



HAL
open science

Equations aux dérivées partielles appliquées à la restauration et à l'agrandissement des images

Abdelmounim Belahmidi

► **To cite this version:**

Abdelmounim Belahmidi. Equations aux dérivées partielles appliquées à la restauration et à l'agrandissement des images. Mathématiques [math]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2003. Français. NNT: . tel-00003022

HAL Id: tel-00003022

<https://theses.hal.science/tel-00003022>

Submitted on 25 Jun 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris IX-Dauphine
U.F.R. Mathématiques de la Décision

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Équations aux dérivées partielles appliquées
à la restauration et à l'agrandissement
des images**

THÈSE

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

(arrêté du 30 mars 1992)

présentée et soutenue par

Abdelmounim BELAHMIDI

JURY

Rapporteur :

M. Gilles AUBERT

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

Directeur de thèse :

M. Antonin CHAMBOLLE

CHARGÉ DE RECHERCHE CNRS À L'UNIVERSITÉ PARIS IX-DAUPHINE HABILITÉ

Rapporteur :

M. Georges-Henri COTTET

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER DE GRENOBLE

Mme Françoise DIBOS

MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'UNIVERSITÉ PARIS IX-DAUPHINE HABILITÉ

M. Frédéric GUICHARD

DIRECTEUR SCIENTIFIQUE DE LA SOCIÉTÉ VISION-IQ

M. Jean-Michel MOREL

PROFESSEUR À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Date de soutenance : LE 05 JUIN 2003

Table des matières

Remerciements	9
1 Résumé de la thèse	17
1.1 Introduction générale	17
1.2 Plan de la thèse	17
Partie I : Restauration des images et des signaux	23
2 Les équations aux dérivées partielles et le traitement d'image	25
2.1 Modèles linéaires	25
2.2 Modèles non-linéaires	27
3 Le filtrage nonlinéaire de Malik et Perona	35
3.1 Introduction	35
3.2 La détection des bords	35
3.2.1 La doctrine	35
3.2.2 La théorie de détection de bords et le modèle de Malik et Perona	37
3.3 La théorie mathématique autour du modèle de Malik et Perona	39
3.3.1 Kawohl et Kutev	40
3.3.2 Kichenassamy	40
3.3.3 You, Xu, Tannenbaum et Kaveh	40
3.3.4 Conclusions	41
3.4 Le choix du modèle	41
4 Résolution du système dans les espaces de Hölder paraboliques	45
4.1 Introduction	45
4.2 Préliminaires	46
4.2.1 Les espaces de Hölder	46
4.2.2 Les espaces de Hölder paraboliques	46
4.2.3 Résultats d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles paraboliques	47

4.2.4	Un résultat de dépendance en temps pour la constante du problème de Cauchy	50
4.3	Étude du système dans le cas $D = \mathbb{R}^N$	51
4.3.1	le résultat principal	51
4.3.2	Quelques résultats intermédiaires	52
4.3.3	Preuve du résultat principal	58
4.4	Le cas d'un ouvert borné régulier	59
4.5	Le cas d'un hypercube	60
4.5.1	Existence et unicité	60
4.5.2	Principe du maximum	61
4.6	Limite asymptotique	63
5	Approximation numérique dans les espaces de Sobolev	67
5.1	Introduction	67
5.2	Préliminaires et résultat principal	68
5.3	Résultats intermédiaires	70
5.4	Preuve du théorème 7.	79
6	Discrétisation et application	83
6.1	Discrétisation	83
6.2	Application	85
	Partie II : Agrandissement d'images	99
7	État de l'Art	101
7.1	Introduction	101
7.2	Représentation fréquentielle d'une image	101
7.3	Agrandissements par projection linéaire	103
7.4	Agrandissement par projection non-linéaire	106
7.5	Agrandissements par minimisation d'énergie sous contrainte	108
7.6	Mesure de la qualité de l'agrandissement	110
7.7	Pourquoi un nouveau modèle?	110
8	Une approche géométrique	113
9	Solutions de viscosité	123
9.1	Introduction	123
9.2	Définition	123
9.3	Méthodes d'existence	124
9.4	Méthode d'unicité	125
9.5	Les solutions de viscosité et la vision par ordinateur	126

10 Analyse mathématique du modèle	129
10.1 Préliminaires	129
10.2 Analyse mathématique	130
10.2.1 Principe du maximum	131
10.2.2 Stabilité	132
10.2.3 Existence et unicité	137
11 Discrétisation et résultats expérimentaux	143
11.1 Discrétisation	143
11.1.1 Les termes du second ordre	143
11.1.2 Le temps d'arrêt	145
11.2 Application	147
Annexes	165
12 Annexe du chapitre 4.	167
13 Annexe du chapitre 5.	173
Bibliographie	181

Table des figures

3.1	Première ligne, à gauche image originale, au milieu convolution avec une gaussienne d'écart type 4, à droite convolution avec une gaussienne d'écart type 8. Deuxième ligne, les bords extraits à l'aide du filtre de Canny.	37
3.2	Graphes des fonctions $g(x)$ et $xg(x)$, avec $K = 1$	38
6.1	En haut : à gauche l'image originale, à droite u à l'échelle 1. En bas : à gauche u à l'échelle 5, à droite u à l'échelle 10.	86
6.2	En haut : v à l'échelle 1. En bas : à gauche v à l'échelle 5, à droite v à l'échelle 10.	87
6.3	Les bords extraits à l'aide du filtre de <i>Canny</i> , en haut : à l'échelle 1, en bas : à gauche à l'échelle 5, à droite à l'échelle 10.	88
6.4	En haut : à gauche l'image originale, à droite u à l'échelle 1. En bas : à gauche u à l'échelle 5, à droite u à l'échelle 10.	89
6.5	En haut : v à l'échelle 1. En bas : à gauche v à l'échelle 5, à droite v à l'échelle 10.	90
6.6	Les bords extraits à l'aide de l'algorithme de Canny aux échelles : 1, 5 et 10.	91
6.7	Même disposition que sur les figures 6.4.	92
6.8	Même disposition que sur les figures 6.5.	93
6.9	Même disposition que sur les figures 6.6.	94
6.10	"Vue de Venise" de Canaletto.	95
6.11	u à l'échelle 5 de 6.10.	96
6.12	v à l'échelle 5 de 6.10.	97
7.1	Image et son spectre.	102
7.2	La fonction <i>sinus Cardinal</i>	104
7.3	Du haut en bas et de droite à gauche : 1-Interpolation par duplication, 2-Interpolation linéaire, 3-Interpolation quadratique, 4-interpolation cubique avec $A = -.5$	106
7.4	De droite à gauche : image agrandie, son spectre. Du haut en bas : Agrandissement par duplication, par <i>zero-padding</i> , par interpolation linéaire et par interpolation cubique.	107
8.1	Mouvement par courbure moyenne de la ligne de niveau $\{f = c\}$	117
8.2	En haut, à gauche agrandissement par duplication de taille 4, à droite son mouvement par courbure moyenne à l'échelle 4. En bas, leurs spectres respectifs.	118

8.3	La même disposition que la figure 8.5, sauf que l'équation de la chaleur remplace le mouvement par courbure moyenne.	119
8.4	Changement de repère local : $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{\eta} = (Df/ Df)(x_0), \vec{\xi} = (Df^\perp/ Df)(x_0))$	120
8.5	En haut, à gauche agrandissement par duplication de taille 4, à droite son mouvement par courbure moyenne à l'échelle 4. En bas, leurs spectres respectifs.	121
11.1	Echelle de diffusion.	146
11.2	Une sélection de zones de comparaisons.	147
11.3	De gauche à droite et du haut en bas, agrandissement de facteur 4 de la zone A de l'image 11.2, par : 1- duplication, 2- interpolation linéaire, 3- zero padding, 4- Spline d'ordre 3, 5- variation totale, 6- Notre modèle avec les coefficients (1, 1, 3).	150
11.4	Les spectres des images de la figure 11.3.	151
11.5	Même disposition que sur les figures 11.3, pour la zone B	152
11.6	Les spectres des images de la figure 11.5.	153
11.7	Même disposition que sur la figure 11.3, pour la zone C	154
11.8	Les spectres des images de la figure 11.7.	155
11.9	En haut : Image de Lena. En bas : Agrandissement par duplication de taille 4.	156
11.10	Agrandissement par notre modèle d'une taille 4 avec les coefficients (1, 1, 3).	157
11.11	Les lignes de niveaux multiples de 20, de l'image 11.9.	158
11.12	Les lignes de niveaux multiples de 20, de l'image 11.10.	159
11.13	En haut : Image de textures. En bas : Agrandissement par duplication de taille 4.	160
11.14	Agrandissement par notre modèle d'une taille 4 avec les coefficients (1, 1, 3).	161
11.15	Les lignes de niveaux multiples de 40, de l'image 11.13.	162
11.16	Les lignes de niveaux multiples de 40, de l'image 11.14.	163

Chapitre 1

Résumé de la thèse

1.1 Introduction générale

Depuis une quinzaine d'années la recherche en vision par ordinateur fait appel au formalisme espace-échelle "*scale-space*" et à la théorie des équations aux dérivées partielles. Ces deux cadres s'étendent à une grande variété de problèmes issus de la vision par ordinateur, tels que la restauration, la segmentation, le réhaussement, le recalage d'image, l'évolution de courbes, la vision stéréoscopique, la détection du mouvement etc . . .

Cette thèse a pour objet l'étude de deux problèmes distincts. Tout les deux font partie du formalisme "*scale-space*" et sont exprimés sous forme d'équations aux dérivées partielles : La restauration d'image en première partie et l'agrandissement d'image dans la seconde.

Il est important de souligner que la majorité des problèmes de vision par ordinateur sont mal posés. En d'autres termes, il n'y a pas toujours une seule solution à un problème de vision, mais souvent on cherche une solution acceptable en supposant vrai des hypothèses qui sont dans la plupart des cas d'ordre technique.

Il est aussi nécessaire de rappeler que nous ne sommes pas insensibles aux images. Par conséquent, notre perception visuelle a souvent le dernier mot à dire sur la qualité d'une solution d'un problème de vision.

1.2 Plan de la thèse

Première partie : Restauration d'image

Chapitre 2 : Les équations aux dérivées partielles et le traitement d'image

Nous présentons un panorama des méthodes de restauration d'image. Nous parcourons ces méthodes depuis leur apparition avec les travaux de Marr et Hildreth [MH80], A. Witkin [Wit83] et de Koen-

derink [Koe84]. Le point commun de ces méthodes est de garder intacts, les bords des objets aperçus dans une image et d'éliminer le bruit dans les autres parties de l'image. Ces deux tâches simples d'apparence, pourtant extrêmement compliquées, ont été génératrices d'idées et de modélisations que nous allons survoler dans ce chapitre.

Chapitre 3 : Le filtrage nonlinéaire de Malik et Perona

Ce chapitre fait l'objet d'une discussion autour du modèle de Malik et Perona :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + |Du|^2} Du \right), \quad u(\cdot, 0) = u_0.$$

Après avoir présenté la théorie de détection des bords, nous allons mettre en évidence les liens qui existent entre cette théorie et le modèle de Malik et Perona. Après avoir rappelé pourquoi ce modèle est mal posé, nous soulignons tout d'abord les travaux qui ont tenté de donner un sens à ses éventuelles solutions. Ces travaux sont pratiquement tous faits en dimension 1. Ensuite nous nous intéressons aux propositions faites pour modifier le modèle de Malik et Perona dans le but de le rendre bien posé, notamment le modèle proposé par Nitzberg et Shiotu [NS92] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + v} Du \right), & u(\cdot, 0) &= u_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= |Du|^2 - v, & v(\cdot, 0) &= v_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où u_0 représente l'image à restaurer, v_0 une donnée initiale (par exemple $|Du_0|^2$) et v une moyenne temporelle de $|Du|^2$. Ensuite, nous expliquons pourquoi ce modèle a retenu notre attention, et par conséquent toute l'étude menée dans la première partie est sur ce modèle.

Chapitre 4 : Résolution du système dans les espaces de Hölder paraboliques

Dans ce chapitre, nous répondons à la question de l'existence et l'unicité d'une solution (u, v) du système (1.1) (le système (1.1) est considéré sous une forme plus générale).

Dans le cadre des espaces de Hölder nous cherchons une solution classique unique, en supposant une régularité suffisante sur la donnée initiale (u_0, v_0) . Cette solution n'existe que jusqu'à un temps maximal, éventuellement fini, qui dépend des données du problème. Ce résultat est étendu pour différents types de domaines et conditions aux limites sur le bord quand le domaine est borné.

Ensuite, nous remplaçons la deuxième équation de (1.1) par :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \delta (|Du|^2 - v), \quad v(\cdot, 0) = v_0,$$

avec $\delta > 0$, et nous étudions l'état asymptotique du nouveau système ainsi que le temps maximal d'existence et d'unicité, quand δ tend vers 0. Nous prouvons entre autre que, si le temps maximal pour $(\delta = 1)$ est fini, alors il converge vers $+\infty$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Chapitre 5 : Approximation numérique dans les espaces de Sobolev

Dans ce chapitre, nous proposons une approximation du système (1.1) (légèrement modifié), dans les espaces de Sobolev :

$$\begin{aligned}\frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + v_{\delta t}^n} \nabla u_{\delta t}^{n+1} \right), \\ \frac{v_{\delta t}^{n+1} - v_{\delta t}^n}{\delta t} &= F_M(|\nabla u_{\delta t}^{n+1}|^2) - v_{\delta t}^{n+1},\end{aligned}$$

avec $F_M(s)$ une version régulière de $\min(M, s)$, avec $M > 0$ assez grand. Nous prouvons la convergence de cette approximation vers le système :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{1 + v} D u \right), & u(\cdot, 0) &= u_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= F_M(|D u|^2) - v, & v(\cdot, 0) &= v_0,\end{aligned}$$

ainsi que l'existence d'une solution faible (u, v) en tout temps $T > 0$.

Dans ce chapitre, nous faisons appel aux méthodes variationnelles des problèmes elliptiques. Nous utilisons aussi des résultats de régularité dus à D. Gilbarg and N-S. Trudinger [GT77] et à N-G. Meyers [Mey63], ainsi que la théorie du degré topologique de Brouwer [Kav93].

Chapitre 6 : Discrétisation et application

Nous présentons une discrétisation de l'approximation étudiée dans le chapitre 5. Nous montrons que le schéma proposé est stable et qu'il garantit le principe du maximum . Nous exposons ensuite quelques exemples d'applications en les comparant au filtre de Canny.

Deuxième partie : Agrandissement d'image

Chapitre 7 : État de l'Art

Après avoir introduit des notions élémentaires de l'analyse de Fourier, nous présentons les méthodes classiques d'agrandissement d'image. Nous discutons ensuite de leurs performances et de leurs inconvénients, tout en soulignant que la plupart de ces modèles ne tiennent pas compte de la géométrie de l'image.

Chapitre 8 : Une approche géométrique

Au début, nous définissons notre processus d'agrandissement comme un équilibre entre des opérateurs régularisants $\sum_i H_i$ et une contrainte de réduction $CR(u)$, sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i H_i(t, x, u, Du, D^2u) - CR(u).$$

Ensuite, sur la base d'un ensemble de critères géométriques, nous précisons la définition de la contrainte de réduction sous la forme :

$$CR(u) = Pu - u_0,$$

où P est un opérateur de projection linéaire, et la définition de chaque opérateur régularisant en fonction de l'action qui lui est attribuée.

Pour cela nous supposons que ces actions peuvent être accomplies par des filtres itérés. Puis nous faisons appel à l'approche axiomatique élaborée par L. Alvarez, F. Guichard, P-L. Lions et J-M. Morel [AGLM93] sur la pyramide visuelle introduite par C. Lopez et J-M. Morel [LM92]. Dans [AGLM93], les auteurs définissent une analyse multi-échelle (ou filtre itéré) comme l'application d'un ensemble d'opérateur $\{T_t(\cdot), t \geq 0\}$ à une image $f(x)$, conduisant à un continuum d'images

$$(T_t f)(x) = f(x, t).$$

Finalement, une fois les propriétés des filtres itérés fixées, nous définissons nos opérateurs H_i de la manière suivante :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = H(Df, D^2 f).$$

Cette discussion nous conduit à définir notre modèle d'agrandissement.

Chapitre 9 : Solutions de viscosité

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de solution de viscosité, son cadre mathématique et les motivations du choix de cette théorie pour la validation de notre modèle défini dans le chapitre 8. Nous rappelons au passage quelques applications de cette théorie en vision par ordinateur.

Chapitre 10 : Analyse mathématique du modèle

Après avoir proposé une définition d'une solution de viscosité pour notre modèle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) + g(Du) D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right) - (Pu - u_0), \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \end{aligned}$$

nous prouvons son existence et son unicité. Entre autre nous prouvons que notre modèle est stable et vérifie un principe du maximum du type :

$$\inf_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} u_0 - t \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} (Pu - u_0) \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} u_0 - t \inf_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} (Pu - u_0),$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$.

Chapitre 11 : Discrétisation et résultats expérimentaux

Nous allons discuter la manière avec laquelle nous discrétisons notre modèle. Nous allons aussi expliquer comment choisir le temps d'arrêt.

Nous terminons ce chapitre par des résultats expérimentaux qui permettent de comparer notre modèle à un certain nombre de méthodes d'agrandissement existantes et représentatives.

Première Partie

Restauration des images et des signaux

Chapitre 2

Les équations aux dérivées partielles et le traitement d'image

2.1 Modèles linéaires

La théorie classique de détection des bords (edge detection) suppose que l'information essentielle contenue dans une image, est constituée par les frontières des objets physiques photographiés. Cette théorie définit ces frontières là où la variation du niveau de gris de l'image est importante. Or dans une image, le bruit peut générer des variations sans signification et des bords d'objets qui n'existent pas visuellement. D'où la nécessité de filtrer l'image avant d'extraire ses bords.

Soit u_0 le niveau de gris de l'image à analyser. Le filtrage gaussien consiste à calculer le produit de convolution :

$$(G_\sigma * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x - y)u_0(y)dy, \quad (2.1)$$

où G_σ est la gaussienne d'écart type $\sigma > 0$ donnée par :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$

Plusieurs raisons justifient l'utilisation du filtrage gaussien. Une première raison est le fait que $G_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ permet d'avoir $G_\sigma * u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ même si u_0 n'est pas régulière, mais seulement absolument intégrable. Une deuxième raison vient du domaine fréquentiel. En effet, la transformée de Fourier du produit de convolution $G_\sigma * u_0$ est égale à la multiplication de la transformée de Fourier de G_σ à celle de u_0 . Constatons que la transformée de Fourier de G_σ est une gaussienne d'écart type $1/\sigma$, nous remarquons qu'au fur et à mesure que σ augmente, les hautes fréquences dans l'image convoluée sont atténuées. Nous ne gardons donc que les basses fréquences. Ceci correspond à une destruction des détails de l'image, le bruit y compris, en faveur des grandes tendances.

D'un autre point de vue, le produit de convolution (2.1) est équivalent à la diffusion de $u_0 \in C(\mathbb{R}^2)$

par l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t), \\ u(\cdot, 0) &= u_0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

où, quand $t > 0$:

$$u(x, t) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x).$$

De cette relation, nous constatons que le facteur échelle t est lié à l'écart type de G par la relation $\sigma = \sqrt{2t}$. Par conséquent, le lissage d'une structure jusqu'à l'ordre σ , nécessite l'arrêt de la diffusion à l'échelle

$$t = \frac{1}{2}\sigma^2.\tag{2.3}$$

Dans cette analyse non locale, un point x est dit point bord "edge point" à l'échelle σ , si $\Delta u(x, t)$ change de signe au voisinage de x , classiquement dit "passage par zéro du laplacien", et $|Du(x, t)|$ est assez grand. Lorsque le paramètre d'échelle σ est important, seules les grandes tendances de l'image sont perceptibles, le bruit est éliminé, mais le tout est mal localisé. Alors que si σ est petit, $u(\cdot, t)$ reste assez proche de l'image originale, donc la présence du bruit perturbe toujours la détection des bords. A. Witkin proposait de détecter les bords importants à grands échelles puis revenir à des petits échelles pour les localiser avec précision. La théorie du filtrage linéaire a été élaborée par Marr et Hildreth [MH80] puis formalisée par Witkin [Wit83] et Koenderink [Koe84].

La théorie du filtrage linéaire se généralise sous le formalisme suivant :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi\sqrt{\det(D_t)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^T D_t^{-1} (x-y)}{4}\right) u_0(y) dy\tag{2.4}$$

où $D_t = tD$ et D est une matrice 2×2 , définie positive. Une fois la matrice D est fixée, calculer le produit de convolution (2.4), revient à résoudre l'équation linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \operatorname{div}(D Du), \\ u(\cdot, 0) &= u_0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

L'intérêt de cette généralisation est de rendre le lissage gaussien invariant par une transformation affine, ici représentée par D , supposée appliquée sur l'image initiale u_0 . Il semble, d'après J. Weickert, S. Ishikawa et A. Imiya [WII97], que le filtrage gaussien "affine-invariant" a été proposé pour la première fois par Iijima [Iij62], en 1962, utilisant une approche axiomatique.

En 1992 M. Nitzberg et T. Shiota [NS92] proposent d'adapter localement la forme de la gaussienne à la structure de l'image. Plus précisément, en chaque point le noyau de la gaussienne est considéré comme une ellipse, au lieu d'un cercle, dont la taille et les axes principaux dépendent de la variation de l'image en ce point. Les auteurs ont montré, formellement, que quand la taille des gaussiennes tend vers 0, leur modèle tend vers une équation semblable à celle de Malik et Perona [MP87] (voir plus loin 2.6).

2.2 Modèles non-linéaires

Les modèles linéaires ont pour but de lisser l'image, en vue d'éliminer le bruit et restreindre l'extraction aux bords d'objets réels. Tout cela se fait en dépit de la qualité de l'image "sortie". Les modèles que nous exposons dans cette section, combinent extraction et restauration.

L'idée originale de Malik et Perona [MP87] est d'orienter le processus de diffusion (2.2) vers la restauration des images. Ils proposent de remplacer l'équation de la chaleur par l'équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (g(|Du|)Du) \quad (2.6)$$

où g est une fonction régulière à valeurs positives, qui vérifie les conditions suivantes :

$$g(0) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} sg(s) = 0 \quad \text{et} \quad g'(s) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad s > 0. \quad (2.7)$$

Le principe est que le filtrage obtenu par l'équation (2.6), est conditionnel; si $|Du|$ est assez grand en un point x , typiquement les points bords, la diffusion est alors inhibée, puisque $g(|Du(x)|)$ est proche de 0. Ceci permet la conservation des bords. Par contre, si $|Du(x)|$ est assez petit, $g(|Du(x)|)$ est proche de 1, l'équation devient équivalente à l'équation de la chaleur au voisinage de x , permettant un lissage isotrope en ce point. Les résultats expérimentaux obtenus par le modèle de Malik et Perona sont bien meilleurs que ceux obtenus par les méthodes linéaires et les bords qui présentent un gradient élevé, restent intacts le long de la diffusion.

Parmi les fonctions recommandées par Malik et Perona :

$$g(s) = \frac{1}{1 + (s/\lambda)^2} \quad \text{et} \quad g(s) = \exp(- (s/\lambda)^2).$$

Ici $\lambda > 0$ est un scalaire qui sépare les deux états de l'équation; inhibition si $|Du| > \lambda$ et diffusion si $|Du| < \lambda$.

En posant $\tilde{g}(s^2) = g(s)$, (2.6) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\tilde{g}(|Du|^2)Du) \quad (2.8)$$

On peut alors associer au modèle de Malik et Perona, la fonctionnelle d'énergie :

$$E(u) = \int_{\Omega} G(|Du|^2) dx \quad \text{avec} \quad G(K) = \int_0^K \tilde{g}(s) ds, \quad K > 0.$$

En effet, si $u \in H^1$ et ϕ une fonction test, le calcul de la variation de E nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{E(u + \epsilon\phi) - E(u)}{\epsilon} &= \int_{\Omega} \tilde{g}(|Du|^2) Du D\phi dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (g(|Du|)Du) \phi dx \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation de Malik et Perona s'interprète comme une descente de gradient de la fonctionnelle énergie E :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DE.$$

Malheureusement, ce modèle présente, une difficulté majeure qui réside dans son cadre théorique, puisque toute fonction g vérifiant les conditions (2.7), rend le problème mal posé. En effet, l'équation (2.6) s'écrit en dimension 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|Du|)\Delta u + g'(|Du|)|Du|D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right) \\ &= g(|Du|)|Du|\operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) + \left(g(|Du|) + g'(|Du|)|Du|\right)D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right) \\ &= g(|Du|)u_{\xi\xi} + \left(g(|Du|) + g'(|Du|)|Du|\right)u_{\eta\eta}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $u_{\xi\xi}$ est la diffusion suivant la direction orthogonale au gradient, et $u_{\eta\eta}$ la diffusion dans la direction du gradient. En dimension 1, (2.9) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (g(u') + g'(u')u')u''. \quad (2.10)$$

Comme on le remarque dans (2.9) et (2.10), si la dérivée de $sg(s)$ n'est pas toujours positive, l'équation devient non parabolique et mal posée, ce qui entraîne son instabilité. En terme de traitement d'image, cette instabilité se traduit par le fait que pour une même donnée initiale, on peut avoir plusieurs solutions divergentes.

Nordström [Nor90] propose de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$E(u, v) = \int_{\Omega} (u - u_0)^2 + \int_{\Omega} v|Du|^2 + \int_{\Omega} \lambda^2(v - \ln v)$$

où $v : \Omega \rightarrow [0, 1]$ est une représentation des bords de l'image : proche de 1 dans les zones homogènes et de 0 au voisinage des bords. Le premier terme garantit une certaine conformité de u à l'image initiale u_0 , et le deuxième régularise u dans les zones homogène (quand v est proche de 1). Le dernier terme sert à mesurer la variation du niveau de gris de l'image. On pourra remarquer la ressemblance entre cette fonctionnelle et celle proposée par L. Ambrosio et V.M. Tortorelli [AT92]. Les équations d'Euler correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} (u - u_0) - \operatorname{div}(vDu) &= 0, \\ \lambda^2\left(1 - \frac{1}{v}\right) + |Du|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations s'interprètent comme l'état stationnaire du modèle de diffusion-réaction suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{1 + \left(\frac{|Du|}{\lambda}\right)^2}\right) - (u - u_0), \quad u(\cdot, 0) = u_0. \quad (2.11)$$

En fait, cette équation d'évolution représente un compromis entre la diffusion anisotropique proposée

par Malik et Perona (2.6) et le terme d'attraction vers la donnée initiale ($u - u_0$). L'avantage de ce formalisme est que même si le temps d'arrêt est trop grand, l'image résultat reste relativement proche de l'image initiale. L'instabilité de ce modèle est évidente puisque g vérifie les hypothèses (2.7).

F. Catté, P. L. Lions, J. M. Morel et T. Coll [CLMC92] ont choisit de regrouper dans un même modèle la diffusion anisotropique de Malik et Parona et la théorie de détection des bords formalisée par Witkin. Ils proposent le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (g(|DG_\sigma * u|)Du). \quad (2.12)$$

Le terme $DG_\sigma * u$ n'est rien d'autre que le gradient de la solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \Delta w \quad w(\cdot, 0) = u(x, t). \quad (2.13)$$

à l'échelle $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2$ et la fonction g est supposée vérifier les propriétés (2.7).

En remplaçant Du par son estimé $DG_\sigma * u$, les auteurs ont montré que (2.12) admet une solution unique régulière et ont proposé un schéma numérique convergent, qui évite l'instabilité du modèle de Malik et Perona.

Remarquant que lorsque $t \rightarrow +\infty$, $u(\cdot, t)$ tend vers une constante, les auteurs proposent d'arrêter la diffusion en fonction des entités de l'image que l'on veut filtrer. En effet, supposons que l'on veuille éliminer les entités de l'image qui ont une taille inférieure à σ . Selon Witkin, il suffit de convoluer l'image avec G_σ . Donc, au voisinage de ces entités, l'équation (2.12) se comporte comme l'équation de la chaleur. Par contre pour les bords de tailles plus grandes, la diffusion sera relativement inhibée.

Ce processus a été analysé et modifié de plusieurs manières : Whitaker et Pizer [WP93] ont pensé faire décroître σ dans le temps, dans le but de réduire l'introduction du flou dans l'image. Li et Chen [LC94] ont proposé de faire décroître λ dans le temps. Une étude détaillée sur l'influence des différents paramètres a été menée par Benhamouda [Ben94]. Enfin Torkamani-Azar et Tait [TAT96] proposent de remplacer la gaussienne par le filtre exponentiel de Shen et Castan [SC92].

L.I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi [ROF92], proposent un nouveau formalisme du problème du traitement d'image. Supposons que l'image originale u , initialement régulière par morceaux, a été transformée via un opérateur linéaire (par exemple par une convolution avec une gaussienne) et l'addition d'un bruit gaussien η en une image u_0 :

$$u_0 = Au + \eta.$$

Le principe est donc de trouver u sachant u_0 . Pour résoudre le problème, il est nécessaire d'avoir un minimum d'information sur A et sur η . L'approche de Rudin et Osher consiste à résoudre le problème de minimisation de la variation totale :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \int_{\Omega} |Du|, \\ & \text{sous les contraintes : } \int_{\Omega} Au = \int_{\Omega} u_0 \text{ et } \int_{\Omega} |Au - u_0|^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

La première contrainte suppose que le bruit η est de moyenne nulle et la deuxième que son écart type est égale à σ . A. Chambolle et P. L. Lions [CL97] ont présenté des résultats d'existence et d'unicité pour ce modèle. Ils ont prouvé aussi, que le problème initial avec contrainte est lié au problème sans contraintes :

$$\text{Minimiser } \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} |Au - u_0|^2.$$

Signalons enfin, que minimiser la variation totale revient formellement à évoluer selon l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right),$$

qui constitue un cas particulier du modèle de Malik et Perona, quand $g(s) = s^{-1}$.

En se basant sur des modèles discrets établis pas D. et S. Geman [GG84], et repris par A. Black et A. Zisserman [BZ87], D. Mumford et J. Shah [MS85] ont étudié une nouvelle approche variationnelle, qui associe restauration et détections des bords. Cette méthode consiste à approcher l'image originale (ou le signal original) u_0 , par une fonction u plus régulière mais présentant des discontinuités, en minimisant :

$$\int_{\Omega/K} |Du|^2 + \mathcal{H}^{n-1}(K) + \int_{\Omega} |u - u_0|^2.$$

où \mathcal{H}^{n-1} est la mesure de Hausdorff $(n - 1)$ dimensionnelle et K l'ensemble de discontinuité de u .

Mumford et Shah ont étudié, en dimension deux, l'aspect des minima éventuels de leur fonctionnelle. Ils ont conjecturé l'existence d'un minimum (u, K) où K serait composé d'un nombre fini de courbe régulière (C^1), ne se rencontrant qu'à leurs extrémités. Cette conjecture qui semble forte, a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, à citer G. Dal Maso, J.M. Morel, et Sergio Solimini [MJS92], G. David [Dav96], L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara [AFP95]. En particulier le livre de J.M. Morel et S. Solimini [MS94] présente une étude détaillée du modèle.

Une autre classe de fonctionnelle basée sur l'idée d'approximation de l'ensemble des discontinuités par une fonction régulière w , proche de 0 près des bords de u et proche de 1 ailleurs :

$$F(u, w) = \int_{\Omega} \left((u - u_0)^2 + w^2 |Du|^2 + (c |Dw|^2 + \frac{(1-w)^2}{4c}) \right) dx. \quad (2.14)$$

où c est une constante positive qui spécifie la largeur des bords. L. Ambrosio et V.M. Tortorelli ont prouvé que cette fonctionnelle converge vers celle de Mumford-Shah quand $c \rightarrow 0$ (au sens de Γ -convergence, voir L. Ambrosio et V. Tortorelli [AT92] pour plus de détails).

Minimiser la fonctionnelle (2.14) revient à évoluer selon les équations aux dérivées partielles couplées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \text{div} (w^2 Du) - (u - u_0), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= c \Delta w - 2w |Du|^2 - \frac{(1-w)}{2c}, \end{aligned}$$

avec une condition de Neumann homogène aux bords. Ce genre d'équations a été étudié par Richard-

son et Mitter [RM96]. Malheureusement, la minimisation de la fonctionnelle F (2.14) ne fournit que des extrémums locaux (cf. Esedoglu [ES02]).

Cottet et Germain [CG93], ont introduit un modèle de diffusion tensorielle dans le but d'un lissage sélectif des images et comportant un terme de réaction destiné à renforcer les contrastes. Leur idée est de définir un opérateur qui sert à comparer d'une manière continue la direction du gradient de u à celle de u_ϵ , où u_ϵ est une version régularisée de u , définie par :

$$u_\epsilon = u * \xi_\epsilon \quad \text{où } \epsilon > 0 \quad \text{et} \quad \xi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2} \xi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

où ξ une fonction régulière à support compact dans $\{|x| < 1\}$. L'opérateur de diffusion est défini comme étant la projection orthogonale sur l'orthogonale du gradient de u_ϵ :

$$A_\epsilon = \frac{1}{|Du_\epsilon| + \epsilon^2} \begin{pmatrix} (\partial_x u_\epsilon)^2 & -\partial_x u_\epsilon \partial_y u_\epsilon \\ -\partial_y u_\epsilon \partial_x u_\epsilon & (\partial_y u_\epsilon)^2 \end{pmatrix}$$

Ils proposent ainsi le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon^2 \operatorname{div} ([A_\epsilon(u)][Du]) = f(u) \quad (2.15)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0,$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Une Analyse du comportement du modèle est la suivante : En un point où l'image n'est pas bruitée, les directions des gradients Du_ϵ et Du sont approximativement parallèles, donc $[A_\epsilon(u)][Du] \approx 0$. L'équation 2.15 se réduit à une simple équation de réaction ; le lissage est donc supprimé et remplacé par un renforcement de contraste. En un point où l'image est bruitée, les directions des gradients ne sont pas corrélées, l'équation se comporte comme un filtrage isotrope.

Le terme de réaction f est choisi de classe C^1 satisfaisant :

$$f(\pm 1) = 0, \quad xf(x) > 0 \text{ pour } x \neq 0.$$

Le paramètre ϵ détermine la taille minimale des objets que l'on veut garder. En effet, selon la théorie du filtrage linéaire, le choix d'un noyau de convolution de taille inférieure à ϵ permet de garder les tendances des objets de taille supérieure à ϵ . Alors que les objets de taille inférieure à ϵ , vont être considérablement détruits.

La difficulté que présente ce filtre est essentiellement le choix du terme de réaction f . Ce choix suppose une connaissance a priori du niveau de gris des objets que l'on veut garder dans l'image finale.

Une amélioration de ce filtre a été proposée par Cottet et El Ayyadi [CEA98], sous forme du système couplé suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(LDu), \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = F(Du) - L, \quad L(\cdot, 0) = L_0. \quad (2.17)$$

avec

$$F(Du) = \begin{cases} \mathbb{P}_{Du^\perp} & \text{si } |Du| \geq s, \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{|Du|^2}{s^2}\right) \text{Id} + \frac{|Du|^2}{s^2} \mathbb{P}_{Du^\perp} & \text{si non} \end{cases}$$

où \mathbb{P}_{Du^\perp} est la matrice de projection dans la direction orthogonale du gradient. Le point de vue des auteurs est de remplacer la régularisation spatiale classiquement utilisée par un retard en temps qui permet une stabilité du modèle. Dans la définition de F , s joue un rôle semblable que celui joué par λ dans le modèle de Malik et Perona. Utilisant des techniques de réseaux de neurones, les auteurs prouvent que leur modèle est stable et définissent l'image "output" comme étant la solution de l'état asymptotique de leur système.

J. Weickert [Wei94], [Wei98] propose d'utiliser une diffusion tensorielle pour régulariser le modèle de Malik et Perona, comme alternative au modèle de Catté, Lions, Morel et Coll [CLMC92]. Il choisit, comme c'est le cas dans les modèles de Cottet et Germain [CG93] et de Cottet et El Ayyadi [CEA98], de ne pas tenir compte uniquement du module du gradient, mais aussi de sa direction. Il propose le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} (D(Du_\sigma)Du), \quad (2.18)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0,$$

$$\langle D(Du_\sigma)Du, \eta \rangle = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

u_σ est le résultat du produit de convolution de u avec la gaussienne G_σ . Cela a pour but, comme pour le filtrage linéaire, de rendre le filtre insensible aux variations d'échelles inférieure à σ . L'auteur choisit l'opérateur de diffusion D de telle manière qu'il reflète la structure du bord. Il construit une base orthonormale de vecteurs propres v_1, v_2 de D vérifiant :

$$v_1 \parallel Du_\sigma, \quad v_2 \perp Du_\sigma.$$

Choisissant une diffusion parallèle aux bords, Weickert [Wei94] fixe les valeurs propres correspondantes à v_1, v_2 de la manière suivante, $\lambda_1(Du_\sigma) = g(Du_\sigma)$ et $\lambda_2(Du_\sigma) = 1$.

Alvarez, Lions et Morel [ALM92] propose d'évoluer les images avec le processus de diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|DG_\sigma * u|) |Du| \text{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right). \quad (2.19)$$

Le terme d'inhibition $g(|DG_\sigma * u|)$ est exactement celui utilisé dans le modèle de Catté, Lions, Morel et Coll [CLMC92]. Le terme $|Du| \text{div} (Du/|Du|)$ représente l'opérateur de diffusion dégénéré "l'opérateur du mouvement par courbure moyenne", qui diffuse u uniquement dans la direction orthogonale au gradient Du . Ce choix a pour but de lisser u des deux côtés d'un bord, sans altérer les discontinuités de l'image.

Ce modèle est étroitement lié à l'équation de Malik et Perona, puisque il suffit de remarquer que la partie bien posée de l'équation (2.9), s'écrit sous la forme :

$$g(|Du|) |Du| \text{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right). \quad (2.20)$$

Il reste alors à remplacer dans le terme d'inhibition $|Du|$ par $|DG_\sigma * u|$, pour retrouver (2.19). Comme il est mentionné dans les lignes ci-dessus, quand $g = 1$, (2.19) devient l'équation du mouvement par courbure moyenne. Cette équation consiste à faire évoluer chaque ligne de niveau $u = \lambda$ suivant sa direction normale à une vitesse proportionnelle à sa courbure. Pour plus de détails, on pourra se référer aux travaux de Osher et Sethian [OS88]. A citer aussi les travaux de Caselles, Catté, Dibos et Coll [CCCD93] qui applique ce genre de processus d'évolution pour les contours actifs.

Par une approche unificatrice, P. Kornprobst, R. Deriche et G. Aubert [KDA97] proposent le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(u_{\xi\xi} + g(|DG_\sigma * u|)u_{\eta\eta} \right) - \left(1 - g(|DG_\sigma * u|) \right) \text{sign}((G_\sigma * u_0)_{\eta\eta}) |Du| - (u - u_0).$$

Le premier terme inspiré des modèles de Malik-Perona et de Alvares-Lions-Morel, diffuse l'image selon deux directions ; la première orthogonale au gradient, diffusée par $u_{\xi\xi}$, et la deuxième parallèle au gradient, diffusée par $u_{\eta\eta}$ et atténuée au voisinage des bords par le terme $g(|DG_\sigma * u|)$. Le deuxième terme, restreint aux bords à l'aide du terme de contrôle $(1 - g(|DG_\sigma * u|))$, vient des filtres de choc introduits par Osher et Rudin [OR90]. Il a pour rôle, le rehaussement des bords et l'atténuation du flou (voir aussi Alvares et Mozzara [AM94a]). Le troisième est un terme de rappel vers l'image d'origine proposé par Nordström. Bien que ce modèle compte "trop" de paramètres, ces résultats sont corrects. Dans [Kor98], on peut trouver une illustration du rôle de chaque membre de l'équation.

Chapitre 3

Le filtrage nonlinéaire de Malik et Perona

3.1 Introduction

Malik et Perona [MP87] (notés dans toute la suite par *M \mathcal{E} P*) proposent un modèle de diffusion non-linéaire pour la restauration et la segmentation des images et des signaux. L'apport de ce modèle est d'une part sa capacité d'éviter le flou et d'empêcher la délocalisation des bords due auparavant à l'application des filtres linéaires, le filtrage gaussien par exemple. D'autre part, son effet régularisant sur les zones homogènes qui est le point commun entre pratiquement tous les modèles de restauration d'images. Ce processus de diffusion, dit anisotropique par opposition au filtrage isotrope (gaussien par exemple) est le point de départ des équations aux dérivées partielles non-linéaires appliquées à la restauration des images et des signaux.

Dans ce chapitre, nous exposons les principaux résultats mathématiques établis sur le modèle de *M \mathcal{E} P* ainsi que leurs limitations et leurs restrictions. Nous présentons ensuite les modèles qui dérivent directement de celui de Malik et Perona. Ceci nous conduit au choix du modèle que nous étudions dans la suite.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons à la détection des bords. Tout d'abord nous survolons la doctrine de la détection de bords, principalement le filtre de Hildreth-Marr et le filtre de Canny. Puis nous présentons une comparaison rapide entre ces filtres et le modèle de *M \mathcal{E} P*.

3.2 La détection des bords

3.2.1 La doctrine

L'hypothèse sur laquelle repose la doctrine de détection des bords (Edge detection) est basée sur le fait que l'information essentielle d'une image est portée par les frontières des objets physiques photographiés. Si un objet de couleur constante, noire par exemple, est photographié sur un fond blanc, alors sa silhouette est délimitée par une courbe à travers laquelle la variation de l'intensité $u_0(x)$ de l'image est suffisamment grande. Nous pouvons en déduire qu'à priori la détection des bords des

objets se fait en seuillant sur la norme du gradient $|Du_0(x)|$. Comme il est expliqué par F. Guichard et J. M. Morel [GM], ce raisonnement présente deux inconvénients :

- 1- A cause du bruit et des oscillations, un point peut avoir un gradient élevé sans qu'il appartienne à un bord d'objet réel ;
- 2- L'ensemble des points où la norme du gradient est supérieure à une valeur donnée forme des régions et non des courbes.

Pour remédier au premier inconvénient, nous remplaçons l'image initiale par une de ses versions lissées $u_t(x)$, où t représente une mesure de la taille du lissage. Classiquement ce lissage est fait par convolution de u_0 avec des gaussiennes d'écart types croissants :

$$u_t(x) = G_{\sqrt{t}} * u_0(x).$$

Lorsque t est grand, le bruit est éliminé et seuls les bords principaux sont détectés. Ils sont mal localisés, mais faciles à repérer.

La solution du deuxième problème est de demander, en plus d'une grande valeur du module du gradient, une condition de maximalité qu'un point bord doit satisfaire. En dimension 1, cette condition se traduit par $|u'(x)|$ est maximal. Ce qui correspond au passage par zéro de $u''(x)$. En dimension deux, ce procédé se prolonge de deux manières différentes en la théorie de détection de bords de Marr-Hildreth [MH80] et en celle de Canny [Can86]. La différence entre ces deux prolongements est qu'en dimension 2, Hildreth-Marr remplace la dérivée seconde $u''(x)$ par l'opérateur isotrope différentiel $\Delta u(x)$ tandis que Canny propose de remplacer $u''(x)$ par la dérivée seconde dans la direction du gradient, $D^2u(Du, Du)$. Dans ce dernier cas, x_0 est candidat à être un point bord si $|Du(x_0)|$ est un maximum local de la fonction :

$$h \rightarrow |Du(x_0 + h\eta)|, \quad \eta = \frac{Du(x_0)}{|Du(x_0)|}$$

quand $|h|$ est assez petit.

En résumé, l'application de ces filtres se fait en trois étapes :

Étape-1 La convolution avec une gaussienne d'écart type t nous fournit l'image $u_t(x)$.

Étape-2 L'extraction des maxima du gradient (Les points où $|Du_t| \neq 0$, $\Delta u_t = 0$ pour le filtre de Hildreth-Marr et $D^2u_t(Du_t, Du_t) = 0$ pour le filtre de Canny).

Étape-3 Le seuillage sur la norme du gradient en ces maxima ($|Du_t| > K$).

Le filtre de Canny est généralement plus performant que celui de Marr-Hildreth même si ce dernier donne aussi des résultats assez corrects. Leur seul inconvénient commun est la convolution qui élimine le bruit certes, mais malheureusement en plus du flou qu'elle génère sur l'image, déplace les parties des bords qui présentent une courbure importante (cf ; figure 3.1).

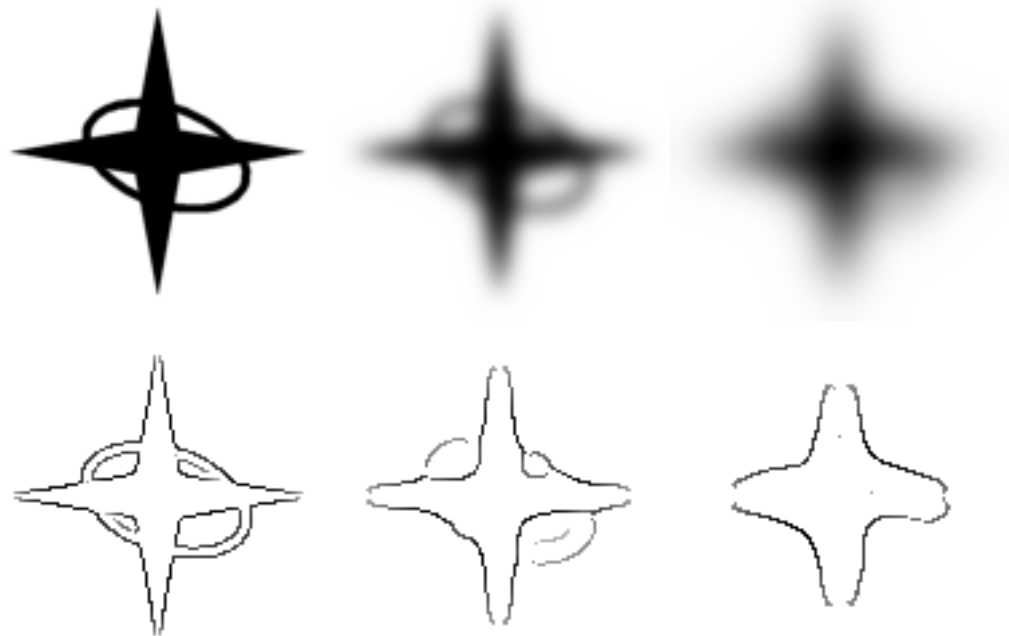


FIG. 3.1 – Première ligne, à gauche image originale, au milieu convolution avec une gaussienne d'écart type 4, à droite convolution avec une gaussienne d'écart type 8. Deuxième ligne, les bords extraits à l'aide du filtre de Canny.

Dans la partie qui suit nous exposons le lien entre le modèle de $M\mathcal{E}P$ et la doctrine de détection des bords.

3.2.2 La théorie de détection de bords et le modèle de Malik et Perona

Comme il est illustré dans [MP87], le processus de diffusion de $M\mathcal{E}P$ est plus performant en détection de bords que les filtres de Hildreth-Marr [MH80] et de Canny [Can86]. Les expériences qui en résultent sont spectaculaires : les bords restent intacts même pour des temps (échelles) assez grands. Cette performance est due aux points suivants :

- a- Le lissage des parties homogènes et la détection des bords s'intègrent dans un seul et même processus.
- b- L'extraction et le seuillage des étapes 2 et 3 sont remplacés par l'action d'une seule fonction g dite *fonction de contraste* .

