



**HAL**  
open science

# Rayonnement des ondes d'instabilités dans les jets supersoniques

Christophe Millet

► **To cite this version:**

Christophe Millet. Rayonnement des ondes d'instabilités dans les jets supersoniques. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 2003. Français. NNT: . tel-00003293

**HAL Id: tel-00003293**

**<https://theses.hal.science/tel-00003293>**

Submitted on 2 Sep 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPÉCIALITÉ : Dynamique des fluides

par

Christophe MILLET

Rayonnement des ondes d'instabilités  
dans les jets supersoniques

présentée et soutenue publiquement

le 28 février 2003

MM.	P.	HUERRE	Président du jury
	F.	CHARRU	
	U.	EHRENSTEIN	Rapporteur
	C.	BAILLY	Rapporteur
	G.	CASALIS	Directeur de thèse
	D.	SIPP	
	J.-Ch.	ROBINET	



# RAYONNEMENT DES ONDES D'INSTABILITÉS DANS LES JETS SUPERSONIQUES

Christophe Millet

Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude du rayonnement acoustique des jets supersoniques, dans le cadre de la théorie des instabilités linéaires. Le point de départ consiste à modéliser les fluctuations observées dans les jets par des ondes d'instabilités qui s'apparentent aux structures cohérentes de la turbulence.

Au niveau de description locale, une relation topologique entre les racines de la relation de dispersion et ses coupures détermine le comportement asymptotique de la réponse impulsionnelle, qu'il est possible de ramener à deux configurations génériques. Ces deux configurations conduisent à admettre qu'une approche locale (ou approximation locale) n'est pas appropriée pour calculer le champ lointain, essentiellement parce que l'approximation obtenue n'est pas uniformément valable. Le problème principal vient de ce que le comportement transversal d'une onde d'instabilités peut présenter une transition exponentielle-algébrique et donc conduire le système vers un état dispersif, à l'origine des ondes de Mach. Ces transitions sont totalement compatibles avec la structure du champ proche et pourraient être à l'origine d'un mécanisme de sélection des fréquences.

Résumé en anglais :

The basic purpose of the present thesis is to examine the phenomenon of acoustic radiation of supersonic jet flows by resorting to the linear instability theory. Thus, the downstream development of vortical structures is represented as a collection of spatially growing instability waves of various frequencies.

At the local level description, it is shown that a simple topological relationship between roots of the dispersion relation and branch cuts determines two generic configurations for the time-asymptotic Green's function, depending on control parameters. Both configurations leads to the conclusion that a local analysis is not appropriate to describe the sound emission. In some cases, the cross-stream behaviour of pressure fluctuations becomes dispersive and the cross-stream decay of the amplitude changes from exponential to algebraic. Such a transition arises in regions of physical space where noise is generated and depends to a large extent on the jet Mach number. In this thesis, it is shown how algebraic decays are completely compatible with the features of the near-field, in terms of a turning-point problem, and finally, a selection criterion for the occurrence of such a behaviour is given.



# Avant-propos

Les écoulements cisailés ouverts tels que les sillages et les jets chauds sont, sous certaines conditions, le siège d'oscillations, qu'il est important de bien connaître pour garantir la fiabilité de certains processus industriels. Dans le domaine de l'aéronautique, les jets se rencontrent aussi bien dans certains systèmes de climatisation qu'à l'arrière des turboréacteurs, ce qui explique en partie l'intérêt que lui portent les aéroacousticiens depuis les années soixante. Chacun a d'ailleurs en tête le débat soulevé aux États-Unis en 1976 par le problème de l'atterrissage de Concorde à New-York. Alors que les avions subsoniques étaient capables de respecter les niveaux de bruit publiés par l'OACI (Organisation de l'Aviation Civile Internationale), Concorde, seul avion de transport supersonique du monde occidental, se révélait plus bruyant que les plus anciens appareils à réaction. En effet, les moteurs du supersonique, conçus principalement pour minimiser la consommation en croisière supersonique, sont à simple flux ou à taux de dilution très faible, ce qui implique un bruit de jet élevé. Récemment, l'éventualité d'un successeur de l'avion supersonique (ATSF pour Avion de Transport Supersonique du Futur) a relancé certaines études sur le bruit de jet. Même si le sujet a déjà fait couler beaucoup d'encre, les mécanismes physiques à l'origine du rayonnement acoustique restent encore mal compris ; les prévisions acoustiques sont essentiellement empiriques, souvent basées sur l'estimation du rendement acoustique à partir de lois dimensionnelles.

Dans ce mémoire, j'expose les résultats de mes travaux de recherche sur la compréhension du rayonnement des *ondes d'instabilités*, en tant que modèle des oscillations des jets supersoniques faiblement divergents, sous-entendant par ce biais l'existence d'un petit paramètre canonique. Le parti pris est de replacer la dynamique de ces ondes dans le cadre de la théorie de l'instabilité et dans la mesure du possible, de valider les concepts théoriques en procédant à des comparaisons expérimentales et numériques. Le point de départ consiste à reconnaître que l'ordre dominant de l'approximation du champ de pression n'est pas contraint de satisfaire les conditions limites du champ lointain, ce qui permet d'étendre la notion d'*analyse locale* (le jet est divisé en "tranches" dans la direction principale de l'écoulement) à une classe de solutions dont le domaine d'holomorphie est une surface de Riemann. Après un bref chapitre introductif, cette propriété sera discutée en détails dans le chapitre 2. Mais admettre qu'il peut exister des ondes qui se propagent dans les jets et dont la description locale autorise qu'elles ne vérifient pas les conditions à l'infini ne leur confère pas une réalité physique. Cela ne justifie pas non plus qu'on ne s'y intéresse pas. En fait, l'idée repose sur le constat général que les études de la turbulence et des phénomènes acoustiques font intervenir des échelles de temps, de longueur et d'énergie très différentes. Changer l'échelle des variables d'espace revient à se placer à un niveau différent de description des phénomènes physiques, niveau soit beaucoup plus petit, soit beaucoup plus grand. Ceci se manifeste par des équations différentes, qu'il faut parfois considérer simultanément et dans tout l'espace physique, comme le laissent entendre certaines théories asymptotiques (théories WKB ou aux échelles multiples). On peut aussi

s'attendre à ce que certaines de ces équations conduisent à des solutions dont seule la restriction à une région de l'espace ait un sens physique, mais dont le comportement dépend de conditions exprimées à l'extérieur de cette région, par l'intermédiaire de conditions de raccords. Et puis, il ne faut pas oublier le cas où ces deux effets se conjuguent, sous la forme de *transitions dissipatif-dispersif*. Par exemple, lorsqu'une onde qui se propage dans la direction de l'écoulement porteur voit son taux d'amortissement dans la direction transversale s'annuler (auquel cas, seule persiste une partie ondulatoire, caractéristique d'un phénomène dispersif). Aussi, l'argument qui consisterait à mettre de côté certaines solutions du problème local (pour une "tranche" d'écoulement) en prétextant qu'elles ne vérifient pas les conditions limites n'est pas recevable et conduirait inévitablement à des incohérences mathématiques insurmontables. Le rayonnement d'énergie comme processus *global* sera au coeur du chapitre 3 qui sert de soubassement au chapitre 4 où un critère de sélection des fréquences du champ lointain sera donné en termes de transitions dissipatif-dispersif. Ces transitions ne sont pas des événements exceptionnels et correspondent à des transitions *subsonique-supersonique* de la vitesse de phase des ondes d'instabilités. Le dernier chapitre pose les bases d'une théorie plus générale, incluant le cas des ondes quasi-soniques et des jets faiblement supersoniques. Une réponse définitive aux questions posées ne sera malheureusement pas donnée, mais je présenterai certains résultats qui nous éclairent sur ce qu'on peut espérer trouver et en particulier sur les recouvrements possibles avec la théorie des modes globaux. Les chapitres 2 et 3 contiennent des remarques non publiées dans les revues scientifiques, certaines parties ayant néanmoins fait l'objet de présentations dans des congrès (voir par exemple les références [1] et [2]). Au moment de la rédaction du mémoire, le chapitre 4 fait quant à lui l'objet d'une soumission à la revue *European Journal of Mechanics B-Fluids*.

Maintenant, qu'il me soit permis de remercier ceux qui, à un moment ou à un autre, ont contribué à ma compréhension des instabilités, et en tout premier lieu Patrick Huerre qui a accepté de présider le jury de cette thèse. Il est de ces professeurs qui permettent de garder à l'esprit qu'il est possible d'unifier rigueur, clarté et souci permanent de l'utilité de la chose. Comme cela s'était déjà produit à deux ou trois reprises dans mon parcours, je réalise quelle a été l'importance de son apport, sans doute à l'origine de cette thèse. Je pense également à Jean-Christophe Robinet, avec qui j'ai partagé mon bureau durant les deux premières années de thèse. Bien que nous ne soyons pas parvenu à donner corps à notre travail, je n'oublie ni son intérêt pour la physique théorique, ni le temps qu'il m'a accordé. Je tiens également à remercier Stéphane Le Dizès et Patrick Huerre qui ont accepté de se pencher sur mes problèmes à des moments décisifs de la thèse. J'y suis d'autant plus sensible que tous deux n'avaient rien à y gagner et du temps à y perdre.

Je remercie tout particulièrement mon Directeur de thèse, Grégoire Casalis, pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour nos discussions, parfois perçues comme trop théoriques, ou trop "amont" pour reprendre un terme local, et au cours desquelles j'ai apprécié son dynamisme. Je lui dois la liberté de mes recherches et la possibilité d'avoir travaillé en dehors des contraintes de productivité du laboratoire, dans une optique de recherche à laquelle il contribue beaucoup. Je remercie également les membres du jury qui ont accepté de débattre sur un sujet réputé difficile et qui pose encore beaucoup de questions. Enfin

dans un système où l'acquis est pérenne, je veux ici insister sur le fait que je n'oublie pas l'institution qui a permis le financement de cette thèse, ni les personnes qui ont eu la gentillesse de m'accueillir dans leur équipe. Il s'agit de Jean Cousteix, directeur du département de Modélisation pour l'Aérodynamique et l'Énergétique (DMAE) de l'ONERA et Daniel Arnal, chef de l'unité Transition et Instabilités (TRIN).

Pour finir dans la grande tradition des citations de thèse, je citerai une petite réflexion de Gian Carlo Rota: *nous entendons souvent dire que les mathématiques consistent à "prouver des théorèmes". Le travail d'un écrivain serait-il "d'écrire des phrases"? L'oeuvre d'un mathématicien est surtout un enchevêtrement de conjectures, d'analogies, de souhaits et de frustrations; la démonstration, loin d'être le noyau de la découverte, n'est souvent que le moyen de s'assurer que notre esprit ne nous joue pas des tours.*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Instabilités supersoniques locales</b>	<b>9</b>
2.1	Problème physique, approche locale . . . . .	9
2.2	Fonction de Green locale . . . . .	13
2.2.1	En l'absence d'écoulement . . . . .	13
2.2.2	En présence d'un écoulement . . . . .	18
2.2.3	Instabilités subsoniques et supersoniques . . . . .	29
2.3	Approximation localement parallèle . . . . .	46
2.3.1	Formulation numérique . . . . .	46
2.3.2	Résultats numériques . . . . .	56
2.4	Conclusion du chapitre 2 . . . . .	69
2.4.1	Deux configurations génériques . . . . .	69
2.4.2	Coupures et dynamique globale . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Instabilités supersoniques globales</b>	<b>75</b>
3.1	Vue d'ensemble . . . . .	75
3.2	La Couche de mélange bidimensionnelle . . . . .	79
3.2.1	Problème physique . . . . .	79
3.2.2	Développement local . . . . .	80
3.2.3	Développement régulier . . . . .	81
3.2.4	Raccordement des développements local et régulier . . . . .	88
3.3	Le jet axisymétrique . . . . .	90
3.3.1	Problème physique . . . . .	90
3.3.2	Développement régulier . . . . .	91
3.3.3	Développement local . . . . .	94
3.3.4	Raccordement des développements local et régulier . . . . .	95
3.4	Le jet froid à $M = 2.0$ . . . . .	99
3.4.1	Écoulement moyen . . . . .	99
3.4.2	Résultats numériques . . . . .	100
3.5	Conclusion du chapitre 3 . . . . .	104

<b>4</b>	<b>Exponential-algebraic transition</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	112
4.2	Near field structure of instability waves . . . . .	113
4.2.1	Basic formulation . . . . .	113
4.2.2	Cross-stream structure of local plane waves . . . . .	114
4.2.3	A turning-point problem . . . . .	119
4.3	Numerical formulation . . . . .	121
4.3.1	Spectral discretization . . . . .	121
4.3.2	Inviscid approximation . . . . .	122
4.3.3	Global or local method? . . . . .	123
4.4	Numerical results for cold supersonic jets . . . . .	123
4.4.1	Mean-flow profile . . . . .	123
4.4.2	General methodology and numerical results . . . . .	124
4.5	Conclusion . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Fonctions analytiques, surfaces de Riemann</b>	<b>133</b>
A.1	Prolongement analytique . . . . .	134
A.2	Surfaces de Riemann . . . . .	135
A.2.1	Structure topologique . . . . .	135
A.2.2	Définition . . . . .	137
A.2.3	Paramétrage local canonique . . . . .	137
A.2.4	Fonctions analytiques . . . . .	138
A.3	Fonctions algébriques . . . . .	139
A.3.1	Définition, branches régulières . . . . .	139
A.3.2	Points singuliers . . . . .	140
A.3.3	Deux exemples d'intégrales . . . . .	141
<b>B</b>	<b>Les Fonctions de Bessel</b>	<b>143</b>
B.1	Introduction . . . . .	143
B.1.1	Proposition : existence des solutions en séries entières . . . . .	143
B.1.2	Equations à singularité isolée . . . . .	143
B.1.3	Proposition : solution d'une équation à singularité faible . . . . .	144
B.2	Equation de Bessel . . . . .	145
B.2.1	Fonctions de Bessel, de Weber et de Hankel . . . . .	145
B.2.2	Propriétés des fonctions de Bessel . . . . .	146
<b>C</b>	<b>Linéarisation des équations de Navier-Stokes</b>	<b>149</b>
C.1	Méthode des petites perturbations . . . . .	149
C.2	Conditions aux limites . . . . .	152
C.3	Validations numériques . . . . .	154
C.4	Une extension : les modes de $K_0^\pm$ . . . . .	156

Références

156



# Chapitre 1

## Introduction générale

De quelle manière contribuent les ondes d'instabilités au bruit de jet supersonique ? Plus précisément, malgré tous les progrès récents accomplis en théorie des instabilités, sommes-nous dans la situation des chercheurs des années 50 qui s'interrogeaient sur la signification physique des ondes de vitesse de phase supersonique ; où bien possédons-nous déjà une formulation satisfaisante, permettant de rendre compte des caractéristiques du bruit rayonné ? Depuis l'émergence des techniques perturbatives, et leurs applications aux écoulements de jets faiblement non-parallèles, des modèles ont été proposés, notamment par Crighton et Gaster [3], Garg [4] ou encore Strange et Crighton [5]. Pour ces auteurs, les équations de départ sont celles de l'approximation incompressible et seules les ondes d'origine hydrodynamique, dites de Kelvin-Helmholtz, sont considérées. Fort du succès remporté par ces modèles, Tam et Morris [6] ont proposé d'étendre la méthode des échelles multiples à la couche de mélange compressible afin d'en calculer le bruit rayonné. Là encore, l'analyse est limitée aux ondes de Kelvin-Helmholtz. Il faudra attendre les années 90 pour que des idées anciennes, dûes à Landau [7], Miles [8], Fejer et Miles [9] et Lessen *et al.* [10] fassent l'objet d'une réactualisation, à la lumière des observations expérimentales d'Oertel [11]. Si les travaux de Crow et Champagne [12] et Brown et Roshko [13] ont bien mis en évidence l'importance des ondes de Kelvin-Helmholtz comme modèle des structures cohérentes dans les écoulements turbulents, ceux d'Oertel soulèvent l'existence d'autres types de structures dans les jets axisymétriques, dont l'origine semble liée aux effets de compressibilité. Un nom a été proposé par Tam et Hu [14], [15], celui d'*ondes supersoniques*. Il s'agirait d'ondes d'instabilités animées d'une vitesse de phase dont l'écart à la vitesse de l'écoulement porteur est plus grand que la célérité du son, aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du jet. Encore une fois, ces observations soulèvent la question du rayonnement des ondes de vitesse de phase supersonique. Pourtant, leur contribution au bruit de jet est régulièrement mise de côté et rarement replacée dans le cadre de la théorie des instabilités.

Les efforts pour unifier ondes acoustiques et structures cohérentes dans un même formalisme ont amené à distinguer deux composantes dans le bruit de jet supersonique. La première composante semble provenir des structures cohérentes, sous la forme de ce qu'il est convenu d'appeler le bruit de mélange turbulent. Les expériences de Tanna [16] et

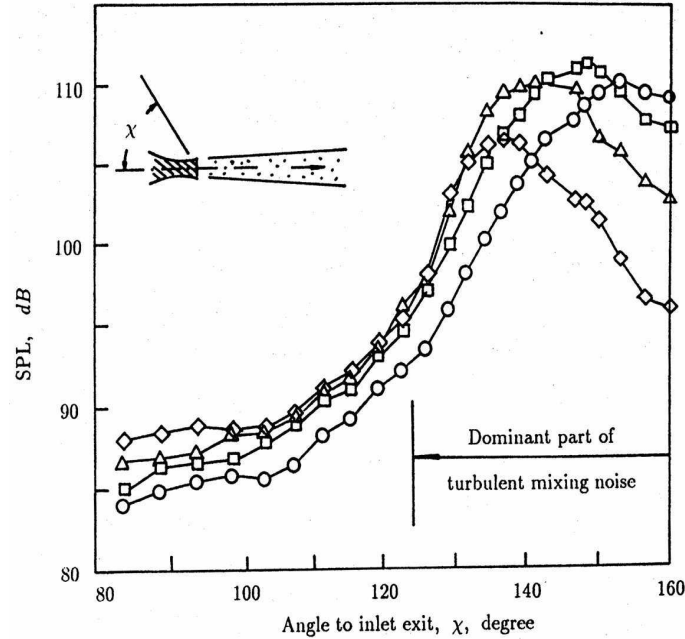


FIG. 1.1 – Directivités mesurées par Seiner *et al.* [17] à différentes fréquences. Jet supersonique, de nombre de Mach  $M = 2.0$  et à une température totale de  $500\text{ K}$ .  $\circ$  :  $St = 0.067$  ;  $\square$  :  $St = 0.12$  ;  $\triangle$  :  $St = 0.20$  ;  $\diamond$  :  $St = 0.40$ .

Seiner *et al.* [17] fournissent des indications qui vont dans ce sens. La figure 1.1 constitue un résultat typique montrant des mesures de directivité obtenues par Seiner *et al.* [17] pour différentes fréquences normalisées  $St$  (le nombre de Strouhal est basé sur le diamètre du jet). Il apparaît clairement que la partie dominante du bruit est confinée à l'intérieur d'un secteur angulaire qui, d'après les observations de Tanna [16] dépend essentiellement de la température du jet. A l'extérieur de ce secteur angulaire, les caractéristiques du bruit sont très différentes et constituent la seconde composante. Il s'agirait du bruit associé aux petites structures de la turbulence. En examinant une large gamme d'écoulements de jets, Tam [18] a proposé d'étendre cette décomposition aux jets subsoniques. Mais ce dernier point est encore très discuté. Une des questions fondamentales encore non résolue est celle posée par la validité de l'analogie de Lightill [19], à la base d'un grand nombre d'approches aéroacoustiques et dont le point de départ consiste à faire apparaître le bruit rayonné sous la forme d'une solution d'une équation de propagation classique.

Lorsqu'un jet supersonique n'est pas parfaitement adapté (ce qui est souvent le cas), on distingue d'autres composantes, dont l'origine semble liée à l'existence d'un système quasi-périodique d'ondes de chocs, confinées à l'intérieur du jet. Cela se manifeste par l'émergence d'une fréquence fondamentale (screech tone) dans le spectre mesuré en amont du jet, comme le montre la figure 1.2, et par des oscillations de l'écoulement (voir Seiner *et al.* [20]). Cette fréquence est d'autant plus marquée que la température du jet est grande (voir Massey *et al.* [21]) et est inévitablement associée à un bruit large bande (désigné par

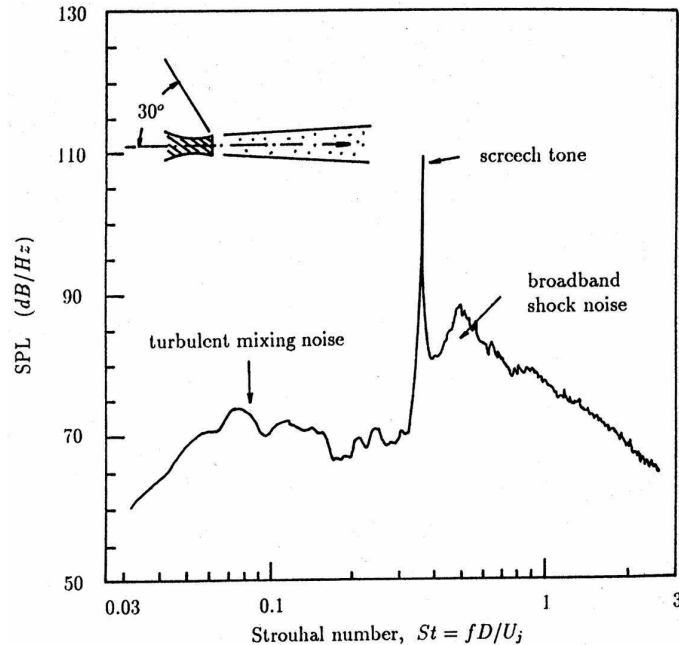


FIG. 1.2 – Niveau sonore (SPL pour Sound Pressure Level) relevé par un microphone placé à un angle de 30 deg, mesuré depuis la direction amont (Seiner [23]) pour un jet supersonique non adapté.

broadband shock noise sur la figure 1.2), dont un modèle a été proposé par Tam *et al.* [22]. Le modèle repose sur l'interaction (faible) des structures cohérentes et du système d'ondes de chocs qu'il est possible de voir comme un ensemble d'ondes stationnaires. En faisant l'hypothèse que les structures cohérentes n'ont pas d'échelle caractéristique de temps et de longueur, Tam s'est ramené à une théorie semi-empirique à deux paramètres, donnant ainsi une explication au bruit large bande. Mais ce modèle n'explique pas l'émergence d'une fréquence privilégiée en amont du jet.

Notons que parallèlement aux travaux expérimentaux et théoriques sur le bruit de jet supersonique, le développement de l'aéroacoustique numérique (parfois désignée par le sigle CAA pour *Computational AeroAcoustics*) permet aujourd'hui d'aborder des problèmes de plus en plus complexes. L'approche la plus simple, au moins formellement, consiste à procéder à un calcul de simulation directe (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*), c'est-à-dire à résoudre les équations de Navier-Stokes dans tout l'espace physique. Il s'agit là d'une méthode ambitieuse, qui présente de nombreuses difficultés, en particulier la nécessité de capter des échelles de longueur et d'énergie très différentes. Une alternative est donnée par la méthode de Kirchhoff où on se sert du fait que les équations qui régissent l'écoulement se ramènent à une équation des ondes loin de la région turbulente. Ainsi, à partir de la connaissance du champ aérodynamique sur une surface qui englobe le jet, on peut théoriquement extrapoler le champ acoustique. Mais étant donné la faible amplitude des fluctuations acoustiques, une telle méthode nécessite que



---

le calcul en champ proche soit extrêmement précis, éventuellement effectué par simulation directe, et donc cher. Il reste l'utilisation d'une analogie aéroacoustique traditionnelle qui nécessite un calcul incompressible du champ proche. En effet, il n'est pas indispensable de représenter le champ proche acoustique, le champ lointain étant reconstruit à partir du rayonnement d'un terme source, basé sur l'utilisation des équations d'Euler linéarisées simplement perturbées ou bien issu d'une modélisation stochastique de la turbulence.

Cette thèse est limitée aux jets axisymétriques faiblement inhomogènes dans une direction de l'espace et émergeant d'une tuyère, comme c'est le cas des jets de turboréacteurs. Pour faire simple, les équations seront considérées dans un système de coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ , centré sur l'axe de symétrie du jet, où l'axe de la variable  $x$  pointe dans la direction principale de l'écoulement. Le couple  $(r, \theta)$  se déduit du système de coordonnées cartésiennes par les relations  $z = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

## Chapitre 2

# Instabilités supersoniques locales

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la réponse impulsionnelle des écoulements supersoniques et confinés dans une direction de l'espace. Le point de vue adopté est celui de l'approximation localement parallèle. L'analyse des effets d'inhomogénéité spatiale fait intervenir des coupures dans l'espace des nombres d'ondes, qu'on peut voir comme des lignes au voisinage desquelles le problème perd son caractère local. Cela se manifeste par l'apparition d'ondes incompatibles avec les conditions limites et dont la description ne peut se faire qu'en termes de fonctions définies sur des variétés connexes de dimension deux (des surfaces de Riemann).

### 2.1 Problème physique, approche locale

Supposons que le système physique puisse être réduit à un modèle mathématique simple dans lequel les effets de viscosité sont négligeables. Plus précisément, le nombre de Reynolds  $Re$  est supposé prendre sa valeur limite (l'infini) en tout point du domaine  $\Omega$  occupé par le gaz. Pour simplifier un peu plus le problème, on suppose que ce dernier est parfait et de conductivité thermique nulle. Enfin, on suppose qu'il n'y a ni source de chaleur, ni force de volume dans  $\Omega$ . Avec ces hypothèses, les équations du mouvement peuvent se réduire à

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) + u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.4)$$

où  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement la pression, la masse volumique et les composantes de la vitesse du fluide au point géométrique de coordonnées  $(x, r, \theta)$  à l'instant  $t$ . Le symbole

$\gamma$  désigne la constante adiabatique, définie comme le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants. Il faut bien se rendre compte que certaines approximations faites pour écrire le système précédent se révèlent par une perte d'information qui peut remettre en cause la réalité physique de la solution. En particulier, la procédure qui consiste à annuler la contribution de certains opérateurs différentiels en identifiant à zéro le petit paramètre ( $1/Re = 0$ ) conduit ici à une réduction de l'ordre des équations.

On se retrouve donc avec un système de la forme  $F\phi = 0$ , où  $\phi$  désigne le vecteur inconnu (dont les composantes sont la vitesse, la pression et la masse volumique) et  $F$  est un opérateur différentiel non linéaire du premier ordre. La forme adimensionnelle des équations précédentes est obtenue en adoptant  $r_j$ ,  $u_j$  et  $\rho_j$  pour échelles caractéristiques de longueur, de vitesse et de masse volumique. On en déduit les échelles de pression  $\rho_j u_j^2$  et de temps  $r_j/u_j$ . À ce stade, le choix des échelles caractéristiques n'est pas essentiel puisqu'aucune configuration physique n'a été définie. Il ne s'agit ici que de définir ce qu'on entend par grandeurs adimensionnées, grandeurs qui seront désormais utilisées en tant qu'inconnues du problème physique. Pour ne pas introduire de difficulté d'écriture supplémentaire, on conserve les mêmes notations que dans les équations (2.1) à (2.4) pour désigner les variables et fonctions adimensionnées.

Nous concentrons maintenant notre attention sur l'évolution d'une perturbation infinitésimale  $\phi$  superposée à un écoulement de base, déterminé par  $\phi_0$ , qui vérifie lui même les équations du mouvement (2.1) à (2.4). *On se restreint ici aux écoulements de base permanents, axisymétriques, parallèles à la direction  $x$  et confinés dans la direction radiale*<sup>1</sup>. Le champ des vitesses se réduit donc à une seule composante non nulle  $u_0$ , fonction (à support borné) de la variable  $r$ . De plus, la pression  $p_0$  est supposée constante dans  $\Omega$ . Pour déterminer les équations d'évolution de la perturbation, il est courant d'introduire un paramètre  $\epsilon$  destiné à mesurer explicitement son amplitude. Insérant le changement de variable  $\phi \mapsto \phi_0 + \epsilon\phi$ , où  $\phi$  désigne désormais la perturbation, dans le système de départ (2.1) à (2.4) et développant formellement en puissances de  $\epsilon$ , on obtient un système d'équations dont on ne garde que les termes d'ordre  $\epsilon$ . Cette procédure génère un problème linéaire où l'opérateur associé se présente comme la dérivée fonctionnelle de  $F$  par rapport à  $\phi$  en  $\phi_0$ . Par substitution des équations (2.1) à (2.3) dans (2.4), on obtient à l'ordre  $\epsilon$  une équation différentielle linéaire pour la perturbation de pression  $p$ ,

$$D(u_0)^3 p - D(u_0) \left[ \frac{1}{\rho_0 M^2} \left( \Delta - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] p + \frac{2}{\rho_0 M^2} \frac{du_0}{dr} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r} = 0, \quad (2.5)$$

qu'on écrit encore  $Lp = 0$ , où  $L$  est un opérateur différentiel linéaire,  $D(u_0) = \partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x$  est l'analogue de la dérivée particulaire pour le champ de vitesses associé à l'écoulement de base et le symbole  $\Delta$  désigne le Laplacien dans  $\Omega$ , identifié à l'espace euclidien tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$ . En termes de grandeurs adimensionnées, le nombre de Mach  $M$  est défini par  $M^2 = 1/(\gamma p_0)$  et joue le rôle de paramètre de contrôle. Dans les régions de l'espace où l'écoulement est au repos ( $u_0 = 0$  et  $\rho_0$  constant), l'équation (2.5) se simplifie

---

1. Par un changement de référentiel, les écoulements uniformes loin de l'axe  $r = 0$  peuvent être définis par des fonctions nulles pour  $r \rightarrow \infty$ . En général, ces fonctions sont une donnée du problème.

en l'équation des ondes pour la fonction  $\partial p/\partial t$ , c'est-à-dire que  $L$  se réduit à

$$Lp = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 M^2} \Delta \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (2.6)$$

où la valeur que prend la masse volumique  $\rho_0$  est fixée par le choix de l'échelle caractéristique  $\rho_j$ . Dans la suite, on notera cette valeur  $\rho_\infty$ . C'est notre second paramètre de contrôle. Notons que l'opérateur défini par (2.6) est hyperbolique et qu'une solution peut très bien être discontinue, tandis que  $\Delta$  est elliptique et que toute solution de  $\Delta p = 0$  est nécessairement<sup>2</sup> "régulière" (c'est-à-dire indéfiniment dérivable et analytique). D'un autre côté, on voit que le passage de l'équation des ondes à l'équation de Laplace s'obtient par une procédure limite, en faisant tendre le nombre de Mach  $M$  vers zéro. D'un point de vue physique, cela signifie qu'à un instant  $t$  fixé, les effets de compressibilité ne se font sentir qu'à l'extérieur d'un  $O(1)$ -voisinage de l'écoulement. En effet, pour  $r > O(1)$  et  $M \rightarrow 0$ , l'équation des ondes est inchangée et s'obtient en effectuant un changement de variable adapté à la description des grandes longueurs d'ondes. D'une manière analogue, le double passage à la limite  $M \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow 0$  est certainement singulier au voisinage de  $t = 0$ . Il faut alors renormaliser le temps de telle façon qu'il soit bien adapté au phénomène ayant lieu au voisinage de  $t = 0$ .

L'analyse linéaire, reposant sur la version tronquée du système différentiel initial (2.1) à (2.4) rend compte de la dynamique tangente en  $\phi_0$ . Une propriété essentielle du problème est de permettre une analyse de l'évolution d'une perturbation quelconque  $\phi$  par superposition de composantes élémentaires obtenues par la décomposition sur une base propre de  $L$ . En pratique, le problème physique consiste à déterminer le comportement des modes propres comme solutions d'un problème aux limites, où les conditions limites doivent être compatibles avec l'équation (2.6), pour un nombre de Mach donné, éventuellement petit. Précisons ce qu'on entend par là et considérons le cas d'un jet immergé dans un fluide au repos. De nombreux auteurs ont montré qu'en présence d'un tel écoulement, certaines perturbations voient leur amplitude croître dans le temps, que ce soit dans le référentiel du laboratoire ou dans un référentiel animé d'une vitesse donnée (voir, par exemple, Monkewitz et Sohn [24, 25]). Mais ce champ de perturbations n'est pas confiné à l'intérieur du jet et par conséquent vérifie l'équation des ondes au voisinage et loin du jet, conformément à l'équation (2.6). Si on convient d'en chercher une solution sous la forme d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , l'équation des ondes se transforme en une équation elliptique, du type de celle d'Helmholtz, alors que l'équation des ondes est hyperbolique : c'est en général un problème de "diffusion" d'ondes et, sous des conditions aux limites et initiales adéquates, il admet une solution unique (voir à ce sujet le livre de Wilcox [26]). Une étude systématique des solutions de l'équation d'Helmholtz en domaine non borné conduit à les classer en "ondes divergentes" et "ondes convergentes". Des raisons physiques autant que mathématiques font que, pour le problème du rayonnement d'ondes engendrées par les vibrations d'un obstacle, on ne doit accepter que les ondes divergentes. Ajoutons qu'il est possible de montrer qu'avec cette condition, dite de rayonnement, le problème de Neumann et le problème de Dirichlet extérieur sont bien posés

---

2. Pour des conditions aux limites "régulières".

(pour le théorème d'unicité, le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Dautray et Lions [27]). On arrive ainsi à une formulation intuitive de la condition limite à adopter loin du jet : *toute onde acoustique rayonnée par le jet doit se comporter à l'infini "comme" une onde divergente*. En l'absence d'écoulement, la condition de rayonnement prend le nom de condition de Rellich (voir Zeytounian [28] et Euvrard [29]) et exprime le fait que les ondes acoustiques se comportent asymptotiquement comme des ondes simples divergentes. Mais tout ceci ne s'applique pas directement à l'équation (2.5). En particulier, on peut se demander si la présence d'instabilités dans un écoulement de jet est bien compatible avec la condition de rayonnement énoncée ci-dessus et si ce résultat se prolonge au cas où le nombre de Mach est un petit paramètre. En effet, il ne faut pas perdre de vue qu'à la limite  $M \rightarrow 0$ , le problème physique doit rendre compte des caractéristiques des ondes de pression, aussi bien dans le voisinage de l'écoulement que loin de celui-ci. Ce dernier point n'est pas assuré vu que dans les équations (2.5) et (2.6) la variable spatiale  $r$  est supposée *a priori* indépendante du nombre de Mach.

Dans ce chapitre, la démarche retenue est inspirée des travaux de Huerre et Monkewitz [30, 31] et Huerre et Rossi [32] sur la théorie des instabilités hydrodynamiques. Elle consiste à déterminer la réponse de l'écoulement à un forçage connu. On procède classiquement en deux étapes : (i) la première consiste à rechercher des solutions élémentaires du problème linéarisé, c'est-à-dire des solutions vérifiant le système (2.5) auquel on ajoute une condition initiale qui traduit mathématiquement que le système n'est perturbé qu'à l'instant  $t = 0$  en un point donné de  $\Omega$ . D'un point de vue physique, il s'agit de déterminer le champ d'ondes de pression généré par une impulsion localisée dans l'espace et le temps. Notons qu'en l'absence d'écoulement, l'équation pour la perturbation de pression se simplifie en l'équation des ondes qui possède la propriété supplémentaire d'être homogène dans la direction de la variable  $r$ , et donc dans les trois directions de l'espace. On peut donc en chercher une solution sous la forme d'une transformée de Fourier spatiale, ce qu'on fait dans la section 2.2.1 en faisant tendre le support de  $u_0(r)$  vers zéro (dans le cas d'un jet libre, cela revient à faire tendre le rayon du jet vers zéro). D'un point de vue mathématique, le problème est équivalent à imposer une condition initiale à l'équation (2.5) sous la forme du produit  $\delta_x \otimes \delta_t$  au second membre, où  $\delta$  est la distribution de Dirac à l'origine et  $\otimes$  désigne le produit tensoriel de distributions. Une fois la réponse impulsionnelle connue, on passe à la seconde étape (ii) : la solution associée à une source placée à l'origine s'obtient par un produit de convolution en temps. De même, la solution associée à une condition initiale quelconque s'obtient par une convolution spatiale.

Pour  $u_0 = 0$ , on peut chercher à déterminer le comportement radial des ondes de pression générées par un forçage localisé sur l'axe, invariant par translation dans une direction de l'espace, disons  $x$ , et de la forme  $\exp(-i\omega t)$ . Dans cette perspective, les instabilités sont modélisées par une simple condition limite, au point  $r = 0$  ( $y = 0$  et  $z = 0$ ). Mais il est évident qu'une telle modélisation n'est pas transposable directement au cas où la fonction  $u_0$  n'est pas identiquement nulle et c'est pourquoi il est prévu de tenir compte de la présence de l'écoulement moyen dans une seconde partie (section 2.2.2). Notons par ailleurs qu'à défaut de connaître explicitement le comportement radial de la solution de (2.5) à un instant donné, il est courant de chercher à l'approcher asymptotiquement pour

des temps longs. Nous traiterons la variable  $r$  de la même façon, pour décrire le champ de pression lointain, sous réserve que le passage à la limite  $r \rightarrow \infty$  ait un sens.

## 2.2 Fonction de Green locale

### 2.2.1 En l'absence d'écoulement

On se limite ici à une fonction de Green  $g = \partial G / \partial t$  (ou éventuellement à une distribution de Green) à support dans le demi-espace  $t \geq 0$  de  $\mathbb{R}^3$ , tempérée en  $(y, z)$ , à  $t$  fixé et dont la transformée de Fourier en  $(y, z)$  est suffisamment "régulière" en  $t$  pour  $t > 0$ . L'existence de solutions élémentaires est assurée par le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, mais  $G$  n'est évidemment pas unique puisqu'on peut lui ajouter une solution arbitraire de l'équation homogène associée.

Pour toute fonction  $\varphi$  indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide, on définit la transformée de Fourier de  $g$  par  $\langle \hat{g}, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle$  (voir Schwartz [33, 34]), avec

$$\hat{\varphi}(k_y, k_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y, z) \exp(-i(k_y y + k_z z)) dy dz, \quad (2.7)$$

où  $k_y$  et  $k_z$  sont les composantes du vecteur d'onde, de module  $k$ , dans les directions données par  $y$  et  $z$ . Pour alléger les notations, on désigne par  $\mathcal{F}\varphi$  la transformée de Fourier de la fonction  $\varphi$ , définie par (2.7). Appliquons  $\mathcal{F}$  à l'équation (2.6) où le second membre est remplacé par  $\delta_y \otimes \delta_z \otimes \delta_t$  et admettons qu'on puisse permuter les symboles  $\mathcal{F}$  et  $\partial^2 / \partial t^2$ . On arrive à une équation différentielle en  $t$ , dépendant du paramètre  $k$ , qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial t^2} + \frac{k^2 \hat{g}}{\rho_\infty M^2} = \delta_t. \quad (2.8)$$

Vu que  $g$  est à support dans le demi-espace  $t \geq 0$ , il en est évidemment de même pour  $\hat{g}$ , ce qui impose de chercher une solution de la forme  $Y(t)\hat{g}_k(t)$ , où  $Y$  est la fonction de Heaviside. L'équation différentielle au sens des distributions signifie que, (i) pour  $t > 0$ , elle est vérifiée au sens des fonctions et (ii)  $\hat{g}_k(0) = 0$ ,  $\hat{g}'_k(0) = 1$ , ces deux dernières conditions permettant de fixer les constantes d'intégration. D'où finalement

$$g(y, z, t) = Y(t) \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\rho_\infty} M}{k} \sin \left( \frac{kt}{\sqrt{\rho_\infty} M} \right) \right], \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  désigne la transformée inverse de  $\mathcal{F}$ . La permutation non justifiée de  $\mathcal{F}$  et de  $\partial^2 / \partial t^2$  peut mettre un doute quant à la justesse de la formule (2.9) et c'est pourquoi il convient de considérer la démarche précédente comme essentiellement heuristique. Le lecteur peut néanmoins vérifier que la formule obtenue est bien correcte, en reportant (2.9) dans l'équation (2.6) et en se limitant à des fonctions-test  $\varphi$  indépendantes de  $\theta$  (avec  $z = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ ) puisque l'opérateur  $L$  est invariant par rotation autour de l'origine.

La fonction dont on cherche la transformée de Fourier inverse ne dépend que de  $k$  et par conséquent sa transformée de Fourier inverse ne dépend que du rayon  $r$  et est donnée par la transformée de Hankel d'ordre zéro (Schwartz [33]). D'où

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\rho_\infty M}}{k} \sin \left( \frac{kt}{\sqrt{\rho_\infty M}} \right) \right] = \frac{\sqrt{\rho_\infty M}}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(kr) \sin \left( \frac{kt}{\sqrt{\rho_\infty M}} \right) dk, \quad (2.10)$$

à  $t$  fixé, où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro. Tout aussi formellement, Gradshtein et Ryzhik [35] donnent

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(kr) \sin \left( \frac{kt}{\sqrt{\rho_\infty M}} \right) dk = \frac{Y(t - \sqrt{\rho_\infty M}r)}{2\pi \sqrt{t^2/(\rho_\infty M^2) - r^2}}, \quad (2.11)$$

d'où finalement

$$g(r,t) = \frac{\sqrt{\rho_\infty M}}{2\pi} \frac{Y(t)Y(t - \sqrt{\rho_\infty M}r)}{\sqrt{t^2/(\rho_\infty M^2) - r^2}}. \quad (2.12)$$

On peut montrer que l'intégrale au membre de droite de (2.10) est bien semi-convergente, sauf pour  $t = \sqrt{\rho_\infty M}r$  et représente bien la transformée inverse cherchée.

Considérons maintenant une source placée à l'origine et dont l'intensité, nulle pour  $t < 0$ , est décrite par une fonction exponentielle  $\exp(-i\omega t)$  pour  $t > 0$ , où la pulsation  $\omega$  est un nombre complexe de partie imaginaire positive ou nulle, pour exprimer qu'il s'agit d'un signal amplifié ou marginal. La perturbation qui en résulte s'obtient par convolution en temps avec le forçage  $Y(t) \exp(-i\omega t)$ , c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\partial p}{\partial t}(r,t) = g(r,t) *_t Y(t) \exp(-i\omega t), \quad (2.13)$$

qui implique que le support en  $t$  de  $\partial p/\partial t$ , à  $r$  fixé, est contenu dans  $[\sqrt{\rho_\infty M}r, +\infty[$ . Deux conséquences à cela : la perturbation est nulle pour  $t < 0$  et, à  $t > 0$  fixé, le support de  $\partial p/\partial t$  dans  $\Omega$  est contenu dans le cylindre  $r \leq t/(\sqrt{\rho_\infty M})$ . La perturbation créée à  $t = 0$  en  $r = 0$  a parcouru la distance  $t/(\sqrt{\rho_\infty M})$  à l'instant  $t$ , la célérité des ondes étant finie et égale à  $1/(\sqrt{\rho_\infty M})$ . Insérant (2.12) dans (2.13), on arrive à

$$\frac{\partial p}{\partial t}(r,t) = Y(t - \sqrt{\rho_\infty M}r) \frac{\sqrt{\rho_\infty M}}{2\pi} \int_{r\sqrt{\rho_\infty M}}^t \frac{\exp(i\omega(t' - t))}{\sqrt{t'^2/(\rho_\infty M^2) - r^2}} dt', \quad (2.14)$$

qui correspond au régime transitoire. À la limite  $t \rightarrow \infty$ , on a

$$\int_{r\sqrt{\rho_\infty M}}^t \frac{\exp(i\omega t')}{\sqrt{t'^2/(\rho_\infty M^2) - r^2}} dt' \rightarrow \sqrt{\rho_\infty M} \int_1^{+\infty} \frac{\exp(ik_0 ru)}{\sqrt{u^2 - 1}} du, \quad (2.15)$$

où  $k_0 = \sqrt{\rho_\infty M} \omega$  est le nombre d'onde associé à la pulsation  $\omega$ . Si  $\omega$  est un nombre réel strictement positif, l'intégrale précédente peut être évaluée en utilisant les représentations intégrales de Mehler-Sonine [36]. Si  $u$  est un nombre complexe, il convient de considérer l'intégrand de (2.15) non plus comme une fonction définie sur l'intervalle réel  $u > 1$ , mais

comme une fonction complexe de  $u = u_r + iu_i$  définie sur une surface de Riemann en rapport avec la racine carrée au dénominateur (voir annexe A). Les zéros  $u = \pm 1$  de  $\sqrt{u^2 - 1}$  apparaissent alors non plus comme des points singuliers isolés, mais comme des points de branchement inclus dans le domaine de définition de la surface de Riemann. La signification physique de ces points s'établit facilement, en considérant le changement de variable  $u = t/(r\sqrt{\rho_\infty}M)$  : ce sont les points pour lesquels la vitesse  $r/t$  s'identifie en valeur absolue à la vitesse du son. *La bande  $B_0$  du plan complexe, définie par  $-1 < u_r < 1$  correspond donc aux ondes se propageant à une vitesse de phase supersonique.*

Cherchons maintenant à exprimer l'intégrale impropre (2.15) en termes de fonctions cylindriques (voir annexe B) pour une pulsation complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , avec  $\omega_i \geq 0$ . Pour cela, on tient compte du résultat selon lequel toute fonction cylindrique peut se représenter sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de Bessel  $J_\nu$  et de Weber  $W_\nu$ , cette dernière se déduisant de la connaissance de  $J_\nu$  et  $J_{-\nu}$ . Avec cette remarque, on peut se limiter aux fonctions  $J_{\pm\nu}$  dont la principale propriété est évidemment d'être des solutions de l'équation différentielle de Bessel, i. e.  $\nabla_\nu J_{\pm\nu} = 0$ , où  $\nabla_\nu$  désigne l'opérateur différentiel de Bessel (voir annexe B). Pour des raisons qui seront clarifiées dans la suite, nous allons nous intéresser aux intégrales de la forme

$$z^\nu \int_\gamma \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du, \quad (2.16)$$

où  $\gamma$  est un chemin reliant deux points *a priori* quelconques  $a$  et  $b$ . Notons que pour  $\nu \rightarrow 0$ , on retrouve l'intégrale de (2.15) avec  $z = k_0 r$ , dont le signe de la partie réelle est celui de  $\omega_r$ . L'intégrale (2.16) est solution de l'équation de Bessel si le chemin  $\gamma$  est tel que l'équation

$$\nabla_\nu \left\{ z^\nu \int_\gamma \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du \right\} = \left[ \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{-\nu-1/2}} \right]_a^b = 0, \quad (2.17)$$

soit satisfaite. On peut donc choisir pour  $\gamma$  un lacet de type  $\gamma_1$  qui soit tel que l'intégrand retourne à sa valeur en  $a = b$  après que  $u$  ait parcouru le contour d'intégration dans le sens indiqué sur la figure 2.1. On peut aussi choisir un chemin de type  $\gamma_2$  pour lequel la fonction s'annule aux deux extrémités, par exemple en  $i\infty$  pour  $\omega_r > 0$ . L'intégrale prise le long du chemin  $\gamma_1$  ou  $\gamma_2$  converge et l'intégrand peut s'exprimer sous la forme d'une série de Laurent uniformément convergente<sup>3</sup>.

Considérons d'abord un chemin de type  $\gamma_1$ . On peut procéder au développement en série de la fonction exponentielle dans (2.16), ce qui conduit à

$$z^\nu \int_{\gamma_1} \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m z^{\nu+m}}{m!} \int_{\gamma_1} \frac{u^m}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du. \quad (2.18)$$

Le choix du contour  $\gamma_1$  est déterminant : si celui-ci est choisi symétrique par rapport à l'origine, les intégrales de fonctions impaires ( $m = 2p + 1$ ,  $p$  entier positif) s'annulent

---

3. C'est bien le cas pour le chemin  $\gamma_2$  si ce dernier est choisi à l'extérieur du cercle  $|u| = 1$ .



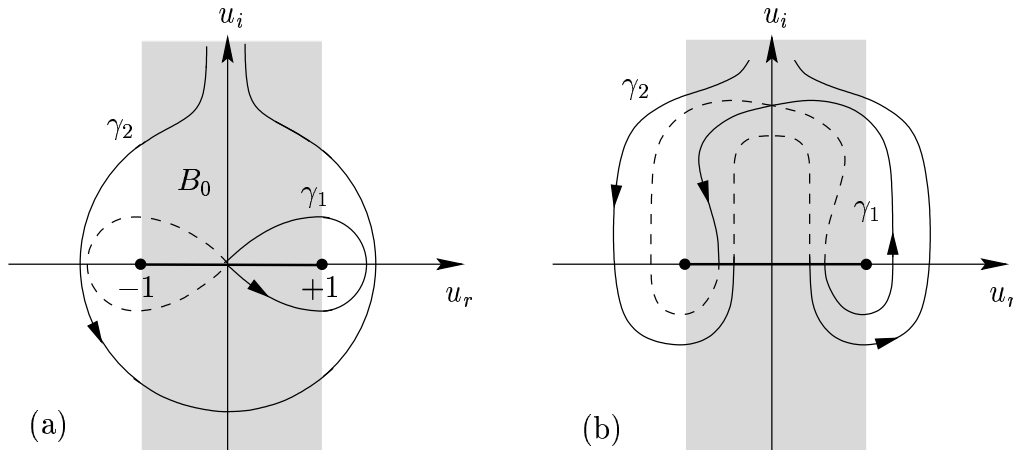


FIG. 2.1 – Chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sur la surface de Riemann associée à l'intégrant de (2.16). (a) : chemins avant déformation, (b) : chemins après déformation.

deux à deux, et il ne reste plus qu'une somme d'intégrales de fonctions paires le long de la restriction du chemin  $\gamma_1$  au premier feuillet de Riemann, c'est à dire au demi-plan  $u_r \geq 0$ . Sous réserve que la partie réelle de  $\nu + 1/2$  soit strictement positive, on peut déformer la partie de  $\gamma_1$  restante jusqu'à la confondre avec le segment  $0 < u_r < 1$  pris deux fois, en sens inverse l'un de l'autre, la première partie étant située au-dessous de la coupure et la seconde, au-dessus. Vu qu'on a  $\arg(u - 1) = \pm\pi$  si  $u_i \rightarrow 0^\pm$ , l'intégrale prise le long de  $\gamma_1$  se réduit à une intégrale prise le long du segment  $0 < u_r < 1$ . Ce qui sous-entend bien sûr que  $u$  est dans  $B_0$ . Il reste

$$z^\nu \int_{\gamma_1} \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du = 2i \cos(\nu\pi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\nu+2m}}{(2m)!} \int_0^1 \frac{u^{p-1/2}}{(1-u)^{1/2-\nu}} du, \quad (2.19)$$

où l'intégrale du membre de droite peut s'exprimer sous la forme de fonctions Eulériennes (voir Schwartz [33]). De la définition de la fonction de Bessel  $J_\nu$  par une série entière (voir annexe B), on déduit l'égalité

$$\int_{\gamma_1} \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du = \frac{2^{\nu+1} \pi i \Gamma(1/2) J_\nu(z)}{\Gamma(1/2 - \nu) z^\nu}, \quad (2.20)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler. Ainsi, l'intégrale (2.16) peut s'exprimer sous la forme du produit de la fonction de Bessel  $J_\nu$  et d'un facteur multiplicatif indépendant de  $z$ . En procédant d'une manière similaire avec le chemin  $\gamma_2$ , (cette fois-ci, on développe la fonction  $(u^2 - 1)^{\nu-1/2}$  en série de puissances descendantes), on arrive à la relation

$$\int_{\gamma_2} \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du = \frac{2^{\nu+1} \pi i \Gamma(1/2) J_{-\nu}(z)}{\Gamma(1/2 - \nu) z^\nu} \exp(-\nu\pi i). \quad (2.21)$$

Notons que même si la relation (2.19) n'a été prouvée que pour certaines valeurs de  $\nu$ , le résultat est vrai pour tout  $\nu$  par la propriété du prolongement analytique.

Des équations (2.20) et (2.21), on peut déduire toute fonction cylindrique comme une combinaison linéaire des intégrales prises le long de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , et ceci pour n'importe quel couple de nombres complexes  $(\nu, z)$  tels que la partie réelle de  $z$  soit positive et  $\nu$  n'annule pas le caractère multiforme du dénominateur de l'intégrand ( $2\nu$  ne doit pas être un entier impair). En outre, la déformation des contours d'intégration  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  permet, sous certaines conditions, d'exprimer les fonctions de Hankel sous la forme d'une seule intégrale. Pour cela, faisons tendre l'image de  $\gamma_1$  vers celle de  $\gamma_2$ , comme l'illustre la figure 2.1 (b). Si on fait tendre le point d'intersection des deux chemins avec l'axe imaginaire vers l'infini pour annuler la contribution des intégrales le long de l'axe réel, et qu'on fait tendre les points d'intersections avec l'axe réel vers les points de branchement ( $u_r$  tend vers  $\pm 1$  selon que  $u_r$  est positif ou négatif), on voit qu'il ne reste plus que la contribution des intervalles  $0 < u_i < \infty$ ,  $u_r = \pm 1$ . Avec cette procédure, on déduit de la définition de la fonction de Hankel  $H_\nu^{(1)}$  de première espèce et d'ordre  $\nu$ ,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - J_\nu(z) \exp(-\nu\pi i)}{i \sin(\nu\pi)}, \quad (2.22)$$

(la définition devant être prise à la limite si  $\nu$  est un entier), la relation suivante :

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{\Gamma(1/2 - \nu)z^\nu}{2^\nu \pi i \Gamma(1/2)} \left\{ \int_{1+i\infty}^1 \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du + \int_1^{1+i\infty} \frac{\exp(izu)}{(u^2 - 1)^{1/2-\nu}} du \right\}, \quad (2.23)$$

qu'on peut étendre à d'autres valeurs de  $z$  par la propriété du prolongement analytique et la déformation du contour d'intégration. Ainsi, pour  $-\pi/2 < \eta < 3\pi/2$ , on peut remplacer la borne  $1 + i\infty$  dans (2.23) par  $i\infty \exp(-i\eta)$  sous réserve d'avoir l'inégalité  $-\pi/2 + \eta < \arg(z) < \pi/2 + \eta$  pour assurer la convergence absolue des intégrales. La représentation intégrale de  $H_\nu^{(1)}$  peut alors s'étendre aux valeurs de  $\arg(z)$  comprises entre  $-\pi$  et  $2\pi$ .

Revenons maintenant à l'intégrale (2.15) qui donne le comportement radial des ondes acoustiques. Pour cela, on considère le cas  $\nu = 0$  et  $\eta = \pi/2$  pour lequel on sait que  $\arg(z)$  est compris entre 0 et  $\pi$ . Le contour d'intégration de (2.23) peut alors être déformé jusqu'à s'identifier à l'intervalle réel allant du point de branchement jusqu'à l'infini, pris deux fois. Pour tout nombre complexe  $\omega$  tel que  $\omega_i \geq 0$ , on déduit

$$\frac{\partial p}{\partial t} \rightarrow \frac{\rho_\infty M^2}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\exp(ik_0 r u - i\omega t)}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \frac{\rho_\infty M^2}{4} i H_0^{(1)}(k_0 r) e^{-i\omega t}, \quad (2.24)$$

pour  $t \rightarrow \infty$ , où  $k_0$  est un nombre complexe de partie imaginaire positive. Le comportement des ondes loin de l'origine est donc compatible avec la condition de rayonnement énoncée dans la section 2.1. En effet, pour  $r \rightarrow \infty$  et  $\omega_i = 0$ , le développement asymptotique de la fonction de Hankel (Annexe B) conduit à

$$H_0^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp \left[ i \left( k_0 r - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O(r^{-3/2}), \quad (2.25)$$

qui correspond bien à une onde qui s'éloigne de l'origine avec la célérité  $\omega/k_0 = 1/(\sqrt{\rho_\infty} M)$ , l'amplitude étant décroissante en  $1/\sqrt{r}$ . D'un point de vue énergétique, on constate que

le flux d'énergie rayonnée vers l'extérieur d'un disque de rayon suffisamment grand est fini, et ne dépend pas de  $r$  puisque la surface d'un cylindre entourant l'axe  $r = 0$  varie en  $1/r$  : l'onde simple divergente associée à (2.25) emporte, ou "rayonne" de l'énergie vers l'infini. Pour  $\omega_i > 0$ , le comportement asymptotique est toujours donné par (2.25), mais la décroissance de l'amplitude de la perturbation, pour  $r \rightarrow \infty$ , est exponentielle. Dans ce cas, *le flux d'énergie rayonnée est une fonction exponentiellement décroissante de  $r$  et l'onde divergente ne rayonne pas d'énergie vers l'infini*. Ce résultat précise le lien qui unit le comportement radial d'une perturbation au comportement temporel de sa source, modélisant d'une certaine manière la dynamique des ondes d'instabilités (amplifiées ou non en  $r = 0$ ) à l'extérieur d'un écoulement axisymétrique. Mais la modélisation adoptée jusqu'ici n'est pas satisfaisante puisqu'elle ne fait pas intervenir le déplacement des ondes d'instabilités au sein de l'écoulement, dans la direction principale de l'écoulement. C'est l'objet de la section 2.2.2.

Notons que pour  $\omega_r < 0$ , l'expression (2.24) est toujours valable<sup>4</sup>, ainsi que les conclusions énergétiques précédentes. Si  $\omega_r$  est petit, disons  $\omega_r = \epsilon$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$ , le domaine de validité du comportement donné par (2.25) se réduit à  $r > O(1/\epsilon)$ . Si  $r = O(1)$ , la variable  $k_0 r$  dans la fonction de Hankel est de l'ordre de grandeur de  $\epsilon$  et le comportement radial des ondes est dominé par la singularité logarithmique de la fonction de Hankel d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'on a

$$H_0^{(1)}(k_0 r) = \frac{2i \ln(k_0 r)}{\pi} + O(1), \quad (2.26)$$

qui, à l'ordre le plus bas, correspond à la fonction de Green du Laplacien (Schwartz [33]), à un facteur multiplicatif près. Ce résultat n'est pas modifié si au lieu de prendre  $\omega_r$  petit, on s'intéresse aux écoulements faiblement compressibles, i.e.  $M = \epsilon$ .

### 2.2.2 En présence d'un écoulement

On cherche à déterminer la fonction de Green  $G$  de l'opérateur défini par (2.5) et satisfaisant à une condition de rayonnement. Rappelons que l'écoulement de base est complètement défini par la connaissance des fonctions  $u_0$  et  $\rho_0$ , et que loin de l'axe de symétrie, on a  $u_0 = 0$  et  $\rho_0 = \rho_\infty$ . Dans cette partie, on réduit l'analyse théorique au cas des écoulements de base uniformes au voisinage de  $r = 0$ . Nous prendrons pour échelles caractéristiques de vitesse et de masse volumique, les valeurs que prennent les fonctions  $u_0$  et  $\rho_0$  dans cette région. L'échelle caractéristique de longueur est fixée par le plus grand rayon pour lequel l'écoulement est uniforme. Il en résulte que pour  $r < 1$ , la configuration de base est définie par  $u_0 = \rho_0 = 1$  et par des fonctions, prises continûment dérivables, dans la zone de cisaillement. On exclut ainsi certains cas limites comme les écoulements définis par morceaux, pour lesquels les dérivées sont à prendre au sens des distributions.

Conformément à ce qui a été dit dans la section 2.1, de tels écoulements de base sont bien axisymétriques, permanents et parallèles à la direction  $x$ . Une conséquence est que les coefficients de l'équation (2.5) sont indépendants de  $x$ ,  $\theta$  et  $t$ , ce qui entraîne

---

4. On peut construire une représentation intégrale de la fonction de Hankel de deuxième espèce pour  $-\pi < \arg(z) < \pi$  et montrer que  $H_0^{(1)}(k_0 r) = -H_0^{(2)}(-k_0 r)$  dans (2.24), pour  $\omega_i \geq 0$ .

que l'opérateur  $L$  est homogène dans les directions correspondantes. Pour simplifier le problème, exprimons  $G$  sous la forme d'une série de Fourier de distributions,

$$G(x, r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n(x, r, t) \exp(in\theta), \quad (2.27)$$

supposée convergente pour tout triplet  $(x, r, t)$ . Les coefficients de Fourier sont supposés admettre une représentation intégrale sous la forme de transformées de Fourier-Laplace,

$$G_n(x, r, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{F_k} \int_{L_\omega} \hat{G}_n(k, r, \omega) \exp[i(kx - \omega t)] d\omega dk, \quad (2.28)$$

où les contours d'intégration  $L_\omega$  et  $F_k$  sont choisis de manière à satisfaire le principe de causalité et rendre les intégrales absolument convergentes, assurant ainsi que  $G$  et sa transformée spatiale, sont à support dans le demi-espace  $t \geq 0$ . D'un point de vue géométrique, on constate que le mode azimutal  $n = 0$  est un mode axisymétrique, alors que les modes entiers non nuls sont des modes "hélicoïdaux", associés à une structure spatiale en  $\exp(i(kx + n\theta))$ . Dans la suite,  $n$  sera considéré comme un paramètre, au même titre que le nombre de Mach ou la température moyenne de l'écoulement. La substitution de (2.27) et (2.28) dans l'équation (2.5), où le second membre est remplacé par le produit tensoriel  $\delta_x \otimes \delta_t \otimes \delta_{r_0}$ , conduit à (i) l'équation différentielle

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{G}_n}{\partial r} \right) + \left( \frac{2k}{\omega - ku_0} \frac{du_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) \frac{\partial \hat{G}_n}{\partial r} - \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{G}_n = 0, \quad (2.29)$$

à prendre au sens des fonctions pour  $r$  différent de  $r_0$ , et (ii) aux relations de saut

$$\hat{G}_n(r_0^-, k, \omega) - \hat{G}_n(r_0^+, k, \omega) = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \hat{G}_n}{\partial r}(r_0^+, k, \omega) - \frac{\partial \hat{G}_n}{\partial r}(r_0^-, k, \omega) = \frac{i\rho_0(r_0)M^2}{u_0(r_0)k - \omega}, \quad (2.31)$$

qui, comme dans la section précédente, expriment que la discontinuité de la fonction de Green au point  $r_0$  apparaît dans ses dérivées première et seconde sous forme de sommes de distributions de Dirac  $\delta_{r_0}$  et  $\delta'_{r_0}$ , dont le support  $r_0$  est localisé dans la zone de mélange. Dans (2.29), la fonction  $\lambda$  est définie par la relation  $\lambda^2 = k^2 - \rho_0 M^2 (u_0 k - \omega)^2$ .

Les relations (2.30) et (2.31) forment un système d'équations linéaires permettant de déterminer, avec les conditions de bord, les constantes d'intégration. Ces constantes sont solutions d'un système algébrique, qu'on obtient en remplaçant  $\hat{G}_n$  par la solution générale de (2.29) dans les équations (2.30) et (2.31). Mais pour que ce système admette des solutions non triviales, il faut que son déterminant soit non nul, ce dernier étant une fonction des nombres complexes  $k$  et  $\omega$ . Le déterminant induit ainsi une relation implicite entre  $k$  et  $\omega$ , dite de dispersion, et qu'on représente formellement par  $D(k, \omega; r_0) = 0$  ou  $D(k, \omega) = 0$ . Il est évident que la relation de dispersion dépend des conditions de bord, par l'intermédiaire des solutions de (2.29) et c'est pourquoi il est important de spécifier

la correspondance entre  $k$  et  $\omega$  avant de procéder à l'évaluation de l'intégrale (2.28). On trouve une observation analogue dans les travaux de Huerre et Monkewitz [30], [31], qui soulignent la nécessité de prendre en considération la non-analyticité de la transformée de la fonction de Green, au voisinage de l'axe imaginaire  $k_r = 0$ . Son domaine de définition consiste alors en une surface de Riemann à deux feuillets. Mais dans leurs calculs, Huerre et Monkewitz ne tiennent pas compte des effets de compressibilité et réduisent l'analyse aux nombres d'ondes positifs, excluant ainsi la contribution de la coupure, identifiée à l'axe imaginaire. Nous allons adopter un point de vue complémentaire en cherchant à isoler le rôle de la vitesse du son dans la structure du domaine d'holomorphic de  $\hat{G}_n$ . La coupure mise en avant par Huerre et Monkewitz pour  $M = 0$  sera considérée comme un cas limite.

### Coupures et surfaces de Riemann

Dans (2.29), la variable  $\lambda$  est définie par un polynôme irréductible, pour tout  $r$  fixé. Dans les régions de l'espace  $\Omega$  où l'écoulement est uniforme,  $\lambda$  ne dépend plus que du nombre d'onde complexe  $k$  et de la pulsation  $\omega$ . De plus, l'équation (2.29) se simplifie en une équation beaucoup plus simple qui peut se ramener à une équation de Bessel d'ordre entier  $n$  pour presque tout couple de nombres complexes  $(k, \omega)$ . Par exemple, pour  $r$  suffisamment grand, la vitesse de l'écoulement s'identifie à zéro et la masse volumique à  $\rho_\infty$ . Il en résulte que l'équation (2.29) se réduit à

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{G}_n}{\partial r} \right) - \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \hat{G}_n = 0, \quad (2.32)$$

où  $\lambda$  est une fonction algébrique, dont toute branche holomorphe est solution de

$$D_\lambda(\lambda, k, \omega) = k^2 - \lambda^2 - [k_0(\omega)]^2 = 0, \quad (2.33)$$

où  $k_0(\omega) = \sqrt{\rho_\infty \omega M}$  est le nombre d'onde pour lequel la vitesse de phase égale celle du son (voir section 2.2.1). La relation (2.33) peut être interprétée comme une seconde relation de dispersion, analogue à celle qu'on obtient en acoustique, lorsqu'on cherche à établir le comportement du champ de pression dans un guide d'onde. Pour  $\omega$  fixé, les points singuliers de l'équation algébrique sont donnés par  $k = \pm k_0$  et  $k = \infty$  (voir annexe A). Les deux premiers points  $\pm k_0$  sont des racines multiples de l'équation (2.33), vue comme un polynôme en  $\lambda$ , à  $\omega$  et  $k$  fixés. Ils annulent à la fois l'équation (2.33) et sa dérivée par rapport à  $\lambda$ . Les points de branchement à distance finie de l'origine correspondent donc aux nombres d'ondes pour lesquels la fonction  $d\omega/d\lambda$  s'annule, en vertu du théorème des fonctions implicites. Le dernier point  $k = \infty$  a une nature différente puisqu'il annule le coefficient du plus haut degré du polynôme en  $K = 1/k$ . Pour le voir, il suffit de remplacer  $k$  par  $1/K$  et de considérer l'équation  $K^2 D_\lambda(\lambda, 1/K, \omega)$  au voisinage de  $K = 0$ . En dehors des points singuliers, on peut faire le changement de variable  $z = i\lambda_j r$ , où  $\lambda_j$  est une branche holomorphe de (2.33). L'équation (2.32) se simplifie alors en une équation de Bessel pour la variable  $z$ , dont la solution générale peut s'écrire sous la forme d'une

combinaison linéaire des fonctions de Hankel de première espèce  $H_n^{(1)}(z)$  et de seconde espèce  $H_n^{(2)}(z)$ . Les fonctions de Hankel d'ordre  $n$  déterminent donc le comportement radial des ondes de pression, au même titre que la fonction de Hankel d'ordre zéro, en l'absence d'écoulement. Au voisinage des points de branchement  $\pm k_0$ , le module de la fonction algébrique tend vers zéro, et peut être considéré comme un petit paramètre. On en déduit que pour  $n = 0$ , le comportement de la fonction de Hankel est donné par (2.26) pour  $r = O(1)$  et par (2.25) pour  $r > O(1/\lambda)$ . Cette observation traduit physiquement qu'au voisinage des points de branchement finis, l'évolution radiale de tout mode axisymétrique est de nature hydrodynamique pour  $r = O(1)$ . Pour  $k = \pm k_0$ , on pourrait reprendre l'équation (2.32), avec  $\lambda = 0$ . Toutefois,  $\lambda$  ne définit pas un problème de perturbation singulière et on peut s'attendre à ce que le comportement des fonctions de Hankel pour  $\lambda \rightarrow 0$  constitue bien une approximation uniformément valable<sup>5</sup> sur la surface de Riemann associée à  $\lambda$ , qu'on note désormais  $R_\lambda$ .

Intéressons nous maintenant aux discontinuités des branches holomorphes  $\lambda_j$  où  $j$  vaut 1 ou 2 selon qu'on s'intéresse au premier ou au second feuillet de  $R_\lambda$  lorsque la pulsation décrit le chemin  $L_\omega$ . Ces discontinuités sont associées à des coupures (voir annexe A) qui permettent de passer d'un feuillet à un autre. Ces lignes de discontinuité sont analogues à celles qui interviennent en physique des plasmas, lorsqu'on cherche à établir la relation de dispersion associée aux solutions des équations de Vlasov-Poisson (Weitzner [38], Derfler [39]). Dans ce cas, les points de branchement finis correspondent aux nombres d'ondes pour lesquels la vitesse des particules atteint la vitesse de la lumière. Ici, le rôle de la vitesse de la lumière est joué par la vitesse du son, et les coupures sont choisies de telle sorte que la condition de rayonnement soit vérifiée en tout point du premier feuillet de  $R_\lambda$ . Considérant la première branche holomorphe, la condition précédente s'écrit

$$-\pi/2 \leq \arg(\lambda_1(k, \omega)) < \pi/2, \quad (2.34)$$

pour  $\omega_r > 0$ , et l'espace des solutions de (2.32) pour  $r > r_0$  se réduit à un espace de dimension 1, engendré par la fonction  $\Phi$ , qu'on normalise de façon à avoir

$$\Phi(r, k, \omega; r_0) \rightarrow H_n^{(1)}(i\lambda_1(k, \omega)r), \quad (2.35)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ . L'égalité dans (2.34) signifie que lorsque la partie réelle de la branche  $\lambda_1$  s'annule, la condition de rayonnement est vérifiée, puisque sa partie imaginaire est négative. De même, si  $\omega_r < 0$ , l'égalité n'a plus lieu pour  $-\pi/2$ , mais pour  $\pi/2$ . Ainsi définies, les coupures ont une signification physique en étroite relation avec les conditions de bord : elles désignent les points, communs aux deux feuillets de  $R_\lambda$ , pour lesquels le comportement asymptotique de la fonction de Hankel de première espèce correspond à des ondes qui s'éloignent avec la célérité  $\omega/|\lambda_{1,i}|$ , où  $\lambda_{1,i}$  désigne la partie imaginaire de  $\lambda_1$ , l'amplitude étant décroissante en  $1/\sqrt{r}$  pour  $r \rightarrow \infty$ . Le voisinage des extrémités  $\pm k_0$  des coupures (on pourrait aussi parler d'une seule coupure sur la sphère de Riemann) répond à une structure plus complexe, que nous aborderons dans le chapitre 4. Une façon

<sup>5</sup>. Le point  $\lambda = 0$  est un point de régularité de l'équation de Bessel (annexe B), ce qui n'est pas le cas du point à l'infini (voir, par exemple, Fuchs et Levin [37]).

d'obtenir les équations des coupures consiste simplement à annuler la partie réelle de  $\lambda$  dans (2.33), ce qui est équivalent à rendre  $\lambda^2$  négatif ou nul. D'après l'équation (2.33), les coupures sont définies par

$$k^2 - [k_0(\omega)]^2 \leq 0, \quad (2.36)$$

d'où on tire les équations

$$k_r k_i = \rho_\infty M^2 \omega_r \omega_i, \quad (2.37)$$

$$k_r^2 - k_i^2 \leq \rho_\infty M^2 (\omega_r^2 - \omega_i^2), \quad (2.38)$$

qui correspondent à des segments d'hyperboles délimités par les points de branchement  $\pm k_0$ , pour  $\omega$  fixé, ce qui signifie d'ailleurs que les coupures sont contenues dans le domaine  $B_0$  des ondes de vitesse de phase supersonique. C'est un fait remarquable car cela indique qu'une condition suffisante pour qu'une onde d'instabilités rayonne de l'énergie pour  $r \rightarrow \infty$  est que sa vitesse de phase soit localement supersonique (relativement à celle du son mesurée à l'extérieur de l'écoulement).

