve que F est constant le long de toutes les fibres \mathcal{M}_b . Réciproquement, si F est constant le long des fibres, il est trivial de voir que $\{H, F\} = 0$ puisque X_H est vertical. ■

Proposition A.79. Soit $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ un hamiltonien C.I régulier non-dégénéré au sens de "Rüssmann". Alors si A et B sont deux fonctions, on a

$$\{A, H\} = \{B, H\} = 0 \Rightarrow \{A, B\} = 0.$$

Démonstration. En effet, si A et B commutent avec H , la proposition A.78 implique que A et B sont constantes le long des fibres, et elle commutent donc. ■

Proposition A.80. Si $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est un système C.I régulier non-dégénéré au sens de "Rüssmann" alors $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est l'unique fibration lagrangienne le long des fibres de laquelle H est constant.

Démonstration. En effet, si $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}'$ est une deuxième fibration telle que $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi'} \mathcal{B}')$ est CI régulier alors, en appliquant deux fois la proposition A.78, on voit que toute fonction F

constante sur les fibres π^{-1} est aussi constante sur les fibres $(\pi')^{-1}$, et vice versa, ce qui prouve que les deux fibrations sont les mêmes. ■

Si H est un hamiltonien CI non-dégénéré au sens de "Rüssmann", la proposition A.78 nous apprend que toute fonction $C^\infty(\mathcal{M})$ qui Poisson-commute avec H est constante le long des fibres, ce qui a pour conséquence que les applications moments ont la forme spéciale indiquée dans le lemme suivant.

Lemme A.81. *Si $(H, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ est un système CI régulier non-dégénéré au sens de "Rüssmann" et $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d)$ est une application moment de H , alors les A_j ont les propriétés suivantes :*

- Les fonctions A_j sont de la forme $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$.
- Les différentielles da_j sont linéairement indépendantes presque partout sur \mathcal{B} .
- Pour tout $b \in \mathcal{B}$ et tout $m \in \mathcal{M}_b$ on a

$$\text{corang}(m) = \dim \bigcap_{j=1}^d \ker (da_j)_b.$$

On peut aussi remarquer que dans la définition A.6 d'une application moment, la première condition (les fonctions A_j en involution) est automatiquement satisfaite si la deuxième (les fonctions A_j sont des constantes du mouvement) l'est, lorsque H est non-dégénéré au sens de "Rüssmann".

3.4 Exemples

Exemple A.82. Kolmogorov et iso-énergétique. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^d \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$, où l'on a noté $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^d (\xi_j)^2$. La différentielle est $dF = \sum_{j=1}^d \xi_j d\xi_j$ et la hessienne $F_{ij}(\xi) = \delta_{ij}$ est la matrice identité en tout point ξ . On a alors $\det(F_{ij}) = 1$ ce qui signifie que F satisfait à la condition de "Kolmogorov".

Par ailleurs, on peut montrer que

$$\det \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \ddots & & \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_k} & \\ & & \ddots \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ \vdots \end{array} \right] \\ \left[\cdots \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \quad \cdots \right] & 0 \end{array} \right) = -|\xi|^2,$$

ce qui est non nul en lorsque que $\xi \neq 0$, ce qui signifie que F satisfait à la condition "iso-énergétique".

Exemple A.83. Iso-énergétique mais pas Kolmogorov. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^d \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = |\xi|$. La différentielle est $dF = \frac{\sum_{j=1}^d \xi_j d\xi_j}{|\xi|}$ et la hessienne est $F_{ij}(\xi) = \frac{\delta_{ij}}{|\xi|} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^3}$. On va voir que la condition "Kolmogorov" n'est pas satisfaite puisque, en tout point ξ , le vecteur $X_j = \xi_j$ vérifie $\nabla_X \nabla F = 0$. En effet, en coordonnées on a pour tout i

$$\sum_j F_{ij} X_j = \frac{\xi_i}{|\xi|} - \frac{\xi_i |\xi|^2}{|\xi|^3} = 0.$$

Par contre, la condition "iso-énergétique" est satisfaite puisque si un vecteur X vérifie $\nabla_X \nabla F \sim \nabla F$ et $\nabla_X F = 0$, cela signifie que l'on a

$$\begin{cases} X_i - \sum_j \frac{\xi_i \xi_j X_j}{|\xi|^2} = \lambda \xi_i \\ \sum_j X_j \xi_j = 0 \end{cases} .$$

En insérant la deuxième équation dans la première, on doit avoir

$$\begin{cases} X_i = \lambda \xi_i \\ \sum_j X_j \xi_j = 0 \end{cases} ,$$

ce qui n'est possible qu'en $\xi = 0$, qui n'appartient pas à \mathcal{B} .

Exemple A.84. Kolmogorov mais pas iso-énergétique. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, considérons la fonction $F(\xi) = \frac{\xi_1^3}{3} + \frac{\xi_2^2}{2}$. La différentielle est $dF = \xi_1^2 d\xi_1 + \xi_2 d\xi_2$ et la hessienne est $F''(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant est donc simplement $\det(F'') = 2\xi_1$ ce qui non-nul sur \mathcal{B} . La condition de Kolmogorov est donc satisfaite. Par contre, on vérifie facilement que l'on a

$$\det \begin{pmatrix} 2\xi_1 & 0 & \xi_1^2 \\ 0 & 1 & \xi_2 \\ \xi_1^2 & \xi_2 & 0 \end{pmatrix} = -\xi_1^4 - 2\xi_1 \xi_2^2 = -\xi_1 (\xi_1^3 + 2\xi_2^2) .$$

En dehors de $\xi_1 = 0$, ce déterminant est nul en tout point de la courbe d'équation $\xi_1^3 + 2\xi_2^2 = 0$, ce qui fait que la condition iso-énergétique n'est pas satisfaite sur cette courbe.

Exemple A.85. Rüssmann mais pas faible. Sur $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2 \setminus 0$, considérons la fonction $F(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4$. La différentielle est $dF = 4\xi_1^3 d\xi_1 + 4\xi_2^3 d\xi_2$, ce qui fait que pour tout X , on a $\Omega_X = dF(X) = 4\xi_1^3 X_1 + 4\xi_2^3 X_2$. Le sous-ensemble $\Sigma_X = \{(\xi_1, \xi_2); \xi_1^3 X_1 + \xi_2^3 X_2 = 0\}$ est simplement une droite passant par l'origine et de pente $-\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\frac{1}{3}}$, privée de l'origine. C'est un ensemble d'intérieur nul, ce qui fait que la condition de Rüssmann est satisfaite. Par ailleurs, la différentielle de Ω_X est $d\Omega_X = 12(\xi_1^2 X_1 d\xi_1 + \xi_2^2 X_2 d\xi_2)$. On va voir que pour certains X , cette fonction est nulle en des points de la surface Σ_X , ce qui fait que la condition "faible" n'est pas satisfaite. Par exemple, pour $X = (X_1, 0)$, la surface Σ_X est l'axe verticale $\{(0, \xi_2); \xi_2 \neq 0\}$ privé de l'origine. Or, en tout point de cette surface, on a $d\Omega_X = 0$.

3.5 Remarques finales : Liouville vs Duistermaat

Lorsqu'on que l'on parle de systèmes hamiltoniens complètement intégrables réguliers, on a à sa disposition en gros deux formulations : celle en terme d'application moment, appelons-la *formulation Liouville*, et celle en terme de fibration lagrangienne en tores, appelons-la *formulation Duistermaat*. Chacune à ses points forts et ses points faibles, et bien qu'il y ait de nombreuses relations entre elles, elles ne sont pas équivalente au sens strict du terme.

La formulation Liouville, historiquement la première, est souvent la plus maniable du point de vue pratique dans des cas concrets. La plupart du temps, le système est donné en coordonnées canoniques, le hamiltonien est une fonction *raisonnable* de ces coordonnées et la

recherche d'intégrales premières est un *jeu* assez algébrique, certes parfois fastidieux, mais au terme duquel on tombe parfois sur des constantes du mouvement s'écrivant de manière *relativement raisonnable* en fonction des coordonnées canoniques.

Les applications moments ont par contre le désagréable inconvénient de ne pas être uniques. La non-unicité des applications moments ne doit cependant pas nous déprimer, les images réciproques des valeurs régulières de l'application moment sont des sous-variétés lagrangiennes, et sont même des tores lorsque l'application moment est propre. L'ensemble formé par ces tores définit une fibration lagrangienne en tores, c'est à dire l'objet géométrique de formulation Duistermaat.

Cette dernière formulation paraît plus adaptée pour ce qui est de comprendre les structures géométriques sous-jacentes que sont les connexions affines sur les fibres et sur l'espace de base de la fibration, la classe de Chern et la monodromie, ainsi que le fibré en groupe torique.

Le passage de la première à la seconde de ces formulations n'est cependant clair que dans le cas où l'hamiltonien est non-dégénéré, puisque cette propriété implique¹³ que la fibration est unique. Pour tout point m , on peut trouver une application moment A telle que m appartient à une image réciproque $F = A^{-1}(a)$ d'une valeur régulière $a \in \mathbb{R}^d$ de A . Cette application moment sera régulière dans tout un voisinage de la fibre F et les images réciproques des valeurs voisines de a forment une fibration lagrangienne en tores, autour de F . Le recollement peut se faire alors grâce à la condition de non-dégénérescence.

Cependant, lorsque l'on n'a pas de condition de dégénérescence, il se peut que localement, il existe plusieurs applications moments dont les images réciproques ne définissent pas la même fibration. Dans ces conditions, il n'est alors pas clair que l'on ait l'existence globale d'une fibration en tores lagrangiens. On ne peut donc *a priori* pas considérer que la formulation Duistermaat soit plus générale que la formulation Liouville. Je dis *a priori* car, à ma connaissance, cette question n'est pas abordée dans la littérature, mais mériterait qu'on s'y attarde.

D'autre part, la condition de non-dégénérescence, qui joue un rôle central dans beaucoup de problème, s'exprime en terme de la hessienne $\nabla\nabla H$, où ∇ est la connexion affine sur l'espace de base de la fibration en tores. Pour déterminer si un hamiltonien est non-dégénéré ou non, on doit auparavant construire la fibration en tores ou, de manière équivalente, trouver un système de coordonnées angles-actions. Malheureusement, ceci est en général plus difficile que de trouver des applications moments, les tores étant définis par les équations implicites $\{m; A(m) = a \in \mathbb{R}^d\}$. De plus, bien que la connexion affine de Weinstein sur chacune des fibres soit facile à exprimer sans avoir la fibration en tores, cela n'est pas le cas pour la connexion de Duistermaat sur la base. En effet, la première est définie localement, sans aucune référence au fait que les fibres sont des tores, et une base des champs de vecteurs constants est donné localement par les champs de vecteurs X_{A_j} associés aux constantes du mouvements A_j . Par contre, la connexion de Duistermaat est basée sur le fait que les fibres sont des tores. Il ne suffit donc pas d'avoir l'espace tangent aux fibres, i.e le feuilletage lagrangien engendré par les X_{A_j} , il faut avoir les fibres globalement.

Il ne semble pas y avoir à ma connaissance de moyen simple d'exprimer la connexion sur la base à partir de l'application moment. Ce serait pourtant bien pratique de pouvoir décider si un hamiltonien est dégénéré ou non¹⁴, ou de calculer la monodromie, uniquement à partir

¹³Proposition A.80.

¹⁴Il faut noter que dans les systèmes singuliers, la présence d'une singularité a une influence sur la propriété

d'une application moment.

de non-dégénérescence dans la région régulière proche de la singularité ([30, 51]).

Chapitre B

Déformations de systèmes hamiltoniens complètement intégrables

Dans ce chapitre, on considère un système complètement intégrable régulier comme défini dans le chapitre précédent, c'est à dire la donnée d'une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ en tores et d'un hamiltonien $H_0 \in C^\infty(\mathcal{M})$ constant sur ses fibres. On considère ensuite des hamiltoniens perturbés H_ε , c'est à dire des familles d'hamiltoniens $\varepsilon \rightarrow H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ dépendant de manière C^∞ du paramètre de perturbation ε et telles que $H_\varepsilon \rightarrow H_0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On sait, depuis Poincaré, qu'en général le hamiltonien H_ε perd son caractère *complètement intégrable* dès que $\varepsilon \neq 0$. Beaucoup de travaux, reliés au fameux théorème KAM¹, sont consacrés cependant à l'étude des structures du système complètement intégrable qui sont conservées après l'ajout de la perturbation ; ce sont les tores sur lesquelles la dynamique de X_{H_0} vérifie une certaine condition diophantienne. Le théorème prédit que lorsque ε est assez petit, ces tores sont seulement déformés alors que les autres sont détruits, laissant place petit à petit (à mesure que ε augmente) au non moins fameux *chaos*.

Les hamiltoniens complètement intégrables ne forment qu'un tout petit sous-ensemble de l'ensemble des hamiltoniens, mais on peut néanmoins se demander quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable. On parlera alors de **déformation** pour désigner une perturbation qui reste complètement intégrable.

C'est en fait une question à deux volets puisque un système CI est soit régulier, soit singulier. Il est alors naturel, lorsque l'on se donne un système CI régulier, de se poser les deux questions suivantes :

- Quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable **régulier** ?
- Quelles sont les perturbations qui laissent le système complètement intégrable, mais en le rendant **singulier** ?

Ce sont ces deux questions qui font l'objet des deux sections principales de ce chapitre : les déformations régulières et les déformations singulières d'un système complètement intégrable régulier.

¹KAM vaut pour pour Kolmogorov ([41]), Arnol'd ([2]) et Moser ([47]). Ces travaux initiateurs ont donné lieu à tout un tas de "*théorèmes de type KAM*". On peut consulter par exemple les livres [43] et [15], et l'article [54].

1 Déformations régulières

Considérons une variété symplectique \mathcal{M} de dimension $2d$ et un système complètement intégrable défini par une fibration lagrangienne $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{B}$ en tores et un hamiltonien $H_0 \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ constant sur ses fibres. Comment peut-on déformer² ce hamiltonien, i.e quelles familles $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ dépendant de manière C^∞ de ε auront la propriété que pour tout ε , H_ε est complètement intégrable régulier ?

1. On voit par exemple qu'une famille quelconque de fonctions constantes le long des fibres $H_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$, avec $H_\varepsilon \rightarrow H_0$, est une déformation de H_0 puisque pour tout ε le hamiltonien H_ε est complètement intégrable régulier avec pour fibration lagrangienne, la fibration initiale $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_0} \mathcal{B}$.
2. On peut aussi choisir une famille de symplectomorphismes ϕ^ε de \mathcal{M} dépendant de manière C^∞ de ε et définir H_ε par $H_\varepsilon = H_0 \circ \phi^\varepsilon$. C'est encore une déformation mais cette fois-ci, H_ε est constant le long d'une fibration lagrangienne en tores $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$ qui bouge avec ε . Elle est donnée par $\pi_\varepsilon = \pi_0 \circ \phi^\varepsilon$, i.e les fibres de π_ε sont les images par $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ des fibres de π_0 .
3. On peut combiner ces deux exemples en définissant H_ε par $H_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi^\varepsilon$, où ϕ^ε est une famille de symplectomorphismes et $I_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ est une famille de fonctions constantes le long de la fibration initiale.

Dans les trois exemples ci-dessus, on a une famille de fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$ au dessus d'un espace de base \mathcal{B} fixé et qui dépend de manière C^∞ de ε . De plus, la fibration déformée est obtenue par application d'une famille de symplectomorphismes à la fibration initiale. Il n'est pas a priori évident que ce soit toujours le cas. En effet, par définition H_ε est une déformation régulière de H_0 si pour tout ε il existe une variété \mathcal{B}_ε et une fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}_\varepsilon$ telles que H_ε est constant le long des fibres.

- Tout d'abord, il n'est pas clair que les variétés \mathcal{B}_ε soient toutes difféomorphes à une même variété \mathcal{B} .
- D'autre part, quand bien même ce serait le cas, il n'est pas sûr que la famille de fibrations $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$ dépende de manière C^∞ de ε (dans le sens où l'application $\pi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ définie par $\pi(\varepsilon, m) = (\varepsilon, \pi_\varepsilon(m))$ est C^∞), notamment par exemple dans certains cas d'hamiltoniens dégénérés (e.g super-intégrables) où la fibration lagrangienne n'est pas unique. On pourrait dans ce cas choisir artificiellement la famille de fibrations $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$ de telle sorte qu'elle ne soit même pas continue par rapport à ε .
- Inversement, même en supposant que l'on a une famille $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}_\varepsilon$ dépendant de manière C^∞ de ε (dans le sens où la famille des feuilletages lagrangiens définis par les espaces tangents aux fibres de π_ε est C^∞ par rapport à ε), il n'est pas assuré que l'on puisse identifier les différentes \mathcal{B}_ε "de manière C^∞ ", i.e trouver une famille de difféomorphismes $\varphi_\varepsilon : \mathcal{B}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{B}$, C^∞ par rapport à ε et telles que $\pi_\varepsilon \circ \varphi_\varepsilon = \pi$ pour tout ε . On connaît en effet des exemples³ de familles de feuilletages qui dépendent de manière C^∞ de ε et qui définissent une fibration pour tout ε , mais dont la famille de fibration n'est pas C^∞ par rapport à ε .

²Dans toute cette section 1, *déformation* signifie *déformation régulière*.

³Voir par exemple l'article [63].

- Enfin, à supposer que l'on ait une famille de fibrations $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$, avec le même espace de base \mathcal{B} et C^∞ par rapport à ε , cela n'implique pas qu'il existe une famille de symplectomorphismes qui envoie la fibration initiale sur la fibration déformée.

Ceci étant dit, nous faisons la conjecture que lorsque le hamiltonien H_0 est non-dégénéré, alors les "pathologies" sus-citées n'apparaissent pas et les déformations possibles sont données par le troisième exemple décrit plus haut. En tout cas, nous allons prendre cet exemple comme définition des déformations. Si la conjecture est vraie, alors on n'a rien oublié. Si elle est fautive, il faudra étudier des déformations plus "exotiques" où la fibration déformée ne dépend pas de manière C^∞ du paramètre de déformation ε , alors que la famille de hamiltoniens H_ε est C^∞ par rapport à ε .

Définition B.1. Pour éviter de répéter la phrase "une famille de [...] dépendant de manière C^∞ de ε ", on dira "une ε -famille de [...]".

Définition B.2. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système complètement intégrable régulier non-dégénéré au sens "faible" et soit $\varepsilon \mapsto H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ une ε -famille d'hamiltoniens telles que $H_{\varepsilon=0} = H_0$. On dira que H_ε est une **déformation régulière** de H_0 , s'il existe une ε -famille de fonctions $I_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et une ε -famille de symplectomorphismes ϕ^ε de \mathcal{M} telles que

$$H_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi^\varepsilon$$

pour tout ε .

1.1 Déformations globalement hamiltoniennes

Le but de cette section est de montrer⁴ que si H_ε est une déformation régulière, au sens de la définition B.2, d'un hamiltonien H_0 Creg non-dégénéré alors on peut choisir la ε -famille de symplectomorphismes ϕ^ε telle que son champ de vecteurs associé soit globalement hamiltonien. Avant d'énoncer ce résultat, on doit rappeler quelques faits concernant les champs de vecteurs dépendant du temps, qu'on appelle aussi parfois champs de vecteurs non-autonomes. On a affaire à ces objets dès que l'on compose deux flots ϕ_X^ε et ϕ_Y^ε , puisque $\phi_X^\varepsilon \circ \phi_Y^\varepsilon$ n'est en général pas le flot d'un champ de vecteurs. Par contre, c'est le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps.

1.1.1 Champs de vecteurs dépendant du temps

On rappelle ici quelques résultats concernant les champs de vecteurs dépendant du temps. On peut aussi se référer au livre [44] qui contient quelques informations à ce sujet.

Définition B.3. Pour toute ε -famille de difféomorphismes $\phi^\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, avec $\phi^0 = \mathbb{I}$, on définit son **champ de vecteurs associé** X_ε par

$$\forall f \in C^\infty(\mathcal{M}) \Rightarrow \frac{d(f \circ \phi^\varepsilon(m))}{d\varepsilon} = X_\varepsilon(f) \circ \phi^\varepsilon(m).$$

Ce champ de vecteurs est dit **non-autonome** ou **dépendant du temps**.

Réciproquement, si X_ε est un champ de vecteurs non-autonome, on note $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ son **flot** au temps ε , i.e la solution de l'équation différentielle précédente. On dira que X_ε est un **ε -champ de vecteurs** et $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ un **ε -flot**.

⁴Théorème B.14

Le fait que X_ε est non-autonome empêche $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ d'être un groupe à un paramètre de diffeomorphismes. On a notamment $(\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon)_*(X_\varepsilon) \neq X_\varepsilon$ en général.

Les règles de calcul différentiel sont légèrement différentes lorsqu'on manipule des champs de vecteurs non-autonomes. On donne dans les propositions suivantes les quelques propriétés qu'on utilisera ensuite.

Proposition B.4. Soit Y_ε et Z_ε deux ε -champs de vecteurs et soit ϕ^ε la famille de diffeomorphismes définie par

$$\phi^\varepsilon = \phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon \circ \phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon.$$

Alors, le ε -champ de vecteurs X_ε associé à ϕ_ε est donné par

$$X_\varepsilon = Y_\varepsilon + (\phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon)_*(Z_\varepsilon).$$

Démonstration. En effet, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ et tout point m , le ε -champ de vecteurs X_ε est défini par

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(f) \circ \phi_\varepsilon(m) &= \frac{d}{d\varepsilon} (f \circ \phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon \circ \phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon(m)) \\ &= Y_\varepsilon(f) \circ \phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon(\phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon(m)) + Z_\varepsilon(f \circ \phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon) \circ \phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon(m) \\ &= Y_\varepsilon(f) \circ \phi_\varepsilon(m) + ((\phi_{Y_\varepsilon}^\varepsilon)_* Z_\varepsilon)(f) \circ \phi_\varepsilon(m). \end{aligned}$$

■

Proposition B.5. Si ϕ^ε est une ε -famille de diffeomorphismes dont le ε -champ de vecteurs associé est X_ε , alors le ε -champ de vecteurs associé à la famille de diffeomorphismes inverses $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ est $-(\phi^\varepsilon)_*^{-1}(X_\varepsilon)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour $\mathbb{I} = \phi^\varepsilon \circ (\phi^\varepsilon)^{-1}$. ■

Proposition B.6. Soit ϕ^ε le ε -flot d'un ε -champ de vecteurs X_ε . Pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y) = [\phi_*^\varepsilon Y, X_\varepsilon],$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie standard, à ε fixé.

Démonstration. En effet, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y)(f) &= \frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon(Y)(f)) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left((Y(f \circ \phi^\varepsilon)) \circ (\phi^\varepsilon)^{-1} \right) \\ &= (Y(X_\varepsilon(f) \circ \phi^\varepsilon)) \circ (\phi^\varepsilon)^{-1} - (\phi^\varepsilon)_*^{-1}(X_\varepsilon)(Y(f \circ \phi^\varepsilon)) \circ (\phi^\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition B.5 dans la dernière ligne. En continuant sagement le calcul, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y)(f) &= (\phi_*^\varepsilon Y)(X_\varepsilon(f)) \circ \phi^\varepsilon \circ (\phi^\varepsilon)^{-1} - \left((\phi^\varepsilon)_*^{-1} X_\varepsilon \right) \left((Y(f \circ \phi^\varepsilon)) \circ (\phi^\varepsilon)^{-1} \right) \\ &= (\phi_*^\varepsilon Y)(X_\varepsilon(f)) - X_\varepsilon((\phi_*^\varepsilon Y)(f)) \\ &= [\phi_*^\varepsilon Y, X_\varepsilon](f). \end{aligned}$$

■

Proposition B.7. Soit ϕ^ε le ε -flot d'un ε -champ de vecteurs X_ε . Pour toute p -forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$ on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} ((\phi^\varepsilon)^* \alpha) = (\phi^\varepsilon)^* (\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \alpha),$$

où $\mathcal{L}_{X_\varepsilon}$ est la dérivée de Lie standard, à ε fixé.

Démonstration. En effet, pour tous champs de vecteurs $Y_1, \dots, Y_p \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{X_\varepsilon} (\alpha (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p))] \circ \phi^\varepsilon &= [(\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \alpha) (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p)] \circ \phi^\varepsilon \\ &+ \sum_{j=1}^p [\alpha (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \mathcal{L}_{X_\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y_j), \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p)] \circ \phi^\varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de X_ε , on a aussi

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{X_\varepsilon} (\alpha (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p))] \circ \phi^\varepsilon &= \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p) \circ \phi^\varepsilon) \\ &- \sum_{j=1}^p \left[\alpha \left(\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y_j), \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p \right) \right] \circ \phi^\varepsilon. \end{aligned}$$

D'après la proposition B.6, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y) = [\phi_*^\varepsilon Y, X_\varepsilon] = -\mathcal{L}_{X_\varepsilon} (\phi_*^\varepsilon Y),$$

si bien qu'en identifiant les deux expressions et en simplifiant ce qui doit se simplifier, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} (\alpha (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p) \circ \phi^\varepsilon) &= [(\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \alpha) (\phi_*^\varepsilon Y_1, \dots, \phi_*^\varepsilon Y_p)] \circ \phi^\varepsilon \\ \left(\frac{d}{d\varepsilon} (\phi^\varepsilon)^* \alpha \right) (Y_1, \dots, Y_p) &= ((\phi^\varepsilon)^* (\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \alpha)) (Y_1, \dots, Y_p), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. ■

Proposition B.8. Soit \mathcal{M} une variété symplectique. Soit $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ le ε -flot d'un ε -champ de vecteurs X_ε sur une variété symplectique. X_ε est symplectique pour tout ε si et seulement si $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ est un symplectomorphisme pour tout ε .

Démonstration. Notons $\phi^\varepsilon = \phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ le ε -flot de X_ε . Tout d'abord, ϕ^ε est symplectique pour tout ε , i.e $(\phi^\varepsilon)^* \omega = \omega$, si et seulement si $\frac{d}{d\varepsilon} ((\phi^\varepsilon)^* \omega) = 0$, puisque $\phi^{\varepsilon=0} = \mathbb{I}$. D'autre part, d'après la proposition B.7, cela est équivalent à demander que $(\phi^\varepsilon)^* (\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \omega) = 0$ pour tout ε , c'est à dire que $\mathcal{L}_{X_\varepsilon} \omega = 0$ pour tout ε , et donc que X_ε est symplectique pour tout ε . ■

1.1.2 Théorème de déformation globalement hamiltonienne

Définition B.9. Une ε -famille de symplectomorphismes ϕ^ε est dite **(globalement) hamiltonienne** si son champ de vecteurs associé X_ε est globalement hamiltonien pour tout ε , i.e s'il existe une ε -famille de fonctions $A_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ telle que

$$X_\varepsilon = \{A_\varepsilon, \cdot\}$$

pour tout ε .

Définition B.10. On dit qu'une ε -famille de difféomorphismes $\phi^\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ **préserve la fibration** s'il existe une ε -famille de difféomorphismes de la base $\varphi^\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que

$$\pi \circ \phi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \circ \pi.$$

On dit que ϕ^ε est **vertical** lorsque $\varphi^\varepsilon = \mathbb{I}$.

Proposition B.11. Soit ϕ^ε une ε -flot d'une ε -famille de champs de vecteurs X_ε . Alors ϕ^ε préserve la fibration si et seulement si X_ε est un relevé d'un ε -champ de vecteurs sur \mathcal{B} , i.e $X_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon$ avec $Y_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$. Dans ce cas, on a

$$\pi \circ \phi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \circ \pi,$$

où φ^ε est le ε -flot de Y_ε .

Démonstration.

- Supposons que $X_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon$ est un relevé de Y_ε . On montre d'abord que ϕ^ε transforme les vecteurs verticaux en des vecteurs verticaux. En effet, pour tout champ de vecteurs $Z \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$, on a $\frac{d}{d\varepsilon}(\phi^\varepsilon_*(Z)) = [\phi^\varepsilon_*(Z), \tilde{Y}_\varepsilon]$. D'autre part, \tilde{Y}_ε étant un relevé, si $\phi^\varepsilon_*(Z)$ est vertical, alors $[\phi^\varepsilon_*(Z), \tilde{Y}_\varepsilon]$ est vertical d'après la proposition A.14, et donc $\frac{d}{d\varepsilon}(\phi^\varepsilon_*(Z))$ aussi. Cela fait que l'on peut restreindre l'équation à l'espace des champs de vecteurs verticaux. Ainsi, si Z est vertical, alors $\phi^\varepsilon_*(Z)$ restera vertical pour tout ε . Cela signifie que ϕ^ε préserve la fibration et qu'il existe donc une ε -famille de difféomorphismes $\varphi^\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que $\pi \circ \phi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \circ \pi$.

On montre ensuite que le champ de vecteurs associé à φ^ε est justement Y_ε . En effet, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, pour tout point $b \in \mathcal{B}$, et tout point $m \in \pi^{-1}(b)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}(f \circ \varphi^\varepsilon(b)) &= \frac{d}{d\varepsilon}(f \circ \pi \circ \phi^\varepsilon(m)) \\ &= \tilde{Y}_\varepsilon(f \circ \pi) \circ \phi^\varepsilon(m). \end{aligned}$$

Le fait que \tilde{Y}_ε soit le relevé de Y_ε , implique que $\tilde{Y}_\varepsilon(f \circ \pi) = Y_\varepsilon(f) \circ \pi$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}(f \circ \varphi^\varepsilon(b)) &= Y_\varepsilon(f) \circ \pi \circ \phi^\varepsilon(m) \\ &= Y_\varepsilon(f) \circ \varphi^\varepsilon(b), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que Y_ε est le champ de vecteurs associé à φ^ε .

- Réciproquement, supposons que ϕ^ε préserve la fibration, i.e qu'il vérifie $\pi \circ \phi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \circ \pi$, où $\varphi^\varepsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est une ε -famille de difféomorphismes. Notons Y_ε le ε -champ de vecteurs associé à φ^ε et montrons que X_ε est un relevé de Y_ε . Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{B})$ et tout point $m \in \mathcal{M}$, on a

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(f \circ \pi) \circ \phi^\varepsilon(m) &= \frac{d}{d\varepsilon}(f \circ \pi \circ \phi^\varepsilon(m)) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}(f \circ \varphi^\varepsilon \circ \pi(m)) \\ &= Y_\varepsilon(f) \circ \pi \circ \phi^\varepsilon(m). \end{aligned}$$

Cela signifie que pour tout $m' \in \mathcal{M}$, on a $X_\varepsilon(f \circ \pi)_{m'} = Y_\varepsilon(f)_{\pi(m')}$, ce qui montre bien que X_ε est un relevé de Y_ε .

■

Proposition B.12. *Si $\tilde{Y}_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ est une ε -famille de champs de vecteurs symplectiques relevés d'une ε -famille $Y_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$, alors $\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon$ commute pour tout ε avec l'action torique de \mathcal{G} et pour tout champ de tenseurs $T \in \Gamma^{p,q}(\mathcal{M})$ on a*

$$\left\langle \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_* T \right\rangle = \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_* \langle T \rangle.$$

Démonstration. Notons $\phi^\varepsilon = \phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon$ le ε -flot de \tilde{Y}_ε . D'après la proposition précédente, ϕ^ε préserve la fibration et vérifie $\pi \circ \phi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \circ \pi$, où φ^ε est une ε -famille de difféomorphismes de \mathcal{B} .

- Tout d'abord, pour tout champ de vecteurs vertical et constant $X \in \Gamma(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b))$, on a $\phi_*^\varepsilon X \in \Gamma(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b))$. En effet, d'après la proposition A.16, $\phi_*^\varepsilon X$ est vertical et constant si et seulement si la 1-forme associée $\omega(\phi_*^\varepsilon X)$ est un pull-back. Or, on a $\omega(\phi_*^\varepsilon X) = \left((\phi^\varepsilon)^{-1} \right)^* (\omega(X))$ puisque ϕ^ε est symplectique. D'autre part, $\omega(X) = \pi^* \beta$ avec $\beta \in \Omega^1(\mathcal{B})$, puisque X est par hypothèse vertical et constant, ce qui fait que

$$\begin{aligned} \omega(\phi_*^\varepsilon X) &= \left((\phi^\varepsilon)^{-1} \right)^* \pi^* \beta \\ &= \pi^* \left((\varphi^\varepsilon)^{-1} \right)^* \beta. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\omega(\phi_*^\varepsilon X)$ est un pull-back et donc que $\phi_*^\varepsilon X$ est une section de $\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b)$.

- Si X est de plus 1-périodique dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, i.e $X \in \Gamma(\mathcal{O}, \Lambda)$, alors $\phi_*^\varepsilon X$ aussi dans $\phi^\varepsilon(\pi^{-1}(\mathcal{O}))$. Étant donné que Λ est un fibré à fibres discrètes et que $\phi_*^\varepsilon X$ dépend continuellement de ε , cela implique que pour tout ε , $\phi_*^\varepsilon X = \phi_*^{\varepsilon=0} X$, soit $\phi_*^\varepsilon X = X$. C'est donc aussi vrai pour tout $X \in \Gamma(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b))$.
- Pour tout $X \in \Gamma(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{M}_b))$ et tout ε , ϕ^ε commute donc avec le flot ϕ_X^t , ce qui implique notamment qu'il commute avec l'action torique de \mathcal{G} . D'après la définition A.45 de la \mathcal{G} -moyenne, on voit facilement que l'on a

$$\left\langle \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_* T \right\rangle = \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_* \langle T \rangle$$

pour tout champ de tenseurs T .

■

Lemme B.13. *Soit X_ε une ε -famille de champs de vecteurs symplectiques et $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ son ε -flot. Alors $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon$ se décompose de manière unique en*

$$\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon = \Phi^\varepsilon \circ \phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon,$$

avec

- Φ^ε est une ε -famille de symplectomorphismes préservant la fibration.
- $Z_\varepsilon = \{G_\varepsilon, \cdot\}$ est une ε -famille de champs de vecteurs globalement hamiltoniens avec $\langle G_\varepsilon \rangle = 0$.

De plus, le ε -champ de vecteurs associé à Φ^ε est $\langle X_\varepsilon \rangle$.

Démonstration. En effet, d'après le théorème A.52, pour chaque ε le champ de vecteurs X_ε se décompose en $X_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon + W_\varepsilon$, où \tilde{Y}_ε est le relevé d'un champ de vecteurs $Y_\varepsilon \in \mathcal{V}(\mathcal{B})$ et W_ε est globalement hamiltonien. De plus, en regardant de près dans la démonstration du théorème A.52, on voit que les champs de vecteurs \tilde{Y}_ε et W_ε sont C^∞ par rapport au paramètre ε , puisque \tilde{Y}_ε n'est rien d'autre que la \mathcal{G} -moyenne de X_ε .

Soit ensuite la ε -famille de symplectomorphismes Ψ^ε définie par $\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon + W_\varepsilon}^\varepsilon = \phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon$, et soit Z_ε son ε -champ de vecteurs associé. D'une part, d'après la proposition B.11 la famille $\Phi^\varepsilon = \phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon$ préserve la fibration puisque \tilde{Y}_ε est le relevé d'un champ de vecteurs sur \mathcal{B} . D'autre part, d'après la proposition B.4, on a $\tilde{Y}_\varepsilon + W_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon + \phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon(Z_\varepsilon)$ et donc

$$Z_\varepsilon = \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_*^{-1} (W_\varepsilon).$$

D'après le théorème A.52 de décomposition, pour tout ε , le champ de vecteurs W_ε est globalement hamiltonien et vérifie $\langle W_\varepsilon \rangle = 0$. Cela prouve d'une part que le champ Z_ε est globalement hamiltonien. D'autre part, la proposition B.12 nous assure que

$$\langle Z_\varepsilon \rangle = \left(\phi_{\tilde{Y}_\varepsilon}^\varepsilon \right)_*^{-1} \langle W_\varepsilon \rangle = 0$$

puisque \tilde{Y}_ε est un relevé symplectique.

Pour finir, on montre que c'est l'unique décomposition du type décrit. En effet, supposons que l'on a une deuxième décomposition $\phi_{X_\varepsilon}^\varepsilon = \phi_{\tilde{Y}'_\varepsilon}^\varepsilon \circ \phi_{Z'_\varepsilon}^\varepsilon$ avec les mêmes propriétés. D'après la proposition B.11, \tilde{Y}'_ε est forcément un relevé puisque $\phi_{\tilde{Y}'_\varepsilon}^\varepsilon$ préserve la fibration. D'autre part, la proposition B.4 nous assure que les champs de vecteurs sont reliés par $\tilde{X}_\varepsilon = \tilde{Y}'_\varepsilon + \phi_{\tilde{Y}'_\varepsilon}^\varepsilon(Z'_\varepsilon)$. En raisonnant comme précédemment, on montre que $\phi_{\tilde{Y}'_\varepsilon}^\varepsilon(Z'_\varepsilon)$ est globalement hamiltonien et de moyenne nulle. De plus, le théorème de décomposition A.52, nous assure que la décomposition $X_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon + W_\varepsilon$ est unique et donc que $\tilde{Y}'_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon$ et $Z'_\varepsilon = Z_\varepsilon$. ■

Théorème B.14 (Déformation globalement hamiltonienne). Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système complètement intégrable régulier non-dégénéré au sens "faible". Si H_ε est une déformation régulière de H_0 , alors il existe une unique ε -famille de fonctions $I_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et une unique ε -famille de symplectomorphismes globalement hamiltonienne $\phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon$, avec $\langle G_\varepsilon \rangle = 0$, telles que

$$H_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon$$

pour tout ε .

Démonstration. Par définition, H_ε est une déformation régulière de H_0 s'il existe une ε -famille de fonctions $J_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et une ε -famille de symplectomorphismes ϕ^ε de \mathcal{M} telles que $H_\varepsilon = J_\varepsilon \circ \phi^\varepsilon$. D'autre part, le lemme B.13 nous assure que ϕ^ε se décompose en $\phi^\varepsilon = \Phi^\varepsilon \circ \phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon$, où Φ^ε préserve la fibration et $X_{G_\varepsilon} = \{G_\varepsilon, \cdot\}$, avec $\langle G_\varepsilon \rangle = 0$. On a donc $H_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon$, avec la fonction $I_\varepsilon = J_\varepsilon \circ \Phi^\varepsilon$ qui est bien dans $\pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ puisque Φ^ε préserve la fibration.

Montrons ensuite l'unicité. Supposons que l'on a une deuxième famille de fonctions $I'_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et une deuxième famille de symplectomorphismes $\phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon$, avec $\langle G'_\varepsilon \rangle = 0$ et telles

que $H_\varepsilon = I'_\varepsilon \circ \phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon$. Cela implique que $I_\varepsilon \circ \phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon = I'_\varepsilon \circ \phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon$. En notant $\Phi^\varepsilon = \phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon \circ \left(\phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon \right)^{-1}$, cela donne $I_\varepsilon \circ \Phi^\varepsilon = I'_\varepsilon$.

- Tout d'abord, on remarque que Φ^ε transforme la fibration lagrangienne en tores initiale $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ en une autre fibration en tores lagrangiens "déformée" $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$ donnée par $\pi_\varepsilon = \pi \circ (\Phi^\varepsilon)^{-1}$, puisque Φ^ε est une famille de symplectomorphisme.
- On voit ensuite que la fonction I_ε est constante le long des fibres de la fibration déformée puisque pour tout $b \in \mathcal{B}$ et pour tout $m \in \pi_\varepsilon^{-1}(b)$, on a $I_\varepsilon(m) = I'_\varepsilon \circ (\Phi^\varepsilon)^{-1}(m)$. En utilisant alors le fait que I'_ε s'écrit $I'_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \pi$ avec $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{B})$, il vient $I_\varepsilon(m) = f_\varepsilon \circ \pi_\varepsilon(m) = f_\varepsilon(b)$. La fonction I_ε est donc constante le long de deux fibrations lagrangiennes en tores.
- De plus, la fonction I_ε tend, lorsque ε tend vers zéro, vers H_0 qui est non-dégénérée au sens faible. Cela prouve que I_ε est aussi non-dégénérée puisque les conditions de non-dégénérescence sont des conditions ouvertes. La proposition A.80 assure alors qu'il existe une unique fibration lagrangienne le long des fibres de laquelle I_ε est constante. Les deux fibrations sont donc égales, ce qui prouve que Φ^ε préserve la fibration initiale $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$.
- On a donc $\phi_{X_{G_\varepsilon}}^\varepsilon = \Phi^\varepsilon \circ \phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon$ avec Φ^ε préservant la fibration. Cependant, le lemme B.13 nous assure que la décomposition décrite précédemment est unique, ce qui fait que $G_\varepsilon = G'_\varepsilon$ et donc que $I_\varepsilon = I'_\varepsilon$. ■

1.2 Fonctions non-résonantes et équation homologique

On se fixe un système complètement intégrable régulier $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ non-dégénéré au sens faible, comme décrit dans la définition 3.2. Le but de cette section est de donner la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir résoudre l'équation homologique du lemme B.20 qui est l'étape principale du théorème B.24 de déformations régulières. Pour ça, on introduit d'abord la notion de fonctions résonantes.

1.2.1 Fonctions résonantes et non-résonantes

L'hamiltonien s'écrit $H_0 = F_0 \circ \pi$ avec $F_0 \in C^\infty(\mathcal{B})$ et on notera $X_0 = X_{H_0}$ son champ de vecteurs associé. On utilisera la fonction $\Omega_X = dF_0(X)$ et la surface de résonance $\Sigma_X \subset \mathcal{B}$ définies⁵ par $\Sigma_X = \{b \in \mathcal{B}; \Omega_X(b) = 0\}$ pour tout $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B})$. On va utiliser les séries de Fourier définies dans la section 2.2.5. On rappelle⁶ que les variables de Fourier, notées k , vivent dans l'espace $\Gamma = \Gamma(E)$ des sections du fibré E des vecteurs entiers sur \mathcal{B} , et que la série de Fourier d'une fonction f est notée \tilde{f} .

Définition B.15. Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une fonction. On définit le vocabulaire suivant.

⁵Définition A.66.

⁶Voir section 2.2.4.

- Soit $k \in \Gamma$ un vecteur non nul. On dit que V est **k -résonante en b** , ou **sur le tore \mathcal{M}_b** , si

$$b \in \Sigma_k \text{ et } \tilde{V}(b, k) \neq 0.$$

- Soit $k \in \Gamma$ un vecteur non nul et $\mathcal{U} \subset \Sigma_k$ un sous-ensemble. On dit que V est **k -résonante dans \mathcal{U}** si elle est k -résonante en tout point $b \in \mathcal{U}$.
- On dit que V est **k -résonante** s'il existe au moins un tore \mathcal{M}_b sur lequel V est k -résonante.
- On dit que V est **résonante en b** s'il existe au moins un vecteur $k \in \Gamma$ non nul tel que V est k -résonante en b .

Définition B.16. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est **non-résonante** si elle n'est résonante en aucun point $b \in \mathcal{B}$.

Proposition B.17. Une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est non-résonante si et seulement si, pour tout tore périodique \mathcal{M}_b , la moyenne de V le long des trajectoires de X_0 sur \mathcal{M}_b ,

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T V \circ \phi_{X_0}^t(x) dt,$$

est une fonction constante sur le tore \mathcal{M}_b .

Démonstration. Tout d'abord, d'après les définitions B.15 et B.16, la condition de non-résonance pour V signifie que

$$\forall k \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_k \implies \tilde{V}(b, k) = 0.$$

En utilisant le fait (proposition A.77) que l'ensemble des b périodiques appartenant à l'hyper-surface Σ_k est dense dans Σ_k , on en déduit que la condition de non-résonance est équivalente à

$$\forall b \text{ périodique}, \forall k \in \Gamma \setminus 0, dF_0(k)_b = 0 \implies \tilde{V}(b, k) = 0.$$

Par ailleurs, on sait d'après la proposition A.62 que la série de Fourier $\tilde{\tilde{V}}(b, k)$ de la moyenne de V est donnée, pour tout $k \in \Gamma$, par

$$\tilde{\tilde{V}}(b, k) = \begin{cases} \tilde{V}(b, k) & \text{si } dF_0(k) = 0 \\ 0 & \text{si } dF_0(k) \neq 0 \end{cases},$$

ce qui fait que la condition de non-résonance revient bien à demander que la fonction moyennée \bar{V} soit constante sur le tore \mathcal{M}_b . ■

1.2.2 Lemme de division

Dans le lemme B.20, on cherchera à résoudre l'équation homologique dans l'espace de Fourier. On devra alors résoudre une équation de la forme

$$\Omega_p(\xi) f_p(\xi) = g_p(\xi),$$

impliquant des fonctions de la variable $\xi \in \mathcal{B}$ et d'un paramètre $p \in P$ variant dans un espace de paramètres⁷. La fonction f est inconnue, la fonction Ω est donnée⁸ et on cherche les conditions nécessaires et suffisantes sur g pour qu'il y ait des solutions f , sachant qu'il faut contrôler la régularité de la fonction solution f uniformément par rapport au paramètre p . On utilisera l'espace C_P^∞ des fonctions C^∞ uniformément par rapport à $p \in P$ de la définition A.1.

On donne le résultat dans le lemme suivant, appelé **lemme de division**, et on donne ensuite une proposition qui assure que les hamiltoniens non-dégénérés rentrent dans les hypothèses du lemme.

Lemme B.18 (Lemme de division). *Soit \mathcal{N} une variété de dimension d munie d'une métrique et soit P un espace de "paramètres". Soit $\Omega_p \in C_P^\infty(\mathcal{N})$ une famille de fonctions vérifiant l'hypothèse suivante :*

- ♣ Pour tout compact $K \subset \mathcal{N}$, il existe deux constantes $T > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout $p \in P$ on a

$$\forall m \in K, |\Omega_p(m)| < T \implies |(d\Omega_p)_m| > C.$$

Soit $g_p(m) \in C_P^\infty(\mathcal{N})$ une fonction. L'équation

$$\Omega_p f_p = g_p$$

admet une solution $f_p(m) \in C_P^\infty(\mathcal{N})$ si et seulement si la fonction g_p satisfait à

$$\forall p \in P, \forall m \in \mathcal{N} \text{ tq } \Omega_p(m) = 0 \implies g_p(m) = 0.$$

Dans ce cas, la solution f est unique et vérifie l'estimation suivante. Pour tout compact $K \subset \mathcal{N}$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $p \in P$ et pour tout $m \in K$, on a

$$|\partial_x^\alpha f_p(m)| \leq C_\alpha(K) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{Z}^d \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \left| \partial_x^\beta g_p(m) \right|,$$

où la constante $C_\alpha(K)$ dépend de Ω_p mais pas de G_p .

Démonstration. Pour résoudre l'équation $\Omega_p f_p = g_p$, il est clairement nécessaire que, pour tout p , la fonction g_p soit nulle là où Ω_p l'est. On va montrer que cette condition sur g_p est aussi suffisante lorsque Ω_p satisfait aux hypothèses du lemme. Pour cela, on sépare le problème en deux parties en considérant successivement ce qui se passe près puis loin de $\Sigma_p = \{m \in \mathcal{N}; \Omega_p(m) = 0\}$. Pour la démonstration, on munit la variété \mathcal{N} d'une métrique, mais le résultat ne dépend pas de cette métrique.

Pour tout compact $K \subset \mathcal{N}$, soit $T > 0$ et $C > 0$ les deux constantes intervenant dans l'hypothèse satisfaite par Ω_p .

- Pour tout $p \in P$, considérons l'ouvert $\mathcal{O}_p^T = \{m \in K; |\Omega_p(m)| < T\}$ ainsi que l'ouvert $\tilde{\mathcal{O}}_p^T = \{m \in K; |\Omega_p(m)| > \frac{T}{2}\}$. Dans ce dernier, la minoration de $|\Omega_p(m)| > \frac{T}{2}$ permet d'effectuer la division $f_p = \frac{g_p}{\Omega_p}$ et d'obtenir une fonction $f_p \in C_P^\infty(\tilde{\mathcal{O}}_p^T)$.

⁷En l'occurrence l'espace des variables de Fourier Γ qui est isomorphe à \mathbb{Z}^d .

⁸Il s'agira de la fonction $\Omega_X = dF(X)$ de la définition A.66.

- Considérons ensuite la situation à l'intérieur de \mathcal{O}_p^T . On va montrer qu'il existe $X_p \in \mathcal{V}(\mathcal{O}_p^T)$ un champ de vecteurs C^∞ uniformément par rapport au paramètre p , non nul dans \mathcal{O}_p^T , transverse à Σ_p et vérifiant

$$\forall m \in \mathcal{O}_p^T, \forall p \in P \implies d\Omega_p(X_p)_m = 1.$$

En effet, soit $\nabla\Omega_p$ le gradient de Ω_p défini à partir de la métrique. L'hypothèse \clubsuit satisfaite par Ω_p implique que pour tout $m \in \mathcal{O}_p^T$, on a $|d\Omega_p| > C$ si bien que le champ de vecteurs $X_p = \frac{\nabla\Omega_p}{|\nabla\Omega_p|^2}$ est C^∞ uniformément par rapport au paramètre p et non nul dans \mathcal{O}_p^T . Il est aussi orthogonal et donc transverse aux lignes de niveau de Ω_p , donc en particulier à $\Sigma_p = \{m \in \mathcal{N}; \Omega_p(m) = 0\}$, et vérifie

$$d\Omega_p(X_p) = \frac{d\Omega_p(\nabla\Omega_p)}{|\nabla\Omega_p|^2} = 1.$$

- Soit ϕ_p^t le flot de X_p au temps t . La relation $d\Omega_p(X_p) = 1$ implique que

$$\Omega_p \circ \phi_p^t(m) = t + \Omega_p(m)$$

et donc que $\phi_p^t(m)$ est bien défini pour tout $t \in [-T - \Omega_p(m), +T - \Omega_p(m)]$. On effectue alors un développement de Taylor au premier ordre avec reste intégral de la fonction $g_p(m)$:

$$g_p(m) = g_p \circ \phi_p^{-\Omega_p(m)}(m) + \int_0^{\Omega_p(m)} dt X_p(g_p) \circ \phi_p^{t-\Omega_p(m)}(m).$$

Par hypothèse, on a $g_p \circ \phi_p^{-\Omega_p(m)}(m) = 0$. De plus, dans l'intégrale, le changement de variable $t = u\Omega_p(m)$ donne

$$g_p(m) = \Omega_p(m) \int_0^1 du X_p(g_p) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m).$$

On résout alors l'équation $\Omega_p f_p = g_p$ en posant

$$f_p(m) = \int_0^1 du X_p(g_p) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m).$$

- Par construction, le champ X_p est C^∞ uniformément par rapport au paramètre p , ce qui fait que la fonction $X_p(f) \circ \phi_p^{(u-1)\Omega_p(m)}(m)$ est $C_P^\infty(\mathcal{O}_p^T \times [0, 1])$, où $[0, 1]$ est l'intervalle de la variable d'intégration u . On a donc $f_p \in C_P^\infty(\mathcal{O}_p^T)$.
- On peut donc résoudre $\Omega_p f_p = g_p$ globalement dans \mathcal{N} et la solution $f_p = \frac{g_p}{\Omega_p}$ est dans $C_P^\infty(\mathcal{N})$. On voit alors que dans tout compact $K \subset M$, dans un système de coordonnées locales $\{x_j\}$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $p \in P$ et pour tout $m \in K$, on a

$$|\partial_x^\alpha f_p(m)| \leq C_\alpha(K) \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \left| \partial_x^\beta g_p(m) \right|,$$

où la constante $C_\alpha(K)$ dépend de Ω_p mais pas de g_p .

■

Dans la suite, on considérera un hamiltonien complètement intégrable $H = F \circ \pi$, $F \in C^\infty(\mathcal{B})$, et on utilisera le lemme précédent avec la fonction $\Omega_X = dF(X)$. La proposition suivante montre que lorsque H est non-dégénéré au sens "faible", la fonction Ω_X satisfait aux hypothèses du lemme.

Proposition B.19. *Soit $|\cdot|$ la norme associée à une métrique constante sur \mathcal{B} . Soit l'espace de "paramètres" $P = \{X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{B}) ; |X| \geq 1\}$ et soit la famille de fonctions $\Omega_X \in C_P^\infty(\mathcal{B})$ définies précédemment. Si H est non-dégénéré au sens faible, alors Ω_X vérifie la condition suivante. Pour tout compact $K \subset \mathcal{N}$, il existe deux constantes $T > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout $X \in P$ on a*

$$\forall b \in K, |\Omega_X(b)| < T|X| \implies |(d\Omega_X)_b| > C|X|.$$

Donc notamment, on a

$$\forall b \in K, |\Omega_X(b)| < T \implies |(d\Omega_X)_b| > C.$$

Démonstration. Tout d'abord, à l'aide de la métrique on considère la décomposition polaire de P en $P = \Theta \times [1, \infty]$, i.e en sa partie *angulaire* et sa partie *radiale*, et tout $X \in P$ sera noté $X = \left(\theta = \frac{X}{|X|}, |X|\right)$. La partie angulaire Θ est difféomorphe à la sphère S^{d-1} qui est compacte. La famille de fonctions définies par $\tilde{\Omega}_\theta = \frac{\Omega_X}{|X|}$ pour un X quelconque vérifiant $\theta = \frac{X}{|X|}$, appartient clairement à $C_\Theta^\infty(\mathcal{B})$ et définit la même surface

$$\tilde{\Sigma}_\theta = \left\{b \in \mathcal{B}; \tilde{\Omega}_\theta(b) = 0\right\} = \left\{b \in \mathcal{B}; \Omega_X(b) = 0\right\},$$

pour tout X tel que $\theta = \frac{X}{|X|}$.

