" ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE AVEC EXPOSANTS CRITIQUES SUR LES VARIÉTÉES RIEMANNIENNES COMPACTES AVEC ET SANS BORD."

Sur (V_n,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 4$ et de métrique g, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(E)} \qquad \Delta^2 u + \nabla^i \left[a(x)\nabla_i u\right] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} \qquad (1)$$

où a(x),h(x) et f(x) sont des fonctions C^∞, $N = \frac{2n}{n-4}$ et $\Delta\varphi = -\nabla^i\nabla_i\varphi$.

On désigne pour $H_2^q(V)$ l'espace de Sobolev standard qui est le complètement de

$$C_k^q(V) = \{\varphi \in C^\infty(V)\ ,\ \parallel \varphi \parallel_{k,q} \leq \infty\}\ ,$$

par rapport à la norme $\parallel \varphi \parallel_{k,q} = \sum_{l=0}^{k} \parallel \nabla^l\varphi \parallel_q$.
On note H_2, l'espace H_2^2 muni de la norme équivalente

$$\parallel \varphi \parallel_{H_2} = \left(\parallel \Delta\varphi \parallel_2^2 + \parallel \nabla\varphi \parallel_2^2 + \parallel \varphi \parallel_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème peut être énoncé de la façon suivante :

Existe-il une constante λ et une fonction $u \in H_2(V_n)$ ($u \not\equiv 0$) solutions de l'équation (E) ?

Pour répondre à la question on considère les deux cas:

1) f(x)= Const,

2) f(x) fonction partout positive.

Inégalites de Sobolev

Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n}(1 \leq q < \frac{n}{2})$ alors: l'inclusion $H_2^q \subset L_p$ est continue et pas compacte, l'inclusion $H_2^q \subset L_q$ est continue et compacte alors il existe un couple de constantes A,C tel que pour tout $\varphi \in H_2^q$ vérifie:

$$\| \varphi \|_p \leq C \| \varphi \|_{H_2^q} + A \| \varphi \|_q \ . \tag{2}$$

La meilleure constante K_2= inf C telle que A(C) existe est strictement positive.

THEOREME 1.

Soient une variété riemannienne compacte (V_n,g) et q un réel $1 \leq q < \frac{n}{2}$. La meilleure constante K_2 introduite plus haut ne dépend que de n et de q $(K_2 = K_2(n,q)))$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $A(\epsilon)$ telle que tout $\varphi \in H_2^q$ vérifie

$$\| \varphi \|_p \leq K_2(n,q)(1+\epsilon) \| \varphi \|_{H_2^q} + A(\epsilon) \| \varphi \|_q \ . \tag{3}$$

COROLLAIRE 1.

Sur une variété riemannienne compacte (V,g) de dimension $n > 4$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $A(\epsilon)$ telle que $\forall f \in H_2(V)$ vérifie

$$\| f \|_N^2 \leq (1+\epsilon)K_2^2 \int_V |\Delta f|^2 dV + A(\epsilon) \int_V |f|^2 dV \tag{4}$$

avec $N = \frac{2n}{n-4}$ et $K_2^{-2}(n,2) = \pi^2 n(n-4)(n^2-4) \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right\}$. $K_2(n,2)$ est obtenu en utilisant les fonctions u_λ extrémales du problème $\Delta^2 u = u^{N-1}$ sur $\mathbb{R}^n$ avec

$$u_\lambda(r) = C_n \left[\frac{\lambda}{1+\lambda^2 r^2} \right]^{\frac{(n-4)}{2}}$$

où C_n est une constante qui ne dépend que de n.

Démonstration du théorème 1

$\bullet V = \mathbb{R}^n:$ on montre que pout tout $\psi \in H_2^q(\mathbb{R}^n)$

$$\parallel \psi \parallel_p \leq K_2(n,q) \parallel \nabla^2 \psi \parallel_q \tag{5}$$

$\bullet V = (V,g):$ on considère un recouvrement fini de boules avec atlas associé: $\{B_i(\delta),\varphi_i\}_{1\leq i\leq m}$, et une partition de l'unité $\{a_i\}_{1\leq i\leq m}$ subordonnée à ce recouvrement.