La figure 2.2 montre la configuration des coupures dans un cas où  $\omega_r$  est positif. Lorsque  $\omega$  décrit le contour d'intégration  $L_\omega$ , les coupures se déforment en accord avec les équations (2.37) et (2.38). Or, on sait que pour que le principe de causalité soit vérifié, il faut que  $L_\omega$  soit contenu dans le domaine de convergence absolue de la transformée temporelle, ce qui implique que  $\omega_i$  est positif. On en déduit qu'il existe une bande horizontale du plan complexe de la variable  $k$  centrée sur l'axe réel et non concernée par la déformation des coupures. Cette bande est d'autant plus large que la pulsation est de partie imaginaire grande et tend vers zéro quand  $L_\omega$  est déformé jusqu'à l'axe réel, sous réserve qu'une telle déformation soit licite. Le contour d'intégration  $F_k$ , initialement confondu avec l'axe réel reste donc sur le même feuillet de  $R_\lambda$  pour toute pulsation parcourant  $L_\omega$ . Il sépare les solutions  $k(\omega; r_0)$  de  $D(k, \omega; r_0) = 0$  en deux ensembles disjoints  $K^+(\omega)$  et  $K^-(\omega)$ , selon que l'image de  $L_\omega$  par la fonction complexe  $k : \omega \mapsto k(\omega; r_0)$  (encore appelée branche spatiale) est contenue dans la partie  $k_i > 0$  ou  $k_i < 0$  de la surface de Riemann, lorsque  $L_\omega$  est déplacé vers l'infini,  $\omega_i \rightarrow \infty$ . On dit encore que  $K^+$  et  $K^-$  forment une partition de modes spatiaux généralisés (voir Huerre et Rossi [32]) et on désigne par  $k_j^+$  et  $k_j^-$  les éléments des ensembles  $K^+$  et  $K^-$ .

On peut procéder d'une façon analogue pour  $r < 1$ , où nous avons  $u_0 = 1$  et  $\rho_0 = 1$ , et chercher l'espace des solutions de (2.29) qui se réduit à une équation de la forme (2.32), où la fonction  $\lambda$  est remplacée par  $\mu$ , définie par

$$D_\mu(\mu, k, \omega) = k^2 - \mu^2 - M^2(k - \omega)^2 = 0. \quad (2.39)$$

Comme précédemment, le changement de variable  $z = i\mu_j r$  ( $j = 1, 2$ ) conduit à une équation de Bessel, dont la solution générale peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de Bessel  $J_n(z)$  et de Weber  $W_n(z)$ , en dehors des points singuliers  $\omega M / (M \pm 1)$  et  $\infty$ . Or la fonction  $W_n(z)$  n'est pas bornée quand  $r$  tend vers zéro ; la constante d'intégration correspondante est donc nulle. Pour éviter d'introduire de nouvelles notations, nous désignerons par la même lettre  $\Phi$  la solution de l'équation (2.29) de part et d'autre du rayon  $r_0$ , dont la normalisation est donnée par (2.35) et qui s'identifie à  $J_n(i\mu_1 r)$  si  $r < 1$ , à un facteur multiplicatif déterminé en imposant la continuité de  $\Phi$ .

Puisque l'écoulement de base est supposé continûment dérivable, les points singuliers de l'équation (2.39) sont des prolongements analytiques de ceux de l'équation (2.33) et, par un réarrangement des branches holomorphes, on note  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les prolongements analytiques de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Dans la suite, nous désignerons par  $\pm k_0(\omega; \infty)$  les points singuliers

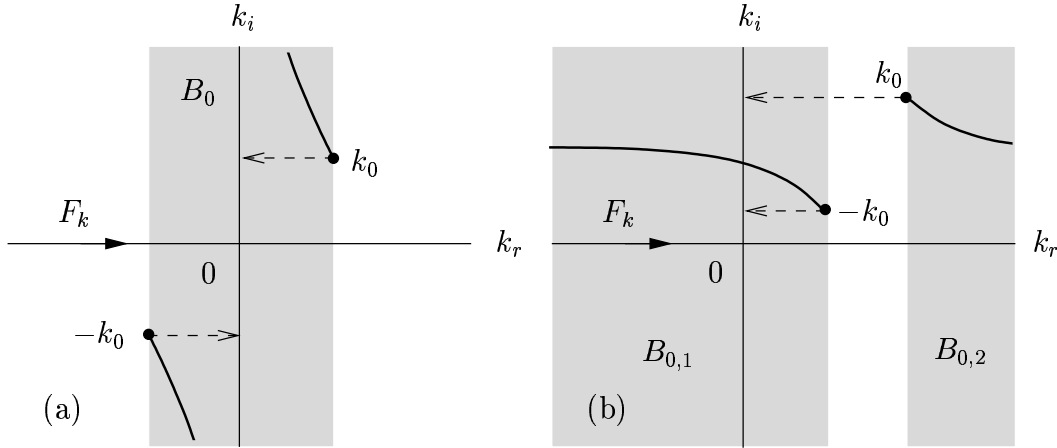


FIG. 2.2 – Coupures et domaines de vitesse de phase supersonique dans le plan des nombres d'ondes, pour  $\omega$  fixé. (a)  $r \rightarrow \infty$ . (b)  $r \rightarrow 0$ ;  $B_0 = B_{0,1} \cap B_{0,2}$ . Les chemins décrits par  $\pm k_0$  pour  $\omega_r \rightarrow 0^+$  sont représentés en tirets.

jusqu'ici notés  $\pm k_0(\omega)$  et par  $\pm k_0(\omega; 0)$  leurs prolongements analytiques, pour  $r \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $\pm k_0(\omega; 0) = \omega M / (M \pm 1)$ . Pour éviter d'alourdir inutilement les notations, la référence au rayon ne sera précisée que lorsque ce sera indispensable.

On peut se donner une représentation physique des points de branchement, et cela pour tout rayon  $r$ , en s'inspirant du raisonnement qui a été fait à l'extérieur de l'écoulement et en changeant de référentiel. On constate ainsi que les points de branchement  $\pm k_0(\omega; r)$  délimitent une bande  $B_0(\omega; r)$  du plan complexe à l'intérieur de laquelle la vitesse de phase  $\omega/k_r$  des ondes d'instabilités, mesurée dans un référentiel animé de la vitesse de l'écoulement au point  $r$ , est supersonique.

### Transformées spatiale et temporelle inverses

Cherchons maintenant à calculer l'intégrale (2.28) pour  $r > r_0$ . Compte tenu des relations (2.30) et (2.31), la fonction  $\hat{G}_n$  s'exprime sous la forme

$$\hat{G}_n(r, k, \omega; r_0) = \frac{i\rho_0(r_0)M^2}{u_0(r_0)k - \omega} \frac{\Phi(r_0, k, \omega)}{D(k, \omega; r_0)} \Phi(r, k, \omega), \quad (2.40)$$

où  $D(k, \omega; r_0)$  est la relation de dispersion qui s'identifie ici au Wronskien des solutions de (2.29) pour  $r > r_0$  et  $r < r_0$ , quand  $r$  tend vers  $r_0$ . Puisque la même notation est utilisée pour désigner les solutions de part et d'autre de  $r_0$ , la relation de dispersion est donnée



par la limite du Wronskien, qu'on note formellement

$$D(k, \omega; r_0) = \Phi(r_0^-, k, \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r_0^+, k, \omega) - \Phi(r_0^+, k, \omega) \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r_0^-, k, \omega). \quad (2.41)$$

La détermination du comportement de la fonction  $\Phi$  dans la zone de cisaillement n'est possible que si on se donne les fonctions  $u_0$  et  $\rho_0$ . Mais l'équation différentielle qu'il faut alors résoudre n'est pas simple. Il faut en général "discrétiser" le problème, c'est-à-dire le remplacer par un problème discret censé lui être "proche" en un certain sens. Il est prévu d'aborder l'opération de discrétisation dans la section 2.3.

Désignons par  $k_j^+$  et  $k_j^-$  les solutions de (2.41) pour  $\omega$  donné, et pour lesquelles  $\hat{G}_n$  s'écrit, au sens des distributions

$$\hat{G}_n(r, k_j^\pm(\omega), \omega; r_0) = \frac{i\rho_0(r_0)M^2\Phi_j^\pm(r_0, \omega)\Phi_j^\pm(r, \omega)}{[u_0(r_0)k_j^\pm(\omega) - \omega] D(k_j^\pm(\omega), \omega; r_0)}, \quad (2.42)$$

où la fonction  $\Phi_j^\pm(r, \omega)$  est associée au pôle  $k_j^\pm(\omega)$ , c'est-à-dire à la fonction continue<sup>6</sup>  $\Phi(r, k_j^\pm(\omega), \omega)$ . Cherchons à estimer le comportement asymptotique de  $G_n$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Pour  $r > r_0$ , cela signifie qu'il faut calculer l'intégrale

$$G_n(x, r, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{L_\omega} \left\{ \int_{F_k} \frac{i\rho_0(r_0)M^2\Phi(r_0, k, \omega)\Phi(r, k, \omega)e^{ikx}}{[u_0(r_0)k - \omega] D(k, \omega; r_0)} dk \right\} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.43)$$

pour  $t \rightarrow \infty$ . Nous allons procéder en deux temps, en considérant d'abord l'intégrale le long de  $F_k$ , puis l'intégrale le long de  $L_\omega$ . L'application du lemme de Jordan et du théorème des résidus conduit à distinguer une contribution sous forme de somme discrète,

$$\tilde{G}_n(x, r, t) = \frac{-\rho_0(r_0)M^2}{2\pi} \sum_j \int_{L_\omega} \frac{\Phi_j^+(r_0, \omega)\Phi_j^+(r, \omega)e^{ik_j^+(\omega)x - i\omega t}}{[u_0(r_0)k_j^+(\omega) - \omega] \frac{\partial D}{\partial k}(k_j^+(\omega), \omega; r_0)} d\omega, \quad (2.44)$$

dans le demi-espace  $x > 0$  et  $r > r_0$ , et d'autres contributions associées à des coupures dans le plan complexe. Pour arriver à l'équation (2.44), il faut que (i) l'inverse  $D^{-1}$  de  $D$  soit une fonction décroissante de  $k$  pour  $k \rightarrow \infty$ , plus rapidement que  $1/k$  et (ii) que  $D^{-1}$  soit uniforme et ne présente que des points singuliers isolés dans le plan coupé. Sous ces conditions, pour  $x > 0$ , le chemin d'intégration  $F_k$  est fermé par le demi-cercle supérieur  $C^+$ , évitant la coupure attachée à  $k_0(\omega; \infty)$ , comme l'illustre la figure 2.3. Le domaine entouré par le lacet  $F_k \cup C^+$  est un domaine de  $\mathbb{C}$  dont la frontière est une réunion finie de courbes de Jordan. L'intégrand est holomorphe sur ce domaine, sauf en un nombre fini de pôles simples  $k_j^+(\omega)$  associés aux branches spatiales de la relation de dispersion  $D(k, \omega; r_0) = 0$ . Il l'est aussi sur  $F_k \cup C^+$ . Toutes les conditions sont donc réunies pour appliquer le théorème des résidus, ce qui conduit à la somme (2.44). En vertu du lemme

6. Il est important de remarquer que la continuité du comportement radial des ondes quand la pulsation varie continûment sous-entend que les branches spatiales sont dans  $R_\lambda$  et que la fonction  $\lambda$  dans (2.35) n'est plus considérée comme une branche holomorphe, mais bien comme une fonction algébrique.

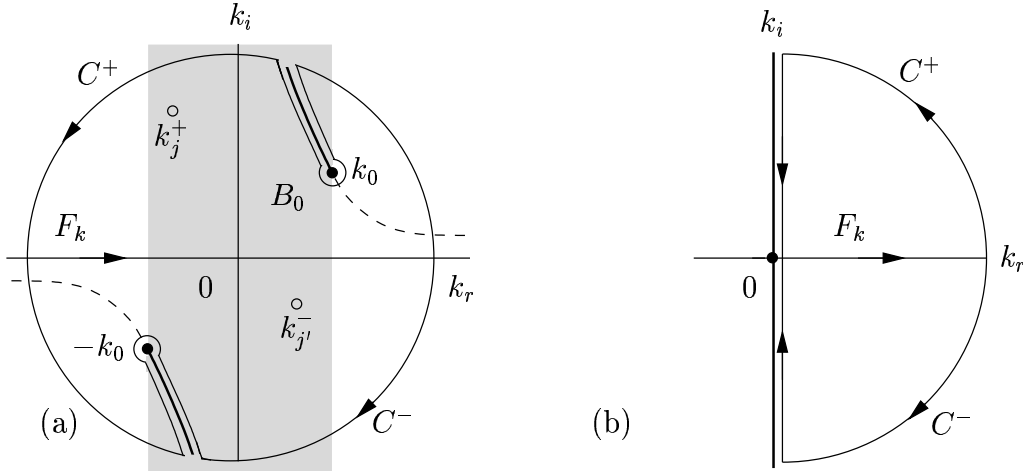


FIG. 2.3 – Contours d'intégration  $F_k$ ,  $C^\pm$  et coupures (en traits épais) de la fonction  $\lambda$  dans le plan des nombres d'ondes, pour l'inversion de la transformée spatiale. (a) :  $M > 0$ ; (b) :  $M = 0$ .

de Jordan, la contribution supplémentaire à l'intégrale le long de  $C^+$  se réduit à celle de la coupure, qu'il faut retrancher du résultat. Mais on n'en tient pas compte et on ne s'intéresse qu'à la partie "discrète"  $\tilde{G}_n$ . Pour  $x < 0$ , le contour  $F_k$  est fermé avec  $C^-$  et une démarche similaire permet d'exprimer la transformée spatiale inverse par une somme de résidus aux pôles  $k_{j'}^-(\omega)$ , la contribution de la coupure dans le demi-plan  $k_i < 0$  étant là aussi mise de côté. On en déduit la contribution de chaque résidu sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n(x, r, t) &= \frac{\rho_0(r_0)M^2 Y(-x)}{2\pi} \sum_{j'} \int_{L_\omega} \frac{\Phi_{j'}^-(r_0, \omega) \Phi_{j'}^-(r, \omega) e^{ik_{j'}^-(\omega)x - i\omega t}}{[u_0(r_0)k_{j'}^-(\omega) - \omega] \frac{\partial D}{\partial k}(k_{j'}^-(\omega), \omega; r_0)} d\omega \\ &\quad - \frac{\rho_0(r_0)M^2 Y(x)}{2\pi} \sum_j \int_{L_\omega} \frac{\Phi_j^+(r_0, \omega) \Phi_j^+(r, \omega) e^{ik_j^+(\omega)x - i\omega t}}{[u_0(r_0)k_j^+(\omega) - \omega] \frac{\partial D}{\partial k}(k_j^+(\omega), \omega; r_0)} d\omega, \end{aligned} \quad (2.45)$$

pour tout  $x$ , où il ne faut pas perdre de vue le fait qu'on a

$$\Phi_j^\pm(r, \omega) \rightarrow H_n^{(1)}(i\lambda(k_j^\pm(\omega), \omega)r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (2.46)$$

en dehors d'un voisinage des points singuliers  $\pm k_0(\omega; \infty)$ . D'autre part, le dénominateur de (2.43) s'annule aussi aux points critiques  $k_c$  tels que  $k_c = \omega/u_0(r_0)$ , où l'intégrand présente, en général, une singularité logarithmique (voir Bender et Orszag [40]). Brown et Stewartson [41] ont montré que sous certaines conditions, la contribution des coupures associées aux points critiques décroît en  $1/t^2$  aux temps  $t$  grands. Dans la suite, on ne cherchera pas à déterminer la réponse de l'écoulement à un instant quelconque  $t$ , mais seulement à estimer son comportement asymptotique, pour  $t \rightarrow \infty$ . Invoquant le résultat de Brown et Stewartson, on se limitera à une estimation asymptotique de (2.45).

Si  $M \rightarrow 0$ , alors les coupures tendent vers des demi-droites qui se rejoignent à l'origine pour se confondre avec l'axe imaginaire  $k_r = 0$ , comme le montre la figure 2.3 (b). La fonction  $\lambda$  est définie par  $\lambda^2 = k^2$  et son domaine d'holomorphic est toujours une surface de Riemann à deux feuillets. Dans ce cas, il est possible de s'affranchir de la présence de la coupure en revenant à la notion de fonction de Green réelle, comme l'indiquent Huerre et Monkewitz [31]. Dans l'espace de la variable  $k$ , on exprime la fonction de Green complexe à partir de la fonction de Green réelle en annulant la contribution des nombres d'onde négatifs,  $k_r < 0$ . Dans l'espace physique, cela revient à faire intervenir la transformée de Hilbert de la fonction de Green réelle pour obtenir la partie imaginaire de la fonction de Green complexe. La fonction de Green complexe se déduit alors de la fonction de Green réelle par l'application de l'opérateur  $1 + i *_x / (\pi x)$ , où  $*_x$  désigne l'opérateur de convolution selon  $x$  et  $1/x$  est à prendre au sens de sa valeur principale de Cauchy. On voit donc que la fonction de Green complexe ainsi construite se déduit de (2.40) par une multiplication par  $2Y(k_r)$ , où  $Y$  est la fonction de Heaviside et le contour d'intégration  $F_k$  se réduit au demi-axe réel positif, comme indiqué sur la figure 2.3 (b). Le retour à l'espace physique fait donc apparaître une contribution supplémentaire, en  $k_r = 0$ . Toutefois, la quantité à ajouter au résultat est une fonction algébriquement décroissante en  $t$ , ou au pire constante (voir Bender et Orszag [40]) pour  $t \rightarrow \infty$ , si bien qu'il n'est pas essentiel de la calculer.

Considérons maintenant le calcul des transformées temporelles inverses, pour  $t \rightarrow \infty$ . Nous allons procéder à une estimation asymptotique de  $\tilde{G}_n$  par la méthode du col (voir Fuchs et Levin [37]) dans un référentiel animé d'une vitesse  $v > 0$  et dans la direction de l'écoulement moyen. Ainsi, pour tout entier  $j$ , la contribution principale de l'intégrale dans l'expression

$$\tilde{G}_n(vt, r, t) = \frac{-\rho_0(r_0)M^2}{2\pi} \sum_j \int_{L_\omega} \frac{\Phi_j^+(r_0, \omega) \Phi_j^+(r, \omega) e^{i(k_j^+(\omega)v - \omega)t}}{[u_0(r_0)k_j^+(\omega) - \omega] \frac{\partial D}{\partial k}(k_j^+(\omega), \omega; r_0)} d\omega, \quad (2.47)$$

est donnée par un voisinage du point de phase stationnaire  $\omega_j^*$ , obtenu en annulant la dérivée de  $k_j^+(\omega)v - \omega$  par rapport à  $\omega$ . D'où on déduit l'équivalence asymptotique

$$\tilde{G}_n(vt, r, t) \sim \frac{\rho_0(r_0)M^2}{2\pi i} \sum_j \frac{\Phi_j^+(r_0, \omega_j^*) \Phi_j^+(r, \omega_j^*) e^{i(k_j^+(\omega_j^*)v - \omega_j^*)t}}{[u_0(r_0)k_j^+(\omega_j^*) - \omega_j^*] \frac{\partial D}{\partial k}(k_j^+(\omega_j^*), \omega_j^*)} \sqrt{\frac{-2\pi i}{vt \frac{d^2 k_j^+}{d\omega^2}(\omega_j^*)}}, \quad (2.48)$$

pour  $t \rightarrow \infty$  et  $r > r_0$ . Pour se donner une représentation physique du point de phase stationnaire, il est commode de déformer le contour d'intégration  $L_\omega$  depuis sa position initiale jusqu'à l'axe réel. Les points de phase stationnaire sont alors donnés par

$$\frac{\partial k_{j,i}^+}{\partial \omega}(\omega_j^*) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial k_{j,r}^+}{\partial \omega}(\omega_j^*) = \frac{1}{v}, \quad (2.49)$$

où  $k_{j,i}^+$  et  $k_{j,r}^+$  sont les parties imaginaire et réelle de  $k_j^+$ . Les pulsations  $\omega_j^*$  sont donc celles de vitesse de groupe égale à la vitesse de déplacement de l'observateur et pour lesquelles

le nombre d'onde observé est celui d'amplification maximale. Pour une branche spatiale donnée, ce qui équivaut à fixer  $j$ , ce maximum est en général unique et observé dans une gamme de fréquence où  $k_{j,i}^+$  est négatif. Pour le mode de Kelvin-Helmholtz, cette gamme de fréquence est d'autant plus grande que l'épaisseur de la zone de cisaillement est petite et tend même vers l'infini lorsque cette épaisseur tend vers zéro. Réciproquement, il existe une épaisseur critique au delà de laquelle  $k_{j,i}^+$  est positif pour tout  $j$  et  $\omega > 0$ .

L'équation (2.48) ne représente la dynamique des ondes d'instabilités que si au cours de la déformation du chemin  $L_\omega$ , l'ensemble  $K^+(\omega) \cap K^-(\omega)$  est vide pour toute pulsation décrivant  $L_\omega$ . Cette condition garantit qu'il n'existe pas de racine multiple de (2.41) entre la position initiale de  $L_\omega$  et l'axe réel. On dit encore que l'écoulement de base est convectivement<sup>7</sup> instable (voir Huerre et Rossi [32]). Physiquement, cela signifie que les perturbations sont advectées par l'écoulement. Notons que ce n'est pas toujours le cas, en particulier pour les jets subsoniques chauds. Les travaux de Monkewitz et Sohn [25, 24] ont montré l'existence de perturbations amplifiées dans le référentiel du laboratoire ( $v = 0$ ). On parle alors d'écoulement absolument instable, et il n'est plus possible de déformer continûment le chemin d'intégration  $L_\omega$  jusqu'à l'axe réel sans rencontrer un point de branchement (qui annule la relation de dispersion et sa dérivée par rapport à  $k$ ). Le cas limite où ce point est de partie imaginaire nulle a lui aussi fait l'objet d'un certain nombre d'études (Cooper et Crighton [44], Huerre et Monkewitz [30]). Mais la plupart de ces études ne tiennent pas compte des effets de compressibilité, ou alors dans des modèles simples (Crighton et Huerre [45]) qui ne s'étendent pas aux écoulements supersoniques. Nous allons justement nous intéresser à cette classe d'écoulements.

### Instabilité marginale, de vitesse de phase supersonique

Dans l'équation (2.48), interviennent les fonctions  $\Phi_j^+$ , de manière explicite au numérateur, et de manière implicite au dénominateur. D'après (2.35), ce sont des fonctions dont les restrictions au champ lointain s'identifient à des fonctions de Hankel dont le domaine d'holomorphie est contenu dans celui de la fonction algébrique  $\lambda$  qui, rappelons le, est une surface de Riemann à deux feuillets. D'autre part, pour appliquer la méthode du col, il faut que l'intégrand soit une fonction holomorphe de  $\omega$  dans un domaine contenant  $L_\omega$ , ce qui exclut de rester sur le premier feuillet de Riemann lorsque une branche spatiale rencontre une coupure. Or, le prolongement analytique de la branche  $\lambda_1$  sur le second feuillet est de partie réelle négative, ce qui signifie que le comportement asymptotique des fonctions  $\Phi_j^+$  est exponentiellement croissant pour  $r \rightarrow \infty$ , au vu de (2.25). On en déduit que *la représentation de la fonction de Green sous forme de paquet d'ondes (2.48) n'est pas une approximation uniformément valable dans  $\Omega$ , pour  $t \rightarrow \infty$ .*

Toutefois, il existe tout un ensemble de situations pour lesquelles l'expression (2.48) constitue une approximation compatible avec les conditions de bord. La situation la plus simple est celle où les branches spatiales restent sur le premier feuillet de  $R_\lambda$  au cours de la déformation de  $L_\omega$ . Pour  $\omega$  réel positif, cela revient à supposer que la vitesse de phase

7. D'après certains auteurs comme Tam et Hu [14] et Tam [42, 43], il semblerait que ce soit toujours le cas du mode de Kelvin-Helmholtz dans les écoulements de jet supersoniques.

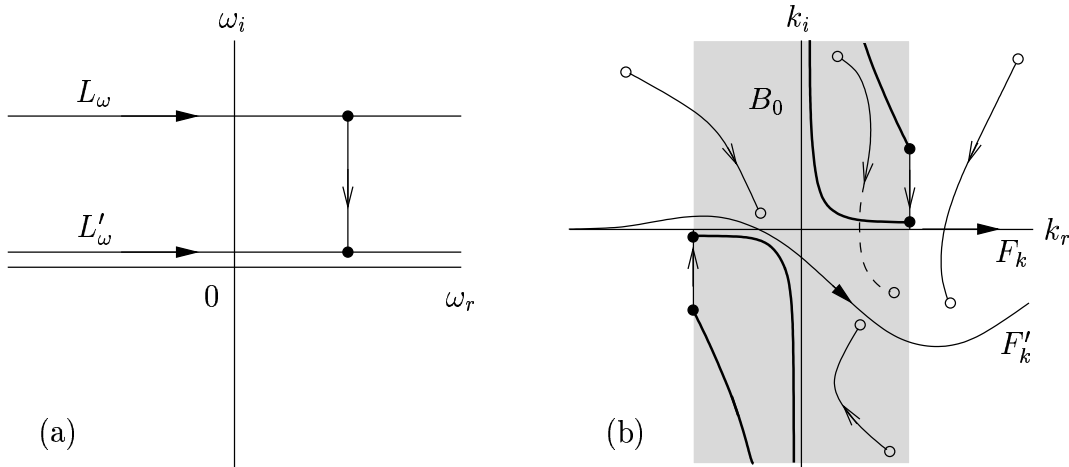


FIG. 2.4 – Déformation des contours d'intégration  $F_k$  et  $L_\omega$  pour la détermination de la transformée temporelle inverse. La déformation des coupures et le déplacement des pôles (cercles) sur la figure (b) correspondent au déplacement de la pulsation  $\omega$  selon un segment vertical représenté sur la figure (a). Le prolongement analytique sur le second feuillet de la surface de Riemann est représenté en tirets.

des ondes marginales ( $k_i = 0$ ) est subsonique ( $k \notin B_0$ ). Ceci mérite quelques précisions : pour  $\omega$  réel, les équations des coupures (2.37) et (2.38) se simplifient en  $k_r k_i = 0$ , et  $k_r^2 - k_i^2 \leq k_0^2$ , où le nombre d'onde  $k_0$  est réel. Il est immédiat que si  $k_i = 0$ , alors  $|k_r| \leq k_0$ , ce qui implique que la portion des coupures de partie réelle non nulle est le segment  $-k_0 \leq k_r \leq k_0$ , correspondant aux ondes marginales de vitesse de phase supersonique ou sonique. On en déduit qu'une condition suffisante pour qu'une branche spatiale ne rencontre pas de coupure est que toute onde marginale soit de vitesse de phase subsonique, ce qui est toujours le cas pour les écoulements subsoniques, d'après l'extension du théorème du demi-cercle de Howard aux écoulements compressibles (Chimonas [46]). Dans ce cas, le comportement radial des perturbations est exponentiellement décroissant pour  $r \rightarrow \infty$  et holomorphe le long de toute branche spatiale.

Cependant, le lecteur ne doit pas en conclure qu'un écoulement subsonique ne rayonne pas d'énergie, et ceci pour plusieurs raisons. En particulier, la modélisation du présent chapitre ne tient pas compte des effets non parallèles de l'écoulement moyen, qui feront l'objet du chapitre suivant, et auxquels il semble important de consacrer de la réflexion (voir Tam et Morris [6] et Crighton et Huerre [45]). À cela s'ajoute l'hypothèse d'instabilité convective, qui nous autorise à abaisser le chemin  $L_\omega$  jusqu'à l'axe réel, légitimant du même coup une approche spatiale, ce qui, d'après Monkewitz et Sohn [25, 24] n'est pas généralisable à tous les écoulements de jets subsoniques chauds. On peut aussi citer les travaux récents de Cooper et Crighton [44] sur les sources superdirectives, qui semblent indiquer l'émergence d'une dynamique globale dans certains écoulements de jets axisymétriques, rendant par la même incontournable une approche non linéaire.

Lorsque l'écoulement porteur est supersonique, il peut exister des instabilités de vitesse de phase supersonique, éventuellement marginales. Supposons que dans le schéma précédent,  $\omega$  soit associé à un forçage de pulsation complexe. La réponse du système est donnée par des résidus aux pôles  $k_j^+(\omega)$  et  $k_j^-(\omega)$  pour  $x > 0$  et  $x < 0$ , respectivement situés dans les parties  $k_i > 0$  et  $k_i < 0$  du plan complexe coupé, comme le montre la figure 2.4. La réponse est donc exponentiellement décroissante de part et d'autre du forçage, en vertu du principe de causalité. Même si un système peut supporter des ondes amplifiées, sa réponse à une excitation qui croît suffisamment vite dans le temps conduit à des ondes amorties dans la direction de l'écoulement. Par contre, pour un même taux d'amortissement, rien ne s'oppose à ce qu'il existe plusieurs longueurs d'ondes associées à des pôles distincts. Rien ne s'oppose non plus à ce qu'un de ces pôles soit situé sur une coupure et soit, par conséquent, associé à un zéro de la partie réelle de  $\lambda$ . Si une telle situation se rencontre lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  tend vers zéro, comme le montre la figure 2.4, il est possible de déformer les coupures et le chemin d'intégration  $F_k$  de telle sorte que les pôles restent sur le même feuillet de Riemann. Ce type de procédure est mis en oeuvre dans le cadre du problème de Landau (voir Weitzner [38]), mais ne lève pas le problème de représentation physique à la limite  $r \rightarrow \infty$ . Notons d'autre part que pour qu'une telle configuration se présente, il faut qu'au moins une branche spatiale se déforme jusqu'à rencontrer un point singulier, lorsque l'écoulement est progressivement accéléré depuis un état de repos jusqu'à un régime supersonique ( $M > 1$ ). Dans la suite, on va justement s'intéresser au comportement des pôles lorsque  $M$  varie, en utilisant le modèle de la nappe tourbillonnaire, de façon à obtenir une relation analogue à (2.41), mais dans laquelle toutes les fonctions sont connues.

### 2.2.3 Instabilités subsoniques et supersoniques

Le modèle mathématique de la nappe tourbillonnaire temporelle a été étudié par Landau [7], Miles [8], Fejer et Miles, [9] puis repris par Tam [47] dans le cadre d'une approche spatiale. La plupart de ces travaux théoriques portent sur la couche de mélange bidimensionnelle qui constitue un exemple typique d'amplificateur de bruit : les perturbations sont advectées par l'écoulement et forment de larges structures tourbillonnaires, caractéristiques de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Le rôle des effets de compressibilité dans la dynamique des perturbations est plus difficile à mettre en évidence et bien moins référencé. On trouve néanmoins un certain nombre de travaux expérimentaux, comme ceux d'Oertel [11] et de Lawson et Ollerhead [48] sur les jets axisymétriques, qui mettent directement en jeu la compressibilité du fluide. En plus des instabilités de Kelvin-Helmholtz, Oertel mentionne l'existence d'autres types de structures, dont une approche théorique a été formulée par Tam et Hu [14, 15]. Le point de départ consiste à reconnaître que le confinement des perturbations acoustiques implique la création d'un système d'ondes de Mach lorsque l'écoulement est suffisamment rapide. Si on se place dans un référentiel qui se déplace à une vitesse subsonique et dans lequel la surface du jet est spatialement déformée, le calcul montre qu'il est toujours possible de garantir l'équilibre des pressions de part et d'autre de la surface, par un choix convenable de la longueur d'onde du système

d'ondes de Mach. Un corollaire est qu'un écoulement supersonique peut supporter des ondes marginales de vitesse de phase subsonique. Par contre, si le référentiel se déplace à une vitesse supersonique, l'équilibre des pressions n'est plus possible. Dans certains cas, on peut même prouver que le déséquilibre de pressions est en phase avec le déplacement vertical de la nappe tourbillonnaire. Cette observation suggère l'existence d'ondes amplifiées d'une nature fondamentalement différente de celles associées à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Ces ondes, dites supersoniques en référence à leur vitesse de phase, sont interprétées comme des résonances de l'écoulement par Gill [49] et font l'objet d'approches temporelles dans le domaine de l'astrophysique, en particulier lorsqu'on s'intéresse aux jets radio émergeant des quasars (voir, par exemple, Zaninetti [50, 51]). Si l'existence des ondes supersoniques est désormais bien établie, peu de travaux abordent leur contribution acoustique et on peut s'interroger sur le mécanisme d'émergence de ces ondes. Dans la suite, le point de vue adopté sera celui de la détermination de la réponse impulsionnelle de l'écoulement et on considérera la pulsation  $\omega$  comme une variable d'intégration.

L'écoulement de base est défini par morceaux, uniforme à l'intérieur d'un jet de rayon unité et nul à l'extérieur. La vitesse  $u_0$  et la masse volumique  $\rho_0$  se présentent comme des fonctions discontinues de la forme

$$u_0(r) = Y(1 - r), \quad (2.50)$$

$$\rho_0(r) = Y(1 - r) + \rho_\infty Y(r - 1), \quad (2.51)$$

dont les dérivées sont à prendre au sens des distributions. Le défaut majeur de cette représentation est qu'elle ne fait pas intervenir l'épaisseur caractéristique de la zone de cisaillement, ce qui affecte certaines conclusions qu'on peut espérer tirer du modèle. En effet, l'absence d'échelle de longueur pour la dynamique des ondes de Kelvin-Helmholtz rend le modèle non causal : pour  $\omega$  réel, le taux d'amplification ne présente pas de maximum. Il ne faut donc pas espérer obtenir une bonne description des petites longueurs d'ondes, et encore moins s'attendre à ce que le mode de Kelvin-Helmholtz rencontre une coupure, pour  $\omega > 0$ . Ceci étant, la continuité de la pression au point  $r = 1$  implique

$$\hat{G}_n(r, k, \omega) = \begin{cases} \frac{H_n^{(1)}(i\mu(k, \omega))}{J_n(i\mu(k, \omega))} J_n(i\mu(k, \omega)r), & r \leq 1, \\ H_n^{(1)}(i\lambda(k, \omega)r), & r \geq 1, \end{cases} \quad (2.52)$$

et la continuité du déplacement de la nappe tourbillonnaire donne

$$\frac{J_n(i\mu(k, \omega))}{\rho_\infty \omega^2} \lambda(k, \omega) H_n^{(1)'}(i\lambda(k, \omega)) = \frac{H_n^{(1)}(i\lambda(k, \omega))}{(k - \omega)^2} \mu(k, \omega) J_n'(i\mu(k, \omega)), \quad (2.53)$$

où le symbole ' désigne l'opération de dérivation. Pour ne pas alourdir les notations, la référence au nombre de Mach n'est pas indiquée. Cependant, le lecteur doit avoir à l'esprit que le nombre de Mach intervient explicitement dans l'expression des points singuliers de  $\lambda$  et  $\mu$ , au même titre que la température moyenne de l'écoulement.

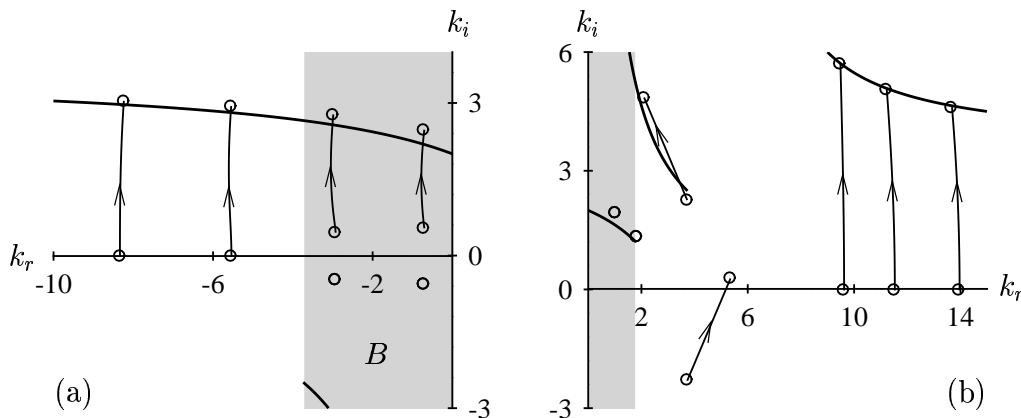


FIG. 2.5 – Modes propres du jet froid,  $M = 1.5$ ,  $\omega_r = 3.0$  et  $n = 0$ . Le déplacement des modes (cercles) est associé à la variation de  $\omega_i$  depuis zéro jusqu'à 2.0, et représenté par des lignes. Les autres lignes, en traits épais, représentent les coupures associées à  $\lambda$  et  $\mu$ , pour  $\omega_i = 2.0$ .

L'égalité (2.53) n'a lieu que pour certains couples de nombres complexes  $(k, \omega)$ , qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, on dispose d'un certain nombre de méthodes numériques, comme celle de Newton-Raphson qui consiste à se donner une valeur initiale pour  $k$  et une suite complexe convergeant vers les solutions de (2.53). Pour  $\omega$  fixé, on peut déterminer tous les zéros  $k_j^\pm(\omega)$  de la relation de dispersion, en faisant varier la valeur initiale. Réciproquement, pour  $k$  fixé, il est possible de calculer les modes temporels  $\omega_j(k)$ . Pour compléter cette procédure, il faut tenir compte de la distance minimale séparant deux modes, dont une estimation peut être faite en considérant la surface des valeurs absolues de l'écart  $d$  entre le membre de gauche et le membre de droite de (2.53). Les lignes de niveau permettent alors de juger de la variation de la fonction  $d$  et de calculer les directions de plus grande pente descendante (méthode du gradient). Cette façon de faire s'avère particulièrement utile lorsque deux modes sont proches l'un de l'autre (figure 2.7 (b)), la méthode de Newton-Raphson ne donnant alors que le mode qui possède le plus grand bassin d'attraction.

### Du mode de Kelvin-Helmholtz aux modes supersoniques

Pour l'instant, on va se limiter aux premiers feuilletés des surfaces de Riemann  $R_\lambda$  et  $R_\mu$  associées à  $\lambda$  et  $\mu$ , ce qui nous autorise à remplacer les fonctions algébriques par les branches holomorphes  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  dans (2.53). En envisageant diverses valeurs de  $M$ ,  $\rho_\infty$  et  $n$ , on obtient des ensembles de modes différents, comme le montrent les figures 2.5 et 2.6 pour  $n = 0$ . Avec l'équation d'état des gaz parfaits, on a  $T_\infty = 1/\rho_\infty$ , où  $T_\infty$  est la température ambiante (adimensionnée par la température au centre du jet). On peut prendre n'importe quelle valeur pour  $\rho_\infty$ , ou alors utiliser l'équation de Saint-Venant



(voir par exemple Huerre [52]) pour calculer  $\rho_\infty$  à partir de la connaissance du nombre de Mach. Le premier cas revient à chauffer le jet à une température  $\rho_\infty$  fois celle du milieu ambiant, ce qui se traduit par un déplacement des points de branchement  $\pm k_0(\omega; \infty)$  dans la direction déterminée par  $\omega$ . Dans le second cas, on convient de dire que le jet est froid, et il ne reste plus qu'un seul paramètre de contrôle  $M$  dont dépendent les quatre points de branchement  $\pm k_0(\omega; \infty)$  et  $\pm k_0(\omega; 0)$ .

Notons  $B$  l'intersection de  $B_0(\omega; 0)$  et  $B_0(\omega; \infty)$  et considérons d'abord le cas de la figure 2.5 (jet froid,  $M = 1.5$ ) pour lequel nous avons  $k_0(\omega; \infty) > k_0(\omega; 0) > 0$  et  $-k_0(\omega; 0) > k_0(\omega; \infty)$ . On en déduit immédiatement que  $B$  est non vide, c'est-à-dire qu'il peut exister des modes propres pour lesquels le nombre de Mach convectif<sup>8</sup> est supersonique. En d'autres termes, la vitesse de l'écoulement mesurée dans un référentiel animé d'une vitesse  $\omega/k_r$  telle que  $k \in B$ , est supérieure à celle du son aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du jet, l'écart des vitesses étant unitaire. Les figures 2.5 et 2.6 montrent qu'il existe un nombre pair de modes propres qui présentent cette particularité, ce résultat étant toujours vrai (tant que le nombre de Reynolds est infini) en raison des propriétés de l'opérateur  $L$ . Pour  $k_r < 0$ , ce nombre dépend de  $-k_0(\omega; \infty)$ , c'est-à-dire du nombre de Mach et de la température du jet. L'appartenance à  $K^+$  ou  $K^-$  est établie en faisant varier la partie imaginaire de la pulsation depuis zéro jusqu'à  $\omega_i > 0$ , ce qui revient à déformer le chemin  $L_\omega$  initialement confondu avec l'axe réel pour qu'il passe par la pulsation de partie imaginaire  $\omega_i$ . La figure 2.5 (a) donne le comportement des modes de partie réelle négative au cours de la déformation. À l'extérieur de la bande  $B$ , les modes initialement marginaux se déplacent dans le demi-plan supérieur  $k_i > 0$  pour rester dans un voisinage de la coupure attachée au point de branchement  $k_0(\omega; 0)$ , au même titre que les modes contenus dans  $B$  et de partie imaginaire positive. Tous ces modes sont donc, par définition, dans  $K^+$  et correspondent à des ondes amorties pour  $x > 0$ . Quant aux modes complexes conjugués, ils suivent des chemins analogues sur le second feuillet de Riemann, s'éloignant de l'axe réel quand  $\omega_i$  augmente. Ce sont des modes de  $K^-$ , amortis pour  $x < 0$ . Notons que dans un référentiel animé de la vitesse de phase d'une de ces ondes, les vitesses de l'écoulement à l'extérieur et à l'intérieur du jet sont de même signe ce qui, au passage, montre qu'il n'est pas nécessaire que l'écoulement soit supersonique dans un référentiel fixe pour assurer l'existence d'ondes supersoniques. Ces ondes supersoniques ne sont pas référencées par Oertel [11] dans ses expériences de jets supersoniques. Elles ne font pas non plus partie du classement d'ondes proposé par Tam et Hu [14], [15] qui ignorent leur existence.

Pour  $\omega_i > 0$ , on voit apparaître d'autres modes de vitesse de phase supersonique dans la partie  $k_r > 0$  de  $B$ , dont la signification physique échappe encore à l'auteur. Le calcul montre que ces modes, initialement localisés au voisinage de la coupure associée à  $k_0(\omega; 0)$ , tendent vers l'axe réel tout en restant dans le domaine  $B$ , lorsque  $\omega_i$  tend vers zéro. Pour  $\omega_i = 0$ , ces modes semblent s'identifier à des points de l'intersection des coupures associées à  $k_0(\omega; 0)$  et  $k_0(\omega; \infty)$ , mais le calcul n'a pas permis de déterminer leur position exacte et c'est pourquoi ils n'ont été représentés que pour  $\omega_i = 2.0$  sur la figure 2.5 (b). Une

---

8. Le nombre de Mach convectif est le nombre de Mach de l'écoulement mesuré dans un référentiel qui se déplace à la vitesse de phase de l'onde.

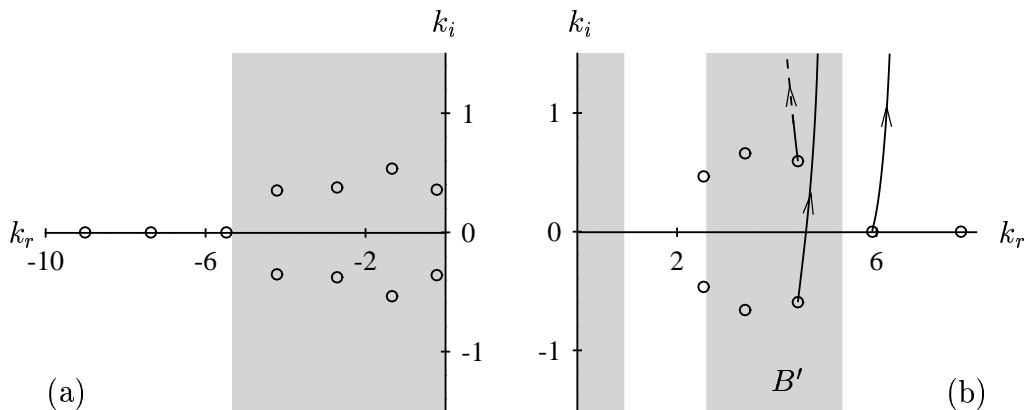


FIG. 2.6 – Modes propres du jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$ ,  $\omega_r = 1.4$  et  $n = 0$ . Les lignes donnent le comportement des modes de partie réelle positive lorsque  $\omega_i$  croît depuis zéro. Le domaine  $B'$  correspond à l'intersection des domaines  $B_0(\omega; \infty)$  et  $B_{0,2}(\omega; 0)$  de la figure 2.2.

analyse plus poussée consisterait à déterminer les zéros de la relation de dispersion sur la réunion des surfaces de Riemann associées à  $\lambda$  et  $\mu$ . Finalement, le seul mode qui traverse l'axe réel est le mode de Kelvin-Helmholtz, de partie imaginaire négative lorsque  $\omega_i$  vaut zéro, comme le montre la figure 2.5 (b). C'est donc l'unique mode de l'ensemble  $K^+$  correspondant à une onde amplifiée pour  $x > 0$ .

Passons maintenant au second cas (jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$ ), illustré par la figure 2.6. On peut vérifier que les modes de partie réelle négative et de partie imaginaire non nulle sont de même nature que ceux qui sont représentés sur la figure 2.5, mais en nombre différent. Comme il est possible de faire varier continûment les paramètres  $M$ ,  $\rho_\infty$  et  $\omega_r$  pour passer du cas représenté par la figure 2.5 au cas de la figure 2.6, cela suggère l'existence d'un mécanisme de création de modes dans le plan coupé. D'autre part,  $B$  est composé de deux parties disjointes, la partie supplémentaire  $B'$  contenue dans le demi-plan  $k_r > 0$  autorise l'existence d'ondes de vitesse de phase supersonique, comme pour le cas précédent. Toutefois, les conclusions cinématiques sont différentes. En suivant un raisonnement similaire à celui que nous avons tenu pour le domaine  $B$  de la figure 2.5, on s'aperçoit que les vitesses mesurées à l'extérieur et à l'intérieur du jet, dans un référentiel de vitesse  $\omega/k_r$ , sont de signes opposés. De plus, tous les modes de partie imaginaire négative qui appartiennent à ce domaine correspondent à des ondes amplifiées pour  $x > 0$ , avec des taux d'amplification si proches de celui du mode de Kelvin-Helmholtz qu'il devient impossible de distinguer ce dernier. Tous ces modes forment une famille de modes supersoniques de  $K^+$ , qu'on peut rapprocher de celle qui a été observée par Oertel [11] dans ses expériences de jet supersoniques. L'existence de ces modes est bien sûr conditionnée par la rencontre du domaine  $B_0(\omega; \infty)$  et de l'intersection de  $B_0(\omega; 0)$  avec l'ensemble des modes de partie réelle supérieure à  $\omega$  si  $\omega > 0$  (et inférieure si  $\omega < 0$ ). Pour

$\omega > 0$ , cela revient à exiger qu'on ait l'inégalité  $k_0(\omega; \infty) > -k_0(\omega; 0)$ , soit

$$T_\infty < (M - 1)^2, \quad M > 1. \quad (2.54)$$

On en déduit que pour  $M = 1.5$ , il suffit que la température du jet soit au moins quatre fois plus grande que celle du milieu ambiant pour que la condition précédente soit satisfaite. Pour un jet froid, l'inégalité précédente signifie que le seuil d'existence des ondes supersoniques est donné par  $M = 4/(3 - \gamma) = 2.5$ .

### Des modes subsoniques aux modes supersoniques

Pour en savoir un peu plus sur le mécanisme de création des modes de partie imaginaire non nulle, on peut faire varier  $\omega_r$  le long de  $L_\omega$  depuis zéro et chercher à suivre les modes dans le plan complexe coupé, comme le montre la figure 2.7 pour  $k_r < 0$ . En procédant

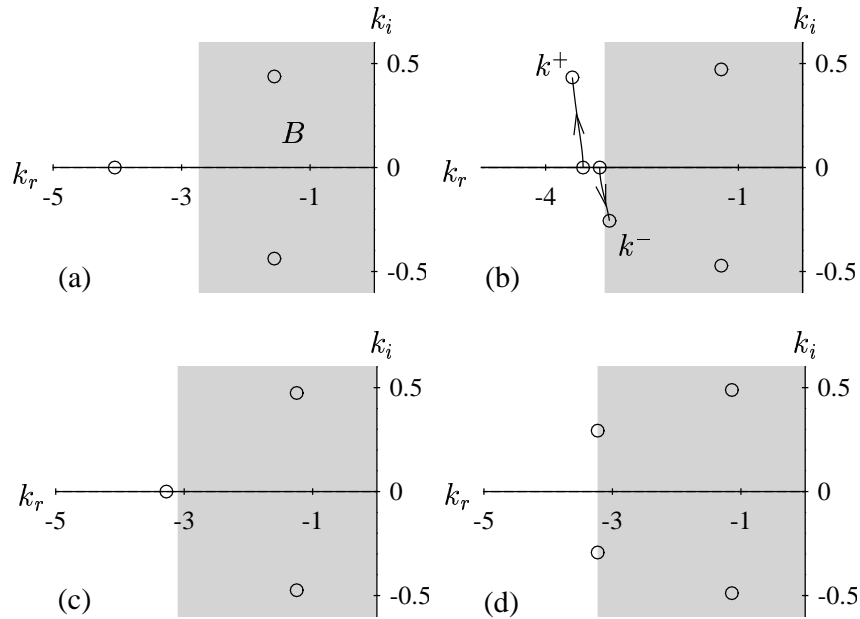


FIG. 2.7 – Modes propres du jet froid,  $M = 1.5$ ,  $n = 0$  et  $\omega_i = 0$ . (a) :  $\omega_r = 2.200$  ; (b) :  $\omega_r = 2.480$  ; (c) :  $\omega_r = 2.497$  ; (d) :  $\omega_r = 2.600$ . Les lignes de la figure (b) représentent les chemins décrits par les modes initialement subsoniques lorsque  $\omega_i$  varie de zéro à 0.2.

de manière systématique, on peut montrer numériquement que tant que la distance entre un mode marginal de vitesse de phase subsonique et le point  $-k_0(\omega; \infty)$  est suffisamment grande, la distribution de modes propres au voisinage de  $-k_0(\omega; \infty)$  est topologiquement équivalente à celle de la figure 2.7 (a). On distingue ainsi les modes complexes conjugués contenus dans  $B$  et correspondants à des ondes de vitesse de phase supersonique, des modes extérieurs à  $B$  et pour lesquels le taux d'amplification est nul. Comme pour les

cas précédents, les modes situés de part et d'autre de l'axe réel s'en éloignent lorsque  $\omega_i$  croît depuis zéro, et par conséquent, correspondent à des ondes amorties. Si la distance entre le mode marginal de plus grande partie réelle  $\sup\{k_j^+(\omega)\}$ , pour  $\omega$  fixé, et le point de branchement est plus petite qu'une valeur critique, on voit apparaître un mode marginal supplémentaire de partie réelle comprise entre  $\sup\{k_j^+(\omega)\}$  et  $-k_0(\omega; \infty)$ , comme le montre la figure 2.7 (b). Mais à la différence des autres modes marginaux extérieurs à  $B$ , ce dernier se déplace dans le demi-plan  $k_i < 0$  lorsque  $\omega_i$  croît depuis zéro, ce qui signifie qu'il appartient à l'ensemble  $K^-$ . On voit donc qu'au voisinage du point de branchement existent désormais deux modes de catégories différentes, qui se déplacent en sens opposés sur l'axe réel. Ces deux modes se rencontrent pour une unique pulsation  $\omega_r = 2.497$ , comme le montre la figure 2.7 (c), et forment une paire de modes complexes conjugués pour  $\omega_r > 2.497$ . Ce scénario se répète autant de fois qu'il y a de modes subsoniques dans le demi-plan  $k_r < 0$ , ce qui conduit à distinguer des intervalles disjoints de  $L_\omega$  pour lesquels existent des modes marginaux de vitesse de phase négative, proche de celle du son et de la catégorie  $K^-$ .

Cherchons à déterminer les bornes inférieures de ces intervalles. Pour cela, on peut faire tendre  $k$  vers  $-k_0(\omega; \infty)$  dans la relation de dispersion (2.53), qu'on multiplie par l'inverse de la fonction de Hankel de première espèce. Cette opération est toujours possible puisque deux fonctions cylindriques distinctes ne possèdent pas de zéros communs, en vertu du théorème de Lommel (Watson [53]). Quand  $\lambda_1$  tend vers zéro, la fonction  $\mu_1$  tend vers une valeur finie non nulle, qu'on note  $\mu_{1,0}(\omega)$ . Pour  $n = 0$ , on a donc

$$\lambda_1 \frac{J_0(i\mu_1) H_{-1}^{(1)}(i\lambda_1) + H_1^{(1)}(i\lambda_1)}{2\rho_\infty \omega^2 H_0^{(1)}(i\lambda_1)} - \frac{\mu_1}{(k - \omega)^2} J_0'(i\mu_1) = 0. \quad (2.55)$$

D'autre part, pour  $\omega > 0$  et  $k < -k_0$ , on a  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  et  $i\mu_1 \in \mathbb{R}$ , ce qui nous permet de réécrire (2.55) sous la forme

$$\lambda_1 \frac{J_0(i\mu_1) K_{-1}(\lambda_1) + K_1(\lambda_1)}{2\rho_\infty \omega^2 K_0(\lambda_1)} + \frac{\mu_1}{(k - \omega)^2} J_1(i\mu_1) = 0, \quad (2.56)$$

où  $K_n$  est la fonction de Bessel modifiée (voir Watson [53]) et l'égalité  $J_0'(i\mu_1) = -J_1(i\mu_1)$  a été utilisée. Il ne reste plus qu'à faire tendre  $\lambda_1$  vers zéro, et remplacer les fonctions  $K_n$  par leurs estimations asymptotiques. D'où on tire l'égalité

$$\lim_{k \rightarrow -k_0} \frac{J_0(i\mu_1(\omega, k))}{k^2 \ln(\lambda_1(\omega, k))} + \frac{\sqrt{1 - (M + 1/\sqrt{\rho_\infty})^2}}{|k_0|(M^2 + 1/\sqrt{\rho_\infty})^2} J_1(i\mu_{1,0}) = 0. \quad (2.57)$$

En dehors du voisinage de  $\omega = 0$  où  $k_0$  tend vers zéro, on déduit de (2.57) que l'expression

$$i\mu_{1,0} = -|k_0| \sqrt{(M + 1/\sqrt{\rho_\infty})^2 - 1}, \quad (2.58)$$

s'identifie aux zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1, qu'on note  $-j_s \in \mathbb{R}$ ,  $j_s > 0$  où  $s$  est un entier. Si  $\omega$  tend vers zéro, on peut montrer que (2.57) admet une solution particulière,

qui conduit à  $\omega_1 \rightarrow 0$  pour  $|k| \rightarrow 0$ . Les pulsations non nulles pour lesquelles existent des modes de  $K^-$  et de vitesse de phase proche de celle du son, peuvent donc s'exprimer sous la forme

$$\omega_s = \frac{j_s}{\sqrt{\rho_\infty} M \sqrt{(M + 1/\sqrt{\rho_\infty})^2 - 1}}, \quad (2.59)$$

et sont indexées par  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s > 1$  puisqu'il existe une infinité de zéros réels  $j_s$ , ce qui prouve du même coup que  $K^-$  est dénombrable. On note  $k_s$  la valeur que prend la branche spatiale au point  $\omega_s$ . On peut remarquer que la relation (2.59) est vraie aussi bien pour les jets supersoniques que pour les jets subsoniques.

Il est intéressant de confronter ce résultat aux observations expérimentales de Nosseir et Ho [54, 55] et Umeda *et al.* [56] qui ont abordé le problème de l'émission acoustique des jets subsoniques impactants (limités par une paroi normale à l'écoulement, placée en aval de la tuyère). Leurs travaux mentionnent la présence de perturbations acoustiques qui se propagent depuis la paroi jusqu'à la sortie de la tuyère d'où émerge le jet. Ces perturbations peuvent être vues comme étant générées par des ondes d'instabilités qui se propagent depuis la sortie de la tuyère jusqu'à la paroi. Or, pour une configuration donnée, les ondes d'instabilités ne sont amplifiées que si la pulsation est plus petite qu'une valeur limite. Si on admet que les ondes acoustiques observées expérimentalement correspondent bien aux modes de la catégorie  $K^-$  obtenus par le calcul, on peut s'attendre à ce que seules les pulsations  $\omega_s$  inférieures à ladite valeur limite ne soient observées au sein de l'écoulement. Les ondes acoustiques jouent alors le rôle de forçage pour les ondes d'instabilités, conduisant ainsi le système vers une dynamique "globale" caractérisée par un nombre fini de modes temporels. Si la paroi est placée loin de la sortie du jet, comme dans l'expérience de Nosseir et Ho, la pulsation limite devient alors suffisamment petite pour qu'on puisse se limiter aux premiers modes de  $K^-$ , ordonnés par l'indice  $s$  de la relation (2.59), et donc aux premières valeurs de  $\omega_s$ . Mais il faut apporter plusieurs corrections au mécanisme de sélection de fréquences que nous évoquons. D'abord, il est important de noter que l'existence d'un intervalle borné pour le taux d'amplification associé au mode de Kelvin-Helmholtz n'est garantie que s'il existe une épaisseur non nulle de la zone de mélange, ce qui exclut d'emblée le recours au modèle de la nappe tourbillonnaire pour en calculer les caractéristiques. De plus, pour être observable, il faut que le système que nous avons décrit soit "stable", ce qui tend à privilégier les ondes acoustiques qui sont le moins dispersives (voir Lighthill [57]), c'est-à-dire celles dont la dérivée de la vitesse de groupe par rapport à  $k$  est proche de zéro. Un calcul rapide semble confirmer ce scénario, puisque la pulsation  $\omega$  obtenue en minimisant  $d^2\omega/dk^2$ , pour  $n = 0^9$  et  $M = 0.9$  est d'environ 0.42, alors que les mesures de Ho et Nosseir [55] donnent un Strouhal moyen d'environ 0.37. Notons à cet égard que cette estimation numérique ne prétend pas prouver qu'il s'agit bien là du mécanisme dont nous venons de faire état, ni même ne prétend être précis à la deuxième décimale. Pour s'assurer du dernier point, il faudrait procéder à une étude de la sensibilité de l'algorithme d'optimisation dans le voisinage des points de branchement. Ce qu'il faut retenir, c'est le bon accord numérique et d'un point de vue plus conceptuel,

---

9. Le mode subsonique considéré pour ce calcul est celui dont la fonction propre présente le moins de maximums locaux (ou "ventres").

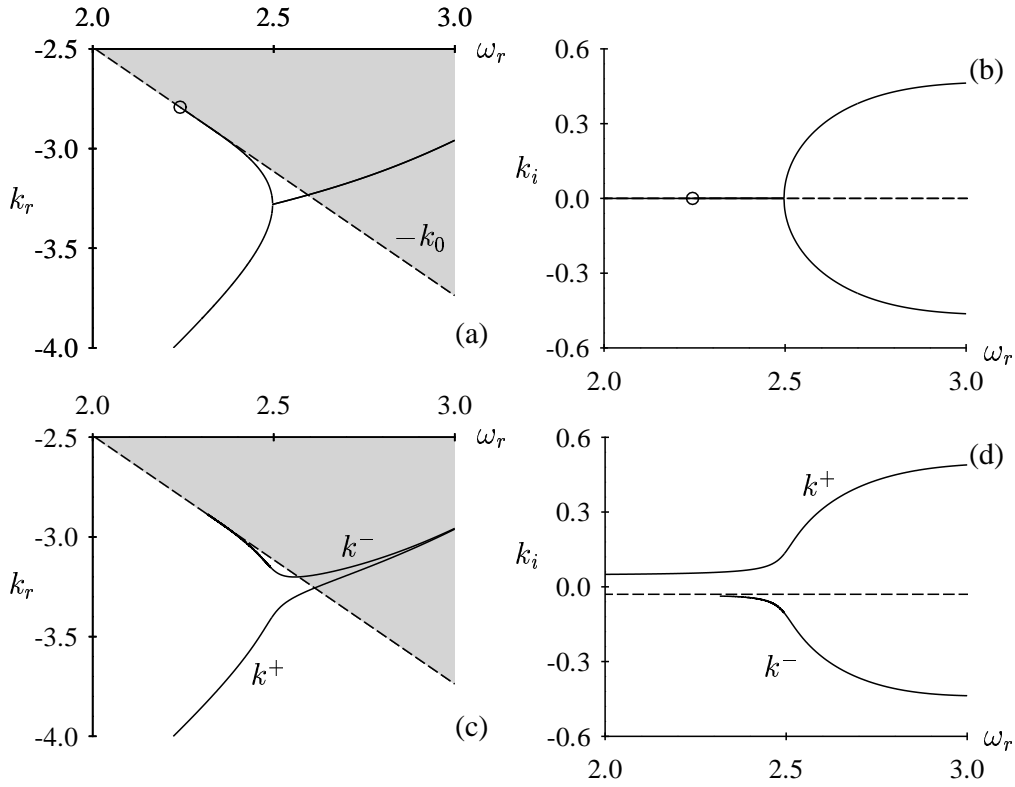


FIG. 2.8 – Déformation des branches spatiales au voisinage de la pulsation  $\omega_s$  (ici  $s = 3$  et  $j_3 = 7.016$ ) pour un jet froid,  $M = 1.5$ ,  $n = 0$ . (a) et (b) :  $\omega_i = 0$  ; (c) et (d) :  $\omega_i = 0.03$ . Les cercles sur les figures (a) et (b) donnent la position du point de coordonnées  $(k_s, \omega_s)$ . La ligne que décrit le point de branchement  $-k_0(\omega; \infty)$  lorsque  $\omega$  varie est représentée en tirets.

l'existence de modes marginaux de la catégorie  $K^-$ , dont il s'agit maintenant de préciser les propriétés.

Faisons le point : en plus du mode de Kelvin-Helmholtz et de son complexe conjugué, tous deux dans  $K^+$ , apparaît un ensemble dénombrable  $K^-$  de modes dont une propriété essentielle est d'être marginalement stables ou stables, le passage d'un état à un autre se faisant en annulant la vitesse de groupe comme l'illustrent les figures 2.7 et 2.8. Mathématiquement, cela signifie qu'il existe une infinité de pulsations réelles  $\omega_{0s}$ , pour lesquelles la relation de dispersion admet une racine double. Comme précédemment, on peut réduire l'analyse à un voisinage d'une seule de ces pulsations et se contenter d'examiner le comportement local des branches spatiales lorsque le chemin d'intégration  $L_\omega$  est déformé dans le demi-plan supérieur  $\omega_i > 0$ . Pour cela, on considère à nouveau le cas du jet froid avec  $M = 1.5$  et  $n = 0$  et on s'intéresse aux modes notés  $k^+$  et  $k^-$  de la figure 2.7. La figure 2.8 montre que les restrictions des branches spatiales au premier feuillet de  $R_\lambda$  admettent un point commun lorsque  $\omega_i$  vaut zéro. Cela implique que les couples  $(k^\pm(\omega_{0s}), \omega_{0s})$  annulent à la fois  $D$  et sa dérivée par rapport à  $k$ , rendant ainsi singuliers les dénominateurs des

intégrants dans (2.45). D'après la terminologie classique de la théorie des instabilités hydrodynamiques, on parle d'instabilités marginalement absolues (voir Huerre et Rossi [32]). On peut les voir schématiquement comme étant pilotées par l'acoustique à l'extérieur de l'écoulement. En effet, les restrictions des branches spatiales associées aux modes de  $K^-$  aux intervalles  $\omega_s < \omega < \omega_{0s}$ ,  $s \in \mathbb{N}$  sont de vitesse de groupe négative, tendant vers celle du son lorsque  $\omega$  tend vers  $\omega_s$  (indiqué par un cercle sur la figure 2.8 (a)). Vu qu'il en est de même de la vitesse de phase, on a  $d\omega/dk_r \rightarrow \omega/k_0$  et  $\omega/k_r \rightarrow \omega/k_0$  pour  $\omega \rightarrow \omega_s$ , ce qui signifie que les ondes se comportent quasiment comme des ondes acoustiques qui se propageraient à l'extérieur du jet. À cela s'ajoute le fait qu'au voisinage des points de branchement  $\pm k_0(\omega; \infty)$ , le comportement radial des fonctions propres est logarithmique (pour  $n = 0$ ), ce qui suggère qu'une large partie de l'information se propage à l'extérieur du jet. À ce titre, on peut signaler les observations expérimentales de Ho et Nosseir [55] et Umeda *et al.* [56], qui indiquent que les ondes acoustiques qui remontent l'écoulement se propagent à l'extérieur du jet.

On a un phénomène analogue pour les nombres d'ondes positifs lorsqu'existent des instabilités supersoniques amplifiées. Pour le voir, on peut considérer le cas du jet chaud avec  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$  et  $n = 0$  pour lequel la condition (2.54) est vérifiée. Comme précédemment, on peut se limiter à l'examen d'un couple de modes complexes conjugués au voisinage du point de branchement  $+k_0(\omega; \infty)$ . Ces modes appartiennent au même ensemble  $K^+$ , et c'est pourquoi on les note provisoirement  $k_1^+$  et  $k_2^+$ . La figure 2.9 montre le comportement des branches spatiales correspondantes lorsque le chemin d'intégration  $L_\omega$  est déformé. Toujours comme pour le couple de modes  $(k^+, k^-)$ , on peut chercher à calculer les pulsations pour lesquelles existent des modes de vitesse de phase proche de celle du son, en faisant tendre  $k$  vers  $k_0(\omega; \infty)$ . En dehors du voisinage de  $\omega = 0$ , la branche holomorphe  $i\mu_1$  peut prendre une infinité de valeurs limites quand  $k$  tend vers  $k_0$ . Ces valeurs coïncident avec les racines (réelles<sup>10</sup>)  $-j_{s'}$ , i. e.

$$i|k_0| \sqrt{1 - (M - 1/\sqrt{\rho_\infty})^2} = -j_{s'}, \quad (2.60)$$

avec  $s' \in \mathbb{N}$ ,  $s' > 1$ . De la condition nécessaire d'existence des modes supersoniques (2.54), on déduit que la racine complexe dans (2.60) est imaginaire pure et que

$$\omega_{s'} = \frac{j_{s'}}{\sqrt{\rho_\infty} M \sqrt{(M - 1/\sqrt{\rho_\infty})^2 - 1}}, \quad (2.61)$$

vu qu'on a  $\sqrt{-k_0^2} = ik_0$  sur le premier feuillet de  $R_\mu$ . Des relations (2.59) et (2.61), on voit que les pulsations  $\omega_{s'}$  et  $\omega_s$  sont différentes. On peut les ordonner et les regrouper sous la même notation  $\omega_s$ , avec  $s \in \mathbb{N}$ . Mais il ne s'agit là que des pulsations positives. On obtient toutes les pulsations en cherchant le groupe d'invariance de la relation de dispersion (2.53) pour  $\omega \in \mathbb{R}$ . Les transformations  $k \mapsto -k$  et  $\omega \mapsto -\omega$  laissent (2.53)

---

10. D'une manière générale, les racines de  $J_1(z)$  sont toutes réelles (voir Watson [53]). Un corollaire est que pour  $\omega_i > 0$ , les pulsations  $\omega_s$ , définies par (2.59) sont complexes. Le nombre d'onde associé  $k_s$  se déplace sur la coupure joignant  $-k_0(\omega; \infty)$  à  $-i\infty$ , ce qui prouve qu'il appartient à  $K^-$ .

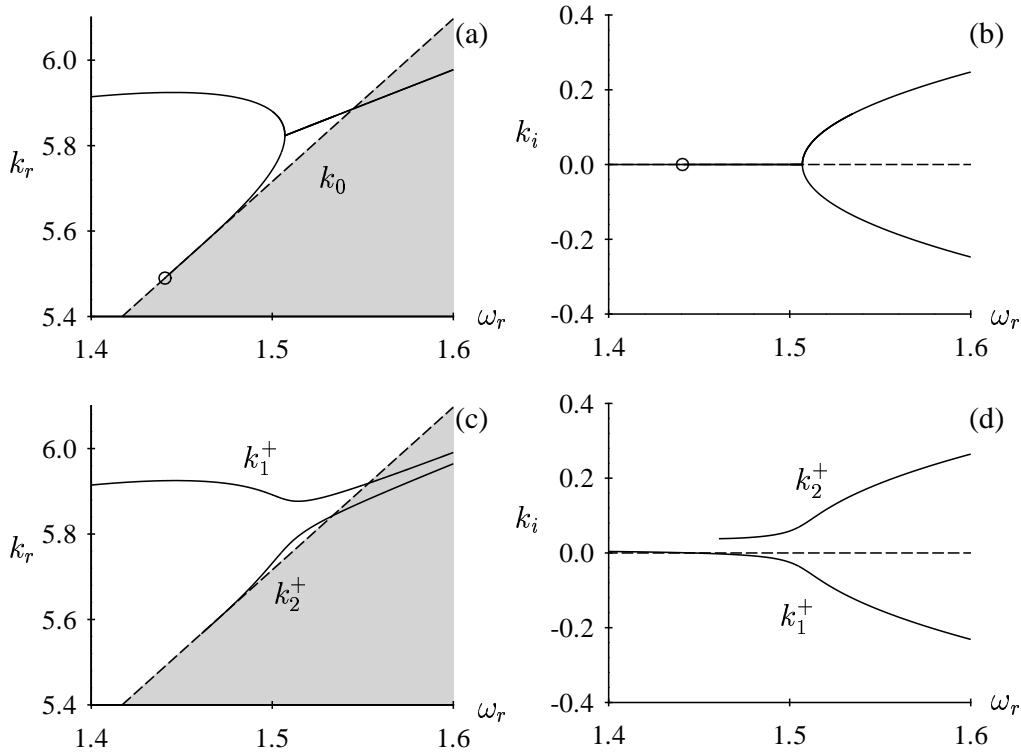


FIG. 2.9 – Déformation des branches spatiales au voisinage de la pulsation  $\omega_{s'}$  ( $s' = 3$ ) pour un jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$ ,  $n = 0$ . (a) et (b) :  $\omega_i = 0$  ; (c) et (d) :  $\omega_i = 0.01$ . Les cercles donnent la position du point de coordonnées  $(k_2^+(\omega_{s'}), \omega_{s'})$ .

invariant, ce qui implique que les pulsations manquantes sont données par  $-\omega_s = \omega_{-s}$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Aux pulsations données par l'équation (2.61) sont donc associés des modes de  $K^+$  qui se comportent comme  $k_2^+$ , c'est-à-dire dont la vitesse de groupe, positive, s'annule au point où se rencontrent  $k_1^+$  et  $k_2^+$ . Mais cette fois, l'interprétation physique est différente puisque les branches sont de la même catégorie. Comme l'évoque Bers [58], la rencontre de deux modes de  $K^+$  ou  $K^-$  ne conduit pas à une instabilité absolue, bien qu'annulant le dénominateur de l'intégrant de (2.47).