D'autre part, si H est non-dégénéré au sens faible, cela implique que pour tout $X \in P$ et tout $b \in \Sigma_X$, on a $d(\Omega_X)_b \neq 0$ et donc $|d(\Omega_X)_b| \neq 0$. Cela implique que pour tout $|X| \in [1, \infty]$, pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $b \in \tilde{\Sigma}_\theta$, on a

$$\left|d\left(\tilde{\Omega}_\theta\right)_b\right| = \frac{1}{|X|} |d(\Omega_X)_b| \neq 0.$$

Pour tout compact $K \subset \mathcal{B}$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\left|d\left(\tilde{\Omega}_\theta\right)_b\right| \geq 2C$ pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $b \in K \cap \tilde{\Sigma}_\theta$. Si on considère ensuite les ensembles $\mathcal{U}_\theta^t = \left\{b \in K; \left|\tilde{\Omega}_\theta(b)\right| < t\right\}$, la minoration précédente de $\left|d\left(\tilde{\Omega}_\theta\right)_b\right|$ permet d'affirmer que pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une constante $T_\theta > 0$ telle que

$$\forall b \in \mathcal{U}_\theta^{T_\theta} \implies \left|d\left(\tilde{\Omega}_\theta\right)_b\right| > C.$$

L'espace Θ étant compact, le minimum $T = \min_\theta T_\theta$ est positif. Cela fait que pour tout $X \in P$ et tout b tel que $|\Omega_X(b)| < T|X|$, on a $b \in \mathcal{U}_\theta^T$ ce qui implique que $\left|d\left(\tilde{\Omega}_\theta\right)_b\right| > C$ et donc que

$$|d(\Omega_X)| > |X|C.$$

En utilisant le fait que $|X| \geq 1$, la majoration $|\Omega_X(b)| < T$ implique $|\Omega_X(b)| < T|X|$, ce qui implique que

$$|d(\Omega_X)| > |X|C > C.$$

■

1.2.3 Équation homologique

Lemme B.20 (Equation homologique). Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clreg non-dégénéré au sens faible et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une fonction. La condition de non-résonance pour V est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux fonctions $I \in \pi^*C^\infty(\mathcal{B})$ et $G \in C^\infty(\mathcal{M})$ telles de

$$\{H_0, G\} + V = I.$$

Dans ce cas, I est unique et est donnée par la \mathcal{G} -moyenne de la perturbation, i.e $I = \langle V \rangle$. De plus, on peut choisir G telle que $\langle G \rangle = 0$.

Démonstration. Pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, on résout cette équation dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ en Fourier, en utilisant $H_0 = F_0 \circ \pi$ et la propriété A.35. Cela donne

$$idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = \tilde{I}(b, k) - \tilde{V}(b, k).$$

- Pour $k = 0$ et pour tout $b \in \mathcal{O}$, on voit que l'on doit choisir $\tilde{I}(b, 0) = \tilde{V}(b, 0)$. Comme I est un pull-back, cela implique que ses autres coefficients de Fourier $\tilde{I}(b, k)$ sont nuls. D'après la proposition A.47, cela signifie que $I = \langle V \rangle$. Par contre, le coefficient $\tilde{G}(b, 0)$ peut être choisi librement.
- Pour tout $k \neq 0$ et tout point $b \in \mathcal{O}$, on doit donc résoudre

$$dF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = i\tilde{V}(b, k).$$

On se trouve dans la situation d'application du lemme B.18 de division, avec l'espace de paramètres $P = \Gamma \setminus 0$. Les hypothèses du lemme sont satisfaites grâce au fait que l'hamiltonien H_0 est non-dégénéré et possède donc la propriété décrite dans la proposition B.19. Le lemme B.18 nous assure alors que l'on peut diviser par $dF_0(k)$ si et seulement si $\tilde{V}(b, k)$ est nul pour tout $k \neq 0$ et tout b tels que $dF_0(k)_b = 0$, i.e exactement si V est non-résonant. En utilisant ensuite le fait que V est dans $C^\infty(\mathcal{M})$, le lemme B.18 nous permet de montrer que la solution G est $C^\infty(\mathcal{M})$, puisque la série de Fourier \tilde{V} est $C^\infty(\mathcal{B})$ à décroissance rapide en k .

- Enfin, le coefficient $\tilde{G}(b, 0)$ étant libre, on peut le choisir $\tilde{G}(b, 0) = 0$, ce qui assure que $\langle G \rangle = 0$. ■

1.3 Déformations régulières formelles

1.3.1 Complète intégrabilité formelle en ε

Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système complètement intégrable régulier non-dégénéré au sens "faible" et dont on cherche les déformations régulières possibles H_ε . On va s'intéresser à partir de maintenant aux déformations formelles dans le paramètre ε .

Définition B.21. Soit $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ une ε -famille d'hamiltoniens, avec $H_\varepsilon \rightarrow H_0$, et soit n un entier positif. On dit que H_ε est une **déformation de H_0 à $O(\varepsilon^n)$** , ou qu'il est **complètement intégrable à $O(\varepsilon^n)$** , s'il existe une déformation H'_ε de H_0 telle que

$$H_\varepsilon = H'_\varepsilon + O(\varepsilon^n).$$

On notera cela

$$H_\varepsilon \in CI(\varepsilon^n).$$

Proposition B.22. Si H_ε est une déformation de H_0 à $O(\varepsilon^n)$, alors il existe une unique série de fonctions $I_0, \dots, I_{n-1} \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et une unique série de champs de vecteurs globalement hamiltoniens $X_{G_1}, \dots, X_{G_{n-1}}$, avec $\langle G_j \rangle = 0$, telles que

$$H_\varepsilon = (I_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I_{n-1}) \circ \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon + R_\varepsilon,$$

avec

$$R_\varepsilon = O(\varepsilon^n).$$

Définition B.23. On définit $R_n \in C^\infty(\mathcal{M})$ le **terme de reste** de H_ε par

$$R_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon}{\varepsilon^n}.$$

Démonstration. Si $H_\varepsilon \in CI(\varepsilon^n)$ alors il s'écrit $H_\varepsilon = H'_\varepsilon + O(\varepsilon^n)$, où H'_ε est une déformation régulière de H_0 et s'écrit donc, d'après le théorème B.14, $H'_\varepsilon = I_\varepsilon \circ \phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon$ avec $I_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et $\langle G'_\varepsilon \rangle = 0$. On définit les fonctions I_j comme étant les n premiers termes du développement de I_ε par rapport à ε , i.e

$$I_\varepsilon = I_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I_{n-1} + J_\varepsilon,$$

avec $J_\varepsilon \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ vérifiant $J_\varepsilon = O(\varepsilon^n)$. De même, on définit les champs de vecteurs $X_{G'_j}$ par

$$X_{G'_\varepsilon} = X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}} + Z_\varepsilon,$$

avec $Z_\varepsilon = O(\varepsilon^{n-1})$ vérifiant $\langle Z_\varepsilon \rangle = 0$. En comptant bien les puissances de ε , on voit que

$$\phi_{X_{G'_\varepsilon}}^\varepsilon = \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon \circ (\mathbb{I} + O(\varepsilon^n)),$$

et un petit calcul montre alors que H_ε a la forme annoncée.

On montre l'unicité par récurrence. Supposons que l'on ait deux familles de fonctions I_j et I'_j , et deux familles de champs de vecteurs X_{G_j} ayant les propriétés énoncées. Elles vérifient donc

$$(I_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I_{n-1}) \circ \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon = (I'_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I'_{n-1}) \circ \phi_{X_{G'_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G'_{n-1}}}^\varepsilon + O(\varepsilon^n).$$

Avec un peu d'effort, on voit que le terme d'ordre ε^m de cette équation est

$$I_m + \{G_m, I_0\} + f_m(I_0, \dots, I_{m-1}, G_1, \dots, G_{m-1}) = I'_m + \{G'_m, I'_0\} + f_m(I'_0, \dots, I'_{m-1}, G'_1, \dots, G'_{m-1}),$$

où $f_m : \mathbb{R}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une certaine fonction. Si l'on suppose que jusqu'à l'ordre $m-1$ on a $I_j = I'_j$ et $G_j = G'_j$, alors il reste $I_m - I'_m = \{G'_m - G_m, H_0\}$, où l'on a utilisé $I_0 = H_0$. La \mathcal{G} -moyenne du crochet de Poisson est nulle puisque

$$\begin{aligned} \left\langle \{G'_m - G_m, H_0\} \right\rangle &= \left\langle dH_0(X_{G'_m - G_m}) \right\rangle \\ &= dH_0 \left\langle X_{G'_m - G_m} \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que dH_0 est \mathcal{G} -invariant et que $\langle X_{G_m} \rangle = \langle X_{G'_m} \rangle = 0$. Cela implique que $\langle I_m \rangle = \langle I'_m \rangle$ et donc que $I_m = I'_m$ puisque les fonctions I_m et I'_m sont \mathcal{G} -invariantes du fait qu'elles sont dans $\pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$. Il reste alors $\{G'_m - G_m, H_0\} = 0$. On a vu dans la proposition A.78, il y a quelques dizaines de pages de cela, que la condition de non-dégénérescence satisfaite par H_0 implique que toute fonction Poisson-commutant avec H_0 est dans $\pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et est donc \mathcal{G} -invariante. Cela montre que $G'_m - G_m$ est \mathcal{G} -invariante et donc nulle puisque la moyenne vérifie $\langle G'_m - G_m \rangle = \langle G'_m \rangle - \langle G_m \rangle = 0$. Enfin, on vérifie de la même façon que l'hypothèse de récurrence est satisfaite à $m = 1$, ce qui permet d'achever la preuve par récurrence. ■

1.3.2 Déformations régulières formelles

Théorème B.24 (Déformations régulières formelles). Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIreg non-dégénéré au sens faible, soit H_ε une déformation de H_0 à $O(\varepsilon^n)$ et soit $R_n \in C^\infty(\mathcal{M})$ son terme de reste.

Alors, H_ε est une déformation de H_0 à $O(\varepsilon^{n+1})$ si et seulement si R_n est non-résonant.

Démonstration. Par hypothèse et d'après la proposition B.22, H_ε s'écrit de manière unique

$$H_\varepsilon = (I_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I_{n-1}) \circ \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon + \varepsilon^n R_n + O(\varepsilon^{n+1}),$$

avec $I_j \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et $\langle G_j \rangle = 0$. On a $H_\varepsilon \in CI(\varepsilon^{n+1})$ si et seulement si s'il s'écrit

$$H_\varepsilon = (I'_0 + \dots + \varepsilon^n I'_n) \circ \phi_{X_{G'_1} + \dots + \varepsilon^{n-1} X_{G'_n}}^\varepsilon + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Par unicité des fonctions I_j et G_j , on doit avoir $I_j = I'_j$ et $G_j = G'_j$ pour tout $j = 0..n-1$. D'autre part, on voit facilement que l'on a

$$\phi_{X_{G'_1} + \dots + \varepsilon^{n-1} X_{G'_n}}^\varepsilon = \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon \circ \phi_{\varepsilon^{n-1} X_{G_n}}^\varepsilon \circ \phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon,$$

avec $\phi_{Z_\varepsilon}^\varepsilon = \mathbb{I} + O(\varepsilon^{n+1})$, ce qui fait que $(I'_0 + \dots + \varepsilon^n I'_n) \circ \phi_{X_{G'_1} + \dots + \varepsilon^{n-1} X_{G'_n}}^\varepsilon$ est égal à

$$(I_0 + \dots + \varepsilon^{n-1} I_{n-1}) \circ \phi_{X_{G_1} + \dots + \varepsilon^{n-2} X_{G_{n-1}}}^\varepsilon + \varepsilon^n I_n + \varepsilon^n \{G_n, I_0\} + O(\varepsilon^{n+1}).$$

En identifiant les deux expressions de H_ε , on voit qu'il reste le terme d'ordre ε^n donné par

$$I_n + \{G_n, H_0\} = R_n,$$

où l'on a utilisé $I_0 = H_0$. D'après le lemme B.20, cette équation homologique se résout si et seulement si R_n est non-résonant. Dans ce cas, on a $I_n = \langle R_n \rangle$. ■

Exemple B.25. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIreg non-dégénéré au sens faible, soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une fonction. D'après le théorème précédent, la famille $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ est complètement intégrable à $O(\varepsilon^2)$, i.e il existe une fonction $I_1 \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et un champ de vecteurs hamiltonien X tels que

$$H_0 + \varepsilon V = (H_0 + \varepsilon I_1) \circ \phi_X^\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

si et seulement si la perturbation V est non-résonant.

En particulier, considérons $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^d$ le cotangent du tore muni des coordonnées canoniques $(x_j, \xi_j) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$. La fibration lagrangienne est la fibration "horizontale". Toute fonction $H_0(\xi)$ indépendante des x_j et dont la hessienne vérifie $\det\left(\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) \neq 0$ est un hamiltonien CI non-dégénéré.

- Pour toute fonction $V(\xi)$ indépendante des x_j , le hamiltonien $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon V(\xi)$ est évidemment encore CI et la perturbation V est bien non-résonant puisque sa série de Fourier $\tilde{V}(\xi, k)$ par rapport à la variable x est nulle dès que $k \neq 0$.
- Considérons maintenant l'hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et une perturbation de la forme $H_\varepsilon(\xi) = H_0(\xi) + \varepsilon V(x)$, où $V(x)$ est un "potentiel" indépendant des ξ_j . H_0 est bien non-dégénéré puisque $\det\left(\frac{\partial H_0}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = 1$. La condition de non-résonance pour V s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0, \forall \xi \text{ tq } \sum_j \xi_j k_j = 0 \implies \tilde{V}(k) = 0.$$

La condition $\sum_j \xi_j k_j = 0$ définit un hyperplan dans l'espace des ξ , ce qui implique que pour tout $k \neq 0$, on a $\tilde{V}(k) = 0$, ce qui signifie que $V(x)$ est une fonction constante.

Les deux exemples suivants illustrent la relation entre résonances et singularités, et nous permettent d'introduire la section suivante.

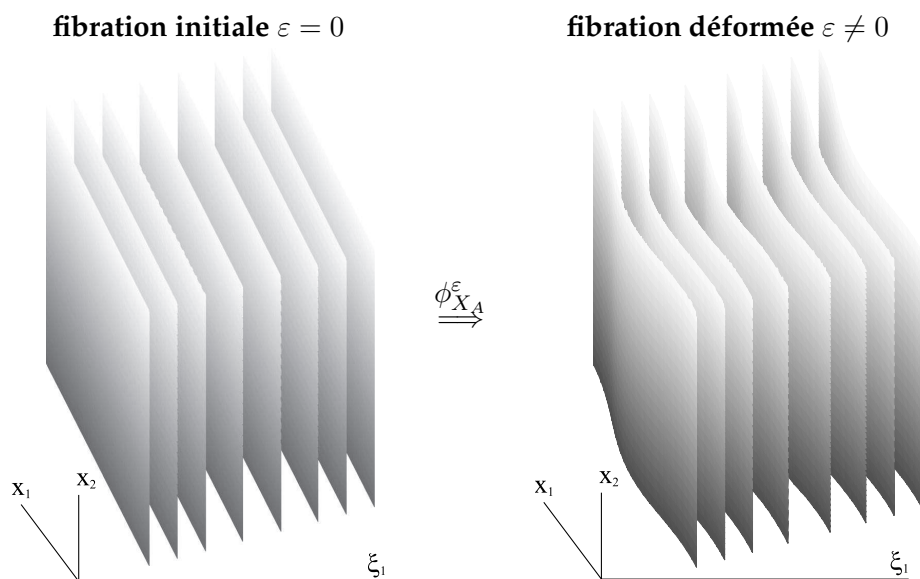
Exemple B.26. Sur $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^2$ muni des coordonnées canoniques $(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$, on considère l'hamiltonien $H_0 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ qui est non-dégénéré (au sens de Kolmogorov). On s'intéresse à la perturbation $\varepsilon V(x) = \varepsilon \xi_1 \cos(x_1)$. La série de Fourier de cette fonction est simplement $\tilde{V}(k) = \xi_1 \delta(k = (1, 0))$ et est non-nulle seulement lorsque $k = (1, 0)$. La surface de résonance associée est simplement $\Sigma_{(1,0)} = \{(0, \xi_2)\}$. La fonction $\tilde{V}(1, 0) = \xi_1$ s'annule justement sur $\Sigma_{(1,0)}$; elle est donc non-résonante. La perturbation V étant non-résonante, le théorème B.24 nous assure qu'il existe une fonction $I(\xi)$ et un champ de vecteurs hamiltonien X_G tels que

$$H_0 + \varepsilon V = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_{X_G}^\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

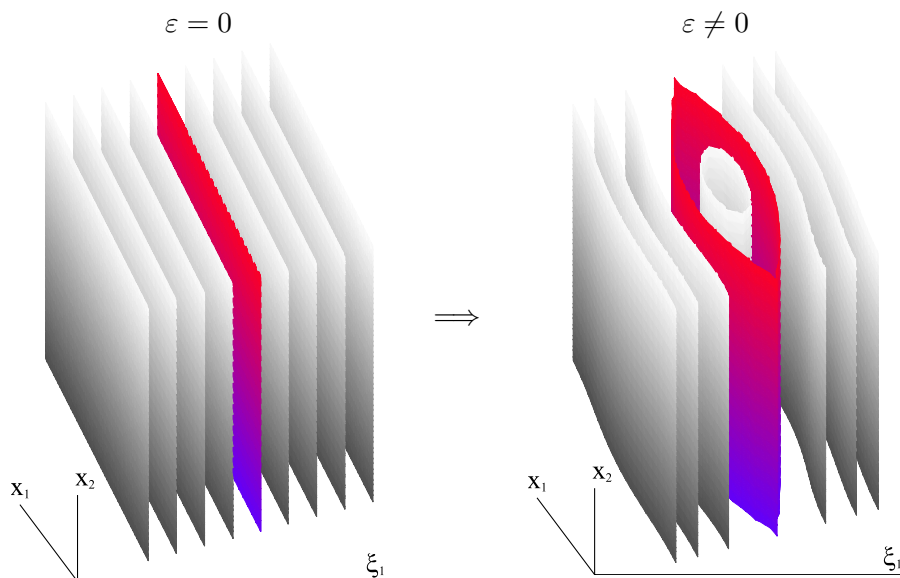
L'équation homologique dont G et I sont solutions est en fait très simple dans ce cas et donne $I = 0$ et $G = \cos(x_1)$. Le champ de vecteurs associé est donc simplement $X_G = \sin(x_1) \partial_{\xi_1}$ et induit le flot

$$(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \xrightarrow{\phi_{X_G}^\varepsilon} (x_1, x_2, \xi_1 + \varepsilon \sin(x_1), \xi_2).$$

Dans la figure ci-dessous, on a tracé à $\xi_2 = cst$ les tores initiaux à gauche et les tores déformés par le flot $\phi_{X_G}^\varepsilon$.



Exemple B.27. Pour le même hamiltonien $H_0 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2)$, on s'intéresse maintenant à la perturbation suivantes $\varepsilon W(x) = \varepsilon \cos(x_1)$. La série de Fourier de W est simplement $\widetilde{W}(k) = \delta(k = (1, 0))$, ce qui signifie que W est $(1, 0)$ -résonante en tout point de la surface $\Sigma_{(1,0)}$. La condition de non-résonance n'étant pas satisfaite, il n'existe pas de flot $\phi_{X_G}^\varepsilon$ qui nous permette de déformer la fibration initiale en une fibration le long de laquelle l'hamiltonien $H_0 + \varepsilon W$ soit constant. Par contre, pour comparer avec le cas précédent, on peut tracer les surfaces de niveau de $H_0 + \varepsilon W$. Dans le schéma ci-dessous, on a fixé $\xi_2 = 0$ et on a tracé les intersections des surfaces de niveaux $H_0 + \varepsilon W = E$ avec $\xi_2 = 0$, qui sont simplement données par $\xi_1 = \pm \sqrt{E - \varepsilon \cos(x_1)}$.



Lorsque $\varepsilon \neq 0$, il apparaît une fibre singulière (une pour chaque valeur de ξ_2) en ξ_1 proche de 0, ce qui correspond exactement à la surface de résonance $\Sigma_{(1,0)}$. En général, la présence de résonances dans la perturbation détruit le caractère complètement intégrable. Dans cet

exemple le hamiltonien perturbé reste complètement intégrable (mais singulier) car il n'y a qu'une seule résonance, comme on va le voir dans la section suivante.

2 Déformations singulières

On considère dorénavant un système complètement intégrable non-dégénéré au sens faible $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ et un hamiltonien perturbé de la forme $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, où $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une fonction appelée la perturbation. On a vu dans la section précédente que la condition de non-résonance pour une perturbation $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'hamiltonien perturbé $H_0 + \varepsilon V$ soit une déformation à $O(\varepsilon^2)$ de H_0 , i.e pour qu'il existe une fonction $I \in \pi^* C^\infty(\mathcal{B})$ et un champ de vecteurs hamiltonien X tels que

$$(H_0 + \varepsilon V) = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_X^\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Les images des fibres $\mathcal{M}_b = \pi^{-1}(b)$ par la famille de symplectomorphismes $(\phi_X^\varepsilon)^{-1}$ sont elles-mêmes des tores lagrangiens et forment une fibration *déformée* en tores lagrangiens $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi_\varepsilon} \mathcal{B}$, où $\pi_\varepsilon = \pi_0 \circ \phi^\varepsilon$. C'est la raison pour laquelle on a appelé H_ε une *déformation régulière* de H_0 .

On souhaite maintenant s'intéresser à des **déformations singulières** de H_0 , c'est à dire des familles d'hamiltoniens H_ε qui sont complètement intégrables pour tout ε , mais singuliers. L'obtention d'une fibration singulière à partir de la fibration initiale régulière ne peut évidemment pas se faire à l'aide d'une famille de difféomorphismes ϕ_X^ε . En conséquence, on doit travailler non pas en terme de déformations de la fibration, mais en terme de déformations d'applications moments.

Par définition, une famille d'hamiltoniens $\varepsilon \rightarrow H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ dépendant de manière C^∞ du paramètre de perturbation ε et telle que $H_\varepsilon \rightarrow H_0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, est une *déformation (éventuellement singulière) de H_0* si pour tout ε il existe une application moment⁹ $\mathbf{A}^\varepsilon = (A_1^\varepsilon, \dots, A_d^\varepsilon)$ de H_ε . La famille \mathbf{A}^ε n'a en général aucune raison de dépendre de manière C^∞ de ε puisque la non-unicité¹⁰ des applications moments implique que l'on puisse choisir *artificiellement* une famille \mathbf{A}^ε de telle sorte qu'elle ne soit même pas continue par rapport à ε . Il n'est alors pas clair qu'il en existe une qui soit continue par rapport à ε . On va éluder ce problème en partant de la définition suivante.

Définition B.28. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système complètement intégrable régulier non-dégénéré au sens "faible" et soit $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$ une ε -famille d'hamiltoniens telle que $H_{\varepsilon=0} = H_0$. On dira que H_ε est une **déformation (éventuellement) singulière** de H_0 s'il existe une ε -famille¹¹ d'applications moments \mathbf{A}^ε de H_ε .

Le fait qu'il existe une telle ε -famille \mathbf{A}^ε d'applications moments de H_ε implique bien sûr des conditions sur V , comme dans le cas régulier décrit dans la section 1, mais aussi des conditions sur \mathbf{A}^0 . En effet, si \mathbf{A}^0 est une application moment de H_0 régulière en un certain point $m \in \mathcal{M}$, alors toute ε -famille \mathbf{A}^ε sera aussi régulière près de m pour ε assez petit, puisque la propriété d'être *régulière* signifie que les différentielles dA_j^ε sont linéairement

⁹Définition A.6.

¹⁰Même si H_0 est non-dégénéré.

¹¹on rappelle que ε -famille signifie famille dépendant de ε de manière C^∞ .

indépendantes, ce qui est une condition ouverte. Cela veut dire que si H_ε est CI singulier, on ne pourra obtenir de ε -famille d'applications moments A^ε de H_ε qu'en déformant une application moment A^0 singulière de l'hamiltonien régulier H_0 .

2.1 Déformations d'applications moments à $O(\varepsilon^2)$

2.1.1 Applications moments V -déformables

On considère à partir de maintenant un hamiltonien perturbé de la forme $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, avec $V \in C^\infty(\mathcal{M})$, et on va chercher une application moment $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d)$ et une déformation $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{C} = (A_1 + \varepsilon C_1, \dots, A_d + \varepsilon C_d)$ qui soit une "application moment à $O(\varepsilon^2)$ près".

Définition B.29. Soit $A^\varepsilon = (A_1^\varepsilon, \dots, A_d^\varepsilon)$ une ε -famille de d -uplets de fonctions $A_j^\varepsilon \in C^\infty(\mathcal{M})$. On dit que A^ε est une **application moment de H_ε à $O(\varepsilon^2)$** si

- $\{A_j^\varepsilon, A_k^\varepsilon\} = 0$, pour tous $j, k = 1..d$.
- $\{A_j^\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2)$, pour tout $j = 1..d$.
- Les différentielles dA_j^ε sont linéairement indépendantes presque partout.

Définition B.30. Soient $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIreg non-dégénéré et $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. Une application moment \mathbf{A} de H_0 est dite **V -déformable** s'il existe des fonctions $C_j \in C^\infty(\mathcal{M})$ telles que pour tout $i, j = 1..d$ on ait

$$\{A_j + \varepsilon C_j, H_0 + \varepsilon V\} = O(\varepsilon^2)$$

et

$$\{A_i + \varepsilon C_i, A_j + \varepsilon C_j\} = O(\varepsilon^2).$$

Le lemme suivant donne la condition qui lie \mathbf{A} et V pour que \mathbf{A} soit V -déformable. Elle fait intervenir la condition de non-résonance de la définition B.16.

Lemme B.31. Soient $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIreg non-dégénéré et $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. Une application moment \mathbf{A} de H_0 est V -déformable si et seulement si pour tout $j = 1..d$ le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ est non-résonant.

Démonstration. Le hamiltonien $H_0 \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ étant non-dégénéré, la proposition A.81 nous apprend que les A_j sont forcément des tirés-arrières, i.e $A_j \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$. On va résoudre d'abord la première équation $\{A_j + \varepsilon C_j, H_0 + \varepsilon V\} = O(\varepsilon^2)$ et voir ensuite que la seconde $\{A_i + \varepsilon C_i, A_j + \varepsilon C_j\} = O(\varepsilon^2)$ sera automatiquement satisfaite.

1. La première équation s'écrit

$$\{A_j, H_0\} + \varepsilon \{A_j, V\} + \varepsilon \{C_j, H_0\} = O(\varepsilon^2).$$

Le premier terme est nul puisque \mathbf{A} est une application moment de H_0 , si bien que l'on doit simplement résoudre

$$\{A_j, V\} = \{H_0, C_j\}, \quad (\text{B.1})$$

pour tout $j = 1..d$ et tout $m \in \mathcal{M}$. C'est l'équation homologique du lemme B.20 qui nous assure que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\{H_0, C_j\} + \{V, A_j\} = I_j$, avec $I_j \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$, est la condition de non-résonance sur la fonction $\{V, A_j\}$. Si elle est remplie, on a de plus $I_j = \langle \{V, A_j\} \rangle = 0$ d'après la proposition A.47, et on peut choisir $\langle C_j \rangle = 0$.

2. La deuxième équation s'écrit

$$\{A_i, A_j\} + \varepsilon \{A_i, C_j\} + \varepsilon \{C_i, A_j\} = O(\varepsilon^2).$$

Le premier terme est nul puisque les A_j sont en involution du fait que \mathbf{A} est une application moment. Il faut alors simplement demander que le terme d'ordre ε^1 soit nul, i.e

$$\{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\} = 0. \quad (\text{B.2})$$

On va montrer que cette équation est automatiquement satisfaite dès que l'équation (B.1) l'est. En effet, si on applique $\{A_i, \cdot\}$ à l'équation (B.1), il sort

$$\{A_i, \{A_j, V\}\} = \{A_i, \{H_0, C_j\}\} = \{H_0, \{A_i, C_j\}\} \quad (\text{B.3})$$

où l'on a utilisé l'identité de Jacobi, ainsi que le fait que H_0 Poisson-commute avec A_i . De même, on remarque, grâce à l'identité de Jacobi et au fait que les A_j commutent, que $\{A_i, \{A_j, V\}\}$ est symétrique par rapport aux indices i et j . En antisymétrisant l'équation (B.3) par rapport à i et j , on trouve

$$\{H_0, \{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\}\} = 0.$$

On sait, d'après la proposition A.78, que la condition de non-dégénérescence sur l'hamiltonien H_0 implique que seules les fonctions dans $\pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ commutent avec lui, si bien que l'on a $\{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\} \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$. On va montrer que cette fonction est forcément nulle. En effet, tout d'abord le quatrième point de la proposition A.47 implique que cette fonction est \mathcal{G} -invariante, et donc que

$$\langle \{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\} \rangle = \{A_i, C_j\} + \{C_i, A_j\}.$$

De plus, le quatrième point de la proposition A.48 nous assure que $\langle \{A_i, C_j\} \rangle = 0$ du fait que $A_i \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$, ce qui prouve bien que l'équation (B.2) est satisfaite. ■

2.1.2 Petit retour sur le cas régulier

Le cas (éventuellement) singulier contient le cas régulier que l'on a étudié précédemment. On revient un instant sur ce cas régulier, mais sous l'angle des applications moments. Tout d'abord, en corollaire du lemme B.31, on a les propriétés suivantes.

Proposition B.32. *Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation.*

1. *Si V est non-résonante, alors toute application moment \mathbf{A} de H_0 est V -déformable.*
2. *Soit \mathbf{A} une application moment de H_0 régulière dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ est une boule. L'application moment \mathbf{A} est V -déformable si et seulement si la perturbation V est non-résonante.*

Démonstration. D'après le lemme B.31, l'application moment \mathbf{A} est V -déformable si et seulement si pour tout $j = 1..N$ le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ est non-résonant. la définition B.16 de la condition de non-résonance, cela signifie que pour tout $j = 1..d$

$$\forall k \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_k \implies \widetilde{\{A_j, V\}}(b, k) = 0.$$

De plus, en utilisant le fait que $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$, la série de Fourier du crochet de Poisson est donnée par $\widetilde{\{A_j, V\}}(b, k) = ida_j(k)_b \tilde{V}(b, k)$, d'après la proposition A.35. L'application moment \mathbf{A} est donc V -déformable si et seulement si

$$\forall k \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_k \implies da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0,$$

pour tout $j = 1..d$.

1. D'une part, si V est non-résonante, cela veut dire que pour tout $k \in \Gamma \setminus 0$ et tout $b \in \Sigma_k$, on a $\tilde{V}(b, k) = 0$ et donc $da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0$, ce qui implique bien que \mathbf{A} est V -déformable.
2. D'autre part, si \mathbf{A} est une application moment régulière dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$, cela signifie que les différentielles da_j sont linéairement indépendantes dans \mathcal{O} . Cela implique qu'il existe au moins un indice j tel que $da_j(k) \neq 0$, ce qui nous force à fixer $\tilde{V}(b, k) = 0$ pour assurer que $da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0$. Cela montre que \mathbf{A} est V -déformable si et seulement si V est non-résonante. ■

Si V est une perturbation non-résonante, le premier point de cette proposition nous apprend que l'on peut choisir une application \mathbf{A} de H_0 régulière et qu'elle est V -déformable en une application moment \mathbf{A}^ε à $O(\varepsilon^2)$ de $H_0 + \varepsilon V$, qui est elle aussi régulière, puisque la condition d'être régulière est une condition ouverte.

D'autre part, on sait d'après le théorème B.24 de déformation régulière que si V est une perturbation non-résonante, alors il existe une fonction $I \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$ et un champ de vecteurs hamiltonien X tels que $H_0 + \varepsilon V = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_X^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Le flot ϕ_X^ε permet alors de construire une déformation \mathbf{A}^ε comme le montre la proposition suivante.

Proposition B.33. Soit $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ une déformation régulière à $O(\varepsilon^2)$, i.e

$$H_\varepsilon = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

avec $I \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$. Pour toute application moment $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d)$ de H_0 , le tiré-arrière

$$\mathbf{A}^\varepsilon = \mathbf{A} \circ \phi_\varepsilon = (A_1 \circ \phi_\varepsilon, \dots, A_d \circ \phi_\varepsilon)$$

est une application moment de H_ε à $O(\varepsilon^2)$. De plus, si on note $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbf{A}^\varepsilon)$) le lieu singulier de \mathbf{A} (resp. \mathbf{A}^ε), on a

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \phi_\varepsilon(\mathcal{S}(\mathbf{A}^\varepsilon)).$$

Démonstration. En effet, pour tout $j = 1..d$, on a

$$\begin{aligned} \{A_j^\varepsilon, H_\varepsilon\} &= \{A_j \circ \phi_\varepsilon, (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon\} + O(\varepsilon^2) \\ &= \{A_j, (H_0 + \varepsilon I)\} \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

puisque ϕ_ε est une famille de symplectomorphismes. D'autre part, A_j et $H_0 + \varepsilon I$ commutent car ils sont des tirés arrières de fonctions de \mathcal{B} , on a donc $\{A_j^\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2)$. De même, on a $\{A_i \circ \phi_\varepsilon, A_j \circ \phi_\varepsilon\} = \{A_i, A_j\} \circ \phi_\varepsilon = 0$. Enfin, un point m est dans le lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ si et seulement si $(dA_1 \wedge \dots \wedge dA_d)_m = 0$, ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \left((\phi_\varepsilon^{-1})^* (dA_1^\varepsilon) \wedge \dots \wedge (\phi_\varepsilon^{-1})^* (dA_d^\varepsilon) \right)_m &= 0 \\ (\phi_\varepsilon^{-1})^* \left((dA_1^\varepsilon \wedge \dots \wedge dA_d^\varepsilon)_{\phi_\varepsilon^{-1}(m)} \right) &= 0, \end{aligned}$$

c'est à dire si et seulement si $\phi_\varepsilon^{-1}(m) \in \mathcal{S}(\mathbf{A}^\varepsilon)$. ■

2.2 Déformations singulières avec 1 résonance

On a vu précédemment que la condition de non-résonance pour une perturbation V est nécessaire et suffisante pour que $H_0 + \varepsilon V$ soit une déformation régulière de H_0 à $O(\varepsilon^2)$. On peut se demander si en imposant une condition moins forte on peut rester complètement intégrable mais avec l'apparition de singularités. On doit pour cela choisir une application moment \mathbf{A} singulière appropriée de l'hamiltonien régulier H_0 . La base du raisonnement est le lemme B.31 qui donne la condition nécessaire et suffisante, liant \mathbf{A} et V , pour que \mathbf{A} puisse être V -déformable. De manière "heuristique" on pourrait dire que moins forte est la condition imposée à V , plus grand sera le degré de singularité des applications moments V -déformables.

Si la perturbation V ne satisfait pas la condition de non-résonance, cela signifie qu'elle est k -résonante¹² pour au moins 1 vecteur $k \in \Gamma$ sur au moins un tore \mathcal{M}_b . Si c'est le cas, elle est en fait aussi k -résonante sur toute une famille de tores voisins, comme cela est précisé dans le lemme suivant.

Lemme B.34. *Soit un vecteur $k_1 \in \Gamma$ et un point $b_0 \in \mathcal{B}$. Si $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une fonction k_1 -résonante en b_0 , alors on a les propriétés suivantes.*

- Il existe un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ de b_0 tel que V est k_1 -résonante dans $\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$.
- Si \mathbf{A} est une application moment V -déformable, alors elle est forcément singulière et son lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vérifie

$$\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

De plus, en tout point $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$, on a

$$k_1 \in \bigcap_{j=1}^d \ker (da_j)_b,$$

où les fonctions $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$ sont définies par $A_j = a_j \circ \pi$.

Démonstration.

- Par définition, si V est k_1 -résonante en b_0 , cela signifie que sa série de Fourier vérifie $\tilde{V}(b_0, k_1) \neq 0$. Par continuité, on a $\tilde{V}(b, k_1) \neq 0$ pour b variant dans tout un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ de b_0 , donc notamment pour tous les points $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$. Ceci implique bien que V est aussi k_1 -résonante dans $\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$.

¹²Voir définition B.15.

- Si A est une application moment V -déformable, le lemme B.31 implique que le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ est non-résonant, pour tout $j = 1..d$. De plus, en utilisant le fait que $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$, la série de Fourier du crochet de Poisson est donnée par $\widehat{\{A_j, V\}}(b, k) = \widehat{ida_j(k)}_b \tilde{V}(b, k)$, d'après la proposition A.35. Pour tout $j = 1..d$, la condition de non-résonance pour $\{A_j, V\}$ s'écrit donc

$$\forall k \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_k \implies da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0.$$

En utilisant ensuite le fait que $\tilde{V}(b, k_1) \neq 0$ pour tout $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$, on voit que l'on doit avoir

$$\forall b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1} \implies da_j(k_1)_b = 0,$$

pour tout $j = 1..d$. Cela veut dire que les da_j ont un noyau commun qui contient la droite $\mathbb{R}.k_1$. Les da_j sont donc linéairement dépendantes en tout point de $\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$ et donc que les dA_j sont linéairement dépendantes en tout point de $\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1})$. ■

2.2.1 Forme normale résonante

On se rappelle que le théorème B.24 de déformation régulière nous assure que lorsque la perturbation V est non-résonante, on peut mettre l'hamiltonien $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ sous forme normale $H_\varepsilon = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, où I est une fonction constante le long des tores, i.e $I \in \pi^*(C^\infty(\mathcal{B}))$.

Si la perturbation V est k_1 -résonante pour un certain k_1 , alors elle ne satisfait pas la condition de non-résonance et il n'existe donc pas de famille de difféomorphismes ϕ^ε qui nous permettrait de déformer simplement une application moment A en $A^\varepsilon = A \circ \phi_\varepsilon$ comme dans la proposition B.33. Cependant, lorsque k_1 est la seule résonance, on va pouvoir trouver un difféomorphisme qui nous permettra de déformer les $d-1$ premières constantes du mouvement A_j , $j = 1..d-1$. Pour cela, on va mettre $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ sous forme normale $H_\varepsilon = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, avec une fonction $I \in C^\infty(\mathcal{M})$ la plus simple possible compte tenu de la propriété de résonance de V . Dans le théorème B.24, la fonction I étant constante le long des fibres, elle était \mathcal{G} -invariante, i.e égale à sa \mathcal{G} -moyenne. Dans le cas résonant, on ne peut pas espérer une telle propriété, mais on pourra néanmoins s'assurer que I sera invariant le long d'un feuilletage constant entier \mathcal{K}_1 de dimension $d-1$.

On rappelle que $k_1 \in \Gamma(E)$ étant un champ de vecteurs entiers sur \mathcal{B} , son image $\tilde{k}_1 = \iota(k_1)$ est une section constante de Λ^* . On notera \mathcal{K}_1 le feuilletage entier défini par $\mathcal{K}_1 = \ker(\tilde{k}_1)$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ on notera $\bar{f} = \text{moy}(f, \mathcal{K}_1)$ sa moyenne le long du feuilletage \mathcal{K}_1 , comme dans la définition A.61. La propriété importante que l'on utilisera est celle de la série de Fourier de la fonction moyennée, donnée dans la proposition A.62.

On définit maintenant la condition de non-résonance affaiblie que l'on va utiliser.

Définition B.35. Soit $k_1 \in \Gamma$ un vecteur minimal. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition (NR, k_1)** si elle n'est résonante en aucun point $b \in \mathcal{B} \setminus \Sigma_{k_1}$. Cela revient à dire que pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$ et tout $b \in \Sigma_k$ on a $\tilde{V}(b, k) = 0$.

Exemple B.36. Considérons sur

$$\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^d = \left\{ (x, \xi); x \in \mathbb{T}^d, \xi \in \mathbb{R}^d \right\}$$

le hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et le hamiltonien perturbé de la forme

$$H_\varepsilon(\xi) = \sum_{j=1}^d (\xi_j)^2 + \varepsilon V(x_1),$$

avec $V \in C^\infty(S^1)$. On vérifie facilement que la série de Fourier $\tilde{V}(k)$ est nulle pour tout $k \notin \{(k, 0, \dots, 0); k \in \mathbb{Z}\}$ et non nulle pour $k \in \{(k, 0, \dots, 0); k \in \mathbb{Z}\}$, et cela indépendamment de ξ . Si on note $k_1 = (1, 0, \dots, 0)$, cela implique que V est k_1 -résonant en tout point de la surface $\Sigma_{k_1} = \{(0, \xi_2, \dots, \xi_d); \xi_j \in \mathbb{R}\}$, mais qu'il satisfait la condition (NR, k_1).

Le lemme de forme normale suivant permet de se ramener à un cas proche de l'exemple précédent.

Lemme B.37. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clrég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. La condition (NR, k_1) pour V est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_G et une fonction $I \in C^\infty(\mathcal{M})$ tels que

$$H_0 + \varepsilon V = (H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_{\mathcal{X}_G}^\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

avec

$$I = \text{moy}(I, \mathcal{K}_1).$$

Dans ce cas, on peut choisir $I = \text{moy}(V, \mathcal{K}_1)$ et G tel que $\text{moy}(G, \mathcal{K}_1) = 0$.

Démonstration. En développant par rapport à ε , on a

$$H_0 + \varepsilon V = H_0 + \varepsilon I + \varepsilon \{G, H_0\} + O(\varepsilon^2).$$

Il suffit donc d'annuler le terme d'ordre ε , i.e résoudre $V = I + \{G, H_0\}$. Pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, on résout cette équation dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ en Fourier, en utilisant $H_0 = F_0 \circ \pi$ et la propriété A.35. Cela donne

$$idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = \tilde{I}(b, k) - \tilde{V}(b, k).$$

- Pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$, le fait que $I = \text{moy}(I, \mathcal{K}_1)$ et la proposition A.62 impliquent que $\tilde{I}(b, k) = 0$. On doit donc résoudre

$$dF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = i\tilde{V}(b, k).$$

On va utiliser le lemme B.18 de division avec comme espace de paramètre $P = \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$. Les hypothèses du lemme sont satisfaites grâce au fait que l'hamiltonien F_0 est non-dégénéré et possède donc la propriété décrite dans la proposition B.19. Le lemme B.18 nous assure alors que l'on peut diviser par $dF_0(k)$ pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$ si et seulement si $\tilde{V}(b, k) = 0$ pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$ et tout $b \in \Sigma_k$, i.e si et seulement si V satisfait la condition (NR, k_1).

- Lorsque $k \in \mathbb{Z}.k_1$, on peut choisir librement $\tilde{G}(b, k)$ et on doit fixer $\tilde{I}(b, k) = idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) + \tilde{V}(b, k)$. Par exemple, si on choisit $\tilde{G}(b, k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}.k_1$, cela fixe $\tilde{I}(b, k) = \tilde{V}(b, k)$. Comme par ailleurs $\tilde{I}(b, k) = 0$ pour $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$, cela implique que $I = \text{moy}(V, \mathcal{K}_1)$.

■

Exemple B.38 (suite). Considérons, comme dans l'exemple B.36, l'hamiltonien perturbé $H_\varepsilon(\xi) = \sum (\xi_j)^2 + \varepsilon V(x_1)$ sur $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^d$. Il satisfait la condition (NR, k_1) avec $k_1 = (1, 0, \dots, 0)$. La 1-forme $\tilde{k}_1 = \iota(k_1) \in \Gamma_\nabla(\Lambda^*)$ est simplement $\tilde{k}_1 = dx_1$ sur chaque fibre. Le feuilletage entier associé $\mathcal{K}_1 = \ker(\tilde{k}_1)$ est alors simplement $\mathcal{K}_1 = \text{Vect}(\partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_d})$. Notons $\bar{V} = \text{moy}(V, \mathcal{K}_1)$ la moyenne de V le long du feuilletage \mathcal{K}_1 . D'après la proposition A.62, la série de Fourier de \bar{V} est

$$\tilde{\bar{V}}(k, b) = \begin{cases} \tilde{V}(k) & \text{si } k = (m, 0, \dots, 0); m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'autre part, le fait que V ne dépende que de x_1 fait que de toute façon $\tilde{V}(k) = 0$ si $k \neq (m, 0, \dots, 0)$, ce qui fait que $\bar{V} = V$. Cela montre que $H_\varepsilon(\xi)$ est déjà sous la forme normale du lemme B.37, i.e $I = V$ et $\phi_\varepsilon = \mathbb{I}$.

Proposition B.39. Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation satisfaisant la condition (NR, k_1) et soit $\phi_\varepsilon = \phi_{\mathcal{X}_G}^\varepsilon$ la famille de symplectomorphismes de la forme normale du lemme précédent. Alors toute fonction $A = a \circ \pi$, $a \in C^\infty(\mathcal{B})$, telle que $da(k_1) = 0$, vérifie

$$\{A \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2).$$

Démonstration. En effet, d'après le lemme précédent, le crochet de Poisson est égal à $\{A \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = \{A, H_0 + \varepsilon I\} \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Tout d'abord, on a $\{A, H_0\} = 0$. D'autre part, la série de Fourier de $\{A, I\}$ est $ida(k) \tilde{I}(k, b)$ qui est nulle car :

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}.k_1$, on a $da(k) = 0$ par hypothèse.
- Pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_1$, on a $\tilde{I}(k, b) = 0$ puisque, d'après le lemme précédent, on a $I = \text{moy}(I, \mathcal{K}_1)$.

■

2.2.2 Déformation singulière avec 1 résonance

La proposition précédente nous permet de construire une application moment \mathbf{A} V -déformable optimale, au regard du lemme B.34, dans le sens où le lieu singulier de \mathbf{A} est exactement Σ_{k_1} et le corang est 1.

Théorème B.40. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clrég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation satisfaisant la condition (NR, k_1). Pour toutes fonctions $a_2, \dots, a_d \in C^\infty(\mathcal{B})$ dont les différentielles sont linéairement indépendantes et vérifient $da_j(k_1) = 0$ dans un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, alors $\mathbf{A} = (H_0, A_2, \dots, A_d)$, avec $A_j = a_j \circ \pi$, est une application moment de H_0 dont le lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vérifie

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \pi^{-1}(\Sigma_{k_1})$$

et de corang égal à 1.

De plus, \mathbf{A} est V -déformable et une possible déformation donnée par

$$\mathbf{A}^\varepsilon = ((H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon, A_2 \circ \phi_\varepsilon, \dots, A_d \circ \phi_\varepsilon),$$

où la famille de symplectomorphismes ϕ_ε et la fonction I sont données dans le lemme B.37.

Démonstration. Tout d'abord, les fonctions A_j commutent bien entre-elles et avec H_0 puisque que ce sont des tirés-arrières, ce qui fait que $\mathbf{A} = (H_0, A_2, \dots, A_d)$ est une application moment de H_0 . D'autre part, étant donné que les différentielles da_j sont linéairement indépendantes dans \mathcal{O} , les points singuliers $m \in \pi^{-1}(\mathcal{O})$ de \mathbf{A} sont ceux tels que dF_0 est linéairement dépendant des da_j en $b = \pi(m)$. Par hypothèse, les da_j forment dans \mathcal{O} une base de l'orthogonal (dual) de la droite $\mathbb{R}.k_1$, ce qui fait que dF_0 est linéairement dépendant des da_j en $b \in \mathcal{O}$ si et seulement si $dF_0(k_1)_b = 0$, i.e si et seulement si $b \in \mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1}$. En ces points là, le corang est égal à 1 puisque le noyau commun de dF_0 et des da_j est simplement la droite $\mathbb{R}.k_1$.

De plus, d'après la proposition B.39, les fonctions A_j vérifient $\{A \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2)$. On a aussi évidemment $\{(H_0 + \varepsilon I) \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2)$, ce qui montre que \mathbf{A}^ε est une application moment de H_ε à $O(\varepsilon^2)$. ■

Exemple B.41 (suite de la suite). Considérons toujours l'hamiltonien $H_\varepsilon(\xi) = \sum (\xi_j)^2 + \varepsilon V(x_1)$. Si on choisit $A_j = \xi_j$ pour $j = 2..d$, alors $\mathbf{A} = \left(\sum (\xi_j)^2, \xi_2, \dots, \xi_d\right)$ est une application moment de H_0 . Les points singuliers sont les (x, ξ) tels que $d\left(\sum (\xi_j)^2\right) \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_d = 0$, i.e tels que $\xi_1 d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_d = 0$. Le lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ est donc exactement

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \pi^{-1}(\Sigma_{k_1}) = \{(x, \xi); \xi_1 = 0\}.$$

Le théorème B.40 nous apprend que $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ est V -déformable en

$$\mathbf{A}^\varepsilon = \left(\sum (\xi_j)^2 + \varepsilon V, \xi_2, \dots, \xi_d\right).$$

Si l'on veut une application moment \mathbf{A} de H_0 qui soit V -déformable, le lemme B.34 nous oblige donc à la choisir très singulière puisque le lieu singulier contient $\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \Sigma_{k_1})$ qui est une sous-variété de \mathcal{M} de codimension 1. Cependant, on voudrait construire une application moment déformée \mathbf{A}^ε la moins singulière possible. La proposition suivante explicite les propriétés du lieu singulier de l'application moment déformée \mathbf{A}^ε du théorème précédent.

Proposition B.42. Soit \mathbf{A}^ε l'application moment du théorème B.40. Il existe une sous-variété Σ_ε de \mathcal{M} , ε -proche de $\pi^{-1}(\Sigma_{k_1})$, telle que le lieu singulier de \mathbf{A}^ε est donné par

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}^\varepsilon) = \phi_\varepsilon^{-1}(\mathcal{N}),$$

où $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ est le sous-ensemble de Σ_ε défini par

$$\mathcal{N} = \left\{m \in \Sigma_\varepsilon; \left(dI|_{\mathcal{M}_{\pi(m)}}\right)_m = 0\right\}.$$

Démonstration. Par définition, un point m est dans le lieu singulier de \mathbf{A}^ε si

$$(\phi_\varepsilon^* d(H_0 + \varepsilon I) \wedge \phi_\varepsilon^* dA_2^\varepsilon \wedge \dots \wedge \phi_\varepsilon^* dA_d^\varepsilon)_m = 0$$

c'est à dire si

$$(d(H_0 + \varepsilon I) \wedge dA_2^\varepsilon \wedge \dots \wedge dA_d^\varepsilon)_{\phi_\varepsilon(m)} = 0.$$

On introduit tout d'abord un premier système de coordonnées angles-actions $(x_j, \xi_j \circ \pi)$ telles que $a_j = \xi_j$ pour $j = 2..d$ et $d\xi_1(k_1) = 1$. Un point $\phi_\varepsilon^{-1}(m)$ est donc dans le lieu singulier de \mathbf{A}^ε si

$$(d(H_0 + \varepsilon I) \wedge dA_2^\varepsilon \wedge \dots \wedge dA_d^\varepsilon)_m = 0.$$

Cela est possible seulement si $\frac{\partial}{\partial \xi_1}(H_0 + \varepsilon I)_m = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x_j}(H_0 + \varepsilon I)_m = 0$ pour tout $j = 1..d$.

- Pour résoudre la première équation, on remarque que d'abord que $\frac{\partial H_0}{\partial \xi_1} = \Omega_{k_1}$. On introduit ensuite un système de coordonnées η_1, \dots, η_d sur \mathcal{B} telles que $\eta_1 = \Omega_{k_1}$ et η_2, \dots, η_d donnent un système de coordonnées sur Σ_{k_1} . On doit résoudre $\eta_1 + \varepsilon \frac{\partial I}{\partial \xi_1} = 0$. En considérant $(x_1, \dots, x_d, \eta_2, \dots, \eta_d)$ comme des paramètres, le théorème des fonctions implicites nous assure qu'il existe un unique $\eta_1(\varepsilon, x_1, \dots, x_d, \eta_2, \dots, \eta_d)$ tel que l'équation soit satisfaite pour ε assez petit. Cela définit une hypersurface Σ_ε proche de Σ_{k_1} .
- La deuxième équation est équivalente à $\frac{\partial}{\partial x_j}(I)_m = 0$ puisque H_0 ne dépend que des ξ_j . Cela signifie que la différentielle dI restreinte à l'espace vertical doit être nulle. ■

Exemple B.43 (fin). Considérons toujours l'hamiltonien $H_\varepsilon(\xi) = \sum (\xi_j)^2 + \varepsilon V(x_1)$ et son application moment $A^\varepsilon = \left(\sum (\xi_j)^2 + \varepsilon V, \xi_2, \dots, \xi_d \right)$. Les points singuliers de A^ε sont ceux pour lesquels on a $\left(\xi_1 + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_d = 0$ et $\left(\sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d = 0$. La première condition est simplement $\xi_1 = 0$ puisque V est indépendant des ξ_j , ce qui est l'équation de la surface Σ_{k_1} . On a donc exactement $\Sigma_\varepsilon = \pi^{-1}(\Sigma_{k_1})$. La deuxième équation sélectionne les x_1 tels que $V'(x_1) = 0$, puisque V ne dépend que de x_1 .