$\bullet \forall f \in C^\infty(V), \qquad \parallel f \parallel_p^q = \parallel f^q \parallel_{\frac{p}{q}} = \sum_{i=1}^m \parallel a_i^{\frac{1}{q}} f \parallel_p^q .$ (6)

$\bullet$ On applique la (5) à $\psi = \psi_i = \left(a_i^{\frac{1}{q}} f \right) \circ \varphi_i^{-1}$:

$$\left(\int_{\Omega_i} |\psi_i|^p dE \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_2(n,q) \left(\int_{\Omega_i} |\nabla_E^2 \psi_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{7}$$

avec $\Omega_i = \varphi_i(B_i)$.

$\bullet$ (V,g) est une variété riemannienne compacte alors $\forall \epsilon > 0$ il existe une constante $C(\epsilon)$ telle que

$$\parallel \psi \parallel_p^q \leq \mu^{\frac{nq}{2p}} K_2^q \lambda^{-\frac{n}{2}} \left[(1+\epsilon) \parallel \nabla_g^2 \psi \parallel_q^q + C(\epsilon) \parallel \nabla_g \psi \parallel_q^q \right] \tag{8}$$

$\bullet$ D'après la (6),(8) on a

$$\parallel f \parallel_p^q \leq \mu^{\frac{nq}{2p}} K_2^q \lambda^{-\frac{n}{2}} \times$$

$$\left[(1+\epsilon)(1+\eta) \int_V |\nabla^2 f|^q dV + \tilde{C} \int_V \left(|f|^q + |\nabla_g f|^q \right) dV \right] \tag{9}$$

$\bullet$ D'après l'inégalité d'interpolation: $\forall \epsilon > 0$ il existe un $\delta(\epsilon) > 0$ et $B(\epsilon)$ tels que $\lambda,\mu \sim 1$ et $\forall f \in C^\infty(V)$:

$$\parallel f \parallel_p^q \leq (1+\epsilon) K_2^q(n,q) \parallel \nabla^2 f \parallel_q^q + B(\epsilon) \parallel f \parallel_q^q \tag{10}$$

Mais les fonctions $C^\infty(V)$ sont denses en $H_2^q(V)$ et donc la (10) , équivalent à la (3), est vérifiée $\forall f \in H_2^q(V)$. ■

Étude de l'équation (E) avec f(x)=Const.

Pour résoudre l'équation (E) on utilise la méthode variationnelle.

Considérons la fonctionnelle sur H_2:

$$I(\varphi) = \int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)\nabla^i\varphi\nabla_i\varphi dV + \int_V h(x)\varphi^2 dV$$

L'équation d'Euler du problème variationnel suivant:

$$inf I(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{A} = \{u \in H_2 \text{ , } \parallel u \parallel_N = 1\}$$

est l'équation (E) avec $f(x)$ une constante . Notons μ cet inf.

THEOREME 2.
μ étant l'inf défini juste au dessus et $K_2 = K_2(n,2)$, on a toujours $K_2^2\mu \leq 1$. Si $K_2^2\mu < 1$, l'équation (E) avec $f(x)$ constante admet une solution $\psi \not\equiv 0$ dans H_2 qui minimise le problème variationnel. $\psi \in C^{5,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$ dans le cas général mais par exemple pour les dimensions 5 ,6 ,8 et pour $\psi > 0$, $\psi \in C^\infty$.

Démonstration:

- On considère, comme a fait Yamabe, une famille d'équations approchées : $\forall\ 2 < q < N$:

$$(E_q) \qquad \Delta^2 u + \nabla^\nu \left[a(x)\nabla_\nu u\right] + h(x)u = \lambda u|u|^{q-2}.$$

qui est l'équation d'Euler du problème variationnel

$$inf I(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{A}_q = \{u \in H_2 \text{ , } \parallel u \parallel_q = 1\} .$$

Notons μ_q cet inf.

• Pour résoudre l'équation (E_q) on applique la méthode variationnelle :

(i) On montre que μ_q est fini.

(ii) On prend une suite minimisante $\{\varphi_i\}_i$ de laquelle on pourra extraire une sous-suite convergente.
Soit $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{A}_q$ telle que $I(\varphi_i) \longrightarrow \mu_q$. On peut supposer que $I(\varphi_i) < 1 + \mu_q \quad i \in \mathbb{N}$.