Compte tenu de l'expression (2.52) qui donne le comportement radial des fluctuations pour  $r > 1$ , il est immédiat que la fonction propre  $\Phi_2^+$ , associée à  $k_2^+$  va présenter un changement de comportement au voisinage du point de branchement, c'est-à-dire lorsque la vitesse de groupe tend vers celle du son. C'est d'ailleurs une propriété commune avec les modes de  $K^-$ . La figure 2.10 rend compte de ce changement. On peut résumer ces résultats sous la forme suivante : *un jet supersonique peut supporter des instabilités marginalement absolues, de vitesse de phase négative, subsonique et proche de celle du son. Ces instabilités sont d'amplitude lentement décroissante dans la direction radiale et induites par l'existence d'un champ de perturbations acoustiques au voisinage du jet.*



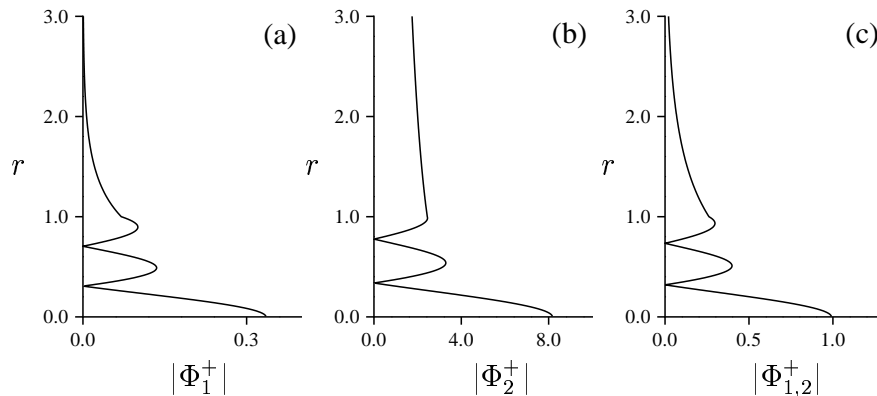


FIG. 2.10 – Module des fonctions propres associées aux branches spatiales  $k_j^+$ ,  $j = 1, 2$  de la figure 2.9. (a), (b)  $\omega = 1.4606$ ; (c)  $\omega = 1.5069$  ( $k_1^+ = k_2^+$ ). Jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$ ,  $n = 0$  et  $\omega_i = 0$ .

### Les ensembles de modes $K_j^\pm$ et $KH$

Plus généralement, pour une pulsation donnée, on peut distinguer trois classes de modes qui s'ajoutent à celui de Kelvin-Helmholtz et de son complexe conjugué, la distinction pouvant se faire en fonction des propriétés de  $H_n^{(1)}(i\lambda_1 r)$ . La première classe est constituée des modes subsoniques de  $K^+$  pour lesquels la distance aux points de branchement  $\pm k_0(\omega; \infty)$  est suffisamment grande pour que le module de la fonction de Hankel se comporte comme une fonction rapidement décroissante de  $r$ , ce qui confine les perturbations à un petit voisinage du jet (voir figures 2.11 (c) et (f)). C'est le cas d'une infinité de modes, tous extérieurs à  $B_0(\omega; \infty)$  et situés sur les coupures attachées aux points  $\pm k_0(\omega; 0)$  pour  $\omega_i = 0$ . La seconde classe de modes est donnée par ceux de  $K^-$ , en nombre fini, et leurs homologues de  $K^+$  comme le mode  $k_2^+$ , c'est-à-dire ceux dont la vitesse de groupe tend vers celle du son en valeur absolue quand  $\omega$  tend vers une des valeurs  $\omega_s$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas, le comportement de la fonction de Hankel est dominé par une singularité logarithmique pour  $\omega \rightarrow \omega_s$ , ce qui rend son module lentement décroissant lorsque  $r$  est de l'ordre de 1, comme le montre la figure 2.10 (b). Il reste les modes supersoniques, contenus dans  $B_0(\omega; \infty)$  et dont le comportement radial dépend fortement du taux d'amortissement ou d'amplification  $k_i$ . En effet, de la définition des coupures attachées à  $\pm k_0(\omega; \infty)$ , on voit que la partie réelle de  $\lambda_1$  tend vers zéro avec la partie imaginaire du nombre d'onde, si bien que pour  $k_i = 0$  le comportement asymptotique du module de la fonction de Hankel, pour  $r \rightarrow \infty$ , passe d'une décroissance exponentielle à une décroissance algébrique. Dans la suite, on parlera de *transition exponentielle-algébrique*.

L'analyse des propriétés radiales des fonctions propres à l'intérieur et au voisinage du jet montre aussi qu'on peut ordonner ces modes en comptant le nombre de maximums locaux du module. Ces modes sont alors caractérisés de manière univoque par un couple d'entiers  $(n, m)$  où  $n$  est le nombre d'onde azimutal et  $m$  le nombre de maximums. Cette

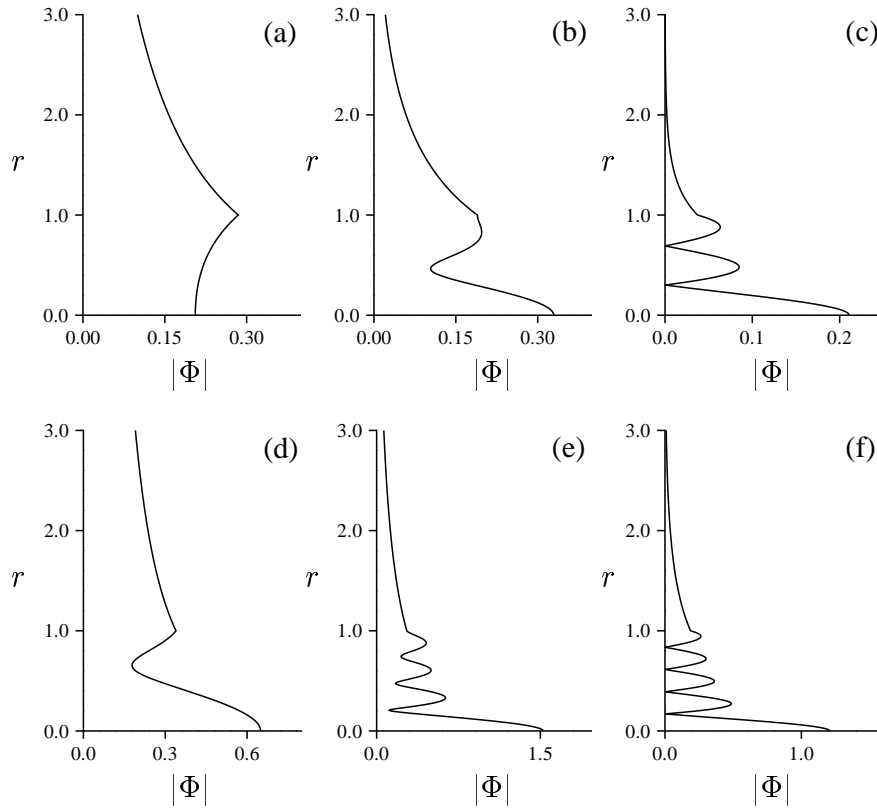


FIG. 2.11 – Module des fonctions propres associées à certains modes de la figure 2.6. Jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$ ,  $\omega = 1.4$  ( $\omega_i = 0$ ) et  $n = 0$ . (a) et (d) : modes de plus grande vitesse de phase ; (b) et (e) : modes supersoniques de plus petite vitesse de phase ; (c) et (f) : modes subsoniques de plus grande vitesse de phase. (a), (b) et (c) :  $k_r > 0$  ; (d), (e) et (f) :  $k_r < 0$ .

caractéristique souligne une fois de plus leur origine "acoustique" et suggère que seules les ondes dont la longueur d'onde est suffisamment grande sont susceptibles d'être observées dans les écoulements turbulents et/ou visqueux . On peut regrouper tous ces modes en quatre catégories  $K_0^- \subset K^-$  et  $K_j^+ \subset K^+$ ,  $j = 0,1,2$  selon qu'ils se comportent respectivement comme  $k^-$ ,  $k^+$  ou  $k_j^+$  ( $j = 1,2$ ), pour  $\omega > 0$ . Deux modes complexes conjugués se détachent des autres par le fait que le module de la fonction propre (identique pour les deux modes) atteint son maximum dans la zone de mélange (figure 2.11 (a)). En faisant varier le nombre de Mach, on peut montrer que le mode situé dans le demi-plan  $k_i < 0$  est celui de Kelvin-Helmholtz (voir les expériences de Lawson et Ollerhead [48] sur les jets supersoniques). Dans la suite on notera  $KH \subset K^+$  l'ensemble de ces modes.

En l'absence d'effets visqueux, on a  $K_0^-(\omega) = K_2^+(-\omega)$  et  $K_0^+(\omega) = K_1^+(-\omega)$ . On en déduit que les branches spatiales forment un réseau de courbes sur le premier feuillet de  $R_\lambda$ , certaines d'entre elles se prolongeant sur le second feuillet. La figure 2.12 en donne

quelques exemples pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Comme pour les figures 2.8 et 2.9, les cercles donnent les points du plan complexe où se rencontrent branches spatiales et coupures. Seules les restrictions des branches spatiales au premier feuillet de  $R_\lambda$  sont représentées. Les parties complémentaires peuvent être obtenues en considérant la seconde branche holomorphe  $\lambda_2$  au lieu de  $\lambda_1$  dans l'expression de la fonction de Hankel. Bien évidemment, on peut s'attendre à ce que certains paramètres de contrôle jusqu'à présent mis de côté, comme l'épaisseur de la zone de mélange ou la viscosité, déforment le réseau sur  $R_\lambda$ . En particulier, la présence d'une seconde échelle de longueur (l'épaisseur de la zone de mélange) se traduit par l'existence d'un point de rencontre entre l'axe réel  $k_i = 0$  et les branches spatiales associées aux modes de  $KH$ , pour  $\omega_i \rightarrow 0$ . Le passage du demi-plan  $k_i < 0$  au demi-plan  $k_i > 0$  peut donc se faire par l'intermédiaire d'une coupure. Nous verrons dans la suite que de telles situations ne sont pas des événements exceptionnels et se rencontrent pour une large gamme de jets supersoniques (voir chapitre 4).

Bien que la plupart des auteurs s'intéressant au rayonnement acoustique des ondes d'instabilités se limitent aux modes de  $KH$ , et en particulier à celui qui est le plus amplifié<sup>11</sup> (voir Tam et Chen [59]) il faut reconnaître qu'aucun argument ne permet de généraliser cette approche à tous les jets supersoniques. Le cas des jets chauds est d'ailleurs caractéristique puisqu'il permet de mettre en évidence la contribution des modes de  $K_1^+$  au bruit de jet, comme l'ont observé Seiner *et al.* [17] pour  $M = 2$  et  $\rho_\infty = 2.7$ . Des estimations numériques (voir Seiner, Bhat et Ponton [60]) ont d'ailleurs confirmé ces observations. Mais les calculs sont incomplets, pour diverses raisons qui tiennent autant aux difficultés numériques posées par l'intégration du système différentiel qu'à la formulation même du problème. Par exemple, le critère de rayonnement acoustique est celui développé par Phillips [61], repris par Ffowcs Williams [62] et reformulé par Tam [43] sous la forme d'une analogie avec le déplacement d'une paroi ondulée dans un écoulement compressible. Il s'agit d'un raisonnement géométrique, valable uniquement si l'écoulement est uniforme et dont la principale conclusion est que seules les ondes dont la vitesse de phase est supersonique participent au champ acoustique lointain. Dans ce contexte, Seiner, Bhat et Ponton se limitent à deux catégories de modes : les modes de  $KH$  tels que  $n \leq 2$  et un mode supersonique de  $K_1^+$  qu'on peut désigner par le couple d'entiers  $(n, m) = (0, 1)$ . Leur approche consiste à suivre chacun de ces modes lorsque l'épaisseur de la zone de mélange croît. Les pulsations sont choisies à l'avance, en accord avec les mesures expérimentales. La contribution des modes de  $K_0^\pm$  sous la forme d'instabilités marginalement absolues n'est donc pas prise en compte et au vu des résultats précédents on peut s'interroger sur leur rôle dans la dynamique du jet. D'autre part, il est important de noter que le critère basé sur la vitesse de phase (voir section 2.2.2) est insuffisant pour conclure. Une perturbation est susceptible de contribuer significativement au bruit de jet, même si sa vitesse de phase est partout subsonique. Pour s'en convaincre, on peut s'appuyer sur les

---

11. Le terme "amplification" est utilisé ici pour désigner ce qu'on appelle aussi amplification totale et correspond à l'intégrale du taux d'amplification  $k_i$ , considéré comme une fonction de l'épaisseur de la zone de mélange et pour une pulsation donnée (voir Tam et Chen [59] et Seiner, Bhat et Ponton [60]). L'intervalle d'intégration s'étend en général de zéro jusqu'au point où  $k_i$  s'annule (l'amplification totale est maximale).

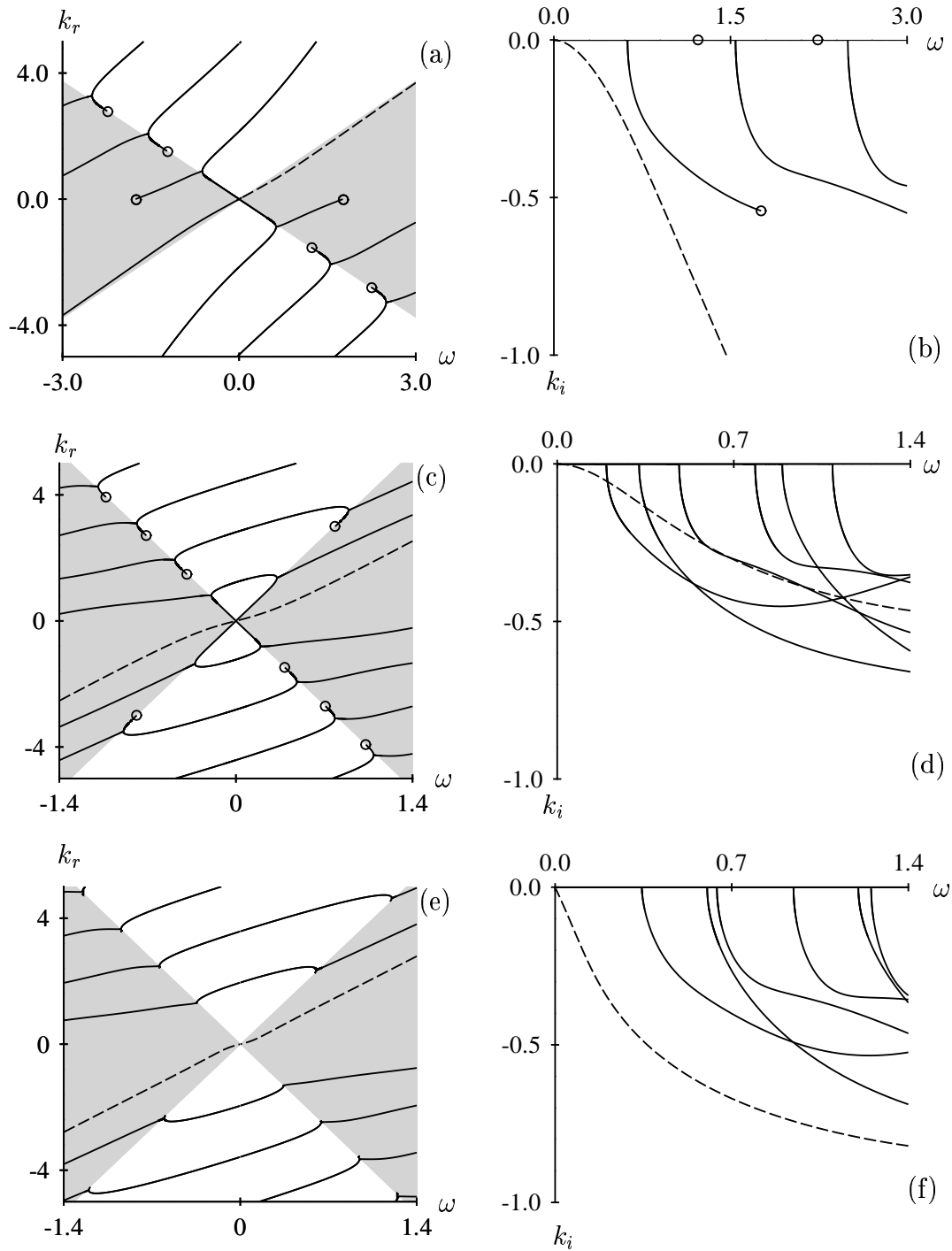


FIG. 2.12 – Réseau de branches spatiales lorsque  $L_\omega$  est abaissé jusqu'à l'axe réel. (a), (b) : Jet froid,  $M = 1.5$  et  $n = 0$ . (c), (d) : Jet chaud,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$  et  $n = 0$ . (e), (f) :  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $M = 2.2$  et  $n = 1$ . La branche de Kelvin-Helmholtz est indiquée en tirets.

travaux de Crighton et Huerre [45] qui se sont attachés à la description du comportement transversal des ondes d'instabilités, quand le nombre de Mach tend vers zéro. Considérant une onde d'instabilités dont la modulation de l'amplitude dans la direction de propagation suit une loi particulière, Crighton et Huerre démontrent qu'il est possible d'avoir une transition exponentielle-algébrique dans la direction transversale. La démonstration repose sur des techniques d'analyse asymptotique, où le petit paramètre  $\epsilon$  peut être vu comme une mesure du taux de divergence de l'écoulement.

Revenons maintenant à la détermination de la fonction de Green en champ proche. Le retour à l'espace physique fait intervenir différentes contributions associées aux branches spatiales, représentées sur les figures 2.12 (a) et (b) pour le jet froid et sur les figures 2.12 (c) et (d) pour le jet chaud. Ces deux cas sont caractéristiques des différentes configurations qu'on peut rencontrer pour  $M > 1$ , et on peut s'y limiter. Dans le premier cas, la condition (2.54) n'est pas satisfaite et les seules transitions subsonique-supersonique possibles sont celles qui ont lieu dans le demi-plan  $k_r < 0$  si  $\omega > 0$  et dans le demi-plan  $k_r > 0$  si  $\omega < 0$ . Ainsi, en plus de la contribution du mode de Kelvin-Helmholtz, sous forme d'instabilité convective, s'ajoutent celles des "résonances acoustiques" du jet, représentées par les modes de  $K_0^\pm(\omega)$ , pour  $\omega > 0$ . À ce niveau, il est difficile de préciser leur rôle exact. En s'appuyant sur les travaux de Ho et Huerre [63], on peut néanmoins s'attendre à ce que ces "résonances" soient responsables d'une sélection en fréquence, par un mécanisme mettant en jeu des instabilités marginalement absolues. Mais le modèle de la nappe tourbillonnaire est insuffisant pour conclure. Il faut introduire une seconde échelle caractéristique et tenir compte du fait que le mode de Kelvin-Helmholtz peut désormais rencontrer une coupure, ce qui nous ramène aux considérations de la fin de la section 2.2 sur le problème de compatibilité des paquets d'ondes avec la condition de rayonnement. Dans le second cas (figures 2.12 (c) et (d)), il est clair qu'il faut considérer la participation des modes de  $K_1^+$  pour  $\omega > 0$ , sous forme d'instabilités convectives, de la même façon que pour le mode de Kelvin-Helmholtz. Le cas des perturbations non axisymétriques conduit à des conclusions similaires comme l'indiquent les figures 2.12 (e) et (f), pour  $n = 1$ .

### Vers une dynamique globale?

Il est important de remarquer que les *transitions exponentielle-algébrique du module de la fonction de Hankel lorsque  $r$  tend vers l'infini sont associées à des transitions subsonique-supersonique de la vitesse de phase de l'onde marginale si  $\omega_i = 0$ .*

Si l'épaisseur de la zone de mélange est une fonction de la variable lente  $X = \epsilon x$ , il faut corriger la proposition précédente en procédant à une analyse asymptotique, pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le modèle de la nappe tourbillonnaire trouve alors sa place en tant que modèle limite, quand l'abscisse  $x$  tend vers la sortie de la tuyère, que nous prendrons dans la suite comme origine  $x = 0$ . Suivant le cadre théorique proposé par Bouthier [64, 65], appliqué aux jets subsoniques par des auteurs comme Crighton et Gaster [3], Strange et Crighton [5], Garg [4], plus récemment par Cooper et Crighton [44] et étendu aux jets supersoniques par Tam et Morris [6], on sait que l'ordre dominant des ondes d'instabilités est gouverné par des approximations de rang zéro, obtenues classiquement en ayant recours au formalisme

WKBJ (voir Bender et Orszag [40]) ou en utilisant la méthode des échelles multiples. Ces deux méthodes conduisent à confondre la résolution du problème à l'ordre dominant avec la résolution de l'équation (2.29) dans laquelle l'écoulement de base est paramétré par  $X$ . D'un point de vue pratique, on peut donc se limiter à l'intégration numérique de l'équation différentielle (2.29) pour déterminer le comportement des réseaux de branches spatiales lorsque  $X$  varie. Le retour à l'espace physique peut se faire en utilisant la notion de fonction de Green globale  $G_n(x,r,t)$  (voir Monkewitz, Huerre et Chomaz [66]) qu'on écrit sous la forme

$$G_n(x,r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} G_n(x,r,\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (2.62)$$

où  $L_\omega$  est pris parallèle à l'axe réel  $\omega_i = 0$  et au-dessus des singularités de l'intégrand.

Contrairement au voisinage du jet, les variables adaptées à la description des ondes en champ lointain sont du même ordre de grandeur et doivent être traitées de la même façon puisque dans un écoulement au repos il n'y a pas de direction de propagation privilégiée. Si on se place dans une zone "intermédiaire" qu'on peut imaginer comme correspondant à un domaine décrit par une variable  $r \sim 1/\delta(\epsilon)$  où  $\delta(\epsilon)$  tend vers zéro avec  $\epsilon$ , on a le choix entre deux descriptions, *a priori* équivalentes, pour rendre compte du comportement de  $G_n(x,r,\omega)$  dans la direction de l'écoulement. Comme Crighton et Huerre [45], on peut utiliser la transformation de Fourier inverse suivante :

$$G_n(x,r,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_n(k,r,\omega) \exp(ikx) dk. \quad (2.63)$$

On peut aussi adopter le point de vue des approximations WKBJ en considérant

$$G_n(x,r,\omega) \sim A^\pm(X,\omega) \Phi^\pm(X,r,\omega) \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k^\pm(s;\omega) ds \right], \quad (2.64)$$

où  $\Phi^\pm$  répond à la normalisation (2.35) et  $A^\pm$  est une fonction d'amplitude qu'on détermine en général à l'ordre d'approximation supérieur. Si il existe un domaine où les expressions (2.63) et (2.64) sont simultanément valables, alors il est clair que les modulations de l'amplitude d'une onde d'instabilités se manifestent dans l'intégrale (2.63) par l'émergence d'une densité spectrale continue. Le corollaire est qu'*une onde d'instabilités de vitesse de phase subsonique peut rayonner de l'énergie au sens du critère de Phillips [61] si la modulation de son amplitude implique que la fonction  $\hat{G}_n$  obtenue en identifiant (2.63) et (2.64) soit non nulle pour des nombres d'ondes  $k$  tels que  $|k| \leq k_0(\omega; \infty)$* . On voit ainsi que les modes associés à des ondes de vitesse de phase subsonique lorsque  $k_i$  s'annule (la condition suffisante n'est pas vérifiée), peuvent rayonner de l'énergie par un mécanisme de modulation d'amplitude.

L'intérêt porté aux ondes marginalement absolues dans les écoulements faiblement non-parallèles est appuyé par un certain nombre de travaux, dont ceux de Ho et Huerre [63] et Monkewitz, Huerre et Chomaz [67] sur les modes globaux faiblement amortis. Par exemple, le mode "colonne" observé dans certains jets subsoniques est typique des

écoulements marginalement globalement stables. Le jet se comporte comme un oscillateur faiblement amorti, favorisant ainsi certaines fréquences. Les travaux de Cooper et Crighton [44] sur le jet axisymétrique vont aussi dans ce sens en assurant une liaison entre la théorie des modes globaux et la notion de source superdirective, mise en avant par Crighton et Huerre [45]. Sous forme d'une conclusion, Cooper et Crighton conjecturent l'existence d'une valeur critique pour le nombre de Reynolds<sup>12</sup> de l'ordre de  $10^5$ , au-dessous de laquelle la réponse du jet est régie par un mode global marginal. Dans le cas contraire, l'écoulement serait globalement et absolument instable et l'approche linéaire devrait alors se substituer à une approche en terme de système dynamique non-linéaire. Cette conjecture, qui s'appuie en partie sur les travaux de Crighton [68], attribue à la viscosité un rôle décisif puisqu'elle indique qu'au delà d'une certaine valeur, le système va bifurquer vers un cycle limite (le mode global). Or, on sait que de tels écoulements peuvent être le siège d'un scénario de bifurcations jusqu'à un attracteur étrange de petite dimension (voir Manneville [69]) et qu'un écoulement partout localement convectivement instable peut lui aussi présenter une dynamique intrinsèque, en raison de la présence d'ondes qui remontent l'écoulement (voir les expériences de Broze et Hussain [70] sur les jets excités). Notons qu'il n'est pas nécessaire qu'un obstacle soit présent au sein de l'écoulement pour que ces ondes existent. D'après Broze et Hussain, l'appariement des grosses structures en aval d'un forçage donné peut très bien en être la source.

On peut maintenant, avec le recul que procure la partition  $\{K_j^\pm, KH\}$ , revenir au cas des jets supersoniques et chercher à caractériser l'influence de l'épaisseur de la zone de mélange. Dans certains cas, nous verrons qu'il ne sera pas possible d'utiliser un modèle non visqueux et c'est pourquoi la formulation numérique présentée dans la section 2.3 s'applique à n'importe quel système d'équations différentielles.

## 2.3 Approximation localement parallèle

### 2.3.1 Formulation numérique

D'une manière générale, la détermination des modes propres ne peut se faire que de façon numérique, en mettant à profit certains schémas numériques adaptés aux écoulements compressibles. Plusieurs auteurs comme Malik *et al.* [71, 72, 73] proposent de classer ces schémas en deux catégories, selon qu'il s'agit d'une méthode explicite<sup>13</sup> ou implicite. Les méthodes explicites consistent en la recherche d'un seul couple, sous la forme d'une solution d'un problème aux valeurs initiales. Concernant les jets supersoniques, Tam et Morris [6] proposent d'intégrer l'équation de Rayleigh en utilisant une méthode de Runge-Kutta explicite pour calculer l'évolution des caractéristiques du mode de Kelvin-Helmholtz. L'inconvénient majeur est qu'il faut connaître une valeur initiale, parfois avec une précision de plusieurs décimales. Ce qui implique qu'en l'absence de données bibliographiques suffisam-

---

12. Le nombre de Reynolds que considèrent Cooper et Crighton est basé sur le diamètre du jet  $2r_j$  et la vitesse de l'écoulement moyen sur l'axe de symétrie, qu'on désigne ici par  $u_j$ .

13. On parle aussi de "méthode de tir".

ment précises, rien ne permet d'affirmer qu'aucun mode n'a été oublié. Dans les méthodes implicites, le système d'équations différentielles est réduit à un système d'équations algébriques en utilisant un schéma aux différences finies ou une représentation spectrale (voir Orszag [74] et les ouvrages de Canuto *et al.* [75] et Georgescu [76]). Parmi les schémas aux différences finies, le schéma compact d'ordre 4 (voir Malik [71]) a un statut particulier puisque bien adapté à l'équation d'Orr-Sommerfeld. Les étapes nécessaires à son implémentation numérique sont rappelées par Griffond [77]. Notons que dans le cas du jet axisymétrique, le passage à un système de coordonnées cylindriques introduit une singularité dans les équations pour  $r = 0$ , ce qui demande un traitement particulier : les inconnues sont développées en séries de Taylor au voisinage de l'axe afin d'obtenir des relations dites de "compatibilité". Cette procédure permet de déplacer la borne inférieure du domaine d'intégration, initialement confondue avec l'axe, dans un voisinage de celui-ci. La détermination des valeurs propres de l'opérateur discrétisé se fait alors soit en utilisant une procédure itérative, comme la méthode de Newton-Raphson, ou en calculant le spectre de l'opérateur discret, en utilisant la méthode de la matrice compagnon (voir Bridges et Morris [78]).

L'utilisation du schéma compact d'ordre 4 pour déterminer les caractéristiques du mode de Kelvin-Helmholtz dans les jets axisymétriques a mis la lumière sur un certain nombre de problèmes, référencés par Millet *et al.* [79], qui semblent limiter son utilisation à des cas subsoniques. Certains de ces problèmes sont étroitement liés à la nature du domaine d'holomorphie des fonctions de Hankel et ne se posent que lorsque l'écoulement porteur est suffisamment rapide. Ainsi, chercher à calculer le spectre de l'opérateur discret sous-entend qu'on s'est donné une discrétisation de l'espace physique adaptée à la description des ondes d'instabilités. Pour les modes de  $KH$ , induits par la présence d'un point d'inflexion sur le profil de vitesse moyenne, il semble naturel de se donner un maillage  $\{r_j, 0 \leq j \leq N\}$  dont la distance entre deux points successifs tende vers zéro lorsque le rayon tend vers le point d'inflexion, qu'on peut provisoirement désigner par l'indice  $i$ . Mais compte tenu de l'existence d'autres modes localisés à proximité des points de branchement, il n'est pas possible de tronquer le domaine physique à une distance raisonnable de l'axe sans affecter le calcul du spectre. La raison principale est qu'à l'extérieur du jet, les fonctions propres correspondantes sont lentement décroissantes et ne s'annulent que si on se place suffisamment loin de l'origine  $r_0 = 0$ . Choisir un maillage adapté à la fois au calcul des modes de  $KH$  et de  $K_j^\pm$ , sachant que le rapport  $(r_N - r_i)/r_i$  peut devenir très grand si on s'intéresse au voisinage des coupures, n'est donc pas une étape aussi simple qu'elle peut le laisser paraître. De plus, la méthode développée par Bridges et Morris ne s'applique que s'il est possible d'exprimer l'opérateur discret sous la forme d'un polynôme en la valeur propre, c'est-à-dire en  $k$  pour une approche spatiale, alors qu'en toute généralité les conditions limites au point  $r_N$  s'expriment plutôt en termes de fonctions cylindriques (voir annexe C). Une alternative possible est de se placer suffisamment loin du jet pour annuler l'amplitude des perturbations et prendre pour condition limite  $\hat{p}_n(r_N) = H_n^{(1)}(i\lambda_1 r_N) = 0$ , ce qui permet bien d'exprimer l'opérateur discret sous la forme voulue. Or, l'expérience montre que le choix du maillage est de première importance et qu'il est difficile de réaliser un bon compromis entre la distribution, le nombre de points et le rayon auquel on limite



le domaine de calcul. Il semblerait que les propriétés de convergence du schéma compact d'ordre 4 soient très sensibles au choix du maillage, en particulier lorsque ce dernier n'est pas régulier. En pratique, il n'a pas été possible de retrouver la partition de modes dont il a été fait état dans la section précédente et c'est pourquoi une méthode de collocation spectrale à plusieurs domaines a été développée pour l'occasion. Pour une présentation rapide de la méthode, le lecteur peut se reporter à l'article de synthèse de Malik [71] et à celui de Macaraeg et Streett [80] qui traite de problèmes modèles.

Ajoutons que la méthode qui consiste à choisir un rayon  $r_N$  qui annule les inconnues ne permet d'obtenir que les restrictions des branches spatiales au premier feuillet de Riemann. Une façon d'obtenir la partie complémentaire est de prendre pour condition limite  $\hat{p}_n(r_N) = H_n^{(1)}(i\lambda_2 r_N)$ , où  $r_N$  est à l'extérieur du jet, et de déshomogénéiser le système algébrique en remplaçant une ligne de la matrice par une condition non homogène *a priori* compatible. On dispose alors d'un système inhomogène *a priori* inversible<sup>14</sup> dont la résolution est possible pour un nombre d'onde donné et d'une équation supplémentaire  $f(k) = 0$  qu'on cherche à satisfaire en corrigeant de façon itérative la valeur du paramètre inconnu  $k$ .

### Méthode de collocation spectrale multidomaine

On se limite ici à un exposé formel de la méthode de collocation spectrale. Ses principales propriétés mathématiques sont rappelées dans l'ouvrage de Canuto *et al.* [75], auquel on renvoie le lecteur. Pour garder suffisamment de généralité, le système d'équations différentielles à résoudre est écrit en chaque point  $r_j$  du domaine de calcul, sous la forme

$$\hat{L}[\hat{\phi}] = \sum_s \hat{L}_s(r_j; X) \frac{\partial^s \hat{\phi}}{\partial r^s}(r_j; X) = 0, \quad (2.65)$$

où les  $\hat{L}_s$  désignent des matrices carrées, dont le nombre d'éléments dépend du système différentiel retenu et  $\hat{\phi}$  est une matrice colonne ; ses éléments sont les valeurs que prennent les inconnues au point  $r_j$ . Pour fixer les idées, on peut reprendre le cas des écoulements compressibles non visqueux, et considérer l'équation (2.29) qui conduit à un système du second ordre ; les  $\hat{L}_s$  sont alors des nombres complexes et  $\hat{\phi}$  est la transformée de Fourier-Laplace de la perturbation de pression  $\hat{p}_n$ . Dans la suite, la dépendance en  $X$  sera sous-entendue et pour simplifier les notations, la référence au nombre d'onde azimutal  $n$  sous la forme d'indice pour  $\hat{\phi}$  sera provisoirement omise. Si on utilise les variables primitives le système (2.65) s'écrit

$$\hat{L}_2(r_j) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial r^2}(r_j) + \hat{L}_1(r_j) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}(r_j) + \hat{L}_0(r_j) \hat{\phi}(r_j) = 0, \quad (2.66)$$

où  $\hat{\phi}$  est une matrice colonne comportant 6 éléments donnés par les fluctuations des trois composantes de vitesse, de pression, de masse volumique et de température. L'annexe C

---

14. L'ensemble des matrices inversibles est dense dans celui des matrices.

explicité les matrices  $\hat{L}_0$ ,  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$  en fonction des données du problème pour un écoulement compressible et visqueux.

Procédons maintenant à la discrétisation du système différentiel (2.66). On se donne un domaine de calcul caractérisé par la variable  $\xi_h$ , où  $h$  appartient à un ensemble d'indices déterminé par le choix d'un "découpage" du domaine physique en sous-domaines  $\Omega_h$ , de sorte que  $\{\Omega_h\}$  soit une partition de  $\Omega$ . Ainsi, la variable  $\xi_h$  est associée à la variable  $r \in \Omega_h$  par une transformation que nous supposons localement inversible. Si on convient de prendre une distribution des points  $\xi_h(r_j)$  satisfaisant à la relation de Gauss-Lobatto, i. e.  $\xi_h(r_j) = \cos(\pi j/N_h)$ , où  $j$  est un entier qui varie de 0 à  $N_h$ , on peut construire un polynôme d'interpolation pour  $\hat{\phi}$  à partir des polynômes de Chebyshev d'ordre  $N_h$ , qu'on note  $T_{N_h}$ . La restriction<sup>15</sup>  $\hat{\phi}_h$  de  $\hat{\phi}$  au sous-domaine  $\Omega_h$  peut alors s'exprimer en fonction des valeurs que prend la fonction  $\hat{\phi}$  aux points  $r_j \in \Omega_h$  tels que  $r_j = \xi_h^{-1}(\cos(\pi j/N_h))$ . On arrive à

$$\hat{\phi}_h(r) = \sum_{j=0}^{N_h} \frac{(-1)^{j+1}(1 - (\xi_h(r))^2)T'_{N_h}(\xi_h(r))}{c_j N_h^2 (\xi_h(r) - \xi_h(r_j))} \hat{\phi}(r_j), \quad (2.67)$$

où  $c_j = 1$  pour  $j = 1, 2, \dots, N_h - 1$  et  $c_0 = c_{N_h} = 2$ . On en déduit

$$\frac{\partial \hat{\phi}_h}{\partial r}(r_l) = J_h(r_l) \sum_{j=0}^{N_h} (D_{N_h})_{lj} \hat{\phi}_h(r_j), \quad l = 0, \dots, N_h \quad (2.68)$$

où  $J_h = \partial \xi_h / \partial r$  est le Jacobien de la transformation  $\xi_h : r \mapsto \xi_h(r)$  et les éléments  $(D_{N_h})_{lj}$  sont calculés en dérivant les polynômes de Lagrange dans (2.67). Tous calculs faits, on obtient

$$(D_{N_h})_{lj} = \frac{c_l (-1)^{l+j}}{c_j (\xi_h(r_l) - \xi_h(r_j))}, \quad l \neq j, \quad (2.69)$$

$$(D_{N_h})_{jj} = -\frac{\xi_h(r_j)}{2(1 - \xi_h(r_j)^2)}, \quad (2.70)$$

$$(D_{N_h})_{00} = -(D_{N_h})_{N_h N_h} = \frac{2N_h^2 + 1}{6}. \quad (2.71)$$

La dérivée d'ordre  $n$  de (2.67) par rapport à  $r$  en  $r_l$  peut donc s'obtenir simplement à partir de la connaissance de la matrice  $(J_h D_{N_h})^n$ , où les éléments non nuls de la matrice  $J_h$  sont les termes diagonaux  $(J_h)_{ll} = J_h(r_l)$ . Par exemple, pour la dérivée seconde, on a

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_h}{\partial r^2}(r_l) = J_h(r_l) \sum_{i=0}^N (D_{N_h})_{li} J_h(r_i) \sum_{j=0}^N (D_{N_h})_{ij} \hat{\phi}(r_j), \quad l = 0, \dots, N_h \quad (2.72)$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle  $(\hat{\phi}_h'')_k = (J_h D_{N_h})^2 (\hat{\phi}_h)_k$ , où  $(\hat{\phi}_h)_k$  et  $(\hat{\phi}_h'')_k$  sont des matrices colonnes dont les éléments donnent les valeurs que prend une variable

---

<sup>15</sup>. En toute rigueur, il faudrait indiquer que  $\hat{\phi}_h$  est une approximation de la solution exacte en faisant intervenir la notion de polynôme d'interpolation et en discutant les propriétés de convergence de (2.67) comme le font Canuto *et al.* [75]. Ici, on se conforme à la coutume et on confond l'approximation avec la solution exacte en conservant l'ambiguïté du symbole = dans (2.67).

primitive quelconque (la fluctuation de pression, de masse volumique,...) et sa dérivée seconde, aux points de collocation  $r_j$ . Si les coefficients de l'équation (2.66) sont des nombres complexes, alors  $\hat{\phi}$  ainsi que ses dérivées sont aussi des nombres complexes et on peut enlever l'indice  $k$ . C'est le cas si la formulation retenue est non-visqueuse. Si les coefficients sont des matrices de genre  $(M, M)$ , l'indice  $k$  est un entier compris entre 1 et  $M$  et fait référence à la ligne  $k$  de la matrice colonne  $\hat{\phi}$ . Par récurrence, on en déduit que pour tout entier  $n$ ,  $(\hat{\phi}_h^{(n)})_k = (J_h D_{N_h})^n (\hat{\phi}_h)_k$ , où  $(\hat{\phi}_h^{(n)})_k$  est la dérivée d'ordre  $n$  d'une grandeur primitive.

Un système algébrique est obtenu pour chaque sous-domaine  $\Omega_h$  en réarrangeant les matrices de dérivation  $(J_h D_{N_h})^s$  dans une matrice  $D_h^s$ . Les éléments non nuls de  $D_h^s$  sont définis par  $(D_h^s)_{i'j'} = (D_{N_h})_{ij}$ , avec  $i' = k + Mi$  et  $j' = k + Mj$ , où  $i$  et  $j$  sont des entiers de l'intervalle  $[0, N_h]$  et  $k$  prend les valeurs  $1, 2, \dots, M$ . Pour être cohérent, on construit les matrices  $\tilde{L}_{sh}$  à partir des matrices  $\hat{L}_s$  en prenant  $(\tilde{L}_{sh})_{i'j'} = (\hat{L}_s(r_k))_{ij}$  avec  $i' = Mk + i$  et  $j' = Mk + j$ , où  $i$  et  $j$  prennent les valeurs  $1, 2, \dots, M$  et  $k \in [0, N_h]$ . On arrive ainsi à un système algébrique à  $M(N_h + 1)$  inconnues,

$$\tilde{L}_h[\tilde{\phi}_h] = \sum_s \tilde{L}_{sh} D_h^s \tilde{\phi}_h = 0, \quad (2.73)$$

où  $\tilde{\phi}_h$  est une matrice colonne dont les éléments sont définis par  $(\tilde{\phi}_h)_i = \hat{\phi}_h(r_i)$ ,  $i \in [0, N_h]$ . Le système algébrique complet peut donc se mettre sous la forme d'un polynôme en  $k$ ,

$$\tilde{L}[\tilde{\phi}] = \sum_s k^s \tilde{L}_s(\omega) \tilde{\phi} = 0, \quad (2.74)$$

où les éléments non nuls de  $\tilde{L}$  sont donnés par  $\tilde{L}_{i'j'} = (\tilde{L}_h)_{ij}$ , avec  $i' - i$  et  $j' - j$  variant de 0 à  $(P - 1)$ ,  $P$  désignant le nombre de domaines  $\Omega_h$  considérés. La matrice colonne  $\tilde{\phi}$  contient les matrices  $\tilde{\phi}_h$  mises bout à bout quand  $h$  varie de 1 jusqu'à  $P$ . Ainsi construit, le système (2.74) représente la version "discrète" du système différentiel initial (2.65).

Pour avoir les conditions de raccord entre sous-domaines, on part des conditions minimales de régularité des inconnues du système différentiel (2.66) : il faut que la dérivée de  $\hat{\phi}$  par rapport à  $r$  soit au moins continue sur  $\cup_h \Omega_h$ , pour que la solution existe au sens des fonctions. Cela se traduit par l'égalité des fonctions  $\hat{\phi}'_h$  et  $\hat{\phi}'_{h+1}$  au point de rencontre des deux domaines  $\Omega_h$  et  $\Omega_{h+1}$ . En pratique, on remplace  $2M(P - 1)$  lignes (différentes des  $M$  premières lignes) par  $M(P - 1)$  lignes exprimant la continuité de  $\hat{\phi}$  et autant pour la continuité de sa dérivée, les dérivées étant calculées en tirant parti de (2.68). Les conditions limites en  $r = 0$  se déduisent du système différentiel initial, dans lequel on remplace les inconnues par leurs développements en série de Taylor (voir annexe C). Pour  $r = r_N$ , on distingue deux cas. Si on s'intéresse au premier feuillet de  $R_\lambda$ , on peut prendre un domaine d'intégration suffisamment grand pour remplacer  $\hat{\phi}(r_N)$  par zéro. Ainsi, la détermination du spectre<sup>16</sup> de l'opérateur discret  $\tilde{L}$  se réduit à ajouter suffisamment de

---

16. Il est important de rappeler que pour le problème continu, l'ensemble des valeurs propres est inclus dans le spectre de  $L$ . Après discrétisation, le problème est de dimension finie et donc, le spectre de  $\tilde{L}$  s'identifie à l'ensemble des valeurs propres. En procédant à une approche numérique, il faut donc se garder de conclure quant au spectre de  $L$ .

variables auxiliaires pour rendre le problème linéaire en  $k$ , comme le soulignent Bridges et Morris [78], ce qui nous autorise ensuite à utiliser une procédure classique de calcul des valeurs propres (algorithme QR). Mais comme il l'a déjà été souligné, le voisinage des coupures et le second feuillet de  $R_\lambda$  ne peuvent pas faire l'objet d'une telle approche. Dans ce dernier cas, le domaine d'intégration est limité à un voisinage du jet et  $\hat{\phi}$  est raccordé à une solution connue. Si on se place dans le cadre de l'approximation non-visqueuse, les conditions limites peuvent se mettre sous la forme

$$\hat{p}_n(r_0 = 0) = 0, \quad \hat{p}_n(r_N) = H_n^{(1)}(i\lambda_2 r_N), \quad n > 0, \quad (2.75)$$

où  $\lambda_2$  est le prolongement analytique de  $\lambda_1$  sur le second feuillet de  $R_\lambda$ . Si  $n = 0$ , la condition en  $r_0$  doit être remplacée par  $\hat{p}'_0(r_0) = 0$ . Le couple de nombres complexes  $(k, \omega)$  est alors obtenu par une procédure itérative (méthode de Newton-Raphson), en inversant le système non-homogène obtenu en considérant (2.74) avec les conditions limites (2.75). La relation qu'il faut satisfaire à convergence s'obtient en dérivant la condition limite en  $r_N$ . D'où

$$\hat{p}'_n(r_N) - i\lambda_2 H_n^{(1)'}(i\lambda_2 r_N) = 0, \quad (2.76)$$

où la dérivée de  $\hat{p}_n$  se déduit de (2.68). Dans certains cas, il est préférable de prendre pour condition limite

$$\hat{p}_n(r_N) - \frac{H_n^{(1)}(i\lambda_2 r_N)}{H_n^{(1)}(i\lambda_2 r_{N-1})} \hat{p}_n(r_{N-1}) = 0, \quad (2.77)$$

et remplacer n'importe quelle ligne du système algébrique par une équation de la forme  $\hat{p}(r_j) = 1$ . On peut aussi conserver la version homogène du système algébrique et chercher à annuler son déterminant, toujours en utilisant la méthode de Newton-Raphson. La détermination de la fonction propre se fait alors au cours d'une seconde étape.

La difficulté majeure posée par une procédure itérative est qu'en fonction des paramètres retenus pour le calcul, le diamètre du bassin d'attraction du mode recherché est plus ou moins grand. D'un autre côté, on sait que le calcul d'un mode n'est pas suffisant pour conclure quant à la réponse d'un écoulement donné. Il faut connaître le comportement des branches spatiales lorsque le contour d'intégration  $L_\omega$  est déformé. Cela revient à suivre chacun des modes lorsque  $\omega$  prend des valeurs discrètes. Pour accélérer la convergence de la méthode de Newton-Raphson, il est courant d'extrapoler la partie de la branche spatiale déjà calculée afin de disposer d'une valeur initiale proche de la valeur inconnue. Or, il arrive que le diamètre du bassin d'attraction soit plus petit que l'écart entre deux valeurs successives de  $\omega$ , si bien que la procédure d'extrapolation devient un élément décisif pour la convergence de la méthode. Si un tel cas se présente, il est souvent préférable de considérer une autre relation dans la procédure de Newton-Raphson, par exemple en cherchant le maximum de la fonction propre pour la pulsation précédente et en considérant la ligne correspondante dans (2.74) pour déshomogénéiser le système. Ajoutons que la régularité des transformations  $\xi_h(r)$ ,  $h \leq P$  est une propriété importante pour la convergence des méthodes de collocation spectrale. Si la transformation d'un domaine borné en  $[-1, 1]$  ne pose pas de problème, on ne peut pas en dire autant lorsqu'il s'agit d'un domaine non borné. Les transformations les plus utilisées sont des transformations

homographiques ou exponentielles (voir Canuto *et al.* [75] et Boyd [81]) qui présentent l'avantage d'être indéfiniment dérivables, mais dont le Jacobien s'annule<sup>17</sup> pour  $r \rightarrow \infty$ . Pour contourner ce problème, il y a plusieurs méthodes dont la réussite dépend de l'objectif visé. Si on se limite au calcul d'un seul mode par une méthode itérative, il est possible de limiter le domaine d'intégration à un petit intervalle contenant le jet et donc, d'utiliser des transformations affines (tant que l'épaisseur de la zone de mélange n'est pas trop grande). Si par contre il est question d'un calcul de spectre d'opérateur, on peut utiliser des transformations définies par morceaux ou plus simplement déplacer le point qui annule le Jacobien à l'extérieur du domaine de calcul. Si les effets de viscosité ne sont pas considérés, le choix de l'ensemble de transformations  $\xi_h(r)$ ,  $h \leq P$  dépend en plus des singularités des matrices  $\hat{L}_s$  considérées comme des fonctions de la variable complexe  $r$ .

### Contournement des points critiques

Les points critiques sont les solutions complexes de l'équation  $\omega - ku_0(r) = 0$ , où  $\omega$  et  $k$  sont deux nombres complexes fixés. Si ces points ne posent pas de problème particulier lorsque le nombre de Reynolds est fini, ce n'est pas le cas lorsque les effets visqueux sont négligés ( $1/Re = 0$ ). Les points critiques donnent alors la position de certains pôles de  $\hat{L}_1(r)$  dans le plan complexe qu'il faut contourner pour intégrer le système différentiel. En pratique, cela nécessite de considérer la variable  $r$  comme une variable complexe. Dans la suite, nous noterons  $r_i$  sa partie imaginaire et  $r_r$  sa partie réelle.

Sous certaines conditions, l'intégration de l'équation différentielle (2.66) peut se faire le long d'un chemin homotope à l'intervalle d'intégration initial  $[0, r_N]$ . D'un point de vue mathématique, le couple de nombres complexes  $(k, \omega)$  n'est pas affecté par cette déformation si (i) les extrémités  $r_0$  et  $r_N$  des deux chemins sont communes et (ii) les coefficients de l'équation différentielle sont holomorphes le long de tout arc intermédiaire. D'un point de vue numérique, la situation n'est pas aussi simple : il faut en plus que le chemin soit "suffisamment" régulier et que la distance entre un point critique et un pôle quelconque de  $\hat{L}_s$  soit suffisamment grande pour que les séries de Chebyshev convergent (voir Boyd [81]). Notons qu'ici on ne s'intéresse qu'à des écoulements monotones pour lesquels il n'existe qu'un seul point critique qu'on note  $r_c$ , évitant ainsi les éventuels recouvrements de secteurs de Stokes (voir Le Dizès *et al.* [82]).

Donnons nous un arc de Jordan  $C$ , c'est-à-dire une application continue injective  $y \mapsto r(y)$  d'un intervalle réel dans le demi-plan complexe  $r_i > 0$ . La fonction  $r(y)$  est choisie de façon à ce qu'on ait  $r(a) = r_0$ ,  $r(b) = r_N$  et  $r'(y) \neq 0$  pour  $a \leq y \leq b$ . Pour des raisons discutées par Le Dizès *et al.* [82], il faut aussi que le chemin  $C$  contourne le point critique par le haut, comme le montre la figure 2.13. Sous ces conditions, l'équation

---

17. Cette remarque s'étend à bien d'autres transformations et n'a rien de surprenant puisque le fait même de chercher à augmenter l'écart entre deux rayons successifs lorsque  $\xi$  se rapproche de  $\pm 1$  revient à faire tendre sa variation par rapport à  $r$  vers zéro. En outre, le fait que la distribution de points soit de type Gauss-Lobatto implique que même si l'écart est constant le Jacobien s'annule aux extrémités de  $\Omega_h$ . Pour le voir, on peut considérer la transformation d'inverse  $\xi_h^{-1}(\xi) = a \arccos(\xi) + b$  au voisinage de  $\xi = \pm 1$ . Ce phénomène est connu sous le nom de phénomène de Runge.

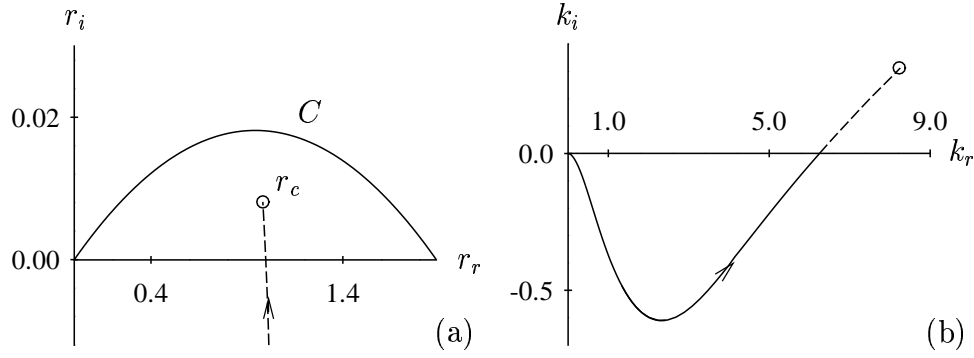


FIG. 2.13 – (a) contour d'intégration  $C$  pour  $r_{c,i} > 0$ ;  $--$ : chemin parcouru par  $r_c$  au voisinage de  $r_i = 0$ . (b) branche spatiale associée au mode de Kelvin-Helmholtz;  $--$ : prolongement analytique sur le second feuillet de  $R_\lambda$ . Jet froid,  $M = 1.5$ ,  $x = 2$  et  $n = 0$ . Les flèches donnent les sens de parcours des chemins lorsque la pulsation croît.

(2.65) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\hat{L}_2(r(y))}{(r'(y))^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \left[ \frac{\hat{L}_1(r(y))}{r'(y)} - \frac{\hat{L}_2(r(y))r''(y)}{(r'(y))^3} \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \hat{L}_0(r(y))\hat{p} = 0. \quad (2.78)$$

où on rappelle que les fonctions  $\hat{L}_s(r)$  sont définies par

$$\hat{L}_2 = 1, \quad \hat{L}_1 = \frac{2k}{\omega - ku_0} \frac{du_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} + \frac{1}{r}, \quad \hat{L}_0 = -\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}, \quad (2.79)$$

où  $\lambda$  vérifie la relation  $k^2 - \lambda^2 - \rho_0 M^2 (u_0 k - \omega)^2 = 0$  et la notation  $\hat{p}$  désigne la fonction composée  $\hat{p} \circ r(y)$ . On se retrouve donc avec une équation différentielle de la forme (2.66) où la variable d'intégration est réelle. On peut donc appliquer tout ce qui a été fait précédemment au domaine  $a \leq y \leq b$  et en particulier le diviser en sous-domaines. Or, le choix des sous-domaines est assez délicat et ne dépend plus seulement des caractéristiques des ondes d'instabilités. Il faut aussi tenir compte de la position du point critique et éventuellement d'autres pôles induits par les fonctions  $u_0$  et  $\rho_0$ . Si le point critique est proche de l'axe réel, on utilise des contours définis par des fonctions ne comportant qu'un nombre limité de paramètres. Lorsque la partie imaginaire du point critique devient grande, il arrive que les contours admissibles soient "sévèrement" déformés, auxquels cas il faut se donner une partition du domaine d'intégration qui tienne compte de ces déformations.

## Écoulement de base

L'écoulement de base ou écoulement moyen est une donnée du problème. Ses caractéristiques dépendent des paramètres de contrôle, c'est-à-dire du nombre de Mach  $M$  et de

la température du jet  $\rho_\infty = 1/T_\infty$ . La littérature propose un certain nombre de formules plus ou moins empiriques, réduisant ainsi la définition de l'écoulement moyen à un petit nombre de relations qu'il est possible de prolonger analytiquement dans le plan complexe. Les formules proposées par Lau *et al.* [83], Lau [84], Troutt et McLaughlin [85] et Morrison et McLaughlin [86] se prêtent bien à ce type d'approche.

Suivant les résultats de Troutt et McLaughlin, le profil de vitesses moyennes  $u_0$  peut être approximé par l'expression suivante

$$\frac{u_0}{u_c} = \begin{cases} 1 & (r < h) \\ \exp \left[ -\ln(2) \left( \frac{r-h}{b} \right)^2 \right] & (r \geq h), \end{cases} \quad (2.80)$$

où  $u_c$  est la vitesse du jet sur l'axe,  $b$  est la demi-épaisseur de la zone de mélange et  $h$  le rayon du domaine où l'écoulement est uniforme (on parle aussi de cône potentiel). Le profil de masses volumiques se déduit de (2.80) en utilisant la relation de Crocco,

$$\rho_0 = \left[ u_0 + \frac{1-u_0}{\rho_\infty} + \frac{\gamma-1}{2} M^2 u_0 (1-u_0) \right]^{-1}, \quad (2.81)$$

où  $\rho_\infty$  est le rapport de la température au centre du jet à la température ambiante et le nombre de Prandtl est supposé égal à 1. Ainsi défini, l'écoulement moyen ne dépend que de trois paramètres  $b$ ,  $h$  et  $u_c$ . Dans le cadre de l'approximation localement parallèle, ces trois paramètres sont supposés ne dépendre de la direction principale de l'écoulement que par l'intermédiaire de la variable lente  $X = \epsilon x$ , où  $\epsilon$  est supposé petit.

On sait que tant que l'épaisseur  $h$  est non nulle, la vitesse de l'écoulement au voisinage de l'axe de symétrie est constante. Par un choix convenable de la vitesse de référence  $u_j$ , on peut donc prendre  $u_c = 1$  pour  $h \geq 0$ . On en déduit qu'il existe un domaine où l'écoulement moyen ne dépend plus que d'un seul paramètre  $b$ , compte tenu de ce que  $u_c = 1$  et de la relation

$$2 \int_0^\infty \rho_0(r; X) [u_0(r; X)]^2 r dr - 1 = 0, \quad (2.82)$$

qui exprime que le flux de quantité de mouvement moyenne se conserve (voir Tam [87] et Kotsovinos [88] pour une discussion de cette approximation). On peut donc parler indifféremment de  $b$  ou  $X$ , sachant que la correspondance entre les deux paramètres est biunivoque<sup>18</sup>. Notons  $x_c$  (resp.  $X_c$ ) l'extrémité de la région où  $h$  est non nul. Pour  $x < x_c$ , on dispose des corrélations de Birch et Eggers [91] qui permettent d'exprimer  $b$  sous la forme d'une fonction affine de  $x$  :

$$\frac{db}{dx} = \frac{1.2658}{\sigma}, \quad (2.83)$$

---

18. Ce n'est le cas que si l'écoulement est adapté. La présence d'une onde de choc à proximité de la zone potentielle est susceptible de déformer la structure du jet et donc de modifier la distribution des paramètres de l'écoulement moyen. Si la courbure des lignes de courant est suffisamment grande, il est alors possible d'observer des ondes de Taylor-Görtler, comme l'indiquent les travaux de Zheltukhin et Terekhova [89, 90].

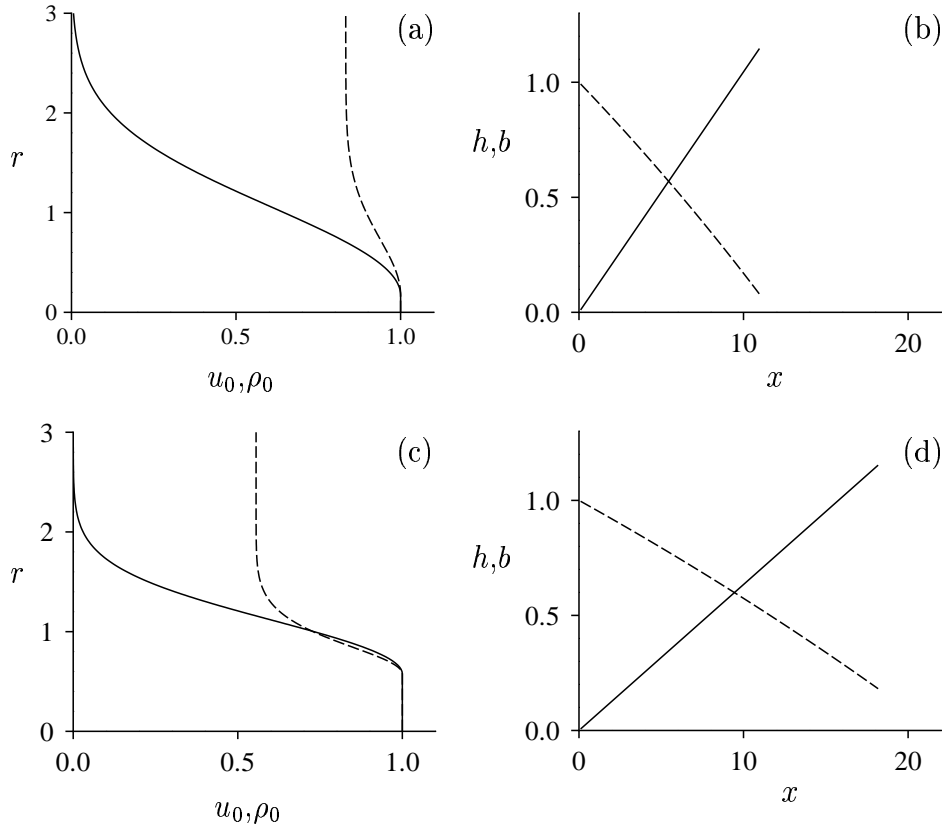


FIG. 2.14 – Profils de vitesse et de masse volumique (en tirets), pour  $M = 1$  (a) et  $M = 2$  (c) au point  $x = 10$ . Évolution des paramètres  $h$  (tirets) et  $b$  en fonction de  $x$  pour  $M = 1$  (b) et  $M = 2$  (d). Jet froid.

où  $\sigma$  est donné en fonction de  $M$  par les formules empiriques suivantes

$$\sigma = \begin{cases} 10.7(1.0 - 0.1163M^2)^{-1} & (M < 2) \\ 19.4\sqrt{M - 0.9418} & (M > 2). \end{cases} \quad (2.84)$$

Si on ajoute la condition  $b(0) = 0$ , alors on voit que  $b$  dépend linéairement de  $x$  et que le membre de droite de (2.83) fournit directement une estimation de  $\epsilon$ . Les figures 2.14 (a) et (c) donnent des profils de vitesse et de masse volumique typiques, obtenus en appliquant les relations (2.80) à (2.84) avec  $M = 1$ ,  $M = 2$  et  $x = 10$ . La valeur de  $b$  est obtenue en cherchant les zéros de l'équation (2.82), où l'intégrale est calculée en utilisant une formule de quadrature élémentaire.

Le problème posé par les relations (2.83) et (2.84) est qu'elles ne s'appliquent pas aux jets chauds. Certains auteurs abordent le rôle de l'influence de la température (voir Lau [83]) et proposent des formules modifiées pour  $\sigma$ . Mais leur domaine de validité est en général relativement réduit et elles sont de ce fait d'un emploi limité. Pour éviter d'introduire des incertitudes supplémentaires et en l'absence de données précises sur le



sujet, il semble donc plus sage de se référer au paramètre  $b$  et d'abandonner, au moins pour le cas des jets chauds, la dépendance en  $x$ . Bien évidemment, il s'agit là d'un point de vue local. Nous reviendrons sur cette approche dans le chapitre 3, où la connaissance de  $b(x)$  s'avérera indispensable.

Dans ce chapitre, on va se limiter au domaine défini par  $x \leq x_c$ . En première approximation, on peut utiliser les formules de Tam *et al.* [22], valables pour les écoulements de jets chaud et froid. Ces formules s'écrivent

$$x_c = 8.4 + 2.2M^2 + 2\Delta(\rho_\infty), \quad (2.85)$$

avec

$$\Delta(\rho_\infty) = \begin{cases} 1.1(1 - \rho_\infty) & (\rho_\infty \leq 1) \\ \exp[-3.2(\rho_\infty - 1)] - 1 & (\rho_\infty > 1). \end{cases} \quad (2.86)$$

Une conséquence bien connue est que la longueur du cône potentiel croît avec le nombre de Mach (comparer les figures 2.14 (b) et (d)). On peut aussi noter que le taux de divergence du jet  $db/dx$  est une fonction décroissante du nombre de Mach. Pour les jets supersoniques, le calcul donne  $db/dx < 0.1$ , ce qui légitime d'ailleurs une approche asymptotique.

### 2.3.2 Résultats numériques

L'utilisation des procédures de calcul de spectre d'opérateur et de suivi de mode permet d'isoler les ensembles  $K_j^\pm$  et  $KH$ , lorsque  $x$  (ou  $X$ ) varie. Si le calcul des modes de  $K_0^\pm$  et  $KH$  ne pose pas de problème particulier, il est par contre difficile de transposer la technique de déformation du contour d'intégration au calcul des modes de  $K_1^+$ . L'expérience a montré qu'il est préférable de tenir compte des effets visqueux en prenant par exemple  $Re = 10^6$  avec  $Re = \rho_j u_j r_j / \mu_j$ , où  $\mu_j$  est la viscosité dynamique du gaz. Il existe une autre interprétation pour  $\mu_j$ , proposée par Tam [87] et qui repose en partie sur l'hypothèse d'une séparation d'échelles dans la turbulence. Le point de départ consiste à admettre que l'effet des petites structures peut être modélisé<sup>19</sup> par une source de turbulence par diffusion dans les équations de Navier-Stokes linéarisées (voir annexe C). Le nombre de Reynolds  $Re$  doit alors être corrigé pour tenir compte du développement de l'écoulement moyen. Tam, Jackson et Seiner [22] proposent de prendre  $\mu_j = \rho_j K b u_j / 2$ , avec  $K = 1/150$  pour  $x \leq x_c$ . Tam et Chen [93] adoptent un autre point de vue, en cherchant la plus grande valeur de  $K$  pour laquelle les caractéristiques des ondes de Kelvin-Helmholtz ne sont pas significativement différentes de leurs valeurs asymptotiques ( $K \rightarrow 0$ ). Leurs résultats indiquent que c'est le cas pour  $K < 1/1000$  ( $Re > 2000/b$ ). Cette notion de séparation d'échelles est reprise par Tam [18] et confrontée à une série de résultats expérimentaux, incluant notamment le cas des jets subsoniques. La conclusion qu'en tire Tam est que le bruit généré par un jet est dû à la turbulence de l'écoulement et consiste en deux composantes. La première est associée aux structures cohérentes de la turbulence qui peuvent être modélisées en termes

---

<sup>19</sup> Il y a d'autres approches pour rendre compte de la propagation des structures cohérentes dans les jets turbulents. On peut citer celle de Chen et Crighton [92] qui utilisent un modèle viscoélastique pour modéliser le tenseur de Reynolds perturbé.

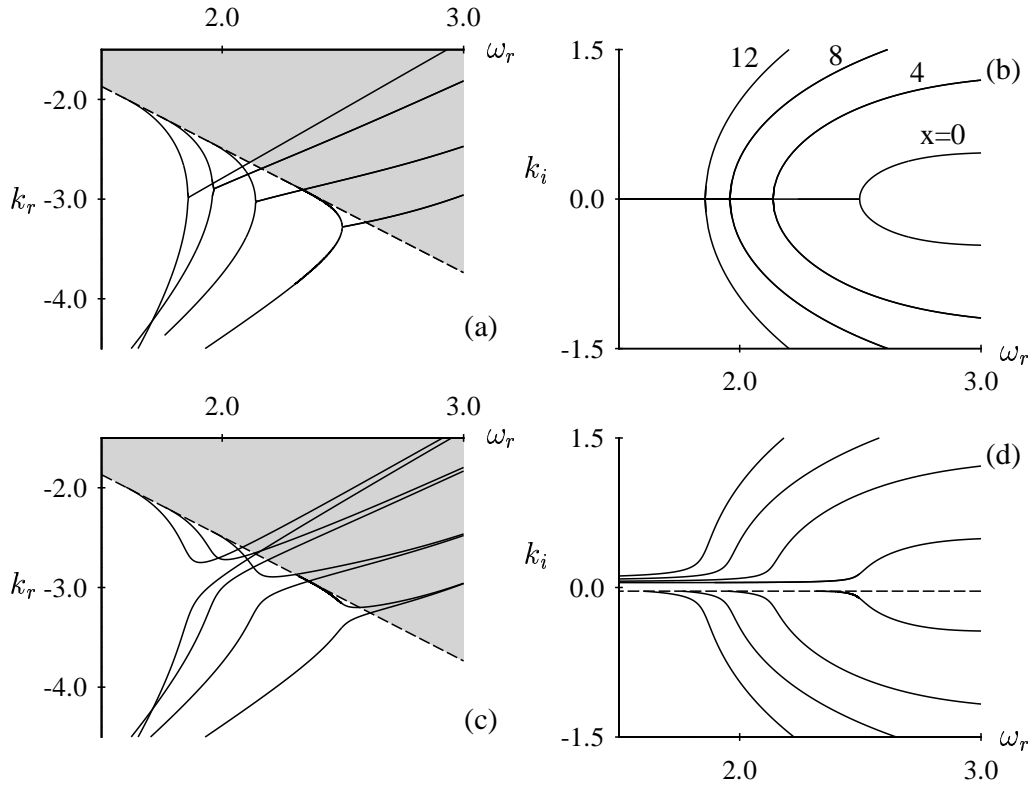


FIG. 2.15 – Déformation des branches spatiales de la figure 2.8 lorsque  $x$  varie de 0 jusqu'à 12. Jet froid,  $M = 1.5$  et  $n = 0$ . (a) et (b) :  $\omega_i = 0$ . (c) et (d) :  $\omega_i = 0.03$ . Le chemin que décrit  $-k_0$  lorsque  $\omega_r$  varie est représenté en tirets.

d'ondes d'instabilités et qui font l'objet de cette thèse. La seconde trouve son origine dans les petites échelles de la turbulence (voir Tam et Auriault [94]). Il est important de noter que ce point de vue remet en cause la théorie de l'analogie acoustique (voir Tam [18]) et fait actuellement l'objet de débats.

### Modes de $K_0^\pm$ ; instabilités marginalement absolues

Comme dans la section 2.2.3, on peut se limiter à un seul couple de modes de  $K_0^+ \times K_0^-$ . Pour fixer les idées, on peut considérer à nouveau le cas du jet froid avec  $M = 1.5$ ,  $n = 0$  et  $s = 3$ . Dans cette perspective, les branches spatiales de la figure 2.8 doivent être vues comme un cas limite qu'il est important de retrouver en faisant tendre  $x$  (ou  $b$ ) vers zéro. Sur la figure 2.15, seules les restrictions des branches spatiales au premier feuillet de  $R_\lambda$  ont été représentées. Le cas limite  $x = 0$  ( $b = 0$ ) est celui de la figure 2.8.