2.3 Déformations singulières avec n résonances

On peut affaiblir la condition (NR, k_1) en considérant des perturbations $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ ayant plusieurs résonances. Tout d'abord, si V est k_1 -résonant dans une région \mathcal{O}_1 et k_2 -résonant dans une deuxième région \mathcal{O}_2 ayant une intersection vide avec \mathcal{O}_1 , alors on se ramène localement au cas précédent. Dans chaque région \mathcal{O}_j on n'a que la résonance k_j à considérer et les résultats de la section précédente s'appliquent. Le cas intéressant est celui dans lequel V a plusieurs résonances, i.e V est k_j -résonant pour $j = 1..n$, en des points de l'intersection $\bigcap_j \Sigma_{k_j}$.

On donne maintenant l'équivalent du lemme B.34 pour le cas où l'on a plusieurs résonances.

Lemme B.44. Soit des vecteurs $k_1, \dots, k_n \in \Gamma$ et un point $b_0 \in \mathcal{B}$. Si $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ est une fonction k_j -résonante, pour tout $j = 1..n$, en un point même point $b_0 \in \bigcap_j \Sigma_{k_j}$, alors on a les propriétés suivantes.

- Il existe un voisinage $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ de b_0 tel que V est k_j -résonante dans $\mathcal{O} \cap \bigcap_i \Sigma_{k_i}$ pour tout $j = 1..n$.
- Si A est une application moment V -déformable, alors elle est forcément singulière et son lieu singulier $\mathcal{S}(A)$ vérifie

$$\pi^{-1} \left(\mathcal{O} \cap \bigcup_i \Sigma_{k_i} \right) \subset \mathcal{S}(A).$$

De plus, en tout point $b \in \mathcal{O} \cap \bigcap_i \Sigma_{k_i}$ on a

$$\text{Vect}(k_1, \dots, k_n) \subset \bigcap_{j=1}^d \ker (da_j)_b,$$

où les fonctions $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$ sont définies par $A_j = a_j \circ \pi$ et où $\text{Vect}(k_1, \dots, k_n)$. En particulier, les points de $\pi^{-1}(\mathcal{O} \cap \bigcap_i \Sigma_{k_i})$ sont de corang égal à la dimension de $\text{Vect}(k_1, \dots, k_n)$.

Démonstration. Application directe du lemme B.34. ■

2.3.1 Forme normale résonante

Tout d'abord, on peut généraliser le lemme B.37 de forme normale dans le cas où l'on a plusieurs résonances.

Définition B.45. Soit $k_1, \dots, k_n \in \Gamma$ des vecteurs minimaux. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition (NR, k_1, \dots, k_n)** si elle n'est résonante en aucun point $b \in \mathcal{B} \setminus \bigcup_j \Sigma_{k_j}$. Cela revient à dire que pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$ et tout $b \in \Sigma_k$ on a $\tilde{V}(b, k) = 0$.

Exemple B.46. Considérons sur

$$\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^d = \left\{ (x, \xi) ; x \in \mathbb{T}^d, \xi \in \mathbb{R}^d \right\}$$

le hamiltonien "énergie cinétique" $H_0 = \sum (\xi_j)^2$ et le hamiltonien perturbé de la forme

$$H_\varepsilon(\xi) = \sum_{j=1}^d (\xi_j)^2 + \varepsilon f(x_1) + \varepsilon g(x_2),$$

avec $f, g \in C^\infty(S^1)$. On vérifie facilement que la série de Fourier de la perturbation $V = f(x_1) + g(x_2)$ est

$$\begin{aligned} \tilde{V}(k) &= \tilde{f}(m) + \tilde{g}(n) && \text{pour } k = (m, n, 0, \dots, 0), \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z} \\ \tilde{V}(k) &= 0 && \text{pour } k \neq (m, n, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

cela indépendamment de ξ . Si l'on note $k_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $k_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, on voit que cela signifie que V est k_1 -résonant en tout point de la surface $\Sigma_{k_1} = \{(0, \xi_2, \dots, \xi_N) ; \xi_j \in \mathbb{R}\}$ et k_2 -résonant en tout point de la surface $\Sigma_{k_2} = \{(\xi_1, 0, \xi_3, \dots, \xi_N) ; \xi_j \in \mathbb{R}\}$. Notamment, V est résonant en tout point de l'intersection $\Sigma_{k_1} \cap \Sigma_{k_2} = \{(0, 0, \xi_3, \dots, \xi_N) ; \xi_j \in \mathbb{R}\}$. Par contre, on voit facilement que $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la condition (\star, k_1, \dots, k_n) , puisque pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$, on a $\tilde{V}(b, k) = 0$.

Le lemme de forme normale suivant permet de se ramener à un cas proche de l'exemple précédent. Pour chaque vecteur de résonance k_j , $j = 1..n$, on note $\tilde{k}_j = \iota(k_j)$ la section constante de Λ^* associée et on définit le feuilletage entier $\mathcal{K}_j = \ker(\tilde{k}_j)$.

Lemme B.47. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système CIrég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation. La condition (NR, k_1, \dots, k_n) pour V est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_G et des fonctions $I_1, \dots, I_n \in C^\infty(\mathcal{M})$ tels que

$$H_0 + \varepsilon V = (H_0 + \varepsilon(I_1 + \dots + I_n)) \circ \phi_{\mathcal{X}_G}^\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

avec

$$I_j = \text{moy}(I_j, \mathcal{K}_j).$$

Dans ce cas, on peut choisir $I_j = \text{moy}(V, \mathcal{K}_j)$ et G tel que $\text{moy}(G, \mathcal{K}_j) = 0$ pour tout $j = 1..n$.

Démonstration. On procède comme dans le lemme B.37. On doit annuler le terme d'ordre ε dans l'équation, i.e résoudre $V = I_1 + \dots + I_n + \{G, H_0\}$. Pour toute boule $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$, on résout cette équation dans $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ en Fourier, en utilisant $H_0 = F_0 \circ \pi$ et la propriété A.35. Cela donne

$$idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = \tilde{I}_1(b, k) + \dots + \tilde{I}_n(b, k) - \tilde{V}(b, k).$$

- Pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$, le fait que $I_j = moy(I, \mathcal{K}_j)$ et la proposition A.62 impliquent que $\tilde{I}_j(b, k) = 0$, pour tout $j = 1..n$. On doit donc résoudre

$$dF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = i\tilde{V}(b, k).$$

On va utiliser le lemme B.18 de division avec comme espace de paramètre $P = \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$. Les hypothèses du lemme sont satisfaites grâce au fait que l'hamiltonien F_0 est non-dégénéré et possède donc la propriété décrite dans la proposition B.19. Le lemme B.18 nous assure alors que l'on peut diviser par $dF_0(k)$ pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$ si et seulement si $\tilde{V}(b, k) = 0$ pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_j \mathbb{Z}.k_j$ et tout $b \in \Sigma_k$, i.e si et seulement si V satisfait la condition (NR, k_1, \dots, k_n) .

- Pour tout $j = 1..n$, lorsque $k \in \mathbb{Z}.k_j \setminus 0$, on doit avoir $\tilde{I}_i(b, k) = 0$ si $i \neq j$ puisque $I_i = moy(I_i, \mathcal{K}_i)$. Il reste donc

$$idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) = \tilde{I}_j(b, k) - \tilde{V}(b, k).$$

On peut choisir librement $\tilde{G}(b, k)$ et on doit fixer $\tilde{I}_j(b, k) = idF_0(k)_b \tilde{G}(b, k) + \tilde{V}(b, k)$. Pour $k = 0$, on doit fixer $\tilde{I}_j(b, k) = \tilde{V}(b, k)$.

- Par exemple, si on choisit $\tilde{G}(b, k) = 0$ pour tout $k \in \bigcup \mathbb{Z}.k_j$, cela fixe $I_j = moy(V, \mathcal{K}_j)$ et la fonction G vérifie bien $moy(G, \mathcal{K}_j) = 0$ pour tout $j = 1..n$. ■

Exemple B.48 (suite). Considérons l'hamiltonien perturbé $H_\varepsilon(\xi) = \sum (\xi_j)^2 + \varepsilon f(x_1) + \varepsilon g(x_2)$ sur $\mathcal{M} = T^*\mathbb{T}^d$ de l'exemple B.46. Il satisfait la condition (NR, k_1, k_2) avec $k_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $k_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. Les 1-formes $\tilde{k}_j = \iota(k_j) \in \Gamma_\nabla(\Lambda^*)$ sont simplement $\tilde{k}_j = dx_j$ sur chaque fibre. Les feuilletages entiers associés $\mathcal{K}_j = \ker(\tilde{k}_j)$ sont alors simplement $\mathcal{K}_1 = Vect(\partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_N})$ et $\mathcal{K}_2 = Vect(\partial_{x_1}, \partial_{x_3}, \dots, \partial_{x_N})$. On voit facilement que $moy(V, \mathcal{K}_1) = f$ et $moy(V, \mathcal{K}_2) = g$, ce qui fait que $H_\varepsilon(\xi)$ est déjà sous la forme normale du lemme B.47, avec $I_1 = f, I_2 = g$ et $\phi_\varepsilon = \mathbb{I}$.

Proposition B.49. Soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation satisfaisant la condition (NR, k_1, \dots, k_n) et soit $\phi_\varepsilon = \phi_{\lambda_G}^\varepsilon$ la famille de symplectomorphismes de la forme normale du lemme B.47. Alors toute fonction $A = a \circ \pi, a \in C^\infty(\mathcal{B})$, telle que $da(k_j) = 0$ pour tout $j = 1..n$, vérifie

$$\{A \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = O(\varepsilon^2).$$

Démonstration. En effet, d'après le théorème précédent, le crochet de Poisson est égal à $\{A \circ \phi_\varepsilon, H_\varepsilon\} = \{A, H_0 + \varepsilon(I_1 + \dots + I_n)\} \circ \phi_\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Tout d'abord, on a $\{A, H_0\} = 0$. D'autre part, pour tout $j = 1..n$, la série de Fourier de $\{A, I_j\}$ est $ida(k) \tilde{I}_j(k, b)$ qui est nulle car :

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}.k_j$, on a $da(k) = 0$ par hypothèse.
- Pour tout $k \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}.k_j$, on a $\tilde{I}(\tilde{k}, b) = 0$ puisque, d'après le lemme B.47, on a $I_j = \text{moy}(I_j, \mathcal{K}_j)$.

■

2.3.2 Déformation singulière avec n résonances

On va se servir de la proposition précédente pour construire une application moment V -déformable lorsque V a plusieurs résonances. La construction proposée est cependant moins satisfaisante que celle du théorème B.40 pour deux raisons. Premièrement, on demande une condition plus forte que la condition $(\text{NR}, k_1, \dots, k_n)$. Deuxièmement, l'application moment ne semble pas *optimale*, au regard du lemme B.44, puisque le corang est égal à n sur l'union des surfaces $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$ alors que le lemme B.44 impose a priori seulement que le corang soit égal à n sur l'intersection $\bigcap_i \Sigma_{k_i}$ et égal à 1 sur les surfaces Σ_{k_i} en dehors de l'intersection.

Condition 2.1. Soit $k_1, \dots, k_n \in \Gamma$ des vecteurs minimaux. On dit qu'une fonction $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfait la **condition** ($\clubsuit, k_1, \dots, k_n$) si on a les conditions suivantes :

- V satisfait la condition $(\text{NR}, k_1, \dots, k_n)$.
- Les vecteurs k_j sont linéairement indépendants.
- En tout point de $\bigcap_i \Sigma_{k_i}$, la hessienne $\nabla \nabla F$ restreinte à l'espace $\text{Vect}(k_1, \dots, k_n)$ est non-dégénérée.

Théorème B.50. Soit $(H_0, \mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B})$ un système Clrég non-dégénéré et soit $V \in C^\infty(\mathcal{M})$ une perturbation satisfaisant la condition ($\clubsuit, k_1, \dots, k_n$). Soit $a_{n+1}, \dots, a_d \in C^\infty(\mathcal{B})$ des fonctions dont les différentielles sont linéairement indépendantes et forment une base de $(\text{Vect}(k_1, \dots, k_n))^\circ$ dans un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$. Soit ensuite les fonctions $a_1, \dots, a_n \in C^\infty(\mathcal{B})$ définies par

$$a_j = \Omega_{k_1}^2 \dots \Omega_{k_n}^2 \cdot \Omega_{k_j}.$$

Si on note $A_j = a_j \circ \pi$, pour tout $j = 1..d$, alors $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_d)$ est une application moment V -déformable de H_0 dont le lieu singulier $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vérifie

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{S}(\mathbf{A}) = \pi^{-1} \left(\bigcup_i \Sigma_{k_i} \right) \cap \mathcal{O}$$

et de corang égal à n en tout point de $\mathcal{O} \cap \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

Démonstration. D'après le lemme B.31, \mathbf{A} est une application moment V -déformable si et seulement si le crochet de Poisson $\{A_j, V\}$ est non-résonant pour tout $j = 1..d$, ce qui s'écrit

$$\forall k \in \Gamma \setminus 0, \forall b \in \Sigma_k \implies da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0,$$

où $A_j = a_j \circ \pi$, avec $a_j \in C^\infty(\mathcal{B})$.

Notons $\beta_j = da_j$ pour $j = n+1..d$ et $a_i = \Omega_1^2 \dots \Omega_n^2 \cdot \Omega_i$ pour $j = 1..n$, où l'on a noté $\Omega_i = \Omega_{k_i}$ pour simplifier les notations. Cette construction permet effectivement de satisfaire la condition de non-résonance pour $\{A_j, V\}$ puisque :

- La condition (NR, k_1, \dots, k_n) étant satisfaite pour V , cela implique que pour tout $k \in \Gamma \setminus \bigcup_i \mathbb{Z}.k_i$ et tout $b \in \Sigma_k$, on a $\tilde{V}(b, k) = 0$. Il en résulte alors que pour tout $j = 1..d$, on a

$$da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0.$$

- Pour tout $i = 1..n$, la différentielle de da_i possède au moins $\Omega_1^2 \dots \Omega_n^2$ en facteur, qui est nul en tout point de $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$, ce qui fait que pour tout $k \in \bigcup_i \mathbb{Z}.k_i$ et pour tout $b \in \Sigma_k \cap \mathcal{O}$, on a $da_i = 0$ et donc

$$da_i(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0.$$

D'autre part, pour tout $j = n + 1..d$, pour tout $k \in \bigcup_i \mathbb{Z}.k_i$ et en tout point $b \in \mathcal{O}$, on a $da_j(k)_b = 0$ et donc

$$da_j(k)_b \tilde{V}(b, k) = 0.$$

Considérons maintenant l'indépendance linéaire des différentielles da_1, \dots, da_d en dehors du lieu $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$. Tout d'abord, les β_j , pour $j = n + 1..d$ sont linéairement indépendants par définition. On va montrer ensuite que les da_j , pour $j = 1..n$, sont linéairement indépendants entre eux, et qu'ils sont linéairement indépendants des β_j en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$. Pour alléger les notations, on va noter $\Omega = \Omega_1 \dots \Omega_n$. Les fonctions a_j s'écrivent $a_j = \Omega^2 \Omega_j$ et on a donc $da_j = 2\Omega \Omega_j d\Omega + \Omega^2 d\Omega_j$.

- Les différentielles da_j , pour $j = 1..n$, sont linéairement indépendantes dans \mathcal{O} . En effet, on a

$$\begin{aligned} da_1 \wedge \dots \wedge da_n &= \sum_{j=1}^n (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j-1}) \wedge (2\Omega \Omega_j d\Omega) \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j+1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &\quad + (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_n), \end{aligned}$$

puisque le terme $d\Omega$ peut apparaître au plus une fois dans le produit extérieur. D'autre part, on a

$$d\Omega = \sum_{k=1}^n \Omega_1 \dots \Omega_{k-1} \Omega_{k+1} \dots \Omega_n d\Omega_k,$$

et par antisymétrie du produit extérieur

$$d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_{j-1} \wedge d\Omega \wedge d\Omega_{j+1} \wedge d\Omega_n = d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_{j-1} \wedge (\Omega_1 \dots \Omega_{j-1} \Omega_{j+1} \dots \Omega_n d\Omega_j) \wedge d\Omega_{j+1} \wedge d\Omega_n,$$

ce qui fait que dans la double somme sur j et k , seuls les termes pour lesquels $j = k$ sont non nuls. Cela donne alors

$$\begin{aligned} da_1 \wedge \dots \wedge da_n &= 2 \sum_{j=1}^n (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j-1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_j) \wedge (\Omega^2 d\Omega_{j+1}) \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &\quad + (\Omega^2 d\Omega_1) \wedge \dots \wedge (\Omega^2 d\Omega_n) \\ &= (2n + 1) \Omega^{2n} d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_n, \end{aligned}$$

ce qui est effectivement non-nul en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$ puisque que les k_i étant linéairement indépendants, le lemme A.75 nous assure que les différentielles $d\Omega_j$ le sont aussi dans tout un voisinage de $\bigcap_i \Sigma_{k_i}$.

- Les différentielles da_j , pour $j : 1..n$, sont linéairement indépendants des β_j . Pour montrer cela, on va montrer que $(da_1 \wedge \dots \wedge da_n)(k_1 \wedge \dots \wedge k_n)$ est non nul en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
(da_1 \wedge \dots \wedge da_n)(k_1 \wedge \dots \wedge k_n) &= (da_1 \wedge \dots \wedge da_n)(k_1, \dots, k_n) \\
&= (2n+1) \Omega^{2n} (d\Omega_1 \wedge \dots \wedge d\Omega_n)(k_1, \dots, k_n) \\
&= (2n+1) \Omega^{2n} \sum_{\pi \in \text{perm}} (-1)^\pi d\Omega_{\pi(1)}(k_1) \dots d\Omega_{\pi(n)}(k_n) \\
&= (2n+1) \Omega^{2n} \sum_{\pi} (-1)^\pi \left(\nabla_{k_{\pi(1)}} \nabla_{k_1} H \right) \dots \left(\nabla_{k_{\pi(n)}} \nabla_{k_n} H \right),
\end{aligned}$$

où l'on a noté $(-1)^\pi$ le signe de la permutation π . Si on note $H_{ij} = \nabla_{k_i} \nabla_{k_j} H$ la matrice de la hessienne de $\nabla \nabla H$ restreinte à l'espace $\text{Vect}(k_1, \dots, k_n)$, on a simplement

$$(da_1 \wedge \dots \wedge da_n)(k_1 \wedge \dots \wedge k_n) = (2n+1) \Omega^{2n} \det(H_{ij}).$$

Par hypothèse, V satisfaisant la condition $(\clubsuit, k_1, \dots, k_n)$, ce qui fait que le déterminant de H_{ij} est non nul en tout point de $\bigcap_i \Sigma_{k_i}$ et donc dans tout un voisinage que l'on suppose contenir \mathcal{O} (sinon, on restreint \mathcal{O} à un ouvert plus petit). Cela assure qu'en dehors de $\bigcup_i \Sigma_{k_i}$, $(da_1 \wedge \dots \wedge da_n)(k_1 \wedge \dots \wedge k_n)$ est non nul. ■

Chapitre C

Outils semi-classiques

1 Introduction

1.1 Comment lire ce chapitre

Dans ce chapitre, on donne les outils semi-classiques qui sont à la base de la construction des formes normales du chapitre D et des quasimodes du chapitre E. L'outil principal est la notion d'opérateur pseudodifférentiel (OPD) introduite initialement par Hörmander ([38, 29]) pour étudier les EDP sur \mathbb{R}^d et développée ensuite dans diverses directions comme les opérateurs pseudo-différentiels dépendant d'un petit paramètre et/ou définis sur une variété autre que \mathbb{R}^d . Comme on l'a annoncé dans l'introduction, on va utiliser des opérateurs pseudodifférentiels dépendant d'un petit paramètre \hbar et définis sur un tore affine \mathcal{T} . Cette structure géométrique particulière permet de parler de symbole globalement défini sur \mathcal{T} . Ces opérateurs pseudodifférentiels sur le tore, dits "OPD périodiques", ont été étudiés par différents auteurs ([22, 31, 64, 65]) mais ceux-ci ne considèrent que le cas sans petit paramètre. D'autre part on aura besoin, pour construire les formes normales dites quasi-résonantes du chapitre D, de considérer des symboles dont la régularité se dégrade lorsque $\hbar \rightarrow 0$, de manière similaire (mais non identique) aux symboles introduits par Sjöstrand ([26, 61]) pour étudier les états semi-excités.

Les opérateurs que nous utiliserons ne sont donc pas, à proprement parler, présentés dans les ouvrages. C'est la raison pour laquelle nous avons préférés donner les résultats principaux de ce calcul pseudodifférentiel dans ce chapitre, bien qu'ils ne surprendront probablement pas le lecteur familiarisé avec le calcul semi-classique. A savoir, le calcul symbolique et les règles de composition (théorème C.19 pour le produit de Moyal) fonctionne de manière attendue, la continuité L^2 (théorème C.22 de Calderón-Vaillancourt) est valable pour les symboles "bornés". Le calcul symbolique présenté dans la section 2.5 est un calcul symbolique "approché" (à \hbar^∞) pour des raisons expliquées dans cette section.

Le lecteur familiarisé avec le calcul \hbar -pseudo-différentiel ordinaire pourra donc passer assez vite sur la section 2 de ce chapitre. Il est invité néanmoins à consulter la section 3 qui traite de la microlocalisation près d'un tore lagrangien.

1.2 Fibration lagrangienne naturelle associée à un tore affine

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, toute fibre $\mathcal{N} = \pi^{-1}(b)$ d'une fibration en tores lagrangiens $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est naturellement munie d'une connexion affine ∇ plate, sans

torsion¹ et sans holonomie². L'absence d'holonomie permet de définir globalement l'espace $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{N}) \subset \Omega^1(\mathcal{N})$ des 1-formes constantes. D'autre part, on sait depuis Weinstein ([69]) que si l'on se donne un feuilletage lagrangien P transverse à \mathcal{N} , alors il existe un symplectomorphisme φ d'un voisinage de $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ dans un voisinage de la section nulle de $T^*\mathcal{N}$ qui envoie \mathcal{N} sur la section nulle et qui envoie les feuilles de P sur les feuilles verticales de $T^*\mathcal{N}$. L'image par cette application d'une fibre de la fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$ est une section $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow T^*\mathcal{N}$, c'est à dire une 1-forme sur \mathcal{N} , $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{N})$. De plus, l'application φ étant symplectique, cette section est lagrangienne ce qui est équivalent à dire que la 1-forme α est fermée. On peut montrer que si l'on choisit astucieusement³ le feuilletage P alors φ envoie les fibres $\pi^{-1}(b)$ sur les sections constantes relativement à la connexion ∇ , i.e $\alpha \in \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{N})$.

Inversement, si l'on se donne (\mathcal{N}, ∇) un tore affine standard, l'absence d'holonomie permet de définir globalement l'espace $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{N})$ dont les éléments définissent une fibration "horizontale" dans $T^*\mathcal{N}$. Les fibres sont lagrangiennes puisque $\nabla\alpha = 0$ implique $d\alpha = 0$. De plus, ce sont des tores puisque ce sont des sections de $T^*\mathcal{N}$. Il s'agit donc d'une fibration en tores lagrangiens $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{N})$ où l'espace de base $\mathcal{B} = \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{N})$ est ici un espace vectoriel de dimension N qui est donc trivial du point de vue topologique (la monodromie et la classe de Chern sont nulle).

2 Opérateur pseudo-différentiels sur le tore

2.1 Quelques rappels et quelques notations

Soit (\mathcal{T}, ∇) un tore affine standard (sans holonomie). Comme on vient de le voir, l'absence d'holonomie permet de définir globalement l'espace $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$ des 1-formes constantes dont les éléments définissent dans le cotangent $T^*\mathcal{T}$ une fibration "horizontale" en tores lagrangiens $T^*\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B} = \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$. Le cotangent $T^*\mathcal{T}$ est alors naturellement isomorphe à $\mathcal{T} \times \mathcal{B}$ et dorénavant tout élément $m \in T^*\mathcal{T}$ sera noté $m = (x, \xi)$, où $x \in \mathcal{T}$ et $\xi \in \mathcal{B}$, étant entendu que l'on utilise implicitement l'isomorphisme $T^*\mathcal{T} \cong \mathcal{T} \times \mathcal{B}$. Pour tout point $m = (x, \xi)$, on dira que x est la **position** et ξ l'**impulsion**. Pour tout $\xi \in \mathcal{B}$, on notera $\mathcal{T}_{\xi} = \pi^{-1}(\xi) = \{(x, \xi) ; x \in \mathcal{T}\}$ la fibre "horizontale" qui est un tore affine et par construction naturellement isomorphe à (\mathcal{T}, ∇) . On considérera dans la suite un hamiltonien $H(\xi)$ indépendant de la variable x et donc complètement intégrable pour cette fibration horizontale.

2.1.1 Séries de Fourier

Système de coordonnées affine. Un système de coordonnées adapté à la structure affine de \mathcal{T} sera de la forme $(x_j, \xi_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d \times \mathbb{R}^d$, où l'on utilisera les lettres x et ξ pour les points et les mêmes lettres munies d'indices pour les coordonnées. Un tel système de coordonnées sera dit "affine" et forme un système de coordonnées angles-actions.

Réseau des périodes. On rappelle que parmi les champs de vecteurs constants $\mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T})$, il y a ceux dont le flot est 1-périodique. On note $\Lambda \subset \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T})$ le réseau⁴ formé par ces champs de

¹Définition A.3 et théorème A.4.

²Proposition A.9.

³A savoir, si on choisit P invariant sous l'action du fibré torique \mathcal{G} associée à la fibration $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}$, ce qui est toujours possible localement près d'une fibre.

⁴Définition A.21.

vecteurs. On définit ensuite le réseau 2π -dual $\Lambda^* \subset \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$ par

$$\Lambda^* = \{ \alpha \in \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T}) \mid \forall \mathcal{X} \in \Lambda \Rightarrow \alpha(\mathcal{X}) \in 2\pi\mathbb{Z} \}.$$

On définit de même $\Omega_{\nabla}^d(\mathcal{T})$ l'espace des formes volumes constantes. C'est un espace vectoriel de dimension 1 qui contient un unique⁵ élément $d\mu$ tel que

$$\int_{\mathcal{T}} d\mu = 1.$$

Dans un système de coordonnées affine, cette forme volume s'écrit $d\mu = \frac{1}{(2\pi)^d} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d$.

On notera aussi $dx = d\mu$ pour rappeler quelle est la variable que l'on intègre.

Absence de monodromie. Dans le premier chapitre (sections 2.2.3 et 2.2.4), on a vu que le réseau des périodes $\Lambda_{\xi} \subset \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T}_{\xi})$ dépend de manière C^{∞} de ξ . De plus, l'absence de monodromie dans notre cas permet d'identifier naturellement chaque réseau Λ_{ξ} avec Λ , ce qu'on fera toujours implicitement. D'autre part, on a vu l'espace de base \mathcal{B} est muni d'une structure affine entière naturelle, sans monodromie comme on vient de le dire. La forme symplectique permet de construire un isomorphisme naturel ι entre l'espace de Fourier Λ^* et l'espace E des champs de vecteurs constants entiers sur \mathcal{B} . Dans ce chapitre et les suivants, on identifiera implicitement ces deux espaces. Par exemple, si $H(\xi)$ est un hamiltonien indépendant de la variable x et si X_H est son champ de vecteurs associé, on écrira⁶ $k(X_H) = dH(k)$, où k est considéré alternativement comme un élément de Λ^* puis de E .

Espace $L^2(\mathcal{T})$. A l'aide de la forme volume $d\mu$, on définit le produit scalaire suivant

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\mathcal{T}} d\mu \bar{f} g$$

pour tout couple (f, g) de fonctions de \mathcal{T} à valeur complexe. On définit alors la norme L^2 associée par $\|f\|_{L^2} = \langle f \mid f \rangle$ et l'espace $L^2(\mathcal{T}) = \{f; \|f\|_{L^2} < \infty\}$.

Moyennant le choix d'un point origine $x_0 \in \mathcal{T}$, on définit aussi la série de Fourier $\tilde{f} : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\tilde{f}(k) = \left\langle e^{ik(x-x_0)} \mid f \right\rangle = \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} f.$$

Pour des fonctions assez régulière, on aura la formule inverse

$$f(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} \tilde{f}(k) e^{ik(x-x_0)}.$$

Métrique constante. Pour définir les normes et les espaces de Sobolev, on a besoin d'une norme sur $\mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T})$ ou sur $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$. Si l'on se donne une métrique g définie positive et constante sur \mathcal{T} , on notera $\langle \mid \rangle$ le produit scalaire correspondant sur $\mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T})$ et $\| \mid \|$ la norme associée. On notera de manière identique $\langle \mid \rangle$ et $\| \mid \|$ le produit scalaire et la norme sur le dual $\Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$.

Espace de Sobolev. Pour toute fonction $f \in L^2(\mathcal{T})$ et pour tout entier positif s , on définit, lorsqu'elle existe, sa norme de Sobolev $\|f\|_{H^s}$ par

$$\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathcal{T}} d\mu \left| (1 - \Delta)^{\frac{s}{2}} f \right|^2.$$

⁵On aura au préalable fixé une orientation sur \mathcal{N} .

⁶Proposition A.35.

On voit facilement que la norme de Sobolev $\|f\|_{H^s}$ s'exprime en fonction de la série de Fourier de f par

$$\|f\|_{H^s}^2 = \sum_{k \in \Lambda^*} (1 + |k|^2)^s |\tilde{f}(k)|^2.$$

On définit ensuite l'espace de Sobolev $H^s(\mathcal{T})$ par

$$H^s(\mathcal{T}) = \{f; \|f\|_{H^s} < +\infty\}.$$

On a notamment $H^0(\mathcal{T}) = L^2(\mathcal{T})$. De plus, pour toute fonction $f \in H^s(\mathcal{T})$ on a l'estimation

$$|\tilde{f}(k)| \leq \frac{\|f\|_{H^s}}{(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

2.1.2 Quelques trucs et astuces...

Proposition C.1. *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$|k^\alpha| \leq |k|^{|\alpha|}.$$

Réciproquement, pour tout entier N positif, il existe un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| = N$ et tel que

$$|k|^N \leq d^{\frac{N}{2}} |k^\alpha|.$$

Démonstration. Le premier point est trivial, puisque $|k^\alpha| = |k_1^{\alpha_1} \dots k_d^{\alpha_d}|$. En utilisant $|k_j^{\alpha_j}| \leq |k|^{\alpha_j}$, on trouve bien $|k^\alpha| \leq |k|^{\alpha_1} \dots |k|^{\alpha_d} = |k|^{|\alpha|}$. Pour prouver le deuxième point, on choisit l'indice J tel que $|k_J| \geq |k_j|$ pour tout $j = 1..d$ et on définit le multi-indice $\alpha \in \mathbb{Z}^N$ par $\alpha_J = N$ et $\alpha_j = 0$ pour $j \neq J$. Tout d'abord, on a bien $|\alpha| = N$ et de plus,

$$|k^\alpha| = |k_J|^N = |k_J^2|^{\frac{N}{2}} = \frac{1}{d^{\frac{N}{2}}} \left| \underbrace{k_J^2 + \dots + k_J^2}_d \right|^{\frac{N}{2}} \geq \frac{1}{d^{\frac{N}{2}}} |k_1^2 + \dots + k_d^2|^{\frac{N}{2}},$$

ce qui implique bien que $|k^\alpha| \geq \frac{1}{\sqrt{d}^N} |k^2|^{\frac{N}{2}}$. ■

Proposition C.2. *Pour tout N on a*

$$(k \cdot \partial_x)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} k^\alpha \partial_x^\alpha.$$

Démonstration. Tout d'abord, on a

$$k \cdot \partial_x = \sum_{j=1}^d k_j \partial_{x_j} = \sum_{|\alpha|=1} k^\alpha \partial_x^\alpha,$$

ce qui fait que

$$(k \cdot \partial_x)^N = \prod_{n=1}^N \sum_{|\alpha(n)|=1} k^{\alpha(n)} \partial_x^{\alpha(n)} = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} k^\alpha \partial_x^\alpha.$$

■

On définit l'opérateur différentiel L et son transposé L^t par

$$L = \frac{1 + ik \cdot \partial_y}{1 + |k|^2} \text{ et } L^t = \frac{1 - ik \cdot \partial_y}{1 + |k|^2}.$$

Proposition C.3. *On a la propriété évidente suivante*

$$L \left(e^{ik(x-y)} \right) = e^{ik(x-y)}.$$

Il en découle que si $\varphi \in C^\infty(\mathcal{T})$, alors pour tout entier s on a

$$\int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y) = \frac{1}{(1 + |k|^2)^s} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) k^\gamma \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \partial_y^\gamma \varphi(y),$$

où les $C(\gamma, s)$ sont des constantes.

Démonstration. En effet, en insérant l'opérateur L à la puissance s , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y) &= \int_{\mathcal{T}} dy L^s \left(e^{ik(x-y)} \right) \varphi(y) \\ &= \frac{1}{(1 + |k|^2)^s} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (1 - ik \cdot \partial_y)^s \varphi(y). \end{aligned}$$

D'autre part, on voit facilement qu'il existe des constantes $C(\gamma, s)$ telle que

$$(1 - ik \cdot \partial_y)^s \varphi = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) k^\gamma \partial_y^\gamma \varphi,$$

ce qui prouve l'assertion. ■

2.2 Espaces de symboles

2.2.1 Symboles ordinaires

Un opérateur pseudo-différentiel, abrégé OPD, est un opérateur \hat{A} qui à une fonction $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ associe la fonction $\hat{A}(\varphi) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\left(\hat{A}\varphi_{\hbar} \right) (x) = \sum_{k \in \Lambda^*} A_{\hbar}(x, \hbar k) \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y),$$

où $A_{\hbar}(x, \xi) : T^*\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction que l'on appelle le **symbole (gauche)** de l'opérateur \hat{A} . C'est pour l'instant une écriture formelle et tout l'art consiste à chercher dans quels espaces de fonctions doivent vivre $A_{\hbar}(x, \xi)$ et $\varphi(x)$ pour que l'expression précédente ait tout d'abord un sens et ensuite de bonnes propriétés.

Pour commencer, si on choisit φ dans $C^\infty(\mathcal{T})$ et A_{\hbar} telle que pour tout \hbar et tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$

$$|A_{\hbar}(x, \xi)| \leq C,$$

où la constante C est indépendante de \hbar , de x et de ξ , alors l'expression de $(\hat{A}\varphi)(x)$ est bien définie. En effet, par définition on a

$$(\hat{A}\varphi)(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-x_0)} A_{\hbar}(x, \hbar k) \tilde{\varphi}(k).$$

D'autre part, on voit que pour tout $k \in \Lambda^*$, on a la majoration $|A_{\hbar}(x, \hbar k) \tilde{\varphi}(k)| \leq C \frac{C_s}{(1+|k|^2)^s}$, pour tout s , du fait que φ est C^∞ et donc que sa série de Fourier $\tilde{\varphi}(k)$ est à décroissance rapide. Ceci montre que la série est absolument convergente pour tout x .

On pourrait même autoriser une croissance modérée en ξ du symbole A_{\hbar} , i.e demander qu'il existe un entier n tel que pour tout \hbar et tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$, on ait

$$|A_{\hbar}(x, \xi)| \leq C \left(1 + |\xi|^2\right)^n$$

avec une constante C indépendante de \hbar , de x et de ξ . En effet, dans ce cas le symbole vérifie $|A_{\hbar}(x, \hbar k)| \leq C \left(1 + |\hbar k|^2\right)^n \leq C \left(1 + |k|^2\right)^n$ et la décroissance rapide de φ permet encore de faire converger la série.

Une première propriété raisonnable qu'on pourrait espérer de la part de l'opérateur \hat{A} serait d'être continue de $C^\infty(\mathcal{T})$ dans $C^\infty(\mathcal{T})$.

Proposition C.4. *Si les dérivées par rapport à x du symbole $A_{\hbar}(x, \xi)$ sont à croissance modérée en ξ , i.e*

$$|\partial_x^\alpha A_{\hbar}(x, \xi)| \leq C_\alpha \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

pour tout \hbar et tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$, alors l'opérateur \hat{A} est continue de $C^\infty(\mathcal{T})$ dans $C^\infty(\mathcal{T})$.

Démonstration. Tout d'abord, on voit facilement que les dérivées de $\hat{A}\varphi$ sont majorées de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha (\hat{A}\varphi)(x) \right| &= \sum_{k \in \Lambda^*} \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha'}^\alpha \left| \partial_x^{\alpha'} A_{\hbar}(x, \hbar k) \right| \left| \int_{\mathcal{T}} dy \left(\partial_x^{\alpha-\alpha'} e^{ik(x-y)} \right) \varphi(y) \right| \\ &= \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha'}^\alpha \sum_{k \in \Lambda^*} \left| \partial_x^{\alpha'} A_{\hbar}(x, \hbar k) \right| \left| \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \partial_y^{\alpha-\alpha'} \varphi(y) \right|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\partial_x^{\alpha-\alpha'} e^{ik(x-y)} = (-1)^{|\alpha-\alpha'|} \partial_y^{\alpha-\alpha'} e^{ik(x-y)}$ et fait $|\alpha - \alpha'|$ intégrations par partie. D'autre part, en insérant l'opérateur $L = \frac{1+ik \cdot \partial_y}{1+|k|^2}$ à la puissance s et en effectuant des intégrations par partie comme dans la proposition C.3, on obtient

$$\left| \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \partial_y^{\alpha-\alpha'} \varphi(y) \right| \leq \frac{|k|^s}{(1+|k|^2)^s} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) \int_{\mathcal{T}} dy \left| \partial_y^{\alpha-\alpha'+\gamma} \varphi(y) \right|,$$

où l'on a utilisé $|k^\gamma| \leq |k|^{|\gamma|}$. Si les dérivées du symboles $A_{\hbar}(x, \xi)$ soit à croissance modérée en ξ , alors pour tout \hbar on a $\left| \partial_x^{\alpha'} A_{\hbar}(x, \hbar k) \right| \leq C_{\alpha'} \left(1 + |\hbar k|^2\right)^{\frac{n}{2}} \leq C_{\alpha'} \left(1 + |k|^2\right)^{\frac{n}{2}}$ et les semi-normes de $\hat{A}\varphi$ sont alors majorées par une somme finie de semi-normes de φ puisque

$$\sup_x \left| \partial_x^\alpha \left(\hat{A}\varphi \right) (x) \right| \leq \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha'}^\alpha \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) C_{\alpha'} \sup_x \left| \partial_x^{\alpha - \alpha' + \gamma} \varphi(y) \right| \sum_{k \in \Lambda^*} \frac{\left(1 + |k|^2\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(1 + |k|^2\right)^{\frac{s}{2}}}.$$

En choisissant $s = n + d + 1$, la série converge et on a bien

$$\sup_x \left| \partial_x^\alpha \left(\hat{A}\varphi \right) (x) \right| \leq C(\alpha, n, d) \sum_{\alpha' \leq \alpha} \sum_{|\gamma| \leq |\alpha| + 2n + d + 1} \sup_x \left| \partial_x^{\alpha - \alpha' + \gamma} \varphi(y) \right|,$$

ce qui implique que \hat{A} est continue de $C^\infty(\mathcal{T})$ dans $C^\infty(\mathcal{T})$. ■

La continuité dans $C^\infty(\mathcal{T})$ n'est en général pas suffisante pour les applications où l'on considère plutôt les espaces $L^2(\mathcal{T})$ ou encore les espaces de Sobolev. Les opérateurs pseudo-différentiels ne sont en général pas bornés dans ces espaces, à moins de choisir des classes de symboles adaptées. On verra dans le théorème C.22, dit de "Calderon-Vaillancourt" en référence aux articles [17, 18], que les opérateurs quantifiés de symboles bornés dans $C^\infty(T^*\mathcal{T})$ sont bornés dans $L^2(\mathcal{T})$, ce qui motive la définition suivante.

Définition C.5. Soit $m \in \mathbb{R}$ une constante. La **classe de symboles** $\Psi^m(\mathcal{T})$ est l'ensemble des familles de fonctions

$$\hbar \in [0, 1] \rightarrow P_{\hbar}(x, \xi) \in C^\infty(T^*\mathcal{T}, \mathbb{C})$$

telles que pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta} > 0$ telle que pour tout point $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$ et tout $\hbar \in]0, 1]$, on ait la majoration

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (P_{\hbar}(x, \xi)) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \hbar^m.$$

A l'évidence, on a

$$\Psi^m(\mathcal{T}) = \hbar^m \Psi^0(\mathcal{T}).$$

2.2.2 Symboles à la Sjöstrand

Sans trop rentrer dans les détails avant qu'il ne soit le moment de le faire⁷, il convient tout de même de justifier quelque peu les raisons qui nous poussent à considérer les classes de symboles de la définition C.6 qui va suivre. Dans le chapitre sur les formes normales, on sera amené à considérer des symboles $P_{\hbar}(x, \xi)$ dont la série de Fourier par rapport à x sera de la forme

$$\tilde{P}_{\hbar}(k, \xi) = \chi \left(\frac{f_k(\xi)}{\hbar^\delta} \right) g_k(\xi),$$

⁷i.e le chapitre D.

où $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de troncature à support dans $[0, 1]$, $f_k(\xi)$ et $g_k(\xi)$ sont à décroissance rapide en k uniformément par rapport à ξ , et δ est un réel vérifiant $0 \leq \delta < 1$. On voit aisément que chaque dérivée par rapport à ξ va faire apparaître un désagréable facteur $\hbar^{-\delta}$. Si on resomme la série de Fourier, on obtient pour \hbar fixé un symbole $C^\infty(T^*\mathcal{T})$ mais dont les dérivées par rapport à ξ explosent lorsque \hbar tend vers 0.

On va néanmoins pouvoir développer un calcul symbolique avec de tels symboles qui sont essentiellement ceux utilisés par Sjöstrand⁸ pour décrire les états semi-excités. Cependant, cet auteur utilisait des symboles pour lesquels des facteurs $\hbar^{-\delta}$ apparaissent lorsqu'on dérive par rapport à ξ mais aussi par rapport à x . Pour pouvoir définir un calcul symbolique (règle de composition d'OPD), il est alors obligé de limiter δ à $\delta < \frac{1}{2}$. Dans la classe que nous utiliserons, on pourra prendre $\delta < 1$ pour peu que l'on travaille avec la quantification à gauche, ce qui a été le choix depuis le début dans la mesure où la quantification de Weyl n'a pas un sens très clair sur le tore. Par contre, la classe de Sjöstrand est invariante par changement de quantification (gauche, droite, Weyl ou autre...)

Définition C.6. Soit m et $\delta \geq 0$ deux constantes réelles. La **classe de symboles** $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ est l'ensemble des familles de fonctions

$$\hbar \in [0, 1] \rightarrow P_\hbar(x, \xi) \in C^\infty(T^*\mathcal{T}, \mathbb{C})$$

telles que pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta} > 0$ telle que pour tout point $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$ et tout $\hbar \in]0, 1]$, on ait l'estimation suivante

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (P_\hbar(x, \xi)) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \hbar^{m - \delta|\beta|}.$$

Dans le cas $\delta = 0$ on retrouve les symboles ordinaires $\Psi_0^m(\mathcal{T}) = \Psi^m(\mathcal{T})$. De plus, on a évidemment

$$\Psi_\delta^m(\mathcal{T}) = \hbar^m \Psi_\delta^0(\mathcal{T}).$$

Définition C.7. Un symbole P_\hbar est dit **négligeable dans** $\Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ si

$$P_\hbar \in \Psi_\delta^\infty(\mathcal{T}) = \bigcap_{m \geq 0} \Psi_\delta^m(\mathcal{T}).$$

On définit ensuite la classe d'opérateurs pseudo-différentiels associée.

Définition C.8. La **classe d'opérateurs pseudo-différentiels** $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ est l'ensemble des familles d'opérateurs \hat{P} qui à toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathcal{T})$ associe

$$\left(\hat{P}\varphi \right)(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} P_\hbar(x, \hbar k) \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y),$$

où le symbole $P_\hbar(x, \xi)$ appartient à la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$.

Définition C.9. Un opérateur pseudo-différentiel \hat{P} est dit **négligeable dans** $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ si

$$\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T}) = \bigcap_{m \geq 0} \hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T}).$$

On notera aussi

$$\hat{P} = O(\hbar^\infty).$$

⁸Voir par exemple l'article [61] ou le livre [26].

Proposition C.10. Soit $\delta > 0$. Si \hat{P} est un OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ alors il est continue de $C^\infty(\mathcal{T})$ dans $C^\infty(\mathcal{T})$.

Démonstration. Pour $m = 0$, on reprend la preuve de la proposition C.4 et on remarque qu'il n'apparaît à aucun moment de dérivée par rapport à ξ , ce qui nous permet d'avoir exactement les mêmes estimations et de montrer que les semi-normes de $\hat{A}\varphi$ sont majorées par une somme finie de semi-normes de φ . Pour $m \neq 0$ c'est aussi vrai du fait que l'on a simplement $\Psi_\delta^m(\mathcal{T}) = \hbar^m \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$. ■

On peut retrouver le symbole d'un OPD en l'appliquant aux exponentielles $e^{ik(x-x_0)}$.

Proposition C.11. Soit $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ un OPD de symbole $P_\hbar(x, \xi)$. Pour tout $k \in \Lambda^*$ on a

$$\hat{P}\left(e^{ik(x-x_0)}\right) = P_\hbar(x, \hbar k) e^{ik(x-x_0)}.$$

Démonstration. Notons $\varphi_k = e^{ik(x-x_0)}$. Par définition, on a

$$\left(\hat{P}\varphi_k\right)(x) = \sum_{l \in \Lambda^*} P_\hbar(x, \hbar l) \int_{\mathcal{T}} dy e^{il(x-y)} e^{ik(y-x_0)} = e^{ik(x-x_0)} \sum_{l \in \Lambda^*} P_\hbar(x, \hbar l) \int_{\mathcal{T}} dy e^{i(l-k)(x-y)},$$

où l'on a inséré $e^{ik(x-x_0)} e^{-ik(x-x_0)}$. L'intégrale sur y est égale à $\int_{\mathcal{T}} dy e^{i(l-k)(x-y)} = \delta(k=l)$, ce qui donne la formule annoncée. ■

On travaille parfois avec la série de Fourier des symboles par rapport à la variable x . On donne un critère équivalent à la définition C.6 qui s'exprime à l'aide de la série de Fourier.

Proposition C.12. Une fonction $P_\hbar(x, \xi)$ est un symbole de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ si et seulement si sa série de Fourier $\tilde{P}_\hbar(k, \xi)$ par rapport à la variable x vérifie l'estimation suivante. Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{Z}^d$ et tout entier positif s , il existe une constante $C(s, \beta)$ telle que pour tout $k \in \Lambda^*$, tout $\xi \in \mathcal{B}$ et tout $\hbar \in]0, 1]$, on ait l'estimation

$$\left|\partial_\xi^\beta \tilde{P}_\hbar(k, \xi)\right| \leq C(s, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|}}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Démonstration. En effet, si $P_\hbar(x, \xi) \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$, alors la série de Fourier vérifie

$$\partial_\xi^\beta \tilde{P}_\hbar(k, \xi) = \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi).$$

En insérant l'opérateur $L = \frac{1+ik \cdot \partial_x}{1+|k|^2}$ à la puissance s et en effectuant des intégrations par partie comme dans la proposition C.3, on obtient

$$\left|\partial_\xi^\beta \tilde{P}_\hbar(k, \xi)\right| \leq \frac{C(s)}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) \int_{\mathcal{T}} dx \left|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi)\right|.$$

Le fait que $P_\hbar(x, \xi) \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ implique que $\left|\partial_x^\gamma \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi)\right| \leq C_{\gamma, \beta} \hbar^{m-\delta|\beta|}$, si bien que

$$\left|\partial_\xi^\beta \tilde{P}_\hbar(k, \xi)\right| \leq \frac{C(s, \beta)}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \hbar^{m-\delta|\beta|}, \quad (\text{C.1})$$

où $C(s, \beta)$ est une constante.

Réciproquement, on a

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_h(x, \xi) \right| &= \left| \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-x_0)} i^{|\alpha|} k^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{P}_h(k, \xi) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \Lambda^*} |k|^{|\alpha|} \left| \partial_\xi^\beta \tilde{P}_h(k, \xi) \right|. \end{aligned}$$

Si $\partial_\xi^\beta \tilde{P}_h(k, \xi)$ vérifie l'estimation (C.1), alors en choisissant $s = |\alpha| + d + 1$, la série converge et on montre que $\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_h(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \hbar^{m - \delta |\beta|}$. ■

2.2.3 Développements asymptotiques

Les objets que l'on considère en analyse semi-classique, en l'occurrence les OPD et leurs symboles, dépendent de \hbar et on s'intéresse à des propriétés asymptotiques de ces objets lorsque \hbar tend vers 0. On considérera notamment des symboles $A_h(x, \xi)$ ayant un développement de la forme $A_h(x, \xi) \sim \sum_j \hbar^j A_j(x, \xi)$. Si on veut donner un sens plus que formel à cette expression, il faut dire ce qu'on entend par le signe \sim , qui signifie "**asymptotiquement équivalent à**", c'est à dire que l'on doit contrôler la *petitesse* du reste $A_h(x, \xi) - \sum_{j=0}^N \hbar^j A_j(x, \xi)$.

Cette petitesse se mesure en fonction de la classe à laquelle appartient le symbole A_h et des semi-normes associées.

On peut en fait considérer des développements asymptotiques plus généraux à deux égards. Tout d'abord, on peut laisser chaque terme A_j dépendre de \hbar , i.e considérer des développements de la forme $A_h(x, \xi) \sim \sum_j \hbar^j A_j(x, \xi, \hbar)$. D'autre part, on peut aussi considérer des développements de la forme $A_h(x, \xi) \sim \sum_j \hbar^{m_j} A_j(x, \xi, \hbar)$, où m_j est une suite croissante de réels positifs tendant vers l'infini avec j .

Définition C.13. Soit $\delta \geq 0$ une constante réelle. Soit m_j une suite croissante de réels positifs tels que $m_j \rightarrow +\infty$ et soit $P_j \in \Psi_\delta^{m_j}(\mathcal{T})$ une suite de symboles. On dit qu'un symbole $P_h \in \Psi_\delta^{m_0}(\mathcal{T})$ admet un **développement asymptotique dans $\Psi_\delta^{m_0}(\mathcal{T})$** de la forme

$$P_h(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x, \xi, \hbar)$$

si pour tout entier J , on a

$$P_h(x, \xi) - \sum_{j=0}^{J-1} P_j(x, \xi, \hbar) \in \Psi_\delta^{m_J}(\mathcal{T}).$$

Cette définition est assez générale et on va en fait souvent utiliser le cas particulier suivant.

Définition C.14. Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$. Un symbole $P_h \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ admettant un développement asymptotique $P_h \sim \sum P_j$ avec

$$P_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$$

est appelé **symbole δ -classique**. Si en plus $\delta = 0$ et si les P_j ne dépendent pas de \hbar , on dit que P_\hbar est un **symbole classique**.

Il faut noter qu'en général, les développements asymptotiques à notre disposition n'ont aucune raison d'être convergents dans la topologie donnée par les semi-normes

$$\|P_\hbar\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\hbar \leq \hbar_0} \sup_{(x,\xi) \in T^*\mathcal{T}} \frac{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (P_\hbar(x,\xi))|}{\hbar^{m-\delta|\beta|}}.$$

Cependant, il existe un procédé dû à Emile Borel qu'on appelle parfois "resommation de séries divergentes" et qui permet, étant donnée une suite de symboles $P_j \in \Psi_\delta^{m_j}(\mathcal{T})$, de construire un symbole $P_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ ayant pour développement asymptotique $P_\hbar \sim \sum P_j$, à la condition que la suite m_j tende vers l'infini suffisamment vite. On rappelle, dans la proposition suivante, cette construction dans un cadre à peine plus abstrait.

Lemme C.15 (Borel). *Soit E un espace de Fréchet muni d'une famille dénombrable de semi-normes $\|\cdot\|_n, n \in \mathbb{N}$. Soit m_j une suite croissante de réels positifs telle que $m_0 = 0$ et $m_j \geq c \ln j$. Pour toute suite de vecteurs $P_j(\hbar) \in E$ dépendant d'un paramètre \hbar et vérifiant*

$$\|P_j(\hbar)\|_n \leq C(j,n) \hbar^{m_j},$$

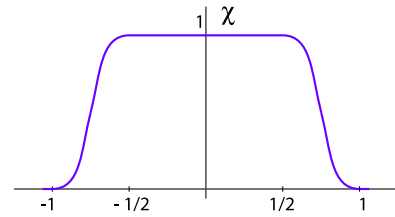
il existe une famille de vecteurs $P(\hbar)$ telle que pour tout $J \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout \hbar assez petit, on ait

$$\left\| P(\hbar) - \sum_{j=0}^{J-1} P_j(\hbar) \right\|_n \leq C(n,J) \hbar^{m_J}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on considère une fonction de troncature $\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ qui vaut 1 pour $|t| \leq \frac{1}{2}$ et 0 pour dès que $|t| \geq 1$.