(iii) On montre que la suite est bornée dans H_2,$\Rightarrow$ *(théorémes de Banach et Kondrakov)* il existe une fonction $\varphi_q \in H_2$ et une sous-suite $\{\varphi_j\} \subset \{\varphi_i\}$ telles que :

$\alpha)$ $\varphi_j \longrightarrow \varphi_q$ faibl. dans $H_2 \Rightarrow I(\varphi_q) \leq lim_{j\longrightarrow\infty} I_q(\varphi_j) = \mu_q$

$\beta)$ $\varphi_j \longrightarrow \varphi_q$ fort. dans $L_q$$\Rightarrow$ $\parallel \varphi_q \parallel_q = 1$, $\varphi_q \in \mathcal{A}_q$, $I(\varphi_q) \geq \mu_q$.

En conséquence $I(\varphi_q) = \mu_q$, φ_q réalise le minimum , $\parallel \varphi_q \parallel_q = 1$.

(iv) On calcule l'équation d'Euler du problème variationnel et on déduit que φ_q vérifie faiblement dans H_2 l'équation

$$\Delta^2\varphi_q + \nabla^\nu \left(a(x)\nabla_\nu\varphi_q\right) + h(x)\varphi_q = \mu_q\varphi_q|\varphi_q|^{q-2}.$$

• *Régularité de la fonction* φ_q: en appliquant la méthode bootstrap on montre :

LEMME 2.
$\varphi_q \in L_\infty$, $\forall\, q$ *avec* $2 < q < N$.
Ensuite pour les théorèmes de régularités classique il resulte que $\varphi_q \in C^{5,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0{,}1)$.

• Prenons $q \longrightarrow N$ avec φ_q solution de l'équation (E_q).

Comme la suite $\{\varphi_q\}$ est bornée dans H_2, il existe une fonction $\psi \in H_2$ et une sous-suite $\{\varphi_{q_i}\}$ telles que $\varphi_{q_i} \longrightarrow \psi$ faiblement dans H_2 et fortement dans L_2 et H_1 *(Théorèmes de Banach et Kondrakov)*. Alors pour $\forall\ w \in H_2$

$$\int_V \Delta w \Delta \varphi_{q_i} dV - \int_V a(x) \nabla^\nu w \nabla_\nu \varphi_{q_i} dV + \int_V h(x) w \varphi_{q_i} dV$$

$$\longrightarrow \int_V \Delta w \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^\nu w \nabla_\nu \psi dV + \int_V h(x) w \psi dV.$$

De plus

$$\int_V w \varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i - 2} dV \longrightarrow \int_V w \psi |\psi|^{N-2} dV$$

pour la convergence faible dans $L_{\frac{N}{N-1}}$ de $|\varphi_i|^{q_i-2}\varphi_i \longrightarrow |\psi|^{N-2}\psi$.

• On montre que les constantes μ_{q_i} sont uniformément bornées.

• ψ vérifie faiblement dans H_2 l'équation

$$\Delta^2 \psi + \nabla^\nu \left(a(x) \nabla_\nu \psi\right) + h(x)\psi = \mu_N \psi |\psi|^{N-2},$$

avec $lim_{q_i \longrightarrow N} \mu_{q_i} = \mu_N = \mu$.

• *Régularité de la solution* ψ: $\psi \in L_\infty$ (M.Vaugon [1979]), puis $\psi \in C^{5,\alpha}$ par la méthode de bootstrap enfin suivant la régularité de la fonction $\gamma : x \longrightarrow |x|^{\frac{8}{n-4}}$, $\psi \in C^\infty$ pour n= 5, 6 ,8 $(\gamma \in C^\infty)$ ou si $\psi > 0 (\gamma \in C^\infty$ pour $x > 0)$.

• **Les μ_q et μ sont tous du même signe.** ■

La solution ψ est non triviale.