Il est remarquable que le caractère marginal des ondes de vitesse de phase subsonique ne soit pas affecté par l'épaississement de la zone de mélange. En plus d'une nette modification de la vitesse de propagation, l'influence de  $b$  se manifeste par une diminution de la pulsation  $\omega_{0s}$  (de vitesse de groupe nulle), sa partie imaginaire étant nulle comme le

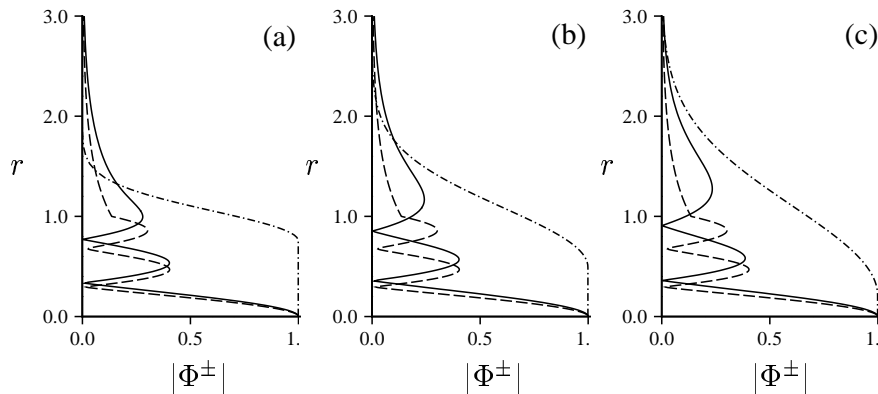


FIG. 2.16 – Fonctions propres au point de vitesse de groupe nulle  $\omega_{03}$ . (a) :  $x = 4$  ; (b) :  $x = 8$  et (c) :  $x = 12$ . -- : fonction propre pour  $x = 0$  (référence). - · - : profil de vitesse moyenne  $u_0$ . Jet froid,  $M = 1.5$  et  $n = 0$ .

montrent les figures 2.15 (a) et (b) pour  $x \leq x_c$ <sup>20</sup>. La seconde observation importante est que la variation de  $\omega_{0s}$  par rapport à  $x$  est une fonction décroissante de  $x$ . Pour voir ce que cela implique, donnons-nous un forçage monochromatique de pulsation  $\omega_f$  et placé au point  $x = 0$ . Notons  $\Omega_{0s}$  l'intervalle décrit par la pulsation  $\omega_{0s}$  lorsque  $x$  varie entre 0 et  $x_c$ . On a alors la proposition suivante : *si  $\omega_f \in \Omega_{0s}$ , toute onde marginale au point  $x = 0$  et dont l'amplitude comporte exactement  $s$  ventres dans la direction radiale est amortie à partir d'une position qui annule sa vitesse de groupe et dont la distance au forçage est une fonction décroissante de  $\omega_f$* . Le corollaire est que les modes de  $K_0^+$  peuvent rayonner de l'énergie par le mécanisme de modulation d'amplitude abordé à la fin de la section 2.2.3. Cette idée est d'ailleurs appuyée par le fait que la transition subsonique-supersonique de la vitesse de phase, bien qu'ayant lieu dans la région où l'onde est amortie, se fait pour une pulsation proche de  $\omega_{0s}$ . De l'hypothèse d'existence d'un domaine commun où les descriptions (2.63) et (2.64) sont valables, on déduit qu'il est probable que la densité spectrale soit non nulle pour  $k > -k_0$  et dépende de  $s$ . On peut reformuler cette idée sous la forme générale suivante : *une onde d'instabilités associée à un mode de  $K_0^+$  peut rayonner de l'énergie si sa vitesse de phase au point de vitesse de groupe nulle est suffisamment proche de celle du son (mesurée à l'extérieur de l'écoulement)*. La difficulté posée par cette condition est qu'il n'est pas possible de conclure sans déterminer l'intégrand de (2.63), ce qui exige de connaître le comportement des modes lorsque  $x$  varie puisque la densité spectrale se déduit de (2.64) par une transformée de Fourier. Or, on sait que pour exister, il faut qu'elle soit intégrable au sens de Lebesgue, ce qui sous-entend que la partie exponentielle dans la formulation WKB est au moins à décroissance exponentielle lorsque  $x$  devient grand. Puisque la connaissance de la fonction  $k^+(x; \omega_f)$  est essentielle pour estimer le

<sup>20</sup>. D'un point de vue numérique, les branches spatiales ont été déterminées par incrément de  $\Delta x = 0.5$  dans l'intervalle  $0 \leq x \leq x_c$  et pour  $s \leq 10$  et  $n \leq 2$ . Dans tous les cas, la partie imaginaire de  $\omega_{0s}$  s'est avérée nulle.

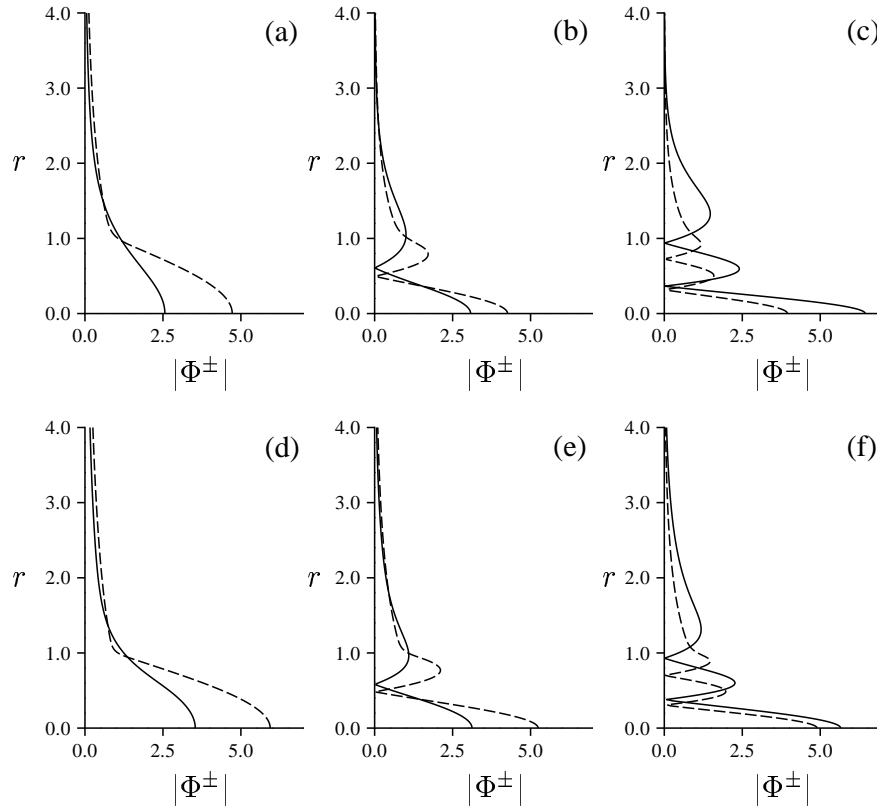


FIG. 2.17 – Fonctions propres pour les pulsations  $\omega_{0s}$ ,  $s \leq 3$  aux abscisses  $x = 2$  (tirets) et  $x = 14$ . (a), (b) et (c) :  $M = 1.5$ . (d), (e) et (f) :  $M = 2.2$ . Jet froid,  $n = 0$ .

comportement de (2.64), il est clair que le calcul doit pouvoir être prolongé au delà de  $x_c$  lorsque  $\omega_f$  tend vers la plus petite pulsation de  $\Omega_{0s}$ . Bien évidemment, ce raisonnement n'a rien de rigoureux ; nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre 3, en procédant au raccord (formel) des expressions (2.63) et (2.64). Notons que dans ce qui précède, la notation  $\omega_{0s}$ ,  $s > 0$  est légitimée par le fait que les résultats se généralisent à tous les modes de  $K_0^+$  qu'il a été possible de calculer, comme l'illustre la figure 2.18.

Il est commode d'utiliser la correspondance  $s = m$ , où  $m$  est le nombre de maximums locaux de la fonction propre. La preuve de cette égalité est simple à établir pour  $n = 0$  et  $x = 0$ , puisque le comportement radial des ondes est donné par (2.52), c'est-à-dire par la fonction de Bessel d'ordre zéro  $J_0(i\mu r)$ . Les valeurs de  $i\mu r$  pour lesquelles le module de  $J_0$  admet un maximum local sont donc les zéros de  $J_1$ , déjà rencontrés lors du calcul de  $\omega_s$  avec l'équation (2.59) et notés  $-j_s > 0$  où  $s$  est un entier strictement positif. Vu que les zéros  $j_s$  sont ordonnés par valeurs croissantes, on en déduit qu'à la limite  $k \rightarrow -k_0$ , le nombre de ventres d'une fonction propre à l'intérieur du domaine  $0 < r < 1$  est le nombre de zéros  $-j_t$ ,  $t > 0$  qui rend le rapport  $j_t/j_s$  plus petit que l'unité. Pour  $s = 1$  on voit donc que la fonction propre ne s'annule qu'au point  $r = 0$ , ce qui signifie que son module

admet un unique maximum local. Pour  $s > 1$ , le rapport  $j_t/j_s$  admet exactement  $s - 1$  valeurs comprises dans l'intervalle  $0 < r < 1$  ( $t = 1, 2, \dots, s - 1$ ) et donc, le module de la pression admet  $s$  ventres. La généralisation de ce résultat à tout entier  $n$  ne pose pas de difficulté particulière et peut s'établir d'une manière similaire. À titre d'exemple, la figure 2.16 donne l'évolution du module de la fonction propre associée au couple  $(k_{03}, \omega_{03})$  lorsque  $x$  varie. La normalisation utilisée pour le calcul est donnée par  $\hat{p}_0(0) = 1$  pour qu'il soit possible de comparer la structure des fonctions propres sur une même figure. Ceci étant, on peut prendre n'importe quelle normalisation, vu qu'il s'agit d'une approche locale. La figure 2.17 donne les fonctions propres d'autres modes de  $K_0^+$  pour  $M = 2.2$ . Cette fois, la normalisation est celle qui est donnée par (2.35).

Intéressons nous maintenant au rôle joué par  $s$ . La figure 2.18 donne l'évolution du réseau de branches spatiales lorsque  $x$  croît. D'un point de vue qualitatif, il n'y a pas grand chose à ajouter à ce qui a été dit précédemment, en tout cas tant que le nombre de Mach n'est pas trop grand. Par contre, pour  $s = 1$  on constate que la transition subsonique-supersonique a lieu pour une pulsation dont l'écart à  $\omega_{01}$  est si petit que le comportement radial des ondes de vitesse de groupe nulle n'est plus exponentiellement décroissant à l'extérieur du jet. On voit même que cet écart ne dépend quasiment pas de l'épaississement du jet<sup>21</sup> contrairement aux autres modes  $(0, s)$ ,  $s > 1$ . Pour un forçage de pulsation proche de  $\omega_{01}$  (de l'ordre de 0.37 pour  $M = 2.2$ ), on peut donc s'attendre à ce que le mode  $(0, 1)$  se distingue des autres par le fait que (i) la vitesse de groupe de l'onde est proche de zéro pour tout  $x \leq x_c$  et (ii) son taux d'amortissement dans la direction radiale est le plus petit, comme l'indique la figure 2.17. Mais à ce niveau de la description, il n'est pas envisageable d'en déduire la contribution au champ lointain. Pour cela, il faut replacer ces résultats dans une théorie asymptotique, permettant à la fois de décrire le comportement des ondes au voisinage du jet et loin de celui-ci. Dans cette perspective, on voit qu'il n'est plus question de procéder à une analyse locale et que la notion de normalisation pour  $\Phi^\pm$  devient indissociable du calcul de l'amplitude  $A^\pm$  dans (2.64). Le point dur consiste à tenir compte du taux d'amortissement sous la forme d'un petit paramètre supplémentaire, ce qui équivaut à s'intéresser au voisinage des points de branchement  $\pm k_0$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro. Nous évoquerons cette situation dans le chapitre 3.

Si  $s > 1$ , on voit que les pulsations de vitesse de groupe nulle varient dans des proportions bien plus importantes, ce qui implique l'éventualité de rencontres entre certains ensembles  $\Omega_{0s}$ . Pour  $M = 2.2$ , les figures 2.18 (c) et (d) montrent que c'est le cas pour  $s = 5$  et  $s = 6$ . Une conséquence est qu'en présence d'un forçage de pulsation  $\omega_f \in \Omega_{05} \cap \Omega_{06}$ , il est possible que les ondes associées aux modes  $(0, 5)$  et  $(0, 6)$  rayonnent simultanément de l'énergie. La figure 2.19 montre même qu'en fonction du nombre de Mach  $M$ , d'autres modes peuvent être concernés. Par exemple, pour  $M > 1.57$  on voit que  $\Omega_{03}$  rencontre  $\Omega_{04}$  alors que  $\Omega_{01}$  ne rencontre aucun autre domaine (voir figure 2.19 (b)). Deux interprétations sont envisageables : la première consiste à fixer  $\omega$  et  $M$  et à regarder s'il existe un ou plusieurs ensembles  $\Omega_{0s}$  contenant  $\omega$ , pour savoir quels sont les modes de  $K_0^+$  qui

---

21. Cette dernière observation pourrait être un élément de réponse expliquant le bon accord obtenu avec les résultats de Ho et Nosseir [55] dans la section 2.2.3.

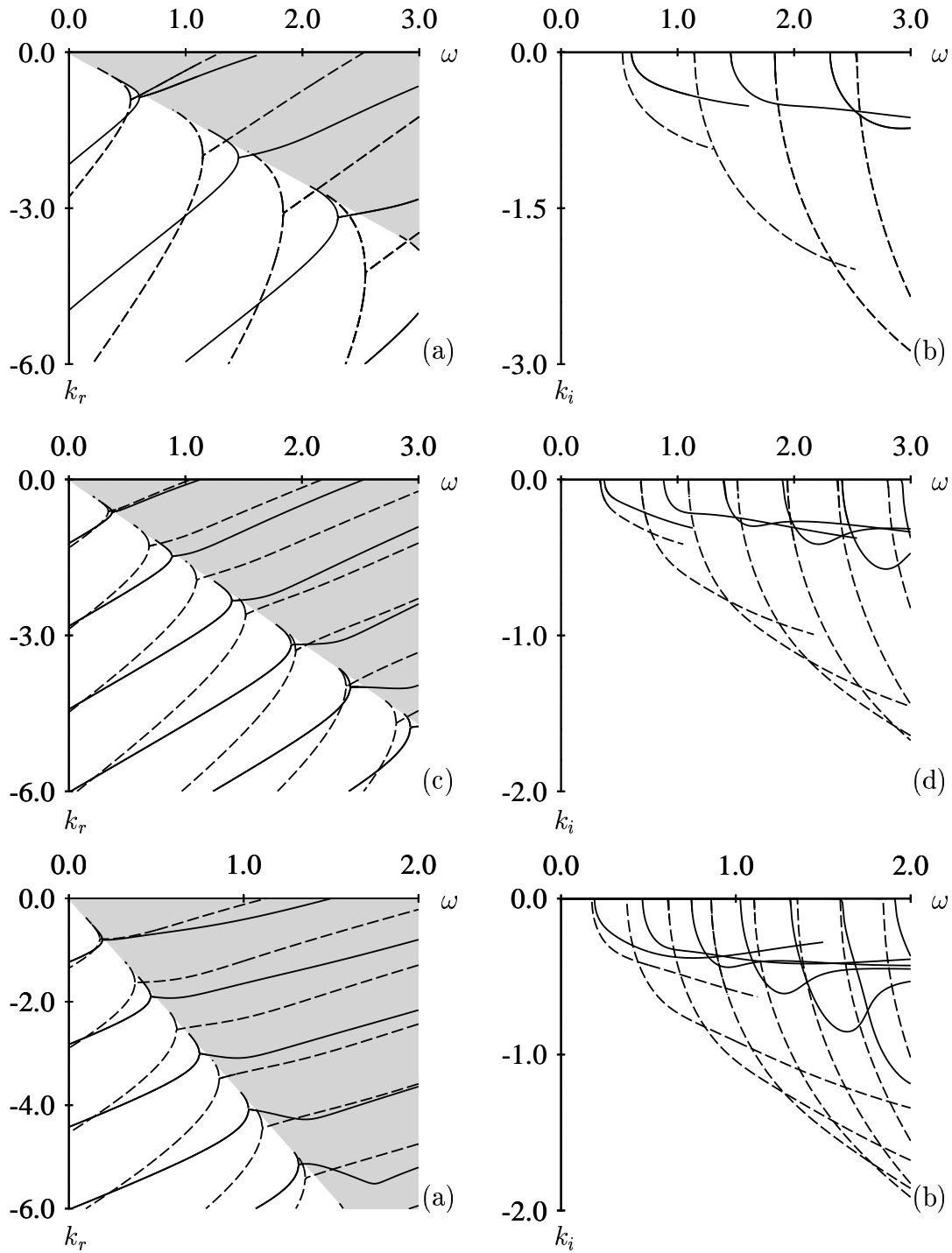


FIG. 2.18 – Réseau de branches spatiales associées aux modes de  $K_0^\pm$  pour  $x = 2$  et  $x = 14$  (tirets). (a), (b) :  $M = 1.5$  ; (c), (d) :  $M = 2.2$ . Jet froid. (e), (f) :  $M = 2.2$  et  $\rho_\infty = 3.0$ . Dans tous les cas, on a  $\omega_i = 0$  et  $n = 0$ .

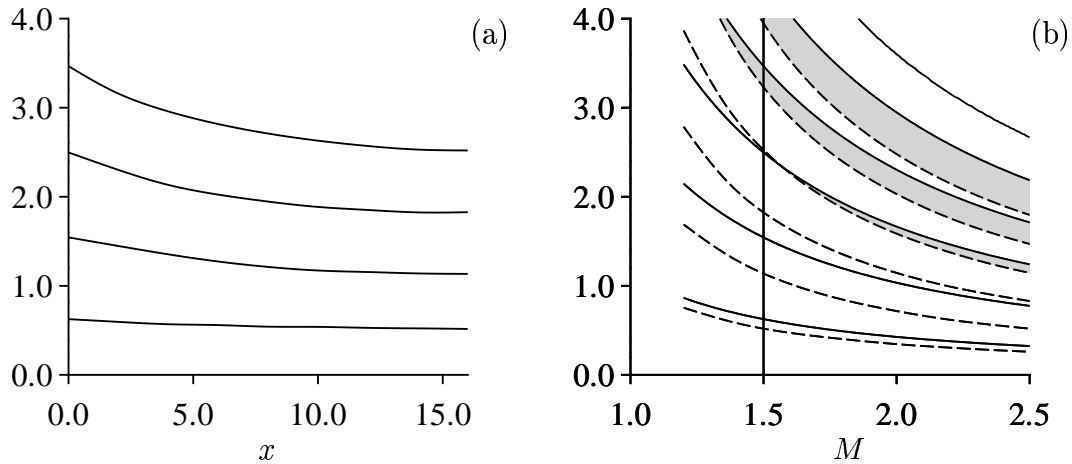


FIG. 2.19 – (a)  $\omega_{0s}$  en fonction de  $x \leq x_c$  pour  $M = 1.5$  et  $s \leq 4$ . (b) bornes inférieure (en tirets) et supérieure des intervalles  $\Omega_{0s}$  pour  $s \leq 5$  ( $x \leq x_c$ ), en fonction du nombre de Mach  $M$ . Jet froid,  $n = 0$ . Les zones grisées correspondent aux points communs aux intervalles  $\Omega_{0s}$  et  $\Omega_{0,s+1}$  pour  $s = 3, 4, 5$  (de bas en haut sur la figure (b)).

sont susceptibles de rayonner de l'énergie en présence d'un forçage de pulsation  $\omega$ . C'est le point de vue qui a été adopté au début de cette section et qui repose sur le fait que la vitesse de groupe s'annule à une abscisse où la vitesse de phase est proche de celle du son. Mais comme les ondes associées ne sont pas amplifiées (en première approximation), il est probable que leur contribution au champ proche soit masquée par celle des ondes de Kelvin-Helmholtz, en tout cas tant que les taux d'amplifications de ces dernières sont suffisamment grands. Leur contribution au champ lointain, par contre, est un problème ouvert. La seconde lecture consiste à se placer à  $M$  fixé et à interpréter les bandes  $\Omega_{0s}$  comme des pulsations privilégiées par l'écoulement. Cela replace le problème dans le cadre de l'estimation asymptotique de la fonction de Green, pour  $t \rightarrow \infty$ , et pose la question du mécanisme physique à l'origine de la sélection en fréquence. La réponse n'est pas évidente et souffre de l'absence de publication sur le sujet.

### Instabilités marginalement absolues et Screech Tones

Si le jet n'est pas parfaitement adapté, Tam [95], Tam *et al.* [22] et Tam et Tanna [96] proposent un scénario de sélection en fréquence dont l'origine tient à l'interaction (faible) des ondes d'instabilités avec un système d'ondes généré par la réflexion des ondes de chocs à l'intérieur du jet, jusqu'à dissipation de ces dernières par la turbulence. Puisque l'écoulement à l'extérieur du jet est au repos, ce système d'ondes est confiné à l'intérieur du jet qui se comporte alors comme un guide d'ondes pour ces fluctuations.

D'un point de vue schématique, la distribution spatiale de ce système d'ondes peut être calculée avec le modèle de la nappe tourbillonnaire, sous la forme d'une série convergente

(voir Pack [97]). En notant  $p'$  la perturbation de pression associée à ce système d'ondes, on arrive à

$$p' = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\Delta p}{j'_s} \frac{J_0(2j'_s r)}{J_1(j'_s)} \cos\left(\frac{j'_s x}{\sqrt{M^2 - 1}}\right), \quad (2.87)$$

où  $j'_s$ ,  $s > 1$  désignent les zéros de la fonction de Bessel d'ordre zéro et  $\Delta p$  est la différence de pression statique entre l'extérieur et l'intérieur du jet. On en déduit que pour tout entier  $s > 1$  l'interaction dont il a été fait état conduit à une onde propagative, de nombre d'onde  $k - \kappa_s$  avec  $\kappa_s = j'_s/\sqrt{M^2 - 1}$ , où  $k \in K^+$  est le nombre d'onde associé à une onde d'instabilités. À partir de ce raisonnement, on voit que si  $\kappa_s$  est proche de  $k$ , il est possible que la vitesse de phase de l'onde résultante soit négative, proche de celle du son, éventuellement supersonique et par conséquent rayonne de l'énergie en amont de l'écoulement, comme l'ont observés Seiner et Yu [98]. Une analyse en termes d'ondes stochastiques est proposée par Tam [99], [100], [101], [102] qui procède à une approche semi-empirique à quatre paramètres et qui tient compte du développement du jet en utilisant la méthode des échelles multiples. Deux de ces paramètres peuvent être en principe obtenus par des calculs de stabilité linéaire, les deux restants sont déterminés en faisant certaines hypothèses sur les structures cohérentes de la turbulence.

Toujours de manière approchée, on peut en déduire la direction principale  $\chi$  du rayonnement acoustique sous forme d'ondes de Mach, en utilisant la formule classique

$$\cos \chi = \frac{k - \kappa_s}{\sqrt{\rho_\infty} \omega M} = \frac{k - \kappa_s}{k_0(\omega)}, \quad (2.88)$$

pour tout entier  $s \geq 1$ . D'où on déduit une relation entre l'angle d'observation  $\chi$  et les pulsations  $\omega_s$  caractéristiques de l'interaction entre les ondes d'instabilités et le système d'ondes de chocs,

$$\omega_s = \frac{2\pi\omega/k}{l_s(1 + \cos \chi \sqrt{\rho_\infty} M \omega/k)}, \quad (2.89)$$

où  $l_s = 2\pi/\kappa_s$  est la longueur d'une cellule du système d'ondes de chocs. Il est intéressant de noter que la formule (2.89) est cohérente (au moins qualitativement) avec certaines observations expérimentales de Norum et Seiner [103], notamment en ce qui concerne le déplacement en fréquence du bruit large bande avec  $\chi$ . Mais il ne s'agit là que du mécanisme de génération acoustique, dont l'intensité varie avec  $x$  puisque l'amplitude d'une onde d'instabilités associée à un mode de  $K^+$  dépend de  $x$ . Ce scénario ne tient pas compte de l'existence de modes de  $K_0^-$  permettant le retour de l'information jusqu'à la sortie de la tuyère. Comme pour les jets impactants, les modes de  $K_0^-$  sont susceptibles d'amener le système vers une dynamique globale dont les pulsations privilégiées seraient données par la figure 2.19. Mais il est difficile de confronter ce point de vue aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, en raison de la forte sensibilité du mécanisme évoqué à l'environnement proche du jet et en particulier de l'épaisseur des lèvres de la sortie de la tuyère (voir à ce titre les travaux expérimentaux de Norum [104] et Seiner *et al.* [105]). Toutefois, ce scénario pourrait expliquer la présence d'une fréquence fondamentale (screech tones sur la figure 1.2) en amont de l'écoulement, ainsi que le phénomène



de changement de mode observé par Seiner *et al.* [20], puisque l'origine du phénomène serait liée au changement de structure azimuthale des ondes d'instabilités. Les calculs de taux d'amplification semblent confirmer ce scénario puisque l'amplification totale (depuis la sortie de la tuyère jusqu'à une distance de l'ordre de 4 à 5 cellules de chocs) du mode axisymétrique ( $n = 0$ ) est plus grande que celui des modes non axisymétriques, au moins lorsque le nombre de Mach est petit, et plus particulièrement dans une gamme de fréquence contenant celle que donne la formule (2.89), en remplaçant  $\chi$  par  $\pi$  et en prenant  $s = 1$ . Lorsque le nombre de Mach croît, les calculs montrent que ce n'est plus le cas. Ce changement de comportement dans la dynamique des ondes d'instabilités pourrait expliquer le changement observé par Seiner *et al.* [20], dans la structure spatiale du champ acoustique associé à la fréquence fondamentale. Mais à ce niveau, une réponse définitive ne peut malheureusement pas être proposée. Concernant le premier harmonique, notons que les mesures de Norum [104] indiquent que la direction principale de rayonnement se fait autour de  $\chi = \pi/2$ .

Pour des jets fortement désadaptés, les travaux de Dash *et al.* [106], Seiner *et al.* [107] et Abdol-Hamid et Widmoth [108] indiquent en plus qu'un "bon" modèle de turbulence est essentiel pour une bonne prédiction du bruit large bande.

#### Modes de $K_0^+$ ; échange de modes

La figure 2.20 donne la déformation du réseau de branches spatiales associées aux modes de  $K_0^+$  lorsque le jet est chauffé à une température trois fois supérieure à celle du milieu ambiant. Les résultats ont été obtenus en considérant les équations (2.83) et (2.84), dont le domaine de validité ne s'étend *a priori* pas aux jets chauds. Mais cela n'a pas d'importance dans l'approximation localement parallèle. On peut indifféremment prendre  $x$  ou  $b$  comme paramètre de contrôle. Aussi, il est choisis de retenir la variable  $x$  et d'utiliser la même formule pour obtenir  $b$ . Bien évidemment, les valeurs de  $h$  diffèrent selon qu'on s'intéresse à un jet chaud ou froid puisque la relation (2.82) dépend de  $\rho_\infty$  par l'intermédiaire de  $\rho_0$ .

Passer du jet froid au jet chaud revient à accroître la pente de la droite que décrit le point de branchement  $-k_0 = -\sqrt{\rho_\infty}\omega M$  lorsque la pulsation varie. Cela signifie qu'à pulsation fixée le nombre de modes de vitesse de phase supersonique est plus grand. On observe un autre effet, bien plus difficile à interpréter et qu'on peut voir comme un échange de modes de  $K_0^+$  dans le domaine des ondes de vitesse de phase supersonique ( $k_r > -k_0$ ). Ce phénomène n'a lieu qu'à proximité de la sortie de la tuyère ; les branches spatiales retrouvant une allure identique à celles des figures 2.15 (a) et (b) pour  $x$  suffisamment grand. D'une manière imagée, on assiste à la propagation d'un défaut dans le réseau de branches spatiales qui indique que certaines d'entre elles se rencontrent lorsqu'on déplace le contour d'intégration  $L_\omega$  dans le demi-plan  $\omega_i > 0$ , comme le montre la figure 2.21. Bien que la rencontre de deux branches de la même catégorie ne conduise pas à une instabilité absolue, elle n'est pas sans effet et doit être prise en compte dans la détermination du rayonnement des instabilités, en particulier parce qu'elle se produit à proximité du point de branchement  $-k_0$ . La figure 2.22 donne l'évolution du compor-

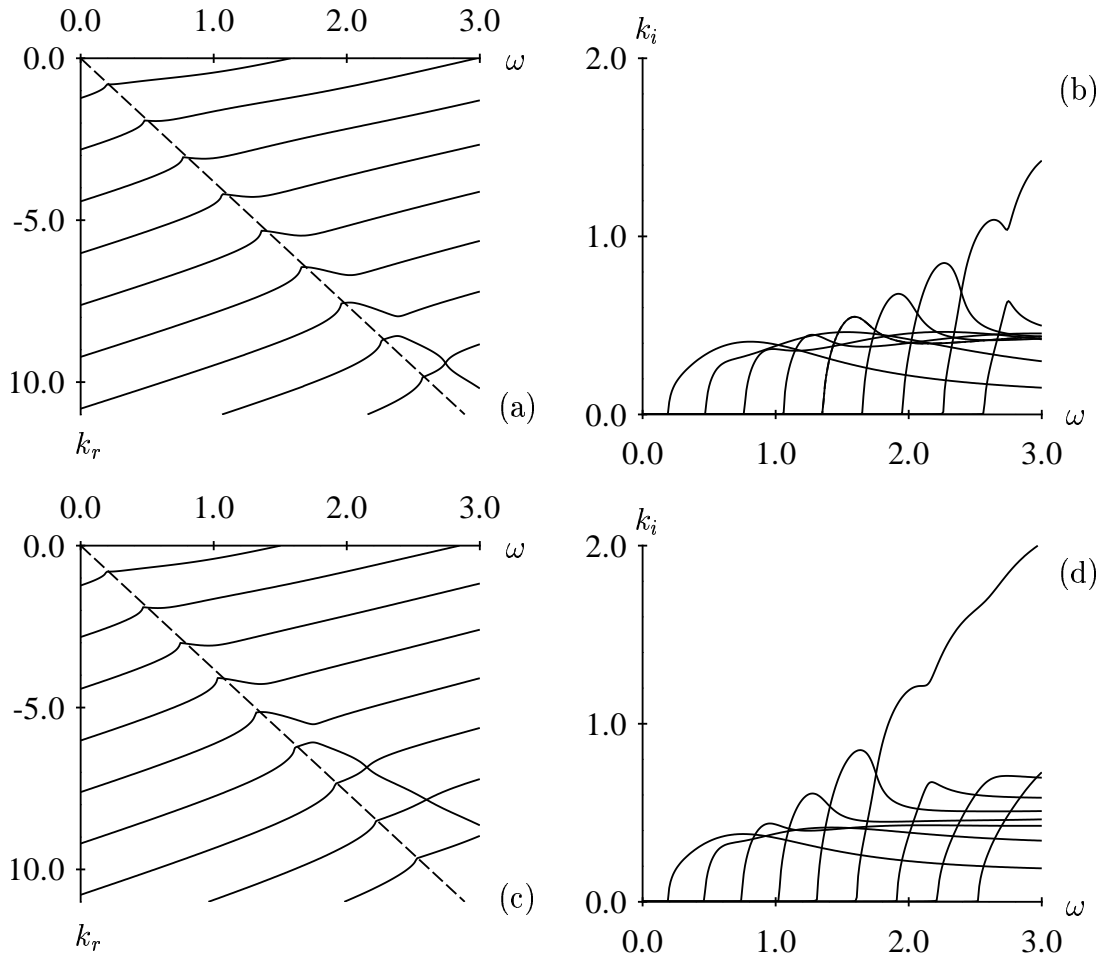


FIG. 2.20 – Branches spatiales associées aux modes de  $K_0^+$ ; jet chaud;  $M = 2.2$  et  $\rho_\infty = 3.0$ . (a) et (b) :  $x = 1.0$ ; (c) et (d) :  $x = 2.0$ .

tement des fonctions propres lorsque  $\omega$  décrit la portion de  $L_\omega$  sur laquelle la vitesse de phase suit une transition subsonique-supersonique. La figure 2.22 (a) donne le comportement de la fonction propre lorsque la branche spatiale ne rencontre aucune autre branche, lorsque  $L_\omega$  est abaissé jusqu'à l'axe réel. C'est notre situation de référence, dont les principales propriétés ont déjà été discutées dans la section 2.2.3. Les figures 2.22 (b) et (c) donnent les fonctions propres associées aux modes désignés par des cercles sur la figure 2.21. On voit clairement que la rencontre de deux branches spatiales de la même catégorie pour  $\omega_i > 0$  se manifeste par un changement qualitatif dans les propriétés des fonctions propres. Le point le plus remarquable est que le nombre de maximums locaux diminue d'une unité au passage du point d'intersection entre les parties réelles de deux branches spatiales, exprimant ainsi qu'on est passé continûment d'un mode de  $K_0^+$  à un autre, comme l'illustre la figure 2.22 (c). Au delà de cette vision purement descriptive, l'auteur a conscience des interrogations que posent la propagation de tels "défauts" dans le réseau

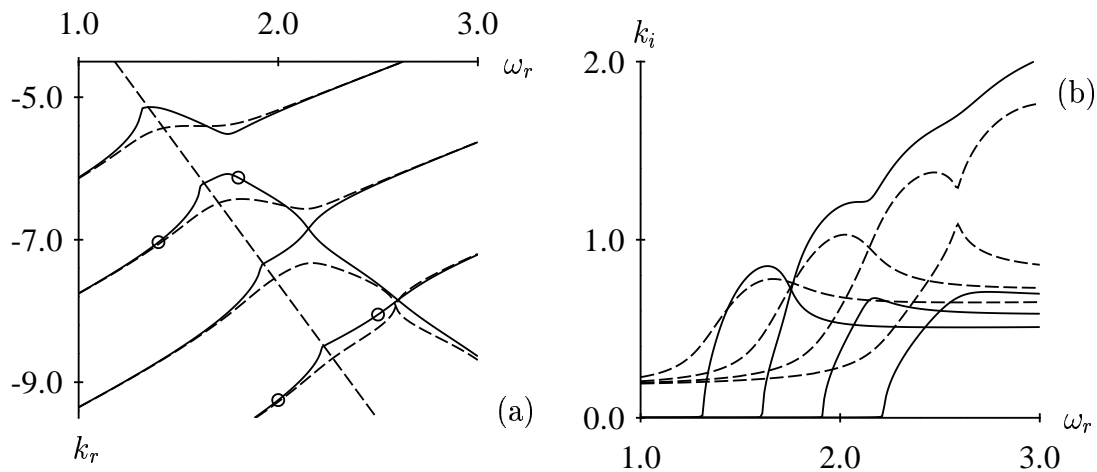


FIG. 2.21 – Branches spatiales associées aux modes de  $K_0^+$  ; jet chaud ;  $M = 2.2$  et  $\rho_\infty = 3.0$ . (a) et (b) :  $x = 2.0$  ;  $\omega_i = 0.13$  et  $0.16$  (en tirets).

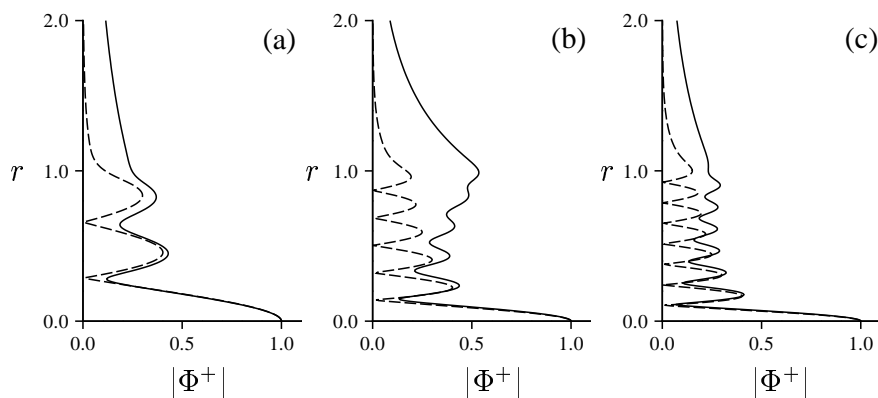


FIG. 2.22 – Fonctions propres associées aux modes désignés par les cercles de la figure 2.21 (pour  $\omega_i = 0$ ). (b) :  $\omega_r = 2.0$  et  $\omega_r = 2.5$  (tirets) ; (c) :  $\omega_r = 1.4$  et  $\omega_r = 1.8$  (tirets). La figure (a) constitue un cas de référence, obtenu avec  $\omega_r = 0.56$  et  $\omega_r = 1.10$  (tirets). Jet chaud,  $M = 2.2$ ,  $n = 0$ .

de branches spatiales et en particulier celles qui concernent leur contribution au champ lointain. Mais les questions que posent de tels évènements sont difficiles et ne semblent pas avoir fait l'objet de publications. Et puis si ce phénomène peut sembler secondaire au vu des taux d'amortissements, il ne faut pas perdre de vue la symétrie qui gouverne le réseau de branches spatiales à la limite  $Re \rightarrow \infty$ . En clair, on peut s'attendre à avoir des phénomènes analogues dans le demi-plan  $k_r > 0$ , à la différence que les ondes concernées sont localement amplifiées et non plus amorties.

Pour terminer cette partie sur les modes de  $K_0^\pm$ , on peut signaler que l'influence des effets visqueux n'est pas décisive pour les modes ne présentant qu'un nombre limité de ventres dans la direction radiale. Les calculs montrent que la partie imaginaire des pulsations  $\omega_{0s}$ , bien que négative, reste proche de zéro pour  $x < x_c$ . Certains des résultats obtenus sont disponibles dans l'annexe C.

### Modes de $K_1^+$ et $KH$ ; instabilités convectives

Intéressons-nous maintenant aux modes de  $K_1^+$ , qui rappelons le, n'existent que si la condition (2.54) est satisfaite et considérons à nouveau le cas du jet chaud, avec  $M = 2.2$  et  $\rho_\infty = 3.0$ . Pour simplifier la partie numérique, il est préférable d'ajouter les effets visqueux en prenant  $Re = 10^6$ . Seuls les modes de  $KH$  ont été obtenus avec l'approximation de fluide parfait, en mettant à profit la technique de déformation du contour d'intégration. Pour des raisons qui ne sont pas encore très claires, cette technique ne permet pas d'obtenir les modes de  $K_1^+$ . Comme pour les modes de  $K_0^\pm$ , le cas limite ( $x = 0$ ) est celui qui a été obtenu dans la section 2.2.3; il permet de valider en partie la procédure de calcul. Pour les modes de  $KH$ , on renvoie le lecteur aux comparaisons numériques de l'annexe C.

La figure 2.23 donne la déformation de la branche spatiale associée au mode à trois ventres de  $K_1^+$  (avec  $n = 0$ ). L'épaississement de la zone de mélange depuis zéro induit une échelle de longueur pour les ondes de Kelvin-Helmholtz, ce qui garantit que le taux de croissance présente bien un maximum. On retrouve cette propriété pour tous les modes de  $K_1^+$  calculés (voir figure 2.25). En outre ce maximum est atteint dans la région  $k_r < k_0$  et par conséquent correspond à une onde amplifiée de vitesse de phase subsonique<sup>22</sup>. Dans les cas réalistes, l'épaisseur de la zone de mélange  $b(0)$  à la sortie de la tuyère dépend d'un grand nombre de paramètres et n'est en général pas nulle. La figure 2.23 montre que pour  $b(0)$  suffisamment grand, les modes de  $K_1^+$  correspondent à des ondes advectées par l'écoulement et dont la vitesse de groupe est strictement positive. Si  $b(0)$  est petit (par exemple  $b < 0.04$  pour le cas de la figure 2.23, ce qui correspond approximativement à  $x < 0.75$ ), il y a une gamme de pulsations pour lesquelles la vitesse de groupe est proche de celle du son, et infiniment grande aux extrémités de cet intervalle. Cette observation rappelle celle qui a été faite au sujet des modes de  $K_0^+$  et peut là encore être caractérisée par le phénomène d'échange de modes, comme le montre la figure 2.24: le module de la fonction propre voit son nombre de ventres passer de 3 à 4 lorsque la vitesse de phase, initialement

22. Le terme d'"instabilité supersonique" utilisé par Tam et Hu [14] pour désigner les modes de  $K_1^+$  est ambigu car non adapté à la description des ondes dans la région  $x > 0$ . Si  $k_i$  s'annule pour  $k_r < k_0$  au point  $x = 0$ , les calculs réalisés dans cette thèse montrent que ce n'est plus le cas pour  $x \neq 0$ .

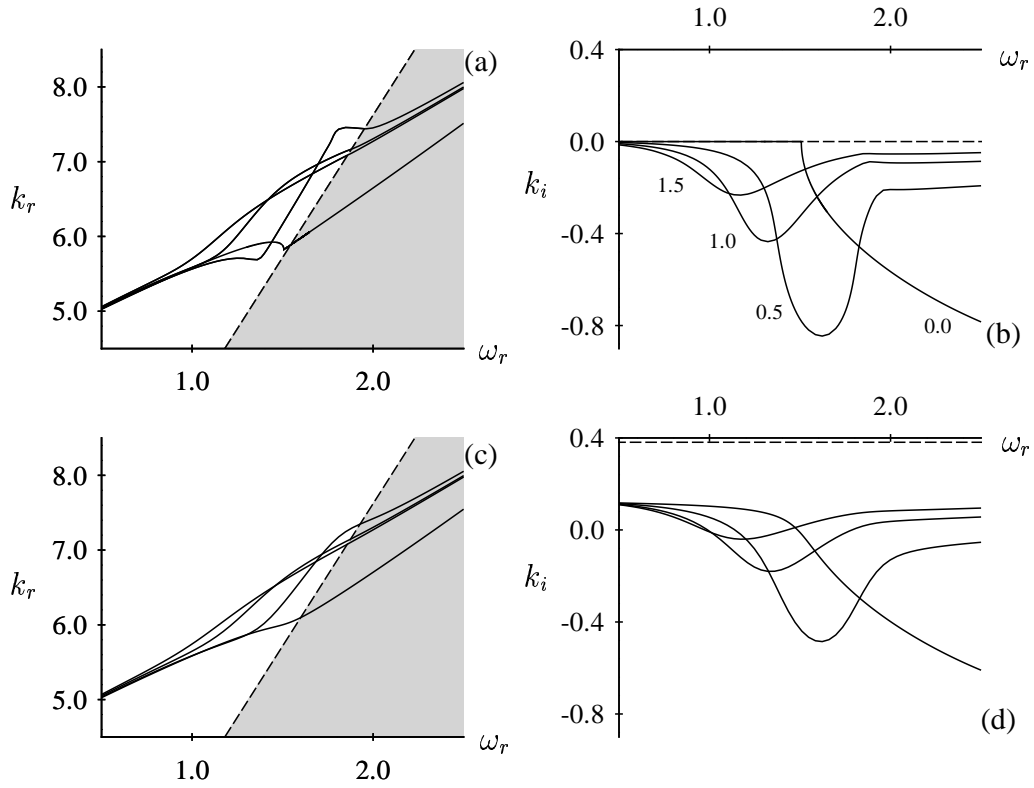


FIG. 2.23 – Déformation de la branche spatiale de la figure 2.9 lorsque  $x$  varie de 0 jusqu'à 1.5 ( $b = 0.087$  et  $h = 0.932$ ). Jet chaud,  $M = 2.2$ ,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $n = 0$ . La ligne que décrit le point  $k_0$  lorsque  $\omega$  varie est représentée en tirets. (a) et (b) :  $\omega_i = 0$  ; (c) et (d) :  $\omega_i = 0.1$ .

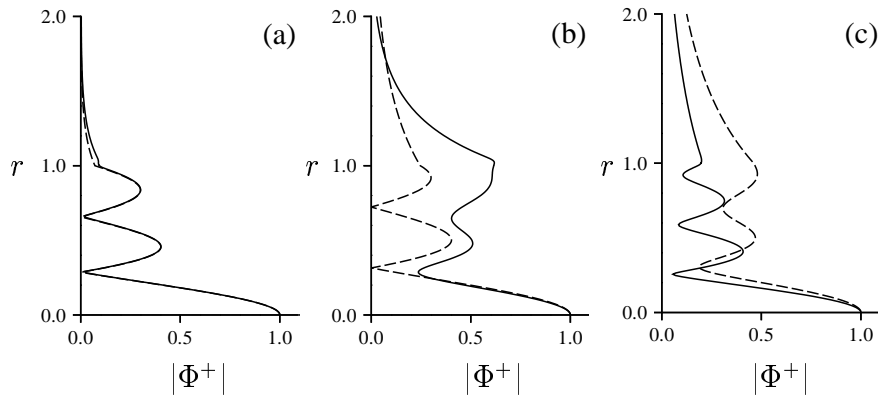


FIG. 2.24 – Fonctions propres associées à différents points de la branche spatiale de la figure 2.23 pour  $\omega_i = 0$  et  $x = 0.5$ . (a) :  $\omega_r = 1.0$  ; (b) :  $\omega_r = 1.5$  ; (c) :  $\omega_r = 1.5$ . Les lignes en tirets correspondent à  $x = 0.0$  et constituent un cas de référence. Jet chaud,  $M = 2.2$ ,  $\rho_\infty = 3.0$ ,  $n = 0$ .

subsonique, croît. La figure 2.25 donne le comportement des branches spatiales associées aux premiers modes de  $K_1^+$  pour  $n = 0, 1, 2$ . À partir des figures 2.25 et 2.20 et de la relation  $K_0^+(\omega) = K_1^+(-\omega)$  pour  $Re = \infty$ , on peut déduire le comportement du réseau de branches spatiales associées aux modes de  $K^+$  lorsque  $x$  varie. Pour  $x = 1$ , on voit donc que l'apparente symétrie des comportements observés pour  $x = 0$  au voisinage des points de branchements est brisée. Les modes de  $K_0^\pm$  se rencontrent toujours pour des pulsations réelles, mais les modes de  $K_1^+$  ne rencontrent plus ceux de  $K_2^+$ . La figure 2.25 permet aussi de comparer l'évolution du taux d'amplification des modes de  $KH$  à ceux des modes de  $K_1^+$ .

En ce qui concerne le mode de Kelvin-Helmholtz, il est important de se rappeler que le prolongement analytique de la branche spatiale sur le second feuillet de  $R_\lambda$  conduit à une dépendance radiale qui n'est pas physiquement réaliste pour  $r \rightarrow \infty$ . D'un autre côté, le fait que la branche rencontre une coupure lorsque  $k_i$  s'annule est une condition suffisante pour que l'onde d'instabilités rayonne de l'énergie. La figure 2.26 prouve donc qu'il existe des ondes d'instabilités se propageant au sein des jets supersoniques, pour  $x > 0$ , et dont les caractéristiques radiales ne peuvent pas être déterminées en procédant à une approche locale. Bien que les instabilités soient advectées par l'écoulement porteur, le problème de la détermination de la dynamique des ondes en champs proche et lointain répond à un processus global, que nous allons développer dans le chapitre 3. Remarquons que les ondes d'instabilités concernées ne sont pas forcément des ondes de Kelvin-Helmholtz. Les branches spatiales associées aux modes de  $K_1^+$  peuvent elles aussi rencontrer une coupure, en particulier si la viscosité du gaz est grande. Par conséquent, elles sont susceptibles de rayonner de l'énergie par un mécanisme analogue à celui des ondes de Kelvin-Helmholtz.

## 2.4 Conclusion du chapitre 2

### 2.4.1 Deux configurations génériques

Dans le chapitre 2, les fluctuations observées dans les jets supersoniques ont été modélisées par des ondes d'instabilités, dans le cadre d'une analyse linéaire. Dans l'espace des nombres d'ondes et à partir de l'équation régissant la perturbation de pression, il a été montré que les configurations possibles pour l'ensemble des modes propres peuvent se réduire à deux cas génériques, illustrés par deux écoulements froid et chaud. Si dans le premier cas, les seuls modes qui conduisent à des instabilités convectives amplifiées pour  $x > 0$  sont ceux de Kelvin-Helmholtz (pour des nombres d'ondes azimutaux entiers  $n$ ), le second cas est plus complexe à interpréter puisqu'il met en jeu d'autres ondes amplifiées, avec des taux d'amplifications qui sont de l'ordre de grandeur de ceux des ondes de Kelvin-Helmholtz. Jusqu'à présent, le problème du rayonnement acoustique de ces ondes supplémentaires a été mis de côté par la majorité des théoriciens qui ont préféré se consacrer au bruit des jets relevant du premier cas (les seuls modes amplifiés sont ceux de Kelvin-Helmholtz), en tronquant leurs approches aux petits nombres d'ondes azimutaux, typiquement  $n \leq 1$ . Dans ce chapitre, ces modes supplémentaires ont été regroupés dans un ensemble noté  $K_1^+$ , vide si la condition  $T_\infty < (M - 1)^2$  n'est pas satisfaite. Il a

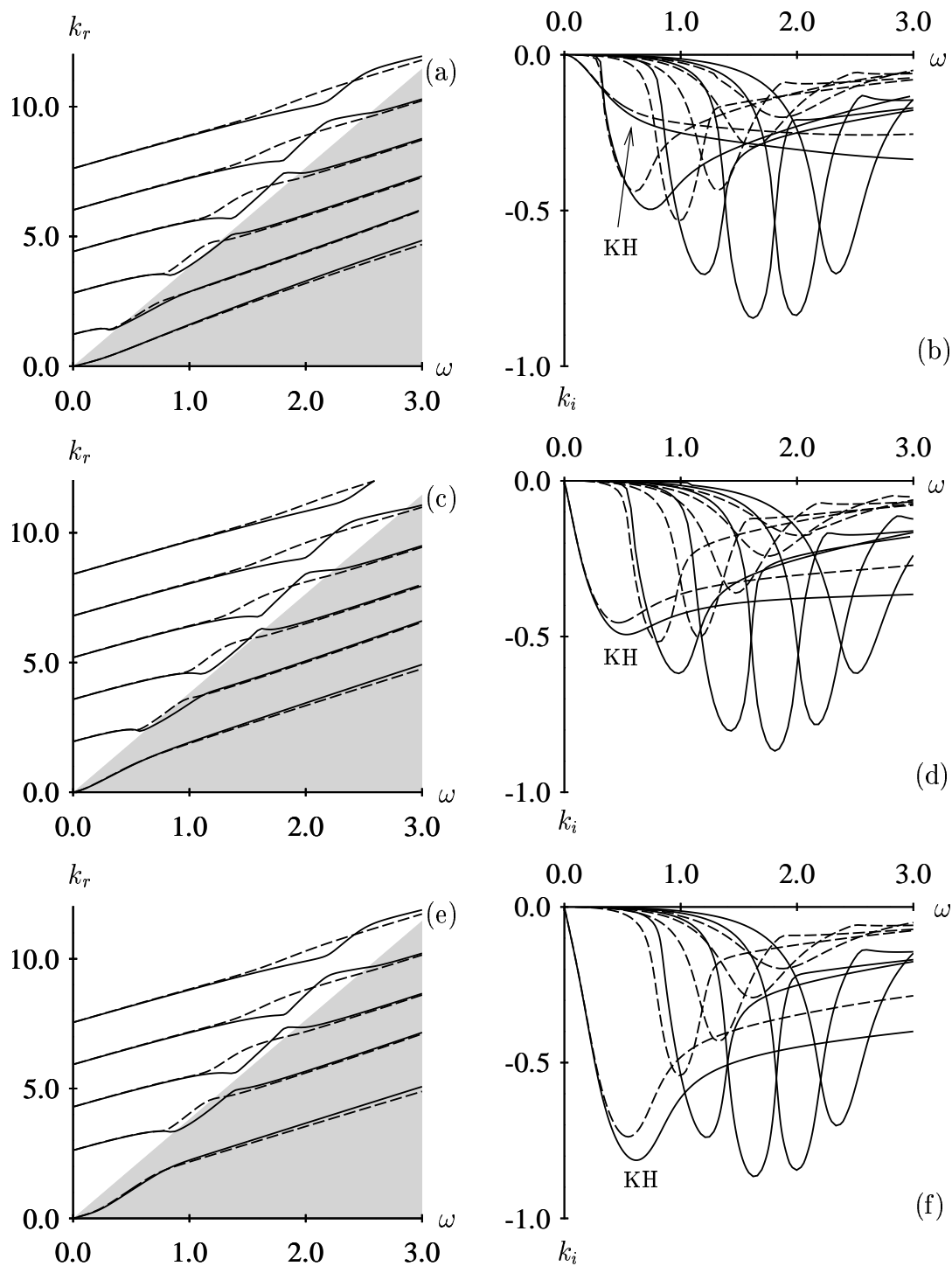


FIG. 2.25 – Réseau de branches spatiales associées aux modes de  $K_1^+$  et  $KH$  pour  $x = 0.5$  et  $x = 1.0$  (tirets). (a) et (b) :  $n = 0$  ; (c) et (d) :  $n = 1$  ; (e) et (f) :  $n = 2$ . Jet chaud,  $M = 2.2$ ,  $\rho_\infty = 3.0$ . Pour chaque réseau, le mode de  $KH$  est repéré par l'inscription  $KH$ .

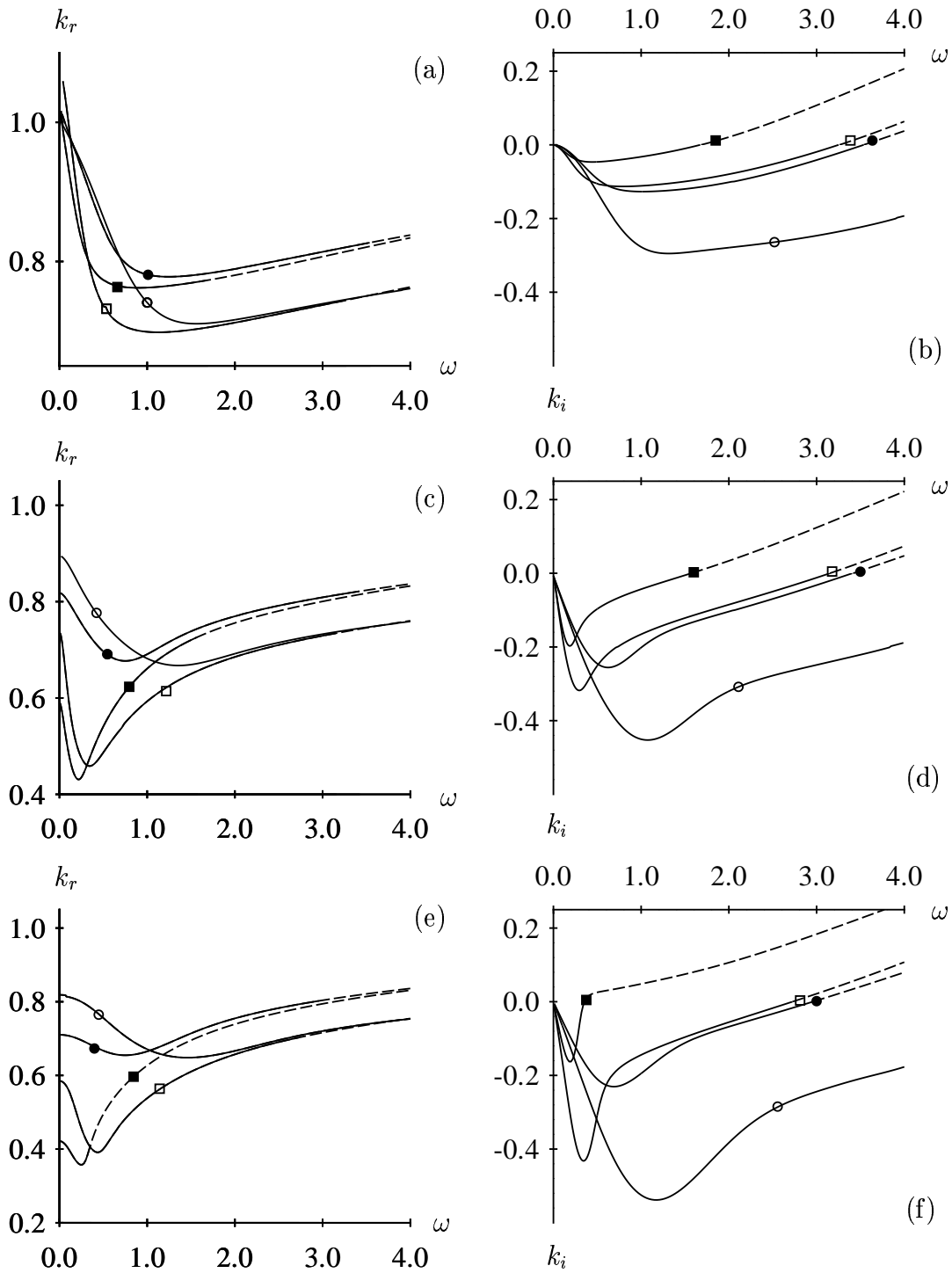


FIG. 2.26 – Branches spatiales associées aux modes de KH pour  $M = 2.2$ , pour un jet froid ( $\circ$  :  $x = 2.5$  ;  $\bullet$  :  $x = 5.0$ ) et un jet chaud ( $\square$  :  $x = 2.5$  ;  $\blacksquare$  :  $x = 5.0$ ), avec  $\rho_\infty = 3.0$ . (a) et (b) :  $n = 0$  ; (c) et (d) :  $n = 1$  ; (e) et (f) :  $n = 2$ .



été montré que ces modes s'échangent lorsque la pulsation, prise strictement réelle, varie. Cette observation pose une question fondamentale : quelle est la signification physique de la rencontre des branches spatiales de même catégorie, notamment lorsque la partie imaginaire de la pulsation est positive ? S'il est bien établi qu'il ne s'agit pas de la trace d'une instabilité absolue, il reste encore beaucoup à faire pour conclure sur les implications acoustiques.

Les propriétés de symétrie de l'équation pour la perturbation de pression ont permis de mettre en évidence une partition d'autres modes, regroupés dans les ensembles  $K_0^\pm$ , et qui, à la connaissance de l'auteur, n'ont fait l'objet d'aucune publication jusqu'à ce jour. Ces modes se conjuguent pour donner lieu à des instabilités marginalement absolues, induites par la présence d'un champ de perturbations acoustiques au voisinage du jet. Bien que la dynamique de ces instabilités n'ait pas été clairement établie, on peut s'attendre à ce qu'elles jouent un rôle fondamental dans des processus de sélection (non linéaire) des fréquences, par exemple en termes de modes globaux faiblement amortis. De même, en considérant le cas des ondes quasi-soniques (ou faiblement soniques), on peut espérer avoir une représentation plus satisfaisante du voisinage des points de vitesse de groupe nulle et donc, de leur contribution au champ acoustique lointain.

### 2.4.2 Coupures et dynamique globale

Dés lors qu'on s'intéresse à la dynamique des ondes d'instabilités en champ lointain, il n'est pas toujours possible de procéder à une approche locale pour en déduire les caractéristiques du bruit de jet. Plus précisément, il a été montré que la représentation sous forme de paquets d'ondes n'est pas une approximation valable dans tout l'espace physique, et en particulier ne l'est pas en champ lointain. En fait le rayonnement d'énergie est un processus global, au sens où toute portion du jet est susceptible de contribuer de manière significative. Pour avoir rayonnement d'énergie, il faut que l'image d'une onde d'instabilité sur  $\mathbb{R}$  par la transformée de Fourier ait des composantes supersoniques, ce qui signifie que l'information décisive n'est pas seulement portée par la variation de la vitesse de phase locale, mais aussi par la modulation de l'amplitude de l'onde à l'intérieur et au voisinage du jet.

Dans un écoulement soumis à un forçage monochromatique placé en sortie de tuyère, les ondes d'instabilités amplifiées pour  $x > 0$  voient leur taux d'amplification varier avec  $x$  et plus précisément décroître avec la distance au forçage. C'est une conséquence directe de la décroissance du gradient radial de vitesse moyenne. Si la vitesse de phase d'une onde est supersonique au point d'amplification nulle, l'image de l'approximation WKBJ contient nécessairement des composantes supersoniques et donc, cette onde rayonne de l'énergie à l'infini. On dispose donc d'une condition suffisante de rayonnement d'énergie, par nature locale, puisque seule compte la vitesse de phase de l'onde marginale. En d'autres termes, les coupures de l'espace des nombres d'ondes déterminent une dynamique globale au sens où l'essentiel du bruit rayonné par des instabilités convectives est donné par un voisinage du point d'intersection entre la coupure (fixe pour un forçage monochromatique donné) et la ligne que décrit le nombre d'onde lorsque  $x$  varie. Mais pour avoir le champ

proche, il faut calculer une intégrale sur tout le jet, et donc connaître les évolutions des caractéristiques locales des ondes d'instabilités, ce qui revient au passage à donner un sens physique aux prolongements analytiques sur le second feuillet de Riemann (ondes amorties). Notons à cet égard que bien que le comportement radial des ondes amorties ne soit plus compatible avec les conditions aux limites en champ lointain, il n'en reste pas moins que l'approximation WKBJ est valable à proximité de l'écoulement. Pour avoir la solution dans tout l'espace physique, il faut procéder au raccord de l'approximation WKBJ et de la solution à l'extérieur de l'écoulement.

Dans les chapitres 3 et 4, on se limitera aux modes de Kelvin-Helmholtz et au cas des jets froids, pour des nombres de Mach plus petits que 2.5. De cette manière, la condition  $T_\infty < (M - 1)^2$  n'est pas satisfaite et on se situe bien dans le premier cas générique (jet froid avec  $M = 1.5$ ).



## Chapitre 3

# Instabilités supersoniques globales

Dans ce chapitre, il est question d'évaluer la contribution des ondes d'instabilités au champ proche, sous la forme de transformées de Fourier-Laplace. Dans une première partie, on réduit l'analyse aux modes de  $KH$ , en considérant une couche de mélange supersonique ( $M > 1$ ), bidimensionnelle et en s'appuyant sur le formalisme de la méthode des développements asymptotiques raccordés. Le problème différentiel considéré jusqu'à présent prend alors la forme d'une dégénérescence significative d'un opérateur plus général, gouvernant la dynamique des ondes dans tout l'espace physique. Dans ce cadre théorique, la description des ondes d'instabilités en termes de fonctions analytiques définies sur une surface de Riemann apparaît être totalement compatible avec la condition de rayonnement. L'extension de cette théorie aux écoulements axisymétriques fait l'objet d'une seconde partie.

### 3.1 Vue d'ensemble

Le point de départ suit certaines remarques du chapitre 2 et consiste à reconnaître que dans certains cas une approche locale est insuffisante. La détermination des caractéristiques du champ proche est un processus global au sens où il n'est pas possible de rendre compte du comportement radial d'une onde d'instabilités sans connaître l'évolution de son amplitude dans la direction principale de l'écoulement.

Considérons d'abord le cas d'une couche de mélange bidimensionnelle dans le système de coordonnées  $(x, y)$ , définie par un écoulement de base qu'on note  $\phi_0$  et qui varie lentement dans la direction  $x$ . Si on note  $\epsilon$  une mesure du taux de variation de l'écoulement dans la direction  $x$ , la variable lente est donnée par  $X = \epsilon x$ . Supposons de plus que l'écoulement de base peut être représenté sous la forme d'une série de Taylor

$$\phi_0(x, y; \epsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_n(\epsilon) \phi_{0n}(X, y), \quad (3.1)$$

où les fonctions  $\phi_{n0}$  sont toutes de l'ordre de l'unité pour  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $(\nu_n)$  est une suite asymptotique de fonctions d'ordre (voir Eckhaus [109], [110]). L'évolution d'une perturbation infinitésimale  $\phi$  superposée à  $\phi_0$  est donc solution d'un problème paramétré par  $\epsilon$

qu'on peut linéariser au voisinage de  $\phi_0$ . Pour indiquer que l'opérateur issu de la procédure de linéarisation dépend de  $\epsilon$ , nous le notons  $L_\epsilon$ . Pour l'instant, nous allons conserver la version primitive des équations où  $\phi$  désigne le vecteur inconnu (composé des fluctuations des composantes de vitesse, de pression et de masse volumique). À défaut de connaître explicitement la solution pour tout  $\epsilon$  réel, on peut chercher à l'approcher asymptotiquement pour les petites valeurs de  $\epsilon$ .

Pour résoudre ce problème, l'approche classique en théorie des instabilités consiste à appliquer la méthode des échelles multiples (ou la méthode WKB) et à démontrer ensuite la validité de l'approximation obtenue. La dépendance spatiale de  $\phi$  dans la direction principale de l'écoulement se fait alors sur deux échelles  $x$  et  $X$  qu'il faut conserver simultanément. Ceci correspond au fait physique que la première échelle est bien adaptée à la description locale des oscillations et que la seconde est caractéristique des variations lentes d'amplitude. On cherche donc une approximation de  $\phi$  dans le domaine  $O_s(x) \leq 1/\epsilon^1$  et  $y = O(1)$ , sous la forme d'une fonction des trois variables indépendantes  $x$ ,  $X$  et  $y$ . Mais par construction, cette approche ne permet pas de rendre compte de la dynamique des ondes loin de l'écoulement. La raison principale est qu'à la limite  $y \rightarrow \infty$ , les ondes se propagent de la même façon dans toutes les directions de l'espace alors qu'une représentation à échelles multiples dans une seule direction brise cette isotropie. Dans leurs travaux sur la couche de mélange supersonique, Tam et Morris [6] ont parfaitement mis en évidence ce phénomène. En cherchant le domaine de validité de leurs approximations, ils démontrent que *la méthode des échelles multiples ne permet pas d'obtenir un développement asymptotique uniformément valable dans  $\Omega$* . Les travaux de Crighton et Huerre [45], [111] sur les sources superdirectives fournissent des indications qui vont aussi dans ce sens.

Plaçons-nous suffisamment loin de la zone de mélange et utilisons le système de coordonnées  $(X, Y)$ , avec  $Y = \epsilon y$ . Si on convient de chercher une solution de  $L_\epsilon[\phi] = 0$  sous la forme d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega = O_s(1)$ , le petit paramètre  $\epsilon$  génère une perturbation explicite. C'est-à-dire que  $L_\epsilon$  peut s'écrire sous la forme  $L_\epsilon = L_0 + L_p$ , où  $L_0$  est indépendant de  $\epsilon$  et  $L_p$  est tel que pour toute fonction  $\phi$  (suffisamment différentiable et indépendante de  $\epsilon$ ) on a  $\|L_p[\phi]\| \rightarrow 0$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . L'opérateur  $L_\epsilon$  admet donc un développement en série de Taylor qu'on peut écrire symboliquement

$$L_\epsilon \left( -i\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = L_0(-i\omega) + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n(\epsilon) L_n \left( \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right), \quad (3.2)$$

où  $(\delta_m)$  est une suite asymptotique ordonnée de fonctions d'ordres. Une conséquence est que la dégénérescence  $L_0$  de  $L_\epsilon$  (obtenue en faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro) ne peut pas rendre compte des variations de la solution dans la direction  $Y$ . Le problème est mal posé au sens de Hadamard puisque la solution à l'ordre dominant ne dépend pas continûment des conditions aux limites. En théorie des perturbations, on dit que le problème est de perturbation singulière pour la norme définie par le maximum : il n'est pas possible de

---

1. La notation  $g = O_s(f)$  est celle d'Eckhaus [109], [110] et est équivalente à  $g = O(f)$  et  $g \neq o(f)$ . Elle définit une relation d'équivalence sur l'espace des fonctions d'ordre  $\mathcal{E}$ . On peut donc définir l'ensemble quotient de  $\mathcal{E}$  par  $O_s$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de  $\mathcal{E}$ .

trouver une approximation de la solution en tant qu'élément du noyau de  $L_0$ . Or, les problèmes dans  $\mathbb{R}^2$  dont la solution n'est pas uniformément continue au voisinage de domaines de dimension inférieure sont courant en dynamique des fluides et se prêtent bien à la méthode des développements asymptotiques raccordés (en abrégé D. A. R.).

L'idée centrale de la méthode des D. A. R. consiste à définir des sous-domaines par des changements d'échelles, de manière à rendre compte de l'évolution d'un objet physique dans tout le domaine d'étude. Ainsi, le changement d'échelle  $Y \mapsto y = Y/\epsilon$  induit la transformation  $L_\epsilon \mapsto L_\epsilon^*$ , où l'opérateur  $L_\epsilon^*$  est un opérateur différentiel pour la variable  $y = O(1)$ . Il définit une variable locale qui porte le nom de variable de couche limite. Ce choix de variable nous assure que la solution à l'ordre dominant s'identifie à celle qu'on obtient dans le cadre de l'approximation localement parallèle. Mais cette façon de procéder n'est pas très rigoureuse et aurait tendance à nous faire croire que pour rendre compte de la dynamique des ondes en champ lointain, il suffirait simplement de changer l'ordre de grandeur de  $y$  et de rechercher une approximation du champ lointain. Ce n'est pas le cas. Il est bien connu que la méthode des D. A. R. n'est pas adaptée à la description des transitions exponentielle-algébrique (voir Bender et Orszag [40]) et même plus généralement à l'approximation de toute grandeur physique qui présente des oscillations. L'origine de la difficulté s'explique intuitivement par le fait que même si la fonction est bornée quand  $\epsilon$  tend vers zéro, il n'est pas possible de conclure quant au comportement des dérivées successives de  $\phi$ . Dans le cas qui nous intéresse, la simplicité de l'opérateur  $L_\epsilon$  fait qu'il est possible de déterminer une solution exacte sous la forme d'une transformée de Fourier inverse (voir Tam et Morris [6]). On peut la définir par

$$\phi(X, Y; \omega, \epsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k, Y; \omega, \epsilon) \exp(ikX) dk, \quad (3.3)$$

et ensuite en chercher un développement asymptotique en variables intermédiaires, pour procéder au raccord à l'approximation locale.

Pour  $y = O(1)$ , la dérivation partielle par rapport à  $x$  doit se calculer en appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée de plusieurs variables, ce qui revient simplement à remplacer  $\partial/\partial x$  par la somme  $\partial/\partial x + \epsilon\partial/\partial X$  dans l'opérateur  $L_\epsilon^*$ . Remarquons que  $\partial/\partial x$  possède un double sens selon que la variable  $X$  est présente ou non, mais pour ne pas introduire de difficulté d'écriture supplémentaire, on se conforme à la coutume et l'ambiguïté du symbole  $\partial/\partial x$  est conservée. L'opérateur local peut donc s'écrire sous la forme du développement en série suivant

$$L_\epsilon^* \left( -i\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = L_0^* \left( -i\omega, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n^*(\epsilon) L_n^* \left( \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.4)$$

où on voit clairement que la dégénérescence de  $L_\epsilon^*$  pour la variable locale  $y$  autorise une dépendance dans la direction transversale et ne fait pas intervenir de dérivée par rapport à  $X$ . Dans l'esprit des approximations WKBJ, on peut donc faire comme si l'opérateur en question était homogène dans la direction  $x$  et rechercher une approximation sous la

forme du développement asymptotique formel suivant

$$\text{Dev}_y^{(N)}\phi = \sum_{n=1}^N \delta_n^*(\epsilon)\phi_n^*(y, X, \omega) \exp \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k^\pm(s, \omega) ds, \quad (3.5)$$

où  $\text{Dev}_y^{(N)}$  est un opérateur de développement (voir Eckhaus [110]) qu'on introduit ici pour alléger les écritures. À l'ordre dominant, on peut poser  $\phi_1^* = A^\pm \Phi^\pm$  et se ramener ainsi à l'équation (2.64) du chapitre 2. Les modes  $k^\pm \in K^\pm$  sont déterminés sans ambiguïté en suivant, pour chaque  $X$ , la méthode de déformation des contours d'intégration, exposée dans le chapitre 2. La variable  $\omega$  peut être vue comme la pulsation d'un forçage localisé au point  $x = X = 0$ , auquel cas la dépendance temporelle de la perturbation est de type  $\exp(-i\omega t)$ , ou bien comme la variable d'intégration d'une transformée temporelle inverse. Dans ce dernier cas, la dépendance temporelle des ondes est obtenue en calculant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} [\text{Dev}_y^{(N)}\phi] \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (3.6)$$

où en toute généralité, le choix du contour d'intégration  $L_\omega$  dépend de la position des singularités de l'intégrand (voir Huerre et Rossi [32]). Pour simplifier les développements théoriques, on suppose que (i) la dépendance temporelle des fluctuations est celle du forçage monochromatique  $\delta_X \exp(-i\omega t)$  et que (ii) la couche de mélange est localement convectivement instable. Pour  $x > 0$ , on ne s'intéresse qu'aux modes de  $K^+$ .