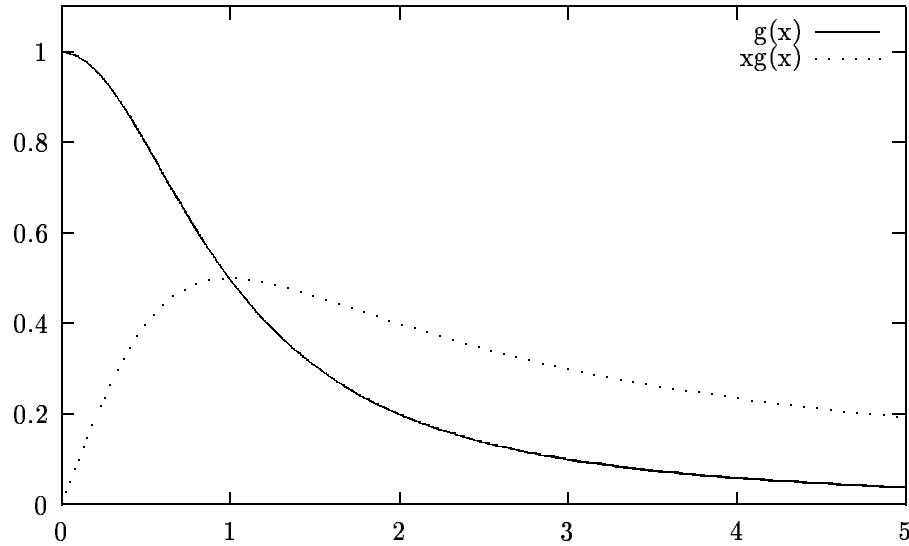


FIG. 3.2 – Graphes des fonctions $g(x)$ et $xg(x)$, avec $K = 1$.

Présentons une explication de ces deux raisons ! Pour ce faire nous allons nous restreindre à la dimension 1. Dans ce cas, l'équation de *M^ℓP* s'écrit sous la forme : (on note $G(s) = sg(s)$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_x (g(u_x)u_x) \quad (3.1)$$

$$= G'(u_x)u_{xx}. \quad (3.2)$$

Comme le recommandent Malik et Perona, nous choisissons $g(s) = (1 + s^2/K^2)^{-1}$ ou $g(s) = e^{-s^2/K^2}$ où $K > 0$ est le paramètre de contraste. G vérifie alors :

$$G'(s) > 0 \text{ si } |s| < K, \quad G'(s) = 0 \text{ si } |s| = K \text{ et } G'(s) < 0 \text{ si } |s| > K. \quad (3.3)$$

On en déduit que (3.1) est parabolique si et seulement si $|u_x| \leq K$. Par conséquent K , le paramètre de contraste, s'interprète aussi comme un séparateur entre deux états de l'équation. L'état où l'équation est bien posée ($|u_x| \leq K$). L'état où elle ressemble à une inversion de l'équation de la chaleur, et où elle est donc mal posée ($|u_x| > K$).

Explication du point a :

Ce point découle de la nature conditionnelle du modèle. En effet l'idée originale des auteurs est la suivante : si $|u_x| < K$, la diffusion est localement semblable à l'équation de la chaleur ce qui correspond dans la doctrine de détection de bords au lissage par convolution, alors que dans le cas où $|u_x| = K$ (resp $|u_x| > K$), typiquement un point bord d'un objet, la diffusion est inhibée (resp inversée) et donc le bord est conservé (resp rehaussé).

Explication du point b :

Pour plus de détails, on pourra se référer à Weickert [Wei98]. S'il existe une solution u suffisamment régulière de l'équation (3.1), nous pouvons dériver $(u_x)^2$ de la manière suivante, en utilisant le second membre de (3.2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_x)^2}{\partial t} &= 2u_x \partial_x \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= 2G''(u_x) u_x (u_{xx})^2 + 2G'(u_x) u_x u_{xxx}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si pour un certain $t_0 > 0$, $(u_x)^2$ atteint un maximum local en un point x_0 , alors

$$u_{xx}(x_0, t_0) = 0, \quad u_x u_{xxx}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Nous en déduisons, en utilisant (3.3) et (3.4), les implications suivantes :

$$|u_x(x_0, t_0)| > K \Rightarrow \frac{\partial(u_x)^2}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0, \quad (3.5)$$

$$|u_x(x_0, t_0)| < K \Rightarrow \frac{\partial(u_x)^2}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0, \quad (3.6)$$

avec des inégalités strictes si $u_x u_{xxx}(x_0, t_0) \neq 0$.

L'implication (3.5) montre bien qu'une fois les bords vérifient la condition de contraste $|u_x| > K$, ils sont conservés et même réhaussés au cours de la diffusion. Tandis que l'implication (3.6) montre que les bords qui ne présentent pas un contraste suffisant, sont atténués et sont l'objet d'un lissage.

Nous concluons, sous des hypothèses de régularité, que le modèle de $M\mathcal{E}P$ s'intègre bien dans la doctrine classique de la détection de bords et que le seul choix du paramètre de contraste K permet, en plus de la détection de bords, de restaurer les images et les signaux. La restauration constitue donc une dimension en plus pour le modèle de $M\mathcal{E}P$ que la théorie classique ne possède pas. Cependant le modèle présente deux inconvénients, l'un pratique et l'autre théorique. L'inconvénient pratique est que le modèle n'est pas capable d'éliminer un bruit de gradient supérieur à K , et le fait d'augmenter le paramètre de contraste ne résout pas le problème puisqu'on risque de lisser les bords comme le fait la convolution dans la théorie classique. L'inconvénient théorique est que le modèle est mal posé et qu'il n'est pas évident d'interpréter les solutions produites par l'implémentation de la méthode, alors qu'en théorie elle n'a pas de solution.

Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons aux résultats théoriques établis sur le modèle.

3.3 La théorie mathématique autour du modèle de Malik et Perona

En 1994 Perona, Shiota et Malik [PSM94] conjecturent que l'équation de $M\mathcal{E}P$ admet en général des solutions faibles. Dans ce qui suit, nous verrons que cette conjecture n'est pas vérifiée. Nous présentons trois travaux que nous jugeons complémentaires en termes de résultats et différents dans leur manière d'aborder le problème.

3.3.1 Kawohl et Kutev

Dans [KK98] les auteurs s'intéressent, dans un premier temps, au problème d'existence et d'unicité d'une solution de l'équation de Malik et Perona. Uniquement en temps fini et en dimension 1, ils prouvent existence et unicité d'une solution faible, de régularité C^1 , mais uniquement si la donnée initiale est analytique au voisinage de tout point vérifiant $|u'_0| > K$. Ce résultat est partiellement confirmé par Kichenassamy [Kic97]. Les auteurs prouvent entre autre l'existence d'une solution globale si la donnée initiale est de classe $C_{2,\alpha}$ et vérifie $|u'_0| < K$ en tout point. Ce résultat est tout à fait intuitif puisqu'on s'attend à ce que la solution vérifie $|u'(\cdot, t)| < K$ pour tout $t > 0$ et par conséquent l'équation devient partout parabolique et donc bien posée. Enfin un principe de comparaison est prouvé dans le cas où les données initiales (u_0, v_0) , $u_0 \leq v_0$, des deux solutions (u, v) à comparer vérifient :

- 1- (u_0, v_0) sont séparées par une autre donnée initiale w_0 qui vérifie les hypothèses de la solution globale, c'est à dire $w_0 \in C_{2,\alpha}$ et $|w'_0| < K$ en tout point.
- 2- $\{|u'_0| \geq K\} \cap \{|v'_0| \geq K\} = \emptyset$.

Les auteurs prouvent, par un contre exemple, que ces deux conditions sont optimales dans le sens où si une des deux conditions n'est pas vérifiée alors le principe de comparaison n'est plus valable.

3.3.2 Kichenassamy

Kichenassamy [Kic97] prouve que l'équation de $M\acute{E}P$ n'admet pas toujours une solution faible au sens usuel. Il utilise des propriétés de régularité intérieure pour conclure qu'il faut une donnée initiale analytique pour espérer obtenir l'existence d'une telle solution. Uniquement en dimension 1, il introduit une notion de solution généralisée qui permet aux solutions d'avoir des discontinuités. Aussi introduit-il la notion de solution admissible, qui peut contenir des discontinuités mais ne tend pas à inverser l'ordre des contrastes et par ailleurs ne fait pas croître la variation totale¹.

3.3.3 You, Xu, Tannenbaum et Kaveh

Dans [YXTK96], You et al. analysent le comportement asymptotique de l'équation de Malik et Perona. Les auteurs arrivent à prouver que ce processus est instable même pour une faible perturbation de l'image initiale. Ils expriment le processus de diffusion sous forme de minimisation d'énergie de surface :

$$E(u) = \int_{\Omega} \phi(|Du|) dx dy + \phi'(\infty) \int_L |J(x, y)| dl$$

avec $\phi'(s) = G(s)$, L est l'ensemble de discontinuités de l'image et $J(x, t)$ est la valeur du saut de u en $(x, t) \in L$. Ensuite, ils montrent que l'ensemble des minimums globaux de la fonctionnelle d'énergie $E(u)$, est de cardinal infini et que cet ensemble est dense dans l'espace des images². D'une manière

¹ Variation totale : $TV(u) = \int |Du| dx$

² L'espace des images est l'ensemble des fonctions $u(x, y) = w(x, y) + s(x, y)$ avec w une fonction régulière et s une fonction constante par morceau représentant les bords de l'image

précise, deux résultats essentiels ont été établis :

- 1- Les images constantes par morceaux sont des points stationnaires de $E(u)$ si et seulement si $\phi'(\infty) = 0$
- 2- $E(u)$ n'est pas continue en toute image régulière non constante si $\phi'(\infty) = 0$.

La condition $\phi'(\infty) = 0$ est équivalente à $g(s) = o(1/s)$ quand $s \rightarrow \infty$, ce qui correspond bien au type de fonctions g utilisées pour le modèle de $M\mathcal{E}P$ à l'exemple des fonctions de la forme $(1+s^\alpha)^{-1}$, $\alpha > 1$. Le résultat 1 prouve, ce qui est numériquement connu, que le modèle de $M\mathcal{E}P$ tend à rendre les images constantes par morceaux. Le résultat 2 se déduit du fait que les images régulières ont une énergie non nulle alors qu'elles font objet d'approximation par des images constantes par morceaux qui ont une énergie nulle. Ceci confirme l'instabilité du modèle. Par les mêmes arguments les auteurs montrent que le cas particulier où $\phi'(\infty) \neq 0$, par exemple $\phi(s) = s$, est bien posé et que ses points stationnaires sont uniquement les images constantes.

3.3.4 Conclusions

Tous les résultats, établis sur le modèle de $M\mathcal{E}P$,

- 1- sont restreints à la dimension 1, à part les travaux de You et al. [YXTK96];
- 2- confirment que le modèle est mal posé;
- 3- de type comparaison locale, existence d'une solution faible ou régulière, demandent des restrictions et des hypothèses qui ne sont pas toujours vérifiées;

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les modèles qui dérivent directement du modèle de $M\mathcal{E}P$. Ceci nous conduit au choix du modèle que nous étudions dans la suite.

3.4 Le choix du modèle

Dans le paragraphe précédent, nous remarquons que le modèle de $M\mathcal{E}P$ demeure mal posé et présente des limitations sérieuses sur le plan théorique. Plusieurs chercheurs ont anticipé ces limitations et ont proposé des modèles d'EDPs de restauration d'images en s'inspirant toujours de l'idée de $M\mathcal{E}P$ qui consiste à inhiber la diffusion au voisinage des bords et à l'accélérer dans les zones homogènes. Cependant, rares sont les modèles que nous pouvons qualifier de "proche du modèle de $M\mathcal{E}P$ " ou qui en dérivent directement. La caractéristique essentielle des modèles que nous qualifions de "dérivés de $M\mathcal{E}P$ ", est le fait de remplacer dans le terme $g(|Du|)$, $|Du|$ par un autre terme qui joue le même rôle inhibiteur. En revanche, ce terme doit permettre à l'équation d'être mieux posée théoriquement. En effet, comme l'a souligné Kichenassamy [Kic97], le fait que l'équation soit mal posée, est essentiellement dû à la "pauvre" régularité du terme inhibiteur $g(|Du|)$. Dans cette direction, deux grandes idées ont été proposées :

- La première, proposée et complètement étudiée par Catté-Lions-Morel et Coll [CLMC92],

consiste à remplacer $g(|Du|)$ par $g(v)$ avec :

$$v(x, t) = |DG_\sigma * u(\cdot, t)|(x). \quad (3.7)$$

- La deuxième idée, proposée par Nitzberg et Shiotani [NS92], consiste à remplacer $\tilde{g}(|Du|^2)$ ($= g(|Du|)$) par $\tilde{g}(v)$ avec :

$$v(x, t) = e^{-t}v_0(x) + \int_0^t e^{s-t}|Du(x, s)|^2 ds, \quad (3.8)$$

i.e. v solution de :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = |Du|^2 - v, \quad v(\cdot, 0) = v_0, \quad (3.9)$$

où v_0 est une donnée initiale à choisir (par exemple $v_0 = 0$ ou $|Du_0|^2$).

On se trouve donc avec une alternative. Une régularisation en espace et une autre en échelle. L'étude de la première régularisation, par ses auteurs, a été très concluante : le modèle est stable, bien posé en toute dimension et admet une solution unique de régularité C^∞ . Aussi a été prouvée la convergence d'un schéma numérique. Le principal atout pratique de ce modèle est sa capacité d'éliminer le bruit puisque le terme inhibiteur vient de la théorie de Hildreth-Marr. Pourtant, ce modèle présente quelques inconvénients :

- 1- Le modèle ne préserve pas les zones de courbure importante ;
- 2- Le modèle devient instable quand σ tend vers 0 ;
- 3- Asymptotiquement les images tendent vers des constantes globales.

Le dernier point trouve une réponse chez les auteurs puisqu'ils proposent un temps d'arrêt qui dépend de σ . Le premier est dû au fait que $G_\sigma * u(\cdot, t)$ est le résultat de la diffusion de $u(\cdot, t)$ par l'équation de la chaleur à l'échelle $\sigma^{1/2}$. Plus clairement $G_\sigma * u(\cdot, t) = w(\cdot, \sigma^{1/2})$ avec w solution de (on utilise les notations de (2.9))

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w = w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}, \quad w(\cdot, 0) = u(\cdot, t).$$

De cette décomposition nous constatons, à cause de l'opérateur du mouvement par courbure moyenne, que le bruit est atténué mais que les objets 1D disparaissent ainsi que les coins qui représentent une courbure importante. Nous pouvons alors imaginer que le fait de choisir un σ petit résout le problème ; Il n'en est rien puisque dans ce cas le bruit n'est pas éliminé et nous risquons de tomber dans le deuxième inconvénient.

Les inconvénients précédents ne sont pas reproduits par l'alternative de la régularisation temporelle (3.8), tout simplement parce que le modèle ne contient pas de convolution en espace. Cela nous permet d'éviter tout mouvement préalable des bords et d'avoir une estimation ponctuelle en espace, ce qui est le principe initial du modèle de $M\mathcal{E}P$.

Cependant ce modèle n'a jamais été l'objet d'une étude théorique, mise à part, à ma connaissance, une communication personnelle de P. L. Lions à D. Mumford qui présente des résultats sur le modèle dans l'espace des fonctions à variation bornée, mais uniquement en dimension 1. Malheureusement

ce travail n'a pas été publié. Nous nous demandons alors, si ce modèle admet :

- une interprétation géométrique ?
- un sens ? Autrement dit est-il bien posé ?
- une solution classique et sous quelles hypothèses ?
- une solution faible ? Si oui sous quelle restriction et peut-on l'approcher numériquement ?

Les réponses aux trois dernières questions sont les sujets des deux prochains chapitres. la réponse au problème de l'interprétation géométrique n'est pas du tout évidente. La raison de cette difficulté est le fait que le terme inhibiteur admet une mémoire en temps. Pour le voir, nous réécrivons l'équation (pour simplifier nous choisissons $v_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\tilde{g}(v) Du) \\
 &= \tilde{g}(v)\Delta u + \tilde{g}'(v)(Dv, Du) \\
 &= \tilde{g}(v)\Delta u + \\
 &\quad 2 \tilde{g}'(v) \int_0^t e^{s-t} |Du(s)||Du(t)| D^2u(s) \left(\frac{Du(s)}{|Du(s)|}, \frac{Du(t)}{|Du(t)|} \right) ds
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

L'interprétation du terme (3.10) d'apparence un peu bizarre, est difficile. Cette difficulté laisse la question, "si le modèle est bien posé" ouverte.

Dans le chapitre qui suit nous allons répondre à la question d'existence et d'unicité d'une solution classique du système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v)Du), \quad u(\cdot, 0) = u_0, \tag{3.11}$$

et (3.9). Ensuite, nous allons étudier le comportement asymptotique du système quand nous multiplions le second membre de la deuxième équation par un facteur, $\delta > 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \delta \left(|Du|^2 - v \right), \quad v(\cdot, 0) = v_0,$$

qui tend vers 0.

Chapitre 4

Résolution du système dans les espaces de Hölder paraboliques

4.1 Introduction

Nous nous proposons, suite à la discussion du chapitre précédent, d'étudier le système couplé suivant, qui généralise (3.11)-(3.9) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v)Du) \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F(|Du|^2) - v \quad v(\cdot, 0) = v_0 \quad (4.2)$$

dans $D \times [0, T]$, où $T > 0$, D une partie de \mathbb{R}^N que nous allons fixer plus tard et (u_0, v_0) une donnée initiale de (u, v) . Les fonctions F et g sont supposées appartenir à $C^2([0, +\infty[)$ à valeurs positives, de dérivées secondes localement lipschitziennes et qui vérifient $F(0) = 0$, $g(0) = 1$, $g' < 0$.

Nous prouvons dans un premier temps, un résultat d'existence et d'unicité en petit temps de la solution de (4.1)-(4.2) quand $D = \mathbb{R}^N$. Ensuite, avec une condition aux limites de Neumann ou bien de Dirichlet homogène, nous allons discuter comment nous pouvons obtenir le même résultat d'existence et d'unicité dans le cas où D est un ouvert borné de \mathbb{R}^N à frontière régulière. Nous traitons également le cas où D est un hypercube de \mathbb{R}^N avec une condition aux limites de Neumann homogène et nous prouvons, dans ce cas, des résultats du type principe du maximum. Enfin, nous allons étudier la limite asymptotique du système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v)Du) \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \delta \left(F(|Du|^2) - v \right) \quad v(\cdot, 0) = v_0 \quad (4.4)$$

quand δ tend vers 0^+ .

Tout d'abord, nous allons présenter dans le paragraphe suivant, le cadre mathématique dans lequel nous allons établir ces résultats.

4.2 Préliminaires

Dans cette section, nous allons introduire les espaces de Hölder et les espaces de Hölder paraboliques. Nous présentons ensuite, les résultats d'existence et d'unicité établis dans ces espaces, pour les équations aux dérivées partielles paraboliques, dont nous aurons besoin dans la suite. Pour des définitions et des résultats plus généraux, on peut se référer à O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva [LSU68], à A. Friedman [Fri64] et à N. V. Krylov [Kry96].

4.2.1 Les espaces de Hölder

Soient D une partie de \mathbb{R}^N , $\alpha \in (0, 1)$ et $\rho > 0$. La distance définie dans D , étant la distance euclidienne sur \mathbb{R}^N , donnée par $|x - y| = \left(\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ où $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N)$ pour $x, y \in D$. Pour toute fonction continue f dans D , nous définissons :

$$|f|_0 = \sup_{x \in D} |f(x)|, \quad h_\alpha(f) = \sup_{\substack{x, y \in D \\ |x - y| \leq \rho}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On dit que f vérifie la condition de Hölder d'exposant α sur D si :

$$h_\alpha(f) < \infty.$$

$C_\alpha(D)$ est l'espace des fonctions continues sur D qui vérifient la condition de Hölder d'exposant α sur D , muni de la norme :

$$|f|_\alpha = |f|_0 + h_\alpha(f).$$

$C_{k,\alpha}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, est l'espace des fonctions de classe C^k sur D telles que leurs dérivées d'ordre k appartiennent à $C_\alpha(D)$, muni de la norme

$$|f|_{k,\alpha} = \sum_{|h| < k} |D^h f|_0 + \sum_{|h|=k} |D^h f|_\alpha.$$

4.2.2 Les espaces de Hölder paraboliques

Soit $T > 0$. Dans $D \times [0, T]$, nous introduisons la distance parabolique donnée par $d(P, Q) = (|x - y|^2 + |t - s|)^{1/2}$ où $P = (x, t)$, $Q = (y, s) \in D \times [0, T]$. Pour toute fonction continue $f(x, t)$ dans $D \times [0, T]$, nous définissons :

$$|f|_0 = \sup_{P \in D \times [0, T]} |f(P)|, \quad H_\alpha(f) = \sup_{\substack{P, Q \in D \times [0, T] \\ d(P, Q) \leq \rho}} \frac{|f(P) - f(Q)|}{d(P, Q)^\alpha}.$$

On dit que f vérifie la condition de Hölder parabolique d'exposant α sur $D \times [0, T]$ si :

$$H_\alpha(f) < \infty.$$

$C_\alpha(D \times [0, T])$ est l'espace des fonctions continues sur $D \times [0, T]$ qui vérifient la condition de Hölder parabolique d'exposant α sur $D \times [0, T]$, muni de la norme

$$|f|_\alpha = |f|_0 + H_\alpha(f).$$

$C_{1,0,\alpha}(D \times [0, T])$ est l'espace des fonctions $f(x, t)$ continues sur $D \times [0, T]$ telles que leurs dérivées par rapport à x sont dans $C_\alpha(D \times [0, T])$, muni de la norme

$$|f|_{1,0,\alpha} = |f|_0 + \sum_{i=1}^N |\partial_i f|_\alpha.$$

Enfin, $C_{2,1,\alpha}(D \times [0, T])$ est l'espace des fonctions $f(x, t)$ continues sur $D \times [0, T]$ tel que leur dérivée par rapport à t et leurs dérivées secondes par rapport à x , sont dans $C_\alpha(D \times [0, T])$, muni de la norme

$$|f|_{2,1,\alpha} = |f|_0 + |\partial_t f|_\alpha + \sum_{i=1}^N |\partial_i f|_{1,0,\alpha}.$$

4.2.3 Résultats d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles paraboliques

Soient $(a_{i,j})_{i,j=1}^N$, $(b_i)_{i=1}^N$ et c des fonctions à valeurs réelles, définies sur $D \times [0, T]$. Nous introduisons l'opérateur linéaire différentiel \mathcal{L} , que nous définissons par :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u. \quad (4.5)$$

Définition 1. On dit que l'opérateur \mathcal{L} est uniformément parabolique dans $D \times [0, T]$, s'ils existent $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$, tels que pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\Gamma_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \Gamma_2 |\xi|^2 \quad (4.6)$$

pour tout $(x, t) \in D \times [0, T]$.

Maintenant, nous allons présenter les résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes associés à l'opérateur (4.5) ainsi que les estimations a priori qui en découlent. Pour cela, nous avons simplifié les résultats de O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva [LSU68], pour que nous puissions nous restreindre uniquement aux trois problèmes suivants :

- Le problème de Cauchy, $\Omega = \mathbb{R}^N$;
- Ω un ouvert borné régulier, avec condition au bord de Neumann homogène ;
- Ω un ouvert borné régulier, avec condition au bord de Dirichlet homogène.

Problème de Cauchy

Nous nous plaçons dans tout \mathbb{R}^N . Soient u_0 une fonction définie sur \mathbb{R}^N et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^N \times [0, T]$. Considérons le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad (4.7)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad (4.8)$$

sous les hypothèses :

h_1 : Les coefficients de \mathcal{L} sont dans $C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$.

h_2 : \mathcal{L} est uniformément parabolique sur $\mathbb{R}^N \times [0, T]$.

Alors, nous avons le résultat suivant [LSU68] [Kry96] :

Théorème 1. *Sous les hypothèses (h_1) et (h_2) , pour toute fonction $u_0 \in C_{2,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et $f \in C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, le problème (4.7) – (4.8) admet une solution unique u dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. De plus, il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de u_0 et de f , telle que*

$$\|u\|_{2,1,\alpha} \leq C_1 (\|u_0\|_{2,\alpha} + \|f\|_\alpha). \quad (4.9)$$

Le cas d'un domaine borné régulier accompagné d'une condition de Neumann homogène

Soit Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^N . Dans toute la suite, nous notons $\partial\Omega$ le bord de Ω et S_T la frontière $\partial\Omega \times [0, T]$. Nous définissons, ci-dessous, le type de régularité de $\partial\Omega$ dont nous aurons besoin dans la suite.

Pour tout $x \in \partial\Omega$, nous considérons le système de coordonnées local $y = (y_1, \dots, y_n)$ d'origine x tel que l'axe (y_n) est de direction $n(x)$, la normale à $\partial\Omega$ au point x . Nous supposons qu'il existe un réel $r > 0$, indépendant de x , tel que $\partial\Omega \cap \{|y| \leq r\}$ peut être représenté par l'équation

$$y_n = \Psi_x(y') \quad \text{avec} \quad y' = (y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Définition 2. *On dit que $\partial\Omega$ est dans $C_{l,\alpha}$, $l \in \mathbb{N}$, si pour tout $x \in \partial\Omega$, $\Psi_x \in C_{l,\alpha}(\{|y'| \leq \frac{r}{2}\})$ et que les normes des fonctions $(\Psi_x)_{x \in \partial\Omega}$ dans ces espaces sont uniformément bornées.*

Dans toute la suite nous notons :

$$K(l, \alpha, \partial\Omega) = \sup\{|\Psi_x|_{l,\alpha}, x \in \partial\Omega\}. \quad (4.10)$$

Sous les hypothèses (h_1) - (h_2) dans lesquelles nous remplaçons $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ par $\bar{\Omega} \times [0, T]$, nous considérons le problème suivant, avec la condition de Neumann homogène :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_T} = 0, \quad (4.11)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0. \quad (4.12)$$

Nous supposons en plus que les hypothèses ci-après sont satisfaites :

h_3 : $\partial\Omega$ est de classe $C_{2,\alpha}$.

h_4 : u_0 vérifie la condition de compatibilité : $\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Alors, nous avons le résultat suivant [LSU68] :

Théorème 2. *Sous les hypothèses $(h_1), (h_2)$ et (h_3) , pour toute fonction $u_0 \in C_{2,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ qui vérifie (h_4) et $f \in C_\alpha(\overline{\Omega} \times [0, T])$, le problème (4.11)-(4.12) admet une solution unique u dans $C_{2,1,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. De plus, il existe une constante $C_2 > 0$, indépendante de u_0 et de f , telle que*

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C_2 (|u_0|_{2,\alpha} + |f|_\alpha). \quad (4.13)$$

Le cas d'un domaine borné régulier accompagné d'une condition de Dirichlet homogène

Sous les mêmes hypothèses $(h_1), (h_2)$ et (h_3) du problème (4.11)-(4.12), nous considérons le problème suivant, avec condition de Dirichlet homogène

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad u|_{S_T} = 0, \quad (4.14)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad (4.15)$$

où h_4 est remplacée par :

h'_4 : u_0 vérifie les conditions de compatibilité :

$$\text{pour tout } x \in \partial\Omega : \begin{cases} u_0(x) = 0, \\ \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x, 0) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x, 0) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} = f(x, 0). \end{cases}$$

Alors, nous avons le résultat suivant [LSU68] [Kry96] [Fri64] :

Théorème 3. *Sous les hypothèses $(h_1), (h_2)$ et (h_3) , pour toute fonction $u_0 \in C_{2,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ qui vérifie (h'_4) et $f \in C_\alpha(\overline{\Omega} \times [0, T])$, le problème (4.14)-(4.15) admet une solution unique u dans $C_{2,1,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T])$. De plus il existe une constante $C_3 > 0$, indépendante de u_0 et de f , telle que*

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C_3 (|u_0|_{2,\alpha} + |f|_\alpha). \quad (4.16)$$

Quelques remarques sur les constantes des inégalités (4.9), (4.13) et (4.16)

Les constantes C_1, C_2 et C_3 dépendent de T , de l'exposant de Hölder α , de la dimension N , des constantes d'ellipticité (4.6) Γ_1, Γ_2 , de $K = \max\{|a_{i,j}|_\alpha, |b_i|_\alpha, |c|_\alpha\}$ et de la constante $K(2, \alpha, \partial\Omega)$, définie par (4.10), dans les deux derniers cas. D'une manière générale, leur dépendance est croissante par rapport à $\{(\Gamma_1)^{-1}, \Gamma_2, K\}$. Autrement dit, si $\Gamma'_1 \geq \Gamma_1, \Gamma_2 \leq \Gamma'_2$ et $K \leq K'$ sans que les autres paramètres varient, alors nous aurons $C_i \leq C'_i$, pour $i = 1, 2, 3$. Mais malheureusement, nous sommes incapable de formuler cette croissance sous forme d'une expression exacte et explicite.

Maintenant, nous nous intéressons à la dépendance de la constante C_1 , par rapport à T . Dans ce cas ($\Omega = \mathbb{R}^N$) sous la condition suivante :

$$c(x, t) \leq -\lambda \quad \text{pour un certain } \lambda > 0, \quad (4.17)$$

V. Krylov [Kry96] prouve que la constante C_1 de l'inégalité (4.9) est indépendante de T . De plus si $\lambda \geq 1$, nous avons une estimation plus fine due toujours à V. Krylov ([Kry96], chapitre 9) qui remplace (4.9) par :

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C \left(\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}} |u_0|_0 + \sum_{ij}^N h_\alpha(\partial_{ij} u_0) + \lambda^{\frac{\alpha}{2}} |f|_0 + H_\alpha(f) \right). \quad (4.18)$$

où $C = C(N, \alpha, K, \Gamma_1, \Gamma_2)$ est indépendante de T et le résultat reste vrai même si $T = +\infty$. Quand la condition (4.17) n'est pas vérifiée la dépendance de C_1 en T n'est pas claire.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons et nous démontrons un résultat qui précise cette dépendance quand $c(x, t) = 0$.

4.2.4 Un résultat de dépendance en temps pour la constante du problème de Cauchy

Proposition 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, si $c(x, t) = 0$ nous avons l'estimation suivante :*

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C e^T \left(1 + \min\{T, \rho^2\}^{2-\alpha} \right) \left(|u_0|_{2,\alpha} + |f|_\alpha \right). \quad (4.19)$$

où la constante $C = C(N, \alpha, K, \Gamma_1, \Gamma_2)$ est indépendante de T .

Pour prouver ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $w \in C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et $\bar{w}(x, t) = e^{-t} w(x, t)$. Alors, les inégalités suivantes sont vraies :*

$$|w|_\alpha \leq e^T \left(1 + \min\{T, \rho^2\}^{2-\alpha} \right) |\bar{w}|_\alpha, \quad (4.20)$$

$$|\bar{w}|_\alpha \leq \left(1 + \min\{T, \rho^2\}^{2-\alpha} \right) |w|_\alpha. \quad (4.21)$$

PREUVE. Voir Annexes, p. 167.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1. Tout d'abord, nous notons $\bar{u}(x, t) = e^{-t} u(x, t)$ et $\bar{f}(x, t) = e^{-t} f(x, t)$. Un calcul simple montre que \bar{u} est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, t) &= \mathcal{L}\bar{u}(x, t) - \bar{u}(x, t) + \bar{f}(x, t), \\ \bar{u}(\cdot, 0) &= u_0. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda = 1$, nous en déduisons en utilisant (4.18), l'inégalité :

$$|\bar{u}|_{2,1,\alpha} \leq C \left(|u_0|_0 + \sum_{ij} h_\alpha(\partial_{ij} u_0) + |\bar{f}|_0 + H_\alpha(\bar{f}) \right).$$

où $C = C(N, \alpha, K, \Gamma_1, \Gamma_2)$ est indépendante de T . Pour conclure, nous utilisons la majoration (4.20),

pour avoir

$$\left(|u_0|_0 + \sum_{ij} h_\alpha(\partial_{ij} u_0) + |\bar{f}|_0 + H_\alpha(\bar{f}) \right) \leq (1 + \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}})(|u_0|_{2,\alpha} + |f|_\alpha),$$

et la majoration (4.21), pour obtenir

$$e^{-T}(1 + \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}})^{-1}|u|_{2,1,\alpha} \leq |\bar{u}|_{2,1,\alpha}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. \square

4.3 Étude du système dans le cas $D = \mathbb{R}^N$

4.3.1 le résultat principal

Ci-dessous, nous exposons le résultat principal de cette section.

Théorème 4. *Pour tout $(u_0, v_0) \in C_{2,\alpha}(\mathbb{R}^N) \times C_{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $v_0 \geq 0$, il existe un temps maximal $\bar{T} \in (0, +\infty]$ qui dépend de (u_0, v_0) , g , F , α , et de N tel que le système (4.1)-(4.2) admet une solution unique (u, v) dans*

$$C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, \bar{T})) \times C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, \bar{T})).$$

Si en plus $\bar{T} < +\infty$, alors $\lim_{t \nearrow \bar{T}} |v(\cdot, t)|_{1,\alpha} = +\infty$.

Tout d'abord, nous définissons les opérateurs :

- Pour toute fonction positive v définie dans $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, nous notons $\mathcal{M}v$, toute solution de (4.1).
- Pour toute fonction u définie dans $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, nous notons $\mathcal{N}u$, la solution de (4.2).

Pour prouver le théorème 4, nous allons utiliser le schéma suivant :

Nous démontrons, dans un premier temps, que l'opérateur \mathcal{M} (resp. \mathcal{N}) est localement lipschitzien de $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ vers $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ (resp. de $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ vers $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$). Ensuite, nous prouvons qu'il existe $T > 0$, tel que l'opérateur $\mathcal{N}\mathcal{M}$ est une contraction qui envoie un sous espace fermé de $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ dans lui même et nous concluons par l'application du théorème de point fixe de Banach. Puis nous démontrons que, tant que $|v(\cdot, T)|_{1,0,\alpha} < \infty$, la solution est prolongeable dans $\mathbb{R}^N \times [0, t]$, pour un certain $t > T$.

Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème 1 dû à Ladyzhenskaja, Solonnikov et Ural'ceva [LSU68], qui répond aux problèmes d'existence et d'unicité pour les équations aux dérivées partielles paraboliques, et qui présente une estimation a priori de la solution en fonction des données du problème. Nous pouvons aussi utiliser des résultats analogues de A. Friedman [Fri64] et N.V. Krylov [Kry96].

4.3.2 Quelques résultats intermédiaires

Introduisons les notations suivantes :

- Pour tout $R > 0$, $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; R) := \{v \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]); |v|_{1,0,\alpha} \leq R\}$.
- Pour tout $v_0 \in C_{1,\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{E}([0, T]; v_0) := \{v \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]); v(\cdot, 0) = v_0, v \geq 0\}$.
- $\mathcal{E}([0, T]; v_0, R) := \mathcal{E}([0, T]; v_0) \cap C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; R)$.

La proposition suivante présente un cadre dans lequel l'opérateur \mathcal{M} est bien défini.

Proposition 2. *Soient $T > 0$, $R > 0$ et $(u_0, f) \in C_{2,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \times C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. Pour toute fonction positive $v \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; R)$, l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(v)Du) = f, \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad (4.22)$$

admet une solution unique u dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. En plus, u vérifie :

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C(|u_0|_{2,\alpha} + |f|_\alpha). \quad (4.23)$$

où C ne dépend que de N , α , R et de g .

Pour toute la suite, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2. *Toute fonction $f \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ vérifie :*

$$H_\alpha(f) \leq \rho^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |\partial_i f|_0. \quad (4.24)$$

Pour toute fonction $f_1, f_2 \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ nous avons :

$$H_\alpha(f_1 f_2) \leq |f_1|_0 H_\alpha(f_2) + |f_2|_0 H_\alpha(f_1) \quad (4.25)$$

PREUVE. Voir Annexes, p. 168.

Lemme 3. *Pour toute fonction positive $v \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, nous avons $g(v) \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. En plus, il existe des constantes positives C_0, C_1 et C_2 , qui dépendent de g , telles que :*

$$|g(v)|_{1,0,\alpha} \leq C_0 + C_1 \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i v|_0 + \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i v) \right) + C_2 \rho^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i v|_0 \right)^2. \quad (4.26)$$

où $C_i = \max_{x \in [0, |v|_0]} |g^{(i)}(x)|$, pour $i = 0, 1, 2$.

PREUVE. Voir Annexes, p. 168.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.

Pour prouver la proposition, nous allons de vérifier les hypothèses, h_1 et h_2 , du théorème 1.

Choisissons une fonction positive $v \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et réécrivons (4.22) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g(v)\Delta u - g'(v)DvDu = f \quad (4.27)$$

D'après le lemme 3, nous avons $g(v) \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. En particulier, nous en déduisons que $g(v)$ et $g'(v)\partial_i v$ appartiennent à $C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, l'hypothèse h_1 est donc vérifiée.

Utilisons la décroissance de g pour écrire

$$0 < g(R) \leq g(v) \leq 1.$$

Nous en déduisons que l'équation (4.27) est uniformément parabolique dans $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, l'hypothèse h_2 est donc aussi vérifiée. Enfin, nous concluons en appliquant le théorème 1. \square

Nous montrons, dans la proposition suivante, que l'opérateur \mathcal{M} est localement Lipschitzien dans $\mathcal{E}([0, T]; v_0)$.

Proposition 3. *Soit $T > 0$ et $R > |v_0|_{1,\alpha}$. Pour tout $v_1, v_2 \in \mathcal{E}([0, T]; v_0, R)$ nous avons :*

$$|\mathcal{M}v_1 - \mathcal{M}v_2|_{2,1,\alpha} \leq ((1 + \rho^{1-\alpha})^2 C(g, R) (1 + R^2) C^2 |u_0|_{2,\alpha}) |v_1 - v_2|_{1,0,\alpha},$$

où C est la constante de la proposition 2 et $C(g, R)$ dépend uniquement des constantes de Lipschitz de g , g' et de g'' dans l'intervalle $[0, R]$

PREUVE. D'après la proposition 2, les fonctions $\mathcal{M}v_i$, pour $i = 1, 2$ vérifient l'inégalité

$$|\mathcal{M}v_i|_{2,1,\alpha} \leq C|u_0|_{2,\alpha}. \quad (4.28)$$

Nous notons $u = \mathcal{M}v_1 - \mathcal{M}v_2$ et $w = g(v_1) - g(v_2)$. Après soustraction de l'équation satisfaite par $\mathcal{M}v_1$ de celle satisfaite par $\mathcal{M}v_2$, nous écrivons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(v_2)Du) = \operatorname{div}(wD\mathcal{M}v_1), \quad u(\cdot, 0) = 0.$$

Remarquons que $\operatorname{div}(wD\mathcal{M}v_1) \in C_\alpha(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et appliquons la proposition 2 à l'équation ci-dessus,

$$|u|_{2,1,\alpha} \leq C|\operatorname{div}(wD\mathcal{M}v_1)|_\alpha, \quad (4.29)$$

où C est la constante de la proposition 2, la même que celle de (4.28). Dans le reste de la preuve, nous nous focalisons sur le deuxième membre de l'inégalité (4.29).

Nous réécrivons $\operatorname{div}(wD\mathcal{M}v_1)$ sous la forme :

$$\operatorname{div}(wD\mathcal{M}v_1) = w\Delta\mathcal{M}v_1 + DwD\mathcal{M}v_1,$$

d'où les inégalités :

$$|\operatorname{div}(wDMv_1)|_0 \leq |w|_0|\Delta Mv_1|_0 + |Dw|_0|DMv_1|_0, \quad (4.30)$$

$$H_\alpha(\operatorname{div}(wDMv_1)) \leq H_\alpha(w\Delta Mv_1) + H_\alpha(DwDMv_1). \quad (4.31)$$

Utilisons les inégalités (4.24) et (4.25) du lemme 2 pour majorer les termes du second membre de (4.31). Pour le premier terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_\alpha(w\Delta Mv_1) &\leq |w|_0 \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_{ii}Mv_1) + H_\alpha(w) \sum_{i=1}^N |\partial_{ii}Mv_1|_0 \\ &\leq |w|_0 \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_{ii}Mv_1) + \rho^{1-\alpha} \sum_{i=1}^N |\partial_i w|_0 \sum_{i=1}^N |\partial_{ii}Mv_1|_0 \end{aligned}$$

et pour le deuxième terme,

$$\begin{aligned} H_\alpha(DwDMv_1) &\leq \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i w \partial_i Mv_1) \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\partial_i w|_0 H_\alpha(\partial_i Mv_1) + \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i w) |\partial_i Mv_1|_0 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i w|_0 \right) \rho^{1-\alpha} \sum_{i,j=1}^N |\partial_{ij}Mv_1|_0 + \left(\sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i w) \right) \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i Mv_1|_0 \right). \end{aligned}$$

D'où

$$|\operatorname{div}(wDMv_1)|_0 + H_\alpha(\operatorname{div}(wDMv_1)) \leq (1 + \rho^{1-\alpha})|w|_{1,0,\alpha}|\mathcal{M}v_1|_{2,1,\alpha},$$

et comme $\mathcal{M}v_1$ satisfait (4.28), nous obtenons

$$|\operatorname{div}(wDMv_1)|_\alpha \leq (1 + \rho^{1-\alpha})|w|_{1,0,\alpha}C|u_0|_{2,\alpha}. \quad (4.32)$$

Pour conclure, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4. Soient $R > 0$ et f une fonction de classe C^2 définie sur $[0, +\infty)$ telle que sa dérivée seconde est localement lipschitzienne. Alors, il existe une constante $C(f, R)$, qui dépend uniquement des constantes de Lipschitz de f , f' et de f'' dans l'intervalle $[0, R]$, telle que pour toutes fonctions positives v_1, v_2 dans $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; \mathbb{R})$, on a :

$$|f(v_1) - f(v_2)|_{1,0,\alpha} \leq ((1 + \rho^{1-\alpha})C(f, R)(1 + R^2))|v_1 - v_2|_{1,0,\alpha}.$$

PREUVE. Voir Annexes, p. 169.

Finissons maintenant la preuve de la proposition 3. Pour cela nous remplaçons $|w|_{1,0,\alpha}$ dans (4.32) par $((1 + \rho^{1-\alpha})C(g, R)(1 + R^2))|v_1 - v_2|_{1,0,\alpha}$ et nous plaçons le résultat dans (4.29). La preuve est ainsi achevée. \square

Pour la suite, nous définissons :

$$C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; M) = \{u \in C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]); |u|_{2,1,\alpha} \leq M\}.$$

Dans la proposition suivante, nous montrons que l'opérateur \mathcal{N} est localement Lipschitzien dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et que sa constante de Lipschitz tend vers 0 quand T tend vers 0.

Proposition 4. *Soit $T > 0$ et $M > 0$. Il existe une fonction positive $\theta(T)$ qui tend vers 0 quand T tend vers 0, telle que pour tout $u_1, u_2 \in C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; M)$ nous avons :*

$$|\mathcal{N}u_1 - \mathcal{N}u_2|_{1,0,\alpha} \leq \theta(T) \left((1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4) \right) 2M |u_1 - u_2|_{2,1,\alpha}. \quad (4.33)$$

où $C(F, M^2)$ dépend uniquement des constantes de Lipschitz de F , F' et de F'' dans l'intervalle $[0, M^2]$.

PREUVE. Tout d'abord, nous réécrivons $\mathcal{N}u$ sous la forme $e^{-t}v_0 + \Phi(F(|Du|^2))$, où Φ est l'opérateur linéaire que nous définissons par :

$$\Phi(f)(x, t) = \int_0^t e^{\tau-t} f(x, \tau) d\tau, \quad (4.34)$$

pour toute fonction $f \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$. Ainsi nous obtenons :

$$|\Phi(f)|_0 \leq (1 - e^{-T})|f|_0, \quad |\partial_i \Phi(f)|_0 \leq (1 - e^{-T})|\partial_i f|_0. \quad (4.35)$$

Soit $P(x, t)$ et $Q(y, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ tels que $t > s$. Dérivons $\Phi(f)$:

$$\begin{aligned} & \partial_i \Phi(f)(P) - \partial_i \Phi(f)(Q) \\ &= \int_0^t e^{\tau-t} \partial_i f(x, \tau) d\tau - \int_0^s e^{\tau-s} \partial_i f(y, \tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{\tau-t} (\partial_i f(x, \tau) - \partial_i f(y, \tau)) d\tau + \int_0^s (e^{\tau-t} - e^{\tau-s}) \partial_i f(y, \tau) d\tau + \int_s^t e^{\tau-t} \partial_i f(y, \tau) d\tau \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |I_1| d(P, Q)^{-\alpha} &\leq H_\alpha(\partial_i f)(1 - e^{-T}), \\ |I_2| d(P, Q)^{-\alpha} &\leq |\partial_i f|_0 (1 - e^{-s}) \frac{1 - e^{-(t-s)}}{d(P, Q)^\alpha} \\ &\leq |\partial_i f|_0 (1 - e^{-T}) T^{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ |I_3| d(P, Q)^{-\alpha} &\leq |\partial_i f|_0 \frac{1 - e^{-(t-s)}}{d(P, Q)^\alpha} \\ &\leq |\partial_i f|_0 T^{1-\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$H_\alpha(\partial_i \Phi(f)) \leq (1 - e^{-T})H_\alpha(\partial_i f) + |\partial_i f|_0(T^{1-\frac{\alpha}{2}} + (1 - e^{-T})T^{1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Combinons cette inégalité avec les inégalités (4.35), il vient

$$|\Phi(f)|_{1,0,\alpha} \leq \theta(T)|f|_{1,0,\alpha}, \quad (4.36)$$

où $\theta(T) = (1 - e^{-T}) + T^{1-\frac{\alpha}{2}} + (1 - e^{-T})T^{1-\frac{\alpha}{2}}$, qui tend bien vers 0 quand $T \downarrow 0$.

Maintenant, nous allons démontrer que la fonctionnelle $u \mapsto F(|Du|^2)$ est localement Lipschitzienne de $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ vers $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$.

Soit $u \in C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, alors $|Du|^2 \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \left| |Du|^2 \right|_{1,0,\alpha} &\leq \sum_{i=1}^N |(\partial_i u)^2|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{1,0,\alpha}^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i u|_{1,0,\alpha} \right)^2 \\ &\leq \left(|u|_{2,1,\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que si $u \in C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; M)$, alors $|Du|^2 \in C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]; M^2)$. Appliquons alors le lemme 4,

$$\begin{aligned} &|F(|Du_1|^2) - F(|Du_2|^2)|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \left((1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4) \right) \left| \sum_{i=1}^N (\partial_i u_1)^2 - (\partial_i u_2)^2 \right|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \left((1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4) \right) \left| \sum_{i=1}^N (\partial_i u_1 + \partial_i u_2) \right|_{1,0,\alpha} \left| \sum_{i=1}^N (\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \right|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \left((1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4) \right) |u_1 + u_2|_{2,1,\alpha} |u_1 - u_2|_{2,1,\alpha} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalement, nous combinons (4.36) et (4.37),

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}u_1 - \mathcal{N}u_2|_{1,0,\alpha} &= |\Phi(F(|Du_1|^2)) - \Phi(F(|Du_2|^2))|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \theta(T)|F(|Du_1|^2) - F(|Du_2|^2)|_{1,0,\alpha} \\ &\leq \theta(T) \left((1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4) \right) |u_1 + u_2|_{2,1,\alpha} |u_1 - u_2|_{2,1,\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi nous achevons la preuve. \square

En ce qui suit, nous énonçons un résultat d'existence et d'unicité partiel, pour le système (4.1)-(4.2).