LEMME 3.
Pour tout $\eta > 0$ il existe une constante $C(\eta)$ telle que tout $f \in C^\infty$ vérifie:

$$\int_V |\nabla f|^2 dV \leq \eta \int_V |\Delta f|^2 dV + \tilde{C}(\eta) \int_V f^2 dV. \qquad (5)$$

Démonstration que $\psi \not\equiv 0$:

On a que $1 = \| \varphi_q \|_q^2 \leq \left[\| \varphi_q \|_N^q V^{1-\frac{q}{N}}\right]^{\frac{2}{q}}$ alors d'après (4) du Corollaire 1 pour $\tilde{\eta}$ choisi petit

$$V^{\frac{2}{N}-\frac{2}{q}} \leq \| \varphi_q \|_N^2 \leq (1+\epsilon)K_2^2 \int_V |\Delta\varphi_q|^2 dV + a(\epsilon) \int_V |\varphi_q|^2 dV$$

$$= (1+\epsilon)K_2^2 \left\{(1+\tilde{\eta}) \left[\mu_q + \int_V a(x)\nabla^i\varphi_q\nabla_i\varphi_q dV - \int_V h(x)\varphi_q^2\right]\right.$$

$$\left. -\tilde{\eta} \int_V |\Delta\varphi_q|^2 dV\right\} + a(\epsilon) \int_V |\varphi_q|^2 dV. \qquad (6)$$

D'après le lemme 3 pour tout $\eta > 0$ il existe un $C(\eta)$ tel que

$$\int_V a(x)\nabla^i\varphi_q\nabla_i\varphi_q dV \leq supa(x) \left[\eta \int_V |\Delta\varphi_q|^2 dV + \tilde{C}(\eta) \int \varphi_q^2 dV\right].$$

En utilisant la précé dente pour un choix convenable de $\tilde{\eta}$ on a:

$$V^{\frac{2}{N}-\frac{2}{q}} - (1+\epsilon)K_2^2(1+\tilde{\eta})\mu_q \leq C(\epsilon,\tilde{\eta}) \int_V \varphi_q^2 dV \qquad (7)$$

Quand $q \longrightarrow N$, $V^{\frac{2}{N}-\frac{2}{q}} \longrightarrow 1$, $K_2^2\mu < 1$ à partir d'un certain $q_0 < N$ alors pour $q > q_0$ et ϵ et η bien choisis $\int_V \varphi_q^2 dV \geq C > 0$ et comme $\varphi_{q_i} \longrightarrow \psi$ fortement dans L_2, $\int_V \psi^2 dV > 0$ et $\psi \not\equiv 0$. ■

Sur la positivité de ψ , solution de l'équation (E).

PROPOSITION 1.
Si $a(x) \equiv a = -2\alpha$ et $h(x) \equiv b = \alpha^2$ le minimiseur ψ de la fonctionelle $I_q(\varphi)$ sur A_q(resp $I(\varphi)$ sur (A)) est strictement positif et C^∞. Même résultat si les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ sont positives.

Démonstration:
• Soient $\alpha > 0$ une constante et $\varphi \in \mathcal{A}_q$. Comme l'opérateur $\Delta + \alpha$ est inversible, il existe une fonction ϕ vérifiant l'équation

$$\Delta\phi + \alpha\phi = |\Delta\varphi + \alpha\varphi|. \tag{8}$$

• Si $\Delta\varphi + \alpha\varphi \geq 0$ (resp ≤ 0) nous avons évidemment $\phi = \varphi$ (resp $\phi = -\varphi$) , si non nous démontrons, en utilisant le principe de maximum, que $\phi > |\varphi|$ et que $I(\varphi) = I(\phi)$.

• Si la solution de notre problème variationnel $\varphi_q \geq 0$ (resp.$\psi \geq 0$) le principe du maximum entraîne $\varphi_q > 0$ (resp. $\psi > 0$). Si non on pose $\varphi = \varphi_q$ et on prend une constante $k < 1$ telle que $k\phi \in \mathcal{A}_q$. Ce qui entraîne $I(k\phi) < I(\varphi_q) = \mu_q$.
D'où $\varphi_q > 0$ pour tout q. La fonction ψ qui est limite p.p. d'une suite φ_{q_i} donc pour le raisonnemment au dessus $\psi > 0$. ■

Applications du théorème 2.