Pour que la série (3.5) soit solution du problème, il faut que son image par  $L_\epsilon^*$  soit de l'ordre de  $o(\delta_N)$ . En remplaçant (3.5) dans (3.4), on déduit que la détermination des fonctions  $\phi_n^*$  se fait en cherchant les solutions des  $N$  systèmes différentiels

$$L_0^* \left( -i\omega, ik, \frac{\partial}{\partial y} \right) [\phi_n^*] = \chi_n^* (\phi_{n-1}^*, \phi_{n-2}^*, \dots, \phi_0^*), \quad (3.7)$$

où les seconds membres non nuls  $\chi_n^*$ ,  $n > 0$  dépendent des solutions obtenues aux ordres précédents. Pour  $n = 0$  et  $x > 0$ , on a  $\chi_0^* = 0$ . La démarche est classique et a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications. Pour des indications sur le sujet, le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Huerre et Rossi [32], à la synthèse de Huerre et Monkewitz [30] et aux travaux de Crighton et Gaster [3] et Gaster *et al.* [112]. Mais dans ces approches théoriques, les effets de compressibilité ne sont pas incorporés : les équations sont celles de l'approximation incompressible ( $M = 0$ ) et en principe, ne s'appliquent pas aux endroits où l'écoulement est au repos.

Si  $M > 1$ , il n'est pas toujours possible de déduire une équation d'amplitude<sup>2</sup> à partir du formalisme de la méthode des échelles multiples. On peut s'en convaincre en appliquant l'alternative de Fredholm à (3.7) avec  $n = 1$ , qui implique une condition dite de solvabilité. Pour simplifier son expression, on peut procéder à des éliminations dans le système d'équations différentielles et se ramener à une équation du second ordre

---

2. En général, il s'agit d'une équation "à la Landau" qui permet de déterminer l'évolution de l'amplitude de l'onde en  $X$  ; l'équation (3.7) avec  $n = 0$  ne permettant pas d'avoir cette information.

pour la pression  $p_n^*$ . En notant  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , deux solutions linéairement indépendantes (le Wronskien ne s'annule pas) et en conservant l'écriture (3.7) pour désigner l'équation pour  $p_n^*$ , la condition de solvabilité peut s'écrire formellement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_1^*(y, X, \omega) \Phi_1(y, X, \omega)}{W(y, X, \omega)} dy = 0, \quad (3.8)$$

où la dépendance transversale de  $\Phi_1$  est exponentielle pour  $y \rightarrow \pm\infty$  et  $W$  désigne le Wronskien des fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Sans aller plus loin dans la formulation mathématique, on voit immédiatement que si la fonction  $\Phi_1$  n'est pas bornée lorsque  $|y|$  tend vers l'infini, on peut s'attendre à ce que l'intégrale (prise le long d'un chemin contournant les points critiques pour  $Re = \infty$ ) diverge. C'est précisément le type de situation qu'on rencontre lorsque le comportement transversal des ondes présente une transition dissipatif-dispersif (qui est l'homologue de la transition exponentielle-algébrique pour les écoulements bidimensionnels). Dans les travaux de Tam et Morris [6] on trouve une observation analogue qui les conduit à limiter leur analyse théorique à des cas où l'intégrale (3.8) est convergente, ce qui revient en fait à ne s'intéresser qu'au premier feuillet de la surface de Riemann  $R_\lambda$  dans les portions de l'espace physique  $\Omega$  où l'écoulement est au repos (et au premier feuillet de  $R_\mu$  là où l'écoulement est uniforme). Lorsque ce n'est pas le cas, il est possible d'obtenir une équation d'amplitude en procédant au raccord des expressions (3.3) et (3.5). Pour être cohérent avec les notations utilisées dans cette section, on note  $\Omega^*$  le sous-domaine de  $\Omega$  dans lequel on a  $Y = O_s(1)$  (ou  $R = \epsilon r = O_s(1)$  pour le jet en coordonnées cylindriques).

Remarquons que pour obtenir le système d'équations (3.7), il faut connaître les fonctions  $\delta_n^*$ . Si en coordonnées cartésiennes, on peut se laisser guider par la structure de l'équation différentielle et prendre  $\delta_n^*(\epsilon) = \epsilon^n$ , il n'est pas question d'étendre ce résultat au cas du jet axisymétrique. Le passage en coordonnées cylindriques peut être à l'origine de termes non triviaux supplémentaires qu'il s'agit de déterminer pour raccorder les développements asymptotiques. La procédure de raccord des deux approximations peut se faire dans une seconde étape, en suivant le principe du raccord intermédiaire de Van Dyke [113], appliqué par Tam et Burton [114], [115] et Tam et Chen [93] et dont une justification peut être obtenue en faisant des hypothèses sur la structure du développement uniforme (voir Eckhaus [110]).

## 3.2 La Couche de mélange bidimensionnelle

### 3.2.1 Problème physique

On se limite au cas d'une couche de mélange bidimensionnelle, supersonique, occupant le domaine  $y_i \leq y \leq y_s$  et générée au point  $x = 0$  par un écoulement défini par  $u_0(y) = u_\infty$  pour  $y > 0$  et  $u_0(y) = 0$  sinon. On fait l'hypothèse que toutes les grandeurs moyennes sont constantes à l'extérieur de la zone de mélange et que la pression ne dépend pas de  $y$ . On choisit pour échelles caractéristiques les valeurs que prennent les fonctions  $u_0$  et



$\rho_0$  dans le demi-espace  $y > y_s$ . L'échelle de longueur est donnée par l'épaisseur de la couche de mélange à une distance suffisamment grande de l'origine  $x = 0$ . Les échelles de temps et de pression se déduisent des grandeurs précédentes de la même façon qu'au chapitre 2. Avec ces adimensionnements,  $\rho_\infty$  désigne la masse volumique du fluide situé au-dessous ( $y < y_i$ ) de la couche de mélange et le nombre de Mach  $M$  est défini par  $M^2 = 1/(\gamma p_0)$ . Si en plus, on réduit l'analyse aux gaz parfaits, de conductivité thermique nulle et non visqueux, le système d'équations différentielles peut se réduire à un système de trois équations scalaires dans le système de coordonnées  $(x, y)$ . On peut le mettre sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u_0}{\partial x} + v \frac{\partial u_0}{\partial y} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v_0}{\partial x} + v \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{M^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \gamma p \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.11)$$

où  $p$ ,  $u$  et  $v$  désignent les fluctuations de pression et des composantes de vitesse au point de coordonnées  $(x, y)$ . Dans (3.9) à (3.11), l'écoulement moyen est supposé lentement divergent dans la direction de  $x$  et au moins continument différentiable. L'équation de continuité permet d'écrire le champ des vitesses moyennes sous la forme

$$u_0(y, X) = u_{00}(y, X) + \epsilon u_{01}(y, X), \quad v_0(y, X) = \epsilon v_{01}(y, X). \quad (3.12)$$

Pour  $y > y_s$ , on a simplement  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  et  $\rho_0 = 1$ . De la même manière pour  $y < y_i$ , on a  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = \epsilon v_\infty$  et  $\rho_0 = \rho_\infty$ .

### 3.2.2 Développement local

Suivant le formalisme WKBJ, on recherche une approximation de  $p$  dans  $\Omega^*$  sous la forme du développement asymptotique (3.5), avec  $\delta_n^*(\epsilon) = \epsilon^n$ . En utilisant le changement  $x = X/\epsilon$  et en procédant à des éliminations de variables dans les équations (3.9) à (3.11), on arrive à l'équation

$$L_0^*[p_n^*] = \frac{\partial p_n^*}{\partial y^2} + \left[ \frac{2k}{\omega - k u_0} \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right] \frac{\partial p_n^*}{\partial y} - \lambda^2 p_n^* = \chi_n^*, \quad (3.13)$$

où la fonction  $\lambda$  est définie par  $\lambda^2 = k^2 - \rho_0 M^2 (\omega - u_0 k)^2$ . Les fonctions du second membre sont des combinaisons linéaires d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions  $p_m^*$ , où  $m$  est un entier positif au plus égal à  $n - 1$ . Le cas  $n = 0$  se résout facilement dans le domaine commun à  $\Omega^*$  et  $y > y_s$ . L'équation (3.13) se simplifie alors en

$$L_0^*[p_0^*] = \frac{\partial^2 p_0^*}{\partial y^2} - \mu^2 p_0^* = 0, \quad (3.14)$$

où  $\mu$  est une fonction algébrique, dont la définition est donnée dans le chapitre 2 par (2.39). Pour  $y < y_i$ , on arrive à une équation semblable à (3.14), qu'on obtient en remplaçant  $\mu$

par  $\lambda$  (voir 2.33). Les domaines d'holomorphie des solutions de (3.13) dans les régions où l'écoulement est uniforme sont donc là encore des surfaces de Riemann à deux feuillets. Remarquons que pour l'instant il n'y a aucune raison pour que ces surfaces soient celles du chapitre 2 puisque les conditions au bord de  $\Omega$  ne s'appliquent pas directement au bord de  $\Omega^*$ .

L'ensemble des solutions de l'équation homogène  $L_0^*[p_n^*] = 0$  est un espace vectoriel de dimension 2 dont deux solutions linéairement indépendantes, qu'on note  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , forment une base. Or on sait que dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe une infinité de bases et qu'on passe de l'une à l'autre par une transformation linéaire. En outre la restriction de la solution du problème (3.14) à une partie de  $\Omega^*$  s'identifie à la solution de la restriction du problème puisque les coefficients sont supposés continus (par application du théorème de Cauchy-Lipschitz). On peut donc prendre pour base de l'espace des solutions celles qui s'identifient à  $\exp(-\mu y)$  et  $\exp(\mu y)$  pour  $y > y_s$  et donc, s'écrivent sous la forme d'une combinaison linéaire de  $\exp(-\lambda y)$  et  $\exp(\lambda y)$  pour  $y < y_i$ . On arrive ainsi à la solution générale

$$p_0^*(y, X; \omega) = A_0(X; \omega)\Phi_1(y, X; \omega) + B_0(X; \omega)\Phi_2(y, X; \omega), \quad (3.15)$$

où  $A_0$  et  $B_0$  sont deux fonctions arbitraires, avec  $\Phi_1 = \exp(-\mu y)$  et  $\Phi_2 = \exp(\mu y)$  pour  $y > y_s$ . Si on inclut les variations rapides de la phase, l'ordre dominant de la dépendance spatiale est donné par l'expression

$$\text{Dev}_y^{(0)} p = p_0^*(y, X; \omega) \exp \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds, \quad (3.16)$$

où  $k(X; \omega)$  est, par construction, de l'ordre de l'unité.

Pour obtenir la solution à l'ordre  $n > 0$ , il est commode de passer au système du premier ordre associé à (3.13) et d'utiliser la notion de matrice résolvante. Pour  $n = 1$ , on voit ainsi que l'unique solution  $p_1^*$  satisfaisant à une condition de type Dirichlet en  $y_0$  peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} p_1^*(y, X; \omega) = & \left[ A_1(X; \omega) - \int_{y_0}^y \frac{\chi_1^*(s, X; \omega)\Phi_2(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds \right] \Phi_1(y, X; \omega) \\ & + \left[ B_1(X; \omega) + \int_{y_0}^y \frac{\chi_1^*(s, X; \omega)\Phi_1(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds \right] \Phi_2(y, X; \omega), \end{aligned} \quad (3.17)$$

où  $W$  est le Wronskien des fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . Notons que le dénominateur des intégrales de l'expression (3.17) ne s'annule que si le nombre d'onde  $k$  s'identifie à un des deux points de branchement de la fonction  $\mu$  (pour  $y > y_s$ ).

### 3.2.3 Développement régulier

L'opérateur  $L_\epsilon$  reflète les symétries de l'écoulement moyen, ce qui induit deux observations importantes: (i) on peut utiliser la transformée de Laplace bilatérale (encore appelée transformée de Fourier-Laplace) dans la direction où l'opérateur est homogène,

c'est-à-dire dans la direction de l'écoulement ; (ii) il faut distinguer le cas  $y > y_s$  et le cas  $y < y_i$ , puisque l'écoulement n'est pas symétrique.

Si  $\phi$  est une fonction localement intégrable, on définit la transformée de Fourier-Laplace par l'intégrale

$$\hat{\phi}(k, Y; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(X, Y; \omega) \exp(-ikX) dX, \quad (3.18)$$

moyennant son existence comme intégrale de Lebesgue. Pour cela, on suppose qu'il existe une constante positive  $C$  et un réel non nul  $c$  tels que  $cX < 0$  et  $|\phi| \leq C \exp(cX)$  pour  $X \rightarrow \pm\infty$ . Il en résulte que l'ensemble des points  $k$  tels que la fonction  $\hat{\phi}$  soit définie est une bande horizontale du plan complexe qui contient l'axe réel.

### Développement régulier dans la région $y > y_s$

Pour  $y > y_s$  et  $y = O_s(1/\epsilon)$ , l'écoulement moyen est uniforme et se réduit à  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$  et  $\rho_0 = 1$ . Dans le systèmes de coordonnées  $(X, Y)$ , avec  $Y = \epsilon y$ , les équations (3.9) à (3.11) se simplifient en

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\omega}{\epsilon} \right) u + \frac{\partial p}{\partial X} = 0, \quad (3.19)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\omega}{\epsilon} \right) v + \frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad (3.20)$$

$$M^2 \left( \frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\omega}{\epsilon} \right) p + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0. \quad (3.21)$$

Par substitution de (3.19) et (3.20) dans (3.21), on obtient une équation du second ordre pour  $p$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\omega}{\epsilon} \right)^2 p = \frac{1}{M^2} \Delta p, \quad (3.22)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace. Il est clair que (3.22) est hyperbolique si  $M > 1$  et elliptique si  $M < 1$ , de sorte que pour  $M > 1$  on se retrouve avec un problème classique de propagation d'ondes. L'application de la transformée (3.18) aux deux membres de (3.22) conduit à l'équation différentielle

$$\frac{(\epsilon k)^2 - M^2(\epsilon k - \omega)^2}{\epsilon^2} \hat{p} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial Y^2}, \quad (3.23)$$

où  $\epsilon k$  appartient à une bande du plan complexe centrée sur l'axe réel. Ainsi, le problème consiste en la détermination d'une solution non triviale satisfaisant à une condition de rayonnement pour  $Y \rightarrow \infty$  et se raccordant au développement local dans un domaine intermédiaire qu'on suppose pour l'instant non vide. Notons que le numérateur du membre de gauche de (3.23) n'est autre que la fonction algébrique  $\mu(\epsilon k, \omega)$  où  $\epsilon k$  est *a priori* réel puisque le chemin d'intégration de la transformée de Fourier inverse est confondu avec l'axe réel. Il est donc possible de se limiter au premier feuillet de  $R_\mu$  pour que l'espace des

solutions de (3.23) soit de dimension 1 et engendré par  $\exp(-\mu_1 Y/\epsilon)$  (voir chapitre 2). Pour fixer les idées, la pulsation  $\omega$  est considérée comme la variable d'intégration d'une transformée temporelle inverse. Comme dans le chapitre 2, le contour d'intégration est noté  $L_\omega$  et initialement contenu dans le demi-plan  $\omega_i > 0$ . Ainsi, la solution retenue est exponentiellement décroissante pour  $Y \rightarrow \infty$ , puisque la branche holomorphe  $\mu_1$  est de partie réelle positive pour  $\omega_i > 0$ . Le cas limite  $\omega_i = 0$  conduit à la même conclusion si  $k_0(\omega; 0) < \epsilon k < -k_0(\omega; 0)$ , avec  $M > 1$ , et à un comportement compatible avec la condition de rayonnement sinon. Mais dans ce dernier cas, il n'y a pas de modulation d'amplitude puisque le problème est bidimensionnel.

Pour avoir la partie spatiale du champ de pression, il ne reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier spatiale (3.18). Il faut donc calculer l'intégrale

$$p(X, Y; \omega) = \int_{F_k} G(\epsilon k; \omega) \exp \left[ \frac{i\epsilon k}{\epsilon} X - \frac{\mu_1(\epsilon k, \omega)}{\epsilon} Y \right] dk. \quad (3.24)$$

où  $F_k$  est un chemin initialement confondu avec l'axe réel et  $G(\epsilon k; \omega)$  est une fonction arbitraire. Sans perdre de généralité, on peut avoir l'idée de l'exprimer sous la forme de la transformée de Fourier suivante

$$G(K; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(X; \omega) \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds - \frac{iK}{\epsilon} X \right] dX, \quad (3.25)$$

où  $g$  est une fonction inconnue. La transformation (3.25) est largement suggérée par les travaux de Tam et Morris [6] et Tam et Burton [114]. L'idée consiste à faire apparaître explicitement une dépendance exponentielle compatible avec le formalisme WKBJ, de façon à simplifier la procédure de raccord. Dans cet esprit, le calcul exact de l'intégrale (3.24) n'est pas fondamental. Ce qu'il faut, c'est en déterminer un développement asymptotique pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . Pour lever toute ambiguïté entre le mode  $k$  et la variable d'intégration dans (3.24), on fait le changement de variable  $K = \epsilon k$  et on réserve la notation  $k$  au mode de Kelvin-Helmholtz.

Avant de procéder à l'évaluation de l'intégrale (3.24), on peut chercher un développement asymptotique de (3.25), en remplaçant la fonction inconnue  $g$  par le développement asymptotique  $g_0 + \epsilon g_1 + o(\epsilon)$ . Puisque l'intégrand de (3.25) est de la forme  $g \exp(i\varphi/\epsilon)$  pour  $K = O_s(1)$ , on peut utiliser la méthode du col. Pour cela, il faut faire plusieurs hypothèses sur le comportement de  $k$  lorsque  $X$  varie. La première consiste à supposer que la fonction  $k(X; \omega)$  est holomorphe et inversible, d'inverse  $k^{-1}$ , pour toute pulsation de partie imaginaire positive. Dans ces conditions, le point selle  $\bar{X}$  est unique, et annule l'expression

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \int_0^X k(s; \omega) ds - K X \right\} = 0, \quad (3.26)$$

ce qui signifie que  $\bar{X}$  (en général complexe) est la position pour laquelle le mode  $k$  s'identifie à  $K$ , i. e.  $\bar{X} = k^{-1}(K; \omega)$ . Pour déterminer la contribution du voisinage de  $\bar{X}$ , on peut développer l'angle de phase  $\varphi$  et les amplitudes  $g_n$  en séries de Taylor au voisinage de  $\bar{X}$  et se ramener à des expressions faciles à intégrer. Puisque la fonction  $\varphi$  est holomorphe, on

peut la développer en série de Taylor jusqu'à l'ordre  $m + 1$  et séparer l'ensemble d'indices en deux parties  $[0, m_0]$  et  $]m_0, m]$ . L'idée consiste à conserver les  $m_0 + 1$  premiers termes dans l'exponentielle et à utiliser le développement en série de Taylor de l'exponentielle pour exprimer la partie complémentaire sous la forme d'une série entière. Il est clair qu'il faut prendre  $m_0 > 1$  puisque le terme  $\partial\varphi/\partial X$  s'annule pour  $X = \bar{X}$ . Pour  $m_0 = 2$ , on se retrouve donc à intégrer des expressions de la forme  $z^{2p} \exp(\alpha z^2)$  où  $p$  est un entier, sur un intervalle centré en zéro et dont la longueur tend vers l'infini. À ce titre, on peut noter que la convergence des intégrales n'est assurée que si *la partie imaginaire de  $dk/dX$  au point  $\bar{X}$  est strictement positive* (voir Bender et Orszag [40]). À partir des résultats classiques sur l'intégrale de Gauss ( $p = 0$ ) et en procédant par récurrence, on arrive au développement asymptotique suivant

$$G(K; \omega) \sim (-2\pi\epsilon)^{1/2} \sum_n \frac{\epsilon^n G_n(\bar{X}; \omega)}{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}(\bar{X}, K; \omega)\right]^{1/2}} \exp\left[i\frac{\varphi(\bar{X}, K; \omega)}{\epsilon}\right], \quad (3.27)$$

où les fonctions  $G_n$  sont obtenues à partir des fonctions  $g_n$  en prenant  $m = 4$  et en développant ces dernières en séries de Taylor jusqu'à l'ordre 3. On arrive à

$$G_n = g_n + \epsilon \left[ -\frac{\frac{d^2 g_n}{dX^2}}{2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}} + \frac{g_n \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}}{8\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)^2} + \frac{\frac{d g_n}{dX} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3}}{2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)^2} - \frac{5\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3}\right)^2 g_n}{24\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)^3} \right] + o(\epsilon), \quad (3.28)$$

où les fonctions  $g_n$ ,  $\varphi$  et leurs dérivées successives sont exprimées au point selle  $\bar{X}$ . Pour rétablir la dépendance explicite en  $K$ , il faut remplacer  $\bar{X}$  par  $k^{-1}(K; \omega)$  et utiliser les formules de dérivation composée. Il va de soi que l'expression (3.28) sous-entend que les fonctions  $g_n$  ne s'annulent pas en  $\bar{X}$ .

La seconde étape consiste à déterminer un développement asymptotique de (3.24) en tenant compte de (3.27) et (3.28). L'intégrale qu'il faut estimer peut s'écrire

$$p \sim \frac{1}{\epsilon} \int_{F_K} \left[ \frac{i\epsilon}{2\pi dk/dX} \right]^{1/2} \left\{ g_0 + \epsilon \left[ g_1 + \frac{i\tilde{g}_1}{24 (dk/dX)^3} \right] + o(\epsilon) \right\} \exp\left[i\frac{\psi_s}{\epsilon}\right] dK, \quad (3.29)$$

où la fonction  $\tilde{g}_1$  est définie par l'expression

$$\tilde{g}_1 = g_0 \left[ 5 \left( \frac{d^2 k}{dX^2} \right)^2 - 3 \frac{dk}{dX} \frac{d^3 k}{dX^3} \right] - 12 \frac{d g_0}{dX} \frac{dk}{dX} \frac{d^2 k}{dX^2} + 12 \frac{d^2 g_0}{dX^2} \left( \frac{dk}{dX} \right)^2, \quad (3.30)$$

et la phase  $\psi_s$  se déduit de  $\varphi$  en incluant la dépendance spatiale du noyau de la transformée de Fourier inverse, i. e.  $\psi_s = \varphi + KX + i\mu Y$ . Comme pour les expressions (3.27) et (3.28), les dérivées sont à prendre au point  $\bar{X}$  et le rôle de  $\omega$  se réduit à celui d'un paramètre.

Par application du théorème d'extension<sup>3</sup> de Kaplun (1967), on voit que l'estimation de l'intégrale (3.29) peut se faire par la méthode du col dans le domaine obtenu par la

3. Ce théorème nous permet d'étendre le domaine de validité de l'approximation régulière (pour  $Y = O_s(1)$ ) à un domaine ouvert contenant le sous-domaine de  $\Omega$  dans lequel on a  $Y = O_s(1)$ .

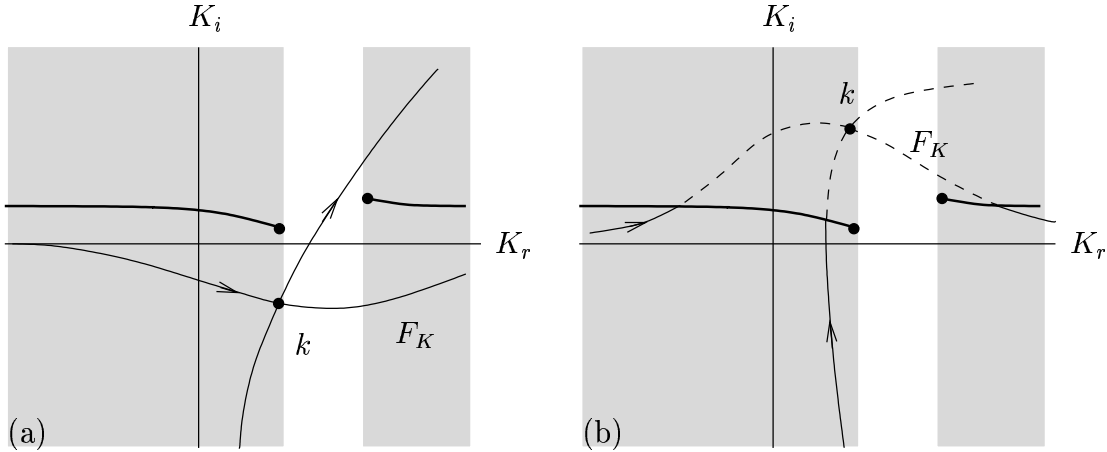


FIG. 3.1 – Contour d'intégration  $F_K$  et chemin décrit par  $k$  lorsque  $X$  varie, pour  $y > y_s$ . Les prolongements analytiques sur le second feuillet de  $R_\mu$  sont représentés en tirets.

transformation  $Y \mapsto y_\alpha$  avec  $y_\alpha = Y/\delta_\alpha(\epsilon)$ , où  $\delta_\alpha$  est une fonction d'ordre satisfaisant à  $\epsilon = o(\delta_\alpha(\epsilon))$  et  $\delta_\alpha(\epsilon) = o(1)$ . Pour fixer les idées, on peut prendre  $\delta_\alpha(\epsilon) = \epsilon^{1-1/\alpha}$ , avec  $\alpha > 1$  et noter  $\Omega_\alpha$  le domaine obtenu en fixant  $y_\alpha$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro. Ainsi, en dehors de certains voisinages des points de branchement de  $\mu$ , le point selle  $\bar{K}$  annule

$$\frac{\partial}{\partial K} \{ \varphi(k^{-1}(K, \omega), K) + KX \} = 0. \quad (3.31)$$

Comme  $k$  est par hypothèse inversible, on en déduit que  $\bar{K}$  est unique et s'identifie à  $k$  pour chaque  $X$ , i. e.  $\bar{K} = k(X; \omega)$ . Si (i) il existe un chemin homotope (avec extrémités fixes) à l'axe réel, passant par le point selle dans la direction de plus grande pente descendante et si (ii) l'intégrand dans (3.29) est holomorphe dans le domaine limité par  $F_K$  et l'axe réel, alors la procédure formelle d'obtention du développement asymptotique est identique à ce qui a été fait pour l'intégrale (3.25). En utilisant les formules (3.27) et (3.28), on arrive finalement à un développement asymptotique du champ de pression dans le domaine commun à  $\Omega_\alpha$  et  $y > y_s$  qu'on écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Dev}_{y_\alpha} p \sim & \left\{ g_0(X) - \epsilon^{1-2/\alpha} \frac{i g_0(X; \omega)}{2} \left( \frac{d\mu}{dK}(\bar{K}; \omega) \right)^2 \frac{dk}{dX}(X; \omega) y_\alpha^2 \right. \\ & - \frac{i \epsilon^{1-1/\alpha}}{2} \left[ \frac{d^2 \mu}{dK^2}(\bar{K}; \omega) \frac{dk}{dX}(X; \omega) g_0(X; \omega) + 2 \frac{d\mu}{dK}(\bar{K}; \omega) \frac{dg_0}{dX}(X; \omega) \right] y_\alpha \\ & \left. + \epsilon g_1(X; \omega) + O(\epsilon^{2-4/\alpha}) \right\} \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds - \frac{\mu(\bar{K}; \omega) y_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}} \right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\bar{K}$  doit être vu comme une fonction de  $X$ , paramétrée par  $\omega$ . La fonction algébrique  $\mu$  et ses dérivées par rapport à  $K$  sont considérées comme des fonctions définies sur  $R_\mu$ . Vu que les conditions de bord s'appliquent au domaine  $Y = O_s(1)$ , les coupures du plan

complexe sont induites par celles de l'approximation régulière et donc, sont celles du chapitre 2, comme le montre la figure 3.1 pour  $\omega_i > 0$ .

En vertu de la condition (i), on voit qu'il peut exister des cas pour lesquels une partie du contour d'intégration  $F_K$  se prolonge sur le second feuillet de  $R_\mu$ , comme le montre la figure 3.1 (b). La conséquence physique est qu'il existe des composantes  $K$  de vitesse de phase supersonique dans l'intégrale (3.24) ou en d'autres termes que l'onde d'instabilités associée au mode  $k$  lorsque  $X$  varie, rayonne de l'énergie dans le champ lointain. À la limite  $\omega_i \rightarrow 0$ , une condition suffisante pour qu'un tel phénomène se présente est que la vitesse de phase de l'onde d'instabilités soit localement supersonique au point où l'onde est d'amplitude maximale ( $k_i \rightarrow 0$ )<sup>4</sup>.

### Développement régulier dans la région $y < y_i$

Avec les simplifications  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = \epsilon v_\infty$  et  $\rho_0 = \rho_\infty$ , on arrive au système d'équations différentielles

$$\rho_\infty \left( \epsilon v_\infty \frac{\partial}{\partial Y} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) u + \frac{\partial p}{\partial X} = 0, \quad (3.33)$$

$$\rho_\infty \left( \epsilon v_\infty \frac{\partial}{\partial Y} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) v + \frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad (3.34)$$

$$M^2 \left( \epsilon v_\infty \frac{\partial}{\partial Y} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) p + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0. \quad (3.35)$$

L'équation vérifiée par  $p$  est obtenue en dérivant les deux premières relations respectivement par rapport à  $X$  et  $Y$  qu'on injecte dans la dérivée de (3.35) par rapport à  $Y$ . On arrive ainsi à

$$\Delta p + \rho_\infty \frac{\omega^2 M^2}{\epsilon^2} p = \rho_\infty M^2 v_\infty \epsilon \left( v_\infty \epsilon \frac{\partial^2 p}{\partial Y^2} - 2i \frac{\omega}{\epsilon} \frac{\partial p}{\partial Y} \right). \quad (3.36)$$

On procède ensuite comme pour  $y > y_s$ , en prenant la transformée de Fourier de (3.36). L'équation différentielle qu'on obtient est à coefficients constants ; les racines du polynôme caractéristique sont les nombres complexes  $\tilde{\lambda}^\pm / \epsilon$ , avec

$$\tilde{\lambda}^\pm(\epsilon k; \omega) = \frac{i\omega \epsilon v_\infty \rho_\infty M^2}{v_\infty^2 \epsilon^2 \rho_\infty M^2 - 1} \pm \frac{\lambda(\epsilon k; \omega)}{v_\infty^2 \epsilon^2 \rho_\infty M^2 - 1}. \quad (3.37)$$

À l'ordre dominant, on a  $\tilde{\lambda}^\pm = \mp \lambda + o(1)$ . On peut donc se limiter au premier feuillet de  $R_\lambda$  pour que l'espace des solutions soit de dimension 1 et généré par la fonction  $\exp [(-\lambda_1 + o(1))Y]$ , la définition de la branche holomorphe  $\lambda_1$  étant celle du chapitre 2. Le rôle de la vitesse radiale  $\epsilon v_\infty$  se manifeste simplement par la présence de termes d'ordre supérieur dans le facteur exponentiel. À l'ordre dominant, la solution correspond à une onde de célérité  $\epsilon / (\sqrt{\rho_\infty} M)$ , la différence avec le cas  $y > y_s$  étant la présence du rapport des densités  $\rho_\infty$ .

4. En première approximation seulement, puisque le taux d'amplification de l'onde n'est pas strictement égal à  $k_i$ . Il dépend aussi des fonctions  $A^+$  et  $\Phi^+$  dans (2.64).

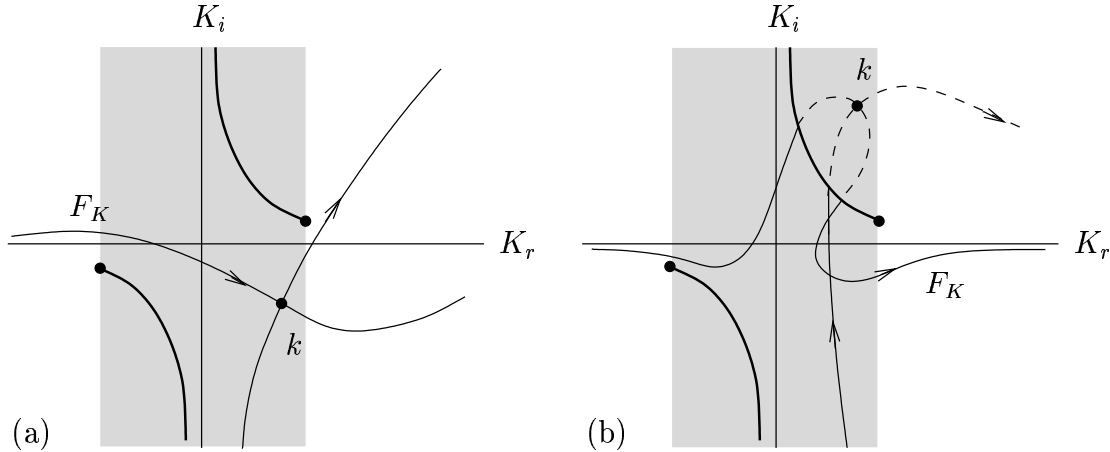


FIG. 3.2 – Contour d'intégration  $F_K$  et chemin décrit par  $k$  lorsque  $X$  varie, pour  $y < y_i$ . Les prolongements analytiques sur le second feuillet de  $R_\lambda$  sont représentés en tirets.

On peut suivre une démarche analogue au cas  $y > y_s$ , en cherchant le champ de pression dans le domaine commun à  $\Omega_\alpha$  et  $y < y_i$ , ce qui revient à chercher un développement asymptotique de l'intégrale

$$p(X, \epsilon^{1-1/\alpha} y_\alpha; \omega) \sim \frac{1}{\epsilon} \int_{F_K} H(K; \omega) \exp \left[ i \frac{\psi_i(K, X, \epsilon^{1-1/\alpha} y_\alpha; \omega)}{\epsilon} \right] dK, \quad (3.38)$$

où la fonction  $H$  est formellement identique au facteur de l'exponentiel dans (3.29), mais dans laquelle les fonctions inconnues  $g_n$  sont remplacées par  $h_n$ . La phase  $\psi_i$  est donnée par la formule

$$\psi_i(K, X, Y; \omega) = \varphi(k^{-1}(K; \omega), K; \omega) + KX + O(\epsilon^{1-1/\alpha}). \quad (3.39)$$

Puisqu'à l'ordre dominant,  $\psi_i$  et  $\psi_s$  sont identiques, le point selle de (3.38) est défini par (3.31) et donc, donné par  $\bar{K} = k(X; \omega)$ . Finalement, on arrive à

$$\begin{aligned} \text{Dev}_{y_\alpha} p \sim & \left\{ h_0(X; \omega) - \epsilon^{1-2/\alpha} \frac{i h_0(X; \omega)}{2} \left( \frac{d\lambda}{dK}(\bar{K}; \omega) \right)^2 \frac{dk}{dX}(X; \omega) y_\alpha^2 \right. \\ & - \frac{i \epsilon^{1-1/\alpha}}{2} \left[ \frac{d^2 \lambda}{dK^2}(\bar{K}; \omega) \frac{dk}{dX}(X; \omega) h_0(X; \omega) + 2 \frac{d\lambda}{dK}(\bar{K}; \omega) \frac{dh_0}{dX}(X; \omega) + \right. \\ & \left. \left. 2\omega v_\infty \rho_\infty M^2 h_0(X; \omega) \right] y_\alpha \right. \\ & \left. - + \epsilon h_1(X; \omega) + O(\epsilon^{2-4/\alpha}) \right\} \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds - \frac{\lambda(\bar{K}; \omega) y_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}} \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

où en toute généralité, les fonctions  $\lambda$  et ses dérivées au point selle sont définies sur  $R_\lambda$ . Comme pour le cas  $y > y_s$ , la figure 3.2 montre que certaines situations nécessitent de



prolonger analytiquement  $F_K$  et  $k$  sur le second feuillet de  $R_\lambda$ . En outre, la comparaison des figures 3.1 et 3.2 indique qu'à pulsation fixée, les ondes d'instabilités marginales de grande longueur d'onde (typiquement  $k \in B_0(\omega; \infty)$ ) rayonnent de l'énergie dans la région  $y < y_i$ , ce qui n'est pas forcément le cas dans la région  $y > y_s$ . Ce qui compte, c'est la position relative des points de branchement  $\pm k_0(\omega; \infty)$  et  $\pm k_0(\omega; 0)$ .

### 3.2.4 Raccordement des développements local et régulier

La règle de raccord est basée sur l'existence d'un domaine intermédiaire où les deux développements sont simultanément valables. Ce domaine n'existe que dans la mesure où on peut étendre suffisamment les domaines de validité des approximations significatives. Cette extension du domaine de validité d'une approximation trouve une justification partielle dans le théorème d'extension de Kaplun qui dit que si un développement asymptotique est uniformément valable dans un domaine fermé, alors il le reste dans un ouvert le contenant.

En termes d'opérateurs de développements<sup>5</sup>, l'existence d'un domaine intermédiaire est équivalente à l'existence d'une variable locale  $y_\alpha$  telle que pour tout triplet d'entiers positifs  $(m, q, s)$ , le développement  $\text{Dev}_{y_\alpha}^{(s)} p$  est contenu à la fois dans  $\text{Dev}_Y^{(m)} p$  et  $\text{Dev}_y^{(q)} p$ , au sens d'Eckhaus [110]. C'est-à-dire qu'on a les règles de raccord

$$\text{Dev}_{y_\alpha}^{(s)} \text{Dev}_Y^{(q)} p = \text{Dev}_{y_\alpha}^{(s)} p, \quad \text{Dev}_{y_\alpha}^{(s)} \text{Dev}_y^{(m)} p = \text{Dev}_{y_\alpha}^{(s)} p, \quad (3.41)$$

où  $y_\alpha = Y/\delta_\alpha(\epsilon)$  définit bien une famille de variables intermédiaires puisque  $\epsilon = o(\delta_\alpha(\epsilon))$  et  $\delta_\alpha(\epsilon) = o(1)$ . En particulier, on peut prendre  $m = q = 0$  et exprimer (3.41) sous la forme d'opérateurs d'approximations ou de limites locales : la limite est calculée à  $y_\alpha$  fixé, en faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro.

#### Raccord à l'ordre 0 : problème aux valeurs propres

Dans la région  $y > y_s$ , le cas  $m = q = 0$  conduit à une règle de raccord bien connue, qui à l'ordre dominant prend la forme simple

$$\lim_{y_\alpha} \text{Dev}_y^{(0)} p = g_0(X; \omega) \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds - \frac{\mu(\bar{K}; \omega)}{\epsilon^{1/\alpha}} \right], \quad (3.42)$$

où  $\text{Dev}_y^{(0)} p$  est donné par (3.16) et (3.15) et la limite du membre de gauche est une limite locale, i. e. pour  $y_\alpha = O_s(1)$ . Puisque le facteur exponentiel qui intervient dans les deux membres de (3.42) est identique, la condition de raccord conduit à identifier les fonctions  $g_0$  et  $A_0$  et à prendre  $B_0 = 0$ . Ce résultat permet de justifier l'approche du chapitre 2

---

5. Un opérateur de développement en variable locale  $t \in \bar{D}$  est souvent défini par récurrence, sous la forme d'une somme d'opérateurs d'approximations  $D_t^{(n)}$ , avec  $D_t^{(0)} = D_t$  et  $D_t^{(n)} = D_t(1 - \text{Dev}_t^{(n-1)})$  pour tout entier  $n > 0$ , où  $D_t$  est défini par son action sur une fonction en variable locale  $f_t = O(1)$ . Si il existe une fonction non triviale  $\delta \in \mathcal{E}$  telle que  $f_t/\delta$  existe et converge uniformément dans  $\bar{D}$ , alors  $D_t f_t/\delta$  est la limite de  $f_t/\delta$  pour  $t = O_s(1)$ . Dans le cas contraire,  $D_t f_t = 0$ .

et plus particulièrement le choix des surfaces de Riemann  $R_\mu$  et  $R_\lambda$ , puisque la structure retenue pour  $Y = O_s(1)$  s'étend, par une condition de raccord, au voisinage de la couche de mélange. Il n'y a donc pas d'incompatibilité entre le fait d'utiliser les conditions de bord loin de la couche de mélange pour définir les domaines d'holomorphic des solutions en variable locale  $y = O(1)$  et le résultat selon lequel ces solutions ne sont pas valables en dehors d'un voisinage de la couche de mélange. C'est un exemple de cohérence globale.

Compte tenu de l'égalité  $g_0 = A_0$  et du fait que  $\Phi_1$  peut s'exprimer sous la forme  $C \exp(-\lambda y) + D \exp(\lambda y)$  pour  $y < y_i$ , on arrive aux conditions de raccord

$$C(k; \omega) = \frac{h_0(X; \omega)}{g_0(X; \omega)}, \quad D(k; \omega) = 0. \quad (3.43)$$

On retrouve ainsi une relation implicite entre  $k$  et  $\omega$  qui généralise la relation de dispersion obtenue au chapitre 2. La procédure numérique de prolongement analytique développée dans la section 2.3 est donc totalement compatible avec la description physique des ondes en termes de transformées inverses dans  $\Omega_\alpha$ . Mais pour obtenir la dynamique des ondes en champ proche, on voit que la dépendance radiale des ondes d'instabilités sous la forme d'exponentielles doit être corrigée en construisant des développements asymptotiques uniformément valables dans  $\Omega$ . D'un point de vue numérique, une autre possibilité consiste à calculer directement les intégrales (3.38) et (3.29), en utilisant les algorithmes classiques de FFT. Mais pour cela, il faut connaître la fonction  $g_0$ .

### Raccord à l'ordre 1 : équation d'amplitude

On prend  $m = q = 1$  et on exprime l'opérateur d'approximation en termes de limites intermédiaires. Pour  $y > y_s$ , on voit que le raccord nécessite d'annuler certaines intégrales dans (3.17). En particulier, on doit avoir

$$B_1(X; \omega) + \int_{y_0}^{y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}} \frac{\chi_1^*(y, X; \omega) \Phi_1(y, X; \omega)}{W(y, X; \omega)} ds = 0, \quad (3.44)$$

où  $B_1$  doit être nul pour que la relation soit satisfaite pour tout  $y_\alpha > 0$ . Pour  $y < y_i$ , la relation  $D(k; \omega) = 0$  implique

$$\int_{y_0}^{y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}} \frac{\chi_1^*(y, X; \omega) \Phi_1(y, X; \omega)}{W(y, X; \omega)} ds = 0, \quad (3.45)$$

où  $y_\alpha$  est négatif. Des équations (3.44) et (3.45), on peut construire une troisième équation en sommant les deux intégrales, ce qui permet de faire disparaître la dépendance en  $y_0$  (par la relation de Chasles). On arrive ainsi à

$$\int_{-y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}}^{y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}} \frac{\chi_1^*(y, X; \omega) \Phi_1(y, X; \omega)}{W(y, X; \omega)} ds = 0, \quad (3.46)$$

avec  $y_\alpha > 0$  et qui peut être vue comme une restriction de l'alternative de Fredholm au sous-domaine  $\Omega_\alpha \cup \Omega^*$ , c'est-à-dire comme une condition de solvabilité *locale*. Il est

important de remarquer que sur le premier feuillet de  $R_\mu$ , on peut étendre l'intervalle d'intégration  $-y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha} \leq y \leq y_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}$  à  $\mathbb{R}$  en passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , puisque l'intégrale est convergente. La condition (3.46) s'identifie alors à la condition de solvabilité obtenue par Tam et Morris [6] et qui traduit que si  $\chi_1^*$  est dans l'espace des fonctions de carré sommable, l'équation inhomogène  $L_0^*[p_1^*] = \chi_1^*$  étendue à  $\Omega$  n'admet de solution que si l'image de l'opérateur est contenue dans l'orthogonal du noyau de son adjoint, ce qui se traduit facilement sous la forme d'une intégrale. Mais d'un point de vue mathématique, l'intervalle d'intégration doit être cohérent avec le domaine de définition de l'opérateur  $L_0^*$  et donc, en général, n'est pas l'espace physique tout entier.

L'équation d'amplitude se déduit de (3.46) en explicitant la dépendance de  $\chi_1^*$  en  $p_0^*$ , et donc en  $g_0$ .

### 3.3 Le jet axisymétrique

#### 3.3.1 Problème physique

Comme pour la couche de mélange, il n'est pas difficile de montrer que la composante radiale  $v_0$  du champ des vitesses moyennes est de l'ordre de grandeur du petit paramètre  $\epsilon$ . Il suffit d'intégrer l'équation de continuité et de faire le changement  $\partial/\partial x \mapsto \epsilon\partial/\partial X$ . Dans la suite, on pose  $v_0 = \epsilon v_1$ , avec  $v_1 = O_s(1)$ . La composante longitudinale est notée  $u_0$ . Avec la première composante de l'équation d'Euler pour l'écoulement moyen, on peut aussi montrer que le gradient de pression  $\partial p_0/\partial r$  est de l'ordre de grandeur de  $\epsilon^2$ . Avec ces deux remarques, les équations à résoudre s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \epsilon v_1 \frac{\partial v}{\partial r} + \epsilon v \frac{\partial v_1}{\partial r} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \epsilon^2 u \frac{\partial v_1}{\partial X} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} = O(\epsilon^2), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon v_1 \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon u \frac{\partial u_0}{\partial X} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = O(\epsilon), \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \epsilon v_1 \frac{\partial w}{\partial r} + \epsilon \frac{w v_1}{r} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \epsilon v_1 \frac{\partial p}{\partial r} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{M^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \epsilon \gamma p \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial X} \right] = 0. \quad (3.50)$$

Ces équations correspondent aux linéarisations des équations (2.1) à (2.4) du chapitre 2 autour d'un écoulement moyen axisymétrique ( $\partial/\partial \theta = 0$  et  $w_0 = 0$ ) et permanent. Les termes des membres de droite de (3.47) et (3.48) correspondent aux contributions des fluctuations de masse volumique, qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$- \epsilon^2 \frac{\rho}{\rho_0} \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial X} \right), \quad - \epsilon \frac{\rho}{\rho_0} \left( v_1 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial X} \right), \quad (3.51)$$

et qui exigeraient *a priori* de tenir compte de la linéarisation de l'équation de continuité pour avoir autant d'équations que d'inconnues. Si on peut négliger le premier terme en

limitant les développements asymptotiques à des ordres de grandeurs plus grands que  $\epsilon^2$ , il faut par contre faire une hypothèse supplémentaire pour se débarrasser du second terme. Cette hypothèse consiste à choisir  $u_0$  et  $v_0$  de telle sorte que le gradient de pression  $\partial p_0/\partial X$  soit identiquement nul. Certains auteurs comme Tam et Burton [115] font une autre hypothèse, en s'appuyant sur les travaux expérimentaux de Troutt et McLaughlin [85]: ils négligent la contribution des variations de masse volumique moyenne dans l'équation de continuité pour l'écoulement moyen. Cette dernière hypothèse revient à annuler

$$\epsilon\gamma p \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_1)}{\partial r} + \frac{\partial u_0}{\partial X} \right], \quad (3.52)$$

dans l'équation (3.50). Bien que d'une manière générale cette hypothèse soit discutable (voir par exemple les travaux de Dahl [116] sur les jets coaxiaux), nous l'adopterons pour simplifier les calculs.

Les échelles caractéristiques de longueur, de vitesse et de masse volumique sont données par le rayon du jet, la composante longitudinale de vitesse moyenne et la masse volumique moyenne au point  $x = 0$ . Les échelles de temps et de pression s'en déduisent de la même manière qu'au chapitre 2. À l'extérieur du jet, qu'on désigne par  $r > r_j(X)$ , l'écoulement moyen se réduit à

$$u_0 = 0, \quad v_0 = \epsilon v_\infty(X)/r, \quad (3.53)$$

avec  $v_\infty = O_s(1)$ , où la décroissance en  $1/r$  de  $v_0$  est donnée par l'intégration de l'équation de continuité, qui prend la forme simple  $\partial(\rho_0 r v_0)/\partial r = 0$ . Pour simplifier les calculs, on fait l'hypothèse que la fonction  $v_\infty$  est constante.

### 3.3.2 Développement régulier

Pour  $r > r_j$ , on suit la même démarche que pour la couche de mélange, en posant  $R = \epsilon r$  et en cherchant la solution dans le système de coordonnées  $(X, R)$ . Le système (3.47) à (3.50) se réduit alors à

$$\left[ \frac{\epsilon^2 v_\infty}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \left( \epsilon^2 \frac{v_\infty}{R^2} + i \frac{\omega}{\epsilon} \right) \right] v_n + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p_n}{\partial R} = 0, \quad (3.54)$$

$$\left( \frac{\epsilon^2 v_\infty}{R} \frac{\partial}{\partial R} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) u_n + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p_n}{\partial X} = 0, \quad (3.55)$$

$$\left[ \frac{\epsilon^2 v_\infty}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \left( \epsilon^2 \frac{v_\infty}{R^2} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) \right] w_n + \frac{in p_n}{\rho_\infty R} = 0, \quad (3.56)$$

$$\left( \frac{\epsilon^2 v_\infty}{R} \frac{\partial}{\partial R} - i \frac{\omega}{\epsilon} \right) p_n + \frac{1}{M^2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial (Rv_n)}{\partial R} + \frac{in w_n}{R} + \frac{\partial u_n}{\partial X} \right] = 0, \quad (3.57)$$

où l'indice  $n \in \mathbb{Z}$  se rapporte au nombre d'onde azimutal et  $p_n$ ,  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  sont les coefficients de Fourier des fonctions  $p$ ,  $u$ ,  $v$  et  $w$  dans la direction azimutale (voir équation (2.27) du chapitre 2). Les trois premières relations forment un système linéaire du premier

### 3.3. Le jet axisymétrique

ordre pour  $(u_n, v_n, w_n)$ , où les termes du second membre sont les composantes du gradient de pression  $\nabla p$ . La forme du système fait qu'il est possible de transposer directement les relations qui permettent de passer d'une composante de  $\nabla p$  à l'autre, aux transformées de Fourier  $\hat{u}_n$ ,  $\hat{v}_n$  et  $\hat{w}_n$  (la transformée de Fourier est définie par (3.18) où  $Y$  est remplacé par  $R$ ). On a donc

$$k\hat{w}_n = \frac{n\hat{u}_n}{R}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial R} = ik\hat{v}_n, \quad (3.59)$$

qui impliquent bien évidemment que le rotationnel de la vitesse est nul pour  $R = O_s(1)$  (puisque le rotationnel de  $\nabla p$  est nul), et donc, que les ondes en présence sont bien des ondes acoustiques. À partir de (3.58) et (3.59), il est possible de reformuler l'équation d'énergie (3.57) en une équation pour  $\hat{u}_n$ . Avec le changement de variable  $y = R^2 - \epsilon^4 \rho_\infty M^2 v_\infty^2$ , on peut l'écrire

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial y^2} + \frac{1 + \epsilon i \rho_\infty M^2 \omega v_\infty}{y} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y} - \left( \frac{\lambda^2}{4y\epsilon^2} + \frac{n^2}{4y^2} \right) \hat{u}_n = - \frac{n^2 \epsilon^4 \rho_\infty v_\infty^2 M^2}{4y^2 (y + \epsilon^4 \rho_\infty v_\infty^2 M^2)} \hat{u}_n, \quad (3.60)$$

où  $\lambda$  est définie par (2.33). Il est commode de représenter (3.60) sous la forme

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial y^2} + \frac{1 - 2a}{y} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial y} + \left( b^2 c^2 y^{2c-2} + \frac{a^2 - \nu^2 c^2}{y^2} \right) \hat{u}_n = \chi_n [\hat{u}_n], \quad (3.61)$$

avec  $a = -\epsilon i \rho_\infty M^2 \omega v_\infty / 2$ ,  $b = i\lambda/\epsilon$ ,  $c = 1/2$  et  $\nu = (n^2 + 4a^2)^{1/2}$ . On démontre sans mal que si  $\mathcal{C}(y)$  est une solution de l'équation de Bessel d'ordre  $\nu$ , alors la fonction définie par  $\hat{u}_n(y) = y^a \mathcal{C}(by^c)$  vérifie la version homogène de l'équation (3.61). Vu que  $\chi_0 = 0$ , on en déduit que pour  $n = 0$ , la solution de (3.60) qui vérifie la condition de rayonnement est donnée par

$$\hat{u}_0(y(R), k; \omega) = G(k; \omega) y^{a(\omega)} H_{\pm 2|a(\omega)|}^{(1)} \left( i\lambda_1(\epsilon k; \omega) \sqrt{y(R)}/\epsilon \right). \quad (3.62)$$

Pour  $n$  non nul, on a  $4y^2 \chi_n / n^2 = O(\epsilon^2)$  dans le domaine  $y > O_s(\epsilon^{2-1/\alpha})$ , avec  $\alpha > 1$ , de sorte qu'une approximation de la solution de (3.60) est donnée par

$$\hat{u}_n(y(R), k; \omega) = G(k; \omega) y^{a(\omega)} H_{\nu(n; \omega)}^{(1)} \left( i\lambda_1(\epsilon k; \omega) \sqrt{y(R)}/\epsilon \right) + O(\epsilon^2), \quad (3.63)$$

où  $G$  est une fonction arbitraire, qu'on met sous la forme de l'intégrale (3.25) dans laquelle  $g$  est une fonction inconnue.

Le champ de pression se déduit de la connaissance de  $\hat{u}_n$  en considérant l'équation (3.55) qui permet d'écrire  $\hat{p}_n$  en fonction de  $\hat{u}_n$ ; la détermination de la transformée inverse de  $\hat{p}_n$  se faisant de la même manière que pour la couche de mélange. On pose donc  $r_\alpha = R/\epsilon^{1-1/\alpha}$ , avec  $\alpha > 1$  et on commence par chercher un développement asymptotique de (3.63) pour  $r_\alpha = O_s(1)$ . On a immédiatement  $\sqrt{y(R)} = R[1 + O(\epsilon^4)]$ , ce qui signifie que dans le domaine intermédiaire, il est possible de raisonner sur le développement

asymptotique de la fonction de Hankel (en tout cas, tant qu'on a  $|\lambda_1|\epsilon^{-1/\alpha} \rightarrow \infty$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ ). On voit en particulier que le cas  $n = 0$  se distingue par l'apparition d'un terme supplémentaire, en  $O(\epsilon H_0^{(1)})$ , et dont il faut tenir compte si on se limite à l'ordre de  $O(\epsilon^2)$ . Ceci est dû au fait que l'ordre de grandeur de  $\nu$  dépend de  $n$  ( $\nu = \delta_{n0}O_s(1) + O_s(\epsilon)$ ). Le développement en série de Taylor de la fonction de Hankel au voisinage de  $n$  permet ensuite d'arriver au résultat. Il reste à calculer la transformée de Fourier inverse

$$p_n(r_\alpha, X; \omega) = \int_{F_K} \frac{\rho_\infty \omega}{K \epsilon^2} \left( 1 + i \frac{\epsilon^{1+2/\alpha} v_\infty}{\omega r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \right) \hat{u}_n(y(r_\alpha), k; \omega) e^{iKX/\epsilon} dK, \quad (3.64)$$

où  $\hat{u}_n$  doit être remplacé par son développement asymptotique. Pour l'obtenir, il suffit d'utiliser les développements en séries de Taylor classiques et de développer la fonction inconnue  $g$  en série de puissances de  $\epsilon$ . Si  $\lambda = O_s(1)$ , la phase de l'intégrale (3.64) a la même expression que pour le cas  $y < y_i$  de la couche de mélange. En appliquant une nouvelle fois la méthode du col, on arrive à

$$\begin{aligned} \text{Dev}_{r_\alpha} p_n(r_\alpha, X; \omega) &\sim \{g_0(X; \omega) - \epsilon \ln(\epsilon) g_0(X; \omega) i \rho_\infty M^2 \omega v_\infty + \\ &\epsilon \left[ F_1 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) + F_2 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) \frac{1}{H_n^{(1)}(i\lambda(\bar{K}; \omega))} \frac{dH_n^{(1)}(i\lambda(\bar{K}; \omega))}{d(r_\alpha \epsilon^{-1/\alpha})} \right] \\ &+ O(\epsilon^2 \ln \epsilon) \} H_n^{(1)}(i\lambda(\bar{K}; \omega)) \exp \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(X; \omega) ds, \end{aligned} \quad (3.65)$$

où les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont données par les expressions

$$\begin{aligned} F_1 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) &= g_1(X; \omega) - \frac{i}{2} \left( \frac{k(X; \omega)}{\lambda(\bar{K}; \omega)} \right)^2 \left[ \frac{r_\alpha^2}{\epsilon^{2/\alpha}} + \left( \frac{n}{\lambda(\bar{K}; \omega)} \right)^2 \right] \frac{dk}{dX}(X; \omega) \\ &\frac{(k_0(\omega))^2 v_\infty}{\omega} \left[ \frac{\pi}{2} \delta_{n0} - i \ln \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}} \right) \right] g_0(X; \omega), \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} F_2 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) &= \frac{i r_\alpha \epsilon^{-1/\alpha}}{2[\lambda(\bar{K}; \omega)]^4} \left\{ [(k_0(\omega))^2 + (k(X; \omega))^2] g_0(X; \omega) \frac{dk}{dX}(X; \omega) \right. \\ &\left. - 2(\lambda(\bar{K}; \omega))^2 k(X; \omega) \frac{dg_0}{dX}(X; \omega) \right\} + \frac{i v_\infty \epsilon^{1/\alpha}}{\omega r_\alpha} g_0(X; \omega), \end{aligned} \quad (3.67)$$

avec  $\bar{K} = k(X; \omega)$ . Puisque le point selle est là encore donné par le mode  $k$  lorsque  $X$  varie, on peut étendre les conclusions obtenues pour la couche de mélange (dans la région  $y < y_i$ ) à l'extérieur du jet. En particulier, une onde d'instabilités de vitesse de phase localement subsonique pour tout  $X$  peut, sous certaines conditions, rayonner de l'énergie dans le champ lointain. À l'ordre dominant, il suffit que *l'image de l'approximation WKBJ sur  $\mathbb{R}$  par la transformée de Fourier soit non nulle dans l'intervalle  $|K| < \epsilon k_0$* . C'est bien évidemment le cas si la vitesse de phase de l'onde d'instabilités atteint localement celle du son au point où  $k_i$  s'annule. Mais cela peut aussi être le cas lorsque la vitesse de phase est localement inférieure à celle du son, pour tout  $X$ , comme le montrent les observations de McLaughlin *et al.* [117] dans un jet supersonique, avec  $M = 1.3$ . Réciproquement, on

peut aussi imaginer que des ondes localement supersoniques dans des régions où le taux d'amplification (ou d'amortissement) est grand ne rayonnent pas d'énergie. Pour pouvoir conclure, il est important de connaître l'évolution des modes sur la surface de Riemann  $R_\lambda$  lorsque  $X$  varie, ce qui revient finalement à connaître l'ordre dominant de l'évolution d'amplitude, et donc l'échelle de  $G(k; \omega)$  dans la transformée de Fourier inverse.

Si le module de  $\lambda$  tend vers zéro avec  $\epsilon$ , il est possible que le développement asymptotique (3.65) ne soit plus ordonné, puisque les termes d'ordre  $\epsilon$  font intervenir explicitement la fonction  $\lambda$ . La dépendance radiale du champ proche peut alors présenter une structure plus complexe, qui dépend de  $n$  par l'intermédiaire d'un point tournant (il suffit de considérer le changement  $\mathcal{C}(z) \mapsto z^{1/2}\mathcal{C}(z)$  dans (3.60)). Nous reviendrons sur cette remarque dans le chapitre 4. Pour l'instant, on réduit l'analyse à la région  $\lambda = O_s(1)$  de  $R_\lambda$ . Dans ces conditions, les fonctions de jauge adaptées à la description des ondes d'instabilités sont données par  $\delta_0^* = 1$ ,  $\delta_1^*(\epsilon) = \epsilon \ln \epsilon$  et  $\delta_2^*(\epsilon) = \epsilon$ .

### 3.3.3 Développement local

Comme pour la couche de mélange, le développement local est obtenu en adoptant le formalisme WKBJ dans le domaine  $\Omega^*$ . La solution est cherchée sous la forme (3.5) dans laquelle  $\phi_m^*$  est remplacé par  $\phi_{nm}^*$  où l'indice  $n$  est le nombre d'onde azimutal et  $m$  se rapporte à l'indice du développement asymptotique. En substituant les développements asymptotiques aux fonctions inconnues dans le système différentiel (3.47) à (3.50), on peut se ramener à une équation du second ordre pour la pression,

$$L_0^*[p_{nm}^*] = \frac{\partial^2 p_{nm}^*}{\partial r^2} + \left( \frac{2k}{\omega - ku_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial p_{nm}^*}{\partial r} - \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) p_{nm}^* = \chi_m^*, \quad (3.68)$$

où  $\lambda$  est la fonction algébrique définie au chapitre 2. Le fait d'avoir pris  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon \ln \epsilon$  implique que le second membre  $\chi_m^*$  est nul pour  $m \leq 1$ . À l'extérieur du jet, l'équation (3.68) se simplifie en

$$L_0^*[p_{nm}^*] = \frac{\partial^2 p_{nm}^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{nm}^*}{\partial r} - \left( \lambda^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) p_{nm}^* = 0, \quad m \leq 1, \quad (3.69)$$

dont la solution peut facilement s'exprimer en termes de fonctions de Hankel de première et seconde espèces (voir chapitre 2). Ainsi, pour tout  $k$  contenu dans  $R_\lambda$  privé des voisinages des points de branchement  $\pm k_0$ , on a la solution générale

$$p_{nm}^*(r, X; \omega) = A_m(X; \omega) \Phi_1(r, X; \omega) + B_m(X; \omega) \Phi_2(r, X; \omega) \quad (3.70)$$

où  $A_m$  et  $B_m$  sont deux fonctions arbitraires et les fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont normalisées de la façon suivante :

$$\Phi_j(r, X; \omega) \rightarrow H_n^{(j)}(i\lambda(k; \omega)r), \quad (3.71)$$

pour  $r \rightarrow \infty$ . Comme on peut le vérifier facilement, le changement de cette normalisation laisse invariant le résultat global de l'approximation à l'ordre de la perturbation. La seconde condition consiste à exiger que  $p_{nm}^*$  soit borné lorsque  $r$  tend vers zéro.

Pour  $m > 1$ , le second membre  $\chi_m^*$  n'est pas nul. En passant au système du premier ordre associé à (3.68), on peut exprimer la solution  $p_{n2}^*$  sous la forme générale

$$\begin{aligned} p_{n2}^*(r, X; \omega) = & \left[ A_2(X; \omega) - \int_{r_0}^r \frac{\chi_2^*(s, X; \omega) \Phi_2(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds \right] \Phi_1(r, X; \omega) \\ & + \left[ B_2(X; \omega) + \int_{r_0}^r \frac{\chi_2^*(s, X; \omega) \Phi_1(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds \right] \Phi_2(r, X; \omega). \end{aligned} \quad (3.72)$$

où  $W$  est le Wronskien de  $\Phi$  et  $\Phi_2$  et  $r_0$  est arbitraire. Bien que les solutions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  ne soient pas connues explicitement, le calcul de  $W$  ne pose pas de problème particulier. Il faut juste se souvenir d'un résultat classique d'analyse différentielle qui établit que  $W$  est la solution d'une équation différentielle de la forme  $\partial W / \partial r = AW$ , où  $A$  est la trace de la matrice du système du premier ordre associé à (3.68). L'intérêt pratique est qu'on peut en déduire le logarithme de  $W$  sous la forme de l'intégrale de  $A$ , les constantes d'intégration s'obtenant en se plaçant à l'extérieur du jet et en tenant compte de la normalisation (3.71). D'où

$$W(r, X; \omega) = -\frac{4i\rho_0(r; X)[\omega - ku_0(r; X)]^2}{\pi r \rho_\infty \omega^2}. \quad (3.73)$$

Pour connaître complètement la solution à l'ordre d'approximation de  $O(\epsilon^2)$ , il ne reste plus qu'à procéder au raccordement des développements local et régulier.

### 3.3.4 Raccordement des développements local et régulier

La procédure est similaire à celle qui a été développée dans la section 3.2.4. On se place dans le sous-domaine  $\Omega_\alpha$  en faisant le changement de variable  $r = r_\alpha / \epsilon^{1/\alpha}$  et on applique la règle de raccord (3.41), d'abord pour  $m = q = 0$  et ensuite pour  $m = q = 1$ .

Le premier cas conduit immédiatement à  $g_0 = A_0$  et  $B_0 = 0$ . Le raccord à l'ordre suivant est tout aussi simple et conduit à  $A_1 = -i\rho_\infty M^2 \omega v_\infty g_0$  et  $B_1 = 0$ . L'équation d'amplitude pour  $A_0$  s'obtient en procédant au raccord des termes en  $O(\epsilon)$ . On a effectivement les relations

$$\begin{aligned} A_2(X; \omega) - \int_{r_0}^{r_\alpha / \epsilon^{1/\alpha}} \frac{\chi_2^*(s, X; \omega) \Phi_2(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds = & F_1 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) + \\ F_2 \left( \frac{r_\alpha}{\epsilon^{1/\alpha}}, X; \omega \right) & \frac{1}{H_n^{(1)}(i\lambda(\bar{K}; \omega))} \frac{dH_n^{(1)}(i\lambda(\bar{K}; \omega))}{d(r_\alpha \epsilon^{-1/\alpha})}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont définis par (3.66) et (3.67), et

$$B_2(X; \omega) + \int_{r_0}^{r_\alpha / \epsilon^{1/\alpha}} \frac{\chi_2^*(s, X; \omega) \Phi_1(s, X; \omega)}{W(s, X; \omega)} ds = 0. \quad (3.75)$$

L'équation d'amplitude s'obtient à partir de (3.75), en explicitant la dépendance de  $\chi_2^*$  en  $A_0$  et en remarquant que  $B_2$  doit être nul, car indépendant de  $r_\alpha$ . Pour  $r > r_j$ , les fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  peuvent s'exprimer en termes de fonctions de Hankel. Les formules



d'intégration<sup>6</sup> proposées par Watson [53] et Gradshtein et Ryzhik [35] permettent ensuite de déterminer la contribution de l'intégrale à l'intervalle  $r_j \leq r \leq r_\alpha/\epsilon^{1/\alpha}$ . On arrive ainsi à l'équation différentielle

$$M(X; \omega) \frac{dA_0}{dX} + N(X; \omega) A_0 = 0, \quad (3.76)$$

où  $M$  et  $N$  sont donnés par des expressions qui mettent en jeu le comportement radial des ondes d'instabilités au sein du jet. De l'équation (3.76) on déduit que la dépendance de  $A_0$  en  $X$  est donnée par l'exponentielle de l'intégrale de la fonction  $-N/M$ , de 0 à  $X$ . La fonction  $M$  est définie par l'expression

$$M = \frac{kr_j^2}{\rho_\infty \omega} \left[ (H_n^{(1)}(i\lambda r_j))^2 - H_{n+1}^{(1)}(i\lambda r_j) H_{n-1}^{(1)}(i\lambda r_j) \right] + \int_0^{r_j} \frac{\omega r}{\omega_u} \left[ \rho_0 u_0 (\Phi_1^v)^2 - M^2 u_0 \Phi_1^2 - \frac{\omega \Phi_1 \Phi_1^u}{\omega_u} - \frac{nu_0 \Phi_1 \Phi_1^w}{\omega_u r} - \frac{k \Phi_1^2}{\rho_0 \omega_u} \right] dr, \quad (3.77)$$

et  $\omega_u = \omega - ku_0$ . La fonction  $N$ , plus longue à exprimer, est donnée par

$$N = \frac{i\lambda v_\infty}{4\rho_\infty \omega^2} \left( H_{n-1}^{(1)}(i\lambda r_j) - H_{n+1}^{(1)}(i\lambda r_j) \right)^2 + M^2 v_\infty (H_n^{(1)}(i\lambda r_j))^2 + \frac{r_j^2}{2\rho_\infty \omega} \frac{dk}{dX} \left[ (H_n^{(1)}(i\lambda r_j))^2 - H_{n+1}^{(1)}(i\lambda r_j) H_{n-1}^{(1)}(i\lambda r_j) \right] + \frac{kr_j^2}{\rho_\infty \omega \lambda} \frac{dk}{dX} \frac{d\lambda}{dk} H_{n+1}^{(1)}(i\lambda r_j) H_{n-1}^{(1)}(i\lambda r_j) + \int_0^{r_j} \frac{\omega r}{\omega_u} \left[ \rho_0 v_1 \Phi_1^v \frac{\partial \Phi_1^v}{\partial r} + \rho_0 (\Phi_1^v)^2 \frac{\partial v_1}{\partial r} + \rho_0 u_0 \Phi_1^v \frac{\partial \Phi_1^v}{\partial X} - M^2 v_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - M^2 u_0 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} - \frac{\omega}{\omega_u} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1^u}{\partial X} - \frac{nv_1}{r\omega_u} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1^w}{\partial r} - \frac{nv_1}{\omega_u r^2} \Phi_1 \Phi_1^w - \frac{nu_0}{\omega_u r} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1^w}{\partial X} - \frac{kv_1}{\omega_u} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1^u}{\partial r} - \frac{k}{\omega_u} \frac{\partial u_0}{\partial X} \Phi_1 \Phi_1^u - \frac{k}{\rho_0 \omega_u} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \right] dr. \quad (3.78)$$

Dans les deux expressions (3.77) et (3.78) l'intervalle d'intégration contourne les points critiques lorsque cela est possible (voir Le Dizès *et al.* [82]). Sinon, il faut procéder à une approche visqueuse. D'un point de vue numérique, cette opération soulève un certain nombre de difficultés qui trouvent leur origine dans l'existence d'un ensemble de modes distribués sur une ligne issue du point défini par  $k = \omega$ , c'est-à-dire du point critique obtenu en prenant  $u_0 = 1$ . L'image discrète de cette ligne est montrée sur les figures 3.3 (e) et (f) lorsque le nombre de Reynolds vaut  $Re = 10^4$ . Il est probable que cette ligne corresponde à la partie continue du spectre de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld compressible (voir Salwen et Grosch [118], [119]). En considérant le modèle non visqueux, on voit que cette ligne s'identifie au demi-axe réel  $k_r > 0$  pour  $\omega_i = 0$  (figures 3.3 (a) et (c)) et s'en

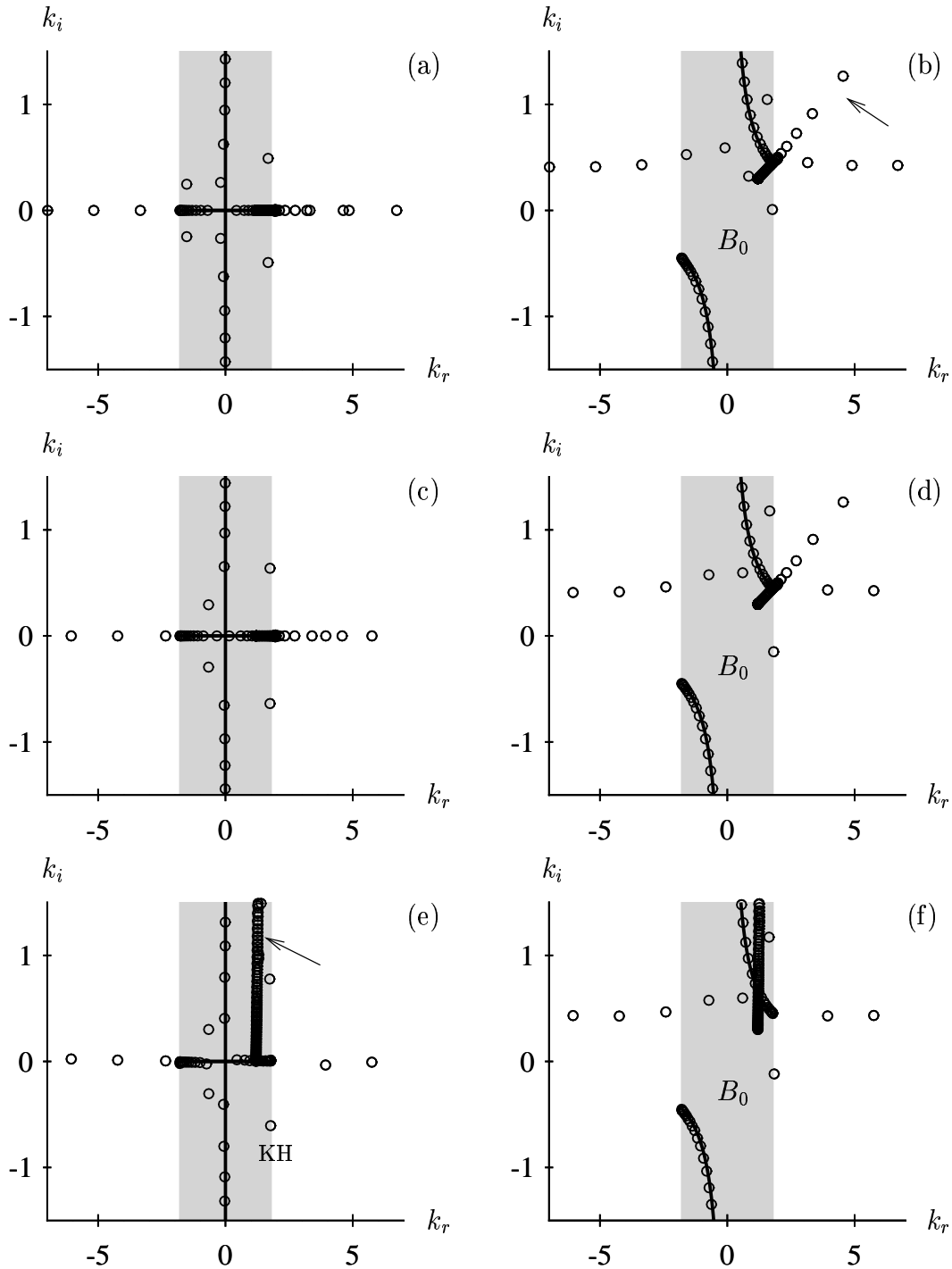


FIG. 3.3 – Spectre des équations discrétisées. Jet froid,  $M = 2.0$ ,  $\omega_r = 1.2$ . (a) :  $\omega_i = 0.0$  et  $n = 0$  ; (b) :  $\omega_i = 0.3$  et  $n = 0$ . (c) et (e) :  $\omega_i = 0.0$  et  $n = 1$  ; (d) et (f) :  $\omega_i = 0.3$  et  $n = 1$ . (a), (b), (c) et (d) : approximation non visqueuse. (e) et (f) :  $Re = 10^4$ . Les coupures de  $\lambda$  sont représentées en lignes épaisses. La flèche sur les figures (b) et (e) montre le discrétisé de la branche visqueuse.