Proposition 5. *Pour tout $R > |v_0|_{1,\alpha}$, il existe $T(R) > 0$, tel que le système (4.1)-(4.2), admet une solution unique (u, v) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T(R)]) \times \mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$.*

PREUVE. Tout d'abord, nous notons $\tilde{v}(x, t) = e^{-t}v_0(x)$ et nous rappelons que Φ est l'opérateur linéaire défini par (4.34). Pour tout $v \in \mathcal{E}([0, T]; v_0)$, nous avons l'égalité :

$$\mathcal{N}\mathcal{M}v = \tilde{v} + \Phi(F(|D\mathcal{M}v|^2)).$$

Nous en déduisons directement l'inégalité,

$$|\mathcal{N}\mathcal{M}v|_{1,0,\alpha} \leq |\tilde{v}|_{1,0,\alpha} + |\Phi(F(|D\mathcal{M}v|^2))|_{1,0,\alpha}. \quad (4.38)$$

Estimons les deux termes de droite. Pour le premier, nous avons

$$|\tilde{v}|_0 \leq |v_0|_0, \quad |\partial_i \tilde{v}|_0 \leq |\partial_i v_0|_0.$$

Nous utilisons (4.25), en tenant compte du fait que $H_\alpha(e^{-t}) \leq T^{1-\frac{\alpha}{2}}$,

$$H_\alpha(\partial_i \tilde{v}) \leq H_\alpha(\partial_i v_0) + T^{1-\frac{\alpha}{2}} |\partial_i v_0|_0,$$

alors nous obtenons :

$$|\tilde{v}|_{1,0,\alpha} \leq |v_0|_{1,\alpha} + T^{1-\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^N |\partial_i v_0|_0. \quad (4.39)$$

Pour le deuxième terme, nous rappelons que $F(0) = 0$ et nous posons $u_1 = \mathcal{M}v$ et $u_2 = 0$, alors nous obtenons

$$\mathcal{N}u_1 - \mathcal{N}u_2 = \Phi(F(|D\mathcal{M}v|^2)).$$

Dans ce cas, l'inégalité (4.33) de la proposition 4 devient

$$|\Phi(F(|D\mathcal{M}v|^2))|_{1,0,\alpha} \leq \theta(T) K \quad (4.40)$$

avec $K = (1 + \rho^{1-\alpha})C(F, M^2)(1 + M^4)2M^2$ et $M = C|u_0|_{2,\alpha}$ où C est la constante de la proposition 2. Enfin nous combinons les trois inégalités (4.38), (4.39) et (4.40) :

$$|\mathcal{N}\mathcal{M}v|_{1,0,\alpha} \leq |v_0|_{1,\alpha} + T^{1-\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^N |\partial_i v_0|_0 + \theta(T) K$$

Maintenant choisissons $R > |v_0|_{1,\alpha}$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{E}([0, T]; v_0, R)$. Par application des propositions 3 et 4, nous avons :

$$|\mathcal{N}\mathcal{M}v_1 - \mathcal{N}\mathcal{M}v_2|_{1,0,\alpha} \leq \theta(T) K_{\mathcal{N}} K_{\mathcal{M}} |v_1 - v_2|_{1,0,\alpha}$$

avec

$$K_{\mathcal{N}} = 2(1 + \rho^{1-\alpha})C(F, (C|u_0|_{2,\alpha})^2) (1 + (C|u_0|_{2,\alpha})^4) C|u_0|_{2,\alpha},$$

$$K_{\mathcal{M}} = (1 + \rho^{1-\alpha})^2 C(g, R) (1 + R^2) C^2 |u_0|_{2,\alpha}$$

Nous en déduisons qu'il existe un temps T , désormais noté $T(R)$, assez petit tel que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \theta(T)K_{\mathcal{N}}K_{\mathcal{M}} < 1, \\ T^{1-\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^N |\partial_i v_0|_0 + \theta(T)K \leq R - |v_0|_{1,\alpha}. \end{cases} \quad (4.41)$$

En d'autres termes, l'opérateur $\mathcal{N}\mathcal{M}$ est une contraction qui envoie $\mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$ dans lui-même. Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une solution (u, v) de (4.1)-(4.2) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T(R)]) \times \mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$ par application du théorème de point fixe à $\mathcal{N}\mathcal{M}$ dans $\mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

4.3.3 Preuve du résultat principal

Dans toute la suite, pour préciser la dépendance en T , nous allons noter $|\cdot|_{1,0,\alpha}^T$, la norme dans $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ et $|\cdot|_{2,1,\alpha}^T$, la norme dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$.

Soient $0 < T_1 \leq T_2$, (u_1, v_1) solution de (4.1)-(4.2) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T_1]) \times C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T_1])$ et (u_2, v_2) , solution de (4.1)-(4.2) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T_2]) \times C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T_2])$.

Soit $R > 0$ vérifiant

$$R > \max\{|v_1|_{1,0,\alpha}^{T_1}, |v_2|_{1,0,\alpha}^{T_2}\}.$$

D'après la proposition 5, il existe $T(R) > 0$, tel que (4.1)-(4.2) admet une solution unique dans $C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T(R)]) \times \mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$. Nous choisissons R suffisamment grand pour avoir $T(R) \leq T_1$. Comme v_1 et v_2 appartiennent à $\mathcal{E}([0, T(R)]; v_0, R)$, nous en déduisons que $u = u_1 = u_2$ et $v = v_1 = v_2$ dans $\mathbb{R}^N \times [0, T(R)]$.

Maintenant prolongeons la solution (u, v) au delà de $T(R)$ de la manière suivante : Nous allons démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T(R))$ la solution est prolongeable sur $[t, t + \epsilon]$ et que ϵ est indépendant de t .

Remarquons tout d'abord que $\{v(\cdot, t); t \in [0, T(R)]\}$ (resp. $\{u(\cdot, t); t \in [0, T(R)]\}$) est uniformément borné dans $C_{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ (resp. $C_{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$). Plus précisément, pour tout $t \in [0, T(R)]$, nous avons :

$$|v(\cdot, t)|_{1,\alpha} \leq R \quad \text{et} \quad |u(\cdot, t)|_{2,\alpha} \leq C|u_0|_{2,\alpha}.$$

Choisissons $T_0 \in (0, T(R))$ et considérons le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \operatorname{div}(g(\tilde{v})D\tilde{u}) & \tilde{u}(\cdot, 0) &= u(\cdot, T_0) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= F(|D\tilde{u}|^2) - \tilde{v} & \tilde{v}(\cdot, 0) &= v(\cdot, T_0) \end{aligned}$$

La proposition 5 montre que pour tout $R' > R$, il existe $T(R')$ tel que le système ci-dessus admet une solution unique (\tilde{u}, \tilde{v}) dans

$$C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T(R')]) \times \mathcal{E}([0, T(R')]; v(\cdot, T_0), R').$$

Nous choisissons R' et T_0 de manière à avoir $T_0 < T(R) < T_0 + T(R') \leq T_1$, alors nous obtenons les égalités suivantes, pour tout $t \in [T_0, T_0 + T(R')]$:

$$\tilde{u}(\cdot, t - T_0) = u_1(\cdot, t) = u_2(\cdot, t) \quad \text{et} \quad \tilde{v}(\cdot, t - T_0) = v_1(\cdot, t) = v_2(\cdot, t),$$

et comme $(u, v), (u_1, v_1)$ et (u_2, v_2) sont identiques sur $[T_0, T(R)]$, nous en déduisons que la solution est prolongée ($\epsilon = T(R')$) et que le prolongement est unique.

Pour conclure, il nous reste à vérifier que la solution est prolongeable jusqu'à T_1 et qu'elle est identique à (u_1, v_1) .

Définissons l'ensemble $E_1 = \{t \in [0, T_1]; u = u_1 \text{ et } v = v_1 \text{ sur } \mathbb{R}^N \times [0, t]\}$. Remarquons que E_1 est un intervalle fermé borné et posons $t_1 = \max E_1$. Si $t_1 < T_1$, nous pouvons prolonger la solution (u, v) sur $\mathbb{R}^N \times [0, t']$ de telle manière que $t_1 < t' < T_1$. Or d'après ce qui précède, nous obtenons les égalités : $u = u_1$ et $v = v_1$ sur $\mathbb{R}^N \times [0, t']$. Ceci contredit la définition de t_1 , d'où $t_1 = T_1$. Nous procédons de la même manière pour montrer que la solution est prolongeable jusqu'à T_2 et qu'elle est identique à (u_2, v_2) .

Ainsi, nous avons prouvé l'existence d'un intervalle ouvert maximal $[0, T)$, éventuellement égal à $[0, +\infty)$, tel qu'il existe une solution unique de (4.1)-(4.2) sur $\mathbb{R}^N \times [0, T)$. De plus si $T < \infty$ alors $\lim_{t \nearrow T} |v(\cdot, t)|_{1,\alpha} = +\infty$, faute de quoi on pourrait encore prolonger la solution au delà de T . Ceci achève la démonstration de théorème. \square

4.4 Le cas d'un ouvert borné régulier

Dans le cas où Ω est un ouvert borné à frontière régulière (de classe $C_{2,\alpha}$), le théorème 4 reste vrai pour toute donnée initiale $(u_0, v_0) \in C_{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ si (u_0, v_0) vérifie les hypothèses de compatibilité liées à la condition aux limites choisie.

Pour la condition de Neumann homogène, on suppose que

$$\text{pour tout } x \in \partial\Omega \quad \left. \frac{\partial u_0(x)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0,$$

et pour la condition de Dirichlet homogène on, suppose que

$$\text{pour tout } x \in \partial\Omega : \begin{cases} u_0(x) = 0, \\ \operatorname{div}(g(v_0(x)))Du_0(x) = 0. \end{cases}$$

4.5 Le cas d'un hypercube

Dans la première partie de ce paragraphe, nous allons étudier l'extension du théorème 4 dans le cas particulier où Ω est un hypercube de \mathbb{R}^N . La motivation principale est le fait que souvent les images ($N = 2$) ont un support rectangulaire.

4.5.1 Existence et unicité

Soient $\Omega = (0, 1)^N$ et $u_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Nous notons $\partial\Omega^0$ le sous ensemble de $\partial\Omega$ où la normale extérieure existe et $S_T^0 := \partial\Omega^0 \times [0, T]$.

Nous considérons le système

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v)Du) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_T^0} = 0 \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F(|Du|^2) - v \quad v(\cdot, 0) = 0, \quad (4.43)$$

Nous supposons que u_0 vérifie la condition de compatibilité :

$$\frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega^0} = 0. \quad (4.44)$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5. *Pour tout $u_0 \in C_{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ vérifiant (4.44), il existe un temps maximal $T \in (0, +\infty]$ qui dépend de u_0, g, F, α , et de N tel que le système (4.42)-(4.43) admet une solution unique (u, v) dans*

$$C_{2,1,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T]) \times C_{1,0,\alpha}(\overline{\Omega} \times [0, T]).$$

Si en plus $T < +\infty$, alors $\lim_{t \nearrow T} |v(\cdot, t)|_{1,\alpha} = +\infty$.

Afin de démontrer ce résultat, nous allons utiliser le théorème 4 après un prolongement adéquat de u_0 . Le prolongement le plus naturel consiste à prolonger u_0 par symétrisation et périodicité en une fonction \tilde{u}_0 , 2Ω -périodique et, paire en chacune de ses variables. Dans ce qui suit, pour toute fonction f définie dans $\overline{\Omega}$, nous allons noter ce prolongement par \tilde{f} .

Vérifions tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 5. *Pour toute fonction $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ vérifiant (4.44), le prolongement \tilde{w} appartient à $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. De plus, nous avons :*

$$|\tilde{w}|_{2,\alpha} = |w|_{2,\alpha}$$

PREUVE. Voir Annexes, p. 171.

PREUVE DU THÉORÈME 5. Notons par \tilde{u}_0 le prolongement de u_0 donné par le lemme 5 et considérons le système :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\tilde{v})D\tilde{u}) \quad \tilde{u}(\cdot, 0) = \tilde{u}_0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = F(|D\tilde{u}|^2) - \tilde{v} \quad \tilde{v}(\cdot, 0) = 0. \quad (4.46)$$

D'après le théorème 4, il existe un temps maximal $T > 0$ tel que le système (4.45)-(4.46) admet une solution unique (\tilde{u}, \tilde{v}) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \times C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. Il s'agit ensuite de démontrer que \tilde{u} et \tilde{v} ont les mêmes propriétés de périodicité et de symétrie que \tilde{u}_0 . En effet, considérons la fonction \tilde{u}_0^1 , le symétrique de \tilde{u}_0 par rapport à l'hyperplan d'équation $(x_1 = 1)$. Alors, d'après le théorème 4, il existe un temps maximal T^1 , tel que le système suivant :

$$\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\tilde{v}^1)D\tilde{u}^1) \quad \tilde{u}^1(\cdot, 0) = \tilde{u}_0^1$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial t} = F(|D\tilde{u}^1|^2) - \tilde{v}^1 \quad \tilde{v}^1(\cdot, 0) = 0$$

admet une solution unique $(\tilde{u}^1, \tilde{v}^1)$ dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T^1]) \times C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T^1])$, et comme $\tilde{u}_0^1 = \tilde{u}_0$, par unicité on a :

$$(\tilde{u}^1, \tilde{v}^1) = (\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{et} \quad T^1 = T.$$

Il est clair que nous obtenons la même conclusion en remplaçant l'hyperplan d'équation $(x_1 = 1)$ par l'hyperplan d'équation $(x_i = 1)$ pour $i = 2, \dots, N$. Nous en déduisons, alors, que pour tout $t \in (0, T)$, $u(\cdot, t)$ est symétrique par rapport aux hyperplans $(x_i = 1)$ pour $i = 1, \dots, N$. Il en résulte que u vérifie la condition aux limites de Neumann homogène. Ceci achève la démonstration du théorème. \square

Dans le paragraphe qui suit, nous allons vérifier quelques propriétés du type principe du maximum.

4.5.2 Principe du maximum

Lemme 6. *Nous supposons satisfaites les hypothèses du théorème 5. Soit (u, v) la solution du système (4.42)-(4.43) et T le temps maximal. Alors pour tout $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T)$, nous avons :*

$$\min_{\bar{\Omega}} u_0 \leq u(x, t) \leq \max_{\bar{\Omega}} u_0. \quad (4.47)$$

PREUVE. Soit $\gamma > 0$ et \tilde{u} le prolongement de u donné par le lemme 5. Introduisons la suite de fonctions

$$w_\gamma(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \frac{\gamma}{T-t}. \quad (4.48)$$

définies sur $\mathbb{R}^N \times [0, T)$. Puisque nous avons

$$Dw_\gamma = D\tilde{u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\gamma}{(T-t)^2},$$

(w_γ, \tilde{v}) satisfait le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_\gamma}{\partial t} &= \operatorname{div}(g(\tilde{v})Dw_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} & w_\gamma(\cdot, 0) &= \tilde{u}_0 - \frac{\gamma}{T} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= F(|Dw_\gamma|^2) - \tilde{v} & \tilde{v}(\cdot, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times [0, T)$ le point maximum de w_γ . Il est clair que la périodicité de \tilde{u} et le fait que $w_\gamma(\cdot, t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow T$ nous assure que ce maximum est atteint. Alors, si $t_0 > 0$, nous avons

$$\frac{\partial w_\gamma}{\partial t}(x_0, t_0) = 0, \quad Dw_\gamma(x_0, t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta w_\gamma(x_0, t_0) \leq 0.$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= g(\tilde{v}(x_0, t_0))\Delta w_\gamma(x_0, t_0) + g'(\tilde{v}(x_0, t_0))D\tilde{v}(x_0, t_0)Dw_\gamma(x_0, t_0) - \frac{\gamma}{(T-t_0)^2} \\ &\leq -\frac{\gamma}{(T-t_0)^2}, \end{aligned}$$

ce qui est impossible, d'où $t_0 = 0$. Par conséquent, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T)$, nous avons :

$$\tilde{u}(x, t) - \frac{\gamma}{T-t} \leq \max_{\mathbb{R}^N} u_0 - \frac{\gamma}{T}.$$

Nous obtenons le résultat recherché en faisant tendre γ vers 0. L'autre membre de l'inégalité se démontre d'une manière analogue en considérant le point minimum de $\tilde{u}(x, t) + \frac{\gamma}{T-t}$. \square

Partant du principe qu'un filtrage ne doit pas créer d'information, en d'autres termes, il ne doit pas créer d'extrema locaux, nous allons démontrer le résultat suivant :

Lemme 7. *Nous supposons satisfaites les hypothèses du théorème 5. Soit (u, v) la solution du système (4.42)-(4.43) et T le temps maximal. Si (x_0, t_0) est un point d'extremum local strict de u dans $\bar{\Omega} \times [0, T)$, alors $t_0 = 0$.*

Pour prouver ce lemme, nous rappelons le résultat classique suivant :

Lemme 8. *Soit $(f_\epsilon)_\epsilon$ une suite de fonctions continues sur un ouvert Ω , qui converge dans $C(\Omega)$ vers une fonction f . Si x_0 est un maximum local strict de f , pour tout ϵ , il existe un point de maximum local x_ϵ de f_ϵ tels que la suite $(x_\epsilon)_\epsilon$ converge vers x_0 .*

Pour la preuve de ce lemme, on pourra se référer à Barles [Bar94].

PREUVE DU LEMME 7. Soit (x_0, t_0) un maximum local strict de \tilde{u} dans $\mathbb{R}^N \times [0, T)$, où \tilde{u} est le prolongement de u donné par le lemme 5. Remarquons tout d'abord que pour tout $\epsilon \in (0, T]$, la suite $(w_\gamma)_\gamma$, définie par (4.48), converge vers \tilde{u} dans $C(\mathbb{R}^N \times [0, T - \epsilon])$, puisque nous avons :

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T - \epsilon]} |w_\gamma - u| \leq \frac{\gamma}{\epsilon}.$$

Si $t_0 > 0$, nous appliquons le lemme 8 dans $\mathbb{R}^N \times (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ avec $\eta > 0$ assez petit. Nous en déduisons que pour γ assez petit, w_γ admet un maximum local dans $\mathbb{R}^N \times (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$ ce qui est impossible d'après la preuve du lemme 6. D'où $t_0 = 0$.

Pour les minimas locaux stricts, nous démontrons d'une manière analogue la propriété, en considérant $w_\gamma(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \frac{\gamma}{T-t}$. \square

4.6 Limite asymptotique

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans \mathbb{R}^N et nous nous proposons d'étudier la limite asymptotique du système :

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v_\delta)Du_\delta) \quad u_\delta(\cdot, 0) = u_0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial v_\delta}{\partial t} = \delta(F(|Du_\delta|^2) - v_\delta) \quad v_\delta(\cdot, 0) = v_0, \quad (4.50)$$

quand δ tend vers 0.

Remarquons tout d'abord, que la solution de l'équation (4.50) s'écrit :

$$v_\delta(x, t) = e^{-\delta t} v_0(x) + \delta \int_0^t e^{\delta(\tau-t)} F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau, \quad (4.51)$$

et analysons, d'un point de vue formel, cette nouvelle l'expression de v_δ quand δ est proche de 0.

Puisque $F \geq 0$ et $e^{-\delta t} \leq e^{\delta(\tau-t)} \leq 1$, nous avons les inégalités :

$$e^{-\delta t} \int_0^t F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau \leq \int_0^t e^{\delta(\tau-t)} F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau \leq \int_0^t F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau.$$

Nous en déduisons, du fait $e^{-\delta t}$ est proche de 1, que

$$\int_0^t e^{\delta(\tau-t)} F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau \simeq \int_0^t F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau.$$

Nous constatons que, quand δ est proche de 0, le noyau de convolution en temps agissant sur $F(|Du(\cdot, \tau)|^2)$, $\tau \in [0, t]$, devient de plus en plus "plat". Par conséquent, le terme intégral de $v_\delta(\cdot, t)$ devient moins sélectif pour les valeurs de $F(|Du(\cdot, \tau)|^2)$. De plus le terme δ qui multiplie l'intégral dans (4.51) permet de régulariser plus et restreint l'inhibition à des gradients élevés. Enfin, puisque v_δ ressemble à v_0 quand δ est proche de 0, nous nous attendons à ce que le système (4.49)-(4.50) tend vers l'équation linéaire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v_0)DU) \quad U(\cdot, 0) = u_0, \quad (4.52)$$

avec $v_0(\cdot, t) = v_0(\cdot)$ pour tout $t \geq 0$.

Désormais, nous notons T_δ le temps maximal du système (4.49)-(4.50). Nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème 6. *Les assertions suivantes sont vraies :*

1) $\lim_{\delta \rightarrow \infty} T_\delta = +\infty$.

2) *Pour tout $T > 0$, nous avons les convergences :*

$$u_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} U \text{ in } C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]), \quad (4.53)$$

$$v_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} v_0 \text{ in } C_{1,0,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, T]), \quad (4.54)$$

où U est la solution de (4.52) dans $C_{2,1,\alpha}(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$.

PREUVE. L'introduction du paramètre δ modifie le résultat de la proposition 3, uniquement au niveau du terme $\theta(T)$, que nous remplaçons par :

$$\theta(\delta, T) = (1 - e^{-\delta T}) + \delta \left(T^{1-\frac{\alpha}{2}} + (1 - e^{-\delta T}) T^{1-\frac{\alpha}{2}} \right). \quad (4.55)$$

Il est clair que pour tout $T > 0$ fixé, $\theta(\delta, T)$ tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$. En plus, dans la preuve du théorème 4, (4.41) devient :

$$\begin{cases} \theta(\delta, T) K_N K_M < 1, \\ \delta T^{1-\frac{\alpha}{2}} \sum_{i=1}^N |\partial_i v_0|_0 + \theta(\delta, T) K \leq R - |v_0|_{1,\alpha}. \end{cases}$$

Ceci montre que le temps $T_\delta(R)$, qui permet d'appliquer le théorème de point fixe, peut être aussi grand que nous le souhaitons, en choisissant δ assez petit. En plus, nous avons :

$$|v_\delta|_{1,0,\alpha}^{T_\delta(R)} \leq R \text{ et } |u_\delta|_{2,1,\alpha}^{T_\delta(R)} \leq C |u_0|_{2,\alpha} \text{ pour tout } \delta \in (0, 1]. \quad (4.56)$$

Maintenant pour prouver (4.54), nous fixons $T > 0$ et $R > |v_0|_{1,\alpha}$ et nous choisissons δ tel que $T_\delta(R) > T$. Alors, en utilisant (4.40), (4.51) et (4.55) nous obtenons

$$\begin{aligned} |v_\delta - v_0|_{1,0,\alpha}^T &\leq |(e^{-\delta T} - 1)v_0|_{1,0,\alpha}^T + \left| \delta \int_0^t e^{\delta(\tau-t)} F(|Du_\delta(x, \tau)|^2) d\tau \right|_{1,0,\alpha}^T \\ &\leq |e^{-\delta T} - 1| |v_0|_{1,\alpha} + \theta(\delta, T) |F(|Du_\delta|^2)|_{1,0,\alpha}^T \\ &\leq |e^{-\delta T} - 1| |v_0|_{1,\alpha} + \theta(\delta, T) K. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la convergence :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |v_\delta - v_0|_{1,0,\alpha}^T \rightarrow 0. \quad (4.57)$$

Pour prouver (4.53), nous soustrayons (4.52) de (4.49), il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\delta - U) = \operatorname{div} \left(g(v_\delta)(Du_\delta - DU) \right) + \operatorname{div} \left((g(v_\delta) - g(v_0))DU \right).$$

Appliquons le théorème 1 à l'équation ci-dessus, ainsi nous obtenons l'inégalité

$$|u_\delta - U|_{2,1,\alpha}^T \leq C |\operatorname{div}((g(v_\delta) - g(v_0))DU)|_\alpha^T. \quad (4.58)$$

En reprenant les étapes (4.29)-(4.32) de la proposition 2, nous pouvons écrire

$$|\operatorname{div}((g(v_\delta) - g(v_0))DU)|_\alpha^T \leq (1 + \rho^{1-\alpha}) |g(v_\delta) - g(v_0)|_{1,0,\alpha}^T C |u_0|_{2,\alpha}$$

puis nous appliquons le lemme 4 à $g(v_\delta) - g(v_0)$, pour obtenir

$$|\operatorname{div}((g(v_\delta) - g(v_0))DU)|_\alpha^T \leq (1 + \rho^{1-\alpha})^2 C(g)(1 + R^2) |v_\delta - v_0|_{1,0,\alpha}^T C |u_0|_{2,\alpha}.$$

Finalement, nous plaçons l'inégalité ci-dessus dans (4.58), puis nous utilisons (4.57) pour conclure. \square

Chapitre 5

Approximation numérique dans les espaces de Sobolev

5.1 Introduction

Le but de cette partie est de construire une approximation discrète en temps du système :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(v)Du) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_T} = 0 \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_M(|Du|^2) - v \quad v(\cdot, 0) = v_0 \quad (5.2)$$

dans $(0, 1)^N \times (0, T)$ où $0 < T < \infty$ et $N \leq 2$.

La donnée initiale u_0 , représente la valeur d'un signal, défini sur $\Omega = (0, 1)$ dans le cas $N = 1$, ou bien le niveau de gris d'une image définie sur $\Omega = (0, 1)^2$, dans le cas $N = 2$.

Dans toute la suite, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

- $g \in C^1([0, +\infty))$ est une fonction décroissante vérifiant $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$.
- $F_M \in C^1([0, +\infty))$ est une version régulière de $s \rightarrow \min(s, M)$, avec $M > 0$ un réel suffisamment grand.

Soit $\delta t \in (0, 1)$. Nous nous proposons d'étudier le schéma semi-implicite ci-dessous et de prouver qu'il constitue une approximation du système (5.1)-(5.2), quand δt tend vers 0 :

$$(u_{\delta t}^0, v_{\delta t}^0) = (u_0, v_0) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \quad v_0 \geq 0$$

$$\frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} = \operatorname{div}(g(v_{\delta t}^n)Du_{\delta t}^{n+1}) \quad \frac{\partial u_{\delta t}^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{v_{\delta t}^{n+1} - v_{\delta t}^n}{\delta t} = F_M(|Du_{\delta t}^{n+1}|^2) - v_{\delta t}^{n+1}. \quad (5.4)$$

Dans un premier temps, nous allons vérifier que le système discrétisé a un sens. En d'autres termes, pour tout $\delta t \in (0, 1)$, la suite $(u_{\delta t}^n, v_{\delta t}^n)$ existe et unique. Après avoir prouvé que le système satisfait le principe du maximum, nous allons interpoler convenablement les suites $(u_{\delta t}^n)$ et $(v_{\delta t}^n)$, puis nous allons établir des estimations a priori, indépendantes de δt , pour pouvoir passer à la limite.

5.2 Préliminaires et résultat principal

L'équation (5.4) nous permet d'écrire explicitement $v_{\delta t}^{n+1}$:

$$v_{\delta t}^{n+1} = \frac{1}{1 + \delta t} (\delta t F_M(|Du_{\delta t}^{n+1}|^2) + v_{\delta t}^n). \quad (5.5)$$

En raisonnant par récurrence, nous obtenons,

$$\begin{aligned} 0 \leq v_{\delta t}^{n+1} &\leq \delta t M \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{1 + \delta t} \right)^k + \left(\frac{1}{1 + \delta t} \right)^{n+1} \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq M \left(1 - \left(\frac{1}{1 + \delta t} \right)^{n+1} \right) + \left(\frac{1}{1 + \delta t} \right)^{n+1} \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, alors, que la suite $(v_{\delta t}^n)$ admet une borne uniforme dans $L^\infty(\Omega)$ et qu'elle vérifie :

$$0 \leq v_{\delta t}^n \leq \max(M, \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}) := M'. \quad (5.6)$$

D'après les hypothèses sur g , pour tout $n \geq 0$ nous avons $0 < g(M') \leq g(v_{\delta t}^n) \leq 1$. Par conséquent, le problème (5.3) est elliptique pour tout $n \geq 0$. Nous en déduisons en utilisant la théorie générale des équations elliptiques, l'existence et l'unicité de $u_{\delta t}^{n+1}$ dans $H^1(\Omega)$, pour tout $n \geq 0$. De plus $u_{\delta t}^{n+1}$ est l'unique solution du problème de minimisation :

$$\min \left\{ E_{(\delta t, n)}(w) = \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Dw|^2 dx + \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega} |w - u_{\delta t}^n|^2 dx : w \in H^1(\Omega) \right\}. \quad (5.7)$$

Le lemme suivant décrit la monotonie des normes $L^\infty(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ de la suite $(u_{\delta t}^n)$.

Lemme 9. *Pour tout $n \geq 0$, nous avons :*

$$\|u_{\delta t}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{\delta t}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \dots \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.8)$$

Pour presque tout $x \in \Omega$, nous avons¹ :

$$\inf u_0 \leq \dots \leq \inf u_{\delta t}^n \leq u_{\delta t}^{n+1}(x) \leq \sup u_{\delta t}^n \leq \dots \leq \sup u_0. \quad (5.9)$$

PREUVE. Multiplions (5.3) par $u_{\delta t}^{n+1}$ puis intégrons le résultat sur Ω , il vient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta t \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} u_{\delta t}^n u_{\delta t}^{n+1} dx - \int_{\Omega} |u_{\delta t}^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ensuite nous nous servons de l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|u_{\delta t}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} u_{\delta t}^n u_{\delta t}^{n+1} dx \\ &\leq \|u_{\delta t}^n\|_{L^2(\Omega)} \|u_{\delta t}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pour la preuve de (5.9) on peut se référer à H. Brezis [Bre87]. \square

Maintenant, nous définissons la suite de fonctions $(u_{\delta t})$, constantes par morceaux en temps $t > 0$ (nous notons par $[\alpha]$ la partie entière de α)

$$u_{\delta t}(x, t) = u_{\delta t}^{[t/\delta t]+1}(x).$$

Nous définissons aussi (comme dans [CD96]), la suite de fonctions $(\widehat{u}_{\delta t})$ affines par morceaux en temps $t > 0$

$$\widehat{u}_{\delta t}(x, t) = (1 - \theta)u_{\delta t}^{[t/\delta t]}(x) + \theta u_{\delta t}^{[t/\delta t]+1}(x)$$

avec $\theta = t/\delta t - [t/\delta t] \in [0, 1)$. Nous définissons les suites de fonctions $v_{\delta t}(x, t)$ et $\widehat{v}_{\delta t}(x, t)$ de la même manière.

Nous proposons aussi, de prolonger les fonctions $v_{\delta t}(x, t)$ sur $(-1, 0)$ de la manière suivante :

$$v_{\delta t}(\cdot, t) = v_0(\cdot) \quad \text{pour tout } t \in (-1, 0).$$

Ainsi en utilisant la notation $\tau^{-\delta t} f(\cdot, t) = f(\cdot, t - \delta t)$, le système discret (5.3)-(5.4) devient :

$$\frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\tau^{-\delta t} v_{\delta t}) Du_{\delta t}), \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \widehat{v}_{\delta t}}{\partial t} = F_M(|Du_{\delta t}|^2) - v_{\delta t}. \quad (5.12)$$

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre. Nous allons prouver l'existence d'une solution faible du système (5.1)-(5.2) comme limite, à une sous suite près, de la discrétisation proposée dans (5.3)-(5.4).

¹sup w désigne le sup ess de w . Rappelons que $\sup \operatorname{ess} w = \inf\{C; w(x) \leq C \text{ p.p.}\}$ et que $\inf \operatorname{ess} w = -\sup \operatorname{ess}(-w)$.

Théorème 7. Soit $T > 0$. Il existe une sous suite $(u_{\delta t_j}, v_{\delta t_j})$ (resp. $(\widehat{u}_{\delta t_j}, \widehat{v}_{\delta t_j})$) extraite de $(u_{\delta t}, v_{\delta t})$ (resp. $(\widehat{u}_{\delta t}, \widehat{v}_{\delta t})$) et (u, v) solution du système (5.1)-(5.2) dans

$$\left(H^1(\Omega \times (0, T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T)) \right) \times \left(H^1(\Omega \times (0, T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T)) \right)$$

telles que, nous avons les convergences suivantes, quand $j \rightarrow +\infty$:

$$\widehat{u}_{\delta t_j}, u_{\delta t_j} \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (5.13)$$

$$\widehat{v}_{\delta t_j}, v_{\delta t_j} \longrightarrow v \quad \text{dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (5.14)$$

$$(\widehat{u}_{\delta t_j}, \widehat{v}_{\delta t_j}) \longrightarrow (u, v) \quad \text{dans } \left(H^1(\Omega \times (0, T)) \right) \times \left(H^1(\Omega \times (0, T)) \right). \quad (5.15)$$

La démonstration de ce résultat nécessite des estimations a priori sur les suites $(u_{\delta t_j})$, $(v_{\delta t_j})$, $(\widehat{u}_{\delta t_j})$ et $(\widehat{v}_{\delta t_j})$. Ceci est l'objectif du paragraphe qui suit.

5.3 Résultats intermédiaires

Nous commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 10. La suite $(\partial \widehat{v}_{\delta t} / \partial t)$ est uniformément bornée dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$. En particulier, nous avons :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \|\widehat{v}_{\delta t} - v_{\delta t}\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} = 0. \quad (5.16)$$

PREUVE. Puisque $F_M \geq 0$, $v_{\delta t} \geq 0$ p.p. avec l'inégalité (5.6), nous avons :

$$-M' \leq F_M(|Du_{\delta t}|^2) - v_{\delta t} \leq M,$$

que nous combinons avec (5.12), pour obtenir :

$$\left\| \frac{\partial \widehat{v}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)} \leq M'.$$

Soit $t \in (0, T)$. Nous notons $\theta = t/\delta t - [t/\delta t]$, puis nous écrivons :

$$\int_{\Omega} |\widehat{v}_{\delta t}(x, t) - v_{\delta t}(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} |(1 - \theta)(v_{\delta t}^{[t/\delta t]}(x) - v_{\delta t}^{[t/\delta t]+1}(x))|^2 dx. \quad (5.17)$$

Puisque $0 \leq (1 - \theta) \leq 1$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\widehat{v}_{\delta t}(x, t) - v_{\delta t}(x, t)|^2 dx &\leq \delta t^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{v}_{\delta t}}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx \\ &\leq \delta t^2 M'^2. \end{aligned}$$

Ceci prouve la convergence

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \sup_{t \in (0, T)} \|\widehat{v}_{\delta t}(x, t) - v_{\delta t}(x, t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Lemme 11. $(u_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. Plus précisément nous avons :

$$\|Du_{\delta t}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{g(M')} \left(\|Du_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{g(M')} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (5.18)$$

$$\text{avec } C = \left(\sup |g'| \right) \left\| \frac{\partial \widehat{v}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)}.$$

PREUVE. Nous commençons par établir une borne uniforme sur $(u_{\delta t})$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, puis nous allons prouver que $(u_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, en établissant une inégalité de la forme :

$$\|Du_{\delta t}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C_1 \|Du_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \|Du_{\delta t}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \quad (5.19)$$

où $C_1, C_2 > 0$ des constantes que nous allons préciser dans la suite.

De la même manière que (5.10), nous multiplions (5.3) par $u_{\delta t}^{n+1}$ puis nous intégrons sur Ω en utilisant l'inégalité :

$$\int_{\Omega} u_{\delta t}^n u_{\delta t}^{n+1} dx \leq \int_{\Omega} |u_{\delta t}^n|^2 dx$$

il vient

$$\begin{aligned} g(M') \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt &= g(M') \delta t \int_{\Omega} |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \\ &\leq \delta t \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \\ &\leq \|u_{\delta t}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_{\delta t}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons (pour alléger les notations, on note $k := [T/\delta t]$)

$$\begin{aligned} g(M') \int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt &= g(M') \int_0^{\delta t k} \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt + g(M') \int_{\delta t k}^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt \\ &\leq (\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_{\delta t}^k\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{T - \delta t k}{\delta t} (\|u_{\delta t}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_{\delta t}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{T - \delta t(k+1)}{\delta t} \|u_{\delta t}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{T - \delta t k}{\delta t} \|u_{\delta t}^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

et puisque $\delta tk \leq T \leq \delta t(k+1)$, nous obtenons :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt \leq \frac{1}{g(M')} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.20)$$

Ceci prouve que $(u_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Maintenant nous allons prouver (5.19). Nous avons pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{n+1}) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx = \\ & \int_{\Omega} (g(v_{\delta t}^{n+1}) - g(v_{\delta t}^n)) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx + \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) (|Du_{\delta t}^{n+1}|^2 - |Du_{\delta t}^n|^2) dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ensuite, nous majorons les deux termes intégrales de (5.21). Pour le second terme, nous utilisons le problème de minimisation (5.7), pour écrire :

$$E_{(\delta t, n)}(u_{\delta t}^{n+1}) \leq E_{(\delta t, n)}(u_{\delta t}^n),$$

ce qui se traduit par :

$$\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx + \frac{1}{2\delta t} \int_{\Omega} |u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n|^2 dx \leq \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx, \quad (5.22)$$

d'où

$$\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) (|Du_{\delta t}^{n+1}|^2 - |Du_{\delta t}^n|^2) dx \leq 0.$$

Nous majorons le premier terme de (5.21) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g(v_{\delta t}^{n+1}) - g(v_{\delta t}^n)) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx & \leq \delta t \int_{\Omega} \left| \frac{g(v_{\delta t}^{n+1}) - g(v_{\delta t}^n)}{\delta t} \right| |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \\ & \leq C \delta t \int_{\Omega} |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec

$$C := (\sup |g'|) \left\| \frac{\partial \widehat{v}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)}.$$

Remplaçons ces majorations dans (5.21), il vient alors :

$$\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{n+1}) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx \leq C \delta t \int_{\Omega} |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx.$$

Additionons cette inégalité de $n = 0$ à $[t/\delta t]$, pour $t \in (0, T)$ quelconque, en rappelant que $u_{\delta t}(\cdot, t) =$

$u_{\delta t}^{\lceil t/\delta t \rceil + 1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{\lceil t/\delta t \rceil + 1}) |Du_{\delta t}^{\lceil t/\delta t \rceil + 1}|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_0) |Du_0|^2 dx &\leq C \sum_{n=0}^{\lceil t/\delta t \rceil} \delta t \int_{\Omega} |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \\ &\leq C \int_0^{\delta t(\lceil t/\delta t \rceil + 1)} \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Nous concluons que pour tout $t \in (0, T)$, nous avons :

$$\int_{\Omega} g(v_{\delta t}(\cdot, t)) |Du_{\delta t}(\cdot, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} g(v_0) |Du_0|^2 dx + C \int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt.$$

Alors en utilisant le fait que $g(M') \leq g(v_{\delta t}) \leq 1$, nous obtenons :

$$\|Du_{\delta t}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{g(M')} \left(\int_{\Omega} |Du_0|^2 dx + C \int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt \right).$$

Ceci prouve (5.19). Enfin, nous combinons ce résultat avec (5.20) pour obtenir (5.18). La preuve est ainsi achevée. \square

Lemme 12. $(\widehat{u}_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $H^1((0, T) \times \Omega)$. En plus, nous avons l'inégalité

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^2((0, T) \times \Omega)}^2 \leq \|Du_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{g(M')} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (5.24)$$

où C est la constante du lemme 11. En particulier, nous avons

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \|\widehat{u}_{\delta t} - u_{\delta t}\|_{L^2((0, T); L^2(\Omega))} = 0. \quad (5.25)$$

PREUVE. Réécrivons l'inégalité (5.22) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \delta t \int_{\Omega} \left| \frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} \right|^2 dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \right) \end{aligned}$$

nous obtenons alors (on note $k := \lceil T/\delta t \rceil$)

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \delta t \left\| \frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + (T - \delta t k) \left\| \frac{u_{\delta t}^{k+1} - u_{\delta t}^k}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \\
&\leq \sum_{n=0}^{k-1} \left(\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^{n+1}|^2 dx \right) \\
&\quad + \frac{T - \delta t k}{\delta t} \left(\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^k) |Du_{\delta t}^k|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^k) |Du_{\delta t}^{k+1}|^2 dx \right), \\
&\leq \int_{\Omega} g(v_0) |Du_0|^2 dx \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{k-1} \left(\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{n-1}) |Du_{\delta t}^n|^2 dx \right) \tag{5.27}$$

$$+ \left(\frac{T - \delta t k}{\delta t} \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^k) |Du_{\delta t}^k|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{k-1}) |Du_{\delta t}^k|^2 dx \right) \tag{5.28}$$

$$- \frac{T - \delta t k}{\delta t} \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{k+1}) |Du_{\delta t}^{k+1}|^2 dx. \tag{5.29}$$

Majorons convenablement les termes de la dernière inégalité :

Puisque $g \leq 1$, le terme (5.26) vérifie

$$\int_{\Omega} g(v_0) |Du_0|^2 dx \leq \|Du_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour le terme (5.27), nous procédons de la même manière que (5.23),

$$\sum_{n=1}^{k-1} \left(\int_{\Omega} g(v_{\delta t}^n) |Du_{\delta t}^n|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{n-1}) |Du_{\delta t}^n|^2 dx \right) \leq C \int_{\delta t}^{\delta t(k-1)} \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt.$$

Pour le terme (5.28), nous utilisons $T - \delta t k \leq \delta t$,

$$\left(\frac{T - \delta t k}{\delta t} \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^k) |Du_{\delta t}^k|^2 dx - \int_{\Omega} g(v_{\delta t}^{k-1}) |Du_{\delta t}^k|^2 dx \right) \leq C \int_{\delta t(k-1)}^{\delta t k} \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt.$$

Enfin, puisque $T - \delta t k \geq 0$, le terme (5.29) est majoré par 0.

Nous obtenons, finalement

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\| \frac{\partial \hat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \|Du_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t}|^2 dx dt,$$

et pour avoir (5.24), nous remplaçons le second terme du deuxième membre par le second membre de (5.20).

Pour vérifier (5.25), nous procédons comme dans (5.17), nous obtenons ainsi

$$\int_{\Omega} |\widehat{u}_{\delta t}(x, t) - u_{\delta t}(x, t)|^2 dx \leq \delta t^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right|^2 dx,$$

puis nous intégrons le résultat sur $(0, T)$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\widehat{u}_{\delta t}(x, t) - u_{\delta t}(x, t)|^2 dx dt \leq \delta t^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right|^2 dx dt,$$

et nous faisons tendre δt vers 0. La preuve du lemme est ainsi terminée. \square

Maintenant nous nous focalisons sur la régularité et la convergence de la suite $(v_{\delta t})$ dans le cas où $N = 2$. L'idée générale est la suivante : Le fait que $v_{\delta t}^0 \in H^1(\Omega)$ nous permet d'établir une régularité d'ordre 2 sur $u_{\delta t}^1$ qui, à son tour, nous sert à prouver que $v_{\delta t}^1 \in H^1(\Omega)$, ainsi de suite. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant, qui vient de la théorie du degré topologique, (voir par exemple [Kav93], chapitre *degré topologique*) :

Lemme 13. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap H^2(\Omega)$ une fonction Ω -périodique, alors pour tout fonction $\psi \in C([0, \infty[, \mathbb{R})$ bornée et uniformément continue, nous avons la relation :*

$$\|\psi(|Du|) \Delta u\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi(|Du|) D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

PREUVE. Voir Annexes, p. 174

Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Le lemme 13 reste vrai pour toute fonction u Ω -périodique, appartenant à $H^2(\Omega)$.*

PREUVE. Soit u une fonction appartenant à $H^2(\Omega)$. Par densité de $C^2(\mathbb{R}^2) \cap H^2(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$, il existe une suite $(w_n) \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap H^2(\Omega)$ qui converge vers u dans $H^2(\Omega)$. En particulier, nous avons $\Delta w_n \rightarrow \Delta u$, $D^2 w_n \rightarrow D^2 u$ et $Dw_n \rightarrow Du$ dans $L^2(\Omega)$. En plus, quitte à extraire une sous suite, nous avons $Dw_n \rightarrow Du$ p.p. dans Ω .

Du fait que ψ est bornée, il existe une fonction $h \in L^\infty(\Omega)$ et une sous suite extraite de (w_n) que nous notons toujours par (w_n) telles que $\psi^2(Dw_n) \xrightarrow{*} h$ dans $L^\infty(\Omega)$. Combinons cette convergence faible avec les convergences fortes $|\Delta w_n|^2 \rightarrow |\Delta u|^2$ et $|D^2 w_n|^2 \rightarrow |D^2 u|^2$ dans $L^1(\Omega)$, alors nous obtenons :

$$\psi^2(Dw_n) |\Delta w_n|^2 \rightarrow h |\Delta u|^2 \quad \text{et} \quad \psi^2(Dw_n) |D^2 w_n|^2 \rightarrow h |D^2 u|^2 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Pour conclure il suffit de remarquer, d'une part que la convergence forte et p.p. de Dw_n vers Du et la continuité de ψ impliquent que $h = \psi^2(Du)$, et d'autre part que la suite (w_n) peut être choisie de telle manière qu'elle soit Ω -périodique, par exemple en convoluant u avec un noyau régulier, nous obtenons alors le résultat désiré en appliquant le lemme 13 à la suite (w_n) , puis en passant à la limite. \square

Nous allons utiliser ce corollaire, ainsi que des résultats de régularité des solutions de problèmes elliptiques, dûs à D. Gilbarg and N-S. Trudinger [GT77] et à N-G. Meyers [Mey63], pour établir le résultat suivant :

Lemme 14. Soient $v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_+)$, $f \in L^2(\Omega)$ avec $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ la solution du problème :

$$\operatorname{div}(g(v)Du) = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} u(x) dx = 0. \quad (5.30)$$

Alors il existe une constante C qui dépend uniquement de g et de $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ telle que nous avons

$$\left\| \frac{D^2u}{1 + |Du|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (5.31)$$

PREUVE. Voir Annexes, p.175.

Remarque 1. Puisque le terme divergentiel de (5.3) est de moyenne nulle, nous constatons que pour tout $\delta t > 0$ et pour tout n :

$$\int_{\Omega} u_0(x) dx = \dots\dots\dots = \int_{\Omega} u_{\delta t}^n(x) dx = \int_{\Omega} u_{\delta t}^{n+1}(x) dx.$$

Donc, puisque notre modèle est “grey shift invariant”, nous allons supposer dans toute la suite que u_0 est de moyenne nulle sur Ω . (quitte à remplacer u_0 par $u_0 - \int_{\Omega} u_0(x) dx$), ce qui nous permet d’avoir :

$$\int_{\Omega} u_{\delta t}^n(x) dx = 0 \quad \text{pour tout } \delta t \text{ et pour tout } n.$$

Lemme 15. Pour tout $n \geq 0$, $v_{\delta t}^n \in H^1(\Omega)$.

PREUVE. Nous avons démontré, dans la preuve du lemme 14, qu’il existe une suite de fonctions $(u_\delta)_\delta$ définies sur Ω , qui vérifie les propriétés suivantes :

$$P_1 : u_\delta \in H^2(\Omega).$$

$$P_2 : u_\delta \rightarrow u_{\delta t}^1 \text{ fortement dans } H^1(\Omega).$$

$$P_3 : u_\delta \rightarrow u_{\delta t}^1 \text{ et } \partial_i u_\delta \rightarrow \partial_i u_{\delta t}^1 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

$$P_4 : \text{ Il existe } \epsilon \in (0, 1) \text{ tel que } \partial_{ij} u_\delta \rightarrow \partial_{ij} u_{\delta t}^1 \text{ faiblement dans } L^{1+\epsilon}(\Omega).$$

Vérifions, tout d’abord, que $F_M(|Du_\delta|^2)$ converge vers $F_M(|Du_{\delta t}^1|^2)$ dans $L^2(\Omega)$. En effet, utilisons le fait que la fonction $s \rightarrow F_M(s^2)$ est lipschitzienne ainsi que la propriété P_2 , alors nous obtenons .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |F_M(|Du_\delta|^2) - F_M(|Du_{\delta t}^1|^2)| dx &\leq C \int_{\Omega} ||Du_\delta| - |Du_{\delta t}^1|| dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |Du_\delta - Du_{\delta t}^1| dx \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à la dérivée au sens des distributions de $F_M(|Du_{\delta t}^1|^2)$.