Si ε_j est une suite décroissante de réels tendant vers 0 lorsque j tend vers l'infini, alors à \hbar fixé la fonction $(1 - \chi(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}))$ est non nulle pour un nombre fini de j , mais ce nombre grandit si \hbar se rapproche de 0. En conséquence, on définit

$$P(\hbar) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right) P_j(\hbar).$$



Pour tout \hbar la série converge puisqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes.

On va d'abord montrer qu'il existe un choix astucieux de la suite ε_j . Ensuite, on montrera que les semi-normes $\|P(\hbar)\|_n$ sont bornées uniformément par rapport à \hbar . Enfin, on montrera que $\sum P_j$ est un développement asymptotique de P_\hbar .

- Il existe une suite décroissante ε_j de réels positifs et tendant vers 0 telle que pour tout j et tout $n \leq j$ on a

$$\left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq \hbar^{m_j - m_1}. \tag{C.2}$$

En effet, la fonction $(1 - \chi(t))$ étant nulle dès que $t \leq \frac{1}{2}$, on a $(1 - \chi(t)) \frac{1}{t} \leq 2$ pour tout t , ce qui fait que $|1 - \chi(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}})| \leq 2 \frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}$ pour tout j et tout \hbar . En utilisant les majorations

$\|P_j(\hbar)\|_{n'} \leq C(j, n') \hbar^{m_j}$, on voit que pour tout $n \leq j$ on a

$$\left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq 2\varepsilon_j D_j \hbar^{m_j - m_1},$$

où la constante positive D_j est définie par

$$D_j = \sup_{n' \leq j} C(j, n')$$

Il reste à choisir la suite ε_j décroissante, tendant vers 0 et telle que $\varepsilon_j \leq \frac{2}{D_j}$ pour tout j . Il est facile de voir que $\varepsilon_j = \min_{k \leq j} \frac{2}{D_k + k}$ convient puisque d'une part $\frac{2}{D_k + k} \leq \frac{2}{D_k}$, d'autre part $\frac{2}{D_k + k} \leq \frac{2}{k}$ qui tend vers 0, et enfin le min permet d'assurer la décroissance de ε_j .

- Pour tout n , on sépare la série dans l'expression de $P(\hbar)$ en deux morceaux $j \leq n + N - 1$ et $j \geq n + N$, où N est un certain entier que l'on déterminera plus tard. On voit que les semi-normes $\|P(\hbar)\|_n$ sont majorées par

$$\|P(\hbar)\|_n \leq \sum_{j=0}^{n+N-1} \left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n + \sum_{j=n+N}^{\infty} \left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n. \quad (\text{C.3})$$

Dans le premier terme, on utilise $\|P_j(\hbar)\|_n \leq C(j, n) \hbar^{m_j}$ et $|1 - \chi| \leq 1$, ce qui donne

$$\sum_{j=0}^{n+N-1} \left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq \sum_{j=0}^{n+N-1} C(j, n) \hbar^{m_j} \quad (\text{C.4})$$

qui est borné pour tout \hbar , pour peu que l'on choisisse N indépendant de \hbar . Dans la deuxième somme, on utilise l'inéquation C.2, ce qui donne

$$\sum_{j=n+N}^{\infty} \left|1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right)\right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq \sum_{j=n+N}^{\infty} \hbar^{m_j - m_1}.$$

Cette deuxième somme sera aussi utilisée plus tard, pour montrer que $P_{\hbar} \sim \sum P_j$. Si on choisissait $N = 0$, on trouverait que cette somme est majorée par $\hbar^{m_n - m_1}$ et non pas par \hbar^{m_n} . Après un changement d'indice et en utilisant

$$m_{j+n+N} \geq c \ln(j + n + N),$$

on obtient

$$\sum_{j=n+N}^{\infty} \hbar^{m_j - m_1} = \hbar^{m_{n+N} - m_1} \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^{c \ln(j+n+N) - m_{n+N}}.$$

On montre d'abord que pour tout n , il existe un entier $N_1(c, n)$ tel que

$$c \ln(n + N_1(c, n)) \geq m_1 + m_n$$

et donc $m_{n+N_1(c, n)} - m_1 \geq m_n$. En effet, on voit facilement qu'il suffit de choisir

$$N_1(c, n) = \left[e^{\frac{m_1 + m_n}{c}} - n \right] + 1.$$

D'autre part, on montre que pour tout n , il existe un entier $N_2(c, n)$ tel que pour tout $j \geq 0$ on ait

$$c \ln(j + n + N_2(c, n)) - m_{n+N} \geq \frac{c}{2} \ln(j + n + N_2(c, n)),$$

soit

$$\frac{c}{2} \ln(j + n + N_2(c, n)) \geq m_{n+N}.$$

Il suffit en effet de choisir

$$N_2(c, n) = \left[e^{\left(\frac{2}{c} m_{n+N+1}\right)} - n - 1 \right] + 1,$$

ce qui implique que $\frac{c}{2} \ln(n + N_2(c, n)) \geq m_{n+N}$ et donc la propriété voulue pour tout $j \geq 0$.

Si on définit $N(c, n) = \max(N_1(c, n), N_2(c, n))$, on obtient la majoration suivante

$$\sum_{j=n+N(c,n)}^{\infty} \hbar^{m_j - m_1} \leq \hbar^{m_n} \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^{\frac{c}{2} \ln j}, \quad (\text{C.5})$$

où l'on a simplement minoré $(j + n + N(c, n)) \geq j$. Le terme $\hbar^{m_{n+1}}$ est à la puissance voulue, il reste à vérifier que la somme converge. On a $\hbar^{\frac{c}{2} \ln j} = j^{\frac{c}{2} \ln \hbar}$. Si on choisit $\hbar_0 = e^{-\frac{4}{c}}$, alors pour tout $\hbar \leq \hbar_0$ on a $\frac{c}{2} \ln \hbar \leq -2$ ce qui fait que $\sum_{j=0}^{\infty} \hbar^{\frac{c}{2} \ln j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ qui converge.

En cumulant les estimations des équation (C.4) et (C.5), on voit que pour tout n , les semi-normes $\|P(\hbar)\|_n$ sont bornées uniformément par rapport à $\hbar \leq \hbar_0(c)$.

- On va maintenant on montrer que $\sum P_j$ est un développement asymptotique de P_{\hbar} . Pour tout $J \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| P(\hbar) - \sum_{j=0}^{J-1} P_j(\hbar) \right\|_n \leq \sum_{j=0}^{J-1} \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \|P_j(\hbar)\|_n + \sum_{j=J}^{\infty} \left| 1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \right| \|P_j(\hbar)\|_n.$$

On règle le sort du premier terme en remarquant que pour tout $a \geq 0$ et tout t , $t^a \chi(t) \leq 1$ du fait que $\chi(t)$ est nul dès que $t \geq 1$. On a donc $\chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \leq \left(\frac{\hbar^{m_1}}{\varepsilon_j}\right)^a$ pour tout \hbar et tout j . La première somme est donc majorée par

$$\sum_{j=0}^{J-1} \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \|P_j(\hbar)\|_n \leq \hbar^{am_1} \sum_{j=0}^{J-1} \frac{1}{\varepsilon_j^a} C(j, n) \hbar^{m_j} \leq D(n, a) \hbar^{am_1},$$

où $D(n, a)$ est une constante positive. Il reste à choisir a pour avoir l'estimation voulue. Il suffit de prendre $a = \frac{m_J}{m_1}$ et la somme est majoré par $D(n, a) \hbar^{m_J}$.

On traite la seconde somme comme précédemment, en la coupant en deux parties $j \leq J + N - 1$ et $j \geq J + N$. La première donne

$$\sum_{j=J}^{J+N-1} \left| 1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq \sum_{j=J}^{J+N-1} C(j, n) \hbar^{m_j} \leq D'(N, n) \hbar^{m_J},$$

pour peu que l'on choisit N indépendant de \hbar .

Comme précédemment, si on choisit $N(c, n)$ convenablement (en s'assurant aussi qu'il est tel que $J + N(c, n) \geq n$) et si \hbar est suffisamment petit, la deuxième partie donne

$$\sum_{j=J+N}^{\infty} \left| 1 - \chi\left(\frac{\varepsilon_j}{\hbar^{m_1}}\right) \right| \|P_j(\hbar)\|_n \leq D''(c, n) \hbar^{m_J},$$

ce qui prouve que

$$\left\| P(\hbar) - \sum_{j=0}^{J-1} P_j(\hbar) \right\|_n \leq C(n, J) \hbar^{m_J}.$$

■

Il convient de noter⁹ que sans la restriction $m_j \geq c \ln j$, la preuve précédente ne marche pas forcément, notamment pour la majoration de $\sum_j^{\infty} \hbar^{m_j}$. En effet, si on choisit par exemple $m_j = \ln(\ln j)$, on se convainc rapidement que la somme diverge.

On peut appliquer ce lemme directement pour resommer des suites de symboles $P_j \in \Psi_{\delta}^{m_j}(T)$, avec $m_j = j(1 - \delta)$, en des symboles δ -classiques.

Proposition C.16. *Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$. Si $P_j \in \Psi_{\delta}^{j(1-\delta)}(T)$ est une suite de symboles, alors il existe un symbole $P_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^0(T)$ ayant pour développement asymptotique $P_{\hbar} \sim \sum P_j$.*

Il convient de noter que lorsque $\delta \neq 0$, les développements asymptotiques dans $\Psi_{\delta}^0(T)$ ne sont pas uniques puisque les termes P_j dépendent nécessairement de \hbar , du fait que des termes en $\hbar^{-\delta}$ apparaissent lorsque l'on les dérive. Ceci est à comparer avec les symboles classiques dans $\Psi_0^0(T)$ pour lesquels le développement est unique. Pour les symboles $\Psi_{\delta}^0(T)$, il n'y a d'ailleurs pas forcément de notion de symbole principal bien définie.

2.3 Composition

Le théorème de composition d'opérateurs pseudo-différentiels (théorème C.19) est l'outil principal de tout calcul pseudo-différentiel qui se respecte. Ce théorème nous assure que, si on choisit correctement le paramètre δ , alors le produit de deux OPD de la classe $\Psi_{\delta}^0(T)$ est encore un OPD de la même classe, et nous donne l'expression du symbole du produit qui est égal à ce qu'on appelle le produit de Moyal (gauche) des symboles, ainsi que le développement asymptotique de ce produit de Moyal.

2.3.1 Lemme de phase stationnaire

On donne tout d'abord un lemme de "phase stationnaire" qui nous permettra de trouver le développement asymptotique de toutes les expressions intégrales que l'on obtiendra plus tard, comme le symbole du produit de deux OPD, le symbole de l'adjoint, l'action d'un OPD sur une fonction BKW¹⁰, etc...

⁹Ce qui n'est en général pas mentionné dans les ouvrages.

¹⁰Dont on parlera dans le chapitre sur les quasimodes.

Lemme C.17 (Phase stationnaire). Soit $U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)$ une famille de fonctions qui pour tout $\hbar > 0$ est dans $C^\infty(\mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B})$. Alors pour tout entier $J \geq 0$, tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$, tous $x \in \mathcal{T}$ et tous $\xi \in \mathcal{B}$, on a

$$\int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} U_{\hbar}(x, y, \xi, \hbar k) = \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \partial_y^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{y=x, \eta=0} + R_J$$

avec

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \zeta, \hbar) \right| \leq \hbar^J C(J, \alpha) \sup_{x, y, \xi, \eta} \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq \frac{d+1}{2} \\ \alpha' \leq \alpha}} \left| \partial_y^\gamma \partial_y^{\alpha'+\gamma'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma U_{\hbar} \right|,$$

où $C(J, \alpha, s)$ est une constante positive.

Démonstration. Notons $V_{\hbar}(x, \xi)$ la fonction donnée par

$$V_{\hbar}(x, \xi) = \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} U_{\hbar}(x, y, \xi, \hbar k).$$

Pour tout entier $J \geq 0$, on effectue tout d'abord un développement de Taylor avec reste intégral de la fonction $U_{\hbar}(\varepsilon) = U_{\hbar}(x, y, \xi, \varepsilon k)$ par rapport à la variable ε , i.e

$$U_{\hbar}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{d^j}{d\varepsilon^j} U_{\hbar}(x, y, \xi, \varepsilon k)|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^J \int_0^1 d\tau \frac{(1-\tau)^{J-1}}{(J-1)!} \frac{d^J}{d\varepsilon^J} U_{\hbar}(x, y, \xi, \tau \varepsilon k).$$

D'autre part, on remarque que l'on a la relation

$$\frac{d}{d\varepsilon} U_{\hbar}(x, y, \xi, \varepsilon k) = (k \cdot \partial_\eta) U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=\varepsilon k}.$$

De plus, on la propriété (proposition C.2) que $(k \cdot \partial_\eta)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} k^\alpha \partial_\eta^\alpha$. Le développement de Taylor, où l'on pose $\varepsilon = \hbar$, se réécrit donc

$$\begin{aligned} U_{\hbar}(x, y, \xi, \hbar k) &= \sum_{|\gamma| \leq J-1} \frac{\hbar^{|\gamma|}}{\gamma!} k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=0} \\ &\quad + \hbar^J \int_0^1 d\tau \frac{(1-\tau)^{J-1}}{(J-1)!} \sum_{|\gamma|=J} \tau^J k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=\tau \hbar k}. \end{aligned}$$

En réinsérant cette égalité dans l'expression de V_{\hbar} , on obtient

$$V_{\hbar}(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq J-1} \frac{\hbar^{|\gamma|}}{\gamma!} \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=0} + R_J(x, \xi, \hbar),$$

où $R_J(x, \xi, \hbar)$ est le terme de reste que l'on estimera plus tard. Concernant le premier terme, on remarque que $e^{ik(x-y)} k^\gamma = (i\partial_y)^\gamma e^{ik(x-y)}$ et en faisant des intégrations par partie, l'intégrale sur y donne

$$\int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=0} = \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)|_{\eta=0}.$$

A partir de maintenant, on va noter U_{\hbar} pour $U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta)$. La somme sur k fournit alors

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=0} &= \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=0} \\ &= (-i\partial_y)^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{y=x, \eta=0}, \end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout J , V_{\hbar} vérifie

$$V_{\hbar}(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \partial_y^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{y=x, \eta=0} + R_J(x, \xi, \hbar).$$

Il reste à estimer les dérivées $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J$ du terme de reste R_J donné par

$$R_J(x, \xi, \hbar) = \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} \hbar^J \int_0^1 d\tau \frac{(1-\tau)^{J-1}}{(J-1)!} \sum_{|\gamma|=J} \tau^J k^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=\tau\hbar k},$$

soit

$$R_J(x, \xi, \hbar) = \hbar^J \int_0^1 d\tau \frac{(1-\tau)^{J-1}}{(J-1)!} \tau^J \sum_{|\gamma|=J} \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=\tau\hbar k},$$

où l'on a effectué la même manipulation que précédemment avec le terme k^γ . Pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$, on a donc

$$\begin{aligned} &\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \\ &= \\ &\hbar^J \int_0^1 d\tau \frac{(1-\tau)^{J-1}}{(J-1)!} \tau^J \sum_{|\gamma|=J} \sum_{\alpha' \leq \alpha} C_{\alpha'}^\alpha \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_y^{\alpha'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=\tau\hbar k}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\partial_x^{\alpha'} e^{ik(x-y)} = (-1)^{|\alpha'|} \partial_y^{\alpha'} e^{ik(x-y)}$ et fait des intégrations par partie pour la variable y . En insérant ensuite $L = \frac{1+ik \cdot \partial_y}{1+|k|^2}$ à la puissance s et en effectuant des intégrations par partie comme dans la proposition C.3, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_y^{\alpha'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=\tau\hbar k} \\ &= \\ &\sum_{|\gamma'| \leq s} \frac{C(\gamma, \gamma', s) k^{\gamma'}}{(1+|k|^2)^s} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} (-i\partial_y)^\gamma \partial_y^{\alpha'+\gamma'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\eta^\gamma U_{\hbar}|_{\eta=\tau\hbar k}. \end{aligned}$$

En utilisant prenant ensuite le sup sur τ, γ, γ' , ainsi que sur x, y, ξ et η dans l'expression de $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar)$, et en utilisant $|k^{\gamma'}| \leq |k|^s$ on obtient l'estimation

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^J \sup_{x, y, \xi, \eta} \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq s \\ \alpha' \leq \alpha}} \left| (-i\partial_y)^\gamma \partial_y^{\alpha'+\gamma'} \partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\xi^\beta \partial_\eta^\gamma U_{\hbar} \right| \sum_{k \in \Lambda^*} \frac{C(J, \alpha, s)}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}},$$

où $C(J, \alpha, s)$ est une constante positive. En choisissant $s = d + 1$ la somme converge ce qui prouve finalement que le reste R_J vérifie les estimations annoncées. \blacksquare

2.3.2 Produit de Moyal et composition d'OPD

Définition C.18. Soit $A_{\hbar}, B_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$ deux symboles. On définit leur **produit de Moyal** $A_{\hbar} \# B_{\hbar}$ par

$$A_{\hbar} \# B_{\hbar}(x, \xi) = \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} A_{\hbar}(x, \xi + \hbar k) B_{\hbar}(y, \xi).$$

Théorème C.19 (composition d'OPD). Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$. Soit \hat{A} et \hat{B} sont deux OPD de la classe $\hat{\Psi}_{\delta}^0(\mathcal{T})$ de symboles A_{\hbar} et B_{\hbar} , alors le produit $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ est un OPD de la même classe et son symbole C_{\hbar} est égal au produit de Moyal

$$C_{\hbar} = A_{\hbar} \# B_{\hbar}.$$

De plus, le symbole C_{\hbar} admet le développement asymptotique δ -classique suivant

$$A_{\hbar} \# B_{\hbar} \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j(\hbar),$$

où les $C_j \in \Psi_{\delta}^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$ sont donnés par

$$C_j(x, \xi, \hbar) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} A_{\hbar}(x, \xi) \partial_x^{\alpha} B_{\hbar}(x, \xi).$$

Démonstration. On va tout d'abord montrer que le produit est un OPD de symbole $A_{\hbar} \# B_{\hbar}$. Ensuite, on va montrer que le produit de Moyal admet le développement asymptotique annoncé et qu'il est dans la classe $\Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$.

. Tout d'abord, par définition de \hat{A} et \hat{B} , pour toute fonction $\varphi \in C^{\infty}(\mathcal{T})$, on a

$$\begin{aligned} \hat{C}(\varphi)(x) &= \sum_{l \in \Lambda^*} A_{\hbar}(x, \hbar l) \int_{\mathcal{T}} dz e^{il(x-z)} \sum_{k \in \Lambda^*} B_{\hbar}(z, \hbar k) \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(z-y)} \varphi(y) \\ &= \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y) \sum_{l \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dz e^{i(l-k)(x-z)} A_{\hbar}(x, \hbar l) B_{\hbar}(z, \hbar k), \end{aligned}$$

où l'on a inséré $e^{ik(x-y)} e^{-ik(x-y)}$. En effectuant le changement d'indice $l \rightarrow k' = l - k$, on obtient

$$\hat{C}(\varphi)(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \varphi(y) \sum_{k' \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dz e^{ik'(x-z)} A_{\hbar}(x, \hbar k + \hbar k') B_{\hbar}(z, \hbar k),$$

ce qui prouve que \hat{C} est un OPD de symbole

$$C_{\hbar}(x, \xi) = \sum_{k' \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dz e^{ik'(x-z)} A_{\hbar}(x, \xi + \hbar k') B_{\hbar}(z, \xi),$$

c'est à dire exactement $C_{\hbar} = A_{\hbar} \# B_{\hbar}$.

- Ensuite, en appliquant directement le lemme C.17 pour les fonctions $U_{\hbar}(x, y, \xi, \eta) = A_{\hbar}(x, \xi + \eta) B_{\hbar}(y, \xi)$, avec $V_{\hbar} = A_{\hbar} \# B_{\hbar}$, on trouve que pour tout entier $J \geq 0$, le produit de Moyal vérifie

$$\begin{aligned} A_{\hbar} \# B_{\hbar}(x, \xi) &= \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \partial_y^\gamma \partial_\eta^\gamma (A_{\hbar}(x, \xi + \eta) B_{\hbar}(y, \xi)) \Big|_{y=x, \eta=0} + R_J(x, \xi, \hbar) \\ &= \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \left(\partial_\xi^\gamma A_{\hbar}(x, \xi)\right) \left(\partial_x^\gamma B_{\hbar}(x, \xi)\right) + R_J(x, \xi, \hbar) \end{aligned}$$

- Enfin, d'après le lemme C.17 le reste R_J vérifie l'estimation

$$\begin{aligned} &\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \\ &\leq \\ &\hbar^J \sup_{x, y, \xi, \eta} \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq \frac{d+1}{2} \\ \alpha' \leq \alpha}} \left| \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^\beta \left(\partial_x^{\alpha-\alpha'} \partial_\eta^\gamma \partial_\xi^{\beta-\beta'} A_{\hbar}(x, \xi + \eta) \partial_y^{\gamma+\alpha'+\gamma'} \partial_\xi^{\beta'} B_{\hbar}(y, \xi) \right) \right| C(J, \alpha). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\partial_\eta^\gamma \partial_\xi^{\beta-\beta'} A_{\hbar}(x, \xi + \eta) = \partial_\xi^{\gamma+\beta-\beta'} A_{\hbar}(x, \xi) \Big|_{\xi=\xi+\eta}$ et les estimations caractéristiques sur les symboles $A_{\hbar}, B_{\hbar} \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$, on trouve que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^J c(\alpha, \beta, J) \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq \frac{d+1}{2}}} \sup_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} \left(C_{\alpha-\alpha', \beta-\beta'} \hbar^{-\delta(J+|\beta-\beta'|)} C'_{\gamma+\alpha'+\gamma', \beta'} \hbar^{-\delta|\beta'|} \right),$$

où $c(\alpha, \beta, J)$ est une constante positive, si bien que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^{J(1-\delta)-\delta|\beta|} C(\alpha, \beta, J),$$

où $C(\alpha, \beta, J)$ est une constante positive, ce qui prouve que l'on a bien un développement δ -classique. ■

On peut prendre δ aussi proche de 1 que l'on veut et toutes les estimations que l'on a utilisées (pour la proposition C.16 concernant les développements asymptotiques aussi bien que pour le théorème C.19 de composition) sont uniformes pour \hbar suffisamment petit. Mais il est entendu que toutes ces estimations dépendent de δ et qu'elles cesseraient d'être valides si on laissait tendre δ vers 1. A chaque fois que l'on utilisera cette classe de OPD, on choisira une valeur pour δ qu'on ne fera pas varier.

2.3.3 Commutateurs

On peut obtenir à l'aide du théorème précédent le symbole $A_{\hbar} \# B_{\hbar} - B_{\hbar} \# A_{\hbar}$ du commutateur $[\hat{A}, \hat{B}]$ de deux OPD. Dans le cas où l'un des deux opérateurs est dans la classe Ψ_0^0 et ne dépend pas de x , on a un développement légèrement plus sympathique. Ceci sera utile lors de la construction des formes normales dans le chapitre suivant.

Proposition C.20. Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$. Soit $A_{\hbar}(\xi) \in \Psi_0^0(\mathcal{T})$ un symbole qui ne dépend pas de la variable x et $B_{\hbar}(x, \xi) \in \Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$ un symbole quelconque. Alors, le commutateur $C_{\hbar} = A_{\hbar} \# B_{\hbar} - B_{\hbar} \# A_{\hbar}$ est dans la classe $\Psi_{\delta}^1(\mathcal{T})$ et admet un développement asymptotique de la forme

$$C_{\hbar}(x, \xi) \sim \frac{\hbar}{i} \{A, B\} + \sum_{j=2}^{\infty} C_j(x, \xi, \hbar),$$

où les $C_j \in \Psi_{\delta}^j(\mathcal{T})$ sont donnés par

$$C_j(x, \xi, \hbar) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^j \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \partial_{\xi}^{\gamma} A_{\hbar}(\xi) \partial_x^{\gamma} B_{\hbar}(x, \xi)$$

et où l'équivalence asymptotique \sim est entendue dans le sens où pour entier J , on a

$$C_{\hbar}(x, \xi) - \sum_{j=0}^{J-1} C_j(x, \xi, \hbar) \in \Psi_{\delta}^J(\mathcal{T}).$$

Démonstration. En effet, en procédant comme dans la preuve du théorème C.19 de composition, on voit que pour tout $J \geq 0$ le produit de Moyal $A_{\hbar} \# B_{\hbar}$ vérifie

$$A_{\hbar} \# B_{\hbar}(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \partial_{\xi}^{\gamma} A_{\hbar}(\xi) \partial_x^{\gamma} B_{\hbar}(x, \xi) + R_J(x, \xi, \hbar).$$

Du fait que $A_{\hbar} \in \Psi_0^0(\mathcal{T})$ et $B_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$, on voit aisément que chaque terme $\partial_{\xi}^{\gamma} (A_{\hbar}(\xi) \partial_x^{\gamma} B_{\hbar}(x, \xi))$ est dans $\Psi_{\delta}^{|\gamma|}(\mathcal{T})$, car la dérivée par rapport à ξ de A_{\hbar} ne fait pas apparaître de facteur $\hbar^{-\delta}$. De plus, le reste R_J vérifie l'estimation

$$\left| \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^J \sup_{x, y, \xi} \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq \frac{d+1}{2}}} \left| \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^{\beta} \left(\partial_{\xi}^{\gamma+\beta-\beta'} A_{\hbar}(\xi) \partial_y^{\gamma+\alpha+\gamma'} \partial_{\xi}^{\beta'} B_{\hbar}(y, \xi) \right) \right| C(J, \alpha).$$

En utilisant ensuite les majorations

$$\left| \partial_{\xi}^{\gamma+\beta-\beta'} (A_{\hbar}(\xi)) \right| \leq C_{0, \beta} \text{ et } \left| \partial_y^{\gamma+\alpha+\gamma'} \partial_{\xi}^{\beta'} B_{\hbar}(y, \xi) \right| \leq C_{\gamma+\alpha+\gamma', \beta'} \hbar^{-\delta|\beta'|},$$

cela donne

$$\left| \partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^J C(J, \alpha, \beta') \sup_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^{\beta} \hbar^{-\delta|\beta'|} \leq \hbar^{J-\delta|\beta|} C'(J, \alpha, \beta'),$$

où $C(J, \alpha, \beta')$ et $C'(J, \alpha, \beta')$ sont des constantes positives.

D'autre part, le fait que A_{\hbar} ne dépende pas de x implique que le produit de Moyal $B_{\hbar} \# A_{\hbar}$ est simplement

$$B_{\hbar} \# A_{\hbar}(x, \xi) = A_{\hbar}(\xi) \sum_{k \in \Lambda^*} B_{\hbar}(x, \xi + \hbar k) \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} = A_{\hbar}(\xi) B_{\hbar}(x, \xi).$$

Pour tout $J \geq 1$, le commutateur $C_{\hbar} = A_{\hbar} \# B_{\hbar} - B_{\hbar} \# A_{\hbar}$ vérifie donc

$$C_{\hbar}(x, \xi) = C_1 + \sum_{j=2}^{J-1} C_j + R_J(x, \xi, \hbar)$$

et d'après ce qui précède, on a

$$C_1 = \frac{\hbar}{i} \sum_{|\gamma|=1} \partial_{\xi}^{\gamma} A_{\hbar}(\xi) \partial_x^{\gamma} B_{\hbar}(x, \xi) = \frac{\hbar}{i} \{A_{\hbar}, B_{\hbar}\} \in \Psi_{\delta}^1(\mathcal{T}).$$

De plus, on a $C_j \in \Psi_{\delta}^j(\mathcal{T})$ et $R_J \in \Psi_{\delta}^J(\mathcal{T})$. ■

2.4 Continuité L^2

2.4.1 Continuité L^2 des OPD

Pour commencer on donne un lemme de Schur ([60]) discret, dans l'espace de Fourier.

Lemme C.21 (Lemme de Schur). Soit \hat{V} un opérateur de la forme

$$\tilde{\varphi}(k) \rightarrow \hat{V}(\tilde{\varphi})(k) = \sum_{l \in \Lambda^*} V_{k,l} \tilde{\varphi}(l).$$

Si $V_{k,l}$ vérifie les propriétés suivantes

$$\sup_{k \in \Lambda^*} \sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| = C_1 < +\infty \text{ et } \sup_{l \in \Lambda^*} \sum_{k \in \Lambda^*} |V_{k,l}| = C_2 < +\infty,$$

alors \hat{V} est borné dans L^2 et

$$\sum_{k \in \Lambda^*} \left| \hat{V}(\tilde{\varphi})(k) \right|^2 \leq C_1 C_2 \sum_{k \in \Lambda^*} |\tilde{\varphi}(k)|^2.$$

Démonstration. En effet, tout d'abord on a

$$\sum_{k \in \Lambda^*} \left| \hat{V}(\tilde{\varphi})(k) \right|^2 = \sum_{k \in \Lambda^*} \left| \sum_{l \in \Lambda^*} V_{k,l} \tilde{\varphi}(l) \right|^2 \leq \sum_{k \in \Lambda^*} \left(\sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| |\tilde{\varphi}(l)| \right)^2.$$

On fait ensuite l'astucieuse remarque que $|V_{k,l}| |\tilde{\varphi}(l)| = |V_{k,l}|^{\frac{1}{2}} \left(|V_{k,l}|^{\frac{1}{2}} |\tilde{\varphi}(l)| \right)$, ce qui nous permet d'utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz et de voir que

$$\sum_{k \in \Lambda^*} \left| \hat{V}(\tilde{\varphi})(k) \right|^2 \leq \sum_{k \in \Lambda^*} \left(\sum_{l' \in \Lambda^*} |V_{k,l'}| \right) \left(\sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| |\tilde{\varphi}(l)|^2 \right).$$

D'après les hypothèses sur $V_{k,l}$, cela implique que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda^*} \left| \widehat{V}(\tilde{\varphi})(k) \right|^2 &\leq C_1 \sum_{k \in \Lambda^*} \sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| |\tilde{\varphi}(l)|^2 \\ &\leq C_1 C_2 \sum_{l \in \Lambda^*} |\tilde{\varphi}(l)|^2, \end{aligned}$$

où l'on a interverti les sommes pour passer à la seconde ligne. ■

Théorème C.22 (Calderón-Vaillancourt). *Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$. Tout opérateur pseudo-différentiel $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est continue de $L^2(\mathcal{T})$ dans $L^2(\mathcal{T})$. De plus, sa norme est majorée par*

$$\left\| \hat{P} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}))} \leq C \sup_{|\gamma| \leq \frac{d+1}{2}} \sup_{x, \xi} |\partial_x^\gamma P_\hbar(x, \xi)|.$$

Démonstration. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{T})$ on a

$$\left(\hat{P}\varphi \right)(x) = \sum_{l \in \Lambda^*} P_\hbar(x, \hbar l) e^{il(x-x_0)} \tilde{\varphi}(l),$$

ce qui fait que la série de Fourier de $\hat{P}\varphi$ est égale à

$$\widetilde{\left(\hat{P}\varphi \right)}(k) = \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} \sum_{l \in \Lambda^*} P_\hbar(x, \hbar l) e^{il(x-x_0)} \tilde{\varphi}(l) = \sum_{l \in \Lambda^*} V_{k,l} \tilde{\varphi}(l),$$

où l'on a noté $V_{k,l} = \int_{\mathcal{T}} dx e^{i(l-k)(x-x_0)} P_\hbar(x, \hbar l)$. On va voir que ce $V_{k,l}$ satisfait aux hypothèses du lemme de Schur C.21. En effet, à l'aide du changement d'indice $l \rightarrow l' = k - l$, on a

$$\sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| = \sum_{l \in \Lambda^*} \left| \int_{\mathcal{T}} dx e^{-il(x-x_0)} P_\hbar(x, \hbar k - \hbar l) \right|.$$

En insérant ensuite $L = \frac{1+ik \cdot \partial_x}{1+|l|^2}$ à la puissance s et en effectuant des intégrations par partie comme dans la proposition C.3, on obtient

$$\sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| \leq \sum_{l \in \Lambda^*} \frac{1}{(1+|l|^2)^{\frac{s}{2}}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ |\gamma| \leq s}} C(\gamma, s) \left| \int_{\mathcal{T}} dx e^{-il(x-x_0)} \partial_x^\gamma P_\hbar(x, \hbar k - \hbar l) \right|.$$

En utilisant ensuite l'estimation caractéristique pour $P_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ et en choisissant $s \geq d+1$ pour que la somme converge, on obtient

$$\sum_{l \in \Lambda^*} |V_{k,l}| \leq C \sup_{|\gamma| \leq \frac{d+1}{2}} \sup_{x, \xi} |\partial_x^\gamma P_\hbar| \leq +\infty,$$

où C est une constante positive. En procédant de la même manière, en faisant le changement d'indice $k \rightarrow k' = k - l$, on trouve la même estimation

$$\sum_{k \in \Lambda^*} |V_{k,l}| \leq C \sup_{|\gamma| \leq \frac{d+1}{2}} \sup_{x, \xi} |\partial_x^\gamma P_\hbar|.$$

Ceci nous permet d'appliquer le lemme de Schur qui nous assure que l'opérateur \hat{P} est borné dans $L^2(\mathcal{T})$ et que sa norme est majorée par

$$\left\| \hat{P} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}))} \leq C \sup_{|\gamma| \leq \frac{d+1}{2}} \sup_{x, \xi} |\partial_x^\gamma P_{\hbar}|.$$

■

2.4.2 Adjoint d'OPD

Lemme C.23 (Adjoint d'un OPD). Si $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est un OPD, alors son adjoint \hat{P}^* est aussi un OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ et son symbole, noté P_{\hbar}^* , est donné par

$$P_{\hbar}^*(x, \xi) = \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \bar{P}_{\hbar}(y, \xi + \hbar k)$$

et admet comme développement asymptotique le développement δ -classique suivant

$$P_{\hbar}^*(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(x, \xi, \hbar),$$

où les $P_j^* \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$ sont donnés par

$$P_j^*(x, \xi, \hbar) = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^j \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \partial_x^\gamma \partial_\xi^\gamma \bar{P}_{\hbar}(x, \xi).$$

On dira que P_{\hbar}^* est l'adjoint du symbole P_{\hbar} .

Démonstration. L'opérateur \hat{P} étant dans la classe $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, il est borné dans $L^2(\mathcal{T})$ d'après le théorème C.22 de Calderón-Vaillancourt. Son adjoint \hat{P}^* est donc aussi borné dans L^2 . Par définition, pour tous $\phi, \varphi \in L^2(\mathcal{T})$ l'adjoint vérifie $\langle \phi | \hat{P}^* \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi | \hat{P} \phi \rangle}$, i.e

$$\begin{aligned} \langle \phi | \hat{P}^* \varphi \rangle &= \overline{\int_{\mathcal{T}} dx \bar{\varphi}(x) \sum_{k \in \Lambda^*} P_{\hbar}(x, \hbar k) \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \phi(y)} \\ &= \int_{\mathcal{T}} dx \bar{\phi}(x) \int_{\mathcal{T}} dy \varphi(y) \sum_{k \in \Lambda^*} \bar{P}_{\hbar}(y, \hbar k) e^{ik(x-y)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\left(\hat{P}^* \varphi \right)(x) = \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy \bar{P}_{\hbar}(y, \hbar k) e^{ik(x-y)} \varphi(y).$$

Si on applique \hat{P}^* à l'exponentielle $\varphi_l(x) = e^{il(x-x_0)}$, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{P}^* \left(e^{il(x-x_0)} \right) &= \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy \bar{P}_{\hbar}(y, \hbar k) e^{i(k-l)(x-y)} e^{il(x-x_0)} \\ &= e^{il(x-x_0)} \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy \bar{P}_{\hbar}(y, \hbar k + \hbar l) e^{ik(x-y)}, \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement d'indice $k \rightarrow k + l = k'$. Cela prouve que \hat{P}^* est un OPD de symbole

$$P_h^*(x, \xi) = \sum_{k \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{ik(x-y)} \bar{P}_h(y, \xi + \hbar k).$$

D'après le lemme C.17 de phase stationnaire appliqué pour $U_h(x, y, \xi, \eta) = \bar{P}_h(y, \xi + \eta)$, on a pour tout J le développement

$$P_h^*(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq J-1} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\gamma|} \frac{1}{\gamma!} \partial_x^\gamma \partial_\xi^\gamma \bar{P}_h(x, \xi) + R_J(x, \xi, \hbar),$$

où le terme de reste vérifie l'estimation

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^J \sup_{x, \xi} \sup_{\substack{|\gamma|=J \\ |\gamma'| \leq \frac{d+1}{2}}} \left| \partial_x^{\gamma+\alpha+\gamma'} \partial_\xi^{\beta+\gamma} \bar{P}_h(x, \xi) \right| C(J, \alpha).$$

En utilisant le fait que P^* est dans la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$, i.e

$$\left| \partial_x^{\gamma+\alpha+\gamma'} \partial_\xi^{\beta+\gamma} \bar{P}_h(x, \xi) \right| \leq C_{\gamma+\alpha+\gamma', \beta+\gamma} \hbar^{-\delta|\beta+\gamma|},$$

on obtient

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_J(x, \xi, \hbar) \right| \leq \hbar^{(1-\delta)J - \delta|\beta|} C(J, \alpha, \beta),$$

où $C(J, \alpha, \beta)$ est une constante positive. En utilisant cette estimation pour $J = 0$, cela prouve que P^* est dans la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$. Pour $J > 0$, cela prouve que l'on a bien le développement δ -classique annoncé. ■

Il arrive souvent que l'on ait un OPD dont le symbole est réel et qu'on souhaiterait modifier légèrement pour en faire un OPD auto-adjoint. Ceci est possible, comme le montre la proposition suivante.

Proposition C.24. *Si $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est un OPD dont le symbole P_h est réel, alors il existe un OPD $\hat{Q} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ auto-adjoint et tel que $\hat{Q} - \hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^{(1-\delta)}(\mathcal{T})$.*

Démonstration. Tout d'abord, l'opérateur \hat{R} défini par $\hat{R} = \hat{P}^* - \hat{P}$ vérifie à l'évidence $\hat{R}^* = -\hat{R}$. Si on définit ensuite $\hat{Q} = \hat{P} + \frac{1}{2}\hat{R}$, on a bien $\hat{Q}^* = \hat{Q}$ puisque

$$\hat{Q}^* = \hat{P}^* + \frac{1}{2}\hat{R}^* = \hat{P}^* - \frac{1}{2}\hat{R} = \hat{P} + \frac{1}{2}\hat{R}.$$

D'autre part, d'après le lemme C.23 précédent, le symbole de l'adjoint est de la forme $P_h^*(x, \xi) = \bar{P}_h(x, \xi) + A_h(x, \xi)$, où $A_h \in \Psi_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$, ce qui fait que le symbole de R_h vérifie $R_h = \bar{P}_h - P_h + B_h$, où $B_h \in \Psi_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$. Si le symbole P_h est réel cela implique donc que $R_h \in \Psi_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$. ■

Proposition C.25. *Soit $P_h \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ un symbole et $P_h^* \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ son adjoint comme défini dans le lemme C.23. Alors, leurs séries de Fourier par rapport à la variable x sont reliées comme suit :*

$$\widetilde{P}_h^*(k, \xi) = \overline{\widetilde{P}_h(-k, \xi + \hbar k)}.$$

Démonstration. La série de Fourier de P_h^* est

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_h^*(k, \xi) &= \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} \sum_{l \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{T}} dy e^{il(x-y)} \overline{P}_h(y, \xi + \hbar l) \\ &= \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} \sum_{l \in \Lambda^*} e^{il(x-x_0)} \overline{\int_{\mathcal{T}} dy e^{il(y-x_0)} P_h(y, \xi + \hbar l)},\end{aligned}$$

où l'on a inséré $e^{il(x-x_0)} e^{-il(x-x_0)}$. L'intégrale sur y donne la série de Fourier de P_h au point $-l$ et on obtient

$$\widetilde{P}_h^*(k, \xi) = \sum_{l \in \Lambda^*} \overline{P}_h(-l, \xi + \hbar l) \int_{\mathcal{T}} dx e^{i(l-k)(x-x_0)}.$$

L'intégrale sur x donne simplement $\delta(k=l)$, ce qui donne l'expression annoncée

$$\widetilde{P}_h^*(k, \xi) = \overline{P}_h(-k, \xi + \hbar k).$$

■

2.5 Calcul fonctionnel

Le théorème C.22 de Calderón-Vaillancourt nous assure que les opérateurs pseudo-différentiels de la classe $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ sont bornés dans $L^2(\mathcal{T})$, ce qui facilite leur calcul fonctionnel. En effet, si f est une fonction et \hat{A} un OPD, on peut définir $f(\hat{A})$ directement à l'aide du développement de Taylor de f près de 0, si le rayon de convergence de ce développement est supérieur à $\|\hat{A}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$. On peut aussi définir $f(\hat{A})$ par la formule

$$f(\hat{A}) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - \hat{A})},$$

où \mathcal{C} est un cycle entourant le spectre de \hat{A} . Le problème est de montrer que l'opérateur $f(\hat{A})$ obtenu par un de ces procédés est encore un OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$. Il faut donc notamment montrer que la résolvante $(z - \hat{A})^{-1}$ est un OPD de cette classe.

Cette question, dans le cadre des OPD sur \mathbb{R}^d (au lieu du tore \mathcal{T}) a été résolue par Beals ([8]) qui a utilisé pour cela une caractérisation des OPD en termes des commutateurs entre l'opérateur \hat{P} considéré et les opérateurs de multiplication par x_j et de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Les propriétés de ces commutateurs semblent cependant avoir déjà été étudiées dix ans plus tôt par Calderón ([16]). La méthode de Beals permet de majorer les quantités $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (P_h(x, \xi))|$, où $P_h(x, \xi)$ est donné par $P_h(x, \xi) = e^{-i\frac{x\xi}{\hbar}} \hat{P}(e^{i\frac{x\xi}{\hbar}})$, par des normes de la forme

$$\left\| \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \left[\dots, \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \left[x_k, \left[\dots, \left[x_l, \hat{P} \right] \right] \right] \right] \right] \right] \right\|_{\mathcal{L}(L^2)}.$$

Ceci permet de montrer que P_h est (ou non) dans une bonne classe de symbole et donc que \hat{P} est (ou non) un OPD.

En ce qui concerne les OPD sur le tore *sans petit paramètre* \hbar , il existe un certain nombre de travaux ([31, 22, 64, 65]) qui exhibent leurs propriétés. On y trouve notamment un critère à la Beals qui met en jeu les commutateurs avec les opérateurs de multiplication par e^{ix_j} et de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$. De manière tout à fait analogue au cas de \mathbb{R}^d , on peut majorer les quantités $\left| \partial_x^\alpha \Delta_k^\beta (P_\hbar(x, k)) \right|$ par les normes $\mathcal{L}(L^2)$ de ces commutateurs. Mais cette fois-ci, le symbole est une fonction de la variable continue $x \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et de la variable discrète $k \in \mathbb{Z}^d$, et Δ_k^β est la dérivée discrète.

Dans notre contexte d'OPD sur le tore *avec petit paramètre*, les opérateurs sont définis à partir d'un symbole $P_\hbar(x, \xi)$ qui dépend de deux variables continues, mais la définition de l'opérateur quantifié \hat{P} n'utilise les valeurs de $P_\hbar(x, \xi)$ que pour $\xi = \hbar k$, où k est une variable discrète. En suivant la méthode de Beals, on peut aussi obtenir des estimations similaires pour les quantités $\left| \partial_x^\alpha \Delta_k^\beta (P_\hbar(x, \hbar k)) \right|$. Les dérivées discrètes sont ici de la forme $P_\hbar(x, \hbar(k+u)) - P_\hbar(x, \hbar k)$, où u est un vecteur du réseau de taille 1. Il n'est alors pas évident de pouvoir en déduire des estimations sur les *vraies* dérivées $\partial_\xi^\beta (P_\hbar(x, \xi))$. Lorsque le symbole P_\hbar ne dépend pas de \hbar , on peut retrouver la dérivée à partir de la dérivée discrète en faisant tendre \hbar vers 0 et k vers l'infini avec $\hbar k \rightarrow \xi$. Mais lorsque le symbole dépend de \hbar , il n'est pas clair comment retrouver les estimations de $\partial_\xi^\beta (P_\hbar(x, \xi))$, pour tous x, ξ et \hbar , à partir des estimations des dérivées discrètes.

En résumé, pour ce qui concerne le calcul fonctionnel des OPD sur le tore avec petit paramètre, partant d'une fonction f et d'un OPD \hat{P} de symbole $P_\hbar(x, \xi)$, on peut définir $\hat{Q} = f(\hat{P})$ qui sera un OPD à symbole *discret*, i.e un symbole $Q(x, k, \hbar)$, mais on n'est pas sûr que ce symbole soit de la forme $Q(x, k, \hbar) = Q'_\hbar(x, \hbar k)$, où $Q'_\hbar(x, \xi)$ est un symbole du type de ceux qu'on a étudiés jusqu'à maintenant, i.e dans la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$.

Pour éviter cette difficulté, on va se contenter dans certains cas d'un calcul fonctionnel *approché*, en montrant qu'il existe un OPD $\hat{Q} \in \hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ de notre classe tel que $\hat{Q} = f(\hat{P}) + \hat{R}$, où $\hat{R} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$ est un OPD négligeable.

2.5.1 Symboles elliptiques et paramétrixes

Définition C.26. On dit qu'un symbole $A_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ est **elliptique** s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|A_\hbar(x, \xi)| \geq C$ pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$. Un opérateur pseudo-différentiel $\hat{A} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est dit elliptique si son symbole l'est.

Lemme C.27 (Paramétrixe pour OPD elliptique). Si $\hat{A} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est un OPD elliptique alors il existe un OPD $\hat{B} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ tel que

$$\begin{cases} \hat{A}\hat{B} - \mathbb{I} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T}) \\ \hat{B}\hat{A} - \mathbb{I} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T}) \end{cases} .$$

Démonstration. Notons $A \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ le symbole de \hat{A} et procédons par récurrence. Pour simplifier l'écriture, on omet temporairement de noter la dépendance en \hbar des symboles, bien que tous dépendent de \hbar . Supposons qu'à l'étape N on ait des OPD B_0, \dots, B_N , avec $B_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$, tels que $A \# (B_0 + \dots + B_{N-1}) = 1 + R_N$, où $R_N \in \Psi_\delta^{N(1-\delta)}(\mathcal{T})$. Le fait que A soit elliptique nous permet de définir $B_N = \frac{-R_N}{A}$ qui est bien dans la classe $\Psi_\delta^{N(1-\delta)}(\mathcal{T})$.

D'après le théorème C.19 de composition, on a

$$A\#(B_0 + \dots + B_{N-1} + B_N) = 1 + R_N + A\#\left(\frac{-R_N}{A}\right) = 1 + R_N + A\left(\frac{-R_N}{A}\right) + R_{N+1},$$

où $R_N \in \Psi_\delta^{(N+1)(1-\delta)}(\mathcal{T})$. Par récurrence, on montre donc qu'il existe une série $B_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$ telle que pour tout N on ait $A\#(B_0 + \dots + B_{N-1}) = 1 + R_N$, avec $R_N \in \Psi_\delta^{(N+1)(1-\delta)}(\mathcal{T})$.

Par le procédé de resommation de Borel (lemme C.15), il existe un symbole $B \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ ayant pour développement asymptotique $\sum B_j$, ce qui montre que $A\#B = 1 + R_1$, où $R_1 \in \Psi_\delta^\infty(\mathcal{T})$. De la même manière, on montre qu'il existe un symbole $B' \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ tel que $B'\#A = 1 + R_2$ avec $R_2 \in \Psi_\delta^\infty(\mathcal{T})$. On a donc

$$B'\#A\#B = B'\#(1 + R_1) = (1 + R_2)\#B,$$

ce qui fait que $B - B' = B'\#R_1 - R_2\#B \in \Psi_\delta^\infty(\mathcal{T})$ et donc que $B\#A = 1 + R_3$, avec $R_3 \in \Psi_\delta^\infty(\mathcal{T})$. ■

2.5.2 Symboles dépendant uniformément d'un paramètre

On est parfois amené, notamment pour définir la résolvante approché d'un OPD (voir section suivante), à considérer des symboles $P_\hbar(x, \xi, z)$ dépendant d'un paramètre z variant dans un certain espace \mathcal{D} . Il est alors intéressant de considérer les symboles qui satisfont les estimations caractéristiques de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ uniformément par rapport au paramètre z , i.e

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (P_\hbar(x, \xi, z)) \right| \leq C_{\alpha, \beta} \hbar^{m - \delta|\beta|}$$

pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$ et tout $z \in \mathcal{D}$. On dira dans ce cas que P_\hbar est un **symbole dans $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ uniformément par rapport z** . Les lemmes et théorèmes établis pour la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ s'étendent facilement à ces symboles dépendant uniformément d'un paramètre, à savoir :

- La resommation à la Borel (proposition C.16) d'une suite de symbole $P_j(x, \xi, z)$ en un symbole $P_\hbar(x, \xi, z)$ dépendant uniformément de z .
- Le théorème C.19 de composition d'OPD.
- Le théorème C.22 sur la continuité L^2 des OPD.
- Le lemme C.23 sur l'adjoint d'un OPD.
- Le lemme C.27 sur l'existence de paramétrixes pour un OPD dont le symbole $P_\hbar(x, \xi, z)$ est elliptique uniformément par rapport à z , i.e tel que $|P_\hbar(x, \xi, z)| \geq C$ pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$ et tout $z \in \mathcal{D}$.

Il suffit pour cela reprendre soigneusement chacune des démonstrations et vérifier que toutes les estimations sont uniformes par rapport à $z \in \mathcal{D}$, mais il n'y a pas de difficultés supplémentaires.

2.5.3 Résolvante approchée

Partant d'un OPD $\hat{A} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, on souhaite faire du calcul fonctionnel à l'aide de la formule

$$f(\hat{A}) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - \hat{A})},$$

et récupérer un OPD $f(\hat{A})$. Cependant, on n'est pas assuré que $(z - \hat{A})^{-1}$ soit un OPD, comme on l'a dit précédemment. Par contre, le lemme C.27 nous assure l'existence d'une paramétrix, i.e un OPD $\hat{R}_z \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ tel que $\hat{R}_z(z - \hat{A}) = \mathbb{I} + \hat{B}$ avec $\hat{B} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$. On appelle l'opérateur \hat{R}_z la **résolvante approchée** de \hat{A} .

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, on définit $f(\hat{A})$ par

$$f(\hat{A}) = \int_{\mathcal{C}} f(z) \hat{R}_z dz,$$

avec \mathcal{C} un cercle de rayon $2C_{0,0}$, où $C_{0,0}$ est la constante de l'estimation $|A_h(x, \xi)| \leq C_{0,0}$. Cela assure que le symbole $z - A_h(x, \xi)$ est elliptique uniformément pour z variant dans un domaine compact \mathcal{D} contenant le cercle \mathcal{C} . Cette définition nous permet effectivement de construire un opérateur pseudo-différentiel et qui coïncide, à un OPD négligeable près, avec la définition habituelle de $f(\hat{A})$. En effet, d'après les remarques de la section précédente, il existe une résolvante approchée $\hat{R}_z \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ dépendant uniformément de $z \in \mathcal{D}$, ce qui fait que

$$f(\hat{A}) - \int_{\mathcal{C}} f(z) (z - \hat{A})^{-1} dz \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T}).$$

2.5.4 Exponentielles et conjugaison

On va principalement utiliser le calcul fonctionnel pour définir les exponentielles d'OPD.

Proposition C.28. Soit $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ un OPD auto-adjoint. On définit l'*exponentielle* $e^{i\hat{P}}$ à l'aide de la résolvante approchée. Cette définition coïncide avec la véritable exponentielle $\exp(i\hat{P})$ à un OPD négligeable près. Notamment, on a les propriétés suivantes :

- $(e^{i\hat{P}})^* - e^{-i\hat{P}} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$
- $(e^{i\hat{P}})^* e^{-i\hat{P}} - \mathbb{I} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$ et $e^{-i\hat{P}} (e^{i\hat{P}})^* - \mathbb{I} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$

Démonstration. En effet, on a $e^{i\hat{P}} = \exp(i\hat{P}) + \hat{B}$, avec $\hat{B} \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$. Cela fait que $(e^{i\hat{P}})^* = \exp(-i\hat{P}) + \hat{B}^*$ et d'après le lemme C.23, on a $\hat{B}^* \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (e^{i\hat{P}})^* e^{-i\hat{P}} &= \mathbb{I} + \exp(-i\hat{P}) \hat{B} + \hat{B}^* \exp(+i\hat{P}) + \hat{B}^* \hat{B} \\ &= \mathbb{I} + \left((e^{i\hat{P}})^* - \hat{B}^* \right) \hat{B} + \hat{B}^* (e^{i\hat{P}} - \hat{B}) + \hat{B}^* \hat{B} \\ &= \mathbb{I} + (e^{i\hat{P}})^* \hat{B} + \hat{B}^* e^{i\hat{P}} - \hat{B}^* \hat{B}, \end{aligned}$$

où les trois derniers termes du membre de droite appartiennent bien à $\hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$, grâce au théorème C.19 et au lemme C.23. ■

Proposition C.29. Soit $0 \leq \delta < 1$ un réel. Soit $\hat{A} \in \hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ et $\hat{B} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ deux OPD et soit

$$\hat{C} = e^{i\hat{A}}\hat{B}\left(e^{i\hat{A}}\right)^*$$

la conjugaison. Alors \hat{C} admet le développement asymptotique suivant,

$$\hat{C} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{C}_n,$$

où les $\hat{C}_n \in \Psi_\delta^{(m+1-\delta)n}(\mathcal{T})$ sont donnés par

$$\hat{C}_n = \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_n \dots]$$

Le développement asymptotique signifie que pour tout entier $N \geq 0$, le reste de la série tronquée à l'ordre N vérifie

$$\hat{C}(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n = \hat{R}_N,$$

où $\hat{R}_N \in \hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)N}(\mathcal{T})$.