THEOREME 3.
Soit $J(\varphi) = \frac{I(\varphi)}{\|\varphi\|_N^2}$. Si $J(1) = V^{\frac{4-n}{n}} \int_V h(x)dV \leq K^{-2}$ alors il existe une solution. Ainsi si $\int_V h(x)dV \leq K^{-2}V^{\frac{n-4}{n}}$ alors quelque soit $a(x)$ l'équation (E) avec $f(x) = Const.$ a une solution .

Démonstration:
Si $\mu < J(1) \leq K^{-2}$ le théorème 2 s'applique. Si $\mu = J(1)$, c'est dire que 1 est solution de l'équation . ■

THEOREME 4.
Lorsque $n > 6$ *, si en un point* $P \in V$ *,* $R(P) > -C(n)a(P)$ *avec* $C(n) = \frac{2n(n-1)}{n^2-2n-4} > 0$ *alors* (E) *avec* $f(x) =$ *Const. , a une solution* $\psi \in H_2$ *. Si* $\| \psi \|_N = 1$ *,* $f(x) = \mu$ *.*

Démonstration:
Considérons un système de coordonnées normales géodésiques centré en P, un point de la variété.
Lorsque n>6 faisons un développement limité de $J(\lambda\varphi_k)$ pour $k \longrightarrow 0$, avec la suite

$$\lambda\varphi_k = \lambda(r)(r^2 + k^2)^{-\frac{(n-4)}{2}},$$

$\lambda(r)$ est une fonction C^∞ égale à 1 sur $B_p(\epsilon)$ et 0 sur $V \setminus B_p(2\epsilon)$.

- Nos calculs montrent que

$$J(\lambda\varphi_k) \longrightarrow K^{-2} \left\{1 - k^2 \left[a(P)C_1(n) + R(P)C_2(n)\right] + O(k^3)\right\}$$

et

$$\mu \leq K^{-2} = \frac{n(n+2)(n-2)(n-4)}{2^4} \, \omega_n^{\frac{4}{n}}.$$

- Et nous avons $\mu < K^{-2}$ s'il existe un point P tel que

$$R(P) > -C(n)a(P) = -\frac{2n(n-1)}{n^2-2n-4} a(P).$$

D'après le théorème 2, il existe alors une solution non triviale de l'équation (E).

THEOREME 5. *Lorsque* $n = 6$*, s'il existe un point* $P \in V$ *où* $R(P) > -3a(P)$ *alors (E) a une solution* $\psi \in H_2$.

Etude de l'équation (E) avec f(x) partout positive.

Considérons la fonctionnelle sur H_2 :

$$J(\varphi) = \frac{\int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)|\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x)\varphi^2(x)dV}{\left[\int_V f(x)|\varphi|^N(x)dV\right]^{2/N}}$$

où $\varphi \in H_2$ et $\varphi \not\equiv 0$.
L'équation d'Euler du problème variationnel suivant:

$$(*) \qquad \text{Inf } \ J(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{A} = \{\varphi \in H_2(V), \varphi \not\equiv 0\}$$

est l'équation (E). Notons ν cet inf.

THEOREME 6. $\nu \leq K_2^{-2}[supf]^{-2/N}$. *Si* $\nu < K_2^{-2}[supf]^{-2/N}$, *l'équation (E) a une solution* $\psi \in H_2$, $\psi \not\equiv 0$, $\psi \in C^{(5,\alpha)}$ $\alpha \in (0.1)$ *(*C^∞ *si n=5,6,8 ou* $\psi > 0$*) qui minimise le problème (*).*

Démonstration:
Nous considérons les équations approchées suivantes:
$\forall\, 2 < q < N$:

$$\Delta^2\varphi + \nabla\left[a(x)\nabla\varphi\right] + h(x)\varphi = \lambda f(x)\varphi|\varphi|^{q-2} \qquad (E_q)$$

et la fonctionnelle

$$J_q(\varphi) = \frac{\int_V |\Delta\varphi|^2 dV - \int_V a(x)|\nabla\varphi|^2 dV + \int_V h(x)\varphi^2(x)dV}{\left[\int_V f(x)|\varphi|^q(x)dV\right]^{2/q}}.$$

On définit

$$\lambda_q = \text{Inf } \ J_q(\varphi), \quad \text{pour} \quad \varphi \in H_2(V_n)\ ,\ \varphi \not\equiv 0.$$

- En manière analogue a celle du théorème 1 on prouve que: $\forall\, 2 < q < N$, $\exists\ \varphi_q \in H_2(V)$, $\varphi_q \not\equiv 0$ avec $\int_V f(x)|\varphi_q|^q dV = 1$, solution faible de l'équation (E_q).