Soit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. En utilisant la continuité de F'_M et la propriété P_3 , nous obtenons

$$F'_M(|Du_\delta|^2)\partial_i u_\delta \phi \rightarrow F'_M(|Du_{\delta t}^1|^2)\partial_i u_{\delta t}^1 \phi \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En plus, puisque $F'_M(s) = 0$ quand $s > M$, nous en déduisons

$$|F'_M(|Du_\delta|^2)\partial_i u_\delta \phi| \leq M^{\frac{1}{2}} |\phi| \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Puisque $\phi \in L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \infty)$, nous utilisons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, pour conclure

$$F'_M(|Du_\delta|^2)\partial_i u_\delta \phi \rightarrow F'_M(|Du_{\delta t}^1|^2)\partial_i u_{\delta t}^1 \phi, \text{ fortement dans } L^q(\Omega).$$

Choisissons $q = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$ comme dans la preuve du lemme 14, puis combinons la convergence forte ci dessus avec la convergence faible P_4 , alors nous obtenons :

$$\int_{\Omega} F'_M(|Du_\delta|^2) \partial_i u_\delta \partial_{ij} u_\delta \phi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} F'_M(|Du_{\delta t}^1|^2) \partial_i u_{\delta t}^1 \partial_{ij} u_{\delta t}^1 \phi \, dx.$$

Nous avons donc démontré que la dérivée, au sens des distributions, de $F_M(|Du_{\delta t}^1|^2)$, est donnée par $F'_M(|Du_{\delta t}^1|^2)\partial_i u_{\delta t}^1 \partial_{ij} u_{\delta t}^1$.

Vérifions maintenant que $D(F_M(|Du_{\delta t}^1|^2))$ est dans $L^2(\Omega)$. En effet, nous avons :

$$|F'_M(|Du_{\delta t}^1|^2)\partial_i u_{\delta t}^1 (1 + |Du_{\delta t}^1|)| \leq C(M) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

avec $C(M) = 2(M^{\frac{1}{2}} + M)$. Nous en déduisons alors la majoration suivante

$$\|D(F_M(|Du_{\delta t}^1|^2))\|_{L^2(\Omega)} \leq C(M) \left\| \frac{D^2 u_{\delta t}^1}{1 + |Du_{\delta t}^1|} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.32)$$

puis nous appliquons le lemme 14 à l'équation (5.3), quand $n = 0$, pour conclure que le membre de droite de (5.32) est fini, puisque (5.31) devient

$$\left\| \frac{D^2 u_{\delta t}^1}{1 + |Du_{\delta t}^1|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{u_{\delta t}^1 - u_0}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Revenons maintenant à l'équation (5.5). Puisque $v_0 \in H^1(\Omega)$, nous en déduisons que $v_{\delta t}^1 \in H^1(\Omega)$. En itérant le même raisonnement, nous concluons que $v_{\delta t}^n \in H^1(\Omega)$ pour tout $n > 0$. Ceci achève la preuve du lemme. \square

Nous pouvons maintenant établir des estimations a priori pour la suite $(v_{\delta t})$.

Lemme 16. *La suite $(v_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$. De plus, nous avons :*

$$\|Dv_{\delta t}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{Kt} \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)} + K \int_0^t e^{K(t-s)} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} \, ds. \quad (5.33)$$

avec $K = 2C(M^{\frac{1}{2}} + M)$, où C est la constante du lemme 14.

PREUVE. Dérivons l'équation (5.5) avec $n = 0$, il vient

$$Dv_{\delta t}^1 = \frac{\delta t}{1 + \delta t} D\left(F_M(|Du_{\delta t}^1|^2)\right) + \frac{1}{1 + \delta t} Dv_0$$

et utilisons la majoration (5.32), nous obtenons alors :

$$\|Dv_{\delta t}^1\|_{L^2(\Omega)} \leq C(M) \frac{\delta t}{1 + \delta t} \left\| \frac{D^2 u_{\delta t}^1}{1 + |Du_{\delta t}^1|} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{1 + \delta t} \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.34)$$

Une fois le lemme 14 appliqué à l'équation

$$\frac{u_{\delta t}^1 - u_0}{\delta t} = \operatorname{div}(g(v_0)Du_{\delta t}^1),$$

il implique l'inégalité :

$$\left\| \frac{D^2 u_{\delta t}^1}{1 + |Du_{\delta t}^1|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{u_{\delta t}^1 - u_0}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Majorons le premier terme du deuxième membre de (5.34) à l'aide de la dernière inégalité, nous obtenons alors :

$$\|Dv_{\delta t}^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K\delta t}{1 + \delta t} \left\| \frac{u_{\delta t}^1 - u_0}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1 + K\delta t}{1 + \delta t} \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $K := CC(M)$.

Puisque la constante du lemme 14 ne dépend que de g et la norme $L^\infty(\Omega)$ des fonctions $(v_{\delta t}^n)$ et comme la suite $(v_{\delta t})$ est uniformément bornée dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$, il est clair que nous obtenons la même inégalité pour tout n et pour tout δt , c'est à dire

$$\|Dv_{\delta t}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K\delta t}{1 + \delta t} \left\| \frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1 + K\delta t}{1 + \delta t} \|Dv_{\delta t}^n\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.35)$$

En raisonnant par récurrence, nous déduisons à partir de l'équation ci-dessus que pour tout n et pour tout δt :

$$\|Dv_{\delta t}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{K}{1 + \delta t} \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\frac{1 + K\delta t}{1 + \delta t} \right)^{n-j} \delta t \left\| \frac{u_{\delta t}^j - u_{\delta t}^{j-1}}{\delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right\} + \left(\frac{1 + K\delta t}{1 + \delta t} \right)^n \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)},$$

Finalement, nous utilisons l'inégalité :

$$\left(\frac{1 + K\delta t}{1 + \delta t} \right)^{n-j} \leq e^{K\delta t(n-j)},$$

pour obtenir la majoration recherchée, pour tout $t \in (0, T)$ ($n = [t/\delta t]$),

$$\|Dv_{\delta t}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq K \int_0^t e^{K(t-s)} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t}(\cdot, s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds + e^{Kt} \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier nous avons :

$$\|Dv_{\delta t}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq KT e^{KT} \left\| \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t}}{\partial t} \right\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + e^{KT} \|Dv_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Suite aux estimations a priori obtenues pour les suites $(u_{\delta t})$, $(v_{\delta t})$, $(\widehat{u}_{\delta t})$ et $(\widehat{v}_{\delta t})$, nous pouvons maintenant prouver le théorème 7.

5.4 Preuve du théorème 7.

Les lemmes 9, 11 et 12 montrent qu'il existe deux sous suites, $(u_{\delta t_j})$ extraite de $(u_{\delta t})$ et $(\widehat{u}_{\delta t_j})$ extraite de $(\widehat{u}_{\delta t})$, et une fonction $u \in H^1(\Omega \times (0, T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T))$ telles que

$$\begin{array}{lll} \widehat{u}_{\delta t_j}, u_{\delta t_j} & \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} & u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega \times (0, T)), \\ \widehat{u}_{\delta t_j}, u_{\delta t_j} & \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} & u \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \widehat{u}_{\delta t_j} & \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} & u \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega \times (0, T)). \end{array}$$

Nous tirons la même conclusion à partir des lemmes 10 et 16, en remplaçant $(u_{\delta t_j}, u_{\delta t_j}, \widehat{u}_{\delta t_j}, \widehat{u}_{\delta t_j})$ par $(v_{\delta t_j}, v_{\delta t_j}, \widehat{v}_{\delta t_j}, \widehat{v}_{\delta t_j})$ et u par v . Il reste alors à prouver la convergence forte (5.13) et le fait que (u, v) est solution du système (5.1) et (5.2).

Quitte à extraire une sous suite, nous supposons que $v_{\delta t_j} \rightarrow v$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$. En plus, en utilisant le fait que la suite $(\partial \widehat{v}_{\delta t} / \partial t)$ est bornée dans $L^\infty(\Omega \times (0, T))$, nous en déduisons que $\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j} \rightarrow v$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$ et par continuité de g , nous obtenons que $g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) \rightarrow g(v)$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$.

Multiplions l'équation (5.11) par $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T))$, en remplaçant δt par δt_j , puis intégrons sur $\Omega \times (0, T)$, il vient

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} \phi \, dx \, dt = - \int_0^T \int_\Omega g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) Du_{\delta t_j} D\phi \, dx \, dt.$$

Nous déduisons à partir de la convergence faible $\partial \widehat{u}_{\delta t_j} / \partial t \rightharpoonup \partial u / \partial t$ dans $L^2(\Omega \times (0, T))$ que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} \phi \, dx \, dt \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx \, dt$$

Ensuite, nous utilisons la convergence faible $Du_{\delta t_j} \rightharpoonup Du$ dans $L^2((\Omega \times (0, T)); \mathbb{R}^2)$ combinée avec la

convergence forte $g(\tau^{-h_j} v_{\delta t_j}) D\phi \rightarrow g(v) D\phi$ dans $L^2((\Omega \times (0, T)); \mathbb{R}^2)$ (on a appliqué ici le théorème de la convergence dominée de Lebesgue), pour constater

$$\int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-h_j} v_{\delta t_j}) Du_{\delta t_j} D\phi \, dx \, dt \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} g(v) Du D\phi \, dx \, dt.$$

Alors, pour tout $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T))$, nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \phi \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega} g(v) Du D\phi \, dx \, dt. \quad (5.36)$$

Il en résulte que u est une solution faible de (5.1).

Maintenant nous allons prouver la convergence (5.13). Il nous reste alors, à prouver que $Du_{\delta t_j}$ converge fortement vers Du dans $L^2((\Omega \times (0, T)); \mathbb{R}^2)$. Pour cela nous écrivons :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du_{\delta t_j} - Du|^2 \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du_{\delta t_j}|^2 \, dx \, dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) (Du_{\delta t_j} \cdot Du) \, dx \, dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du|^2 \, dx \, dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} u_{\delta t_j} \, dx \, dt + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} u \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du|^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

En tenant compte des convergences, faible de $\partial \widehat{u}_{\delta t_j} / \partial t$ vers $\partial u / \partial t$ et forte de $u_{\delta t_j}$ vers u dans $L^2(\Omega \times (0, T))$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} u_{\delta t_j} \, dx \, dt & \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \, dt, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_{\delta t_j}}{\partial t} u \, dx \, dt & \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \, dt. \end{aligned}$$

En plus, puisque nous avons $g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) \rightarrow g(v)$ p.p et $g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du|^2 \leq |Du|^2$, nous appliquons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour avoir :

$$\int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du|^2 \, dx \, dt \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} g(v) |Du|^2 \, dx \, dt.$$

Nous en déduisons alors :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du_{\delta t_j} - Du|^2 \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} g(v) |Du|^2 \, dx \, dt.$$

Utilisons l'équation (5.36) en se servant de la densité de $C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T))$ dans $H^1(\Omega \times (0, T))$, et en

remplaçant ϕ par u , il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{\Omega} g(v) |Du|^2 \, dx \, dt,$$

d'où

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-\delta t_j} v_{\delta t_j}) |Du_{\delta t_j} - Du|^2 \, dx \, dt = 0$$

et comme nous avons l'inégalité :

$$g(M') \int_0^T \int_{\Omega} |Du_{\delta t_j} - Du|^2 \, dx \, dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} g(\tau^{-h_j} v_{\delta t_j}) |Du_{\delta t_j} - Du|^2 \, dx \, dt$$

nous obtenons enfin, la convergence forte (5.13).

Finalement, à une sous suite près, nous supposons que $Du_{\delta t_j}(x, t) \rightarrow Du(x, t)$ p.p dans $\Omega \times (0, T)$ et par continuité de F_M , nous obtenons aussi que $F_M(|Du_{\delta t_j}|^2) \rightarrow F_M(|Du|^2)$ p.p. dans $\Omega \times (0, T)$. Ceci prouve que v est solution de (5.2). Ainsi nous achevons la preuve du théorème. \square

Chapitre 6

Discrétisation et application

6.1 Discrétisation

Dans cette section, nous allons discrétiser, en espace, le système “approximation” de (5.1)-(5.2), que nous avons défini par :

$$\frac{u_{\delta t}^{n+1} - u_{\delta t}^n}{\delta t} = \operatorname{div}(g(v_{\delta t}^n)Du_{\delta t}^{n+1}) \quad \frac{\partial u_{\delta t}^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{v_{\delta t}^{n+1} - v_{\delta t}^n}{\delta t} = F_M(|Du_{\delta t}^{n+1}|^2) - v_{\delta t}^{n+1}. \quad (6.2)$$

Pour celà, nous supposons que l'image initiale u_0 est de taille $N \times N$ et que la discrétisation en espace est faite avec un pas $h = 1/N$.

Dans toute la suite, nous allons noter par $u_{i,j}^n$ (resp. $v_{i,j}^n$) l'approximation de u (resp. de v) au point (ih, jh) ($0 \leq i, j \leq N$) à l'échelle $t = n \delta t$. Pour la discrétisation des opérateurs divergence et gradient, nous allons utiliser des décentrages différents de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(w_1, w_2) &= h^{-1}(\Delta_-^x w_1 + \Delta_-^y w_2), \\ Dw &= h^{-1}(\Delta_+^x w, \Delta_+^y w), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_+^x w &= w_{i+1,j} - w_{i,j}, & \Delta_-^x w &= w_{i,j} - w_{i-1,j}, \\ \Delta_+^y w &= w_{i,j+1} - w_{i,j} & \text{et} & \quad \Delta_-^y w = w_{i,j} - w_{i,j-1}. \end{aligned}$$

L'approximation du terme $\operatorname{div}(g(v)Du)$ au point (ih, jh) et à l'échelle $t = n \delta t$ est alors donnée par :

$$\frac{1}{h^2} \left(\Delta_-^x (g(v_{i,j}^n) \Delta_+^x u_{i,j}^n) + \Delta_-^y (g(v_{i,j}^n) \Delta_+^y u_{i,j}^n) \right).$$

Ainsi (6.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} &= \frac{1}{h^2} \left\{ g(v_{i,j}^n)(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) - g(v_{i-1,j}^n)(u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + g(v_{i,j}^n)(u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}) + g(v_{i,j-1}^n)(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}) \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nous traduisons la condition de Neumann homogène par :

$$\begin{aligned} u_{i,0}^{n+1} - u_{i,1}^{n+1} &= 0, & u_{i,N-1}^{n+1} - u_{i,N}^{n+1} &= 0, & \text{pour } 0 \leq i \leq N, \\ u_{0,j}^{n+1} - u_{1,j}^{n+1} &= 0, & u_{N-1,j}^{n+1} - u_{N,j}^{n+1} &= 0, & \text{pour } 0 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

La discrétisation de l'équation (6.2) dépend uniquement de celle de $Du_{\delta t}^{n+1}$. Pour cela nous proposons que celle ci soit invariante pour rotation, pour ne pas ajouter une anisotropie supplémentaire à l'équation. Ainsi nous écrivons :

$$\tilde{D}w = h^{-1}(\Delta^x w, \Delta^y w),$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta^x w &= (1 + 2^{\frac{1}{2}})^{-1} \left\{ (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) + 2^{-\frac{1}{2}}(w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) + 2^{-\frac{1}{2}}(w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1}) \right\}, \\ \Delta^y w &= (1 + 2^{\frac{1}{2}})^{-1} \left\{ (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) + 2^{-\frac{1}{2}}(w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1}) + 2^{-\frac{1}{2}}(w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}) \right\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons trouver une discrétisation semblable dans [ALM92] et [NS92].

Un réarrangement des membres de droite de (6.3), nous permet de réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\delta t} = \frac{1}{h^2} \left\{ \alpha_n u_{i,j}^{n+1} + \beta_n u_{i+1,j}^{n+1} + \gamma_n u_{i-1,j}^{n+1} + \beta_n u_{i,j+1}^{n+1} + \rho_n u_{i,j-1}^{n+1} \right\}. \quad (6.4)$$

Ceci montre que (6.3) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + h^{-2} A(v^n) u^{n+1} = 0,$$

où $A(v^n)$ est une matrice bande tridiagonale par blocs, définie positive. La matrice est donc inversible [Cia82].

En ce qui suit, nous présentons une version discrète du principe du maximum et une propriété décrivant la monotonie des extrémums locaux stricts.

Lemme 17. *Pout tout $n > 0$ et pour tout (k, l) , $0 \leq k, l \leq N$, nous avons :*

$$\min_{i,j} u_{i,j}^0 \leq \dots \leq \min_{i,j} u_{i,j}^n \leq u_{k,l}^{n+1} \leq \max_{i,j} u_{i,j}^n \leq \dots \leq \max_{i,j} u_{i,j}^0, \quad (6.5)$$

En particulier, si $u_{k,l}^{n+1}$ est un point de maximum local strict (resp. minimum local strict) de

$(u_{i,j}^{n+1})$ alors

$$u_{k,l}^{n+1} < u_{k,l}^n \quad (\text{resp. } u_{k,l}^{n+1} > u_{k,l}^n). \quad (6.6)$$

PREUVE. Soit $u_{k,l}^{n+1}$ un point maximum global de $(u_{i,j}^{n+1})$, alors en particulier il vérifie les inégalités :

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{n+1} - u_{k+1,l}^{n+1} &\geq 0, & u_{k,l}^{n+1} - u_{k-1,l}^{n+1} &\geq 0, \\ u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l+1}^{n+1} &\geq 0, & \text{et } u_{k,l}^{n+1} - u_{k,l-1}^{n+1} &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Introduisons ces inégalités dans (6.3), en rappelant que $g > 0$, nous obtenons alors :

$$u_{k,l}^{n+1} \leq u_{k,l}^n,$$

et nous en déduisons que :

$$\max_{i,j} u_{i,j}^{n+1} \leq \max_{i,j} u_{i,j}^n \leq \dots \leq \max_{i,j} u_{i,j}^0.$$

De la même manière nous prouvons la partie “min” de (6.5), en considérant $u_{k,l}^{n+1}$ un point minimum global de $(u_{i,j}^{n+1})$. Aussi, nous prouvons (6.6) en utilisant le même raisonnement et en remarquant que les inégalités (6.7) deviennent strictes. \square

6.2 Application

Dans les exemples que nous allons montrer, nous avons utilisé comme pas temporel $\delta t = 0.1$ et choisi d'évoluer les images au échelles 1, 5 et 10, ce qui correspond au nombres d'itérations 5, 125 et 500.

Pour chaque test nous affichons l'image résultat $u(\cdot, t)$ ainsi que l'image $v(\cdot, t)$ sur laquelle un $\text{Gamma} = 0.3$ est appliqué puis inversée. En d'autres termes, pour v nous affichons la fonction : (v prend ses valeurs dans $[0, \max v]$)

$$\max v \left\{ 1 - \left(\frac{v(x, t)}{\max v} \right)^{0.3} \right\}. \quad (6.8)$$

Nous comparons aussi chaque $v(\cdot, t)$ à l'image des bords extraits à l'aide du filtre du Canny à l'échelle $\sigma = \sqrt{2t}$. Pour que cette comparaison soit juste, dans les images du filtre de Canny, nous avons pénétré chaque point d'un bord extrait par la valeur de son gradient, puis nous avons appliqué un $\text{Gamma} = 0.3$ et inversé l'image en appliquant la formule (6.8).

La figure 6.1 représente une forme noir sur fond blanc contenant des zones de fortes courbures. L'image originale (en haut à gauche) a été obtenue en ajoutant un bruit gaussien de variance 30 à l'image initiale. Ce test sur un exemple d'image synthétique à pour but de montrer la capacité de débruitage de l'algorithme, la stabilité des bords extraits (visible en comparant les planches 6.2 et 6.3) et surtout sa préservation des zones à fortes courbures.

Les images originales des planches 6.4 et 6.7 ainsi que l'image 6.10 sont naturellement bruitées. Nous remarquons que pour des images naturelles, l'échelle 10 apparaît un peu fort comme échelle de restauration. Par exemple, on peut visualiser le bord inférieur droit du visage dans 6.4, qui est

initialement faiblement contrasté, est qui devient complètement lissé à l'échelle 10, ou bien la transcription "LACORNOUILLE" dans 6.7 qui devient illisible à l'échelle 10.

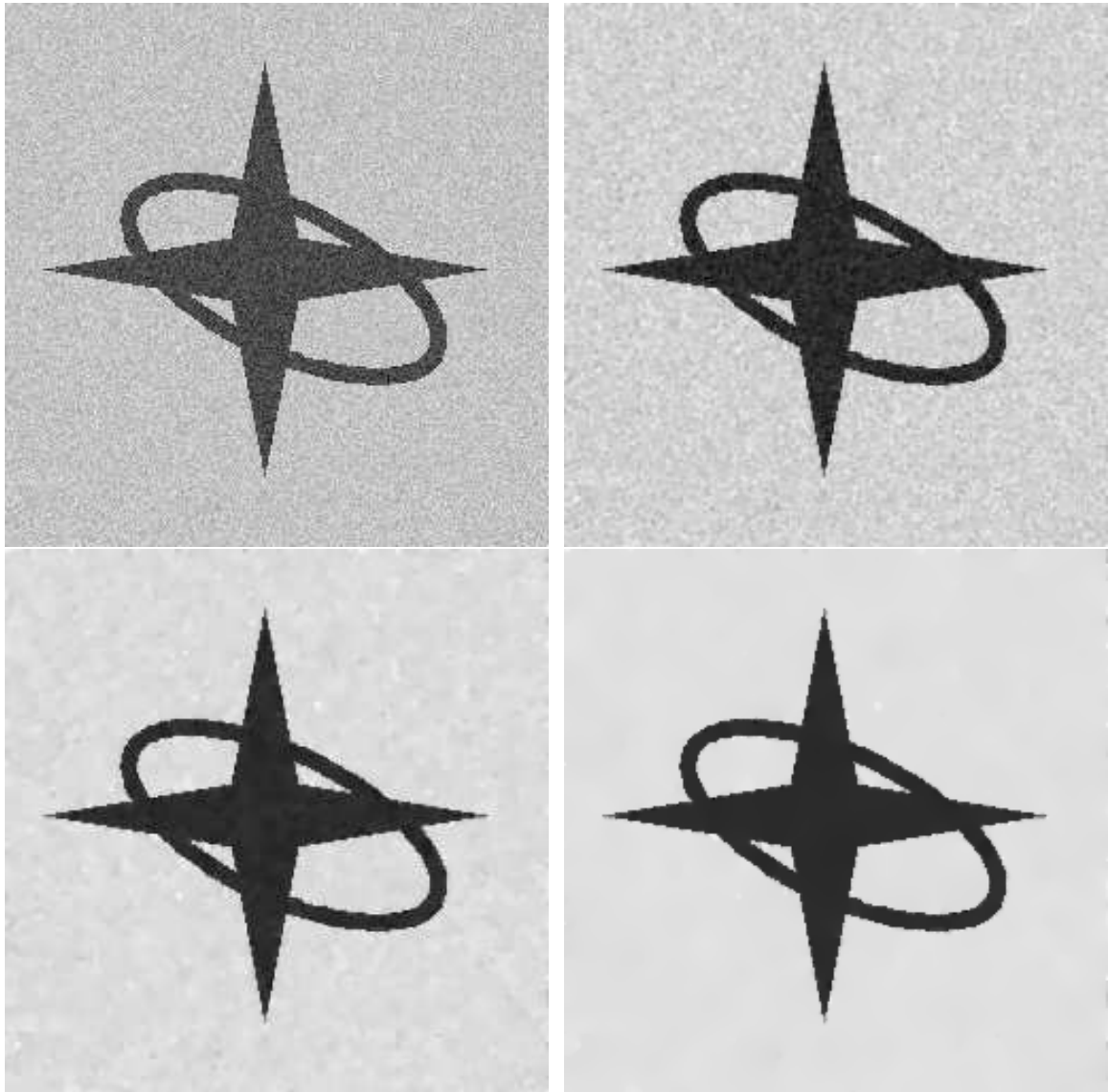


FIG. 6.1 – En haut : à gauche l'image originale, à droite u à l'échelle 1. En bas : à gauche u à l'échelle 5, à droite u à l'échelle 10.

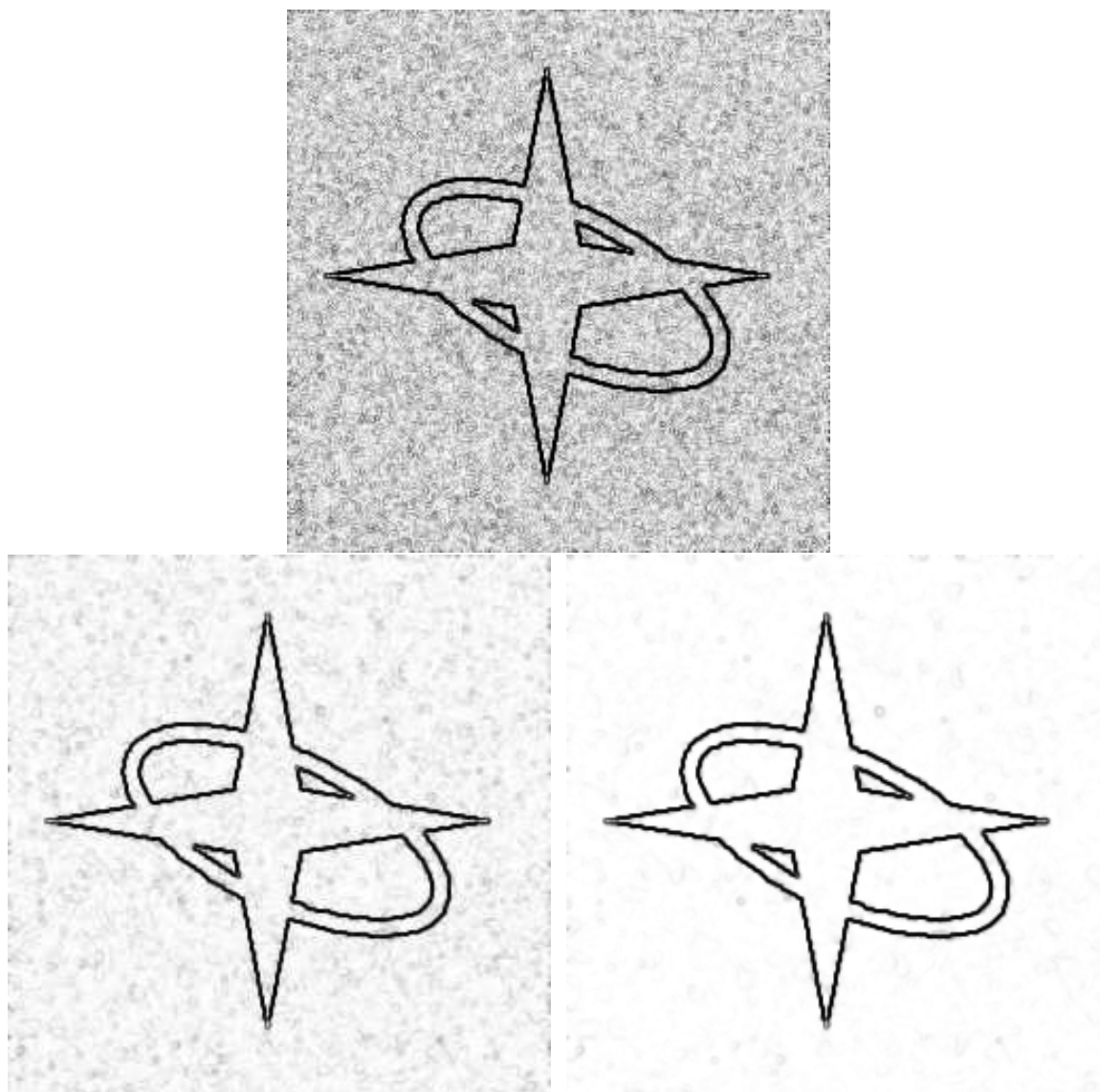


FIG. 6.2 – En haut : v à l'échelle 1. En bas : à gauche v à l'échelle 5, à droite v à l'échelle 10.

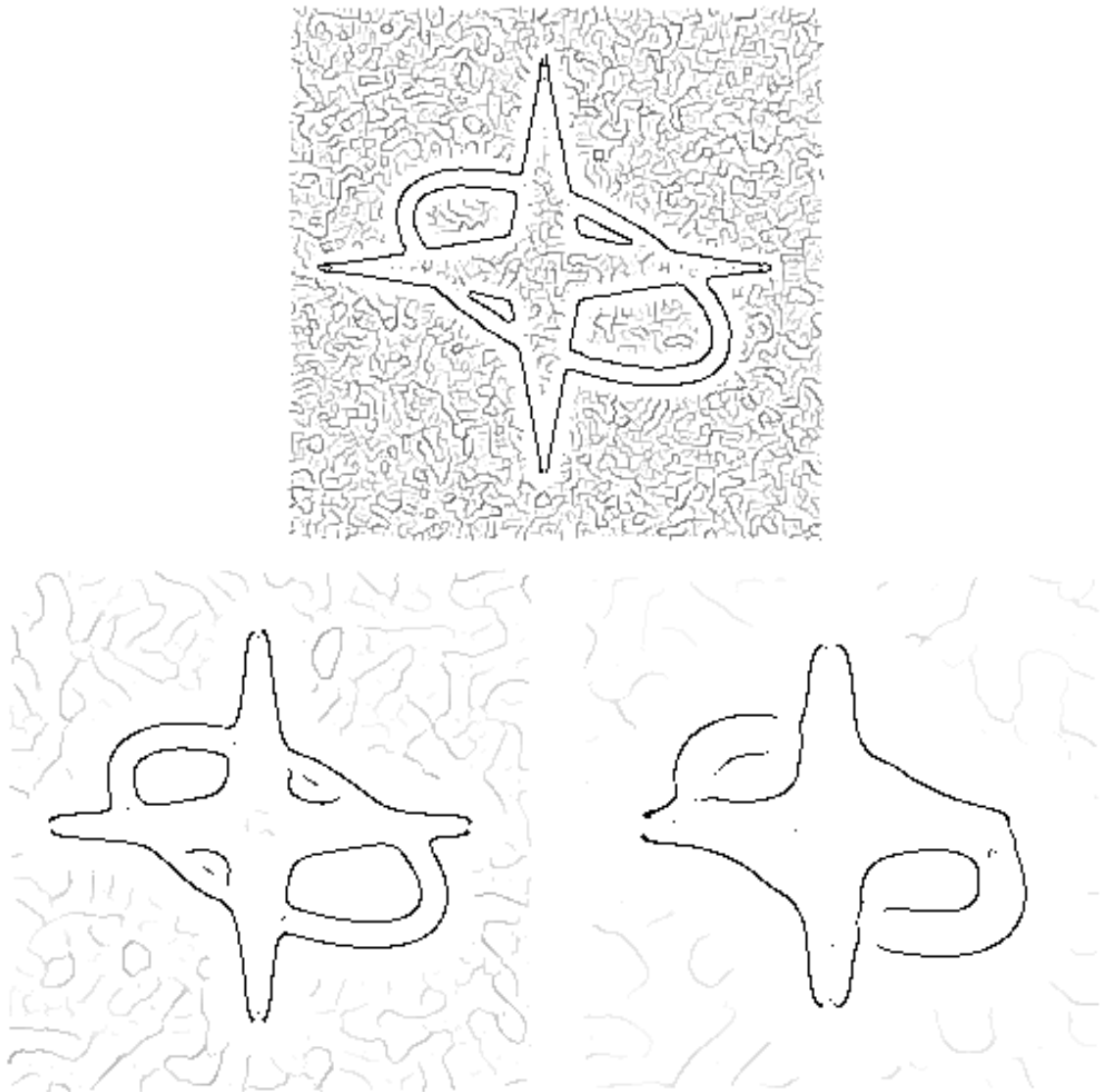


FIG. 6.3 – Les bords extraits à l'aide du filtre de *Canny*, en haut : à l'échelle 1, en bas : à gauche à l'échelle 5, à droite à l'échelle 10.



FIG. 6.4 – En haut : à gauche l'image originale, à droite u à l'échelle 1. En bas : à gauche u à l'échelle 5, à droite u à l'échelle 10.



FIG. 6.5 – En haut : v à l'échelle 1. En bas : à gauche v à l'échelle 5, à droite v à l'échelle 10.



FIG. 6.6 – Les bords extraits à l'aide de l'algorithme de Canny aux échelles : 1, 5 et 10.



FIG. 6.7 – Même disposition que sur les figures 6.4.

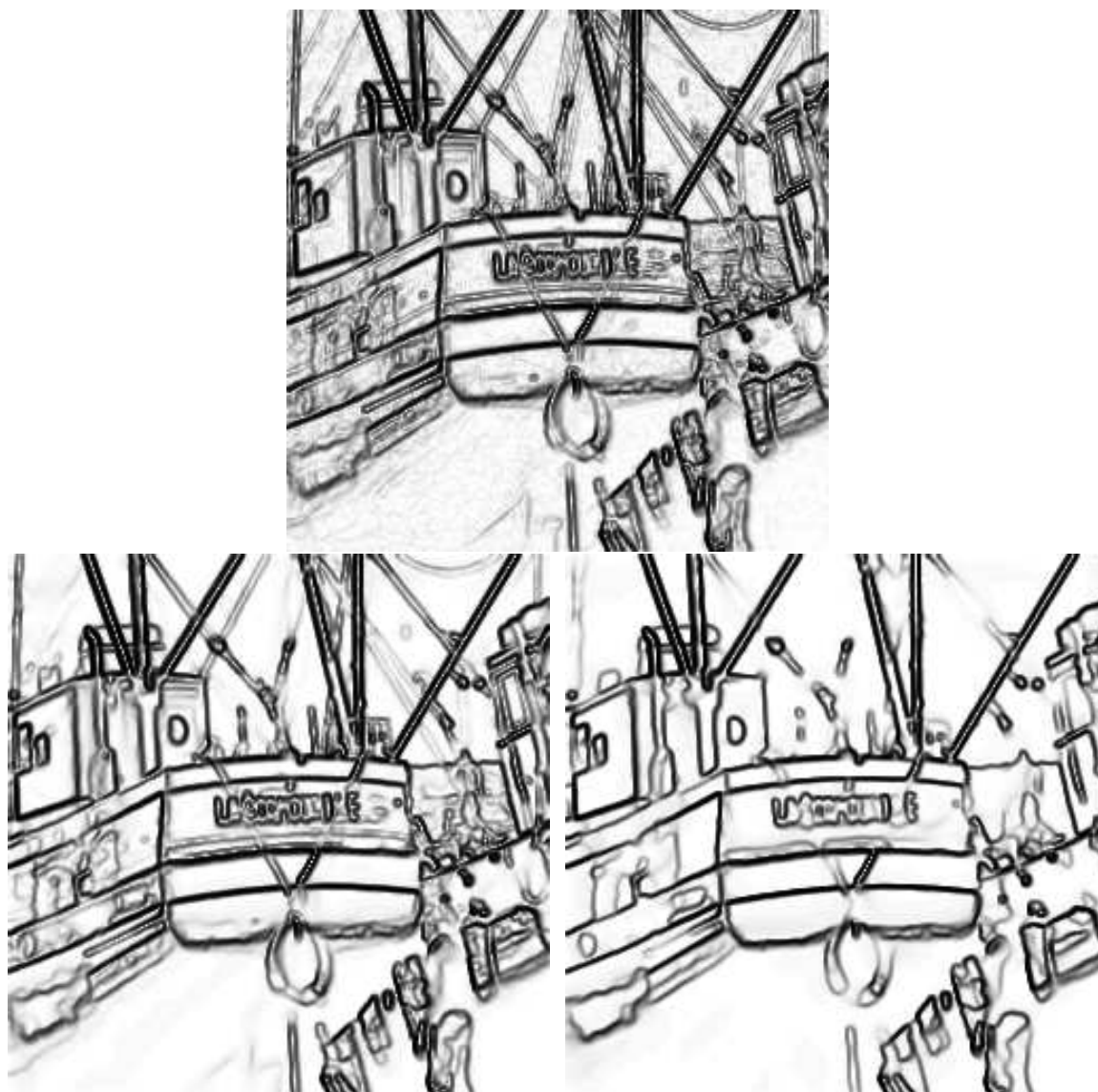


FIG. 6.8 – Même disposition que sur les figures 6.5.

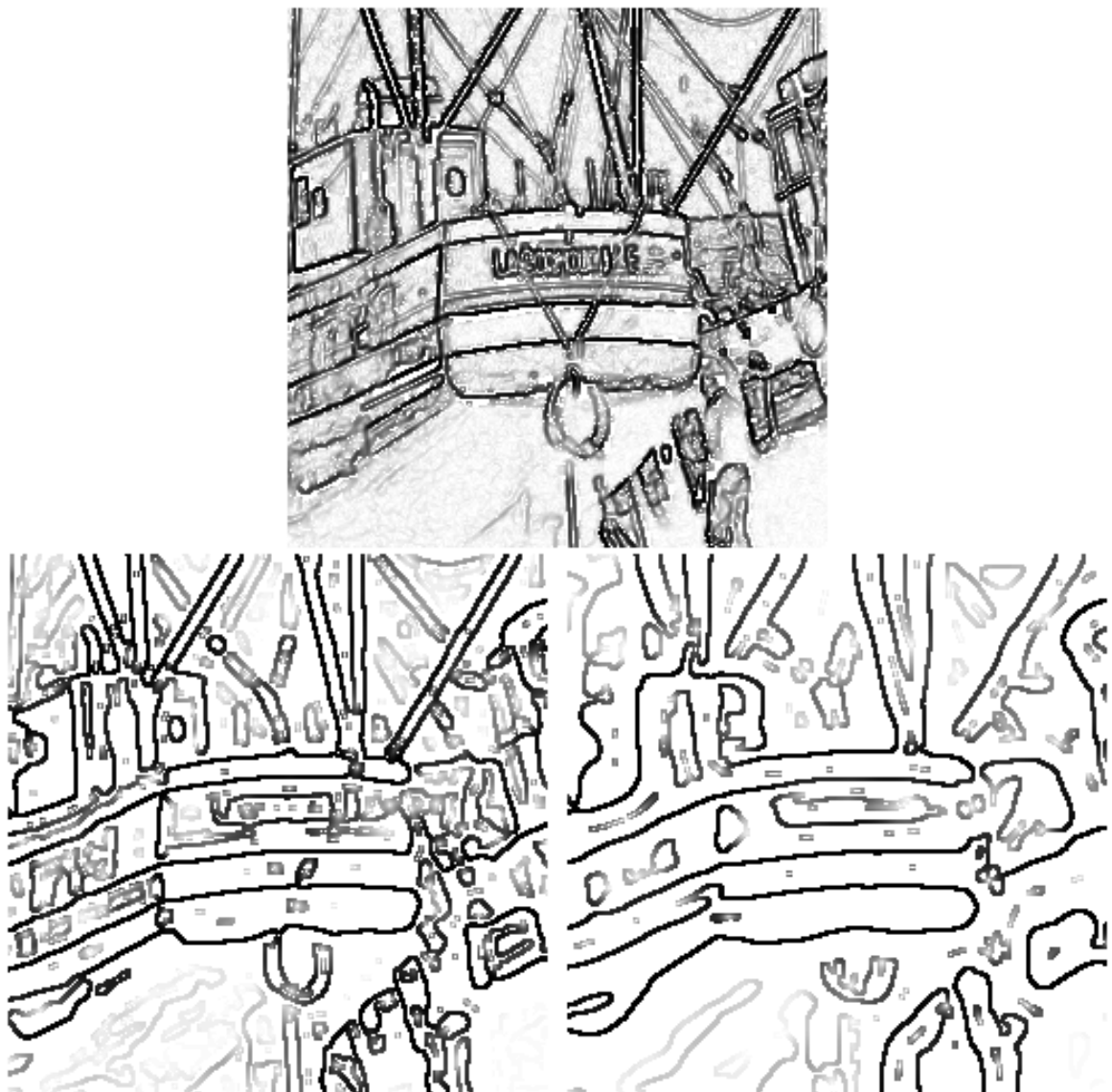


FIG. 6.9 – Même disposition que sur les figures 6.6.



FIG. 6.10 – “Vue de Venise” de Canaletto.



FIG. 6.11 – u à l'échelle 5 de 6.10.



FIG. 6.12 – *v* à l'échelle 5 de 6.10.

Deuxième Partie
Agrandissement d'images

Chapitre 7

État de l'Art

7.1 Introduction

Motivé par une multitude d'applications, le problème d'agrandissement d'image occupe une place très importante dans l'univers du traitement d'image. Avec l'essor du multimédia, l'utilisation des images ou des séquences d'images est devenue chose courante. Malheureusement ces applications subissent des contraintes de capacité de stockage ou de débit de transmission. L'agrandissement d'image est alors une bonne alternative pour compenser l'influence de ces contraintes sur la qualité des images. Dans des domaines comme l'imagerie médicale, on a souvent besoin d'agrandir une image pour accéder à ses détails, ou simplement pour avoir plus de confort visuel. Les photocopieuses sont également souvent équipées d'une fonction d'agrandissement. L'agrandissement d'image intervient aussi d'une manière déterminante dans l'imagerie satellite.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les méthodes d'agrandissement d'image, les plus connues, tout en apportant un œil critique sur leurs performances. Mais tout d'abord, rappelons quelques notions essentielles de l'analyse de Fourier.

7.2 Représentation fréquentielle d'une image

Le domaine de représentation habituel d'une image est le domaine spatial. C'est celui qui nous délivre le plus d'information sur le contenu d'une image, c'est aussi celui auquel notre œil est sensible. Le domaine fréquentiel, dans lequel une image est représentée par un ensemble de fréquences, s'avère très complémentaire du domaine spatial. Cette représentation supplémentaire permet de mettre en œuvre plus facilement certains traitements, à l'aide de l'analyse de Fourier.

L'analyse de Fourier consiste à représenter une image en niveau de gris $f(x, y)$, sous forme d'un ensemble de fréquence à l'aide de la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy.$$

Inversement, le passage du domaine fréquentiel au domaine spatial est fait à l'aide de la transformée de Fourier inverse :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv.$$

En pratique, la représentation fréquentielle d'une image tient compte de sa discrétisation et du fait que son support est fini. Pour une image de taille $(N \times N)$:

$$\widehat{f}(u, v) = \sum_{x,y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(ux+vy)},$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{u,v=0}^{N-1} \widehat{f}(u, v) e^{\frac{2\pi i}{N}(ux+vy)}.$$

Le transformée de Fourier admet des propriétés remarquables qui justifient son utilisation abondante. Les trois essentielles sont ses propriétés de linéarité, d'échelle et de convolution :

$$\text{Linéarité : } \widehat{\lambda f + \mu g} = \lambda \widehat{f} + \mu \widehat{g} \quad (7.1)$$

$$\text{Échelle : } \widehat{f(\lambda x)} = \lambda^{-1} \widehat{f}(\lambda^{-1} u) \quad (7.2)$$

$$\text{Convolution : } \widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g} \quad \text{et} \quad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \quad (7.3)$$

La propriété de convolution est particulièrement intéressante pour l'étude des filtres, puisque la convolution dans l'un des espaces est équivalente à une multiplication dans l'autre. En d'autres termes l'action d'un filtre sur un signal, qui n'est pas toujours intuitive dans le domaine spatial, se traduit par une multiplication de ses fréquences en atténuant ou en renforçant leur amplitude.

En général, pour apprécier l'information que contient le spectre fréquentiel, on s'intéresse à son spectre d'amplitude :

$$|\widehat{f}(u, v)| = \left(\text{Re}(\widehat{f}(u, v))^2 + \text{Im}(\widehat{f}(u, v))^2 \right)^{1/2}.$$

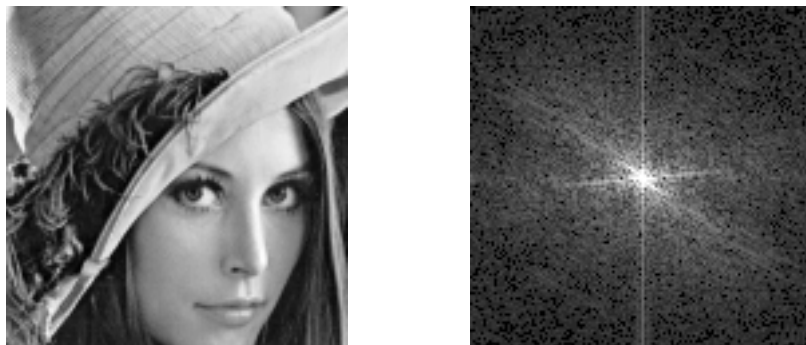


FIG. 7.1 – Image et son spectre.

L'observation principale qui se dégage du spectre de la figure 7.1, est la linéarité des traces qui y figurent. Elles correspondent aux orientations principales de l'image, comme par exemple le bas du

chapeau pour lequel les traces sont orthogonales.

7.3 Agrandissements par projection linéaire

Dans cette section, nous allons parcourir les méthodes d'agrandissement par projection linéaire. Mais tout d'abord, présentons un formalisme commun à ces méthodes.

Supposons que l'on veuille effectuer un agrandissement linéaire de taille $a \in \mathbb{N}/\{0\}$, que nous notons par Z^a , sur une image discrète bornée et à support fini,

$$u = \sum_{m,n} u_{m,n} \delta^{m,n},$$

où $\delta^{m,n}$ est la fonction (ou la mesure) de Dirac au point (m, n) . La linéarité de Z^a implique :

$$Z^a(u)(x, y) = \sum_{m,n} u_{m,n} Z^a(\delta^{m,n})(x, y).$$

Cette expression montre que tout agrandissement linéaire Z^a s'interprète comme un opérateur de projection de l'image discrète réduite dans l'espace de fonctions engendré par $\{Z^a(\delta^{m,n}), m, n \in \mathbb{Z}\}$. En utilisant la propriété $Z^a(\cdot)(x, y) = Z^1(\cdot)(\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$, et en supposant que l'opérateur Z^1 est invariant par translation dans \mathbb{Z}^2 , l'agrandissement se réécrit :

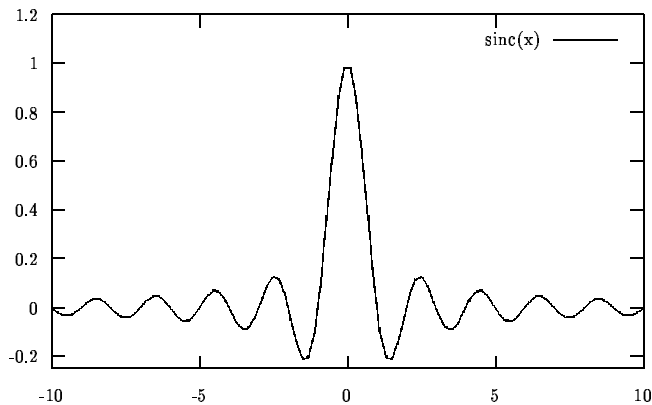
$$Z^a(u)(x, y) = \sum_{m,n} u_{m,n} Z^1(\delta^{0,0})(\frac{x}{a} - m, \frac{y}{a} - n). \quad (7.4)$$

Ainsi le choix d'un agrandissement linéaire Z^a , se réduit au choix de la fonction $Z^1(\delta^{0,0})$. Dans le reste de ce paragraphe nous allons présenter et discuter les différents choix de la fonction $Z^1(\delta^{0,0})$ qui existent dans la littérature.

Du point de vue fréquentiel, l'augmentation du nombre d'échantillons d'une image est étroitement liée à l'extrapolation du spectre de sa transformée de Fourier vers les hautes fréquences. Selon la théorie d'échantillonnage de Shannon, un signal continu peut être complètement reconstruit à partir d'un échantillon, si la fréquence de ce dernier est deux fois supérieur à la plus grande fréquence contenue dans le signal, connue sous le nom de "fréquence de Nyquist". Une fois cette condition vérifiée, une méthode relativement simple, le *zero-padding*, permet de reconstruire le signal, en préservant exactement son contenu fréquentiel initial. Il s'agit d'extrapoler le spectre par la constante 0.