Démonstration. On considère

$$\hat{C}(\varepsilon) = e^{i\varepsilon\hat{A}}\hat{B}\left(e^{i\varepsilon\hat{A}}\right)^*$$

la famille d'OPD définie pour $\varepsilon \in [0, 1]$, pour étudier $\hat{C} = \hat{C}(1)$. Tout d'abord, on sait que $e^{i\varepsilon\hat{A}}$ est dans $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0, 1]$, ce qui fait que $\hat{C}(\varepsilon)$ est aussi dans la classe $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0, 1]$. De plus, $e^{i\varepsilon\hat{A}}$ et $\hat{C}(\varepsilon)$ dépendent de manière C^∞ de ε . D'autre part, d'après la proposition précédente, l'exponentielle $e^{i\varepsilon\hat{A}}$ définie à l'aide de la résolvante approchée est égale à $e^{i\varepsilon\hat{A}} = \exp(i\varepsilon\hat{A}) + \hat{R}$, où $\exp(i\varepsilon\hat{A})$ est l'exponentielle habituelle et $\hat{P}_1 \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$ est un OPD négligeable. L'opérateur $\hat{C}(\varepsilon)$ s'écrit donc $\hat{C}(\varepsilon) = \exp(i\varepsilon\hat{A})\hat{B}\exp(-i\varepsilon\hat{A}) + \hat{P}_2$, où $\hat{P}_2 \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$ est un OPD négligeable uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0, 1]$ et dépendant de manière C^∞ de ε . Notons $\hat{C}'(\varepsilon) = \exp(i\varepsilon\hat{A})\hat{B}\exp(-i\varepsilon\hat{A})$ la conjugaison avec la vraie exponentielle.

Le développement de Taylor de l'opérateur $\hat{C}'(\varepsilon)$ avec reste intégrale à l'ordre ε^N , autour de $\varepsilon = 0$, est

$$\hat{C}'(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n \hat{C}'}{d\varepsilon^n}(0) + \frac{\varepsilon^N}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} \frac{d^N \hat{C}'}{d\varepsilon^N}(\varepsilon\tau).$$

En posant $\varepsilon = 1$, on obtient

$$\hat{C}'(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \frac{d^n \hat{C}'}{d\varepsilon^n}(0) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} \frac{d^N \hat{C}'}{d\tau^N}(\tau).$$

On vérifie facilement que la dérivée n -ème de $\hat{C}'(\varepsilon)$ est donnée par

$$\frac{d^n \hat{C}'}{d\varepsilon^n}(\varepsilon) = \exp(i\varepsilon \hat{A}) \left(i^n \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_{n} \dots \right) \exp(-i\varepsilon \hat{A}),$$

d'où

$$\hat{C}'(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_{n} + \hat{R}_N,$$

où le reste \hat{R}_N est défini par

$$\hat{R}_N = \frac{i^N}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} \exp(i\tau \hat{A}) \left(\underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_{N} \dots \right) \exp(-i\tau \hat{A}).$$

Par ailleurs, \hat{A} et \hat{B} étant dans les classes $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ et $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, le théorème C.19 de composition nous assure que

$$\hat{S}_N = \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_{N} \in \hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)N}(\mathcal{T}),$$

ce qui fait que les termes $\hat{C}_n = \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_{n}$ du développement $\hat{C} \sim \sum \hat{C}_n$ sont dans

la classe $\hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)N}(\mathcal{T})$. Considérons maintenant le reste

$$\hat{R}_N = \frac{i^N}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} \exp(i\tau \hat{A}) \hat{S}_N \exp(-i\tau \hat{A}).$$

En réutilisant de nouveau $\exp(i\tau \hat{A}) = e^{i\tau \hat{A}} + \hat{P}_3$, avec \hat{P}_3 dans $\hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$ uniformément pour tout $\tau \in [0, 1]$, on obtient que

$$\hat{R}_N = \frac{i^N}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} e^{i\tau \hat{A}} \hat{S}_N e^{-i\tau \hat{A}} + \hat{P}_4,$$

avec $\hat{P}_4 \in \hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$. Le théorème C.19 nous assure alors que $\hat{R}_N(\varepsilon)$ est dans $\hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)N}(\mathcal{T})$ uniformément par rapport à $\tau \in [0, 1]$. ■

Lorsque l'opérateur \hat{B} est dans $\hat{\Psi}_0^0(\mathcal{T})$ (i.e pour $\delta = 0$) et que son symbole ne dépend pas de la variable x , alors on peut avoir une estimation légèrement meilleure (on gagne un facteur \hbar^δ), qui nous sera utile par la suite.

Proposition C.30. Soit $0 \leq \delta < 1$ un réel. Soit $\hat{B} \in \Psi_0^0(\mathcal{T})$ un OPD dont le symbole $B_\hbar(\xi)$ ne dépend pas de la variable x et $\hat{A} \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ un OPD quelconque. Alors l'opérateur $\hat{C} = e^{i\hat{A}} \hat{B} (e^{i\hat{A}})^*$ admet le développement asymptotique suivant,

$$\hat{C} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{C}_n,$$

où les $\hat{C}_n \in \Psi_\delta^{(m+1-\delta)n+\delta}(\mathcal{T})$ sont donnés par

$$\hat{C}_n = \frac{i^n}{n!} \underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_n \dots]$$

Le développement asymptotique signifie que pour tout entier $N \geq 0$, le reste de la série tronquée à l'ordre N vérifie

$$\hat{C} - \sum_{n=0}^{N-1} C_n = \hat{R}_N,$$

où $\hat{R}_N \in \hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)N+\delta}(\mathcal{T})$.

Démonstration. La preuve se fait de manière identique à la précédente, excepté le fait que l'on utilise la proposition C.20 qui nous assure que le premier commutateur $[\hat{A}, \hat{B}]$ est dans $\hat{\Psi}_\delta^{m+1}(\mathcal{T})$ au lieu de $\hat{\Psi}_\delta^{m+1-\delta}(\mathcal{T})$. Les autres commutateurs vérifient alors

$$\underbrace{[\hat{A}, \dots, [\hat{A}, \hat{B}]]}_n \dots] \in \hat{\Psi}_\delta^{(m+1-\delta)n+\delta}(\mathcal{T})$$

et la preuve se termine de la même manière que précédemment. ■

3 \hbar^α -Microlocalisation dans l'espace des tores

Soit (\mathcal{T}, ∇) un tore affine standard. On a vu au début de ce chapitre que la variété symplectique $T^*\mathcal{T}$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{T} \times \mathcal{B}$, où $\mathcal{B} = \Omega_{\nabla}^1(\mathcal{T})$ représente l'espace des tores "horizontaux" $\mathcal{T}_\xi = \pi^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathcal{B}$. Dans le chapitre suivant, on présente une méthode de forme normale dans le but d'étudier certains opérateurs "près" d'un tore \mathcal{T}_{ξ_0} donné. La forme normale met en jeu des termes de "reste" dont le symbole $R(x, \xi)$ ainsi qu'un certain nombre de ses dérivées par rapport à ξ s'annulent en $\xi = \xi_0$. Pour pouvoir profiter des résultats de ces formes normales, il nous faut deux outils : tout d'abord, il faut étudier les propriétés des OPD dont le symbole est $O(|\xi - \xi_0|^J)$ dans un certain sens, et qu'on appelle les **opérateurs J-plat**. D'autre part, il faut décrire l'opération de microlocalisation dans une boule de rayon \hbar^α autour d'un tore \mathcal{T}_{ξ_0} , qu'on appelle **\hbar^α -microlocalisation**.

3.1 Opérateurs J-plat sur un tore

Définition C.31. Soit δ une constante réelle telle que $0 \leq \delta < 1$ et soit $P_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ un symbole. Soit $\xi_0 \in \mathcal{B}$ et soit $J \in \mathbb{N}$. On dit que P_\hbar est un **symbole J-plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0}** si P_\hbar admet un développement asymptotique δ -classique

$$P_\hbar \sim \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\hbar),$$

où les termes $P_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}$ vérifient pour tout $j = 0..N$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq J - j - 1$ et pour tout $x \in \mathcal{T}$:

$$(\partial_\xi^\alpha P_j)(x, \xi_0) = 0.$$

On notera cela

$$P_{\hbar} = O_{\xi_0}(J).$$

Cela signifie que formellement (à \hbar fixé) on a $P_j = O(|\xi - \xi_0|^{J-j})$.

De même, on dira que $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^0(T)$ est un **opérateur J -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0}** si son symbole est J -plat sur ce tore. On notera aussi

$$\hat{P} = O_{\xi_0}(J).$$

La notion d'opérateur J -plat se comporte bien vis à vis des sommes et des produits d'opérateurs, comme le montrent les deux propositions suivantes.

Proposition C.32. Soit $\hat{P}, \hat{Q} \in \hat{\Psi}_\delta^0(T)$ deux OPD et soit $\xi_0 \in \mathcal{B}$. Si $\hat{P} = O_{\xi_0}(J)$ et $\hat{Q} = O_{\xi_0}(J')$ alors

$$\hat{P} + \hat{Q} = O_{\xi_0}(\min(J, J')).$$

Démonstration. Triviale. ■

Proposition C.33. Soit $\hat{P}, \hat{Q} \in \hat{\Psi}_\delta^0(T)$ deux OPD et soit $\xi_0 \in \mathcal{B}$. Si $\hat{P} = O_{\xi_0}(J)$ et $\hat{Q} = O_{\xi_0}(J')$ alors

$$\hat{P}\hat{Q} = O_{\xi_0}(J + J').$$

Démonstration. Le théorème C.19 de composition nous apprend que le symbole $P_{\hbar}\#Q_{\hbar}$ du produit $\hat{P}\hat{Q}$ a le développement asymptotique suivant

$$P_{\hbar}\#Q_{\hbar} \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j(\hbar),$$

où les $C_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(T)$ sont donnés par

$$C_j(x, \xi, \hbar) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ \alpha \in \mathbb{N}^d \\ m+n+|\alpha|=j}} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P_m(x, \xi, \hbar) \partial_x^\alpha Q_n(x, \xi, \hbar).$$

Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a donc

$$\partial_\xi^\beta C_j(x, \xi, \hbar) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{N} \\ \alpha \in \mathbb{N}^d \\ m+n+|\alpha|=j}} \frac{\hbar^{|\alpha|}}{i^{|\alpha|}\alpha!} \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^\alpha \partial_\xi^{\alpha+\beta-\beta'} P_m(x, \xi, \hbar) \partial_\xi^{\beta'} \partial_x^\alpha Q_n(x, \xi, \hbar).$$

On suppose maintenant que $|\beta| \leq J + J' - j - 1$ et on va montrer que $\partial_\xi^\beta C_j(x, \xi_0, \hbar) = 0$. Il faut pour cela découper la somme sur β' en deux morceaux :

- Lorsque $|\beta'| \leq J' - n - 1$, on a $\partial_\xi^{\beta'} Q_n(x, \xi_0, \hbar) = 0$ puisque Q_{\hbar} est J' -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} .

• Lorsque $|\beta'| \geq J' - n$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta - \beta'| &= |\alpha| + |\beta| - |\beta'| \\ &\leq |\alpha| + J' + J - j - 1 - J' + n \\ &= J - m - 1, \end{aligned}$$

ce qui fait que $\partial_\xi^{\alpha+\beta-\beta'} P_m(x, \xi_0, \hbar) = 0$, puisque P_\hbar est J -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} .

On a ainsi montré que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leq J + J' - j - 1$, on a $\partial_\xi^\beta C_j(x, \xi_0, \hbar) = 0$, ce qui signifie que C_\hbar est $(J + J')$ -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} . ■

Proposition C.34. Soit $\hat{P} \in \hat{\Psi}_\delta^{0,l}(T)$ un opérateur J -plat sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Alors son adjoint $\hat{P}^* \in \hat{\Psi}_\delta^{0,l}(T)$ est aussi J -plat sur \mathcal{T}_{ξ_0} .

Démonstration. La preuve est tout à fait similaire à celle de la proposition précédente. On utilise cette fois le développement asymptotique δ -classique du symbole $P_\hbar^* \in \Psi_\delta^0(T)$ de l'adjoint \hat{P}^* , donnée dans le lemme C.23, soit

$$P_\hbar^*(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} C_j(x, \xi, \hbar),$$

où les $C_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(T)$ sont donnés par

$$C_j(x, \xi, \hbar) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d \\ m+|\alpha|=j}} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\alpha \bar{P}_m(x, \xi, \hbar).$$

Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a donc

$$\partial_\xi^\beta C_j(x, \xi, \hbar) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^d \\ m+|\alpha|=j}} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\alpha+\beta} \bar{P}_m(x, \xi, \hbar).$$

Pour tout $|\beta| \leq J - j - 1$, on va montrer que $\partial_\xi^\beta C_j(x, \xi_0, \hbar) = 0$. En effet, en rajoutant $\pm |\alpha|$ on voit que $|\beta| \leq J - j - 1$ est équivalent à $|\alpha + \beta| \leq J - m - 1$. De plus, cette dernière condition implique que $\partial_\xi^{\alpha+\beta} \bar{P}_m(x, \xi_0, \hbar) = 0$ puisque P_\hbar est J -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Cela montre que $P_\hbar^* \in \Psi_\delta^0(T)$ est J -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} . ■

On donne maintenant un lemme technique que l'on utilisera pour prouver le lemme C.38. L'idée est simple et intuitive. Intuitivement, un symbole J -plat F_\hbar admet un développement asymptotique $F_\hbar \sim \sum F_j(\hbar)$ où les termes $F_j \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}$ vérifient sont $O(|\xi - \xi_0|^{J-j})$. Cette estimation est cependant valable à \hbar fixé puisque les dérivées de F_j par rapport à ξ amène des facteurs $\hbar^{-\delta}$. L'estimation est donc plutôt $O(\hbar^{-\delta(J-j)} |\xi - \xi_0|^{J-j})$. D'autre part, les fonctions $F_j(x, \xi, \hbar)$ sont C^∞ par rapport à x uniformément par rapport à \hbar , ce qui fait que leurs séries de Fourier $\tilde{F}_j(k, \xi, \hbar)$ par rapport à x sont à décroissance rapide. Le lemme suivant résume ces deux propriétés ensemble.

Lemme C.35. Si $F_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ est un symbole J -plat sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} , alors sa série de Fourier $\tilde{F}_\hbar(k, \xi)$ par rapport à la variable x vérifie l'estimation suivante. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante positive C_n telle que pour tout $\hbar \leq \hbar_0$, tout $k \in \Lambda^*$ et tout $r > \hbar$, on a

$$|\xi - \xi_0| \leq r \Rightarrow \left| \tilde{F}_\hbar(k, \xi) \right| \leq \frac{C_n}{(1 + |k^2|)^n} \left(\frac{r}{\hbar^\delta} \right)^J.$$

Démonstration. Par hypothèse, F_\hbar admet un développement asymptotique $F_\hbar \sim \sum F_j$, où les fonctions $F_j(x, \xi, \hbar) \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}$ vérifient $(\partial_\xi^\beta F_j)(x, \xi_0, \hbar) = 0$, pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$, avec $|\beta| \leq J - j - 1$. De même, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F_j)(x, \xi_0, \hbar) = 0$. On veut effectuer un développement de Taylor de la fonction $\partial_x^\alpha F_j$ près du point $\xi = \xi_0$. Pour cela on a besoin de contrôler la taille des dérivées par rapport à ξ qui peuvent être grande puisque F_\hbar est dans la classe $\Psi_\delta^0(\mathcal{T})$. On a cependant la majoration

$$\left| (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F_j)(x, \xi, \hbar) \right| \leq C_{\alpha, \beta, j} \hbar^{(1-\delta)j - \delta|\beta|},$$

où $C_{\alpha, \beta, j}$ est une constante positive. En effectuant alors un développement de Taylor dans la variable ξ avec reste à l'ordre $J - j$, on voit que pour tout ξ tel que $|\xi - \xi_0| \leq r$, on a

$$|(\partial_x^\alpha F_j)(x, \xi, \hbar)| \leq C(\alpha, J, j) \hbar^{(1-\delta)j - \delta(J-j)} r^{J-j} = C(\alpha, J, j) \left(\frac{\hbar}{r} \right)^j \left(\frac{r}{\hbar^\delta} \right)^J,$$

où la constante $C(\alpha, J, j)$ contient le maximum des constantes $C_{\alpha, \beta, j}$ pour β tel que $|\beta| = J - j$. Cela nous permet d'avoir une majoration pour les dérivées du symbole $(\partial_x^\alpha F_\hbar)$. Pour cela, on sépare les termes F_j pour $j \leq J$ et pour $j > J$, i.e

$$(\partial_x^\alpha F_\hbar)(x, \xi) = \sum_{j=0}^J (\partial_x^\alpha F_j)(x, \xi, \hbar) + R_{J+1}(\hbar, x, \xi),$$

où $|R_{J+1}(\hbar, x, \xi)| \leq C'(\alpha, J) \hbar^{(1-\delta)(J+1)}$ du fait que $F_\hbar \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ admet un développement asymptotique δ -classique. Pour tout ξ tel que $|\xi - \xi_0| \leq r$, on a donc la majoration

$$|(\partial_x^\alpha F_\hbar)(x, \xi)| \leq \left(\frac{r}{\hbar^\delta} \right)^J \sum_{j=0}^J C(\alpha, J, j) \left(\frac{\hbar}{r} \right)^j + C'(\alpha, J) \hbar^{(1-\delta)(J+1)}.$$

D'autre part, en utilisant l'astuce de la proposition C.3 on a, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\hbar(k, \xi) &= \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} F_\hbar(x, \xi) \\ &= \frac{1}{(1 + |k^2|)^n} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq n}} C(\alpha, n) k^\alpha \int_{\mathcal{T}} dx e^{-ik(x-x_0)} \partial_x^\alpha F_\hbar(x, \xi), \end{aligned}$$

où les $C(\alpha, s)$ sont des constantes. D'après ce qui précède, on a l'estimation

$$\left| \tilde{F}_\hbar(k, \xi) \right| \leq \frac{1}{(1 + |k^2|)^{\frac{n}{2}}} \left(\left(\frac{r}{\hbar^\delta} \right)^J \sum_{j=0}^J C''(n, J, j) \left(\frac{\hbar}{r} \right)^j + C'''(n, J) \hbar^{(1-\delta)(J+1)} \right),$$

pour tout ξ tel que $|\xi - \xi_0| \leq r$. En utilisant enfin le fait que $\delta < 1$ et que pour tout $r > \hbar$, on a $\frac{\hbar}{r} < 1$ et $\hbar^{(1-\delta)(J+1)} \ll \hbar^{(1-\delta)J} < \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J$, on obtient

$$\left| \tilde{F}_\hbar(k, \xi) \right| \leq \frac{C_n}{(1 + |k^2|)^n} \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J.$$

■

3.2 \hbar^α -Microlocalisation autour d'un tore

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{T})$ et la base formée par les ondes planes $e^{ik(x-x_0)}$, $k \in \Lambda^*$. On voit dans la définition des opérateurs pseudo-différentiels que les symboles $P(x, \xi)$ sont évalués en $\xi = \hbar k$, avec $k \in \Lambda^*$, ce qui montre l'intérêt de considérer le réseau $\hbar\Lambda^* \subset \mathcal{B}$ de taille \hbar . Notons \mathcal{H}_k le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $e^{ik(x-x_0)}$.

Définition C.36. Soit \mathcal{T}_{ξ_0} un tore et $r > 0$ un réel. Pour tout \hbar , on définit le sous-espace $\mathcal{H}_{\xi_0, r}$ engendré par les fonctions $e^{ik(x-x_0)}$, avec $k \in \Lambda^*$ tel que $\hbar k$ est inclus dans la boule de rayon r centrée en ξ_0 , i.e

$$\mathcal{H}_{\xi_0, r} = \bigoplus_{\substack{k \in \Lambda^* \\ |\hbar k - \xi_0| \leq r}} \mathcal{H}_k,$$

On notera $\hat{P}_{\xi_0, r} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\xi_0, r}$ le projecteur sur ce sous-espace.

Dans la suite, on va utiliser ce sous-espace $\mathcal{H}_{\xi_0, r}$ pour un rayon $r = c\hbar^\alpha$, où $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$ sont des constantes. Le but est d'évaluer la norme de l'opérateur $\hat{R}\hat{P}_{\xi_0, c\hbar^\alpha}$, où \hat{R} est un OPD et $\hat{P}_{\xi_0, c\hbar^\alpha}$ est le projecteur défini juste au dessus. Lorsque l'opérateur \hat{R} est J -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} autour duquel on microlocalise, alors la norme de $\hat{R}\hat{P}_{\xi_0, c\hbar^\alpha}$ est petite, comme l'indique le lemme C.38 qui suit. C'est ce lemme qui permettra de négliger les termes de reste dans les formes normales décrites dans le chapitre suivant.

Auparavant, on rappelle le lemme de Cotlar-Stein dont on peut trouver une preuve en divers endroits, notamment dans le livre [26] à la page 83 ou encore [45] à la page 49.

Lemme C.37 (Cotlar-Stein). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ une famille d'opérateurs bornés, où \mathcal{P} est un espace dénombrable. S'il existe une constante C telle que

$$\forall q \in \mathcal{P}, \sum_{p \in \mathcal{P}} \|A_p^* A_q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2}} \leq C$$

et

$$\forall p \in \mathcal{P}, \sum_{q \in \mathcal{P}} \|A_p^* A_q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{2}} \leq C,$$

alors on a

$$\left\| \sum_{p \in \mathcal{P}} A_p \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 2C.$$

Lemme C.38. Soit $\hat{R} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ un opérateur OPD J -plat sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Pour tout \hbar et tout $r > \hbar$, on a

$$\left\| \hat{R} \hat{P}_{\xi_0, r} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}))} = O\left(\left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J\right).$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, dans toute la preuve on notera $\|\cdot\|$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{T})}$ et pour la norme opérateur $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{T}))}$, qui seront les seules utilisées. L'opérateur $\hat{P}_{\xi_0, r}$ est le projecteur sur le sous-espace $\mathcal{H}_{\xi_0, r}$ qui se décompose en

$$\mathcal{H}_{\xi_0, r} = \bigoplus_{|\hbar k - \xi_0| \leq r} \mathcal{H}_k,$$

où \mathcal{H}_k est l'espace de dimension 1 engendré par la fonction $e^{ik(x-x_0)}$. On note \hat{P}_k le projecteur sur \mathcal{H}_k . L'opérateur restreint $\hat{R} \hat{P}_{\xi_0, r} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ se décompose alors de la manière suivante.

$$\hat{R} \hat{P}_{\xi_0, r} = \bigoplus_{|\hbar k - \xi_0| \leq r} \hat{R}_k,$$

où l'on a noté $\hat{R}_k = \hat{R} \hat{P}_k$. On va maintenant montrer que l'on a une majoration des sommes $\sum_l \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}}$ et $\sum_k \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}}$, avec $|\hbar l - \xi_0| \leq r$ et $|\hbar k - \xi_0| \leq r$, ce qui va nous permettre d'appliquer le lemme C.37 de Cotlar-Stein et de conclure. Tout d'abord, on a

$$\sum_{|\hbar l - \xi_0| \leq r} \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}} = \sum_{|\hbar l - \xi_0| \leq r} \left\| \hat{P}_k \hat{Q} \hat{P}_l \right\|^{\frac{1}{2}},$$

où l'on a noté $\hat{Q} = \hat{R}^* \hat{R}$. Pour toute fonction $\varphi \in L^2(\mathcal{T})$, on note la décomposition $\varphi(x) = \sum_p \tilde{\varphi}(p) e^{ip(x-x_0)}$. On a alors $\hat{P}_k \hat{Q} \hat{P}_l(\varphi) = \tilde{\varphi}(l) \hat{P}_k \hat{Q} e^{il(x-x_0)}$. Par ailleurs, d'après le théorème C.19 de composition et le lemme C.23, l'opérateur $\hat{Q} = \hat{R}^* \hat{R}$ est un OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$. Son symbole $Q_\hbar(x, \xi)$ vérifie donc $\hat{Q}(e^{il(x-x_0)}) = Q_\hbar(x, \hbar l) e^{il(x-x_0)}$, si bien que

$$\hat{P}_k \hat{R}^* \hat{R} \hat{P}_l(\varphi) = \tilde{\varphi}(l) \hat{P}_k \left(Q_\hbar(x, \hbar l) e^{il(x-x_0)} \right).$$

L'opérateur \hat{P}_k agit en sélectionnant simplement la composante k de Fourier et donc

$$\hat{P}_k \hat{R}^* \hat{R} \hat{P}_l(\varphi) = \tilde{\varphi}(l) \tilde{Q}_\hbar(k-l, \hbar l) e^{ik(x-x_0)},$$

ce qui est une fonction avec un seul coefficient de Fourier non nul. Donc, pour tout $\varphi \in L^2(\mathcal{T})$, on a $\left\| \hat{P}_k \hat{Q} \hat{P}_l(\varphi) \right\| = |\tilde{\varphi}(l)| \left| \tilde{Q}_\hbar(k-l, \hbar l) \right|$, ce qui fait que

$$\begin{aligned} \left\| \hat{P}_k \hat{Q} \hat{P}_l \right\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left\| \hat{P}_k \hat{Q} \hat{P}_l(\varphi) \right\| \\ &= \left| \tilde{Q}_\hbar(k-l, \hbar l) \right| \sup_{\|\varphi\|=1} |\tilde{\varphi}(l)| \\ &= \left| \tilde{Q}_\hbar(k-l, \hbar l) \right|. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}} \leq \left| \tilde{Q}_\hbar(k-l, \hbar l) \right|^{\frac{1}{2}}.$$

D'après les propositions C.33 et C.34, l'opérateur $\hat{Q} = \hat{R}^* \hat{R}$ est $2J$ -plat sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} . On peut donc appliquer le lemme C.35 qui nous assure que pour tout entier $2n \in 2\mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \Lambda^*, \forall l \in \Lambda^* \text{ tq } |\hbar l - \xi_0| \leq r \Rightarrow \left| \tilde{Q}_{\hbar}(k-l, \hbar l) \right| \leq \frac{C_{2n}}{\left(1 + (k-l)^2\right)^{2n}} \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^{2J},$$

ce qui implique que

$$\forall k, \forall l \text{ tq } |\hbar l - \xi_0| \leq r \Rightarrow \left| \tilde{Q}_{\hbar}(k-l, \hbar l) \right|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C'_n}{\left(1 + (k-l)^2\right)^n} \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J.$$

On peut alors estimer la somme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{l \in \Lambda^* \\ |\hbar l - \xi_0| \leq r}} \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}} &\leq C'_n \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J \sum_{|\hbar l - \xi_0| \leq r} \frac{1}{\left(1 + (k-l)^2\right)^n} \\ &\leq C'_n \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J \sum_{j \in \Lambda^*} \frac{1}{(1 + j^2)^n}, \end{aligned}$$

où l'on a étendu la somme à tout Λ^* et fait le changement d'indice $j = k-l$. Si l'on choisit n tel que $2n > d$, la somme converge et on obtient finalement pour tout $k \in \Lambda^*$, donc notamment pour tout k tel que $|\hbar k - \xi_0| \leq r$,

$$\sum_{|\hbar l - \xi_0| \leq r} \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}} \leq D \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J,$$

où D est une constante positive.

Par une démarche tout à fait analogue, pour ne pas dire identique, on peut montrer que pour tout $l \in \Lambda^*$, et donc notamment pour tout l tel que $|\hbar l - \xi_0| \leq r$, on a aussi l'estimation

$$\sum_{|\hbar k - \xi_0| \leq r} \left\| \hat{R}_k^* \hat{R}_l \right\|^{\frac{1}{2}} \leq D \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J,$$

ce qui nous permet d'appliquer le lemme de Cotlar-Stein et de prouver enfin que

$$\left\| \hat{R} \hat{P}_{\xi_0, r} \right\| \leq 2D \left(\frac{r}{\hbar^\delta}\right)^J.$$

■

3.3 Fonctions \hbar^α -microlocalisées sur un tore

D'après le lemme C.38, on comprend intuitivement qu'un opérateur J -plat sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} est un opérateur qui est *petit* dans un voisinage de \mathcal{T}_{ξ_0} , pour peu que l'on choisisse un voisinage de taille $r \ll \hbar^\delta$. Cette propriété n'est cependant intéressante que si on applique l'opérateur à des fonctions qui *vivent* essentiellement près du tore \mathcal{T}_{ξ_0} .

Définition C.39. Soit $\alpha > 0$ un réel. On dit qu'une famille de fonctions $\varphi_\hbar \in L^2(\mathcal{T})$ est \hbar^α -microlocalisée sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} si on a

$$\left\| \mathbb{I} - \hat{P}_{\xi_0, \hbar^\alpha}(\varphi_\hbar) \right\|_{L^2(\mathcal{T})} = O(\hbar^\infty).$$

Proposition C.40. Soit $\hat{R} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ un opérateur J -plat sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} et soit $\varphi_\hbar \in L^2(\mathcal{T})$ une fonction \hbar^α -microlocalisée sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} , avec $\alpha > 0$. Alors on a

$$\left\| \hat{R}(\varphi_\hbar) \right\|_{L^2(\mathcal{T})} = O\left(\hbar^{(\alpha-\delta)J}\right).$$

Démonstration. En effet, en insérant $\mathbb{I} = \left(\mathbb{I} - \hat{P}_{\xi_0, \hbar^\alpha}\right) + \hat{P}_{\xi_0, \hbar^\alpha}$, on trouve

$$\left\| \hat{R}(\varphi_\hbar) \right\|_{L^2(\mathcal{T})} \leq \left\| \hat{R} \right\|_{L^2(\mathcal{T})} \left\| \left(\mathbb{I} - \hat{P}_{\xi_0, \hbar^\alpha}\right)(\varphi_\hbar) \right\|_{L^2(\mathcal{T})} + \left\| \hat{R}\hat{P}_{\xi_0, \hbar^\alpha}(\varphi_\hbar) \right\|_{L^2(\mathcal{T})}.$$

Le premier terme est $O(\hbar^\infty)$ du fait que \hat{R} est borné et que φ est \hbar^α -microlocalisée près de \mathcal{T}_{ξ_0} . Le deuxième est $O\left(\left(\frac{\hbar^\alpha}{\hbar^\delta}\right)^J\right)$ grâce au lemme C.38. ■

Chapitre D

Résonances, quasi-résonances et formes normales

1 Introduction

1.1 Principe général des formes normales

1.1.1 Petite réflexion sur les formes normales

Le principe général qui sous-tend toute méthode dite de *forme normale* est toujours le même. On part d'un premier *objet* (opérateur sur un espace de Hilbert, fonction sur une variété, hamiltonien classique sur une variété symplectique, ...) qui nous est donnée mais qui a une forme *moyennement sympathique*. On a par ailleurs à notre disposition des *opérations* (conjugaison par un opérateur unitaire, composition par un difféomorphisme ou par un symplectomorphisme, ...) qui agissent comme des relations d'équivalence en préservant les structures présentes (normes de l'espace de Hilbert, structure symplectique, ...). La méthode de forme normale consiste à chercher une telle opération qui ait la propriété de transformer notre premier objet en un second objet ayant une *forme plus sympathique*.

Il convient de noter que bien souvent la transformation (conjugaison, composition, ...) est construite à l'aide du redoutable mais quasi-incontournable "∃". L'objet transformé a certes des caractéristiques plus agréables, mais sa forme "explicite" est en général inaccessible puisqu'elle dépend de ce qui se trouve derrière le "∃".

1.1.2 Formes normales et équations homologiques

Dans le cas qui nous occupe en ce moment, on considère un OPD \hat{H} , dit **non-perturbé**, dont le symbole $H(\xi)$ ne dépend pas de la variable x . C'est un opérateur on ne peut plus sympathique puisque ses vecteurs propres sont les exponentielles $e^{ik(x-x_0)}$, pour tout $k \in \Lambda^*$, et les valeurs propres sont $H(\hbar k)$. D'autre part, son symbole $H(\xi)$ définit un hamiltonien complètement intégrable¹ associé à la fibration *horizontale* en tores lagrangiens \mathcal{T}_ξ , $\xi \in \mathcal{B}$.

On souhaite modifier cet opérateur en $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}$ où la **perturbation** $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}$, avec \hat{K} un OPD et $\kappa > 0$, contient un facteur $\hbar^{1+\kappa}$ de manière à s'assurer que l'**opérateur perturbé** $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}$ a la même limite classique que \hat{H} , i.e est associé au même hamiltonien complètement

¹Voir les deux premiers chapitres.

intégrable classique $H(\xi)$. Pour étudier cet opérateur perturbé, on se propose d'utiliser une méthode de forme normale qu'on décrit qualitativement dans la suite de cette section.

On cherche un OPD unitaire \hat{U} tel que la conjugaison $\hat{U}(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K})\hat{U}^*$ soit de la forme $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$, où \hat{M} est un OPD *plus sympathique* que \hat{K} . Que peut-on espérer pour \hat{M} ? On sait que dans le régime asymptotique $\hbar \rightarrow 0$ la dynamique classique de X_H , le champ de vecteurs associé au hamiltonien H , va jouer un grand rôle dans le comportement des opérateurs quantiques. On sait aussi² que cette dynamique classique complètement intégrable est assez simple, puisque c'est une dynamique affine sur chacun des tores \mathcal{T}_ξ , mais aussi assez variée : sur certains tores la dynamique est périodique, sur d'autres elle est partiellement résonante voire non-résonante (ergodique), et elle peut même être diophantienne.

L'équation à laquelle \hat{M} doit satisfaire serait $\hat{U}(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K})\hat{U}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$. De manière (pour l'instant) formelle, si on note $\hat{U} = e^{i\hat{P}}$, cette équation implique une équation sur les symboles de la forme

$$\{P, H\} + K - M = O(\hbar),$$

qu'on appelle **équation homologique**.

1.2 Formes normales partiellement diophantienne et quasi-résonante

1.2.1 Forme normale locale partiellement diophantienne

Les possibles formes pour le symbole M solution de l'équation homologique précitée dépendent du type de dynamique et on serait tenté de demander que le symbole M soit égal, sur chaque tore \mathcal{T}_ξ , à la moyenne de K le long des trajectoires de X_H sur \mathcal{T}_ξ . Cependant, on ne peut pas résoudre cette équation homologique pour toutes les dynamiques, mais seulement pour les trajectoires *périodiques*, *diophantiennes* ou encore *partiellement-diophantiennes*³, i.e les trajectoires résonantes (donc confinées dans un sous-tore) mais diophantiennes dans le sous-tore. (Mal)heureusement, en général la dynamique de X_H *change* d'un tore à l'autre. Par exemple, lorsque H est non-dégénéré⁴, dans tout voisinage d'un tore \mathcal{T}_{ξ_0} on visite les différents types de dynamique : non-résonant, partiellement résonant, périodique. La moyenne du symbole de \hat{K} sur chaque tore serait donc une fonction très peu régulière (pas même continue par rapport à ξ) et donc loin d'être un symbole acceptable pour un OPD.

Pour remédier à cela, on peut faire une analyse locale en ξ . Dans un voisinage d'un tore \mathcal{T}_{ξ_0} , on peut définir le symbole de \hat{M} comme étant égal, pour tout ξ , à la moyenne du symbole de \hat{K} correspondant à la dynamique de X_H sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Ceci permet de fabriquer un symbole C^∞ par rapport à ξ , mais qui n'est pas égal à la moyenne du symbole de \hat{K} sur chaque tore. La forme normale ne sera donc pas $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$ mais plutôt $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M} + \hbar^{1+\kappa}\hat{R}$, où \hat{R} est un OPD dont le symbole est nul en $\xi = \xi_0$. Cette forme normale, donnée dans le théorème D.7, contient donc un terme plus simple, $\hbar^{1+\kappa}\hat{M}$, mais aussi un terme de reste qui n'est "petit" que près de ξ_0 .

²Voir chapitre 1.

³Voir dans la section 2 pour une définition précise.

⁴Voir section 3.

1.2.2 Forme normale globale quasi-résonante

Dans la section 3, on présentera une construction, qui étend celle décrite précédemment, dans le but d'obtenir des résultats plus globaux sur l'ensemble des tores. L'idée la plus simple consisterait essayer de recouvrir l'espace des ξ par des formes normales du type précédent, en prenant tout un ensemble de tores partiellement diophantiens. On verra cependant que ceci nous permettra d'englober beaucoup de tores que si on autorise le paramètre diophantien à s'approcher de 0 lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Mais pour faire cela, il faut contrôler la dépendance par rapport à ce paramètre dans toutes les estimations de la forme normale partiellement diophantienne, ce qui nous amènera à considérer la classe de symbole $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ étudiée dans le chapitre précédent.

D'autre part, on sera amené à considérer des quasi-résonances, plutôt que des résonances, et on partitionnera l'espace des impulsions en (petites) zones dans lesquelles X_H vérifie une certaine relation de quasi-résonance, une technique similaire à celle qui est utilisée dans les théorèmes de type Nekhoroshev⁵. On introduira ensuite la notion de moyenne quasi-résonante d'une fonction K , qui est une fonction égale à la moyenne de K dans chacune des zones de quasi-résonance réduites, et qui sera à la base du théorème D.22 de **forme normale dite quasi-résonante**.

2 Forme normale locale partiellement diophantienne

2.1 Dynamique classique diophantienne

On considère un hamiltonien $H(\xi)$ complètement intégrable et on note X_H son champ de vecteurs hamiltonien associé. Pour tout élément du réseau $k \in \Lambda^*$, on définit⁶ la fonction $\Omega_k(\xi) = dH(k) = k(X_H)$ et on note $\mathcal{R}_\xi = \{k \in \Lambda^*; \Omega_k(\xi) = 0\}$ le module de résonance de X sur le tore \mathcal{T}_ξ . On va utiliser les notations et les résultats de la section 2.4 concernant les modules de résonance et les opérations de moyennisation le long de feuilletages entiers.

Définition D.1. Soit \mathcal{T}_ξ un tore sur lequel X est non-résonant, i.e $\mathcal{R}_\xi = \{0\}$. On dit que X est **diophantien** sur ce tore, ou que \mathcal{T}_ξ est un **tore diophantien**, s'il existe deux constantes $C > 0$ et γ telle que

$$k \neq 0 \implies |\Omega_k(\xi)| \geq \frac{C}{|k|^\gamma}.$$

Cette propriété a pour but d'assurer que lorsque $k \neq 0$, $|\Omega_k(\xi)|$ est supérieur à quelque chose que l'on contrôle, ce qui est utile lorsque qu'on cherche à resommer (comme ce sera le cas dans les forme normales) une quantité qui dépend de k et qui contient un terme $\Omega_k(\xi)$ au dénominateur. On peut en fait considérer une définition moins restrictive dans laquelle on autorise $\Omega_k(\xi)$ à être nul pour certains k (ce qui signifie que le tore \mathcal{T}_ξ est résonant), mais on demande lorsque $\Omega_k(\xi)$ est non-nul, $|\Omega_k(\xi)|$ soit supérieur à quelque chose que l'on contrôle. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition D.2. Soit \mathcal{T}_ξ un tore résonant de module de résonance \mathcal{R}_ξ . On dit que X est **partiellement diophantien** sur ce tore, ou que \mathcal{T}_ξ est un **tore partiellement diophantien**, s'il

⁵Voir l'article "initiateur" de Nekhoroshev [50]. Voir aussi les articles [9, 35, 55], le livre [43] ainsi que le "review" introductif très bien fait [53].

⁶Voir définition A.66.

existe deux constantes $C > 0$ et γ telle que

$$\forall k \in \Lambda^*, \Omega_k(\xi) \neq 0 \implies |\Omega_k(\xi)| \geq \frac{C}{|k|^\gamma}.$$

Si le module de résonance d'un tel tore \mathcal{T}_ξ est non nul, cela signifie que sur \mathcal{T}_ξ la dynamique est confinée à l'intérieur de sous-tores, mais que restreinte à ces sous-tores la dynamique est diophantienne. De plus, cette définition englobe à la fois les tores totalement diophantiens (pour lesquels $\mathcal{R}_\xi = \{0\}$) et les tores périodiques comme le montre la proposition suivante.

Proposition D.3. *Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{V}_\nabla(\mathcal{T}_\xi)$ T -périodique est forcément partiellement diophantien de paramètres $C = \frac{1}{T}$ et $\gamma = 0$.*

Démonstration. En effet, si X est T -périodique, il s'écrit $X = \frac{1}{T}X_1$, avec $X_1 \in \Lambda$ minimal. On peut alors trouver des vecteurs $(X_2, \dots, X_d) \in \Lambda$ tels que (X_1, \dots, X_d) forment une base de Λ . Si on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \Lambda^*$ la base duale, on a la décomposition $k = \sum k_j \alpha_j$ pour tout $k \in \Lambda^*$, si bien que

$$\forall k \in \Lambda^* \implies k(X) = \frac{k_1}{T},$$

ce qui fait que $k(X) \neq 0 \iff k_1 \neq 0 \implies |k_1| \geq 1$ et donc

$$\forall k \in \Lambda^*, k(X) \neq 0 \implies |k(X)| \geq \frac{1}{T}.$$

■

On rappelle qu'à un tore résonant \mathcal{T}_ξ est associé le feuilletage minimal de X sur ce tore qu'on note \mathcal{P}_ξ et qui vérifie⁷ $\mathcal{R}_\xi = \mathcal{P}_\xi^\circ \cap \Lambda^*$. Pour toute fonction $f : \mathcal{T}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ on peut considérer $\text{moy}(f, \mathcal{P}_\xi)$ sa moyenne le long de \mathcal{P}_ξ ainsi que sa moyenne le long des trajectoires de X . Lorsque \mathcal{T}_ξ est partiellement diophantien, ces deux moyennes sont égales comme le montre la proposition suivante.

Proposition D.4. *Soit \mathcal{T}_ξ un tore diophantien de paramètres C, γ et soit \mathcal{P}_ξ le feuilletage minimal de X sur \mathcal{T}_ξ . Alors pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{T})$ la moyenne de f le long de X est égale à la moyenne de f le long de \mathcal{P}_ξ et la vitesse de convergence de la limite est donnée par*

$$\left\| \text{moy}(f, \mathcal{P}_\xi) - \frac{1}{T} \int_0^T dt f \circ \phi_X^t \right\|_{H^s} \leq \frac{2}{CT} \|f\|_{H^{s+\gamma}},$$

ou $\|\cdot\|_{H^s}$ est la norme de Sobolev.

Démonstration. On va calculer les séries de Fourier de chaque terme. Pour le deuxième, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} dx e^{ik(x-x_0)} \frac{1}{T} \int_0^T dt f \circ \phi_X^t(x, \xi) &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{\mathcal{T}} dx e^{ik(x-x_0)} f(x + tX, \xi) \\ &= \tilde{f}(k, \xi) \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-itk(X)}, \end{aligned}$$

⁷Voir proposition A.56.

où l'on a fait le changement de variable $x \rightarrow x + tX$. Un deuxième changement de variable $t = sT$ donne

$$\int_{\mathcal{T}} dx e^{ik(x-x_0)} \frac{1}{T} \int_0^T dt f \circ \phi_X^t(x, \xi) = \tilde{f}(k, \xi) g(T, k),$$

où l'intégrale $\int_0^1 ds e^{-isTk(X)}$ est simplement

$$g(T, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k(X) = 0, \text{ i.e si } k \in \mathcal{R}_\xi \\ \frac{1 - e^{-iTk(X)}}{iTk(X)} & \text{si } k(X) \neq 0, \text{ i.e si } k \notin \mathcal{R}_\xi \end{cases},$$

où \mathcal{R}_ξ est le module de résonance de X sur le tore \mathcal{T}_ξ . Le fait que X est diophantien de paramètres C, γ nous permet alors d'avoir l'estimation

$$|g(T, k)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{R}_\xi \\ \frac{2|k|^\gamma}{CT} & \text{si } k \notin \mathcal{R}_\xi \end{cases}.$$

Par ailleurs, notons $R = R(T, C, \gamma) = \text{moy}(f, \mathcal{P}_\xi) - \frac{1}{T} \int_0^T dt f \circ \phi_X^t$ la différence entre les deux moyennes. En utilisant l'expression de la série de Fourier de $\text{moy}(f, \mathcal{P}_\xi)$ donnée par la proposition A.62, on obtient

$$|\tilde{R}(k)| \leq \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \mathcal{R}_\xi \\ \tilde{f}(k) \frac{2|k|^\gamma}{CT} & \text{si } k \notin \mathcal{R}_\xi \end{cases},$$

ce qui permet de calculer les normes Sobolev de R . En majorant d'abord la somme sur les $k \notin \mathcal{P}^\circ$ par la somme sur tous les $k \in \Lambda^*$, on obtient

$$\|R\|_{H^s}^2 \leq \sum_k (1 + |k|^2)^s |\tilde{f}(k)|^2 \left(\frac{2}{CT}\right)^2 |k|^{2\gamma}.$$

En utilisant ensuite $|k|^{2\gamma} \leq (1 + |k|^2)^\gamma$, on trouve finalement

$$\|R\|_{H^s} \leq \left(\frac{2}{CT}\right) \|f\|_{H^{s+\gamma}}.$$

■

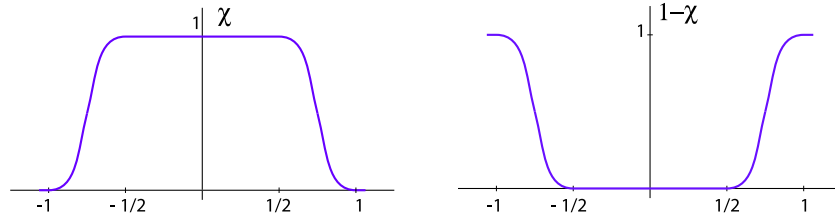
2.2 Équation homologique classique

Définition D.5. Dans la construction des solutions de l'équation homologique, on aura besoin d'une **fonction de troncature** $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à valeur dans $[0, 1]$ et ayant les propriétés suivantes :

- $|t| \geq 1 \Rightarrow \chi(t) = 0$
- $|t| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \chi(t) = 1$
- ses dérivées successives $\chi^{(n)}(t)$ sont C^∞ à support compact dans $[-1, 1]$.

On utilisera aussi la fonction $1 - \chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui a les propriétés suivantes :

- $|t| \geq 1 \Rightarrow 1 - \chi(t) = 1$
- $|t| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \chi(t) = 0$
- χ est paire et ses dérivées successives $(1 - \chi)^{(n)}(t)$ sont C^∞ à support compact dans $[-1, 1]$.



On utilisera enfin la fonction $t \rightarrow \frac{1-\chi(t)}{t} \in C^\infty(\mathbb{R})$ qui a les propriétés suivantes :

- $|t| \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{1-\chi(t)}{t} \right| \leq 1$
- $\frac{1}{2} \leq |t| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{1-\chi(t)}{t} \right| \leq 2$
- $|t| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\chi(t)}{t} = 0$
- χ est impaire et ses dérivées successives $\left(\frac{1-\chi(t)}{t} \right)^{(n)}$ sont C^∞ à support compact dans $[-1, 1]$.

Lemme D.6 (Equation homologique partiellement diophantienne). Soit $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ un hamiltonien complètement intégrable et soit $K \in \Psi^m(\mathcal{T})$ un symbole réel, avec où $m \geq 0$. Pour tout tore \mathcal{T}_{ξ_0} partiellement diophantien, on note \mathcal{P}_ξ le feuilletage minimal de X_H sur ce tore et $M = moy(K, \mathcal{P}_\xi)$ la moyenne de K le long de \mathcal{P}_ξ . Alors, il existe des symboles réels $P, R \in \Psi^m(\mathcal{T})$ vérifiant

$$\{P, H\} + K - M = R = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$$

et

$$moy(P, \mathcal{P}_\xi) = 0.$$

Démonstration. On écrit d'abord la série de Fourier pour la variable x de l'équation homologique avec reste qui est

$$i\Omega_k(\xi) \tilde{P}(k, \xi) + \tilde{K}(k, \xi) - \tilde{M}(k, \xi) = \tilde{R}(k, \xi),$$

où $\Omega_k(\xi) = dH_\xi(k)$. On note $\mathcal{R}_\xi = (\mathcal{P}_\xi)^\circ \cap \Gamma$ le module de résonance de X sur le tore \mathcal{T}_ξ .

- Pour tout $k \in \mathcal{R}_\xi$, on a $\tilde{M}(k, \xi) = \tilde{K}(k, \xi)$ en vertu de la proposition A.62, du fait que $M = moy(K, \mathcal{P}_\xi)$. De même, pour assurer que $moy(P, \mathcal{P}_\xi) = 0$, on doit poser $\tilde{P}(k, \xi) = 0$. L'équation est donc satisfaite avec $\tilde{R}(k, \xi) = 0$.
- Pour tout $k \notin \mathcal{R}_\xi$, on a $\tilde{M}(k, \xi) = 0$. On souhaiterait poser $\tilde{P}(k, \xi) = i \frac{\tilde{K}(k, \xi)}{\Omega_k(\xi)}$, mais ce n'est malheureusement pas possible car on est assuré que le dénominateur ne s'annule

pas seulement sur le tore \mathcal{T}_{ξ_0} , mais aucunement sur les tores voisins. On considère alors la fonction $1 - \chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ de la définition D.5 et on pose

$$\tilde{P}(k, \xi) = i \frac{\tilde{K}(k, \xi) (1 - \chi) \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right)}{\Omega_k(\xi)},$$

où C et γ sont les paramètres diophantiens du tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Cette fonction est bien définie puisque $1 - \chi = 0$ lorsque $\Omega_k(\xi)$. Le reste R de l'équation homologique est alors donné par

$$\begin{aligned} \tilde{R}(k, \xi) &= i \Omega_k(\xi) \tilde{P}(k, \xi) + \tilde{K}(k, \xi) - \tilde{M}(k, \xi) \\ &= \tilde{K}(k, \xi) \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que les fonctions P et R sont des symboles dans $\Psi^m(\mathcal{T})$. Tout d'abord, les séries de Fourier se resomment en des fonctions $P(x, \xi)$ et $R(x, \xi)$ qui sont C^∞ par rapport à x puisque $\tilde{K}(k, \xi)$ est à décroissance rapide en k . D'autre part, pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ on a

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R(x, \xi) &= \sum_{k \notin \mathcal{R}_\xi} i^{|\alpha|} k^\alpha e^{ik(x-x_0)} \partial_\xi^\beta \left(\tilde{K}(k, \xi) \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right) \right) \\ &= \sum_{k \notin \mathcal{R}_\xi} i^{|\alpha|} k^\alpha e^{ik(x-x_0)} \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^\beta \left(\partial_\xi^{\beta-\beta'} \tilde{K}(k, \xi) \right) \partial_\xi^{\beta'} \left(\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right) \right). \end{aligned}$$

On se convaincra relativement facilement que la dérivée de la fonction χ est de la forme

$$\partial_\xi^{\beta'} \left(\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right) \right) = \sum_{n=0}^{|\beta'|} \frac{c(n)}{|k|^{n(\gamma-1)} C^n} \chi^{(n)} \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right),$$

où les constantes $c(n)$ ne dépendent que de H et de ses dérivées. Étant donné que toutes les dérivées $\chi^{(n)}$ sont bornées (du fait que $\chi^{(n)} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$) et que toutes les dérivées $\partial_\xi^{\beta-\beta'} \tilde{K}(k, \xi)$ sont d'ordre \hbar^m et à décroissance rapide en k uniformément par rapport à ξ (puisque $K \in \Psi^m(\mathcal{T})$), on en déduit que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R(x, \xi) \right| = C(\alpha, \beta) \hbar^m$$

pour tout $(x, \xi) \in T^*\mathcal{T}$, ce qui prouve que R est un symbole de la classe $\Psi^m(\mathcal{T})$. Par un raisonnement similaire, en considérant la fonction $\phi(t) = i \frac{1-\chi(t)}{t}$, on montre que P est un symbole de la classe $\Psi^m(\mathcal{T})$.

De plus, la fonction $\chi(t)$ est plate en $t = 1$. Étant donné que pour $\xi = \xi_0$ on a $\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \geq 1$, cela implique que les dérivées $\partial_\xi^{\beta'} \left(\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right) \right)$ sont toutes nulles en $\xi = \xi_0$ et donc que $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R(x, \xi_0) = 0$ quelque soit β .