- La suite $\{\varphi_q\}_{1<q<N}$ est bornée dans H_2 et la suite $\{\lambda_q\}_{1<q<N}$ est bornée.

• Prenons une suite $q \longrightarrow N$ avec φ_q solution de l'équation (E_q). Comme la suite $\{\varphi_q\}$ est bornée dans H_2,il existe une fonction $\psi \in H_2$ et une sous-suite $q_i \longrightarrow N$ telles que $\varphi_{q_i} \longrightarrow \psi$ faiblement dans H_2, fortement dans H_1 et L_2 et p.p. (Th Banach et Kondrakov).

• D'après la convergence faible pour tout $g \in H_2$

$$\int_V \Delta g \Delta \varphi_{q_i} dV - \int_V a(x) \nabla^\nu g \nabla_\nu \varphi_{q_i} dV + \int_V h(x) g \varphi_{q_i} dV$$

$$\longrightarrow \int_V \Delta g \Delta \psi dV - \int_V a(x) \nabla^\nu g \nabla_\nu \psi dV + \int_V h(x) g \psi dV.$$

• $\varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i - 2}$ vers $\psi |\psi|^{N-2}$ faiblement dans $L_{\frac{N}{N-1}}$ ainsi $fg \in \left(L_{\frac{N}{N-1}}\right)^*$ d'où

$$\int_V fg \varphi_{q_i} |\varphi_{q_i}|^{q_i-2} dV \longrightarrow \int_V fg \psi |\psi|^{N-2} dV.$$

• On déduit que ψ vérifie faiblement dans H_2 l'équation

$$\Delta^2 \psi + \nabla \left[a(x) \nabla \psi\right] + h(x) \psi = \lambda_N f(x) \psi |\psi|^{N-2}$$

avec λ_N limite d'une sous-suite convergente extraite de $\{\lambda_{q_i}\}$ qui est bornée.

• La solution ψ est non triviale et elle est $C^{5,\alpha}(0 < \alpha < 1)$. ■

PROPOSITION 2. *Les λ_q sont soit tous positifs, soit tous négatifs, soit tous nuls. La fonction $q \longrightarrow |\lambda_q|$ est décroissante et continue. De plus $\lambda_N = lim_{q_i \longrightarrow N} \lambda_{q_i}$ est égal à $\nu = Inf J(\varphi)$ pour $\varphi \in H_2$, $\varphi \not\equiv 0$ dans le cas positif.*

PROPOSITION 3. *Si $a(x) \equiv a = -2\alpha$ et $h(x) \equiv b = \alpha^2$, le mi= nimiseur ψ de la fonctionnelle $J(\varphi)$ sur H_2 est strictement positif et C^∞. Même résultat si les racines de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ sont positives.*

Applications du théorème 6.

THEOREME 7. *Lorsque n>6, si en un point P où f est maximum,* $a(P)C(n)+R(P)+\tilde{C}(n)\frac{\Delta f}{f(P)} > 0$ *alors (E) a une solution* $\psi \in H_2$.

Démonstration:
Lorsque n>6 faisons un développement limité de $J(\lambda\varphi_k)$ pour $k \longrightarrow 0$, avec la suite

$$\lambda\varphi_k = \lambda(r)(r^2+k^2)^{-\frac{(n-4)}{2}}.$$

Nos calculs montrent que:

$$J(\lambda\varphi_k) = K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}} \times$$

$$\left\{ 1 - k^2 \left[a(P)C_1(n) + R(P)C_2(n) + C_3(P)\frac{\Delta f}{f(P)} \right] + O(k^3). \right\}$$

D'où

$$J(\lambda\varphi_k) \longrightarrow K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}} \qquad \text{et} \qquad \nu \leq K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}.$$