Le théorème suivant présente le lien qui existe entre la méthode du *zero-padding* et le formalisme des méthodes de projection, que nous avons présenté ci-dessus :

Théorème 8. (Shannon/ Whittaker) Soient w une image bornée définie dans $\{0, \dots, N\}^2$, a un entier non nul et w_a définie dans $\{0, \dots, aN\}^2$, la transformée de Fourier inverse de \hat{w} élargie par

FIG. 7.2 – La fonction *sinus Cardinal*.

des zéros sur $\{-aN/2, \dots, aN/2\}^2$, alors

$$w_a(x, y) = \sum_{m,n=0}^{N-1} w(m, n) h\left(\frac{x}{a} - m, \frac{y}{a} - n\right),$$

avec

$$h(s, t) = \frac{1}{N^2} \cos\left(\frac{\pi(s+t)}{N}\right) \frac{\sin \pi s}{\sin \pi \frac{s}{N}} \frac{\sin \pi t}{\sin \pi \frac{t}{N}}.$$

Remarquons que quand N vers l'infini, le résultat du théorème 8 devient :

$$w_a(x, y) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} w(m, n) \tilde{h}\left(\frac{x}{a} - m, \frac{y}{a} - n\right),$$

avec $\tilde{h}(s, t) = \text{sinc}(\pi s) \cdot \text{sinc}(\pi t)$, où sinc est le sinus cardinal défini par $\text{sinc}(s) = \sin(s)/s$.

Dans la figure 7.2 qui illustre la fonction \tilde{h} , nous remarquons que \tilde{h} s'annule pour toutes les valeurs entières de x sauf en 0 où la fonction vaut 1. La méthode du *zero-padding* est donc bien une méthode d'interpolation, puisqu'elle préserve les pixels de l'image originale.

Malheureusement, la méthode du *zero-padding* présente un inconvénient majeur. La création artificielle d'un bord autour du spectre initial entraîne un effet d'oscillation dans l'image, classiquement connu sous le nom d'effet de Gibbs. Cet effet est essentiellement dû à l'aspect oscillatoire du noyau \tilde{h} , qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$. En d'autres termes, un pixel interpolé dans une région homogène est directement influencé par les bords avoisinants. Ainsi les bords, qui présentent des variations élevées en niveau de gris, sont répercutés sur leurs voisinages (cf. figure 7.4).

Une solution pour diminuer l'effet d'oscillation des bords, est d'augmenter la vitesse de convergence vers zéro de la fonction d'interpolation h . Pour cela, différentes approches ont été proposées

dans la littérature. Yaroslavsky remplace la fonction \tilde{h} par une combinaison de fonctions sinus cardinal en opérant un léger décalage de phase pour que la fonction d'interpolation résultante converge plus rapidement vers zéro [Yar97]. Une autre approche proposée par Brouaye [Bro92] consiste à décomposer le signal avec des fonctions orthogonales de type ondelettes, qui ont la propriété de converger rapidement vers zéro, plutôt qu'avec des sinusoides.

Au détriment de la qualité de la préservation des fréquences, les méthodes d'interpolation avec des fonctions polynomiales à support compact ont comme principal atout, la localité. C'est effectivement cette propriété qui fait défaut à la méthode du *zero-padding*.

Utilisant la séparabilité en dimension 2, ci-dessus nous présentons en dimension 1 les fonctions d'interpolation polynomiales de degrés 0, 1, 2 et 3 :

- Interpolation par duplication :

$$\begin{cases} h(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Interpolation linéaire :

$$\begin{cases} h(x) = 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ h(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Interpolation quadratique :

$$\begin{cases} h(x) = -2x^2 + 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h(x) = x^2 - \frac{5}{2}|x| + \frac{3}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}, \\ h(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Interpolation cubique :

$$\begin{cases} h(x) = (A + 2)|x^3| - (A + 3)x^2 + 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ h(x) = A(|x^3| - 5x^2 + 8|x| - 4) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2, \\ h(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'interpolation par duplication est très appréciée dans les applications en temps réel, en raison de sa simplicité extrême et de sa rapidité. Elle a cependant le défaut de générer un effet de pixelisation gênant dans l'image agrandie. Cet effet de pixelisation se traduit, dans le spectre de l'image, par la duplication des basses fréquences dans les hautes fréquences (voir figure 7.4). L'interpolation linéaire à son tour, n'élimine pas complètement cet effet de pixelisation, mais elle introduit en plus un flou visuel assez important dans l'image. L'interpolation quadratique a été étudiée par Dodgson [Dod97]. Elle consiste à interpoler un point en fonction des trois points les plus proches en utilisant trois polynômes de degrés 2. Ces polynômes d'ordre 2 sont définis sur des morceaux décalés de la moitié du pas d'échantillonnage initial. Pour déterminer les coefficients des trois polynômes, Dodgson utilise des contraintes de symétrie, de normalisation et de continuité. A souligner que pour un facteur d'agrandissement égale à 2, les interpolations linéaire et quadratique sont identiques. L'interpolation entre les quatre points les plus proches peut être réalisée à partir de trois polynômes de degré trois [Key81] [Mae88], [PS83]. Les coefficients sont déterminés en fonction des propriétés d'invariance, de symétrie et de régularité imposées sur la fonction d'interpolation.

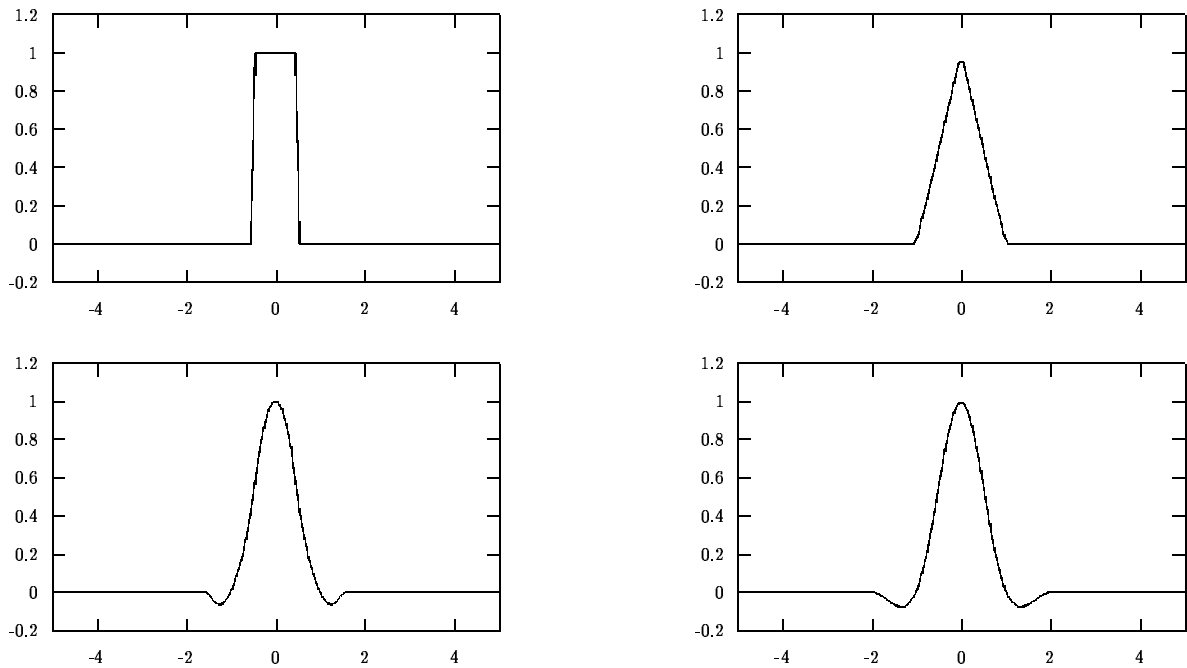


FIG. 7.3 – Du haut en bas et de droite à gauche : 1-Interpolation par duplication, 2-Interpolation linéaire, 3-Interpolation quadratique, 4-interpolation cubique avec $A = -5$.

7.4 Agrandissement par projection non-linéaire

La transformée B-spline [UAE93a], [UAE93b], fournit une représentation régulière d'un signal discret $f(k)$. Le degré de régularité dépend directement du choix d'une fonction polynomiale de base : la fonction B-spline. A l'aide de cette fonction (n fois dérivable), on peut obtenir un signal $(n-1)$ dérivable, qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m)\beta^n(x-m) = c * \beta^n(x)$$

et qui vérifie

$$f(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m)\beta^n(k-m) \quad (7.5)$$

où $c(m)$ représente les coefficients B-spline. La fonction B-spline d'ordre 0, β^0 , est une fonction caractéristique alors que celle d'ordre n est le résultat la convolution n fois de β^0 avec elle même :

$$\beta^n(x) = \beta^{n-1} * \beta^0(x) = \underbrace{\beta^0 * \dots * \beta^0(x)}_{n \text{ fois}}.$$

L'agrandissement de facteur a du signal discret $f(k)$ se fait en deux étapes. Dans un premier temps on calcule les coefficients $c(m)$ à partir de $f(k)$ et d'une fonction B-spline d'ordre n . Puis on détermine

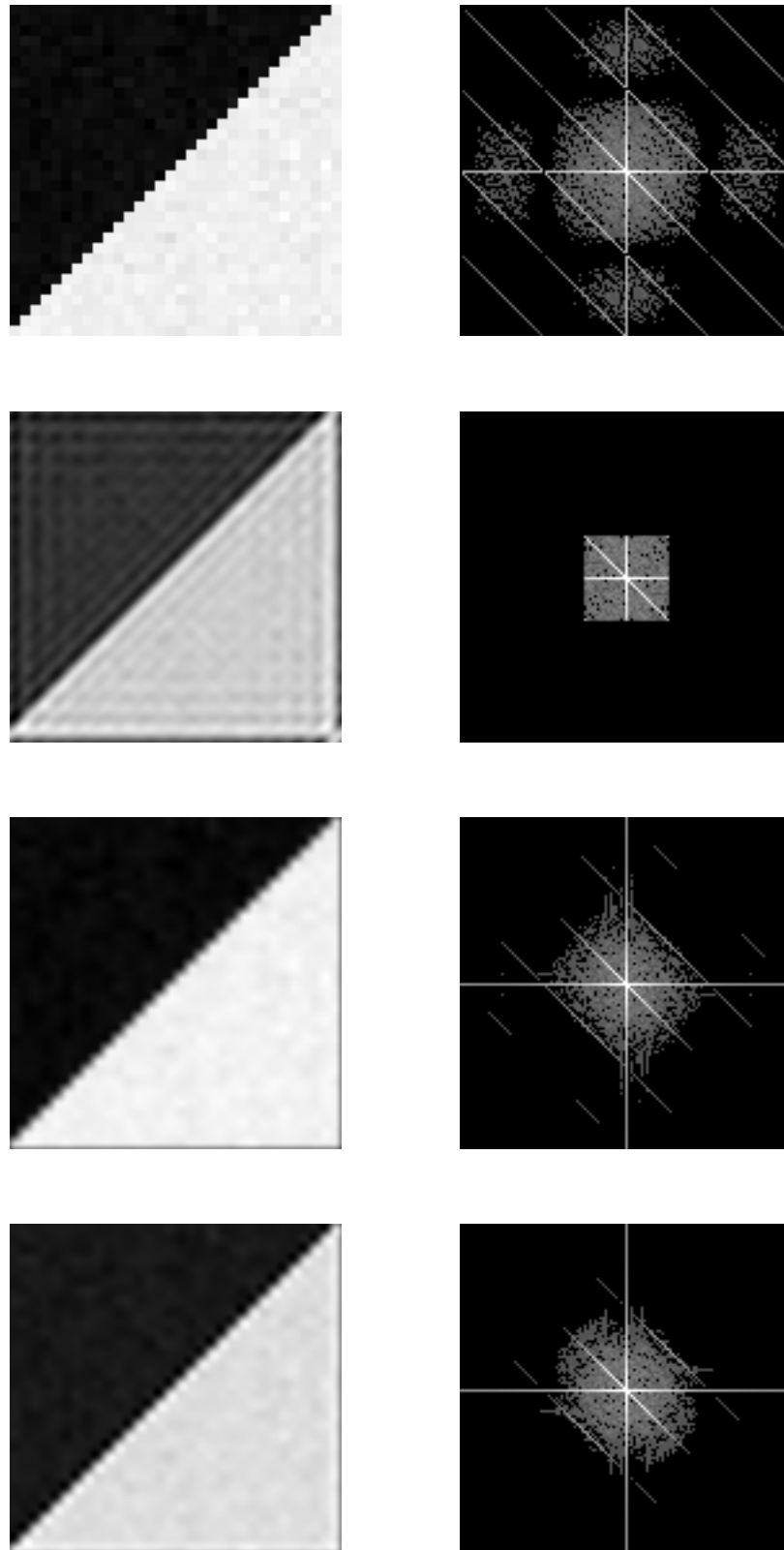


FIG. 7.4 – De droite à gauche : image agrandie, son spectre. Du haut en bas : Agrandissement par duplication, par *zero-padding*, par interpolation linéaire et par interpolation cubique.

le signal interpolé à partir des coefficients $c(m)$ et de la fonction B-spline dilatée d'un facteur a . Les coefficients B-spline sont déterminés en appliquant la propriété (7.3) de la transformée de Fourier à l'équation (7.5) :

$$\widehat{c}(u) = \widehat{f}(u) (\widehat{\beta^n}(u))^{-1}.$$

L'approche la plus simple pour agrandir $f(k)$, d'un facteur a à partir de sa représentation B-spline, consiste à intercaler $a - 1$ zéros entre les coefficients B-spline et à interpoler avec la fonction B-spline dilatée d'un facteur a :

$$f_a(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \beta_a^n(k - am) = C_a * \beta_a^n(k). \quad (7.6)$$

où β_a^n est définie par $\beta_a^n(k) = \beta^n(k/a)$ et C_a par :

$$\begin{cases} C_a(m) = c(m/a) & \text{lorsque } m/a \text{ est entier,} \\ C_a(m) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Unser *et al.* [UAE95] proposent l'alternative suivante : les coefficients B-spline de l'image agrandie sont déterminés de manière à ce que l'erreur, au sens de la norme L^2 , entre la représentation B-spline continue de $f(k)$ et celle de $f_a(k)$, soit minimum. Cela revient à faire une projection orthogonale de la représentation B-spline continue de $f(k)$ sur l'espace des fonctions spline dilatées d'un facteur a . Plus l'ordre de la fonction B-spline est élevé, plus cette approche devient complexe à mettre en œuvre. En fait, l'approche par projection a surtout un intérêt lorsque l'on souhaite réduire une image avec sa représentation B-spline. Elle permet dans ce cas d'éviter l'effet d'aliasing qui pourrait apparaître avec l'approche par rééchantillonnage, illustrée à l'aide l'expression (7.6).

Pour analyser l'interpolation avec la transformée B-spline, Unser *et al.* s'intéressent à la fonction d'interpolation équivalente $h^n(x)$ qui s'applique directement sur le signal original :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) \beta^n(x - m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) h^n(x - k) \quad (7.7)$$

La fonction h^n est appelée *fonction spline cardinale* d'ordre n . Unser *et al.* ont démontré qu'elle converge vers la fonction sinus cardinal lorsque n tend vers l'infini. En particulier, la fonction spline cardinal d'ordre 3 réalise une bonne approximation de la fonction d'interpolation sinus cardinal au voisinage de 0, mais elle décroît beaucoup plus vite vers zéro que la fonction sinus cardinal. Le signal interpolé présente donc moins d'oscillations une fois interpolé avec la transformée B-spline par rapport à la méthode du *zero-padding*.

7.5 Agrandissements par minimisation d'énergie sous contrainte

L'introduction de la variation totale comme mesure de régularité d'une image est due à Rudin *et al.* [ROF92], pour le débruitage des images. Puis, elle a été relaxée et étudiée par A. Chambolle et P. L. Lions [CL97]. Cette mesure a été ensuite adaptée pour l'interpolation des images par F. Guichard et F. Malgouyres [GM98].

L'ensemble des images agrandies (ici on présente le cas simple d'un agrandissement d'un facteur de 2 en dimension 1) qui respectent la contrainte de réduction est donné par :

$$\mathcal{W} = \{w \mid u = QS(w)\}$$

où u est l'image originale de taille N , w est un agrandissement d'un facteur 2 de u , Q symbolise l'opérateur de sous-échantillonnage $Q(v)_i = v_{2i}$ et S représente un filtre de convolution. Dans le cas d'un agrandissement de facteur 2, u et w ont une taille respective N et $2N$, les contraintes de réduction s'écrivent dans le domaine fréquentiel :

$$(\text{pour tout } i \in]-N/2, N/2[), \quad 2\hat{u}_i = \hat{s}_i\hat{w}_i + \hat{s}_{i+N}\hat{w}_{i+N}$$

À travers cette relation, on aperçoit les degrés de liberté dont on dispose pour interpoler l'image de manière à ce que le résultat appartienne à l'ensemble \mathcal{W} . Pour chaque fréquence \hat{u}_i de l'image u , on peut répartir l'information entre deux fréquences \hat{w}_i et \hat{w}_{i+N} de l'image agrandie w . Lorsque toute l'information est placée dans les coefficients basses-fréquences, l'image w obtenue est équivalente à celle obtenue avec la méthode du *zero-padding*. Remarquons aussi que \mathcal{W} est non vide une fois la réponse fréquentielle du filtre S est non nulle sur l'intervalle $]-N/2, N/2[$.

Pour le choix de la "bonne solution" parmi ceux de l'ensemble \mathcal{W} , Guichard *et al.* proposent de choisir l'image agrandie de \mathcal{W} qui minimise une mesure de régularité basée sur la variation totale :

$$E(w) = \int |Dw| dx$$

Cette mesure de régularité a l'avantage d'autoriser des discontinuités dans l'image.

D'un point de vue probabiliste, Schultz et Stevenson [SS92], [SS94] présentent le problème de l'interpolation en modélisant l'image originale avec un champ markovien. Tout d'abord, l'image originale et l'image agrandie sont liées par une contrainte de réduction : la valeur d'un pixel de l'image originale est égale à la moyenne des valeurs associées aux pixels correspondants dans l'image agrandie. L'ensemble des images agrandies qui vérifient cette contrainte est défini par :

$$\mathcal{Z} = \{\vec{z} \mid \vec{u} = D\vec{z}\}$$

où \vec{u} est l'image originale, \vec{z} est l'image agrandie et D est l'opérateur de réduction. Pour choisir une solution particulière dans \mathcal{Z} , les auteurs modélisent l'image agrandie par un champ de Markov avec une distribution de Gibbs, puis ils maximisent une sorte de probabilité *a priori* qui les fait aboutir à un problème de minimisation d'une énergie de telle manière que l'image agrandie recherchée est solution de :

$$\arg \min_{\vec{z} \in \mathcal{Z}} \{U(\vec{z}) = \sum_d V_d(\vec{z})\}$$

où V_d est une fonction potentielle associée à une direction parmi les quatre directions possibles (trois pixels alignés) dans un voisinage 3×3 , défini par :

$$\sum_d V_d(\vec{z}) = \sum_{k,l} \left(\sum_{i=1}^4 \rho(D_{di}^2 z_{k,l}) \right)$$

où $D_{d_i}^2 z_{k,l}$ est la dérivée seconde dans la direction d_i calculée au pixel (k,l) . la fonction ρ est une fonction qui permet de préserver les discontinuités de l'image originale dans l'image agrandie. Elle a également pour intérêt de rendre convexe la fonctionnelle U . En pratique, les auteurs utilisent un algorithme de descente de gradient et prennent comme donnée initiale, l'image agrandie par duplication.

7.6 Mesure de la qualité de l'agrandissement

L'évaluation de la qualité d'un agrandissement reste une tâche difficile. En principe, on ne dispose pas d'une image de référence à partir de laquelle on pourrait effectuer des mesures de comparaison. Dans la plupart des cas, l'estimation visuelle demeure le meilleur moyen d'évaluer la qualité d'un agrandissement. Cette estimation peut néanmoins être aidée par un examen du spectre fréquentiel de l'image agrandie. De cette manière, on peut facilement savoir si une méthode produit des hautes fréquences et si celles-ci sont corrélées avec les basses fréquences, au niveau des bords en particulier. Une bonne méthode d'agrandissement devrait normalement extrapoler le spectre dans les hautes fréquences.

Cependant, cette aide pourtant utile est souvent insuffisante dans le sens où l'interprétation visuelle du spectre n'est pas toujours facile. Par exemple, lorsque l'image possède des structures avec des orientations multiples, on ne distingue pas vraiment de trace spectrale, l'information fréquentielle est donc mélangée. Dans ce cas, les hautes fréquences peuvent être l'expression d'un bruit spatial et pas nécessairement celui d'une amélioration de la résolution.

7.7 Pourquoi un nouveau modèle ?

Dans les sections précédentes, nous avons exposé différentes méthodes d'agrandissement d'image. La méthode du *zéro-padding* préserve exactement les fréquences de l'image originale. Malheureusement, elle produit un effet d'oscillation des bords dans l'image agrandie. Toutefois, nous avons vu que cette opération peut être réalisée de manière équivalente dans le domaine spatial, en interpolant l'image à l'aide de la fonction sinus cardinal. Ensuite, nous avons parcouru les méthodes d'interpolations avec des fonctions polynomiales. Puis nous avons exposé la méthode d'interpolation avec la transformée B-spline. La différence entre chacune de ces méthodes, réside dans le choix de la fonction d'interpolation. En général, ces fonctions sont sélectionnées pour leurs propriétés d'invariance, de symétrie et de régularité.

Le problème essentiel lié aux méthodes d'interpolation est leur caractère isotrope. En effet, dans une image tous les points sont interpolés de la même manière. En particulier, un point dans une zone homogène est interpolé de la même manière qu'un point bord, pourtant la géométrie de l'image est complètement différente entre ces deux zones. Pour interpoler un point bord, il est tout à fait naturel de prendre en considération l'orientation du bord pour ne pas introduire de flou dans l'image. Alors que dans les zones homogènes aucune direction n'est privilégiée, donc une interpolation isotrope est la plus adaptée. Cette absence de critères géométriques fait correspondre les méthodes d'interpolation, par analogie avec la restauration d'images, à la classe des filtres passe-bas.

Dans la méthode du *zéro-padding*, l'absence de critère géométrique met en évidence l'effet d'oscillation et pour la même raison les méthodes d'interpolation avec des fonctions polynomiales introduit

un flou non négligeable au niveau des bords.

Nous avons aussi présenté deux méthodes de minimisation d'énergie. La première méthode minimise la variation totale avec une contrainte fréquentielle. Tandis que la deuxième utilise une énergie de probabilité sous contrainte de réduction spatiale. Bien que ces énergies soient calculées localement, la minimisation ainsi que la balance entre la norme de régularité et la contrainte de réduction se font d'une manière globale. Ce qui n'est pas toujours souhaitable compte tenu de la multitude de structure dans une image.

Un autre inconvénient, est le fait que l'algorithme de descente de gradient associé à la minimisation de la variation totale produit des minimas non globaux. Ceci a pour conséquence, la non unicité de la solution du problème de minimisation. En revanche, F. Malgouyres [Mal99] énonce un résultat d'unicité "faible" qui garantit qu'en un point x , les gradients de deux solutions différentes de classe C^1 en x , ont la même direction et le même sens.

Chapitre 8

Une approche géométrique

Nous nous plaçons dans un cadre plus général que les normes de régularité, classiquement utilisées dans les problèmes d'agrandissement d'image. Ce cadre est celui des équations aux dérivées partielles. Plus précisément, nous proposons une approche locale et multi-échelle dans laquelle notre modèle s'interprète comme un équilibre entre un ou plusieurs opérateurs régularisants, que nous représentons par $\{H_i\}$, et une contrainte de réduction linéaire, que nous notons par CR :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i H_i(t, x, u, Du, D^2u) - CR(u). \quad (8.1)$$

Le choix d'un équilibre entre régularité et contrainte de réduction s'explique par le fait que nous voulons prendre en considération la géométrie de l'image. Et comme on peut le remarquer dans le chapitre précédent, une correction géométrique acceptable de l'image passe d'abord par un relachement de la contrainte de réduction.

Le fait que nous avons choisi de corriger la géométrie de l'image, nous impose quelques restrictions. Tout d'abord une telle correction demande à ce que la donnée initiale soit agrandie uniquement par transformation géométrique. Cela nous permet d'éviter par exemple les problèmes d'introduction du flou dus à l'interpolation linéaire et d'oscillations des bords dus à la méthode du *zero-padding*. La deuxième restriction est qu'il faut avoir une connaissance a priori sur la déformation géométrique qu'a fait subir l'agrandissement à l'image initiale. Cela nous permet de préciser les actions des opérateurs régularisants $\{H_i\}$. Pour ces raisons, nous choisissons l'agrandissement par duplication comme donnée initiale de (8.1).

Comme il est classique, nous choisissons d'exprimer la contrainte de réduction sous la forme :

$$CR(u) = Pu - u_0, \quad (8.2)$$

où P est un opérateur de projection linéaire qui permet d'envoyer u dans le bon espace, de telle manière à ce que Pu soit comparable à u_0 . Cet espace est l'ensemble des fonctions constantes sur chaque Ω_{ij} , où $\Omega_{i,j}$ est le pavé qui correspond à l'agrandissement du pixel (i, j) de l'image réduite.

Tout naturellement, nous définissons P par :

$$P u(x) = \sum_{i,j} \mathbb{I}_{\Omega_{i,j}}(x) \frac{1}{|\Omega_{i,j}|} \int_{\Omega_{i,j}} u(y) dy, \quad (8.3)$$

où $\mathbb{I}_{\Omega_{i,j}}$ est la fonction caractéristique de $\Omega_{i,j}$.

L'agrandissement par duplication ne fait subir à l'image réduite qu'une déformation géométrique. Au niveau des bords, ces déformations se traduisent par l'introduction de hautes fréquences non corrélées aux basses fréquences initiales de l'image. Cette mauvaise extrapolation du spectre initial peut être corrigée en éliminant l'effet de pixelisation des bords des objets dans l'image. Cela revient à corréliser les hautes fréquences aux basses. Nous affectons le premier opérateur de régularité H_1 à l'action :

Action 1 : Lisser les bords des objets dans l'image. Le but est de retrouver une certaine régularité des bords, semblable à celle d'avant l'agrandissement, tout en préservant leur direction.

L'agrandissement par duplication influe aussi sur les zones homogènes. En effet dans l'image agrandie un effet de quantification et de discontinuité apparaît dans les zones où l'information est régulière dans l'image réduite. L'effet de discontinuité peut apparaître aussi à cause d'un bruit gaussien, qui existe dans l'image réduite. Ces effets se traduisent par l'apparition de hautes fréquences, qui ne sont pas censées être corrélées à des basses fréquences. Ces hautes fréquences sont à atténuer. Nous affectons le deuxième opérateur de régularité H_2 à l'action :

Action 2 : Lisser les zones homogènes de l'image. L'idée est d'éliminer l'effet de quantification et de discontinuité de l'image dans les zones où l'information dans l'image initiale réduite est régulière.

Tout d'abord, nous allons supposer que les actions 1 et 2 peuvent être accomplies par deux filtres T_1 et T_2 . Cette supposition n'est pas hasardeuse car pratiquement toute équation aux dérivées partielles qui possède une interprétation géométrique peut être approchée par des filtres itérés. De plus cette supposition nous permet de procéder d'une manière constructive. Nous allons donc effectuer un choix justifié de ces filtres, à partir desquels nous allons fixer les opérateurs de régularité H_1 et H_2 .

Pour le choix des filtres, nous faisons appel à l'approche axiomatique élaborée par L. Alvarez, F. Guichard, P-L. Lions et J-M. Morel [AGLM93] sur la pyramide visuelle introduite par C. Lopez et J-M. Morel [LM92]. Les auteurs définissent une analyse multi-échelle comme l'application d'un ensemble d'opérateur $\{T_t(\cdot), t \geq 0\}$ à une image f , conduisant à un continuum d'images,

$$u(\cdot, t) = T_t(f). \quad (8.4)$$

Le problème du choix des propriétés de la famille d'opérateurs $(T_t)_{t>0}$, a été traité par la formulation d'un certain nombre d'axiomes d'architecture et d'invariances géométriques qu'une analyse multi-échelle doit respecter :

[1- Récursivité] $T_0(f) = f, T_s \circ T_t(f) = T_{s+t}(f)$ sur \mathbb{R}^2 , pour tout $s, t \geq 0$ et f . Cet axiome

entraîne que $T_{nt}(f)$ peut être calculé en appliquant n fois T_t à f .

- [2- Régularité] $\|T_t(f + hg) - (T_t(f) + hg)\|_\infty \leq Cht$ pour tout $h, t \in [0, 1]$, pour tout f et g , où C dépend de f et de g . Cela impose une certaine continuité sur T_t .
- [3- Localité] $(T_t(f) - T_t(g))(x) = o(t)$ quand $t \rightarrow 0$, pour toutes fonctions régulières f, g et pour tout x telles que $D^\alpha f(x) = D^\alpha g(x)$ pour tout $|\alpha| \geq 0$. Cet axiome affirme que si localement f et g sont assez proches, alors pour t petit, $T_t(f)$ et $T_t(g)$ le sont aussi.
- [4- Comparaison locale] Pour toutes fonctions f et g et pour tout t, x et $r > 0$, si pour tout $y \in B(x, r)$, $f(y) > g(y)$ alors il existe t suffisamment petit tel que $T_t(f) \geq T_t(g)$. Cela signifie que si f est localement plus claire que g , alors cet ordre est préservé pour des échelles assez petites.
- [5- Invariance par translation] $T_t(\tau_h \cdot f) = \tau_h(T_t f)$, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, où $T_t(\tau_h \cdot f)(x) = f(x+h)$. Cela signifie que le filtrage d'une image ne dépend pas de sa localisation dans l'espace.
- [6- Invariance par "shift" de niveau de gris] $T_t(0) = 0, T_t(f + C) = T_t(f) + C$, pour toute fonction f et toute constante C . Cet axiome signifie que deux images f et g sont traitées de la même manière si $f - g = \text{constante}$.

Une fois ces axiomes vérifiés par une analyse multi-échelle, nous avons le résultat suivant, dû à L. Alvarez, F. Guichard, L-P. Lions et J-M. Morel [AGLM93] :

Théorème 9 ([AGLM93]). *Si une famille d'opérateurs $(T_t)_{t>0}$ vérifie les axiomes 1 – 6, alors il existe une fonction H , continue sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ (ou sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) et croissante par rapport au deuxième argument, telle que :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = H(Df(x), D^2 f(x)), \quad (8.5)$$

pour tout $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Pour choisir T_1 , nous faisons appel à l'approche morphologique qui considère qu'un objet dans une image f doit être invariant par changement de contraste strictement croissant. De tels objets sont représentés par les ensembles de niveau supérieur $E_\lambda(f) = \{x/f(x) \geq \lambda\}$ (ou inférieur $E_\lambda(f) = \{x/f(x) \leq \lambda\}$). Les bords d'objets s'identifient donc aux lignes de niveau de f . Mais pour que l'œil humaine interprète une ligne de niveau comme bords d'un objet réel, elle doit apercevoir un contraste suffisamment grand, ce qui n'est pas le cas pour toutes les lignes de niveau. Nous allons donc restreindre l'action de T_1 aux zones qui représentent un contraste important, puisque c'est dans ces zones où l'identification entre lignes de niveau et bords d'objets réels est proche de la réalité.

Nous allons demander au filtre T_1 , qui vérifie déjà les axiomes 1–6, de lisser les bords indépendamment de leur orientation (invariance par isométrie), et de conserver l'ordre d'inclusion des objet au voisinage des bords (invariance morphologique). Ceci se traduit par les axiomes suivants :

[7- Invariance par isométrie] $T_t(R.f) = R.T_t(f)$, pour toute fonction f et pour toute transformation R définie par $(R.f)(x) = f(Rx)$, où R est une transformation orthogonale dans \mathbb{R}^2 .

[8- Invariance morphologique] $T_t(h(f)) = h(T_t(f))$, pour toute fonction f et pour toute fonction croissante h .

En utilisant un résultat de Giga et Goto [Gg92], F. Guichard [Gui94] prouve après un “rescaling” adéquat que, sous les axiomes 1-8 et pour toute fonction f choisie comme dans le théorème 9 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = |Df(x)|G(\text{curv}(f)(x)), \quad (8.6)$$

où G est une fonction croissante et $\text{curv}(f)$ est définie par :

$$\text{curv}(f)(x) = \text{div} \left(\frac{Df}{|Df|} \right)(x),$$

qui représente le courbure de la ligne de niveau $f(x)$ au point x .

Ainsi l'équation aux dérivées partielles associée, s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |Du|G(\text{curv}(u)).$$

Le cas particulier $G(x) = x$, qui correspond au mouvement par courbure moyenne s'avère intéressant dans le sens où il admet les propriétés recherchées pour satisfaire l'action 1. En effet dans ce cas, toute ligne de niveau de $u(\cdot, t)$, que nous représentons ici par une courbe de Jordan $\Gamma(\cdot, s)$ et s représente l'abscisse curviligne, évolue proportionnellement à sa courbure suivant l'équation :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) = \text{curv}(\Gamma(s, t)) \vec{n}(s, t).$$

La courbure en un point $s_0 \in \Gamma$ est égale à l'inverse du rayon ρ du plus grand cercle localement inclus à l'intérieur de Γ et tangent à Γ en s_0 (cf. figure 8.1) . Il est clair que les zones où l'évolution est la plus importante sont les coins puisqu'un coin vérifie $\rho = 0$, par conséquent sa courbure est infinie. Cette propriété est particulièrement adaptée à l'action 1 qui vise à éliminer les coins, créés d'une manière artificielle par l'agrandissement par duplication.

Une autre propriété intéressante du cas $G(x) = x$ est le fait qu'il suffit de quelques itérations pour que toute ligne de niveau de u devienne de classe C^∞ . Quand cette régularité est satisfaite par $\Gamma(\cdot, t)$, l'évolution de sa longueur $L(t)$ est donnée par [GM] :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t) = - \int_0^L t \text{curv}^2(\Gamma(s, t)) ds. \quad (8.7)$$

Ceci montre que plus une ligne de niveau contient de zones de courbure importante ou de coins, plus sa longueur décroît. Cette propriété est exactement adaptée à l'action 1 puisque diminuer la longueur d'une courbe revient à diminuer ses oscillations.

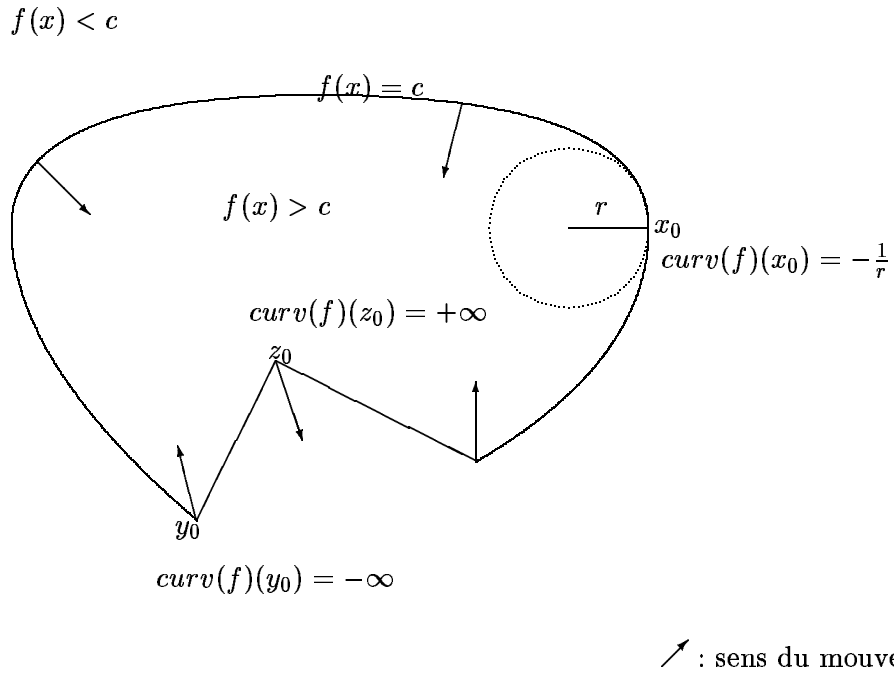


FIG. 8.1 – Mouvement par courbure moyenne de la ligne de niveau $\{f = c\}$.

A travers la formule de la coaire, la variation totale admet une interprétation géométrique :

$$TV(u(\cdot, t)) = \int |Du(x, t)| dx = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Périmètre} (E_\lambda(u(\cdot, t))) d\lambda.$$

Il est aussi prouvé que l'équation du mouvement par courbure moyenne réduit la variation totale, puisque la formule de la coaire, une fois combinée avec (8.7), implique :

$$\frac{\partial TV(u(\cdot, t))}{\partial t} \leq 0.$$

Pour ces considérations, nous choisissons :

$$H_1(Du, D^2u) = |Du| \text{curv}(u) = D^2u \left(\frac{Du^\perp}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|} \right). \tag{8.8}$$

Pour se fixer sur le choix du filtre T_2 , nous remarquons que les agrandissements par interpolation sont particulièrement efficace dans les zones homogènes. Il est donc inutile d'introduire une non-linéarité dans ces zones, puisque la non-linéarité est classiquement liée à la préservation des structures dans l'image. Nous remplaçons alors l'invariance morphologique par :

[8'- Linéarité] $T_t(f + g) = T_t(f) + T_t(g)$, pour toutes fonctions f et g .

Il est classiquement connu que pour toute image f de classe C^2 , si T_t vérifie les axiomes 1 – 8', nous avons (après un "rescaling") :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t} = \Delta f(x). \tag{8.9}$$

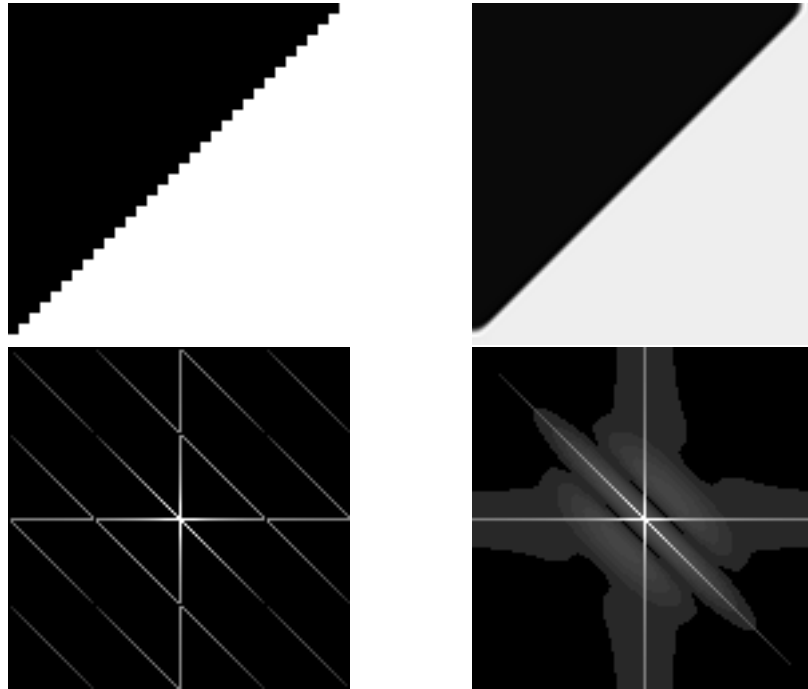


FIG. 8.2 – En haut, à gauche agrandissement par duplication de taille 4, à droite son mouvement par courbure moyenne à l'échelle 4. En bas, leurs spectres respectifs.

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles associée s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(\cdot, 0) = u_0$$

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 2, la solution de cette équation est donnée par :

$$u(x, t) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x),$$

où $G_{\sqrt{2t}}$ est la gaussienne d'écart type $\sqrt{2t}$. Tout d'abord, nous avons une propriété de régularité intéressante, puisque $G_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ garantit que $G_\sigma * u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ même si u_0 n'est que absolument intégrable.

La convolution par une gaussienne admet aussi une propriété fréquentielle intéressante. En effet, comme la transformée de Fourier de G_σ est donnée par :

$$\widehat{G}_\sigma = \exp\left(-\frac{|w|^2}{2\sigma^2}\right),$$

alors la propriété de convolution de la transformée de Fourier, implique :

$$\widehat{G_\sigma * u_0}(w) = \exp\left(-\frac{|w|^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \widehat{u_0}(w).$$

Du fait que $\pm 1/\sigma$ sont les deux points d'inflexion de $s \rightarrow \exp(-\sigma^2 s^2/2)$, nous en déduisons à travers la multiplication de \widehat{u}_0 par \widehat{G}_σ que $1/\sigma$ représente un seuil entre les basses fréquences ($|w| \leq 1/\sigma$) à conserver et les hautes fréquences à atténuer ($|w| \geq 1/\sigma$).

Le choix de σ dépend bien sûr de la taille de l'agrandissement. En effet, dans un agrandissement par duplication d'une taille d , les phénomènes périodiques de périodes supérieures à $d\sqrt{2}$, le diamètre d'un pixel agrandi, ne sont que des duplications de ceux qui existent dans l'image réduite avec des périodes supérieures à $\sqrt{2}$. Par conséquent, les éliminer revient à gommer toute ressemblance entre l'image réduite et l'image agrandie, ce que nous ne voulons pas faire.

Par contre, l'agrandissement par duplication d'une taille d crée d'autres phénomènes périodiques, de périodes inférieures ou égales à $d\sqrt{2}$. Ces périodicités n'existent pas dans l'image réduite, il faut donc les atténuer. Par conséquent nous choisissons $\sigma = d\sqrt{2}$.

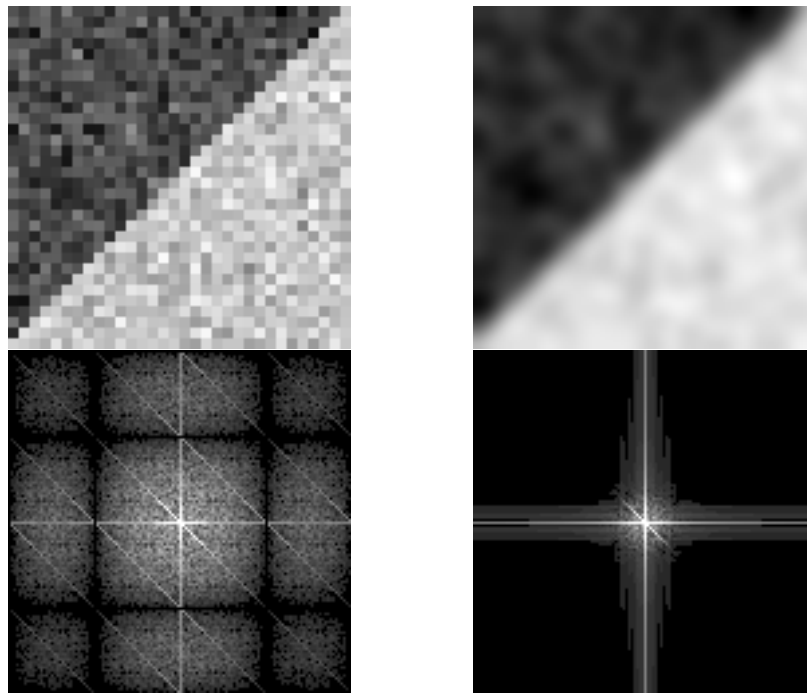


FIG. 8.3 – La même disposition que la figure 8.5, sauf que l'équation de la chaleur remplace le mouvement par courbure moyenne.

Ce point de vue que nous venons d'exprimer est justement celui de la méthode du *zero-padding*, sauf que la différence réside dans la façon dont la coupure fréquentielle est faite. La méthode du *zero-padding* crée une discontinuité dans le spectre qui se traduit par des oscillations dans l'image. Tout simplement parce que la transformée de Fourier inverse de $\mathbb{I}_{[-1,1]}$ est la fonction sinus cardinal, que nous avons illustrée dans la figure 7.2. La multiplication du spectre par une gaussienne permet

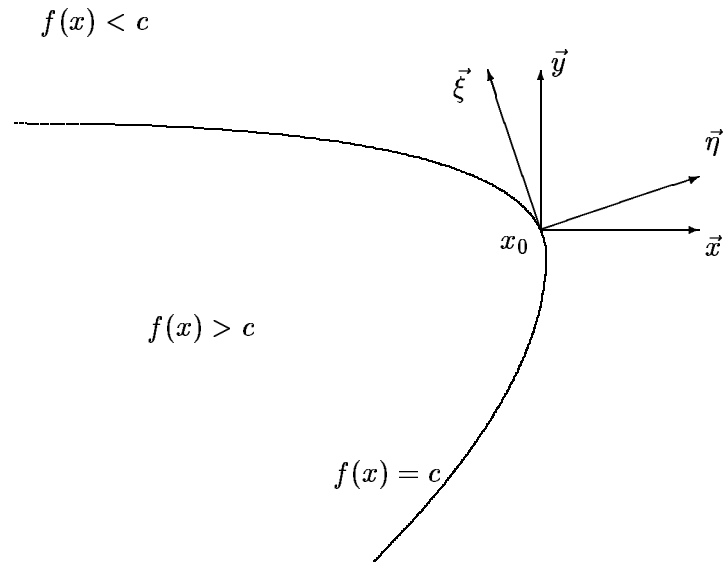


FIG. 8.4 – Changement de repère local : $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{\eta} = (Df/|Df|)(x_0), \vec{\xi} = (Df^\perp/|Df|)(x_0))$.

d'effectuer une coupure fréquentielle continue qui évite d'introduire tout artifice dans l'image.

Nous choisissons, alors :

$$H_2(Du, D^2u) = \Delta u.$$

En résumé, nos opérateurs de régularité introduits dans (8.1) s'écrivent de la manière suivante :

$$\sum_i H_i(t, x, u, Du, D^2u) = \begin{cases} |Du(x, t)| \text{curv}(u)(x, t), & \text{si } x \text{ est un point bord,} \\ \Delta u(x, t) & \text{si } x \text{ est dans une zone homogène.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Pour traduire le fait qu'un point x est un point bord ou appartenant à une zone homogène, nous allons faire appel à la théorie de Malik et Perona [MP87], que nous avons présenté dans le chapitre 3. Ainsi nous réécrivons (8.10) sous la forme :

$$\sum_i H_i = (1 - g(|Du|)) |Du| \text{curv}(u) + g(|Du|) \Delta u, \quad (8.11)$$

où $g(|Du|)$ est exactement comme celle proposée par Malik et Perona. Plus précisément, quand Du est assez grand typiquement un point bord, $g(|Du|)$ est proche de 0 donc l'opérateur du mouvement par courbure moyenne est maintenu en ce point, en revanche le Laplacien est inhibé. Par contre si Du est petit $g(|Du|)$ est proche de 1 donc l'opérateur du mouvement par courbure moyenne est inhibé en ce point, en revanche le Laplacien est maintenu.

En s'appuyant sur l'interprétation géométrique du Laplacien qui, modulo le changement de repère local $((OX, OY) \rightarrow (\eta = Du/|Du|, \xi = Du^\perp/|Du|))$ (figure 8.4), s'écrit :

$$\Delta u = D^2u \left(\frac{Du^\perp}{|Du|}, \frac{Du^\perp}{|Du|} \right) + D^2u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right),$$

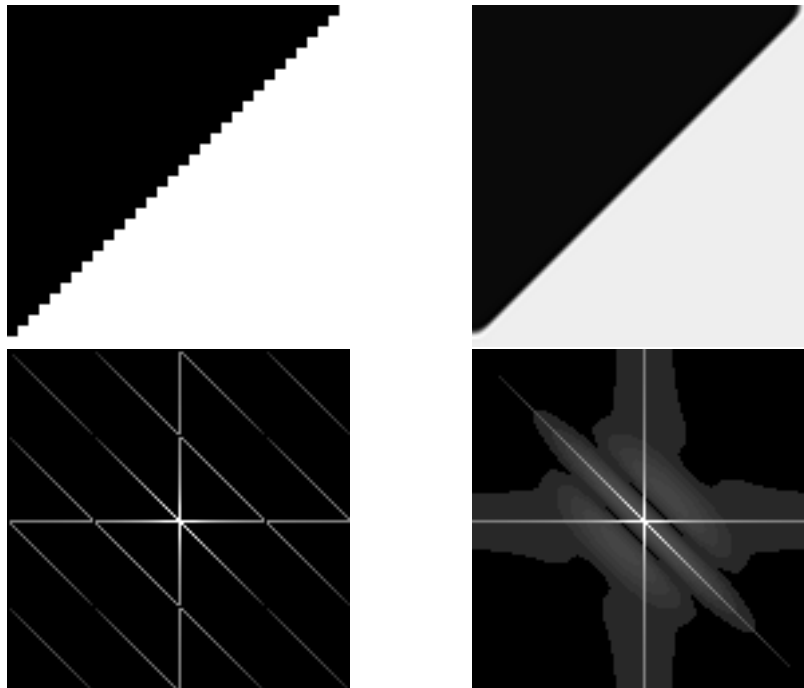


FIG. 8.5 – En haut, à gauche agrandissement par duplication de taille 4, à droite son mouvement par courbure moyenne à l'échelle 4. En bas, leurs spectres respectifs.

nous obtenons une autre écriture de (8.11),

$$|Du| \operatorname{curv}(u) + g(|Du|) D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right). \quad (8.12)$$

En effet, cette interprétation géométrique montre que la différence entre la diffusion au voisinage d'un bord et dans une zone homogène se réduit au terme de diffusion dans la direction de gradient $D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right)$. Cet opérateur n'est rien d'autre que l'opérateur d'interpolation isotrope stable et régulier, obtenu à partir de l'approche axiomatique de V. Caselles, J.M. Morel et C. Sbert [CMS98].