éloigne lorsque  $Re$  décroît. Le problème posé par l'approche visqueuse est que pour  $Re$  grand, la ligne attachée au point  $\omega = k$  est proche du demi-axe réel et peut dégénérer en un nuage de valeurs propres si le nombre de points de collocation n'est pas suffisamment grand, "polluant" du même coup le voisinage de la courbe marginale. Ce problème ne se pose pas lorsque l'approche non visqueuse est utilisée puisque la déformation du contour d'intégration induit celle de la ligne en question, laissant invariante la distribution des valeurs propres d'origine physique. Les spectres de la figure 3.3 ont été obtenus en prenant un intervalle d'intégration réel et suffisamment grand pour appliquer la méthode proposée par Bridges et Morris [78].

Dans (3.77) et (3.78), les fonctions  $\Phi_1^u$ ,  $\Phi_1^v$  et  $\Phi_1^w$  se déduisent de  $\Phi_1$  par les équations d'Euler linéarisées qu'il faut prolonger dans le plan complexe si  $k_i > 0$  pour  $k \in K^+$ . On écrit formellement

$$\Phi_1^u = \frac{1}{\omega_u} \left[ \frac{k\Phi_1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0(\omega_u)} \frac{\partial u_0}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right], \quad \Phi_1^v = -\frac{i}{\rho_0(\omega_u)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad \Phi_1^w = \frac{n\Phi_1}{\rho_0 r(\omega_u)}, \quad (3.79)$$

où les fonctions  $\rho_0$  et  $u_0$  sont supposées holomorphes dans le domaine limité par l'axe réel et le contour déformé. Remarquons que lorsqu'il s'agit d'un calcul visqueux, cette opération n'est pas nécessaire puisque toutes les fonctions sont obtenues en inversant un système non homogène (voir chapitre 2).

La solution à l'ordre dominant est ainsi complètement déterminée, à une constante multiplicative près. Par construction, elle est uniformément valable sur  $\Omega$  et s'identifie à l'approximation WKBJ pour  $r = O(1)$ . On peut donc utiliser l'approche numérique du chapitre 2 pour déterminer les caractéristiques locales des ondes d'instabilités. Pour évaluer la contribution des effets non-parallèles, il faut en plus calculer l'évolution des fonctions propres et de leurs dérivées par rapport à  $X$  et  $r$ . Or, la plupart des auteurs qui se sont intéressés de près au sujet se sont limités à l'ordre dominant, en prenant  $A_0$  constant. C'est le cas de Tam *et al.* [120], de Dahl [116] pour des jets coaxiaux et Morris et Bhat [121] pour des jets de section elliptique. On retrouve encore cette hypothèse dans les travaux de Tam et Chen [93] qui étendent leur analyse à une large gamme de pulsations  $\omega$ . Si cette hypothèse paraît fondée lorsque la pulsation est de l'ordre de grandeur de l'unité, ce n'est plus le cas pour  $\omega \rightarrow 0$ . Cette remarque relativise la pertinence de certains résultats publiés. Et puis, on peut mentionner les observations expérimentales de Moore qui, au vu des comparaisons avec les calculs de Michalke [122], indiquent qu'une théorie aux échelles multiples n'est pas suffisante pour expliquer les écarts à l'approximation localement parallèle. En définitive, il n'a pas été possible de procéder à des validations numériques satisfaisantes, pour plusieurs raisons, qui tiennent autant à l'absence de publications<sup>7</sup> qu'à certains problèmes d'analyse numérique que pose l'utilisation d'une méthode de collocation spectrale à plusieurs domaines. Par exemple, le calcul montre que les fonc-

---

6. En pratique, il s'agit essentiellement d'appliquer l'intégrale de Lommel sous la forme donnée en annexe B et de mettre à profit les relations de récurrence qui définissent les fonctions cylindriques.

7. Des comparaisons avec des écoulements incompressibles sont possibles (voir Crighton et Gaster [3] et Strange et Crighton [5] pour le jet axisymétrique ou encore Garg [4] pour le jet de Bickley, mais ne permettent pas de conclure pour  $M > 1$ ).

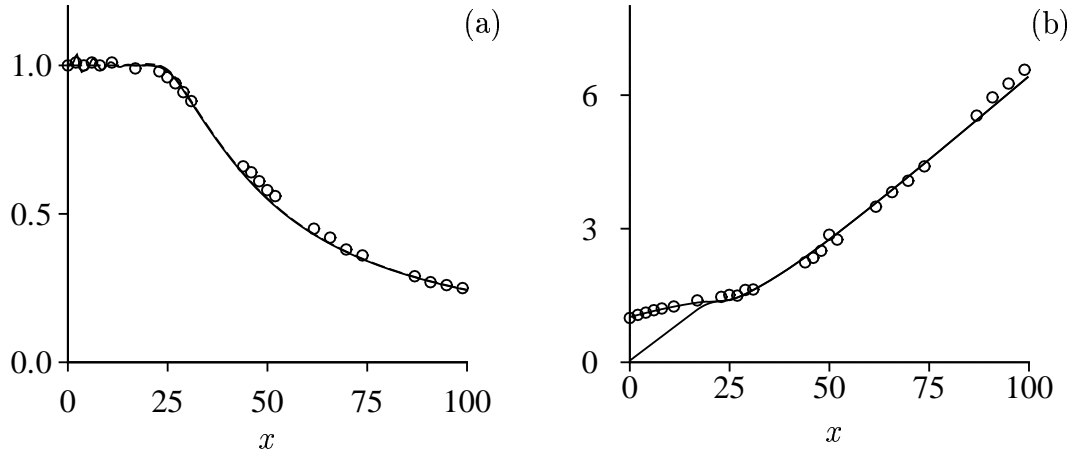


FIG. 3.4 – Évolution des paramètres  $u_c$ ,  $b$  et  $h$  pour un jet froid et  $M = 2.0$ . (a) : Vitesse longitudinale moyenne  $u_c$ ; (b) :  $b + h$  et  $b$ . Les cercles donnent les relevés expérimentaux (pour  $b + h$ ) d’Eggers [124].

tions dérivées obtenues en inversant<sup>8</sup> l’opérateur  $L_0^*$  varient fortement au voisinage du point d’inflexion, ce qui génère des erreurs importantes dans l’estimation numérique de  $N$  et  $M$  dans (3.76). L’utilisation d’un schéma aux différences finies n’a pas permis de lever le problème. Une raison est que le pas d’intégration dans la direction  $X$  n’est pas constant et par conséquent la précision sur le résultat non plus. Finalement, nous nous limiterons à l’ordre dominant en prenant  $A_0 = 1$ .

## 3.4 Le jet froid à $M = 2.0$

### 3.4.1 Écoulement moyen

Les formules proposées dans le chapitre 2 sont insuffisantes pour décrire l’écoulement moyen au delà du cône potentiel ( $x > x_c$ ). Toutefois, le développement du jet dans la direction  $x$  peut encore être modélisé avec les équations (2.80), (2.81) et (2.82) et donc se ramener à la détermination des trois paramètres  $b$ ,  $h$  et  $u_c$  sous la forme de fonctions de  $x$ . Dans cette section, ces fonctions sont issues des résultats des calculs de Lupoglazoff *et al.* [123], menés pour un écoulement de jet froid analogue à celui d’Eggers [124]. La figure 3.4 donne les évolutions obtenues pour  $h(x)$ ,  $b(x)$  et  $u_c(x)$ . Pour  $x < x_c$ , les valeurs de  $h$  et  $b$  minimisent l’écart (au sens de la norme  $L^2$ ) du profil des vitesses  $u_0$  défini par (2.80) avec les résultats numériques de Lupoglazoff *et al.* (une formule de quadrature élémentaire

8. La méthode est classique et souvent utilisée pour des écoulements incompressibles. La fonction  $dk/dX$  s’obtient à partir d’une condition de solvabilité pour l’opérateur  $\partial L_0^*/\partial X$ , permet de déterminer le second membre de  $L_0^*[\partial\Phi_1/\partial X] = S$  et donc, la fonction  $\partial\Phi_1/\partial X$  (à un élément du noyau de  $L_0^*$  près).

exprimée sur une grille non régulière permet de calculer l'intégrale qui intervient dans le choix de la norme). La vitesse moyenne sur l'axe de symétrie du jet,  $u_c$ , est prise égale à 1. Pour  $x > x_c$ , le comportement de  $u_c$  est approché par une courbe Spline cubique et  $b$  est obtenu à partir des équations de conservation d'énergie mécanique (voir Tam [87]) et de conservation du flux de quantité de mouvement (2.82). En dérivant cette dernière par rapport à  $x$ , on arrive à un système de deux équations à deux inconnues  $db/dx$  et  $du_c/dx$ . Sa résolution permet d'avoir  $b$  sous la forme

$$b^2 = -2A\rho_\infty \ln 2 \left[ \ln |Au_c^2 + Bu_c - 1| - \frac{B}{D} \ln \left| \frac{(2Au_c + B - D)(B + D)}{(2Au_c + B + D)(B - D)} \right| \right]^{-1}, \quad (3.80)$$

avec  $A = (\gamma - 1)\rho_\infty M^2/2$ ,  $B = 1 - \rho_\infty - A$  et  $D = \sqrt{B^2 + 4A}$ . Que ce soit en cherchant à minimiser l'écart entre le profil gaussien (avec  $h = 0$ ) et les résultats numériques ou en utilisant la relation (3.80), les valeurs de  $b$  obtenues sont quasiment identiques. L'écoulement moyen ne dépend donc plus que d'un seul paramètre  $u_c$  si  $x > x_c$ . Le raccord à la partie  $x < x_c$  est obtenu avec des Splines cubiques pour  $u_c$ ,  $b$  et  $h$ , valables au voisinage de  $x_c$ , ce qui permet d'avoir un écoulement régulier, comme l'exige la théorie. Ajoutons que d'après Tam [87], le fait de se donner un écoulement moyen proche des mesures expérimentales permet de tenir compte, d'une certaine manière, des effets non-linéaires associés au développement des ondes d'instabilités.

Un point de désaccord avec les résultats d'Eggers [124] est rapidement apparu en remarquant que les résultats numériques obtenus par Lupoglazoff *et al.* donnent un nombre de Mach en sortie de tuyère de l'ordre de  $M = 2.0$ , alors que les mesures d'Eggers indiquent plutôt  $M = 2.2$ . Cette différence peut s'expliquer par le fait que le jet calculé n'est pas parfaitement adapté et donc, sujet à des fluctuations engendrées par un système d'ondes de chocs dans le cône potentiel. Pour être cohérent avec l'écoulement moyen considéré, il est choisi de prendre  $M = 2.0$  et de ne pas tenir compte de ces fluctuations. Cette valeur constitue approximativement la moyenne de  $M$  dans le cône potentiel, sur l'axe de symétrie du jet.

### 3.4.2 Résultats numériques

Pour résumer, le cas considéré dans cette section est un jet axisymétrique, froid, tel que  $M = 2.0$  et issu d'un calcul RANS. La méthode de collocation spectrale à plusieurs domaines développée dans le chapitre 2 est mise à profit pour obtenir le comportement de  $k \in K^+$  sur la surface de Riemann  $R_\lambda$  lorsque  $x$  et  $\omega$  varient. Le calcul des intégrales (3.25) et (3.60) est direct, en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide. Les éventuelles erreurs dues à la discrétisation de la fonction de Hankel sont discutées par Veronesi et Maynard [125] et par Williams et Maynard [126].

#### Approximation localement parallèle

Rappelons que dans le chapitre 2, il a été démontré que pour les jets froids tels que  $M < 2.5$ , les ensemble de modes  $K_1^+$  et  $K_2^+$  sont vides. Ce résultat est une conséquence

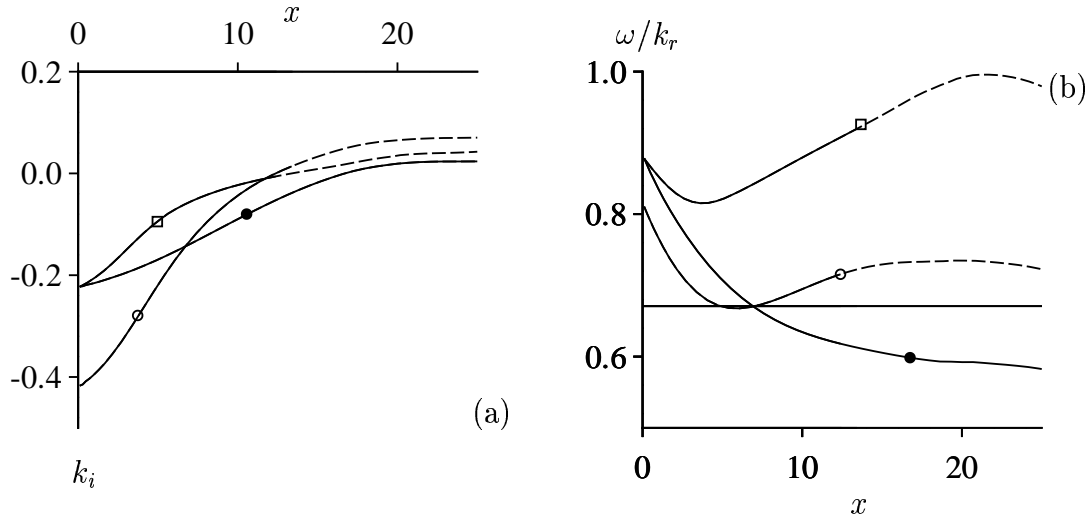


FIG. 3.5 – Chemins décrits par les modes du jet froid, avec  $M = 2.0$ , lorsque  $x$  varie. (a) : Taux de croissance local des ondes de Kelvin-Helmholtz. (b) : Vitesse de phase locale.  $\circ$  :  $n = 1$  et  $\omega = 0.6$  ;  $\bullet$  :  $n = 1$  et  $\omega = 0.3$  ;  $\square$  :  $n = 0$  et  $\omega = 0.6$ . Le prolongement analytique sur le second feuillet de  $R_\lambda$  est indiqué en tirets et les symboles de figure (b) désignent les abscisses pour lesquelles le taux d'amplification  $-k_i$  s'annule. La droite horizontale est définie par  $k = k_0$  (soit  $\omega/k_r = 1/(\sqrt{\rho_\infty}M)$ ).

de la condition (2.54) de non rencontre des domaines  $B_0(\omega; \infty)$  et  $B_0(\omega; 0)$ . Les seuls modes de  $K^+$  restant sont les modes de  $KH$ , de nature hydrodynamique, et ceux de  $K_0^+$  que nous allons mettre de côté pour l'instant. Les modes de  $KH$  du demi-espace  $k_i < 0$  correspondent à des ondes amplifiées et sont donc, susceptibles de rayonner de l'énergie de manière significative. Pour que ce soit le cas, il faut que l'image de l'approximation WKB sur  $\mathbb{R}$  par la transformée de Fourier soit non nulle pour les nombres d'ondes plus petits que  $k_0$  en valeur absolue. La figure 3.5 montre que c'est le cas pour  $n \leq 1$  et  $\omega = 0.6$ . La vitesse de phase au point où l'onde est d'amplitude maximale ( $k_i = 0$ ) est supersonique, si bien que la condition suffisante de rayonnement est vérifiée. La contribution relative des deux ondes d'instabilités dépend de l'amplitude de ces dernières à la sortie de la tuyère. Si le jet n'est pas adapté, il est possible que l'interaction des ondes d'instabilités avec le système d'ondes de chocs sélectionne des fréquences selon un mécanisme qui a été abordé dans le chapitre 2. Les instabilités marginalement absolues pourraient alors jouer un rôle central, en permettant le retour de l'information à la sortie de la tuyère. Pour  $\omega = 0.3$ , la condition suffisante n'est pas vérifiée pour  $n = 1$ . Toutefois, la modulation d'amplitude à grande échelle entraîne l'existence de composantes de vitesse de phase supersonique ( $|k_r| < k_0$ ) dans l'intégrale (3.60), ce que montre la figure 3.6. Pour ces composantes, la fonction algébrique  $\lambda$  est imaginaire pure (car  $\omega_i = 0$ ) et l'ordre dominant du comportement asymptotique de la fonction de Hankel dans (3.63) conduit bien à une onde divergente.

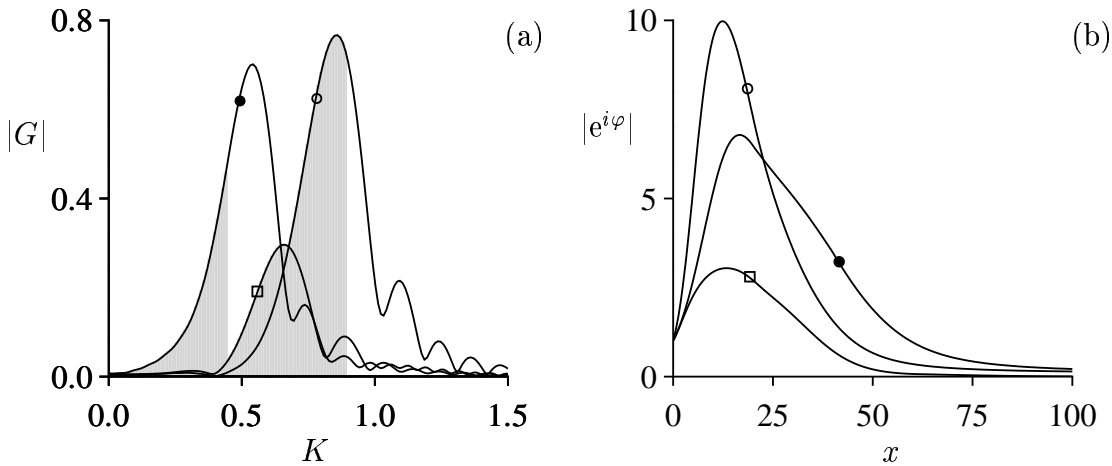


FIG. 3.6 – (a) : Module de la densité spectrale  $G$ , définie par (3.82), en fonction du nombre d'onde  $K$ , considéré comme la variable d'intégration dans la transformée inverse ; (b) : module de l'amplification totale  $\exp(i\varphi)$ , où  $\varphi$  est la phase dans l'approximation WKBJ. Les symboles répondent aux mêmes définitions que la figure 3.5. Jet froid,  $M = 2.0$ . Les parties grisées représentent les composantes de vitesse de phase supersonique,  $k < k_0$ .

### Structure du champ proche

Les figures 3.7 et 3.8 permettent de comparer la structure du champ proche avec les résultats obtenus par Bailly [127], [128], en excitant les Équations d'Euler Linéarisées avec un forçage monochromatique, de pulsation  $\omega$ . Pour des détails sur la méthode employée, le lecteur peut se reporter à [128]. Les lignes représentées correspondent aux iso-valeurs de l'intensité rms des fluctuations de pression, c'est-à-dire aux iso-valeurs de

$$P(x, r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(K; \omega) H_n^{(1)}(i\lambda(K; \omega)r) \exp[i(Kx + n\theta)] dK \right|, \quad (3.81)$$

où  $G$  s'exprime sous la forme de la transformée de Fourier,

$$G(K; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(\epsilon x; \omega) \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^{\epsilon x} k(s; \omega) ds - iKx \right] dx, \quad (3.82)$$

avec  $A_0 = 1$ . Vu que les relations (3.81) et (3.82) donnent le champ de pression à une constante multiplicative près, il est nécessaire de fixer cette dernière en identifiant  $P$  à la valeur obtenue par Bailly, en un point de l'espace physique. Ce point est indiqué par un cercle sur les figures 3.7 et 3.8.

Pour  $\omega = 0.6$ , on retrouve la forme typique des iso-pression associées au rayonnement par ondes de Mach. Il est important de remarquer que la position du maximum d'amplitude n'a rien à voir avec celle d'éventuelles sources acoustiques. Le rayonnement d'énergie

est un processus global, qui s'appuie sur les caractéristiques locales des ondes d'instabilités, mais aussi sur la modulation d'amplitude, cette dernière information s'avérant décisive pour le cas de la pulsation  $\omega = 0.3$ . Les comparaisons avec les résultats de Bailly ne sont pas très concluantes, en particulier pour le cas  $\omega = 0.3$ . Concernant ce dernier cas, le fait que la vitesse de phase de l'onde d'instabilité de Kelvin-Helmholtz soit subsonique au point d'amplitude maximale indique que le comportement radial des fonctions propres est exponentiellement décroissant pour tout  $x$ , et donc, que l'amplitude des fluctuations est une fonction rapidement décroissante de  $r$ , pour  $r = O(1)$  (ici  $\epsilon$  est de l'ordre de 0.06). Il faut cependant replacer cet argument dans le cadre de l'approximation WKBJ, qui pour être légitime, nécessite que la longueur d'onde des ondes d'instabilités soit suffisamment petite devant l'échelle de longueur caractéristique imposée par l'écoulement moyen, hypothèse mise en défaut pour  $\omega = 0.3$ .

D'autres comparaisons, cette fois avec les résultats expérimentaux de Seiner *et al.* [129] pour  $\omega = 1.2$ , montrent une bonne prédiction du champ de pression proche dans le secteur angulaire  $0 < \chi < \pi/4$ , mais ne permettent pas d'expliquer la présence d'un lobe supplémentaire dans le secteur  $\pi/4 < \chi < \pi/2$ . Les mesures de champ proche de Seiner *et al.* [107] apportent une réponse partielle en montrant que la présence de ce second lobe est d'autant plus marquée que l'intensité des ondes de choc au sein du jet est grande, ce qui suggère que l'origine du phénomène pourrait être due à l'interaction des ondes d'instabilités avec le système d'ondes de chocs.

### Champ lointain et points de branchement

Toutes les composantes de vitesse de phase supersonique dans la transformée de Fourier inverse ne rayonnent pas forcément de l'énergie en champ lointain. Ce qui compte, c'est la contribution des points de phase stationnaire. En coordonnées sphériques  $(\eta, \chi, \theta)$ , avec  $x = \eta \cos \chi$  et  $r = \eta \sin \chi$ , la partie dominante du champ lointain est donnée par

$$p_n(\eta, \chi; \omega) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} G(K; \omega) H_n^{(1)}(i\lambda_1(K; \omega) \eta \sin \chi) e^{iK\eta \cos \chi} dK, \quad (3.83)$$

pour  $\eta \rightarrow \infty$ , à  $\chi$  fixé. Sous réserve que les points de phase stationnaire n'annulent pas la branche holomorphe  $\lambda_1$ , on peut remplacer la fonction de Hankel  $H_n^{(1)}(z)$  par le premier terme de son développement asymptotique, lorsque  $|z|$  tend vers l'infini. On arrive à

$$p_n(\eta, \chi; \omega) \sim \sqrt{\frac{2}{\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(K; \omega) e^{i\varphi(K, \chi; \omega)\eta}}{\sqrt{\lambda_1(K; \omega)}} dK \frac{e^{-i\pi(n+1/2)/2}}{\sqrt{i\pi \sin \chi}}, \quad (3.84)$$

et les points de phase stationnaire  $\bar{K}$  satisfont à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} \{i\lambda_1(K; \omega) \sin \chi + K \cos \chi\} = 0. \quad (3.85)$$

On en déduit immédiatement  $\bar{K} = \pm k_0 \cos \chi$ , ce qui implique  $|\bar{K}| < k_0$  pour  $0 < \chi < \pi/2$ , justifiant ainsi le développement asymptotique utilisé pour  $H_n^{(1)}$  (car  $\lambda_1 = O_s(1)$ , pour



$\eta \rightarrow \infty$ ). La fonction  $G$ , exprimée aux points  $\bar{K}$ , s'écrit

$$G(\bar{K}; \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds \mp \frac{i}{\epsilon} k_0 \cos \chi \right] dX, \quad (3.86)$$

et peut elle aussi être évaluée par la méthode de la phase stationnaire. D'où on déduit que les points de phase stationnaire  $\bar{X}$  sont définis par l'égalité  $k(\bar{X}; \omega) = \pm k_0 \cos \chi$ . Dans le demi-plan  $k_r > 0$ , ces points n'existent que si les branches spatiales associées aux modes de  $KH$  rencontrent une coupure lorsque  $x$  varie, c'est-à-dire si la vitesse de phase de l'onde marginale est supersonique. Au point de rencontre, on a  $k_i = 0$  et  $k_r < k_0$ , de sorte que le rayonnement d'énergie se fait principalement dans la direction donnée par  $\cos \chi = k_r/k_0$ , le point de phase stationnaire  $\bar{X}$  correspondant au point d'amplitude maximale ( $k_i(\bar{X}; \omega) = 0$ ). En d'autres termes, *la contribution des ondes d'instabilités de Kelvin-Helmholtz au champ lointain, sous la forme d'ondes de Mach, trouve son origine dans l'existence de pulsations pour lesquelles il n'est pas possible de satisfaire la condition de solvabilité*. Cette observation suggère un mécanisme de sélection en fréquence que nous aborderons dans le chapitre 4. En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on trouve finalement

$$p_n \sim \frac{2}{\eta} G(k_0 \cos \chi; \omega) \exp \left[ ik_0(\omega)\eta - i \frac{\pi(n+1)}{2} \right], \quad (3.87)$$

compte tenu de ce que  $\arg(\lambda_1)$  vaut  $-\pi/2$  sur le premier feuillet de  $R_\lambda$ . Le cas des modes de  $K_0^\pm$  est différent puisque le module de  $\lambda_1$  tend vers zéro pour les pulsations de vitesse de groupe nulle, et par conséquent le développement asymptotique considéré pour la fonction de Hankel n'est plus valable<sup>9</sup>.

### 3.5 Conclusion du chapitre 3

Dans le chapitre 3, la contribution des ondes d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz au bruit de jet a été évaluée, sous la forme de transformées de Fourier-Laplace. Cette approche permet de donner un sens au prolongement analytique des branches spatiales dont il a été fait état dans le chapitre 2. Il n'y a pas d'incompatibilité entre le fait d'utiliser les conditions de bord loin du jet pour définir les domaines d'holomorphie des solutions en variable locale,  $r = O(1)$ , et le résultat qui établit que ces solutions ne sont pas valables en dehors d'un voisinage du jet.

Les comparaisons aux mesures expérimentales disponibles confirment que dans les cas traités, les ondes d'instabilités sont bien à l'origine du bruit de jet, sous la forme d'ondes de Mach. Ces cas sont caractérisés par le fait que la vitesse de phase au point d'amplification totale maximale est supersonique, ce qui se traduit mathématiquement par la rencontre entre les branches spatiales et les coupures. Le passage à la limite  $r \rightarrow \infty$

---

<sup>9</sup>. On peut aussi rencontrer ce problème pour certains modes de  $KH$ , lorsque la vitesse de phase au point d'amplitude maximale est voisine de celle du son.

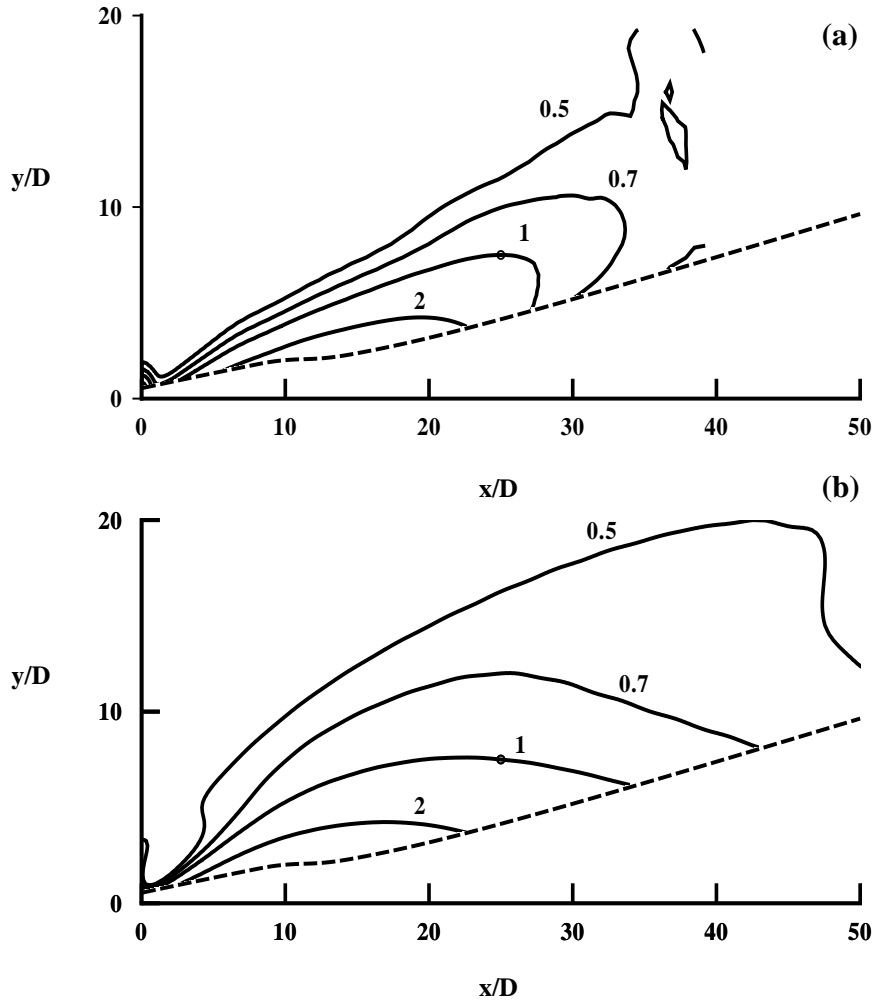


FIG. 3.7 – Lignes iso-pression (valeurs rms). Jet froid,  $M = 2.0$ ,  $n = 1$ . Forçage de pulsation  $\omega = 0.3$ . (a) résultats de Bailly [128]; (b) Estimations numériques à partir des relations (3.81) et (3.82). Le point de normalisation est indiqué par le cercle.

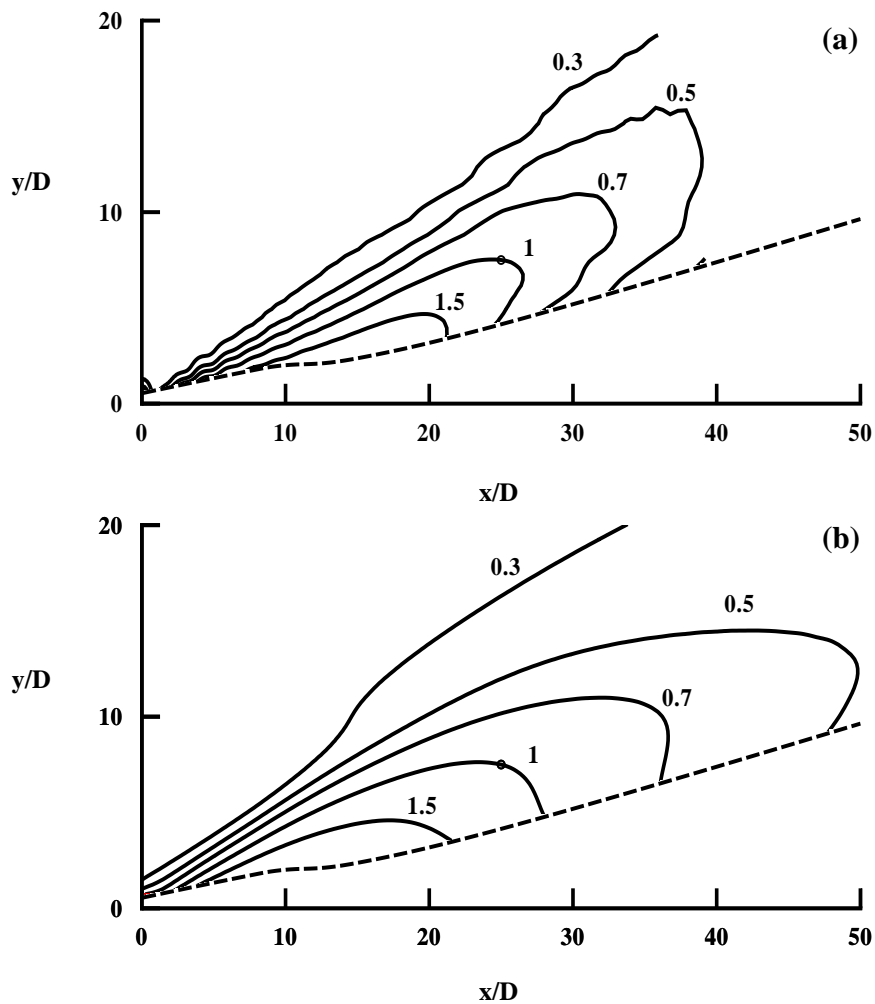


FIG. 3.8 – Lignes iso-pression (valeurs rms). Jet froid,  $M = 2.0$ ,  $n = 1$ . Forçage de pulsation  $\omega = 0.6$ . (a) résultats de Bailly [128]; (b) Estimations numériques à partir des relations (3.81) et (3.82).

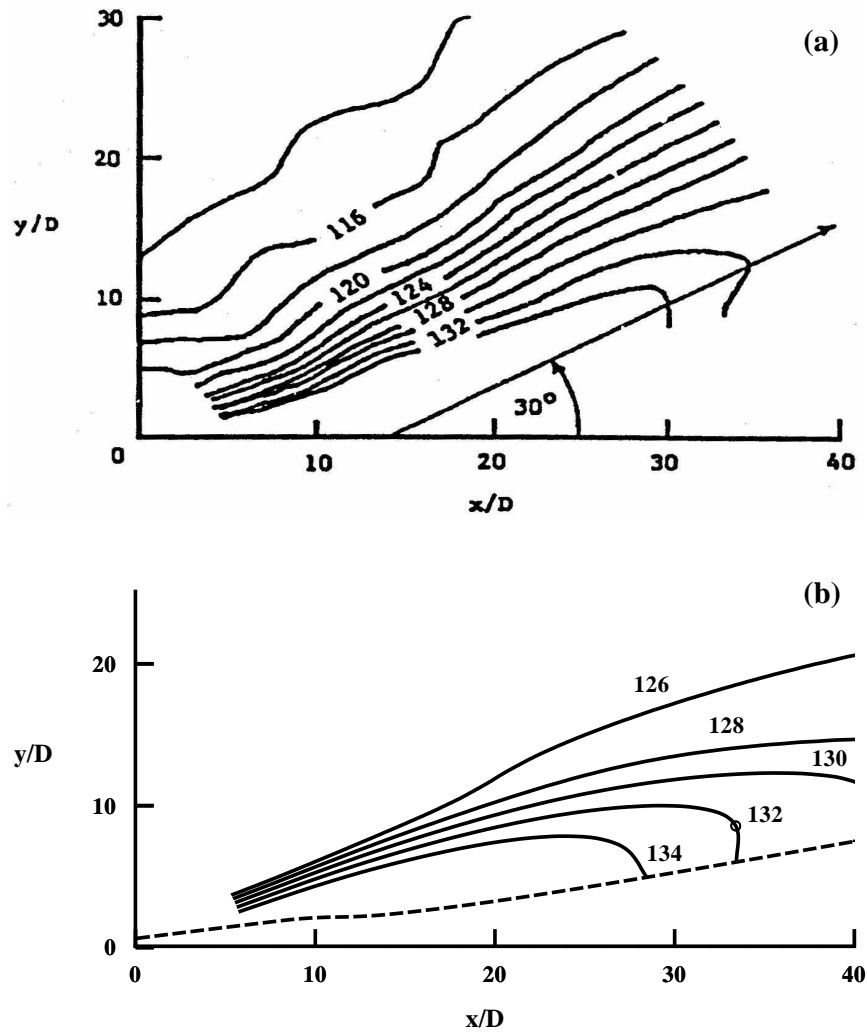


FIG. 3.9 – Lignes iso-pression pour le jet froid,  $M = 2.0$ ,  $n = 1$ . (a) Résultats expérimentaux de Seiner et al. [129] pour  $St = 0.2$ ; (b) estimations numériques pour  $St = 0.6/\pi$  ( $\omega = \pi St$ ). Les chiffres donnent les niveaux en décibels (SPL dB réf.  $2.10^{-5} N.m^{-2}$ ). Le point de normalisation est indiqué par le cercle.

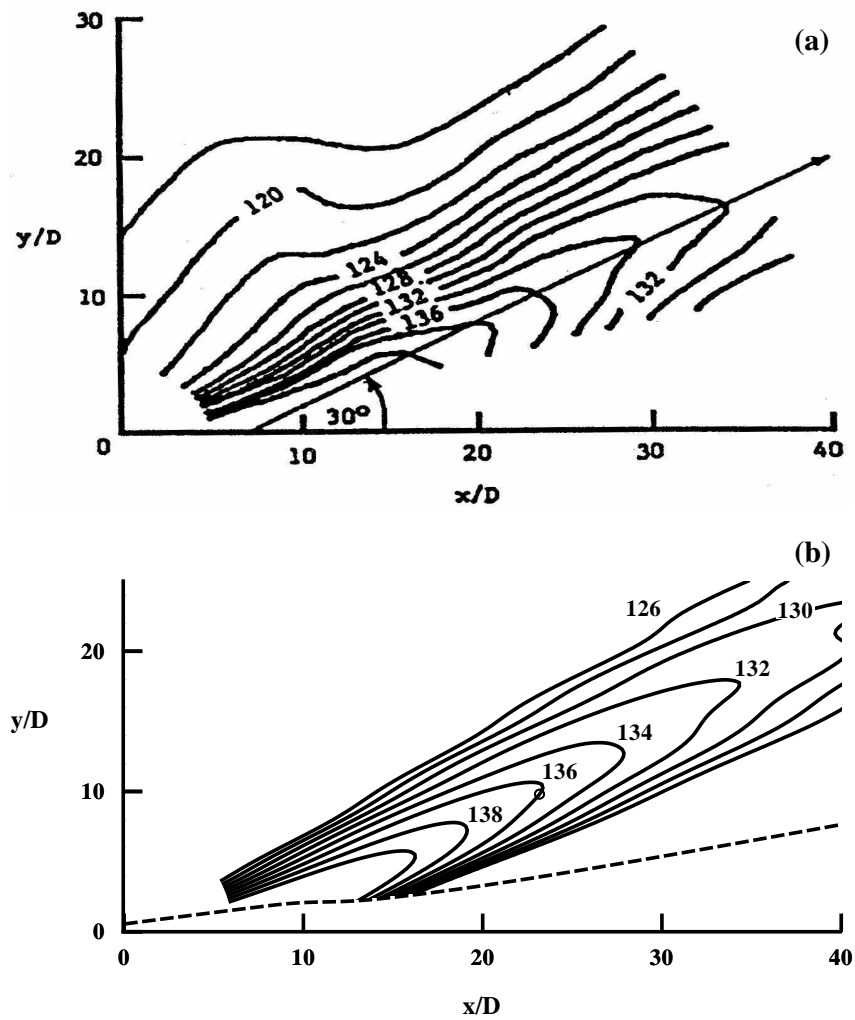


FIG. 3.10 – Lignes iso-pression pour le jet froid,  $M = 2.0$ ,  $n = 1$ . (a) Résultats expérimentaux de Seiner et al. [129] pour  $St = 0.4$ ; (b) estimations numériques pour  $St = 1.2/\pi$ . Les chiffres donnent les niveaux en décibels (SPL dB réf.  $2.10^{-5} \text{ N.m}^{-2}$ ).

montre même que cette condition est nécessaire pour que la directivité présente une forme de lobe, caractéristique du bruit de jet supersonique. Si cette condition n'est pas vérifiée, les modulations d'amplitude deviennent décisives et seul le calcul des transformées inverses permet de conclure. Le problème posé par le cas considéré ici est qu'il faut considérer des fréquences très petites et donc, l'approximation WKBJ n'a plus de sens. Bien entendu, la fréquence de coupure associée à la transition supersonique-subsonique de la vitesse de phase dépend fortement du nombre de Mach. Pour conclure quant à la contribution relative de chaque fréquence (pour un nombre d'onde azimutal  $n$  fixé), on peut chercher la plus petite fréquence pour laquelle la vitesse de phase est supersonique. Les transitions subsonique-supersonique déterminent donc la gamme de fréquences pour laquelle les ondes rayonnent directement de l'énergie.

Cette dernière remarque sert de point de départ au chapitre 4 où le nombre de Mach sera considéré comme un paramètre variant dans l'intervalle  $1 < M < 2.5$ . Ainsi le cas des jets faiblement soniques sera considéré comme un cas limite, en faisant tendre  $M$  vers l'unité et en cherchant les fréquences pour lesquelles les ondes d'instabilités sont susceptibles de rayonner de l'énergie sous forme d'ondes de Mach.



## Chapitre 4

# Exponential-algebraic transition

Ce chapitre reprend la notion de transition subsonique-supersonique rencontrée dans les chapitres 2 et 3. Si on s'intéresse au champ lointain, il a été démontré en fin du chapitre 3 que la contribution des ondes de Kelvin-Helmholtz est essentiellement due à l'existence d'une transition subsonique-supersonique de la vitesse de phase lorsque  $x$  varie. Cette proposition suggère l'existence d'un mécanisme de sélection en fréquence. Comme il l'a déjà été souligné dans le chapitre 2, la transition subsonique-supersonique induit une transition exponentielle-algébrique dans le comportement radial du module de la fonction propre.

Ce chapitre est actuellement soumis à la revue *European Journal of Mechanics B-Fluids*.



**Abstract:** *The paper is concerned with the transition from exponential to algebraic cross-stream decay of instability waves in supersonic axisymmetric cold jets. The cross-stream structure of these waves is analysed for phase velocities close to the sound speed when the streamwise inhomogeneities of the mean flow are characterized by a small parameter. It is shown how algebraic decays are completely compatible with the features of the near-field, and a selection criterion for the occurrence of such a behaviour is given. Near-field pressure fluctuations are then determined as functions of azimuthal properties of instability waves and control parameters. In some cases, where the dominant contribution to the sound generation is due to the axisymmetric Kelvin-Helmholtz instability mode, algebraic decays are not confined in the core region of the jet and the acoustic wavelength becomes larger than the envelope scale.*

## 4.1 Introduction

For perfectly expanded jets, many measurements have shown that large-scale coherent structures are dominant noise producers in supersonic jets (see Seiner *et al.* [17], Troutt and McLaughlin [85], Lau *et al.* [84], [83]). These results have been confirmed by theoretical studies (Mankbadi and Liu [130], Tam and Burton [115]) which revealed that only contributions that arise from these structures can be retained in the aerodynamic sound integral. The shape distribution of the coherent structures responds to the local profiles of the mean shear flows and may be calculated by using the hydrodynamic stability theory. The fine-grained turbulence plays an indirect but crucial role in that it controls the development of the coherent structures and consequently its emitted sound.

An approximate picture of the physical mechanism by which the large turbulence structures generate sound is to regard the instability wave as a wavy wall (Tam [43]). This analogy suggests that the direction of the most intense noise radiation from highly supersonic jets can be estimated by using the Mach angle relation based on the speed of the most amplified instability wave (Tam *et al.* [59]). However, most of the previous works are confined to highly supersonic jets, for which the most amplified instability wave has a supersonic phase velocity (relative to ambient sound speed) and do not consider the subsonic-supersonic transition. In some cases, such a transition gives rise to acoustic radiation: the cross-stream behaviour of pressure fluctuations becomes dispersive and the cross-stream decay of the amplitude changes from exponential to algebraic. The present study is further motivated by the fact that, this exponential-algebraic transition may depend strongly on the azimuthal properties of instability waves and control parameters. Accordingly, there is no reason to consider only the most amplified instability wave for the determination of the dominant noise source for low supersonic jets.

The primary goal of this work is to examine the phenomenon of exponential-algebraic transition of pressure near-field for low-supersonic jet flows by resorting to the linear stability theory. Recently, numerical simulations of supersonic jets and their sound fields have shown that linear stability can be used to estimate near-field sound pressure levels (Freund *et al.* [131], Mitchell *et al.* [132]). In section 2 we study the decay of near-field fluctuations in a convectively unstable axisymmetric jet. We therefore restrict the discussion to the

Kelvin-Helmholtz instability. It is easy to write down a general integral solution to the problem outside the jet. But there is no universal way in which the exponential-algebraic transition is achieved, and indeed much of the emphasis here is to show that the transition depends on the azimuthal properties of instability waves. We therefore start to give a selection criterion for acoustic radiation by analysing the role of compressibility effects in the complex plane. Then, it is shown that the exponential-algebraic transition holds only in a domain of control parameter space, in a way which is given by a turning point problem. In section 3 the numerical formulation used to solve the governing stability equation is described. Here, a spectral collocation discretization through a multiple domain technique has been used for the calculations. This approach, which has been developed by Khorrami *et al.* [133], Malik [71] among others, allows us to include the viscosity terms. Numerical results are then presented for cold supersonic jets.

## 4.2 Near field structure of instability waves

### 4.2.1 Basic formulation

The complex fluctuations  $\phi = (\mathbf{u}, p)$  around a given mean jet flow  $\bar{\phi} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$  are assumed to be governed by linearized inviscid, compressible equations of motion. Here the functions  $\mathbf{u}$  and  $p$  are the velocity and the pressure, respectively. We will use  $r_0$ , the radius of the jet at the nozzle exit,  $u_0$  the jet exit velocity and  $\rho_0$  the jet exit density as length, velocity and density scales of the problem. The time and pressure scales are given by  $r_0/u_0$  and  $\rho_0 u_0^2$ , respectively. In the sequel, we shall assume that the mean pressure is constant in the domain of motion  $\Omega$  and the product of the mean velocity by the mean density belongs to the class consisting of solenoidal vectors (that is,  $\bar{\rho}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\rho} = 0$ ) vanishing far away from the center of the jet flow. Thus, in dimensionless form, the perturbation  $(\mathbf{u}, p)$  satisfies the following equations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p) = -\frac{1}{M^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (4.2)$$

in the class consisting of vectors  $(\mathbf{u}, p)$  satisfying a radiation condition or boundedness condition outside the jet. Here the jet exit Mach number  $M = 1/\sqrt{\gamma \bar{p}}$ ,  $\gamma$  being the ratio of specific heats, is a control parameter.

The non-turbulent fluid outside the jet is assumed to be inviscid so that the distribution of fluctuations is a solution of the above equations outside the jet. In this paper, the discussion is restricted to instabilities arising from purely inviscid mechanisms as the Kelvin-Helmholtz instability waves. It follows that the equations (4.1), (4.2) can be used in the whole of the domain  $\Omega$  with the exception of regions where the inviscid approximation fails to represent the cross-stream behaviour of instability waves. For incompressible shear flows, Le Dizès [82] has shown that this phenomenon occurs in large viscous regions when

the instability waves are damped. From a numerical point of view, viscous effects will be taken into account to compute the cross-stream behaviour of fluctuations in these regions. In fact, one has to keep in mind that non linear effects may become important well before the wave reaches its maximum amplitude. In such a case, one has to proceed to a nonlinear critical layer analysis (for details see Goldstein *et al.* [134], [135]).

In the present study, we are interested in the cross-stream structure of solutions to the above problem for a weakly non-parallel axisymmetric jet. Thus, the properties of the mean flow are assumed to be functions of a slow space variable  $X = \varepsilon x$ , where  $\varepsilon$  is a small parameter characterizing the streamwise inhomogeneities of the medium and  $x$  denotes the streamwise direction. With respect to a cylindrical coordinate system  $(x, r, \theta)$  centred at the nozzle exit, the mean velocity may be represented analytically in the form

$$\bar{\mathbf{u}} : (x, r) \mapsto (\bar{u}(X, r), \varepsilon \bar{v}(X, r), 0). \quad (4.3)$$

Now let us consider the near-field region around the jet. Outside the jet, the streamwise component  $\bar{u}$  is identically zero and the mean radial velocity component  $\bar{v}$  can be calculated by integrating the mean continuity equation. Following Tam and Burton [115], the numerical value of  $r\bar{v}$  is regarded as a constant and given by  $\bar{v}_\infty$ . It follows that the dimensionless mean fluid density is constant and uniquely determined from the control parameters, such as the Mach number  $M$  or the temperature of the jet exit. It will be denoted by  $\bar{\rho}_\infty$ . Such assumptions imply that the linear operator associated with (4.1), (4.2) is homogeneous in space variable  $X$ . Homogeneity allows us to make extensive use of Fourier-Laplace transforms to reduce the problem (4.1), (4.2) to an ordinary differential equation outside the jet. Another point of view consists in using the WKBJ approach to describe the instabilities. Since the flow is slowly evolving on the streamwise scale  $X$ , it is legitimate to decompose all solutions into local plane waves at any streamwise station  $X$ . Note that the latter mathematical description is known to be valid only inside and in the immediate vicinity of the jet (a proof is given by Tam *et al.* [6], [114]).

### 4.2.2 Cross-stream structure of local plane waves

The starting point of the analysis is the problem defined by (4.1), (4.2) and (4.3) which describes both the instability waves behaviour and the acoustic near and far field, with some conditions for  $\phi$  on the boundary of  $\Omega$ . Here, we are interested in the manner in which the near-field decay changes from exponential to algebraic around a location  $X$  - and more generally we are interested in the cross-stream structure of solutions to (4.1) and (4.2) outside the jet, for  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Since the jet is assumed to be axisymmetric, the complex fluctuations can be Fourier-decomposed into azimuthal modes. Equations (4.1), (4.2) being invariant under arbitrary time translations,  $t \mapsto t + t'$ , it is legitimate to seek solutions of the form

$$\phi(x, r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \phi_n(x, r, \omega) \exp(in\theta - i\omega t) d\omega, \quad (4.4)$$

where  $n$  is an integer and  $\omega$  is the frequency; the integration is performed along the path  $L_\omega$  in the complex  $\omega$ -plane as sketched in figure 4.1. Since azimuthal and temporal

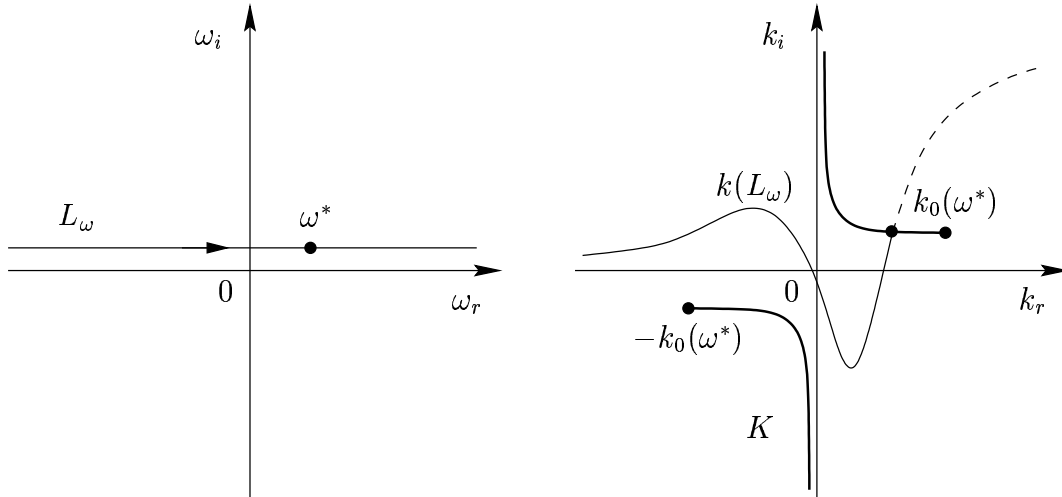


FIG. 4.1 – Locus of spatial branch in complex  $k$ -plane as  $\omega$  moves along  $L_\omega$  contour in complex  $\omega$ -plane for small  $\omega_i$ . The branch cut  $K$  for the function  $\lambda(k)$  join the critical points for  $\omega = \omega^*$ . Dashed line : analytic continuation into the second sheet of the Riemann surface (corresponding to solutions which become exponentially large as  $r \rightarrow \infty$ ).

dependances are specified throughout the entire flow, one has to solve a problem for which  $n$  and  $\omega$  are now parameters. Let  $X$  and  $R$  be defined by  $X = \delta_X(\varepsilon)x$  and  $R = \delta_R(\varepsilon)r$ , where  $\delta_X$  and  $\delta_R$  are order functions. Then by eliminating all other dependent variables in favour of  $u_n$ , the streamwise component of  $\mathbf{u}_n$ , one can find the equation to be solved outside the jet

$$\delta_R^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{n^2}{R^2} \right) u_n + \left( k_0^2 + \delta_X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) u_n = F(\varepsilon \bar{v}_\infty) u_n, \quad (4.5)$$

which will be written as  $\delta_R^2 L_0 u_n + L_1 u_n = F u_n$ , where  $L_0$  is the transverse part of the Laplace operator and  $k_0$  is defined by  $k_0^2 = \bar{\rho}_\infty M^2 \omega^2$ . The full expression for  $F$  is not of first importance here; it is given in appendix A. It seems natural to introduce, for the purpose of the analysis, the one parameter family of local variables  $r_\alpha = R \varepsilon^\alpha / \delta_R(\varepsilon)$ , with  $\alpha \geq 0$  and to consider a local asymptotic approximation of  $u_n$  in the vicinity of the jet. Here,  $L_0$  does not depend on  $\varepsilon$ , while for any (sufficiently differentiable)  $\varepsilon$ -independent function  $g$ , the linear operator  $F$  is such that  $Fg = O(\varepsilon \delta_R^2)$ . For slowly divergent free shear flows,  $\delta_X$  may be a measure of nonparallel basic flow effects, for instance  $\delta_X(\varepsilon) = \varepsilon$ . Then, the degeneration of (4.5) in the local variable  $r_\alpha$  only depends on the order of magnitude of  $\|L_1 u_n\|$  for  $\alpha = 0$ . For  $0 < \alpha < 1$ , the family of local variables plays the role of a family of intermediate variables.

We will first consider the case  $\alpha = 0$ , that is,  $r = O(1)$ . As discussed in section 2.1 the asymptotic response can be given by the standard form of the WKBJ approximation

(see Bender and Orszag [40]) which describes instabilities of weakly non-parallel flows :

$$u_n \sim \sum_{j=0}^q \delta_j(\varepsilon) A_j(X) u_{nj}(r; \omega) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^X k(s; \omega) ds\right), \quad (4.6)$$

where  $\delta_0 = 1$ ,  $\delta_j$  ( $0 < j < q$ ) are elementary gauge functions and  $k = k_r + ik_i$  denotes a local (complex) wavenumber originating in the upper half of the  $k$ -plane when the imaginary part of  $\omega$  goes from a large positive value to zero. The leading-order amplitude  $A_0(X)$  is determined at another order in  $\varepsilon$ , from matching conditions to the solution far away from the jet, and  $u_{n0}$  is a suitably normalized function which gives the cross-stream behaviour of pressure fluctuations in the vicinity of the jet. A cause of difficulties is the appearance of terms  $\delta_j$  in the formal expansion of which the order of magnitude is not suggested or dictated by the differential equation or the boundary conditions. However, these functions can be determined by using the intermediate matching principle (see Eckhaus [109], Tam and Burton [115]). Here, the origin  $X = 0$  is the axial location of the source on the jet centreline. By introducing the expansion (4.6) for  $u_n$  into equation (4.5) with  $\alpha = 0$ , one finds an equation satisfied by  $u_{n0}$  outside the jet,

$$L_0 u_{n0} - \lambda^2 u_{n0} = 0, \quad (4.7)$$

where  $\lambda$  is given by the irreducible polynomial

$$P(\lambda, k) = \lambda^2 + (k_0^2 - k^2) = 0, \quad (4.8)$$

which defines an algebraic function  $\lambda(k; \omega)$  in a domain of the complex  $k$ -plane. Note that for  $k_0 = 0$  (what is equivalent to  $\omega M = 0$ ) we have  $\lambda^2 = k^2$ ; the cross-stream behaviour of pressure fluctuations which is given by the streamwise component of (4.1), no longer depends on the phase velocity  $\omega/k$ .

Using the new variable  $z = i\lambda r$ , the equation (4.7) reduces to the Euler-Bessel equation in the  $z$ -complex domain. Two linearly independent solutions of (4.7) are then given by the  $n$ th-order Hankel functions of the first and second kind,  $H_n^{(1)}(z)$  and  $H_n^{(2)}(z)$ , respectively. The passage to the general case of an arbitrary positive value for  $\alpha$  cause no difficulty : one must consider the transformation  $r = r_\alpha/\varepsilon^\alpha$  in the definition of  $z$ . As already indicated it is possible to find a neighbourhood of  $k_0$  in which the leading-order of the equation (4.5) reduces to  $L_0 u_{n0} = 0$ . It is sufficient to consider situations where  $|\lambda^2| = o(1)$  and for which the cross-stream structure of pressure fluctuations is no longer given by two cylinder functions. For  $0 < \alpha < 1$ , this result is obtained from the asymptotic form of the Hankel functions for small argument, that is,  $|\lambda| = o(\varepsilon^\alpha)$  for fixed  $r_\alpha$ . In the following, we exclude such situations by reducing the analysis to the plane of the complex variable  $k$  with the exception of neighbourhoods of  $\pm k_0$ .

Let us consider now the algebraic function determined by the polynomial (4.8) in the domain  $\mathcal{E}$  obtained by removing the singular points from the complete  $k$ -plane, that is, the points  $\pm k_0 = \pm\sqrt{\bar{\rho}_\infty} \omega M$  and  $\infty$ . Then at every point  $k \in \mathcal{E}$  this equation has two distinct finite roots  $\lambda_1$  and  $\lambda_2 = -\lambda_1$ . It follows, that in a certain neighbourhood of the arbitrary

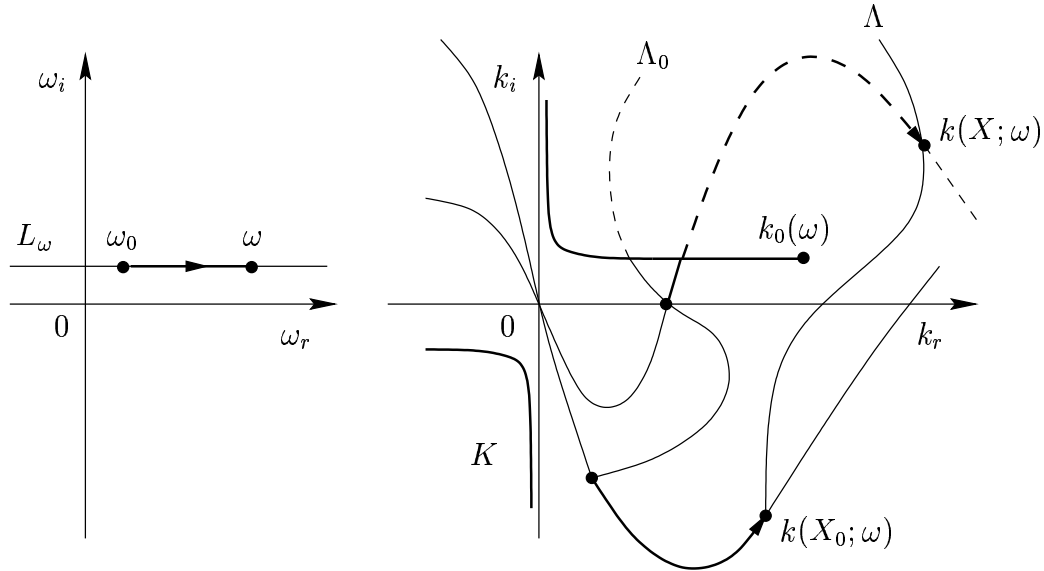


FIG. 4.2 – Locus of spatial branch in complex  $k$ -plane as  $\omega$  moves along  $L_\omega$  contour, for two locations  $X_0$  and  $X > X_0$ . In the displacement of the point  $\omega$  along the  $L_\omega$  contour from the point  $\omega_0$ , the path  $\Lambda_0$  is continuously deformed into the path  $\Lambda$ . The algebraic function  $\lambda(k; \omega)$  continuously changes with the continuous change of the position of the point  $k$  on the Riemann surface  $R_\lambda$ .

point  $k \in \mathcal{E}$  there exists two and only two regular branches. In the strictly parallel case, the real part of one branch, let us say  $\lambda_1(k; \omega)$ , can be taken positive, so that only the  $n$ th-order Hankel function of the first kind,  $H_n^{(1)}$ , satisfies the boundedness condition on the boundary of  $\Omega$ . Such a choice implies a branch cut  $K$  ( $-\pi/2 \leq \arg \lambda < \pi/2$ ) in the  $k$ -plane as shown in figure 4.1.

Let us note in connexion with this, that the singular points  $\pm k_0$  go to infinity when the real part  $\omega_r$  of the frequency  $\omega$  moves from zero along the contour  $L_\omega$ . Then, we arrive at the result, that it may be possible to find at least one point  $k^*$  in the  $k$ -plane where a spatial branch meets a branch cut as shown in figure 4.1. Furthermore, the imaginary part of the intersection point  $k^* = k(\omega^*)$ , if it exists, goes to zero when the  $L_\omega$  contour is gradually displaced downward until the real axis<sup>1</sup>. Note also that it is clearly impossible to find such a point if the shear layer thickness is zero since the model would fail to satisfy causality or if the Mach number  $M$  is zero. In this last case, it is necessary to consider the neighbourhood of branch points  $-k_0 = k_0$  which are identical with the origin.

For weakly non-parallel flows, the local wavenumber  $k(X; \omega)$  traces a path  $\Lambda$  in the  $k$ -plane from the point  $k(0; \omega)$  which passes through the real axis, as shown in figure 4.2. One has to remember that, as the wave propagates downstream the local growth rate  $-k_i(X; \omega)$  reduces. This is because the flow slowly diverges so that the transverse velocity

1. Such a deformation is possible since the basic state is assumed to be convectively unstable.

gradient is gradually reduced. This path and the singular points continuously change as  $\omega$  moves along  $L_\omega$ , or with the continuous change of control parameters, as the jet Mach number or the jet exit temperature. Let us now suppose that, on displacing the point  $\omega$  along the contour  $L_\omega$  from the point  $\omega_0$  to the point  $\omega$  the path moves from  $\Lambda_0$  to the path  $\Lambda$ , and the two branch points  $\pm k_0$  move from  $\pm k_0(\omega_0)$  to their actual positions, as shown in figure 4.2. Since here the path  $\Lambda$  is assumed to meet no branch cut, the function  $\lambda_1(k; \omega)$  is continuous along  $\Lambda$ . Thus, the cross-stream structure of local plane waves is continuous along  $\Lambda$  and satisfies the boundedness condition since the real part of  $\lambda_1$  is positive (by the definition of  $K$ ) in the simply connected domain obtained from the complete  $k$ -plane by the removal of the whole of  $K$ . If it turns out to be impossible to move the path  $\Lambda$  to the similar path  $\Lambda_0$ , such that the continuous continuation of the function  $\lambda_1$  along the path  $\Lambda$  gives the same function  $\lambda_1^2$ , then the continuation of the functions  $\lambda_1, \lambda_2$  along the path  $\Lambda_0$ , leads to their permutation. More detailed investigation shows that only singular points of  $\lambda$ , that is the points not belonging to the domain  $\mathcal{E}$ , can act as an obstacle to the passage of the path  $\Lambda$  into the path  $\Lambda_0$ . Hence it is natural to expect, that the character of the permutation of the functions  $\lambda_1, \lambda_2$ , which takes place as a result of their continuation along the path  $\Lambda_0$ , is determined by the distribution of the singular points on the sphere of the complex variable  $k$ . Therefore, we arrive at the following criterion for exponential-algebraic transition:

*if at least one spatial branch  $k(X; L_\omega)$  meets the branch cut  $K$  in the complex  $k$ -plane, then the cross-stream decay of the amplitude of pressure fluctuations is algebraic in a subdomain  $\Omega^* \subset \Omega$ .*

This result follows by the permutation of the functions  $\lambda_1$  and  $\lambda_2 = -\lambda_1$  using the branch cuts  $K$  as defined above. For every intersection point  $k^* = k(X; \omega^*)$ , we have  $\text{Re}(\lambda(k^*; \omega^*)) = 0$  and  $|k_r^*| < k_0(\omega^*)$ . Then, taking the intermediate limit of the Hankel function  $H_n^{(1)}(i\lambda r^\alpha / \varepsilon^\alpha)$ ,  $r_\alpha$  being fixed, we find

$$\lim_{r_\alpha} |H_n^{(1)}(i\lambda(k^*; \omega^*)r)| \sim \frac{|\exp(-\lambda(k^*; \omega^*)r)|}{|\sqrt{i\lambda(k^*; \omega^*)r}|}. \quad (4.9)$$

It follows that the cross-stream decay of  $u_{n0}$  is algebraic for  $\omega^*$ . Since the intersection point depends on the location  $X$ , that is,  $\omega^* = \omega^*(X)$ , the streamwise extent of the physical domain  $\Omega^*$  where such a behaviour holds is non-zero only in a domain of the control-parameter space which depends on the azimuthal wavenumber  $n$ . In the case where no intersection point is found, the cross-stream decay is exponential for every location  $X$  since the real part of  $\lambda_1$  is positive and no travelling wave is generated<sup>3</sup> in the cross-stream direction. In order to have a continuously change of the function  $\lambda$  with the continuous change of the wavenumber  $k$ , one has to define it not on the  $k$ -plane, where it is many valued, but on a 2-sheeted Riemann surface  $R_\lambda$ , to every point of which correspond one value of the function  $\lambda$ .

---

2. The reader is recommended to imagine to himself the paths  $\Lambda_0$  and  $\Lambda$  on the Riemann sphere of the complex variable  $k$ .

3. This result holds only for acoustic radiation in the vicinity of the jet, that is, for  $r_\alpha = O(1)$ . The far-field cannot be obtained with such an approach since the WKBJ approximation is not uniformly valid.

In gradually displacing the  $L_\omega$  contour until the real axis, the imaginary parts of singular points  $\pm k_0(\omega)$  go to zero and the parts of branch cuts not belonging to the imaginary axis coincide with the segment consisting in neutral waves ( $k_i = 0$ ) with supersonic phase velocities ( $|k_r| < k_0$ ). The length of this segment is an increasing function of the Mach number  $M$ , and is zero in the incompressible flow assumption. Then the criterion for the length of  $\Omega^*$  to be non zero can be expressed in terms of phase velocities of neutral waves. Thus, for a given integer  $n$ , the cross-stream decay of pressure fluctuations is algebraic only if neutral waves have supersonic phase velocities (relative to the ambient sound speed) in a domain  $\Omega^*$ . In order to isolate the contribution of instability waves to the acoustic near-field, the path  $\Lambda_0$  must be divided into two parts. When  $k$  spans the part for which the boundedness condition cannot be satisfied ( $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) the problem of acoustic radiation must be considered in its entirety in the whole physical space: the locally parallel-flow instability wave solution must match an outer solution obtained by considering the case  $\delta_R \sim \delta_X$ .

In the following section, we show that a similar transition holds in the cross-stream direction when the phase velocity of the neutral axisymmetric ( $n = 0$ ) instability wave is subsonic, in a way which is given by a turning-point problem. It is shown that the feature of the near-field is completely compatible with the asymptotic expansion (4.9) valid in the intermediate region.

### 4.2.3 A turning-point problem

In this section, we study the cross-stream behaviour of local plane waves in the annular region  $|\lambda| = O(1)$ ,  $|\lambda| \neq o(1)$  centered at the point  $k_0$  at the limit  $\omega_i \rightarrow 0$ . We show that the analysis of the equation (4.7) in the complex plane permits to identify a turning-point problem. The following statements will be proven:

(a) For  $|k_r| > k_0$  and  $k_i = 0$  the cross-stream behaviour of axisymmetric instability waves ( $n = 0$ ) is dispersive in a neighbourhood of the jet if  $\lambda$  is small enough. For  $n \neq 0$  or  $r > 1/(2\lambda)$ , the cross-stream behaviour is dissipative.

(b) for  $|k_r| < k_0$  and  $k_i = 0$  the cross-stream behaviour of axisymmetric instability waves is dispersive. If  $n \neq 0$ , the cross-stream behaviour is dispersive only outside a neighbourhood of the jet if  $\lambda$  is small enough.