Enfin, on vérifie facilement que les symboles P et R sont réels. Il suffit pour cela de remarquer que $\Omega_{-k}(\xi) = -\Omega_k(\xi)$, ce qui implique d'une part que $\chi \left(\frac{\Omega_{-k}(\xi)}{|-k|^\gamma C} \right) = \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right)$ et d'autre part que $i \frac{1-\chi \left(\frac{\Omega_{-k}(\xi)}{|-k|^\gamma C} \right)}{\Omega_{-k}(\xi)} = -i \frac{1-\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C} \right)}{\Omega_k(\xi)}$. On a donc $\overline{\tilde{P}_\hbar(-k, \xi)} = \tilde{P}_\hbar(k, \xi)$ et $\overline{\tilde{R}_\hbar(-k, \xi)} = \tilde{R}_\hbar(k, \xi)$. ■

2.3 Forme normale quantique

On donne maintenant le théorème de forme normale pour un opérateur quantique perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$, où $\hat{K}_0 \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ avec $\kappa \geq 0$ un réel qui permet de contrôler l'intensité de la perturbation. C'est donc une perturbation d'ordre $\hbar^{1+\kappa}$.

C'est un théorème local associé à un tore \mathcal{T}_{ξ_0} partiellement diophantien. Comme précédemment, on note \mathcal{P}_{ξ_0} le feuilletage minimal de X_H et $\text{moy}(f, \mathcal{P}_{\xi_0})$ la moyenne d'une fonction f le long de \mathcal{P}_{ξ_0} . Le point clé de ce théorème est le lemme D.6 concernant l'équation homologique classique qui intervient à chaque étape de la récurrence dans la preuve du théorème quantique.

Pour simplifier les écritures, on notera $O(\hbar^m)$ un OPD (resp. symbole) de la classe $\hat{\Psi}^m(\mathcal{T})$ (resp. $\Psi^m(\mathcal{T})$). Notamment, $O(\hbar^\infty)$ désignera un opérateur négligeable, i.e dans $\hat{\Psi}^\infty(\mathcal{T})$.

Théorème D.7 (Forme normale partiellement diophantienne). *Soit $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ le quantifié d'un hamiltonien complètement intégrable $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ et soit $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}^{1+\kappa}(\mathcal{T})$ une perturbation auto-adjointe, avec $\kappa \geq 0$. Soit \mathcal{T}_{ξ_0} un tore partiellement diophantien. Alors il existe*

- un OPD $\hat{U} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ vérifiant $\hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\kappa)$, $\hat{U}^* \hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U} \hat{U}^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$,
- un OPD $\hat{K} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ auto-adjoint vérifiant $\hat{K} = \hat{K}_0 + O(\hbar^1)$
- et un OPD $\hat{R} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ auto-adjoint dont le symbole vérifie $R_\hbar(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$,

tels que

$$\hat{U} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \hat{U}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M} + \hbar^{1+\kappa} \hat{R} + O(\hbar^\infty), \quad (\text{D.1})$$

où $\hat{M} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ est l'OPD dont le symbole est égal à la moyenne du symbole de \hat{K} le long de \mathcal{P}_{ξ_0} ,

$$M_\hbar = \text{moy}(K_\hbar, \mathcal{P}_{\xi_0}).$$

Démonstration. On commence par montrer qu'on peut trouver des OPD auto-adjoints $\hat{P}_0, \hat{R}_0 \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ et $\hat{K}_1 \in \hat{\Psi}^1(\mathcal{T})$ tels que

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{R}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_1, \quad (\text{D.2})$$

où M_0 est égal à la moyenne $M_0 = \text{moy}(K_0, \mathcal{P}_{\xi_0})$ et R_0 vérifie $R_0(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$. En effet, les propositions C.29 et C.30 nous apprennent que

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \hat{H} \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* = \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_0, \hat{H} \right] + O(\hbar^{2+2\kappa}),$$

et

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \hat{K}_0 \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* = \hat{K}_0 + O(\hbar^{1+\kappa}).$$

D'autre part, on peut appliquer le lemme C.20 qui nous assure que le symbole du commutateur $\left[\hat{P}_0, \hat{H} \right]$ est égal à $\frac{\hbar}{i} \{P_0, H\} + O(\hbar^2)$. En utilisant le fait que $\hbar^{2\kappa} \leq \hbar^\kappa$, en prenant le symbole de l'équation D.2 et en simplifiant par $\hbar^{1+\kappa}$, on voit que l'on doit résoudre

$$\{P_0, H\} + K_0 - M_0 = R_0 + O(\hbar), \quad (\text{D.3})$$

avec $R_0(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$. En fait, le lemme D.6 nous assure que l'on peut trouver des symboles P_0 et R_0 dans $\Psi^0(\mathcal{T})$ et tels que l'on ait exactement $\{P_0, H\} + K_0 - M_0 = R_0$. De

plus, les symboles P_0 et R_0 sont réels. D'après la proposition C.24, on peut trouver des symboles auto-adjoints et qui coïncident avec P_0 et R_0 à $O(\hbar)$, et donc qui satisfont à l'équation (D.3). On dénote par les mêmes lettres P_0 et R_0 ces symboles auto-adjoints. Les quantifiés de ces symboles satisfont donc à l'équation (D.2) avec un $\hat{K}_1 \in \hat{\Psi}^1(\mathcal{T})$ auto-adjoint. Si on pose $\hat{U}_0 = e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$, on a $\hat{U}_0^* \hat{U}_0 = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$, $\hat{U}_0 \hat{U}_0^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et

$$\hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \hat{U}_0^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{R}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_1. \quad (\text{D.4})$$

Cette équation constitue l'étape initiale du raisonnement par récurrence suivant. Supposons qu'à l'étape $n \geq 0$, on ait trouvé des OPD auto-adjoints $\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_{n+1}$, avec $\hat{K}_j \in \hat{\Psi}^j$, des OPD $\hat{R}_0, \dots, \hat{R}_n$, avec $\hat{R}_j \in \hat{\Psi}^j$ et dont les symboles vérifient $R_j(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$, ainsi que des OPD $\hat{U}_0, \dots, \hat{U}_n \in \hat{\Psi}^0$ vérifiant $\hat{U}_j^* \hat{U}_j = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U}_j \hat{U}_j^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$, tels que

$$\hat{U}_n \dots \hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K} \right) \hat{U}_0^* \dots \hat{U}_n^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^n \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1}, \quad (\text{D.5})$$

avec $M_j = \text{moy}(K_j, \mathcal{P}_{\xi_0}) \in \hat{\Psi}^j$. On cherche alors des OPD $\hat{R}_{n+1} \in \hat{\Psi}^{n+1}$, $\hat{K}_{n+2} \in \hat{\Psi}^{n+2}$ et $\hat{U}_{n+1} \in \hat{\Psi}^0$ ayant les propriétés que l'on imagine et vérifiant l'équation

$$\hat{U}_{n+1} \hat{U}_n \dots \hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K} \right) \hat{U}_0^* \dots \hat{U}_n^* \hat{U}_{n+1}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+2}, \quad (\text{D.6})$$

avec $M_{n+1} = \text{moy}(K_{n+1}, \mathcal{P}_{\xi_0}) \in \hat{\Psi}^{n+1}$. En cherchant \hat{U}_{n+1} sous la forme $\hat{U}_{n+1} = e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}}$, avec $\hat{P}_{n+1} \in \hat{\Psi}^{n+1}$ un OPD auto-adjoint et réinsérant l'équation (D.5) dans l'équation (D.6), on voit que l'on doit résoudre

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}} \left[\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^n \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} \right] \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}} \right)^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^{n+1} \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+2}. \quad (\text{D.7})$$

On va maintenant appliquer les propositions C.29 et C.30 à chacun des termes à l'intérieur du crochet [].

- Tout d'abord, la proposition C.30 nous apprend que

$$\begin{aligned} \hat{U}_{n+1} \left[\hat{H} \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{2+2(n+1+\kappa)}\right) \\ &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{3+n+\kappa}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{4+2n+2\kappa} \leq \hbar^{3+n+\kappa}$.

- D'autre part, on peut appliquer la proposition C.20 qui nous assure que le symbole du commutateur $\left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right]$ est égal à $\frac{\hbar}{i} \{P_{n+1}, H\} + O(\hbar^{2+(n+1)})$, ce qui fait que le symbole de $\hat{U}_{n+1} \left[\hat{H} \right] \hat{U}_{n+1}^*$ est

$$H + \hbar^{1+\kappa} \{P_{n+1}, H\} + O\left(\hbar^{3+n+\kappa}\right).$$

- Ensuite, la proposition C.29 nous donne, pour tout $j = 0..n$,

$$\begin{aligned}\hat{U}_{n+1} \left[\hbar^{1+\kappa} \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hbar^{1+\kappa} \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + O \left(\hbar^{1+j+\kappa} \hbar^{n+1+\kappa} \hbar \right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \left(\hat{M}_j + \hat{R}_j \right) + O \left(\hbar^{3+n+\kappa} \right),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{3+n+j+2\kappa} \leq \hbar^{3+n+\kappa}$.

- Enfin, la proposition C.29 donne

$$\begin{aligned}\hat{U}_{n+1} \left[\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} + O \left(\hbar^{1+n+1+\kappa} \hbar^{n+1+\kappa} \hbar \right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} + O \left(\hbar^{3+n+\kappa} \right),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{4+2n+2\kappa} \leq \hbar^{3+n+\kappa}$.

En tenant compte de ces différentes estimations, en prenant le symbole de l'équation (D.7) et en simplifiant par $\hbar^{1+\kappa}$, on voit que l'on doit résoudre

$$\{P_{n+1}, H\} + K_{n+1} - M_{n+1} = R_{n+1} + O \left(\hbar^{2+n} \right), \quad (\text{D.8})$$

avec $R_{n+1}(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$. On utilise alors le lemme D.6 qui nous assure que l'on peut trouver des symboles réels P_{n+1} et R_{n+1} dans $\Psi^{n+1}(\mathcal{T})$, tels que l'on ait exactement $\{P_{n+1}, H\} + K_{n+1} - M_{n+1} = 0$. D'après la proposition C.24, on peut trouver des symboles auto-adjoints dans $\Psi^{n+1}(\mathcal{T})$ et qui coïncident avec P_{n+1} et R_{n+1} à $O(\hbar^{2+n})$, et donc qui satisfont à l'équation (D.8). On dénote par les mêmes lettres P_{n+1} et R_{n+1} ces symboles auto-adjoints. Les quantifiés de ces symboles satisfont donc à l'équation (D.7) avec un $\hat{K}_{n+2} \in \hat{\Psi}^{n+2}(\mathcal{T})$ auto-adjoint, ce qui conclut la récurrence.

Si on définit ensuite la suite \hat{V}_n par $\hat{V}_0 = \hat{U}_0$ et $\hat{V}_n = \hat{U}_n \dots \hat{U}_0 - \hat{U}_{n-1} \dots \hat{U}_0$, on voit facilement que l'on a $\hat{V}_0 \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$, $\hat{V}_n \in \hat{\Psi}^{n+\kappa}(\mathcal{T})$ et $\hat{U}_n \dots \hat{U}_0 = \hat{V}_0 + \dots + \hat{V}_n$. Grâce au procédé de Borel (proposition C.16), on peut construire un OPD $\hat{U} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ qui admet le développement asymptotique $\hat{U} \sim \sum_n \hat{V}_n$. Par construction, il vérifie $\hat{U}^* \hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U} \hat{U}^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$. De même, on peut construire des OPD auto-adjoints \hat{K} et \hat{R} dans $\hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ vérifiant $\hat{K} \sim \sum_n \hat{K}_n$ et $\hat{R} \sim \sum_n \hat{R}_n$. En regardant d'un peu plus près le procédé de Borel, on voit qu'il est possible d'assurer que le symbole de \hat{R} vérifie $R_\hbar(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$. De plus, si on définit M_\hbar comme la moyenne $M_\hbar = \text{moy}(K_\hbar, \mathcal{P}_{\xi_0})$, on voit que l'on a $\hat{M} \sim \sum_n \hat{M}_n$. Tout ceci fait que l'équation (D.1) est satisfaite. ■

Avant de conclure cette section, il convient de faire une petite remarque concernant la forme normale juste énoncée. Comme bien souvent dans les formes normales, on manipule des objets dont certains ne nous sont pas donnés explicitement. Notamment, de l'opérateur \hat{K} on sait simplement qu'il est égal à \hat{K}_0 (qui nous est donné) plus quelque chose de plus petit mais qui n'est pas vraiment explicite. Néanmoins, le fait que l'opérateur \hat{M} soit la moyenne de \hat{K} nous donne quand même une information utilisable. A savoir, le symbole M_\hbar est constant le long du feuilletage \mathcal{P}_{ξ_0} .

2.4 Remarque sur l'uniformité par rapport à l'ensemble des tores

La forme normale quantique du théorème D.7 nous permet d'étudier l'opérateur perturbé $\hat{H} + \hbar \hat{K}$ microlocalement près d'un tore \mathcal{T}_{ξ_0} donné sur lequel la dynamique classique

induite par l'hamiltonien $H(\xi)$ est partiellement diophantienne. Cette forme normale donne des propriétés locales, pour ξ proche de ξ_0 , dans la mesure où elle fait intervenir un terme de reste de la forme $R_{\hbar}(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$. Pour tirer partie de cette forme, il faut appliquer l'opérateur à des fonctions microlocalisés près du tore \mathcal{T}_{ξ_0} . Autrement dit, il faut considérer que la forme normale n'est intéressante que dans un voisinage de ξ_0 taille \hbar^α , avec α strictement positif.

Pour étudier l'opérateur de manière "globale" on pourrait essayer de recouvrir l'espace des ξ par des formes normales de ce type, en prenant tout un ensemble de tores partiellement diophantiens. Cependant, si on se fixe des constantes C et γ , et si on considère l'ensemble des tores partiellement diophantiens avec les paramètres C et γ , on va de cette manière "manquer" beaucoup de tores. En effet, on peut montrer facilement⁸ par exemple que même si γ est assez grand (en l'occurrence supérieur à la dimension d), la proportion des tores diophantiens (pas partiellement) pour les paramètres C et γ dans l'ensemble de tous les tores est d'ordre $1 - C$. Si on espère, dans la limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$, pouvoir recouvrir tous les tores à l'aide de boules de taille \hbar^α autour des tores partiellement diophantiens, on comprend qu'il faut autoriser le paramètre C à s'approcher de 0, par exemple en demandant $C \sim \hbar^\delta$, avec $\delta > 0$. Mais pour faire cela, il faut contrôler la dépendance par rapport à C dans toutes les estimations du lemme D.6 et du théorème D.7. On voit facilement dans les preuves que les symboles construits ont une régularité qui se dégrade si C s'approche de 0, puisqu'ils sont construits à l'aide de la fonction⁹ χ évaluée en $\chi\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|^\gamma C}\right)$, ce qui implique que les dérivées ∂_ξ^β de ces symboles sont d'ordre $C^{-|\beta|}$. Ceci semble montrer que la classe de symboles $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ est bien adaptée pour ce problème.

D'autre part, en reprenant la preuve du lemme D.6, on peut se convaincre que l'on pourrait utiliser une condition un peu plus faible que la condition "partiellement diophantienne". On peut en effet montrer, et c'est ce que l'on fera pour construire les formes normales quasi-résonantes de la section suivante, que si l'on demande une condition du type

$$\forall k \in \Lambda^*, |k| \leq D, \Omega_k(\xi) \neq 0 \implies |\Omega_k(\xi)| \geq \frac{C}{|k|^\gamma},$$

où D est une (grande) constante réelle, il est possible de résoudre l'équation homologique avec cette fois-ci un reste de la forme $R = R_1 + R_2$, avec $R_1(x, \xi) = O(|\xi - \xi_0|^\infty)$ comme précédemment et un deuxième reste vérifiant $R_2 = O\left(\frac{1}{D^\infty}\right)$. On comprend que ce type de forme normale sera intéressant si on laisse tendre D vers l'infini lorsque \hbar tend vers 0.

L'utilisation de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ ainsi que d'une condition affaiblie avec un paramètre D sont les deux ingrédients de base de la construction d'une forme normale quasi-résonante présentée dans la section qui suit.

3 Forme normale globale quasi-résonante

Compte tenu des remarques faites dans la section précédente, on va considérer des relations de résonance approchée (quasi-résonance) et les conditions diophantiennes approchées qui leur sont associées. On va ensuite partitionner l'espace \mathcal{B} des impulsions en (petites)

⁸Par exemple le livre [43] page 289, ou tout autre ouvrage sur la théorie classique des approximations diophantiennes.

⁹Définition D.5.

zones dans lesquelles X_H vérifie une certaine relation de quasi-résonance, pour des "petits" (de norme inférieure à D) coefficients de résonance. C'est en fait une stratégie similaire à celle qui est utilisée dans les théorèmes de type Nekhoroshev¹⁰, et l'idée d'introduire une borne D pour la taille des résonances¹¹ est une technique assez standard dans la théorie KAM¹².

Dans toute cette section, on considère un hamiltonien $H(\xi)$ complètement intégrable et non-dégénéré au sens faible¹³.

3.1 Résonances et quasi-résonances des hamiltoniens non-dégénérés

Dans toute cette section, on se donne un (grand) réel D qui servira à borner la "taille" des résonances considérées et un (petit) réel $\varepsilon > 0$ qui contrôlera la taille des zones de quasi-résonance.

On va définir les régions de quasi-résonance à l'aide de la fonction $\Omega_k(\xi)$, définie comme précédemment, pour tout $k \in \Lambda^*$, par $\Omega_k(\xi) = dH(k) = k(X_H)$. On rappelle¹⁴ que pour tout $k \in \Lambda^*$, on note $\Sigma_k \subset \mathcal{B}$ la **surface de résonance** définie par $\Sigma_k = \{\xi \in \mathcal{B}; \Omega_k(\xi) = 0\}$. La condition de non-dégénérescence faible implique notamment que les ensembles Σ_k sont bien des hypersurfaces, i.e des sous-variétés de \mathcal{B} de codimension 1.

Définition D.8. Un **module de résonance** $\mathcal{R} \subset \Lambda^*$ (sans référence au champ de vecteurs X_H) un sous-réseau \mathcal{R} du réseau Λ^* .

Définition D.9. Pour tout module de résonance $\mathcal{R} \subset \Lambda^*$, on définit son **feuilletage entier associé**

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^\circ \otimes \mathbb{R}.$$

Définition D.10. Pour tout module de résonance $\mathcal{R} \subset \Lambda^*$, on définit la **variété de résonance** $\Sigma_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}$ par

$$\Sigma_{\mathcal{R}} = \{\xi \in \mathcal{B}; \forall k \in \mathcal{R} \Rightarrow \Omega_k(\xi) = 0\}.$$

Tout $\xi \in \Sigma_{\mathcal{R}}$ est dit **\mathcal{R} -résonant**.

La variété de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$ est donc l'ensemble des ξ tels que \mathcal{R} est égal au module de résonance¹⁵ de X_H sur le tore \mathcal{T}_ξ . D'autre part, on a évidemment

$$\Sigma_{\mathcal{R}} = \bigcap_{k \in \mathcal{R}} \Sigma_k$$

et la notation reste cohérente lorsque \mathcal{R} est de dimension 1, i.e de la forme $\mathcal{R} = \mathbb{Z}.k_0$, si on note $\Sigma_{\mathbb{Z}.k_0} = \Sigma_{k_0}$. Le caractère non-dégénéré de H nous assure¹⁶ que les variétés $\Sigma_{k_1}, \dots, \Sigma_{k_n}$ sont transverses pour tous k_1, \dots, k_n linéairement indépendants, ce qui implique que pour tout module \mathcal{R} de dimension n , $\Sigma_{\mathcal{R}}$ est une sous-variété de \mathcal{B} de codimension n .

¹⁰Voir l'article "initiateur" de Nekhoroshev [50]. Voir aussi les articles [9, 35, 55], le livre [43] ainsi que le "review" introductif très bien fait [53].

¹¹Qu'on appelle parfois pompeusement un *cut-off ultraviolet*.

¹²Voir par exemple l'article [3].

¹³Voir section 3 du premier chapitre sur les conditions de non-dégénérescence.

¹⁴Définition A.66.

¹⁵Définition A.53.

¹⁶Propriété A.75.

Définition D.11. Soit $D > 0$ un (grand) réel. On dit que $\mathcal{R} \subset \Lambda^*$ est un **D -module de résonance** s'il existe une base e_j de \mathcal{R} , avec $|e_j| \leq D$ pour tout $j = 1.. \dim \mathcal{R}$.

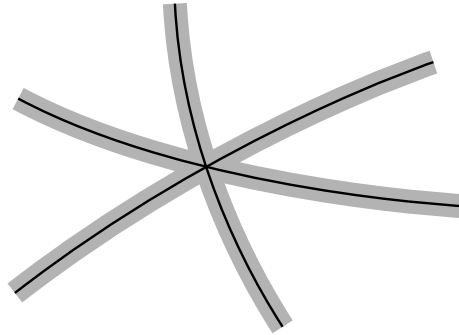
On définit maintenant les régions proches des variétés de résonances.

Définition D.12. Soit $D > 0$ un (grand) réel et $\varepsilon > 0$ un (petit) réel. Pour tout D -module de résonance \mathcal{R} non trivial, on définit $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$ la **zone de quasi-résonance**, ou simplement **zone de résonance**, par

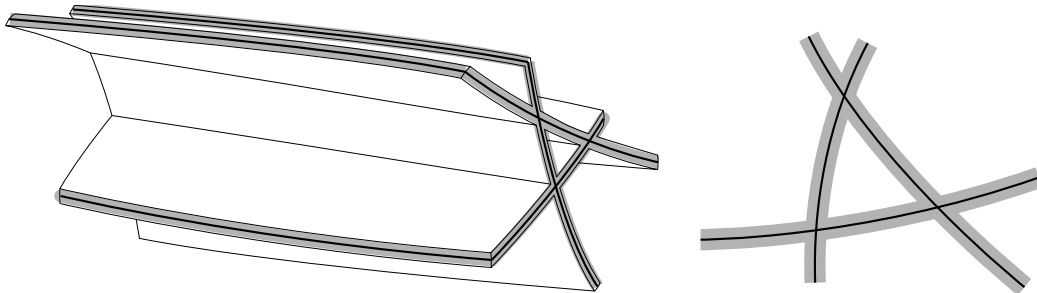
$$\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} = \left\{ \xi \in \mathcal{B}; \forall k \in \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} < \varepsilon \right\}.$$

Pour le module de résonance trivial $\mathcal{R} = \{0\}$, on définit $\mathcal{Z}_{\{0\}} = \mathcal{B}$.

Le dessin suivant illustre la cas de dimension 2 où les variétés Σ_k sont de dimension 1 et se croisent en un point critique de H .



En dimension 3, les variétés Σ_k sont de dimension 2 et se croisent le long des 2-résonances qui sont des variétés de dimension 1. Pour se représenter cela, il est agréable de faire une coupe transversale, comme sur la partie droite du dessin ci-dessous.



La zone $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$ contient donc des ξ qui ont la propriété commune d'être proches de \mathcal{R} -résonances, mais aussi des ξ qui sont proches d'autres résonances (i.e \mathcal{R}' -résonant, avec $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}'$). On veut soustraire cette deuxième catégorie de ξ afin de construire un ensemble (le bloc de résonance) de ξ qui sont proches de \mathcal{R} -résonances, mais "loin" des autres résonances.

Définition D.13. Soit $D > 0$ un (grand) réel et $\varepsilon > 0$ un (petit) réel. Pour tout D -module de résonance \mathcal{R} non trivial, on définit $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ le **bloc de quasi-résonance**, ou simplement **bloc de résonance**, par

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{R}} \setminus \bigcup_{\substack{k \notin \mathcal{R} \\ |k| \leq D}} (\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}).$$

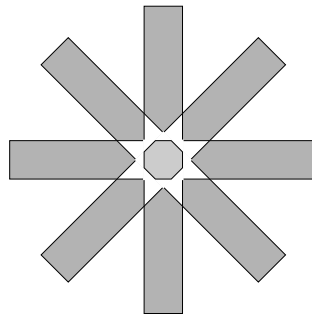
Dans le cas du module de résonance trivial $\mathcal{R} = \{0\}$, on appelle $\mathcal{B}_{\{0\}}$ le **bloc de non-résonance**.

On définit ensuite, pour tout \mathcal{R} non trivial, le **bloc réduit** $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ par

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} = \left\{ \xi \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}; \forall k \in \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Pour le module de résonance trivial $\mathcal{R} = \{0\}$, on définit $\tilde{\mathcal{B}}_{\{0\}} = \mathcal{B}_{\{0\}}$.

Le schéma ci-dessous représente le cas de la dimension 2. On a représenté en gris foncé les blocs de résonances pour les modules de résonances de dimension 1 et au centre en gris clair le bloc de résonances de dimension 2.



On résume dans la proposition suivante la propriété satisfaite par les points à l'intérieur des blocs de résonance, que l'on utilisera dès la section suivante pour construire une forme normale quasi-résonante.

Proposition D.14. *Pour tout D -module de résonance \mathcal{R} , on a*

$$\xi \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} < \varepsilon \\ \forall k \notin \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} \geq \varepsilon \end{cases}$$

et

$$\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} \Rightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall k \notin \mathcal{R}, |k| \leq D \Rightarrow \frac{|\Omega_k(\xi)|}{|k|} \geq \varepsilon \end{cases}$$

On considère aussi la réunion des zones (ou blocs) de résonance pour une dimension donnée.

Définition D.15. Pour tout $n = 0..d$, on définit la **zone des n -résonances**

$$\mathcal{Z}_n^* = \bigcup_{\mathcal{R}, \dim \mathcal{R}=n} \mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$$

ainsi que le **bloc des n -résonances**

$$\mathcal{B}_n^* = \bigcup_{\mathcal{R}, \dim \mathcal{R}=n} \mathcal{B}_{\mathcal{R}}.$$

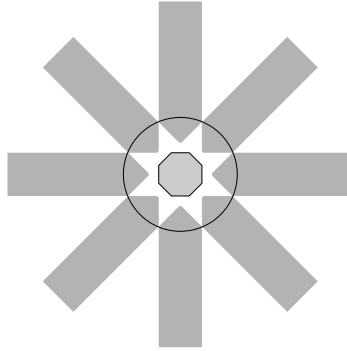
En particulier, on a $\mathcal{B}_0^* = \mathcal{B}_{\{0\}}$.

Définition D.16. On dit que

$$\mathcal{B}_0^* \cup \mathcal{B}_1^* \cup \dots \cup \mathcal{B}_d^*$$

forme une (D, ε) -décomposition de \mathcal{B} en blocs de résonance.

Il faut tout de suite noter que cette construction des blocs de résonance est différente de celle proposée dans l'article [55] de J. Pöschel, notamment par le fait que les blocs de notre construction ne permettent pas de recouvrir \mathcal{B} , il reste des "trous". Notre construction a par contre l'avantage technique que dans chacun des blocs, la propriété D.14 est satisfaite avec le même ε pour tous les blocs. La construction de Pöschel permet de recouvrir \mathcal{B} , mais avec des blocs de taille (ε) croissante avec l'ordre de la résonance. On peut illustrer cette différence à l'aide du schéma suivant en dimension 2.



L'ensemble formé par "l'étoile" en gris foncé est le bloc des 1-résonances \mathcal{B}_1^* et le polygone en gris clair est le bloc des 2-résonances \mathcal{B}_2^* . Le cercle noir représente le bloc \mathcal{B}_2^* dans la construction de Pöschel. Ce bloc a un volume supérieur à notre \mathcal{B}_2^* , mais il a l'avantage de recouvrir les trous laissés par notre construction. On utilisera cependant notre définition, car elle permet de construire plus simplement des formes normales¹⁷ avec un seul paramètre ε . L'amélioration de notre méthode fait l'objet d'un travail en cours et permettra de "remplir les trous".

Les "trous" non couverts par la (D, ε) -décomposition en blocs de quasi-résonance sont cependant petits lorsque l'on choisit convenablement les paramètres D et ε . On montrera ceci dans le chapitre suivant sur les quasimodes, dans lequel on laissera ε tendre vers 0 et D vers l'infini, lorsque $\hbar \rightarrow 0$, d'une manière telle que le bloc de non-résonance \mathcal{B}_0^* occupe un volume tendant vers celui de \mathcal{B} .

3.2 Moyennisation quasi-résonante

Dans la section 2, on a construit des formes normales qui contenaient la moyenne $\text{ moy } (K, \mathcal{P}_{\xi_0})$ de la perturbation le long du feuilletage minimal de X_H sur un tore \mathcal{T}_{ξ_0} fixé. Le terme d'erreur était de la forme $O(|\xi - \xi_0|^\infty)$, i.e d'autant plus grand que l'on s'éloigne de ξ_0 . Dans le but d'obtenir une analyse plus globale, on va construire une fonction qui est égale à la moyenne de K à l'intérieur de tous les blocs de quasi-résonance réduits et qui varie de manière C^∞ d'un bloc à l'autre. Le terme d'erreur ne sera non-nul qu'entre ces blocs.

Soit un (grand) réel $D > 0$ et un (petit) réel $\varepsilon > 0$, et soit la (D, ε) -décomposition en blocs de quasi-résonance de la définition D.16. On donne une définition temporaire de la moyenne quasi-résonante.

¹⁷Voir sections suivantes.

Définition (temporaire). Soit $K \in C^\infty(T^*\mathcal{T})$ et $M \in C^\infty(T^*\mathcal{T})$ deux fonctions. On dit que M est une **moyenne (D, ε) -quasi-résonante** de K , ou simplement une **(D, ε) -moyenne** de K , si elle a les propriétés suivantes. Pour tout D -module de résonance \mathcal{R} , si on note $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ le bloc de quasi-résonance réduit associé et $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ le feuilletage entier associé, alors on a

$$M = moy(K, \mathcal{P}_{\mathcal{R}}) + R_1 + R_2,$$

où les fonctions R_1 et R_2 sont dans $C^\infty(T^*\mathcal{T})$ et vérifient

- $R_2 = O(D^{-\infty})$.
- Pour tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ et tout $x \in \mathcal{T}$, on a $R_1(x, \xi) = 0$.

Contrairement à la moyenne d'une fonction le long d'un feuilletage entier donné, les moyennes quasi-résonantes ne sont pas uniques. Néanmoins, on peut en construire explicitement à l'aide d'une fonction de troncature comme celle de la définition D.5.

Proposition D.17. Soit $K \in C^\infty(T^*\mathcal{T})$ une fonction et soit χ la fonction de troncature de la définition D.5. Soit $M : T^*\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par sa série de Fourier de la manière suivante. Pour tout $\xi \in \mathcal{B}$, on pose

$$\tilde{M}(k, \xi) = \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\varepsilon}\right) \tilde{K}(k, \xi) \text{ pour tout } k \in \Lambda^* \setminus 0$$

et

$$\tilde{M}(0, \xi) = \tilde{K}(0, \xi).$$

Alors, M est dans $C^\infty(T^*\mathcal{T})$ et est une (D, ε) -moyenne de K .

Démonstration. On donnera une preuve pour la définition D.18 "définitive" de la moyenne quasi-résonante. ■

Le théorème de forme normale D.22 de la section suivante permet de conjuguer l'opérateur perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K}_0$ à un opérateur $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$, où l'opérateur \hat{M} se comporte, près de chaque résonance, comme la moyenne d'un opérateur $\hat{K} = \hat{K}_0 + O(\hbar^{qqch})$, i.e dont le symbole est une moyenne (D, ε) -quasi-résonante d'un symbole K_{\hbar} . Pour tirer partie des propriétés de la moyenne quasi-résonante précédemment définie, il faut que le paramètre D tende vers l'infini lorsque \hbar tend vers 0, ce qui assurera que le reste d'ordre $O(D^{-\infty})$ soit d'ordre $O(\hbar^\infty)$.

D'autre part, si on laisse tendre D vers l'infini en laissant le deuxième paramètre ε fixé, les zones¹⁸ de résonance vont être de plus en plus nombreuses et, étant de taille ε fixée, elle vont remplir tout l'espace \mathcal{B} , si bien que seul le bloc¹⁹ de résonance trivial $\mathcal{B}_{\{0\}}$ va "survivre". Or, ce bloc correspond au module de résonance trivial $\mathcal{R} = \{0\}$, i.e au feuilletage entier maximal $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{V}_{\nabla}(\mathcal{T})$, pour lequel l'opération de moyenne n'apporte rien, puisque $moy(K, \mathcal{P}) = K$. Cela donnerait une forme normale identique à la forme de départ. On doit donc faire tendre ε vers 0 avec \hbar . Ceci nous oblige par ailleurs à utiliser les classes de symboles $\Psi_{\delta}^m(\mathcal{T})$.

En conséquence, on se fixe deux réels $\gamma > 0$ et $0 < \delta < 1$, et on découpe l'espace \mathcal{B} des impulsions, de la manière décrite dans la section 3.1, en blocs de quasi-résonance $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ de taille $\varepsilon = \hbar^{\delta}$, pour tous les D -modules de résonance avec $D = \hbar^{-\gamma}$.

¹⁸Définitions D.12.

¹⁹Définitions D.13.

Ayant besoin de travailler avec la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$, on donne tout d'abord une définition de moyenne quasi-résonante adaptée à ces symboles, puis on donne une version affinée de la proposition D.17.

Définition D.18. Soit $K_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ et $M_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ deux symboles. On dit que M_h est une **moyenne** $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -**quasi-résonante** de K_h ou simplement une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -**moyenne** de K_h , si elle a les propriétés suivantes. Pour tout $\hbar^{-\gamma}$ -module de résonance \mathcal{R} , si on note $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ le bloc de quasi-résonance réduit associé et $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ le feuilletage entier associé, alors on a

$$M_h = \text{moy}(K_h, \mathcal{P}_{\mathcal{R}}) + R_h,$$

où le reste $R_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ vérifiant que pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_h(x, \xi) = O(\hbar^\infty) \text{ pour tout } \xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} \text{ et tout } x \in \mathcal{T}.$$

La proposition suivante donne une construction d'une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne à l'aide de la fonction de troncature χ de la définition D.5.

Proposition D.19. Soit $K_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ un symbole et soit χ la fonction de troncature de la définition D.5. Soit $M_h : T^*T \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par sa série de Fourier de la manière suivante. Pour tout $\xi \in \mathcal{B}$, on pose

$$\tilde{M}_h(k, \xi) = \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta}\right) \tilde{K}_h(k, \xi) \text{ pour tout } k \in \Lambda^* \setminus 0$$

et

$$\tilde{M}_h(0, \xi) = \tilde{K}_h(0, \xi).$$

Alors, M_h est un symbole de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ et est une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_h .

Démonstration. Tout d'abord, pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$, la dérivée de la série de Fourier de M_h est donnée par

$$\partial_\xi^\beta \tilde{M}_h(k, \xi) = \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^{\beta} \left(\partial_\xi^{\beta - \beta'} \tilde{K}_h(k, \xi) \right) \partial_\xi^{\beta'} \left(\chi\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta}\right) \right)$$

pour $k \neq 0$ et simplement $\partial_\xi^\beta \tilde{M}_h(0, \xi) = \partial_\xi^\beta \tilde{K}_h(0, \xi)$ pour $k = 0$. D'autre part, d'après la proposition C.12, le fait que $\tilde{K}_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ implique pour tout s la majoration

$$\left| \partial_\xi^{\beta - \beta'} \tilde{K}_h(k, \xi) \right| \leq C(s, \beta - \beta') \frac{\hbar^{m - \delta|\beta - \beta'|}}{(1 + |k|^2)^{\frac{s}{2}}},$$

où $C(s, \beta - \beta')$ est une constante. Par ailleurs, on se convaincra relativement facilement que la dérivée de la fonction χ est de la forme

$$\left| \partial_\xi^{\beta'} \left(\chi\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta}\right) \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{|\beta'|} c(n) \hbar^{-\delta n} \chi^{(n)}\left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta}\right),$$

où les constantes $c(n)$ ne dépendent que de H et de ses dérivées. On remarque ensuite que $\hbar^{-\delta n} \leq \hbar^{-\delta|\beta'|}$ et que toutes les dérivées $\chi^{(n)}$ sont bornées (du fait que $\chi^{(n)} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$), ce qui fait que l'on a la majoration

$$\left| \partial_\xi^{\beta'} \left(\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \right) \right) \right| \leq \hbar^{-\delta|\beta'|} C(\beta')$$

pour tout k , tout \hbar et tout ξ . Ceci montre que

$$\left| \partial_\xi^\beta \tilde{M}_\hbar(k, \xi) \right| \leq C'(s, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta-\beta'|} \hbar^{-\delta|\beta'|}}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} = C'(s, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|}}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}},$$

où $C'(s, \beta)$ est une constante. En réutilisant la proposition C.12 dans l'autre sens, on en déduit que M_\hbar est un symbole de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$.

Vérifions maintenant que M est une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_\hbar . Pour tout $\hbar^{-\gamma}$ -module de résonance \mathcal{R} , on note $\tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{R}$ le bloc de quasi-résonance réduit associé et $\bar{K}_\hbar = \text{moy}(K_\hbar, \mathcal{P}_\mathcal{R})$ la moyenne de K_\hbar le long du feuilletage entier $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ associée à \mathcal{R} . On définit ensuite le reste R_\hbar par $M_\hbar = \bar{K}_\hbar + R_\hbar$. C'est un symbole de la classe $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$, puisque M_\hbar et \bar{K}_\hbar le sont, et sa série de Fourier $\tilde{R}_\hbar(k, \xi)$ est donnée par

$$\tilde{R}_\hbar(k, \xi) = \begin{cases} \left(\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \right) - 1 \right) \tilde{K}(k, \xi) & \text{si } k \in \mathcal{R} \setminus 0 \\ \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \right) \tilde{K}(k, \xi) & \text{si } k \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

et simplement $\tilde{R}_\hbar(0, \xi) = 0$ pour $k = 0$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ on va estimer $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi)$ en tout point $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{R}$.

- Pour tout $k \in \mathcal{R}$ avec $|k| \leq \hbar^{-\gamma}$, on a $\left| \frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \right| < \frac{1}{2}$ et la dérivée $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi)$ fait intervenir la fonction $\chi(t) - 1$ et ses dérivées en un point t , avec $|t| < \frac{1}{2}$, qui sont toutes nulles du fait que $\chi - 1$ est C^∞ et identiquement nulle pour tout t tel que $|t| \leq \frac{1}{2}$. On a donc $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) = 0$ pour tout $k \in \mathcal{R}$ avec $|k| \leq \hbar^{-\gamma}$ et tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{R}$.
- Pour tout $k \notin \mathcal{R}$ avec $|k| \leq \hbar^{-\gamma}$, on a $\left| \frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \right| \geq 1$ et la dérivée $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi)$ fait intervenir la fonction $\chi(t)$ et ses dérivées en un point t , avec $|t| \geq 1$, qui sont toutes nulles du fait que χ est C^∞ et identiquement nulle pour tout t tel que $|t| \geq 1$. On a donc $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) = 0$ pour tout $k \notin \mathcal{R}$ avec $|k| \leq \hbar^{-\gamma}$ et tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_\mathcal{R}$.
- Pour tout k avec $|k| > \hbar^{-\gamma}$, on utilise simplement le fait que $R_\hbar \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$, ce qui implique d'après la proposition C.12 que

$$\left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) \right| \leq C(s, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|}}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad (\text{D.9})$$

où $C(s, \beta)$ est une constante.

Compte tenu de ces trois cas, on a montré que $\left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_h(k, \xi) \right| \leq C(s, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|}}{(1+|k|^2)^{\frac{\delta}{2}}}$ pour tout k et tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_h(x, \xi) = \sum_{|k| \geq \hbar^{-\gamma}} e^{ik(x-x_0)} i^{|\alpha|} k^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{R}_h(k, \xi),$$

ce qui implique, en utilisant l'équation (D.9) avec $s = |\alpha| + d + 1 + N$,

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_h(x, \xi) \right| \leq C(\alpha, \beta, N) \hbar^{m-\delta|\beta|+N\gamma} \text{ pour tout } N,$$

où $C(\alpha, \beta, N)$ est une constante. ■

La moyenne quasi-résonante de la proposition précédente a le défaut qu'elle n'est pas auto-adjointe, même lorsque K_h l'est. On remédie à cela de la manière suivante.

Proposition D.20. *Soit $K_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ un symbole auto-adjoint et soit $M_h \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_h de la proposition précédente. Alors son adjoint $M_h^* \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ est aussi une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_h , ainsi que sa partie auto-adjointe $\frac{1}{2}(M_h + M_h^*)$.*

Démonstration. D'après la proposition C.25, la série de Fourier de M_h^* est donnée par

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_h^*(k, \xi) &= \overline{\widetilde{M}_h(-k, \xi + \hbar k)} \\ &= \overline{\chi\left(\frac{\Omega_{-k}(\xi + \hbar k)}{|-k| \hbar^\delta}\right) \widetilde{K}_h(-k, \xi + \hbar k)}, \end{aligned}$$

pour tout $k \neq 0$ et simplement $\widetilde{M}_h^*(0, \xi) = \overline{\widetilde{K}_h(0, \xi)}$. En utilisant ensuite le fait que K_h est auto-adjoint, le fait que $\Omega_{-k}() = -\Omega_k()$ et le fait que la fonction χ est réelle et paire, on obtient

$$\widetilde{M}_h^*(k, \xi) = \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^\delta}\right) \widetilde{K}_h(k, \xi),$$

pour tout $k \neq 0$ et simplement $\widetilde{M}_h^*(0, \xi) = \widetilde{K}_h(0, \xi)$. Pour tout $\hbar^{-\gamma}$ -module de résonance \mathcal{R} , on note $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ le bloc de quasi-résonance réduit associé et $\tilde{K}_h = \text{moy}(K_h, \mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ la moyenne de K_h le long du feuilletage entier $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ associé à \mathcal{R} . On définit ensuite le reste R_h par $M_h^* = \tilde{K}_h + R_h$. Sa série de Fourier $\tilde{R}_h(k, \xi)$ est donnée par

$$\tilde{R}_h(k, \xi) = \begin{cases} \left(\chi\left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^\delta}\right) - 1 \right) \tilde{K}_h(k, \xi) & \text{si } k \in \mathcal{R} \setminus 0 \\ \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^\delta}\right) \tilde{K}_h(k, \xi) & \text{si } k \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

et simplement $\tilde{R}_h(0, \xi) = 0$ pour $k = 0$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ on va estimer $\partial_\xi^\beta \tilde{R}_h(k, \xi)$ en tout point $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$.

• Considérons d'abord le cas $k \notin \mathcal{R}$ pour lequel on a bien sûr

$$\begin{aligned} \left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_h(k, \xi) \right| &\leq \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^\beta \left| \partial_\xi^{\beta-\beta'} \tilde{K}_h(k, \xi) \right| \left| \partial_\xi^{\beta'} \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^\delta}\right) \right| \\ &\leq \sum_{\beta' \leq \beta} C(s, \beta', \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta-\beta'|}}{(1+|k|^2)^{\frac{\delta}{2}}} \left| \partial_\xi^{\beta'} \chi\left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^\delta}\right) \right|, \quad (\text{D.10}) \end{aligned}$$

pour tout s grâce à la proposition C.12 et au fait que $K_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^m(\mathcal{T})$. On note ensuite $f(\varepsilon) = \frac{\Omega_k(\xi + \varepsilon \hbar k)}{|k| \hbar^{\delta}}$, ce qui fait que

$$\chi \left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k| \hbar^{\delta}} \right) = \chi \circ f(1)$$

et on va faire un développement de Taylor avec reste intégrale de la fonction $\chi \circ f(\varepsilon)$, i.e

$$\chi \circ f(1) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n (\chi \circ f(\varepsilon))}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=1} + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{N-1} \left. \frac{d^N (\chi \circ f(\varepsilon))}{d\varepsilon^N} \right|_{\varepsilon=\tau}. \quad (\text{D.11})$$

Par ailleurs, on voit facilement que les dérivées de la fonction $\chi \circ f(\varepsilon)$ sont données par

$$\frac{d^n (\chi \circ f(\varepsilon))}{d\varepsilon^n} = \sum_{j=1}^n \chi^{(j)} \circ f(\varepsilon) \sum_{m_1 + \dots + m_j = n} C(m_1, \dots, m_j) \frac{d^{m_1} f(\varepsilon)}{d\varepsilon^{m_1}} \dots \frac{d^{m_j} f(\varepsilon)}{d\varepsilon^{m_j}},$$

où $C(m_1, \dots, m_j)$ est une constante numérique. D'autre part, chaque terme $\frac{d^m f(\varepsilon)}{d\varepsilon^m}$ est donné par

$$\begin{aligned} \frac{d^m f(\varepsilon)}{d\varepsilon^m} &= \frac{\hbar^m}{|k| \hbar^{\delta}} (k \cdot \partial_{\xi})^m (\Omega_k(\xi))|_{\xi + \varepsilon \hbar k} \\ &= \frac{\hbar^m}{|k| \hbar^{\delta}} \sum_{|\alpha|=m} c(\alpha) k^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} (\Omega_k(\xi))|_{\xi + \varepsilon \hbar k}, \end{aligned}$$

où $c(\alpha)$ est une constante numérique. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d^n (\chi \circ f(\varepsilon))}{d\varepsilon^n} &= \sum_{j=1}^n \chi^{(j)} \circ f(\varepsilon) \sum_{m_1 + \dots + m_j = n} C(m_1, \dots, m_j) \frac{\hbar^n}{(|k| \hbar^{\delta})^j} \dots \\ &\dots \sum_{\substack{|\alpha(1)|=m_1 \\ \vdots \\ |\alpha(j)|=m_j}} c(\alpha(1), \dots, \alpha(j)) k^{\alpha(1) + \dots + \alpha(j)} \partial_{\xi}^{\alpha(1) + \dots + \alpha(j)} (\Omega_k(\xi))|_{\xi + \varepsilon \hbar k}, \end{aligned}$$

où $c'(\alpha)$ est une constante numérique et les $\alpha(1), \dots, \alpha(j) \in \mathbb{N}^d$ sont des multi-indices. C'est à dire que l'on a

$$\frac{d^n (\chi \circ f(\varepsilon))}{d\varepsilon^n} = \sum_{j=1}^n \chi^{(j)} \circ f(\varepsilon) \frac{\hbar^n}{\hbar^{j\delta}} g_{j,n}(k, \xi, \varepsilon, \hbar),$$

où la fonction $g_{j,n}(k, \xi, \varepsilon, \hbar)$ vérifie que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tout $k \in \Lambda^*$, tout $\xi \in \mathcal{B}$ et tout \hbar , on a

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} g_{j,n}(k, \xi, \varepsilon, \hbar)| \leq C(j, n, \alpha) |k|^n, \quad (\text{D.12})$$

où $C(j, n, \alpha)$ est une constante qui ne dépend que de $H(\xi)$ et de ses dérivées. En tout point $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$, avec $k \notin \mathcal{R}$, on a $\left| \frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k|\hbar^\delta} \right| \geq 1$, ce qui fait que tous les termes $\chi^{(j)} \circ f(1)$ sont nuls puisque la fonction $\chi(t)$ est plate en tout t tel que $|t| \geq 1$, de même que toutes les dérivées $\partial_\xi^{\beta'} (\chi^{(j)} \circ f(1))$. Pour tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$, on a donc d'après l'équation (D.11)

$$\left| \partial_\xi^{\beta'} \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k|\hbar^\delta} \right) \right| \leq \frac{1}{(N-1)!} \sum_{j=1}^N \frac{\hbar^N}{\hbar^{j\delta}} \sum_{\beta'' \leq \beta'} C_{\beta''}^{\beta'} C(j, N, \beta' - \beta'') |k|^N \int_0^1 d\tau \left| \partial_\xi^{\beta''} \chi^{(j)} \circ f(\tau) \right|,$$

où l'on a utilisé la majoration (D.12). Le terme $\left| \partial_\xi^{\beta''} \chi^{(j)} \circ f(\tau) \right|$ s'estime de la même manière sordide et on se convaincra plus ou moins facilement que l'on a la majoration

$$\left| \partial_\xi^{\beta''} \chi^{(j)} \circ f(\tau) \right| \leq \sum_{j'=1}^{|\beta''|} \left| \chi^{(j+j')} \circ f(\tau) \right| C(j', \beta'') \frac{1}{\hbar^{\delta j'}}.$$

En utilisant $\frac{1}{\hbar^{\delta j'}} \leq \frac{1}{\hbar^{\delta |\beta''|}} \leq \frac{1}{\hbar^{\delta |\beta'|}}$ et $\frac{1}{\hbar^{j\delta}} \leq \frac{1}{\hbar^{N\delta}}$, et le fait que toutes les dérivées de χ sont bornées, on trouve que

$$\left| \partial_\xi^{\beta'} \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi + \hbar k)}{|k|\hbar^\delta} \right) \right| \leq C(N, \beta') \hbar^{(1-\delta)N - \delta |\beta'|} |k|^N,$$

avec $C(N, \beta')$ une constante, pour tout point $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ et tout $k \notin \mathcal{R}$. Compte tenu des ces différentes estimations, la majoration (D.10) devient

$$\begin{aligned} \left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) \right| &\leq C(s, \beta, N) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|+(1-\delta)N}}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} |k|^N \\ &\leq C(s, \beta, N) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|+(1-\delta)N}}{(1+|k|^2)^{\frac{s-N}{2}}} \end{aligned}$$

où $C(s, \beta, N)$ est une constante.

- Dans le cas $k \in \mathcal{R}$, à l'aide d'un calcul tout aussi sordide qu'on ne souhaite pas infliger au lecteur déjà probablement fatigué, on montrerait que l'on a la même estimation pour $\left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) \right|$ que dans le cas $k \notin \mathcal{R}$. Il faut majorer cette fois-ci les dérivées de la fonction $1 - \chi(t)$ qui est plate en tout t , tel que $|t| \leq \frac{1}{2}$, et utiliser le fait que pour tout $k \in \mathcal{R}$ et tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$, on a $\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|\hbar^\delta} \leq \frac{1}{2}$.

En conséquence, on a montré que pour tout $N > 0$ et tout $n > 0$, il existe une constante $C(n, N)$ telle que pour tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ et tout $k \in \Lambda^*$ on a

$$\left| \partial_\xi^\beta \tilde{R}_\hbar(k, \xi) \right| \leq C(n, N, \beta) \frac{\hbar^{m-\delta|\beta|+(1-\delta)N}}{(1+|k|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ce qui permet de monter que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_\hbar(x, \xi) \right| \leq C(n, N, \alpha, \beta) \hbar^{m-\delta|\beta|+(1-\delta)N} \sum_{k \in \Lambda^*} \frac{1}{(1+|k|^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

En choisissant $n = d + 1$, on s'assure que la somme converge, ce qui montre que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_\hbar(x, \xi) \right| \leq C(N, \alpha, \beta) \hbar^{m-\delta|\beta|+(1-\delta)N}$$

pour tout N , tout $\xi \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ et tout $x \in T$. On a donc bien montré que l'adjoint M_\hbar^* est une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_\hbar . Cela implique aussi que la partie auto-adjointe $\frac{1}{2}(M_\hbar + M_\hbar^*)$ est une $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de K_\hbar . ■

Définition. Les $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyennes ne sont pas uniques, mais :

- "*la* $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne *auto-adjointe* de..." signifiera celle construite dans la proposition D.20.
- "*la* $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de..." signifiera celle construite dans la proposition D.19.

3.3 Forme normale quasi-résonante

On montre d'abord un lemme concernant l'équation homologique qui apparaît à chaque étape de la récurrence de la démonstration du théorème D.22 de forme normale qu'on prouvera ensuite. Ce lemme est à comparer au lemme D.6 qui donnait l'existence de solutions de l'équation homologique partiellement diophantienne, une équation associée à un tore \mathcal{T}_{ξ_0} donné et faisant intervenir la moyenne de la perturbation le long du feuilletage minimal de X_H sur ce tore. Le lemme suivant ne fait pas référence à un tore particulier et fait intervenir la moyenne quasi-résonante définie juste avant.