Finalement, nous proposons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) + g(|Du|) D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right) - (Pu - Pu_0), \\ u(0, \cdot) &= u_0(\cdot), \end{aligned}$$

où $u_0(x)$ est le niveau de gris de l'image "zoom" à traiter, $u(t, x)$ est sa version régulière qui dépend du paramètre échelle t . L'interprétation des termes de cet équation est la suivante :

Le terme $|Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right)$ diffuse u uniquement dans la direction orthogonale à son gradient Du . Cette diffusion a pour but de rendre régulières les lignes de niveau de u .

Le terme $D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right)$ diffuse u uniquement dans la direction du gradient Du . Cette diffusion a pour but d'interpoler entre les lignes de niveau de u .

Le terme $g(|Du|)$ est utilisé pour inhiber l'interpolation au niveau des bords. En effet, il contrôle la vitesse de diffusion $u_{\eta\eta}$: si Du est petit en un point x , ce point est considéré comme point intérieur à une zone homogène de l'image, alors l'interpolation est maintenue. Par contre si Du est grand en un point x , ce point est considéré comme un point bord et donc l'interpolation est inhibée, puisque $g(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$ (par exemple $g(s) = 1/(1 + s^2)$).

Le terme $(Pu - Pu_0)$ est une attraction de Pu vers Pu_0 (ou vers u_0 dans le cas où $Pu_0 = u_0$). Ce terme a pour but de nous assurer que l'image Pu reste assez proche de Pu_0 .

Chapitre 9

Solutions de viscosité

9.1 Introduction

La notion des solutions de viscosité a été introduite par M. Crandall et P-L. Lions au début des années 80 [CL81],[Lio82]. Cette théorie fournit de nouveaux outils d'analyse des équations aux dérivées partielles. En particulier, elle permet de donner un sens à une large gamme d'équations dont la justification mathématique n'est pas possible avec la théorie classique et avec la théorie variationnelle des équations aux dérivées partielles. Deux types de problèmes auxquels cette théorie s'applique, les équations aux dérivées partielles de type elliptique :

$$H(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (9.1)$$

et parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

où $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N$ le hamiltonien et \mathcal{S}^N est l'ensemble des matrices symétriques. H est supposé continu et elliptique dégénéré :

$$H(t, x, u, p, S) \geq H(t, x, u, p, S') \quad \text{si } S \leq S'. \quad (9.2)$$

9.2 Définition

En ce qui suit, on donne la définition d'une solution de viscosité de l'équation (9.1) dans le cas continu. La théorie a été étendue au cas discontinu. Cette notion fait appel à des arguments de nature différente : les systèmes dynamiques et les équations de Bellman [Bar94], [BJ91].

Définition 3. $u \in C(\Omega)$ est sous-solution de viscosité de (9.1) si et seulement si :
pour tout $\phi \in C^2(\Omega)$, si $x_0 \in \Omega$ est un point de maximum local de $u - \phi$, on a :

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$$

$u \in C(\Omega)$ est sur-solution de viscosité de (9.1) si et seulement si :

pour tout $\phi \in C^2(\Omega)$, si $x_0 \in \Omega$ est un point de minimum local de $u - \phi$, on a :

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq 0.$$

Enfin $u \in C(\Omega)$ est une solution de viscosité de (9.1) si et seulement si elle est à la fois sur-solution et sous-solution.

Remarque 2. Pour cette définition, nous avons utilisé la notion des fonctions tests. Toutefois, on peut donner une définition équivalente en utilisant la notion de sur-différentiel $P_\Omega^+ u(x)$ et de sous-différentiel $P_\Omega^- u(x)$, définis par : $P_\Omega^+ u(x)$ est l'ensemble des $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N$ tels que :

$$u(x) \leq u(y) + p \cdot (x - y) + \frac{1}{2} (X(x - y), x - y) + o(|x - y|^2) \quad \text{quand } y \in \Omega \text{ et tend vers } x,$$

et $P_\Omega^- u(x) = -P_\Omega^+(-u)(x)$.

Avant de continuer, donnons une idée sur l'origine mathématique de cette définition. Supposons que $u \in C^2(\Omega)$ est solution de (9.1). Si ϕ est de classe C^2 et si $x_0 \in \Omega$ est un point de maximum local de $u - \phi$, alors les propriétés suivantes ont lieu :

$$Du(x_0) = D\phi(x_0),$$

et

$$D^2u(x_0) \leq D^2\phi(x_0).$$

En d'autres termes $(D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \in P^+u(x_0)$. En utilisant l'ellipticité de l'équation, on obtient :

$$H(x_0, u(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq H(x_0, u(x_0), Du(x_0), D^2u(x_0)) = 0.$$

En regardant les termes aux extrémités, on s'aperçoit que les dérivées de u n'interviennent plus. D'où l'idée de définir u comme une sous-solution, plus nécessairement dérivable de (9.1), si :

$$H(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0$$

dés que ϕ est C^2 et que x est un point de maximum local de $u - \phi$.

9.3 Méthodes d'existence

L'existence d'une solution de viscosité est traitée généralement en utilisant une des deux méthodes suivantes : La méthode de Perron ou une des méthodes de perturbations singulières.

Introduite pour les équations de Hamilton-Jacobi par H. Ishii [Ish87], la méthode de Perron consiste à se placer dans un ensemble S de sous solutions uniformément bornées, puis de montrer que

$$u(x) = \sup_{v \in S} v(x)$$

est une sous solution et qu'en plus elle est solution du problème étudié. Pour un exemple de preuve pour les hamiltoniens du premier ordre, on pourra se référer à Barles [Bar94] et pour des résultats

généraux, H. Ishii [Ish86] et M-G. Grandall, H. Ishii et P-L. Lions [CIL87].

La motivation essentielle des méthodes de perturbations singulières est de se placer dans un cadre classique où l'existence d'une solution est plus évidente et de revenir ensuite au cadre initial en utilisant des résultats de stabilité. L'intérêt est de prouver que la fonction limite des solutions obtenues dans le cadre classiques est solution du problème initial.

Le résultat suivant est un exemple de résultat de stabilité pour les hamiltoniens du type (9.1)-(9.2) :

Théorème 10. (Barles [Bar94]) *On suppose que, pour $\epsilon > 0$, $u_\epsilon \in C(\Omega)$ est une sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation :*

$$H_\epsilon(x, u_\epsilon, Du_\epsilon, D^2u_\epsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où (H_ϵ) est une suite de fonctions continues satisfaisant la condition d'ellipticité (9.2). Si $u_\epsilon \rightarrow u$ dans $C(\Omega)$ et $H_\epsilon \rightarrow H$ dans $C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N)$ alors u est sous-solution (resp. sur-solution) de l'équation :

$$H(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

L'intérêt fondamental de ce résultat est de pouvoir passer à la limite dans une équation même avec une non linéarité sur les termes gradient et dérivées secondes, en connaissant seulement la convergence localement uniforme de la suite (u_ϵ) . Comme le souligne Barles [Bar94], le caractère inhabituel de ce résultat est de considérer séparément la convergence de H_ϵ et celle de u_ϵ .

La plus connue des méthodes de perturbation est la méthode de viscosité évanescence, qui a motivé la terminologie "solution de viscosité". Elle qui consiste à remplacer H par $H_\epsilon = -\epsilon\Delta + H$ de telle manière à ce que l'équation :

$$H_\epsilon(x, u_\epsilon, Du_\epsilon, D^2u_\epsilon) = 0$$

admette une solution classique. Ensuite, il s'agit de borner uniformément (u_ϵ) pour pouvoir passer à la limite à l'aide du théorème 10.

9.4 Méthode d'unicité

Dans le cas d'ordre 2, l'unicité est le fruit de nombreuses contributions, à citer R. Jensen, P-L. Lions et P-E. Souganidis [JLS88] et tout particulièrement Ishii [Ish89]. L'un des points clés est un lemme technique [CIL92] que nous présentons ci-après, dans le cas parabolique :

Lemme 18. *Soit $u_i \in SCS((0, T) \times \Omega_i)$ pour $i = 1 \dots k$ où Ω_i est un ensemble localement compact de \mathbb{R}^N . Soit ϕ définie sur un voisinage ouvert de $(0, T) \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$, une fois continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$. Supposons que $(\hat{t}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$ est un point maximum de*

$$w(t, x_1, \dots, x_k) = u_1(t, x_1) + \dots + u_k(t, x_k) - \phi(t, x_1, \dots, x_k)$$

sur $(0, T) \times \Omega_1 \dots \times \Omega_k$. Supposons de plus qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $M > 0$, il existe une constante C telle que pour $i = 1 \dots k$:

$$b_i \leq C \text{ dés que } (b_i, q_i, X_i) \in P_{\Omega_i}^+ u(t, x_i) \\ |x_i - \widehat{x}_i| + |t - \widehat{t}| \leq R \text{ et } |u_i(t, x_i)| + |q_i| + |X_i| \leq M.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $X_i \in \mathcal{S}^N$ tels que :

$$(i) \quad (b_i, D_{x_i} \phi(\widehat{t}, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k), X_i) \in P_{\Omega_i}^+ u_i(\widehat{t}, \widehat{x}_i) \text{ pour } i = 1 \dots k \\ (ii) \quad -\left(\frac{1}{\epsilon} + |A|\right) I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \epsilon A^2 \\ (iii) \quad b_1 + \dots + b_k = \phi_t(\widehat{t}, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k)$$

où $A = D_x^2 \phi(\widehat{t}, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k)$.

R. Jensen [Jen88] fût le premier à comprendre comment résoudre le problème des inégalités matricielles dans le cas d'ordre 2 ; ses argument furent simplifiés et ses résultats améliorés par lui même, P-L. Lions, Souganidis et Ishii. Des progrès essentiels dans l'obtention et l'utilisation de l'inégalité matricielle ont été faites par Ishii. La version finale, dont fait partie le lemme ci-dessus, est décrite dans [CIL92] ; elle provient essentiellement des raffinements de Crandall et Ishii.

9.5 Les solutions de viscosité et la vision par ordinateur

A partir des propriétés d'architecture, d'invariances géométriques et morphologiques des opérateurs d'analyse multi-échelle (8.4), L. Alvarez, F. Guichard, P-L. Lions et J-M. Morel [AGLM93] ont pu établir un lien entre ces opérateurs et les équations de Hamilton-Jacobi de type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x, u, Du, D^2 u) = 0.$$

En particulier, ils ont prouvé qu'il existe une seule équation satisfaisant l'invariance affine et morphologique, l'AMSS (Affine Morphologique Scale Space) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |Du| \text{curv}(u)^{\frac{1}{3}}.$$

V. Caselles, F. Catte, T. Coll et F. Dibos [CCCD93] proposent un modèle de segmentation par contour actif sous forme d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x) |Du| (\text{curv}(u) + \nu), \quad u(\cdot, 0) = u_0,$$

avec

$$g(x) = \frac{1}{1 + |DG_\sigma * I_0(x)|^2}.$$

I_0 est l'image en niveau de gris, G_σ est la gaussienne décart type σ , $\nu > 0$ un réel et u_0 une fonction qui prend des valeurs dans $[0, 1]$ sachant que l'objet, dont le bord est à détecter, est inclus dans l'ensemble de niveau $\{u_0 = 0\}$. Le paramètre de correction ν est choisi de telle manière à ce que le terme $(\text{curv}(u) + \nu)$ reste toujours positif.

L'idée principale est de faire évoluer la ligne de niveau, $\partial\{u(\cdot, t) = 0\}$, avec une vitesse qui dépend de sa courbure jusqu'à ce que le critère d'arrêt $g(x) = 0$ soit vérifié. Ce critère d'arrêt, est issu de la théorie classique de détection de bords, que nous avons présenté dans le chapitre 3. Les auteurs prouvent que si $\partial\{g = 0\}$ est une courbe de Jordan de classe C^2 , u_0 est nulle à l'intérieur et au voisinage de cette courbe et u_0 et u sont régulières (de classe C^2), alors la ligne de niveau $\partial\{u(\cdot, t) = 0\}$ converge au sens de Hausdorff quand $t \rightarrow \infty$ vers $\partial\{g = 0\}$.

Étudié par E. Rouy et A. Tourin [RT92], le problème du *shape from shading* consiste à la construction d'une surface à partir de son intensité lumineuse. Ce problème est classiquement posé sous la forme suivante : Soit S une surface lambertienne définie par la fonction $z = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe une seule source lumineuse située à l'infini, dont la direction est donnée par le vecteur unitaire (w_1, w_2, w_3) . Ce problème est classiquement modélisé sous la forme (voir par exemple [HB89]) :

$$R(\eta(x)) = I(x),$$

où x est un point appartenant au domaine de définition de u , $I(x)$ est la luminance en x , $\eta(x)$ est la normale unitaire à la surface au point $(x, u(x))$ et $R(\eta(x))$ représente la réflexion de la lumière sur la surface en x et qui dépend de la normale à cette surface en ce point. En supposant que u est à support compact Ω et en sachant que pour une surface lambertienne : $R(\eta(x)) = \eta(x) \cdot w$, le modèle se réécrit sous la forme :

$$I(x)\sqrt{1 + |Du(x)|^2} + (w_1, w_2) \cdot Du(x) - w_3 = 0. \quad (9.3)$$

L'équation est donc de type Hamilton-Jacobi, où le Hamiltonien est donné par :

$$H(x, p) = I(x)\sqrt{1 + |p|^2} - (w_1, w_2) \cdot p - w_3.$$

Utilisant une condition de dirichlet homogène au bord de Ω , E. Rouy et A. Tourin ont proposé une définition d'une solution de viscosité de (9.3), puis ils ont prouvé qu'elle existe et qu'elle est unique. Aussi ils ont montré la convergence d'un schéma numérique en s'inspirant des problèmes de contrôle.

Le problème d'interpolation a aussi trouvé une réponse à l'aide des solutions de viscosité. En effet à partir des travaux de R. Jensen [Jen93] et d'un algorithme d'interpolation proposé par J.R. Casas et L. Torres [CT96], V. Caselles, J.M. Morel et C. Sbert [CMS98] ont prouvé que si l'on connaît une fonction Lipschitz ϕ sur un bord Γ , Γ peut être composé aussi bien de courbes que de points, alors la seule interpolation isotrope stable régulière et vérifiant le principe du maximum et le principe de

comparaison est donnée par l'équation AMLE (Absolute Minimal Lipschitz Extention), qui s'écrit :

$$D^2u\left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|}\right) = 0, \quad u = \phi|_{\Gamma}.$$

Ce résultat a été généralisé par F. Cao [Cao99], incluant des données discontinues et Lipschitz par morceaux sur Γ .

Chapitre 10

Analyse mathématique du modèle

10.1 Préliminaires

Dans ce chapitre nous allons présenter une analyse mathématique du modèle introduit dans le chapitre 8 et qui s'écrit sous forme d'une réaction-diffusion :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) + g(Du) D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right) - (Pu - h), \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}\tag{10.1}$$

Tout d'abord, nous avons quelques points à préciser :

- Comme il est fait notamment dans [ALM92], nous allons nous ramener à poser le problème sur tout \mathbb{R}^2 . En supposant que le support de l'image initiale est un rectangle Ω , nous allons prolonger cette donnée initiale par symétrisation et périodicité en une fonction u_0 , 2Ω -périodique. L'intérêt est de ne pas considérer la condition de Neumann qui peut poser des difficultés pour l'étude de l'équation, notamment au niveau des coins.

Pour des raisons techniques, nous avons besoin de modifier légèrement le modèle initial. Plus précisément, nous allons exiger un minimum de régularité sur les données u_0 , h et sur l'opérateur de projection P . Aussi nous avons besoin d'introduire un contrôle sur le terme de réaction $Pu - h$.

- L'opérateur de projection P est remplacé par un opérateur plus régulier $w \rightarrow \mathcal{P}w$ qui envoie $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ dans $C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, et qui est défini par :

$$\mathcal{P}w(x) = \sum_{ij} \psi_{i,j}(x) \int_{\Omega_{i,j}} w(y) dy,$$

où pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\Omega_{ij} = [i, i+1] \times [j, j+1]$ et $\psi_{ij} \in C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ est une version régulière à support compact de $\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \mathbb{1}_{\Omega_{ij}}$, où $\mathbb{1}_{\Omega_{ij}}$ est la fonction caractéristique de Ω_{ij} .

- La fonction h est supposée égale à la projection $\mathcal{P}u_0$. Comme nous l'avons expliqué dans le

chapitre 7, cela signifie que pour tout $t > 0$, $\mathcal{P}u(\cdot, t)$ devrait ressembler à $\mathcal{P}u_0$. Toute fois, par souci de généralité, nous allons considérer que h est quelconque, en y imposant uniquement la même régularité vérifiée par $\mathcal{P}u_0$.

- Nous allons remplacer le terme de réaction $\mathcal{P}u - h$ par $F(\mathcal{P}u - h)$, où F est une fonction continue bornée croissante. Cette fonction a pour rôle de contrôler le terme de rappel $\mathcal{P}u - h$.

Réécrivons les deux opérateurs du deuxième ordre de (10.1) sous une forme plus simple et plus générale.

$$\begin{aligned} |Du| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) &= \operatorname{Trace} \left(|Du|^{-2} \begin{pmatrix} u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & u_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{i,j}(Du) \partial_{ij} u. \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} D^2 u \left(\frac{Du}{|Du|}, \frac{Du}{|Du|} \right) &= \operatorname{Trace} \left(|Du|^{-2} \begin{pmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \sum_{i,j} \beta_{i,j}(Du) \partial_{ij} u. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Un calcul simple nous permet de vérifier que si $g > 0$ alors $(\alpha_{i,j}(|Du|) + g(|Du|)\beta_{i,j}(|Du|))$ est définie positive. Dans toute la suite, nous allons noter :

$$a_{i,j}(Du) = \alpha_{i,j}(Du) + g(Du)\beta_{i,j}(Du).$$

10.2 Analyse mathématique

Nous nous proposons d'étudier l'E.D.P suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j} a_{i,j}(Du) \partial_{ij} u - F(\mathcal{P}u - h(x)), \quad (10.4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (10.5)$$

sous les hypothèses :

(H1) : $u_0, h \in C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

(H2) : Pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, $(a_{i,j}(p))$ est symétrique définie positive.

(H3) : Les fonctions $(a_{i,j})$ sont continues bornées dans \mathbb{R}^2 .

(H4) : $F \in C(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ est une fonction croissante bornée et qui vérifie

$$-\infty < \inf_{\mathbb{R}} F < 0 < \sup_{\mathbb{R}} F < +\infty.$$

(H5) : L'opérateur linéaire \mathcal{P} envoie $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ dans $C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

(H6) : L'opérateur linéaire \mathcal{P} est un opérateur borné de $C(\mathbb{R}^2)$ dans lui même.

L'hypothèse (H6) signifie qu'il existe une constante $L_P > 0$, telle que pour tout $v, w \in C(\mathbb{R}^2)$, nous avons $\mathcal{P}v, \mathcal{P}w \in C(\mathbb{R}^2)$ et,

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{P}v - \mathcal{P}w| \leq L_P \sup_{\mathbb{R}^2} |v - w|. \quad (10.6)$$

Nous commençons par donner la définition d'une solution de viscosité de (10.4)-(10.5).

$u \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ est sous-solution de viscosité de (10.4)-(10.5) si et seulement si : pour tout $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, si (x_0, t_0) vérifiant $t_0 > 0$, est un point de maximum local de $u - \phi$, nous avons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0) - \sum_{i,j} a_{i,j}(D\phi(x_0, t_0)) \partial_{ij} \phi(x_0, t_0) + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0 \quad (10.7)$$

$$\text{si } D\phi(x_0, t_0) \neq 0,$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_0, t_0) - \Delta \phi(x_0, t_0) + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0 \quad (10.8)$$

$$\text{si } D\phi(x_0, t_0) = 0.$$

Nous définissons d'une manière analogue une sursolution de viscosité de (10.4)-(10.5) en remplaçant maximum local par minimum local, " \leq " par " \geq ".

Enfin u est une solution de viscosité de (10.4)-(10.5) si elle est à la fois sursolution et sous-solution.

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 11. *Sous les hypothèses (H1)-(H6), l'équation (10.4)-(10.5) admet une solution périodique unique dans $C(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ pour tout $T > 0$.*

Pour prouver ce théorème, nous allons établir dans un premier temps un résultat du type principe du maximum. Puis nous démontrons un résultat de stabilité qui a comme conséquence l'unicité d'une solution de viscosité. Enfin, nous démontrons l'existence en utilisant la méthode de viscosité évanescence.

10.2.1 Principe du maximum

Le résultat que nous énonçons ci-après, nous montre comment $\min u(\cdot, t)$ et $\max u(\cdot, t)$ évoluent en fonction de t . Ce résultat joue aussi un rôle technique, puisqu'il nous permet d'avoir une borne

supérieure et une borne inférieure sur toute solution de viscosité de (10.4).

Lemme 19. *Soit u solution de viscosité de (10.4)-(10.5) alors pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$*

$$\inf u_0 - t \sup F \leq u(x, t) \leq \sup u_0 - t \inf F$$

PREUVE. Soit (x_0, t_0) un point de maximum global de $u - (\delta - \inf F)t$, avec $\delta > 0$. Un tel point existe car u est supposée solution périodique du problème. Alors si $t_0 > 0$, nous avons :

$$\delta - \inf F + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0.$$

Ceci constitue une contradiction avec le fait que δ est strictement positif et $F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) - \inf F \geq 0$. Donc $t_0 = 0$ et nous en déduisons que pour tout (x, t) :

$$u(x, t) \leq \sup u_0 + (\delta - \inf F)t$$

ceci pour tout $\delta > 0$. Le résultat s'obtient en faisant tendre δ vers 0. L'autre inégalité se démontre d'une manière analogue en considérant un point de minimum global de $u + (\delta + \sup F)t$. \square

Ce lemme montre bien le rôle très important que F soit bornée. En effet si F n'était pas bornée, par exemple $F(s) = s$, en reprenant la même démonstration, nous aurions un encadrement qui est le suivant : pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$

$$\inf u_0 - t \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} (\mathcal{P}u - h) \leq u(x, t) \leq \sup u_0 - t \inf_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} (\mathcal{P}u - h).$$

Il est donc clair qu'il est très difficile d'encadrer u en fonction des données du problème vue la dépendance réciproque entre u et $\mathcal{P}u$.

10.2.2 Stabilité

Proposition 6. *Sous les hypothèses (H1)-(H6), si $u \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$ est solution viscosité de (10.4)-(10.5) et $v \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ solution de viscosité de (10.4) avec une donnée initiale $v(\cdot, 0) = v_0 \in C(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u(x, t) - v(x, t)| \leq C \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0(x) - v_0(x)|, \quad (10.9)$$

où C dépend de T , $\sup|F|$ et des constantes de Lipschitz de F , \mathcal{P} , h et de u .

PREUVE. Soit (x_0, y_0, t_0) un point de maximum global de la fonction :

$$w(x, y, t) = u(x, t) - v(y, t) - \phi(x, y, t)$$

définie dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, avec

$$\phi(x, y, t) = \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} + \lambda t, \quad \epsilon, \lambda > 0.$$

Supposons que $t_0 > 0$. Par application du lemme 18, pour tout $\lambda, \mu > 0$, il existe deux réels c, d et deux matrices symétriques $X, Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ tels que

$$c - d = \lambda$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A + \mu A^2 & -A - \mu A^2 \\ -A - \mu A^2 & A + \mu A^2 \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

$$c - \sum_{i,j} a_{i,j} (D_x \phi(x_0, y_0, t_0)) X_{ij} + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0 \quad (10.11)$$

et

$$d - \sum_{i,j} a_{i,j} (D_y \phi(x_0, y_0, t_0)) Y_{ij} + F(\mathcal{P}v(y_0, t_0) - h(y_0)) \geq 0 \quad (10.12)$$

avec

$$D_x \phi(x_0, y_0, t_0) = D_y \phi(x_0, y_0, t_0) = \epsilon^{-1} |x_0 - y_0|^2 (x_0 - y_0),$$

$$A = D_x^2 \phi((x_0, y_0, t_0)) = \epsilon^{-1} (|x_0 - y_0|^2 Id + 2(x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0)),$$

$$A^2 = \epsilon^{-2} (|x_0 - y_0|^4 Id + 8|x_0 - y_0|^2 (x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0)).$$

Supposons que $x_0 = y_0$. Il vient que $D_x \phi(x_0, y_0, t_0) = 0$, par conséquent $A = 0$, $X \leq 0$ et $Y \geq 0$.

En plus nous avons :

$$c - \sum_i X_{ii} + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0$$

et

$$d - \sum_i Y_{ii} + F(\mathcal{P}v(y_0, t_0) - h(y_0)) \geq 0.$$

alors, nous en déduisons les inégalités :

$$c + F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \leq 0$$

$$d + F(\mathcal{P}v(x_0, t_0) - h(x_0)) \geq 0$$

En soustrayant la deuxième inégalité à la première, il vient

$$\begin{aligned} \lambda &= c - d \\ &\leq F(\mathcal{P}v(x_0, t_0) - h(x_0)) - F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) \\ &\leq |F(\mathcal{P}v(x_0, t_0) - h(x_0)) - F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0))| \\ &\leq L_F |\mathcal{P}v(x_0, t_0) - \mathcal{P}u(x_0, t_0)| \\ &\leq L_F L_P \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \end{aligned}$$

Nous concluons que si $x_0 = y_0$ alors

$$\lambda \leq L_F L_P \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v|.$$

Dans toute la suite nous allons choisir

$$\lambda > L_F L_P \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v|. \quad (10.13)$$

Par conséquent $x_0 \neq y_0$. Sans perte de généralité nous supposons que $\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| > 0$ puisque dans le cas contraire l'inégalité (10.9) est évidente.

Choisissons

$$\mu = \frac{\epsilon}{|x_0 - y_0|^2}$$

Ce choix nous permet de réécrire (10.10) sous une forme plus simple

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\epsilon} \begin{pmatrix} B & -B \\ -B & B \end{pmatrix} \quad (10.14)$$

où

$$\begin{aligned} B &= \frac{\epsilon}{2} \left(A + \frac{\epsilon}{|x_0 - y_0|^2} A^2 \right) \\ &= |x_0 - y_0|^2 Id + 5(x_0 - y_0) \otimes (x_0 - y_0). \end{aligned}$$

En utilisant (10.11) et (10.12) il vient

$$\lambda = c - d \leq \sum_{i,j} a_{i,j}(D_x \phi(x_0, y_0, t_0)) (X_{ij} - Y_{ij}) \quad (10.15)$$

$$- \left(F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) - F(\mathcal{P}v(y_0, t_0) - h(y_0)) \right) \quad (10.16)$$

La majoration du terme de droite de (10.15) s'obtient à partir de (10.14) puisque $X \leq 2\epsilon^{-1}B \leq Y$ que nous combinons avec $(a_{i,j}(D_x \phi(x_0, y_0, t_0))) \geq 0$. Alors, il vient

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(D_x \phi(x_0, y_0, t_0)) (X_{ij} - Y_{ij}) \leq 0$$

Pour le terme (10.16), nous procédons de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0)) - F(\mathcal{P}v(y_0, t_0) - h(y_0)) \\ & \leq L_F |\mathcal{P}u(x_0, t_0) - h(x_0) - \mathcal{P}v(y_0, t_0) + h(y_0)| \\ & \leq L_F (|\mathcal{P}u(x_0, t_0) - \mathcal{P}v(y_0, t_0)| + L_h |x_0 - y_0|) \\ & \leq L_F (|\mathcal{P}u(x_0, t_0) - \mathcal{P}u(y_0, t_0)| + |\mathcal{P}u(y_0, t_0) - \mathcal{P}v(y_0, t_0)| + L_h |x_0 - y_0|) \end{aligned}$$

en plus nous avons

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}u(x_0, t_0) - \mathcal{P}u(y_0, t_0)| &= \left| \sum_{ij} \psi_{i,j}(x_0) \int_{\Omega_{i,j}} u(z) dz - \sum_{ij} \psi_{i,j}(y_0) \int_{\Omega_{i,j}} u(z) dz \right| \\ &\leq \sum_{ij} \left| \psi_{i,j}(x_0) - \psi_{i,j}(y_0) \right| \int_{\Omega_{i,j}} |u(z)| dz \\ &\leq L'_P M |x_0 - y_0|. \end{aligned}$$

où $M = \max(|\inf u_0 - T \sup F|, |\sup u_0 - T \inf F|)$ provenant du principe du maximum et

$$L'_P = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \sum_{ij} \frac{|\psi_{i,j}(x) - \psi_{i,j}(y)|}{|x - y|},$$

qui est fini vue la définition des fonctions $\psi_{i,j}$.

Ainsi, nous remplaçons (10.15)-(10.16) par :

$$\lambda \leq (L_F(L'_P M + L_h)) |x_0 - y_0| + (L_F L_P) \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \quad (10.17)$$

Pour continuer nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 20. *Soit (x_0, y_0, t_0) le point maximum de w dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, T]$. Alors nous avons :*

$$|x_0 - y_0| \leq (4\epsilon L_u)^{1/3}$$

où L_u est la constante de Lipschitz de u .

La preuve du lemme est envoyée à la fin de cette section. Continuons la preuve de la proposition 6, et remplaçons le résultat du lemme 20 dans (10.17), il vient :

$$\lambda \leq (L_F(L'_P M + L_h))(4\epsilon L_u)^{1/3} + (L_F L_P) \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v|$$

que nous mettons sous la forme

$$\lambda \leq \epsilon^{1/3} C_1 + C_2 \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v|$$

où

$$C_1 = L_F(L'_P M + L_h)(4L_u)^{1/3} \quad \text{et} \quad C_2 = L_F L_P.$$

Choisissons

$$\epsilon^{1/3} = \delta \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \quad (10.18)$$

il vient

$$\lambda \leq (\delta C_1 + C_2) \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v|.$$

Par conséquent si nous fixons

$$\lambda > (\delta C_1 + C_2) \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \quad (10.19)$$

alors $t_0 = 0$. Il en résulte que pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, nous avons l'inégalité :

$$u(x, t) - v(y, t) - \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} - \lambda t \leq \sup_{x, y \in \mathbb{R}^2} \left\{ u_0(x) - v_0(y) - \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} \right\}.$$

En particulier si $x = y$,

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| &\leq \sup_{x, y \in \mathbb{R}^2} \left\{ u_0(x) - v_0(y) - \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} \right\} + \lambda T \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}^2} \left\{ u_0(x) - u_0(y) - \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} \right\} + \lambda T \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0| + \sup_{x, y \in \mathbb{R}^2} \left\{ L_{u_0} |x - y| - \frac{|x - y|^4}{4\epsilon} \right\} + \lambda T. \end{aligned}$$

Puisque $s \rightarrow L_{u_0} s - \frac{s^4}{4\epsilon}$ atteint son point maximum en $s = (L_{u_0} \epsilon)^{1/3}$, nous en déduisons :

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \leq \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0| + \frac{3}{4} L_{u_0}^{4/3} \epsilon^{1/3} + \lambda T$$

Choisissons $\delta = L_{u_0}^{-4/3}$ dans (10.18) que nous remplaçons dans la dernière inégalité, il vient

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \leq \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0| + \frac{3}{4} \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| + \lambda T$$

et donc

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \leq 4 \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0| + 4\lambda T$$

Nous choisissons $\lambda = K \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, t_1]} |u - v|$, comme par exemple $K = (\delta C_1 + C_2 + 1)$ pour que (10.19) reste vérifiée, puis nous définissons t_1 de telle manière à ce que $4K t_1 = \frac{1}{2}$. Alors, il vient

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, t_1]} |u - v| \leq 8 \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0|$$

Nous refaisons la même chose sur les intervalles $[t_1, 2t_1], [2t_1, 3t_1] \dots [(n-1)t_1, nt_1]$ tel que $nt_1 \geq T$ et nous obtenons finalement

$$\sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |u - v| \leq 8^n \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0 - v_0|,$$

ce qui achève la preuve du théorème. \square

PREUVE DU LEMME 20 Il est clair que

$$w(x_0, y_0, t_0) \geq w(y_0, y_0, t_0).$$

ce qui se traduit par

$$u(x_0, t_0) - v(y_0, t_0) - \frac{|x_0 - y_0|^4}{4\epsilon} - \lambda t_0 \geq u(y_0, t_0) - v(y_0, t_0) - \lambda t_0.$$

Nous en déduisons alors que

$$\begin{aligned} \frac{|x_0 - y_0|^4}{4\epsilon} &\leq u(x_0, t_0) - u(y_0, t_0) \\ &\leq L_u |x_0 - y_0| \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

10.2.3 Existence et unicité

Comme il est classique en théorie de viscosité, nous allons prouver l'existence d'une solution en introduisant un problème régularisé, puis nous allons utiliser un résultat de stabilité adéquat qui va nous permettre de passer à la limite.

Soit $u_0^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ une suite de fonctions qui vérifient :

$$\begin{cases} (u_0^\epsilon)_\epsilon \text{ converge uniformément vers } u_0, \\ \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0^\epsilon| \leq \sup_{\mathbb{R}^2} |u_0|, \\ \sup_{\mathbb{R}^2} |Du_0^\epsilon| \leq \sup_{\mathbb{R}^2} |Du_0|. \end{cases}$$

De la même manière, nous définissons la suite de fonction (h^ϵ) associée à h . Aussi, nous proposons une version régulière pour les coefficients a_{ij} sous la forme :

$$a_{ij}^\epsilon = \epsilon \delta_{ij} + \alpha_{ij}^\epsilon \left(\sum_{i,j} a_{ij}^\epsilon \partial_{ij} u = \epsilon \Delta u + \sum_{i,j} \alpha_{ij}^\epsilon \partial_{ij} u \right)$$

où, pour tout i, j , α_{ij}^ϵ est à support compact dans \mathbb{R}^2 , tend vers a_{ij} de manière monotone quand ϵ tend vers 0 et vérifie la condition d'ellipticité

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{R}^2, \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^\epsilon(p) \xi_i \xi_j \geq 0 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin, nous considérons la suite de fonction $(F_\epsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui converge uniformément vers F dans \mathbb{R}^2 .

Dans la suite, nous nous intéressons à l'équicontinuité de la suite (u^ϵ) , où u^ϵ est l'unique solution

du problème :

$$P_\epsilon : \begin{cases} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} u^\epsilon - F_\epsilon(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon), \\ u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0^\epsilon. \end{cases} \quad (10.20)$$

L'existence, l'unicité et la régularité de u^ϵ sont garantis par la théorie générale des équations paraboliques quasilineaires [LSU68].

Lemme 21. *Soit u^ϵ la solution de P_ϵ . Alors il existe une constante $C_T > 0$, indépendante de ϵ , telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0, T]$, on a*

$$|u^\epsilon(x, t) - u^\epsilon(y, t)| \leq C_T |x - y|. \quad (10.21)$$

PREUVE. Pour prouver (10.21), il s'agit d'utiliser la méthode classique de Bernstein. Pour cela nous commençons par dériver l'équation (10.20) par rapport à x_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial t} &= \sum_{i,j} \sum_l \frac{\partial a_{i,j}^\epsilon}{\partial x_l}(Du^\epsilon) u_{ik}^\epsilon u_{ij}^\epsilon + \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) u_{ijk}^\epsilon \\ &\quad - F'(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon) \partial_k(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon), \end{aligned}$$

puis multiplions le résultat par $2u_k^\epsilon$:

$$\begin{aligned} 2u_k^\epsilon \frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial t} &= 2 \sum_{i,j} \sum_l \frac{\partial a_{i,j}^\epsilon}{\partial x_l}(Du^\epsilon) u_{ik}^\epsilon u_{ij}^\epsilon u_k^\epsilon + 2 \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) u_{ijk}^\epsilon u_k^\epsilon \\ &\quad - 2u_k^\epsilon F'(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon) \partial_k(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon). \end{aligned}$$

En remarquant que $2u_{ijk}^\epsilon u_k^\epsilon = \partial_{ij}(u_k^\epsilon)^2 - 2u_{ik}^\epsilon u_{jk}^\epsilon$ et en sommant sur k il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |Du^\epsilon|^2}{\partial t} - \sum_{i,j} \sum_l \frac{\partial a_{i,j}^\epsilon}{\partial x_l}(Du^\epsilon) u_{ij}^\epsilon \partial_l |Du^\epsilon|^2 - \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} |Du^\epsilon|^2 \\ = -2 \sum_k \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) u_{ik}^\epsilon u_{jk}^\epsilon - 2 \sum_k u_k^\epsilon F'(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon) \partial_k(\mathcal{P}u^\epsilon - h^\epsilon). \end{aligned}$$

Introduisons l'opérateur elliptique :

$$\mathcal{L}(w) = \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} w + \sum_{i,j} \sum_l \frac{\partial a_{i,j}^\epsilon}{\partial x_l}(Du^\epsilon) u_{ij}^\epsilon \partial_l w.$$

En remarquant que

$$-2 \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) u_{ik}^\epsilon u_{jk}^\epsilon \leq 0.$$

nous en déduisons l'inégalité :

$$\frac{\partial |Du^\epsilon|^2}{\partial t} - \mathcal{L}(|Du^\epsilon|^2) \leq -2 \sum_k u_k^\epsilon F'(\mathcal{P}u^\epsilon - h) \partial_k (\mathcal{P}u^\epsilon - h).$$

Utilisons $a^2 + b^2 \geq -2ab$, il vient

$$\frac{\partial |Du^\epsilon|^2}{\partial t} - \mathcal{L}(|Du^\epsilon|^2) \leq |Du^\epsilon|^2 + C \quad (10.22)$$

avec

$$C = \sum_k \sup_{\mathbb{R}^2 \times [0, T]} |F'(\mathcal{P}u^\epsilon - h) \partial_k (\mathcal{P}u^\epsilon - h)|^2$$

Posons $w = e^{-t}(|Du^\epsilon|^2 + C)$, il vient

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{L}(w) \leq 0$$

puis appliquons le principe du maximum, pour obtenir finalement, pour tout $t \in [0, T]$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |Du^\epsilon(\cdot, t)| \leq \left(e^t \sup_{\mathbb{R}^2} |Du_0^\epsilon|^2 + (e^t - 1)C \right)^{1/2}$$

ce qui démontre (10.21). \square

Lemme 22. *Soit u^ϵ la solution de P_ϵ . Alors il existe des constantes $C'_T > 0$ et $M > 0$, indépendantes de ϵ , telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $s, t \in [0, T]$, on a*

$$|u^\epsilon(x, s) - u^\epsilon(x, t)| \leq M |t - s| + C'_T |t - s|^{1/2}. \quad (10.23)$$

PREUVE. Cette preuve est une adaptation de la démonstration apparue dans L. Alvarez et J. Esclarin [AE97].

Définissons la suite de fonctions (w_δ^ϵ) par :

$$w_\delta^\epsilon(x) = \frac{1}{\delta} \int_{|x-y| < \delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) u^\epsilon(y, t) dy,$$

où ρ est une fonction de classe C^∞ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\rho(x) \geq 0 \text{ si } |x| \leq 1, \rho(x) = 0 \text{ si } |x| > 1 \text{ et } \int_{|x| \leq 1} \rho(x) dx = 1.$$

Un calcul simple nous permet d'avoir

$$\sup_{\mathbb{R}^2} |D^2 w_\delta^\epsilon| \leq \frac{C}{\delta}$$

avec $C = \sup |Du^\epsilon| \int_{|x| < 1} |D\rho(x)| dx$. Aussi, nous obtenons facilement

$$|w_\delta^\epsilon(x) - u^\epsilon(x, t)| \leq \frac{1}{\delta} \int_{|x-y| < \delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) |u^\epsilon(y, t) - u^\epsilon(x, t)| dy,$$

que nous combinons avec (10.21), alors il vient

$$|w_\delta^\epsilon(x) - u^\epsilon(x, t)| \leq C_T \delta.$$

Notons dans toute la suite

$$v(x, s) = u^\epsilon(x, s) - w_\delta^\epsilon(x).$$

En tenant compte du fait que w_δ^ϵ est indépendante de t , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} v &= \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} w_\delta^\epsilon - F(\mathcal{P}u^\epsilon - h) \\ &\leq \frac{C_T}{\delta} - \inf F := M. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Notons

$$\tilde{v}^1(x, s) = v(x, s) - M(s - t),$$

et définissons l'opérateur

$$\mathcal{L}_1(v) = \sum_{i,j} a_{i,j}^\epsilon(Du^\epsilon) \partial_{ij} v.$$

Alors, nous obtenons

$$\frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial t} - \mathcal{L}(\tilde{v}^1) \leq 0.$$

En tenant compte de l'ellipticité de l'opérateur \mathcal{L} , le principe du maximum nous permet d'affirmer que $\sup_{\mathbb{R}^2 \times (s,t)} \tilde{v}^1(x, t)$ est atteint en $t = s$. Alors

$$v(x, t) \leq M(t - s) + \sup_{x \in \mathbb{R}^2} v(x, s) \leq M(t - s) + C_T \delta.$$

Appliquons le même raisonnement, en posant

$$\tilde{v}^2(x, s) = v(x, s) - M(s - t),$$

alors, nous obtenons

$$-v(x, t) \leq M(t - s) + \sup_{x \in \mathbb{R}^2} v(x, s) \leq M(t - s) + C_T \delta.$$

Maintenant, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x, s) - u^\epsilon(x, t)| &\leq |u^\epsilon(x, s) - w_\delta^\epsilon(x)| + |u^\epsilon(x, t) - w_\delta^\epsilon(x)| \\ &\leq \left(-\inf F + \frac{C_T}{\delta} \right) (t - s) + 2C_T \delta. \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant δ par $|t - s|^{\frac{1}{2}}$, nous obtenons le résultat souhaité. Ceci achève la preuve du lemme. \square

PREUVE DU THÉORÈME 11.

Remarquons tout d'abord que l'unicité est garantie par la proposition 6. Grâce à la théorie générale des équations paraboliques quasi-linéaires [LSU68][Fri64], il existe une unique solution régulière u^ϵ du problème P_ϵ . En plus les inégalités (10.21) et (10.23) nous permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà à la suite $(u^\epsilon)_\epsilon$. D'où l'existence d'une sous suite extraite de $(u^\epsilon)_\epsilon$, qui converge uniformément vers une fonction $u \in C(\mathbb{R}^2 \times [0, T]) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$. En tenant compte des résultats de stabilité [Bar94] [CIL92], nous en déduisons que u est solution de (10.4)-(10.5). \square

Chapitre 11

Discrétisation et résultats expérimentaux

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la discrétisation et à l'application du modèle étudié au chapitre précédent. Notre choix est de résoudre (10.1) par le schéma explicite suivant :

$$u^{n+1} = u^n + \delta t (u_{\xi\xi}^n + g(|Du^n|)u_{\eta\eta}^n - F(Pu^n - u_0)). \quad (11.1)$$

où δt est un pas temporel.

Nous allons discuter la discrétisation des opérateurs du deuxième ordre $u_{\xi\xi}^n$ et $u_{\eta\eta}^n$. Ensuite nous allons établir l'algorithme final de notre modèle. Nous discuterons aussi du choix du temps d'arrêt que nous proposons pour l'algorithme.

Nous terminons ce chapitre par des résultats expérimentaux qui permettent de comparer notre modèle à un certain nombre de méthodes d'agrandissement existentes et représentatives.

11.1 Discrétisation

11.1.1 Les termes du second ordre

Pour choisir une approximation des dérivées secondes $u_{\xi\xi}$ et $u_{\eta\eta}$, écrivons $(u_{\xi\xi})_{i,j}$ et $(u_{\eta\eta})_{i,j}$ comme combinaison de $u_{i,j}$ et de ses 8 points voisins. Pour la consistance du schéma numérique, nous allons définir les coefficients des points voisins de manière symétrique par rapport au point central (i, j) :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \bullet^{(i-1,j-1)} & \bullet^{(i-1,j)} & \bullet^{(i-1,j+1)} \\
 & & \\
 \bullet^{(i,j-1)} & \bullet^{(i,j)} & \bullet^{(i,j+1)} \\
 & & \\
 \bullet^{(i+1,j-1)} & \bullet^{(i+1,j)} & \bullet^{(i+1,j+1)}
 \end{array}
 & \xrightarrow{\text{Coefficients de } u_{\xi\xi}} &
 \begin{array}{ccc}
 \lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_3 \\
 \lambda_2 & -4\lambda_0 & \lambda_2 \\
 \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_4
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (u_{\xi\xi})_{i,j} &= -4\lambda_0 u_{i,j} + \lambda_1(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \lambda_2(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \\ &\quad + \lambda_3(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \lambda_4(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j+1}), \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} (u_{\eta\eta})_{i,j} &= -4\lambda'_0 u_{i,j} + \lambda'_1(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \lambda'_2(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) \\ &\quad + \lambda'_3(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \lambda'_4(u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j+1}). \end{aligned} \quad (11.3)$$

où λ_0 et λ'_0 vérifient :

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda_i, \quad \lambda'_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \lambda'_i.$$

Utilisons les développements de Taylor des expressions (10.2) et (10.3) de manière à avoir uniquement des quantités exprimées en (i, j) que nous identifions avec les expressions (11.2) et (11.3), nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2\lambda_0 - (u_x^2/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda_2 = 2\lambda_0 - (u_y^2/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda_3 = -\lambda_0 + (1 - u_x u_y/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda_4 = -\lambda_0 + (1 + u_x u_y/(u_x^2 + u_y^2)), \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 = 2\lambda'_0 - (u_y^2/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda'_2 = 2\lambda'_0 - (u_x^2/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda'_3 = -\lambda'_0 + (1 + u_x u_y/(u_x^2 + u_y^2)), \\ \lambda'_4 = -\lambda'_0 + (1 - u_x u_y/(u_x^2 + u_y^2)). \end{array} \right. \quad (11.4)$$

Nous constatons que $(u_{\xi\xi})_{i,j}$ (resp. $(u_{\eta\eta})_{i,j}$) sont complètement déterminés une fois λ_0 (resp. λ'_0) est fixé.