L'inégalité du théorème 6: $\nu < K_2^{-2} f(P)^{-\frac{2}{N}}$ est vérifiée s'il existe un point P où f est maximum tel que

$$R(P) + a(P)C(n) + \tilde{C}(n)\frac{\Delta f}{f(P)} > 0,$$

avec $\tilde{C} < 0$. En conséquence, d'après le théorème 6, il existe une solution non triviale de l'équation (E). ■

THEOREME 8. *Lorsque* $n = 6$*, s'il existe un point* $P \in V$ *où* $R(P) > -3a(P)$ *alors (E) a une solution* $\psi \in H_2$*, quelle que soit la fonction f(x) partout positive.*

Sur $(\overline{W},g)$, une variété riemannienne, compacte C^∞ et à bord ∂W on considère le problème elliptique du quatrième ordre avec données au bord:

$$(P)\quad \begin{cases} \Delta^2 u + \nabla^i\left[a(x)\nabla_i u\right] + h(x)u = \lambda f(x)u|u|^{N-2} \text{ sur } W_n, \\ \Delta u|_{\partial W} = \gamma|_{\partial W} \quad u|_{\partial W} = \eta, \end{cases}$$

γ et η sont deux fonctions C^∞ sur $(\overline{W},g)$, $N = \frac{2n}{n-4}$, λ est un réel à déterminer, a(x), h(x) et f(x) comme précédemment.

On considère pour $2 < q < N$ le problème suivant:

$$(P_q)\quad \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i\left[a\nabla_i v\right] + hv = \lambda f(v+\varphi)|v+\varphi|^{q-2} + g \ \text{ sur } W_n \\ \\ \Delta v|_{\partial W} = 0 \quad v|_{\partial W} = 0, \end{cases}$$

où g et φ sont des fonctions $C^\infty(\overline{W})$, $\varphi \not\equiv Const$ et pour tout λ $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$.
Soit

$$J_q(v) = \int_W |\Delta v|^2\, dW - \int_W a(x)|\nabla v|^2\, dW + \int_W h(x)v^2\, dW$$
$$-2\int_W g(x)v dW$$

la fonctionnelle associée.

On définit

$\mathcal{A} = \overset{\circ}{H}_1 \cap H_2$, $\mathrm{A}_q = \left\{w \in \mathcal{A} : \int_W f(x)|w+\varphi|^q dW = \mu, \mu > 0\right\}$

$$\lambda_q = \text{Inf } J_q(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{A}_q$$

THEOREME 9. *Pour $2 < q < N$, il existe un réel $\lambda = \lambda_q$ et une fonction $v_q \in \mathcal{A}_q$ solution du problème P_q avec $J_q(v_q) = \lambda_q$.*

Démonstration:

(i) λ_q est fini. ($\mathcal{A}_q$ n'est pas vide et $\lambda_q > Const$).

(ii) Soit $\{v_i\} \in \mathcal{A}_q$ une suite minimisante :

$$lim_{i \longrightarrow \infty} J_q(v_i) = \lambda_q.$$

Nous montrons que la suite $\{v_i\}$ est bornée dans $H_2(W)$.

(iii) Il existe une fonction $v_q \in H_2$ et une sous -suite de $\{v_i\}$ qui converge a v_q faiblement dans H_2 et fortement dans L_q, H_1 (*Th Banach et Kondrakov)*.
D'où $\int_V f(x)|v_q + \varphi|^q = \mu$ et v_q réalise le minimum de la fonctionnelle, $\lambda_q = J(v_q)$.

(iv) v_q satisfait l'équation d'Euler du problème variationnel considéré. On a que v_q vérifie au sens de distribution, sur W

$$\Delta^2 v_q + \nabla^i [a \nabla_i v_q] + h v_q = \beta_q f(v_q + \varphi)|v_q + \varphi|^{q-2} + g \quad (21)$$

sur ∂W:$\Delta v_q = 0$ et en général $\lambda_q \not\equiv \beta_q$:

$$\lambda_q = \beta_q \int_W f(x)|v_q + \varphi|^{q-2}(v_q + \varphi)v_q dW - \int_W g v_q dW.$$

(v) En plus $v_q \not\equiv 0$ car $v_q \equiv 0$ n'est pas solution faible dans $\mathcal{A}$ de l'équation (21). Si non on aurait $g(x) = -\beta_q \int_W f(x)|\varphi|^{q-2}\varphi dW$, ce qui est contraire à l'hypothèse pour q voisin de N.