Lemme D.21 (Equation homologique quasi-résonante). Soit $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ un hamiltonien complètement intégrable et soit $K_\hbar \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ un symbole et soit $M_\hbar \in \Psi_\delta^m(\mathcal{T})$ sa $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne. Alors il existe un symbole $P_\hbar \in \Psi_\delta^{m-\delta}(\mathcal{T})$ vérifiant

$$\{P_\hbar, H\} + K_\hbar - M_\hbar = 0.$$

Démonstration. On écrit d'abord la série de Fourier pour la variable x de l'équation homologique, soit

$$i\Omega_k(\xi) \tilde{P}_\hbar(k, \xi) + \tilde{K}_\hbar(k, \xi) - \tilde{M}_\hbar(k, \xi) = 0, \quad (\text{D.13})$$

où $\Omega_k(\xi) = dH_\xi(k)$. Pour $k = 0$, l'équation est satisfaite puisque $\Omega_0(\xi) = 0$ et $\tilde{M}_\hbar(0, \xi) = \tilde{K}_\hbar(0, \xi)$. On peut choisir $\tilde{P}_\hbar(k, \xi) = 0$. Pour tout $k \neq 0$, la série de Fourier de la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de la proposition D.19 est donnée par

$$\tilde{M}_\hbar(k, \xi) = \chi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta} \right) \tilde{K}_\hbar(k, \xi),$$

où χ est la fonction de troncature de la définition D.5. En se rappelant du fait que la fonction $\phi(t) = \frac{1-\chi(t)}{t}$ est C^∞ , on voit que la fonction

$$\tilde{P}_\hbar(k, \xi) = \frac{i\tilde{K}_\hbar(k, \xi)}{|k| \hbar^\delta} \phi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta} \right)$$

est bien définie et satisfait à l'équation D.13. Pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi) = \sum_{k \neq 0} e^{ik(x-x_0)} \frac{i^{|\alpha|+1} k^\alpha}{|k| \hbar^\delta} \sum_{\beta' \leq \beta} C_{\beta'}^\beta \left(\partial_\xi^{\beta-\beta'} \tilde{K}_\hbar(k, \xi) \right) \partial_\xi^{\beta'} \left(\phi \left(\frac{\Omega_k(\xi)}{|k| \hbar^\delta} \right) \right).$$

En procédant alors comme dans les preuves des propositions D.19 et D.20, on montre que l'on a la majoration

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta P_\hbar(x, \xi) \right| = C(\alpha, \beta) \hbar^{m-\delta-|\beta|},$$

ce qui prouve que $P_\hbar \in \Psi_\delta^{m-\delta}(\mathcal{T})$. ■

On considère comme précédemment un opérateur quantique perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$, où $\hat{K}_0 \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ avec $\kappa \geq 0$ et on donne le théorème D.22 de forme normale quasi-résonante pour cet opérateur. En fait, la preuve marche de manière identique si l'on autorise \hat{K}_0 à être dans la classe plus large $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, bien qu'en pratique on n'utilisera pas cette possibilité, puisque le paramètre δ ne provient pas de \hat{K}_0 mais du découpage de l'espace \mathcal{B} en blocs de quasi-résonance.

La preuve se déroule selon le même schéma que celle du théorème D.7 de forme normale partiellement diophantienne. On construit par récurrence un unitaire \hat{U} qui met l'opérateur perturbé sous forme normale. A chaque étape de la récurrence, on a une équation homologique que l'on résout à l'aide du lemme D.21. Une difficulté supplémentaire intervient dans la preuve du théorème D.22 du fait de l'utilisation de la classe de symboles $\hat{\Psi}_\delta(\mathcal{T})$. L'apparition de termes $\hbar^{-\delta}$ à différents endroits complique un peu le comptage des puissances de \hbar . Pour simplifier la vie du lecteur, nous avons préféré remettre la preuve complète, avec le détail des contributions aux puissances de \hbar , bien que le fil conducteur "algébrique" soit le même que dans le théorème D.7. On notera $O(\hbar^m)$ un OPD (resp. symbole) de la classe $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ (resp. $\Psi_\delta^m(\mathcal{T})$). Notamment, $O(\hbar^\infty)$ désignera un opérateur négligeable, i.e dans $\hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$.

Théorème D.22 (Forme normale quasi-résonante). *Soit $0 < \delta < 1$, $\gamma > 0$ et $\kappa \geq 2\delta$. Soit $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ le quantifié d'un hamiltonien complètement intégrable $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ et soit $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^{1+\kappa}(\mathcal{T})$ une perturbation auto-adjointe. Alors il existe*

- un OPD $\hat{U} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ vérifiant $\hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^{\kappa-\delta})$, $\hat{U}^* \hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U} \hat{U}^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$
- et un OPD $\hat{K} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ auto-adjoint vérifiant $\hat{K} = \hat{K}_0 + O(\hbar^{1-\delta})$,

tels que

$$\hat{U} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \hat{U}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M} + O(\hbar^\infty), \quad (\text{D.14})$$

où $\hat{M} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ l'OPD dont le symbole M_\hbar est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe du symbole K_\hbar .

Démonstration. On commence par montrer qu'on peut trouver des OPD auto-adjoints $\hat{P}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$ et $\hat{K}_1 \in \hat{\Psi}_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$ tels que

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_1, \quad (\text{D.15})$$

où $M_0(\hbar) \in \Psi_\delta^0(\mathcal{T})$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe de $K_0(\hbar)$.

- En effet, la proposition C.30 nous apprend que

$$\begin{aligned} e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \hat{H} \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_0, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{2(\kappa-\delta+1-\delta)+\delta}\right), \\ &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_0, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{2+2\kappa-3\delta}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on peut appliquer le lemme C.20 qui nous assure que le symbole du commutateur $\left[\hat{P}_0, \hat{H} \right]$ est égal à $\frac{\hbar}{i} \{P_0, H\} + O(\hbar^{2-\delta})$, ce qui donne

$$\begin{aligned} e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \hat{H} \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left(\frac{\hbar}{i} \widehat{\{P_0, H\}} \right) + O\left(\hbar^{2+\kappa-\delta}\right) + O\left(\hbar^{2+2\kappa-3\delta}\right) \\ &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left(\frac{\hbar}{i} \widehat{\{P_0, H\}} \right) + O\left(\hbar^{2+\kappa-\delta}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\kappa \geq 2\delta$ et donc que $\hbar^{2\kappa-3\delta} \leq \hbar^{\kappa-\delta}$.

- De même, la proposition C.29 nous apprend que

$$\begin{aligned} e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \right)^* &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 + O\left(\hbar^{1+\kappa} \hbar^{\kappa-\delta+1-\delta}\right). \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 + O\left(\hbar^{2+\kappa-\delta}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\kappa \geq 2\delta > \delta$ et donc que $\hbar^{2\kappa-2\delta} \ll \hbar^{\kappa-\delta}$.

En prenant alors le symbole de l'équation D.2 et en simplifiant par $\hbar^{1+\kappa}$, on voit que l'on doit résoudre

$$\{P_0, H\} + K_0 - M_0 = O\left(\hbar^{1-\delta}\right). \quad (\text{D.16})$$

En fait, le lemme D.21 nous assure que l'on peut trouver un symbole $P'_0 \in \Psi_\delta^{-\delta}(T)$ tel que l'on ait exactement $\{P'_0, H\} + K_0 - M'_0 = 0$, où $M'_0(\hbar) \in \Psi_\delta^0(T)$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de $K_0(\hbar)$. L'adjoint de cette équation est $\{(P'_0)^*, H\} + K_0 - (M'_0)^* = 0$ puisque K_0 est auto-adjoint. De plus, en utilisant la proposition C.20, on voit facilement que

$$\{(P'_0, H)\}^* = \{(P'_0)^*, H\} + O\left(\hbar^{1-\delta}\right),$$

ce qui implique que la partie auto-adjointe $P_0 = \frac{1}{2} \left(P'_0 + (P'_0)^* \right)$ vérifie l'équation (D.16) avec $M_0 = \frac{1}{2} \left(M'_0 + (M'_0)^* \right)$ qui est une moyenne $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe de $K_0(\hbar)$, d'après la proposition D.20. Le quantifié de P_0 satisfait donc à l'équation (D.15) avec un $\hat{K}_1 \in \hat{\Psi}_\delta^{1-\delta}(T)$ auto-adjoint. Si on pose $\hat{U}_0 = e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_0} \in \hat{\Psi}_\delta^0(T)$, on a $\hat{U}_0^* \hat{U}_0 = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$, $\hat{U}_0 \hat{U}_0^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et

$$\hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \right) \hat{U}_0^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_0 + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_1. \quad (\text{D.17})$$

Cette équation constitue l'étape initiale du raisonnement par récurrence suivant. Supposons qu'à l'étape $n \geq 0$, on ait trouvé des OPD auto-adjoints $\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_{n+1}$, avec $\hat{K}_j \in$

$\hat{\Psi}_\delta^{j(1-\delta)}$ et des OPD $\hat{U}_0, \dots, \hat{U}_n \in \hat{\Psi}_\delta^0$ vérifiant $\hat{U}_j^* \hat{U}_j = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U}_j \hat{U}_j^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$, tels que

$$\hat{U}_n \dots \hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K} \right) \hat{U}_0^* \dots \hat{U}_n^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^n \hat{M}_j + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1}, \quad (\text{D.18})$$

où $M_j(\hbar) \in \Psi_\delta^{j(1-\delta)}(\mathcal{T})$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de $K_j(\hbar)$. On cherche alors des OPD $\hat{K}_{n+2} \in \hat{\Psi}_\delta^{(n+2)(1-\delta)}$ et $\hat{U}_{n+1} \in \hat{\Psi}_\delta^0$ ayant les propriétés que l'on imagine et vérifiant l'équation

$$\hat{U}_{n+1} \hat{U}_n \dots \hat{U}_0 \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K} \right) \hat{U}_0^* \dots \hat{U}_n^* \hat{U}_{n+1}^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^{n+1} \hat{M}_j + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+2}, \quad (\text{D.19})$$

où $M_{n+1}(\hbar) \in \Psi_\delta^{(n+1)(1-\delta)}(\mathcal{T})$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de $K_{n+1}(\hbar)$. En cherchant \hat{U}_{n+1} sous la forme $\hat{U}_{n+1} = e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}}$, avec $\hat{P}_{n+1} \in \hat{\Psi}_\delta^{-\delta+(n+1)(1-\delta)}$ un OPD auto-adjoint et réinsérant l'équation (D.18) dans l'équation (D.19), on voit que l'on doit résoudre

$$e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}} \left[\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^n \hat{M}_j + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} \right] \left(e^{i\hbar^\kappa \hat{P}_{n+1}} \right)^* = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \sum_{j=0}^{n+1} \hat{M}_j + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+2}. \quad (\text{D.20})$$

On va maintenant appliquer les propositions C.29 et C.30 à chacun des termes à l'intérieur du crochet [].

- Tout d'abord, la proposition C.30 nous apprend que

$$\begin{aligned} \hat{U}_{n+1} \left[\hat{H} \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{2(\kappa-\delta+(n+1)(1-\delta)+1-\delta)+\delta}\right) \\ &= \hat{H} + i\hbar^\kappa \left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right] + O\left(\hbar^{1+\kappa+(n+2)(1-\delta)}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{1+2\kappa-2\delta} \leq \hbar^{1+\kappa}$ et $\hbar^{(2n+3)(1-\delta)} \ll \hbar^{(n+2)(1-\delta)}$.

- D'autre part, on peut appliquer la proposition C.20 qui nous assure que le symbole du commutateur $\left[\hat{P}_{n+1}, \hat{H} \right]$ est égal à $\frac{\hbar}{i} \{P_{n+1}, H\} + O\left(\hbar^{2-\delta+(n+1)(1-\delta)}\right)$, soit

$$\frac{\hbar}{i} \{P_{n+1}, H\} + O\left(\hbar^{1+(n+2)(1-\delta)}\right).$$

Cela fait que le symbole de $\hat{U}_{n+1} \left[\hat{H} \right] \hat{U}_{n+1}^*$ est

$$H + \hbar^{1+\kappa} \{P_{n+1}, H\} + O\left(\hbar^{1+\kappa+(n+2)(1-\delta)}\right).$$

- Ensuite, la proposition C.29 nous donne, pour tout $j = 0..n$,

$$\begin{aligned} \hat{U}_{n+1} \left[\hbar^{1+\kappa} \hat{M}_j \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_j + O\left(\hbar^{1+\kappa} \hbar^{j(1-\delta)} \hbar^{\kappa-\delta+(n+1)(1-\delta)+1-\delta}\right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_j + O\left(\hbar^{1+2\kappa-\delta+(n+2+j)(1-\delta)}\right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{M}_j + O\left(\hbar^{1+\kappa+(n+2)(1-\delta)}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{1+2\kappa-\delta} \ll \hbar^{1+\kappa}$ et $\hbar^{(n+2+j)(1-\delta)} \ll \hbar^{(n+2)(1-\delta)}$.

• Enfin, la proposition C.29 donne

$$\begin{aligned}\hat{U}_{n+1} \left[\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} \right] \hat{U}_{n+1}^* &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} + O \left(\hbar^{1+\kappa+(n+1)(1-\delta)} \hbar^{\kappa-\delta+(n+1)(1-\delta)+1-\delta} \right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} + O \left(\hbar^{1+2\kappa-\delta+(2n+3)(1-\delta)} \right) \\ &= \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_{n+1} + O \left(\hbar^{1+\kappa+(n+2)(1-\delta)} \right),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\hbar^{1+2\kappa-\delta} \ll \hbar^{1+\kappa}$ et $\hbar^{(2n+3)(1-\delta)} \ll \hbar^{(n+2)(1-\delta)}$.

En tenant compte de ces différentes estimations, en prenant le symbole de l'équation (D.20) et en simplifiant par \hbar , on voit que l'on doit résoudre

$$\{P_{n+1}, H\} + K_{n+1} - M_{n+1} = O \left(\hbar^{(n+2)(1-\delta)} \right), \quad (\text{D.21})$$

ou $M_{n+1}(\hbar)$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe de $K_{n+1}(\hbar)$. On utilise alors le lemme D.21 qui nous assure que l'on peut trouver un symbole $P'_{n+1} \in \Psi_\delta^{-\delta+(n+1)(1-\delta)}$, tel que l'on ait exactement $\{P'_{n+1}, H\} + K_{n+1} - M'_{n+1} = 0$, où $M'_{n+1}(\hbar)$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de $K_{n+1}(\hbar)$. En raisonnant comme précédemment, on montre que la partie auto-adjointe $P_{n+1} = \frac{1}{2} \left(P'_{n+1} + \left(P'_{n+1} \right)^* \right)$ vérifie l'équation (D.21) avec $M_{n+1} = \frac{1}{2} \left(M'_{n+1} + \left(M'_{n+1} \right)^* \right)$ qui est une moyenne $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe de $K_{n+1}(\hbar)$, d'après la proposition D.20. Le quantifié de P_{n+1} satisfait donc à l'équation (D.20) avec $\hat{K}_{n+2} \in \hat{\Psi}_\delta^{(n+2)(1-\delta)}$ auto-adjoint, ce qui conclut la récurrence.

Si on définit ensuite la suite \hat{V}_n par $\hat{V}_0 = \hat{U}_0$ et $\hat{V}_n = \hat{U}_n \dots \hat{U}_0 - \hat{U}_{n-1} \dots \hat{U}_0$, on voit facilement que l'on a $\hat{V}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, $\hat{V}_n \in \hat{\Psi}_\delta^{\kappa-\delta+n(1-\delta)}(\mathcal{T})$ et $\hat{U}_n \dots \hat{U}_0 = \hat{V}_0 + \dots + \hat{V}_n$. Grâce au procédé de Borel (proposition C.16), on peut construire un OPD $\hat{U} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ qui admet le développement asymptotique $\hat{U} \sim \sum_n \hat{V}_n$. Par construction, il vérifie $\hat{U}^* \hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U} \hat{U}^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$. De même, on peut construire un OPD auto-adjoint \hat{K} dans $\hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ vérifiant $\hat{K} \sim \sum_n \hat{K}_n$. De plus, si on définit M_\hbar comme la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne auto-adjointe du symbole K_\hbar , on voit que l'on a $\hat{M} \sim \sum_n \hat{M}_n$. Tout ceci fait que l'équation (D.14) est satisfaite. ■

Pour finir, remarquons que comme dans le théorème D.7 de forme normale partiellement diophantienne, la forme normale quasi-résonante contient des objets qui ne nous sont pas donnés explicitement, par exemple l'opérateur \hat{K} dont on sait simplement qu'il est égal à \hat{K}_0 (qui nous est donné) plus quelque chose de plus petit. Néanmoins, le fait que l'opérateur \hat{M} soit la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne de \hat{K} nous apprend quand même que dans chaque bloc de résonance, le symbole M_\hbar est constant le long du feuilletage associée à la résonance.

Chapitre E

Quasimodes et résonances

1 Introduction

1.1 Quasimodes

Définition E.1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et \hat{P} un opérateur. Un ε -**quasimode** est la donnée d'une fonction $\varphi \in \mathcal{H}$ de norme 1 et d'une **quasi-valeur propre** E telles que

$$\|(\hat{P} - E)\varphi\| \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon \geq 0$ est un (petit) réel.

Par exemple, un vecteur propre de valeur propre E est un 0-quasimode. Lorsque ε est petit, on imaginerait volontiers que φ est une bonne approximation d'une fonction propre avec une valeur propre proche de E . Ceci est malheureusement faux en général. Par contre, lorsque l'opérateur \hat{P} est auto-adjoint, la quasi-valeur propre E est effectivement proche du spectre de \hat{P} , comme indiqué dans la proposition suivante qui fait partie du folklore, mais dont je serais bien ennuyé de devoir en citer l'auteur premier.

Proposition E.2. Si (φ, E) est un ε -quasimode d'un opérateur auto-adjoint \hat{P} , alors l'intervalle $[E - \varepsilon, E + \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ rencontre le spectre de \hat{P} .

Démonstration. Tout d'abord, on a $(\hat{P} - E)\varphi = \phi$, avec $\|\phi\| \leq \varepsilon$. Si E est dans le spectre de \hat{P} , c'est fini. Sinon, cela signifie que la résolvante $\hat{R}_E = (\hat{P} - E)^{-1}$ est bien définie et qu'elle a pour norme l'inverse de la distance $d(E, sp(\hat{P}))$ entre E et le spectre de \hat{P} , i.e

$$\|\hat{R}_E\| = \frac{1}{d(E, sp(\hat{P}))}.$$

On a alors $\varphi = \hat{R}_E(\hat{P} - E)(\varphi) = \hat{R}_E(\phi)$, ce qui fait que

$$1 = \|\hat{R}_E(\phi)\| \leq \frac{1}{d(E, sp(\hat{P}))}\varepsilon.$$

cela implique effectivement que $d(E, sp(\hat{P})) \leq \varepsilon$. ■

Il faut tout d'abord remarquer que cette proposition ne prédit pas l'existence de valeurs propres proches de E , mais seulement la présence de spectre proche de E , sans rien dire de la nature de ce spectre.

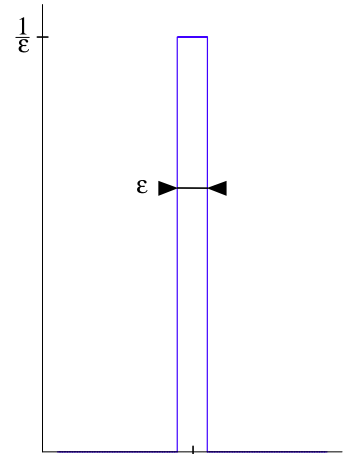
Par exemple, si on considère l'opérateur \hat{x} de multiplication par x sur $L^2([0, 1])$ et les fonctions $\varphi_{x_0, \varepsilon}$ définies par

$$\varphi_{x_0, \varepsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{pour } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{pour } x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

et représentées sur le schéma de droite, alors on voit facilement qu'elles sont de norme 1 et qu'elles vérifient

$$\|\hat{x}\varphi_{x_0, \varepsilon} - x_0\varphi_{x_0, \varepsilon}\| = \varepsilon.$$

Cela signifie que les fonctions $\varphi_{x_0, \varepsilon}$ sont des ε -quasimodes de \hat{x} avec la quasi-valeur propre x_0 . Pourtant, on sait que le spectre de \hat{x} est continu (c'est justement l'intervalle $[0, 1]$) et n'a pas de valeurs propres.

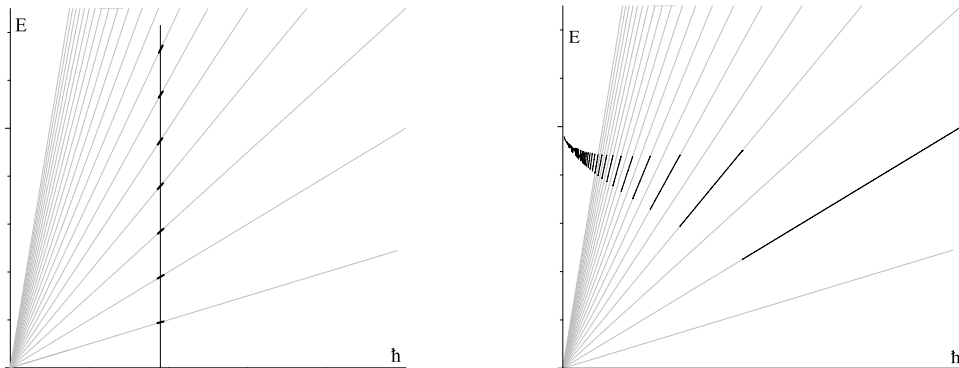


D'autre part, la proposition E.2 ne permet pas non plus de conclure que ψ est proche d'un vecteur propre (même quand E est proche d'une valeur propre), comme l'a remarqué Arnol'd dans l'article [5] qui semble avoir introduit pour la première fois le terme quasimode.

Dans le contexte semi-classique, où tous les résultats sont valables dans le régime asymptotique $\hbar \rightarrow 0$, il est tout à fait naturel de considérer des ε -quasimodes avec ε tendant vers 0 avec \hbar , par exemple avec $\varepsilon = \hbar^N$, où N est un réel positif. Cela signifie que l'on a une fonction φ_{\hbar} et une quasi-valeur propre E_{\hbar} dépendantes de \hbar et qui vérifient

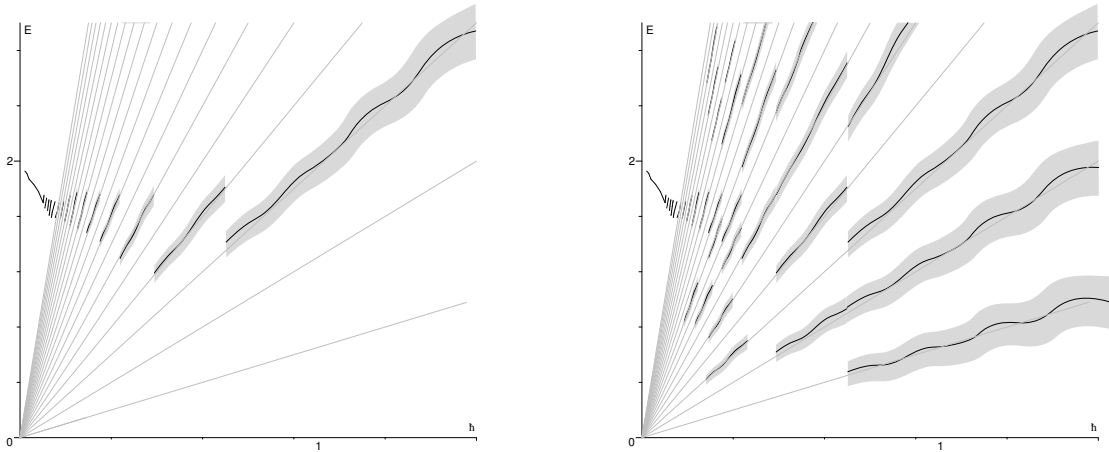
$$\|(\hat{P} - E_{\hbar})\varphi_{\hbar}\| \leq \hbar^N.$$

Il faut noter que l'on ne demande aucune régularité sur la dépendance en \hbar de φ_{\hbar} et E_{\hbar} . Notamment, E_{\hbar} peut ne pas avoir de limite lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Pourtant, on a dans l'idée que si l'on considère un OPD \hat{P} dont le symbole dépend de manière régulière de \hbar , il en sera de même pour ses valeurs propres. Pour comprendre ce phénomène il est utile de considérer l'exemple trivial suivant. Soit l'opérateur $\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ agissant sur $L^2(S^1)$. Pour chaque valeur de \hbar , ses vecteurs propres sont les exponentielles $\varphi_n = e^{inx}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, et ses valeurs propres sont $\lambda_n(\hbar) = \hbar n$. Dans le plan $(\hbar, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, les valeurs propres décrivent des lignes de pente n passant par l'origine, comme on le voit sur le dessin de gauche ci-dessous.



Pour $\hbar = 0$, seule 0 est valeur propre, mais pour $\hbar \neq 0$, il y a des valeurs propres aussi grandes que l'on veut. Si l'on choisit une famille quelconque d'entiers $n(\hbar) \in \mathbb{N}$, alors la fonction $\varphi_{\hbar} = \varphi_{n(\hbar)} = e^{in(\hbar)x}$ est à l'évidence un 0-quasimode avec la (quasi-)valeur propre $E_{\hbar} = \hbar n(\hbar)$. Sur le dessin de droite ci-dessus, le E_{\hbar} choisi tend vers une valeur lorsque $\hbar \rightarrow 0$, ce qui n'est pas toujours le cas.

Pour connaître tout le spectre de \hat{P} , on a besoin de toutes les lignes $\lambda_n(\hbar) = \hbar n$ dans le plan $(\hbar, E) \in \mathbb{R}^2$. Un 0-quasimode φ_{\hbar} , comme celui du paragraphe précédent, nous donne accès à une petite portion de l'information, à savoir le "chemin" décrit par E_{\hbar} . Supposons maintenant que l'on a un \hbar^N -quasimode $(\varphi_{\hbar}, E_{\hbar})$. La quasi-valeur propre E_{\hbar} décrit un certain chemin dans le plan $(\hbar, E) \in \mathbb{R}^2$, entouré d'un voisinage de taille \hbar^N dans lequel, d'après la proposition E.2, il y a au moins une valeur propre pour tout \hbar (schéma de gauche ci-dessous). C'est la donnée de beaucoup de tels quasi-modes qui permettra de retirer des informations sur le spectre asymptotique de \hat{P} (schéma de droite ci-dessous).



On voit donc que l'on peut avoir des quasimodes très peu réguliers par rapport à \hbar , mais que cela ne change en rien l'information que l'on en tire, concernant la proximité du spectre. On pourrait arguer que cette non-régularité est quelque peu "artificielle" et qu'il suffit de choisir $n(\hbar)$ constant dans l'exemple précédent pour se débarrasser de ce problème. Ce n'est en fait pas possible dans beaucoup de cas où l'on est amené à faire une étude locale en E (par exemple avec des formes normales). On a des propriétés qui ne sont valables que dans une fenêtre $[E^-, E^+]$ et on doit considérer des quasimodes dont la quasi-valeur propre est confinée pour tout \hbar dans cette fenêtre.

1.2 Quasimodes et formes normales

Lorsqu'on parle de formes normales, on se réfère souvent à la conjugaison d'un OPD \hat{P} par un OPD \hat{U} ,

$$\hat{U}\hat{P}\hat{U}^* = \widehat{FN},$$

où \widehat{FN} est un OPD ayant des propriétés plus agréables que l'opérateur initial \hat{P} et où \hat{U} est "presque" unitaire. Par exemple, dans les formes normales partiellement diophantienne (théorème D.7) et quasi-résonantes (théorème D.22), l'opérateur \hat{U} vérifie $\hat{U}^*\hat{U} = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$ et $\hat{U}\hat{U}^* = \mathbb{I} + O(\hbar^\infty)$, où le $O(\hbar^\infty)$ signifie un OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^\infty(\mathcal{T})$, donc de norme

$O(\hbar^\infty)$ d'après le théorème C.22 de Calderón-Vaillancourt. En multipliant à gauche par \hat{U}^* l'équation de la forme normale, on voit que

$$\hat{P}\hat{U}^* = \hat{U}^*\widehat{FN} + O(\hbar^\infty).$$

Si (φ_\hbar, E_\hbar) est un \hbar^N -quasimode de \widehat{FN} , alors on a $\widehat{FN}\varphi_\hbar = E_\hbar\varphi_\hbar + \phi_\hbar$, avec $\|\phi_\hbar\| \leq \hbar^N$. La fonction $\psi_\hbar = \hat{U}^*\varphi_\hbar$ vérifie alors

$$\hat{P}\psi_\hbar = \hat{U}^*\widehat{FN}\varphi_\hbar + O(\hbar^\infty) = E_\hbar\psi_\hbar + O(\hbar^N).$$

Autrement dit, ψ_\hbar est un \hbar^N -quasimode de l'opérateur initial \hat{P} avec la quasi-valeur propre E_\hbar .

La stratégie est toujours la même. On cherche d'abord à mettre l'opérateur initial sous une forme normale la plus sympathique possible. Ensuite, on cherche des quasimodes de la forme normale qui nous fournissent des quasimodes de l'opérateur initial.

1.3 Forme normale quasi-résonante et quasimodes

Dans tout le reste du chapitre, on considère un OPD $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$, dont le symbole $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ est un hamiltonien complètement intégrable satisfaisant à la condition de non-dégénérescence faible¹. On considère ensuite une perturbation $\hbar^{1+\kappa}\hat{K}_0$, où $\hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est un OPD auto-adjoint. C'est donc une perturbation d'ordre $\hbar^{1+\kappa}$, avec $\kappa \geq 0$.

On se donne ensuite $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ deux réels et on considère la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -décomposition en blocs de quasi-résonance construite dans la section 3.1. Le théorème E.6 nous assure que l'opérateur perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K}_0$ peut se mettre sous forme normale

$$\hat{U} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{K}_0 \right) \hat{U}^* = \widehat{FN} = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M} + O(\hbar^\infty),$$

où le symbole M_\hbar de $\hat{M} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$ est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne² auto-adjointe du symbole K_\hbar de $\hat{K} \in \hat{\Psi}_\delta^0(\mathcal{T})$, un OPD vérifiant $\hat{K} = \hat{K}_0 + O(\hbar^{1-\delta})$. La forme normale a donc une forme sympathique dans chaque bloc de résonance réduit $\hat{\mathcal{B}}_\mathcal{R}$, avec \mathcal{R} un $\hbar^{-\gamma}$ -module de résonance, puisque (à \hbar^∞ près) le symbole M_\hbar est égal à $\text{moy}(K_\hbar, \mathcal{P}_\mathcal{R})$, la moyenne de K_\hbar le long du feuilletage entier $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ associé à \mathcal{R} . En conséquence, M_\hbar est constante le long de $\mathcal{P}_\mathcal{R}$. Si on considère une résonance d'ordre n , M_\hbar ne dépend que de n variables. Notamment, dans le bloc non-résonant \mathcal{B}_0 , M_\hbar est égal à la moyenne de K_\hbar sur tout tore, c'est donc une fonction indépendante de x . C'est dans cette zone qu'il sera le plus facile de trouver des quasimodes, comme on le verra dans la section suivante.

Tout d'abord, il est intéressant d'étudier les volumes respectifs occupés par les différents blocs de quasi-résonance. Si l'hamiltonien classique complètement intégrable $H(\xi)$ était quelconque (i.e dégénéré) on ne pourrait rien dire. En effet, on peut imaginer par exemple que H est à fréquence constante, i.e la différentielle dH est constante, ce qui implique que la fonction $\Omega_k(\xi)$ est constante par rapport à ξ . Il n'existe donc qu'une seule zone de résonance qui occupe tout l'espace \mathcal{B} .

Par contre, comme le montre la proposition suivante, lorsque H est non-dégénéré au sens faible et en choisissant convenablement les exposants γ et δ , on voit que le bloc non-résonant

¹Voir section 3 sur les conditions de non-dégénérescence.

²Voir définition D.18 et proposition D.20.

devient prépondérant lorsque $\hbar \rightarrow 0$ et que les blocs de résonance occupent un volume d'autant plus petit que la résonance est d'ordre élevé. Pour décrire cela, on se donne une mesure sur \mathcal{B} et on note $\text{vol}(\mathcal{O})$ le volume d'un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$.

Proposition E.3. *Soit γ et δ tels que $\delta > d\gamma$ et soit la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -décomposition en blocs de quasi-résonance. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ un compact de volume fini. Alors pour tout $n = 1..d$, le volume occupé par le bloc des n -résonances \mathcal{B}_n^* est majoré par*

$$\text{vol}(\mathcal{B}_n^* \cap \mathcal{O}) \leq C(\mathcal{O}, n) \hbar^{n(\delta-d\gamma)},$$

où $C(\mathcal{O}, n)$ est une constante positive.

Démonstration. En effet, la condition de non-dégénérescence faible implique la proposition B.19 qui nous assure qu'il existe deux constantes positives (dépendant du compact \mathcal{O}) T et C telles que pour tout $k \neq 0$ et pour tout ξ vérifiant $\frac{\Omega_k(\xi)}{|k|} \leq T$, on a $\left| d \frac{\Omega_k(\xi)}{|k|} \right| \geq C$. Pour \hbar assez petit ($\hbar^\delta \leq T$) et pour tout $k \neq 0$, les points ξ de la zone de résonance $\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{O}$ vérifient $\left| d \frac{\Omega_k(\xi)}{|k|} \right| \geq C$ ce qui fait que le volume de cette zone est majoré par $\text{vol}(\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{O}) \leq C' \hbar^\delta$, où C' est une constante positive indépendante de k . Le volume du bloc $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{O}$ est majoré par la même quantité puisque $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{Z}_k$. Le bloc $\mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{O}$ des 1-résonances est l'union des $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{O}$ pour tous les $k \neq 0$ tels que $|k| \leq \hbar^{-\gamma}$, ce qui fait que l'on a la majoration

$$\text{vol}(\mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{O}) \leq C' \hbar^\delta \sum_{|k| \leq \hbar^{-\gamma}} \leq C'' \hbar^{\delta-d\gamma}.$$

De même, pour tout module de résonance \mathcal{R} , la variété de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$ est une sous-variété de codimension n grâce à la propriété de non-dégénérescence de H . On se convainc alors facilement que la zone de résonance $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O}$ a un volume majoré par $\text{vol}(\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O}) \leq C' \hbar^{n\delta}$, tout comme le bloc de résonance $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O}$. D'autre part, le bloc $\mathcal{B}_n^* \cap \mathcal{O}$ des n -résonances est l'union des $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O}$ pour tous les $\hbar^{-\gamma}$ -modules de résonance, i.e les modules de résonance admettant une base (e_1, \dots, e_n) composée de vecteurs de normes $|e_j| \leq \hbar^{-\gamma}$. On voit alors facilement que le volume de $\mathcal{B}_n^* \cap \mathcal{O}$ est majoré par

$$\text{vol}(\mathcal{B}_n^* \cap \mathcal{O}) \leq C' \hbar^{n\delta} \sum_{\substack{|e_1| \leq \hbar^{-\gamma} \\ \vdots \\ |e_n| \leq \hbar^{-\gamma}}} \leq C'' \hbar^{n(\delta-d\gamma)}.$$

■

La majoration est quelque peu grossière (notamment dans le cas $n = d$, où l'on aurait plutôt $\text{vol}(\mathcal{B}_d^* \cap \mathcal{O}) \leq C \hbar^{d\delta}$), mais elle nous donne une information qualitative suffisante moyennant le choix des exposants $\delta > d\gamma$

2 Fonctions de BKW-Liouville

2.1 Fonctions de BKW-Liouville

Une fonction BKW³ est une fonction $\varphi_{\hbar} \in L^2(\mathcal{T})$ qui "habite"⁴ près d'une sous variété lagrangienne de $T^*\mathcal{T}$. Dans notre contexte, les variétés lagrangiennes d'intérêt sont les tores \mathcal{T}_{ξ_0} qui définissent notre système complètement intégrable classique, i.e les tores de Liouville. Si on travaillait sur \mathbb{R}^d (au lieu du tore \mathcal{T}), on considérerait les fonctions de la forme $\varphi_{\hbar} = e^{i\frac{\xi_0(x-x_0)}{\hbar}} a_{\hbar}(x)$, où a_{\hbar} est par exemple C^∞ uniformément par rapport à \hbar . C'est le caractère d'oscillations rapides lorsque $\hbar \rightarrow 0$ de l'exponentielle qui fait que φ_{\hbar} habite près de $\xi = \xi_0$. La fonction φ_{\hbar} n'est donc pas C^∞ uniformément par rapport à \hbar , mais l'écriture BKW permet de distinguer sa partie rapidement oscillante de sa partie régulière a_{\hbar} . Par ailleurs, on pourrait très bien autoriser ξ_0 à dépendre de \hbar , et on aurait alors envie de dire que φ_{\hbar} est microlocalisé près d'un tore $\mathcal{T}_{\xi_0(\hbar)}$ qui bouge avec \hbar .

Une légère complication technique apparaît lorsque l'on travaille sur le tore du fait que l'exponentielle se doit d'être bien définie, i.e $\frac{\xi_0}{\hbar}$ doit être dans le réseau Λ^* pour tout \hbar , ce qui nous oblige dans ce cas à considérer des ξ_0 dépendant de \hbar . On va donc plutôt considérer des fonctions de la forme $\varphi_{\hbar} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} a_{\hbar}(x)$, où k_{\hbar} joue le rôle de $\frac{\xi_0}{\hbar}$. Certaines de ces fonctions peuvent être des fonctions BKW au sens habituel, par exemple s'il existe un $\xi_0 \in \mathcal{B}$ indépendant de \hbar et tel que $\hbar k_{\hbar} \rightarrow \xi_0$ lorsque $\hbar \rightarrow 0$. En particulier, si $\hbar k_{\hbar}$ tend vers 0, cela signifie que φ_{\hbar} microlocalisé près de la section nulle du cotangent $T^*\mathcal{T}$. Si par contre $\hbar k_{\hbar}$ n'a pas de limite lorsque $\hbar \rightarrow 0$, cela signifie que φ_{\hbar} n'est pas microlocalisé près d'un tore particulier. Mais si k_{\hbar} reste toujours d'ordre \hbar^{-1} , on peut quand même dire que φ_{\hbar} reste microlocalisé dans une région de taille finie.

On définit maintenant précisément la classe de fonctions que l'on va utiliser.

Définition E.4. Soit $k_{\hbar} \in \Lambda^*$ et m un réel. On définit la **classe de fonctions de BKW-Liouville** $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$ comme l'ensemble des fonctions $\varphi_{\hbar} \in L^2(\mathcal{T})$ s'écrivant

$$\varphi_{\hbar}(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}(x),$$

où la fonction $\phi_{\hbar} \in C^\infty(\mathcal{T})$ vérifie l'estimation suivante. Pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{Z}^d$, il existe une constante $C_\beta > 0$ telle que pour tout point $x \in \mathcal{T}$ et tout $\hbar \in]0, 1]$, on ait

$$|\partial_\beta^\alpha(\phi_{\hbar}(x))| \leq C_\beta \hbar^m.$$

De plus, on voit facilement que $\phi_{\hbar} \in \mathcal{L}^m(0)$.

Cette écriture permet de considérer les variables de Fourier $k \in \Lambda^*$ en prenant pour origine le point k_{\hbar} . Pour les séries de Fourier, cela correspond simplement à une translation, puisque pour tout $k \in \Lambda^*$ on a

$$\tilde{\phi}_{\hbar}(k) = \tilde{\varphi}_{\hbar}(k + k_{\hbar}).$$

2.2 Action des OPD sur les fonctions de BKW-Liouville

On va décrire l'action des OPD de la classe $\hat{\Psi}_\delta^m(\mathcal{T})$ sur les fonctions de BKW-Liouville de la classe $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$. Il est intéressant de remarquer que si \hat{P} est un OPD et φ_{\hbar} une fonction,

³Pour Brillouin, Kramers et Wentzel.

⁴On va donner une définition précise juste après.

alors par définition(s) on a

$$\begin{aligned} (\hat{P}\varphi_{\hbar})(x) &= \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} P_{\hbar}(x, \hbar k) \varphi_{\hbar}(y) \\ &= (P_{\hbar} \# \varphi_{\hbar})(x, 0), \end{aligned}$$

où $P_{\hbar} \# \varphi_{\hbar}$ est le produit de Moyal⁵ entre P_{\hbar} et la fonction φ_{\hbar} que l'on a considérée comme un symbole ne dépendant pas de ξ . Cette écriture n'est cependant pas très utile du fait que les dérivées de φ_{\hbar} ne satisfont pas aux majorations caractéristiques des classes de symboles $\Psi_{\delta}^m(\mathcal{T})$, ce qui fait que l'on ne peut pas utiliser la formule du développement asymptotique du produit de Moyal⁶. Par contre, si la fonction φ_{\hbar} est dans la classe $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, alors elle s'écrit $\varphi_{\hbar}(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}(x)$ avec ϕ_{\hbar} une fonction C^{∞} uniformément par rapport à \hbar . Toute la "non-régularité" ou la "non-uniformité de la régularité" de φ_{\hbar} se trouve dans la phase. Donc, lorsque φ_{\hbar} est dans la classe $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, l'action de \hat{P} sur φ_{\hbar} s'écrit

$$\begin{aligned} (\hat{P}\varphi_{\hbar})(x) &= \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} P_{\hbar}(x, \hbar k) e^{ik_{\hbar}(y-x_0)} \phi_{\hbar}(y) \\ &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{i(k-k_{\hbar})(x-y)} P_{\hbar}(x, \hbar k) \phi_{\hbar}(y), \end{aligned}$$

où l'on insère $e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} e^{-ik_{\hbar}(x-x_0)}$. En effectuant le changement d'indice $k \rightarrow k + k_{\hbar}$, on trouve

$$\begin{aligned} (\hat{P}\varphi_{\hbar})(x) &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \int_{\mathcal{T}} dy \sum_{k \in \Lambda^*} e^{ik(x-y)} P_{\hbar}(x, \hbar k_{\hbar} + \hbar k) \phi_{\hbar}(y) \\ &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} (P_{\hbar} \# \phi_{\hbar})(x, k_{\hbar}). \end{aligned}$$

Ceci est déjà nettement plus intéressant car ϕ_{\hbar} satisfait à des majorations de type symbole, ce qui va nous permettre d'utiliser directement la formule asymptotique du produit de Moyal donnée dans le théorème C.19. En effet, la fonction ϕ_{\hbar} est dans la classe $\mathcal{L}^m(0)$ qui n'est autre que l'ensemble des symboles dans la classe $\Psi_0^m(\mathcal{T})$ et indépendants de ξ . On a donc le résultat suivant.

Théorème E.5 (Action d'un OPD sur une fonction BKW-Liouville). Soit $\delta \geq 0$ un réel et \hat{P} un OPD de la classe $\hat{\Psi}_{\delta}^0(\mathcal{T})$ de symbole P_{\hbar} . Soit m un réel et $\varphi_{\hbar}(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}(x)$ une fonction BKW-Liouville dans la classe $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, avec $k_{\hbar} \in \Lambda^*$. Alors la fonction $\hat{P}\varphi_{\hbar}$ est aussi dans la classe $\mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, i.e

$$(\hat{P}\varphi_{\hbar})(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \psi_{\hbar}(x),$$

avec $\psi_{\hbar}(x) \in \mathcal{L}^m(0)$. De plus, la fonction ψ_{\hbar} admet le développement asymptotique suivant

$$\psi_{\hbar} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\hbar),$$

⁵Définition C.18.

⁶Théorème C.19 de composition.

où les $\psi_j \in \mathcal{L}^{m+j(1-\delta)}(0)$ sont donnés par

$$\psi_j(x, \hbar) = \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^j \partial_\xi^\gamma P_\hbar(x, \hbar k_\hbar) \partial_x^\gamma \phi_\hbar(x)$$

et où l'équivalence asymptotique \sim signifie que pour tout entier $J > 0$, on a

$$\psi_\hbar - \sum_{j=0}^{J-1} \psi_j(\hbar) \in \mathcal{L}^{m+J(1-\delta)}(0).$$

3 Quasimodes non-résonants et valeurs propres stables

3.1 Quasimodes non-résonants

On considère un hamiltonien $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ complètement intégrable et une perturbation $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^{1+\kappa}(\mathcal{T})$, avec $\kappa > 0$. On se fixe des exposants $\gamma > 0$, $0 < \delta < 1$ vérifiant $2\delta \leq \kappa$. On considère la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -décomposition en blocs de quasi-résonance et la forme normale quasi-résonante du théorème D.22. Le théorème suivant donne la construction de \hbar^∞ -quasimodes associés au bloc non-résonant \mathcal{B}_0 .

Théorème E.6 (Quasimodes non-résonants). Soit $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ le quantifié d'un hamiltonien complètement intégrable $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ non-dégénéré et soit $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_\delta^{1+\kappa}(\mathcal{T})$ une perturbation auto-adjointe de symbole K_0 . Alors, pour toute famille $k_\hbar \in \Lambda^*$ telle que $\hbar k_\hbar$ est inclus dans le bloc non-résonant \mathcal{B}_0 , la fonction $\varphi_\hbar = e^{ik_\hbar(x-x_0)}$ est un \hbar^∞ -quasimode de la forme normale \widehat{FN}

$$\left\| \left(\widehat{FN} - E_\hbar \right) \varphi_\hbar \right\| \leq \hbar^\infty$$

avec la quasi-valeur propre

$$E_\hbar = H(\hbar k_\hbar) + \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_\hbar \rangle \rangle (\hbar k_\hbar).$$

Le symbole $\langle \langle K_\hbar \rangle \rangle(\xi)$ indépendant de x est la moyenne sur tout le tore du symbole K_\hbar apparaissant dans la forme normale du théorème D.22 et qui vérifie $K_\hbar - K_0 \in \Psi_\delta^{1-\delta}(\mathcal{T})$.

Démonstration. En effet, d'après le théorème D.22, la forme normale est $\widehat{FN} = \hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M} + O(\hbar^\infty)$, où M_\hbar est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne⁷ auto-adjointe du symbole K_\hbar . Cela signifie notamment qu'en tout point ξ du bloc non-résonant \mathcal{B}_0 , on a $M_\hbar = \langle \langle K_\hbar \rangle \rangle + O(\hbar^\infty)$. D'autre part, on sait d'après la proposition C.11 que l'action de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}$ sur une exponentielle $e^{ik_\hbar(x-x_0)}$ donne simplement

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M} \right) \left(e^{ik_\hbar(x-x_0)} \right) = \left(H(\hbar k_\hbar) + \hbar^{1+\kappa} M_\hbar(x, \hbar k_\hbar) \right) e^{ik_\hbar(x-x_0)}.$$

Si $\hbar k_\hbar$ est inclus dans le bloc \mathcal{B}_0 pour tout \hbar , alors on a

$$M_\hbar(x, \hbar k_\hbar) = \langle \langle K_\hbar \rangle \rangle(x, \hbar k_\hbar) + O(\hbar^\infty).$$

■

⁷Voir définition D.18 et proposition D.20.

Ce théorème prend tout son intérêt lorsqu'on choisit les paramètres δ et γ vérifiant $d\gamma < \delta$ puisque dans ce cas, la proposition E.3 nous assure que le bloc \mathcal{B}_0 occupe majoritairement le volume de \mathcal{B} lorsque $\hbar \rightarrow 0$. En effet, par définition, le bloc \mathcal{B}_0 est donné par $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{Z}_1^*$ où \mathcal{Z}_1^* est la zone des 1-résonances dont le volume vérifie

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{Z}_1^* \cap \mathcal{O})}{\text{vol}(\mathcal{O})} \leq C(\mathcal{O}) \hbar^{\delta-d\gamma},$$

avec $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ un compact.

Le théorème précédent nous donne donc accès à un grand nombre de quasi-valeurs propres, dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. De plus, elles proviennent de \hbar^∞ -quasimodes ce qui implique d'après la proposition E.2 la présence de spectre à une distance \hbar^∞ de ces quasi-valeurs propres.

3.2 Valeurs propres stables

On rappelle que l'opérateur non perturbé \hat{H} a un spectre relativement simple donné par l'ensemble des valeurs de $H(\hbar k)$ avec k variant dans Λ^* . D'autre part, si l'on choisit δ et γ vérifiant $d\gamma < \delta$, le théorème précédent nous prédit l'existence d'un grand nombre de valeurs propres de l'opérateur perturbé $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$ situées à une distance \hbar^∞ des quasi-valeurs propres

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle (\hbar k_{\hbar}),$$

pour tout k_{\hbar} tel que $\hbar k_{\hbar} \in \mathcal{B}_0$.

L'expression de ces quasi-valeurs propres motive l'idée d'associer à chacune d'elle une valeur propre non perturbée, autrement dit de suivre l'évolution des valeurs propres lorsqu'on "allume" la perturbation. Pour cela, il est agréable de considérer la perturbation de la forme $\varepsilon \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$ et de suivre l'évolution des valeurs propres de

$$\hat{H} + \varepsilon \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$$

lorsqu'on fait varier ε depuis 0 jusqu'à 1. On se convaincra facilement que "tout" ce qu'on a fait jusqu'ici fonctionne aussi bien uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0, 1]$. A savoir, les règles de calcul symbolique, les formes normales... On se convaincra aussi que la forme normale du théorème D.22 est

$$\widehat{FN} = \hat{H} + \varepsilon \hbar^{1+\kappa} \hat{M} + O(\hbar^\infty),$$

où M_{\hbar} est la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^\delta)$ -moyenne⁸ auto-adjointe du symbole K_{\hbar} et où toutes les estimations sont uniformes par rapport à ε . Notamment, concernant la partie non-résonante, le théorème E.6 nous assure que $\varphi_{\hbar} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)}$ est un \hbar^∞ -quasimode de la forme normale \widehat{FN} avec la quasi-valeur propre

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \varepsilon \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle (\hbar k_{\hbar}).$$

On peut donc suivre l'évolution de ces quasi-valeurs propres lorsque ε varie de 0 à 1. La précision \hbar^∞ n'est cependant intéressante que si elle permet de "résoudre le spectre", i.e de distinguer les valeurs propres proches. En général, il peut y avoir des dégénérescences qui rendent impossible cette résolution, néanmoins on peut le faire pour les valeurs propres associées au bloc non-résonant \mathcal{B}_0 grâce à la remarque suivante.

⁸Voir définition D.18 et proposition D.20.

Proposition E.7. *Supposons que δ et γ vérifient $0 < d\gamma < \delta < \frac{d}{d+1}$ et $\delta \leq \kappa$. Soit k_{\hbar} et k'_{\hbar} vérifiant que $\hbar k_{\hbar} \in \mathcal{B}_0$ et $\hbar k'_{\hbar} \in \mathcal{B}_0$, et à une distance $l = k'_0 - k_0$ telle que $|l| \leq \hbar^{-\gamma}$. Alors,*

$$\left| H\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - H\left(\hbar k_{\hbar}\right) \right| \geq c\hbar^{1+\delta} |l|,$$

et

$$\left| E_{\hbar}\left(k'_{\hbar}\right) - E_{\hbar}\left(k_{\hbar}\right) \right| \geq c\hbar^{1+\delta} |l|,$$

où c est une constante positive

Démonstration. En effectuant un développement de Taylor de la fonction H , on obtient

$$H\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - H\left(\hbar k_{\hbar}\right) = \hbar dH_{\hbar k_{\hbar}}(l) + O\left(\hbar^2 |l|^2\right).$$

D'autre part, le fait que $\hbar k_{\hbar} \in \mathcal{B}_0$ signifie que pour tout $l \in \Lambda^*$ vérifiant $|l| \leq \hbar^{-\gamma}$, on a $|dH_{\hbar k_{\hbar}}(l)| \geq \hbar^{\delta} |l|$, ce qui fait que

$$\begin{aligned} \left| H\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - H\left(\hbar k_{\hbar}\right) \right| &\geq \hbar^{1+\delta} |l| + O\left(\hbar^2 |l|^2\right) \\ &\geq \hbar^{1+\delta} |l| \left(1 + O\left(\hbar^{1-\delta} |l|\right)\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'hypothèse sur $|l|$ fait que $\hbar^{1-\delta} |l| \leq \hbar^{1-\delta-\gamma}$. De plus, compte tenu des hypothèses sur γ, δ et $|l|$, on a $\gamma + \delta < \delta \frac{d+1}{d} < 1$, ce qui fait que $1 - \gamma - \delta > 0$ et donc que $\hbar^{1-\delta} |l| \ll 1$. En conséquence, il existe une constante $c < 1$ positive telle que $|1 + O(\hbar^{1-\delta} |l|)| \geq c$, ce qui prouve l'assertion.