Le choix de ce paramètre a été largement discuté dans la littérature du traitement d'image. La différence principale entre des différents points de vue, réside dans les critères que les auteurs imposent à λ_0 . Nous présentons ci-dessous les principaux travaux en la matière :

- Dans [CEG⁺93] les auteurs montrent que le principe du maximum, pour l'équation :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + h(u_{\xi\xi})_{i,j}$$

n'est vérifié que si les coefficients $(\lambda_i)_i$ sont positifs. Malheureusement cette condition n'est satisfaite que pour des directions particulières, quand ξ fait un angle multiple de $\pi/4$ avec l'axe (ox) . Les auteurs proposent donc de choisir λ_0 de telle manière qu'elle garde ces valeurs positives en ces directions, et de choisir $(\lambda_i)_i$ pour qu'ils soient positifs le maximum possible :

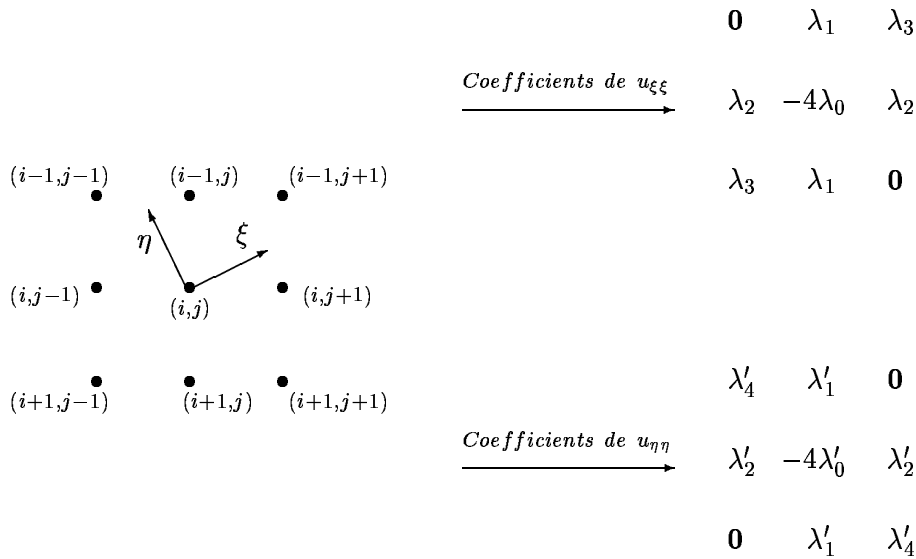
$$\lambda_0 = 0.5 - \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \left(1 + \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \right).$$

- Dans [AM94b] Alvarez et Morel utilisent le même raisonnement que dans [CEG⁺93], mais d'une

manière plus sélective dans le choix des directions, plus précisément ils proposent :

$$\lambda_0 = \begin{cases} 0.5 - \frac{u_x^2 + |u_x u_y|}{u_x^2 + u_y^2}, & \text{si } |u_x| \leq |u_y| \\ 0.5 - \frac{u_y^2 + |u_x u_y|}{u_x^2 + u_y^2}, & \text{si } |u_x| > |u_y| \end{cases}$$

- Dans [LDAR97] Deriche et *al.* proposent, pour discrétiser $u_{\xi\xi}$, de ne pas prendre en compte les deux points de la grille les plus éloignés du segment $(\{i, j\} + \epsilon\xi)$, $\epsilon \in [-1, 1]$.



Ce raisonnement, purement géométrique, a aussi l'avantage de nous épargner le choix de λ_0 . Car une fois $\lambda_4 = 0$ ou bien $\lambda_3 = 0$, λ_0 est complètement déterminée à partir des relations (11.4).

- Notons aussi les travaux de Sapiro-Tannenbaum [ST93] qui choisent $\lambda_0 = 0.5$ et d'Alvarez [Alv] qui en minimisant l'erreur résiduelle dans le développement de Taylor de $u_{\xi\xi}$, obtient $\lambda_0 = 0.25$.

Pour choisir une méthode parmi ces différentes discrétisations, nous avons commencer par les tester sur des images agrandies. Sans remarquer des différences significatives, et sans être capable de différencier ni visuellement ni numériquement entre deux images issues de deux discrétisations différentes, nous avons donc choisit d'utiliser la méthode de [CEG⁺93] qui présente un meilleur compromis entre les principes d'invariances géométriques et le principe du maximum, et surtout parcequ'elle demande moins de calcul.

11.1.2 Le temps d'arrêt

Le choix du temps d'arrêt des équations aux dérivées partielles appliquées au traitements des images, a été largement discuté dans la littérature. Nous avons trouvé trois manières différentes de répondre à cette question :

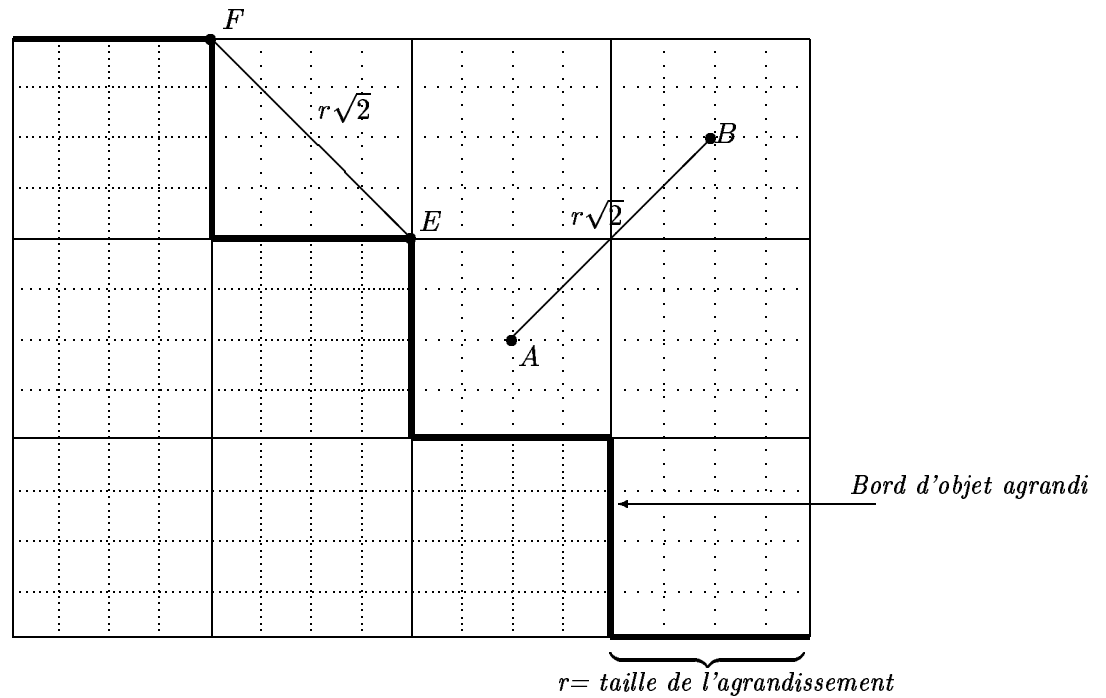


FIG. 11.1 – Echelle de diffusion.

- 1- L'équation contient un terme d'attraction du type $(u - u_0)$ ou de $f(u)$. La solution reste alors assez proche de la donnée initiale ou tend vers les zéros de f quand t est grand. Dans ce cas, le temps d'arrêt peut être infini et la solution "Image Sortie" est donnée par l'état asymptotique du système, comme par exemple dans [Nor90], [ROF92] et [ADK97] dans le cas de $(u - u_0)$ et de [AE97] et [CG93] dans le cas de $f(u)$.
- 2- La nature de l'équation repose sur des critères géométriques. Dans ce cas le temps d'arrêt est estimé en fonction de la taille des objets contenus dans l'image que l'on veut traiter, voir par exemple [ALM92].
- 3- On arrive à montrer que l'équation admet un état asymptotique stable même si l'équation ne contient ni terme d'attraction ni opérateur purement géométrique, comme par exemple dans [CEA98], où les auteurs arrivent à avoir une interprétation de u quand $t \rightarrow \infty$ à l'aide des fonctions de Lyapunov. Aussi pour l'équation de Malik et Perona, mais uniquement en dimension 1, dans [Kic97] l'auteur arrive à interpréter les solutions asymptotiques de l'équation en étudiant son comportement en fonction des valeurs de la dérivée de la donnée initiale.

Dans notre cas le terme de rappel est appliqué sur Pu et non pas sur u . Malheureusement dans ce cas, il est très difficile d'avoir une idée claire sur l'état asymptotique de u . En revanche, suite à la discussion que nous avons menée dans le chapitre 8, nous avons remarqué que l'échelle $r\sqrt{2}$, où r est la taille de l'agrandissement, est un seuil naturel à partir duquel toutes les périodicités sont à garder parce qu'elles existaient déjà dans l'image avant agrandissement. De plus $r\sqrt{2}$ est exactement l'échelle qu'il faut pour que l'information du point A arrive au point B (voir figure 11.1), ce qui est primordiale pour l'action de $u_{\eta\eta}$.

11.2 Application

Dans ce paragraphe, nous proposons de comparer, sur la base de quelques critères géométriques, notre modèle aux méthodes que nous avons décrit dans le chapitre 7. Ces méthodes sont l'agrandissement par duplication, par "zero padding", par interpolation linéaire, par Spline d'ordre 3 et par minimisation de la variation totale. Dans les expériences proposées, les images représentent des agrandissements de taille 4.

Pour cela, nous allons sélectionner trois critères qui caractérisent le plus la géométrie d'une image : l'alignement des bords, la régularité des zones homogènes et la préservation des jonctions en T. Le choix des deux premiers critères découle, tout naturellement de la discussion du chapitre 8. Le troisième critère, les jonctions en T, est liée au processus de complétion amodale, qui est un processus fondamental de la perception visuelle. En effet, notre système visuel est capable de reconstruire les parties cachées des objets en prolongeant artificiellement leurs bords. La préservation des jonctions en T, garantit les mêmes complétions amodales avant et après agrandissement et permet donc la même interprétation visuelle de l'image. Cette propriété de notre système visuel, a été largement étudiée par G. Kanizsa [Kan96].

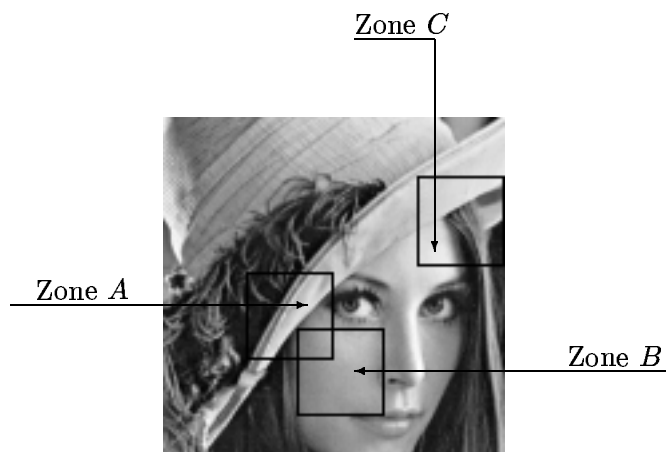


FIG. 11.2 – Une sélection de zones de comparaisons.

Nous allons utiliser trois outils de comparaison. Le premier est l'interprétation visuelle qui constitue un outil de jugement inévitable et naturel. Le deuxième outil est la représentation spectrale qui nous donne une idée sur la manière avec laquelle les hautes fréquences ont été ajoutées à l'image (Dans ces images, le module du spectre a été réhaussé avec un $\gamma = 3$). Enfin, nous allons utiliser la représentation en lignes de niveau, qui nous renseigne sur la géométrie de l'image et surtout sur la capacité d'un agrandissement à éliminer les oscillations des bords.

Dans l'image "Lena", nous avons sélectionné trois zones (figure 11.2) représentatives des trois critères définis ci-dessus. La première zone représente deux bords du chapeau dont les directions sont légèrement différentes. La deuxième zone est représentée par la joue de "Lena". Dans cette partie de l'image réduite, le niveau de gris est relativement homogène. La troisième partie représente plusieurs croisements entre les cheveux et la partie supérieure du chapeau. Nous avons estimé que l'agrandissement de cette zone est un bon test pour vérifier la préservation des jonctions en T.

La figure 11.3 illustre les agrandissements que nous avons choisis, sur la 'zone A de la figure 11.2. L'image initiale contient deux bords approximativement linéaires et assez contrastés. Le but est de savoir lequel des agrandissements est capable de fournir une meilleure régularité des bords. Les deux agrandissements de la première ligne, par duplication et par interpolation linéaire, présentent des effets d'oscillation le long des bords. Au même temps, les images de la deuxième ligne, agrandies par "zero-padding" et par Spline d'ordre 3, ne les présentent pas, mais introduisent un flou considérable. L'image agrandie par le "zero-padding" présente aussi des oscillations dans les zones homogènes, dues aux ondulations de la fonction "sinus cardinal" (figure 7.2). Les deux derniers agrandissements présentent une meilleure régularité des bords par rapport aux précédents. Mais dans l'image agrandie par notre modèle, les bords présentent plus de régularité et d'avantage de netteté par rapport à ceux issus de la minimisation de la variation totale.

Les images de la figure 11.4 représentent les spectres des images 11.3. Pour l'agrandissement par duplication nous remarquons que les basses fréquences sont dupliquées dans les hautes fréquences. Cela est dû à la périodicité des structures dans l'image agrandie. La même remarque est faite pour l'interpolation linéaire, mais avec une atténuation plus rapide quand on s'éloigne de 0. Les spectres des images agrandies par le "zero-padding" et par Spline d'ordre 3 sont assez proches, parce que la transformée de Fourier de la fonction Spline cardinal d'ordre 3 constitue une bonne approximation de la fonction $\mathbb{I}_{[-1,1]}$ mais elle est plus régulière. Comme le montrent leurs spectres respectives, ces deux méthodes ne présentent pas de solution pour l'extrapolation du spectre vers les hautes fréquences. Par contre les deux dernières méthodes, arrivent à extrapoler correctement les deux directions des bords principaux. Comme on le remarque notre méthode, arrive à créer plus de hautes fréquences dans la direction de ces bords.

Dans les images 11.5, nous remarquons qu'à part l'agrandissement par duplication, les autres modèles arrivent à lisser assez correctement l'image. La minimisation de la variation totale tend à rendre l'image constante par morceaux, ceci est dû à la préservation exacte du spectre. Alors que notre modèle arrive à éliminer tout effet de pixelisation.

Les images 11.7, confirment les remarques que nous avons fait sur les images 11.3. En effet, notre modèle présente une meilleure régularité des bords, que nous pouvons aussi remarquer dans les spectres des images 11.8. Par contre, il est un peu moins performant que la minimisation de la variation totale en ce qui concerne la préservation de la jonction en T. Sur la jonction des cheveux avec le chapeau, nous remarquons un arrondi qui est dû au mouvement par courbure moyenne.

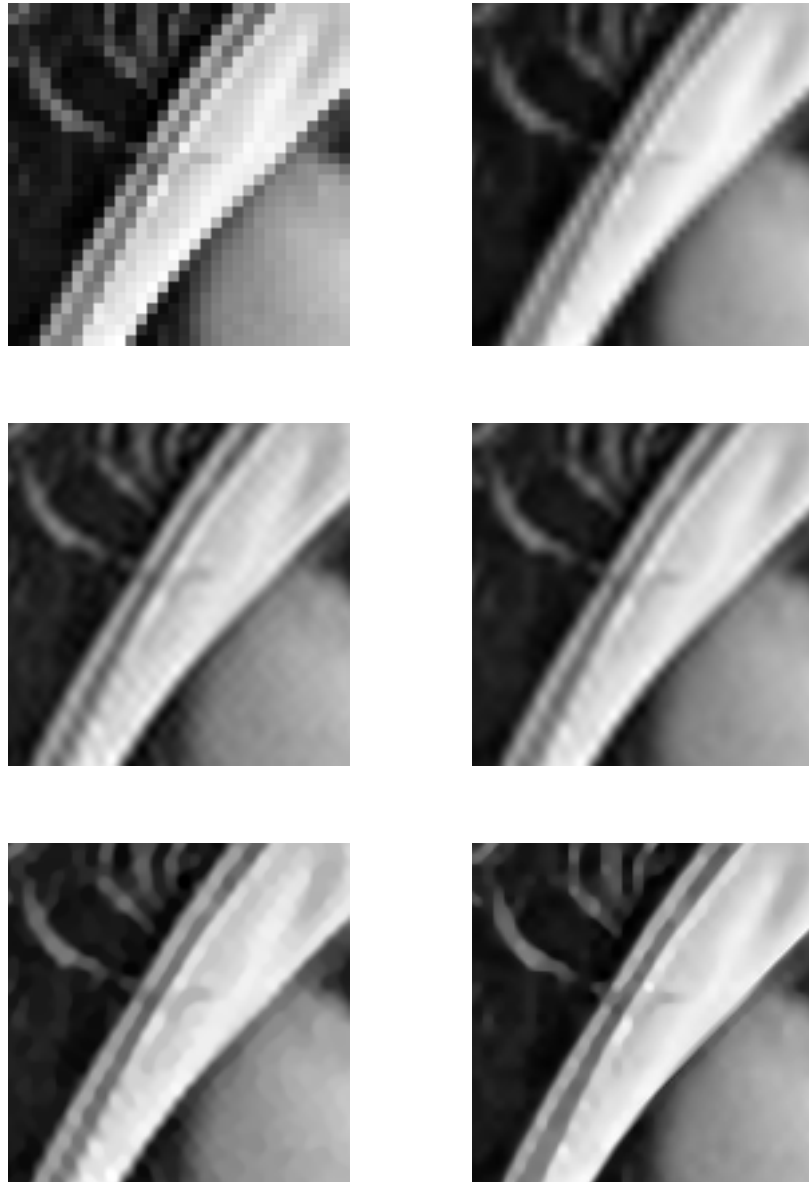


FIG. 11.3 – De gauche à droite et du haut en bas, agrandissement de facteur 4 de la zone **A** de l'image 11.2, par : 1- duplication, 2- interpolation linéaire, 3- zero padding, 4- Spline d'ordre 3, 5- variation totale, 6- Notre modèle avec les coefficients (1, 1, 3).

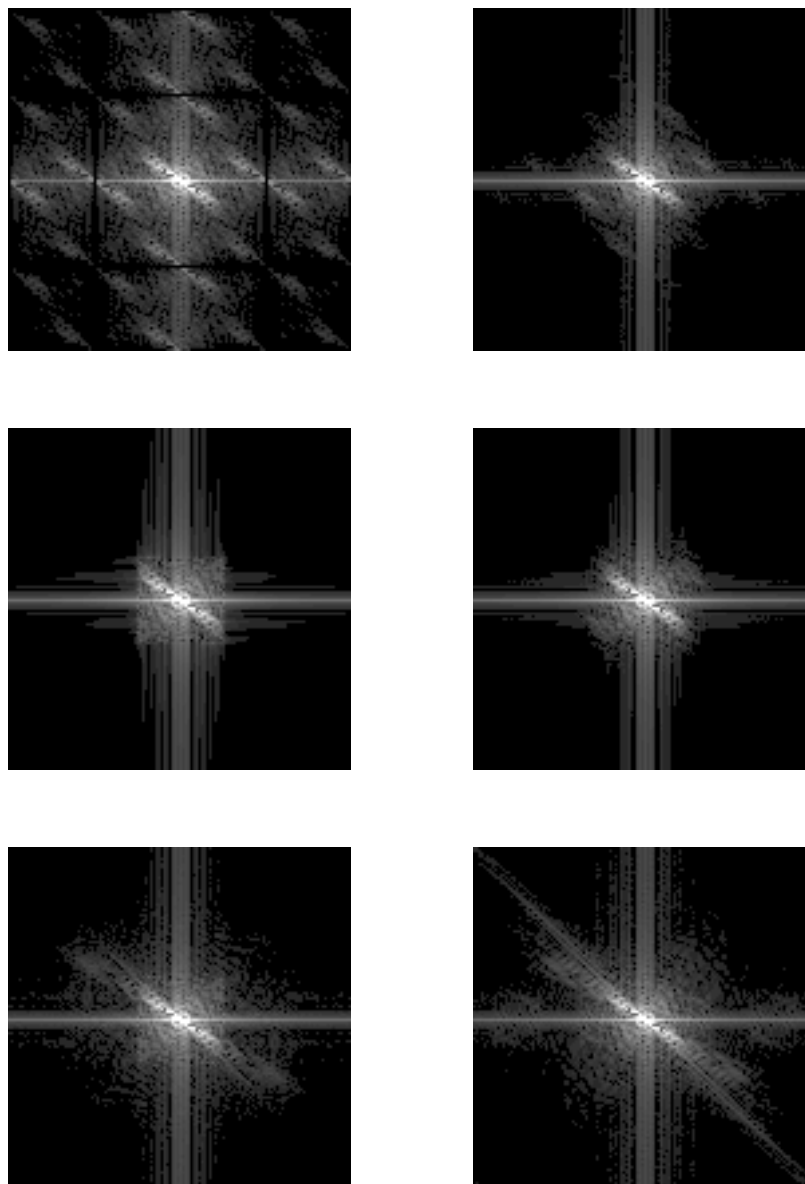


FIG. 11.4 – Les spectres des images de la figure 11.3.

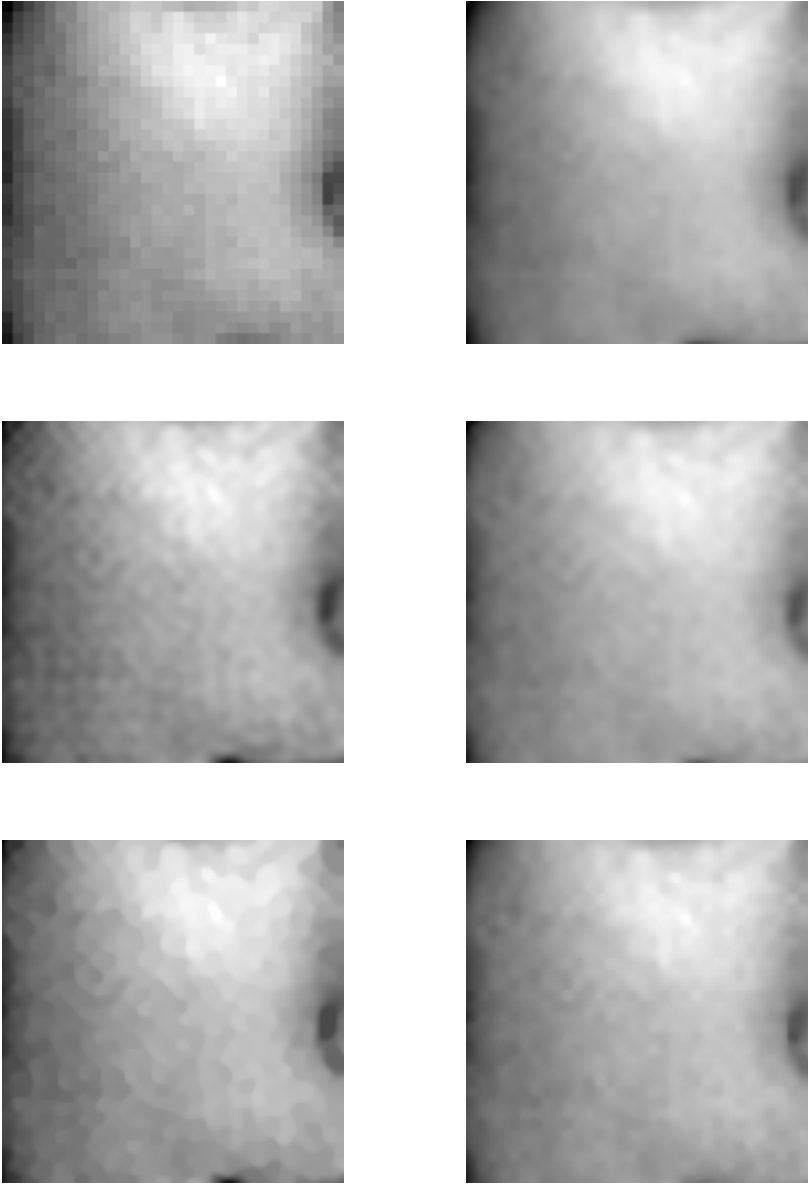


FIG. 11.5 – Même disposition que sur les figures 11.3, pour la zone **B**.

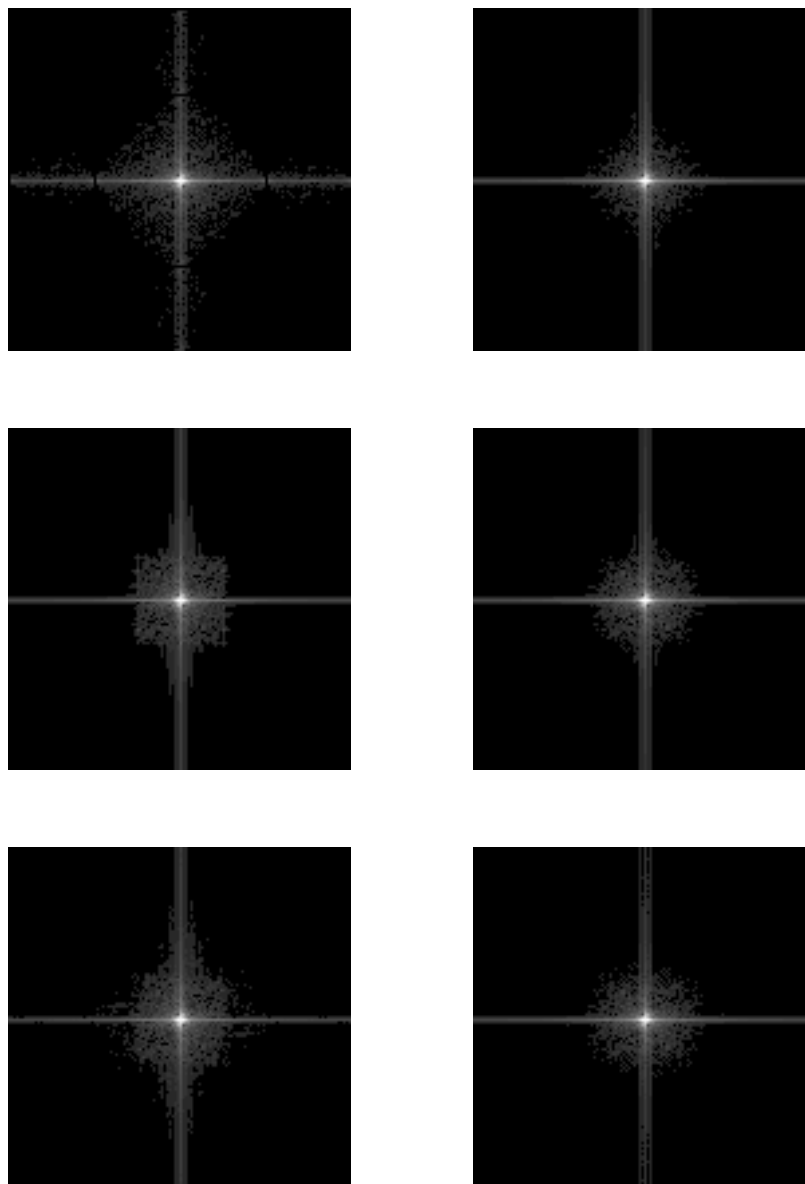


FIG. 11.6 – Les spectres des images de la figure 11.5.

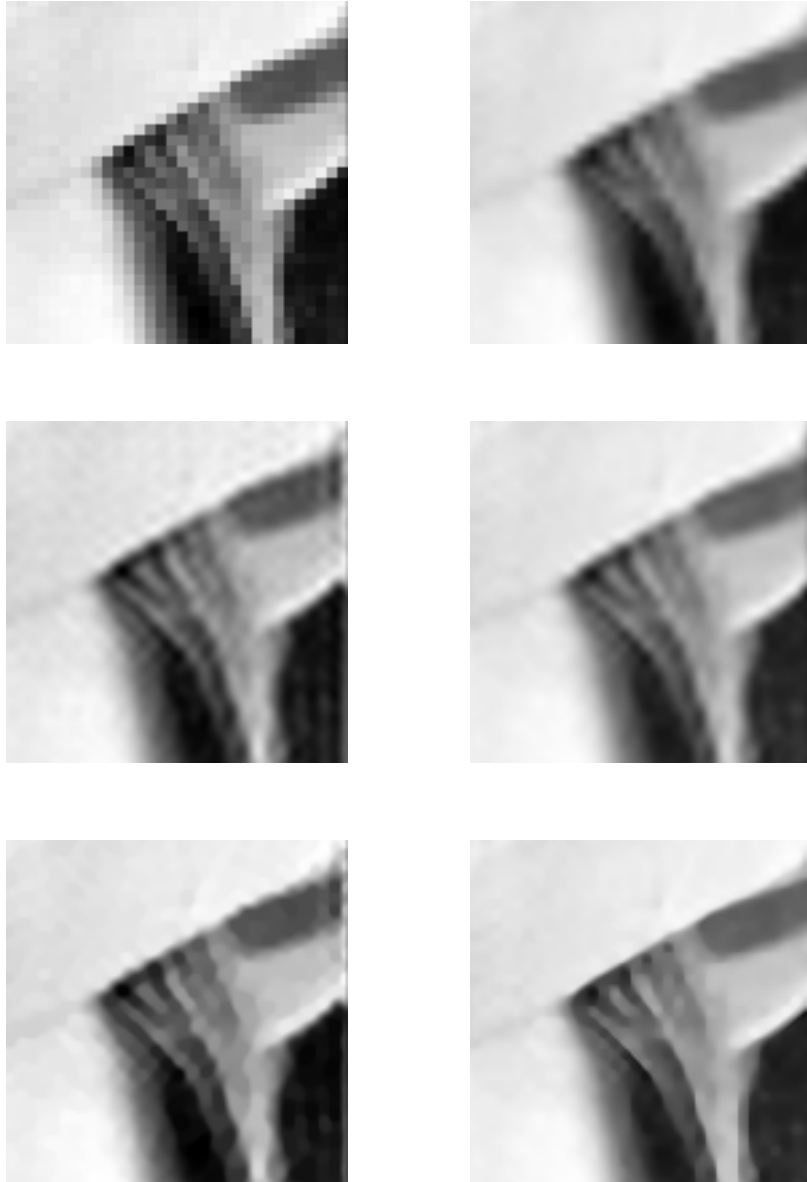


FIG. 11.7 – Même disposition que sur la figure 11.3, pour la zone C.

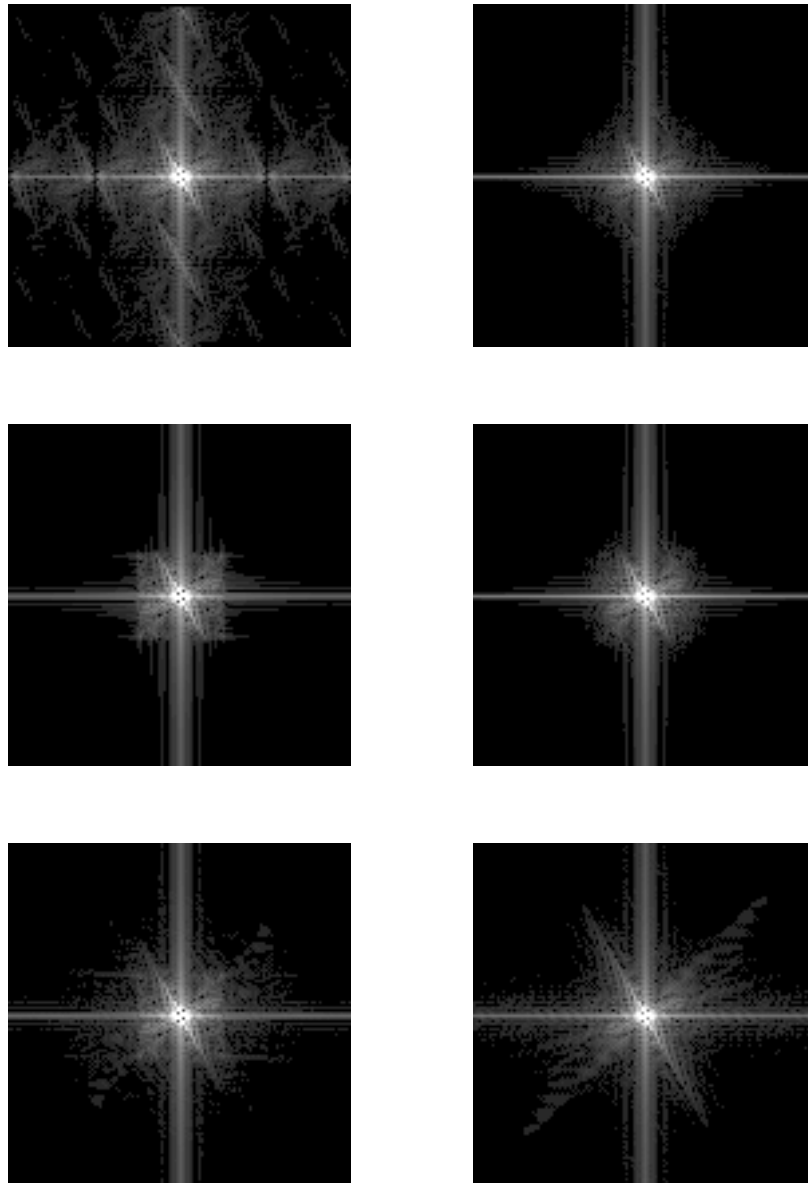


FIG. 11.8 – Les spectres des images de la figure 11.7.



FIG. 11.9 – En haut : Image de Lena. En bas : Agrandissement par duplication de taille 4.



FIG. 11.10 – Agrandissement par notre modèle d'une taille 4 avec les coefficients (1, 1, 3).



FIG. 11.11 – Les lignes de niveaux multiples de 20, de l'image 11.9.



FIG. 11.12 – Les lignes de niveaux multiples de 20, de l'image 11.10.

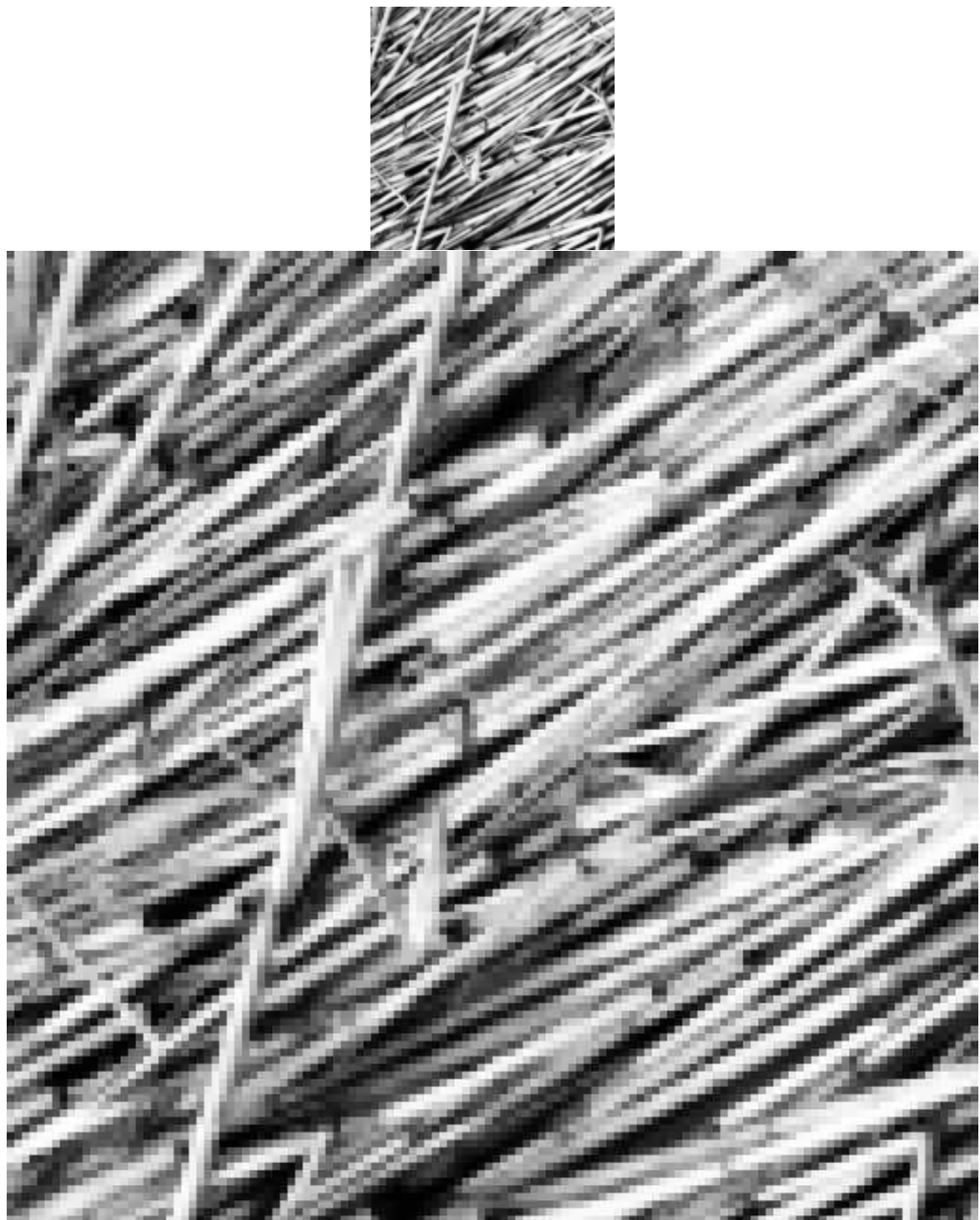


FIG. 11.13 – En haut : Image de textures. En bas : Agrandissement par duplication de taille 4.

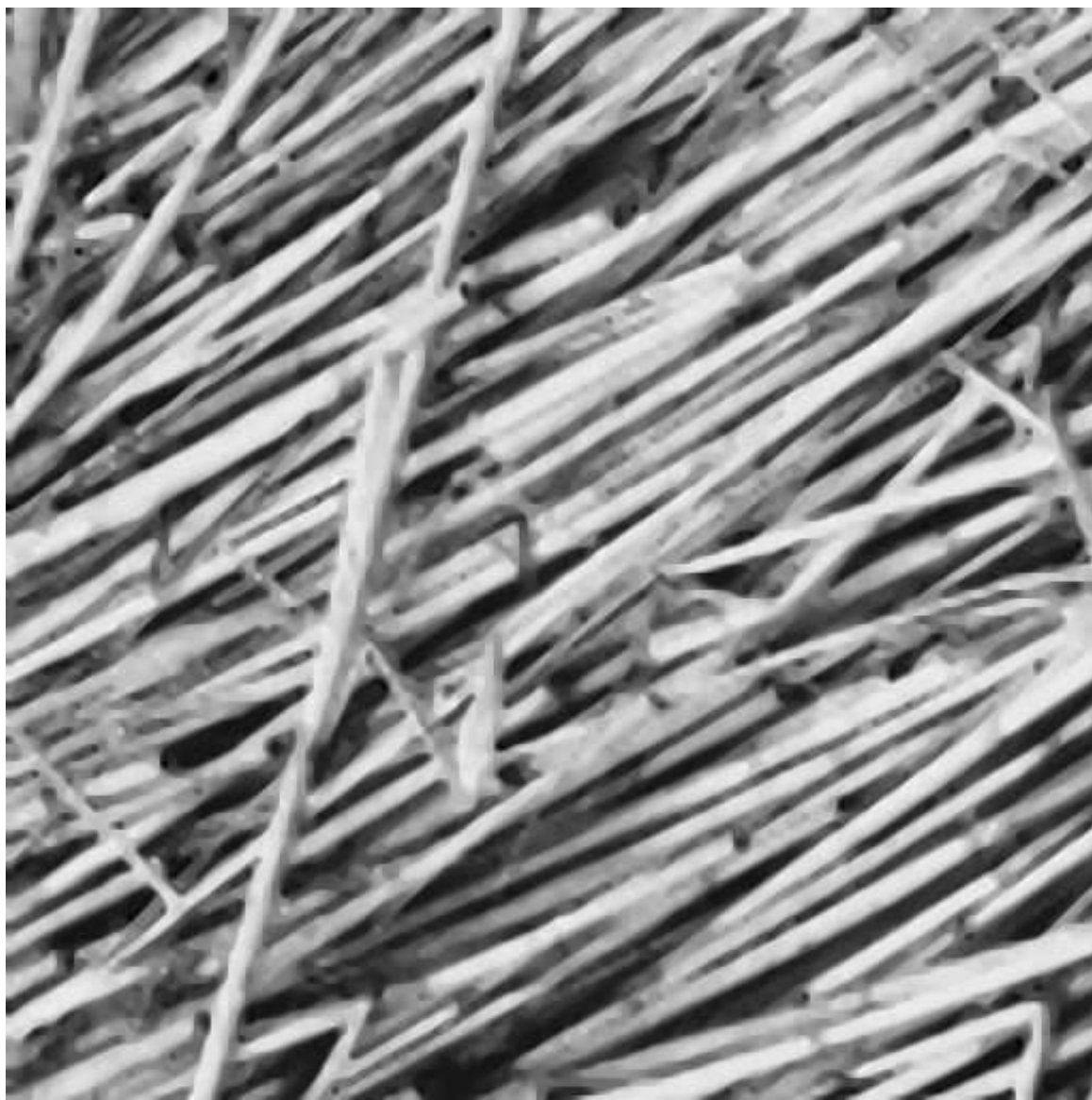


FIG. 11.14 – Agrandissement par notre modèle d'une taille 4 avec les coefficients (1, 1, 3).

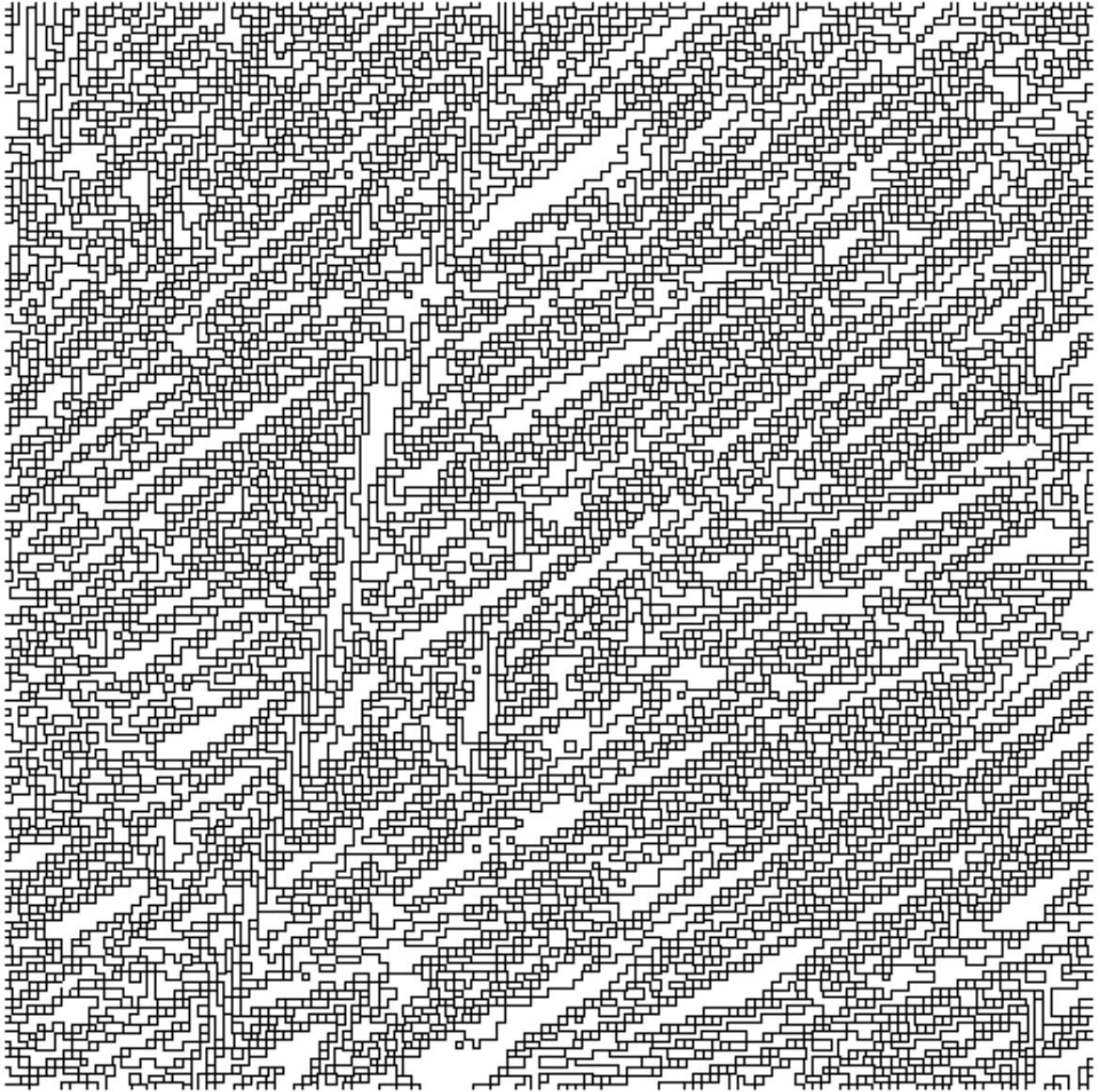


FIG. 11.15 – Les lignes de niveaux multiples de 40, de l'image 11.13.

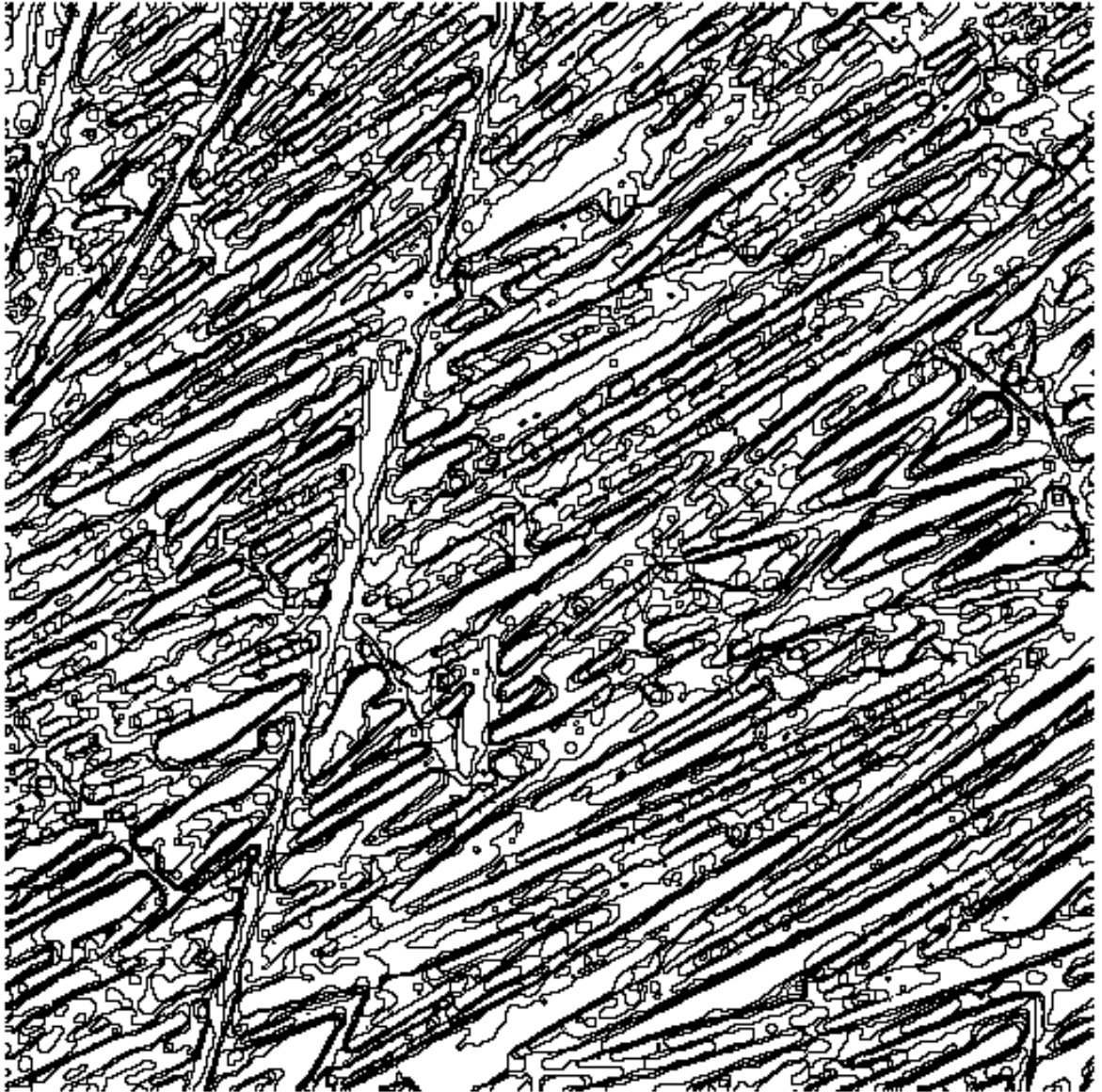


FIG. 11.16 – Les lignes de niveaux multiples de 40, de l'image 11.14.