The proof of statements (a) and (b) can be carried out by the same way. Let us first  $z = i\lambda r$  be a new independent variable and reduce the equation (4.7) to its normal form by writing  $\hat{u}_{n0} = u_{n0} z^{1/2}$  in (4.7) and  $p = \pm n - 1/2$ , where  $u_{n0}$  is a suitably normalized function identically equals to the  $n$ th-order Hankel function of the first kind outside the jet. Then, we have

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_{n0}}{\partial z^2} + Q(z) \hat{u}_{n0} = 0, \quad Q(z) = 1 - \frac{p(p+1)}{z^2}, \quad (4.10)$$

where the function  $Q$  is regular in the whole of the domain  $\mathcal{E}$ . The equation (4.10) defines a turning-point problem (see Bender and Orszag [40]). The turning points are points where



$Q$  vanishes, they are given by

$$r_0 = \pm \frac{\sqrt{p(p+1)}}{i\lambda(k)}, \quad k \in R_\lambda, \quad (4.11)$$

where  $\lambda$  is defined by (4.8) on its Riemann surface  $R_\lambda$ . It follows that  $r_0$  is real only if  $|k| > k_0$  and  $k_i = 0$  for  $n = 0$ , or  $|k| < k_0$  and  $k_i = 0$  for  $n \neq 0$ . Then by the equation (4.10) the cross-stream behaviour of neutral axisymmetric instability waves is dispersive up to  $r_0 = 1/(2\lambda)$  if  $|k| > k_0$ . Since (4.10) is valid for  $|\lambda| = O(\varepsilon^\alpha)$ ,  $|\lambda| \neq o(\varepsilon^\alpha)$ , the turning-point gives the radial position of the dispersive-dissipative transition in the intermediate domain for  $n = 0$ . This result is completely compatible with the asymptotic expansion (4.9): the rapidly varying component of (4.9) decays exponentially (dissipates) away from the jet as long as  $\varepsilon^\alpha = o(|\lambda|)$ . For  $|k| < k_0$  and  $k_i = 0$ , the turning point lies in the complex  $r$ -plane and the cross-stream behaviour becomes dispersive. As indicated by (4.9) the solution is wavelike with very small and slowly changing wavelengths and slowly varying amplitude as function of  $r_\alpha$ . The case  $n \neq 0$  and  $|k| > k_0$  leads to a dissipative behaviour. Therefore, the statement (a) is proved.

The proof of statement (b) is very similar. Let us consider the case  $|k| < k_0$ ,  $k_i = 0$  and  $n \neq 0$ , for which  $r_0$  is real. Hence, turning to the definition of  $\lambda$  on its Riemann surface  $R_\lambda$ , we can assert that the cross-stream behaviour of instability waves is dispersive for  $r > r_0$  and dissipative in a subdomain  $r < r_0$  outside the jet. By the definition of  $r_0$ , the length of this subdomain is an increasing function of  $n$  and consequently, the cross-stream decay of instability waves is exponential for  $r \leq O(n)$ . Thus, the absolute value of  $u_{n0}$  is negligibly small for large  $n$  and  $r > r_0$ . For axisymmetric instability waves, the function  $Q$  is complex for all  $r$  outside the jet and the cross-stream behaviour is dispersive.

Recall that the inequalities  $|k_r| > k_0$  and  $|k_r| < k_0$  must be considered in the sense of asymptotic analysis, that is,  $|\lambda| = O(1)$  and  $|\lambda| \neq o(1)$ . If  $|\lambda| = o(\varepsilon^\alpha)$  one might consider trying to apply perturbation methods to find the asymptotic structures. The leading-order of the equation (4.5) reduces to the transverse part of the Laplace operator:

$$L_0 u_{n0} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha^2} + \frac{1}{r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} - \frac{n^2}{r_\alpha^2} \right\} u_{n0} = 0. \quad (4.12)$$

The form of the solution no longer depends on the phase velocity but is stronger affected by the azimuthal wavenumber  $n$ . For axisymmetric instability waves, the general solution corresponds to the asymptotic form of the Hankel function for small argument, that is  $u_{00}(z) \sim \ln z$ , with  $z = i\lambda r_\alpha / \varepsilon^\alpha$ . This solution obviously breaks down at large distances from the jet. From matching arguments we deduce that the turning-point becomes larger than  $O(1)$  and has no physical sense. For non-axisymmetric instability waves, the solution which matches the Hankel function is given by  $u_{n0}(z) \sim 1/z^n$ , for  $n > 0$ . Let us note that the branch points go to zero as  $M \rightarrow 0$  for finite values of  $\omega$  and, consequently, the length of the vertical strip between the two branch points, representing waves with supersonic convective Mach number, decreases until zero. Hence only axisymmetric pressure fluctuations may exhibit a dispersive behaviour in the vicinity of low-speed jets.

The next section deals briefly with the numerical formulation for performing calculations of instability waves. Using the structure of solutions on the Riemann surface  $R_\lambda$ , the computational domain has been reduced to the vicinity of the jet. Here, a new method has been used to discretized the operators. The mathematical and computational steps needed to calculate the spatial branches will not be fully explained. A more complete explanation of the numerical procedure will be published elsewhere.

## 4.3 Numerical formulation

The approximate solution requires two steps. First the operator associated with the linearized equations is converted to a matrix. In the present method the discretized system is obtained by a spectral collocation discretization through a multiple domain technique. Such a method can be applied with no modification when the viscosity effects are taken into account. None of the boundary conditions arises directly from the viscosity and are formally the same in an inviscid fluid. In the second step the resulting nonlinear eigenvalue problem (nonlinear in  $k$ ) is solved at every axial location  $X$  by using the linear companion matrix method when possible.

### 4.3.1 Spectral discretization

The differential equations are reduced to linear algebraic equations using a spectral collocation method (see Khorrami *et al.* [133], Malik [71]). Expansions in orthogonal polynomials, especially Chebyshev polynomials, give convenient, accurate, and efficient approximations to the solutions of hydrodynamic stability problems (Orszag [74]). One drawback to these techniques has been the requirement that a complicated physical domain must map onto a simple computational domain for discretization. Let  $r = f(t)$  denote a mapping of the computational coordinate  $t$  into the natural coordinate  $r$ . The convergence properties of the approximation to  $\phi(r)$  can be determined from the behaviour of the function  $\phi(f(t))$ . The function  $f$  must be infinitely differentiable if the high-order accuracy and exponential convergence rates associated with spectral methods are to be preserved. Additionally, even smooth stretching transformations can decrease the accuracy of a spectral method, if the stretching is severe. The latter restriction is overcome in the present method by splitting the physical domain into two domains which may be denoted as domain 1 and domain 2. The only point which belongs to both the domains is the inflection point of the streamwise component of the mean velocity profile. Each domain preserves the advantages of spectral collocation and allows the ratio of the mesh spacings between regions to be several orders of magnitude larger than allowable in a single domain. Since the problem of interest here is nonperiodic, Chebyshev polynomials are suitable basis functions. The standard collocation points are the Gauss-Lobatto points for every domain. The derivative matrices  $D_i$  are constructed for both the domains ( $i = 1, 2$ ) as described for a single domain (see Malik [71]). The governing equations now

may be written in the two domains as

$$\sum_{j=0}^p M_{ij} D_i^j \Phi_i = 0, \quad (4.13)$$

where  $M_{ij}$  are square matrices depending on the axial location and on the complex number  $k$  for a given point in the control-parameter space, and  $\Phi_i$  is a column matrix which elements give the cross-stream behaviour of fluctuations. The dimension of  $\Phi_i$  and  $p$  depend on the number of dependent variables. For compressible, viscous shear flows, one can reduce the dimension of  $\Phi_i$  to five times the number of collocation points. It must be noted that in addition we need interface conditions at the inflection point and boundary conditions.

### 4.3.2 Inviscid approximation

To simplify the necessary calculations one can use the inviscid stability theory since the mean flow is dynamically unstable even in the absence of viscosity. Such a problem requires solving a differential equation with singularities on or near the computational domain. These singularities, usually called "critical points" are particularly severe for Chebyshev methods since these global expansions algorithms are very sensitive to the analytic properties of the solution. As has been discussed by many investigators, the solution for inviscid damped waves is obtained by analytic continuation of that of the unstable wave in the complex  $r$ -plane. By making a change of coordinates, one can solve the problem along a path in the complex plane that makes a wide detour around the singularity. The new integration contour must pass through both boundary points and should be as smooth as possible. Another constraint has been mentioned by Le Dizès [82] for incompressible shear flows: the inviscid approximation fails to represent cross-stream variations in the neighbourhood of critical points when the waves are locally neutral, and in large viscous regions when they are damped. This can be carried out by integrating the equation along a path that remains in inviscid regions if such a path exists. Unfortunately, this stretching transformation leads to a new distribution of nodes along the complex contour and particularly around the critical point. Following anew the multi-domain spectral collocation method, the domain which contains the critical point is divided into two domains when necessary.

Since the inner solution is valid only inside and in the immediate vicinity of the jet, the boundary conditions for the discretized system may depend on  $k$ . In most cases, one can find a region far enough from the inflection point where the pressure fluctuation is negligibly small. Therefore in the numerical computation it is taken to be zero. Such a boundary condition fails for algebraic cross-stream decay of instability waves. In this case, the asymptotic expansions of the  $n$ th-order Hankel functions show that the necessary length of the integration domain would become too large for a reasonable number of points. Instead the pressure fluctuation is required to match the  $n$ th-order Hankel function of the first kind  $H_n^{(1)}$  outside the jet. It must be noted that now the discretized problem can no longer be written as a polynomial in the parameter  $k$ .

### 4.3.3 Global or local method?

There are two classes of numerical methods that can be used for computing the eigenvalues: global and local methods. For the global methods a generalized eigenvalue problem is set up and the eigenvalues are obtained by using standard algorithms. When the discretized operator is a polynomial in the parameter  $k$ , several methods exist for determining the set of eigenvalues without an initial estimate. Following, the linear companion matrix method (see Bridges and Morris [78]), the linear differential operator is converted to a generalized eigenvalue problem. But this method does not apply if the boundary conditions are not polynomials in the parameter  $k$ , that is for algebraic cross-stream decay of instability waves where the outer boundary condition depends on  $k$  through the  $n$ th-order Hankel function of the first kind. In such a case, we use a local method.

In a local method, a guess for the eigenvalue is required. Only the eigenvalue which happens to lie in the neighbourhood of the guessed value is computed using iterative techniques such as Newton's method. Thereafter, the eigenvalue solution at the previous axial location can be used as the initial guess for the eigenvalue at the next axial location. Extrapolating the first guessed eigenvalue at the next axial location from previous values often speeds up the convergence as long as the mean flow profiles are slowly changing.

## 4.4 Numerical results for cold supersonic jets

### 4.4.1 Mean-flow profile

Before numerical calculations can be performed, it is necessary to provide a description of the mean velocity and density profiles in the jet. The mean velocity profiles are taken from experimental measurements of perfectly expanded supersonic jets obtained by Lau *et al.* [84] whose data were fitted by an error function profile and Troutt and McLaughlin [85] who fitted data by a half-Gaussian profile.

It is known that a supersonic jet can be divided into three regions, i.e. the core, the transition and the fully developed regions according to the characteristics of the mean velocity profile. Here, we restrict the analysis to the core region where the mean velocity may be approximated by a half-Gaussian profile. In the core region, close to the nozzle exit, the center part of the jet has a uniform velocity which is equal to the fully expanded jet velocity. Surrounding the core, there is a mixing layer which broadens in the downstream direction. In the present work the mean velocity is approximated by

$$\bar{u}(r; X) = \begin{cases} 1 & (r < h(X)) \\ \exp\left(-\ln 2 \left(\frac{r - h(X)}{b(X)}\right)^2\right) & (r \geq h(X)) \end{cases} \quad (4.14)$$

where  $h$  is the radius of the potential core and  $b$  is the velocity half-width of the annular mixing region. The density is related to the mean axial velocity using a Crocco

relationship,

$$\bar{p} = \left( \bar{u} + \frac{T_\infty}{T_0}(1 - \bar{u}) + \frac{\gamma - 1}{2}\bar{u}(1 - \bar{u})M^2 \right)^{-1} \quad (4.15)$$

where  $T_\infty$  and  $T_0$  denote the ambient temperature and the jet exit temperature, respectively. Here, we only consider cold jets, that is,  $T_\infty/T_0$  only depends on the Mach number. On substituting for  $\bar{u}$  and  $\bar{p}$  equations (4.14) and (4.15) into the momentum integral equation, an algebraic relationship can be found between  $h$  and  $b$  in the annular mixing region. Then, the axial development of the jet is completely defined by the axial variation of the jet half-width  $b$ .

Extensive jet instability calculations over a significant range of Strouhal number have been carried out. For most cases, it is found that the position of neutral instability is located in the core region of the jet. For the purpose of determining the intersection point  $k^*$  it is, therefore, not necessary to consider the transition and the developed regions of the jet. The length of the uniform core is obtained by using the modified formulae given by Tam *et al.* [22]. In the literature  $db/dx$  is referred to as the spreading rate  $\sigma$  of the mixing layer. For the Gaussian mean velocity profile, we have the relation  $db/dx = \varepsilon = 1.2658/\sigma$ . The variation of  $\sigma$  as a function of the jet exit Mach number,  $M$ , has been tabulated by Birch and Eggers [91]. The correlations are given by

$$\begin{aligned} \sigma &= 10.7/(1.0 - 0.1163M^2), & M < 2.0, \\ \sigma &= 19.4\sqrt{M - 0.9418}, & M > 2.0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

As an example, for  $M = 1.5$ , we find  $db/dx = \varepsilon = 0.088$ . Note also that for supersonic cold jets, experimental measurements have shown that  $db/dx \leq 0.10$ .

#### 4.4.2 General methodology and numerical results

In this section numerical results about intersection points  $k^*$  in the complex  $k$ -plane, for which  $k(X; \omega^*) \cap K(\omega^*)$  is non-empty, will be presented for Kelvin-Helmholtz modes with small azimuthal wavenumbers ( $0 \leq n \leq 3$ ). Different complex pairs  $(\omega, k)$  were determined by numerical integration of the linearized equations of motion, together with boundary conditions outside the jet. At each value of the axial location  $X$ , the phase velocity of a neutral wave was located by searching for the zero of a growth rate  $-k_i$  for positive  $\omega$ . As the location is increased from the origin to the end of the core region, the spatial branches move into the upper half of the complex  $k$ -plane and, consequently, points of zero growth rates describe curves along the real axis  $k_r > 0$ . As discussed in the section 2.2, some of these curves may lie in the vertical strip  $|k_r| < k_0$ , corresponding to supersonic phase velocities. According to the definition of the branch cut  $K$ , the segments of these curves for which  $|k_r| < k_0$  and their images in the  $\omega$  plane give complex pairs  $(\omega^*, k^*)$  as functions of the axial location, for which the cross-stream decay of pressure fluctuations is algebraic. The cross-stream wavenumber is then given by the function  $\lambda(k^*; \omega^*)$  and depends on  $n$  through  $(\omega^*, k^*)$ . The above reasoning presents the advantage of uniquely determining which spatial branches are pertinent to acoustic radiation outside

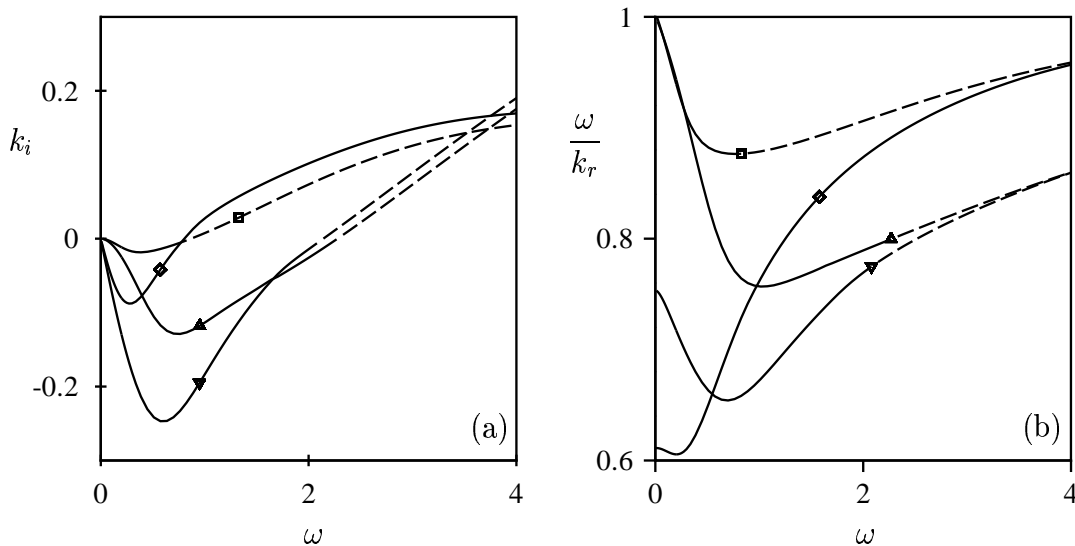


FIG. 4.3 – Evolution of spatial branches associated with the axisymmetric ( $n = 0$ ) and the helical ( $n = 1$ ) Kelvin-Helmholtz modes as the axial location is increased in the core region, for a cold supersonic jet of Mach number 1.7: (a) imaginary part  $k_i$  of  $k$  versus real frequency  $\omega$ ; (b) phase velocity  $\omega/k_r$  versus  $\omega$ .  $\nabla$ ,  $x = 5, n = 1$ ;  $\Delta$ ,  $x = 5, n = 0$ ;  $\square$ ,  $x = 10, n = 0$ ;  $\circ$ ,  $x = 10, n = 1$ ; dashed line, analytic continuation into the second Riemann sheet.

the jet. The numerical procedure to determine the spatial branches involves the definition of the function  $\lambda$  on its Riemann surface. Subsequently, spatial branches are analytically continued into the second Riemann sheet for damped waves ( $k_i > 0$ ), if necessary. This is permissible because boundedness of solution at large  $r$  is not a requirement of the near-field solution. The associated parametric dependence of the real and imaginary parts  $k_r$  and  $k_i$  on  $\omega$  and  $X$  is displayed in figure 4.3, for a cold jet of Mach number  $M = 1.7$  and for axisymmetric ( $n = 0$ ) and helical ( $n = 1$ ) Kelvin-Helmholtz modes. Observe that for high frequencies the spatial branches have the same behaviour, whereas for low frequencies the phase velocity depends strongly on the azimuthal wavenumber. A consequence is that for  $x = 10$ , there is no intersection point  $k^*$  for the helical mode. But it still exists for the axisymmetric mode, as indicated by the analytic continuation into the second Riemann sheet, in figure 4.3.

For  $M = 1.7$ , figure 4.4 shows branches described by points of zero growth rates, in the limit process  $k_i \rightarrow 0$ ,  $k_i > 0$ , on a multisheeted plane with two connected Riemann sheets. Each curve can be divided into two segments, according to the cross-stream structure of the pressure fluctuations. The first branch (sheet 1 in figure 4.4) is associated with exponential decays, satisfying the boundedness condition as  $r \rightarrow \infty$ . The second branch (sheet 2) lies along the branch cut, so that, the cross-stream structure of pressure

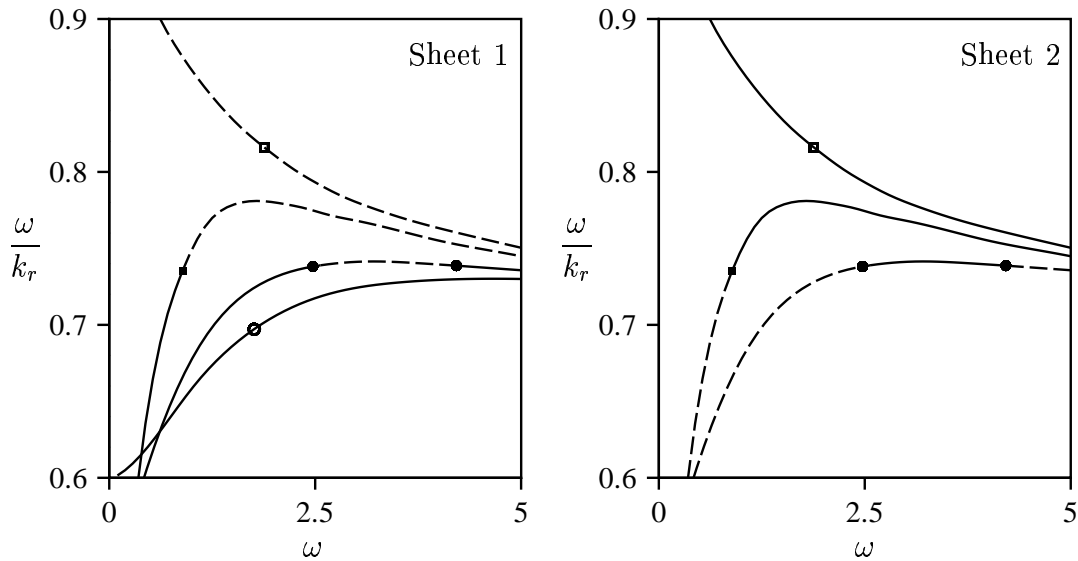


FIG. 4.4 – Phase velocity of weakly damped instability waves ( $k_i \rightarrow 0$ ,  $k_i > 0$ ) as a function of the frequency when the axial location is increased from the origin to the end of the core region. Cold jet of Mach number  $M = 1.7$ .  $\square$ ,  $n = 0$ ;  $\blacksquare$ ,  $n = 1$ ;  $\bullet$ ,  $n = 2$ ;  $\circ$ ,  $n = 3$ ; dashed line, analytic continuation into the other Riemann sheet. The solid lines on the sheet 2 give rise to algebraic decay in the cross-stream direction.

fluctuations is algebraic at the limit  $k_i \rightarrow 0$ . Application of the criterion for exponential-algebraic transition reveals that the subdomain  $\Omega^*$  is non-empty only for small azimuthal wavenumbers. For instance, the line associated with  $n = 3$  passes along a single sheet of the Riemann surface. This simple topological configuration leads to an exponential decay in the cross-stream direction for all  $X$ . It follows that the dominant contribution of instability waves to acoustic radiation in the near field ( $r_\alpha = O(1)$ ) is given by segments of the real  $\omega$ -axis, depending on small azimuthal wavenumbers and control parameters. The mapping of these segments through  $\omega^* = \omega^*(X)$  into the physical domain shows locations  $X$  for which it is possible to find a frequency  $\omega^*$  such that  $k(X; \omega^*) \cap K(\omega^*)$  is non empty, that is, the cross-stream decay of disturbances is algebraic. For the axisymmetric Kelvin-Helmholtz mode, figure 4.5 shows that the lower bound of  $\Omega^*$  is displaced into the fully developed region, as  $M \rightarrow 1$ ,  $M > 1$ , where the centreline mean velocity of the jet is a decreasing function of  $X$ . In this last case, numerical computations of spatial branches may be continued in the developed jet region in order to have this upper bound. But, the present approach fails when the order of magnitude of the frequency becomes comparable with that of the slow space variable  $X = \varepsilon x$ . Note also that the upper bound is not located in the core region. For non-axisymmetric modes, figure 4.6 shows that the lengths of these segments are zero for low supersonic jets (typically  $M < 1.6$  in figure 4.6). Thus, we conclude that for low supersonic jets, only axisymmetric disturbances may

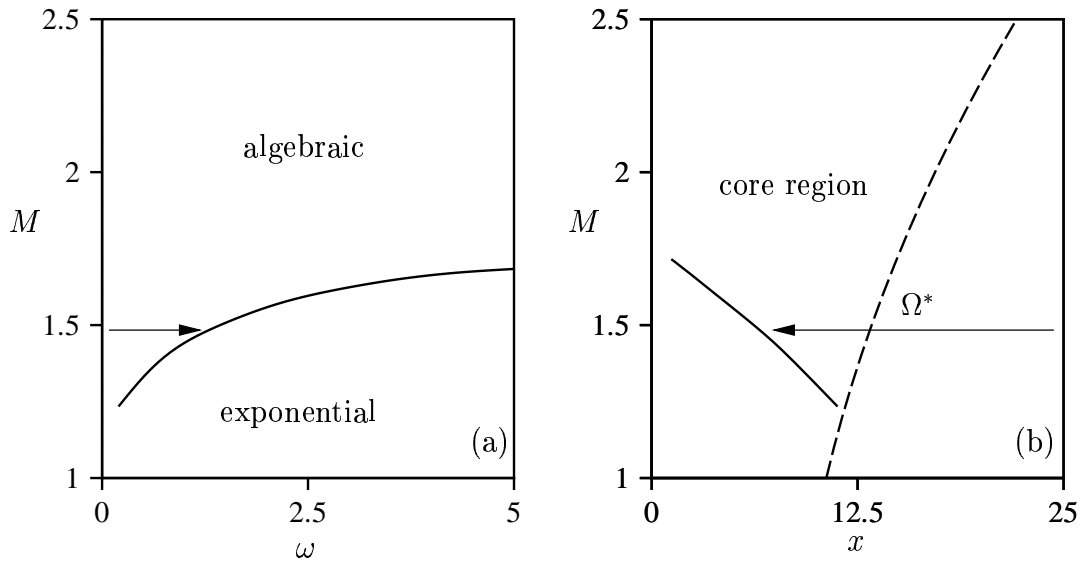


FIG. 4.5 – Curves of exponential-algebraic transition in  $M$ - $\omega$  (a) and  $M$ - $x$  (b)  $p$  lanes for  $n = 0$ . The dashed line in (b) gives the end of the core region.

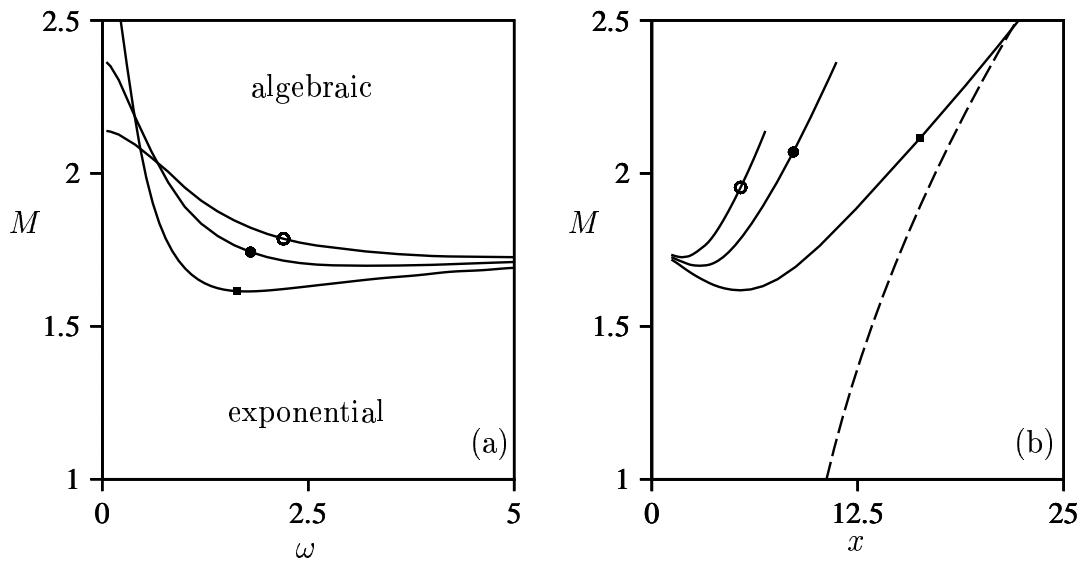


FIG. 4.6 – Curves of exponential-algebraic transition in  $M$ - $\omega$  (a) and  $M$ - $x$  (b)  $p$  lanes for non-axisymmetric modes.  $\blacksquare$ ,  $n = 1$ ;  $\bullet$ ,  $n = 2$ ;  $\circ$ ,  $n = 3$ ; the dashed line in (b) gives the end of the core region.



generate acoustic radiation in the near field; the contribution from non-zero azimuthal wavenumbers represent a field of hydrodynamic type. For high supersonic jets, the entire history of spatial evolutions of instability waves need to be taken into account in determining the contribution of each azimuthal wavenumber and the physical regions concerned by the radiation of sound.

For  $\alpha = 1$  ( $r_\alpha \sim X$ ), the cross-stream decay of fluctuations is not simply given by a Hankel function. The pressure field may be represented by a Fourier integral giving both the hydrodynamic components as well as the radiated sound. This integral over all real wavenumbers can be evaluated for small  $\varepsilon$  by applying the method of steepest descent. If the original contour of integration along the real axis can be deformed into a steepest path issuing from the saddle point on the Riemann surface, then the integral can be evaluated asymptotically. The sheet of the surface itself, along which the contour passes, determines the branch of the function used in the integral (see Crighton and Huerre [45], Tam and Burton [115]). Then, it is possible to show that a condition for acoustic radiation in the far field is given by a non empty intersection of the branch cut and a neighbourhood of spatial branches. Note also that this result fails in the neighbourhood of branch points  $\pm k_0$  where a complete asymptotic analysis must be developed by considering  $\lambda$  as a small parameter.

## 4.5 Conclusion

We have examined the near-field pressure decay generated by instability waves in axisymmetric jets as a source of noise. Exponential decay of pressure fluctuations is found to change to algebraic around locations  $X$  which depend on the azimuthal properties of the local plane waves. This transition holds in a way which is given by a turning-point problem in the neighbourhood of branch points, where the classical approach in terms of matched asymptotic expansions leads to a disordered expansion in the intermediate domain. The algebraic function  $\lambda$  needs to be considered as a small parameter to account for this qualitative change of behaviour.

It has been shown that for low supersonic jets ( $M \rightarrow 1$ ,  $M > 1$ ) the location of the lower bound of the radiating region associated with the axisymmetric Kelvin-Helmholtz mode moves inside the developed jet region. It follows that the cross-stream wavenumber, given by the imaginary part of  $\lambda$ , goes to zero, so the wavelength may become larger than the envelope scale. According to numerical results, other azimuthal modes no longer generate sound in the near field.

Finally we note that the generalization of these concepts to subsonic jets is an open question (see Cooper and Crighton [44] and Crighton and Huerre [45] for a discussion of superdirective sources in low-speed jets). For  $M = 0$  and  $\omega_i = 0$ , the branch cut  $K$  is identical with the imaginary axis and one can use the Hilbert transform of the perturbation to reduce the analysis to positive wavenumbers (for instance, see Huerre and Monkewitz [31]).

This study has been supported by the french government and by ONERA.

## Appendix A : equation outside the jet

In this appendix the equation (4.5) to be solved outside the jet is obtained from equations of motion. On factoring out the exponential dependence on  $\theta$  and  $t$  the governing equations for the spatial part  $\phi_n = (\mathbf{u}_n, p_n)$  of the solution are obtained from (4.1) and (4.2). With respect to a cylindrical coordinate system  $(x, r, \theta)$  centred at the nozzle exit and the corresponding velocity components  $(u_n, v_n, w_n)$ , the governing equations are

$$-i\omega u_n + \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} = -\frac{1}{\bar{\rho}_\infty} \frac{\partial p_n}{\partial x}, \quad (4.17)$$

$$-i\omega v_n + \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r} - \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r^2} v_n = -\frac{1}{\bar{\rho}_\infty} \frac{\partial p_n}{\partial r}, \quad (4.18)$$

$$-i\omega w_n + \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r} \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r^2} w_n = -\frac{1}{\bar{\rho}_\infty r} i n p_n, \quad (4.19)$$

$$-i\omega p_n + \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty}{r} \frac{\partial p_n}{\partial r} + \frac{1}{M^2} \left( \frac{\partial v_n}{\partial r} + \frac{v_n}{r} + \frac{i n w_n}{r} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) = 0. \quad (4.20)$$

Substitution of (4.17), (4.18) and (4.19) into (4.20) it is straightforward to find that the equation to be solved can be cast into the form

$$\begin{aligned} & \delta_R^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{n^2}{R^2} \right) u_n + \left( k_0^2 + \delta_X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) u_n = \\ & \left( \delta_R^4 \bar{\rho}_\infty \left( \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty M}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - 2\delta_R^2 \frac{\varepsilon \bar{v}_\infty M^2}{R} i\omega \bar{\rho}_\infty \frac{\partial}{\partial R} \right) u_n, \end{aligned} \quad (4.21)$$

where the outer variables  $R$  and  $X$  are defined by  $R = \delta_R(\varepsilon)r$  and  $X = \delta_X(\varepsilon)x$ . The order functions  $\delta_R$  and  $\delta_X$  are real, continuous functions of  $\varepsilon$  in a neighbourhood of the origin and such that  $\delta_X \sim \delta_R$  far away from the center of the jet.



# Chapitre 5

## Perspectives

«Que ce soit la fin du livre - mais non la fin de la recherche » disait Saint Bernard de Clairvaux. En effet, le travail entamé dans cette thèse ouvre des perspectives motivantes, autant du point de vue théorique que numérique. Dans les chapitres 2 et 3, il a été démontré que l'espace des nombres d'ondes est une surface de Riemann, dont la structure est fixée en particulier par les conditions aux limites du problème physique. Lorsque les effets de compressibilité sont suffisamment grands, cette structure remarquable permet d'expliquer l'émergence de certains modes lorsque la pulsation décrit une courbe d'un domaine simplement connexe du plan complexe. Dans les jets supersoniques, ces modes émergents, de type  $K_0^-$ , conduisent à des ondes marginalement absolues, susceptibles de participer à la dynamique du jet, en autorisant certaines perturbations à remonter l'écoulement jusqu'à la sortie de la tuyère génératrice. En particulier, la description des contributions des ondes associées aux modes de  $K_0^-$ , non référencés dans la littérature sur le bruit de jet, par un modèle d'ondes stochastiques à la Tam et Chen [93] devrait permettre de préciser un certain nombre d'éléments du scénario d'émergence des fréquences fondamentales, mesurées en amont des jets non adaptés.

Le chapitre 4 a clairement montré l'importance des points de branchement dans la génération d'ondes acoustiques des jets supersoniques. Une compréhension plus approfondie du voisinage de ces points devrait apporter des informations sur la contribution des modes de  $K_0^\pm$  au champ lointain. Dans le même esprit, on peut espérer en déduire une représentation plus satisfaisante des transitions subsonique-supersonique pour le mode de Kelvin-Helmholtz lorsque les paramètres de contrôle varient. Certains de ces problèmes ont été abordés, dans un contexte différent, par Crighton et Huerre [45], puis par Cooper et Crighton [44] qui ont proposé d'unifier la théorie des sources superdirectives et la théorie des modes globaux. À ce niveau, il semble donc intéressant de confronter la notion de transition exponentielle-algébrique discutée dans le chapitre 4 à la théorie développée par Cooper et Crighton, dans le cas des ondes de vitesse de phase quasi-sonique.

Une autre perspective, plus appliquée, consisterait à étendre le calcul du champ proche aux jets pour lesquels la condition d'existence de modes de  $K_1^+$  est satisfaite, par exemple au jet chaud de Seiner *et al.* [17]. Il a en effet été démontré, dans le chapitre 2, que deux cas génériques peuvent se présenter, selon que la condition est satisfaite ou non. Dans les

---

comparaisons numériques du chapitre 3, seul le second cas a été considéré. Concernant le premier cas, des calculs de taux d'amplifications locaux indiquent qu'on peut s'attendre à ce que les modes de  $K_1^+$  jouent un rôle non négligeable dans le bruit de jet, ce que semblent d'ailleurs confirmer les observations de Seiner *et al.* [17]. Une procédure de calcul complète est désormais disponible et peut s'étendre au calcul des contributions des modes de  $K_1^+$ . Le point délicat est le phénomène de changement de modes, mis en évidence dans le chapitre 2 et dont l'interprétation physique est un point d'interrogation majeur. Et puis il faut souligner que la contribution totale ne peut *a priori* pas être obtenue simplement en sommant les champs proches associés aux différents modes. Enfin, notons que dans un contexte plus contractuel, des simulations numériques propres au jet chaud ont débuté en décembre 2002.

Et puis pour terminer sur une citation, je reprendrai les termes d'Henri Poincaré pour lequel *douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes qui, l'une et l'autre, nous dispensent de réfléchir*. Que la recherche vous entende!

## Annexe A

# Fonctions analytiques, surfaces de Riemann

L'objet de cette annexe est de présenter la notion de prolongement analytique des fonctions d'une variable complexe, et plus particulièrement la structure topologique des domaines d'holomorphie des fonctions multiformes<sup>1</sup>. Ces fonctions se rencontrent généralement lorsqu'une grandeur physique est définie de manière implicite dans le plan complexe. Dans le cadre de la théorie des instabilités, la relation de dispersion qui lie pulsation et nombre d'onde complexes en constitue un exemple : la détermination de l'une des deux grandeurs, comme une fonction complexe  $f$  de l'autre, conduit à s'interroger sur la structure du domaine d'holomorphie de  $f$  (voir par exemple Kupfer et al [136], Bers [58]). Ce domaine peut très bien être une *surface de Riemann* constituée d'un nombre fini ou infini de feuillettes, selon la nature du système physique considéré. Il convient alors de traiter les grandeurs physiques ainsi définies comme des fonctions définies sur des *surfaces à points multiples* et non pas comme des fonctions définies sur  $\mathbb{C}$  ou  $\hat{\mathbb{C}}$  (compactifié topologique de  $\mathbb{C}$ , obtenu par l'adjonction du point à l'infini). Si maintenant, on convient que la fonction peut prendre ses valeurs dans  $\hat{\mathbb{C}}$  et que si  $f(a) = \infty$  alors  $1/f(a) = 0$ , on élimine un certain nombre de points exceptionnels, comme les pôles, à condition de passer du concept d'holomorphie à celui de méromorphie.

L'étude des fonctions méromorphes définies sur une surface de Riemann constitue une généralisation naturelle de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe. La démarche retenue ici est volontairement descriptive, et n'a pour objectif que de donner un aperçu des concepts théoriques abordés dans la description des instabilités dans les fluides. Les lecteurs intéressés trouveront une approche des surfaces de Riemann dans les ouvrages de S. Chatterji [137] et H. Cartan [138]. Dans le cadre de la théorie des instabilités hydrodynamiques, le recours aux transformées de Fourier-Laplace conduit souvent à exprimer les fluctuations des grandeurs physiques en termes de transformées inverses, et par conséquent, en termes d'intégrales curvilignes de fonctions complexes, en général

---

1. On utilise aussi le terme de fonction multivalente, à l'opposé de celui de fonction univalente. On dit qu'une fonction est univalente si elle prend des valeurs distinctes en des points distincts de son domaine de définition.

définies sur une surface de Riemann. L'évaluation de ces intégrales est de première importance puisqu'elle seule permet de connaître le comportement spatio-temporel des ondes d'instabilités. L'étude des fonctions méromorphes définies sur une surface de Riemann et de leurs intégrales curvilignes forme un chapitre essentiel de la théorie, qu'on retrouve dans le cours de L. Schwartz [139]. La théorie actuelle traite aussi des fonctions de plusieurs variables complexes, dont la généralisation nous amène à la théorie des variétés complexes.

## A.1 Prolongement analytique

Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur la notion de *prolongement holomorphe* de fonctions de la variable réelle. Une fonction réelle analytique en un point  $a$  est développable en série entière autour de  $a$ . La définition du rayon de convergence d'une série entière est la même dans les deux cas réel et complexe. Le développement en série entière d'une fonction réelle analytique, pris en tant que développement en série sur  $\mathbb{C}$ , est donc convergent sur l'intérieur d'un disque centré en  $a$  et de rayon donné par le rayon de convergence de la série réelle. Cette série définit sur ce disque une fonction holomorphe de la fonction réelle. Par exemple, la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  pour  $x > 0$  se prolonge grâce à son développement en série entière sur le disque ouvert  $|x - 1| < 1$ .

Considérons maintenant deux fonctions holomorphes  $f$  et  $g$ , définies sur des domaines d'intersection non vide et telles que  $f(z) = g(z)$  si  $z$  est dans l'intersection des deux domaines. Alors  $g$  est appelé un *prolongement analytique* de  $f$  et  $f$  un *prolongement analytique* de  $g$ . Du théorème des zéros isolés (les seuls points d'accumulation possibles des zéros sont des points de la frontière du domaine d'holomorphic), on déduit qu'un prolongement analytique est unique, s'il existe. Pour obtenir éventuellement un prolongement analytique, on peut développer  $f$  en série entière autour d'un point  $z_0$ ;  $f$  est alors à nouveau développable en tout point  $z_1$  du disque ouvert de convergence de cette série. Dans le cas où on sort du disque de convergence initial, on peut réitérer le procédé pour un point  $z_2$  intérieur au deuxième disque de convergence mais extérieur au premier. Avec ce procédé de construction appelé procédé des *cercles de convergence enchaînés* [37], on peut obtenir un prolongement analytique sur une suite de disques ouverts de centres  $z_n$  qui se recourent. Il existe toutefois des fonctions pour lesquelles le prolongement au-delà du premier cercle de convergence n'est pas possible (considérer par exemple le cas défini par la série de terme général  $z^{n!}$ ). On a d'ailleurs le résultat important suivant : *pour tout domaine  $D \subset \mathbb{C}$ , il existe une fonction holomorphe  $f$  sur  $D$  qui ne peut être prolongée de manière holomorphe en dehors de  $D$ .*

Étant donné une fonction  $f$ , le problème qui consiste à trouver le plus grand domaine sur lequel  $f$  puisse être prolongée de manière analytique n'est pas simple. En effet, s'il existe des prolongements analytiques le long de deux arcs de même point de départ et se rencontrant en un autre point, rien ne prouve qu'on obtient le même développement en série entière au point de rencontre, comme le montre l'exemple de la fonction racine carrée : le prolongement de  $\sqrt{z}$ , définie par son développement en série binomiale sur le disque  $|z -$

$|z| < 1$ , le long du demi-cercle supérieur ( $z$  est de partie imaginaire positive) et le long du demi-cercle inférieur ne sont pas des prolongements l'un de l'autre ; la réunion de ces deux prolongements ne définit pas de fonction car les deux séries ne donnent pas la même valeur en  $z = -1$ . Une telle ambiguïté n'est pas compatible avec la notion habituelle de fonction. On retrouve cette situation dans l'analyse linéaire de l'équation de Ginzburg-Landau, équation modèle souvent utilisée dans le domaine des instabilités hydrodynamiques (voir Huerre et Rossi [32]). La détermination du nombre d'onde complexe fait intervenir une racine carrée, si bien que pour une valeur (complexe) de la pulsation, on arrive à deux valeurs différentes pour le nombre d'onde, qu'on note classiquement  $k^+$  et  $k^-$ . Il est possible de montrer que ces deux fonctions correspondent à des ondes situées de part et d'autre d'un forçage donné et ne coïncident qu'en des points particuliers, appelés points de branchement (voir par exemple [136]).

Si on analyse le cas de la fonction racine carrée, on constate que la réunion des deux arcs de cercles constitue une courbe de Jordan<sup>2</sup> dont l'intérieur contient le point 0 qui est un point singulier pour la fonction  $f$  (il n'existe pas de série entière en  $z$  de rayon non nul dont le carré s'identifie à  $z$ ). Les deux arcs ne sont pas homotopes dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . On peut même, d'une manière générale énoncer un théorème, dit de monodromie, précisant ce genre de propriété.

*Soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux arcs de Jordan reliant des points  $a$  et  $b$ . Si  $f$  est prolongeable de manière analytique le long de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  depuis  $a$  jusqu'en  $b$  et si  $\gamma_1$  peut se déformer continûment en  $\gamma_2$ ,  $a$  et  $b$  restant fixes, de telle façon que  $f$  soit prolongeable de manière analytique le long de tout arc intermédiaire, d'extrémités  $a$  et  $b$ , alors les deux prolongements donnent le même développement en série entière en  $b$ .*

Comme toute fonction holomorphe sur un domaine donné  $D$  est définie de manière unique par son développement en série entière autour d'un point  $a \in D$  et que toute série entière possédant un rayon de convergence strictement positif définit une fonction holomorphe, on dit que les séries entières de rayon strictement positif définissent des *germes de fonctions holomorphes* ou encore des *éléments de fonction* [137].

## A.2 Surfaces de Riemann

### A.2.1 Structure topologique

Considérons à nouveau l'exemple de la fonction racine carrée de la section précédente qui a mis en évidence une singularité dans le prolongement analytique. On peut résoudre ce problème si, selon le procédé de Riemann, on prend comme domaine de définition non plus un domaine de  $\mathbb{C}$  ou  $\hat{\mathbb{C}}$  mais une "surface" qui recouvre la sphère de Riemann. Dans l'exemple de la racine carrée où on revient à la même fonction après deux tours autour de 0, on place deux plans appelés feuillets sur le plan complexe. Il faut alors imaginer qu'on

2. Une courbe de Jordan est l'image du cercle unitaire dans  $\mathbb{R}^2$  par une application continue injective dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Les contours d'intégration  $L$  et  $F$  rencontrés lors de la détermination de la fonction de Green dans le chapitre 2 sont des courbes de Jordan dans  $\hat{\mathbb{C}}$ .



a effectué une coupure de ces deux plans suivant l'axe des réels négatifs et que les bords ainsi définis ont été identifiés, si bien que lorsqu'on traverse l'axe réel négatif on passe du plan supérieur au plan inférieur et vice-versa (voir figure A.1). On aurait bien sûr pu

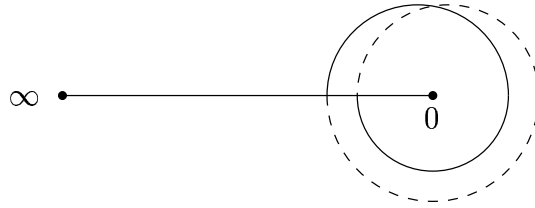


FIG. A.1 – Surface de Riemann de la fonction  $\sqrt{z}$ .

effectuer la coupure le long de toute demi-droite allant de 0 à  $\infty$ . L'identification n'est possible dans  $\mathbb{R}^3$  que par l'introduction de points multiples : tout point de  $\hat{\mathbb{C}}$ , en dehors de 0 et  $\infty$ , est recouvert par deux points de la nouvelle "surface". Les points 0 et  $\infty$ , appelés *points de branchement*, sont recouverts par un seul point. La surface ainsi construite est une surface de Riemann. Topologiquement, elle correspond à la surface engendrée par deux sphères dans lesquelles on aurait effectué une coupure le long d'un arc de cercle et dont on aurait identifié les bords deux à deux, c'est-à-dire à une sphère ou un plan achevé (points de branchement 0 et  $\infty$  compris). On peut maintenant définir  $z \mapsto \sqrt{z}$  sur cette "surface" :  $\sqrt{0} = 0$ ,  $\sqrt{\infty} = \infty$ , et pour deux points situés l'un au-dessus de l'autre les valeurs sont prises opposées en respectant la continuité sur chaque feuillet. La fonction ainsi définie est partout continue et, en dehors des points de branchement, holomorphe.

Considérons un autre exemple, donné par la fonction  $z \mapsto \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ , où  $a, b, c$  sont deux à deux distincts. En dehors des points  $a, b, c$  où la fonction vaudra 0 et du point à l'infini où elle vaudra  $\infty$ , il existe deux valeurs pour  $f$ . On introduit donc à nouveau une surface à deux feuillets, qui possède quatre points de branchements. Si on

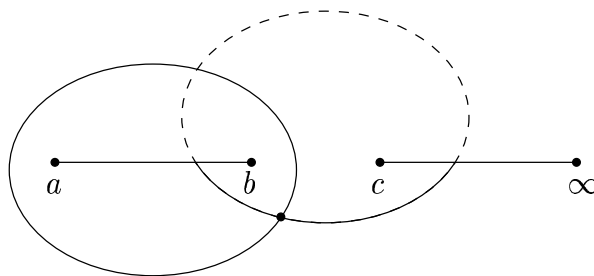


FIG. A.2 – Surface de Riemann de la fonction  $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ .

coupe les deux feuillets le long des segments  $[a, b]$  et  $[c, \infty]$  supposés sans points communs, et qu'on identifie les bords ainsi créés, on obtient une surface de Riemann (figure A.2) qui recouvre  $\hat{\mathbb{C}}$  sur laquelle  $f$  est holomorphe en dehors des points de branchement. Dans

ce cas, la surface de Riemann est homéomorphe à un tore. Si on s'intéresse à des racines d'ordre supérieur, il convient d'introduire une surface de Riemann possédant un nombre de feuillettes en rapport avec cet ordre dont les bords sont identifiés de manière convenable. Il est important de noter qu'en général rien ne prouve qu'il existe un nombre fini de feuillettes. Pour revenir à une situation connue, on peut considérer la fonction définie par l'intégrale de  $1/z$  le long d'un chemin qui va de 1 à  $z$  sans passer par zéro. Dans ce cas, la surface de Riemann qu'il convient d'introduire a une infinité dénombrable de feuillettes et les points 0 et  $\infty$  sont des points de branchement logarithmiques.

En dehors des points de branchements, les surfaces de Riemann construites jusqu'ici ont localement une structure identique à celle de la partie du plan complexe qu'elles recouvrent. Localement ces surfaces, diminuées de leurs points de branchement, sont donc partout bidimensionnelles, mais leur structure topologique globale est très différente de celle d'un espace de dimension deux. Il existe par exemple sur la surface définie dans le deuxième exemple des courbes simples fermées qui ne séparent pas la surface en deux parties (figure A.2).

### A.2.2 Définition

On peut, plus généralement, définir une fonction méromorphe sur un domaine porté par des feuillettes plutôt que par  $\hat{\mathbb{C}}$ . Ce procédé permet de supprimer certaines ambiguïtés lors des prolongements analytiques, comme c'est le cas pour la racine carrée. Ainsi, les "surfaces" qu'il est possible d'introduire sont des variétés de dimension deux. Pour tout point  $A$  d'une telle "surface", il existe un homéomorphisme qui transforme un certain voisinage  $U(A)$  de  $A$  en un domaine  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\varphi_A: U(A) \rightarrow \mathbb{C}$ . Mais il faut adapter la notion de compatibilité de deux cartes  $(U(A); \varphi_A)$  et  $(U(B); \varphi_B)$ , définies dans le cas des variétés différentiables réelles [139]. On arrive ainsi à la définition d'une surface de Riemann.

*On appelle surface de Riemann une variété connexe de dimension deux pour laquelle on a la propriété suivante : si  $U(A)$  et  $U(B)$  sont des voisinages de  $A$  et  $B$  du type précédent et d'intersection non vide, alors la fonction  $\varphi_B \circ \varphi_A^{-1}$  définie sur  $\varphi_A(U(A) \cap U(B))$ , image de l'intersection, est holomorphe.*

Le passage d'un système de coordonnées locales à l'autre se fait par l'intermédiaire d'une fonction holomorphe. Une fonction  $f$  définie sur une surface de Riemann  $R$ ,  $f: R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est holomorphe (respectivement méromorphe) au voisinage de  $A$  si  $f \circ \varphi_A^{-1}$  l'est au voisinage de  $\varphi_A(A)$ .

### A.2.3 Paramétrage local canonique

Les surfaces de Riemann introduites dans la définition ci-dessus sont des surfaces de Riemann *abstraites*, par opposition à celles introduites dans la section A.2.1, définies comme des recouvrements de domaines de  $\hat{\mathbb{C}}$  et appelées surfaces de Riemann *concrètes*. On peut montrer que toute surface de Riemann est l'ensemble de définition d'une fonction  $g$  qui lui donne un caractère concret. Pour les surfaces concrètes, tout point  $A \in R$  peut

être mis en liaison avec un point  $s(A)$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  appelé *trace*, par l'application *trace*  $s : R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Les applications  $s \circ \varphi_A^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  sont dites *fonctions de représentation locales*. Elles sont méromorphes (ou holomorphes à valeurs dans  $\hat{\mathbb{C}}$ ). Sur un domaine contenant  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  on peut donc les développer, moyennant un changement d'origine convenable, sous la forme

$$b + \sum_{p=k}^{\infty} a_p t^p, \quad \text{ou} \quad \sum_{p=-k}^{\infty} a_p t^p,$$

avec  $k > 0$ ,  $a_k \neq 0$  si  $b \in \mathbb{C}$  pour la série de gauche et  $k > 0$ ,  $a_k \neq 0$  si  $a = \infty$  pour la série de droite. La valeur de  $k$  est indépendante des paramétrages locaux adoptés (invariance sous un homéomorphisme holomorphe pour une surface de Riemann concrète donnée). Elle a donc une signification intrinsèque pour tout point d'une telle surface. Pour une surface de Riemann abstraite,  $k$  ne peut apparaître qu'après le choix de  $g$  et dépend de  $g$ .

Par homéomorphisme holomorphe, les séries précédentes se ramènent soit à  $w = t^k$ , soit à  $w = 1/t^k$ , avec  $k$  entier non nul. On obtient ainsi des fonctions de représentation locale, canoniques :  $t$  prend le nom de paramètre d'uniformisation locale. Comme la fonction  $t \mapsto w$  prend exactement  $k$  fois toute valeur de  $\mathbb{C}^*$ , il existera un domaine entourant  $a$  dont les points, sauf  $a$ , sont atteints  $k$  fois. On dit que  $a$  est *point de ramification d'indice  $k$*  (ou aussi point de branchement d'ordre  $k - 1$ ). Pour qu'il y ait isomorphisme local, il faut et il suffit que  $k = 1$ .

### A.2.4 Fonctions analytiques

Seule la notion de fonction analytique sur une surface de Riemann permet vraiment de définir les fonctions qu'on rencontre en théorie des instabilités et même plus généralement en théorie des fonctions. Cette notion est une extension de celle d'holomorphic. Nous avons la définition suivante.

*Une fonction  $f : R \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur une surface de Riemann concrète  $R$  est dite analytique si elle admet en tout point un développement en série de Laurent, suivant le paramètre d'uniformisation locale, ne comprenant qu'un nombre fini de termes ayant des puissances négatives.*

Les points de branchement d'ordre fini non nul sont des singularités des fonctions définies dans  $\hat{\mathbb{C}}$ , à valeurs dans  $\hat{\mathbb{C}}$  (par exemple, l'origine dans le cas de la racine carrée). La plupart du temps, ils perdent cette propriété lorsque les fonctions sont définies sur des surfaces de Riemann. Ainsi, tous les points autour desquels une fonction peut être développée en une série de Laurent vérifiant la propriété précédente, comme par exemple les points d'holomorphic, les pôles ou points de branchement, sont intégrés dans le domaine de définition de la surface de Riemann, associée à la fonction  $f$ . Parmi les points frontières de la surface de Riemann, on peut avoir des singularités non isolées (le cercle de rayon unité pour la fonction définie par la somme des termes  $z^n$ , pour  $n$  variant de zéro à l'infini), des singularités simples isolées ou isolées sur  $m$  feuillets (le point  $\infty$  pour  $\exp(z^{1/m})$ ) et des singularités logarithmiques isolées.

Les séries de Laurent ne contenant qu'un nombre fini de termes affectés d'une puissance négative sont des éléments de fonction analytique. Ce concept comprend celui d'élément

de fonction holomorphe, déjà abordé dans la section A.1. Si on dispose d'un élément de fonction analytique d'une fonction méromorphe  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , on peut par prolongement analytique obtenir de nouveaux éléments de fonction analytique. L'ensemble de tous les éléments de fonction analytique dont on dispose finalement s'appelle la représentation analytique de la fonction considérée ainsi prolongée. On montre que la représentation analytique forme une surface de Riemann au sens de la définition donnée, surface de Riemann concrète sur laquelle les éléments de fonction définissent une fonction. On peut inversement trouver pour toute surface de Riemann concrète  $R$  une fonction qui soit méromorphe sur tout  $R$ , qui ait, en des points différents mais de même trace, des éléments de fonction différents et ne soit pas prolongeable analytiquement en dehors de  $R$ .

### A.3 Fonctions algébriques

L'utilisation des transformées intégrales permet de simplifier la nature de certains problèmes physiques. Dans ce cas, la détermination de la solution du système initial revient souvent à évaluer la transformée inverse d'une fonction multiforme, définie de manière implicite, comme c'est le cas pour la relation de dispersion. Mais la connaissance des extrémités du chemin d'intégration ne suffit pas pour calculer l'intégrale, en particulier lorsque l'intégrand  $F(z, \phi(z))$  est une fraction rationnelle irréductible et  $y = \phi(x)$  une fonction algébrique définie par un polynôme irréductible. C'est, par définition ce qu'on appelle une *intégrale abélienne* et les propriétés des surfaces de Riemann sont ici de première importance. Il n'est pas question d'aborder la théorie des intégrales abéliennes dans cette annexe, mais plutôt de préciser la notion de fonction algébrique. Une introduction aux fonctions algébriques, incluant certaines applications au calcul d'intégrales est donnée dans les ouvrages de Fuchs et Levin [37] et d'Appell et Goursat [140].

#### A.3.1 Définition, branches régulières

Donnons nous un polynôme irréductible  $\phi(\lambda, z) = \phi_0(z)\lambda^n + \dots + \phi_n(z)$  où les  $\phi_j(z)$  sont des polynômes en  $z$  dont le degré n'excède pas une certaine valeur, disons  $m$ , et tel qu'il existe au moins un entier  $j \leq n$  pour lequel  $\phi_j$  soit de degré  $m$ . On désigne par  $\mathcal{E}$  le domaine obtenu à partir du plan complexe, en enlevant les *points critiques* du polynôme  $\phi(\lambda, z)$ . Les points critiques sont (i) les racines multiples de  $\phi(\lambda, z)$ , vu comme un polynôme de la variable  $\lambda$ , à  $z$  fixé et (ii) les racines de  $\phi_0(z)$ . D'après un résultat classique d'algèbre [37], les points critiques coïncident avec les racines de la *résultante* des deux polynômes  $\phi$  et  $\partial\phi/\partial\lambda$ . On en déduit que pour tout point  $z \in \mathcal{E}$ , l'équation  $\phi(\lambda, z) = 0$  admet  $n$  racines finies distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . La fonction  $\lambda = \lambda(z)$  est alors une fonction multiforme dans  $\mathcal{E}$ . On dit encore que  $\lambda(z)$  est une fonction algébrique, déterminée par l'équation  $\phi(\lambda, z) = 0$ . Les points critiques de  $\phi(\lambda, z)$  sont appelés *points singuliers* de la fonction algébrique. De telles fonctions se rencontrent en acoustique, en particulier lorsque on cherche à établir le comportement du champ acoustique dans un guide bidimensionnel. Pour une fréquence réelle donnée, le nombre d'onde transversal  $\lambda$  se déduit du nombre

d'onde longitudinal  $z$  en utilisant un argument géométrique, qui conduit à une équation de la forme  $\phi(\lambda, z) = z_0^2 - z^2 - \lambda^2 = 0$ . L'équation  $\phi(\lambda, z) = 0$  est une relation de dispersion et  $z_0$  correspond à ce qu'on appelle le nombre d'onde total. A ce niveau, on peut même noter que les points singuliers finis sont associés aux fréquences de coupure, bien connues des acousticiens et obtenues en annulant  $\lambda$ , c'est-à-dire pour les points  $z = \pm z_0$ .

Ainsi, la relation  $\phi(\lambda, z) = 0$  permet de définir implicitement  $\lambda$  en fonction de  $z$  (respectivement  $z$  en fonction de  $\lambda$ ), comme une fonction multiforme en général dont il s'agit de préciser les branches. Pour clarifier les choses, énonçons un théorème qui reprend des situations connues dans le cas réel.

*On désigne par  $\phi(\lambda, z)$  un polynôme irréductible des deux variables complexes  $\lambda$  et  $z$ . Si pour un couple de nombres complexes finis  $(\lambda_0, z_0)$ , on a les relations*

$$\phi(\lambda_0, z_0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(\lambda_0, z_0) \neq 0,$$

*alors il existe une unique branche holomorphe (on dit aussi régulière)  $\lambda = \lambda(z)$  dans un voisinage  $D_0$  de  $z_0$ , telle que  $\lambda(z_0) = \lambda_0$  et  $\phi(\lambda(z), z) = 0$  pour  $z \in D_0$ . Ce résultat s'étend à  $z_0 = \infty$  en posant  $Z = 1/z$  et en considérant l'équation  $\psi(\lambda, Z) = 0$ , obtenue à partir de  $\phi(\lambda, 1/Z) = \psi(\lambda, Z)/Z^m$ , au voisinage de  $Z = 0$ .*

De la définition de  $\mathcal{E}$ , on sait que la condition  $\partial\phi/\partial\lambda \neq 0$  (ou  $\partial\psi/\partial\lambda \neq 0$  si  $z = \infty$ ) est satisfaite en tout point de  $\mathcal{E}$ . D'un autre côté, on sait que l'équation  $\phi(\lambda, z) = 0$  admet  $n$  racines distinctes finies dans  $\mathcal{E}$ . On déduit du théorème précédent que, par le procédé de prolongement analytique d'une branche holomorphe le long d'un contour passant par  $z_0 \in \mathcal{E}$  et contenu dans  $\mathcal{E}$ , il peut être obtenu toutes les autres branches holomorphes  $\lambda_j(z)$ , satisfaisant à  $\phi(\lambda_j(z), z) = 0$  dans le voisinage de  $z_0$ . En d'autres termes, toute branche holomorphe d'une fonction algébrique  $\lambda = \lambda(z)$  est le prolongement analytique d'une autre branche holomorphe. Les branches holomorphes déterminent dans  $\mathcal{E}$  une fonction analytique (multiforme)  $\lambda(z)$ . En particulier, le prolongement d'une branche holomorphe depuis le point  $z_0$  le long d'un lacet contenu dans un domaine simplement connexe de  $\mathcal{E}$  retourne toujours à la même branche en  $z_0$ . On peut donc s'attendre à ce que le caractère de la permutation des branches soit déterminé par la distribution des points singuliers sur la sphère de Riemann.

### A.3.2 Points singuliers

Les points singuliers sont les points qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{E}$ . Si on reprend le cas de la racine carrée, considérée cette fois comme une fonction algébrique,  $\phi(\lambda, z) = \lambda^2 - z = 0$ , on voit que  $z = 0$  est une racine multiple de  $\phi$ . Le changement de variable  $Z = 1/z$  nous amène à considérer le polynôme  $\psi(\lambda, Z) = \lambda^2 Z - 1$  au voisinage du point  $Z = 0$ . On voit alors que  $Z = 0$  ( $z = \infty$ ) annule le plus haut coefficient en  $\lambda$  dans  $\psi(\lambda, z)$  : c'est aussi un point singulier de l'équation algébrique, mais de nature différente. D'une manière générale, on regroupe les points singuliers en deux ensembles finis, selon qu'ils correspondent à des racines multiples de  $\phi(\lambda, z)$  (respectivement  $\psi(\lambda, Z)$ ) ou à des zéros de  $\phi_0(z)$  (ou du plus haut coefficient de  $\psi(\lambda, Z)$  en  $Z$ ). On voit immédiatement que pour les points multiples, le

théorème de la section précédente ne s'applique plus. Nous avons la proposition suivante, valable dans  $\mathbb{C}$ .

*Si l'équation  $\phi(\lambda, z_0)$  admet une racine d'ordre  $p$ , qu'on peut noter  $\lambda = \lambda_0$ , et si  $\epsilon$  est un nombre positif suffisamment petit, alors il est toujours possible de trouver un voisinage épointé  $D_0$  de  $z_0$  tel que pour tout  $z \in D_0$ , il existe  $p$  racines simples distinctes  $\lambda = \tilde{\lambda}_j(z)$ , où  $j = 1, \dots, p$ , de l'équation  $\phi(\lambda, z) = 0$ , satisfaisant à la condition  $|\tilde{\lambda}_j(z) - \lambda_0| < \epsilon$ .*

Il est important de marquer la différence entre les fonctions  $\lambda_j(z)$ , branches holomorphes de la fonction algébrique  $\lambda(z)$ , et les fonctions  $\tilde{\lambda}_j(z)$  qui sont des branches arbitraires de  $\lambda(z)$  (voir Fuchs et Levin [37]). Remarquons que si  $p = 1$ , l'assertion du théorème au sujet de l'existence d'une racine proche de  $\lambda_0$  est aussi une conséquence du théorème de la section A.3.1. On déduit du théorème précédent que les fonctions  $\lambda_j(z)$  forment un système cyclique de branches holomorphes autour des points multiples : si le nombre de fonctions obtenues par prolongement analytique le long d'un contour entourant un point multiple donné est plus petit que  $p$ , on dit qu'il existe plusieurs fonctions analytiques  $\lambda_j(z)$ , chacune étant associée à un système cyclique. Si le nombre de branches holomorphes déterminant une telle fonction analytique est égal à un entier  $q$  et  $q > 1$ , le point multiple est appelé point de branchement de multiplicité  $q$ . Considérant à nouveau le cas de la racine carrée du début de cette section, on voit que l'origine est un *point de branchement de multiplicité* deux. Pour être complet, il faudrait préciser les situations pour lesquelles  $z$  ou  $\lambda$  devient infini. Si  $z = \infty$ , en posant  $Z = 1/z$ , on se ramène au cas  $Z = 0$ . Si  $z$  annule  $\phi_0(z)$ , on peut montrer que l'une au moins des branches de la fonction multiforme  $\lambda(z)$  tend vers l'infini. En posant  $\Lambda = 1/\lambda$ , on se ramène à  $\Lambda = 0$ . En définitive on aura soit des pôles, soit des points de ramification algébrique, à distance finie ou non (voir Fuchs et Levin [37]). La fonction multiforme  $\lambda(z)$ , de degré  $n$  en dehors des points qui annullent  $\phi_0(z)$ , applique  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ . Sa surface de Riemann est à  $n$  feuillets.

### A.3.3 Deux exemples d'intégrales

Pour commencer, on peut revenir sur la définition du logarithme naturel. Soit  $\gamma_0$  un chemin de 1 à  $z$ , situé dans le plan complexe épointé, coupé le long de l'axe réel positif, les points de cette demi-droite étant comptés dans le demi-plan supérieur. L'intégrale de  $1/z$  le long de  $\gamma_0$  est alors noté  $\ln z$  : c'est la détermination principale du logarithme. Si maintenant, on choisit un chemin quelconque  $\gamma$  allant de 1 à  $z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , l'intégrale est égale à  $\ln z + 2\pi in$ , où  $n$  est le nombre de tours effectués autour de l'origine. L'intégrale ne permet pas de définir une fonction sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La configuration analytique est une infinité dénombrable de plans épointés superposés. La trace de la fonction réciproque est la fonction exponentielle.

Nous allons maintenant considérer la fonction  $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ , où  $a, b, c$  sont distincts deux à deux. La surface de Riemann  $R$  correspondant à cette fonction possède deux feuillets (voir A.2).  $R$  est homéomorphe à un tore : or un tore d'axe  $d$  muni d'une frontière constituée de deux de ses cercles l'un coaxial à  $d$ , l'autre coplanaire à  $d$ , devient homéomorphe à un parallélogramme de périodes, donc simplement connexe. Ici

$R$  muni de  $w_1$  et  $w_2$  devient  $R'$  simplement connexe. On pose

$$I_1 = \int_{w_1} \frac{1}{f(z)} dz \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{w_2} \frac{1}{f(z)} dz.$$

Soit  $\gamma_0$  un chemin de  $R'$  de  $\infty$  vers un point  $P$ ; alors l'intégrale  $I(P)$  définie par

$$I(P) = \int_{\gamma_0} \frac{1}{f(z)} dz,$$

est indépendante du chemin suivi. Par contre, si  $\gamma$  est un chemin quelconque de  $R$  reliant  $\infty$  et  $P$ , on a l'égalité

$$\int_{\gamma} \frac{1}{f(z)} dz = I(P) + nI_1 + mI_2,$$

où  $n$  et  $m$  sont deux entiers. La configuration analytique de cette intégrale est une surface de Riemann comportant une infinité de feuillet superposés sur  $R$ . La trace de la fonction réciproque est doublement périodique. Une étude plus approfondie de cette intégrale

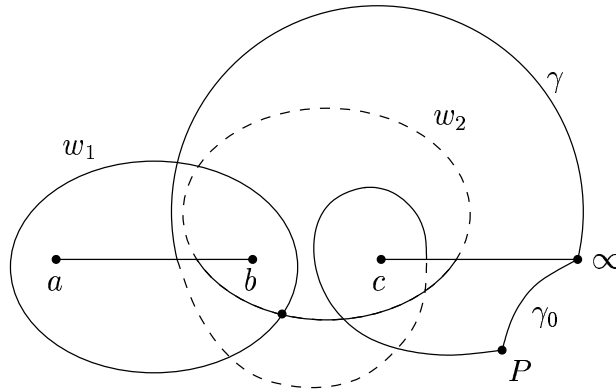


FIG. A.3 – Surface de Riemann de la fonction  $f$ , chemins d'intégration  $\gamma_0$  et  $\gamma$ .

conduit à introduire les transformations dites birationnelles ( $f$  et sa réciproque sont des fonctions rationnelles) de façon à mettre en évidence des propriétés intrinsèques. Pour des indications supplémentaires, le lecteur peut se reporter au livre d'Appell et Goursat [140].

L'exemple précédent montre qu'il est essentiel de tenir compte aussi bien des points de branchement finis  $a, b, c$  que de  $\infty$ . Dans le chapitre 2, l'équation (2.33) est une équation algébrique, analogue à l'exemple de la section A.3.1, qu'on obtient en acoustique. Mais dans (2.33), le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$  sont en général des nombres complexes. Ainsi, les points de branchement à distance finie  $\pm k_0$  généralisent la notion de fréquence de coupure au plan complexe: le comportement radial des ondes d'instabilités dépend fortement du signe de  $k^2 - k_0^2$ , ou, en d'autres termes, de la vitesse de phase  $\omega/k_r$ , selon qu'elle est supersonique ( $k_r < k_0$ ) ou non. Dans ce cadre théorique, le point à l'infini a une signification physique particulière, en relation avec les conditions de rayonnement.

# Annexe B

## Les Fonctions de Bessel

### B.1 Introduction

Nous donnons d'abord les énoncés des deux propositions principales au sujet des solutions en séries entières qui nous seront utiles ; on trouve leur démonstration dans les cours d'analyse relatifs aux équations différentielles.

#### B.1.1 Proposition : existence des solutions en séries entières

*Soit l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \quad (\text{B.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions holomorphes dans le disque  $B(t_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t_0| < R\}$  (avec  $t_0 \in \mathbb{C}$  ; on prend  $B(t_0; R) = \mathbb{C}$  si  $R = \infty$ ), alors, pour toute condition initiale  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x_1$  ( $x_0, x_1$  complexes), l'unique solution de (B.1) vérifiant cette condition initiale est holomorphe dans  $B(t_0; R)$  et donc de la forme

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n, \quad t \in B(t_0; R), \quad (\text{B.2})$$

avec  $c_0 = x_0$  et  $c_1 = x_1$ . Noter que cette proposition garantit la convergence de la série pour la solution  $x$  et que la théorie des séries entières permet la dérivation de ces séries terme à terme autant de fois qu'on veut.

#### B.1.2 Equations à singularité isolée

On dit que  $t_0$  est un **point de régularité** de l'équation (B.1) si, pour tout  $R > 0$ , les coefficients  $a$  et  $b$  sont des fonctions holomorphes de la variable  $t \in B(t_0; R)$ . Si  $t_0$  n'est pas un point de régularité (ou point régulier) de (B.1), nous dirons que c'est un **point singulier** de (B.1) ; ceci veut dire qu'au moins une des deux fonctions  $a, b$  n'est pas représentable sous la forme d'une série entière dans un intervalle ouvert contenant  $t_0$ .