D'autre part, l'écart entre les quasi-valeurs propres est donné par

$$\begin{aligned} E_{\hbar}\left(k'_{\hbar}\right) - E_{\hbar}\left(k_{\hbar}\right) &= H\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - H\left(\hbar k_{\hbar}\right) + \varepsilon \hbar^{1+\kappa} \left(\langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - \langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle\left(\hbar k_{\hbar}\right)\right) \\ &= H\left(\hbar k'_{\hbar}\right) - H\left(\hbar k_{\hbar}\right) + \varepsilon \hbar^{1+\kappa} O\left(\hbar^{1-\delta} |l|\right), \end{aligned}$$

où l'on a fait un développement de Taylor de la fonction $\langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle$ et utilisé le fait que $K_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$. Ceci montre que l'on a

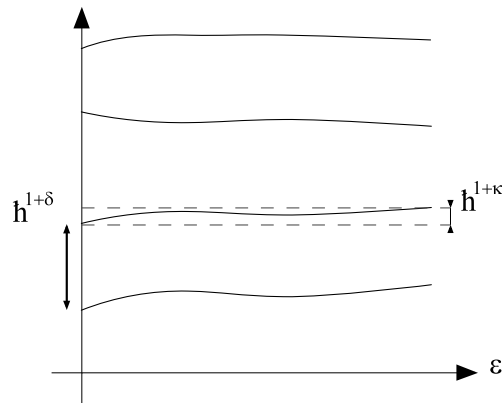
$$\left| E_{\hbar}\left(k'_{\hbar}\right) - E_{\hbar}\left(k_{\hbar}\right) \right| \geq c\hbar^{1+\delta} |l| \left(1 + O\left(\hbar^{1+\kappa-2\delta}\right)\right).$$

De plus, l'hypothèse $\kappa \geq \delta$, implique que $1 + \kappa - 2\delta \geq 1 - \delta > 1 - \delta - \gamma > 0$, ce qui fait que $\hbar^{1+\kappa-2\delta} \ll 1$ et donc que

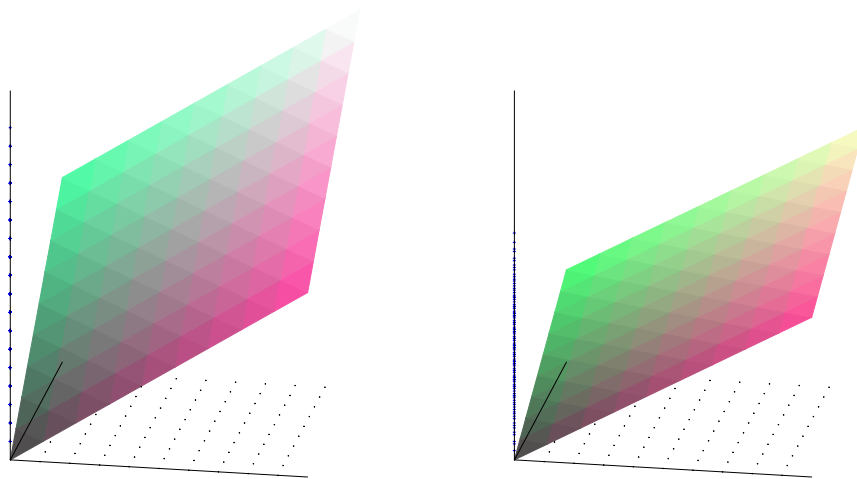
$$\left| E_{\hbar}\left(k'_{\hbar}\right) - E_{\hbar}\left(k_{\hbar}\right) \right| \geq c' \hbar^{1+\delta} |l|,$$

où $c' < c$ est une constante positive. ■

Cette proposition signifie que les quasi-valeurs propres non-résonantes E_{\hbar} associées à des k_{\hbar} proches sont séparées d'au moins $\hbar^{1+\delta}$, ce qui est beaucoup plus grand que la résolution \hbar^{∞} . D'autre part, les valeurs propres non-perturbées associées à ce bloc \mathcal{B}_0 sont aussi séparées de $\hbar^{1+\delta}$ et sont donc peu modifiées et restent bien séparées lorsque l'on ajoute la perturbation, comme on l'a représenté schématiquement sur la figure ci-dessous.



Il faut noter que cela ne signifie pas que les valeurs propres sont non-dégénérées. En effet, cela ne s'applique d'une part que pour les quasi-valeurs propres associées au bloc non-résonant et d'autre part que pour les quasimodes associés à des k_0 "proches". Le bloc non-résonant est justement l'ensemble des points ξ qui vérifient une sorte de condition diophantienne (pour les "petits" coefficients de Fourier). C'est cette propriété qui fait que le noyau de la différentielle dH ne contient pas de "petits" sous-réseaux de Λ^* (ce qui donnerait des dégénérescences). Pour illustrer cet effet, on a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction H en dimension $d = 2$, le réseau de taille \hbar , ainsi que l'image par H de ce réseau sur l'axe vertical. A gauche, on s'est placé près d'un point résonant ($dH = (1, 1)$) et à droite près d'un point non résonant ($dH = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$). Sur chacun des dessins, on a tracé 100 valeurs propres qui sont réparties de manière nettement plus uniforme dans le cas non résonant.



Ce résultat est tout à fait comparable à celui de l'article [33] dans lequel les auteurs étudient le spectre de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V(x)$ sur \mathbb{R}^d , avec un potentiel $V(x)$ périodique. Le contexte est quelque peu différent puisque d'une part la théorie sur \mathbb{R}^d avec potentiel périodique fait intervenir la théorie de Floquet, ce qui n'est pas le cas dans notre contexte. D'autre part, il n'y a pas de petit paramètre, mais on peut néanmoins faire l'analogie en utilisant le "dictionnaire habituel", *limite grandes énergies* \leftrightarrow *limite* $\hbar \rightarrow 0$. Ces auteurs montrent qu'une grande partie des valeurs propres de l'opérateur "non-perturbé" $-\Delta$ sont *stables* sous la perturbation $V(x)$, dans la mesure où elles sont peu modifiées après l'ajout de

la perturbation et où elles continuent d'être bien séparées. De plus, ces valeurs propres sont modifiées à l'ordre principal par la moyenne du potentiel.

Notre résultat est plus général⁹ en ce qu'il s'applique à des OPD complètement intégrables quelconques et pour une perturbation quelconque (pas seulement un potentiel). De plus, on contrôle l'influence de l'intensité de la perturbation grâce au paramètre κ .

4 Quasimodes résonants

On souhaite maintenant construire des quasimodes associés à la région complémentaire de \mathcal{B}_0 . Pour tirer partie de la forme normale du théorème D.22, il faut construire des quasimodes qui habitent dans un bloc de quasi-résonance $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, puisque dans ces blocs le symbole M_{\hbar} a une forme simple : il est constant le long du feuilletage $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ associé au module de résonance \mathcal{R} . Si \mathcal{R} est de dimension $r \geq 1$, cela signifie que la variété de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$ est de codimension r dans \mathcal{B} et contient des tores qui ont r relations de résonance, i.e sur lesquels la dynamique est confinée à des sous-tores de dimension $d - r$. Le feuilletage $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ étant de dimension $d - r$, le symbole M_{\hbar} ne dépend en fait que de r variables transverses. La recherche de quasimodes se ramène en quelque sorte à un problème en dimension r .

On considère donc la forme normale $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$ du théorème D.22. Pour tout module de résonance \mathcal{R} donné, notons $\langle K_{\hbar} \rangle = \text{moy}(K_{\hbar}, \mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ la moyenne de K_{\hbar} le long du feuilletage entier $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ associé à \mathcal{R} . On sait que le symbole M_{\hbar} est égal à $\langle K_{\hbar} \rangle$ en tout point du bloc $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$.

On va construire des quasimodes de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\langle K_{\hbar} \rangle$ ayant la propriété d'être dans la classe $\mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ des fonctions BKW-Liouville, avec $k_{\hbar} \in \Lambda^*$ vérifiant $\hbar k_{\hbar} \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ pour tout \hbar , ce qui va nous fournir des quasimodes de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition E.8. *Soient $\delta \geq 0$ une constante réelle et soit $k_{\hbar} \in \Lambda^*$ tel que $\hbar k_{\hbar}$ se trouve dans le bloc $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ pour tout \hbar . Si $\varphi_{\hbar} \in \mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ est un \hbar^N -quasimode de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\langle K_{\hbar} \rangle$, alors c'est aussi un \hbar^N -quasimode de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\hat{M}$.*

Démonstration. D'après le théorème D.22 de forme normale, on a $M_{\hbar} = \langle K_{\hbar} \rangle + R_{\hbar}$, où $R_{\hbar} \in \Psi_{\delta}^0(\mathcal{T})$ vérifie que $\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} R_{\hbar}(x, \hbar k_{\hbar}) = O(\hbar^{\infty})$ pour tout x et tous multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, puisque par hypothèse $\hbar k_{\hbar} \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ pour tout \hbar . D'autre part, si l'on note $\varphi_{\hbar}(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}(x)$, avec $\phi_{\hbar} \in \mathcal{L}^0(0)$, le théorème E.5 nous assure que pour tout J , on a

$$\left(\hat{M} - \langle K_{\hbar} \rangle \right) (\varphi_{\hbar}) - e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \sum_{|\gamma| \leq J-1} \frac{1}{\gamma!} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{|\gamma|} \partial_{\xi}^{\gamma} R_{\hbar}(x, \hbar k_{\hbar}) \partial_x^{\gamma} \phi_{\hbar}(x) \in \mathcal{L}^{J(1-\delta)}(k_{\hbar}).$$

La propriété satisfaite par R_{\hbar} fait que $\partial_{\xi}^{\gamma} R_{\hbar}(x, \hbar k_{\hbar}) \in \mathcal{L}^{\infty}(0)$ comme fonction de la variable x . La multiplication par $\partial_x^{\gamma} \phi_{\hbar}(x) \in \mathcal{L}^0(0)$ fait simplement que $\partial_{\xi}^{\gamma} R_{\hbar}(x, \hbar k_{\hbar}) \partial_x^{\gamma} \phi_{\hbar}(x) \in \mathcal{L}^{\infty}(0)$ pour tout γ et tout J . Cela prouve que

$$\left(\hat{M} - \langle K_{\hbar} \rangle \right) \varphi_{\hbar} \in \mathcal{L}^{\infty}(k_{\hbar}).$$

En conséquence, si $\varphi_{\hbar} \in \mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ est un \hbar^N -quasimode de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa}\langle K_{\hbar} \rangle$ avec la quasi-valeur

⁹Moyennant ce qu'on a dit sur le fait que les deux situations ne sont pas tout à fait équivalentes.

propre λ_{\hbar} , alors on a

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M} - \lambda_{\hbar} \right) \varphi_{\hbar} \right\| &\leq \left\| \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} - \lambda_{\hbar} \right) \varphi_{\hbar} \right\| + \left\| \hbar^{1+\kappa} \left(\hat{M} - \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \varphi_{\hbar} \right\| \\ &\leq O(\hbar^N) + O(\hbar^{\infty}), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\varphi_{\hbar} \in \mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ est aussi un \hbar^N -quasimode de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{M}$ avec la même quasi-valeur propre λ_{\hbar} . ■

Pour chaque bloc de quasi-résonance $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, on voudrait chercher des quasimodes φ_{\hbar} de l'opérateur $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$ en utilisant l'expression asymptotique de l'action des OPD sur les fonctions BKW. Cette expression est donnée, pour l'opérateur qui nous intéresse, dans la proposition suivante, où un reste de la forme $O(\hbar^{\alpha})$ signifie un élément de la classe $\mathcal{L}^{\alpha}(k_{\hbar})$.

Proposition E.9. *Pour tout module de résonance \mathcal{R} , on note $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ le feuilletage entier associé et $\langle K_{\hbar} \rangle = \text{moy}(K_{\hbar}, \mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ la moyenne de K_{\hbar} le long de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. Pour toute fonction BKW-Liouville $\varphi_{\hbar}(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}(x) \in \mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, on a*

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) (\varphi_{\hbar}) = e^{ik_{\hbar_0}(x-x_0)} \psi_{\hbar},$$

où la fonction $\psi_{\hbar} \in \mathcal{L}^m(0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_{\hbar}(x) &= H(\hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + \frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x) + \frac{\hbar^2}{2} H''_{\hbar k_{\hbar}} \left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i} \right) (\phi_{\hbar}) \\ &\quad + \hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle(x, \hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + O(\hbar^3) + O(\hbar^{2+\kappa-\delta}). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème E.5, le développement à l'ordre 3 de $\hat{H}\varphi_{\hbar}$ est

$$\begin{aligned} \hat{H}(\varphi_{\hbar})(x) &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(H(\hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + \frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x) \right. \\ &\quad \left. - \hbar^2 \sum_{|\gamma|=2} \frac{1}{\gamma!} \partial_{\xi}^{\beta} H(\hbar k_{\hbar}) \partial_x^{\beta} \phi_{\hbar}(x) \right) + O(\hbar^{m+3}), \end{aligned}$$

où $O(\hbar^{m+3})$ signifie un élément de $\mathcal{L}^{m+3}(\hbar k_{\hbar})$. De même, le développement à l'ordre 1 de $\widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \varphi_{\hbar}$ est simplement

$$\widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}(\varphi_{\hbar})(x) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \langle K_{\hbar} \rangle(x, \hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + O(\hbar^{m+1-\delta}).$$

Le théorème E.5 nous assure donc que l'on a

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) (\varphi_{\hbar}) = e^{ik_{\hbar_0}(x-x_0)} \psi_{\hbar},$$

où la fonction $\psi_{\hbar} \in \mathcal{L}^m(0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_{\hbar}(x) &= H(\hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + \frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x) + \frac{\hbar^2}{2} H''_{\hbar k_{\hbar}} \left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i} \right) (\phi_{\hbar}) \\ &\quad + \hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle(x, \hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x) + O(\hbar^{m+3}) + O(\hbar^{m+2+\kappa-\delta}). \end{aligned}$$

■

Il convient de s'arrêter quelques instants sur l'expression du développement asymptotique de la proposition précédente, afin de considérer l'ordre de grandeur de chacun des termes, en supposant¹⁰ que ϕ_{\hbar} est dans la classe $\mathcal{L}^0(0)$.

- Tout d'abord, le premier terme $H(\hbar k_{\hbar})$ est simplement la multiplication par une constante.
- Le troisième terme fait intervenir la hessienne de $H(\xi)$ au point $\hbar k_{\hbar}$. Il faut remarquer que $H''_{\hbar k_{\hbar}}\left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i}\right)$ ne définit pas forcément un laplacien pour deux raisons. D'abord, la condition de non-dégénérescence faible n'assure pas que H'' soit non-dégénérée en tant que forme bilinéaire symétrique, ce qui veut dire que H'' ne définit pas forcément une métrique. D'autre part, même si H'' est une métrique, i.e si H satisfait à la condition de non-dégénérescence de Kolmogorov, elle n'est pas forcément définie positive. Cela dit, le terme $\frac{\hbar^2}{2} H''_{\hbar k_{\hbar}}\left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i}\right) \phi_{\hbar}$ est d'ordre \hbar^2 .
- Le deuxième terme fait intervenir la fonction $dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x)$. Si on cherche une fonction ϕ_{\hbar} constante le long du feuilletage $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, sa série de Fourier $\tilde{\phi}_{\hbar}$ sera non-nulle seulement pour les $k \in \mathcal{R}$, ce qui fait que l'on devra considérer la fonction $\Omega_k(\hbar k_{\hbar}) = dH_{\hbar k_{\hbar}}(k)$ pour tout $k \in \mathcal{R}$. Si la fonction φ_{\hbar} vit très près de la variété de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$, i.e si $\hbar k_{\hbar}$ est à distance \hbar^1 de $\Sigma_{\mathcal{R}}$, cela signifie que $\Omega_k(\hbar k_{\hbar})$ est d'ordre \hbar^1 pour tout $k \in \mathcal{R}$, ce qui fait que le terme $\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x)$ est d'ordre \hbar^2 . C'est dans ce cas un terme du même ordre que le terme avec la hessienne.
- Le quatrième terme est d'ordre $\hbar^{1+\kappa}$ et son influence varie évidemment avec κ .

Pour construire des quasimodes de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$ avec des fonctions ϕ_{\hbar} dans la classe $\mathcal{L}^m(0)$ et constante le long du feuilletage $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, on aimerait pouvoir utiliser un procédé récursif basé sur la formule asymptotique de la proposition E.9. Pour cela, il serait souhaitable que le terme $\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x)$ soit dominant par rapport au terme $\frac{\hbar^2}{2} H''_{\hbar k_{\hbar}}\left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i}\right) \phi_{\hbar}$, dans la mesure où il donnerait une équation de type transport (dérivée première), plutôt que laplacien (dérivée seconde). On vient justement d'expliquer que l'on doit pour cela demander que, pour tout $k \in \mathcal{R}$, $\Omega_k(\hbar k_{\hbar})$ soit d'ordre $\hbar^{1-\mu}$, avec $\mu > 0$. Une condition nécessaire pour avoir cette propriété est que $\hbar k_{\hbar}$ soit à distance $\hbar^{1-\mu}$ de $\Sigma_{\mathcal{R}}$, mais ce n'est pas la condition suffisante, sauf lorsque \mathcal{R} est de dimension 1.

4.1 Quasimodes mono-résonants

On considère un module de résonance \mathcal{R} de dimension 1 et on s'intéresse au bloc de résonance associé $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$. La variété de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$ est de codimension 1 dans \mathcal{B} et contient les tores qui n'ont qu'une relation de résonance, i.e sur lesquels la dynamique est confinée à des sous-tores de dimension $d - 1$. La perturbation moyennée $\widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} = \text{moy}(K_{\hbar}, \mathcal{P}_{\mathcal{R}})$ ne dépend en fait que d'une variable transverse et la recherche de quasimodes se ramène en quelque sorte à un problème en dimension 1 que l'on pourra résoudre.

Compte tenu de la discussion du paragraphe précédent, il va s'agir de quasimodes qui habitent dans le bloc de quasi-résonance $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$, mais qui restent quand même "éloignés" de la surface de résonance $\Sigma_{\mathcal{R}}$. On contrôle cette propriété en cherchant les quasimodes dans

¹⁰L'analyse pour le cas où $\phi_{\hbar} \in \mathcal{L}^m(0)$ est strictement la même.

la classe $\mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ des fonctions de BKW-Liouville avec $\hbar k_{\hbar}$ qui vérifie $\left| \frac{\Omega_k}{k} \right| \sim \hbar^{1-\mu}$ pour tout $k \in \mathcal{R}$. En imposant que $\mu > 0$, on s'assure que l'on reste "éloigné" de $\Sigma_{\mathcal{R}}$, et en imposant que $1 - \mu > \delta$, on s'assure que l'on reste dans la zone $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$. En résumé, on cherche des quasimodes qui sont microlocalisés à une distance de la surface $\Sigma_{\mathcal{R}}$ vérifiant $\hbar^1 \ll \text{dist} \ll \hbar^{\delta}$. De plus, afin de s'assurer que le terme $\hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle (x, \hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}(x)$ dans la proposition E.9 soit plus petit que le terme de transport $\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}(x)$ qui est d'ordre $\hbar^{2-\mu}$, on demandera que $\mu + \kappa > 1$.

Théorème E.10 (Quasimodes mono-résonants). Soit $\hat{H} \in \hat{\Psi}^0(\mathcal{T})$ le quantifié d'un hamiltonien complètement intégrable $H(\xi) \in \Psi^0(\mathcal{T})$ non-dégénéré et soit $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_{\delta}^{1+\kappa}(\mathcal{T})$ une perturbation auto-adjointe de symbole K_0 . Soit γ et δ tels que $\delta > d\gamma$ et soit la $(\hbar^{-\gamma}, \hbar^{\delta})$ -décomposition en blocs de quasi-résonance.

Pour tout module de résonance \mathcal{R} , on note \mathcal{P} le feuilletage entier associé et $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ le bloc de quasi-résonance réduit associé. Pour tout réel μ vérifiant

$$\begin{cases} \mu < 1 - \delta \\ \mu > 0 \\ \mu > 1 - \kappa \end{cases}$$

et tout $k_{\hbar} \in \Lambda^*$ inclus dans le bloc $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ pour tout \hbar et vérifiant $\left| \frac{\Omega_k(\hbar k_{\hbar})}{k} \right| \sim \hbar^{1-\mu}$ pour tout $k \in \mathcal{R}$, il existe une fonction BKW-Liouville $\varphi_{\hbar} \in \mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ constante le long de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ et qui est un \hbar^{∞} -quasimode de la forme normale \widehat{FN}

$$\left\| \left(\widehat{FN} - E_{\hbar} \right) \varphi_{\hbar} \right\| \leq \hbar^{\infty},$$

avec les propriétés suivantes :

- La quasimode admet un développement asymptotique de la forme suivante

$$\varphi_{\hbar} \sim e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{\hbar}^{(n)} \right)$$

avec $\phi_{\hbar}^{(n)} \in \mathcal{L}^{n\nu}(0)$.

- La quasi-valeur propre E_{\hbar} admet un développement asymptotique de la forme suivante

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle (\hbar k_{\hbar}) + \sum_{n=2}^{\infty} E_{\hbar}^{(n)},$$

avec $E_{\hbar}^{(n)} = O(\hbar^{1+\kappa+(n-1)\nu})$.

- Le symbole K_{\hbar} est celui qui apparaît dans la forme normale du théorème D.22 et qui vérifie $K_{\hbar} - K_0 \in \Psi_{\delta}^{1-\delta}(\mathcal{T})$.
- La double moyenne $\langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle$ est la moyenne sur tout le tore.
- Le paramètre $\nu > 0$ est donné par

$$\nu = \min(\mu + \kappa - 1, \mu).$$

Démonstration. On cherche le quasimode φ_{\hbar} parmi les fonctions de la classe $\mathcal{L}^0(k_{\hbar})$. Par hypothèse, $k_{\hbar} \in \Lambda^*$ reste dans le bloc $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}$ et la proposition E.8 nous assure alors que l'on peut chercher φ_{\hbar} comme un quasimode de l'opérateur $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$. On va construire ce quasimode par récurrence en commençant par remarquer que, d'après la proposition C.11, l'action de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$ sur l'exponentielle $e^{ik_{\hbar}(x-x_0)}$ est simplement

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \right) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(E_{\hbar}^{(0)} + \hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle (x, \hbar k_{\hbar}) \right),$$

où $E_{\hbar}^{(0)} = H(\hbar k_{\hbar})$. La fonction $e^{ik_{\hbar}(x-x_0)}$ est une fonction $\varphi_{\hbar}^{(0)}$ de la classe $\mathcal{L}^0(k_{\hbar})$ avec simplement $\phi_{\hbar}^{(0)} = 1$ qui est évidemment constante le long de \mathcal{P}_R . La fonction $\varphi_{\hbar}^{(0)} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}^{(0)}$ est donc un $\hbar^{\kappa+1}$ -quasimode avec la quasi-valeur propre $E_{\hbar}^{(0)}$. On cherche maintenant une fonction $\varphi_{\hbar}^{(1)} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \phi_{\hbar}^{(1)} \in \mathcal{L}^m(k_{\hbar})$, avec un certain $m > 0$, telle que la fonction $\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)}$ soit un quasimode d'ordre supérieur. D'après la proposition E.9, l'action de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$ sur $\varphi_{\hbar}^{(1)}$ est

$$\begin{aligned} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(1)} \right) &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(H(\hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}^{(1)}(x) + \frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}^{(1)}(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + O(\hbar^{m+2}) + O(\hbar^{m+1+\kappa}) \right), \end{aligned}$$

où le reste en $O(\hbar^{m+2})$ provient du terme avec la hessienne $\frac{\hbar^2}{2} H''_{\hbar k_{\hbar}} \left(\frac{\nabla}{i}, \frac{\nabla}{i} \right) (\phi_{\hbar})$ et le reste en $O(\hbar^{m+1+\kappa})$ provient du terme $\hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle (x, \hbar k_{\hbar}) \phi_{\hbar}^{(1)}(x)$. L'action de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}$ sur $\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)}$ est donc

$$\begin{aligned} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) &= e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}^{(1)}(x) + \hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle (x, \hbar k_{\hbar}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + E_{\hbar}^{(0)} \left(\varphi_{\hbar}^{(0)}(x) + \varphi_{\hbar}^{(1)}(x) \right) + O(\hbar^{m+2}) + O(\hbar^{m+1+\kappa}) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

On veut trouver $\varphi_{\hbar}^{(1)}$ et $E_{\hbar}^{(1)}$ tels que

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) = \left(E_{\hbar}^{(0)} + E_{\hbar}^{(1)} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)}(x) + \varphi_{\hbar}^{(1)}(x) \right) + R_{\hbar}^{(1)},$$

où le reste $R_{\hbar}^{(1)}$ est d'ordre plus petit que $\hbar^{1+\kappa}$. Pour cela, on essaie de résoudre l'équation

$$\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}^{(1)}(x) + \hbar^{1+\kappa} \langle K_{\hbar} \rangle (x, \hbar k_{\hbar}) = E_{\hbar}^{(1)}. \quad (\text{E.2})$$

En Fourier, cela donne

$$\hbar dH_{\hbar k_{\hbar}}(k) \tilde{\phi}_{\hbar}^{(1)}(k) + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}(k, \hbar k_{\hbar}) = 0 \quad (\text{E.3})$$

pour tout $k \in \mathcal{R}$ non-nul, et simplement $\hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}(0, \hbar k_{\hbar}) = E_{\hbar}^{(1)}$ pour $k = 0$. Pour les $k \notin \mathcal{R}$, l'équation est automatiquement satisfaite, du fait que à la fois $\phi_{\hbar}^{(1)}(x)$ et $\langle K_{\hbar} \rangle(x, \hbar k_{\hbar})$ sont des fonctions constante le long de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, et donc leurs séries de Fourier sont nulles pour

tout $k \notin \mathcal{R}$. On a donc $E_{\hbar}^{(1)} = \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle (\hbar k_{\hbar})$, où la double moyenne $\langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle$ signifie la moyenne sur tout le tore. Ensuite, on peut résoudre l'équation E.3 grâce au fait que $\Omega_k(\hbar k_{\hbar}) = dH_{\hbar k_{\hbar}}(k)$ est d'ordre $\hbar^{1-\mu}$ et donc différent de 0 pour tout \hbar . On peut effectuer la division qui donne

$$\tilde{\phi}_{\hbar}^{(1)}(k) = \hbar^{\kappa} \frac{\widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle}(k, \hbar k_{\hbar})}{\Omega_k(\hbar k_{\hbar})}$$

et l'estimation sur $\Omega_k(\hbar k_{\hbar})$ ainsi que le fait que $\widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle}(k, \hbar k_{\hbar})$ est à décroissance rapide en k , font que l'on a l'estimation Sobolev $\left\| \phi_{\hbar}^{(1)} \right\|_{H^s} \leq \hbar^{\kappa+\mu-1}$ pour tout s . Cela signifie que toutes les dérivées de $\phi_{\hbar}^{(1)}$ sont $O(\hbar^{\kappa+\mu-1})$ et donc que $\phi_{\hbar}^{(1)}$ est dans la classe $\mathcal{L}^{\kappa+\mu-1}(0)$. Ceci permet donc de résoudre l'équation E.2 avec $m = \kappa + \mu - 1$. L'équation E.1 donne alors

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) = E_{\hbar}^{(0)} \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) + E_{\hbar}^{(1)} \varphi_{\hbar}^{(0)} + O(\hbar^{\kappa+\mu+1}) + O(\hbar^{\kappa+\mu-1+1+\kappa}),$$

puisque $\phi_{\hbar}^{(0)} = 1$. Si on utilise le fait que les restes vérifient

$$\hbar^{\kappa+\mu+1} \leq \hbar^{1+\kappa+\nu} \text{ et } \hbar^{\kappa+\mu-1+1+\kappa} \leq \hbar^{1+\kappa+\nu}$$

et le fait que $E_{\hbar}^{(1)} \phi_{\hbar}^{(1)}$ est $O(\hbar^{1+\kappa} \hbar^{\kappa+\mu-1}) \leq O(\hbar^{1+\kappa+\nu})$, alors on a

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) = \left(E_{\hbar}^{(0)} + E_{\hbar}^{(1)} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \varphi_{\hbar}^{(1)} \right) + R_{\hbar}^{(1)}$$

avec $\varphi_{\hbar}^{(1)} \in \mathcal{L}^{\nu}(k_{\hbar})$, $E_{\hbar}^{(1)} = \hbar^{1+\kappa} \langle \langle K_{\hbar} \rangle \rangle (\hbar k_{\hbar}) = O(\hbar^{1+\kappa})$ et $R_{\hbar}^{(1)} = O(\hbar^{1+\kappa+\nu})$.

On peut continuer ce raisonnement par récurrence de la manière suivante. Supposons qu'à l'étape N on a des fonctions $\varphi_{\hbar}^{(1)}, \dots, \varphi_{\hbar}^{(N)}$, avec $\varphi_{\hbar}^{(n)} \in \mathcal{L}^{n\nu}(k_{\hbar})$ et des valeurs $E_{\hbar}^{(1)}, \dots, E_{\hbar}^{(N)}$, avec $E_{\hbar}^{(n)} = O(\hbar^{1+\kappa+(n-1)\nu})$ telles que

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N)} \right) = \left(E_{\hbar}^{(0)} + \dots + E_{\hbar}^{(N)} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N)} \right) + R_{\hbar}^{(N)},$$

avec $R_{\hbar}^{(N)} \in \mathcal{L}^{1+\kappa+N\nu}(k_{\hbar})$. On cherche $\varphi_{\hbar}^{(N+1)} \in \mathcal{L}^{(N+1)\nu}(k_{\hbar})$, $E_{\hbar}^{(N+1)} = O(\hbar^{1+\kappa+N\nu})$ et $R_{\hbar}^{(N+1)} \in \mathcal{L}^{1+\kappa+(N+1)\nu}(k_{\hbar})$ telle que l'équation précédente soit satisfaite à l'ordre $N+1$. On voit facilement que l'on est amené à résoudre l'équation

$$\frac{\hbar}{i} dH_{\hbar k_{\hbar}} \cdot \partial_x \phi_{\hbar}^{(N+1)}(x) + R_{\hbar}^{(N)} = E_{\hbar}^{(N+1)}.$$

On la résout de la même manière que précédemment en fixant

$$E_{\hbar}^{(N+1)} = \left\langle R_{\hbar}^{(N)} \right\rangle (\hbar k_{\hbar}) = O(\hbar^{1+\kappa+N\nu}),$$

où $\left\langle R_{\hbar}^{(N)} \right\rangle$ est la moyenne sur tout le tore, avec $\phi_{\hbar}^{(N+1)} \in \mathcal{L}^{1+\kappa+N\nu-2+\mu}(0) = \mathcal{L}^{\kappa+\mu-1+N\nu}(0)$. Cela fait que l'on a

$$\begin{aligned} \left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widetilde{\langle K_{\hbar} \rangle} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N+1)} \right) &= \left(E_{\hbar}^{(0)} + \dots + E_{\hbar}^{(N)} \right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N)} \right) + E_{\hbar}^{(0)} \varphi_{\hbar}^{(N+1)} \\ &\quad + E_{\hbar}^{(N+1)} \varphi_{\hbar}^{(0)} + O(\hbar^{1+\kappa+\mu+N\nu}) + O(\hbar^{\kappa+\mu-1+N\nu+1+\kappa}). \end{aligned}$$

On remarque ensuite que $\hbar^{\kappa+\mu+1+N\nu} \leq \hbar^{1+\kappa+(N+1)\nu}$ et $\hbar^{\kappa+\mu-1+N\nu+1+\kappa} \leq \hbar^{1+\kappa+(N+1)\nu}$, ainsi que $\phi_{\hbar}^{(N+1)} \in \mathcal{L}^{(N+1)\nu}(0)$. De plus, pour tout $n = 1..N + 1$ on a

$$E_{\hbar}^{(n)} \varphi_{\hbar}^{(N+1)} = O\left(\hbar^{1+\kappa+(n-1)\nu} \hbar^{(N+1)\nu}\right) \leq O\left(\hbar^{1+\kappa+(N+1)\nu}\right).$$

De même, pour tout $n = 1..N + 1$ on a

$$E_{\hbar}^{(N+1)} \varphi_{\hbar}^{(n)} = O\left(\hbar^{1+\kappa+N\nu} \hbar^{n\nu}\right) \leq O\left(\hbar^{1+\kappa+(N+1)\nu}\right),$$

si bien que l'on a

$$\left(\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \widehat{\langle K_{\hbar} \rangle}\right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N+1)}\right) = \left(E_{\hbar}^{(0)} + \dots + E_{\hbar}^{(N+1)}\right) \left(\varphi_{\hbar}^{(0)} + \dots + \varphi_{\hbar}^{(N+1)}\right) + R_{\hbar}^{(N+1)},$$

avec $R_{\hbar}^{(N+1)} \in \mathcal{L}^{1+\kappa+(N+1)\nu}(k_{\hbar})$. ■

5 Conclusion

5.1 Comment choisir tous les exposants : $\gamma, \mu, \delta, \kappa$?

Tout au long de la méthode présentée, on a vu apparaître divers exposants $\gamma, \mu, \delta, \kappa, \dots$ et chacun des résultats est valide moyennant certaines restrictions ou relations entre ces exposants. Il est temps de faire ici le point sur cette question.

Tout d'abord, la paramètre κ est fixé dès le début et sert à contrôler la taille de la perturbation $\hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0 \in \hat{\Psi}_{\delta}^{1+\kappa}(\mathcal{T})$. Un choix de $\kappa = 1$ signifie une perturbation d'ordre \hbar^2 , ce qui contient notamment le cas correspondant au problème (étudié dans les articles [33] et [34]) de la limite aux grandes énergies de l'opérateur de Schrödinger périodique $-\Delta + V(x)$, "une fois remis les \hbar aux bons endroits"

$$-\hbar^2 \Delta + \hbar^2 V(x).$$

Dans ce cas, le symbole de l'opérateur $-\hbar^2 \Delta$ est ξ^2 et la perturbation $\hbar^2 V$ est d'ordre \hbar^2 . Prendre un κ plus petit signifie prendre une perturbation plus forte. La méthode continue de fonctionner mais l'erreur des quasimodes résonants est augmentée. On ne peut cependant pas diminuer κ indéfiniment puisque la forme normale quasi-résonante du théorème D.22 exige que $\kappa \geq 2\delta$. Comme on le verra dans le paragraphe suivant, δ doit être strictement positif, ce qui nous oblige à nous restreindre à

$$0 < \kappa.$$

Comme on l'a déjà discuté, la forme normale quasi-résonante fait apparaître des termes $O(\hbar^{\infty})$ qui sont en fait des termes $O(\hbar^{N\gamma})$ pour tout N . La condition $\gamma > 0$ est donc une condition essentielle pour faire marcher la machine. Cette condition signifie que l'on considère de plus en plus de zones de résonances lorsque $\hbar \rightarrow 0$, puisque la décomposition en bloc de quasi-résonance se fait en considérant tous les modules de résonances \mathcal{R} admettant une base dont les éléments e_j sont de normes inférieures à $\hbar^{-\gamma}$. Pour ne pas recouvrir totalement \mathcal{B} avec les zones de résonances, il faut que leur largeur \hbar^{δ} tende vers 0 avec \hbar , i.e il faut que δ soit positif. De plus, on a vu dans la proposition E.3 qu'il est même intéressant d'avoir

$\delta > d\gamma$, puisque dans ce cas, le bloc non résonant \mathcal{B}_0 devient prépondérant lorsque $\hbar \rightarrow 0$, or c'est dans ce bloc qu'il est le plus facile de construire des quasimodes. Le premier choix qui s'impose est donc

$$0 < d\gamma < \delta.$$

On doit prendre ces paramètres γ et δ positifs, par contre il n'y a aucun intérêt à les prendre grands. Au contraire, diverses bornes supérieures sont apparues au *fur et à mesure des lemmes et théorèmes*. Tout d'abord, le fait que δ soit positif nous oblige à travailler avec les classes de symboles $\Psi_\delta(\mathcal{T})$ pour lesquelles la condition $\delta < 1$ est nécessaire pour avoir aussi bien le lemme de resommation de Borel (proposition C.16) que les règles de calcul symbolique (théorème C.19 de composition) ou la continuité L^2 (théorème C.22 de Calderón-Vaillancourt). Par ailleurs, le terme d'erreur des quasimodes résonants est d'autant plus grand que δ est grand. D'autre part, la propriété de "non-dégénérescence locale" des valeurs propres non-résonantes (proposition E.7) nécessite $\delta < \frac{d}{d+1}$. Enfin, comme on l'a rappelé, la forme normale quasi-résonante $2\delta \leq \kappa$. En conséquence, on choisira

$$\delta \ll 1.$$

Très petit devant 1 signifie par exemple 10^{-2} ou 10^{-3} , en s'assurant par ailleurs que l'on satisfait bien $2\delta \leq \kappa$. Il faut cependant noter que d'un point de vue *pratique*, si on devait faire des calculs numériques il faudrait éviter de prendre δ trop petit dans la mesure où une erreur d'ordre $\hbar^{0.01\infty}$ est tout de même préférable d'un certain point de vue à une erreur d'ordre $\hbar^{0.0001\infty}$.

Enfin, pour construire des quasimodes associés aux blocs mono-résonants, on a considéré des fonctions φ_\hbar qui restent à une distance "grande" devant \hbar de la surface de résonance. Pour cela, on a cherché les quasimodes dans la classe des fonctions BKW-Liouville $\mathcal{L}^0(\hbar k_\hbar)$, en demandant que $\hbar k_\hbar$ soit d'ordre $\hbar^{1-\mu}$ avec $\mu > 0$. D'autre part, on a besoin que ces fonctions habitent dans le bloc, de manière à appliquer la proposition E.8, ce qui nous force à imposer $\mu < 1 - \delta$.

En résumé, on a

$ \begin{aligned} &0 < \kappa \\ &0 < d\gamma < \delta \ll 1 \\ &0 < \mu < 1 - \delta \end{aligned} $

5.2 Le cas de la dimension 2

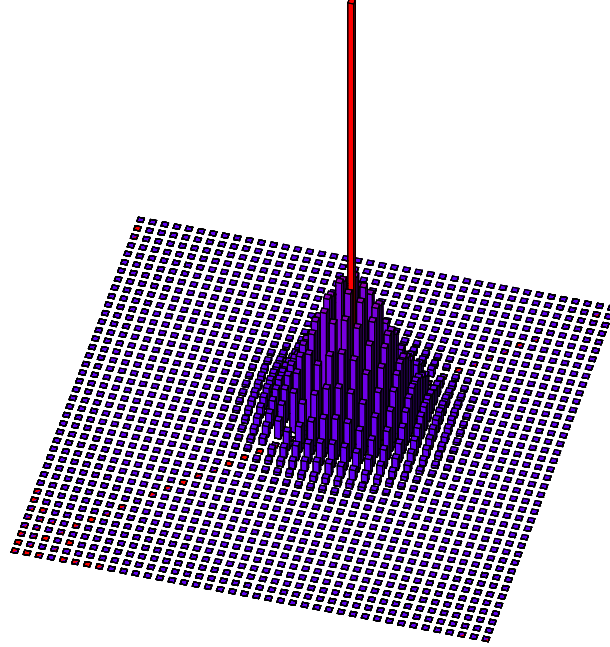
Lorsque l'on travaille sur un tore \mathcal{T} de dimension 2, la décomposition en blocs de résonance est simplifiée pour plusieurs raisons. Tout d'abord, on n'a que trois types de résonances :

- Les tores non-résonants.
- Les tores mono-résonants qui sont les tores périodiques.
- Les tores totalement résonants, i.e ceux sur lesquels il n'y a pas de dynamique.

On peut se débarrasser du dernier cas en demandant que $H(\xi)$ n'ait pas de point fixe, ce qui laisse seulement les tores ergodiques et les tores périodiques. De plus, la décomposition en bloc de quasi-résonance permet de couvrir tout l'espace \mathcal{B} .

On va collecter les résultats du théorème E.6 sur les quasimodes non-résonants et du théorème E.10 sur les quasimodes mono-résonants, et on va essayer de comprendre intuitivement dans quelle mesure ils se retrouvent lorsqu'ils habitent près de la frontière entre le bloc non-résonant et les blocs mono-résonants. On rappelle que ces deux théorèmes donnent des quasimodes pour l'opérateur sous forme normale \widehat{FN} . Les quasimodes pour l'opérateur de départ $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$ sont obtenus¹¹ à partir de ceux de \widehat{FN} en leur appliquant l'opérateur \hat{U}^* du théorème D.22 de forme normale quasi-résonante.

- D'une part, d'après le théorème E.6, les quasimodes non-résonants φ_{\hbar} sont des exponentielles $\varphi_{\hbar} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)}$. Les quasimodes de l'opérateur de départ $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$ sont donc $\psi_{\hbar} = \hat{U}^*(\varphi_{\hbar})$, ce qui fait d'après le théorème D.22 que $\psi_{\hbar} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} + O(\hbar^{\kappa-\delta})$. La série de Fourier de ces quasimodes contient principalement un seul coefficient, celui pour $k = k_{\hbar}$. Les autres coefficients sont d'ordre $\hbar^{\kappa-\delta}$ qui tend vers 0 lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Dans l'histogramme ci-dessous, on a représenté la série de Fourier de ψ_{\hbar} .



Par ailleurs, les quasi-valeurs propres associées sont de la forme

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle(\hbar k_{\hbar}),$$

où $\langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle(\xi)$ est la moyenne sur tout le tore du symbole K_{\hbar} apparaissant dans la forme normale du théorème D.22 et qui vérifie $K_{\hbar} - K_0 \in \Psi_{\delta}^{1-\delta}(\mathcal{T})$. Cela signifie que l'on a

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle\langle K_0 \rangle\rangle(\hbar k_{\hbar}) + O(\hbar^{1+\kappa+1-\delta}),$$

où $\delta \ll 1$.

- D'autre part, d'après le théorème E.10, les quasimodes φ_{\hbar} associés aux tores mono-résonants (donc périodiques en dimension 2) sont de la forme

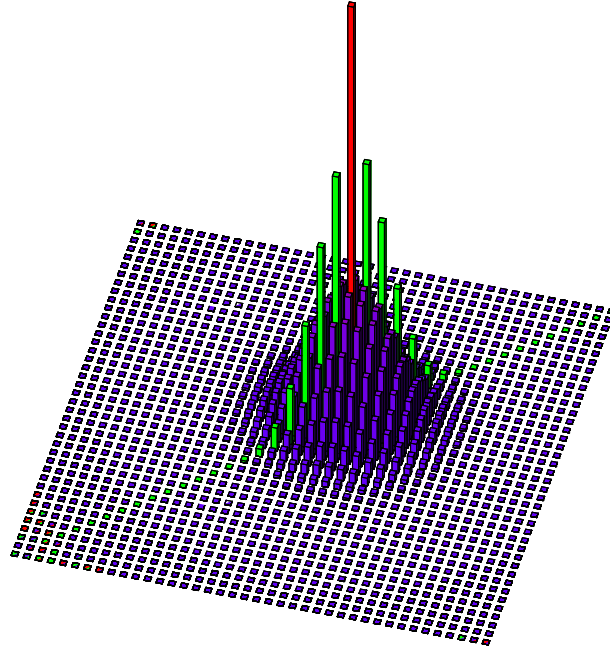
$$\varphi_{\hbar} = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} (1 + O(\hbar^{\nu})).$$

¹¹Voir la discussion de la section 1.2.

Les quasimodes de $\hat{H} + \hbar^{1+\kappa} \hat{K}_0$ vérifient donc

$$\psi_{\hbar} = \hat{U}^*(\varphi_{\hbar}) = e^{ik_{\hbar}(x-x_0)} \left(1 + O(\hbar^{\nu}) + O(\hbar^{\kappa-\delta}) \right).$$

D'après les hypothèses du théorème E.10, on a $\nu < \kappa - \delta$, ce qui fait que $O(\hbar^{\kappa-\delta}) \ll O(\hbar^{\nu})$. Cependant, il est intéressant de se rappeler que par construction φ_{\hbar} est une fonction constante le long d'une direction et n'a donc de coefficients de Fourier que pour k appartenant au module de résonance associé, qui est un sous-réseau de dimension 1. Le quasimode ψ_{\hbar} a donc principalement un seul coefficient de Fourier, celui pour $k = k_{\hbar}$. Ensuite, il a des coefficients de Fourier dans le sous-réseau, qui sont d'ordre $\hbar^{\nu} \ll 1$. Enfin, le reste de ses coefficients de Fourier sont d'ordre $\hbar^{\kappa-\delta} \ll \hbar^{\nu}$.



Par ailleurs, les quasi-valeurs propres sont de la forme

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle\langle K_{\hbar} \rangle\rangle(\hbar k_{\hbar}) + O(\hbar^{1+\kappa+\nu}),$$

avec $\nu = \min(\mu + \kappa - 1, \mu)$. En utilisant $K_{\hbar} - K_0 \in \Psi_{\delta}^{1-\delta}(\mathcal{T})$ et $\nu < \mu < 1 - \delta$, cela implique que

$$E_{\hbar} = H(\hbar k_{\hbar}) + \hbar^{1+\kappa} \langle\langle K_0 \rangle\rangle(\hbar k_{\hbar}) + O(\hbar^{1+\kappa+\nu}).$$

Pour ces quasimodes résonants, une valeur ν qui tendrait vers zéro signifierait que les autres coefficients de Fourier $k \neq k_{\hbar}$ commencent à prendre de l'importance. Or, on peut rendre ν petit de deux manières.

- Si $\kappa \geq 1$, ce qui signifie que l'on a appliqué une perturbation plus petite que \hbar^2 , alors $\nu = \mu$ et cela impose de rendre μ petit. Il s'agit dans ce cas de quasimodes très proches des surfaces de résonances.
- Si $\kappa < 1$, ce qui signifie que l'on a appliqué une perturbation plus grande que \hbar^2 , alors $\nu = \mu + \kappa - 1$ et il suffit alors de prendre μ proche de $1 - \kappa$ pour rendre ν petit. Dans ce cas, le quasimode habite moins près de la résonance que dans le cas

précédent, mais l'intensité de la perturbation est plus forte, et accentue l'influence de la résonance.

Dans les deux cas, plus le quasimode subit l'influence de la résonance (par les effets cumulés de sa proximité à la surface de résonance et de l'intensité de la perturbation), plus sa série de Fourier tend à "s'étaler" autour du coefficient $k = k_{\bar{h}}$.

A l'inverse, lorsqu'on laisse μ se rapprocher de $1 - \delta$, on visite les régions, à l'intérieur des blocs mono-résonants, qui sont proches de la frontière avec le bloc non-résonant. Dans ce cas, la série de Fourier du quasimode se concentre autour de $k = k_{\bar{h}}$ et la quasi-valeur propre prend une forme qui se rapproche de celle des quasimodes non-résonants.

Bibliographie

- [1] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of mechanics*, seconde ed., Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, 1978.
- [2] V.I. Arnol'd, *Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian*, Russian Math. Surveys **18** (1963), no. 5, 9–36.
- [3] ———, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 91–192.
- [4] ———, *A theorem of Liouville concerning integrable dynamics*, Siberian Math. J. **4** (1963), 471–474.
- [5] ———, *Modes and quasimodes*, Funkcional. Anal. i Priložen. **6** (1972), no. 2, 12–20.
- [6] ———, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classiques*, mir ed., 1976.
- [7] D. Bambusi, S. Graffi, and T. Paul, *Long time semiclassical approximation of quantum flows : a proof of the Ehrenfest time*, Asymptot. Anal. **21** (1999), no. 2, 149–160.
- [8] R. Beals, *Characterization of pseudodifferential operators and applications*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 1, 45–57.
- [9] G. Benettin, L. Galgani, and A. Giorgilli, *A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems*, Celestial Mech. **37** (1985), no. 1, 1–25.
- [10] M. Bordemann, H. Römer, and S. Waldmann, *KMS states and star product quantization*, Proceedings of the XXX Symposium on Mathematical Physics (Toruń, 1998), vol. 44, 1999, pp. 45–52.
- [11] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe, *Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 4, 1189–1229.
- [12] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Mathematics Studies, vol. 99, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [13] A. Bouzouina and D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. J. **111** (2002), no. 2, 223–252.
- [14] A. D. Brjuno, *Local methods in nonlinear differential equations*, Springer-Verlag, 1989.
- [15] H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, *Quasi-periodic motions in families of dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1645, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Order amidst chaos.
- [16] A.P. Calderón, *Commutators of singular integral operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1092–1099.
- [17] A.P. Calderón and R. Vaillancourt, *On the boundedness of pseudodifferential operators*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 374–378.

- [18] ———, *A class of bounded pseudodifferential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **69** (1972), 1185–1187.
- [19] L. Charles, *Aspects semi-classiques de la quantification géométrique*, Ph.D. thesis, Université Paris IX-Dauphine, 2000.
- [20] ———, *Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators*, à paraître dans Comm. Part. Diff. Eq, 2002.
- [21] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, manifolds and physics*, second ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.
- [22] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, vol. 57, Société Mathématique de France, Paris, 1978, With an English summary.
- [23] Y. Colin de Verdière, *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*.
- [24] C. Curras-Bosch, *Sur les feuilletages lagrangiens à holonomie linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris **317** (1993), 605–608.
- [25] C. Curras-Bosch and P. Molino, *Voisinage d'une feuille compacte dans un feuilletage lagrangien : le problème de la linéarisation symplectique*, Hokkaido Math. J. **23** (1994), 355–360.
- [26] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, Cambridge university press, 1999.
- [27] J. Dixmier, *Topologie générale*, Presses Universitaires de France, 1981.
- [28] J. J. Duistermaat, *Global action-angle coordinates*, Comm. Pure App. Math. **32** (1980), 687–706.
- [29] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, *Fourier integral operators, II*, Acta Math. **128** (1972), no. 3-4, 183–269.
- [30] Vũ Ngọc S. Dullin, H., *Vanishing twist near focus-focus points*, preprint math.DS/0306392, 2003.
- [31] J. Dunau, *Fonctions d'un opérateur elliptique sur une variété compacte*, J. Math. Pures Appl. (9) **56** (1977), no. 4, 367–391.
- [32] F. Faure and S. Nonnenmacher, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, preprint nlin.CD/0207060, 2002.
- [33] J. Feldman, H. Knörrer, and E. Trubowitz, *The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator*, Inventiones mathematicae **100** (1990), 647–676.
- [34] ———, *Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator*, Commen. Math. Helvetici (1991), 557–579.
- [35] G. Gallavotti, *Quasi-integrable mechanical systems*, Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge, Part I, II (Les Houches, 1984), North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 539–624.
- [36] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology. Vol. II : Lie groups, principal bundles, and characteristic classes*, Academic Press, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 47-II.
- [37] G. A. Hagedorn and A. Joye, *A time-dependent Born-Oppenheimer approximation with exponentially small error estimates*, Comm. Math. Phys. **223** (2001), no. 3, 583–626.
- [38] L. Hörmander, *Fourier integral operators, I*, Acta Math. **127** (1971), no. 1-2, 79–183.

- [39] C.J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 32, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1989.
- [40] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., 1963.
- [41] A.N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **98** (1954), no. 4, 527–530.
- [42] J. Liouville, *Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique*, J. Math. Pure Appl. **20** (1855), 137–138.
- [43] P. Lochack and C. Meunier, *Multiphasing averaging for classical systems*, Springer-Verlag, 1988.
- [44] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, second ed., Texts in Applied Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, New York, 1999, A basic exposition of classical mechanical systems.
- [45] A. Martinez, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [46] H. Mineur, *Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involutions aux systèmes à variables séparées*, J. Math. Pure Appl. **15** (1936), 221–267.
- [47] J. Moser, *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math. Phys K1 **11a** (1962), no. 1, 1–20.
- [48] T. Nagano and K. Yagi, *The affine structures on the real torus*, Osaka J. Math. **11** (1974), 181–210.
- [49] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger Ltd., Bristol, 1990.
- [50] N. N. Nekhoroshev, *An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. II*, Trudy Sem. Petrovsk. (1979), no. 5, 5–50.
- [51] Zung Nguyen Tien, *Kolmogorov condition for integrable systems with focus-focus singularities*, Phys. Lett. A **215** (1996), no. 1-2, 40–44.
- [52] R. Penrose and W. Rindler, *Spinor and space-time I*, Cambridge University Press, 1984.
- [53] R. Pyke, *Resonances, stability and effective stability in hamiltonian dynamical systems*, University of Toronto Mathematics Preprint (1994), <http://www.math.toronto.edu/pyke/resonance.ps>.
- [54] J. Pöschel, *Integrability of hamiltonian systems on Cantor sets*, Comm. Pure Appl. Maths **XXXV** (1982), 653–695.
- [55] ———, *Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems*, Math. Z. **213** (1993), no. 2, 187–216.
- [56] M. A. Rieffel, *Questions on quantization*, Operator algebras and operator theory (Shanghai, 1997), Contemp. Math., vol. 228, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 315–326.
- [57] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, vol. 68, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.

- [58] ———, *Semi-classical approximation in quantum mechanics. A survey of old and recent mathematical results*, *Helv. Phys. Acta* **71** (1998), no. 1, 44–116, *Mathematical results in quantum mechanics* (Ascona, 1996).
- [59] H. Rüssmann, *Nondegeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems*, *Number theory and dynamical systems* (York, 1987), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 134, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, pp. 5–18. MR 91k :58114
- [60] I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlichvielen Veränderlichen*, *J. Reine Angew. Math* **151** (1921), 79–111.
- [61] J. Sjöstrand, *Semi-excited states in nondegenerate potential wells*, *Asymptotic Anal.* **6** (1992), no. 1, 29–43.
- [62] S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall Inc., 1964.
- [63] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1976), no. 46, 5–14.
- [64] V. Turunen, *Commutator characterization of periodic pseudodifferential operators*, *Z. Anal. Anwendungen* **19** (2000), no. 1, 95–108.
- [65] V. Turunen and G. Vainikko, *On symbol analysis of periodic pseudodifferential operators*, *Z. Anal. Anwendungen* **17** (1998), no. 1, 9–22.
- [66] S. Vũ Ngọc, *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classique avec singularités*, Ph.D. thesis, Institut Fourier, Grenoble, 1998.
- [67] R.M. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [68] S. Waldmann, *On the representation theory of deformation quantization*, *Deformation quantization* (Strasbourg, 2001), *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, vol. 1, de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 107–133.
- [69] A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, *Adv. in Math.* **6** (1971), 329–346.
- [70] ———, *Lagrangian submanifolds and hamiltonian systems*, *Ann. of Math.* **98** (1973), 377–410.
- [71] N. Woodhouse, *Geometric quantization*, second ed., *Oxford Mathematical Monographs*, The Clarendon Press Oxford University Press, 1992.