Annexes

Chapitre 12

Annexe du chapitre 4.

Dans la preuve qui suit, nous allons remplacer la semi-norme H_α par $H_\alpha^x + H_\alpha^t$, où

$$H_\alpha^x(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T] \\ |x-y| \leq \rho}} \frac{|f(x,t) - f(y,t)|}{|x-y|^\alpha}, \quad H_\alpha^t(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N, (t,s) \in [0,T] \\ |t-s| \leq \rho}} \frac{|f(x,t) - f(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Ces deux nouvelles quantités verifient les inégalités :

$$\frac{1}{2}(H_\alpha^x(f) + H_\alpha^t(f)) \leq H_\alpha(f) \leq H_\alpha^x(f) + H_\alpha^t(f). \quad (12.1)$$

Preuve du lemme 1

Nous obtenons facilement les inégalités

$$e^{-T}|w|_0 \leq |\bar{w}|_0 \leq |w|_0.$$

Pour estimer $H_\alpha(\bar{w})$ en fonction de $H_\alpha(w)$, nous utilisons les notations H_α^x et H_α^t . Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$ et $t \in [0, T]$, nous avons

$$e^{-t} \frac{|w(x,t) - w(y,t)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|\bar{w}(x,t) - \bar{w}(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

Nous en déduisons les inégalités :

$$e^{-T} H_\alpha^x(w) \leq H_\alpha^x(\bar{w}) \leq H_\alpha^x(w).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t, s \in [0, T]$, $t \neq s$, $|t-s|^{\frac{1}{2}} \leq \rho$, nous écrivons

$$\frac{|\bar{w}(x,t) - \bar{w}(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq e^{-t} \left(\frac{|w(x,t) - w(x,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \frac{|e^{-t} - e^{-s}|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}} |w(x,s)|$$

$$\frac{|w(x, t) - w(x, s)|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq e^t \left(\frac{|\bar{w}(x, t) - \bar{w}(x, s)|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} \right) + \frac{|e^t - e^s|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} |\bar{w}(x, s)|,$$

puis nous utilisons les inégalité :

$$\frac{|e^{-t} - e^{-s}|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{|e^t - e^s|}{|t - s|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq e^T \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}},$$

pour obtenir finalement :

$$H_\alpha^t(\bar{w}) \leq H_\alpha^t(w) + \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}} |w|_0, \quad H_\alpha^t(w) \leq e^T \left(H_\alpha^t(\bar{w}) + \min\{T, \rho^2\}^{1-\frac{\alpha}{2}} |\bar{w}|_0 \right).$$

Ce qui achève la preuve. \square

Preuve du lemme 2

Soient $P, Q \in \bar{\Omega} \times [0, T]$ tels que $0 < d(P, Q) \leq \rho$. Pour la première inégalité, il suffit de remarquer que :

$$\left| \frac{f(P) - f(Q)}{d(P, Q)^\alpha} \right| \leq \rho^{1-\alpha} \left| \frac{f(P) - f(Q)}{d(P, Q)} \right|.$$

Pour la deuxième inégalité, nous écrivons :

$$|f_1(P)f_2(P) - f_1(Q)f_2(Q)| \leq |f_1(P)| |f_2(P) - f_2(Q)| + |f_2(Q)| |f_1(P) - f_1(Q)|$$

puis nous utilisons la définition de $|\cdot|_0$ et de $H_\alpha(\cdot)$ pour conclure. \square

Preuve du lemme 3

Le fait que $g(v) \in C_{1,0,\alpha}(\bar{\Omega} \times [0, T])$ se déduit du lemme 2 et de la régularité de g . Pour prouver (4.26), nous rappelons :

$$|g(v)|_{1,0,\alpha} = |g(v)|_0 + \sum_{i=1}^N |\partial_i(g(v))|_0 + \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i(g(v))).$$

Nous avons les majorations suivantes :

$$|g(v)|_0 \leq C_0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N |\partial_i(g(v))|_0 \leq C_1 \sum_{i=1}^N |\partial_i v|_0.$$

En utilisant les inégalités du lemme 2, nous traitons le troisième terme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i(g(v))) &= \sum_{i=1}^N H_\alpha(g'(v)\partial_i v) \\
&\leq |g'(v)|_0 \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i v) + H_\alpha(g'(v)) \sum_{i=1}^N |\partial_i v|_0 \\
&\leq C_1 \sum_{i=1}^N H_\alpha(\partial_i v) + C_2 \rho^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i v|_0 \right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi le lemme est prouvé. \square

Preuve du lemme 4

Tout d'abord, nous commençons par définir, pour f , les constantes c_0 , c_1 et c_2 comme suit :

$$|f^{(i)}(v_1) - f^{(i)}(v_2)|_0 \leq c_i |v_1 - v_2|_0 \quad \text{pour } i = 0, 1, 2. \quad (12.2)$$

En utilisant l'expression

$$\partial_i(f(v_1) - f(v_2)) = (f'(v_1) - f'(v_2))\partial_i v_1 + f'(v_2)(\partial_i v_1 - \partial_i v_2) \quad (12.3)$$

nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}
|\partial_i(f(v_1) - f(v_2))|_0 &\leq |f'(v_1) - f'(v_2)|_0 |\partial_i v_1|_0 + |f'(v_2)|_0 |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0 \\
&\leq c_1 |v_1 - v_2|_0 |\partial_i v_1|_0 + c_0 |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=1}^n |\partial_i(f(v_1) - f(v_2))|_0 \leq c_1 |v_1 - v_2|_0 \sum_{i=1}^n |\partial_i v_1|_0 + c_0 \sum_{i=1}^n |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0. \quad (12.4)$$

Pour estimer la partie Hölder $H_\alpha(\partial_i(f(v_1) - f(v_2)))$, nous appliquons le lemme 2 à l'expression (12.3) :

$$\begin{aligned}
H_\alpha(\partial_i(f(v_1) - f(v_2))) &\leq H_\alpha(\partial_i v_1) |f'(v_1) - f'(v_2)|_0 + |\partial_i v_1|_0 H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2)) \\
&\quad + H_\alpha(f'(v_2)) |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0 + |f'(v_2)|_0 H_\alpha(\partial_i v_1 - \partial_i v_2)
\end{aligned}$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^n H_\alpha(\partial_i(f(v_1) - f(v_2))) = \sum_{i=1}^n H_\alpha((f'(v_1)\partial_i v_1 - f'(v_2)\partial_i v_2))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{i=1}^n H_\alpha(\partial_i v_1) \right) |f'(v_1) - f'(v_2)|_0 + \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i v_1|_0 \right) H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2)) \\
&\quad + H_\alpha(f'(v_2)) \sum_{i=1}^n |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0 + |f'(v_2)|_0 \sum_{i=1}^n H_\alpha(\partial_i v_1 - \partial_i v_2) \\
&\leq R c_1 |v_1 - v_2|_0 + R H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2)) + c_1 R \rho^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0 + \\
&\quad + c_0 \sum_{i=1}^n H_\alpha(\partial_i v_1 - \partial_i v_2). \tag{12.5}
\end{aligned}$$

Pour conclure nous allons estimer $H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2))$. Pour ce faire, nous écrivons $f'(v_1) - f'(v_2)$ sous forme intégrale (pour alléger les notations on pose $w = v_1 - v_2$) :

$$f'(v_1) - f'(v_2) = \int_0^1 f''(v_1 - s w) w \, ds.$$

Alors, pour tout $P, Q \in \overline{\Omega} \times [0, T]$:

$$\left(f'(v_1(P)) - f'(v_2(P)) \right) - \left(f'(v_1(Q)) - f'(v_2(Q)) \right) = A_1(P, Q) + A_2(P, Q) - A_2(Q, Q),$$

où

$$\begin{aligned}
A_1(P, Q) &:= \int_0^1 f''(v_1(P) - s w(P)) (w(P) - w(Q)) \, ds, \\
A_2(P, Q) &:= \int_0^1 f''(v_1(P) - s w(P)) w(Q) \, ds.
\end{aligned}$$

Une majoration immédiate de $A_1(P, Q)$ est la suivante :

$$|A_1(P, Q)| \leq c_1 |w(P) - w(Q)|, \tag{12.6}$$

et par suite,

$$\sup_{\substack{P, Q \in \overline{\Omega} \times [0, T] \\ d(P, Q) \leq \rho}} \frac{|A_1(P, Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leq c_1 H_\alpha(w). \tag{12.7}$$

Majorons le terme $|A_2(P, Q) - A_2(Q, Q)|$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&|A_2(P, Q) - A_2(Q, Q)| \\
&\leq \int_0^1 \left| f''(v_1(P) - s w(P)) - f''(v_1(Q) - s w(Q)) \right| |w(Q)| \, ds \\
&\leq c_2 \int_0^1 |v_1(P) - v_1(Q) - s(w(P) - w(Q))| |w(Q)| \, ds \\
&\leq \left(c_2 |v_1(P) - v_1(Q)| + \frac{c_2}{2} |w(P) - w(Q)| \right) |w|_0.
\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{\substack{P, Q \in \overline{\Omega} \times [0, T] \\ d(P, Q) \leq \rho}} \frac{|A_2(P, Q) - A_2(Q, Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leq \left(c_2 H_\alpha(v_1) + \frac{c_2}{2} H_\alpha(w) \right) |w|_0. \quad (12.8)$$

Utilisons l'hypothèse $|v_1|_{1,0,\alpha}, |v_2|_{1,0,\alpha} \leq R$ ainsi que l'inégalité (4.24), pour obtenir les majorations :

$$\begin{aligned} H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2)) &\leq c_1 H_\alpha(v_1 - v_2) + \left(c_2 H_\alpha(v_1) + \frac{c_2}{2} H_\alpha(v_1 - v_2) \right) |v_1 - v_2|_0 \\ &\leq c_1 \rho^{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |\partial_i v_1 - \partial_i v_2|_0 + 2c_2 R \rho^{1-\alpha} |v_1 - v_2|_0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Il reste à remplacer dans (12.5) $H_\alpha(f'(v_1) - f'(v_2))$ par (12.9) puis de l'additionner avec les inégalités (12.2) pour $i = 0$ et (12.4) pour avoir en fin l'inégalité recherchée :

$$\begin{aligned} |f(v_1) - f(v_2)|_{1,0,\alpha} &\leq \{c_0 + 2c_1 R + c_2 R^2 (1 + \rho^{1-\alpha})\} |v_1 - v_2|_0 \\ &\quad + \{c_0 + R(1 + c_1 \rho^{1-\alpha})\} \sum_{i=1}^n |\partial_i(v_1 - v_2)|_0 + c_0 H_\alpha(\partial_i(v_1 - v_2)) \\ &\leq C(f)(1 + R^2) |v_1 - v_2|_{1,0,\alpha}. \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. \square

Preuve du lemme 5

Il est facile de remarquer que la condition de Neumann nous assure que \tilde{u}_0 est de classe C^1 , et que nous avons les égalités :

$$|\tilde{u}_0|_0 = |u_0|_0 \quad \text{et} \quad |\partial_i \tilde{u}_0|_0 = |\partial_i u_0|_0 \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Nous nous intéressons maintenant à la continuité des dérivées partielles d'ordre 2 de \tilde{u}_0 . Soient $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ et Ω_{i_0} le symétrique de Ω par rapport à l'hyperplan d'équation $(x_{i_0} = 1)$. Il est clair que le problème se pose uniquement au niveau des points appartenant à $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}_{i_0}$.

Fixons $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}_{i_0}$. Si $i_0 \notin \{i, j\}$, par symétrie, $\partial_{ij} \tilde{u}_0$ est continue en x . Sinon deux cas se présentent ; quand $i = i_0, j \neq i_0$, nous utilisons alors la condition de Neumann,

$$\begin{aligned} \partial_{j i_0} \tilde{u}_0(x)|_{\overline{\Omega}} &= \partial_{j i_0} u_0(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial_{i_0} u_0(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - \partial_{i_0} u_0(x)}{h} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le même raisonnement sur $\overline{\Omega}_{i_0}$, nous permet d'avoir $\partial_{j i_0} \tilde{u}_0(x)|_{\overline{\Omega}_{i_0}} = 0$.

Dans le cas où $i = j = i_0$, on utilise la symétrie de \tilde{u}_0 par rapport à $\overline{\Omega} \cap \overline{\Omega}_{i_0}$ et $\partial_{i_0} \tilde{u}_0(x) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
\partial_{i_0 i_0} \tilde{u}_0(x)|_{\overline{\Omega}} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial_{i_0} \tilde{u}_0(x_1, \dots, x_{i_0} + h, \dots, x_n) - \partial_{i_0} \tilde{u}_0(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\partial_{i_0} \tilde{u}_0(x_1, \dots, x_{i_0} - h, \dots, x_n) + \partial_{i_0} \tilde{u}_0(x)}{h} \right) \\
&= \partial_{i_0 i_0} \tilde{u}_0(x)|_{\overline{\Omega}_{i_0}}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que \tilde{u}_0 est de classe C^2 sur \mathbb{R}^N .

Pour estimer $|\partial_{ij} \tilde{u}_0|_0$, nous fixons $x, y \in \mathbb{R}^N$ tout en remarquons que, modulo une translation et/ou une symétrie, nous pouvons supposer que $x \in \overline{\Omega}$ et $y \in \overline{\Omega}'$ avec Ω' un symétrique ou un translaté de $\overline{\Omega}$. Soit $z \in \overline{\Omega}$, l'image de y par la bijection qui envoie $\overline{\Omega}'$ dans $\overline{\Omega}$. Il s'agit de montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\partial_{ij} u_0(z) = \partial_{ij} \tilde{u}_0(y)$. Dans le cas d'un translaté c'est évident. Dans l'autre cas, on se ramène à $\overline{\Omega}' = \overline{\Omega}_{i_0}$ défini comme ci-dessus et $i = i_0$. Ainsi, nous écrivons,

$$\begin{aligned}
\partial_{ji} \tilde{u}_0(y) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial_i \tilde{u}_0(y_1, \dots, y_j + h, \dots, y_n) - \partial_i \tilde{u}_0(y)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\partial_i \tilde{u}_0(z_1, \dots, z_j - h, \dots, z_n) + \partial_i \tilde{u}_0(z)}{h} \right) \\
&= \partial_{ji} u_0(z)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $|\partial_{ij} \tilde{u}_0|_0 = |\partial_{ij} u_0|_0$.

Finalement, pour estimer la norme de Hölder de $\partial_{ij} \tilde{u}_0$, remarquons que $|x - z| \leq |x - y|$ (puisque $\{x_{i_0} = 1\}$ est le plan median du segment $[z, y]$ et $z, x \in \{x_{i_0} \leq 1\}$), alors il vient

$$\begin{aligned}
\frac{|\partial_{ij} \tilde{u}_0(x) - \partial_{ij} \tilde{u}_0(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|\partial_{ij} u_0(x) - \partial_{ij} u_0(z)|}{|x - y|^\alpha} \\
&\leq \frac{|\partial_{ij} u_0(x) - \partial_{ij} u_0(z)|}{|x - z|^\alpha}
\end{aligned}$$

d'où $h_\alpha(\partial_{ij} \tilde{u}_0) = h_\alpha(\partial_{ij} u_0)$, ce qui achève la preuve du lemme. \square

Chapitre 13

Annexe du chapitre 5.

Avant de prouver le lemme 13, nous présentons ci-dessous quelques rappels sur le degré topologique de Brouwer [Bro12]. En particulier, nous avons besoin de définir ce degré sur l'ensemble des fonctions périodiques de période $\Omega =]0,1[)^2$ qui correspond à l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ou d'une manière équivalente sur le tors $C(0,1) \times C(0,1)$. Pour cela, nous nous référons à E. Heinz [Hei59] et à O. Kavian [Kav93].

Bien que nous ayons besoin de présenter la définition qu'en dimension 2, par soucis de généralité nous la présentons en dimension quelconque.

Définition 4. Soient $N \geq 1$ un entier et une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N; \mathbb{R}^N)$. On considère $\phi \in C(]0, \infty[; \mathbb{R})$ à support compact telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(|x|) dx = 1.$$

On appelle le **degré topologique de Brouwer** de f dans $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$, le nombre :

$$\deg(f, \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N) = \int_{\Omega} \phi(|f(x)|) J_f(x) dx,$$

où Ω désigne toute cellule de périodicité et $J_f(x)$ le jacobien de f au point x , i.e. $J_f(x) := \det [\partial_i f^j(x)]$.

Cette définition est un cas particulier de la définition générale du degré topologique de Brouwer. Pour plus de résultats et précisions sur le degré topologique de Brouwer, on peut consulter le livre "référence" de G. De Rham [Rha55]. Dans E. Heinz [Hei59], le degré est défini pour une fonction $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ par rapport à un point cible $b \notin f(\partial\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de la manière suivante :

$$\deg(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \phi(|f(x) - b|) J_f(x) dx,$$

où ϕ est à support compact dans $]0, \epsilon[$, avec $0 < \epsilon < \text{dist}(b, f(\partial\Omega))$.

Dans le cas périodique, nous avons $\partial\Omega = \emptyset$, ainsi pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(b, \partial\Omega) = \infty$. Par conséquent, la définition du degré topologique de Brouwer sur $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ ne dépend pas ni de b ni de ϵ . Pour simplifier nous avons choisit $b = 0$ et $\epsilon > 0$ quelconque.

Nous avons le lemme suivant, qui se démontre de même manière que le lemme 2.10 de ([Kav93]; page :105) et le théorème 6 de [Hei59] :

Lemme 23. *Soient $N \geq 1$ un entier et une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N; \mathbb{R}^N)$. Alors on a :*

$$\text{deg}(f, \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N) = 0. \quad (13.1)$$

Preuve du lemme 13.

Nous nous plaçons dans le cas $N = 2$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. Tout d'abord nous allons établir l'égalité recherchée pour ψ continue à support compact puis nous prouvons le cas où ψ bornée et uniformément continue, par densité.

Soit $\psi \in C([0, \infty[; \mathbb{R})$ à support compact et posons $f = Du$, alors d'après (13.1), nous avons :

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x, y)|) J_f(x, y) dx dy = 0.$$

ou d'une manière équivalente :

$$\int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) \partial_{xx} u(x, y) \partial_{yy} u(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) (\partial_{xy} u(x, y))^2 dx dy.$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) \left((\partial_{xx} u(x, y))^2 + (\partial_{yy} u(x, y))^2 + 2\partial_{xx} u(x, y) \partial_{yy} u(x, y) \right) dx dy \\ = \\ \int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) \left((\partial_{xx} u(x, y))^2 + (\partial_{yy} u(x, y))^2 + 2(\partial_{xy} u(x, y))^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) |\Delta u(x, y)|^2 dx dy = \int_{\Omega} \psi(|Du(x, y)|) |D^2 u(x, y)|^2 dx dy. \quad (13.2)$$

Maintenant ψ est une fonction bornée et uniformément continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Alors il existe une suite de fonctions continues à supports compacts $(\phi_n)_n$ qui convergent uniformément vers ψ i.e. :

pour tout $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que si $n > N_\epsilon$ alors

$$|\psi(x) - \phi_n(x)| \leq \epsilon, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Choisissons $\epsilon > 0$, alors pour $n > N_\epsilon$ nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \psi(|Du|) |\Delta u(x, y)|^2 dx dy - \int_{\Omega} \phi_n(|Du|) |\Delta u|^2 dx dy \right| \\ & \leq \int_{\Omega} |\psi(|Du|) - \phi_n(|Du|)| |\Delta u|^2 dx dy \\ & \leq \epsilon \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et de la même manière,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \psi(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy - \int_{\Omega} \phi_n(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy \right| \\ & \leq \int_{\Omega} |\psi(|Du|) - \phi_n(|Du|)| |D^2 u(x, y)|^2 dx dy \\ & \leq \epsilon \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \psi(|Du|) |\Delta u(x, y)|^2 dx dy - \int_{\Omega} \psi(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} \psi(|Du|) |\Delta u|^2 dx dy - \int_{\Omega} \phi_n(|Du|) |\Delta u|^2 dx dy \right| \\ & \quad + \left| \int_{\Omega} \psi(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy - \int_{\Omega} \phi_n(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy \right| \\ & \leq \epsilon (\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

ϵ étant quelconque, alors nous obtenons l'égalité recherchée :

$$\int_{\Omega} \psi(|Du|) |\Delta u(x, y)|^2 dx dy = \int_{\Omega} \psi(|Du|) |D^2 u|^2 dx dy$$

Ceci achève la preuve du lemme. \square

Preuve du lemme 14.

Dans toute la suite, nous allons noter $\lambda = \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Problème régularisé

Par densité de $C^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, il existe une suite (v_n) dans $C^\infty(\Omega)$ qui converge vers v dans $H^1(\Omega)$. En utilisant des arguments classiques de troncature et de convolution, nous demandons en plus à (v_n) , de vérifier $0 \leq v_n \leq \lambda$ pour tout $n \geq 0$. Nous en déduisons que la solution u_n du problème :

$$(P_n) \quad \operatorname{div}(g(v_n)Du_n) = f, \quad \frac{\partial u_n}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} u_n(x) dx = 0. \quad (13.3)$$

est dans $H^1(\Omega)$ et puisque $\|D(g(v_n))\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ et $f \in L^2(\Omega)$, un résultat classique de régularité nous permet d'avoir en plus, u_n dans $H^2(\Omega)$.

Convergence de (u_n) dans $H^1(\Omega)$

Multiplications $\operatorname{div}(g(v_n)Du_n) = f$ par u_n puis intégrons le résultat sur Ω , il vient :

$$\int_{\Omega} g(v_n)|Du_n|^2 dx = - \int_{\Omega} f u_n dx.$$

Le premier terme est minoré par $g(\lambda)\|Du_n\|_{L^2(\Omega)}^2$. Pour majorer le deuxième, nous utilisons l'inégalité de Hölder, puis celle de Poincaré-Wirtinger, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f u_n dx &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|Du_n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Il en résulte une borne uniforme sur (u_n) dans $H^1(\Omega)$:

$$\|Du_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{g(\lambda)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13.5)$$

Nous en déduisons l'existence d'une sous-suite (u_{n_j}) , extraite de (u_n) , qui converge vers u fortement dans $L^2(\Omega)$, faiblement dans $H^1(\Omega)$ et presque partout dans Ω . Il s'agit ensuite de montrer que la convergence de (u_{n_j}) vers u dans $H^1(\Omega)$ est une convergence forte. En effet

$$\int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du_{n_j} - Du|^2 dx = \int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du_{n_j}|^2 dx - 2 \int_{\Omega} g(v_{n_j})Du_{n_j}Du dx + \int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du|^2 dx,$$

en plus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du_{n_j}|^2 dx &= - \int_{\Omega} f u_{n_j} dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} - \int_{\Omega} f u dx, \\ \int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du|^2 dx &\xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g(v)|Du|^2 dx = - \int_{\Omega} f u dx, \\ -2 \int_{\Omega} g(v_{n_j})Du_{n_j}Du dx &= 2 \int_{\Omega} f u dx. \end{aligned}$$

d'où

$$g(\lambda) \int_{\Omega} |Du_{n_j} - Du|^2 dx \leq \int_{\Omega} g(v_{n_j})|Du_{n_j} - Du|^2 dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où la convergence forte de (u_{n_j}) vers u dans $H^1(\Omega)$.

Estimation du lemme pour le problème régularisé

Dans cette partie, nous démontrons que l'inégalité (5.31) est vraie pour le problème P_{n_j} (le

problème (13.3) avec n remplacée par n_j). Pour ce faire, développons la première équation de P_{n_j} :

$$f = g(v_{n_j})\Delta u_{n_j} + g'(v_{n_j})Dv_{n_j}Du_{n_j}, \quad (13.6)$$

puis divisons par $1 + |Du_{n_j}| > 0$, alors il vient

$$g(v_{n_j}) \left| \frac{\Delta u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right| \leq \left| \frac{f}{1 + |Du_{n_j}|} \right| + |g'(v_{n_j})| \left| \frac{Dv_{n_j}Du_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right|.$$

Ensuite, nous passons à la norme $L^2(\Omega)$ pour avoir

$$g(\lambda) \left\| \frac{\Delta u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{f}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|g'(v_{n_j})\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{Dv_{n_j}Du_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Utilisons le fait que $1 + |Du_{n_j}| \geq 1$, alors il vient

$$\left\| \frac{f}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

et l'inégalité $1 + |Du_{n_j}| \geq |Du_{n_j}|$, pour avoir

$$\left\| \frac{Dv_{n_j}Du_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Dv_{n_j}\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où

$$\left\| \frac{\Delta u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_{n_j}\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (13.7)$$

où $C = \frac{1}{g(\lambda)} \max(1, \|g'(v_{n_j})\|_\infty)$.

Maintenant, nous prolongeons u_{n_j} sur \mathbb{R}^2 par symétrisation et périodicité en une fonction \tilde{u}_{n_j} 2Ω périodique. Alors, d'après le corollaire 1, nous avons :

$$\left\| \frac{D^2\tilde{u}_{n_j}}{1 + |D\tilde{u}_{n_j}|} \right\|_{L^2(2\Omega)} = \left\| \frac{\Delta\tilde{u}_{n_j}}{1 + |D\tilde{u}_{n_j}|} \right\|_{L^2(2\Omega)}.$$

Par symétrie de \tilde{u}_{n_j} dans 2Ω , nous en déduisons l'égalité

$$\left\| \frac{D^2u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \frac{\Delta u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

que nous utilisons dans (13.7), pour obtenir enfin la majoration recherchée :

$$\left\| \frac{D^2u_{n_j}}{1 + |Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_{n_j}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

où C est la constante de l'inégalité (13.7).

En particulier, nous en déduisons l'existence d'une sous suite extraite de $(D^2u_{n_j}/1 + |Du_{n_j}|)_j$, que nous notons toujours par $(D^2u_{n_j}/1 + |Du_{n_j}|)_j$, faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$. Le but de la suite est de prouver que sa limite faible est $(D^2u/1 + |Du|)$. Pour celà, nous allons étudier séparément la limite de $(D^2u_{n_j})_j$ et celle de $(1/1 + |Du_{n_j}|)_j$.

La limite faible de $(D^2u_{n_j})_j$

Maintenant, nous allons noter¹ $\Omega_1 = (-1, 2) \times (-1, 2)$ et choisir une fonction $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, telle que $\Omega \subset\subset \text{supp}(\xi) \subset\subset \Omega_1$, qui vérifie

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2/\Omega_1. \end{cases}$$

Nous en déduisons que $\tilde{u}_{n_j}\xi \in W_0^{2,1+\epsilon}(\Omega_1)$ pour tout $\epsilon \in (0, 1)$ (ϵ sera fixé plus tard). Alors, d'après Gilbarg-Trudinger [GT77] chap.9, corollary.10, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que

$$\|D^2(\tilde{u}_{n_j}\xi)\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)} \leq C(\epsilon)\|\Delta(\tilde{u}_{n_j}\xi)\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)}.$$

Par suite, nous avons

$$\begin{aligned} \|D^2u_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} &\leq \|D^2(\tilde{u}_{n_j}\xi)\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)}, \\ &\leq C(\epsilon)\|\Delta(\tilde{u}_{n_j}\xi)\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)}, \\ &\leq C(\epsilon)\left\{\|\xi\Delta\tilde{u}_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)} + \|\tilde{u}_{n_j}\Delta\xi\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)} + 2\|D\tilde{u}_{n_j}D\xi\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)}\right\}, \\ &\leq C(\epsilon)C\left\{\|\Delta\tilde{u}_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)} + \|\tilde{u}_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)} + \|D\tilde{u}_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega_1)}\right\}, \end{aligned}$$

où $C := \max(\|\xi\|_\infty, 2\|D\xi\|_\infty, \|\Delta\xi\|_\infty)$. Nous obtenons alors, la majoration suivante :

$$\|D^2u_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} \leq 9C(\epsilon)C\left\{\|\Delta u_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} + \|u_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} + 2\|Du_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)}\right\}. \quad (13.8)$$

Les deux derniers termes sont bornés, d'après les inégalités (13.4) et (13.5). Pour le premier terme, nous utilisons (13.6), ainsi nous obtenons la majoration :

$$\|\Delta u_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)} + \|Dv_{n_j}Du_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)}) \quad (13.9)$$

où $C := \max(1, \|g'\|_\infty)/g(\lambda)$.

Il reste à prouver que le terme $\|Dv_{n_j}Du_{n_j}\|_{L^{1+\epsilon}(\Omega)}$ est borné. Pour celà remarquons que, par symétrie, l'équation :

$$\tilde{f} = \text{div}(g(\tilde{v}_{n_j})D\tilde{u}_{n_j})$$

reste vraie dans Ω_1 où les fonctions \tilde{f} et \tilde{v}_{n_j} sont définies de la même façon que \tilde{u}_{n_j} , puisque u_{n_j} satisfait la condition de Neumann sur le bord de Ω . D'après Meyers [Mey63] th.2, il existe $p > 2$ tel

¹ $\Omega_1 = \Omega \oplus (-1, +1) \times (-1, +1)$, où \oplus est la somme de Minkowski.

que pour tout $x \in \Omega_1$ et pour tout $R > 0$ verifiant $B(x, R) \subset B(x, 2R) \subset \Omega_1$, nous avons :

$$\|D\tilde{u}_{n_j}\|_{L^p(B(x,R))} \leq C\{R^{2(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1}\|\tilde{u}_{n_j}\|_{L^2(B(x,2R))} + R^{2(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})+1}\|\tilde{f}\|_{L^2(B(x,2R))}\}.$$

Choisissons $x \in \Omega$ et R tels que² $\Omega \subset B(x, R)$. Nous en déduisons que $(|Du_{n_j}|)_j$ est borné dans $L^p(\Omega)$.

Revenons maintenant à (13.9) et choisissons $\epsilon = (p-2)/(p+2)$, ce qui nous permet de conclure que la suite $(Dv_{n_j}Du_{n_j})_j$ est bornée dans $L^{1+\epsilon}(\Omega)$ et par conséquent $(D^2u_{n_j})$ est aussi borné dans $L^{1+\epsilon}(\Omega)$. Alors, quitte à extraire une sous suite, nous obtenons :

$$D^2u_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} D^2u \quad \text{faiblement dans } L^{1+\epsilon}(\Omega) \quad (13.10)$$

Passage à la limite

Soit $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ une fonction test. Puisque $Du_{n_j} \rightarrow Du$ presque partout dans Ω , le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous assure la convergence :

$$\frac{\phi}{1+|Du_{n_j}|} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{\phi}{1+|Du|} \quad \text{dans } L^q(\Omega) \text{ pour tout } q \in [1, \infty). \quad (13.11)$$

Choisissons q de telle manière que $1/(1+\epsilon) + 1/q = 1$ et combinons la convergence forte (13.11) avec la convergence faible (13.10), alors pour tout $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \frac{D^2u_{n_j}}{1+|Du_{n_j}|} \phi dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \frac{D^2u}{1+|Du|} \phi dx.$$

Ceci prouve que $(D^2u_{n_j}/(1+|Du_{n_j}|))_j$ converge faiblement vers $D^2u/(1+|Du|)$ dans $L^2(\Omega)$ et par application du lemme de Fatou, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D^2u}{1+|Du|} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left\| \frac{D^2u_{n_j}}{1+|Du_{n_j}|} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_{n_j}\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

le lemme est ainsi prouvé. \square

²Par exemple $x = (1/2, 1/2)$ et $R = \sqrt{2}/2$, dans ce cas on a $\Omega \subset B(x, R) \subset B(x, 2R) \subset \Omega_1$

Bibliographie

- [ADK97] G. Aubert, G. Deriche, and P. Kornprobst. Image coupling, restoration and enhancement via pde's. In *Proceedings of the International Conference on image Processing*, pages 458–461, Santa-Barbara, California, Octobre 1997.
- [AE97] L. Alvarez and J. Esclarin. Image quantization using reaction-diffusion equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 57 :153–175, 1997.
- [AFP95] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. Higher regularity of solutions of free discontinuity problems. Technical report, CV-GMT-96040107, Math. Dept. Scuola normale superior, Piazza dei Cavalieri, 56126 Pisa, Italy, 1995.
- [AGLM93] L. Alvares, F. Guichard, P. L. Lions, and J. M. Morel. Axioms and fundamental equations in image processing. *SIAM J. APPL. MATH.*, 123 :199–257, 1993.
- [ALM92] L. Alvarez, P. L. Lions, and J. M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion ii. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 :845–866, 1992.
- [Alv] L. Alvarez. Images and pde's. In *Proceedings of the 12th International Conference on Analysis and Optimization of Systems, Images, Wavelets ans PDEs, éd par M.O. Berger, R. Deriche, I. Herlin, J. Jaffre et J.M. Morel*. Springer.
- [AM94a] L. Alvares and L. Mazorra. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :590–605, 1994.
- [AM94b] L. Alvarez and J.M. Morel. Formalization and computational aspects of image analysis. *Acta Numerica*, pages 1–59, 1994.
- [AT92] L. Ambrosio and V. Tortorelli. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ -convergence. *Boll. Un. Math. Ital.*, 7 :105–123, 1992.
- [Bar94] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ben94] B. Benhamouda. Parameter adaptation for nonlinear diffusion in image processing. Master's thesis, Dept. of Mathematics, University of Kaiserslautern, P.O. Box 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany, 1994.

- [BJ91] E. N. Barron and R. Jensen. Optimal control and semicontinuous viscosity solutions. *Proc. Ame. Math. Soc.*, 113 :49–79, 1991.
- [Bre87] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Application*. Masson, Paris, 1987.
- [Bro12] E. L. J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, 71 :97–115, 1912.
- [Bro92] F. Brouaye. Echantillonnage et ondelettes : la méthode du zéro-padding revisitée. *Traitement du signal*, 2(9) :193–200, 1992.
- [BZ87] A. Black and A. Zisserman. *Visual reconstruction*. MIT Press, 1987.
- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 8 :679–698, 1986.
- [Cao99] F. Cao. *Approximation of geometric parabolic equations by invariant schemes. An axiomatic approach of image interpolation. Applications to image processing*. PhD thesis, CMLA ENS Cachan, 1999.
- [CCCD93] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numer. Math.*, 66 :1–31, 1993.
- [CD96] A. Chambolle and F. Doveri. Minimizing movements of the mumford and shah energy. *SISSA, Via Beirut 2-4, 34013 Trieste, Italy*, 1996.
- [CEA98] G. H. Cottet and M. El-Ayyadi. A volterra type model for image processing. *IEEE Transactions on image processing*, 7(3), March 1998.
- [CEG⁺93] T. Cohignac, F. Eve, F. Guichard, C. Lopez, and J.M. Morel. Affine morphological scale-space : Numerical analysis of its fundamental equation. Technical report, CEREMADE, 1993.
- [CG93] G. H. Cottet and L. Germain. Image processing through reaction combined with non linear diffusion. *Math. comp.*, 61 :659–673, 1993.
- [Cia82] P. Ciarlet. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Masson, Paris, 1982.
- [CIL87] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. Uniqueness of viscosity solutions revisited. *J. Math. Soc. Japan*, 39(4) :581–596, 1987.
- [CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Soc.*, 27 :1–67, 1992.
- [CL81] M. G. Crandall and P. L. Lions. Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de hamilton-jacobi du premier ordre. *C. R. A. S. Paris*, 292 :183–186, 1981.

- [CL97] A. Chambolle and P. L. Lions. Image recovery via total variation minimisation and related problems. *Numer.Math.*, 76 :167–188, 1997.
- [CLMC92] F. Catté, P. L. Lions, J. M. Morel, and T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 :182–193, 1992.
- [CMS98] V. Caselles, J.M. Morel, and C. Sbert. An axiomatique approach to image interpolation. *IEEE, special Issue on Differential Equations*, 1998.
- [CT96] J.R. Casas and L. Torres. Strong edge features for image coding. In *In R. W. Schafer P. Maragos and M.A. Butt, editors, Mathematical Morphomogy and its Applications to Image and Signal processing*, pages 443–450, Atlanta, GA, May 1996. Kluwer Academic Publishers.
- [Dav96] G. David. c^1 -arcs for minimisers of the mumford-shah fonctional. *SIAM J. Appl. Math.*, 56 :783–888, 1996.
- [Dod97] N. A. Dodgson. Quadratic interpolation for image resampling. *IEEE Transactions on image processing*, 6(9) :1322–1326, Sept. 1997.
- [ES02] S. Esedoglu and J Shen. Digital inpainting based on the mumford-shah-euler image model. *Preprint ; Institute of Mathematics and its Applications (IMA), University of Minnesota, Mineapolis, MN 55455, USA*, 2002.
- [Fri64] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. PRINTICE HALL, 1964.
- [GG84] S. Geman and D. Geman. Stochastic retaxation, gibbs distribution, and the bayesian restoration of images. *IEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 6 :721–741, 1984.
- [Gg92] Y. Giga and S. goto. Motion of hypersurfaces ans geometric equations. *J. Math. Soc. Japan*, 44(1), 1992.
- [GM] F. Guichard and J. M. Morel. Image iterative smoothing and p.d.e.'s. livre en préparation ; a apparaître dans IS. DUFF, G.A. WATSON(EDS). THE STATE OF THE ART IN NUMERICAL ANALYSIS, OXFORD UNIVERSITY PRESS.
- [GM98] F. Guichard and F. Malgouyres. Total variation based interpolation. *EUSIPCO, III*, pages 1741–1744, 1998.
- [GT77] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1977.
- [Gui94] Frédéric Guichard. *Axiomatisation des analyses multi-échelles d'images et de films*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1994.
- [HB89] B.K.P. Horn and M.J. Brooks. *Shape from Shading*. The MIT Press, 1989.

- [Hei59] A. Heinz. An elementary analytic of the degree of mappings in n-dimension space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8(2) :231–247, 1959.
- [Iij62] T. Iijima. Observation theory of two-dimensional visual patterns. Technical report, Papier of Thechnical Group on Automata and Automatic control, IECE, Japan, Oct. 1962. (En japonais).
- [Ish86] H. Ishii. Existence and uniqueness of solutions of hamilton-jacobi equations. *Funkcial. Ekvak.*, 29 :167–188, 1986.
- [Ish87] H. Ishii. Perron’s method for hamilton-jacobi equations. *Duke Math. J.*, 55 :369–384, 1987.
- [Ish89] H. Ishii. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully non linear second-order elliptic pde’s. *Comm. Pure and appl. Math.*, 42 :14–45, 1989.
- [Jen88] R. Jensen. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second-order partial differential equations. *Archive Rat. MECH. ANAL.*, 101 :1–27, 1988.
- [Jen93] R. Jensen. Unequeness of lipschitz extension : minimizing the sup norm of the gradient. *Archive Rat. MECH. ANAL.*, 123 :51–74, 1993.
- [JLS88] R. Jensen, P.L. Lions, and P.E. Souganidis. A uniqueness result for viscosity solutions of second-order fully nonlinear partial differential equations. In *A.M.S. 102*, pages 975–978, 1988.
- [Kan96] G. Kanizsa. *Grammaire du voir (Traduit en français par Antonin Chambolle)*. Diderot, Paris, 1996.
- [Kav93] O. Kavian. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [KDA97] P. Kornprobst, R. Deriche, and G. Aubert. Image coupling, restoration and enhancement via pde’s. In *Proceeding of the International Conference on image processing*, pages 458–461, Santa-Barbara, California, Oct. 1997.
- [Key81] R. G. Keys. Cubic convolution interpolation for digital image processing. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech ans Signal Processing*, 29 :1153–1160, 1981.
- [Kic97] S. Kichenassamy. The perona-malik paradox. *SIAM J. Appl. Math.*, 57 :1328–1342, 1997.
- [KK98] B. Kawohl and N. Kutev. Maximum and comparison principle for one-dimentional anisotropic diffusion. *Math. Ann.*, 311 :107–123, 1998.
- [Koe84] J. J. Koenderink. The structure of images. *Biol. Cybern.*, 50 :363–370, 1984.
- [Kor98] P. Kornprobst. *Contribution à la restauration d’images et à l’analyse des séquences : Approches variationnelles et Solutions de Viscosité*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Faculté des sciences, Laboratoire de Mathématiques J. A. Dieudonné, 1998.

- [Kry96] N. V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*, volume 12. American Mathematical Society, 1996.
- [LC94] Y. Li and T. Chen. Nonlinear diffusion with multiple edginess thresholds. *Pattern Recognition*, 27 :1029–1037, 1994.
- [LDAR97] L. Lucido, R. Deriche, L. Alvarez, and V. Rigaud. Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images. Technical Report 3192, INRIA, Juin 1997.
- [Lio82] P. L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Pitman, 1982.
- [LM92] C. Lopez and J. M. Morel. Axiomatisation of shape analysis and application to texture hyperdiscrimination. In *Proceedings of the Trento conference on surface Tension and Movement by Mean Curvature.*, De Gruyter Publishers. Berlin, 1992.
- [LSU68] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralt'seva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Providence, RI, 1968.
- [Mae88] E. Maeland. On the comparison of interpolation methods. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 7(3) :213–217, 1988.
- [Mal99] F. Malgouyres. *L'augmentation de résolution d'image échantillonnées*. PhD thesis, CMLA ENS Cachan, 1999.
- [Mey63] N. G. Meyers. An l^p -estimate for gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Annali scuola normale superior di pisa*, pages 189–206, 1963.
- [MH80] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. In *Roy. Soc*, volume 207 of *B*, pages 187–217, London, 1980.
- [MJS92] G. Dal Maso, J.M. Morel, and Sergio Solimini. A variational method in image segmentation : Existence and approximation results. *Acta Mathematica*, 186 :89–151, 1992.
- [MP87] J. Malik and P. Perona. A scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Comp. Soc. Workshop on Comp. Vision, Miami*, pages 16–22, 1987.
- [MS85] D. Mumford and J. Shah. Boundary detection by minimising functionals. *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco*, 1985.
- [MS94] J.M. Morel and S. Solimini. *Variational methods in image segmentation*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [Nor90] N. Nordström. Biased anisotropic diffusion - a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image Vision Comput.*, 8 :318–327, 1990.

- [NS92] M. Nitzberg and T. Shiota. Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 14 :826–833, 1992.
- [OR90] S. Osher and L. I. Rudin. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(4) :919–940, 1990.
- [OS88] S. Osher and J. A. Sethian. Front propagation with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys*, 79 :12–49, 1988.
- [PS83] S. K. Park and R. A. Schowengerdt. Image reconstruction by parametric cubic convolution. *Computer vision, Graphics, and Image Processing*, 2(1) :258–272, Sept. 1983.
- [PSM94] P. Perona, T. Shiota, and J. Malik. Anisotropic diffusion. *B.M. ter Haar Romeny (Ed.), Geometry-driven diffusion in computer vision, Kluwer, Dordrecht*, pages 72–92, 1994.
- [Rha55] G. De Rham. *Variétés différentiables*. Hermann et Cie, Paris, 1955.
- [RM96] T. Richardson and S. Mitter. Approximation, computation, and distortion in the variational formulation. *M.M. ter Haar Romeny(Ed.), Geometry-driven diffusion in computer vision, Kluwer, Dordrecht*, pages 169–190, 1996.
- [ROF92] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physical D*, 60 :259–268, 1992.
- [RT92] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3) :867–884, 1992.
- [SC92] J. Shen and S. Castan. An optimal linear operator for step edge detection. *Graphical Models and Image Processing*, 54 :112–133, 1992.
- [SS92] R. R. Shultz and R. L. Stevenson. Improved definition image expansion. *IEEE International Conference on acoustic, Speech, and Signal Processing*, III :173–176, 1992.
- [SS94] R. R. Shultz and R. L. Stevenson. A bayesian approach to image expansion for improved definition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 3(3) :233–242, 1994.
- [ST93] G. Sapiro and A. Tannenbaum. Affine invariant scale-space. *International Journal of Computer Vision*, 11(1) :25–44, août 1993.
- [TAT96] F. Torkamani-Azar and K. E. Tait. Image recovery using anisotropic diffusion equation. *IEEE Trans. ImageProc.*, 5 :1573–1578, 1996.
- [UAE93a] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-spline signal processing : Part i- theory. *IEEE Transaction on signal processing*, 1993.

- [UAE93b] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-spline signal processing : Part ii- efficient design and applications. *IEEE Transaction on signal processing*, 41(2) :834–848, Febr. 1993.
- [UAE95] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. Enlargement or reduction of digital images with minimum loss information. *IEEE Transaction on Image Processing*, 4(3) :247–258, 1995.
- [Wei94] J. Weickert. Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor. Technical Report 110, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, P.O. Box 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany, 1994.
- [Wei98] J. Weickert. *Anisotropic diffusion on image processing*. European Consortium for mathematics in industry, 1998.
- [WII97] J. Weickert, S. Ishikawa, and A. Imiya. Scale-space has been discovered in japan. DIKU 18, Dept. of Computer science, University of Copenhagen, Universitetsparken1, 2100 Copenhagen, Denmark, 1997.
- [Wit83] A. P. Witkin. Scale-space filtering. In *IJCAI*, volume 2, pages 1019–1022, Karlsruhe, Aug. 1983.
- [WP93] R. T. Whitaker and S. M. Pizer. A multi-scale approach to nonuniform diffusion. *CVGIP : Image Understanding*, 57 :99–110, 1993.
- [Yar97] L. P. Yaroslavsky. Efficient algorithm for discrete sinc interpolation. *Applied optics*, 2(36) :460–463, 1997.
- [YXTK96] Y. You, W. Xu, A. Tannenbaum, and M. Kaveh. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing. *IEEE Transactions on Image processing*, 5(11) :1539–1553, 1996.

Équations aux dérivées partielles appliquées à la restauration et à l'agrandissement des images.

Résumé : Ce travail est rédigé en deux parties, où sont abordés deux problèmes fondamentaux de la vision : la restauration d'image dans la première partie, puis dans la deuxième partie l'agrandissement d' image.

L'introduction de la première partie est une présentation des méthodes mathématiques de restauration d'image. Dans le chapitre suivant, nous présentons les différents travaux théoriques établis sur le modèle de Malik et Perona et son lien avec la doctrine de détection de bord. Ceci nous conduit au choix du modèle que nous étudions dans la suite. Pour ce modèle nous prouvons en petits temps et en toutes dimensions, existence et unicité d'une solution classique. Ensuite, en dimensions un et deux, nous construisons un schéma numérique dont nous prouvons la convergence vers une solution faible. Nous clôturons cette partie par illustrer quelques exemples d'application du modèle.

Dans la deuxième partie nous abordons le problème de l'agrandissement des images. Après avoir exposé les méthodes qui existent dans la littérature, nous proposons une approche basée sur l'analyse géométrique de l'image. Nous utilisons ensuite la théorie des solutions de viscosité pour prouver que le modèle proposé est bien posé. Enfin nous discutons de la résolution numérique du modèle et nous présentons quelques exemples d'applications.

Partial differential equations applied to image restoration and image zooming.

Abstract : This thesis consists in two parts in which we study two problems of computer vision : image restoration in the first part and image zooming in the second part.

In the introduction of our first part we present the main mathematical models that have been proposed for the restoration (denoising and edge enhancement) of digital images. Then we discuss edge-detection theory and the Malik and Perona model. We introduce various variants that have been proposed to stabilize the (ill-posed) Malik and Perona equation and in particular the model which we will study in the following chapters. For this model in all dimensions, we prove in small time existence and uniqueness of a classical solution. We then construct (in one and two dimensions) a numerical approximation and prove its convergence to a weak solution. As conclusion of this part, we present some experiments.

We begin the second part by presenting existing image zooming methods. Using geometrical arguments, we propose a new approach based on a partial differential equation. Next we prove the well posedness of the model using the theory of the viscosity solutions. We then discuss the discretisation of the model, and finally present some experiments.