On dit que le point singulier  $t_0$  est un point de **singularité faible** s'il existe un  $R \in ]0, \infty[$  tel que

$$a(t) = \frac{1}{t - t_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n, \quad b(t) = \frac{1}{(t - t_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t - t_0)^n, \quad (\text{B.3})$$

pour  $0 < |t - t_0| < R$ . Pour que  $t_0$  soit un point singulier lorsque  $a, b$  sont donnés par (B.3), il est nécessaire et suffisant qu'au moins un des nombres  $a_0, b_0, b_1$  soit non nul ; ceci équivaut à dire que  $t_0$  est un pôle simple pour  $a$  et que  $t_0$  est un pôle d'ordre au plus deux pour  $b$  lorsque  $a$  et  $b$  sont définies dans le disque ouvert  $B(t_0; R)$ , en excluant le cas où  $a$  et  $b$  sont toutes les deux holomorphes dans  $B(t_0; R)$ . Un exemple important d'équation à singularité faible est l'équation de Bessel de paramètre  $\nu$

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)x = 0; \quad (\text{B.4})$$

le point  $t_0 = 0$  est un point de singularité faible, les autres points étant réguliers. Un point de singularité de A.1.1 qui n'est pas un point de singularité faible est dit point de singularité forte. En général, on utilise cette terminologie seulement dans le cas où les fonctions  $a$  et  $b$  sont holomorphes dans  $B'(t_0; R) = B(t_0; R) \setminus \{t_0\}$  pour un  $R > 0$ .

### B.1.3 Proposition : solution d'une équation à singularité faible

Soit l'équation (B.1) ayant  $t_0$  pour point de singularité faible et où  $a, b$  sont donnés par (B.3) dans  $B(t_0; R)$  pour un  $R \in ]0, \infty[$ . Posons

$$D(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + a_0\lambda + b_0,$$

où  $a_0, b_0$  sont des coefficients qui apparaissent dans (B.3) ; soient  $\lambda_1, \lambda_2$  les deux racines complexes (non nécessairement distinctes) de l'équation déterminante  $D(\lambda) = 0$  ; nous supposons que  $\text{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \geq 0$ .

(i) Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  et  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ , alors (B.1) possède un système fondamental de solutions  $\{u_1, u_2\}$  du type suivant : pour  $t \in B'(t_0; R)$

$$u_1(t) = (t - t_0)^{\lambda_1} f_1(t), \quad u_2(t) = (t - t_0)^{\lambda_2} f_2(t), \quad (\text{B.5})$$

où  $f_1, f_2$  sont holomorphes dans  $B(t_0; R)$  avec  $f_1(t_0) = f_2(t_0) = 1$ .

(ii) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 + s$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , alors (B.1) possède un système fondamental de solutions  $\{u_1, u_2\}$  du type suivant : pour  $t \in B'(t_0; R)$ ,  $u_1(t)$  est comme dans (B.5) ; il existe  $r \in ]0, R[$  tel que, pour  $t \in B'(t_0; R)$

$$u_2(t) = u_1(t) \{c \log(t - t_0) + (t - t_0)^{-s} f_2(t)\}, \quad (\text{B.6})$$

où  $f_2$  est holomorphe dans  $B(t_0; r)$  et  $c$  une constante complexe ; si  $s = 0$ ,  $c \neq 0$  ; si  $s > 0$ ,  $c$  peut être nulle ou non.

## B.2 Equation de Bessel

Il s'agit de l'équation (B.4) que nous écrivons sous la forme

$$Lx = t^2 x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0, \quad (\text{B.7})$$

où  $\nu$  et  $t$  sont dans  $\mathbb{C}$ . Par exemple, la recherche de solutions à variables séparées de l'équation de Laplace ou de Helmholtz bidimensionnelle conduit à une équation de Bessel.

La proposition A.1.3 garantit l'existence d'une solution de l'équation de Bessel de la forme  $x(t) = t^\lambda \sum_{n \geq 0} c_n t^n$  où la série associée est convergente pour tout  $t \in \mathbb{C}$  (car pour l'équation de Bessel, la quantité  $R$  qui apparaît dans la proposition précédente peut être prise égale à  $\infty$ ). En introduisant cette forme de  $x(t)$  dans l'équation de Bessel de paramètre  $\nu$ , on obtient  $\lambda = \pm \nu$ ; notons au passage que  $\lambda^2 - \nu^2 = 0$  est l'équation déterminante prévue par la proposition. On remplace  $\lambda$  par  $\nu$  et les valeurs des  $c_n$  correspondantes, obtenues en égalant à zéro le coefficient de  $t^{\lambda+n}$  dans  $Lx = 0$ , dans l'expression de  $x(t)$ . On obtient

$$u_1(t) = t^\nu \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} k! (\nu+1) \cdots (\nu+k)} \right). \quad (\text{B.8})$$

De même, avec  $\lambda = -\nu$ ,  $\nu \notin \mathbb{N}$ , on obtient :

$$u_2(t) = t^{-\nu} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} k! (-\nu+1) \cdots (-\nu+k)} \right). \quad (\text{B.9})$$

Les séries entières (B.8) et (B.9) sont convergentes pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , comme on peut le vérifier directement. De plus, on montre que si  $\nu \notin \mathbb{N}$ , les solutions  $u_1$  et  $u_2$  sont linéairement indépendantes.

### B.2.1 Fonctions de Bessel, de Weber et de Hankel

Nous introduisons maintenant  $J_\nu$ , la **fonction de Bessel d'indice**  $\nu \in \mathbb{C}$  (**de première espèce**) :

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad (\text{B.10})$$

définie pour  $\nu \in \mathbb{C}$  et  $t \in \mathbb{C}^*$ . Rappelons que la fonction gamma,  $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha)$ , est une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points  $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ ; de plus  $\Gamma(\alpha) \in \mathbb{R}$  si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  avec  $\lim_{\alpha \rightarrow -n} |\Gamma(\alpha)| = \infty$ ,  $n = 0, -1, -2, \dots$ .

On voit que  $J_\nu = A_\nu u_1$  où  $A_\nu$  est une constante définie par  $A_\nu = 1/(2^\nu \Gamma(\nu+1))$ ; c'est une solution complexe de l'équation de Bessel de paramètre complexe  $\nu$ . Compte tenu de ce que  $|\Gamma(\alpha)| \rightarrow \infty$  lorsque  $\alpha \rightarrow -n$ ,  $n = 0, -1, \dots$ , on interprète (B.10) comme étant  $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On en déduit que  $J_n$  et  $J_{-n}$  ne sont pas linéairement indépendants si  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, on cherche une seconde solution de l'équation de

Bessel de paramètre  $n \in \mathbb{N}$  linéairement indépendante de  $J_n$ . Habituellement, on utilise les **fonctions de Bessel d'indice  $\nu$  de seconde espèce**, qu'on note  $Y_n$ ,

$$Y_\nu(t) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \notin \mathbb{N}, \quad (\text{B.11})$$

$$Y_n(t) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.12})$$

Puisque chaque  $Y_\nu$ ,  $\nu \notin \mathbb{N}$  défini par (B.11) est une solution de l'équation de Bessel de paramètre  $\nu$  (étant une combinaison linéaire des solutions  $J_\nu, J_{-\nu}$ ), on peut conclure que  $Y_n = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu$  est une solution de l'équation de Bessel de paramètre  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons que pour  $\nu \notin \mathbb{N}$ ,  $Y_\nu$  est une combinaison linéaire (apparemment arbitraire) de  $J_\nu$  et  $J_{-\nu}$  et, théoriquement, une combinaison linéaire quelconque aurait pu servir; mais l'existence de  $Y_n$  comme limite de  $Y_\nu$  lorsque  $\nu \rightarrow n$  est un avantage décisif.

Les définitions données pour  $J_\nu(t)$ ,  $Y_\nu(t)$  dans (B.10) et (B.11) donnent des fonctions holomorphes des deux variables  $(\nu, t)$  avec  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{C} \setminus L$ ,  $L$  étant une coupure du plan complexe telle que les expressions  $\log t$ ,  $t^\nu = \exp(\nu \log t)$  soient holomorphes; dans la terminologie classique, on dit que  $J_\nu$  et  $Y_\nu$  sont des fonctions holomorphes multiformes. On définit les fonctions de Hankel (où les *fonctions de Bessel de troisième espèce*) par

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \quad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t); \quad (\text{B.13})$$

évidemment,  $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$  forme aussi un système fondamental de solutions (complexes) de l'équation de Bessel d'ordre  $\nu$ . Certains auteurs classiques regroupent les fonctions  $J_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $H_\nu^{(1)}$  et  $H_\nu^{(2)}$  sous le nom de "fonctions cylindriques" car elles apparaissent dans la solution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. L'ouvrage le plus détaillé est celui de G. N. Watson [53]. Des résultats précis sont donnés dans son livre où il souligne à plusieurs reprises les ressemblances entre le couple  $\{J_\nu, Y_\nu\}$  et celui formé de cosinus et sinus. On peut par exemple montrer que (cf. Watson, pp 53,55) pour  $n \in \mathbb{Z}$

$$J_{n+1/2}(t) = t^{-1/2} \left( P_n \left( \frac{1}{t} \right) \sin t + Q_n \left( \frac{1}{t} \right) \cos t \right),$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes. En effet, selon une analyse de Liouville, les seules valeurs du paramètre  $\nu$  pour lesquelles  $J_\nu$  peut être exprimé comme une combinaison finie des fonctions "élémentaires" sont exactement de la forme  $\nu = n + 1/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (Watson, p 120). Les fonctions  $J_{n+1/2}$ ,  $Y_{n+1/2}$  s'appellent souvent les fonctions de Bessel sphériques.

## B.2.2 Propriétés des fonctions de Bessel

On appelle fonction cylindrique toute fonction  $\mathcal{C}_\nu(t)$  de deux variables complexes  $\nu, t$  qui satisfait aux deux formules de récurrence suivantes

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(t) + \mathcal{C}_{\nu+1}(t) = \frac{2\nu}{t} \mathcal{C}_\nu(t), \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(t) - \mathcal{C}_{\nu+1}(t) = 2\mathcal{C}'_{\nu}(t). \quad (\text{B.15})$$

On vérifie que les fonctions considérées jusqu'à présent ( $J_{\nu}$ ,  $Y_{\nu}$ ,  $H_{\nu}^{(1)}$  et  $H_{\nu}^{(2)}$ ) sont des fonctions cylindriques (Watson, p 45, p 66). Par ailleurs, on montre qu'il est possible d'exprimer une fonction cylindrique quelconque en termes de fonctions de Bessel. On a

$$\mathcal{C}_{\nu}(t) = \omega_1(\nu)H_{\nu}^{(1)}(t) + \omega_2(\nu)H_{\nu}^{(2)},$$

où les fonctions  $\omega_j$  sont de période 1. On a aussi une formule équivalente dans laquelle  $J_{\nu}$  et  $Y_{\nu}$  remplacent les fonctions de Hankel compte tenu de la définition (B.13). Bien qu'il existe des livres entiers consacrés aux propriétés des fonctions cylindriques, nous allons en citer quelques unes, qu'on trouve soit dans le livre de Watson [53] et/ou dans des tables de formules, comme par exemple [35]. Watson fait un historique circonstancié des origines des fonctions de Bessel; on y découvre que les cas particuliers de ces fonctions figurent déjà dans les écrits du *XVIII*<sup>e</sup> siècle (surtout chez D. Bernoulli et L. Euler). L'appellation "fonction de Bessel" semble être due à Jacobi (1836); par la suite, elle est régulièrement utilisée dans les publications importantes sur le sujet telles, par exemple, celles de C. Neumann et de Lommel dans les années 1867-68.

### Intégrales de Lommel contenant deux fonctions cylindriques

Par une transformation de la variable indépendante  $x \mapsto y \exp(A/2)$ , où  $A$  est une primitive de  $a$ , au moins de classe  $C^1$ , on passe à la forme normale de l'équation différentielle (B.1). Ce qui entraîne que  $x$  est solution de (B.1) si et seulement si  $y$  est solution de  $y'' + qy = 0$ , où  $q = b - a^2/4 - a'/2$ . De plus, si  $y_1$  et  $y_2$  sont solutions de

$$y_1'' + q_1 y_1 = 0, \quad y_2'' + q_2 y_2 = 0,$$

alors on vérifie par une simple dérivation que

$$\int (q_1 - q_2) y_1 y_2 dt = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

de sorte qu'après quelques calculs on peut dire que si  $\mathcal{C}_{\mu}(t)$  et  $\overline{\mathcal{C}}_{\nu}(t)$  sont deux fonctions cylindriques quelconques, respectivement d'ordre  $\mu$  et  $\nu$ , on a la relation

$$\int \left( (k^2 - l^2)t - \frac{\mu^2 - \nu^2}{t} \right) \mathcal{C}_{\mu}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\nu}(lt) dt = t (k\mathcal{C}_{\mu+1}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\nu}(lt) - l\mathcal{C}_{\mu}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\nu+1}(lt)) - (\mu - \nu) \mathcal{C}_{\mu}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\nu}(lt). \quad (\text{B.16})$$

Il y a au moins deux cas pour lesquels l'expression au second membre est plus simple, c'est lorsqu'on a l'égalité (i)  $\mu = \nu$  ou (ii)  $k = l$ . Si on prend  $\mu = \nu$ , il vient

$$\int t \mathcal{C}_{\mu}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\mu}(lt) dt = \frac{t (k\mathcal{C}_{\mu+1}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\mu}(lt) - l\mathcal{C}_{\mu}(kt) \overline{\mathcal{C}}_{\mu+1}(lt))}{k^2 - l^2}. \quad (\text{B.17})$$

Cette formule se vérifie facilement par dérivation. Pour obtenir la relation correspondante au cas  $k = l$ , on passe à la limite  $l \rightarrow k$ . On voit que le dénominateur et le numérateur du membre de droite de (B.17) sont dérivables partout et on suppose de plus qu'ils ne s'annulent pas dans un voisinage de  $k$  pour pouvoir appliquer la règle de l'hospital. Les dérivées des fonctions cylindriques sont transformées en sommes de fonctions cylindriques à l'aide de la relation de récurrence (B.15). On trouve

$$\int t \mathcal{C}_\mu(kt) \bar{\mathcal{C}}_\mu(kt) dt = \frac{t^2}{4} (2\mathcal{C}_\mu(kt) \bar{\mathcal{C}}_\mu(kt) - \mathcal{C}_{\mu-1}(kt) \bar{\mathcal{C}}_{\mu+1}(kt) - \mathcal{C}_{\mu+1}(kt) \bar{\mathcal{C}}_{\mu-1}(kt)), \quad (\text{B.18})$$

ce qui permet d'en déduire la formule

$$\int t \mathcal{C}_\mu^2(kt) dt = \frac{t^2}{2} (\mathcal{C}_\mu^2(kt) - \mathcal{C}_{\mu-1}(kt) \mathcal{C}_{\mu+1}(kt)). \quad (\text{B.19})$$

Pour avoir une autre classe d'intégrales simples, on peut prendre  $k = l$  dans (B.16). On trouve la relation

$$\int \mathcal{C}_\mu(kt) \bar{\mathcal{C}}_\nu(kt) \frac{dt}{t} = -\frac{kt (\mathcal{C}_{\mu+1}(kt) \bar{\mathcal{C}}_\nu(kt) - \mathcal{C}_\mu(kt) \bar{\mathcal{C}}_{\nu+1}(kt))}{\mu^2 - \nu^2} + \frac{\mathcal{C}_\mu(kt) \bar{\mathcal{C}}_\nu(kt)}{\mu + \nu}. \quad (\text{B.20})$$

### Comportement asymptotique des fonctions de Bessel

Suivant l'analyse de Hankel (Watson, pp 196, 198), pour  $|t| \rightarrow \infty$ , on part des représentations intégrales des fonctions de Hankel (Watson, p. 168) dans lesquelles on développe les intégrands en puissances de  $1/t$ . On obtient

$$H_\nu^{(1)}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1/2)}{(2it)^m m! \Gamma(\nu - m + 1/2)} + O(t^{-p})\right) \exp\left(i\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (\text{B.21})$$

$$H_\nu^{(2)}(t) = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{p-1} \frac{\Gamma(\nu + m + 1/2)}{(2it)^m m! \Gamma(\nu - m + 1/2)} + O(t^{-p})\right) \exp\left(-i\left(t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (\text{B.22})$$

Les développements asymptotiques des fonctions  $J_\nu$  et  $Y_\nu$  se déduisent facilement des expressions précédentes. Il suffit d'utiliser de la définition des fonctions de Hankel qui entraîne qu'on a à la fois  $2J_\nu = H_\nu^{(1)} + H_\nu^{(2)}$  et  $2iN_\nu = H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}$ .

## Annexe C

# Linéarisation des équations de Navier-Stokes

La linéarisation des équations de Navier-Stokes au voisinage d'un écoulement de base est une procédure classique en dynamique des fluides. Si les calculs ne présentent pas de difficulté particulière, l'interprétation physique de la dynamique tangente est plus difficile à établir, en particulier lorsque l'écoulement est turbulent.

Considérant le cas des jets supersoniques, Tam [87] propose de modéliser l'action des petites échelles de la turbulence sur les structures cohérentes en considérant la version compressible des équations d'Orr-Sommerfeld. D'un point de vue formel, il s'agit de linéariser les équations de Navier-Stokes, dans lesquelles la viscosité est essentiellement de nature turbulente (voir Abramovich [141]), au voisinage d'un écoulement obtenu par application d'un opérateur de moyenne. L'hypothèse sous-jacente revient donc à supposer qu'il n'y a pas d'interaction forte entre les structures cohérentes (encore appelées "grosses" structures<sup>1</sup>) et les "petites" structures de la turbulence, ce qui équivaut à postuler une sorte de séparation d'échelles. Bien que discutable, cette hypothèse, mise à profit par Tam et Chen [93], [143] dans le cadre d'un modèle stochastique, permet un traitement simplifié des petites structures. Un autre avantage, d'ordre numérique, est qu'en présence de viscosité, il n'est plus nécessaire de déformer le contour d'intégration pour calculer les caractéristiques locales des structures cohérentes (voir Tam et Chen [93]).

### C.1 Méthode des petites perturbations

On part des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques dans lesquelles on décompose chaque grandeur physique en une partie moyenne, indicée par zéro, et une

---

1. Bien que souvent utilisée, l'association des deux termes est ambiguë. D'après Hussain [142], la cohérence physique se définit comme une "persistance" des caractéristiques des structures tourbillonnaires sur des durées longues devant l'échelle de temps propre de la structure. Mais cette définition ne dit rien quant à l'organisation spatio-temporelle quasi périodique qu'on observe dans les jets et couches de mélanges. Il semblerait qu'une telle notion en appelle plus au degré de déterminisme de l'évolution de la structure qu'à la définition proprement dite de celle-ci.

perturbation. La linéarisation des équations au voisinage de l'écoulement moyen se fait ensuite en supprimant les termes quadratiques en la perturbation. Le système obtenu en tenant compte de ce que l'écoulement moyen vérifie les équations de Navier-Stokes est alors linéaire vis-à-vis de la perturbation et peut s'écrire sous la forme

$$L_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + L_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} + L_0 \phi = 0, \quad (\text{C.1})$$

où  $\phi$  est une matrice colonne. Les éléments des trois premières lignes correspondent aux fluctuations des composantes de vitesse dans le système de coordonnées cylindriques  $(x, r, \theta)$ . Les trois autres éléments sont donnés par les fluctuations de pression, de masse volumique et de température. Les matrices  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  dépendent de l'écoulement moyen, supposé *permanent, axisymétrique, parallèle à la direction  $x$*  et des opérateurs différentiels  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial t$  et  $\partial/\partial \theta$ . Les hypothèses sur l'écoulement de base nous autorisent à prendre la transformée de Fourier de (C.1) dans les directions où l'opérateur est homogène, ce qui revient à faire les changements  $\partial/\partial x \mapsto ik$ ,  $\partial/\partial t \mapsto -i\omega$  et  $\partial/\partial \theta \mapsto in$ . On se retrouve alors avec un système d'équations différentielles

$$\hat{L}_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_n}{\partial r^2} + \hat{L}_1 \frac{\partial \hat{\phi}_n}{\partial r} + \hat{L}_0 \hat{\phi}_n = 0, \quad (\text{C.2})$$

où  $\hat{\phi}_n = [\hat{u}_n \ \hat{v}_n \ \hat{w}_n \ \hat{p}_n \ \hat{\rho}_n \ \hat{T}_n]^t$  est la transformée de Fourier de  $\phi$  (voir chapitre 2) et  $\hat{L}_2$ ,  $\hat{L}_1$ ,  $\hat{L}_0$  sont des matrices de nombres complexes. Comme dans le chapitre 2, les perturbations sont adimensionnées, en prenant  $r_j$ ,  $u_j$ ,  $\rho_j$  et  $T_j$  pour échelles caractéristiques de longueur, de vitesse, de masse volumique et de température. Les échelles de pression et de temps sont données par  $\rho_j u_j^2$  et  $r_j/u_j$ .

Cherchons maintenant à déterminer explicitement les éléments des matrices  $\hat{L}_0$ ,  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$ . Pour cela, on dispose de deux équations scalaires, les équations de bilan de masse et d'énergie, et d'une équation vectorielle, exprimant le principe fondamental de la dynamique, en l'absence de forces volumiques. L'équation de bilan de masse linéarisée peut s'écrire sous la forme

$$\rho_0 \hat{v}'_n + ik \rho_0 \hat{u}_n + \left( \frac{\rho_0}{r} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \hat{v}_n + \frac{in}{r} \rho_0 \hat{w}_n + i(ku_0 - \omega) \hat{\rho}_n = 0, \quad (\text{C.3})$$

où  $\rho_0$  et  $u_0$  sont des fonctions de la variable  $r$  et le symbole ' désigne la dérivation par rapport à cette dernière variable. On en déduit

$$\begin{aligned} (\hat{L}_1)_{12} &= \rho_0, & (\hat{L}_0)_{11} &= ik\rho_0, & (\hat{L}_0)_{12} &= \frac{\rho_0}{r} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r}, \\ (\hat{L}_0)_{13} &= \frac{in}{r} \rho_0, & (\hat{L}_0)_{15} &= i(ku_0 - \omega). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

On procède de la même façon pour l'équation de bilan de quantité de mouvement, qu'on projette dans les trois directions de l'espace. La viscosité est supposée d'origine moléculaire

et la relation de Stokes qui lie les deux coefficients de Lamé est utilisée. La linéarisation de la projection sur l'axe  $x$  donne une première équation,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{Re}\hat{u}_n'' - \frac{\mu}{rRe}\hat{u}_n' - \frac{ik\mu}{3Re}\hat{v}_n' + \left[ i\rho_0(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{Re} \left( \frac{4k^2}{3} + \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{u}_n + \\
 & \left( \rho_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{ik\mu}{3rRe} \right) \hat{v}_n + \frac{kn\mu}{3rRe} \hat{w}_n + ik\hat{p}_n = 0,
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds défini par  $Re = \rho_j u_j r_j / \mu_j$ , où  $\mu_j$  est la viscosité dynamique de référence. Pour l'instant, la viscosité  $\mu$  adimensionnée par  $\mu_j$  est considérée comme une fonction de  $r$ . D'où,

$$\begin{aligned}
 (\hat{L}_2)_{21} &= -\frac{\mu}{Re}, \quad (\hat{L}_1)_{21} = -\frac{\mu}{rRe}, \quad (\hat{L}_1)_{22} = -\frac{ik\mu}{3Re}, \\
 (\hat{L}_0)_{21} &= i\rho_0(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{Re} \left[ \frac{4k^2}{3} + \left( \frac{n}{r} \right)^2 \right], \\
 (\hat{L}_0)_{22} &= \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{ik\mu}{3rRe}, \quad (\hat{L}_0)_{23} = \frac{kn\mu}{3rRe}, \quad (\hat{L}_0)_{24} = ik.
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

De même, les linéarisations des projections suivant les axes  $r$  et  $\theta$  donnent

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{Re}\hat{v}_n'' - \frac{ik\mu}{4Re}\hat{u}_n' - \frac{\mu}{rRe}\hat{v}_n' - \frac{in\mu}{4rRe}\hat{w}_n' + \frac{3}{4}\hat{p}_n' \\
 & + \left[ \frac{3i\rho_0}{4}(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{r^2Re} + \frac{3\mu}{4Re} \left( k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{v}_n + \frac{7in\mu}{4r^2Re}\hat{w}_n = 0,
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
 (\hat{L}_2)_{32} &= -\frac{\mu}{Re}, \quad (\hat{L}_1)_{31} = -\frac{ik\mu}{4Re}, \quad (\hat{L}_1)_{32} = -\frac{\mu}{rRe}, \quad (\hat{L}_1)_{33} = -\frac{in\mu}{4rRe}, \quad (\hat{L}_1)_{34} = \frac{3}{4}, \\
 (\hat{L}_0)_{32} &= \frac{3i\rho_0}{4}(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{r^2Re} + \frac{3\mu}{4Re} \left[ k^2 + \left( \frac{n}{r} \right)^2 \right], \quad (\hat{L}_0)_{33} = \frac{7in\mu}{4r^2Re}
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{Re}\hat{w}_n'' - \frac{in\mu}{3rRe}\hat{v}_n' - \frac{\mu}{rRe}\hat{w}_n' + \frac{nk\mu}{3rRe}\hat{u}_n - \frac{7in\mu}{3r^2Re}\hat{v}_n + \\
 & \left[ i\rho_0(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{Re} \left( \frac{4n^2}{3r^2} + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] \hat{w}_n + \frac{in}{r}\hat{p}_n = 0,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
 (\hat{L}_2)_{43} &= -\frac{\mu}{Re}, \quad (\hat{L}_1)_{42} = -\frac{in\mu}{3rRe}, \quad (\hat{L}_1)_{43} = -\frac{\mu}{rRe}, \quad (\hat{L}_0)_{41} = \frac{nk\mu}{3rRe}, \\
 (\hat{L}_0)_{42} &= -\frac{7in\mu}{3r^2Re}, \quad (\hat{L}_0)_{43} = i\rho_0(ku_0 - \omega) + \frac{\mu}{Re} \left( \frac{4n^2}{3r^2} + k^2 + \frac{1}{r^2} \right), \quad (\hat{L}_0)_{44} = \frac{in}{r}.
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Passons à l'équation de bilan d'énergie. On ne considère que le cas des gaz parfaits. Posons  $A_1 = 1/[\gamma(\gamma - 1)M^2]$  et  $A_2 = 1/[(\gamma - 1)PeM^2]$ , où  $M$  et  $Pe$  sont respectivement le nombre de Mach, défini par  $M = 1/(\gamma p_0^2)$ , et le nombre de Peclet  $Pe = PrRe$ , où  $Pr$



est le nombre de Prandtl. Comme pour le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl est construit à partir de valeurs de référence. On prend  $Pr = \gamma C_j \mu_j / \kappa_j$ , où  $C_j$  et  $\kappa_j$  sont la chaleur spécifique à volume constant et la conductivité thermique du gaz au centre du jet. L'évolution de ces coefficients dans la direction radiale est donnée par des fonctions  $C$  et  $\kappa$ , adimensionnées par  $C_j$  et  $\kappa_j$ . La linéarisation de l'équation d'énergie s'écrit alors

$$-A_2 \kappa \hat{T}_n'' - \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial u_0}{\partial r} \hat{u}'_n + p_0 \hat{v}'_n - \frac{\kappa A_2}{r} \hat{T}'_n + ik p_0 \hat{u}_n + \left( A_1 \rho_0 C \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{p_0}{r} - \frac{2ik\mu}{Re} \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{v}_n + \frac{in p_0}{r} \hat{w}_n + \left[ A_1 \rho_0 Ci(ku_0 - \omega) + A_2 \kappa \left( k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{T}_n = 0. \quad (C.11)$$

D'où on déduit les relations

$$\begin{aligned} (\hat{L}_2)_{56} &= -A_2 \kappa, & (\hat{L}_1)_{51} &= -\frac{2\mu}{Re} \frac{\partial u_0}{\partial r}, & (\hat{L}_1)_{52} &= p_0, & (\hat{L}_1)_{56} &= -\frac{\kappa A_2}{r}, \\ (\hat{L}_0)_{51} &= ik p_0, & (\hat{L}_0)_{52} &= A_1 \rho_0 C \frac{\partial T_0}{\partial r} + \frac{p_0}{r} - \frac{2ik\mu}{Re} \frac{\partial u_0}{\partial r}, \\ (\hat{L}_0)_{53} &= \frac{in p_0}{r}, & (\hat{L}_0)_{56} &= A_1 \rho_0 Ci(ku_0 - \omega) + A_2 \kappa \left[ k^2 + \left( \frac{n}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Si les coefficients  $\mu$ ,  $C$  et  $\kappa$  sont pris constants, alors on a  $C = \kappa = \mu = 1$ . C'est l'hypothèse qui est faite dans les calculs du chapitre 2. La linéarisation de l'équation d'état permet de fermer le système d'équations algébriques. Avec l'hypothèse de gaz parfait, on a

$$\frac{\hat{p}_n}{p_0} - \frac{\hat{T}_n}{T_0} - \frac{\hat{\rho}_n}{\rho_0} = 0, \quad (C.13)$$

$$(\hat{L}_0)_{64} = \frac{1}{p_0}, \quad (\hat{L}_0)_{65} = -\frac{1}{\rho_0}, \quad (\hat{L}_0)_{66} = -\frac{1}{T_0}. \quad (C.14)$$

Notons que la pression  $p_0$ , supposée constante, peut s'exprimer en fonction de  $\gamma$  et  $M$  en utilisant la définition du nombre de Mach, i. e.  $p_0 = 1/(\gamma M^2)$ , d'où on déduit que  $T_0 = 1/\rho_0$  avec l'équation d'état des gaz parfaits. L'écoulement moyen se réduit donc bien à la donnée des deux fonctions  $u_0(r)$  et  $\rho_0(r)$ .

Dans le cas où l'écoulement moyen est celui d'un jet faiblement divergent, les grandeurs de référence sont prises à la sortie de la tuyère, au point  $x = 0$ . Ainsi, les valeurs de  $u_j$ ,  $\rho_j$  et  $T_j$  sont celles que prennent la vitesse, la masse volumique et la température du jet, supposées uniformes en  $x = 0$  et pour  $r < r_j$ , où l'échelle de longueur  $r_j$  est fixée par le rayon de la tuyère au point  $x = 0$ .

## C.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites au point  $r = 0$  peuvent s'exprimer sous la forme matricielle (C.2). Pour le voir, il suffit de remplacer  $\hat{\phi}_n(r)$  par son développement en série de Taylor

au voisinage de l'origine, dans les équations de Navier-Stokes linéarisées. Le comportement local de  $\hat{\phi}_n$  dépend du nombre d'onde azimutal  $n$ , ce qui nous amène à distinguer trois cas. Si  $n > 1$ , on a  $\hat{\phi}_n(0) = 0$ , si bien que les éléments non nuls des matrices  $\hat{L}_s$  sont  $(\hat{L}_0)_{ii} = 1$ ,  $i$  variant de 1 à 6. Si  $n = 1$ , les éléments non nuls sont donnés par

$$(\hat{L}_0)_{11} = (\hat{L}_0)_{44} = (\hat{L}_0)_{55} = (\hat{L}_0)_{66} = 1, \quad (\hat{L}_1)_{22} = (\hat{L}_1)_{33} = 1, \quad (\text{C.15})$$

et pour  $n = 0$ , par les expressions suivantes

$$(\hat{L}_0)_{22} = (\hat{L}_0)_{33} = 1, \quad (\hat{L}_1)_{11} = (\hat{L}_1)_{44} = (\hat{L}_1)_{55} = (\hat{L}_1)_{66} = 1. \quad (\text{C.16})$$

On voit donc que le traitement numérique du centre du jet ne présente aucune difficulté, bien que le passage aux coordonnées cylindriques ne soit pas inversible sur l'axe.

Il reste à écrire les conditions limites à l'autre extrémité du domaine d'intégration. Pour fixer les idées, on se donne un maillage composé de  $N + 1$  points  $r_j$  avec  $j = 0, \dots, N$  et on cherche sous quelles conditions les amplitudes des perturbations sont négligeables au point de troncature  $r_N$  du domaine physique. L'idée étant de pouvoir prendre  $\hat{\phi}_n(r_N) = 0$  comme condition limite. À l'extérieur du jet, l'écoulement de base est défini par  $u_0 = 0$  et  $\rho_0 = \rho_\infty$ , de sorte qu'on peut trouver une solution  $\hat{\phi}_n$  sous la forme de fonctions de Hankel. Pour  $n = 0$ , on arrive à

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= \frac{k(Re - iM^2\omega)}{\rho_\infty\omega Re} H_0^{(1)}(i\lambda r) + AH_0^{(1)}(i\eta r), \\ \hat{v}_n &= -\frac{i\lambda(Re - iM^2\omega)}{\rho_\infty\omega Re} H_1^{(1)}(i\lambda r) - A\frac{ik}{\eta} H_1^{(1)}(i\eta r), \\ \hat{p}_n &= H_0^{(1)}(i\lambda r), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

où  $\lambda$  et  $\eta$  sont des fonctions algébriques définies par les polynômes

$$D_\lambda(\lambda, k, \omega) = k^2 - \lambda^2 - \frac{Re}{Re - iM^2\omega} \rho_\infty\omega^2 M^2 = 0, \quad (\text{C.18a})$$

$$D_\eta(\eta, k, \omega) = k^2 - \eta^2 - i\rho_\infty\omega Re = 0. \quad (\text{C.18b})$$

La fonction  $\lambda$  généralise celle du chapitre 2 aux écoulements visqueux. Les points de branchement à distance finie de l'origine se déduisent de  $\pm k_0 = \pm\sqrt{\rho_\infty}\omega M$  par une simple multiplication par  $1/(1 - i\omega M^2/Re)$ . Pour  $n \neq 0$ , on trouve

$$\begin{aligned} \hat{u}_n &= H_n^{(1)}(i\lambda r) + AH_n^{(1)}(i\eta r), \\ \hat{v}_n &= \frac{\lambda}{k}(H_n^{(1)})'(i\lambda r) - A\frac{k}{\eta}H_{n+1}^{(1)}(i\eta r) - B\frac{i n}{r}H_n^{(1)}(i\eta r), \\ \hat{w}_n &= \frac{n}{kr}H_n^{(1)}(i\lambda r) + A\frac{ik}{\eta}H_{n+1}^{(1)}(i\eta r) + B i\eta(H_n^{(1)})'(i\lambda r), \\ \hat{p}_n &= \frac{\rho_\infty\omega Re}{k(Re - iM^2\omega)} H_n^{(1)}(i\lambda r), \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

où les nombres complexes  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration. Les fonctions  $\lambda$  et  $\eta$  admettent deux branches holomorphes qu'on note  $\lambda_j$  et  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2$ . Supposons que le

nombre de Reynolds  $Re$  soit suffisamment grand pour que les points de branchement de  $\eta$  soient loin de l'origine  $k = 0$ . Si on se limite au plan complexe coupé pour que la relation  $-\pi/2 < \arg(\lambda_1) < \pi/2$  soit vérifiée pour tout  $k$ , à  $\omega$  fixé, alors le comportement radial des perturbations est exponentiellement décroissant pour  $r \rightarrow \infty$  et on peut tronquer le domaine d'intégration au point  $r_N$ , en prenant  $\hat{\phi}_n(r_N) = 0$ . L'avantage de cette procédure est de permettre l'écriture de l'opérateur discret (les conditions aux limites étant comprises) sous la forme d'un polynôme en  $k$ , ce qui nous autorise à utiliser la méthode de la matrice compagnon proposée par Bridges et Morris [78] pour calculer le spectre de l'opérateur. L'inconvénient majeur est qu'il n'est pas possible d'analyser le voisinage des coupures. En effet, si la partie réelle de  $\lambda$  est petite, disons égale à  $\epsilon$ , une condition nécessaire pour que l'amplitude de la fonction de Hankel soit négligeable est que  $r_N$  soit tel que  $r_N > O(1/\epsilon)$ . Puisque  $r_N$  est borné, il est toujours possible de trouver  $\epsilon$  tel que la relation précédente ne soit pas vérifiée. Par contre, le suivi d'un mode sur la surface de Riemann associée à  $\lambda$  est toujours possible si on utilise pour conditions limites les solutions (C.17) et (C.19) au point  $r_N$ . Dans ce dernier cas, une procédure itérative permet de suivre chaque mode sur le second feuillet de Riemann en prenant  $\lambda = \lambda_2$ .

### C.3 Validations numériques

La plupart des travaux sur les instabilités du jet axisymétrique portent sur le mode de Kelvin-Helmholtz et pour des nombres d'ondes azimutaux  $n$  petits. Les autres modes sont généralement ignorés, en particulier lorsqu'on cherche à estimer le rayonnement acoustique du jet. Il existe bien des études expérimentales, comme celle de Seiner et Ponton [17] qui met en évidence la contribution d'autres modes dans le bruit de jet, mais les mesures sont insuffisantes pour permettre des comparaisons numériques. Pour ces raisons, on va se limiter au mode de Kelvin-Helmholtz, et plus précisément aux résultats de Morris [144], [145], qui présentent l'intérêt de tenir compte à la fois de la viscosité et de la compressibilité du fluide. On utilise ici une méthode pseudo-spectrale multidomaine telle qu'elle est décrite au chapitre 2. Pour des comparaisons avec un autre schéma numérique (le schéma compact d'ordre 4) et pour d'autres cas tests (Yen et Messersmith [146], Plaschko [147]), on renvoie le lecteur aux travaux préliminaires de Millet *et al* [79] sur les jets incompressibles.

Dans l'article de Morris [144], l'écoulement moyen est défini par

$$u_0(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[ \frac{1}{4\delta} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right] \right\}, \quad (\text{C.20})$$

où  $\delta$  est un paramètre local. Les calculs ont été effectués pour  $\delta = 0.16$ . Le profil de masse volumique moyenne est issu de la relation de Crocco suivante :

$$\rho_0(r) = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 u_0 (1 - u_0) \right]^{-1}, \quad (\text{C.21})$$

qui sous-entend que le nombre de Prandtl vaut 1 et que la température statique est constante. On a donc  $Pe = Re$  et l'ensemble des paramètres de contrôle se réduit à

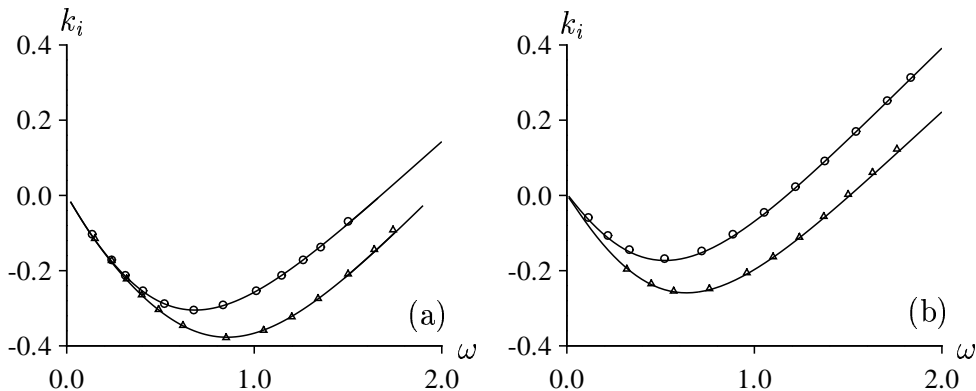


FIG. C.1 – Taux d'amplification du mode de Kelvin-Helmholtz en fonction de la pulsation, pour  $n = 1$ . Les triangles et cercles donnent les résultats de Morris [144] pour  $M = 0$  et  $M = 1$  sur la figure (a) et pour  $Re = 500$  et  $Re = 125$  sur la figure (b), le nombre de Mach étant fixé égal à 1. Les lignes donnent les résultats obtenus avec la méthode de collocation spectrale multidomaine.

$\{Re, M\}$ . La figure C.1 donne le comportement de la partie imaginaire des branches spatiales obtenues soit avec une formulation visqueuse (b), auquel cas les éléments non nuls des matrices  $\hat{L}_0$ ,  $\hat{L}_1$  et  $\hat{L}_2$  ont été donnés précédemment, ou alors avec une formulation non visqueuse (a), qui permet de réduire le problème à une seule équation différentielle pour la pression (voir chapitre 2). Mais dans ce dernier cas, il y a certaines précautions à prendre, et c'est pourquoi il est important de bien distinguer ces deux types de calculs. Dans la suite, les valeurs des paramètres numériques utilisés correspondent à celles qui ont été obtenues après une analyse des propriétés numériques de l'opérateur discret pour le mode de Kelvin-Helmholtz et  $\delta = 0.16$ . Par conséquent ces valeurs n'ont rien de général et doivent être déterminées au cas par cas.

Considérons d'abord la formulation non visqueuse. Si le taux d'amplification  $-k_i$  est plus grand que 0.2, le domaine de calcul est divisé en deux parties. La première partie est constituée de 30 points compris entre l'axe du jet et le point d'inflexion du profil de vitesse  $u_0(r)$ , dont la distribution est de type Gauss-Lobatto. La seconde partie s'étend du point d'inflexion jusqu'à  $r = 25$  et comporte 120 points. La distribution des points est là aussi de type Gauss-Lobatto. La borne supérieure est choisie de façon à ce qu'on ait  $\hat{p}_1(25) = 0$ . Si  $-k_i \leq 0.2$ , le domaine de calcul est divisé en trois parties. La raison est qu'au voisinage de  $k_i = 0$ , et pour  $k_i > 0$ , la formulation non visqueuse fait apparaître un point critique  $r_c$ , solution complexe de l'équation  $\omega - ku_0(r_c) = 0$ , qui rend le coefficient  $\hat{L}_2$  singulier. L'analyse du voisinage du point critique dans le plan complexe montre que l'approximation non visqueuse n'est pas valable dans certains secteurs, délimités par des lignes de Stokes (voir Le Dizès *et al.* [82] pour une application aux écoulements incompressibles). Toutefois, on peut montrer que sous certaines conditions il est possible de déformer le contour d'intégration initialement confondu avec l'intervalle réel  $[0, 25]$  pour qu'il passe à l'extérieur

des zones de Stokes lorsque la partie imaginaire de  $r_c$  est positive. Si la fonction propre n'a plus de sens physique, le nombre d'onde  $k$  calculé sur le contour déformé est, par contre, inchangé<sup>2</sup>. La procédure de déformation est abordée dans la section 2.3 du chapitre 2. Or, une telle déformation se traduit par un allongement du contour d'intégration et par une modification de la distribution des points, au moins au voisinage de  $r_c$ . C'est pourquoi, le domaine constitué des points appartenant au contour déformé et de partie réelle comprise entre 0 et le point d'inflexion est divisé en deux parties qui se rencontrent au point  $r_c$ . Sur chaque domaine, la distribution de points est de type Gauss-Lobatto. Notons aussi qu'au voisinage de  $\omega = 0$ , il n'est plus possible de prendre  $\hat{p}_1(25) = 0$  comme condition limite puisque la vitesse de décroissance de  $\hat{p}_1$  dans la direction radiale est trop petite. La méthode utilisée ici consiste à raccorder la solution à un comportement connu, obtenu par résolution de l'équation de Rayleigh à l'extérieur du jet. Ainsi, la borne supérieure du domaine d'intégration est prise égale à  $r = 7.70$  pour laquelle on a  $u_0(r) \leq 10^{-10}$ ,  $r > 7.70$  et la condition limite est modifiée en  $\hat{p}_1(r) = H_1^{(1)}(i\lambda_1 r)$ , où  $\lambda_1$  est défini par (2.34) et  $H_1^{(1)}$  désigne la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 1.

Pour les calculs visqueux, le domaine d'intégration est divisé en deux parties, contenant respectivement 60 et 70 points, le second domaine s'étendant jusqu'à  $r = 8$  si la pulsation est plus grande que 0.4. Pour  $\omega < 0.4$ , on procède comme pour le cas non visqueux, en se raccordant à une solution connue. Si on convient que la viscosité est constante, les solutions à l'extérieur du jet sont données par (C.17) et (C.19). Si maintenant, on fait l'hypothèse que  $\mu$  est nul à l'extérieur du jet, on peut prendre les solutions non visqueuses. Pour ce qui est des cas considérés par Morris, les branches spatiales calculées en utilisant les solutions (C.17) et (C.19) ou leurs homologues non visqueux sont si proches qu'il n'est pas possible de les distinguer dans une représentation du type de celle de la figure C.1.

## C.4 Une extension : les modes de $K_0^\pm$

Comme il l'est démontré dans le chapitre 2, il existe d'autres modes, qu'il est possible de considérer par couples. C'est en particulier le cas des modes de  $K_0^+ \times K_0^-$ , dont l'origine est essentiellement de nature acoustique. Les branches spatiales associées à ces modes lorsque le contour d'intégration  $L_\omega$  est déplacé dans le demi-plan  $\omega_i < 0$  sont représentées sur les figures C.2 et C.3. L'écoulement moyen considéré est celui du chapitre 2.

---

2. Le choix du contour d'intégration répond à un certain nombre de règles, énoncées par Boyd [81]. Une d'entre elles exige que le domaine compris entre le contour déformé et l'intervalle d'intégration initial ne doit pas contenir de pôle des fonctions  $\hat{L}_s$ , ce qui limite le choix des fonctions  $u_0$  et  $\rho_0$  ainsi que les possibilités de déformation.

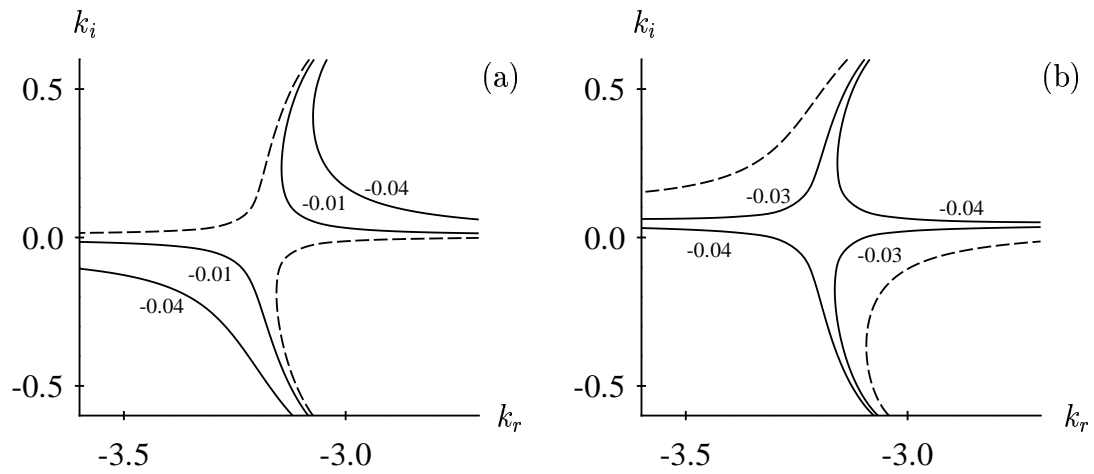


FIG. C.2 – Branches spatiales au point  $x = 2.0$ . (a) :  $Re = 10^4$ ; (b) :  $Re = 10^3$ . La valeur de  $\omega_i$  est indiquée à côté de chaque branche, le cas  $\omega_i = 0.0$  est représenté en tirets. Jet froid;  $M = 1.5$  et  $n = 0$ .

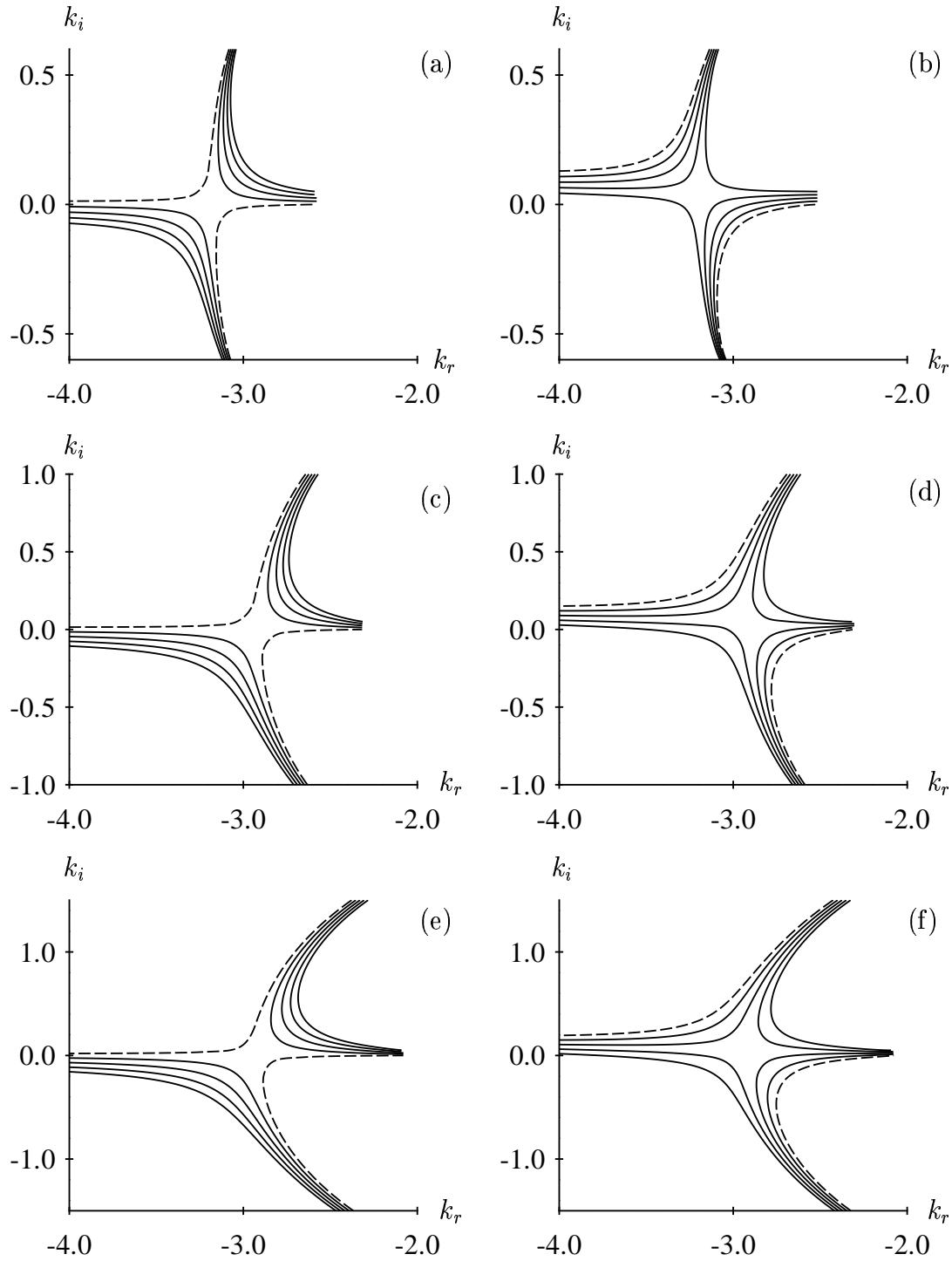


FIG. C.3 – Branches spatiales aux points  $x = 2.0$  ((a) et (b)),  $x = 6.0$  ((c) et (d)) et  $x = 10.0$  ((e) et (f)). Le cas  $\omega_i = 0.0$  est indiqué en tirets; les autres cas correspondent à des valeurs décroissantes de  $\omega_i$ , par incréments de 0.01 et ordonnés comme sur la figure C.2. (a), (c) et (e) :  $Re = 10^4$ ; (b), (d) et (f) :  $Re = 10^3$ . Le jet opère dans les mêmes conditions que pour la figure C.2.

# Bibliographie

- [1] Millet C. and Casalis G. Selection of acoustic modes in the vicinity of supersonic jets. *AIAA paper 2002-2452*, 2002.
- [2] Millet C. and Casalis G. Relationship between instability waves and noise of low supersonic jets. In *23rd International Congress of Aeronautical Sciences*, septembre 2002.
- [3] Crighton D. G. and Gaster M. Stability of slowly diverging jet flow. *J. Fluid Mech.*, 77(2):397–413, 1976.
- [4] Garg V. K. Spatial stability of the non-parallel Bickley jet. *J. Fluid Mech.*, 102:127–140, 1981.
- [5] Strange P. J. R. and Crighton D. G. Spinning modes on axisymmetric jets. Part 1. *J. Fluid Mech.*, 134:231–245, 1983.
- [6] Tam C. K. W. and Morris P. J. The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer. *J. Fluid Mech.*, 98(2):349–381, 1980.
- [7] Landau L. Stability of tangential discontinuities in a compressible fluid. *Akademia Nauk, SSSR. Comptas*, 1944.
- [8] Miles J. W. On the disturbed motion of a plane vortex sheet. *J. Fluid Mech.*, 4:538–552, 1958.
- [9] Fejer J. A. and Miles J. W. On the stability of a plane vortex sheet with respect to three-dimensional disturbances. *J. Fluid Mech.*, 15:335–336, 1963.
- [10] Lessen M., Fox J. A., and Zien H. M. The instability of inviscid jets and wakes in compressible fluid. *J. Fluid Mech.*, 21(1):129–143, 1965.
- [11] Oertel H. Coherent structures producing Mach waves inside and outside of the supersonic jet. Technical Report CO 218/82, Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis, 1982.
- [12] Crow S. C. and Champagne F. H. Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.*, 48:547–591, 1971.
- [13] Brown G. L. and Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 64:775–816, 1974.
- [14] Tam C. K. W. and Hu F. Q. On the three families of instability waves of high-speed jets. *J. Fluid Mech.*, 201:447–483, 1989.
- [15] Tam C. K. W. and Hu F. Q. The instability and acoustic wave modes of supersonic mixing layers inside a rectangular channel. *J. Fluid Mech.*, 203:51–76, 1989.



- [16] Tanna H. K. An experimental study of jet noise ; Part 1 : Turbulent mixing noise ; Part 2 : Shock associated noise. *J. Sound and Vibration*, 50:405–444, 1977.
- [17] Seiner J. M., Ponton M. K., Jansen B. J., and Lagen N. T. The effects of temperature on supersonic jet noise emission. *Paper No. 92-02-046, DGLR/AIAA*, 1992.
- [18] Tam C. K. W., Golebiowski, and Seiner J. M. On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets. *AIAA Paper No 96-1716*, 1996.
- [19] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 211:564–587, 1952.
- [20] Seiner J. M., Manning J. C., and Ponton M. K. Model and full scale study of twin supersonic plume resonance. *AIAA Paper No 87-0244*, 1987.
- [21] Massey K., Ahuja K. K., Jones R., and Tam C. K. W. Screech tones of supersonic heated free jets. *AIAA Paper No 94-0141*, 1994.
- [22] Tam C. K. W., Jackson J. A., and Seiner J. M. A multiple-scales model of the shock-cell structure of imperfectly expanded supersonic jets. *J Fluid Mech.*, 153:123–149, 1985.
- [23] Seiner J. M. Advances in high speed jet aeroacoustics. *AIAA Paper No. 84-2275*, 1984.
- [24] Monkewitz P. A. and Sohn K. D. Absolute instability in hot jets. *AIAA Journal*, 26:911–916, 1988.
- [25] Monkewitz P. A. and Sohn K. D. Absolute instability in hot jets and their control. *AIAA Paper 86-1882*, 1986.
- [26] Wilcox. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domain*, volume 442 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1975.
- [27] Dautray R. and Lions J. L. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 2 of *INSTN-CEA*. Masson, 1987.
- [28] Zeytounian R. K. *Mécanique des fluides fondamentale*, volume m4 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1991.
- [29] Euvrard D. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1994.
- [30] Huerre P. and Monkewitz P. A. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22:473–537, 1990.
- [31] Huerre P. and Monkewitz P. A. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J Fluid Mech.*, 159:151–168, 1985.
- [32] Huerre P. and Rossi M. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities. Chapitre 2: Hydrodynamic instabilities in open flows*. Cambridge University Press, 1998.
- [33] Schwartz L. *Méthodes mathématiques pour les Sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965.
- [34] Schwartz L. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1965.
- [35] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. *Tables of integrals, series and products*. Academic Press, 1965.

- 
- [36] Abramowitz M. and Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, 9th ed.* Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- [37] Fuchs B. A. and Levin V. I. *Functions of a complex variable and some of their applications*, volume 2 of *International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics*. Pergamon Press, 1961.
- [38] Weitzner H. Green's function for the linearized Vlasov equation. *The Physics of Fluids*, 5(8):933–946, 1962.
- [39] Derfler H. Growing wave and instability criteria for hot plasmas. *Physics Letters*, 24A(13):763–764, 1967.
- [40] Bender C. M. and Orszag S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, Singapore, 1978.
- [41] Brown S. N. and Stewartson K. On the algebraic decay of disturbances in a stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, 100:811–816, 1980.
- [42] Tam C. K. W. Private communication, 2002.
- [43] Tam C. K. W. Supersonic jet noise. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 27:17–43, 1995.
- [44] Cooper A. J. and Crighton D. G. Global modes and superdirective acoustic radiation in low-speed axisymmetric jets. *Eur. J. Mech. B - Fluids*, 19:559–574, 2000.
- [45] Crighton D. G. and Huerre P. Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. *J. Fluid Mech.*, 220:355–368, 1990.
- [46] Chimonas G. The extension of the Miles-Howard theorem to compressible fluids. *J. Fluid Mech.*, 43(4):833–836, 1970.
- [47] Tam C. K. W. Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability. *J. Fluid Mech.*, 46(4):757–768, 1971.
- [48] Lawson M. V. and Ollerhead J. B. Visualization of noise from cold supersonic jets. *J. Acoust. Soc. Am.*, 44:624–630, 1968.
- [49] Gill A. E. Instabilities of "top hat" jets and wakes in compressible fluids. *The Physics of Fluids*, 8(8):1428–1430, 1965.
- [50] Zaninetti L. Maximum instabilities of compressible jets. *Phys. Fluids*, 30:612–614, 1987.
- [51] Zaninetti L. Numerical results on instabilities of top hat jets. *Phys. Fluids*, 29:332–333, 1986.
- [52] Huerre P. *Mécanique des fluides. Tome 1*. Éditions de l'École Polytechnique, 1996.
- [53] Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1966.
- [54] Nosseir N. S. and Ho C. M. Dynamics of an impinging jet. Part 2: The noise generation. *J. Fluid Mech.*, 116:379–391, 1982.
- [55] Ho C. M. and Nosseir N. S. Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 105:119–218, 1981.
- [56] Umeda Y., Maeda H., and Ishii L. Discrete tones generated by the impingement of a high-speed jet on a circular cylinder. *Phys. Fluids*, 30:2380–2388, 1987.

- [57] Lighthill M. J. Group velocity. *J. Inst. Maths Applies*, 1:1–28, 1964.
- [58] Bers A. Space-time evolution of plasma instabilities - absolute and convective. In *Handbook of Plasma Physics*, volume 1: Basic plasma physics, pages 451–517. North-Holland Publishing Company, 1983.
- [59] Tam C. K. W. Relationship between the instability waves and noise of high-speed jets. *AIAA paper 91-0492*, 1991.
- [60] Seiner J. M., Bhat T. R. S., and Ponton M. K. Mach wave emission from a high-temperature supersonic jet. *AIAA Journal*, 32(12):2345–2350, 1994.
- [61] Phillips O. M. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *J. Fluid Mech.*, 9:1–28, 1960.
- [62] Ffowcs Williams J. E. The noise from turbulence convected at high speed. *Phil. Trans., A.*, 1061, 255:641–657, 1963.
- [63] Ho C. M. and Huerre P. Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16:365–424, 1984.
- [64] Bouthier M. *Développements asymptotiques à deux types d'échelles et perturbation singulière de problèmes aux limites elliptiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1971.
- [65] Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles. *Journal de Mécanique*, 11(4), 1972.
- [66] Monkewitz P. A., Huerre P., and Chomaz J.-M. Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 251:1–20, 1993.
- [67] Monkewitz P. A., Huerre P., and Chomaz J. M. Preferred modes in jets and global instabilities. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 32:2051, 1987.
- [68] Crighton D. G. Acoustics as a branch of fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 106:261–298, 1981.
- [69] Manneville P. *Dissipative structures and weak turbulence*. Academic Press, 1990.
- [70] Broze G. and Hussain F. Nonlinear dynamics of forced transitional jets: periodic and chaotic attractors. *J. Fluid Mech.*, 263:93–132, 1994.
- [71] Malik M. R. Numerical methods for hypersonic boundary layer stability. *Journal of Computational Physics*, 86:376–413, 1990.
- [72] Malik M. R., Zang T. A., and Hussaini M. Y. A spectral collocation method for the Navier-Stokes equations. *J. Comp. Physics*, 61:64–88, 1985.
- [73] Malik M. R. and M. Y. Hussaini. Accurate numerical solution of compressible, linear stability equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 33:189–201, 1982.
- [74] Orszag S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.*, 50(4):689–703, 1971.
- [75] Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., and Zang T. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 1988.
- [76] Georgescu A. *Hydrodynamic stability theory*, volume 9 of *Mechanics: analysis*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985.

- 
- [77] Griffond J. *Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2001.
- [78] Bridges T. J. and Morris P. J. Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly. *Journal of Computational Physics*, 55:437–460, 1984.
- [79] Millet C., Koffi P., and Casalis G. Étude numérique des instabilités linéaires dans un jet axisymétrique. Technical Report RF 5/03101 DMAE, ONERA, 2000.
- [80] Macaraeg M. G. and Streett C. L. Improvements in spectral collocation discretization through a multiple domain technique. *Applied Numerical Mathematics*, 2:95–108, 1986.
- [81] Boyd J. P. Complex coordinate methods for hydrodynamic instabilities and Sturm-Liouville eigenproblems with an interior singularity. *J. Comp. Physics*, 57:454–471, 1985.
- [82] Le Dizès S., Monkewitz P. A., and Huerre P. Viscous structure of plane waves in spatially developing shear flows. *Phys. Fluids*, 6:1337–1347, June 1995.
- [83] Lau J. C. Effects of exit Mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets. *J. Fluid Mech.*, 105:193–218, 1981.
- [84] Lau J. C., Morris P. J., and Fisher M. J. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter. *J. Fluid Mech.*, 93(1):1–27, 1979.
- [85] Troutt T. R. and McLaughlin D. K. Experiments on the flow and acoustic properties of a moderate-reynolds-number supersonic jet. *J Fluid Mech.*, 116:123–156, 1982.
- [86] Morrison G. L. and McLaughlin D. K. Instability process in low Reynolds number supersonic jets. *AIAA J.*, 18(7):793–800, 1980.
- [87] Tam C. K. W. Supersonic jet noise generated by large scale disturbances. *J. of Sound and Vibration*, 38(1):51–79, 1975.
- [88] Kotsovinos N. E. A note on the conservation of the axial momentum of a turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 87(1):55–63, 1978.
- [89] Zheltukhin N. A. and Terekhova N. M. Disturbances of high modes in a supersonic jet. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 2:75–83, 1990.
- [90] Zheltukhin N. A. and Terekhova N. M. Taylor-Görtler instability in a supersonic jet. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 5:48–55, 1993.
- [91] Birch S. F. and Eggers J. M. A critical review of the experimental data for developed turbulent free shear layers. In *Proc. NASA Conf. on Free Turbulent Shear Flows*, volume 1, page 11, 1972.
- [92] Chen K. P. and Crighton D. G. Large-scale instability of a fine-grained turbulent jet. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(1):13–34, 1999.
- [93] Tam C. K. W. and Chen P. Turbulent mixing noise from supersonic jets. *AIAA paper 93-4408*, 1993.
- [94] Tam C. K. W. and Auriault L. Jet mixing noise from fine-scale turbulence. *AIAA Journal*, 37(2):145–153, 1999.

- [95] Tam C. K. W. The near and far acoustic fields of broadband shock associated noise. *AIAA Paper No. 86-1943*, 1986.
- [96] Tam C. K. W. and Tanna H. K. Shock associated noise of supersonic jets from convergent-divergent nozzles. *J. Sound Vib.*, 81:337–358, 1982.
- [97] Pack D. C. A note on Prandtl's formula for the wavelength of a supersonic gas jet. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 3:173–181, 1950.
- [98] Seiner J. M. and Yu J. C. Acoustic near-field properties associated with broadband shock noise. *AIAA J.*, 22:1207–1215, 1984.
- [99] Tam C. K. W. Stochastic model theory of broadband shock associated noise from supersonic jets. *J. Sound and Vibration*, 116:265–302, 1987.
- [100] Tam C. K. W. Broadband shock associated noise of moderately imperfectly expanded supersonic jets. *J. Sound and Vibration*, 140:55–71, 1990.
- [101] Tam C. K. W. Broadband shock associated noise from supersonic jets in flight. *J. Sound and Vibration*, 151:131–147, 1991.
- [102] Tam C. K. W. Broadband shock associated noise from supersonic jets measured by a ground observer. *AIAA J.*, 30:2395–2401, 1992.
- [103] Norum T. D. and Seiner J. M. Measurements of static pressure and far field acoustics of shock-containing supersonic jets. Technical Report NASA-TM-84521, 1982.
- [104] Norum T. D. Screech suppression in supersonic jets. *AIAA J.*, 21:235–240, 1983.
- [105] Seiner J. M., Manning J. C., and Ponton M. K. The preferred spatial mode of instability for a Mach 2 jet. *AIAA Paper No 86-1942*, 1986.
- [106] Dash S. M., Wolf D. E., and Seiner J. M. Analysis of turbulent underexpanded jets, part 1.: Parabolized Navier-Stokes model, SCIPVIX. *AIAA J.*, 23:505–514, 1985.
- [107] Seiner J. M., Dash S. M., and Wolf D. E. Analysis of turbulent underexpanded jets, Part 2: Shock noise features using SCIPVIS. *AIAA J.*, 23:669–677, 1985.
- [108] Abdol-Hamid K. S. and Widmoth R. G. Multiscale turbulence effects in underexpanded supersonic jets. *AIAA J.*, 27:315–322, 1989.
- [109] Eckhaus W. *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*, volume 9 of *Studies in mathematics and its applications*. North-Holland Publishing Company, 1979.
- [110] Eckhaus W. *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*, volume 6 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Company, 1973.
- [111] Huerre P. and Crighton D. G. Sound generation by instability waves in a low Mach number jet. *AIAA Paper 83-0661*, 1983.
- [112] Gaster M., Kit E., and Wagnanski I. Large scale structures in a forced turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 150:23–39, 1985.
- [113] Van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford, CAS: Parabolic, 1975.
- [114] Tam C. K. W. and Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 1. Two-dimensional mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 138:249–271, 1984.
- [115] Tam C. K. W. and Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 2. Axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.*, 138:273–295, 1984.

- 
- [116] Dahl M. D. The aeroacoustics of supersonic coaxial jets. Technical Report NASA-TM-106782, NASA Lewis Research Center, 1994.
- [117] McLaughlin D. K., Morrison G. L., and Troutt T. R. Reynolds number dependence in supersonic jet noise. *AIAA Journal*, 15(4):526, 1977.
- [118] Salwen H. and Grosch C. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. part 2. eigenfunctions expansions. *J. Fluid Mech.*, 104:445–465, 1981.
- [119] Grosch C. E. and Salwen H. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. part 1. the spectrum and the eigenfunctions. *J. Fluid Mech.*, 87(1):33–54, 1978.
- [120] Tam C. K. W., Chen P., and Seiner J. M. Relationship between instability waves and noise of high-speed jets. *AIAA J.*, 30:1747–1752, 1992.
- [121] Morris P. J. and Bhat T. R. S. The noise from supersonic elliptic jets. *Paper No. 92-02-042, DGLR/AIAA*, 1992.
- [122] Michalke A. Instabilität eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses des Strahlgrenzschichtdicke. *Z. Flugwiss.*, 19:319, 1971.
- [123] Lupoglazoff N., Vuillot F., and Rahier G. Préviation du bruit de jet : première utilisation du code MSD et couplage avec un calcul de rayonnement acoustique. Technical Report RT 6/03101 DMAE/DSNA, ONERA, 2000.
- [124] Eggers J. M. Velocity profiles and eddy viscosity distribution downstream of a Mach 2.22 nozzle exhausting to quiescent air. Technical Report TN D-3601, NASA, 1966.
- [125] Veronesi W. A. and Maynard J. D. Nearfield Acoustic Holography (NAH) II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81:1307–1322, 1987.
- [126] Williams E. G. and Maynard J. D. Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2:2020–2030, 1982.
- [127] Bailly C. and Juvé D. Calcul du rayonnement acoustique des ondes d’instabilités. Technical Report CLI 20E065200, École Centrale de Lyon, 2000.
- [128] Bailly C. Calcul du rayonnement acoustique des ondes d’instabilités. Technical Report CLI 20E093402, École Centrale de Lyon, 2002.
- [129] Seiner J. M., McLaughlin D. K., and Liu C. H. Supersonic jet noise generated by large-scale instabilities. Technical Report TP-2072, NASA, 1982.
- [130] Mankbadi R. and Liu J. T. C. Sound generated aerodynamically revisited : large-scale structures in a turbulent jet as a source of sound. *Phil. Trans. R. Soc. Lon. A*, 311:183–217, 1984.
- [131] Freund J. B., Lele S. K., and Moin P. Numerical simulation of a Mach 1.92 turbulent jet and its sound field. *AIAA Journal*, 38(11):2023–2031, November 2000.
- [132] Mitchell B. E., Lele S. K., and Moin P. Direct computation of Mach wave radiation in an axisymmetric supersonic jet. *AIAA Journal*, 35(10):1574–1579, October 1997.
- [133] Khorrani M. R., Malik M. R., and Ash R. L. Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *Journal of Computational Physics*, 81:206–229, 1989.

- [134] Goldstein M. E. and Hultgren L. S. Nonlinear spatial evolution of an externally excited instability wave in a free shear layer. *J. Fluid Mech.*, 197:295–330, 1988.
- [135] Goldstein M. E. and Leib S. J. Nonlinear roll-up of externally excited free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 188:481–515, 1988.
- [136] Kupfer K., Bers A., and Ram A. K. The cusp map in the complex-frequency plane for absolute instabilities. *Phys. Fluids*, 30:3075–3082, 1986.
- [137] Chatterji S.D. *Cours d'analyse, 2. analyse complexe*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [138] Cartan H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*. Hermann, Paris, 1961.
- [139] Schwartz L. *Cours d'analyse, Tome 2*. Hermann, Paris, 1967.
- [140] Appell P. and Goursat E. *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*. Gautier-Villars, Paris, 1929.
- [141] Abramovich G. N. *The theory of turbulent jets*. Physical Sciences Engineering, 1963.
- [142] Hussain A. K. M. F. Coherent structures - reality and myth. *Phys. of Fluids*, 26(10):2816–2850, 1983.
- [143] Tam C. K. W. and Chen K. C. A statistical model of turbulence in two-dimensional mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 92:303–326, 1979.
- [144] Morris P. J. Viscous stability of compressible axisymmetric jets. *AIAA Journal*, 21(4):481–482, 1983.
- [145] Morris P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *J. Fluid Mech.*, 77(3):511–529, 1976.
- [146] Yen C. C. and Messersmith N. L. Application of parabolized stability equations to the prediction of jet instabilities. *AIAA Paper 98-0334*, 1998.
- [147] Plaschko P. Helical instabilities of slowly divergent jets. *J. Fluid Mech.*, 92(2):209–215, 1979.