(vi) La suite $\{\beta_q\}$ est bornée.

(vii) *Régularité pour v_q.*
Comme v_q vérifie (21), $v_q \in C^{5,\alpha}(W)$ pour un certain $\alpha \in (01)$.

THEOREME 10. *Il existe un réel λ et une fonction non identiquement nulle v dans $\mathcal{A}_N = \left\{ w \in \mathcal{A} : \int_W f(x)|w+\varphi|^N dV = \mu \right\}$, solutions du problème*

$$(P_N) \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i \left[a \nabla_i v \right] + hv = \lambda f(v+\varphi)|v+\varphi|^{N-2} + g \text{ sur } W_n \\ \\ \Delta v|_{\partial W_n} = 0 \quad v|_{\partial W_n} = 0. \end{cases}$$

Démonstration:

• Prenons une suite $q \longrightarrow N$ avec v_q solution de (P_q). La suite $\{v_q\}$ est bornée dans H_2 alors il existe une fonction $v \in H_2$ et une sous-suite $q_i \longrightarrow N$ telles que $v_{q_i} \longrightarrow v$ faiblement dans H_2, fortement dans H_1 et donc dans L_2 et p.p.*(th de Kondrakov et Banach)*.

D'après la convergence faible pour tout $\psi \in \mathcal{A}$

$$\int_W \Delta\psi \Delta v_{q_i} dW - \int_W a \nabla^\nu \psi \nabla_\nu v_{q_i} dW + \int_V h\psi v_{q_i} dW - 2\int_W g\psi dW$$

$$\longrightarrow \int_W \Delta\psi \Delta v dW - \int_W a \nabla^\nu \psi \nabla_\nu v dW + \int_V h\psi v dW - 2\int_W gv dW.$$

• De plus

$$\int_W f(v_{q_i}+\varphi)|v_{q_i}+\varphi|^{q_i-2}\psi dW \longrightarrow \int_W f(v+\varphi)|v+\varphi|^{N-2}\psi dW$$

pour la convergence faible de $(v_{q_i}+\varphi)|v_{q_i}+\varphi|^{q_i-2}$ vers $(v+\varphi)|v+\varphi|^{N-2}$ dans $L_{\frac{N}{N-1}}$ *(convergence p.p + suite bornée dans $L_{\frac{N}{N-1}}$ alors convergence faible dans $L_{\frac{N}{N-1}}$).*

• La fonction v vérifie au sens faible dans $\mathcal{A}$ le problème (P) avec, $\lambda = lim_{q_i \longrightarrow N} \beta_{q_i}$ (où d'une sous-suite) puisque la suite $\{\beta_{q_i}\}_{2<q_i<N}$ est uniformément bornée. ■

THEOREME 11. *Le problème (P) est équivalent au problème* (P_N) *avec* $u = v + \varphi$*, où* $\varphi \in C^\infty$ *est la solution de l'équation du deuxième ordre:*

$$(Q) \quad \begin{cases} \Delta\varphi(x) = \gamma(x) \quad \textit{dans} \quad W, \\ \\ \varphi(x)|_{\partial W_n} = \eta(x)|_{\partial W_n}. \end{cases}$$

v *est alors la solution du problème* (P_N)*.*

Démonstration:

En effet si on pose $u = v + \varphi$ le problème (P) devient :

$$(P) \begin{cases} \Delta^2 v + \nabla^i \left[a \nabla_i v\right] + hv = \lambda f(v+\varphi)|v+\varphi|^{N-2} + g\, W_n, \\ \\ \Delta v|_{\partial W} = v|_{\partial W_n} = 0, \end{cases}$$

où la fonction $-g(x) = \Delta^2\varphi + \nabla^i\left[a(x)\nabla_i\varphi\right] + h(x)\varphi$.

Sous l'hypothèse $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \not\equiv 0$ on a montré que $v \not\equiv 0$ et donc la fonction $u = v + \varphi$ solution du problème (P).

Si $g(x) + \lambda f(x)\varphi(x)|\varphi(x)|^{N-2} \equiv 0$ alors $u = \varphi$ est la solution cherchée. ■